

ANTONIO MARCOS BATISTA

MAPAS ACOPLADOS NA REDE E SINCRONIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA
1996



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. ANTONIO MARCOS BATISTA

TÍTULO DA TESE: "MAPAÇAO PLANO NA REDE E SINCRONIZAÇÃO"

Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A

Curitiba, 02 de agosto de 1996

Banca Examinadora:

Prof. Ricardo Luiz Viana
Presidente/Orientador - UFPR

Prof. Iberê Luiz Caldas
(IF/USP)

Profa. Maria Virginia Alves
(LAP/INPE)

À minha esposa Lurdes.

Sinceros agradecimentos:

à minha esposa, aos meus pais

ao Dr. Ricardo L. Viana, aos

amigos e professores.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo das características de certos sistemas não-lineares acoplados na rede e sua sincronização. O sistema estudado consiste num oscilador não-linear sujeito a uma força periódica impulsiva, que no nosso caso pode ser aproximada por uma seqüência de funções delta. A utilização da técnica de mapeamento estroboscópico e a consideração do limite de rápida relaxação permite-nos obter um mapa unidimensional. Tomamos uma rede de tais mapas e estudamos sua dinâmica espaço-temporal, bem como a sincronização de mapas, através de acoplamentos local e global, que apresentam regimes dinâmicos regulares e caóticos. Propomos algumas novas formas de acoplamento: o acoplamento global do tipo exponencial e do tipo gaussiano. Nestes últimos acoplamentos a dinâmica do sítio na rede é determinada pela dinâmica de todos os sítios, de tal forma que o valor da intensidade do acoplamento decai numa forma exponencial ou numa forma gaussiana, respectivamente, de acordo com a separação entre os sítios.

Abstract

This work aims to study the characteristics of certain nonlinear systems coupled in a lattice and their synchronization. The system to be studied, which present limit cycles, consists of a nonlinear oscillator subjected a periodic impulsive force, that in our case can to be aproximated by a sequence of delta functions. The use of the technique of stroboscopic mapping and the consideration of the fast-relaxation limit allows us to obtain a one-dimensional map. We take a lattice of such maps and study its spatio-temporal dynamics, and the synchronization of maps too, locally and globally, presenting regular and chaotic dynamical regimes. We propose some new kinds of couplings, such as the global coupling of the exponential kind and of the gaussian kind. In these latter couplings the dynamics of the site in the lattice is determined all other sites, in such a way that coupling intensity decays in an exponential or gaussian way, depending on the separation between the sites.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 2 | Conceitos Básicos | 14 |
| 2.1 | Pontos Fixos Para Mapas | 14 |
| 2.2 | Mapa de Poincaré | 17 |
| 2.3 | Diagramas de Bifurcações | 20 |
| 2.4 | Expoente de Lyapunov | 24 |
| 3 | Mapas Acoplados na Rede | 27 |
| 3.1 | Sistemas Dinâmicos Espaço-Temporais | 27 |
| 3.2 | Tipos de Acoplamentos | 28 |
| 3.3 | Análise de Mapas Logísticos Acoplados em Rede | 31 |
| 3.4 | Propagação de <i>Kinks</i> e <i>Antikinks</i> | 38 |
| 4 | Oscilador Prototípico de Ding | 43 |
| 4.1 | Osciladores Pulsados | 43 |
| 4.2 | Determinação Analítica de Mapeamentos Estroboscópicos | 45 |
| 4.3 | Mapa Prototípico de Ding | 48 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4 | Análise do Mapa Prototípico de Ding | 52 |
| 5 | Mapas Prototípicos de Ding Acoplados na Rede | 59 |
| 5.1 | Configuração dos Domínios | 60 |
| 5.2 | Estruturas <i>Zigzags</i> | 67 |
| 5.3 | Redes de Fluxo Aberto (<i>Open Flow Lattices</i>) | 72 |
| 6 | Sincronização de Mapas Acoplados na Rede | 76 |
| 6.1 | Sincronização Para Acoplamento Local | 76 |
| 6.2 | Sincronização Para Acoplamento Global | 83 |
| 6.3 | Sincronização Para Acoplamento Global do Tipo Exponencial e do Tipo Gaussiano | 88 |
| 7 | Conclusões | 94 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Mapa logístico com período 2. | 15 |
| 2.2 | Diagrama de Lamerey para o mapa logístico com o parâmetro igual a 3,2. | 16 |
| 2.3 | Mapa de Poincaré para um espaço de fase 3-dimensional. | 18 |
| 2.4 | Mapa de Poincaré para uma órbita de período 1 | 19 |
| 2.5 | Mapa de Poincaré para uma órbita de período 2 | 20 |
| 2.6 | Mapa estroboscópico para um sistema bidimensional não-autônomo onde $T = \text{constante}$ | 21 |
| 2.7 | Diagrama de bifurcações para o mapa logístico | 22 |
| 2.8 | Distâncias d_n para os pontos fixos próximos de $x = 1/2$ para órbitas superestáveis. | 23 |
| 2.9 | Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde N é o número de iterações. | 24 |
| 2.10 | Expoente de Lyapunov para o mapa logístico. | 26 |
| 3.1 | $i \times x_n^i$ para uma condição inicial de $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. A figura corresponde ao <i>overlap</i> de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transientes desprezadas. | 32 |
| 3.2 | $i \times x_n^i$ para uma condição inicial de $x_0^i = 0,25 + 0,2\text{sen}(2\pi iN^{-1})$ | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.3 | Sítio <i>versus</i> amplitude para uma rede com 5 mapas acoplados com $\varepsilon = 0,2$ | 33 |
| 3.4 | Gráfico para uma rede com 9 mapas acoplados. | 34 |
| 3.5 | Sítio <i>versus</i> amplitude para um parâmetro de controle igual a 3,5. | 34 |
| 3.6 | Parâmetro de controle igual a 3,57. | 35 |
| 3.7 | Acoplamento com um parâmetro de controle igual a 3,65. | 35 |
| 3.8 | Acoplamento com um parâmetro de controle igual a 3,9. | 36 |
| 3.9 | Sítio <i>versus</i> amplitude com $\varepsilon = 0,1$ | 36 |
| 3.10 | Rede de mapas com um acoplamento igual a 0,25. | 37 |
| 3.11 | Histograma de bifurcações para o mapa logístico acoplado, onde $\varepsilon = 0,2$, $N = 128$ e $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN-1)$ | 38 |
| 3.12 | Sítio <i>versus</i> parâmetro de controle para $\varepsilon = 0,2$ e com 100 iterações transientes desprezadas. | 39 |
| 3.13 | $\xi \times \phi$ onde S corresponde ao <i>kink</i> e A ao <i>antikink</i> | 41 |
| 3.14 | Sítio <i>versus</i> tempo para o caso onde o sistema atinge o estado estacionário para um parâmetro de controle igual a 3,91. | 42 |
| 3.15 | Propagação de <i>kinks</i> para $r = 3,895$ | 42 |
| 4.1 | Variáveis discretizadas. | 46 |
| 4.2 | Variáveis discretizadas. | 50 |
| 4.3 | Oscilador proposto por Ding no qual é exercido uma força externa F na direção do eixo x . No limite de rápida relaxação o sistema retorna ao ciclo limite com $r = 1$ antes da aplicação da próxima força. | 53 |
| 4.4 | Localização de algumas órbitas periódicas (os números dentro dos círculos indicam a periodicidade) e regiões caóticas para o mapa prototípico de Ding (Ding, 1986). | 54 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.5 | As três regiões no espaço de parâmetros (Ding, 1986). | 54 |
| 4.6 | Diagrama do número de rotação para $\alpha = 0,45$ | 55 |
| 4.7 | Expoente de Lyapunov para $\alpha = 0,45$ | 56 |
| 4.8 | Diagrama de Lamerey para o mapa prototípico de Ding considerando $\alpha = 0,7$ e $\beta = 0,4$ | 56 |
| 4.9 | Diagrama de bifurcações considerando $\beta = 0,65$ | 57 |
| 4.10 | Expoente de Lyapunov com β igual a $0,65$ | 57 |
| 4.11 | Diagrama de bifurcações para $\alpha = 0,57$ | 58 |
| 4.12 | Expoente de Lyapunov fixando α em $0,57$ | 58 |
| 5.1 | Diagrama de bifurcações para o mapa de Ding com $\beta = 0,315$ | 60 |
| 5.2 | Expoente de Lyapunov para o mapa de Ding com $\beta = 0,315$ | 61 |
| 5.3 | Sítio <i>versus</i> θ para $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi i N^{-1})$, $\alpha = 0,56$, $\varepsilon = 0,1$ e $N = 128$. A figura corresponde ao <i>overlap</i> de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transientes desprezadas. | 62 |
| 5.4 | Gráfico considerando como condição inicial $\theta_0^i = 0,5\text{sen}(2\pi i N^{-1})$. Os demais parâmetros são os mesmos da figura anterior. | 62 |
| 5.5 | Acoplamento para $N = 4$, $\alpha = 0,554$ e $\varepsilon = 0,2$ | 63 |
| 5.6 | Sítio <i>versus</i> θ para $N = 8$ | 63 |
| 5.7 | 16 sítios acoplados em rede. | 64 |
| 5.8 | Gráfico para uma rede com $N = 32$ | 64 |
| 5.9 | Rede de mapas considerando o parâmetro de controle α igual a $0,56$, $N = 128$ e $\varepsilon = 0,2$ | 65 |
| 5.10 | Idem à figura anterior para $\alpha = 0,5544$ | 66 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.11 | Valor do acoplamento ε igual a 0,05, e os demais consideramos $\alpha = 0,56$ e $\beta = 0,315$ | 66 |
| 5.12 | Gráfico construído utilizando $\varepsilon = 0,3$ | 67 |
| 5.13 | Histograma de bifurcações para um valor do acoplamento igual a 0,2. | 68 |
| 5.14 | Gráfico de $i \times \alpha$ com os valores de θ no intervalo $0,325 < \theta < 0,575$ em branco, $0,575 \leq \theta < 0,95$ em escala cinza e $0,95 \leq \theta < 1,2$ em preto. | 68 |
| 5.15 | Estruturas <i>zigzags</i> considerando um acoplamento laplaciano linear. | 69 |
| 5.16 | Estruturas <i>zigzags</i> apresentando defeitos. | 70 |
| 5.17 | Sítio <i>versus</i> expoente de Lyapunov onde $\lambda > 0$ denota a posição dos defeitos. | 71 |
| 5.18 | Alterações na forma e na posição de defeitos com o decorrer das iterações. | 72 |
| 5.19 | i versus θ_n^i mostrando a supressão de estruturas <i>zigzags</i> para $N = 128$, $\alpha = 0,5443$, $\beta = 0,315$, $\varepsilon = 0,075$ e $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi i N^{-1})$ | 73 |
| 5.20 | Acoplamento unidirecional para a direita considerando $\alpha = 0,554$, $\varepsilon = 0,3$ e 1032 iterações. | 74 |
| 5.21 | Idem a figura anterior para $\alpha = 0,545$, $\varepsilon = 0,5$ e 3032 iterações. | 74 |
| 5.22 | Expoente de Lyapunov para um acoplamento unidirecional com $\alpha = 0,545$ e $\varepsilon = 0,5$ | 75 |
| 6.1 | Gráfico de $i \times \theta_n^i$ onde $\alpha^2 = 0,545$, $\alpha^3 = 0,5544$ e $\varepsilon = 0,0$ | 77 |
| 6.2 | Idem à figura anterior exceto por $\varepsilon = 0,2$ | 77 |
| 6.3 | Acoplamento com $\varepsilon = 0,2$ de um mapa com período 2 com um de período 8, onde $\alpha = 0,58$ e $\alpha = 0,5544$, respectivamente. | 78 |
| 6.4 | Dois mapas caóticos que quando acoplados passam a exibir uma dinâmica regular, onde temos $\alpha = 0,545$ e $\varepsilon = 0,26$ | 79 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.5 | Gráfico de $i \times \theta_n^i$ considerando $N = 5$, $\alpha^2 = \alpha^4 = 0,545$, $\alpha^3 = 0,58$ e $\varepsilon = 0,2$ | 79 |
| 6.6 | Diagrama de bifurcações para o mapa caótico utilizando $\alpha^2 = 0,545$ e $\alpha^3 = 0,5544$ | 80 |
| 6.7 | Expoente de Lyapunov mostrando os valores possíveis de ε para que o mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ torne-se regular quando acoplado a um mapa de período 8 com $\alpha^3 = 0,5544$ | 81 |
| 6.8 | Diagrama de bifurcações para 2 mapas caóticos acoplados com $\alpha^2 = \alpha^3 = 0,545$, este diagrama é somente para o mapa caótico do sítio 2. | 81 |
| 6.9 | Transiente do mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ acoplado a um mapa de período 4 com $\alpha^3 = 0,56$, onde o acoplamento ε é igual a 0,2. O transiente começa a partir da 500 ^a iteração. | 82 |
| 6.10 | Gráfico mostrando o número de iterações transientes para o mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ acoplado a um mapa de período 2 com $\alpha = 0,58$ | 83 |
| 6.11 | Gráfico mostrando 3 valores possíveis para ε considerando $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e para condições iniciais $\theta_0^i = 0,5 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$ | 85 |
| 6.12 | $n \times \theta_n^i$ para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,03$ | 85 |
| 6.13 | Idem à figura anterior para $\varepsilon = 0,035$ | 86 |
| 6.14 | Expoente de Lyapunov mostrando a periodicidade dos sítios com $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,03$ | 86 |
| 6.15 | Sítio <i>versus</i> expoente de Lyapunov para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,035$ | 87 |
| 6.16 | Acoplamento global utilizando a relação (6.2) para $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\theta_0^i = 0,52 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$ | 88 |
| 6.17 | Transiente para o caso de $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,189$ | 89 |
| 6.18 | Sítio <i>versus</i> expoente de Lyapunov com $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,189$ | 89 |
| 6.19 | Sítio <i>versus</i> θ_n^i para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,2$ e $c = 0,25$ | 90 |

