

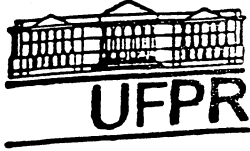
MARLOS DE OLIVEIRA RIBAS

**SPINORES SOB A AÇÃO DA GRAVIDADE E TACHYONS
NO ESPAÇO-TEMPO QUADRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da UFPR como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, sob a orientação do Prof. Dr. Jair Lucinda.

CURITIBA

1999



Ministério da Educação e do Desporto
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Curso de Pós-Graduação em Física


ATA DA DISSERTAÇÃO DE TESE DE MESTRADO
MARLOS DE OLIVEIRA RIBAS

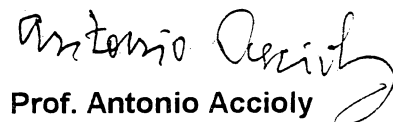
TÍTULO DA TESE: "SPINORES SOB A AÇÃO DA GRAVIDADE E TACHYONS NO
ESPAÇO-TEMPO QUADRIDIMENSIONAL"

Em sessão pública de Dissertação de Tese, iniciada às dez horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 04 de março de 1999.

Banca Examinadora:


Prof. Jair Lucinda
(Orientador/Presidente)


Prof. Antonio Accioly
(IFT)


Prof. Felice Pisano
(DF/UFPR)

*Para minha mãe,
Aglaé Oliveira Ribas*

Agradecimentos

Sou grato ao meu orientador, Prof. Dr. Jair Lucinda, por auxiliar-me na elaboração desse trabalho transmitindo-me valiosos conhecimentos, sem os quais essa tese não seria possível.

Às agências de fomento CAPES e CNPq.

À coordenação do curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Paraná pela excelente infra-estrutura.

Aos amigos, pela excelente amizade e o bom convívio.

Índice

1. Introdução.....	1
2. A Abordagem de “Field-Boost” para a Gravitação	
2.1) O Formalismo de “Field Boost”	5
2.2) Transformações Gerais de Velocidades.....	10
2.3) Dinâmica de uma Partícula sob a Ação da Gravidade.....	12
3. Equações Relativísticas com Interação Gravitacional	
3.1) Introdução.....	18
3.2) Partícula de Spin-0 sob a Ação da Gravidade.....	19
3.3) Partícula de Spin- $\frac{1}{2}$ sob a Ação da Gravidade.....	22
3.4) Transformações de Spinors sob a Ação da Gravidade.....	25
3.5) Obtenção da Equação de Dirac.....	26
4. Referenciais Super-Luminais	
4.1) Introdução.....	37
4.2) Táquions em 3+1 Dimensões.....	39
4.3) Transformações de Velocidades.....	40
4.4) A Invariância do Intervalo Espaço-Temporal.....	42
4.5) Transições entre Brádions e Táquions.....	44

5. Soluções da Equação de Dirac

5.1) Introdução.....	49
5.2) Obtenção dos Spinors Modificados.....	50
5.3) Equação de Dirac no Espaço dos Momenta.....	52

6. Conclusões.....	56
---------------------------	-----------

7. Apêndice A.....	58
---------------------------	-----------

8. Apêndice B.....	65
---------------------------	-----------

9. Referências Bibliográficas.....	69
---	-----------

Resumo

Neste trabalho, analisamos a formulação da gravidade dentro do contexto de “Field-Boost” e suas conseqüências dinâmicas. Obtemos as equações de Klein-Gordon e de Dirac, modificadas pela ação do campo gravitacional. Através das propriedades de transformação de spinores sob o grupo de Lorentz estendido deduzimos a equação de Dirac obtida anteriormente por outros processos. Estudamos os referenciais super-luminais e sua correspondência, através das transformações de “Field-Boost”, com referenciais sub-luminais, como conseqüência dessa análise chegamos a conclusão de que táquions são produzidos no interior de buracos negros. Finalmente obtemos algumas soluções simples da equação de Dirac.

Abstract

In this dissertation, we analyzed the gravity formulation in the context of “Field-Boost” and its dynamical aftermath. We obtained the Klein-Gordon and Dirac modified equations by the action of the gravitational field. From the properties of spinors transformation of the Lorentz extended group we derived the Dirac equation obtained previously by other processes. We studied the super-luminal frames and its correspondence, through the “Field-Boost” transformations, with sub-luminal frames, as a consequence of this analysis we found out that tachyons are produced inside the black holes. Finally, we obtained some simple solutions of the Dirac equations.

Capítulo 1

Introdução

Em um experimento com um interferômetro de neutrons [1] mostrou-se que as leis da mecânica quântica (MQ) também se aplicam a sistemas físicos que estão sob a ação da interação gravitacional. A questão que se coloca é a de saber como a gravidade afeta certos sistemas quânticos. Há vários experimentos em andamento com esse propósito que estão sendo financiados pela NASA [2]. Alguns desses experimentos se propõem a determinar o papel desempenhado pela interação gravitacional em condensados de Bose-Einstein de gases atômicos e gases de Férmions degenerados.

Do exposto acima fica evidente a necessidade de descrever a mecânica quântica e gravidade relativística de uma maneira consistente para se ter uma interpretação adequada dos resultados dos experimentos mencionados acima. Todavia a não existência de soluções de N-corpos na relatividade geral (RG) traz algumas dificuldades (veja detalhes no trabalho de Yilmaz [3]). Embora em uma interpretação adicional, Einstein argumentou que a energia gravitacional não é localizável para evitar a objeção de Schroedinger [4]. Essa questão tem sua longa e difícil história ainda não resolvida (veja detalhes na referência [5]). Essas são algumas dificuldades encontradas quando se tenta obter uma teoria de campos para a gravitação. Embora existam discussões sobre a dualidade onda-partícula no contexto da RG

(vide, por exemplo, [6]) a observação de Penrose [7] de que o princípio de equivalência (PE) leva a certas dificuldades conceituais quando se tenta unificar a MQ com a gravitação.

Além das dificuldades mencionadas acima, é bem provável que os resultados insatisfatórios nas tentativas de conectar a RG com MQ sejam também uma consequência do fato de que a MQ esta bem fundamentada operacionalmente de acordo com a relatividade especial (RE). Apesar das aspirações de encontrar um código de translação, tal como existe na RE, conectando o universo visto por um observador K_1 ao universo visto por qualquer outro observador K_2 , este não existe na abordagem de espaço-tempo curvo para a gravidade [8].

Tendo em vista as dificuldades mencionadas acima e a necessidade de se tratar a interação gravitacional dentro do contexto da MQ estamos continuando o desenvolvimento de um formalismo onde velocidades relativas e diferenças de potencial gravitacional entre diferentes observadores desempenham papéis similares na unificação do espaço-tempo [9,24]. Com esse objetivo em mente, procuramos descrever o comportamento de spinores sob a ação da gravidade. Nosso trabalho esta organizado da seguinte maneira descrita a seguir.

No Capítulo 2 fazemos uma breve revisão do formalismo de “Field-Boost” (FB) onde obtemos a matriz FB a qual inclui o efeito gravitacional nas transformações de coordenadas de um ponto evento entre dois observadores distintos. Com essas transformações verificamos a invariância do intervalo espaço-temporal entre dois pontos eventos e obtemos as transformações gerais para as componentes de velocidade de uma dada partícula. Considerando dois pontos eventos infinitesimalmente próximos obtemos um diferencial de primeira ordem que é um invariante espaço-temporal. Com esse invariante, seguindo um procedimento similar ao usado no contexto da RE [10], obtemos a lagrangiana

de uma partícula sob a ação da gravidade e com ela a energia total e o momentum da partícula. Com isso verificamos que a forma quadrática $p^\mu p_\mu$ continua sendo um invariante para uma diferença de potencial constante entre observadores.

No Capítulo 3 obtemos as equações relativísticas para partículas de spin-0 e partículas de spin- $\frac{1}{2}$ sob a ação da gravidade. Nesses casos seguimos o procedimento usual da teoria de campos onde a energia total da partícula e o seu momentum são transformados em operadores. Em seguida, passamos para o verdadeiro objetivo desse trabalho que é a de obter a equação de Dirac a partir da conexão entre o grupo $SL(2,C)$ e o grupo de Lorentz que inclui a interação gravitacional, o qual foi desenvolvido por Lucinda [9]. Para atingir o nosso objetivo, primeiro analisamos as transformações de spinores sob o grupo de Lorentz estendido. A partir das propriedades dessas transformações seguimos procedimentos bem similares ao que é usado no contexto da RE para obter a equação de Dirac [11]. A partir dessa equação obtemos explicitamente o efeito da gravitação sobre os spinores no espaço dos momenta.

No Capítulo 4, estendemos o formalismo de FB de tal maneira a incluir partículas que se movem com velocidade superior a da luz (táquions) em um espaço-tempo quadridimensional. Primeiro obtemos um conjunto de transformações estendidas de tal maneira a relacionar as coordenadas de um ponto evento descritas por um referencial superluminal com as coordenadas do mesmo ponto evento descritas a partir de um referencial sub-luminal usual. Em seguida, mostraremos que com esse conjunto de transformações as coordenadas permanecem reais, e a invariância do intervalo espaço-tempo é preservada. Em seguida escrevemos a energia total e o momentum para partículas que se movem com velocidade superior a da luz.

Nesta abordagem as partículas que estão na parte interna do horizonte de eventos de um buraco negro se comportam como táquions. Analisaremos a transição brádion, partícula que se move com $v < c$, táquions que ocorre quando uma partícula que se move radialmente ao centro de gravitação e ultrapassa o horizonte de eventos.

No Capítulo 5 analisaremos as soluções da equação de Dirac modificada, verificamos que em particular na borda do buraco negro, a equação de Dirac nos fornece naturalmente os spinores de Weyl, e finalmente obtemos os spinores modificados como uma solução no espaço dos momenta.

Capítulo 2

A Abordagem de “Field-Boost” para a Gravitação

2.1) O Formalismo de “Field Boost”.

Os efeitos relativísticos gravitacionais clássicos, ou seja, o movimento do periélio do planeta Mercúrio em relação a um sistema de eixos com a origem centrada no Sol, a deflexão da luz pelo campo gravitacional do Sol e o “shift” gravitacional de frequência, já foram calculados através do formalismo de FB [24, 25, 26]. Todos estão operacionalmente e numericamente em concordância com as experiências. Neste capítulo, o nosso objetivo é o de apresentar um breve resumo da formulação de FB que será necessária para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Faremos uma extensão do grupo de Lorentz com o objetivo de incluir efeitos devido à diferença de potencial gravitacional entre dois referenciais inerciais. A formulação que inclui efeitos gravitacionais no “Boost” de Lorentz foi chamada de “Field-Boost” [9], por ser uma função de ponto e de velocidade relativa entre dois observadores, neste contexto

obtemos um conjunto de transformações como funções de ponto, que levam em conta além da velocidade entre observadores, a diferença de potencial gravitacional entre os mesmos.

As transformações relacionam as coordenadas de um ponto-evento no espaço-tempo (X^0, X^1, X^2, X^3) observadas a partir do referencial inercial S , indicado na figura 2.1, com as coordenadas do mesmo ponto-evento (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3) observadas a partir do referencial inercial I .

Para ter uma formulação bem simples vamos considerar uma fonte gravitacional esfericamente simétrica com massa M e raio R . O baricentro desta fonte coincide com a origem do sistema de referência S . O referencial inercial I está a uma distância

$|\vec{d}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \geq R$ como esta indicado na figura 2.1.

