

ANGELA MARIA DOS SANTOS

**SINCRONIZAÇÃO ENTRE DOIS OSCILADORES DE  
van der POL ACOPLADOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

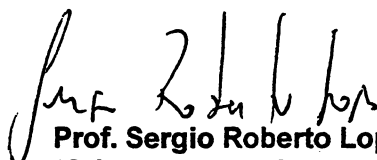
**CURITIBA  
2002**

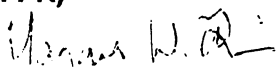
**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**


**PARECER**

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado da estudante **Angela Maria dos Santos**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é “Sincronização entre Dois Osciladores de van der Pol Acoplados”.

Curitiba, 21 de fevereiro de 2002

  
**Prof. Sergio Roberto Lopes**  
(Orientador Presidente)  
(UFPR)

  
**Prof. Marcus Werner Beims**  
(UFPR)

  
**Prof. Renato Pakter**  
(ULBRA)



*A diferença entre o homem comum e o fora  
do comum não é o conhecimento de idéias,  
mas é a compreensão delas.  
(Ilie Gilbert)*

# RESUMO

Neste trabalho nós analisamos um modelo simplificado da dinâmica cardíaca, apresentado por dois osciladores de van der Pol acoplados assimetricamente. Neste caso, os osciladores e os acoplamentos entre eles, modelam o comportamento dos dois marcapassos cardíacos ( os nodos sinoatrial e o atrioventricular ) e das fibras nervosas que transmitem os impulsos nervosos. Estudamos as condições necessárias para a ocorrência de sincronização entre os osciladores além de outras dinâmicas do sistema que demonstram como seu comportamento evolui. Para este estudo utilizamos a análise dos expoentes de Lyapunov, expoentes de Lyapunov condicionais, diagramas de parâmetros, diagramas de bifurcações, entre outros.

-Palavras chave:

acoplamento, osciladores, expoentes de Lyapunov, coração.

# ABSTRACT

In this work, we analyze a simplified model of cardiac dynamics. The model is composed by two asymmetric coupled van der Pol oscillators. In this case the oscillators and the coupling between them model the behavior of the two cardiac pacemaker ( the sinus and atrioventricular nodes ) and the fibers nervous that transmit the nervous impulse. We study here the necessary conditions to get synchronization between the oscillators as well as the dynamics of system that shows how it evolves. This study is made analyzing the Lyapunov exponent, conditional transverse Lyapunov exponents, parameters diagrams, bifurcations diagrams and others.

# AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Sergio Roberto Lopes pela orientação, dedicação, amizade e paciência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, pois sem eles nada disso teria acontecido.

A José Carlos Pereira Coninck, Sandro Ely de Souza Pinto, Mário Sérgio Teixeira de Freitas e Sura Helen-Cot Marcos pelo apoio e grande ajuda na parte computacional.

A todos do grupo de plasma e dinâmica não-linear pelas conversas, ensinamentos, seminários e amizade.

Aos meus amigos, irmãos e a todos os colegas da pós-graduação pelo companheirismo e força.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Dinâmica Teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Conceitos básicos . . . . .	5
2.2 Periodicidade e caos . . . . .	11
2.3 Variedades e sincronização . . . . .	14
2.4 Função similaridade . . . . .	21
<b>3 Um Modelo Matemático Para o Coração</b>	<b>23</b>
3.1 A utilidade de um modelo teórico para o coração . . . . .	23
3.2 O oscilador de van der Pol . . . . .	26
3.3 Osciladores acoplados . . . . .	29
<b>4 Aspectos Gerais de Dois Osciladores de van der Pol Unidirecionalmente Acoplados</b>	<b>33</b>

4.1	Procedimentos . . . . .	33
4.2	Variando apenas o parâmetro de acoplamento . . . . .	34
4.3	Variando o modo normal do primeiro oscilador . . . . .	42
4.4	Oscilador forçado com acoplamento unidirecional . . . . .	44
4.4.1	Variando o modo normal do primeiro oscilador no sistema forçado	49
4.5	Comportamento do segundo oscilador via variação do seu modo normal	51
4.5.1	Sistema sem força externa . . . . .	51
4.5.2	Sistema com força externa . . . . .	52
4.6	Osciladores com presença de ruído . . . . .	54
4.6.1	Ruído no termo de acoplamento do segundo oscilador . . . . .	55
4.6.2	Ruído no modo normal do primeiro oscilador . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Aspectos Gerais de Dois Osciladores de van der Pol Bidirecionalmente Acoplados</b>	<b>59</b>
5.1	O comportamento bidirecional . . . . .	59
5.2	Formas de sincronização para o sistema bidirecional sem forçamento .	60
5.3	Osciladores com acoplamento bidirecional e forçado . . . . .	61
5.3.1	Osciladores com dinâmica periódica, na presença de ruído . . .	67
5.3.2	Comportamento do sistema para diferentes valores do termo de acoplamento do primeiro oscilador . . . . .	69
5.4	Mudança do modo normal do segundo oscilador no sistema forçado .	70
5.5	Variando o modo normal do primeiro oscilador e conjuntamente o termo de acoplamento do segundo oscilador . . . . .	72





# Lista de Figuras

2.1	Exemplos de estabilidade de pontos fixos. a) Comportamento de um ponto fixo estável e b) Comportamento de um ponto fixo assintoticamente estável. . . . .	6
2.2	Exemplos de atratores de um sistema de VDP como em 2.7 com $n = 5.0$ e $w = 1.0$ [15]. a)ponto fixo para todas as condições iniciais iguais a zero, b)ciclo limite para para $a = 40.0$ e $p = 5.25$ , c)toro para $a = 40.0$ e $p = 5.5$ , d)caótico para $a = 40.0$ e $p = 5.478$ . . . . .	9
2.3	Exemplo de bifurcação de um sistema de VDP com forçamento externo do tipo $\cos(pt)$ com $w = 1.0$ , $n = 5.0$ , $a = 40.0$ e variando o parâmetro $p$ . . . . .	10
2.4	Exemplos de alguns tipos de bifurcações. a)bifurcação tipo sela-nó, b)bifurcação transcritical, c)bifurcação tipo forquilha e d)bifurcação tipo hopf. . . . .	11
2.5	Subespaço estável ( $E^{est}$ ) para um sistema linear, subespaço instável ( $E^{ins}$ ) e suas respectivas variedades invariantes estável ( $W_{loc}^{est}(0)$ ) e instável ( $W_{loc}^{ins}(0)$ ) para um sistema não-linear . . . . .	16
2.6	Esquema geométrico da variedade de sincronização que está situada ao longo das linhas de $45^\circ$ entre todas as coordenadas. As coordenadas da variedade transversal representam um comportamento sem sincronização. 19	19
2.7	Função similaridade para dois Rössler acoplados. a) Parâmetro de acoplamento igual a 0.05 e diferença entre frequências intrínsecas da ordem de 0.02, sem sincronização com atraso e b) Parâmetro de acoplamento igual a 0.2 e mesma diferença de ordem de frequências de (a), ocorrência de sincronização com atraso. . . . .	22

3.1	Representação esquemática do coração de um mamífero. 1)átrio esquerdo, 2)nodo sinoatrial, 3)átrio direito, 4)nodo atrioventricular, 5)ventrículo direito, 6)ventrículo esquerdo, 7)fibras de Purkinje e 8)feixe de His [54]. . . . .	24
3.2	Eletrocardiograma de um adulto normal. Nesta figura é possível identificar as ondas P, QRS e T [57]. . . . .	25
3.3	Circuito elétrico criado por van der Pol representando sua equação e modelando o sistema cardíaco. No circuito, C representa um capacitor de aproximadamente $1 \mu\text{F}$ , Ne representa a lâmpada de neon, R representa um resistor de $1 \text{ M}\Omega$ e V representa uma bateria de 180 volts. . . . .	27
3.4	Diagrama de bifurcação e o maior expoente de Lyapunov para um oscilador de van der Pol sem força externa. Para este caso os valores dos parâmetros são os seguintes: $n = 5.0$ , $w = 1.0$ , $F(t) = 0.0$ e $x_2$ é uma das variáveis do sistema. . . . .	28
3.5	Representação do diagrama de bifurcação com seu respectivo maior expoente de Lyapunov para um oscilador de van der Pol com força externa do tipo $a\cos(pt)$ onde $a = 2.0$ e $p = 1.0$ . E também $n = 5.0$ , $w = 1.0$ e $x_2$ representa uma das variáveis do sistema. Para este caso o sistema tem comportamento <i>quasi</i> -periódico. . . . .	29
4.1	Comportamento do sistema unidirecional sem forçamento. a)diferença entre os números de rotação dos dois osciladores, b)expoente de Lyapunov e c)expoente de Lyapunov condicional. Nesta situação $b_1 = 1.0$ , $b_2 = 0.66$ , $c_1 = 0.0$ e $a_1 = 0.0$ . . . . .	36
4.2	Comportamento do sistema através da função similaridade. Percebe-se neste gráfico, pelo comportamento da curva, a não presença de sincronização com atraso. Na curva (1) $c_2 = 0.05$ , em (2) $c_2 = 0.12$ e em (3) $c_2 = 0.48$ . . . . .	38
4.3	Diferença de fases entre os dois osciladores para alguns valores do parâmetro de acoplamento $c_2$ . Devido ao não aparecimento de uma constante entre a diferença de fases, percebe-se a não ocorrência de sincronização de fase no sistema. a) $c_2 = 0.15$ , b) $c_2 = 0.25$ , c) $c_2 = 0.35$ e d) $c_2 = 0.5$ . . . . .	39

4.4	Série temporal e espectro de frequência para o sistema unidirecional onde em (1), $x_2$ é representado pela curva cheia e $x_4$ pela curva pontilhada, enquanto em (2) $x_2$ é a curva com maior espessura. a)sem sincronização, $c_2 = 0.05$ , b)sincronização de ritmos, $c_2 = 0.12$ e c)sincronização generalizada 1:1 - não é sincronização com atraso devido a diferença de amplitudes -, $c_2 = 0.48$ . Os espectros de frequências em (2) estão ao lado de cada série temporal respectiva em (1). . . . .	40
4.5	Diagrama de bifurcação com os dois maiores expoentes de Lyapunov para o sistema unidirecional sem forçamento. Pelos dois gráficos percebe-se a existência de alguns pontos de bifurcação, um comportamento caótico para determinados valores de $c_2$ e um comportamento periódico do sistema para valores de $c_2$ maiores que aproximadamente 0.15. . . . .	41
4.6	Diagrama de parâmetros onde as regiões em branco representam estados não sincronizados e as regiões em cinza representam estados com presença de sincronização. Este gráfico é feito com uma grade de 200X500. . . . .	43
4.7	Representação do expoente de Lyapunov condicional variando em função das frequências normais. a)sistema unidirecional com $c_2 = 2.5$ , caso onde o sistema está sincronizado e b)sistema unidirecional com $c_2 = 0.15$ , caso onde o sistema está passando de sincronizado para não sincronizado. . . . .	44
4.8	Formas de sincronização do sistema. a)diferença dos números de rotação indicando sincronização generalizada, b)expoente de Lyapunov mostrando comportamento caótico e c)expoente de Lyapunov condicional mostrando sincronização no sistema. Nesta situação $b_1 = 1.0$ , $b_2 = 0.66$ , $c_1 = 0.0$ e $a_1 = 0.95$ . . . . .	45
4.9	Representação do sistema através de bifurcações e dos dois maiores expoentes de Lyapunov. Nota-se nesta figura a presença de hipercaos quando da variação do parâmetro de acoplamento. . . . .	47
4.10	Série temporal e espectro de frequência para valores distintos de $c_2$ no sistema unidirecional com forçamento. Em (1) $x_2$ é representado pela linha cheia enquanto $x_4$ pela linha pontilhada, em (2) $x_2$ é representado pela linha mais grossa. a) $c_2 = 0.1$ e percebe-se a não sincronização entre os osciladores, b) $c_2 = 0.45$ e ocorre a sincronização generalizada e em c) $c_2 = 50.0$ e aparece um tipo de sincronização completa. Os espectros de frequências estão ao lado de cada série temporal respectiva. . . . .	48

4.11	Função similaridade para alguns valores de $c_2$ . Através dela percebe-se a inexistência de sincronização com atraso a não ser quando os valores de $c_2$ são muito altos. Na curva (1) $c_2 = 0.4$ , em (2) $c_2 = 0.5$ , em (3) $c_2 = 0.9$ , em (4) $c_2 = 3.0$ e em (5) $c_2 = 50.0$ . . . . .	49
4.12	Diagrama de parâmetros quando o sistema possui variação da frequência normal do primeiro oscilador. A área em branco representa os estados sincronizados enquanto a área em cinza mostra os valores para os quais os osciladores não sincronizam. Este gráfico tem a escala percorrida em uma grade de 200X500. . . . .	50
4.13	Comportamento do segundo oscilador com a variação de $b_2$ . Em (1) estão representados os números de rotação para o segundo oscilador e em (2) representa-se o expoente de Lyapunov condicional do sistema. Para ambos os casos a) $b_2 = 0.166$ , b) $b_2 = 0.33$ , c) $b_2 = 0.5$ e d) $b_2 = 0.66$ . 52	52
4.14	Comportamento do segundo oscilador quando da variação de $b_2$ . Em (1) está a representação do número de rotação do segundo oscilador e em (2) a representação do expoente de Lyapunov condicional do sistema. Tanto para (1) quanto para (2) em a) $b_2 = 0.166$ e a correlação ( $C_o$ ) com a função exponencial é igual a 0.96, b) $b_2 = 0.33$ e $C_o = 0.98$ , c) $b_2 = 0.5$ e $C_o = 0.96$ e d) $b_2 = 0.66$ e $C_o = 0.97$ . . . . .	53
4.15	Comportamento do sistema na presença de ruído em $c_2$ via expoente de Lyapunov condicional. a)10% de ruído em $c_2$ , no sistema sem força externa; b)50% de ruído em $c_2$ , no sistema sem força externa; c)10% de ruído em $c_2$ , no sistema com força externa e d)50% de ruído em $c_2$ , no sistema com força externa. . . . .	56
4.16	Comportamento do sistema na presença de ruído em $b_1$ via expoente de Lyapunov condicional. a)10% de ruído em $b_1$ , no sistema sem força externa; b)50% de ruído em $b_1$ , no sistema sem força externa; c)10% de ruído no modo normal do primeiro oscilador, no sistema com força externa e d)50% de ruído no modo normal do primeiro oscilador, no sistema com força externa. . . . .	57
5.1	Comportamento do sistema através do diagrama de bifurcação e do expoente de Lyapunov. a) diagrama de bifurcação do sistema bidirecional forçado com $c_1 = 0.01$ , $b_1 = 1.0$ , $b_2 = 0.66$ e $a_1 = 0.95$ . b) os dois maiores expoentes de Lyapunov do sistema que mostram os pontos de bifurcação, da presença de caos e de periodicidade. . . . .	62

5.2	Análise de sincronização do sistema bidirecional forçado. Em a) diagrama da diferença do número de rotação dos dois osciladores indicando sincronização de frequências, em b) máximo expoente de Lyapunov condicional que mostra os valores de $c_2$ para os quais o sistema sincroniza. . . . .	64
5.3	Estudo da sincronização de fase entre os osciladores. Em a) valores de $c_2$ para os quais o sistema é caótico. Nas retas (1) $c_2 = 1.7$ , (2) $c_2 = 1.8$ , (3) $c_2 = 2.5$ e (4) $c_2 = 3.8$ . No gráfico b) estão os valores de $c_2$ para os quais os osciladores sincronizam com comportamento periódico. Nas retas (5) $c_2 = 0.5$ , (6) $c_2 = 0.75$ , (7) $c_2 = 1.2$ e (8) $c_2 = 1.5$ . . . . .	65
5.4	Verificação da presença de sincronização com atraso no sistema bidirecional forçado. Em a) valores para o parâmetro de acoplamento onde o sistema possui dinâmica caótica. Na curva (1) $c_2 = 1.7$ , (2) $c_2 = 1.9$ e (3) $c_2 = 3.0$ . No gráfico b) cálculo da função similaridade para quando o sistema é periódico. Em (4) $c_2 = 0.5$ , (5) $c_2 = 0.75$ e (6) $c_2 = 1.5$ . . . . .	66
5.5	Série temporal e espectro de frequência para o sistema bidirecional forçado, com $c_1 = 0.01$ . Em (1) comportamentos de séries temporais para diversas situações do sistema onde $x_2$ está representado pela linha cheia enquanto $x_4$ pela linha pontilhada. Em (2) espectros de frequências para os mesmos valores de $c_2$ relacionados em (1) e onde $x_2$ é representado pela linha mais grossa. (a) tem comportamento caótico não-sincronizado, com $c_2 = 0.25$ , (b) tem comportamento periódico não-sincronizado, com $c_2 = 1.0$ , (c) tem comportamento periódico sincronizado, com $c_2 = 1.5$ e finalmente (d) tem comportamento caótico sincronizado, com $c_2 = 2.0$ . . . . .	67
5.6	Séries temporais em (1) e espectros de frequência em (2), para o sistema bidirecional forçado, com ruído de 1% em $b_1$ , onde os osciladores têm comportamento periódico. a) $c_2 = 1.0$ - sincronização instável e b) $c_2 = 1.5$ - sincronização estável. . . . .	68
5.7	Comportamento do sistema através de diagramas de bifurcações para diferentes valores de $c_1$ no sistema bidirecional forçado. a) $c_1 = 0.005$ , b) $c_1 = 0.1$ , c) $c_1 = 0.3$ e d) $c_1 = 0.5$ . . . . .	69

5.8	Representação de formas de sincronização do sistema para variações de $b_2$ . (1) Número de rotação do segundo oscilador para diferentes valores de $b_2$ . Cada valor de $b_2$ em (1) tem seu correspondente em (2) que é o gráfico do expoente de Lyapunov condicional do sistema. a) $b_2 = 0.166$ , c) $b_2 = 0.33$ , e) $c_2 = 0.5$ e f) $c_2 = 0.66$ . . . . .	71
5.9	Diagrama de parâmetros onde ocorre variação dos parâmetros $c_2$ e $b_1$ para o sistema bidirecional e forçado. Este gráfico é feito considerando uma grade de $200 \times 500$ . As regiões em branco representam estados de sincronização estável, enquanto as regiões em cinza representam estados sincronizados instavelmente. . . . .	73

# Capítulo 1

## Introdução

O primeiro estudo relacionado com o batimento cardíaco em osciladores não-lineares data de 1928 com o trabalho de B. van der Pol e J. van der Mark [1]. Após esta data, muito tem sido feito para se compreender melhor e poder-se prever, com maior antecedência e eficácia, possíveis anomalias cardíacas existentes em seres vivos.

Para estudar sistemas dinâmicos, costuma-se dividi-los em dois tipos diferentes quanto a variação temporal: os mapas, sistemas dinâmicos onde a variável temporal é discreta, isto é,  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ ; e os fluxos, sistemas dinâmicos onde a variável temporal evolui continuamente. Neste trabalho estuda-se um sistema de dois osciladores acoplados, matematicamente modelados por fluxos, ou seja, equações diferenciais ordinárias.

Os dois osciladores são do tipo van der Pol, isto é, osciladores que possuem um termo não-linear para a dissipação/injeção de energia, um termo de frequência intrínseca e ocasionalmente uma força externa. No entanto, no trabalho original, o termo de força externa não existe. Matematicamente os osciladores de van der Pol são descritos da seguinte maneira [1]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - n)\frac{dy}{dt} + w^2y = F(t), \quad (1.1)$$

equação que foi introduzida na literatura em 1928 em um modelo simples de oscilador em um circuito de tubo de vácuo. Aqui,

$\frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow$  termo inercial,

$w^2 \rightarrow$  modo normal,



$F(t)$  → força externa. Pode ser qualquer função, periódica ou não,

$(y^2 - n) \frac{dy}{dt}$  → injeção ou dissipação de energia, onde  $y^2 \frac{dy}{dt}$  é o termo não-linear.

Esta equação diferencial ordinária de segundo grau, pode ser transformada em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeiro grau ou em três, dependendo da existência do termo de força externa e de qual função é por ele representada. Um campo vetorial, ou equações ordinárias, que dependem explicitamente do tempo, são chamados não-autônomos e os que não dependem explicitamente do tempo são denominados autônomos [2], no entanto, equações não-autônomas podem ser escritas como autônomas, apenas sendo definida uma nova variável dependente [3].

Desde 1928, com o trabalho inicial de van der Pol e van der Mark [1], muitos outros autores têm trabalhado com modelos que representem e realizem um bom estudo comparativo com um modelo cardíaco real. Entre estes modelos, alguns trabalhos são feitos através de mapas [4], [5], [6], enquanto outros são realizados, assim como este aqui apresentado, através de equações diferenciais ordinárias [7], [8], [9], [10], [11]. Além claro, de outros estudos biológicos que modelam o sistema cardíaco através de potenciais iônicos [12], ou estudos mais fisiológicos do tecido cardíaco.

Também, alguns trabalhos encontrados na literatura [7], [13], [14], [15], [16], [17], utilizam a equação de van der Pol, sendo que a resolução desta, leva a um bom modelamento de sistemas que possuam alguma relação com sistemas biológicos quaisquer.

Na literatura existente, ainda não há uma certeza se o sistema cardíaco normal possui um comportamento periódico ou caótico. Alguns autores consideram que apenas existe um comportamento caótico na dinâmica cardíaca, caso este órgão esteja com algum distúrbio [1], caso contrário, seu comportamento é puramente periódico. Já em outros casos, acredita-se que o comportamento cardíaco é normalmente complexo [18]. Enquanto ainda existem trabalhos que mostram que o coração pode ser saudável ou não, e ter ao mesmo tempo, comportamento caótico e periódico [7], [17], [19], [20], além de alguns que demonstram que o comportamento periódico pode gerar distúrbios na dinâmica cardíaca, e ao mesmo tempo, ser um comportamento de coração saudável, dependendo das formas de acoplamento e funcionamento dos dois nodos cardíacos [21].

O acoplamento dos osciladores se dá pelo fato de se querer modelar os dois nodos do coração, assim, o primeiro oscilador, neste modelo, descreve o comportamento do nodo sinoatrial (SA)<sup>1</sup> e o segundo oscilador modela o batimento do

---

<sup>1</sup>Formação especial de células musculares cardíacas, que conduz estímulos elétricos para outras

nodo atrioventricular (AV)<sup>2</sup>. O termo matemático de acoplamento é o que se poderia imaginar biologicamente como um termo de condução elétrica entre os dois nodos cardíacos. As equações do modelo aqui estudado, serão descritas no capítulo três deste trabalho.

Nesta dissertação apresenta-se um estudo teórico a respeito das possíveis verificações antecipadas de arritmias cardíacas através do expoente de Lyapunov condicional, um conceito básico, que será explicado no próximo capítulo. Além destas previsões, estuda-se os vários tipos de sincronização entre os dois osciladores, bem como suas bifurcações, atratores e diagramas de parâmetros, conceitos que serão explicados no decorrer deste trabalho.

Através do estudo aqui realizado, procura-se analisar conceitos importantes da dinâmica não-linear, bem como tentar relacioná-los ao modelo da dinâmica cardíaca. Cada conceito utilizado nesta dissertação mostra-se útil para uma boa compreensão do sistema em estudo, que será demonstrado no capítulo três desta dissertação, e de sistemas caóticos, periódicos e sincronizados de uma forma geral.

Além disso, procurou-se estabelecer valores de parâmetros para os quais o sistema tem um comportamento sincronizado, assim como, verificar como o modo normal dos osciladores influencia na dinâmica do modelo utilizado e quanto o modelo é bom para representar um sistema cardíaco real.

No segundo capítulo são discutidos conceitos básicos a respeito da dinâmica não-linear, bem como estudos sobre sincronização e a função similaridade.

O terceiro capítulo deste trabalho traz o modelo que é aqui estudado e também faz uma pequena observação sobre o porquê de se estudar sistemas matemáticos para modelar sistemas biológicos, e demonstra o comportamento de um único oscilador de van der Pol.

No quarto capítulo é discutido o sistema proposto e mostra-se os resultados obtidos quando o sistema é unidirecional, bem como, faz-se uma análise do que ocorre e como os resultados podem auxiliar em detecções de doenças cardíacas em mamíferos.

No quinto capítulo, da mesma forma que no anterior, faz-se um estudo geral do sistema, no entanto, neste capítulo o sistema é bidirecional.

Por último, o sexto capítulo é destinado às conclusões a respeito do que foi

---

partes do coração e que se localiza no ponto onde a veia cava superior penetra no átrio direito.

<sup>2</sup>Também uma formação especial de células musculares com a mesma capacidade do nodo sino-atrial, localizado na parede do septo do átrio direito, imediatamente posterior à válvula tricúspide.

estudado no restante do trabalho.

Assim, sabendo-se que nos últimos tempos a interdisciplinaridade tem crescido muito entre as ciências, quer-se com este trabalho, mostrar que com uma maior convivência entre estas áreas, o desenvolvimento científico e tecnológico pode avançar de uma forma mais conveniente para toda a população. Por isso foi escolhido trabalhar com um sistema de osciladores que pode, dentro do possível, modelar o comportamento cardíaco.

O modelo matemático utilizado nesta dissertação, de uma maneira ampla tem o seu objetivo realizado, modelando razoavelmente o sistema cardíaco. Assim sendo, acredita-se que com estudos avançados no campo da biologia poder-se-á, em um futuro breve, conhecer-se um modelo que possa descrever ainda melhor, todos os ritmos biológicos. E espera-se, desta forma, que este trabalho possa contribuir para a evolução tecnológica.

# Capítulo 2

## Dinâmica Teórica

### 2.1 Conceitos básicos

A dinâmica não-linear e o conceito de caos, tiveram seu início ao final do século XIX com o estudo do problema de três corpos por Henri Poincaré [3]. A partir deste trabalho, muitas pesquisas e descobertas têm sido realizadas a respeito deste tópico interessantíssimo da física-matemática. Algumas definições são importantes para se compreender um pouco melhor esta área da ciência. Dentre estas definições, coloca-se aqui algumas idéias básicas a respeito de atratores e bifurcações.

Da física mais fundamental tem-se a definição de espaço de fase, ou seja, o espaço das variáveis de estado que definem o movimento de um corpo. Considerando o espaço de fase, para uma solução de  $x(t)$ , isto é, uma curva particular deste espaço, é necessário que se tenha uma condição inicial, ou seja, cada variável do sistema deve possuir um valor quando o tempo é inicializado [2]. Ao se considerar um sistema dissipativo, isto é, um sistema onde existe uma diminuição de volume do espaço de fase relacionado a ele, com a passagem do tempo, e o espaço de fase relacionado a este mesmo sistema, as condições iniciais deste sistema, a medida que o tempo tende para o infinito, possuem uma trajetória que converge para um outro determinado conjunto deste mesmo espaço de fase que é, neste caso, denominado atrator do sistema [22].

No caso de um sistema dissipativo, tem-se a possibilidade de confundir o atrator final com os transientes do sistema, isto significa que um pequeno intervalo de tempo pode levar a qualquer possível comportamento, enquanto que um intervalo de tempo suficientemente grande leva o sistema única e exclusivamente ao seu atrator, seu estado final. Atratores somente são possíveis em sistemas dissipativos.

Existem várias formas de atratores. Eles podem ser pontos fixos, ciclos limites, toros e caóticos.

Os pontos fixos de um sistema satisfazem a condições de equilíbrio do sistema, ou seja, de uma forma generalizada, considerando um sistema autônomo do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

os pontos fixos, que podem ser mais de um, são aqueles que satisfazem a relação

$$f(x^*) = 0, \quad (2.2)$$

onde  $x^*$  representa o ponto de um estado parado, ou melhor, um ponto que não varia com o tempo. Os pontos fixos podem ser estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis. Diz-se que um ponto fixo é assintoticamente estável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação, aproxima-se deste ponto quando o tempo tende para o infinito. O ponto fixo é estável se a resposta do sistema a uma perturbação permanece pequena quando o tempo tende para o infinito [23]. Estes exemplos são demonstrados na figura 2.1.