| | | |
|------|---|----|
| 6.20 | $\varepsilon \times \theta_n^i$ considerando $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $c = 0,25$ para o sítio $i = 50$ | 91 |
| 6.21 | Acoplamento (6.4) para o caso onde $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,2$ sendo considerado o sítio $i = 50$ | 91 |
| 6.22 | Sítio <i>versus</i> θ_n^i para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,2$ e $\Delta = 23$ | 92 |
| 6.23 | Acoplamento (6.5) para o caso onde $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,2$ sendo considerado o sítio $i = 50$ | 93 |

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos acoplados é importante não somente como modelo para sistemas não lineares com muitos graus de liberdade, mas também do ponto de vista do processamento de informações biológicas e possíveis aplicações em engenharia (Kaneko, 1989). Existem vários sistemas que podem ser acoplados, sendo que escolhemos trabalhar com acoplamento de mapas em rede, que consistem em sistemas que apresentam o espaço e o tempo discretos e a variável de estado contínua. A vantagem de trabalharmos com mapas deve-se ao fato de se exigir menos recursos computacionais do que os exigidos por sistemas como equações diferenciais parciais, onde o tempo, o espaço e a variável de estado são contínuos.

Nos mapas acoplados em rede tanto o espaço como o tempo são variáveis discretas e a evolução temporal do sistema é determinada tanto pelo comportamento individual de cada sítio da rede, como também pelo tipo de acoplamento entre eles. Deste modo, é possível investigar a evolução espaço-temporal do sistema, que é caracterizada por uma grande variedade de aspectos, como domínios, *kinks* e *antikinks*, defeitos e caos espaço-temporal, entre outros.

O presente trabalho tem por objetivo estudar as características da dinâmica de mapas prototípicos de Ding acoplados na rede utilizando algumas formas de acoplamentos. O mapa prototípico de Ding é dado pela seguinte relação:

$$\theta_{n+1} = \arctan \frac{\text{sen}(\theta_n + 2\pi\beta)}{2\alpha + \cos(\theta_n + 2\pi\beta)} \quad (1.1)$$

onde $-\pi < \theta_n \leq \pi$, α é a intensidade da força externa e β a frequência. Para analisar as características dos mapas acoplados utilizamos o acoplamento local, onde a dinâmica de um sítio i é determinada pelos sítios i , $i + 1$ e $i - 1$, e o acoplamento global. No acoplamento global podemos considerar que a dinâmica do sítio i é

determinada pelo *campo médio* de todos os sítios da rede, mas também consideramos dois novos tipos de acoplamentos globais onde o valor da intensidade do acoplamento entre os sítios varia de uma forma exponencial ou gaussiana, os quais denominamos de acoplamento global do tipo exponencial e global do tipo gaussiano, respectivamente. Também temos como objetivo analisar a sincronização de mapas prototípicos de Ding com regimes periódicos e caóticos acoplados na rede. Para isto consideramos as formas de acoplamentos já mencionadas.

O mapa (1.1) foi obtido por Ding em 1986 através de um mapeamento estroboscópico de um oscilador não-linear que exibe ciclos limites sob certas condições. O oscilador é perturbado por pulsos de curta duração que podem ser aproximados por funções delta de Dirac.

O estudo de mapas acoplados em rede é bastante recente na teoria dos sistemas dinâmicos, tendo sido iniciado em 1983 com os trabalhos de doutoramento de Kaneko (Kaneko, 1983) e Crutchfield (Crutchfield, 1983). Desde então, a literatura sobre o assunto tem crescido de maneira contínua, e atualmente representa uma área própria de interesse dentro da teoria de sistemas dinâmicos.

A sincronização de mapas acoplados na rede tem sido estudada por vários autores em recentes anos (Kaneko, 1989) (Aranson, et. al., 1992). Mapas acoplados na rede podem ser vistos como um estado intermediário entre o comportamento dinâmico em baixa dimensão, visto em mapas, e o comportamento numa dimensão infinita, por exemplo, de fluidos. Além disso, o conhecimento da sincronização de sistemas acoplados é importante para o estudo de uma variedade de problemas físicos, químicos e biológicos. Sob algumas condições, todos os mapas num conjunto sincronizarão espontaneamente comportando-se como um deles. Sobre condições levemente diferentes, eles se dividirão dentro de dois, três, ou mais grupos diferentes. E sob outras condições, os mapas irão se comportar aproximadamente de forma independente (Shinbrot, 1994). Sendo assim, estudaremos a sincronização dos mapas prototípicos de Ding acoplados em rede através dos acoplamento local e do acoplamento global.

O trabalho foi então segmentado da seguinte forma:

No capítulo 2 temos como objetivo introduzir alguns conceitos básicos relacionados a mapas, que são sistemas onde a variável de estado é contínua e o tempo é discreto, que serão abordados no decorrer deste trabalho.

No capítulo 3 analisamos as características de mapas acoplados em uma rede unidimensional, bem como as formas de acoplamentos. Usamos o mapa logístico para exemplificar alguns conceitos sobre a dinâmica espaço-temporal desta classe de sistemas dinâmicos.

No capítulo 4 apresentamos a determinação analítica de mapeamentos estroboscópicos osciladores pulsados e utilizamos este método de mapeamento para a obtenção do mapa prototípico de Ding, sendo que em seguida é realizada a sua análise.

No capítulo 5 realizamos o acoplamento dos mapas prototípicos de Ding em uma rede unidimensional e estudamos as características observadas para determinadas formas de acoplamentos.

No capítulo 6 é feito o estudo da sincronização de mapas prototípicos de Ding acoplados na rede, sendo que este estudo é realizado levando-se em consideração alguns tipos de acoplamentos.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Pontos Fixos Para Mapas

Os mapas unidimensionais são escritos na seguinte forma geral:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ são os valores discretos do tempo, e $f(x_n)$ é uma função que em nosso caso é não-linear. Dada uma condição inicial x_0 , os demais valores são obtidos por iterações sucessivas do mapa (2.1).