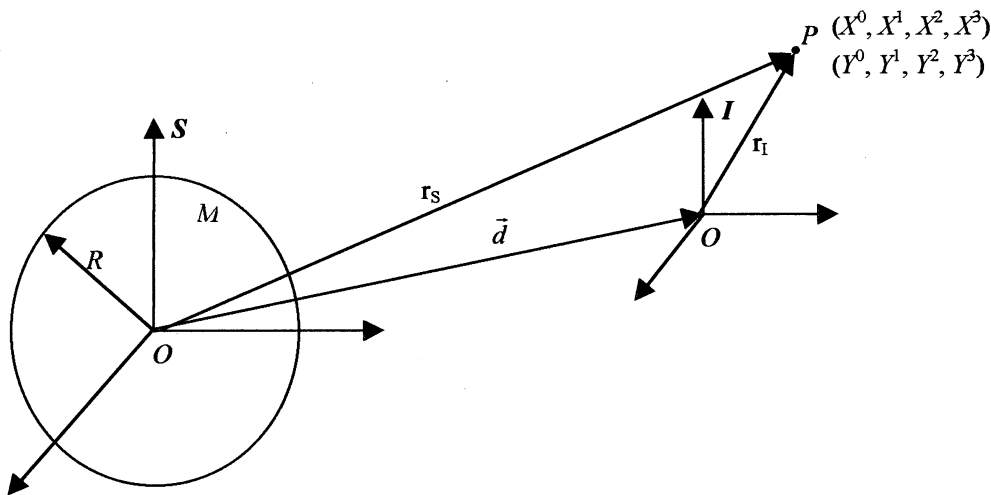


Figura 2.1 – Conexão entre os referenciais S e I .

Se o referencial I está se movendo com uma velocidade relativa v em relação a S , a conexão entre as coordenadas (Y^0, Y^1, Y^2, Y^3) , do ponto evento P observadas a partir de I , com as coordenadas (X^0, X^1, X^2, X^3) , do mesmo ponto evento observadas a partir de S é dada por

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = F\left(\left|\vec{d}\right|, \nu^2\right) \begin{pmatrix} Y^0 \\ Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde $F\left(\left|\vec{d}\right|, \nu^2\right) = F(\alpha) = \exp(i\vec{k} \cdot \hat{n}\alpha)$ é a matriz de FB e $\vec{k} = \hat{e}_1 k_1 + \hat{e}_2 k_2 + \hat{e}_3 k_3$, onde k_1 , k_2 e k_3 são os geradores do grupo de Lorentz [vide apêndice A] e a relação entre o ângulo α a velocidade relativa ν e a diferença de potencial gravitacional entre os referenciais inerciais I e S é dada por

$$\alpha = \tanh^{-1}(\beta^2 + \delta^2 - \beta^2 \delta^2) \quad (2.2)$$

onde $\beta = \nu/c$ e $\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 2GM/dc^2$ com

$$\delta_1^2 = \frac{2GMx^2}{c^2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \delta_2^2 = \frac{2GM y^2}{c^2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \delta_3^2 = \frac{2GMz^2}{c^2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

sendo $d = \left|\vec{d}\right|$. O vetor unitário $\hat{\eta}$ que indica a direção do FB é dado por

$$\hat{\eta} = \hat{e}_1 \left[\frac{\beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} + \hat{e}_2 \left[\frac{\beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} + \hat{e}_3 \left[\frac{\beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

onde $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$ sendo

$$\zeta_1^2 = \beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2, \zeta_2^2 = \beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2, \zeta_3^2 = \beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2 \quad (2.5)$$

Podemos escrever a matriz de FB, tal como ocorre com o "Boost" puro de Lorentz, em três componentes

$$F_1(\alpha_1) = \exp ik_1 \alpha_1, F_2(\alpha_2) = \exp ik_2 \alpha_2, F_3(\alpha_3) = \exp ik_3 \alpha_3, \quad (2.6)$$

ao longo das direções 1, 2, 3 respectivamente.

Observe que no limite de diferença de potencial gravitacional nula entre dois referenciais, ou na ausência de campo gravitacional, o vetor unitário $\hat{\eta}$ toma a forma do vetor unitário que indica a direção geral do "Boost" puro de Lorentz [12], ou seja, $\hat{\eta} = \hat{e}_1 \frac{\beta_1}{\beta} + \hat{e}_2 \frac{\beta_2}{\beta} + \hat{e}_3 \frac{\beta_3}{\beta}$. A partir da equação (2.1) obtemos uma extensão das transformações de Lorentz que incluem a diferença de potencial gravitacional entre S e I . A partir da definição da equação (2.1), obtemos

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^\xi & \zeta_1 \gamma^\xi & \zeta_2 \gamma^\xi & \zeta_3 \gamma^\xi \\ \zeta_1 \gamma^\xi & 1 + \zeta_1^2 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & \zeta_1 \zeta_2 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & \zeta_1 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 \\ \zeta_2 \gamma^\xi & \zeta_1 \zeta_2 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & 1 + \zeta_2^2 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & \zeta_2 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 \\ \zeta_3 \gamma^\xi & \zeta_1 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & \zeta_2 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 & 1 + \zeta_3^2 (\gamma^\xi - 1) / \zeta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^0 \\ Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ e $\xi = (1 - \delta)^{-1/2}$. Da expressão acima obtemos as equações de transformação no formalismo de FB ao longo de uma direção arbitrária definida pelo vetor unitário dado na eq. (2.4):

$$\begin{aligned} X^0 &= D_{00}Y^0 + D_{01}Y^1 + D_{02}Y^2 + D_{03}Y^3; \\ X^1 &= D_{10}Y^0 + D_{11}Y^1 + D_{12}Y^2 + D_{13}Y^3; \\ X^2 &= D_{20}Y^0 + D_{21}Y^1 + D_{22}Y^2 + D_{23}Y^3; \\ X^3 &= D_{30}Y^0 + D_{31}Y^1 + D_{32}Y^2 + D_{33}Y^3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os elementos da matriz de FB $D_{\mu\nu}$ (com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) são dados por

$$\begin{aligned} D_{00} &= \gamma\xi, \quad D_{01} = D_{10} = \zeta_1\gamma\xi, \quad D_{02} = D_{20} = \zeta_2\gamma\xi, \quad D_{03} = D_{30} = \zeta_3\gamma\xi, \\ D_{11} &= 1 + \frac{\zeta_1^2(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\zeta_1\zeta_2(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{13} = D_{31} = \frac{\zeta_1\zeta_3(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}, \\ D_{22} &= 1 + \frac{\zeta_2^2(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{23} = D_{32} = \frac{\zeta_2\zeta_3(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{33} = 1 + \frac{\zeta_3^2(\gamma\xi - 1)}{\zeta^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ao longo de um eixo particular X^1 , por exemplo, as transformações de FB se tornam

$$\begin{aligned} X^0 &= Y^0\gamma\xi + Y^1\zeta_1\gamma\xi; \quad X^1 = Y^0\zeta_1\gamma\xi + Y^1\gamma\xi; \\ X^2 &= Y^2; \quad X^3 = Y^3, \text{ onde } X^0 = ct_s \text{ e } Y^0 = ct_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ao contrário da abordagem geométrica da RG, onde o "princípio da equivalência" é o ponto de partida para a descrição da gravitação, no formalismo de FB além da velocidade relativa entre dois referenciais inerciais, também levamos em conta a diferença de potencial

gravitacional entre eles na unificação do espaço e do tempo. Fazemos isso, parametrizando as transformações em termos dos argumentos das funções hiperbólicas, $\cosh \alpha = \gamma \xi$ e $\sinh \alpha = \zeta \gamma \xi$ com $\alpha = \tanh^{-1} \zeta = \tanh^{-1} \left(v^2/c^2 + 2GM/rc^2 - 2v^2GM/rc^4 \right)^{1/2}$ e $r \geq R$, onde R é o raio de uma fonte de gravitação esféricamente simétrica de massa M .

Podemos verificar que as transformações dadas na eq. (2.8) preservam a invariância do intervalo espaço-tempo entre dois eventos. Considere dois pontos-eventos no espaço-tempo P_1 e P_2 . Em relação a S as coordenadas desses pontos são $(X_1^0, X_1^1, X_1^2, X_1^3)$ e $(X_2^0, X_2^1, X_2^2, X_2^3)$ respectivamente, em relação ao referencial I , as coordenadas espaço-tempo desses mesmos pontos-eventos são dadas por $(Y_1^0, Y_1^1, Y_1^2, Y_1^3)$ e $(Y_2^0, Y_2^1, Y_2^2, Y_2^3)$, respectivamente.

Usando as transformações gerais de FB dadas pela equação (2.7) verificamos que o quadrado do intervalo espaço-tempo entre esses dois pontos-eventos relacionados por $(\Delta S)_S^2 = (\Delta S)_I^2$, ou seja,

$$(X_1^0 - X_2^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (X_1^i - X_2^i)^2 = (Y_1^0 - Y_2^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (Y_1^i - Y_2^i)^2 \quad (2.11)$$

é invariante sob as transformações de FB, tal como ocorre na RE [10, 12, 13].

2.2) Transformações Gerais de Velocidades.

No contexto do formalismo de FB, as componentes (v_I^1, v_I^2, v_I^3) da velocidade \vec{v} de uma partícula material observada a partir do sistema de referência I , são relatadas às componentes (v_S^1, v_S^2, v_S^3) da velocidade da mesma partícula observada a partir do sistema de referência S pelo conjunto de equações (vide apêndice A)

$$\begin{aligned} v_S^1 &= \frac{D_{10}c + D_{11}v_I^1 + D_{12}v_I^2 + D_{13}v_I^3}{D_{00} + D_{01} \frac{v_I^1}{c} + D_{02} \frac{v_I^2}{c} + D_{03} \frac{v_I^3}{c}}, \\ v_S^2 &= \frac{D_{20}c + D_{21}v_I^1 + D_{22}v_I^2 + D_{23}v_I^3}{D_{00} + D_{01} \frac{v_I^1}{c} + D_{02} \frac{v_I^2}{c} + D_{03} \frac{v_I^3}{c}}, \\ v_S^3 &= \frac{D_{30}c + D_{31}v_I^1 + D_{32}v_I^2 + D_{33}v_I^3}{D_{00} + D_{01} \frac{v_I^1}{c} + D_{02} \frac{v_I^2}{c} + D_{03} \frac{v_I^3}{c}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde os coeficientes $D_{\mu\nu}$ são dados em (2.9). No caso particular para um FB ao longo do eixo X^1 , as transformações dadas por (2.12) se tornam

$$v_S^1 = \frac{dX^1}{dt_s} = \frac{v_I^1 + c\zeta_1}{1 + v_I^1 \zeta_1 / c}; \quad v_S^2 = \frac{dX^2}{dt_s} = \frac{v_I^2 / \gamma \xi}{1 + v_I^1 \zeta_1 / c}; \quad v_S^3 = \frac{dX^3}{dt_s} = \frac{v_I^3 / \gamma \xi}{1 + v_I^1 \zeta_1 / c}. \quad (2.13)$$

Equações similares podemos obter para FB ao longo dos eixos X^2 e X^3 , respectivamente.

No limite de diferença de potencial gravitacional nula entre os referenciais S e I , ou seja $\xi \rightarrow 1$ recuperamos as transformações usuais da relatividade restrita, onde a interação gravitacional é ignorada [13]

$$v_s^1 = \frac{v_I^1 + c\beta}{\left(1 + \frac{v_I^1 \beta_1}{c}\right)}, \quad v_s^2 = \frac{v_I^2 / \gamma}{\left(1 + \frac{v_I^1 \beta_1}{c}\right)}, \quad v_s^3 = \frac{v_I^3 / \gamma}{\left(1 + \frac{v_I^1 \beta_1}{c}\right)}. \quad (2.14)$$

Para o caso em que o referencial I está em repouso em relação ao referencial S , existindo apenas uma diferença de potencial gravitacional entre ambos $|\phi| = 2GM/d$, obtemos um conjunto de transformações onde as componentes das velocidades da partícula (v_I^1, v_I^2, v_I^3) e (v_s^1, v_s^2, v_s^3) são relacionadas por

$$v_s^1 = \frac{v_I^1 + c\delta_1}{\left(1 + \frac{v_I^1 \delta_1}{c}\right)}, \quad v_s^2 = \frac{v_I^2 / \xi}{\left(1 + \frac{v_I^1 \delta_1}{c}\right)}, \quad v_s^3 = \frac{v_I^3 / \xi}{\left(1 + \frac{v_I^1 \delta_1}{c}\right)}. \quad (2.15)$$

Em conclusão, os conjuntos de equações (2.14) e (2.15) mostram que o movimento relativo entre os referenciais inerciais S e I e a diferença de potencial gravitacional entre ambos desempenham papéis similares num tratamento unificado do espaço-tempo que inclui a interação gravitacional. No limite Newtoniano, ou seja, quando $c \rightarrow \infty$, nós recuperamos as transformações $v_s^1 = v_I^1 + V$, $v_s^2 = v_I^2$, $v_s^3 = v_I^3$, conhecidas como leis de adição de velocidades de Galileu [14].