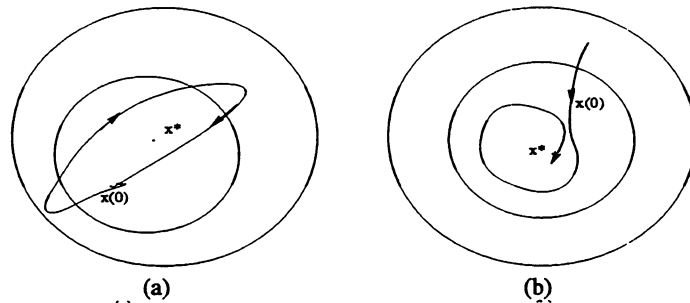


Figura 2.1: Exemplos de estabilidade de pontos fixos. a) Comportamento de um ponto fixo estável e b) Comportamento de um ponto fixo assintoticamente estável.

Finalmente um ponto de equilíbrio é dito ser instável se com o tempo tendendo para o infinito, a perturbação cresce. Todas estas definições têm conceitos locais, isto é, as soluções existentes são válidas apenas para pontos na vizinhança do ponto fixo do sistema [23]. Ciclos limites são trajetórias fechadas que podem atrair ou repelir soluções próximas, significando que trajetórias vizinhas espiralam em direção ao ciclo limite [24]. Estas trajetórias são periódicas, isto é, pertencem a movimentos regulares. Para que no sistema apareça um ciclo limite, o ponto fixo deve se desestabilizar gerando uma órbita periódica. Pelo critério de Bendixson [2], somente ocorre o aparecimento de uma órbita periódica em um sistema dinâmico, caso a soma das derivadas parciais do sistema seja igual a zero, ou mude de sinal [2], ou seja, supondo um sistema bidimensional da forma,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (2.4)$$

a expressão

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (2.5)$$

deve ser zero ou mudar de sinal.

Toros são atratores de sistemas *quasi*-periódicos que possuem órbitas que, como o nome indica, têm uma periodicidade quase regular, ou seja, são sistemas periódicos que possuem duas ou mais frequências fundamentais diferentes e incommensuráveis [22]. Um atrator toroidal pode possuir dimensão fractal, isto é, pode possuir dimensão não inteira no espaço de fase, diferentemente do caso de um ponto fixo que possui dimensão nula, ou uma curva fechada que possui dimensão um, assim, dimensão fractal é uma dimensão de números não-inteiros; possui, considerando-se um toro  $n$ -dimensional, expoentes de Lyapunov, que são a taxa com que duas trajetórias inicialmente muito próximas se afastam ou aproximam exponencialmente, negativos nas direções perpendiculares ao movimento e nulos ao longo da trajetória [23].

Para uma definição mais rigorosa de expoente de Lyapunov, considerando  $t$  o tempo contínuo do sistema,  $x$  a variável espacial e  $\lambda$  o expoente, então, matematicamente, define-se o maior expoente de Lyapunov da seguinte forma [25],

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|} \right). \quad (2.6)$$

No entanto, numericamente, os expoentes de Lyapunov são encontrados através da linearização e normalização das equações que representam o sistema em estudo. De uma maneira mais geral, os expoentes de Lyapunov são as médias exponenciais de divergência ou convergência de órbitas no espaço de fase [26]. Desde que a orientação de um elipsóide muda continuamente no decorrer da sua evolução, as direções associadas com um dado expoente, variam em uma complicada trajetória ao longo do atrator do sistema [26]. Cada expoente positivo reflete uma direção em que o sistema experimenta repetições de “dobramentos” e “esticamentos” que relacionam estados próximos no atrator [26].

Atrator caótico é aquele que apresenta dependência sensível às condições iniciais, ou seja, duas condições iniciais muito próximas no sistema, divergem exponencialmente no tempo, ao menos para um tempo limitado, tendo comportamentos diferentes [27]; possui auto-similaridade o que significa possuir uma estrutura hierárquica de invariância de escala [28], apresenta dimensão fractal e contrai em uma ou mais direções e expande em outras, apresentando dobras.

Em um sistema que possui espaço de fase tridimensional, pode-se descobrir o tipo de atrator analisando os três expoentes de Lyapunov considerados, da mesma forma, isso ocorre para sistemas de dimensão maior. Coloca-se aqui um exemplo de valores deste expoente para cada tipo de atrator, considerando apenas o caso tridimensional, mas que é também válido, sob outras considerações, para dimensões maiores.

TIPO DE ATRATOR	EXPOENTE DE LYAPUNOV
ponto fixo	(-, -, -)
toro ( <i>quasi</i> -periódico)	(0, 0, -)
ciclo limite	(0, -, -)
caótico	(+, 0, -)

Exemplos destes tipos de atratores são demonstrados na figura 2.2 para um sistema de van der Pol (VDP) cuja equação é representada como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - n)\frac{dy}{dt} + w^2y = a \cos(pt) \quad (2.7)$$

Em geral, um sistema dinâmico não-linear possui um diagrama de fases constituído por vários pontos de equilíbrio que atraem soluções próximas. Ao conjunto de todas as condições iniciais que convergem para um mesmo atrator dá-se o nome de bacia de atração [29]. Um sistema de equações diferenciais, ou também mapas, pode possuir várias bacias de atração, isto é, algumas condições iniciais possuem trajetórias que são atraídas para determinados atratores, enquanto outras trajetórias de condições iniciais diversas, são atraídas para outros atratores [30], neste caso, cada atrator do sistema apresenta a sua bacia de atração, com isso, ao se variar as condições iniciais do problema, pode-se em alguns casos, ocorrer a passagem de uma bacia de atração para outra [23]. Ocorrendo a existência de várias bacias em um sistema, ocorre também a presença de fronteiras entre elas. Essas fronteiras podem ser curvas suaves ou curvas mais complexas que apresentam dimensão fractal [3].

Bifurcações são alterações do comportamento do sistema, no decorrer da variação de um dos parâmetros, que fornecem mudanças qualitativas na dinâmica do problema. As bifurcações que ocorrem com um dos parâmetros de controle variando,

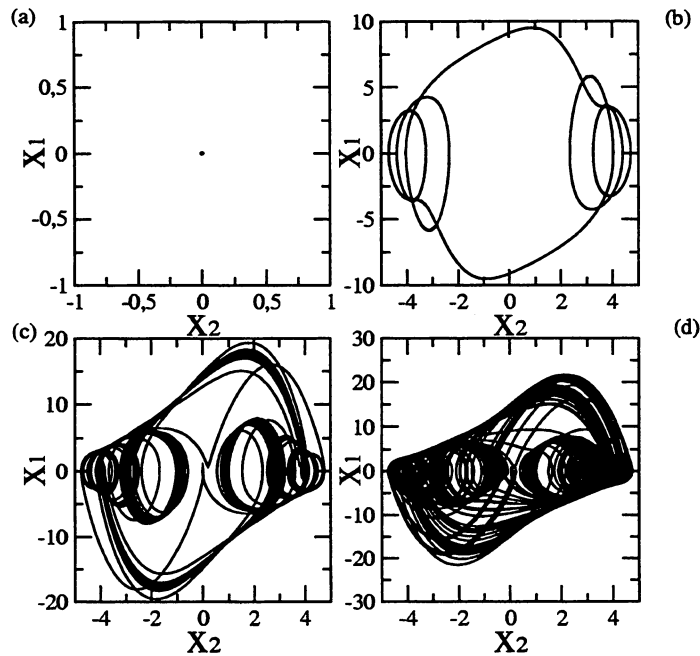


Figura 2.2: Exemplos de atratores de um sistema de VDP como em 2.7 com  $n = 5.0$  e  $w = 1.0$  [15]. a) ponto fixo para todas as condições iniciais iguais a zero, b) ciclo limite para para  $a = 40.0$  e  $p = 5.25$ , c) toro para  $a = 40.0$  e  $p = 5.5$ , d) caótico para  $a = 40.0$  e  $p = 5.478$

são importantíssimas no estudo de um sistema, pois elas fornecem modelos de transições e instabilidades [24]. A ocorrência de caos em sistemas dinâmicos está quase sempre ligada a algum tipo de bifurcação. Quando há ocorrência de bifurcações em um sistema, o diagrama de fase muda e novos pontos estacionários podem aparecer, desta forma também, pontos que anteriormente eram estáveis podem se tornar instáveis, ocorrendo também o inverso.

A figura 2.3 representa um tipo de bifurcação ocorrida em um sistema de VDP como na equação 2.7, com a variação de um dos parâmetros.

Existem vários tipos de bifurcações, cada uma delas ocorre devido a uma determinada variação dos autovalores do sistema. Autovalores são números relacionados ao sistema que indicam a sua estabilidade. Um sistema  $n$ -dimensional possuirá  $n$ -autovalores que podem ser puramente reais, complexos ou puramente complexos, podendo também ser iguais ou diferentes. Os autovalores de um sistema são determinados através da seguinte equação:

$$\det(A - \beta I) = 0, \quad (2.8)$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana do sistema, ou seja, supondo um sistema dado pelas



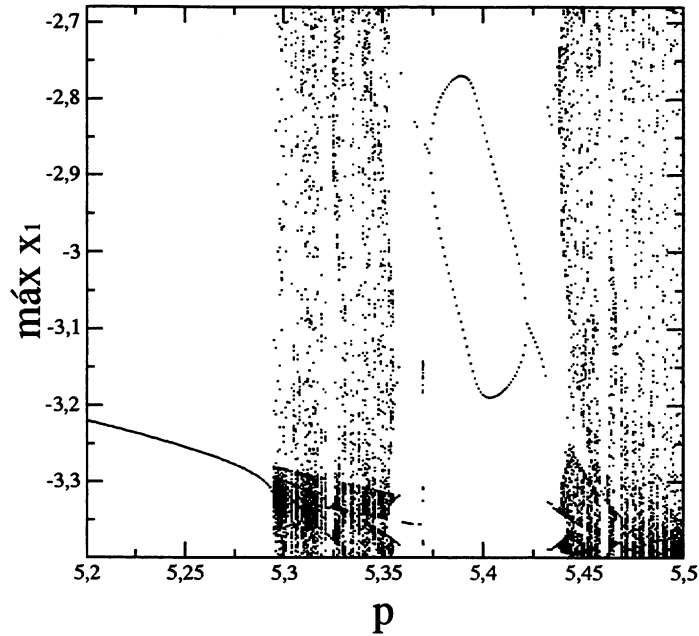


Figura 2.3: Exemplo de bifurcação de um sistema de VDP com forçamento externo do tipo  $\text{acos}(pt)$  com  $w = 1.0$ ,  $n = 5.0$ ,  $a = 40.0$  e variando o parâmetro  $p$ .

equações 2.3 e 2.4, a matriz Jacobiana será,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\beta_i$  são todos os autovalores associados a matriz Jacobiana e  $I$  é a matriz identidade.

Neste trabalho não foi feita uma análise mais detalhada a respeito dos tipos de bifurcações envolvidas no sistema, sendo no entanto, que estas foram de grande valia para analisar o comportamento do sistema, com a variação do parâmetro de acoplamento. De qualquer forma, é importante conhecer os tipos de bifurcações e como elas ocorrem, pois, em sistemas cardíacos, o estudo dos tipos de bifurcações é de grande interesse. Assim, apresenta-se aqui os tipos mais conhecidos e usados desta análise:

- Sela-Nó: Mecanismo onde pontos fixos são criados e destruídos, isto é, quando um parâmetro é variado, dois pontos fixos, um instável e outro estável, movem-se em direção um do outro, colidem e são mutuamente aniquilados [24].
- Transcrítica: Neste tipo de bifurcação os pontos fixos não desaparecem após as bifurcações, apenas a estabilidade é variada, ou seja, os pontos fixos que eram estáveis tornam-se instáveis e os que eram instáveis tornam-se estáveis [23].

- Forquilha: Ponto fixo estável torna-se instável e neste ponto aparecem dois pontos fixos estáveis simétricos [22].
- Hopf: O sistema passa de uma situação de equilíbrio para uma outra de ciclo limite. Aqui dois autovalores complexos conjugados cruzam o eixo imaginário em direção ao lado direito do plano, desta forma, o ponto fixo do sistema é desestabilizado [24].

Exemplos destes tipos de bifurcações são mostradas na figura 2.4.

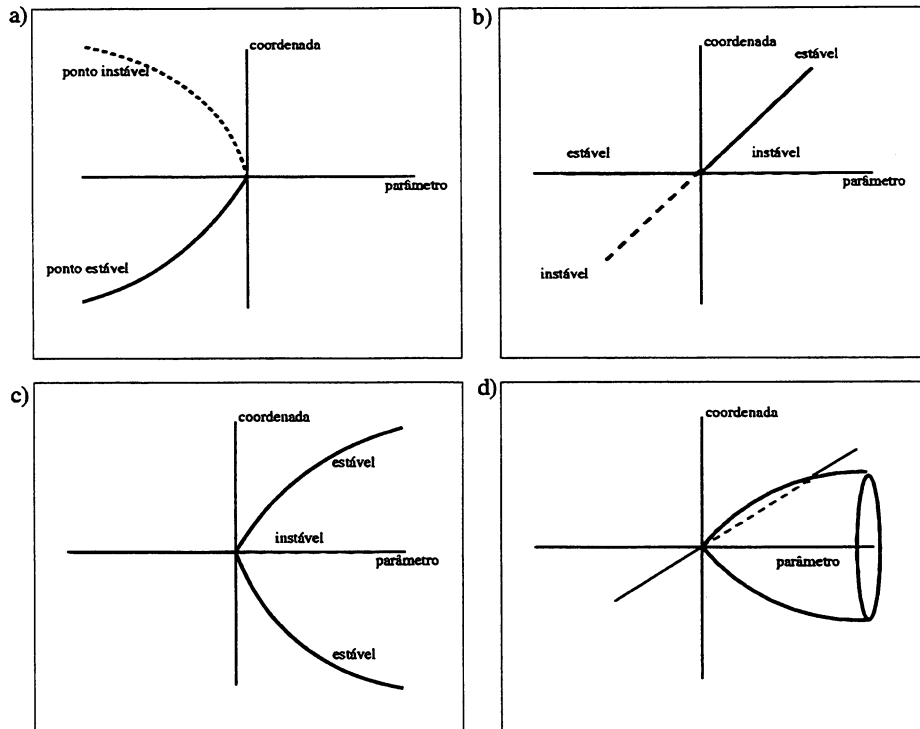


Figura 2.4: Exemplos de alguns tipos de bifurcações. a) bifurcação tipo sela-nó, b) bifurcação transcritical, c) bifurcação tipo forquilha e d) bifurcação tipo hopf.

## 2.2 Periodicidade e caos

O conceito de atrator caótico começou a surgir com um trabalho meteorológico de Lorenz em 1963 [31] que estudava um sistema de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Mas o que é caos? O que difere um sistema caótico de um sistema periódico?

Sistemas periódicos, como o próprio nome indica, são sistemas que se comportam regularmente no tempo, isto é, a partir de determinadas condições iniciais consegue-se prever o comportamento futuro do sistema, já que os valores das variáveis relacionadas ao sistema, repetem-se com o tempo.

Os atratores de um sistema dissipativo, periódico ou *quasi*-periódico, são regulares, geralmente de dimensão inteira, embora existam atratores estranhos não caóticos. Os atratores daqueles sistemas podem ser pontos fixos, ciclos limites ou toros, esse último apenas para o caso *quasi*-periódico.

Estados assintóticos que diferem de pontos fixos, órbitas periódicas ou *quasi*-periódicas são denominados estados caóticos. Eles possuem comportamento aperiódico de longa duração em um sistema determinístico, isto é, em um sistema que pode ser definido em seu comportamento futuro e não possui ruído ou comportamento estocástico.

Sistemas caóticos têm as seguintes características:

- Atrator com dimensão fractal, que como já mencionado, significa dimensão não inteira [23], apesar da existência de alguns sistemas não caóticos que possuem este tipo de atrator.
- Sensibilidade às condições iniciais.
- Transitividade, isto é, apesar do comportamento aperiódico, o espaço de fase possui um comportamento estacionário após um período transiente.
- Auto-similaridade, o que também ocorre em atratores estranhos não caóticos e que significa possuir uma estrutura hierárquica de invariância de escala [28].
- Um ou mais expoentes de Lyapunov positivos, ou seja, considerando um sistema dinâmico discreto, com seus autovalores, os expoentes de Lyapunov são, em média, os módulos do logaritmo natural dos autovalores do produto das Jacobianas do sistema [32]. Quando o sistema possui mais de um expoente de Lyapunov positivo, diz-se que ele é hipercaótico.

Assim, para sistemas periódicos o expoente de Lyapunov é sempre negativo, para sistemas *quasi*-periódicos o expoente de Lyapunov é nulo, o que também ocorre nos pontos de bifurcação e para sistemas caóticos, o expoente de Lyapunov é positivo.

Como visto na subseção anterior, bifurcações são pontos onde ocorrem mudanças do regime assintótico do sistema. A ocorrência de caos em um sistema acontece através de, basicamente, quatro rotas de bifurcações conhecidas.

Ao se estudar as rotas para o caos, na verdade, se está preocupado com a forma com que um regime periódico pode perder a estabilidade.

As rotas de bifurcações que podem gerar comportamento caótico são:

- *Quasi-Periodicidade*: Nesta rota para o caos um toro dá origem a um atrator estranho. Ela foi proposta por Ruelle e Takens em 1971 [33], onde eles mostraram que após duas bifurcações de Hopf, um sistema de movimento regular, torna-se altamente instável em favor de um movimento caótico [34]. A partir desta rota mostra-se que a bifurcação de Hopf introduz novas frequências fundamentais no sistema. Neste caso, no comportamento caótico, estarão presentes as frequências fundamentais do sistema, juntamente com frequências de banda larga, e não ocorrem frequências que sejam harmônicas das fundamentais [27].
- *Duplicação de Período*: Esta é a rota mais comum de ser encontrada em sistemas dinâmicos não-lineares. Ela é gerada por bifurcações do tipo forquilha. Os dois pontos fixos estáveis que aparecem desta bifurcação são chamados de atratores, e a cada ponto de bifurcação, tem-se atratores de períodos dobrados. Um aspecto interessante da cascata de duplicação de período é a presença de “números universais” denominados  $\delta$  e  $\alpha$ , que aparecem próximos das acumulações nos pontos de bifurcação e seus valores são os mesmos para uma grande classe de sistemas físicos. Uma outra característica é que o espectro de frequência de órbitas que estão perto da acumulação na duplicação de período, têm características universais [27].
- *Intermitência*: Significa a ocorrência de um sinal que se alterna entre períodos longos *quasi*-regulares e pequenas explosões irregulares. É observado que o número de explosões caóticas aumentam com um parâmetro externo, o que significa que intermitência é uma rota contínua de movimento regular para caótico [34]. Esta rota foi primeiramente estudada por Pomeau e Manneville em 1979 [35]. Existem três tipos de rotas via intermitência. A intermitência do tipo I ocorre devido a uma desestabilização de um ciclo limite, pelo crescimento de uma perturbação; ela ocorre através de uma bifurcação do tipo sela-nó [23], ou seja, dois pontos fixos, um estável e um instável, unem-se originando uma explosão caótica [34]. A intermitência do tipo II ocorre a partir de uma bifurcação de Hopf, onde uma órbita *quasi*-periódica dá origem a uma explosão caótica, ou seja, os pontos fixos complexos conjugados se desestabilizam [22]. Na intermitência do tipo III ocorre a desestabilização de um ciclo limite pelo crescimento de uma perturbação. Ela aparece simultaneamente com uma bifurcação de duplicação de período. Observa-se o crescimento de uma amplitude subharmônica junto com um decréscimo da amplitude fundamental. Quando a amplitude subharmônica atinge um valor alto, o sinal perde sua regularidade e uma explosão turbulenta acontece [34].

- Crise: Crises são mudanças que ocorrem nos atratores caóticos com a variação de parâmetros. Estas mudanças ocorrem devido a colisões do atrator caótico com uma órbita periódica instável [27]. Grebogi, York e Ott em 1983 [36], foram os primeiros a observar este fenômeno. Existem três tipos de crises que podem ser bem distingüidas. No primeiro tipo, um atrator caótico é subitamente destruído quando o parâmetro que varia, passa através de seu valor crítico. No segundo caso, o tamanho do atrator, no espaço de fase, diminui subitamente, enquanto no terceiro tipo de crise, dois ou mais atratores caóticos se unem para formar apenas um outro atrator caótico [27]. A súbita destruição do atrator caótico ocorre quando o atrator colide com uma órbita periódica em sua fronteira de bacia. Esta é chamada crise de fronteira [3]. A súbita diminuição no tamanho do atrator, ocorre quando a órbita periódica, com a qual o atrator caótico colide, está no interior da sua bacia. Esta é chamada crise interior [36]. Por último, a crise de intermitência ocorre quando dois ou mais atratores caóticos colidem simultaneamente com uma ou várias órbitas periódicas, na fronteira de bacia que as separam [27].

## 2.3 Variedades e sincronização

Introduz-se agora um dos conceitos mais fundamentais no que diz respeito a este trabalho, isto é, o conceito de sincronização.

A sincronização é um fenômeno universal que ocorre devido ao acoplamento de dois ou mais osciladores [37]. Acoplar dois ou mais sistemas significa colocar uma das variáveis de um sistema como função de todos os demais sistemas associados. Os acoplamentos podem ser unidirecionais, em que mudanças de um dos sistemas não afetam os demais; e bidirecionais em que cada sistema é afetado pelos demais [3]. O fenômeno de sincronização é compreendido como sendo o ajuste de ritmos de osciladores não-idênticos auto-sustentáveis ou de ritmos de osciladores com uma força externa [38].

Antes de se tentar compreender os tipos de sincronização, é necessário que se tenha em mente um conceito mais fundamental da dinâmica, que é a significação de variedades (“manifolds”). Existem variedades tanto em sistemas lineares como em sistemas não-lineares.

Uma variedade é um conjunto que localmente tem a estrutura do espaço Euclidiano e é freqüentemente encontrada como uma superfície  $n$ -dimensional encaixada nos números reais de ordem  $n$  [2].

Para uma mais fácil percepção, é necessário que anteriormente se obtenha

o conceito de variedade através de um sistema linear, pois assim, a compreensão do que significa uma variedade em um sistema não-linear, tende a ficar mais simples.

Supondo a matriz Jacobiana de um sistema, e seus autovalores associados, tem-se para cada autovalor, um autovetor correspondente. Se o autovalor tem parte real negativa, então o autovetor correspondente será estável, caso o autovalor tenha parte real positiva, o autovetor será instável e se o autovalor tiver parte real nula, então ter-se-á um autovetor central associado a ele [2]. Considerando isso, e supondo que a origem do sistema é um ponto estacionário, então define-se variedade estável, ao subespaço invariante gerado pelos autovetores estáveis; variedade instável ao subespaço invariante gerado pelos autovetores instáveis e variedade central ao subespaço gerado pelos autovetores centrais [27].

As variedades invariantes correspondentes aos autoespaços ou subespaços generalizados são, simplesmente, superfícies no  $R^n$  e o movimento em cada uma destas superfícies pode ser obtido resolvendo-se um dos conjuntos de uma simples equação diferencial [39].

Considerando o que foi escrito acima e levando estes conceitos para um sistema não-linear, supõe-se um conjunto  $B$  que é uma vizinhança de um ponto estacionário  $z$ , então, por analogia a um sistema linear, pode-se definir uma variedade estável local ( $W_{loc}^{est}$ ) e uma variedade instável local ( $W_{loc}^{ins}$ ) pelas seguintes sentenças [2]:

$$W_{loc}^{est}(z) = y \in B / \varphi(y, t) \rightarrow x \text{ quando } t \rightarrow \infty, \varphi(y, t) \in B \forall t \geq 0, \quad (2.9)$$

$$W_{loc}^{ins}(z) = y \in B / \varphi(y, t) \rightarrow x \text{ quando } t \rightarrow -\infty, \varphi(y, t) \in B \forall t \leq 0, \quad (2.10)$$

o que quer dizer que supondo um ponto qualquer pertencente a vizinhança do ponto estacionário, a trajetória tende ao ponto estacionário quando o tempo vai para o infinito (isto no caso estável) e que esta trajetória passa em algum momento pela vizinhança para qualquer tempo a partir do início desta mesma órbita.

O teorema conhecido como teorema da variedade estável, diz que quando existem variedades estáveis e instáveis em um sistema linear - que são os próprios autovetores generalizados ou subespaços -, então existirão também variedades locais estáveis e instáveis no sistema não-linear que serão, respectivamente, tangenciais às variedades do sistema linear na origem e tão suaves quanto a função original [3]. Para uma melhor visualização, uma visão gráfica deste teorema é mostrada na figura 2.5.

Uma variedade estável não pode interceptar uma outra variedade estável,

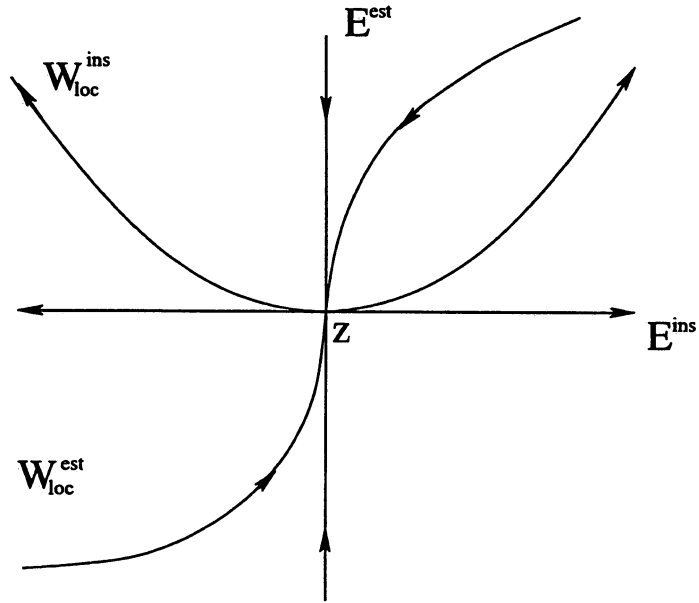


Figura 2.5: Subespaço estável ( $E^{est}$ ) para um sistema linear, subespaço instável ( $E^{ins}$ ) e suas respectivas variedades invariantes estável ( $W_{loc}^{est}(0)$ ) e instável ( $W_{loc}^{ins}(0)$ ) para um sistema não-linear

ocorrendo o mesmo com uma variedade instável, no entanto, uma variedade estável pode interceptar uma instável. Trajetórias que iniciam e terminam no mesmo ponto fixo são chamadas de órbitas homoclínicas. Elas são comuns em sistemas conservativos, mas são raras de outra forma. Uma órbita homoclínica não corresponde a soluções periódicas, pois as trajetórias tentam eternamente se aproximar do ponto fixo, mas não chegam até ele [24]. Quando existe uma interseção de uma variável estável de um ponto fixo, com uma instável de outro ponto fixo, então tem-se uma interseção heteroclínica [27].

Tendo-se uma idéia simples do conceito de variedades, então pode-se agora introduzir, de uma maneira teórica, o conceito de variedade de sincronização e dos tipos de sincronização existentes. Antes porém, deve ser feita uma diferenciação entre alguns conceitos básicos.

O estudo sobre sincronização em sistemas caóticos tem crescido consideravelmente desde os últimos dez anos, no entanto, este conceito já existe a muito tempo considerado-se sistemas periódicos, isto é, a sincronização de fases entre dois osciladores periódicos, é na literatura, chamada de travamento de fases [40], e ela ocorre quando

$$|\varphi_{n,m}| = |n\phi_1 - m\phi_2| = \text{const.}, \quad (2.11)$$

sendo  $n$  e  $m$  inteiros quaisquer,  $\phi_{1,2}$  fases dos osciladores, somadas para todo o tempo e  $\varphi_{n,m}$  a diferença de fase generalizada. Da mesma forma ocorre para o travamento de frequências, ou seja,

$$n\Omega_1 = m\Omega_2, \quad (2.12)$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são as frequências fundamentais dos sistemas, definidas como  $\frac{2\pi}{T_n}$  onde  $T_n$  é o período de cada sistema.