Podemos definir um ponto fixo (x^*) pela relação:

$$x^* = f(x^*). \quad (2.2)$$

Uma órbita de período m é um conjunto de pontos fixos $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*$ tais que

$$x^* = f^m(x^*), \quad (2.3)$$

onde f^m é a m -ésima iterada do mapa.

Como exemplo, consideraremos o mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.4)$$

onde r é o parâmetro de controle. A sua órbita de período 2 é constituída dos pontos (fig. 2.1) (com $r \neq 0$)

$$x_{1,2}^* = \frac{(1 + 1/r) \mp [(1 - 1/r)^2 - 4/r^2]^{1/2}}{2}, \quad (2.5)$$

tais que:

$$x_1^* = f(x_2^*), \quad (2.6)$$

$$x_2^* = f(x_1^*). \quad (2.7)$$

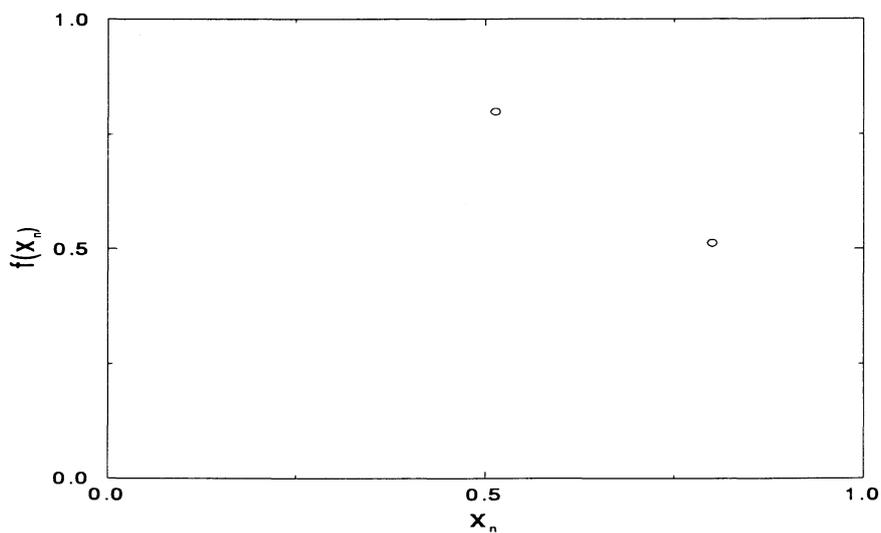


Figura 2.1: Mapa logístico com período 2.

Ainda trabalhando com o exemplo do mapa logístico (2.4) podemos fazer o diagrama de Lamerey (fig. 2.2), o qual nos permite encontrar os pontos fixos que estão sobre a interseção da primeira bissetriz com a curva $y = f(x)$, sendo $f(x) = rx(1 - x)$ para este exemplo.

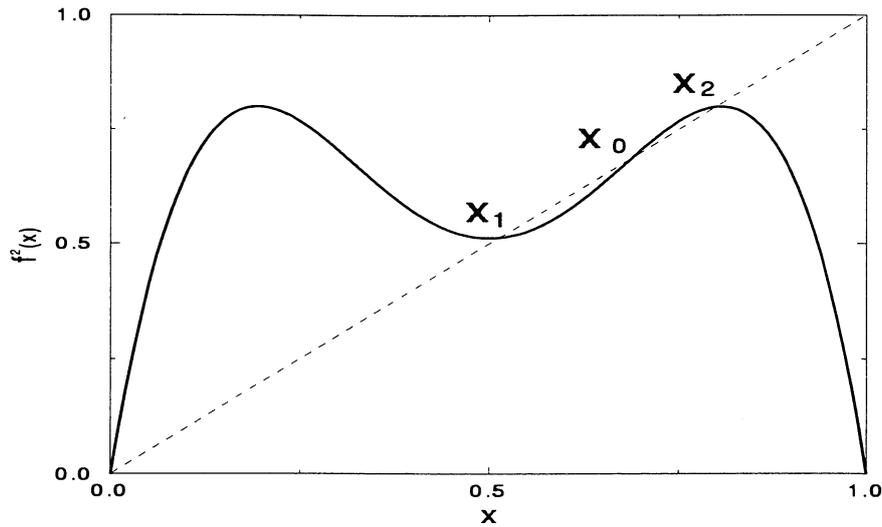


Figura 2.2: Diagrama de Lamerey para o mapa logístico com o parâmetro igual a 3,2.

O fato de termos uma órbita de período 2 e o diagrama de Lamerey apresentar 3 pontos fixos, é justificado pelo motivo de que x_0 é um ponto fixo de período 1 instável. O ponto fixo estável atrai as iterações, enquanto que o instável repele as iterações.

A análise da estabilidade local ou linear do ponto fixo é feita através do estudo das iterações do mapa nas suas vizinhanças. Seja uma iteração x_n próxima ao ponto fixo x^* , tal que:

$$\delta_n = |x_n - x^*|. \quad (2.8)$$

Logo, de (2.1) e (2.8)

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*|. \quad (2.9)$$

Desenvolvendo $f(x^* + \delta_n)$ em série de Taylor, temos

$$\delta_{n+1} = \left| f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx^*} \delta_n - x^* \right| = \left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| \delta_n. \quad (2.10)$$

Se $\delta_{n+1} < \delta_n$ as iterações estão convergindo para o ponto fixo x^* , logo ele é estável e podemos escrever

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| < 1. \quad (2.11)$$

Caso $\delta_{n+1} > \delta_n$ as iterações não estão convergindo para o ponto fixo x^* , portanto ele é instável e temos

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| > 1. \quad (2.12)$$

Ainda podem ocorrer os casos para $|f'(x^*)| = 1$ ou $|f'(x^*)| = 0$, onde o ponto fixo será dito neutro ou superestável, respectivamente. A análise da estabilidade para órbitas de período m vem a ser uma generalização deste procedimento (Schuster, 1984).

2.2 Mapa de Poincaré

Muitos problemas em ciência e engenharia envolvem tempo contínuo, e podem ser representados por um sistema dinâmico autônomo definido por N equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem acopladas. Tais sistemas são denominados *fluxos*:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde f_1, \dots, f_N são funções das variáveis x_1, \dots, x_N e cuja solução, dada uma condição inicial, é representada por uma trajetória no espaço de fase N -dimensional. No espaço de fase cada coordenada está associada a uma variável dinâmica (Ditto, Pecora, 1993).

Em tais casos, sistemas com tempo discreto são ainda de interesse e o sistema (2.13) pode ser reduzido a um mapa N-1 dimensional pela técnica da superfície de secção de Poincaré. Esta técnica consiste em se registrar as interseções de uma dada trajetória com uma certa superfície Σ , em um determinado sentido pré-estabelecido (fig. 2.3) (Hénon, 1982) .

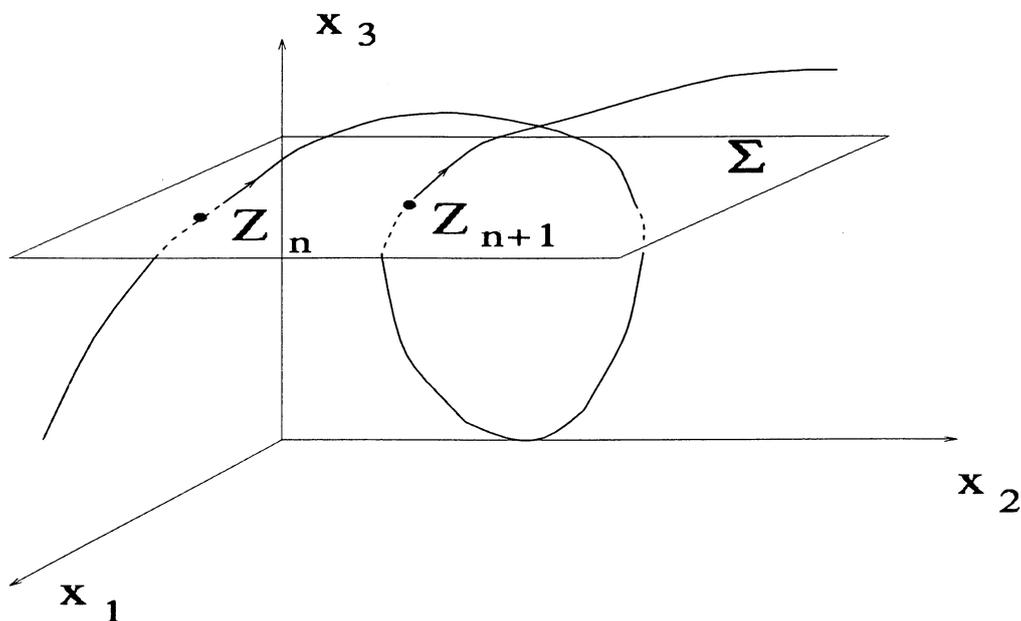


Figura 2.3: Mapa de Poincaré para um espaço de fase 3-dimensional.

Associamos a trajetória de tempo contínuo com uma trajetória de tempo discreto, Z_1, Z_2, \dots . Dado um Z_n , podemos integrar as equações do sistema do ponto até a próxima interseção Z_{n+1} . Assim Z_{n+1} é unicamente determinado por Z_n , e deve existir um mapa

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad (2.14)$$

de um ponto da trajetória sobre a superfície de seção até o próximo (Shinbrot, et al., 1993). No entanto, nem sempre é possível conhecer a forma analítica da função $f(Z)$, embora, possamos fazê-lo em nosso caso.