2.3) Dinâmica de uma Partícula sob a Ação da Gravidade.

Quando consideramos dois pontos-eventos infinitesimalmente próximos, a equação (2.11) pode ser escrita sob a forma

$$(dS)^2 = c^2(dt_s)^2 - \sum_{i=1}^3 (dX^i)^2 = c^2(dt_1)^2 - \sum_{i=1}^3 (dY^i)^2 \quad (2.16)$$

onde $cdt_1 = dY_1^0$ e $cdt_s = dX_s^0$.

Devido à invariância do intervalo espaço-tempo, podemos considerar um ponto-evento na origem do referencial I , neste caso temos

$$dY_1^1 = dY_1^2 = dY_1^3 = 0 \quad (2.17)$$

Substituindo a relação acima em (2.16) obtemos a expressão

$$(dS)^2 = c^2(dt_s)^2 - (dX_s^1)^2 - (dX_s^2)^2 - (dX_s^3)^2 = c^2(dt_1)^2,$$

assim podemos escrever a equação (2.16) na forma

$$(dS)^2 = c^2(dt_s)^2 \left[1 - \frac{(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2}{c^2(dt_s)^2} \right] = c^2(dt_1)^2, \quad (2.18)$$

Levando em conta que $v_1^1 = v_1^2 = v_1^3 = 0$ nas transformações para as componentes da velocidade (2.12) obtemos

$$(dS)^2 = c^2 (dt_1)^2 = c^2 (dt_s)^2 \left(1 - \frac{D_{10}^2 + D_{20}^2 + D_{30}^2}{D_{00}^2} \right). \quad (2.19)$$

Considerando as relações dadas em (2.9), temos

$$1 - \frac{D_{10}^2 + D_{20}^2 + D_{30}^2}{D_{00}^2} = 1 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) = 1 - \delta^2 - \beta^2 + \beta^2 \delta^2 = \gamma^{-2} \xi^{-2} \quad (2.20)$$

Finalmente obtemos a expressão do diferencial de 1ª ordem que é um invariante sob as transformações de FB,

$$(dS)^2 = c^2 (dt_s)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = c^2 (dt_1)^2 \quad (2.21)$$

onde $r_g = 2GM/c^2$. No limite de $r_g/r \rightarrow 0$, recuperamos o invariante espaço-tempo usual da relatividade especial.

Como dS é o único diferencial de primeira ordem que é um invariante, um procedimento análogo ao usado no contexto da relatividade especial [10] nos dá a ação para uma partícula interagindo com um campo gravitacional esfericamente simétrico,

$$A = -m_0 c \int_a^b dS = \int_{t_1}^{t_2} L dt_S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -m_0 c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \right\} dt_S, \quad (2.22)$$

onde a integração acima é feita ao longo da linha universo da partícula entre dois eventos particulares, que são os pontos universo da partícula nas posições inicial e final, nos instantes definidos de tempo t_1 e t_2 . O coeficiente L de dt_S é a lagrangiana da partícula que está se movendo sob a ação do campo gravitacional

$$L = -m_0 c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Assim, com a lagrangiana indicada na equação (2.21) obtemos os momenta definidos por

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial v_i},$$

$$p^i = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} v^i \quad (2.24)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Com as equações (2.23) e (2.24), a transformação de Legendre [14] nos leva à relação

$$p^0 = \frac{E}{c} = m_0 c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \quad (2.25)$$

onde E é a energia total relativística da partícula que se move sob a ação do campo gravitacional.

Usando a notação $\xi^{-1} = (1 - r_g/r)^{1/2}$ com $r_g = 2GM/c^2$ podemos escrever as equações (2.24) e (2.25) numa notação similar a usada no contexto da relatividade restrita [10],

$$p^i = m_0 \gamma \xi^{-1} v^i, \quad \frac{E}{c} = p^0 = m_0 c \gamma \xi^{-1}, \quad (2.26)$$

tal como ocorre no contexto da relatividade restrita, a relação energia-momentum é dada por

$$p^\mu p_\mu = p^0 p_0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 \gamma^2 \xi^{-2} - m_0^2 \gamma^2 \xi^{-2} (v^i)^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 \xi^{-2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^2 \xi^{-2},$$

ou seja

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \xi^{-2} \quad (2.27)$$

Da equação acima verificamos que a massa observada da partícula depende do fator ξ^{-1} ,

isto é

$$m_{\text{obs}}^2 = m_0^2 \xi^{-2} = \frac{p^\mu p_\mu}{c^2} \quad (2.28)$$

Em conclusão, o produto escalar $p^\mu p_\mu$ é um invariante para cada superfície equipotencial.

O fator ξ^{-1} , tal qual ocorre com o tri-vetor velocidade relativa \vec{v} , entre dois referenciais ele também é um invariante [15].

A primeira indicação de que a interação gravitacional pode afetar os efeitos quânticos é dada pelo efeito desta interação sobre o comprimento de onda de de Broglie de uma partícula sob a ação do campo gravitacional.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{E^2/c^2 - m_0^2 c^2 \left(1 - r_g/r\right)}} \quad (2.29)$$

onde a energia total E é conservada durante o movimento da partícula sob a ação do campo gravitacional. O fator $0 < (1 - r_g/r) < 1$ para uma distância $r \geq R$ do centro de gravidade. De acordo com (2.29) uma partícula tem seu comprimento de onda maior do que aquele que teria quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, quando a mesma se encontra no espaço livre de interação gravitacional. Em conclusão, embora a energia E permaneça constante durante a queda da partícula em direção à fonte gravitacional, o seu comprimento de onda de de Broglie λ aumenta a medida que r_g/r diminui. Consequentemente as leis da teoria quântica aplicadas para sistemas sob a ação da gravidade, como foi determinado por um experimento usando um interferômetro de neutrons [1], são modificadas pois os efeitos quânticos parecem ser afetados pela ação do campo gravitacional.

Capítulo 3

Equações Relativísticas com Interação Gravitacional.

3.1) Introdução

No formalismo da RE, as relações entre as medidas feitas por diferentes referenciais inerciais são dadas pelas transformações de Lorentz [13,15,16]. Neste contexto, a equação de Dirac pode ser obtida a partir da correspondência entre o grupo $SL(2,C)$ e o grupo de Lorentz com uma matriz de “Boost” modificada a qual inclui diferenças de potencial gravitacional entre observadores. Neste caso vamos considerar uma partícula sob a ação de um campo gravitacional esfericamente simétrico produzido por uma massa M de raio R .

3.2) Partícula de Spin-0 sob Ação da Gravidade.

A partir da relação energia-momentum obtida no capítulo anterior (eq. 2.26)

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \xi^{-2}$$

podemos obter a equação relativística de campo para partículas de spin-0, ou seja, a equação de Klein-Gordon modificada pela ação do campo gravitacional. Para isto, usamos a prescrição usual da teoria quântica [17], transformando a energia total E e o momentum p em operadores

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad e \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (3.1)$$

Substituindo respectivamente essas relações na eq. (2.27), obtemos a equação de Klein-Gordon modificada

$$\left[-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2 \right] \phi(\vec{r}, t) = m_0^2 c^2 \xi^{-2} \phi(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

onde o fator $\xi^{-2} = (1 - r_g/r)$ é devido ao efeito da interação gravitacional sobre a massa da partícula. Podemos escrever a equação acima numa forma mais compacta usando o

operador D'Alembertiano definido como $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, ou seja,

$$\square \phi(\vec{r}, t) = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \phi(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser obtida substituindo a densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \xi^{-2} \phi^2, \quad (3.4)$$

nas equações de Euler-Lagrange, ou seja, a partir de

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (3.5)$$

obtemos

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \xi^{-1}\right)^2 \phi = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \xi^{-2} \phi$$

Com as transformações de FB dadas no capítulo anterior, obtemos uma definição generalizada de quadri-vetores, a qual engloba a definição usual da relatividade especial como um caso limite de diferença de potencial gravitacional nula entre observadores. Nesta

generalização um quadri-vetor genérico X^μ se transforma do sistema de referência S para o sistema de referência I , como

$$X_S^\mu = D_{\mu\nu} X_I^\nu, \quad (3.7)$$

onde $D_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz de “Field-Boost” dados pela equação (2.9), que satisfazem às propriedades

$$D_{\mu\nu} D_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\alpha}, \quad (D^{-1})_{\mu\nu} = D_{\nu\mu}. \quad (3.8)$$

Com a definição ampliada de quadri-vetores definimos, como ocorre no contexto da RE, o produto interno entre dois quadri-vetores, e além disso também definimos os operadores diferenciais e constatamos que os mesmos se transformam como quadrivetores sob as transformações de FB [9], ou seja,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left[\frac{\partial Y^\nu}{\partial X^\mu} \right] \frac{\partial}{\partial Y^\nu} = D_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial Y^\nu} = D_{\mu\nu} \partial_\nu$$

onde os $D_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz de FB. O operador diferencial de segunda ordem $\partial_\mu \partial^\mu$ também é um invariante sob as transformações de FB [9].

3.3) Partículas de Spin-1/2 sob a Ação da Gravidade.

Na seção anterior obtivemos a equação de campo para partículas de spin-0, vamos agora utilizar a relação de energia-momentum eq. (2.26), para obter a equação que descreve partículas de spin-1/2 sujeitas à ação de um campo gravitacional. Começamos com a relação energia-momentum dada na eq.(2.27)

$$\left[\frac{E^{\text{op}}}{c} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] \left[\frac{E^{\text{op}}}{c} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right] = (m_0 c)^2 \left[1 - \frac{r_g}{r} \right] \quad (3.9)$$

onde $E \rightarrow E^{\text{op}}$, $p \rightarrow p^{\text{op}}$ e $\vec{\sigma} = \hat{i}\sigma_1 + \hat{j}\sigma_2 + \hat{k}\sigma_3$, sendo σ_1, σ_2 e σ_3 as matizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Com esse procedimento a eq. (3.9) toma a forma

$$\left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi = (m_0 c \xi^{-1})^2 \phi, \quad (3.11)$$

onde ϕ é uma função de onda com duas componentes.

De acordo com o procedimento padrão usado em mecânica quântica relativística [11], podemos definir duas funções de onda de duas componentes, ϕ^R e ϕ^L

$$\phi^L = \phi$$

$$\phi^R = \frac{1}{m_0 c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}} \left[i\hbar c \frac{\partial}{\partial x^0} - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right] \phi \quad (3.12)$$

Com isso podemos transformar a eq. (3.11) em duas equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - i\hbar \left(c \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \right] \phi^L &= -m_0 c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \phi^R \\ \left[i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - i\hbar \left(c \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \right] \phi^R &= -m_0 c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \phi^L, \end{aligned} \quad (3.13)$$

as quais são equivalentes à de segunda ordem eq. (3.11). Tomando a soma e a diferença das equações (3.13) e denotando $\psi_A = \phi^L + \phi^R$ e $\psi_B = \phi^R - \phi^L$, obtemos a equação de Dirac para partículas de spin-1/2 sob a ação de um campo gravitacional esféricamente simétrico.