Assim, há uma diferença de conceituação quando é analisado um sistema com osciladores periódicos e um com osciladores caóticos. Portanto, considerando osciladores periódicos, tem-se na ocorrência de travamento de frequências<sup>1</sup>, uma quantidade denominada número de rotação, usada para descrever as mudanças topológicas do fluxo, através das órbitas de duplicação de período e que é definido da seguinte forma:

$$\Omega_{(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta^{(i)}(t + \tau) - \theta^{(i)}(\tau)}{t}, \quad (i = 1, 2) \quad (2.13)$$

onde  $\tau$  é escolhido para valores onde os transientes do sistema já foram ultrapassados [41] e  $\theta$  é a fase do oscilador. Além disso, o número de rotação é também conhecido como “winding number” que é definido como a média do número de rotações executada pela órbita do oscilador. No sistema, representa uma situação de frequência perturbada. Este conceito é também importante no caso de sistemas caóticos. Baseando-se nesta quantidade, existe também uma outra denominada escada do diabo (“devil’s staircase”)<sup>2</sup>, que tem grande importância neste contexto.

Quando o número de rotação é um número racional, a trajetória, após  $m$  ciclos, sendo  $\frac{n}{m}$  a representação do número de rotação, fecha-se sobre o toro e o sistema possui um regime periódico. Com este acontecimento, diz-se que o sistema está em um estado travado (“mode-locked”) ou existe uma sincronização (“frequency-locking”) [23]. Por outro lado, existe um outro tipo de movimento quando o número de rotação é irracional, para este caso existe um movimento *quasi*-periódico.

O número de rotação de um sistema está relacionado com o aumento médio da fase por unidade de tempo. Este mesmo número, como função da frequência, é a quantidade denominada escada do diabo, uma função crescente com patamares de largura finita para cada número de rotação racional, o que significa que entre cada par de racionais, existe um outro racional no intervalo de travamento de frequências, da mesma forma, sendo o número de rotações contínuo, a cada par de racionais existem

<sup>1</sup>Uma situação onde a interação de dois osciladores não-lineares causam uma auto-sincronização em uma trajetória periódica, em que suas frequências básicas tornam-se comensuradas e permanecem assim sob determinado intervalo de parâmetros [27].

<sup>2</sup>Uma função monotonicamente crescente com patamares de largura finita [23]. Ela acontece quando há ocorrência de infinitos degraus onde o número de rotação não muda seu valor. Nestes degraus o número de rotação é sempre racional e existe um degrau para cada racional entre 0 e 1.



valores irracionais. Disso compreende-se o termo escada do diabo, pois percebe-se a existência de infinitos degraus entre dois outros degraus.

Relacionando periodicidade e *quasi*-periodicidade com sistemas estáveis nos regimes de sincronização, chega-se a conclusão que através do que foi descrito acima, um sistema *quasi*-periódico é estruturalmente instável, pois qualquer pequena modificação em um parâmetro, leva-o a um sistema periódico, ou em algumas situações como rotas para o caos via *quasi*-periodicidade, para um comportamento caótico.

Tendo-se falado a respeito de sistemas periódicos e *quasi*-periódicos, agora passa-se às formas de sincronização em sistemas caóticos.

Existem algumas formas de sincronização entre osciladores caóticos dependendo de se o movimento é idêntico ou somente relacionado em algum outro aspecto do sistema. A sincronização pode ser local, significando que o estado sincronizado é estável e que uma vez sincronizado, pequenas perturbações não dessincronizarão o sistema; ou global, o que significa que não importa onde os sistemas são iniciados em relação ao outro, pois eles sincronizarão sempre [3].

A sincronização completa ou inteira implica em uma coincidência de estados dos sistemas que estão interados, ela somente ocorre se os sistemas acoplados são idênticos [42]. No entanto, no trabalho de Lai e Xiaofeng [43] é mostrado que este tipo de sincronização também ocorre para quaisquer sistemas caóticos de quaisquer dimensões que compartilhem uma região comum de convergência. Para que ocorra sincronização de fase entre dois osciladores caóticos, é necessário que a fase do sistema seja definida. Assim, este tipo de sincronização ocorre se a diferença entre as fases correspondentes dos dois osciladores é limitada por uma constante, isto é,

$$|\varphi_{n,m}| = |n\phi_1 - m\phi_2| < const., \quad (2.14)$$

onde novamente as fases são somadas em todo o intervalo de tempo considerado.

Sincronização de fase não implica em sincronização completa, pelo fato de as amplitudes de ambos os sistemas poderem ser completamente não correlacionadas [44]. Ela ocorre quando as frequências naturais estão relacionadas racionalmente. Este tipo de sincronização é característico de sistemas autônomos contínuos no tempo e não pode ser observada em sistemas forçados periodicamente [40].

A sincronização de frequência entre dois osciladores caóticos é conhecida como sincronização generalizada, já que é quase impossível relacionar os mesmos picos de frequências para dois osciladores caóticos, assim, ocorre este tipo de sincronização se existe uma relação funcional entre os estados de ambos sistemas, ou melhor, a sincronização generalizada ocorre, se e somente se o sistema que é o “indutor” for

assintoticamente estável [45]. Uma condição necessária, mas não suficiente, para a ocorrência de sincronização generalizada é a ausência, no sistema, de um expoente de Lyapunov condicional positivo [46], ou seja, um expoente que é calculado através da translação das variáveis do sistema na direção transversal.

Para se encontrar o expoente de Lyapunov condicional, é necessário encontrar um hiperplano de sincronização no sistema, o sinal deste expoente na direção perpendicular a este hiperplano, determinará a estabilidade deste. Este hiperplano é encontrado reduzindo-se o conjunto de equações de alta dimensão que governam o estado, a um estado síncrono [47], para o sistema apresentado nesta dissertação, este hiperplano é bidimensional. A estabilidade do estado sincronizado é assegurada se um pequeno deslocamento transversal para esta variedade decai com o tempo. Estes pequenos deslocamentos ocorridos no interior deste hiperplano, não afetam a estabilidade do estado sincronizado [47]. Assim, quando as variáveis do sistema são traçadas, se existe algum tipo de sincronização no sistema, as variáveis, em alguma direção, serão idênticas e o movimento permanecerá no plano definido por esta igualdade. Desta maneira, as igualdades de variáveis definem o hiperplano, que depende do tipo de sistema considerado, para se saber quantos graus de liberdade o espaço de estado terá. Portanto, um sistema que possui três graus de liberdade quando desacoplado, terá uma variedade de sincronização também de dimensão três. Um exemplo desta variedade é demonstrada geometricamente na figura 2.6 [48].

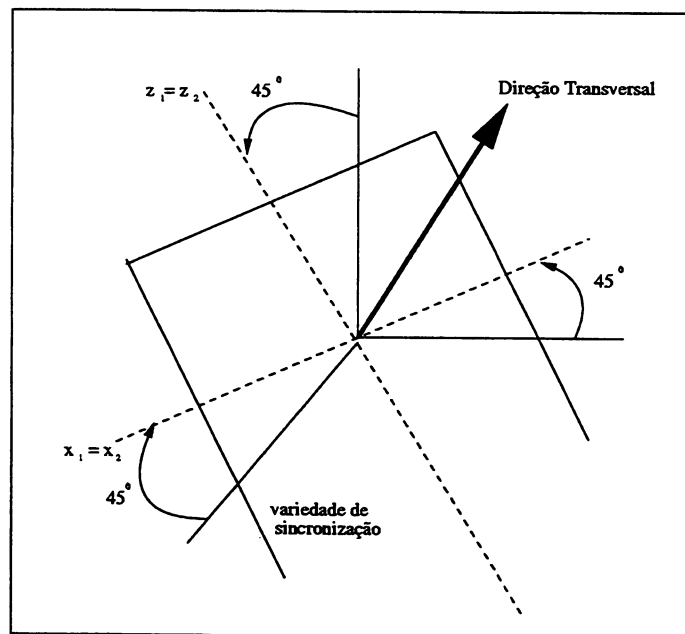


Figura 2.6: Esquema geométrico da variedade de sincronização que está situada ao longo das linhas de 45° entre todas as coordenadas. As coordenadas da variedade transversal representam um comportamento sem sincronização.

Este hiperplano é denominado variedade de sincronização e as igualdades entre as variáveis são encontradas através de uma transformação de variáveis nas equações do movimento [49], [50]. Com esta translação no plano, existirá um espaço transversal à variedade de sincronização, e neste espaço as coordenadas serão zero quando o movimento estiver sobre esta variedade [51]. É importante salientar, que a dimensão da variedade de sincronização, é igual a dimensão de cada oscilador individual, envolvido em um sistema acoplado.

Nesta mudança de variáveis, as variáveis paralelas estão contidas na variedade de sincronização, enquanto as variáveis perpendiculares estão na variedade transversal. Desta forma o ponto  $(0, 0)$  na variedade transversal deve ser um ponto fixo dentro desta variedade [52].

Supondo que todos os osciladores acoplados tenham como atrator um ciclo limite, então, a geometria do atrator síncrono é tal que ele está localizado no hiperplano - variedade de sincronização - determinado por  $(n - 1)$  igualdades vetoriais [48], ou seja,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n, \quad (2.15)$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n, \quad (2.16)$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n. \quad (2.17)$$

Para determinar a estabilidade da variedade de sincronização é necessário encontrar o expoente de Lyapunov das equações transversais [47]. Iniciando esta análise, utiliza-se a linearização do sistema acoplado sob o estado sincronizado. Faz-se isso da mesma forma que em um sistema sem acoplamento, só que neste caso, o sistema todo foi transladado e a partir do cálculo da matriz Jacobiana percebe-se que os autovalores ficam como função da variável que foi acoplada [53].

Assim, para que a estabilidade seja encontrada, todo o movimento transversal da variedade de sincronização deve ser amortecido, isso é demonstrado através do expoente de Lyapunov condicional, que sendo negativo provará que a variedade de sincronização é estável, caso contrário, instável [48].

Além dos tipos de sincronização já citadas, existe uma outra denominada sincronização com atraso (“lag synchronization”) que aparece como um deslocamento no tempo entre os osciladores, no estado dos dois sistemas, isto é,

$$x_1(t + \sigma) = x_2(t), \quad (2.18)$$

onde  $\sigma$  é um pequeno termo que representa um tempo adicional. Para caracterizar melhor este tipo de sincronização Rosenblum, Pikovsky e Kurths [42] introduziram uma função denominada similaridade, que será discutida com mais detalhes na próxima seção.

Exemplos através de gráficos, dos tipos de sincronização comentados acima, vistas através de séries temporais, de expoentes de Lyapunov e de expoentes de Lyapunov condicionais do sistema, serão dados e melhor analisados no capítulo quatro deste trabalho.

## 2.4 Função similaridade

Alguns trabalhos nos últimos anos têm se preocupado com tipos de sincronização em sistemas caóticos e como eles podem evoluir com a variação dos parâmetros de acoplamento. A sincronização com atraso, bem presente em sistemas biológicos, como pode ser verificado através das séries temporais nos eletrocardiogramas (ECGs), é reconhecida através de uma função denominada similaridade. Esta função estuda o comportamento dos dois sistemas acoplados e o seu mínimo. Dependendo do valor deste mínimo, é caracterizado ou não, a presença da sincronização em questão.

A função similaridade tem a seguinte forma [42]:

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t + \tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.19)$$

Esta função é definida no trabalho de Rosenblum, Pikovsky e Kurths [42] e demonstra a função similaridade como uma diferença na média temporal entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  e investiga os mínimos considerados, para a obtenção da sincronização com atraso.

Caso  $S(\tau)$  tenha um valor mínimo igual a zero para  $\tau$  também igual a zero, então a sincronização é dita completa. Se  $S(\tau)$  possui um valor mínimo igual a zero para  $\tau$  diferente de zero, então existe a presença de uma sincronização com atraso no sistema acoplado em questão [42].

Quando a diferença entre as frequências intrínsecas dos sistemas acoplados é grande, fica mais difícil o sistema apresentar sincronização com atraso, já que o mínimo da função similaridade é muito grande nesta situação [46].

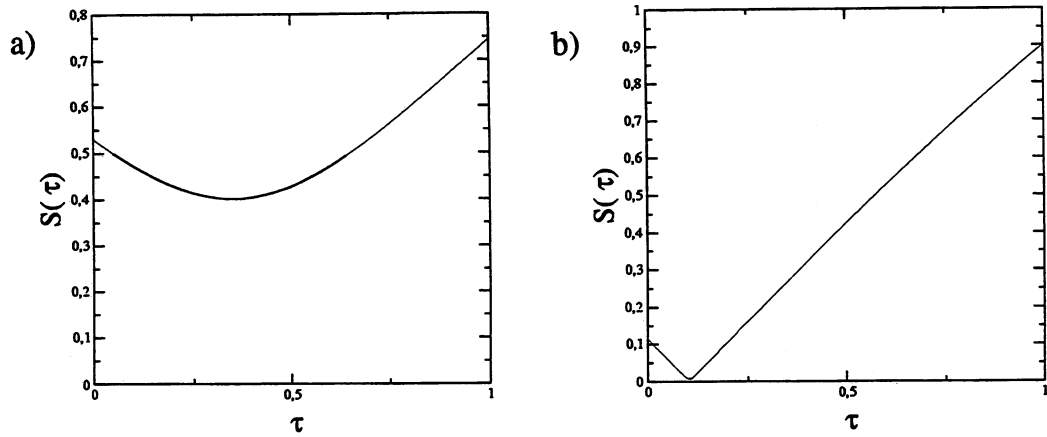


Figura 2.7: Função similaridade para dois Rössler acoplados. a) Parâmetro de acoplamento igual a 0.05 e diferença entre freqüências intrínsecas da ordem de 0.02, sem sincronização com atraso e b) Parâmetro de acoplamento igual a 0.2 e mesma diferença de ordem de freqüências de (a), ocorrência de sincronização com atraso.

O gráfico 2.7 representa dois sistemas de Rössler acoplados, com a presença de sincronização com atraso [42]. Um sistema de Rössler é descrito da seguinte forma:

$$\dot{x} = -jy - z, \tag{2.20}$$

$$\dot{y} = jx + my, \tag{2.21}$$

$$\dot{z} = h + z(x - k), \tag{2.22}$$

onde  $j$ ,  $m$ ,  $h$  e  $k$  são parâmetros do sistema e  $j$  determina a freqüência natural. No trabalho de Rosenblum, Pikovski e Kurths [42] o acoplamento é feito através das variáveis  $x$  do sistema.

A partir do gráfico 2.7, percebe-se que quando as freqüências dos sistemas acoplados são muito próximas, então com o aumento do acoplamento, ocorre o aparecimento de uma sincronização com atraso.

Os tipos de sincronização de um sistema acoplado podem mudar conforme aumente o parâmetro de acoplamento, este conceito será melhor tratado no capítulo quatro deste trabalho.

## Capítulo 3

# Um Modelo Matemático Para o Coração

### 3.1 A utilidade de um modelo teórico para o coração

O coração dos mamíferos é dividido em quatro cavidades, dois átrios e dois ventrículos. Possui também um sistema elétrico onde o ritmo cardíaco é gerado em uma região especializada do átrio direito, denominada nodo sinoatrial, um marcapasso autônomo natural cuja frequência pode ser modulada por necessidades do meio ambiente [54].

Imaginando o coração, que é uma estrutura tridimensional complexa, como unidimensional, a excitação elétrica inicia-se no nodo sinoatrial e após passar por ele, o impulso cardíaco se propaga através do tecido atrial para o nodo atrioventricular, que é a conexão elétrica entre os átrios e os ventrículos. O impulso então passa através do nodo atrioventricular e entra no feixe de His, de onde é distribuído por todo o tecido ventricular. O nodo atrioventricular é um componente essencial da função cardíaca porque ele gera uma propagação com atraso que permite o enchimento ventricular e assim facilita um eficiente bombeamento do sangue [55]. Este comportamento é demonstrado na figura 3.1, que é um esquema do coração de um mamífero [54].

Atualmente, o mecanismo mais utilizado para visualizar o comportamento cardíaco é o eletrocardiograma (ECG)<sup>1</sup>, que é um sistema que mostra o comporta-

---

<sup>1</sup>Um ciclo cardíaco no ECG é representado por uma onda P, uma onda chamada de complexo

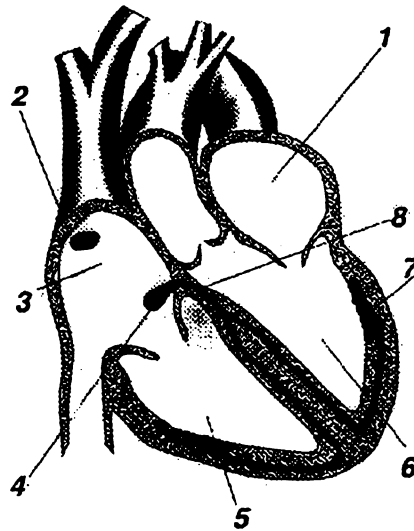


Figura 3.1: Representação esquemática do coração de um mamífero. 1)átrio esquerdo, 2)nodo sinoatrial, 3)átrio direito, 4)nodo atrioventricular, 5)ventrículo direito, 6)ventrículo esquerdo, 7)fibras de Purkinje e 8)feixe de His [54].

mento do coração via séries temporais. A figura 3.2 mostra o comportamento, via série temporal (ECG), de um coração adulto normal. Através do eletrocardiograma mostrado nesta figura, é possível visualizar a onda P, onde o sangue sai dos átrios e entra nos ventrículos, o complexo QRS que é a parte do ECG que possui maior amplitude, representando a expulsão do sangue do coração para o restante do corpo e a onda T, que aparece como um pequeno pico após a maior amplitude, e representa o reingresso do sangue aos átrios. Corações que possuem algum tipo de distúrbio, não apresentam estas três formas de ondas com um comportamento aparentemente periódico, além disso, possuem maiores complexidades e alguns vezes, mais picos de ondas. A aparência diversa de um ECG, varia conforme o tipo de distúrbio cardíaco presente no paciente.

É através do ECG que atualmente conhece-se o estado fisiológico do coração, QRS e uma onda T. O impulso elétrico gerado no nodo sinoatrial (SA) se difunde contraindo os átrios, esta é a onda P, sua primeira parte representa a despolarização do átrio direito, enquanto a segunda parte representa a despolarização do átrio esquerdo, neste período o sangue está passando dos átrios para os ventrículos. A despolarização das células do miocárdio, produz o complexo QRS, durante este processo o sangue é forçado para fora dos ventrículos, indo do ventrículo esquerdo para os pulmões e do ventrículo direito para todo o restante do corpo. A onda T representa a repolarização dos ventrículos, a relaxação do coração, neste período o sangue não oxigenado do corpo entra no átrio direito, enquanto o sangue oxigenado vindo dos pulmões entra no átrio esquerdo. Nesta ocasião, o coração está preparado para o próximo impulso [12].

nele verifica-se a existência de algum tipo de problema relacionado com arritmias ou outros possíveis distúrbios, no entanto, arritmias cardíacas, que são as maiores causas de doenças cardíacas, estão longe de serem completamente compreendidas e bem controladas [56].

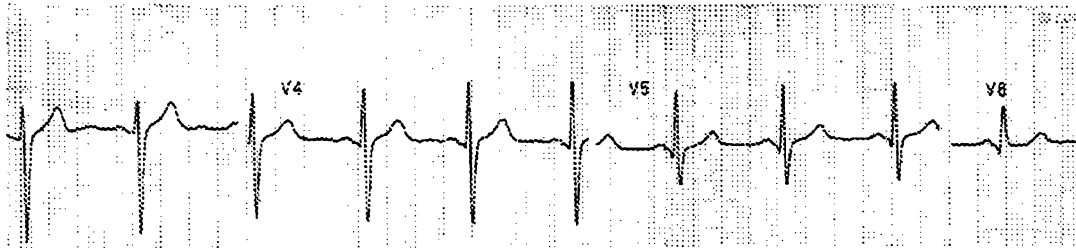


Figura 3.2: Eletrocardiograma de um adulto normal. Nesta figura é possível identificar as ondas P, QRS e T [57].

Existem muitas anomalias cardíacas; a taquicardia ocorre no tecido cardíaco e é resultante de pequenas regiões do tecido que contraem rapidamente sem coordenação. Fibrilações ventriculares são distúrbios irregulares do ritmo cardíaco que tornam o coração incapaz de sustentar a vida, causadas por impulsos prematuros que chegam ao ventrículo durante metade do tempo após a onda T [12]. Elas são sempre fatais e ocorrem devido a passagem de uma grande corrente elétrica através do músculo cardíaco [58]. Arritmias cardíacas são causadas não somente por reingressos de impulsos, mas também pela geração de outros novos impulsos. Várias partes do coração têm habilidade de gerar automaticidades anormais sob certas circunstâncias. Automaticidade é a capacidade das células despolarizarem espontaneamente [12].

A aplicação da análise de dinâmica não-linear e caos em ritmos cardíacos tem gerado novas maneiras de visão sobre arritmias e um maior interesse no campo cardiológico [59].

A existência de um estudo físico-matemático do coração é importante e vem crescendo muito nos últimos anos, já que considerando o coração como um oscilador de ciclo-limite, os estudos esquemáticos deste órgão ficam consideravelmente menos difíceis e podem ajudar cardiologistas a compreender melhor o comportamento cardíaco, ocorrendo assim, melhores controles e prevenções de distúrbios cardíacos. Isto ocorre porque pode-se considerar arritmias cardíacas associadas com dinâmicas complexas de modelos matemáticos simples [28].

Em um coração com ritmo normal, existe sincronização entre a atividade dos átrios e ventrículos. Esta sincronização é realizada por uma condução que propaga a atividade elétrica da sua origem no nodo sinoatrial, para os ventrículos, pelo nodo atrioventricular, no entanto, esta sincronização pode ser modificada caso ocorra alguma anomalia na região dos nodos [54].



O tecido cardíaco é um sistema funcional composto de células acopladas. Para modelar o comportamento dinâmico do tecido cardíaco, é necessário especificar a dinâmica não-linear local, a arquitetura espacial e a natureza do acoplamento [60]. Desta forma o sistema cardíaco pode muito bem ser modelado por equações diferenciais.

Em corações normais apenas o nodo sinoatrial tem a habilidade de bater espontaneamente, contudo, o coração possui outras células que têm automaticidade. A atividade elétrica do coração pode ser reconstruída por diferentes níveis e escalas no tempo, isto é, pode ser estudado através da ação potencial das membranas, correntes iônicas, ritmos globais, frentes de onda, sincronização entre outros. Para isso, vários modelos matemáticos têm sido usados, e todas estas teorias podem ser utilizadas para uma comparação de modelos, na reconstrução de um modelo hierárquico e mais funcional da atividade elétrica do coração [61].

A maior intenção neste trabalho é tentar mostrar os possíveis comportamentos cardíacos através do modelo proposto, estudando os seus comportamentos dinâmicos para um modelo genérico, mas funcional do coração.

## 3.2 O oscilador de van der Pol

O primeiro trabalho com este tipo de oscilador ocorreu em 1928 [1], com a criação de um circuito eletrônico composto por uma lâmpada de neon, que possui um comportamento não-linear, um capacitor, um resistor e uma bateria, como mostrado na figura 3.3 [1]. Com este sistema, van der Pol e van der Mark [1] esquematizaram uma representação dinâmica do coração.

O oscilador de van der Pol tem no ponto  $(0, 0)$  um ponto de equilíbrio instável e um ciclo limite estável para o caso não forçado. A presença de um oscilador de ciclo limite, como o oscilador cardíaco, pode oscilar mais ou menos imperturbavelmente mesmo em sistemas expostos a distúrbios externos [3].

A equação 2.7 como visto anteriormente, representa um oscilador deste tipo e tem várias características, entre elas, modos de travamento e cascatas de duplicação de período. Ela serve como um modelo básico de oscilador auto-excitável.

A maioria dos osciladores biológicos se comporta como um ciclo limite, isto é, se existe uma pequena perturbação externa, após um intervalo suficiente de tempo, a trajetória inicial é estabelecida. Assim, também se comporta o VDP [62].

O oscilador de van der Pol forçado possui a característica de não ser possível

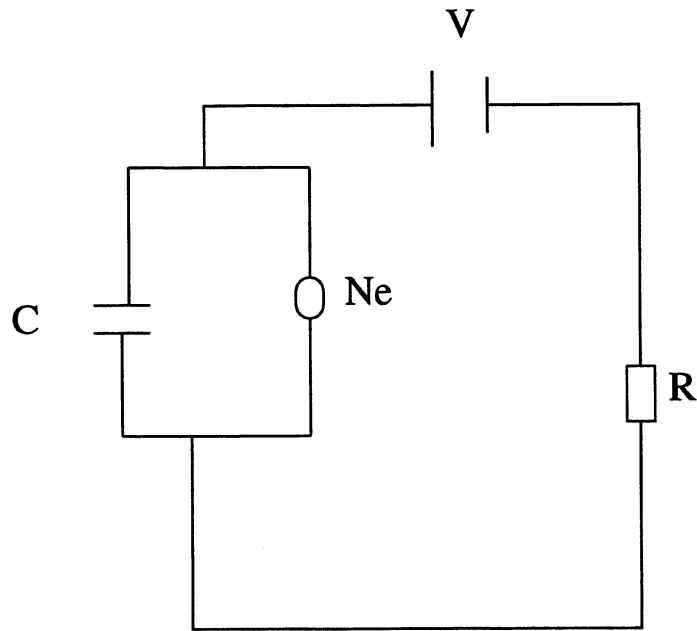


Figura 3.3: Circuito elétrico criado por van der Pol representando sua equação e modelando o sistema cardíaco. No circuito, C representa um capacitor de aproximadamente  $1 \mu\text{F}$ , Ne representa a lâmpada de neon, R representa um resistor de  $1 \text{M}\Omega$  e V representa uma bateria de 180 volts.

analisar analiticamente, sendo que todos os resultados obtidos são possíveis através de estudos numéricos. Verificando o comportamento de um VDP isoladamente - tanto com força externa, quanto sem ela - percebe-se a presença de muitos conceitos vistos anteriormente, ou seja, analisando este oscilador sem uma força externa, para quaisquer valores de parâmetros, encontra-se um comportamento regular, seja ele periódico ou *quasi*-periódico, então, para esses casos, tem-se o aparecimento de toros, de ciclos limites e demais comportamentos [15]. Já o comportamento caótico, geralmente provindo de uma rota via duplicação de período, neste tipo de sistema, somente ocorre na presença de um termo de força externa.

Para se ter uma melhor noção a respeito do comportamento de um oscilador de VDP, as figuras 3.4 e 3.5 mostram o diagrama de bifurcação juntamente com seus respectivos máximos expoentes de Lyapunov, para os casos sem força externa e com força externa, respectivamente. Através delas, é possível verificar que o oscilador de van der Pol, sem o termo de força externa, possui apenas um comportamento periódico, ou seja, um expoente de Lyapunov negativo e um nulo, enquanto a introdução de uma função periódica no termo externo de perturbação, pode provocar o aparecimento de caos no oscilador.

No cálculo do diagrama de bifurcação do sistema, é necessário, para os casos

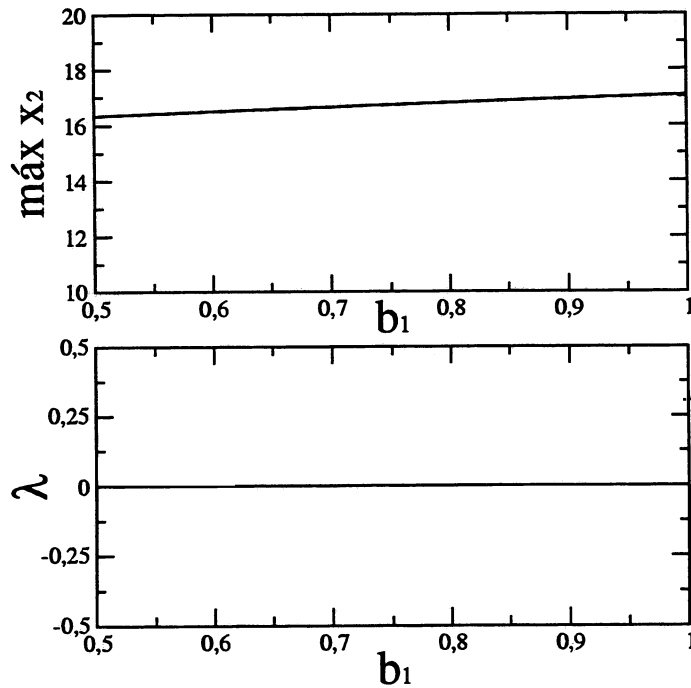


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação e o maior expoente de Lyapunov para um oscilador de van der Pol sem força externa. Para este caso os valores dos parâmetros são os seguintes:  $n = 5.0$ ,  $w = 1.0$ ,  $F(t) = 0.0$  e  $x_2$  é uma das variáveis do sistema.

de equações diferenciais ordinárias, encontrar o mapa estroboscópico do sistema, onde faz-se um corte no atrator do espaço de fase. Para este caso em particular, este corte é feito considerando-se os máximos das amplitudes de uma variável, escolhida da série temporal.