Uma órbita periódica do sistema de tempo contínuo que resulta numa órbita de período 1 fornece o seguinte mapa (fig. 2.4) :

$$Z^* = f(Z^*). \quad (2.15)$$

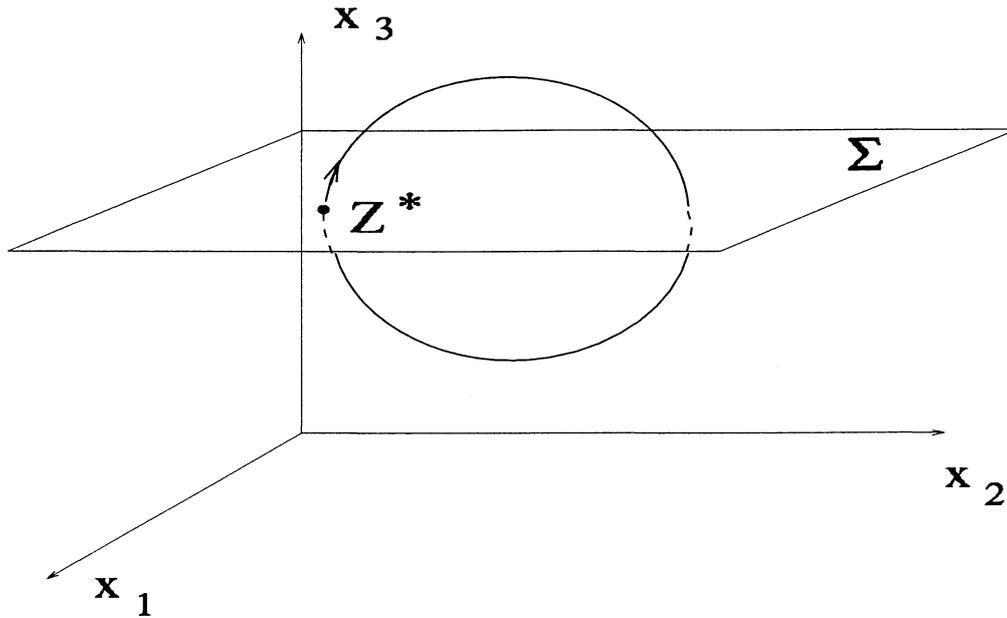


Figura 2.4: Mapa de Poincaré para uma órbita de período 1.

Já uma órbita de período 2 (fig. 2.5) é dada por:

$$\begin{aligned} Z_2^* &= f(Z_1^*), \\ Z_1^* &= f(Z_2^*). \end{aligned} \tag{2.16}$$

No caso de sistemas não-autônômos, (i.e., explicitamente dependente do tempo t),

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= f(\vec{x}, g), \\ g &= g(t, T), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $g(t)$ pode ser uma função periódica com período T ou uma função delta de Dirac T -periódica, é conveniente usar o mapeamento estroboscópico (fig. 2.6), já que o tempo é uma variável estritamente crescente. Para fazermos este mapeamento acrescentamos o tempo como uma variável no espaço de fase e construímos seqüências periódicas de secções de Poincaré no eixo de t , sendo o objetivo final o de projetar todos os pontos de interseção entre a trajetória e as secções de Poincaré, em um dado plano. Vamos empregar implicitamente esta técnica na obtenção do mapeamento que será estudado neste trabalho.

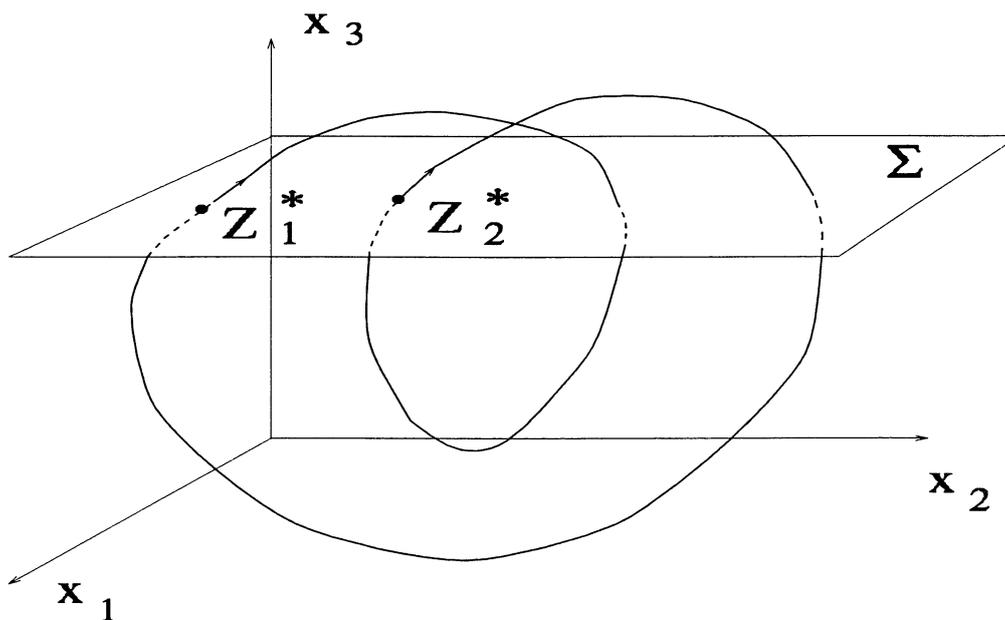


Figura 2.5: Mapa de Poincaré para uma órbita de período 2.

2.3 Diagramas de Bifurcações

O diagrama de bifurcações mostra como os pontos fixos estáveis de um sistema dinâmico mudam com as variações de um ou mais parâmetros do sistema (Romeiras, et al., 1992). O termo bifurcação é extremamente genérico, sendo que podemos considerar que uma bifurcação ocorre quando o ponto fixo altera sua estabilidade ou instabilidade devido à variação de um parâmetro do sistema (Wiggins, 1990).

Usando o mapa logístico (2.4) como exemplo, construímos o diagrama de bifurcações que é dado pela figura (2.7). Para construção do diagrama consideramos, a cada variação de r , uma condição inicial x_0 igual a 0,5 e iniciamos as iterações, sendo que marcamos no gráfico apenas as 32 últimas iterações e desprezamos 700 iterações ditas *transientes*.

Distinguimos, no diagrama de bifurcações do mapa logístico (fig. 2.7), um regime de bifurcações para $2,9 \leq r < r_\infty$ e uma região predominantemente caótica para $r_\infty < r \leq 4$, onde $r_\infty \approx 3,57$ denota o ponto de acumulação da cascata de bifurcações. Para $r > 4$ temos que $x \rightarrow \infty$, e não há atrator limitado para o sistema. Para $r > r_\infty$, no regime caótico, onde a trajetória depende sensivelmente das condições iniciais, vemos também *janelas* correspondendo a sub-regiões onde o comportamento é periódico. Estas *janelas* são caracterizadas por órbitas de período ímpar e podem também sofrer bifurcações.

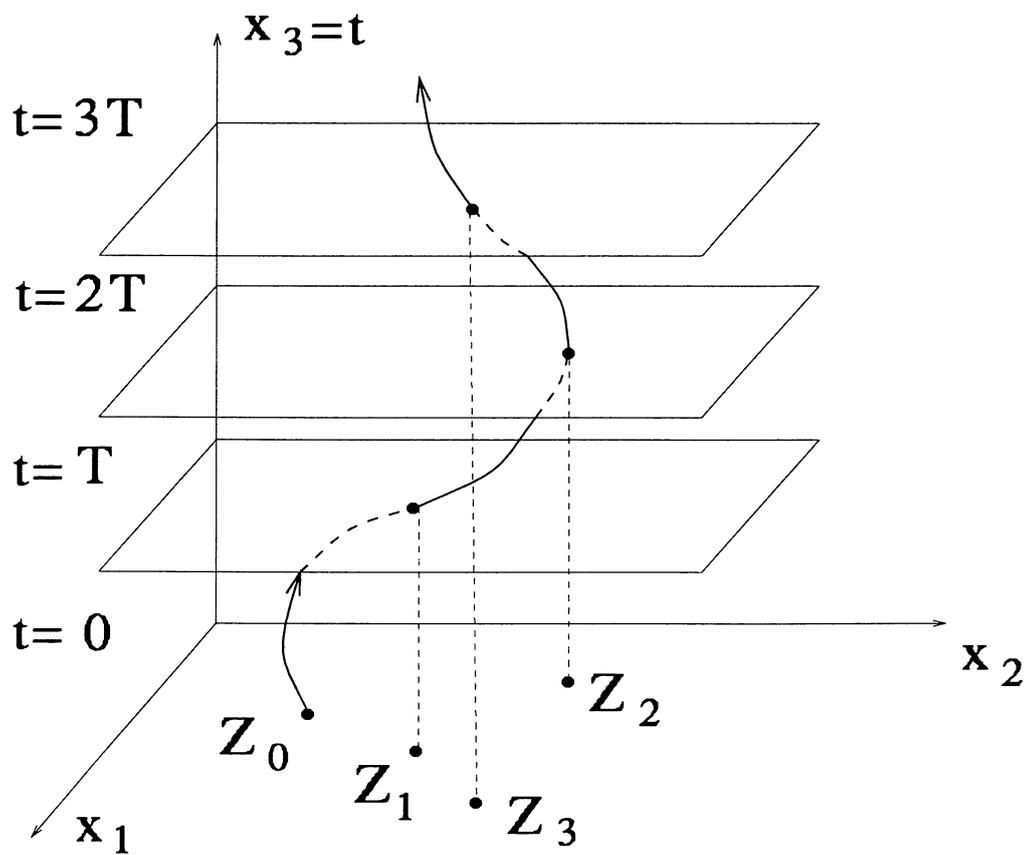


Figura 2.6: Mapa estroboscópico para um sistema bidimensional não-autônomo onde $T = \text{constante}$.