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m_0 c}{\hbar} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \right] \psi = 0 \quad (3.14)$$

onde, γ^μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$, são matrizes 4×4 dadas por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A função de onda ψ tem quatro componentes, representadas por uma matriz coluna

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi^R + \psi^L \\ \psi^R - \psi^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Podemos obter a eq. (3.14) a partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_0 c^2 \xi^{-1} \psi \bar{\psi} \quad (3.17)$$

onde $\bar{\psi}$ é o spinor adjunto. De fato, usando as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_0 c^2 \xi^{-1} \psi, \quad (3.18)$$

o que nos dá

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \psi = 0.$$

Esta é a equação de Dirac para uma partícula sob a ação de um campo gravitacional esféricamente simétrico, onde $r \geq R$ e $r_g = 2GM/c^2$. Observe que no limite de campo

gravitacional nulo, $\left(\frac{r_g}{r} \rightarrow 0\right)$ obtemos a equação de Dirac usual onde a interação gravitacional é ignorada.

3.4) Transformações de Spinors sob a Ação da Gravidade.

Como vimos no Capítulo 2, os geradores de FB são os mesmos do grupo de Lorentz, isto ocorre porque só alteramos o parâmetro que caracteriza o grupo. Em outras palavras, além do parâmetro velocidade, introduzimos a diferença de potencial gravitacional, tendo agora dois limites distintos. Primeiro, no limite de diferença de potencial gravitacional nula entre dois observadores, obtemos as transformações usuais de Lorentz. Segundo, no limite de movimento relativo nulo mas com diferença de potencial entre os observadores obtemos um conjunto de transformações que tem forma similar às transformações usuais com $2GM/rc^2$ no lugar de v^2/c^2 .

As transformações de Lorentz mais gerais são compostas por três “Boosts” B_1, B_2, B_3 nas direções X^1, X^2 e X^3 e por rotações R_1, R_2 e R_3 em torno dos eixos X^1, X^2 e X^3 . Os geradores de rotação J_1, J_2 e J_3 são dados por

$$J_1 = \frac{1}{i} \frac{dR_1}{d\theta} \Big|_{\theta=0}, \quad J_2 = \frac{1}{i} \frac{dR_2}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}, \quad J_3 = \frac{1}{i} \frac{dR_3}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (3.19)$$

Onde θ, φ e α são os ângulos de Euler.

Uma rotação finita em torno de um eixo n , por um ângulo θ , é dada por

$$R_n(\theta) = e^{\vec{J} \cdot \vec{\theta}}, \quad (3.20)$$

Então numa situação geral temos uma rotação finita, e um “Boost” na direção do vetor unitário \hat{n} [11]

$$F = \underbrace{e^{i\vec{J} \cdot \hat{n}\theta}}_{\text{"Rotação"}} \underbrace{e^{i\vec{K} \cdot \hat{n}\theta}}_{\text{"Boost"}}, \quad (3.21)$$

onde $\vec{K} = \hat{e}_1 k_1 + \hat{e}_2 k_2 + \hat{e}_3 k_3$ sendo k_1 , k_2 e k_3 os geradores do grupo de Lorentz, definido por

$$k_1 = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \right]_{\alpha=0}, \quad k_2 = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial B_2}{\partial \alpha_2} \right]_{\alpha=0}, \quad k_3 = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial B_3}{\partial \alpha_3} \right]_{\alpha=0}.$$

3.5) Obtenção da Equação de Dirac.

Usaremos a argumentação usada na referência [11], e a partir dela derivar a equação de Dirac modificada pela ação do campo gravitacional. Entre os geradores, estabelecemos as seguintes relações de comutação.

$$\begin{aligned}
 [K_1, K_2] &= -iJ_3 \quad ; \quad [J_1, K_1] = [J_2, K_2] = [J_3, K_3] = 0 \\
 [K_3, K_1] &= -iJ_2 \quad ; \quad [J_1, K_2] = iK_3 \quad ; \quad [J_3, K_1] = iK_2 \quad (3.22) \\
 [K_2, K_3] &= -iJ_1 \quad ; \quad [J_2, K_3] = iK_1 \quad ; \quad [J_1, J_2] = iJ_3 \\
 [J_3, J_1] &= iJ_2 \quad ; \quad [J_2, J_3] = iJ_1
 \end{aligned}$$

Uma das conseqüências dessas relações, é que as mesmas não formam uma álgebra fechada sob comutação, e conseqüentemente não temos um grupo. Podemos contornar este problema definindo dois novos geradores \vec{A} e \vec{B} como

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) \quad \text{e} \quad \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \quad (3.23)$$

Assim, estes novos geradores nos dão as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned}
 [A_x, A_y] &= iA_z & [B_x, B_y] &= iB_z \\
 [A_z, A_x] &= iA_y & [B_z, B_x] &= iB_y \\
 [A_y, A_z] &= iA_x & [B_y, B_z] &= iB_x \\
 [A_x, B_y] &= [A_z, B_x] = [A_y, B_z] & &= 0
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os geradores A_x, A_y e A_z formam um grupo $SU(2)$ e os geradores B_x, B_y e B_z geram também outro grupo $SU(2)$, e os dois grupos comutam entre si. Assim, o grupo de Lorentz é em essência, o produto $SU(2) \otimes SU(2)$. Vamos denotar os estados que se transformam de uma maneira bem definida por dois momenta angulares (j_A, j_B) , o primeiro correspondendo aos

geradores A_x, A_y e A_z e o segundo correspondendo aos geradores B_x, B_y e B_z . Assim, temos as possibilidades:

$$\begin{aligned} (j_A, 0) &\rightarrow \vec{J} = i\vec{K} & (\vec{B} = 0) \\ (0, j_B) &\rightarrow \vec{J} = -i\vec{K} & (\vec{A} = 0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para o gerador \vec{K} , temos duas possibilidades

$$\vec{K} = \pm i \vec{\sigma}/2 \quad (3.26)$$

Da eq. (3.21) assumindo $j_A = 1/2$, temos

$$1^{\circ}) \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow J^{(1/2)} = iK^{(1/2)} \Rightarrow \begin{cases} J^{(1/2)} = \vec{\sigma}/2 \\ K^{(1/2)} = -i\vec{\sigma}/2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Definindo $(\vec{\theta}, \vec{\alpha})$ como os parâmetros de uma rotação e uma transformação pura de

Lorentz, vamos denotar por \sum_R o spinor do 1º tipo

$$\begin{aligned} \sum_R &\rightarrow R(\theta)B(\alpha)\sum_R \\ \sum_R &\rightarrow e^{i\vec{J}\cdot\hat{n}\theta} e^{i\vec{K}\cdot\hat{n}\alpha}\sum_R \end{aligned} \quad (3.28)$$

usando (3.27)

$$\sum_R \rightarrow e^{i\vec{\sigma}/2\cdot\hat{n}\theta} e^{\vec{\sigma}/2\cdot\hat{n}\alpha}\sum_R \quad (3.29)$$

ou seja

$$\sum_R \rightarrow \exp\left[i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\alpha})\right] \sum_R = M \sum_R \quad (3.30)$$

Podemos ter a segunda possibilidade

$$2^\circ) \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow J^{(\frac{1}{2})} = -iK^{(\frac{1}{2})} \Rightarrow \begin{cases} J^{(\frac{1}{2})} = \vec{\sigma}/2 \\ K^{(\frac{1}{2})} = i\vec{\sigma}/2 \end{cases} \quad (3.31)$$

com isto, obtemos

$$\sum_L \rightarrow \exp\left[i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\alpha})\right] \sum_L = N \sum_L \quad (3.32)$$

onde denotamos por \sum_L o spinor do 2º tipo.

No grupo de Lorentz sem gravitação, definimos a operação de paridade, como a mudança do sinal de velocidade ($\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$) [11], isto implica numa mudança de sinal nos geradores do grupo. Na formulação de FB, definimos a operação de paridade, trocando o sinal do vetor unitário ($\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$), ou seja

$$\begin{aligned} \hat{n} \rightarrow -\hat{n} = & -\hat{e}_1 \left(\frac{\beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2}{\zeta^2} \right)^{1/2} - \hat{e}_2 \left(\frac{\beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2}{\zeta^2} \right)^{1/2} \\ & - \hat{e}_3 \left(\frac{\beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2}{\zeta^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

No limite quando a diferença de potencial gravitacional entre os observadores tende a zero

$$\delta \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \beta$$

recuperamos o vetor unitário usual que indica a direção do “Boost” de Lorentz

$$\hat{n} = \frac{\beta_1}{\beta} \hat{e}_1 + \frac{\beta_2}{\beta} \hat{e}_2 + \frac{\beta_3}{\beta} \hat{e}_3.$$

Então notamos que fazendo $\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$ é equivalente a operação de paridade usual da relatividade especial ($\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$), ou de forma equivalente $K \rightarrow -K$, mas no contexto de FB a mudança do sinal do vetor unitário \hat{n} é equivalente à mudança do sinal do gerador como ocorre no contexto da relatividade especial podemos intercambiar os spinores, $\sum_R \leftrightarrow \sum_L$, sob transformação de paridade [11].

$$\begin{pmatrix} \sum_R \\ \sum_L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_R \\ \sum_L \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

No caso geral, sob transformações de FB, os spinores \sum_R e \sum_L se transformam como

$$\begin{aligned} \sum_R(\hat{n}) &\rightarrow \sum_R(\hat{p}) = \exp\left[\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \alpha\right] g(\gamma, \xi) \sum_R(0) \\ \sum_L(\hat{n}) &\rightarrow \sum_L(\hat{p}) = \exp\left[-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \alpha\right] f(\gamma, \xi) \sum_L(0) \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde consideramos o caso sem rotações, ou seja, $\theta = 0$. Dentro do contexto da relatividade especial, os spinores em repouso $\sum_R(0)$ e $\sum_L(0)$ são transformados em spinores com momentum \vec{p} , $\sum_R(p)$ e $\sum_L(p)$. No do contexto de FB os spinores em repouso são transformados em spinores com momentum \vec{p} e sob uma diferença de potencial gravitacional. As funções $f(\gamma, \xi)$ e $g(\gamma, \xi)$ em (3.35) são necessárias devido ao fato do vetor unitário \hat{n} que define a direção do FB não ser paralelo ao momentum \vec{p} da partícula cujas componentes são,

$$p^i = m_0 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} \left(1 - r_g/r\right)^{1/2} v^i,$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $v^2 = v^i v_i$.

As funções $g(\gamma, \xi)$ $f(\gamma, \xi)$ devem satisfazer a condição de que no limite de campo gravitacional nulo as equações dadas em (3.35) se transformam nas equações usuais.