Estudos têm mostrado que regiões onde ocorre duplicação de período precedem regiões de transição envolvendo ritmos altamente complexos no comportamento cardíaco [63]. Quando um sistema auto-excitado é sujeito a uma excitação adicional externa, ele pode responder com oscilações periódicas com a frequência com que foi forçado [64].

Desta forma, sabendo-se a respeito do comportamento de um único oscilador de van der Pol, quer-se conhecer também, o comportamento de dois desses osciladores acoplados. Sendo isto o que este trabalho analisa e que será o assunto abordado na próxima seção.

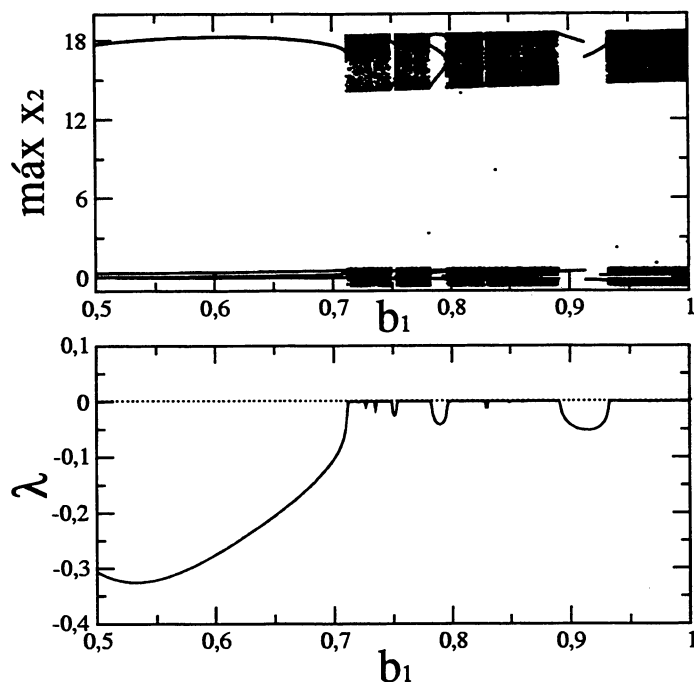


Figura 3.5: Representação do diagrama de bifurcação com seu respectivo maior expoente de Lyapunov para um oscilador de van der Pol com força externa do tipo  $a \cos(pt)$  onde  $a = 2.0$  e  $p = 1.0$ . E também  $n = 5.0$ ,  $w = 1.0$  e  $x_2$  representa uma das variáveis do sistema. Para este caso o sistema tem comportamento *quasi*-periódico.

### 3.3 Osciladores acoplados

As aplicações físicas de osciladores não-lineares cobrem muitas áreas da eletrônica, mecânica e biologia, entre outras.

O modelo aqui apresentado é descrito por duas equações de van der Pol assimétricas, acopladas por um parâmetro que na prática representa a conexão entre os nodos cardíacos. Os marcapassos naturais do coração são células auto-excitáveis e por isso podem ser representadas por um oscilador deste tipo.

O significado físico de dois VDP's acoplados é o de que para cada amplitude de um oscilador, uma perturbação proporcional ocorre no outro [13].

Desta forma, matematicamente, as equações que representam o sistema em estudo são as seguintes:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = G(x_1)x_2 - b_1x_1 + c_1(x_3 - x_1) + a_1\text{sen}(f_1t), \quad (3.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad (3.3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = G(x_3)x_4 - b_2x_3 + c_2(x_1 - x_3) + a_2\text{sen}(f_2t), \quad (3.4)$$

sendo,

$$G(x_n) = \frac{4h}{(w_2 - w_1)^2}(x_n - w_1)(x_n - w_2), \quad (3.5)$$

onde  $h$  representa a ordenada máxima da parábola com raízes  $w_1$  e  $w_2$ . Esta forma de função é útil para a análise de um modelo com vários elementos porque a dimensionalidade nos máximos das amplitudes das ondas, é apenas determinada por esta equação. A função  $G(x_n)$  representa uma função quadrática assimétrica e foi proposta por Engelbrecht e Kongas [9], [10], devido ao fato de modelar bem a dinâmica cardíaca.

Do sistema 3.1 – 3.4,  $c_1$  e  $c_2$  são os termos de acoplamento,  $b_1$  e  $b_2$  os modos normais e  $a_1$  e  $a_2$  os termos de forçamento. De [9] foram retirados os melhores valores para alguns parâmetros que mostram uma aparente concordância com situações reais, assim, neste trabalho, foram fixados os valores,  $w_1 = -0.2$ ,  $w_2 = 1.9$  e  $h = -1.6$ .

Nos trabalhos de Engelbrecht e Kongas [9], [10] foram analisados osciladores desacoplados, supondo a influência também, do sistema nervoso no funcionamento cardíaco, no entanto, a ênfase nestes trabalhos, estava na ocorrência de situações de aparecimento de caos, intermitência e periodicidade, para as formas de assimetria e força externa incluídos no oscilador de van der Pol original.

Nesta dissertação também foram verificados casos para valores menores de  $h$ , onde percebeu-se que este parâmetro, que é o que representa o aumento/diminuição de energia do sistema, não leva os osciladores, como se espera, para estados de multiestabilidade, no entanto, isto pode ocorrer caso sejam mudadas as frequências intrínsecas de cada oscilador, entretanto, este tipo de situação não foi investigada mais cuidadosamente por fugir do tema inicialmente proposto, mas que pode, por ventura, ser verificado futuramente.

Aqui o primeiro oscilador representa o comportamento do nodo sinoatri-

al enquanto o segundo oscilador funciona como se fosse o nodo atrioventricular. Utilizou-se dois osciladores acoplados, ao invés de apenas um oscilador, com o intuito de se observar principalmente a dinâmica de sincronização em todos os tipos de casos possíveis. No entanto, quando as frequências são muito diferentes nos dois sistemas acoplados, o acoplamento não é forte o suficiente para causar algum tipo de sincronização [65].

Devido aos termos de acoplamento, o estudo de sincronização é feito quando o sistema é unidirecional, ou seja,  $c_1 = 0.0$  e quando os dois osciladores têm parâmetros de acoplamento diferentes de zero, que é o caso bidirecional. O acoplamento unidirecional é por Pecora, Carrol, Mar e Heagy [49], também chamado de acoplamento difusivo ou de controle negativo de reabastecimento. Basicamente o que se faz nesta técnica de sincronização, é somar um amortecimento no sistema de resposta (o segundo oscilador) que consiste da diferença entre as variáveis do primeiro oscilador e do segundo [49].

Os osciladores estarem desacoplados, na prática, corresponde a uma doença cardíaca denominada obstrução atrioventricular e no modelo, este desacoplamento existe quando  $c_1$  e  $c_2$  são ambos iguais a zero ou menores que um valor crítico.

Com a variação dos termos de acoplamento e das frequências, estudou-se casos em que ocorre sincronização dos tipos caóticas e periódicas. Também foi feita a modificação no sistema com a introdução de uma força externa e a verificação da robustez do sistema, com a colocação de ruído nos termos de acoplamento. A robustez de um sistema sincronizado sugere, além de poder ser utilizado em sistemas de comunicação segura, também ser um modelo de sistemas orgânicos, como o aqui apresentado e outros como respiratório, circulatório e nervoso [66].

Neste trabalho, não houve uma maior discussão a respeito do sistema cardíaco ser periódico ou caótico, o maior interesse está no fato de se existe ou não, sincronismo entre os impulsos elétricos que movimentam todo o sistema circulatório. Utilizou-se um modelo matemático sem os detalhes nervosos e físico-químicos, por já no trabalho de van der Pol [1] perceber-se que este tipo de modelo pode satisfatoriamente determinar o comportamento de tempo de relaxação encontrado no sistema cardíaco.

Como visto pelas equações que representam o sistema, o oscilador utilizado tem quatro graus de liberdade, contudo, todos os gráficos contidos neste trabalho são projetados em um espaço bidimensional. O estudo destas equações foi feito numericamente e para isso o sistema foi transformado, quando com uma força externa, em um sistema autônomo com a inclusão do tempo como uma variável, tornando nesta situação, o sistema com oito graus de liberdade, o que dinamicamente não gera modificação no estudo objetivo do trabalho.

Em um coração normal, os acoplamentos entre os nodos transmitem os estímulos somente em uma direção, isto é, do sinoatrial para o atrioventricular [12], no entanto, neste trabalho também discute-se a influência do nodo atrioventricular sobre o sinoatrial, o que biologicamente, na prática, pode significar alguma forma de doença cardiovascular, apesar de ainda não se ter uma certeza absoluta a respeito desta situação [17],[60].

# Capítulo 4

## Aspectos Gerais de Dois Osciladores de van der Pol Unidirecionalmente Acoplados

### 4.1 Procedimentos

Ao se iniciar o estudo dos osciladores acoplados demonstrados no capítulo precedente, pretendia-se compreender matematicamente como os dois nodos cardíacos poderiam funcionar e, conjuntamente, observar possíveis melhorias em detecções prévias de anomalias cardíacas.

Em todos os momentos do trabalho para o sistema aqui estudado, utilizou-se sempre preceitos numéricos através de um integrador do tipo preditor/corretor de passo variado, que utiliza o método de Adams de ordem 12, chamado de *Lsoda* (*Livermore solver ordinary differential equations*) [67].

Com este integrador numérico, através de alguns programas computacionais, foram analisadas diversas situações do sistema como séries temporais, expoentes de Lyapunov, espaço de parâmetros, entre outras. Cada programa fornecia uma determinada saída de dados, onde através dela, analisava-se cada comportamento do sistema.

Através da literatura existente, não há um consenso a respeito de como um nodo cardíaco influencia o outro [60], isto é, não existe concordância no fato de se apenas o nodo sinoatrial influencia o nodo atrioventricular ou se um influencia o outro diretamente. Desta forma procurou-se estudar os dois casos, o que matematicamente



significa, respectivamente, acoplamento uni e bidirecional. Além disso, foi também estudado o comportamento de osciladores forçados, o que significa que o oscilador possui um termo de força externa, significando biologicamente o efeito de um impulso nervoso devido a condições adversas do meio. Procurou-se também estabelecer se o tipo de sistema utilizado para modelar o sistema cardíaco é suficientemente razoável, sendo robusto na presença de ruídos externos.

Neste capítulo aborda-se os resultados obtidos para cada caso estudado a respeito do sistema unidirecional, discutindo-se o que foi encontrado, de maneira a fazer o trabalho aqui apresentado, útil para possíveis e eventuais prevenções de doenças arrítmicas do coração.

## 4.2 Variando apenas o parâmetro de acoplamento

Ao longo desta seção serão discutidos o comportamento dinâmico dos osciladores acoplados unidirecionalmente, bem como as semelhanças e diferenças entre o modelo e um sistema biológico real. O acoplamento unidirecional neste modelo, implica que apenas o nodo sinoatrial influencia no batimento cardíaco, sendo o marcapasso natural dominante. Neste caso, no modelo das equações matemáticas, o termo de acoplamento  $c_1$  é igual a zero. Assim, a variação do termo de acoplamento  $c_2$  no sistema, em momento algum afetará a dinâmica do primeiro oscilador, isto é, sendo o primeiro oscilador sem uma força externa, ele tem um comportamento periódico, com a presença de um atrator do tipo ciclo limite e continuará assim, mesmo com a mudança de qualquer parâmetro no segundo oscilador.

O termo de acoplamento  $c_2$ , mesmo com o sistema sem alguma força externa, fará o papel de uma perturbação externa qualquer, causando uma mudança na dinâmica do sistema como um todo, quando ocorre a sua variação. Neste caso  $c_2$  é o termo que provoca a influência do primeiro oscilador sobre o segundo.

De início foi estudado o sistema com freqüências que modelam o comportamento cardíaco normal, ou seja, a razão entre as freqüências normais fisiológicas dos nodos sinoatrial e atrioventricular que é de  $\frac{3}{2}$  [7], sendo que o nodo sinoatrial tem a freqüência intrínseca mais alta entre todas as células encontradas no sistema de condução cardíaca [17]. Assim, no modelo aqui trabalhado, primeiramente foi considerado o estudo do sistema supondo a freqüência normal do primeiro oscilador como sendo proporcional a  $b_1 = 1.0$  e a freqüência do segundo oscilador como sendo proporcional a  $b_2 = 0.66$ .

Para este caso, analisando conjuntamente os gráficos de expoente de Lyapunov, que é calculado através de um programa que normaliza e lineariza os termos da

jacobiana do sistema; do número de rotação que é verificado através da definição de fase do sistema como [41]:

$$\tan \theta_i(t) = \left( \frac{dx_i(t)}{dt} \right) / (x_i(t)), \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

e onde o número de rotação do primeiro oscilador aqui apresentado é a soma de todas as fases do primeiro oscilador divididas pelo tempo total em que o sistema foi integrado, ocorrendo o mesmo para o segundo oscilador; e do expoente de Lyapunov condicional que para esta situação é calculado da mesma forma que o expoente de Lyapunov, apenas considerando a variável de sincronização do sistema, ou seja,

$$x_1 - x_3, \quad (4.2)$$

e

$$x_2 - x_4, \quad (4.3)$$

pode-se prever o comportamento do sistema através do seu estado de sincronização. Assim, como visto nos capítulos precedentes, pode-se verificar o aparecimento ou não de sincronismo entre os dois osciladores, bem como os tipos de sincronização existentes entre eles.

A figura 4.1 mostra o comportamento do sistema com a variação do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , do segundo oscilador.

Através destes gráficos percebe-se que a sincronização entre os dois sistemas começa a ocorrer a partir de  $c_2 \approx 0.076$ , onde o expoente de Lyapunov condicional torna-se negativo. A primeira forma de sincronização existente no sistema é a sincronização generalizada, ou como o sistema é *quasi*-periódico, um travamento de frequências, com razão irracional entre elas, vista através do gráfico do número de rotação. Assim, antes da diferença entre os números de rotação dos dois osciladores tornar-se zero, existe a ocorrência de uma situação do tipo [45], [46], [68],

$$x_2(t) = F[x_1(t)], \quad (4.4)$$

caracterizando a presença da sincronização citada. Existe um pequeno intervalo no sistema onde ele tem um comportamento caótico, para esta situação, utilizou-se a denominação de sincronização de ritmos, já que existe uma sincronização entre os dois osciladores, mas o primeiro é periódico enquanto o segundo é caótico. Este fato é explicado visto que a amplitude do segundo oscilador comporta-se de forma caótica, porém sua fase é regular e síncrona com relação ao primeiro oscilador. Essa é uma característica do oscilador de VDP.

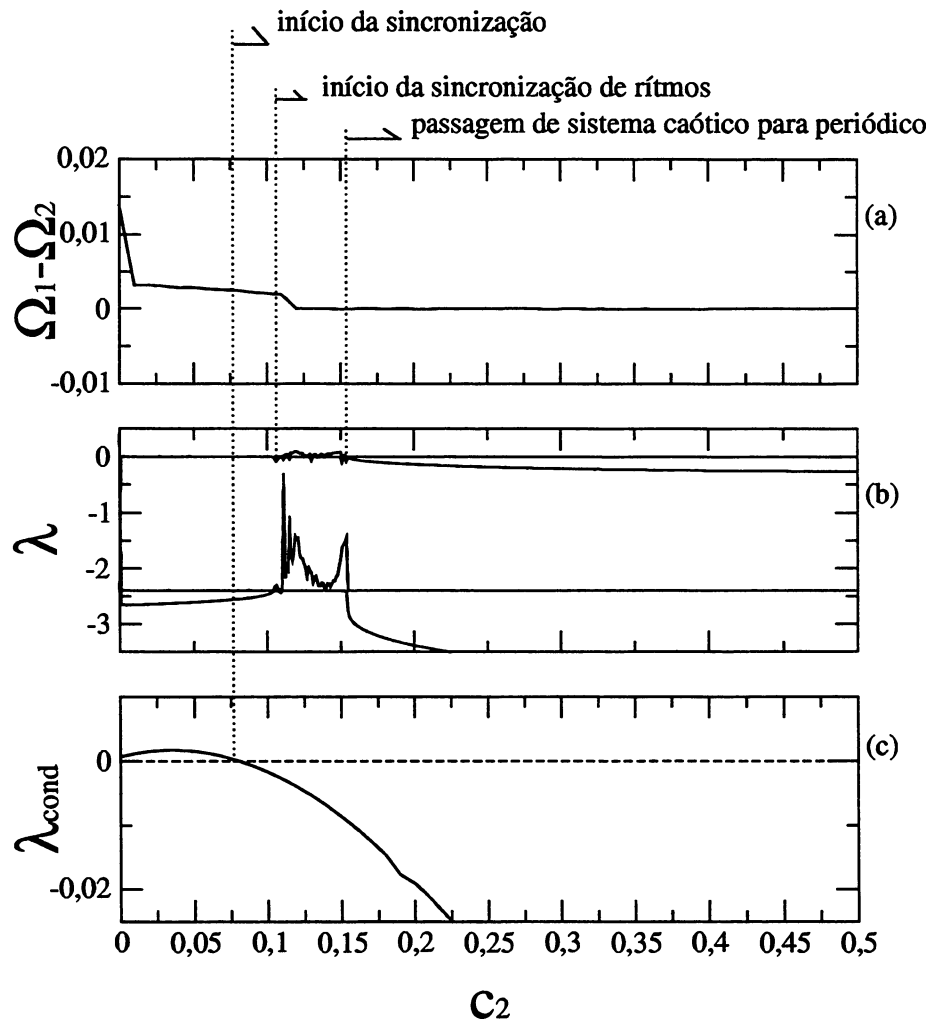


Figura 4.1: Comportamento do sistema unidirecional sem forçamento. a) diferença entre os números de rotação dos dois osciladores, b) expoente de Lyapunov e c) expoente de Lyapunov condicional. Nesta situação  $b_1 = 1.0$ ,  $b_2 = 0.66$ ,  $c_1 = 0.0$  e  $a_1 = 0.0$ .

A sincronização de ritmos representa mais ou menos um comportamento onde os dois osciladores têm picos de frequências fundamentais relacionados entre si, enquanto o oscilador caótico continua apresentando suas frequências de bandas largas.

A partir do momento em que o sistema possui um comportamento periódico, então ocorre a passagem de uma sincronização de ritmos, para um travamento de frequências do tipo 1:1. É importante salientar aqui que as amplitudes dos osciladores são sempre completamente não correlacionadas no tempo.

Pode-se perceber a partir destes gráficos que o comportamento caótico do segundo oscilador comanda o regime do sistema para determinados valores de  $c_2$ , ou seja, para alguns valores de  $c_2$ , o primeiro oscilador influencia o segundo de forma a modificar o sistema para um regime caótico. Isso ocorre porque com o aumento do parâmetro, o ciclo limite apresentado pelo segundo oscilador tende a se desestabilizar, gerando um comportamento complexo; no entanto, o comportamento caótico do sistema acontece em um pequeno intervalo de  $c_2$  e isso mostra que como o primeiro oscilador é inicialmente periódico, a tendência do sistema é estabelecer para o segundo oscilador, a mesma frequência do primeiro, acontecendo assim a passagem de caos para um ciclo limite estável, ou seja, todas as mudanças de comportamento do sistema acontecem via bifurcações. Neste ponto é necessário acrescentar que o comportamento caótico do segundo oscilador ocorre somente para as amplitudes, não acontecendo o mesmo para as frequências, já que estas possuem um comportamento bem regular.

Devido a grande diferença entre as frequências normais de cada oscilador, também é difícil o aparecimento de uma sincronização com atraso, fato que também é visto em [42],[46]. No entanto, este tipo de sincronização apenas não ocorre, devido as amplitudes dos osciladores não apresentarem correlação entre elas, ou seja, existe uma forma de sincronismo com atraso entre os dois osciladores, que pode ser vista através das séries temporais, mas que não é chamada de sincronização com atraso devido a não correlação de amplitudes entre os dois osciladores. Este fato demonstra uma boa interação entre o modelo e sistemas reais. A não ocorrência de sincronização com atraso pode ser observada através da figura 4.2 que mostra o comportamento do sistema através da função similaridade, definida pela equação 2.19 desta dissertação, ou seja, como comentado anteriormente, só há ocorrência de sincronização com atraso quando a função similaridade tem seu mínimo igual a zero, para valores de um diferencial do tempo, maior que zero. Deve ficar claro, entretanto, que para o sistema aqui estudado, este mínimo é diferente de zero, devido ao fato de as amplitudes dos dois osciladores serem diferentes, situação que é observada em sistemas biológicos reais.

A sincronização de fase também não é encontrada; fato que pode ser percebido através da figura 4.3 que mostra a diferença de fases entre os dois osciladores.

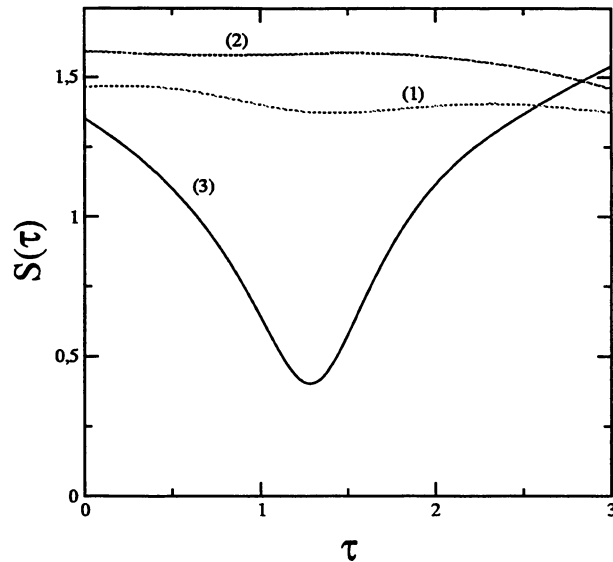


Figura 4.2: Comportamento do sistema através da função similaridade. Percebe-se neste gráfico, pelo comportamento da curva, a não presença de sincronização com atraso. Na curva (1)  $c_2 = 0.05$ , em (2)  $c_2 = 0.12$  e em (3)  $c_2 = 0.48$ .

Como, pela figura, nota-se que a diferença não tende para uma constante, ou melhor, ela cresce monotonicamente, pode-se concluir a não presença de sincronização de fase neste sistema. Isto acontece devido a grande diferença nos modos normais dos osciladores, como já evidenciado na literatura [46] e também devido a rotação diferencial do oscilador de van der Pol.

Pode-se notar, através da figura 4.1(b) que não houve preocupação em se diferenciar o comportamento caótico do comportamento periódico do sistema. No entanto, através do expoente de Lyapunov positivo, pode-se perceber que para valores de  $c_2$  aproximadamente entre 0.1 e 0.155, há o aparecimento de um comportamento caótico, o que não influencia a dinâmica do número de rotação do sistema, nem tão pouco do expoente de Lyapunov condicional.

A preocupação, neste caso, é única e exclusivamente com a forma de sincronismo do sistema. Através das séries temporais dos osciladores, que têm um comportamento semelhante ao de um ECG, a figura 4.4 mostra como é o comportamento temporal para cada evolução do parâmetro de acoplamento. É com sua análise que percebe-se que um grande aumento do acoplamento leva o sistema a um tipo de sincronização completa, mesmo sendo os osciladores não idênticos. O que mostra que acoplamentos grandes levam os osciladores a se comportar da mesma forma, ou seja, o segundo oscilador torna-se escravo do primeiro. Nesta figura, percebe-se que a sincronização entre os osciladores, apesar da pouca existência de caos, ocorre de diferentes formas para cada valor de acoplamento, sendo que na maior parte do

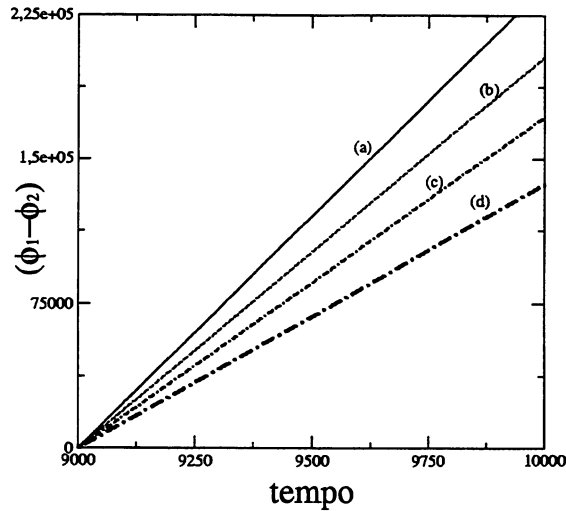


Figura 4.3: Diferença de fases entre os dois osciladores para alguns valores do parâmetro de acoplamento  $c_2$ . Devido ao não aparecimento de uma constante entre a diferença de fases, percebe-se a não ocorrência de sincronização de fase no sistema. a)  $c_2 = 0.15$ , b)  $c_2 = 0.25$ , c)  $c_2 = 0.35$  e d)  $c_2 = 0.5$ .

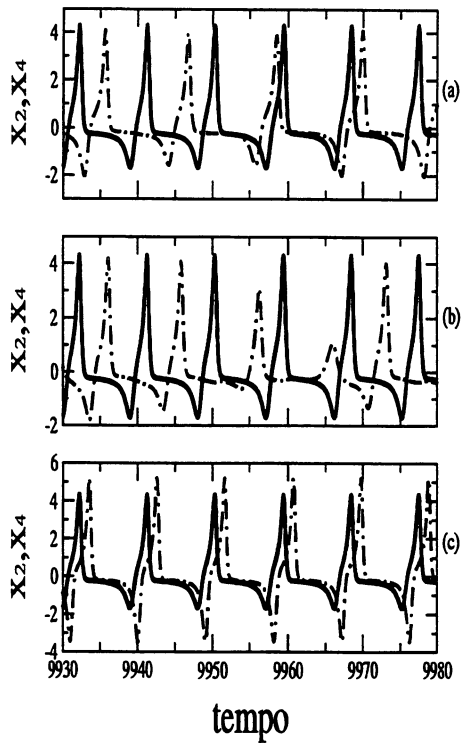
tempo, o sistema permanece periódico, tendo uma sincronização generalizada, que é mais comumente chamada de travamento de frequências em casos periódicos.

Também nesta figura é mostrado o espectro de frequência que demonstra a não sincronização entre as frequências dos dois osciladores, ou seja, percebe-se que os dois osciladores são periódicos, mas não existem picos de frequências fundamentais idênticos. Vê-se também a sincronização de ritmos, quando os osciladores têm dinâmicas distintas, isto é, o primeiro oscilador é periódico e o segundo caótico, o que pode ser percebido através das frequências de bandas largas, e um tipo de sincronização generalizada, onde os dois osciladores são periódicos e agora possuem frequências similares.

O digrama de bifurcação do sistema unidirecional sem força externa, conjuntamente com os dois maiores expoentes de Lyapunov, que são reapepresentados aqui de forma a tornar claras as regiões de *quasi*-periodicidade, periodicidade e caos, também são mostrados com o intuito de se conhecer o comportamento dinâmico dos osciladores de uma forma mais geral. Estes gráficos são mostrados na figura 4.5.

Pode ser percebido que no intervalo onde ocorre a presença de caos, o expoente de Lyapunov torna-se positivo, o que não poderia ser diferente. Nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov tem valor nulo, ocorrendo o mesmo para quan-

1)



2)

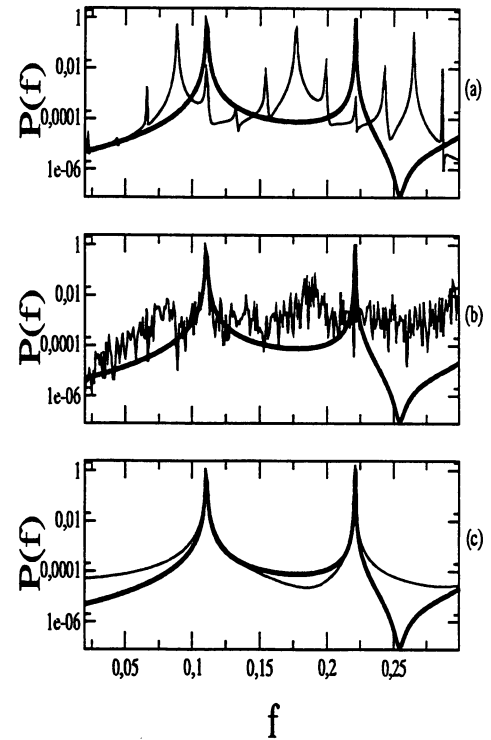


Figura 4.4: Série temporal e espectro de frequência para o sistema unidirecional onde em (1),  $x_2$  é representado pela curva cheia e  $x_4$  pela curva pontilhada, enquanto em (2)  $x_2$  é a curva com maior espessura. a) sem sincronização,  $c_2 = 0.05$ , b) sincronização de ritmos,  $c_2 = 0.12$  e c) sincronização generalizada 1:1 - não é sincronização com atraso devido a diferença de amplitudes -,  $c_2 = 0.48$ . Os espectros de frequências em (2) estão ao lado de cada série temporal respectiva em (1).