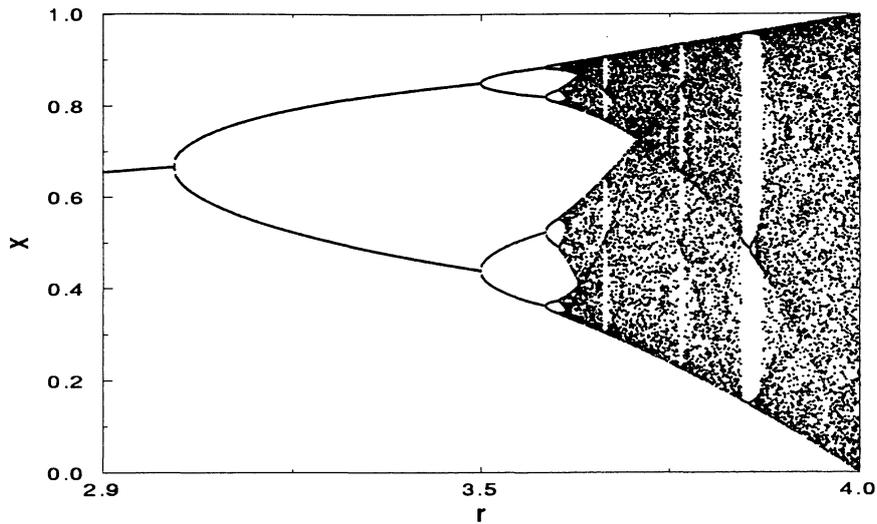


Figura 2.7: Diagrama de bifurcações para o mapa logístico

Na região de bifurcações ou periódica as bifurcações estão associadas a um tipo de rota para o caos conhecida como rota de Feigenbaum, ou de duplicação de período. Nesta forma de bifurcação o ponto fixo que era estável antes da bifurcação torna-se instável e surgem dois pontos fixos estáveis. Neste regime periódico, ao chamarmos de r_n os valores do parâmetro do sistema para os quais o número de pontos fixos muda de 2^{n-1} para 2^n , podemos inferir a seguinte lei de escala:

$$r_n = r_\infty - \text{const.} \delta^{-n}, \quad (2.18)$$

para $n \gg 1$ e onde δ é chamada primeira constante de Feigenbaum, que vale

$$\delta = 4,6692016091 \dots \quad (2.19)$$

Outra lei de escala importante envolve as chamadas órbitas periódicas ou ciclos superestáveis, sendo que os ciclos superestáveis para o mapa logístico contém o ponto $x^* = 1/2$. Vamos considerar como R_n os valores do parâmetro de controle para os quais um n -ciclo é superestável, isto é, contém o ponto $x^* = 1/2$. Então eles satisfazem a relação

$$R_n = R_\infty - \text{const}' \delta^{-n}, \quad (2.20)$$

para $(n \gg 1)$ e onde $R_\infty = r_\infty = 3,5699456\dots$ é um ponto de acumulação comum a ambos os pontos. Ocorre que as distâncias d_n de um ponto fixo estável em um 2^n -ciclo superestável que está mais próximo de $x = 1/2$ (fig. 2.8) têm uma razão constante

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\sigma, \quad (2.21)$$

onde σ é a segunda constante de Feigenbaum, dada por (Schuster, 1984)

$$\sigma = 2,5029078750\dots \quad (2.22)$$

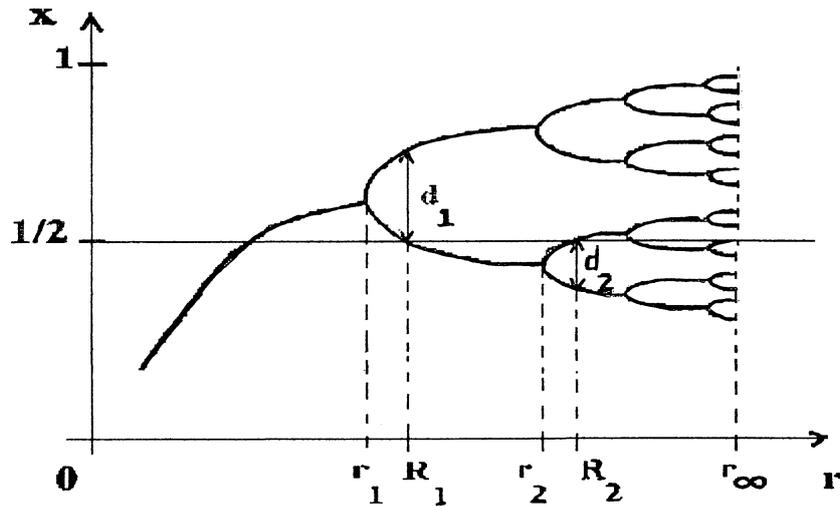


Figura 2.8: Distâncias d_n para os pontos fixos próximos de $x = 1/2$ para órbitas superestáveis.

2.4 Expoente de Lyapunov

No regime caótico o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais, portanto duas condições iniciais originalmente próximas divergem exponencialmente com o tempo. O expoente de Lyapunov mede esta separação exponencial (fig. 2.9).

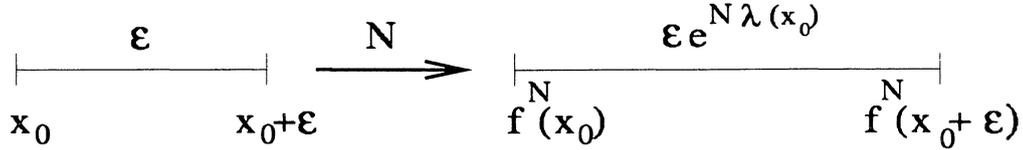


Figura 2.9: Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde N é o número de iterações.

Da figura (2.9) obtemos:

$$\epsilon e^{N \lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)|, \quad (2.23)$$

que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, guia-nos para a expressão de $\lambda(x_0)$:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|, \quad (2.24)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (2.25)$$

Isto significa que $e^{\lambda(x_0)}$ é o fator médio pelo qual a distância entre os pontos adjacentes próximos varia após um número grande de iterações.

O expoente de Lyapunov também mede a média das informações perdidas após uma iteração. Para vermos isto, usamos em (2.25) a regra da cadeia

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{df[f(x)]}{dx} \right|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad (2.26)$$

onde $x_1 = f(x_0)$, logo o expoente de Lyapunov toma a seguinte forma

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad (2.27)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| \quad (2.28)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.29)$$

Se $\lambda(x_0) > 0$ o sistema apresenta um regime caótico, e para $\lambda(x_0) \leq 0$ o regime é regular (fig. 2.10). Para a figura (2.10), construída para o mapa logístico, verificamos que no regime de bifurcações para $1 < r < r_\infty$ (r_∞ é o ponto de acumulação), o expoente de Lyapunov é sempre negativo, com exceções dos pontos de bifurcações onde o expoente de Lyapunov é nulo. No intervalo $r_\infty < r \leq 4$ o expoente de Lyapunov é predominantemente positivo, sendo interrompido por *janelas* com $\lambda < 0$ onde temos regimes periódicos.

O expoente de Lyapunov pode ser generalizado para mapas em D dimensões, onde temos D expoentes para diferentes direções espaciais,

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_D}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{magnitude dos autovalores de } \prod_{n=0}^{N-1} J(\vec{x}_n))^{1/N} \quad (2.30)$$

e

$$J(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_D}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

é a matriz Jacobiana do mapa D-dimensional $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$ (Schuster, 1984).

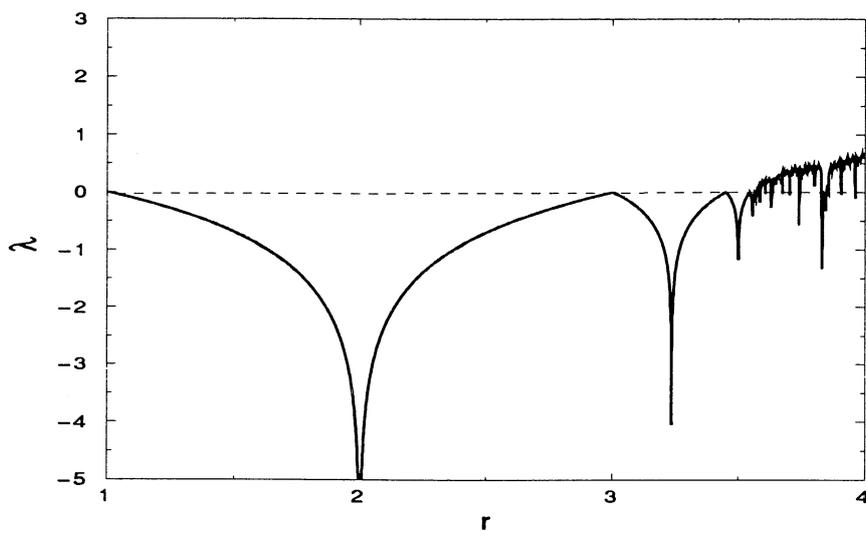


Figura 2.10: Expoente de Lyapunov para o mapa logístico.

Capítulo 3

Mapas Acoplados na Rede

3.1 Sistemas Dinâmicos Espaço-Temporais

A caracterização de sistemas dinâmicos complexos é muito estudada em dinâmica não-linear, sendo o caos em sistemas com poucos graus de liberdade o que guiou os estudos nesta direção. Mas, a maioria dos sistemas dinâmicos é governada por um grande número de graus de liberdade, como é visto em fenômenos de turbulência, observados em fluidos, ótica, física do estado sólido, química, sistemas dinâmicos acoplados, etc. Para o estudo desses sistemas deve-se usar um modelo com tempo e espaço (Kaneko, 1989).