Assim, no limite de campo gravitacional nulo devemos ter

$$\xi \rightarrow 1 \Rightarrow f(\gamma, \xi \rightarrow 1) = g(\gamma, \xi \rightarrow 1) = 1 \quad (3.36)$$

de tal forma que as relações dadas em (3.35) possam ser as mesmas que são obtidas no contexto da relatividade especial. As funções que satisfazem essas propriedades são definidas como

$$g(\gamma, \xi) = \exp\left[-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \omega\right] \text{ e } f(\gamma, \xi) = \exp\left[\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \omega\right] \quad (3.37)$$

onde $\omega = (\alpha - \theta)$, e α é o ângulo no espaço-tempo relacionado com a velocidade e diferença de potencial gravitacional, sendo a relação entre α , β e γ dada por

$$\alpha = \tanh^{-1}(\beta^2 + \delta^2 - \beta^2 \delta^2), \quad (3.38)$$

sendo θ o ângulo relacionado com a velocidade no “Boost” puro de Lorentz

$$\theta = \tanh^{-1}(\beta) \quad (3.39)$$

Quando $\delta \rightarrow 0$, temos $\alpha = \theta$, ou seja, $\omega = 0$ e conseqüentemente,

$$f(\gamma, \xi) = g(\gamma, \xi) = 1$$

Expandido as exponenciais dadas em (3.34), temos

$$\begin{aligned} g(\gamma, \xi) = & \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ & + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned} f(\gamma, \xi) = & \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ & - \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

sob transformações de paridade temos

$$\begin{aligned} f(\gamma, \xi) &\rightarrow g(\gamma, \xi) \\ g(\gamma, \xi) &\rightarrow f(\gamma, \xi) \end{aligned} \quad (3.42)$$

As relações entre spinores $\sum_R(p)$ e $\sum_L(p)$ e os Spinores $\sum_R(0)$ e $\sum_L(0)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} \sum_R(\hat{p}) \\ \sum_L(\hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left[\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\alpha\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\alpha\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\gamma, \xi) & 0 \\ 0 & f(\gamma, \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_R(0) \\ \sum_L(0) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Sendo que as transformações inversas são dadas por

$$\begin{pmatrix} \sum_R(0) \\ \sum_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\alpha} g^{-1}(\gamma, \xi) & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\alpha} f^{-1}(\gamma, \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_R(\hat{p}) \\ \sum_L(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Podemos verificar de (3.40) e (3.41) que

$$g^{-1}(\gamma, \xi) = f(\gamma, \xi) \text{ e } f^{-1}(\gamma, \xi) = g(\gamma, \xi) \quad (3.45)$$

Levando em conta que não podemos distinguir spinores em repouso, escrevemos

$$\begin{pmatrix} \sum_R(0) \\ \sum_L(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_L(0) \\ \sum_R(0) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

e a transformação inversa pode ser escrita sob a forma

$$\begin{pmatrix} \sum_L(0) \\ \sum_R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\alpha} f^{-1}(\gamma, \xi) \sum_L(p) \\ e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\alpha} g^{-1}(\gamma, \xi) \sum_R(p) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.43) e expandido as exponenciais, obtemos

$$\begin{pmatrix} \sum_R(\vec{p}) \\ \sum_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\begin{matrix} \cosh(\theta/2) + \\ + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh(\theta/2) \end{matrix} \right]^2 & 0 \\ 0 & \left[\begin{matrix} \cosh(\theta/2) - \\ - \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \sinh(\theta/2) \end{matrix} \right]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_L(\vec{p}) \\ \sum_R(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

usando o fato de que

$$\begin{aligned} \cosh(\theta/2) &= \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} ; & \cosh(\alpha/2) &= \left(\frac{\gamma\xi+1}{2}\right)^{1/2} \\ \sinh(\theta/2) &= \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2} ; & \sinh(\alpha/2) &= \left(\frac{\gamma\xi-1}{2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Expandindo os termos quadráticos, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} \sum_R(\vec{p}) \\ \sum_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + \vec{\sigma} \cdot \hat{p}(\gamma^2 - 1)^{1/2} & 0 \\ 0 & \gamma - \vec{\sigma} \cdot \hat{p}(\gamma^2 - 1)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_L(\vec{p}) \\ \sum_R(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

das equações (2.26) e (2.27), obtemos

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2 \xi^{-1}} \quad , \quad \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{p}}{m_0 c \xi^{-1} (\gamma^2 - 1)^{1/2}} \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50)

$$\begin{pmatrix} -m_0 c \xi^{-1} & p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m_0 c \xi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_R(\vec{p}) \\ \sum_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Definindo o 4-spinor

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \sum_R(\vec{p}) \\ \sum_L(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

e as matrizes de Dirac γ^μ , onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

com isto obtemos

$$\left[\gamma^\mu p_\mu - m_0 c \left(1 - \frac{rg}{r} \right)^{1/2} \right] \psi(p) = 0 \quad (3.55)$$

que é a equação (3.14) na representação no espaço dos momenta.

Na ausência de campo gravitacional ($r_g = 0$) a equação (3.55) se torna a equação de Dirac usual. Podemos também supor um referencial onde os Spinors estejam em repouso,

um em relação ao outro, ou seja, que sua velocidade relativa seja nula, supondo que haja uma diferença de potencial gravitacional entre eles, obtemos mais um caso particular da equação (3.55) [Apêndice B]

$$\left[\gamma^0 \mathbf{1} + \gamma^i \delta_i - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{1/2} \right] \psi(\vec{\delta}) = 0 \quad (3.56)$$

onde $\psi(\vec{\delta}) = \begin{pmatrix} \sum_R(\vec{\delta}) \\ \sum_L(\vec{\delta}) \end{pmatrix}$. Neste caso particular, ao invés do momentum usual $\vec{p} = m_0 \gamma \xi^{-1} \vec{v}$,

temos, $\vec{\delta} = \hat{e}_1 \delta_1 + \hat{e}_2 \delta_2 + \hat{e}_3 \delta_3$.

Capítulo 4

Referenciais Super-Luminais.

4.1) Introdução.

A relatividade especial está baseada na equivalência entre referenciais inerciais e no fato experimental da velocidade da luz medida em qualquer referencial inercial ser invariante, ou seja, independe da velocidade da fonte, e não na questão da velocidade ter um limite máximo [18,15]. O fato da velocidade da luz no vácuo (c) ser máxima, não significa que é possível acelerar uma partícula com massa a partir de uma dada velocidade inicial $|\vec{v}| \geq 0$ até exatamente o valor c .

Dentro do contexto da relatividade especial, há razões para isso não ser possível. No limite $v \rightarrow c$, na razão entre energia e momentum $E/p = c^2/v$, o que está implícito é que a massa da partícula desaparece se $v \rightarrow c$, realmente, só para uma partícula com massa é possível ter uma velocidade inicial $|\vec{v}| < c$. Contudo, de acordo com o princípio da inércia

da energia de Einstein [19], a massa da partícula aumenta com o acréscimo de energia cinética. Além do mais não é possível um referencial onde a massa da partícula seja nula e um outro referencial onde sua massa seja não nula. Isso não é possível dentro da base de representação do grupo de Lorentz, onde a classe correspondente à partículas com massa $p^\mu p_\mu = p^0 p_0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 > 0$, $p_0 > 0$, e a classe correspondente à partículas sem massa $p^\mu p_\mu = p^0 p_0 - \vec{p} \cdot \vec{p} = 0$, $p_0 > 0$. Se o produto interno $p^\mu p_\mu$ é o primeiro invariante de Casimir [11] todo o estado obtido por transformações de Lorentz a partir de um estado inicial deve ter o mesmo valor de $p^\mu p_\mu$.

Em conclusão, é impossível obter uma descrição consistente da propagação de um fóton como um caso limite do movimento de uma partícula com massa, quando sua velocidade $v \rightarrow c$. A partir das transformações de FB é possível conectar as coordenadas de um ponto-evento relativo a um referencial super-luminal (T), para as coordenadas do mesmo ponto-evento relativo a um referencial sub-luminal (B). Neste contexto consideramos uma fonte de gravitação de massa M e raio R esfericamente simétrica que colapsou, para um raio R inferior ao seu raio gravitacional, ou seja, $r_g > R$, onde $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ é o raio gravitacional da fonte. A essas condições, chamamos essa fonte de gravitação de buraco-negro (BN) e a superfície que satisfaz a condição $r = r_g$ chamamos de “horizonte de eventos” ou borda do BN. Os táquions, partículas com $v > c$, por sua vez, existem no interior do BN que coincide com a região externa do cone de luz o qual satisfaz as condições $r_g = r$ e $v = c$, e por fim, partículas do tipo brádion “habitam” a região interna do cone de luz, região esta que está situada fora do buraco negro.

4.2) Táquions em 3+1 Dimensões.

Considere uma fonte gravitacional esfericamente simétrica de massa M e raio R , com $r_g > R$. Nas transformações (2.8) cujos $D_{\mu\nu}$, são dados em (2.9), consideremos o caso em que $c < v$ e $r_g > r$. Com isso obtemos as transformações de FB relativas a um ponto-evento observado de um referencial super-luminal (T), situado em $r < r_g$ e com $v > c$, de coordenadas (y^0, y^1, y^2, y^3) , para o mesmo ponto-evento observado em um referencial sub-luminal (B) de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) situado no centro de gravidade da fonte. Para este caso temos,

$$\begin{aligned} x^0 &= T_{00}y^0 + T_{01}y^1 + T_{02}y^2 + T_{03}y^3; \\ x^1 &= T_{10}y^0 + T_{11}y^1 + T_{12}y^2 + T_{13}y^3; \\ x^2 &= T_{20}y^0 + T_{21}y^1 + T_{22}y^2 + T_{23}y^3; \\ x^3 &= T_{30}y^0 + T_{31}y^1 + T_{32}y^2 + T_{33}y^3; \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde os elementos $T_{\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\gamma' \xi', \quad T_{01} = T_{10} = -\zeta_1' \gamma' \xi', \quad T_{02} = T_{20} = -\zeta_2' \gamma' \xi', \\ T_{03} &= T_{30} = -\zeta_3' \gamma' \xi', \quad T_{11} = 1 + \frac{\zeta_1' (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2}, \\ T_{12} &= T_{21} = \frac{\zeta_1' \zeta_2' (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2}, \quad T_{13} = T_{31} = \frac{\zeta_1' \zeta_3' (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2}, \\ T_{22} &= 1 + \frac{\zeta_2'^2 (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2}, \quad T_{23} = T_{32} = \frac{\zeta_2' \zeta_3' (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2}, \\ T_{33} &= 1 + \frac{\zeta_3'^2 (-\gamma' \xi' - 1)}{\zeta_1'^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde

$$\beta' = c/v, \delta' = (r/r_g)^{1/2}, \gamma' = \beta'(1 - \beta'^2)^{-1/2}, \xi' = \delta'(1 - \delta'^2)^{-1/2},$$

$$\zeta_1' = \beta_1 \delta (1/\delta^2 + \delta_1^2/\beta_1^2 \delta^2 - 1)^{1/2}, \zeta_2' = \beta_2 \delta (1/\delta^2 + \delta_2^2/\beta_2^2 \delta^2 - 1)^{1/2}, \quad (4.3)$$

$$\zeta_3' = \beta_3 \delta (1/\delta^2 + \delta_3^2/\beta_3^2 \delta^2 - 1)^{1/2},$$

$$\zeta' = (\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2 + \zeta_3'^2)^{1/2} = \beta \delta (r/r_g + c^2/v^2 - 1)^{1/2},$$

e as condições

$$\left(c^2/v^2 \right) < 1, \left(r/r_g \right) < 1, \left(1/\delta^2 + \delta_1^2/\beta_1^2 \delta^2 - 1 \right) > 0,$$

$$\left(1/\delta^2 + \delta_2^2/\beta_2^2 \delta^2 - 1 \right) > 0 \text{ e } \left(1/\delta^2 + \delta_3^2/\beta_3^2 \delta^2 - 1 \right) > 0,$$

satisfazem a condição das coordenadas serem reais. No horizonte de eventos de um BN, ou

seja quando o limite $(r/r_g) \rightarrow 1$ temos $\beta \delta (r/r_g + c^2/v^2 - 1)^{1/2} \rightarrow 1$.

4.3) Transformações de Velocidades.

Com o conjunto de transformações dados em (4.1) podemos relatar as componentes da velocidade \vec{u} de uma partícula material observada do sistema de referência T as

componentes da velocidade \vec{v} da mesma partícula observada em B , de maneira análoga ao que foi feito no apêndice A, ou seja

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{T_{10}c + T_{11}u^1 + T_{12}u^2 + T_{13}u^3}{T_{00} + T_{01}u^1/c + T_{02}u^2/c + T_{03}u^3/c}, \\ v^2 &= \frac{T_{20}c + T_{21}u^1 + T_{22}u^2 + T_{23}u^3}{T_{00} + T_{01}u^1/c + T_{02}u^2/c + T_{03}u^3/c}, \\ v^3 &= \frac{T_{30}c + T_{31}u^1 + T_{32}u^2 + T_{33}u^3}{T_{00} + T_{01}u^1/c + T_{02}u^2/c + T_{03}u^3/c}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estas equações descrevem as leis de decomposição de velocidades, no caso particular de uma transformação ao longo do eixo x^1 , obtemos,

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{dx^1}{dt_b} = \frac{u^1 + c\zeta_1'}{(1 + u^1\zeta_1'/c)}, \\ v^2 &= \frac{dx^2}{dt_b} = \frac{u^2/\gamma'\xi'}{(1 + u^1\zeta_1'/c)}, \\ v^3 &= \frac{dx^3}{dt_b} = \frac{u^3/\gamma'\xi'}{(1 + u^1\zeta_1'/c)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

equações similares podem ser obtidas para transformações super-luminais ao longo dos eixos x^2 e x^3 .