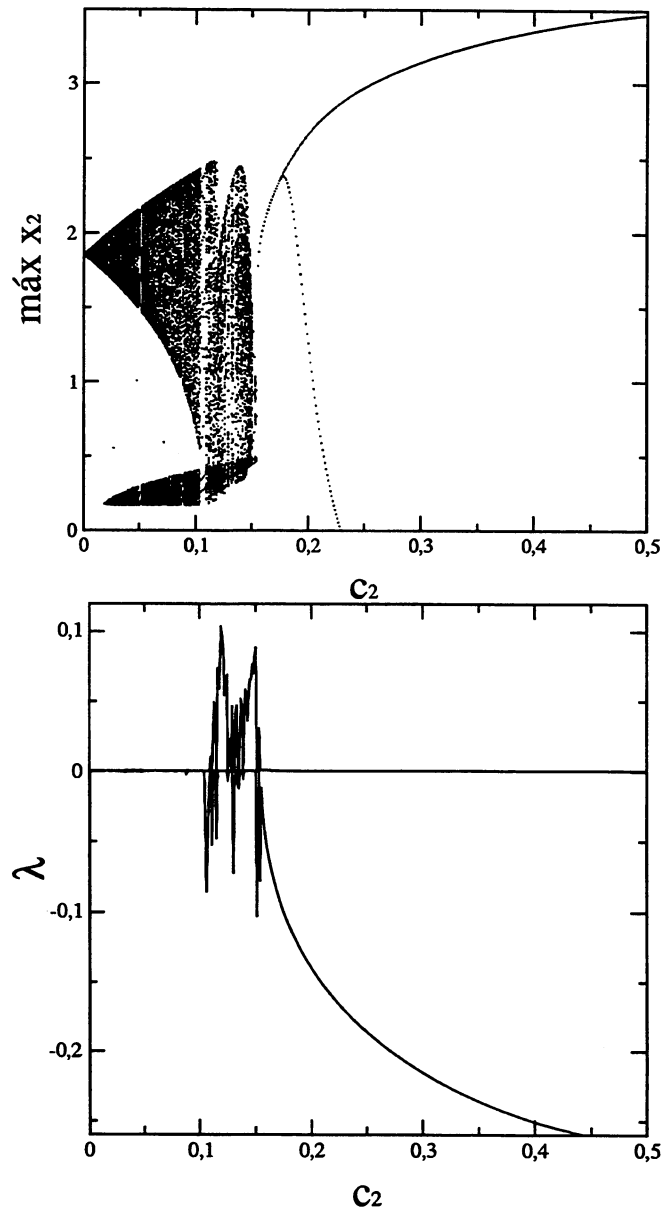


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação com os dois maiores expoentes de Lyapunov para o sistema unidirecional sem forçamento. Pelos dois gráficos percebe-se a existência de alguns pontos de bifurcação, um comportamento caótico para determinados valores de  $c_2$  e um comportamento periódico do sistema para valores de  $c_2$  maiores que aproximadamente 0.15.



do o sistema é *quasi*-periódico e, tendo o sistema um comportamento periódico, o expoente de Lyapunov do sistema é negativo.

### 4.3 Variando o modo normal do primeiro oscilador

Além da variação do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , nesta seção estuda-se também o comportamento dos osciladores com a variação da frequência normal  $b_1$ , do primeiro oscilador. Considerando um sistema biológico real, a variação da frequência do oscilador implica em um caso de arritmia cardíaca, assim, através deste estudo, pretende-se compreender, através do modelo teórico, como um caso arritmico pode ser transformado em um caso sincronizado, não ocorrendo mais este distúrbio.

Para isso, faz-se o estudo com um diagrama de parâmetros, ou seja, um gráfico onde são traçados, nos dois eixos, parâmetros variáveis do sistema. Neste gráfico varia-se os parâmetros  $b_1$  e  $c_2$  e é traçada uma curva que demarca a fronteira entre os estados sincronizados e os não sincronizados. A demarcação é feita utilizando-se o expoente de Lyapunov condicional zero como fronteira. Este gráfico é representado na figura 4.6 e através dele, pode-se perceber que para acoplamento fraco e pequena diferença entre as frequências normais dos osciladores, o sistema está sincronizado, e a sincronização vai ficando mais forte com o aumento do acoplamento, o que é esperado, no entanto, também percebe-se que mesmo com os osciladores tendo grande diferença em suas frequências normais, ocorre algum tipo de sincronização no sistema para valores altos de acoplamento.

No caso onde tanto a diferença entre as frequências normais dos osciladores quanto o acoplamento são baixos, a sincronização não é estável, isto significa que na presença de algum ruído externo a sincronização tende a desaparecer, enquanto em outros casos onde o acoplamento é maior, a sincronização é estável e não é desestabilizada para ruídos quaisquer.

Na prática, supondo ser este um bom modelo para o comportamento cardíaco, imagina-se que este fenômeno demonstra que um marcapasso artificial pode funcionar, para superar uma arritmia cardíaca existente devido a falhas de frequência, aumentando a conexão que envia os impulsos elétricos entre os nodos cardíacos, isso claro, supondo que apenas o nodo sinoatrial tenha a capacidade de enviar impulsos elétricos, como descreve o sistema unidirecional.

Todos os gráficos vistos até agora neste capítulo, consideram  $c_2$  variando no máximo até 0.5, isso acontece porque se percebeu que valores maiores deste

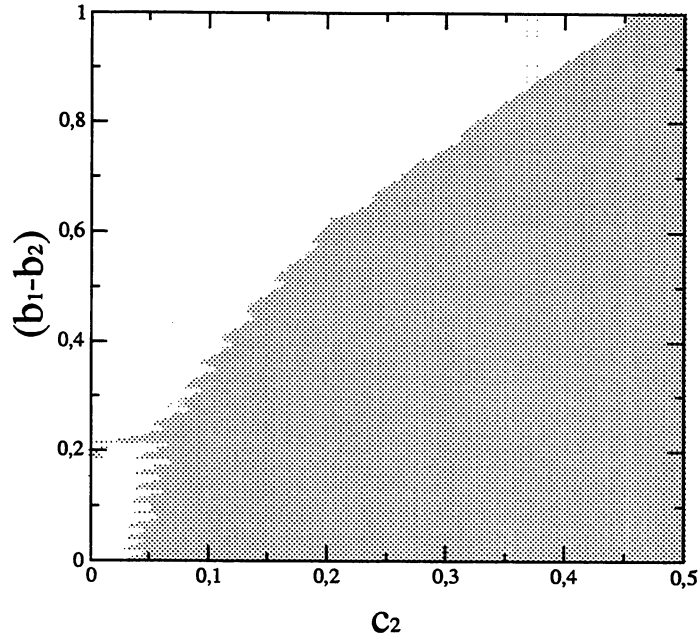


Figura 4.6: Diagrama de parâmetros onde as regiões em branco representam estados não sincronizados e as regiões em cinza representam estados com presença de sincronização. Este gráfico é feito com uma grade de 200X500.

parâmetro, para o caso unidirecional sem força externa, levam o sistema a um mesmo comportamento, assim preferiu-se, por uma economia de tempo computacional, utilizar o valor do parâmetro de acoplamento no máximo até 0.5 pois, até este valor, tem-se uma boa idéia sobre o comportamento geral do sistema. Sendo que após este intervalo o sistema possui um comportamento periódico, com a presença de um atrator do tipo ciclo limite para ambos osciladores.

Supondo a existência de um programa que perceba, no comportamento cardíaco, a presença do expoente de Lyapunov condicional, com a variação da frequência normal dos osciladores, como mostra a figura 4.7, acredita-se que seria possível, quando os valores dos parâmetros de acoplamento são fixos, prever com mais eficácia e antecedência, possíveis doenças arrítmicas. Isso seria possível verificando-se o comportamento do expoente de Lyapunov condicional, assim, caso este expoente esteja próximo do valor zero, tanto sendo uma constante negativa quanto positiva, ou esteja cruzando a fronteira do negativo para o positivo ou vice-versa, existe uma grande probabilidade de que problemas cardíacos estejam à vista.

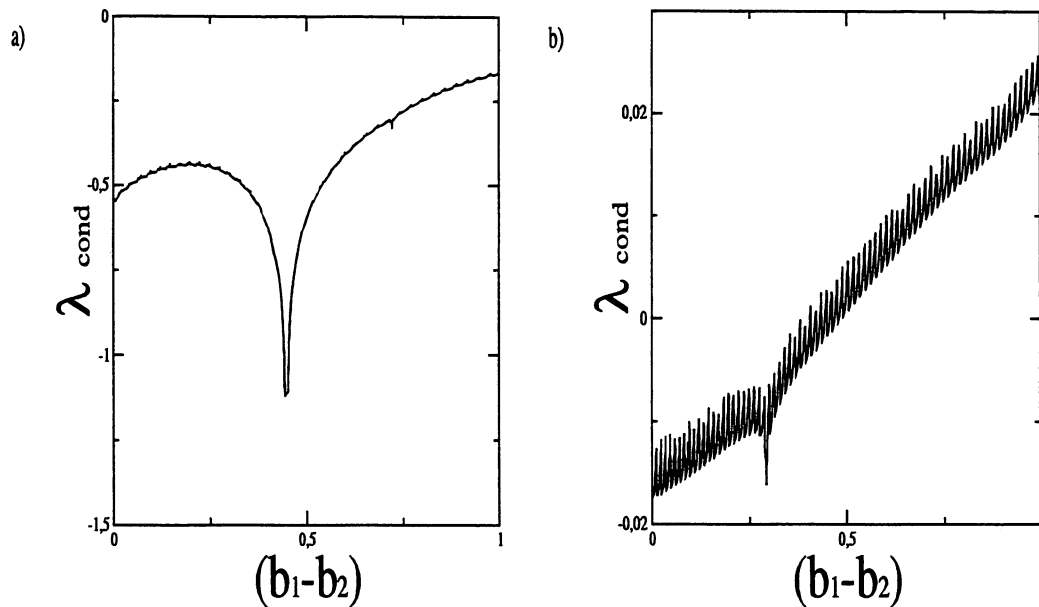


Figura 4.7: Representação do expoente de Lyapunov condicional variando em função das frequências normais. a) sistema unidirecional com  $c_2 = 2.5$ , caso onde o sistema está sincronizado e b) sistema unidirecional com  $c_2 = 0.15$ , caso onde o sistema está passando de sincronizado para não sincronizado.

## 4.4 Oscilador forçado com acoplamento unidirecional

O estudo dos osciladores com força externa é feito através do parâmetro  $a_1$ , sendo que este valor é sempre considerado igual a 0.95. Este valor foi retirado do trabalho de Engelbrecht e Kongas [9] e mostra um comportamento caótico do primeiro oscilador. O segundo oscilador em momento algum foi forçado, isso se deve ao fato de não existir uma aplicação prática, conhecida em sistemas biológicos, que justifique o uso de um segundo termo de força externa neste sistema.

Forçar o sistema significa hipotetizar que a região do tecido cardíaco torna-se um marcapasso ativo que interfere no ritmo normal gerado pelo nodo sinoatrial [17].

Como o primeiro oscilador tem um comportamento caótico, este estudo, para determinado valor do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , tem hipercaos, o que significa possuir, no mínimo, dois expoentes de Lyapunov positivos.

O estudo do expoente de Lyapunov condicional, como pode ser visto em 4.8(c), mostra, da mesma forma que para o caso sem força externa, o valor de  $c_2$

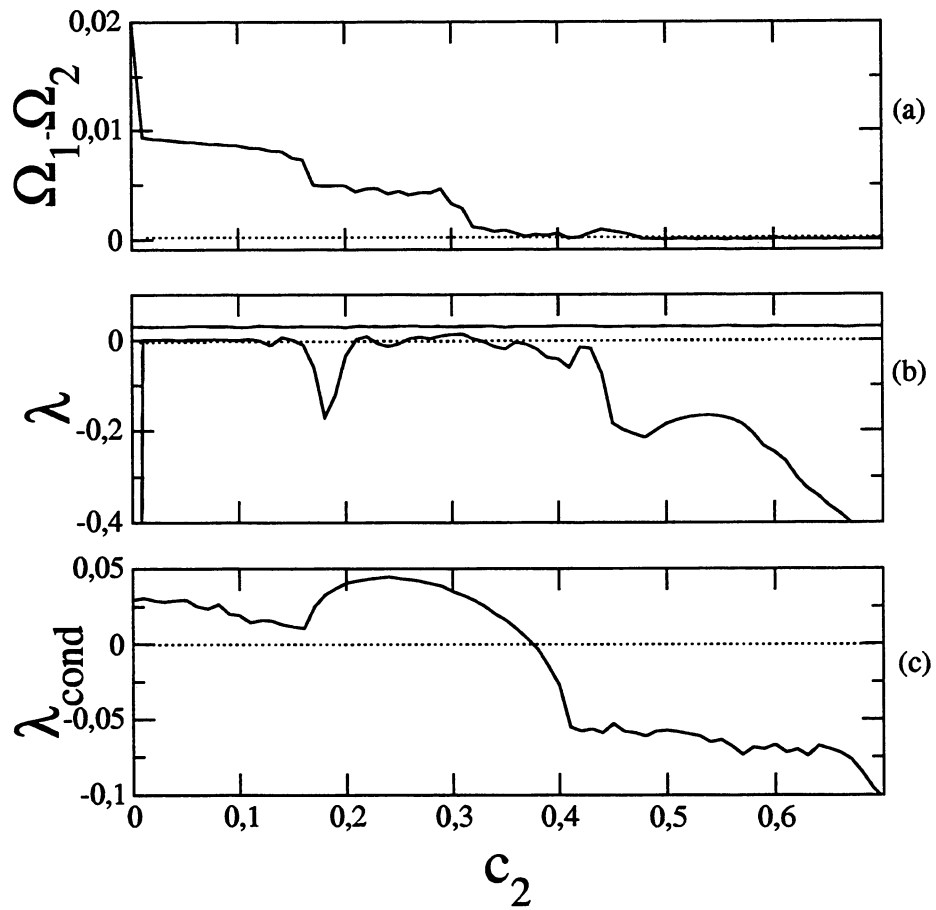


Figura 4.8: Formas de sincronização do sistema. a) diferença dos números de rotação indicando sincronização generalizada, b) expoente de Lyapunov mostrando comportamento caótico e c) expoente de Lyapunov condicional mostrando sincronização no sistema. Nesta situação  $b_1 = 1.0$ ,  $b_2 = 0.66$ ,  $c_1 = 0.0$  e  $a_1 = 0.95$ .

para o qual o sistema começa a possuir sincronização estável. A partir deste mesmo gráfico, é possível observar também, que há uma relação entre a região de hipercaos com o aumento do expoente de Lyapunov condicional, o que corrobora o fato de não se ter sincronização em estados hipercaóticos. O gráfico do número de rotação, visto em 4.8(a), mostra que a partir de determinado valor de  $c_2$ , a sincronização é generalizada do tipo 1:1, isto é, os dois osciladores têm comportamento caótico e possuem uma relação nas suas frequências.

É importante salientar que os estados sincronizados não são afetados pelo comportamento caótico ou periódico, desta forma, pode ser imaginado que as variedades de sincronização estável, em casos caóticos, comportam-se da mesma forma que em casos periódicos, ficando claro que as formas de sincronização entre osciladores, independem de seus comportamentos relacionados às trajetórias.

De início o segundo oscilador é periódico e no decorrer do tempo o primeiro oscilador que é caótico, mantém o mesmo comportamento, situação que evidencia o sistema unidirecional. No caso que está sendo estudado, o primeiro oscilador é que influencia o segundo, então o que se espera é que o segundo oscilador passe a funcionar como o primeiro, ou seja, suas frequências acabem tornando-se equivalentes. Na situação observada, para alguns valores do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , acontece a presença de hipercaos no sistema. Desta forma então, não pode aparecer sincronização de caos, já que sistemas hipercaóticos não podem ter sincronização, a não ser quando existe o controle de caos [69], ou seja, quando o sistema hipercaótico é controlado e transformado em um sistema periódico.

O fato de não ocorrer sincronização em hipercaos acontece porque a presença deste fenômeno, no sistema, faz com que ele possua dois expoentes de Lyapunov positivos, no entanto, quando ocorre sincronização de caos, apenas pode existir um expoente de Lyapunov positivo, já que a variedade de sincronização estável faz com que um expoente que era positivo, torne-se negativo [48].

Com o aumento do acoplamento, o segundo oscilador passa a possuir um comportamento caótico, ou seja, torna-se escravo do primeiro oscilador. Assim, no decorrer do aumento de  $c_2$ , a sincronização entre os dois osciladores é uma sincronização generalizada, onde os dois osciladores têm comportamento caótico.

A figura 4.9 mostra o comportamento do sistema via bifurcações e seus dois respectivos maiores expoentes de Lyapunov. É possível verificar através dela que o sistema possui hipercaos na região entre aproximadamente  $c_2 = 0.12$  e  $c_2 = 0.37$  sendo que entre este intervalo existem outros intervalos onde o hipercaos não existe, ou seja, o sistema tem apenas um expoente de Lyapunov positivo.

Também através da série temporal do sistema unidirecional forçado, é possível

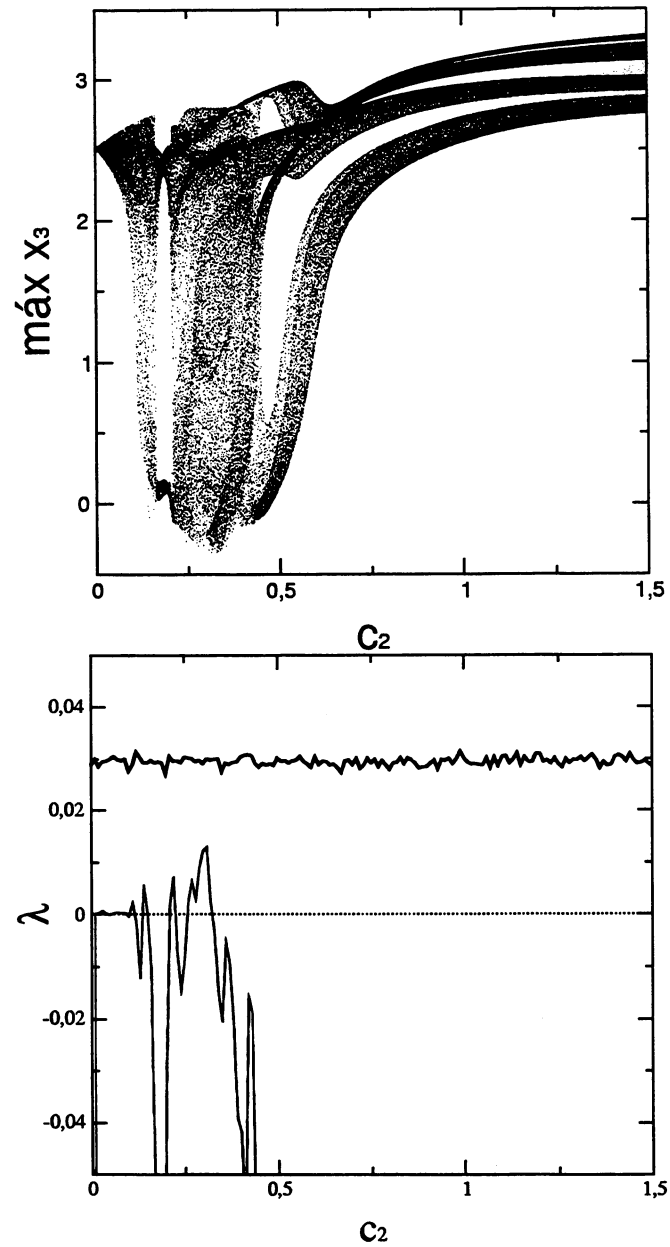


Figura 4.9: Representação do sistema através de bifurcações e dos dois maiores expoentes de Lyapunov. Nota-se nesta figura a presença de hipercaos quando da variação do parâmetro de acoplamento.

verificar como ocorrem as sucessivas formas de sincronização existentes. Na figura 4.10 percebe-se a não sincronização, a sincronização generalizada e um tipo de sincronização completa quando o parâmetro de acoplamento  $c_2$  é muito alto. Nota-se, através dos gráficos apresentados em 4.10, que as formas sucessivas de sincronização ocorrem devido ao fato da variação do termo de acoplamento  $c_2$ , sendo que a cada aumento ou diminuição no valor deste parâmetro, ocorrem diferentes formas de sincronização no sistema.

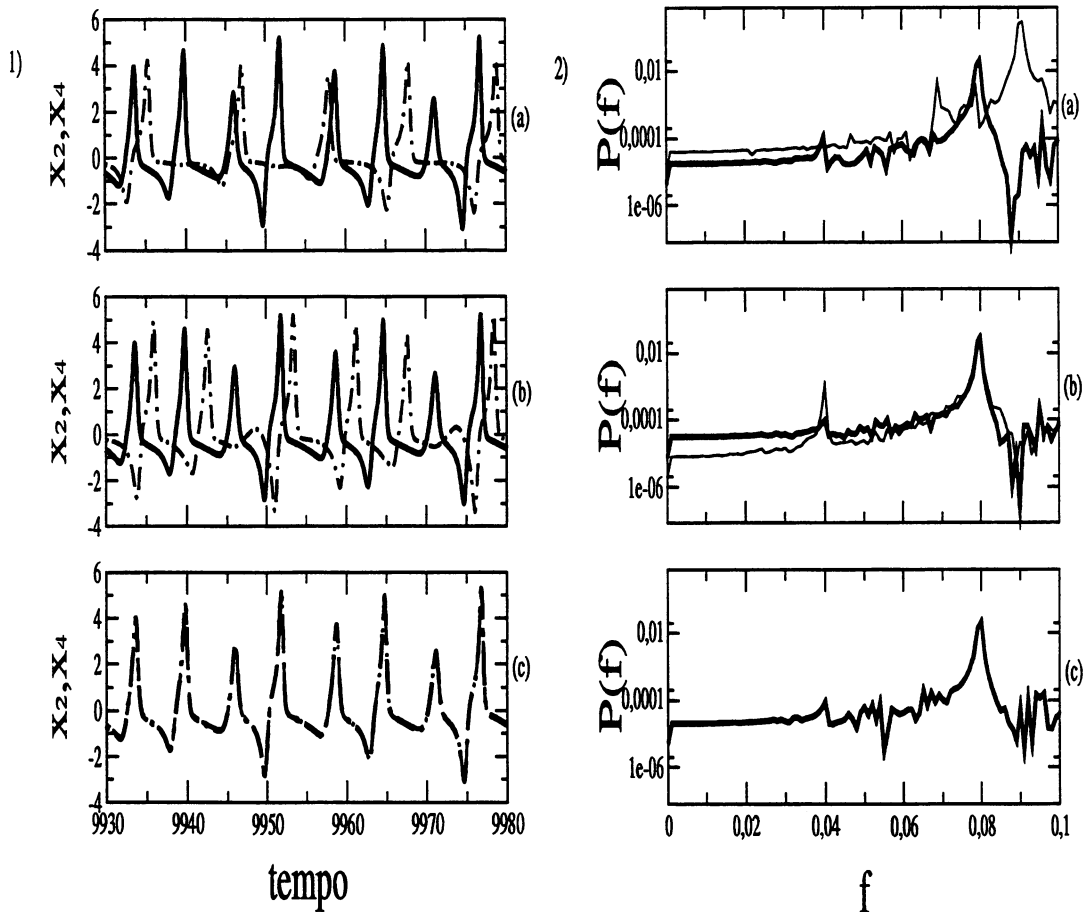


Figura 4.10: Série temporal e espectro de frequência para valores distintos de  $c_2$  no sistema unidirecional com forçamento. Em (1)  $x_2$  é representado pela linha cheia enquanto  $x_4$  pela linha pontilhada, em (2)  $x_2$  é representado pela linha mais grossa. a)  $c_2 = 0.1$  e percebe-se a não sincronização entre os osciladores, b)  $c_2 = 0.45$  e ocorre a sincronização generalizada e em c)  $c_2 = 50.0$  e aparece um tipo de sincronização completa. Os espectros de frequências estão ao lado de cada série temporal respectiva.

Fica evidente a inexistência de sincronização com atraso também para este caso. Através da figura 4.11, olhando a função similaridade, percebe-se, variando

$c_2$ , que apenas existirá sincronização com atraso caso  $c_2$  seja grande e a diferencial do tempo seja aproximadamente zero. Isto acontece, como foi explicado no capítulo dois deste trabalho, devido à grande diferença entre as frequências normais e as diferenças entre as amplitudes dos dois osciladores. No entanto, da mesma maneira que comentado para o caso unidirecional sem força externa, também existem, nas séries temporais, situações onde os osciladores possuem uma trajetória defasada, o que não é chamado de sincronização com atraso devido a diferença entre as amplitudes dos dois osciladores.

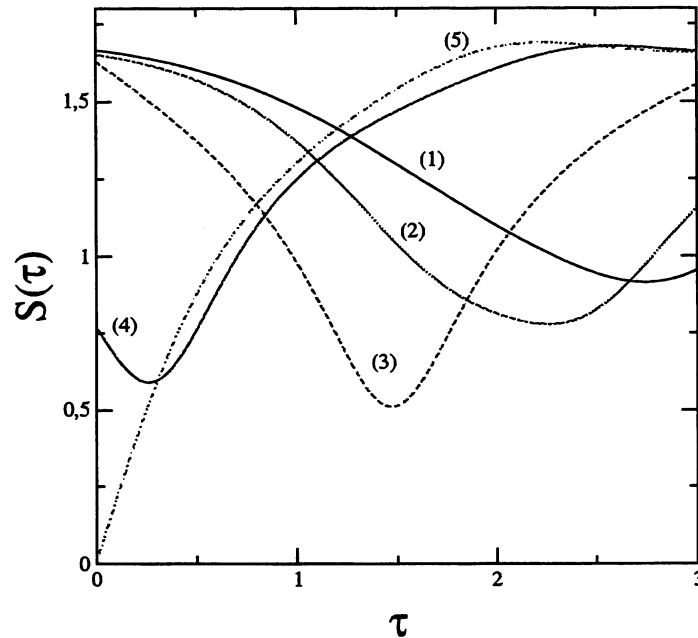


Figura 4.11: Função similaridade para alguns valores de  $c_2$ . Através dela percebe-se a inexistência de sincronização com atraso a não ser quando os valores de  $c_2$  são muito altos. Na curva (1)  $c_2 = 0.4$ , em (2)  $c_2 = 0.5$ , em (3)  $c_2 = 0.9$ , em (4)  $c_2 = 3.0$  e em (5)  $c_2 = 50.0$ .

#### 4.4.1 Variando o modo normal do primeiro oscilador no sistema forçado

Da mesma maneira que para o caso sem força externa, foi verificado o comportamento do sistema, através de seus pontos de sincronização, quando se varia a frequência normal do primeiro oscilador. Esta verificação se dá através da fronteira onde o expoente de Lyapunov condicional é nulo.