Os sistemas dinâmicos espaço-temporais são classificados levando-se em conta a discretização do espaço, tempo e/ou das variáveis locais de estado. Os principais tipos são:

a) Equações diferenciais parciais: apresentam continuidade no espaço, no tempo e na variável local de estado. No contexto de problemas físicos onde não ocorrem discretização, é normal o uso de equações diferenciais parciais. Surgiram muitos trabalhos numéricos sobre o comportamento de caos espaço-temporal em equações diferenciais parciais não lineares (Gang e Kaifen, 1993).

b) Cadeias de osciladores acoplados na rede: são caracterizados pelo espaço discreto, enquanto o tempo e a variável de estado local são contínuos. Muitos osciladores não-lineares apresentam uma cascata de duplicação de período. Uma cadeia de osciladores fracamente acoplados exibe as características universais encontradas em redes nas quais ocorrem duplicações de período. Neste caso, as redes podem ser consideradas como uma seção de Poincaré de cadeias de osciladores com tempo contínuo. Isto já foi verificado numericamente para uma cadeia de osciladores

de Rössler. O sistema de Rössler é dado pelas seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz + cz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde a , b e c são os parâmetros do sistema. Considerando $a = 0,2$, $b = 0,2$ e $c = 5,7$ o sistema de Rössler exibe comportamento caótico (Froehling, et al, 1980) (Umberger, et al, 1989).

c) Autômato celular: é um sistema no qual o tempo, o espaço e a variável local de estado são discretos. Este sistema foi introduzido por von Neumann e tem recebido bastante atenção (Kaneko, 1986). Um dos mais famosos autômatos celulares bidimensionais é o inventado por J. H. Conway, que foi chamado *Vida*, onde os estados possíveis são 0 ou 1 e as interações ocorrem entre a célula central e as oito células vizinhas (Jackson, 1990).

d) Mapas acoplados na rede: apresentam discretização no espaço e no tempo, enquanto a variável local de estado é contínua. São mais complexas em estrutura do que os autômatos celulares, devido à capacidade de produção de informação local. A existência de um espaço e tempo discreto, faz com que as redes de sistemas dinâmicos sejam mais simples do que as equações diferenciais parciais que requerem uma quantidade muito grande de informações (uma função contínua) para especificar o estado, e exige grandes recursos computacionais para simulação (Crutchfield e Kaneko, 1987). O nosso trabalho será baseado em mapas acoplados na rede.

3.2 Tipos de Acoplamentos

Seja uma rede unidimensional com N sítios rotulados pelo índice i , com $i = 1, 2, \dots, N$. Em cada sítio a variável de estado é escrita x_n^i , onde n denota o tempo discreto. Na ausência de acoplamento a evolução temporal da variável de estado para cada sítio é dada pelo mapa

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i),\tag{3.2}$$

onde $f(x)$ é uma função não-linear.

Há várias formas de acoplamentos que podem ser escolhidas. O

acoplamento pode ser local, no qual a dinâmica de um sítio é determinada pelas variáveis de estado dos sítios vizinhos, ou global, em que a dinâmica de um sítio é determinada por todos os sítios. Inicialmente utilizaremos o acoplamento local, onde a dinâmica do sítio i é afetada pelos sítios vizinhos mais próximos $i - 1$ e $i + 1$ e por ele mesmo.

Das diferentes maneiras que podemos realizar o acoplamento local, mencionaremos alguns que podem ser obtidos através da relação geral:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \varepsilon_0 g(x_n^i) + \varepsilon_R g(x_n^{i+1}) + \varepsilon_L g(x_n^{i-1}) \quad (3.3)$$

onde i denota a posição na rede, n o tempo e $f(x)$ é a função não-linear que caracteriza os mapas desacoplados. O acoplamento é controlado pelos parâmetros ε_0 , ε_R e ε_L , e a dinâmica do acoplamento é fornecida pela função $g(x)$. Para o caso de $g(x) = x$ temos o chamado acoplamento linear e se $g(x) = f(x)$, onde $f(x)$ é uma função suave, o acoplamento é denominado de acoplamento futuro. No acoplamento futuro os valores para cada sítio não se afastam muito de seus valores quando os mapas estão isolados (não-acoplados).

A simetria do acoplamento é determinada pelos valores ε_0 , ε_R e ε_L , os quais podem fornecer os seguintes casos:

- a) Acoplamento aditivo: $\varepsilon_0, \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
- b) Acoplamento laplaciano: $-\varepsilon_0/2 = \varepsilon_R = \varepsilon_L$;
- c) Acoplamento total: $\varepsilon_0 = -2/3, \varepsilon_R = \varepsilon_L = 1/3$;
- d) Acoplamento unidirecional: $-\varepsilon_0 = \varepsilon_L, \varepsilon_R = 0$.

Os três primeiros casos são modelos para um sistema com difusão simétrica, enquanto que o último corresponde ao acoplamento assimétrico, o qual pode ser encontrado em modelos de fluxos abertos (*open flow lattices*) (Crutchfield e Kaneko, 1987).

No acoplamento global a dinâmica do sítio i é determinada por todos os sítios da rede. De acordo com a maneira com que os sítios da rede influenciam o sítio i temos algumas formas de acoplamento global. Das formas possíveis de acoplamento global podemos citar:

- a) Acoplamento global linear

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N x_n^j; \quad (3.4)$$

b) Acoplamento global futuro

$$x_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^j); \quad (3.5)$$

c) Acoplamento global do tipo exponencial

$$x_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_n^i) + \varepsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp(-c|i - j|)f(x_n^j); \quad (3.6)$$

d) Acoplamento global do tipo gaussiano

$$x_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_n^i) + \varepsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp[-(i - j)^2/\Delta]f(x_n^j); \quad (3.7)$$

onde c é uma constante que controla o decaimento da exponencial e Δ é a largura da gaussiana. Para o acoplamento global linear e o futuro ocorre que a dinâmica do sítio i é determinada pelo *campo médio* de todos os sítios da rede. Já para os acoplamentos do tipo exponencial e gaussiano, os quais são propostos neste trabalho, o valor da intensidade do acoplamento ε cai de uma forma exponencial e gaussiana, respectivamente, quando nos afastamos do sítio i . No caso do acoplamento global linear e futuro, pelo contrário, todos os sítios contribuem da mesma forma, não importando sua posição relativa na rede.

Devido às fronteiras da rede, no acoplamento local, utilizam-se condições de contorno, que podem ser: fixas, periódicas, etc. Como o mapa tem a necessidade de um valor inicial para que os próximos valores sejam obtidos por iterações, também uma rede de mapas acoplados necessita de valores iniciais, os quais podem ser: funções periódicas, funções aleatórias, gaussianas, constantes, etc. Neste trabalho empregamos um perfil senoidal de condições iniciais na forma geral:

$$x_0^i = \varphi(i), \quad (3.8)$$

onde φ é uma função periódica.

3.3 Análise de Mapas Logísticos Acoplados em Rede

Nesta secção faremos uma análise qualitativa da dinâmica de mapas logísticos acoplados em rede, para ilustrar as principais características desta classe de sistemas dinâmicos espaço-temporais.

Quando realizamos o acoplamento local de mapas é possível verificar, a cada iteração, que existem conjuntos de sítios, denominados de domínios, nos quais os sítios que pertencem a um determinado conjunto estão correlacionados espacialmente. Os domínios são separados entre si por *kinks* e *antikinks* e podem ser visualizados através dos gráficos sítio *versus* variável de estado.

Os próximos diagramas serão baseados no acoplamento do mapa logístico (2.4). Para isto utilizaremos o acoplamento laplaciano futuro:

$$x_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{i+1}) + f(x_n^{i-1})] \quad (3.9)$$

onde $f(x) = rx(1 - x)$. As fronteiras da rede x^1 e x^N serão consideradas fixas, e adotaremos como condição inicial uma onda senoidal, onde N é o tamanho da rede.

Para um acoplamento de intensidade $\varepsilon = 0,2$ e um parâmetro de controle $r = 3,5$, sendo realizadas 1032 iterações com 1000 iterações desprezadas, podemos notar pela figura (3.1) a configuração dos domínios e dos *kinks*, com uma condição inicial de $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. Se alterarmos o valor da condição inicial para $x_0^i = 0,25 + 0,2\text{sen}(2\pi iN^{-1})$; ocorrem alterações nos domínios (fig. 3.2). Essas alterações indicam que o tamanho e a distribuição dos domínios dependem da condição inicial.

Podem ocorrer alterações na periodicidade dos sítios, caso haja modificações no tamanho da rede. Verificamos este fato adotando que as condições de contorno $i = 1$ e $i = N$ sejam fixadas no valor $x^* = 1 - r^{-1}$, que é o ponto fixo de período 1 do mapa desacoplado, bem como, $\varepsilon = 0,2$, $r = 3,57$ e a condição inicial sendo $x_0^i = x^* + 0,1\text{sen}(\pi iN^{-1})$. Na figura (3.3), com o tamanho da rede N igual a 5, aparecem sítios com periodicidade 4. Caso aumentemos o tamanho da rede para 9 surgem sítios com periodicidade 8 (fig. 3.4). O aumento do tamanho da rede não afeta somente a periodicidade dos sítios, mas também acarreta alterações na

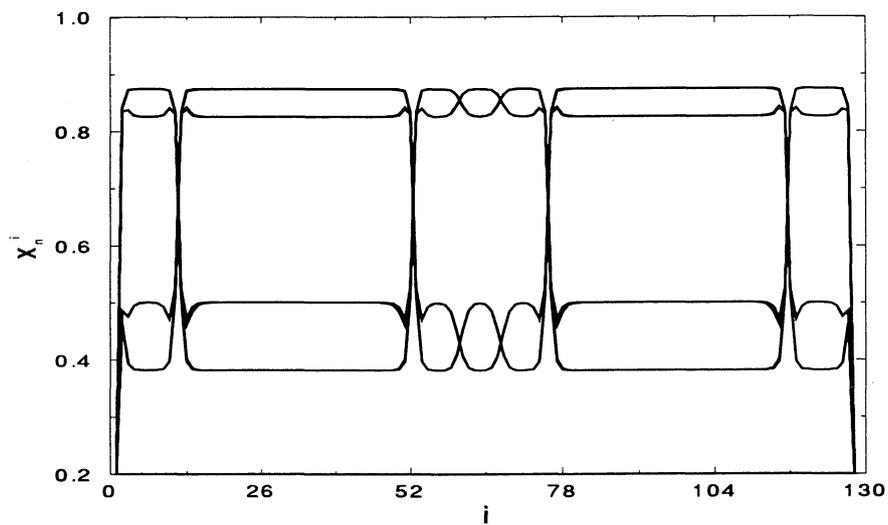


Figura 3.1: $i \times x_n^i$ para uma condição inicial de $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. A figura corresponde ao *overlap* de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transientes desprezadas.