4.4) A Invariância do Intervalo Espaço-Temporal.

Consideremos dois pontos eventos de coordenadas $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ e $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ observados no referencial B e com coordenadas $(y_1^0, y_1^1, y_1^2, y_1^3)$ e $(y_2^0, y_2^1, y_2^2, y_2^3)$ no referencial T . Podemos verificar usando as equações (4.1) e (4.2) que o intervalo espaço-tempo entre dois pontos eventos é um invariante, ou seja,

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 &= (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \\ &= (y_1^0 - y_2^0)^2 - (y_1^1 - y_2^1)^2 - (y_1^2 - y_2^2)^2 - (y_1^3 - y_2^3)^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

considerando os dois pontos eventos suficientemente próximos no espaço-tempo podemos escrever o diferencial de primeira ordem,

$$(dS)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dy^0)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2. \quad (4.7)$$

Devido à invariância do intervalo espaço-tempo, podemos considerar um ponto evento na origem do referencial T , temos $dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0$, neste caso podemos escrever,

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \left(1 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(dx^0)^2} \right), \quad (4.8)$$

a condição de que $dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0$ implica que $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, então usando a equação (4.4) em (4.8) obtemos,

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \left(1 - \frac{T_{10}^2 + T_{20}^2 + T_{30}^2}{T_{00}^2} \right) \quad (4.9)$$

mas,

$$1 - \frac{T_{10}^2 + T_{20}^2 + T_{30}^2}{T_{00}^2} = 1 - (\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2 + \zeta_3'^2) = (\gamma' \xi')^{-2} = (\gamma \xi)^{-2}, \quad (4.10)$$

assim rescrevemos (4.9) como,

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \frac{v^2 r_g}{rc^2} \left(1 - c^2/v^2 \right) \left(1 - r/r_g \right) = (dx^0)^2 \left(1 - v^2/c^2 \right) \left(1 - r_g/r \right). \quad (4.11)$$

O intervalo espaço-tempo acima depende apenas do produto $(\gamma' \xi')^{-2} = (\gamma \xi)^{-2}$ que é invariante, temos então um intervalo espaço-tempo real com as condições

$$\begin{aligned} \delta_1^2 + \beta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2 &> 0, \\ \delta_2^2 + \beta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2 &> 0, \\ \delta_3^2 + \beta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2 &> 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

ou então as condições,

$$\begin{aligned} \delta_1^2 + \beta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2 &< 0, \\ \delta_2^2 + \beta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2 &< 0, \\ \delta_3^2 + \beta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2 &< 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

são satisfeitas.

4.5) Transições entre Brádions e Táquions.

Dentro do contexto da formulação de FB existe uma relação física entre táquions e brádions e um BN, ou seja, concluímos dentro dessa formulação que a matéria no interior do horizonte de eventos de um BN é constituída por táquions. Realmente considerando o intervalo espaço-tempo entre duas posições sucessivas de uma partícula material caindo radialmente em direção ao centro de gravidade de um BN, neste caso temos um intervalo tipo-tempo ($dS^2 > 0$),

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) > 0, \quad (4.14)$$

na região externa ao horizonte de eventos. Uma partícula se aproximando da superfície do horizonte de eventos tem um intervalo tipo-luz ao atingir o mesmo, ou seja,

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = 0, \quad (4.15)$$

neste caso temos, $r = r_g$ e $v = c$. Ao atravessar o horizonte de eventos o intervalo permanece tipo-tempo,

$$(dS)^2 = (dy^0)^2 = (dx^0)^2 \left(\frac{v^2 r_g}{c^2 r}\right) \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{r}{r_g}\right) > 0, \quad (4.16)$$

com $r/r_g < 1$ e $c^2/v^2 < 1$.

Podemos fazer uma descrição a partir da energia total da partícula, ou seja,

$$E = m_0 c^2 \gamma \xi^{-1} = m_0 c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} \left(1 - r_g/r\right)^{1/2}, \quad (4.17)$$

a medida que a partícula se aproxima do centro de gravidade do BN a energia total dada pela equação (4.17) é conservada, para a partícula se aproximando radialmente do horizonte de eventos temos,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_g \\ v \rightarrow c}} \gamma \xi^{-1} = \lim_{\substack{r \rightarrow r_g \\ v \rightarrow c}} \frac{\left(1 - r_g/r\right)^{1/2}}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} = \text{constante} \quad (4.18)$$

em virtude de $v^2/c^2 - r_g/r = \text{constante}$. Por esta razão a energia total da partícula permanece real e positiva no horizonte de eventos. No interior do BN, temos

$$E = m_0 c^2 \left(r_g/r\right)^{1/2} \left(c/v\right) \left(1 - c^2/v^2\right)^{-1/2} \left(1 - r/r_g\right)^{1/2} \quad (4.19)$$

ou seja, a energia total permanece real e positiva.

Da relação energia-momentum para uma partícula sob a ação da gravidade dada pela equação (2.26),

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right),$$

considerando o caso em que $r = r_g$ a equação (2.27) se torna

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = 0, \quad (4.20)$$

que é a relação válida para lúxons, de acordo com o limite dado pela equação (4.18), para a energia total ser finita e real, a condição $r = r_g$ requer que $v = c$. No interior do BN temos,

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = -m_0^2 c^2 \left(\frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{r}{r_g}\right), \quad (4.21)$$

onde $\left(\frac{r}{r_g}\right) < 1$ e $p^0 = \left(\frac{E}{c}\right) > 0$.

Em resumo, partículas materiais com $v < c$ obedecem à relação de energia-momentum (2.27), estas partículas se localizam no interior do cone de luz (região I, fig. 4.1) e fora do horizonte de eventos ($r > r_g$), partículas sem massa descritas pela relação (4.20) localizam-se na região II, região esta que coincide com o Horizonte de Eventos ($r = r_g$), e por fim partículas na região III, ou seja, fora do cone de luz, são governados pela relação (4.21). Partículas na região III coincidem com o interior do BN, as mesmas têm a propriedade de $v > c$.

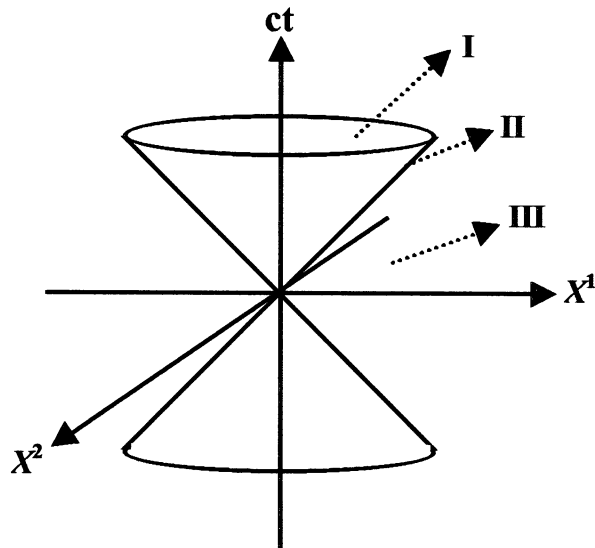


Figura 4.1 – Espaço de Minkowski e suas regiões, onde a superfície do cone de luz (II) está definida pelas condições $v = c$ e $r_g = r$. A região interna (I) satisfaz a condição $v < c$ e $r > r_g$ e a região externa (III) a condição $v > c$ e $r > r_g$.

Então uma partícula se aproximando da superfície definida em $r = r_g$, tem sua velocidade $v \rightarrow c$ e sua massa de repouso definida por (2.28), tendendo a zero, e ao atingir o horizonte de eventos, temos que $v = c$ e $m_0 = 0$. No interior do BN, sua velocidade se torna $v > c$ ($r < r_g$). Este mecanismo implica na condição que um buraco-negro não emite luz, pois qualquer partícula expelida por ele, ao atravessar o horizonte de eventos se tornará uma partícula com massa.

De acordo com o diagrama (4.1), temos

$$\left(\begin{array}{l} \text{Região I} \\ \text{Parte interior} \\ \text{do cone de Luz} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) > 0 \text{ e } p^0 > 0 \\ r > r_g \\ v < c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Fora do buraco negro} \\ \text{(Brádions)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Região II} \\ \text{(Superfície do} \\ \text{cone de luz)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E^2 - p^2 c^2 = 0 \\ r = r_g \\ v = c \end{array}$$

Horizonte de eventos
(Lúxons)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Região III} \\ \text{(Parte externa} \\ \text{do cone de luz)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E^2 - p^2 c^2 = -m_0^2 c^4 \left(\frac{r_g}{r} \right) \left(1 - \frac{r}{r_g} \right) < 0 \\ r < r_g \\ v > c \end{array}$$

interior do buraco negro
(Táquions)

Capítulo 5

Soluções da Equação de Dirac.

5.1) Introdução.

Vamos escrever a equação (3.52) sob a forma,

$$\begin{aligned} -m_0 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \Sigma_R(\hat{p}) + (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Sigma_L(\hat{p}) &= 0 \\ (p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Sigma_R(\hat{p}) - m_0 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \Sigma_L(\hat{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dentro do contexto de teorias de campos [11], onde os efeitos da gravidade não são levados em conta, quando $m_0 = 0$, o par de equações dadas por (5.1) se desacopla em duas equações,

$$\begin{aligned} (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Sigma_L(\vec{p}) &= 0, \\ (p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Sigma_R(\vec{p}) &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

estas são conhecidas como equações de Weyl, e Σ_L e Σ_R são os spinores de Weyl [11]. Na equação (5.1) fazer $m_0 \rightarrow 0$, é uma operação sem um significado físico, como foi discutido na introdução do Capítulo 4, podemos complementar nossa argumentação com o fato que na relação de energia-momentum $E^2/c^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2$ é independente de v , para obtermos a relação de energia-momentum válida para fótons, ou seja, $E/c = p$, precisamos considerar uma partícula com energia cinética muito maior que sua energia de repouso $E_0 = m_0 c^2$. Contudo, isto é apenas uma aproximação, pois sempre é possível descrever o movimento desta partícula de um referencial onde sua energia de repouso é maior que a sua energia cinética. Portanto esta aproximação não é compatível com a universalidade da velocidade da luz. Na equação (5.1) o fator $(1 - r_g/r)^{1/2}$ nos mostra que a interação gravitacional no limite de $r \rightarrow r_g$, ou seja, na borda de um BN há a possibilidade da existência de spinores de Weyl.

5.2) Obtenção dos Spinores Modificados.

Vamos supor inicialmente que ψ é independente da posição, ou seja, estamos descrevendo um estado de momentum $\vec{p} = 0$ [20], neste caso

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (5.3)$$

Com isso a equação de Dirac $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\xi^{-1}\psi = 0$, com $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ se torna,

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - m_0c\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} = 0, \quad (5.4)$$

rescrevemos (5.4) como,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = -i\frac{m_0c^2}{\hbar}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

com $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ e $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$, assim temos as soluções

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= e^{-i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t}\psi_A(0), \\ \psi_B(t) &= e^{+i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t}\psi_B(0), \end{aligned} \quad (5.6)$$

podemos escrever as equações (5.6) como,

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^{(3)} &= e^{+i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+i(m_0c^2\xi^{-1}/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Verificamos explicitamente o efeito do campo gravitacional sobre a massa das partículas, concluímos que tanto as partículas descritas pelas funções ψ_1 e ψ_2 como suas respectivas antipartículas descritas por ψ_3 e ψ_4 respondem da mesma forma ao campo gravitacional. Observe que no limite de campo gravitacional nulo, temos as soluções usuais da equação de Dirac [20].