Através da figura 4.12 é possível perceber que, diferentemente do caso uni-



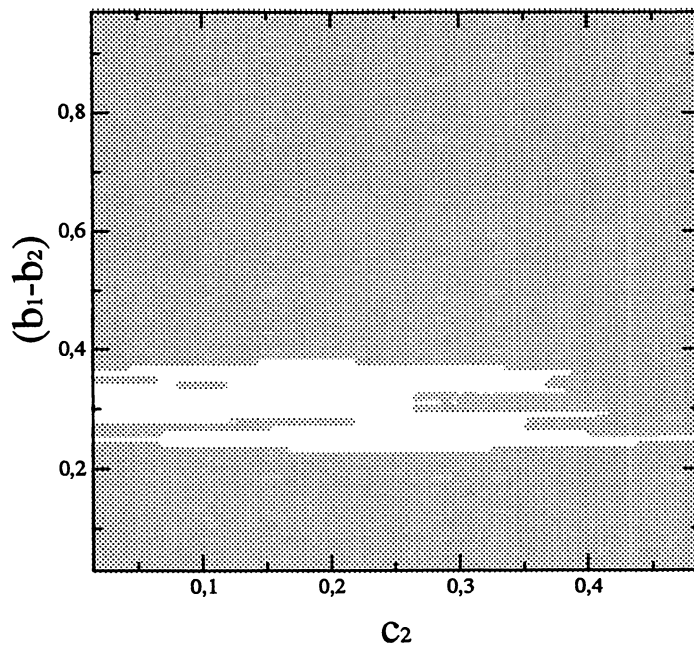


Figura 4.12: Diagrama de parâmetros quando o sistema possui variação da frequência normal do primeiro oscilador. A área em branco representa os estados sincronizados enquanto a área em cinza mostra os valores para os quais os osciladores não sincronizam. Este gráfico tem a escala percorrida em uma grade de 200X500.

direcional sem força externa, não existe apenas uma curva que separa os estados síncronos dos não síncronos, ou melhor, a ocorrência de sincronização no sistema unidirecional com força externa, acontece apenas em uma pequena área do diagrama de parâmetros onde a diferença entre as frequências normais dos dois osciladores é relativamente pequena. Devido a verificação de sincronização apenas em regiões onde as frequências normais dos dois osciladores são muito próximas, é possível, que para este sistema em estudo, existam apenas sincronizações relacionadas às frequências, ou seja, sincronização generalizada e de frequência, não sendo possível a ocorrência de outras formas de sincronismo entre os dois osciladores. No entanto, é possível verificar pequenas áreas de estados não sincronizados dentro do espaço que representa os estados sincronizados.

Assim, através da figura 4.12, pode-se perceber que os dois osciladores apenas sincronizam para valores próximos dos valores encontrados no sistema cardíaco real, ou seja, valores para os quais a razão entre as frequências normais dos dois osciladores é  $\frac{3}{2}$ .

Com isso, imagina-se que o sistema aqui trabalhado tem uma boa escolha para os valores de parâmetros, já que de uma maneira geral, pode representar e tentar modelar de uma forma bem razoável, o sistema cardíaco humano.

## 4.5 Comportamento do segundo oscilador via variação do seu modo normal

### 4.5.1 Sistema sem força externa

Com o intuito de verificar como o segundo oscilador comporta-se perante o primeiro, devido ao fato de ele ser o responsável pelas mudanças do sistema, resolveu-se manter o primeiro oscilador com os valores de parâmetros invariantes, isto é,  $b_1 = 1.0$  e sem força externa e variar a frequência normal do segundo oscilador juntamente com a variação do parâmetro de acoplamento  $c_2$ . Na prática, isso pode ser visto como algum caso de arritmia e sendo assim, a partir de uma visão teórica sobre o comportamento do segundo oscilador, pode-se conhecer um tanto melhor o sistema em si e talvez até saber contornar alguns tipos de distúrbios existentes.

Para este caso o número de rotação do primeiro oscilador é sempre aproximadamente igual a 0.0138, isto significa que para a ocorrência de uma sincronização do tipo travamento de frequência, o segundo oscilador deve ter este mesmo valor de número de rotação.

Assim, a figura 4.13 mostra o comportamento do segundo oscilador quando o parâmetro de acoplamento é variado.

Através da figura 4.13(1) percebe-se o comportamento do segundo oscilador através do número de rotação dele. Nota-se, comparando com (2) que o sistema tem um comportamento quase que sempre sincronizado. Os números de rotação parecem possuir diversos patamares infinitesimais que lembram os travamentos de frequência, mostrando com isso que o sistema é bem sincronizado e estável. Esta situação lembra o comportamento do que se chama escada do diabo, onde ocorrem degraus que possuem travamento de frequências com razões racionais para o caso de sistemas periódicos, o que é discutido em [70], no acoplamento entre dois osciladores distintos. Se houvesse, neste intervalo, patamares que possuíssem razão irracional, então haveria a existência de *quasi*-periodicidade no comportamento dinâmico do sistema.

Através do estudo destes gráficos nota-se que qualquer presença de ruído neste sistema não influencia em nada o comportamento dinâmico dele, já que o expoente de Lyapunov condicional tem todo seu aspecto monotonicamente decrescente, isto é, o sistema é sincronizado estavelmente para qualquer valor de  $c_2$  aproximadamente igual a 0.08 quando  $b_2 = 0.66$  e valores menores de  $c_2$  com a também diminuição de  $b_2$ .

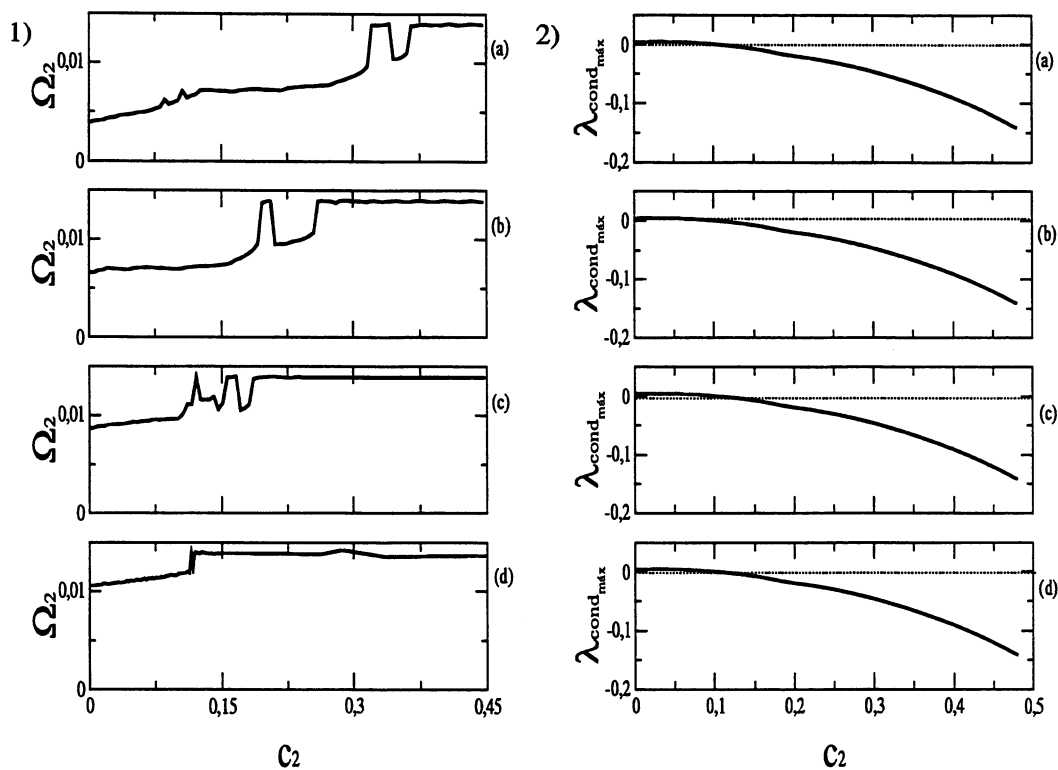


Figura 4.13: Comportamento do segundo oscilador com a variação de  $b_2$ . Em (1) estão representados os números de rotação para o segundo oscilador e em (2) representa-se o expoente de Lyapunov condicional do sistema. Para ambos os casos a)  $b_2 = 0.166$ , b)  $b_2 = 0.33$ , c)  $b_2 = 0.5$  e d)  $b_2 = 0.66$ .

## 4.5.2 Sistema com força externa

Da mesma forma que foi feito o estudo da variação da frequência normal do segundo oscilador  $b_2$ , para o caso sem força externa, aqui é feito para o sistema forçado, onde o primeiro oscilador é sempre caótico e seu número de rotação é sempre aproximadamente igual a 0.02.

Quando o segundo oscilador tende para o mesmo número de rotação, percebe-se a presença de uma sincronização generalizada. Ocorre a presença desta forma de sincronização e não uma do tipo com atraso, devido ao fato de se ter escolhido um valor de parâmetro de injeção/dissipação de energia que leva o sistema a ter diferentes amplitudes para várias situações.

Olhando a figura 4.14, pode-se perceber, que quanto menor é o valor da frequência normal  $b_2$ , maiores são os degraus onde o número de rotação permanece igual. Neste caso, observa-se novamente um comportamento semelhante ao conhecido

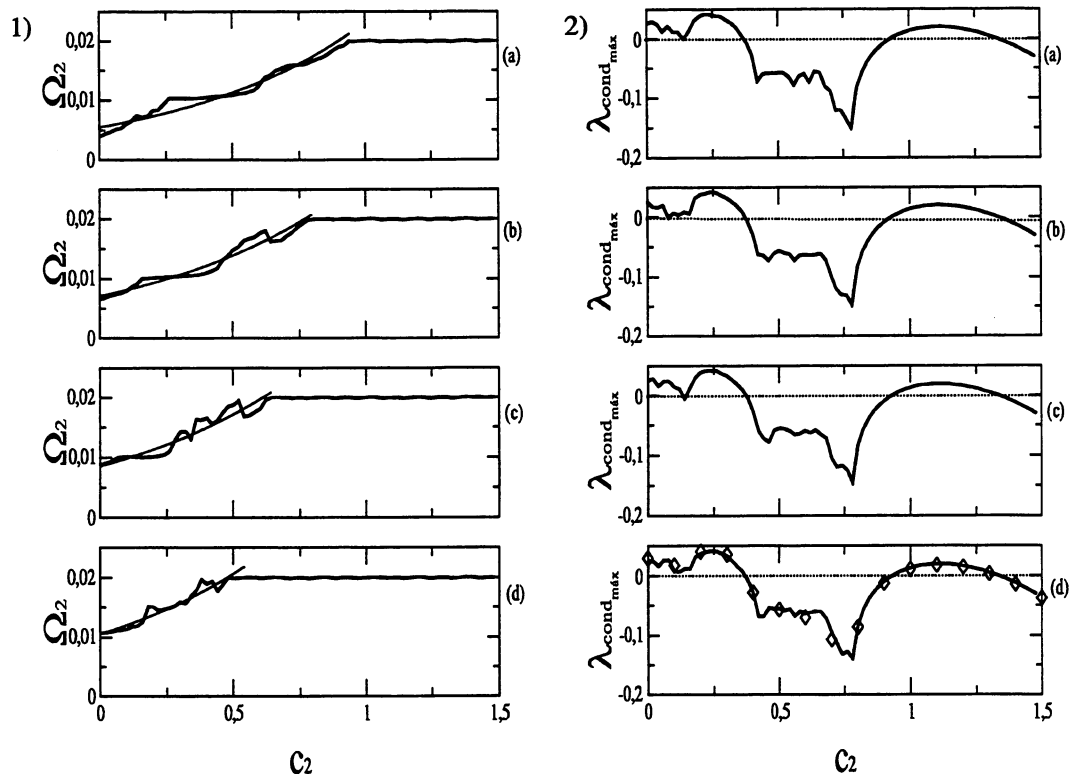


Figura 4.14: Comportamento do segundo oscilador quando da variação de  $b_2$ . Em (1) está a representação do número de rotação do segundo oscilador e em (2) a representação do expoente de Lyapunov condicional do sistema. Tanto para (1) quanto para (2) em a)  $b_2 = 0.166$  e a correlação ( $C_o$ ) com a função exponencial é igual a 0.96, b)  $b_2 = 0.33$  e  $C_o = 0.98$ , c)  $b_2 = 0.5$  e  $C_o = 0.96$  e d)  $b_2 = 0.66$  e  $C_o = 0.97$ .

como escada do diabo, onde existe presença de patamares que possuem uma situação de travamento de frequências, ou seja, regiões onde as frequências entre os dois osciladores estão correlacionadas.

Este comportamento pode ocorrer devido às heranças das línguas de Arnold, ou seja, uma região no espaço dos parâmetros associados a um particular número de rotação [23], que ocorre no sistema. É necessário salientar também, que o expoente de Lyapunov condicional do sistema, representado em 4.14(2), tem aspecto que demonstra a presença de estados sincronizados e não sincronizados. Assim, acredita-se que para os valores de  $c_2$  próximos a transição do expoente de negativo para positivo ou vice-versa, uma pequena presença de ruído poderá afetar o sistema de alguma forma, já que esta transição mostra, que nestes intervalos, a sincronização entre os osciladores não é estável.

As curvas analisadas em 4.14(2) mostram o comportamento do sistema através

do expoente de Lyapunov condicional para um tempo de três mil unidades de tempo. Para se analisar se este tempo não estava no comportamento de transiente do sistema, em (d) analisou-se o mesmo caso para um tempo de dez mil unidades de tempo. Fato que é demonstrado através dos pontos representados por losangos na figura. Com isso pôde-se perceber que um intervalo de tempo igual a três mil unidades de tempo já é suficiente, neste caso, para representar o sistema em seu estado real, sem transientes.

É possível perceber através dos gráficos apresentados em 4.14, que quando o segundo oscilador não possui uma frequência normal, mais ele tende a se comportar como o primeiro oscilador, isso se deve ao fato de que as frequências de giro dos dois osciladores tornam-se uma só.

É necessário, nesta ocasião, lembrar que o estado caótico ocorre nas amplitudes dos osciladores, sendo que as frequências têm um aspecto similar. Na verdade, isso significa que as frequências dos osciladores independem das condições iniciais do sistema e não possuem um comportamento caótico, isto é, este comportamento é apenas verificado nas amplitudes do sistema, neste caso, nas amplitudes dos osciladores.

Com estas figuras foi traçada ainda uma curva de regressão que pudesse representar um bom comportamento no crescimento do número de rotação do segundo oscilador. A figura 4.14 mostra que o crescimento do número de rotação comporta-se como uma função exponencial. Significando assim, que mantendo o primeiro oscilador invariante e mexendo na frequência do segundo, este tende a possuir uma mesma frequência, seguindo um padrão exponencial.

Na figura 4.14(1) o traço mais claro corresponde a função exponencial, enquanto a linha mais escura é o número de rotação do segundo oscilador variando com o parâmetro de acoplamento  $c_2$ .

Através ainda desta figura, nota-se que com o aumento de  $b_2$ , modo normal do segundo oscilador, os degraus possuem uma largura menor, demonstrando que quando  $b_2$  fica mais próximo de  $b_1$ , mais o comportamento de ambos tende a se assemelhar, o que torna os degraus menores, já que existirão maiores números de degraus.

## 4.6 Osciladores com presença de ruído

Nesta seção mostra-se que o sistema em estudo, nesta dissertação, é robusto, ou seja, colocando-se um ruído externo, os osciladores comportam-se da mesma

maneira, mostrando que o modelo é razoavelmente bom para descrever o comportamento cardíaco, exceção feita para casos comentados na seção precedente onde a sincronização é instável, ou seja, casos onde a frequência normal dos osciladores é variada.

#### 4.6.1 Ruído no termo de acoplamento do segundo oscilador

Primeiramente o ruído é introduzido no parâmetro de acoplamento  $c_2$ . É um ruído branco onde uma função gera números aleatórios entre 0 e 1 que simulam o ruído. Este ruído, que gera números aleatórios e uniformes, é introduzido no sistema a cada passo de integração, através de uma função randômica no programa computacional. Esta função gera ruídos de 10% e 50% do valor da variável no sistema, supondo o sistema sem ruído como o centro, ou seja, o ruído de 10% cobre valores de  $c_2$  com ruído da forma  $c_2(1 \pm 0.05)$ . Da mesma maneira ocorrendo para 50% onde tem-se  $c_2(1 \pm 0.25)$  e acontecendo o mesmo para  $b_1$ , onde também é introduzido ruído branco.

Para verificar a robustez do sistema, utilizou-se o expoente de Lyapunov condicional e através dele, pôde-se perceber que ruídos não afetam a sincronização do sistema, ou seja, a sincronização entre os dois osciladores inicia-se no mesmo ponto onde era gerada, sem a presença do ruído.

A figura 4.15 mostra esta robustez onde (a) e (b) representam o sistema sem força externa e têm respectivamente 10% e 50% de ruído no parâmetro de acoplamento  $c_2$ . Para verificar a não mudança de comportamento frente ao ruído, (a) e (b) devem ser comparadas com a figura 4.1(c).

Da mesma forma, utilizou-se o expoente de Lyapunov condicional para verificar o sistema com força externa, esta verificação é demonstrada em (c) e (d) onde novamente ocorre a existência de 10% e 50% de ruído em  $c_2$ , respectivamente. Neste caso, para perceber a robustez do sistema via sincronização, é necessário comparar (c) e (d) com a figura 4.8(c) e então percebe-se que os pontos de sincronismo entre os dois osciladores é o mesmo, ou seja, frente a ruídos no termo de acoplamento  $c_2$ , o sistema é robusto, sendo assim, bom para o estudo de um modelo cardíaco.

Para saber em que situação o ruído pode afetar o sistema, além dos casos onde ocorre sincronização instável, estudou-se também a presença de ruído na frequência normal  $b_1$  do primeiro oscilador, o que será discutido no próximo item.

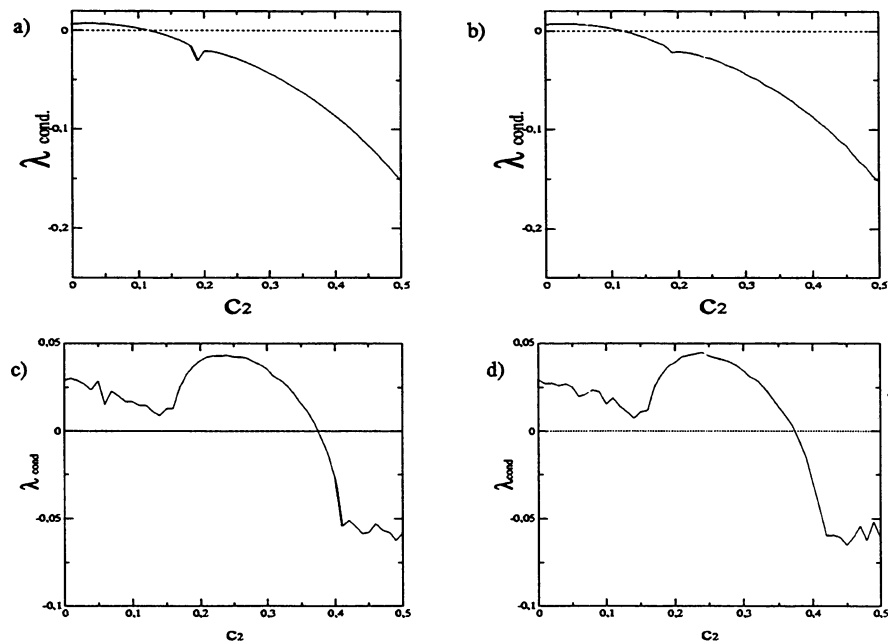


Figura 4.15: Comportamento do sistema na presença de ruído em  $c_2$  via expoente de Lyapunov condicional. a) 10% de ruído em  $c_2$ , no sistema sem força externa; b) 50% de ruído em  $c_2$ , no sistema sem força externa; c) 10% de ruído em  $c_2$ , no sistema com força externa e d) 50% de ruído em  $c_2$ , no sistema com força externa.

## 4.6.2 Ruído no modo normal do primeiro oscilador

Colocar um ruído em  $b_1$  pode significar, na prática, uma mudança de comportamento do indivíduo, ou seja, uma mudança do meio ambiente que gera uma modificação no movimento do indivíduo, como sentar, deitar, falar ou mesmo caminhar.

Do ponto de vista biológico, claro que movimentos mudam os batimentos cardíacos, não podendo no entanto, mudar o aspecto dinâmico do coração. Assim, imaginava-se ao iniciar este estudo, que o sistema mudaria o seu comportamento mas não se conhecia a forma desta mudança. Da mesma maneira, igualmente feita para o ruído em  $c_2$ , utilizou-se um ruído branco na frequência normal do primeiro oscilador.

Para o caso sem força externa onde o sistema é quase que para todos os valores de  $c_2$  sincronizado, não houve mudança de comportamento, o que pode ser percebido comparando (a) e (b) da figura 4.16 com 4.1(c). Esta robustez, aparentemente, significa que quando os dois osciladores funcionam em sincronismo, nenhum efeito externo pode mudar os seus comportamentos.

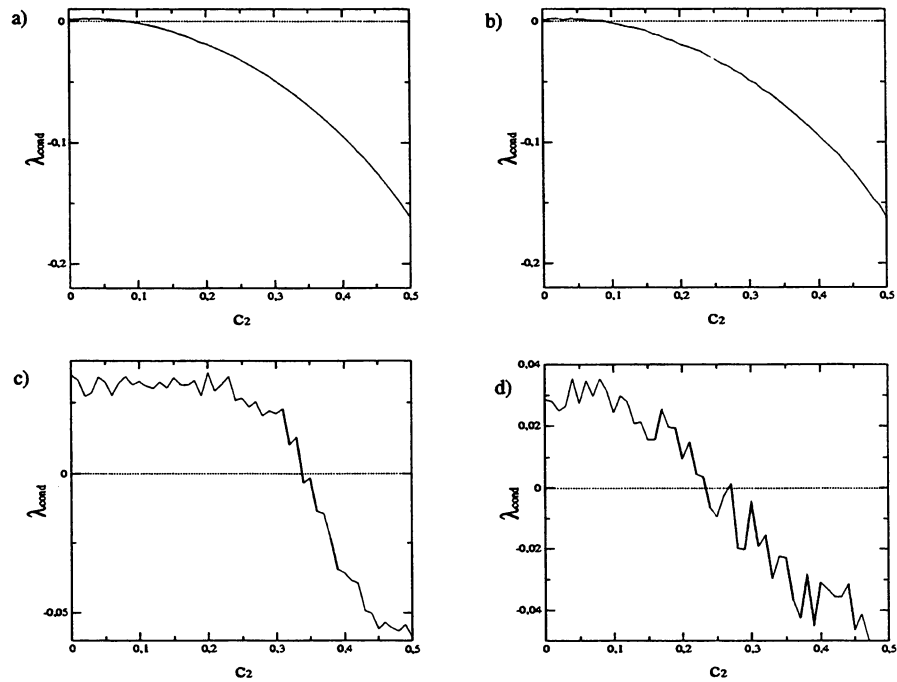


Figura 4.16: Comportamento do sistema na presença de ruído em  $b_1$  via expoente de Lyapunov condicional. a) 10% de ruído em  $b_1$ , no sistema sem força externa; b) 50% de ruído em  $b_1$ , no sistema sem força externa; c) 10% de ruído no modo normal do primeiro oscilador, no sistema com força externa e d) 50% de ruído no modo normal do primeiro oscilador, no sistema com força externa.

No entanto, para o sistema com força externa, que como visto anteriormente possui regiões de não monotonicidade, isto é, regiões onde após os osciladores estarem sincronizados voltam a dessincronizar, com o aumento do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , há uma grande mudança no comportamento do expoente de Lyapunov condicional, o que pode ser visto em (c) e (d) da figura 4.16. Esta mudança significa que a forma de sincronização entre os osciladores muda consideravelmente com um ruído colocado na frequência normal. Este comportamento diferente, deve ser comparado com a figura 4.8(c), para se perceber as diferenças existentes entre o sistema com e sem ruído.

Pode-se perceber através da figura 4.16, que além da curva não ser suave, o ponto onde ocorre a passagem do sistema não sincronizado para sincronizado muda. Esta figura mostra o comportamento do sistema frente a ruído de 10% e 50% para o caso de expoente de Lyapunov condicional, verificando a situação de sincronização estável entre os dois osciladores.

Assim, o ruído branco introduzido em  $b_1$ , mostra que o sistema sofre alterações em suas formas de sincronização, não havendo neste caso, sincronização do



tipo travamento de frequência 1:1 já que o ruído afeta drasticamente a modulação frequencial do sistema. Desta forma portanto, existe apenas sincronização do tipo travamento de frequência para valores com razões diferentes da unidade. De qualquer forma, um valor do expoente de Lyapunov condicional menor que zero, prevê que os osciladores voltam a um estado normal, após o término das perturbações.

Com a introdução de ruído, tanto em  $c_2$  quanto em  $b_1$ , não foi verificada a presença ou não de caos no sistema, apenas pretendeu-se com isso, verificar a mudança nos parâmetros onde ocorre a passagem do estado sincronizado para o não sincronizado, bem como, esta situação pode ser verificada, na prática, quando da mudança de movimento de um indivíduo.

# Capítulo 5

## Aspectos Gerais de Dois Osciladores de van der Pol Bidirecionalmente Acoplados

### 5.1 O comportamento bidirecional

Da mesma forma que para o caso unidirecional visto no capítulo precedente, aqui estuda-se o comportamento dos sistemas forçado e não forçado, no entanto, o acoplamento é bidirecional, o que significa que um oscilador influencia diretamente o outro. Assim, considera-se, supondo o modelo cardíaco, que tanto o nodo sinoatrial como o atrioventricular comportam-se como marcapassos autônomos, sem que apenas um seja o dominante.

Na vasta literatura existente, infelizmente ainda não há um consenso na consideração de como o circuito elétrico cardíaco realmente se comporta, isto é, alguns trabalhos [1], [7], [12], [21], [55], consideram que o nodo sinoatrial é o marcapasso dominante e é ele o encarregado da transmissão dos impulsos cardíacos, portanto, se o nodo atrioventricular influenciar o outro, já ocorre algum tipo de arritmia. No entanto, em outros trabalhos [9], [17], [60], um nodo pode influenciar diretamente o outro, sem que isso cause algum tipo de distúrbio cardíaco. Assim, devido a esta discussão, resolveu-se fazer um estudo do sistema bidirecional no modelo, comparando o sistema físico em estudo, com o sistema cardíaco. Caso o sistema bidirecional seja o normal, sabe-se como verificar os resultados arrítmicos, caso seja um comportamento com distúrbios, então conhece-se suas características.

## 5.2 Formas de sincronização para o sistema bidirecional sem forçamento

Para um primeiro estudo feito a respeito deste sistema, considera-se ambos os osciladores sem força externa, ou seja,  $a_1$  e  $a_2$  são ambos nulos; o primeiro oscilador com parâmetro de acoplamento  $c_1$  igual a 0.01, enquanto apenas o segundo oscilador tem seu acoplamento  $c_2$ , variado no decorrer do tempo.

Em um primeiro momento, da mesma forma que para o sistema unidirecional, foi verificado o comportamento da diferença do número de rotação entre os dois osciladores, para compreender o comportamento das frequências. Da mesma forma, foram analisados os gráficos do expoente de Lyapunov, expoente de Lyapunov condicional e diagrama de bifurcações.

Após esta análise percebeu-se que para um parâmetro de acoplamento pequeno, como no caso  $c_1 = 0.01$ , o sistema bidirecional não possui muita diferença quando comparado com o sistema unidirecional também sem força externa. Isso provavelmente ocorre porque o sistema é periódico possuindo um atrator de ciclo limite estável, assim, ocorrendo um aumento pouco considerável no parâmetro de acoplamento do primeiro oscilador, o sistema tende a se manter com uma dinâmica muito semelhante. No entanto, caso  $c_1$  seja aumentado, os osciladores tendem a se escravizar um ao outro, o que não é viável de um ponto de vista biológico.

Pela razão descrita acima, não se acreditou ser útil colocar gráficos nesta seção, já que eles teriam os mesmos comportamentos dos já encontrados no capítulo anterior, levando assim esta seção a uma situação repetitiva.

Como o sistema bidirecional sem força externa tem um comportamento semelhante ao que já foi tratado anteriormente, então também suas formas de sincronização são semelhantes e ocorrem da mesma maneira que já comentado.

Desta forma, para o sistema bidirecional sem força externa, é necessário comentar apenas que seu comportamento para  $c_1$  pequeno, não muda muito, sendo desnecessário analisá-lo em mais detalhes. Apenas há o aparecimento de algumas órbitas, o que realmente não influi no comportamento do fenômeno de sincronização dos osciladores.