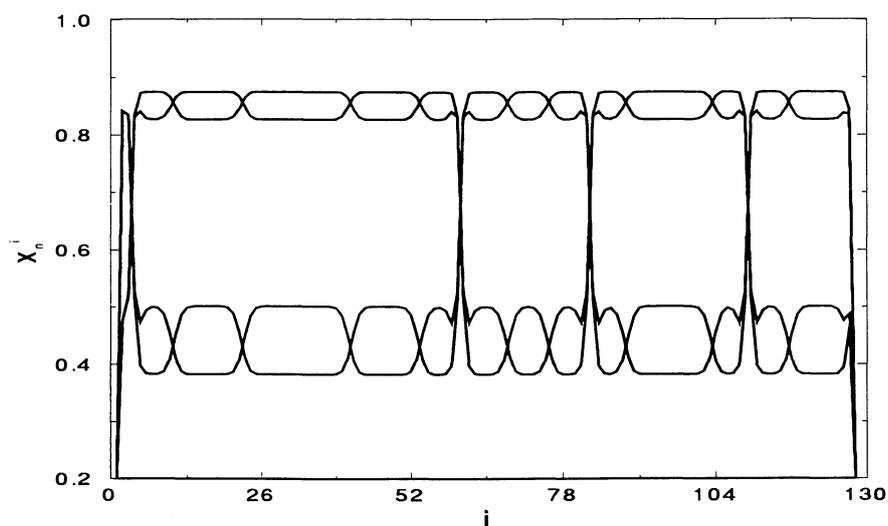


Figura 3.2: $i \times x_n^i$ para uma condição inicial de $x_0^i = 0,25 + 0,2\text{sen}(2\pi iN^{-1})$.

configuração dos domínios.

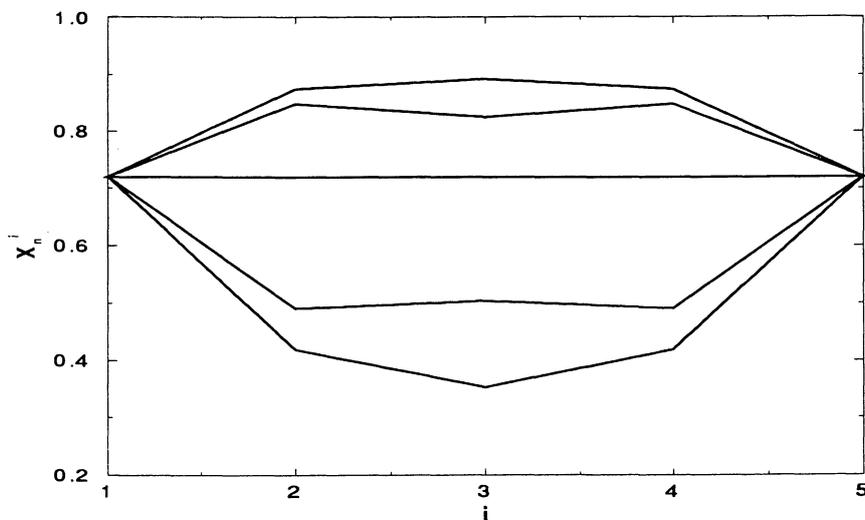


Figura 3.3: Sítio *versus* amplitude para uma rede com 5 mapas acoplados com $\varepsilon = 0, 2$.

Usando um acoplamento $\varepsilon = 0, 2$, $N = 128$, condição inicial $x_0^i = 0, 5 + 0, 4\text{sen}(2\pi i N^{-1})$ e, principalmente, variando o parâmetro de controle r , ocorre uma diminuição na distância entre os *kinks* quando aumentamos a não linearidade do sistema. Nas figuras (3.5) e (3.6) vemos esta diminuição quando variamos o parâmetro de não linearidade de 3,5 para 3,57, respectivamente. Estes valores de r correspondem, no mapa desacoplado, ao regime de bifurcações próximo ao ponto de acumulação, a partir do qual inicia-se o regime caótico.

Quando aumentamos o valor do parâmetro de controle até um determinado valor acima deste ponto de acumulação r_∞ para o mapa isolado, há uma transição para o regime caótico em parte dos sítios da rede. No início do regime caótico a existência dos domínios é preservada, podendo existir alguns domínios que apresentam regimes periódicos (fig. 3.7), e no decorrer do aumento da não linearidade a estrutura colapsa pela fusão dos domínios (fig. 3.8).

Além de outros fatores já mencionados, a configuração dos domínios depende do acoplamento. Esta dependência é mostrada através das figuras (3.9) e (3.10), nas quais consideramos $r = 3, 57$ e variamos o acoplamento. Ocorre a diminuição do número de pontos fixos estáveis com o aumento do acoplamento e alterações morfológicas nos domínios.

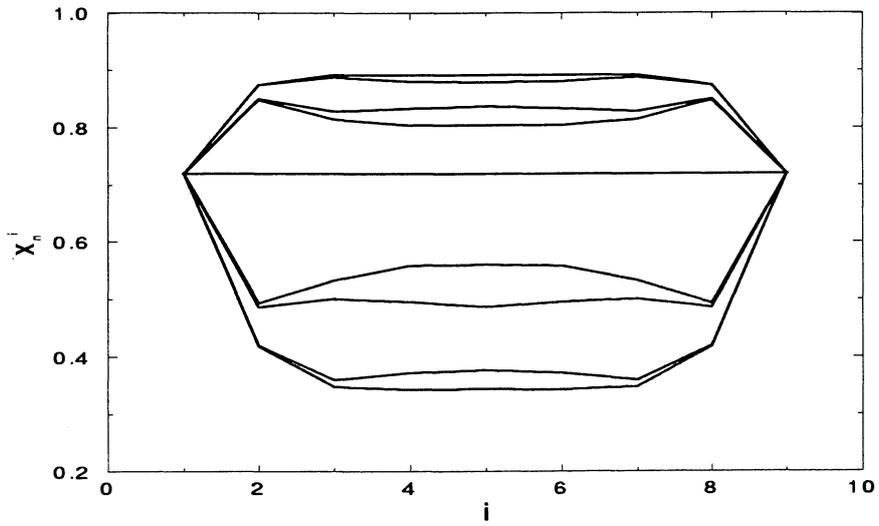


Figura 3.4: Gráfico para uma rede com 9 mapas acoplados.

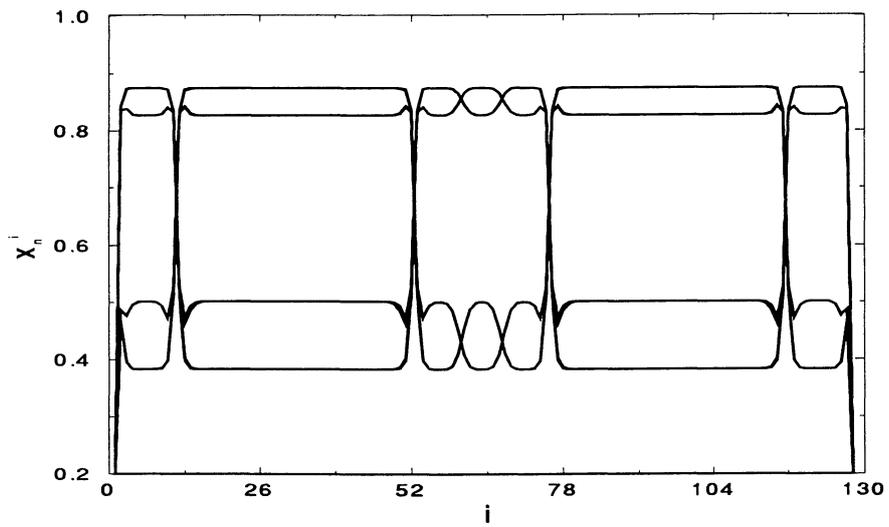


Figura 3.5: Sítio *versus* amplitude para um parâmetro de controle igual a 3,5.

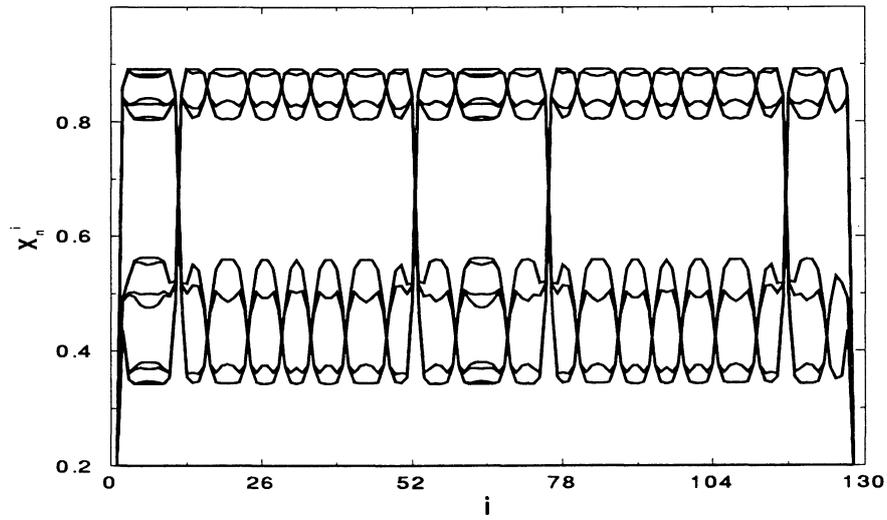


Figura 3.6: Parâmetro de controle igual a 3,57.