5.3) Equação de Dirac no Espaço dos Momenta.

A equação de Dirac no espaço dos momenta, eq. (3.55), tem a forma

$$[\gamma^\mu p_\mu - m_0 c \xi^{-1}] \psi(p) = 0 \quad (5.8)$$

levando em conta que $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, com $i = 1, 2, 3$ e $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, obtemos

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E/c \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

então usando as relações acima,

$$[\gamma^\mu p_\mu - m_0 c \xi^{-1}] \psi(p) = \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - m_0 c \xi^{-1} \right) & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & \left(-\frac{E}{c} - m_0 c \xi^{-1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - m_0 c \xi^{-1} \right) \psi_A - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \psi_B \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \psi_A - \left(\frac{E}{c} + m_0 c \xi^{-1} \right) \psi_B \end{pmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \psi_A &= \frac{c}{E - m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \psi_B \\ \psi_B &= \frac{c}{E + m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \psi_A \end{aligned} \quad (5.11)$$

levando em conta que $\vec{p} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_B &= \frac{c}{E + m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + m_0 c^2 \xi^{-1}} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ \psi_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_B &= \frac{c}{E + m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + m_0 c^2 \xi^{-1}} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\ \psi_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_A &= \frac{c}{E - m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - m_0 c^2 \xi^{-1}} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ \psi_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_A &= \frac{c}{E - m_0 c^2 \xi^{-1}} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - m_0 c^2 \xi^{-1}} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Normalizando

$$\psi^\dagger \psi = 2|E|/c \quad [\text{vide referência 20}] \quad (5.13)$$

Obtemos

$$N = \sqrt{\left(|E| + m_0 c^2 \xi^{-1} \right) / c} \quad (5.14)$$

Assim escrevemos as equações 5.12 como

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \left(\frac{E + m_0 c^2 \xi^{-1}}{2m_0 c^2 \xi^{-1}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ (p_x + ip_y) / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \end{pmatrix} \\
 u^{(2)} &= \left(\frac{E + m_0 c^2 \xi^{-1}}{2m_0 c^2 \xi^{-1}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (p_x - ip_y) / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ -p_z / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \end{pmatrix} \\
 v^{(1)} &= \left(\frac{E + m_0 c^2 \xi^{-1}}{2m_0 c^2 \xi^{-1}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} p_z / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ (p_x + ip_y) / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 v^{(2)} &= \left(\frac{E + m_0 c^2 \xi^{-1}}{2m_0 c^2 \xi^{-1}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} (p_x - ip_y) / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ -p_z / (E + m_0 c^2 \xi^{-1}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

No limite de diferença de potencial gravitacional nula ou na ausência de campo gravitacional, $\xi^{-1} \rightarrow 1$, e as relações acima tomam a forma usual [11,17].

Outro exemplo muito interessante da solução da equação de Dirac modificada, é a modificação dos autovalores de energia para o átomo de hidrogênio [25], ou seja,

$$E = \mu_0 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{R_0 c^2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{(z\alpha)^2}{2n^2 \hbar^2} - \frac{(z\alpha)^4}{n^3 \hbar^2} \left(\frac{1}{2j+1} - \frac{3}{8n} \right) + \mathcal{O}(\alpha^6) \right], \tag{5.16}$$

então um átomo na superfície do Sol emite uma frequência ν_1 , e na superfície da Terra uma frequência ν_2 seria emitida, com $\nu_1 \neq \nu_2$, para um mesmo decaimento. A diferença entre ν_1 e ν_2 é dada por [25],

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 \approx \nu_2 \left[\frac{GM_S}{R_S c^2} \right], \quad (5.17)$$

onde M_S e R_S são a massa do Sol e o raio do Sol respectivamente.

Capítulo 6

Conclusões.

Dentro do contexto de FB, a diferença de potencial gravitacional entre dois observadores são descritas por ângulos na unificação do espaço-tempo. A matriz de FB da eq. (2.7) engloba efeitos gravitacionais no grupo de Lorentz e generaliza a relação energia-momentum dada pela equação (2.26), esta equação é uma consequência dinâmica obtida a partir do grupo de Lorentz estendido. A partir da relação energia-momentum e usando os procedimentos padrão de teoria de campos obtemos a equação de Dirac para uma partícula sob a ação da gravidade. Esta equação também é obtida a partir da correspondência entre o grupo $SL(2,C)$ e o grupo de Lorentz com um procedimento similar ao usado na RE [11]. As equações (5.1) nos mostram como spinors sem massa podem ser produzidos no horizonte de eventos de um BN. A existência de táquions no interior do horizonte de eventos de um BN aparece como uma consequência natural das relações dinâmicas da formulação de FB.

No contexto da RG [21] os buracos negros são considerados detectores ideais e fontes de táquions [22]. O elemento de linha de Schwarzschild para $r > r_g$ é reinterpretado no interior do horizonte de eventos por uma transformação da forma $ct \leftrightarrow r$ para manter a assinatura da métrica, ou seja

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (6.1)$$

onde $dr = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Com $G = C = 1$ a mudança mencionada temos,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{t}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{t}\right)^{-1} dr^2 + t^2 dr. \quad (6.2)$$

Também dentro do contexto da RG é comum fazer a mudança na solução de Schwarzschild, proposta por Eddington e Finkelstein, ou seja, $\bar{t} = t + \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|$, para termos uma continuidade analítica na solução de Schwarzschild em $r = r_g$ [16,23]. No contexto da formulação de FB o intervalo espaço-tempo é invariante em relação a uma transformação de um referencial sub-luminal ($r > r_g$, $v < c$) para um referencial super-luminal ($r < r_g$, $v > c$). No horizonte de eventos temos um intervalo tipo-luz ($r = r_g$, $v = c$), e nosso elemento de linha não é singular em $r = r_g$ como ocorre com a solução de Schwarzschild. A transição brádion/táquion ocorre quando uma partícula atravessa o horizonte de eventos, sua energia total ao longo do percurso permanece constante. Para um brádion, ou seja, uma partícula fora do horizonte de eventos temos que $E > |\vec{p}|c$, quando a partícula atinge o horizonte de eventos (ela está situada na região II do cone de luz da figura 5.1) temos $E = |\vec{p}|c$, finalmente no interior do BN temos $E < |\vec{p}|c$. Em conclusão, há três “fases” para a matéria, e as transições ocorrem na ordem, brádion \rightarrow lúxon \rightarrow táquion para uma partícula que se move em direção ao centro de gravidade de um BN. Naturalmente, para uma partícula saindo do BN, temos o processo inverso, ou seja, táquion \rightarrow lúxon \rightarrow brádion.

Apêndice A

Obtenção da Matriz de “Field-Boost”.

A matriz de “Field-Boost” é definida pela exponencial

$$F(\alpha) = e^{i\vec{k} \cdot \hat{n} \alpha} \quad (\text{A.1})$$

onde, $\vec{K} = \hat{e}_1 k_1 + \hat{e}_2 k_2 + \hat{e}_3 k_3$ são os geradores do grupo dados por

$$k_j = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_n} \right)_{\alpha_n=0}, \quad (\text{A.2})$$

com $j = 1, 2, 3$. O vetor unitário $\hat{\eta}$ define o “Field-Boost” ao longo de uma direção arbitrária, e é definido como

$$\begin{aligned} \hat{\eta} = & \hat{e}_1 \left[\frac{\beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} + \hat{e}_2 \left[\frac{\beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} \\ & + \hat{e}_3 \left[\frac{\beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$ sendo

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2, & \zeta_2 &= \beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2, \\ \zeta_3 &= \beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2\end{aligned}\tag{A.4}$$

Com as definições dadas acima, vamos escrever o argumento da eq. (A.1)

$$\vec{k} \cdot \hat{n} = \left(K_1 \frac{\zeta_1}{\zeta} + K_2 \frac{\zeta_2}{\zeta} + K_3 \frac{\zeta_3}{\zeta} \right)\tag{A.5}$$

Levando em conta a definição dos geradores de “boost”,

$$\begin{aligned}k_1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & k_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Substituindo (A.6) em (A.5) e identificando, $\alpha_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta}$, $\alpha_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta}$ e $\alpha_3 = \frac{\zeta_3}{\zeta}$, temos

$$\vec{k} \cdot \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G\tag{A.7}$$

verificamos a partir de (A.7) que,

$$G^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3 \\ 0 & \alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

vemos também que,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}{\zeta} = 1 \quad (\text{A.9})$$

agora fazendo G^3 ,

$$G^3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Se prosseguir calculando os potenciais pares e ímpares de G , verificamos que,

$$\begin{aligned} G^2 &= G^4 = G^6 = G^8 = \dots \\ G &= G^3 = G^5 = G^7 = \dots \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

então, escrevemos agora (A.1) como

$$\begin{aligned}
F = e^{G\alpha} &= \mathbf{1} + G\alpha + G^2 \frac{\alpha^2}{2!} + G^3 \frac{\alpha^3}{3!} + \dots = \\
&= \mathbf{1} + G\left(\alpha + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 + \dots\right) + G^2\left(\frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots\right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Somando e subtraindo G^2 em (A.12), temos

$$F = \mathbf{1} - G^2 + G\left(\alpha + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 + \dots\right) + G^2\left(1 + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 + \dots\right)$$

ou ainda

$$F = \mathbf{1} - G^2 + G \sinh \alpha + G^2 \cosh \alpha, \tag{A.13}$$

escrevendo as matrizes explicitamente em (A.13), temos

$$\begin{aligned}
F = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3 \\ 0 & \alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sinh(\alpha) + \\
& + \cosh(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3 \\ 0 & \alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

ou ainda

$$F = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \alpha_1 \sinh \alpha & \alpha_2 \sinh \alpha & \alpha_3 \sinh \alpha \\ \alpha_1 \sinh \alpha & 1 + \alpha_1^2 (\cosh \alpha - 1) & \alpha_1 \alpha_2 (\cosh \alpha - 1) & \alpha_1 \alpha_3 (\cosh \alpha - 1) \\ \alpha_2 \sinh \alpha & \alpha_2 \alpha_1 (\cosh \alpha - 1) & 1 + \alpha_2^2 (\cosh \alpha - 1) & \alpha_2 \alpha_3 (\cosh \alpha - 1) \\ \alpha_3 \sinh \alpha & \alpha_3 \alpha_1 (\cosh \alpha - 1) & \alpha_3 \alpha_2 (\cosh \alpha - 1) & 1 + \alpha_3^2 (\cosh \alpha - 1) \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

como $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$, identificamos

$$\cosh \alpha = \gamma \xi \quad \text{e} \quad \sinh \alpha = \zeta \gamma \xi \quad (\text{A.16})$$

pois

$$\begin{cases} \gamma^2 \xi^2 - \zeta^2 \gamma^2 \xi^2 = \gamma^2 \xi^2 (1 - \zeta^2) = \gamma^2 \xi^2 (1 - \beta^2 - \delta^2 - \beta^2 \delta^2) = \\ \gamma^2 \xi^2 [\xi^{-2} - \beta^2 (1 - \delta^2)] = \gamma^2 \xi^2 (\xi^{-2} - \beta^2 \xi^{-2}) = \\ \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = \gamma^2 \gamma^{-2} = 1 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \zeta \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha = \tanh^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 + \delta^2 - \beta^2 \delta^2} \right)$$

com isso escrevemos (A.15) como

$$F = \begin{pmatrix} \gamma \xi & \zeta_1 \gamma \xi & \zeta_2 \gamma \xi & \zeta_3 \gamma \xi \\ \zeta_1 \gamma \xi & 1 + \frac{\zeta_1^2 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & \frac{\zeta_1 \zeta_2 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & \frac{\zeta_1 \zeta_3 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} \\ \zeta_2 \gamma \xi & \frac{\zeta_1 \zeta_2 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & 1 + \frac{\zeta_2^2 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & \frac{\zeta_2 \zeta_3 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} \\ \zeta_3 \gamma \xi & \frac{\zeta_1 \zeta_3 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & \frac{\zeta_2 \zeta_3 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} & 1 + \frac{\zeta_3^2 (\gamma \xi - 1)}{\zeta^2} \end{pmatrix}$$

Obtenção das Transformações de Velocidades.