### 5.3 Osciladores com acoplamento bidirecional e forçado

O sistema aqui estudado apresenta  $c_1 = 0.01$  e  $a_1 = 0.95$  enquanto  $c_2$  varia e  $b_1 = 1.0$  e  $b_2 = 0.66$ . Valores maiores de  $c_1$  levam o sistema a um comportamento com dinâmica periódica mais prolongada, ou seja, o sistema terá comportamento caótico apenas para valores também elevados de  $c_2$ , o parâmetro de acoplamento do segundo oscilador. Percebeu-se, através do estudo dos diagramas de bifurcação, que para valores altos, tanto de  $c_1$  quanto de  $c_2$ , menos janelas periódicas existirão entre os comportamentos caóticos dos osciladores. Desta maneira, foi escolhido trabalhar com parâmetro de acoplamento  $c_1$  baixo, de forma que o primeiro oscilador não virasse totalmente escravo do segundo, já que  $c_1$  é o termo que mostra o quanto o segundo oscilador influencia o primeiro.

De início verificou-se o comportamento deste sistema através do diagrama de bifurcação e de seu correspondente expoente de Lyapunov. Através deles pôde-se perceber que o sistema possui situações onde ocorre presença de caos e outras onde ele é periódico.

Na figura 5.1 pode ser visto o comportamento dinâmico do sistema até o valor de  $c_2$  igual a 2.0. Após este valor, ocorre a existência de órbitas caóticas, já que valores grandes para  $c_2$  tornam o sistema mais sincronizado, ou melhor, sendo o primeiro oscilador caótico, quanto maior o valor de  $c_2$ , mais o segundo oscilador tende a ficar caótico, assim, mesmo para valores baixos de  $c_1$ , o sistema possui determinadas regiões onde ocorre sincronização de caos entre os dois osciladores. Com isso, nos pontos onde há presença de caos, pode-se analisar o caso de sincronização em osciladores caóticos, isto é, formas de sincronização do tipo generalizada, de fase, com atraso e completa. Já nos casos onde o sistema se comporta periodicamente, podem ser estudadas outras formas de sincronização.

Dos gráficos contidos em 5.1 pode-se perceber, através do expoente de Lyapunov, quando o sistema é caótico, *quasi*-periódico ou apenas periódico. Como já comentado anteriormente, expoentes de Lyapunov zero demonstram pontos de bifurcação ou casos de órbitas *quasi*-periódicas, expoentes negativos indicam a presença de trajetórias periódicas e um expoente positivo mostra a presença de caos, enquanto dois ou mais expoentes positivos, mostram que o sistema é hipercaótico.

Para compreender as formas de sincronização dos osciladores, o sistema foi dividido em situações caóticas e periódicas, isso para comprovar o que foi dito anteriormente no capítulo quatro, que as maneiras como os osciladores sincronizam independe do fato de ser o sistema caótico ou periódico.

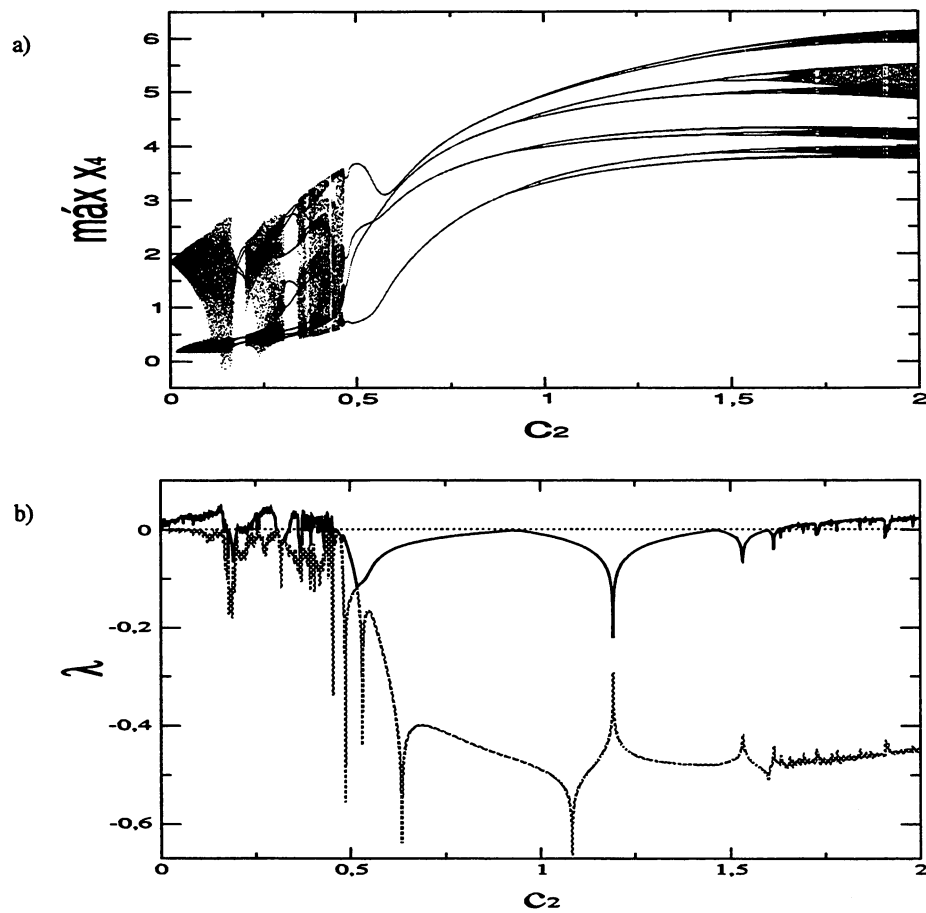


Figura 5.1: Comportamento do sistema através do diagrama de bifurcação e do expoente de Lyapunov. a) diagrama de bifurcação do sistema bidirecional forçado com  $c_1 = 0.01$ ,  $b_1 = 1.0$ ,  $b_2 = 0.66$  e  $a_1 = 0.95$ . b) os dois maiores expoentes de Lyapunov do sistema que mostram os pontos de bifurcação, da presença de caos e de periodicidade.

De início foi estudado o sistema através da diferença dos números de rotação dos dois osciladores. Através dela pode-se perceber que a partir de um valor de  $c_2$  aproximadamente igual a 0.4 o sistema passa a ter uma diferença do número de rotação aproximadamente igual a zero, ainda que seu valor seja um pouco oscilatório, o que indica a presença de sincronização de frequência. Para o caso bidirecional em estudo, não foi verificada a presença de casos onde um oscilador é caótico e outro periódico. Fato que ocorreu para o caso unidirecional, onde a sincronização foi chamada de sincronização de ritmos, devido a ambos osciladores possuírem frequências fundamentais idênticas, mudando apenas as formas de seus harmônicos.

Para os valores de  $c_2$  onde os dois osciladores comportam-se periodicamente, então há uma sincronização conhecida como travamento de frequências, nesta situação em particular, este travamento tem razão 1:1, o que pode ser verificado através da figura 5.2(a).

Sabe-se que para verificar o aparecimento de sincronização entre os osciladores, deve-se analisar o gráfico que aparece através do cálculo do expoente de Lyapunov condicional, que é feito da mesma forma que para o expoente de Lyapunov normal [26], apenas considerando as variedades de sincronização. A partir deste gráfico, pode-se perceber que a sincronização estável do sistema começa a acontecer quando  $c_2$  é aproximadamente igual a 0.48, no entanto, esta forma de sincronização não é monotonicamente estável, podendo ser, em alguns intervalos, afetada na presença de ruído. Esta instabilidade é percebida próximo a transições do expoente de positivo para negativo ou vice-versa.

A figura 5.2 mostra em (a) o comportamento da diferença do número de rotação entre os dois osciladores, enquanto que (b) demonstra o comportamento do expoente de Lyapunov condicional do sistema.

Da mesma forma que feito anteriormente, o sistema novamente é dividido para valores de  $c_2$  onde o sistema é caótico e para outros onde é periódico. Agora o interesse é verificar as outras possíveis formas de sincronização quando o sistema é acoplado bidirecionalmente. Para isso utilizou-se o gráfico que fornece a diferença de fase entre os dois osciladores. Neste gráfico são colocados valores para os casos onde ocorrem sincronismo caótico e também para sincronismo periódico.

A figura 5.3 mostra que o sistema quando sincronizado caoticamente não possui sincronização de fase, o que já era esperado, devido aos comentários feitos no capítulo quatro desta dissertação, onde foi colocado que o comportamento das fases de um oscilador de van der Pol é diferenciado. No entanto, a partir de 5.3(a) percebe-se que para valores maiores do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , menor o coeficiente angular da reta, o que leva o sistema, quando o parâmetro de acoplamento  $c_2$  cresce tendendo ao infinito, a uma sincronização completa. Esta situação também é

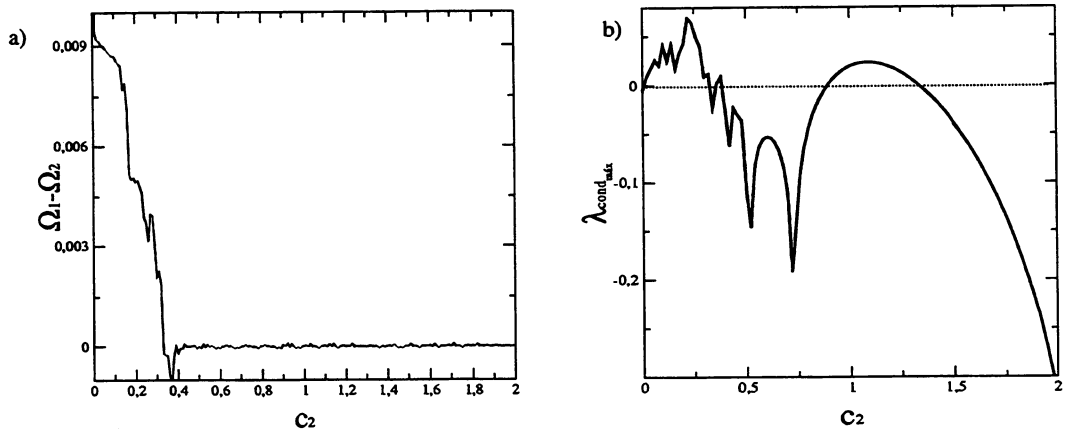


Figura 5.2: Análise de sincronização do sistema bidirecional forçado. Em a) diagrama da diferença do número de rotação dos dois osciladores indicando sincronização de frequências, em b) máximo expoente de Lyapunov condicional que mostra os valores de  $c_2$  para os quais o sistema sincroniza.

verificada para o caso do sistema unidirecional, visto anteriormente. Para os valores onde o sistema tem sincronização, mas comporta-se periodicamente, tem-se a noção através de (b), que um pouco diferente do caso caótico, para valores que tornam o sistema periódico, nem um grande aumento de  $c_2$  leva o sistema a um travamento de fase, mesmo sendo os valores de  $c_2$  diferentes. Para os maiores valores de  $c_2$  verificados, a reta encontrada possui um grande coeficiente angular, não sendo portanto, possível a presença de uma reta com este mesmo coeficiente tendendo a zero, o que representaria um travamento de fases no sistema periódico.

Portanto, pelo que foi considerado, é fácil perceber que as maneiras com que o sistema aqui apresentado sincronizam, independem de o sistema estar com uma dinâmica caótica ou periódica, como já comentado anteriormente.

Correlacionado com o que pretende-se conhecer a respeito do sistema ao nível de sincronização, também utilizou-se o gráfico da função similaridade para se fazer a verificação da ocorrência ou não de sincronização com atraso. Através do gráfico 5.4, observa-se que o sistema, quando analisada sua dinâmica caótica, assim como no caso unidirecional, também não possui sincronização com atraso, fato que está relacionado à grande diferença entre as frequências normais dos dois osciladores [46].

Vale mencionar aqui, novamente, que esta sincronização não ocorre, apenas, devido aos osciladores não possuírem amplitudes idênticas, mas, como acontece em sistemas biológicos, este sistema também possui um comportamento defasado no tempo entre suas frequências. Na literatura existente, não aparecem fatos que mostrem a ocorrência de sincronização com atraso para osciladores periódicos, no entanto, escolheu-se fazer um gráfico para esta situação, confirmando assim, o fato de

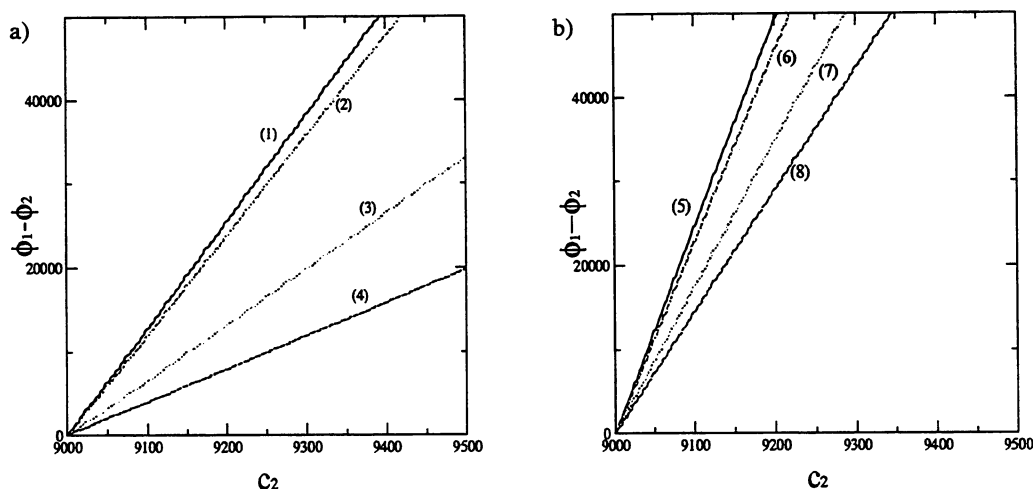


Figura 5.3: Estudo da sincronização de fase entre os osciladores. Em a) valores de  $c_2$  para os quais o sistema é caótico. Nas retas (1)  $c_2 = 1.7$ , (2)  $c_2 = 1.8$ , (3)  $c_2 = 2.5$  e (4)  $c_2 = 3.8$ . No gráfico b) estão os valores de  $c_2$  para os quais os osciladores sincronizam com comportamento periódico. Nas retas (5)  $c_2 = 0.5$ , (6)  $c_2 = 0.75$ , (7)  $c_2 = 1.2$  e (8)  $c_2 = 1.5$ .

a sincronização independe dos osciladores acoplados serem caóticos ou periódicos. Essa situação é mostrada em 5.4(b) e deve ser comparada com 5.4(a), onde o sistema é caótico.

Tentando comparar o sistema dos dois osciladores com o comportamento cardíaco, também analisou-se as séries temporais para o sistema bidirecional, bem como seus espectros de frequência para, de alguma maneira, tentar compreender o funcionamento das séries temporais aqui apresentadas, relacionadas a um ECG.

Analisando o comportamento das séries temporais, escolheu-se valores do parâmetro de acoplamento para os quais o sistema apresenta uma dinâmica diversa, isto é, casos caóticos e casos periódicos. Pode-se verificar através da figura 5.5(1) que para valores de  $c_2$  onde o sistema possui um comportamento periódico, existe a presença de uma sincronização do tipo travamento de frequência e também ocorrem estados de sincronização instável. Para esta situação, na próxima seção, serão analisados os casos com ruído, para se estudar o comportamento da série temporal e compará-la com o expoente de Lyapunov condicional, verificando-se assim, qual destes aspectos é mais sensível a ruído, já que a partir das série temporais, fica quase impossível diferenciar o sistema que está sincronizado estavelmente do que apresenta sincronização instável.

O comportamento caótico do sistema remete a várias outras formas de sincronização, sendo entre elas, a sincronização generalizada, a mais comum de ser



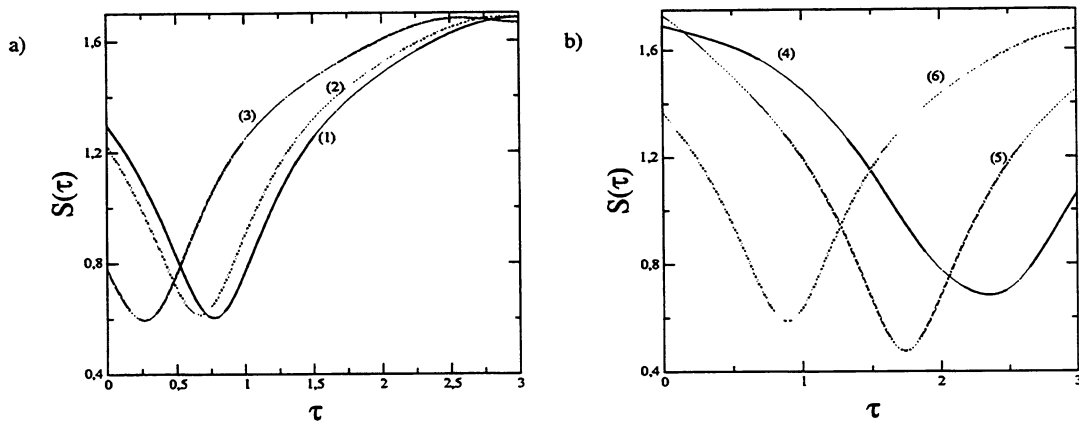


Figura 5.4: Verificação da presença de sincronização com atraso no sistema bidirecional forçado. Em a) valores para o parâmetro de acoplamento onde o sistema possui dinâmica caótica. Na curva (1)  $c_2 = 1.7$ , (2)  $c_2 = 1.9$  e (3)  $c_2 = 3.0$ . No gráfico b) cálculo da função similaridade para quando o sistema é periódico. Em (4)  $c_2 = 0.5$ , (5)  $c_2 = 0.75$  e (6)  $c_2 = 1.5$

encontrada.

Pode ser percebido também, através das séries temporais, que diferentemente do sistema unidirecional, onde o primeiro oscilador não mudava seu perfil, para este caso, cada valor de  $c_2$  leva o primeiro oscilador a se comportar de uma maneira diferente. Nos gráficos que representam as séries temporais, o primeiro oscilador é representado pelas linhas cheias.

Através dos espectros de frequência, fica simples verificar como os osciladores possuem uma forma de sincronização de frequências, sem no entanto, possuírem amplitudes correlacionadas. Isto, como visto anteriormente, acontece tanto no sistema unidirecional como no bidirecional, já que os osciladores são escolhidamente assimétricos. No entanto, quando os parâmetros de acoplamento dos osciladores são muito grandes, pode ocorrer uma sincronização completa, tendo os osciladores até amplitudes relacionadas.

Assim, finalizando esta seção, é útil salientar que as ocorrências de sincronização existentes no sistema, foram todas analisadas, percebendo-se a correlação entre os estados caóticos e periódicos e portanto, muitas formas diversas de como este fenômeno é visto na literatura, acabam não tendo muita especificação no que foi aqui discutido.

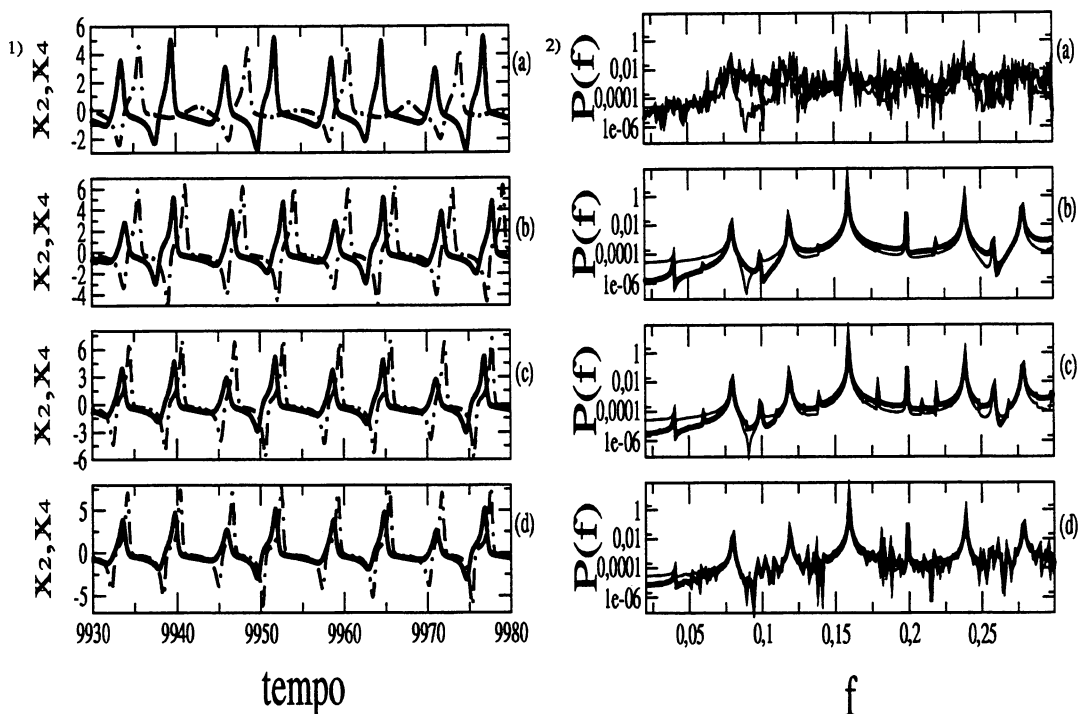


Figura 5.5: Série temporal e espectro de freqüência para o sistema bidirecional forçado, com  $c_1 = 0.01$ . Em (1) comportamentos de séries temporais para diversas situações do sistema onde  $x_2$  está representado pela linha cheia enquanto  $x_4$  pela linha pontilhada. Em (2) espectros de freqüências para os mesmos valores de  $c_2$  relacionados em (1) e onde  $x_2$  é representado pela linha mais grossa. (a) tem comportamento caótico não-sincronizado, com  $c_2 = 0.25$ , (b) tem comportamento periódico não-sincronizado, com  $c_2 = 1.0$ , (c) tem comportamento periódico sincronizado, com  $c_2 = 1.5$  e finalmente (d) tem comportamento caótico sincronizado, com  $c_2 = 2.0$ .

### 5.3.1 Osciladores com dinâmica periódica, na presença de ruído

Como comentado anteriormente, quando o sistema tem um comportamento periódico, através dos gráficos das séries temporais, fica inviável para esta forma de sistema em particular, verificar em que situação ocorre a sincronização estável e em qual acontece a instável. Por esta razão, para valores de  $c_2$  iguais a 1.0 e 1.5, onde respectivamente o sistema é não sincronizado e sincronizado, foi colocado um ruído branco no modo normal  $b_1$  do primeiro oscilador, afim de se verificar como a presença de ruído afeta as séries temporais.

Este ruído é introduzido da mesma maneira que já comentado no capítulo quatro, onde uma função gera números aleatórios entre 0 e 1, que simulam esta

presença de ruído.

Através da figura 5.6(1) que possui 1% de ruído no modo normal  $b_1$  do primeiro oscilador, isto é,  $b_1$  oscila entre  $-0,5\%$  e  $+0,5\%$ , ou melhor,  $b_1(1 \pm 0.005)$ , percebe-se tanto para (a) onde  $c_2 = 1.0$  quanto para (b) onde  $c_2 = 1.5$ , que as séries temporais são tão sensíveis a ruído quanto o expoente de Lyapunov condicional do sistema.

Pode ser verificado através do espectro de frequência da figura 5.6(2), que para o valor de  $c_2$  onde o sistema é sincronizado estavelmente, ou seja  $c_2 = 1.5$ , mesmo com a introdução de ruído, os dois osciladores comportam-se muito semelhantemente. Fato que não ocorre em  $c_2 = 1.0$ , onde o sistema é sincronizado instavelmente, isto é, para este valor do parâmetro de acoplamento, a introdução de ruído no sistema altera o comportamento dos dois osciladores, já que o sistema aqui analisado é bidirecional.

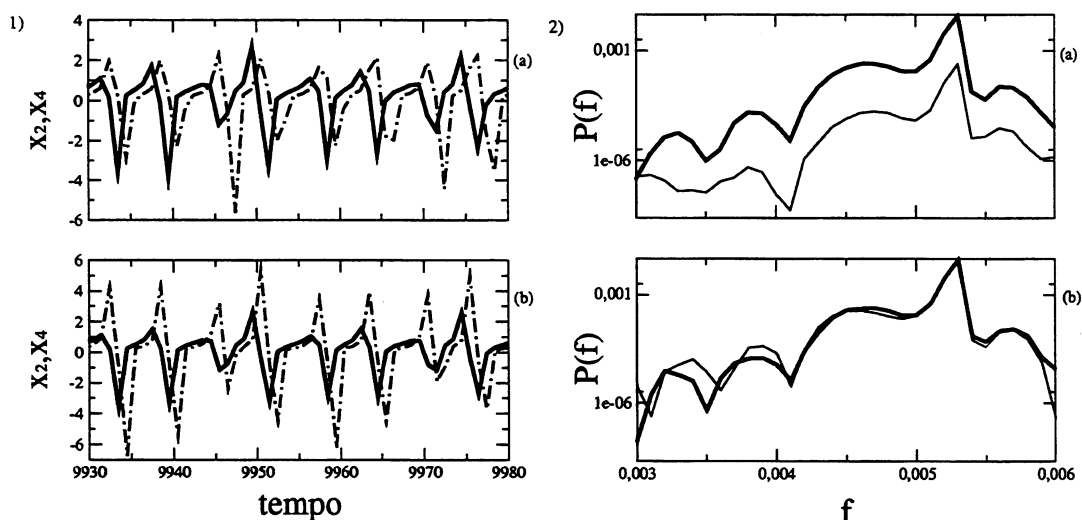


Figura 5.6: Séries temporais em (1) e espectros de frequência em (2), para o sistema bidirecional forçado, com ruído de 1% em  $b_1$ , onde os osciladores têm comportamento periódico. a)  $c_2 = 1.0$  - sincronização instável e b)  $c_2 = 1.5$  - sincronização estável.

Assim, com esta maneira de análise no sistema com ruído, fica mais fácil distinguir entre onde a sincronização é estável e onde ela é instável, além de se poder verificar, como já comentado anteriormente, que o expoente de Lyapunov condicional sendo positivo, mostra perfeitamente o intervalo onde o sistema não apresenta sincronismo, ou melhor, o intervalo onde a variedade de sincronização é altamente sensível a quaisquer pequenas perturbações. Estado este, onde devido a esta instabilidade, quaisquer formas de sincronização são difíceis de serem encontradas.

### 5.3.2 Comportamento do sistema para diferentes valores do termo de acoplamento do primeiro oscilador

Para perceber qual o papel de  $c_1$  no sistema com força externa, utilizou-se diagramas de bifurcações onde para cada valor de  $c_1$  foi verificado como o sistema se comporta. Através destas figuras, pode-se perceber que  $c_1$  tem um papel importante, já que ele representa a conexão elétrica entre os nodos cardíacos. Através de diagramas de bifurcação para diferentes valores do parâmetro de acoplamento  $c_1$ , percebeu-se como o sistema varia consideravelmente aumentando o intervalo de ocorrência da sua dinâmica caótica. Sendo, no entanto, que ocorre a presença de um intervalo maior da presença de dinâmica periódica. É através destes diagramas que se pode perceber que o aumento do parâmetro de acoplamento do primeiro oscilador leva o sistema, cada vez mais, a comportar-se como aquele, sendo assim, mais fácil encontrar sincronização entre osciladores completamente caóticos.