No sistema de referência I , temos

$$\vec{v}_I = \hat{e}_1 v_I^1 + \hat{e}_2 v_I^2 + \hat{e}_3 v_I^3, \quad (\text{A.19})$$

analogamente no sistema S ,

$$\vec{v}_S = \hat{e}_1 v_S^1 + \hat{e}_2 v_S^2 + \hat{e}_3 v_S^3. \quad (\text{A.20})$$

Das transformações

$$\begin{aligned} X^0 &\equiv D_{00} Y^0 \pm D_{01} Y^1 \pm D_{02} Y^2 \pm D_{03} Y^3, \\ X^1 &= D_{10} Y^0 + D_{11} Y^1 + D_{12} Y^2 + D_{13} Y^3, \\ X^2 &= D_{20} Y^0 + D_{21} Y^1 + D_{22} Y^2 + D_{23} Y^3, \\ X^3 &= D_{30} Y^0 + D_{31} Y^1 + D_{32} Y^2 + D_{33} Y^3, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Com $D_{\mu\nu}$ dados por

$$\begin{aligned} D_{00} &= \gamma^\xi, \quad D_{01} = D_{10} = \zeta_1 \gamma^\xi, \quad D_{02} = D_{20} = \zeta_2 \gamma^\xi, \\ D_{03} = D_{30} &= \zeta_3 \gamma^\xi, \quad D_{11} = 1 + \frac{\zeta_1^2 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\zeta_1 \zeta_2 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}, \\ D_{13} = D_{31} &= \frac{\zeta_1 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{22} = 1 + \frac{\zeta_2^2 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}, \\ D_{23} = D_{32} &= \frac{\zeta_2 \zeta_3 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}, \quad D_{33} = 1 + \frac{\zeta_3^2 (\gamma^\xi - 1)}{\zeta^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

diferenciamos (A.21) em relação a $Y^0 = ct_I$, com isso obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dX^0}{dY^0} &= D_{00} + D_{01} \frac{dY^1}{dY^0} + D_{02} \frac{dY^2}{dY^0} + D_{03} \frac{dY^3}{dY^0} \\
\frac{dX^1}{dY^0} &= D_{10} + D_{11} \frac{dY^1}{dY^0} + D_{12} \frac{dY^2}{dY^0} + D_{13} \frac{dY^3}{dY^0} \\
\frac{dX^2}{dY^0} &= D_{20} + D_{21} \frac{dY^1}{dY^0} + D_{22} \frac{dY^2}{dY^0} + D_{23} \frac{dY^3}{dY^0} \\
\frac{dX^3}{dY^0} &= D_{30} + D_{31} \frac{dY^1}{dY^0} + D_{32} \frac{dY^2}{dY^0} + D_{33} \frac{dY^3}{dY^0}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde $dX^0 = cdt_s$ e $dY^0 = cdt_1$ e $v_i^j = \frac{dX^j}{dt_s}$, com $j = 1, 2, 3$, assim obtemos

$$\begin{aligned}
dX^0 &= \left[D_{00} + D_{01} \frac{v_1^1}{c} + D_{02} \frac{v_1^2}{c} + D_{03} \frac{v_1^3}{c} \right] dY^0 \\
dX^1 &= \left[D_{10} + D_{11} \frac{v_1^1}{c} + D_{12} \frac{v_1^2}{c} + D_{13} \frac{v_1^3}{c} \right] dY^0 \\
dX^2 &= \left[D_{20} + D_{21} \frac{v_1^1}{c} + D_{22} \frac{v_1^2}{c} + D_{23} \frac{v_1^3}{c} \right] dY^0 \\
dX^3 &= \left[D_{30} + D_{31} \frac{v_1^1}{c} + D_{32} \frac{v_1^2}{c} + D_{33} \frac{v_1^3}{c} \right] dY^0
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Agora com as relações (A.23), podemos efetuar a razão,

$$\frac{dX^1}{dX^0} = \frac{v_s^1}{c} = \frac{\left[D_{10} + D_{11} \frac{v_1^1}{c} + D_{12} \frac{v_1^2}{c} + D_{13} \frac{v_1^3}{c} \right]}{\left[D_{00} + D_{01} \frac{v_1^1}{c} + D_{02} \frac{v_1^2}{c} + D_{03} \frac{v_1^3}{c} \right]}$$

de forma similar podemos fazer, $\frac{v_s^2}{c} = \frac{dX^2}{dX^0}$ e $\frac{v_s^3}{c} = \frac{dX^3}{dX^0}$.

Apêndice B

Vamos verificar agora como os Spinors são afetados pelo campo gravitacional, ou seja, considerando que os mesmos estejam em repouso num referencial e submetidos a uma diferença de potencial gravitacional. Neste caso temos

$$\beta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1, \vec{p} \rightarrow 0 \quad (\text{B.1})$$

O vetor unitário \hat{n} , dado por

$$\begin{aligned} \hat{\eta} = & \hat{e}_1 \left[\frac{\beta_1^2 + \delta_1^2 - \beta_1^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} + \hat{e}_2 \left[\frac{\beta_2^2 + \delta_2^2 - \beta_2^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} \\ & + \hat{e}_3 \left[\frac{\beta_3^2 + \delta_3^2 - \beta_3^2 \delta^2}{\zeta^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

se torna

$$\hat{n} = \hat{e}_1 \left(\frac{\delta_1^2}{\delta^2} \right)^{1/2} + \hat{e}_2 \left(\frac{\delta_2^2}{\delta^2} \right)^{1/2} + \hat{e}_3 \left(\frac{\delta_3^2}{\delta^2} \right)^{1/2} \quad (\text{B.2})$$

ou seja

$$\hat{n} \rightarrow \hat{\delta}, \zeta \rightarrow \delta \quad (\text{B.3})$$

Então os Spinors se transformam como

$$\begin{aligned}\sum_R(\hat{n}) &\rightarrow \sum_R(\hat{\delta}) \rightarrow \exp\left[\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\delta}\phi\right]\sum_R(0) \\ \sum_L(\hat{n}) &\rightarrow \sum_L(\hat{\delta}) \rightarrow \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\delta}\phi\right]\sum_L(0)\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

onde ϕ é o ângulo no espaço-tempo relacionado a diferenças de potencial gravitacional

$$\phi = \tanh^{-1}(\delta) \quad (\text{B.5})$$

De acordo com (C.4), temos

$$\begin{aligned}\sum_R(\hat{\delta}) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sum_R(0) \\ \sum_L(\hat{\delta}) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sum_L(0)\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

invertendo as transformações acima

$$\begin{aligned}\sum_R(0) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sum_R(\vec{\delta}) \\ \sum_L(\hat{\delta}) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sum_L(\vec{\delta})\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Levando em conta a não distinção de Spinors em repouso, ou seja

$$\sum_R(0) = \sum_L(0) \quad (\text{B.8})$$

De (C.6), (C.7) e (C.8), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_R(\hat{\delta}) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2 \sum_L(\vec{\delta}) \\ \sum_L(\hat{\delta}) &= \left[\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2 \sum_R(\vec{\delta})\end{aligned}\tag{B.9}$$

Desenvolvendo (C.9) obtemos

$$\begin{aligned}\sum_R(\hat{\delta}) &= [\cosh \phi + \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh \phi] \sum_L(\vec{\delta}) \\ \sum_L(\hat{\delta}) &= [\cosh \phi - \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \sinh \phi] \sum_R(\vec{\delta})\end{aligned}\tag{B.10}$$

identificando

$$\begin{aligned}\cosh \phi &= \gamma \xi \rightarrow \xi \\ \sinh \phi &= \gamma \zeta \xi \rightarrow \xi \delta\end{aligned}\tag{B.11}$$

Podemos escrever (C.10) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & \xi + \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \xi \\ \xi - \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} \xi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_R(\vec{\delta}) \\ \sum_L(\vec{\delta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{B.12}$$

onde usamos as relações o fato de que $\cosh \phi = \xi$ e $\sinh \phi = \xi \delta$.

Com isto obtemos uma espécie de equação de Dirac para partículas em repouso submetidas a um campo gravitacional. Então podemos escrever (C.12) usando as matrizes γ^μ , ou seja

$$(\gamma^0 \mathbf{1} + \gamma^i \delta_i - \xi^{-1}) \psi(\vec{\delta}) \quad (\text{B.13})$$

onde $\psi(\vec{\delta}) = \begin{pmatrix} \sum_R \vec{\delta} \\ \sum_L \vec{\delta} \end{pmatrix}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Collela R., Overhauser A. W. and Werner S. A., *Phys Rev. Letters* **34** (1975) 1472.
- [2] O escritório de Vida e Aplicações da NASA, selecionou 26 pesquisadores para receberem subsídios em um programa que tem o propósito de aumentar o conhecimento de física fundamental e o papel da gravidade nos processos naturais. Muitas propostas, as quais serão patrocinadas pela NASA, representam o empenho de pesquisas sobre os efeitos da gravidade em sistemas quânticos. A lista de experimentos propostos está disponível através da internet no endereço: <ftp://ftp.hq.nasa.gov/pub/pao/pressrel/1997/97-261a.txt>.
- [3] Yilmaz H., *Nuovo Cimento* **107 B** (1992) 941.
- [4] Schrödinger E., *Phys. Z.* **19** (1918) 4.
- [5] Cooperstock F. I., *Found. Phys.* **22** (1992) 1011.
- [6] O'Hara P., *NuovoCimento* **111 B** (1996) 799.
- [7] R. Penrose, *Newton, Quantum Theory and Reality in Three Hundred Years of Gravitation* (ed. By S. Hawking and W. Israel) (Cambridge U. P., N.Y., 1987).
- [8] Brill M. H., *Physics Essays* **2** (1989)8.
- [9] Lucinda J., *Phys. Essays* **10** (1997) 256.
- [10] L. Landau and E. Lifchitz, *The Classical Theory of Fields*, (Pergamon Press, N.Y., 1989).
- [11] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridg University Press, Cambridge, 1988).
- [12] Jackson J. D., *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons Inc., New York) 1975.

- [13] French A. P., *Special Relativity* (W.W. Norton & Company, New York – London) 1968.
- [14] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, MA 1981).
- [15] H. Arzeliés, *La Cinématique Relativiste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1955), p. 217.
- [16] Mould, Richard A., *Basic Relativity* (Springer-Verlag, N. Y., Berlin, Heidelberg, London, Paris).
- [17] Veja, por exemplo, J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, N.Y.,1987).
- [18] E. Recami and E. Modica, *Lett. Nuovo Cimento* **12** (1975) 263.
- [19] A. Einstein, *Ann. Physik* **20** (1906) 627, *Ann.Physik* **23** (1907) 371.
- [20] Griffiths, David J., *Introduction to Elementary Particles*, 1942.
- [21] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley 1980).
- [22] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-Time*, (Cambridge, Univ. Press, Cambridge, 1973).
- [23] D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110** (1958) 965.
- [24] J. Lucinda and R. L. Cavasso Filho, *Gravitational Deflection of Light and of Fast Material Particles* (aceito para publicação, *Nuovo Cimento*).
- [25] J. Lucinda, *Physics Essays* **10** (1997) 87.
- [26] R. L. Cavasso and J. Lucinda, *Nuovo Cimento* **113B**, (1998) 25.