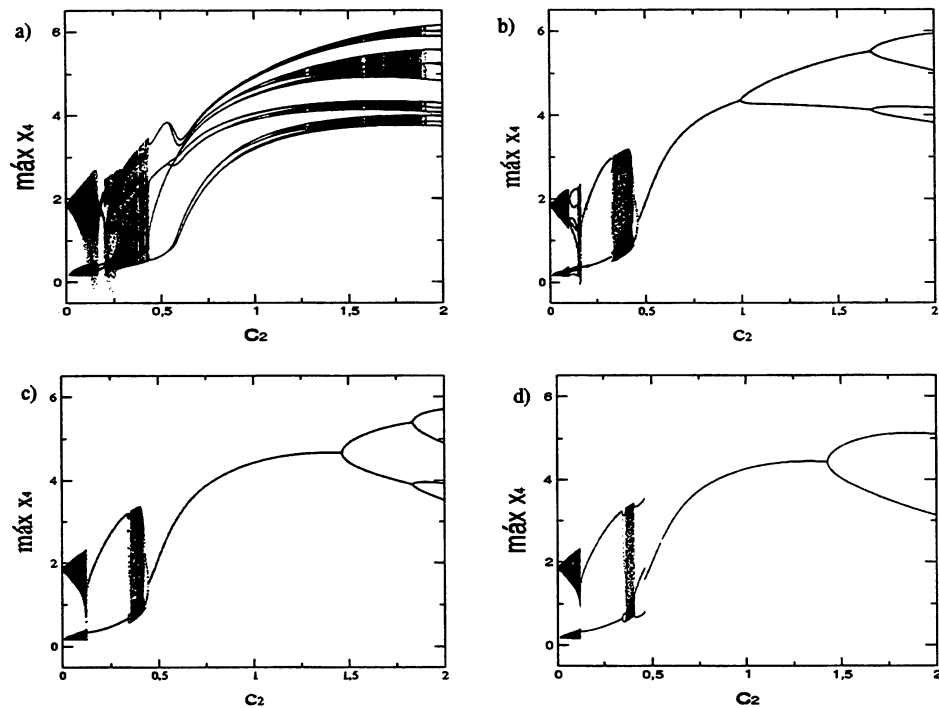


Figura 5.7: Comportamento do sistema através de diagramas de bifurcações para diferentes valores de  $c_1$  no sistema bidirecional forçado. a)  $c_1 = 0.005$ , b)  $c_1 = 0.1$ , c)  $c_1 = 0.3$  e d)  $c_1 = 0.5$ .

Decidiu-se colocar esta seção nesta dissertação afim de que se possa perceber como a presença de um parâmetro de acoplamento no sistema, pode modificar toda a sua dinâmica. Como foi escolhido estudar a dinâmica de sincronização do sistema apenas com  $c_1 = 0.01$ , acreditou-se ser útil mostrar como outros valores deste

acoplamento influenciam o sistema aqui apresentado.

Os gráficos do diagrama de bifurcação encontrados na figura 5.7, mostram o comportamento do sistema através de quatro valores distintos do parâmetro de acoplamento  $c_1$ . Para cada um deles pode ser visto que no sistema bidirecional, tanto aumentando  $c_1$  como  $c_2$ , o sistema é modificado como um todo, fato que não ocorre para o caso unidirecional, já que o primeiro oscilador não é influenciado pelo segundo. Como comentado anteriormente, para maiores valores de  $c_1$  o sistema possui um mais amplo intervalo onde ocorre dinâmica caótica, ou seja, quanto maior o acoplamento entre os osciladores, mais eles tendem a se comportar da mesma maneira, sendo no entanto, que valores mais altos de  $c_2$  têm, durante o intervalo considerado, mais aspectos da dinâmica periódica.

Comparando os dois osciladores com o modelo cardíaco, pode-se supor, com isso, que se realmente o nodo sinoatrial é o marcapasso dominante, então no caso de alguma arritmia em que o sistema torne-se bidirecional, deve ser possível solucionar o caso introduzindo algum elemento que force o nodo sinoatrial externamente. Entretanto, caso o sistema cardíaco comporte-se naturalmente com um funcionamento bidirecional, então, caso haja alguma anomalia que force o nodo sinoatrial, uma possível correção poderá ser feita, também forçando o nodo atrioventricular. Por outro lado, para que o sistema funcione bem, bidirecionalmente, os valores de acoplamento de ambos osciladores devem possuir mais ou menos as mesmas intensidades. Acredita-se nisso, devido ao fato de que para valores próximos entre os acoplamentos dos dois osciladores, ambos têm uma dinâmica idêntica, isto é, ou ambos são caóticos ou periódicos, o quê, em um sistema cardíaco real, é de grande importância.

## 5.4 Mudança do modo normal do segundo oscilador no sistema forçado

Até agora todo o estudo feito no sistema, considerou  $b_1 = 1.0$  e  $b_2 = 0.66$ . Nesta seção, o interesse é variar a frequência normal,  $b_2$ , do segundo oscilador, para se ter uma noção de como o sistema é influenciado. Através do cálculo do expoente de Lyapunov condicional, pode ser visto que as formas de sincronização do sistema não são muito variadas com o aumento de  $b_2$ , isto é, as formas de não sincronização e sincronização estável e instável não são altamente afetados quando da mudança de  $b_2$ . Entretanto, é fácil perceber, através do diagrama do número de rotação do segundo oscilador, que até o patamar onde ocorre o travamento de frequências, os valores diferentes de  $b_2$  fazem com que o sistema tenha um comportamento diverso, fato que mostra como os valores deste modo normal estão relacionados a um comportamento semelhante às escadas do diabo.

Percebe-se, através do gráfico em 5.8(b), que mesmo o sistema mostrando não estar sincronizado, ainda assim, existe uma forma de travamento de frequência, o que significa que para estes intervalos, qualquer pequeno ruído afeta totalmente o comportamento dinâmico do sistema.

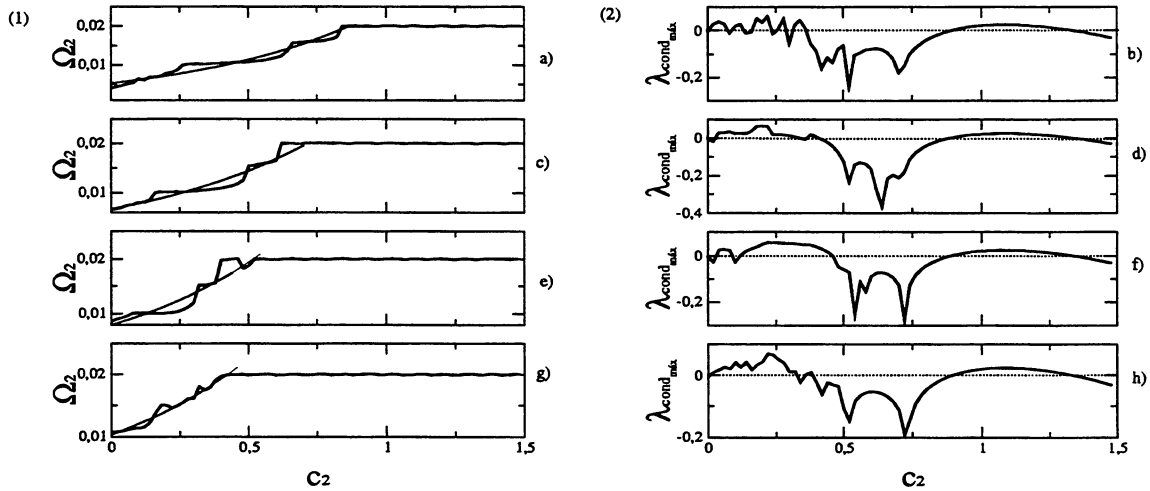


Figura 5.8: Representação de formas de sincronização do sistema para variações de  $b_2$ . (1) Número de rotação do segundo oscilador para diferentes valores de  $b_2$ . Cada valor de  $b_2$  em (1) tem seu correspondente em (2) que é o gráfico do expoente de Lyapunov condicional do sistema. a)  $b_2 = 0.166$ , c)  $b_2 = 0.33$ , e)  $c_2 = 0.5$  e f)  $c_2 = 0.66$ .

Os gráficos vistos em 5.8 foram criados para quatro valores diferentes de  $b_2$  crescentes, sendo eles 0.166, 0.33, 0.5 e 0.66. Olhando para os gráficos existentes em (a) pode-se verificar que se o segundo oscilador não possuir uma frequência normal, então mais lentamente o sistema possuirá uma sincronização entre as frequências, o que não significa que ela não ocorrerá, apenas que haverá um valor maior do parâmetro de acoplamento  $c_2$  para que esta sincronização venha a acontecer. Também é possível verificar, através de 5.8(b), que quanto menor os valores de  $b_2$ , mais intermitentes serão os gráficos do expoente de Lyapunov condicional, o que nos leva a acreditar que para valores pequenos deste parâmetro, o sistema seja mais altamente instável no que diz respeito aos estados sincronizados.

Sabendo-se que escada do diabo é o nome dado a função que corresponde ao aumento médio da fase por unidade de tempo [23], pode-se perceber, através do gráfico em 5.8(1), que quanto menor o valor de  $b_2$ , maiores as quantidades de patamares até a presença de sincronização, ou melhor, quanto menor o valor de  $b_2$ , mais o sistema lembra o comportamento de osciladores periódicos que têm a presença da função mencionada. Isso provavelmente ocorre devido a maior presença de sincronização onde a razão entre as frequências é um número racional diferente

da unidade.

O fato de que maiores valores de  $b_2$  levem o sistema a uma sincronização de 1:1 sem no entanto passarem por degraus de travamento de frequências, pode significar o fato de o sistema não possuir outras formas de sincronização que não sejam 1:1, o que de fato não foi observado neste sistema, bidirecional forçado, quando  $b_2 = 0.66$ ,  $b_1 = 1.0$ .

Uma outra forma de analisar este sistema e sua forma de evolução, foi procurar uma curva de regressão que representasse bem o crescimento do número de rotação para o segundo oscilador. Da mesma forma que ocorreu para os outros comportamentos do sistema apresentado nesta dissertação, isto é, sistema unidirecional com e sem força externa, a melhor curva que se aproxima deste crescimento é a curva da função exponencial, que em 5.8(1) é representada com a linha mais clara. Isso demonstra que para o sistema aqui estudado, de uma forma bem generalizada, a função exponencial descreve um bom comportamento no que diz respeito ao aumento das curvas que representam o número de rotação dos osciladores.

## 5.5 Variando o modo normal do primeiro oscilador e conjuntamente o termo de acoplamento do segundo oscilador

Sabe-se, através de tudo que foi visto até aqui, que o sistema não possui sincronização com atraso, nem tão pouco sincronização de fase. Isto acontece para valores das frequências normais dos dois osciladores mantidas fixas. O que acontece, no entanto, com o sistema, quando a frequência normal  $b_1$  do primeiro oscilador varia juntamente com o parâmetro de acoplamento  $c_2$ ? Isto é verificado através do diagrama de parâmetros visto na figura 5.9, onde utilizando o expoente de Lyapunov condicional nulo como referência, sabe-se quando o sistema está sincronizado e quando a sincronização é instável. Esta figura mostra que diferentemente do sistema unidirecional sem força externa, aqui a sincronização estável ocorre em pequenos intervalos do parâmetro  $c_2$  e apenas em regiões onde as frequências entre os osciladores são bem próximas.

Pode-se perceber que quando  $b_1$  e  $b_2$  são muito próximos, ou seja,  $(b_1 - b_2) \approx 0.3$  a sincronização existe e para qualquer pequena perturbação esta situação não é modificada. É possível verificar também, que para maiores valores do parâmetro de acoplamento  $c_2$ , existe uma região de sincronização onde as diferenças entre os modos normais dos dois osciladores são um pouco maiores, mostrando assim, que um aumento de  $c_2$  leva o segundo oscilador a se escravizar ao primeiro, no entanto, este

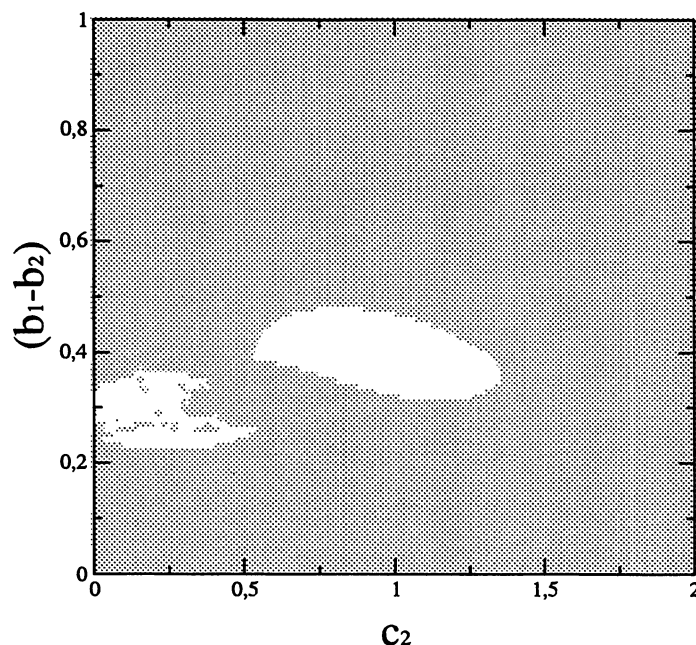


Figura 5.9: Diagrama de parâmetros onde ocorre variação dos parâmetros  $c_2$  e  $b_1$  para o sistema bidirecional e forçado. Este gráfico é feito considerando uma grade de  $200 \times 500$ . As regiões em branco representam estados de sincronização estável, enquanto as regiões em cinza representam estados sincronizados instavelmente.

comportamento é mais freqüente quando os modos normais são fixos, ao contrário do que é verificado neste gráfico.

Comparando o sistema aqui apresentado com um sistema cardíaco real, pode-se imaginar que se alguma falha ocorrer devido a um distúrbio no modo normal dos osciladores, então somente será possível fazer alguma modificação, para um melhor funcionamento do tecido cardíaco, ou fazendo com que os dois osciladores tenham modos normais muito próximos, o que seria possível com o auxílio de um marcapasso externo, ou fazendo um acoplamento mais forte entre os dois nodos cardíacos. Devido a esta situação, é mais razoável supor que o sistema cardíaco funcione unidirecionalmente, como no modelo sem força externa, já que o sistema bidirecional, assim como o unidirecional, com força externa aqui apresentados, são muito mais sensíveis a pequenas perturbações, ou seja, existem poucas e pequenas áreas onde o sistema é sincronizado estávelmente, o que supondo um sistema biológico real, inviabilizaria situações cotidianas que causam pequenas modificações no sistema.



# Capítulo 6

## Conclusão

A principal análise neste trabalho foi a forma de sincronização entre dois osciladores de van de Pol acoplados, modificados por um termo de dissipação/injeção de energia, simulando o comportamento do batimento cardíaco.

Através deste estudo, pode-se perceber que muitas formas de sincronização ocorrem, tudo depende dos parâmetros que estão envolvidos no sistema. Algumas vezes percebeu-se a ocorrência de caos e hipercaos e esta verificação fez com que se acreditasse que sistemas periódicos e caóticos sincronizados, tendem a um padrão comum, isto é, sincronizar dois ou mais osciladores periódicos pode ser estudado da mesma forma que a sincronização entre osciladores caóticos. Os sistemas caóticos possuem, com certeza, dinâmicas muito mais complexas se comparados aos periódicos, entretanto, percebe-se que os dois tipos de sistemas, tanto periódicos quanto caóticos, comportam-se frente a situações semelhantes, de uma maneira muito parecida, o que quer dizer que analisando número de rotação, expoente de Lyapunov condicional, diagrama de parâmetros e outras formas de estudo, a análise de sincronização é muito semelhante em ambos sistemas.

O estudo feito no sistema unidirecional, ou seja, o sistema onde o termo de acoplamento do primeiro oscilador,  $c_1$ , que na prática funciona como sendo o tecido atrial, tem seu valor nulo, e sem força externa, mostrou para o modelo aqui apresentado, que ocorrem tipos de sincronização diferentes ao longo do aumento do termo de acoplamento  $c_2$ , do segundo oscilador. Para alguns valores deste parâmetro houve até o aparecimento de caos no sistema, quando os dois osciladores já estavam sincronizados de uma forma conhecida como travamento de frequências. Percebeu-se também, para o caso unidirecional sem força externa, que não há existência de sincronização com atraso nem sincronização de fases.

Quando da variação da frequência normal do primeiro oscilador, isto é,  $b_1$ , o

termo que determina, na prática, a frequência com que os osciladores cardíacos transmitem os impulsos elétricos, também notou-se a continuação da existência de estados sincronizados e estados não sincronizados que crescem de uma forma aproximadamente linear e para valores de  $c_2$  maiores que um valor crítico, aproximadamente igual a 1.0, o sistema tem um comportamento sincronizado para qualquer diferença entre os modos normais  $b_1$  e  $b_2$ .

O estudo da variação de  $b_2$ , frequência normal do segundo oscilador, mantendo o primeiro oscilador imutável, demonstrou que para o caso sem força externa, os travamentos de frequência influenciam demais o sistema, havendo a presença de um comportamento que lembra muito o que se conhece como escadas do diabo, o que já não acontece com o caso forçado. Quando do aumento de  $b_2$ , percebe-se que os sistemas possuem um travamento de frequências para valores pequenos de  $c_2$ , e valores menores de  $b_2$ , levam o sistema também a pequenos travamentos de frequência, mas para valores de  $c_2$  maiores, mesmo sendo um oscilador caótico e outro periódico.

Com o comportamento do sistema unidirecional, tentou-se modelar o sistema cardíaco, e com isto, mostrar que sistemas dinâmicos podem e devem auxiliar na detecção de doenças e auxílio ao combate destas, quando o modelo é razoavelmente equivalente a um sistema real.

O sistema forçado, aquele onde  $a_1 = 0.95$ , modelando na prática uma situação em que o tecido cardíaco torna-se um marcapasso ativo, mostrou que existe sincronização entre os osciladores mesmo quando um comporta-se caoticamente e o outro periodicamente. Neste caso, também pôde-se observar algumas formas diversas de sincronização, bem como o comportamento do sistema via variação de frequências.

O trabalho realizado com o sistema bidirecionalmente acoplado, o que em um modelo real significa que tanto o nodo sinoatrial influencia o nodo atrioventricular quanto vice-versa, mostrou da mesma forma que anteriormente, a presença no sistema, de algumas formas de sincronização e que com o aumento do parâmetro de acoplamento  $c_1$ , cada vez mais o segundo oscilador influencia o comportamento do primeiro.

Estudando o sistema bidirecional pôde-se notar que o sistema cardíaco, caso seja normalmente bidirecional, tem maiores possibilidades de ser organizado frente a algum distúrbio, já que as formas de sincronização são mais facilmente modeladas. Notou-se também a presença de hipercaos no sistema unidirecional, neste pequeno intervalo onde ocorre este fenômeno, não foi possível detectar o aparecimento de sincronização entre os osciladores, sendo que isso realmente não pode acontecer do ponto de vista dinâmico.

Através da dinâmica do sistema, foi possível notar que valores baixos na

diferença de frequência normal entre os dois osciladores, leva o sistema a possuir mais diversas formas de sincronização do que quando aquela diferença é elevada.

De uma forma mais geral, com este trabalho, acreditou-se que o uso do expoente de Lyapunov condicional pode ser muito útil na predição de possibilidades de dessincronização entre os nodos cardíacos, sendo assim, bom para diagnosticar e/ou prever estados futuros do comportamento destes nodos. Para esta possibilidade tornar-se acessível, é necessário que se conheça o modelo que representa o comportamento cardíaco, no entanto, conhecendo-se uma série temporal (ECG), é possível reconstruir o sistema caso ele seja de baixa dimensionalidade. De outra forma, também é possível analisar o expoente de Lyapunov do sistema através de dados experimentais.

Com isso, tais possibilidades poderiam ser de grande interesse para se analisar arritmias cardíacas e outras possíveis anomalias provenientes do comportamento elétrico errático do coração.

# Bibliografia

- [1] B.van der Pol e J.van der Mark. The heart beat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Phil. Mag.*, 6:763–775, 1928.
- [2] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1990.
- [3] K.T. Alligood e T.D. Sauer e J.A. Yorke. *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1997.
- [4] G. Bub e L. Glass. Bifurcations in a continuous circle map: A theory for chaotic arrhythmia. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 5:359–371, 1994.
- [5] M.R. Guevara e L. Glass. Phase locking, period doubling bifurcations and chaos in a mathematical model of a periodically driven oscillator: A theory for the entrainment of biological oscillators and the generation of cardiac dysrhythmias. *J. Math. Biology*, 14:1–23, 1982.
- [6] J. Honerkamp. The heart as a system of coupled nonlinear oscillator. *J. Math. Biology*, 18:69–88, 1983.
- [7] M.G. Signorini e S. Cerutti e D.D. Bernardo. Simulation of heartbeat dynamics: A nonlinear model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8:1725–1731, 1998.
- [8] R.L. Winslow e A.L. Kimball e A. Varghese e D. Noble. Simulating cardiac sinus and atrial network dynamics on the connection machine. *Physica D*, 64:281–298, 1993.
- [9] J. Engelbrecht e O. Kongas. Driven oscillators in modelling of heart dynamics. *Applicable Analysis*, 57:119–144, 1995.
- [10] O. Kongas e J. Engelbrecht. Bifurcation diagram of the driven asymmetric van der Pol equation. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 43:123–126, 1994.
- [11] J. Engelbrecht e T. Tobias. On a model stationary nonlinear wave in an active medium. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 411:139–154, 1987.

- [12] T.R. Chay. Bifurcations in heart rhythms. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5:1439–1486, 1994.
- [13] I.P. Díaz e A.L. Fraguas. Dynamics of two coupled van der Pol oscillators. *Physical Review E*, 52:1480–1489, 1995.
- [14] I. Pastor e V.M.P. Garcia e F.E. Sanz e J.M. Guerra. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators. *Physical Review E*, 48:171–181, 1993.
- [15] U. Parlitz e W. Lauterborn. Period-doubling cascades and devil’s staircases of the driven van der Pol oscillator. *Physical Review A*, 36:1428–1434, 1987.
- [16] Y.J. Han. Dynamics of coupled nonlinear oscillators of different attractors; van der Pol and damped Duffing oscillator. *Journal of the Korean Physical Society*, 37:3–9, 2000.
- [17] D.D. Bernardo e M.G. Signorini e S. Cerutti. A model of two nonlinear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8:1975–1985, 1998.
- [18] C.K. Peng e J. Mietus e J.M. Hausdorff e S. Havlin e H.E. Stanley e A.L. Goldberger. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Physical Review Letters*, 70:1343–1346, 1993.
- [19] G. Bub e L. Glass. Bifurcation in a discontinuous circle map: A theory for a chaotic cardiac arrhythmia. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5:359–371, 1995.
- [20] A.L. Goldberger e V. Bhargava e B.J. West e A.J. Mandell. Nonlinear dynamics of the heartbeat. *Physica D*, 17:207–214, 1985.
- [21] B.J. West e A.L. Goldberger e G. Rovner e V. Bhargava. Nonlinear dynamics of the heartbeat. *Physica D*, 17:198–206, 1985.
- [22] L. Glass e M.C. Mackey. *Dos relógios ao Caos*. Edusp, 1997.
- [23] N.F. Ferrara e C.P.C. do Prado. *Caos - Uma Introdução*. Edgard Blücher Ltda., 1994.
- [24] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. ABP Perseus Books, 1994.
- [25] E. Ott e T. Sauer e J.A. Yorke. *Coping with Chaos - Analysis of Chaotic data and the Exploitation of Chaotic Systems*. Wiley Interscience, 1994.
- [26] A.Wolf e J.B. Swift e H.L. Swinney e J.A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [27] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1994.

- [28] T.F. Nonnenmacher e G.A. Losa e E.R. Weibel. *Fractals in Biology and Medicine*. Birkhäuser Verlag, 1993.
- [29] D. Gulick. *Encounters with Chaos*. McGraw-Hill, 1992.
- [30] E. Infeld e R. Zelazny e A. Galkowski. *Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems*. Cambridge University Press, 1997.
- [31] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [32] J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [33] D. Ruelle e F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Physics*, 20:167–172, 1971.
- [34] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos - An Introduction*. Physik Verlag, 1984.
- [35] P. Manneville e Y. Pomeau. Intermittency and the Lorenz model. *Physics Letters*, 75:1–8, 1979.
- [36] C. Grebogi e E. Ott e J.A. York. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, 7:181–200, 1983.
- [37] C. Schäfer e M.G. Rosenblum e J. Kurths e H.H. Abel. Heartbeat synchronized with ventilation. *Nature*, 392:239–240, 1998.
- [38] C. Schäfer e M.G. Rosenblum e H.H. Abel e J. Kurths. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Physical Review E*, 60:857–870, 1999.
- [39] P. Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [40] M.G. Rosenblum e A.S. Pikovski e J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 76:1804–1807, 1996.
- [41] S.E.S. Pinto e S.R. Lopes e R.L. Viana. Collective behavior in a chain of van der Pol oscillators with power-law coupling. *Physica A*, 303:339–356, 2002.
- [42] M.G. Rsenblum e A.S. Pikovski e J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78:4193–4196, 1997.
- [43] G. Xiaofeng e C.H. Lai. On the synchronization of different chaotic oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11:1231–1235, 2000.
- [44] U. Parlitz e L. Junge e W. Lauterborn e L. Kocarev. Experimental observation of phase synchronization. *Physical Review E*, 54:2115–2117, 1996.

- [45] L. Kocarev e U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters*, 76:1816–1819, 1996.
- [46] Z. Zheng e G. Hu. Generalized synchronization versus phase synchronization. *Physical Review E*, 62:7882–7885, 2000.
- [47] J.F. Heagy e T.L. Carroll e L.M. Pecora. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Physical Review E*, 50:1874–1885, 1994.
- [48] L.M. Pecora. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems. *Physical Review E*, 58:347–360, 1998.
- [49] L.M. Pecora e T.L. Carroll e G.A. Johnson e D.J. Mark. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7:520–543, 1997.
- [50] R. Brown e N.F. Rulkov. Designing a coupling that guarantees synchronization between identical chaotic systems. *Physical Review Letters*, 78:4189–4192, 1997.
- [51] L.M. Pecora e T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64:821–824, 1990.
- [52] J.F. Heagy e L.M. Pecora e T.L. Carroll. Short wavelength bifurcations and size instabilities in coupled oscillator systems. *Physical Review Letters*, 74:4185–4188, 1995.
- [53] L.M. Pecora e T.L. Carroll. Driving systems with chaotic signals. *Physical Review A*, 44:2374–2383, 1991.
- [54] L. Glass. Dynamics of cardiac arrhythmias. *Physics Today*, 49:40–45, 1996.
- [55] D.J. Christini e J.J. Collins. Using chaos control and tracking to suppress a pathological nonchaotic rhythm in a cardiac model. *Physical Review E*, 53:49–52, 1996.
- [56] P. Pelce e J. Sun e C. Langeveld. A simple model for excitation-contraction coupling in the heart. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5:383–391, 1995.
- [57] T.S. paciente adulto - 65 anos. *eletrocardiograma de um coração saudável*, 2001.
- [58] F.X. Witkowski e K.M. Kavanagh e P.A. Penkoske e R. Plonsey e M.L. Spano e W.L. Ditto e D.T. Kaplan. Evidence for determinism in ventricular fibrillation. *Physical Review Letters*, 75:1230–1233, 1995.
- [59] M.J. Lab e C. Murphy e S. Horner. Biology and the role of mechanoelectric feedback in the heart. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5:371–381, 1995.

- [60] M. Boyett e A.V. Holden e I. Kodama e R. Suzuki e H. Zhang. Atrial modulation of sinoatrial pacemaker rate. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5:425–438, 1995.
- [61] A.V. Holden e M.J. Poole e J.V. Tucker. Reconstructing the heart. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5:691–704, 1995.
- [62] D. Kaplan e L. Glass. *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer-Verlag, 1995.
- [63] O. Kongas e R.V. Herten e J. Engelbrecht. Bifurcation structure of a periodically driven nerve pulse equation modelling cardiac conduction. *Chaos, Solitons and Fractals*, 10:119–136, 1999.
- [64] T. Kapitaniak. *Chaotic Oscillations in Mechanical Systems*. Manchester University Press, 1991.
- [65] M.G. Rosenblum e A.S. Pikovski. Detecting direction of coupling in interacting oscillators. *Physical Review E*, 64:45202.1–45202.4, 2001.
- [66] K. Murali e M. Lakshmanan. Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der Pol-Duffing oscillator. *Physical Review E*, 48:1624–1626, 1993.
- [67] A.C. Hindmarsh. *Odepack, a Systematized Collection of O.D.E. Solvers*. North-Holland, 1983.
- [68] Y.J. Han. Dynamics of coupled nonlinear oscillators of different attractors; van der Pol and damped Duffing oscillator. *Journal of the Korean Physical Society*, 37:3–9, 2000.
- [69] S. Boccaletti e A. Farini e F.T. Arecchi. Adaptive strategies for recognition, control and synchronization of chaos. *Chaos, Solitons and Fractals*, 8:1431–1448, 1997.
- [70] D.E. Postnov e A.G. Balanov e O.V. Sosnovtseva e E. Mosekilde. Transition to synchronized chaos via suppression of the natural dynamics. *Physics Letters A*, 283:195–200, 2001.