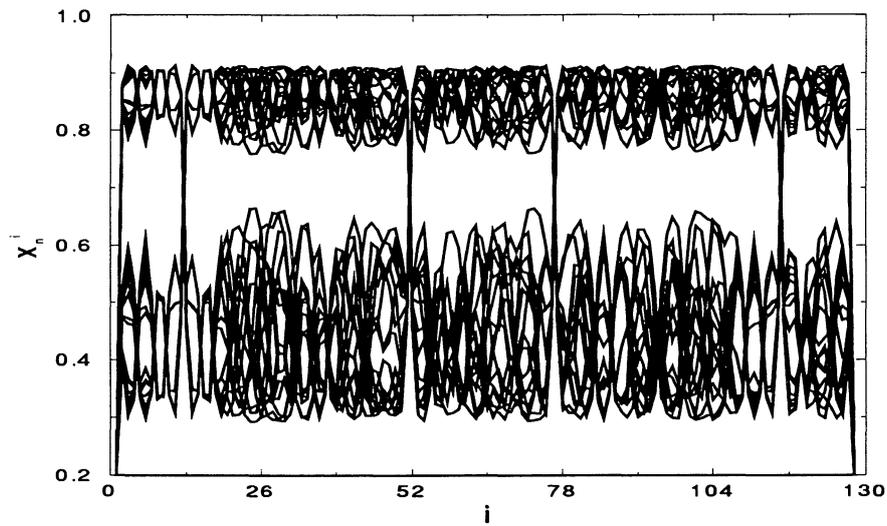


Figura 3.7: Acoplamento com um parâmetro de controle igual a 3,65.

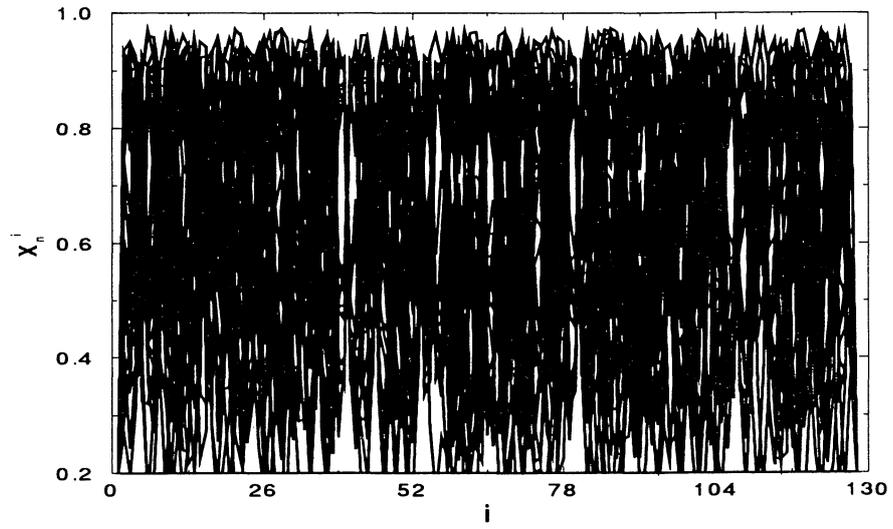


Figura 3.8: Acoplamento com um parâmetro de controle igual a 3,9.

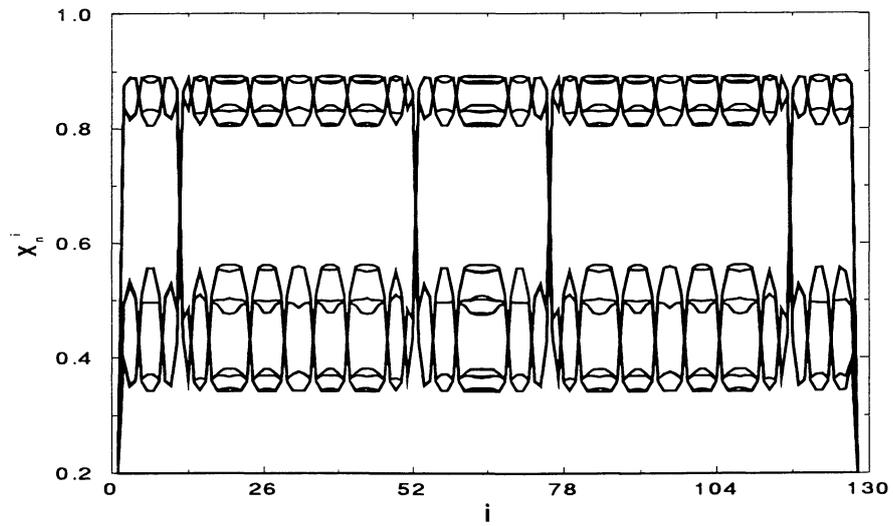


Figura 3.9: Sítio *versus* amplitude com $\varepsilon = 0, 1$.

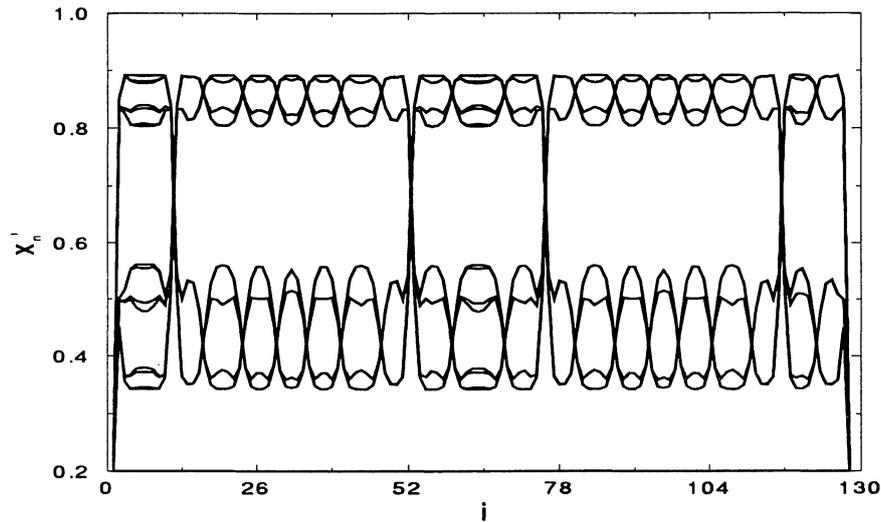


Figura 3.10: Rede de mapas com um acoplamento igual a 0,25.

Assim como é possível analisarmos a variação dos pontos fixos com o parâmetro do sistema pelo diagrama de bifurcações para um sistema isolado, também é possível fazermos esta mesma análise através do chamado histograma de bifurcações para os mapas acoplados na rede. Para construirmos este diagrama (fig. 3.11) consideramos $\varepsilon = 0,2$, $N = 128$ e a condição inicial já mencionada $x_0^i = 0,5 + 0,4\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. A frequência com que os valores possíveis de x_n^i são visitados pela órbita de todos os sítios é indicada pela cor do *pixel* no histograma de bifurcações. A alta probabilidade, em *pixel* preto, surge devido aos domínios, enquanto que a baixa probabilidade, em *pixel* cinza, aparece em razão dos sítios localizados nas fronteiras dos domínios. Vemos que, no regime periódico, para o mapa isolado, também o histograma de bifurcações registra este comportamento para os valores mais visitados pelos x_n nos diversos sítios. No regime caótico há porém uma uniformização nesta distribuição, caracterizando a ausência de periodicidade também no caso de mapas acoplados.

Outra maneira para descrevermos as bifurcações é através de um diagrama sítio *versus* parâmetro de controle, sendo que este diagrama é construído em um tempo fixo, logo após um determinado número de iterações. Construímos o diagrama (fig. 3.12) após 100 iterações transientes, ou seja, exatamente na 101^a iteração. Em escala de tons cinzentos encontram-se os valores das amplitudes que estão compreendidos no intervalo que vai de 0,0 a 1,0, sendo que a escala começa do *pixel* preto para o menor valor da amplitude e segue para o *pixel* branco para o maior valor da amplitude. Este diagrama indica a correlação espacial da dinâmica

apresentada pelos domínios, no caso periódicos, e a falta desta correlação espacial no caso caótico. Observamos que a transição entre estes regimes é suave, devido ao acoplamento entre os sítios, que mistura o comportamento individual com o de seus vizinhos. A falta de correlação espacial pode indicar um tipo de caos espaço-temporal observado na rede.

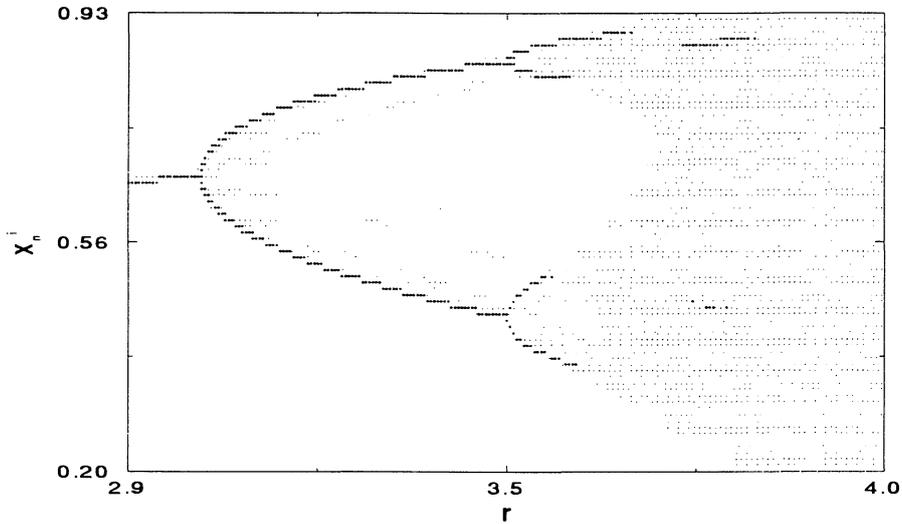


Figura 3.11: Histograma de bifurcações para o mapa logístico acoplado, onde $\varepsilon = 0, 2$, $N = 128$ e $x_0^i = 0, 5 + 0, 4\text{sen}(2\pi iN - 1)$.

3.4 Propagação de *Kinks* e *Antikinks*

Para caracterizarmos a propagação de *kinks* e *antikinks* surge a necessidade de podermos defini-los de maneira mais precisa e para isto consideraremos algumas soluções particulares da chamada equação seno-Gordon (Bishop, 1990)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \text{sen} \phi, \quad (3.10)$$

onde ϕ é uma função de x e t .

Nós admitiremos como solução de (3.10)

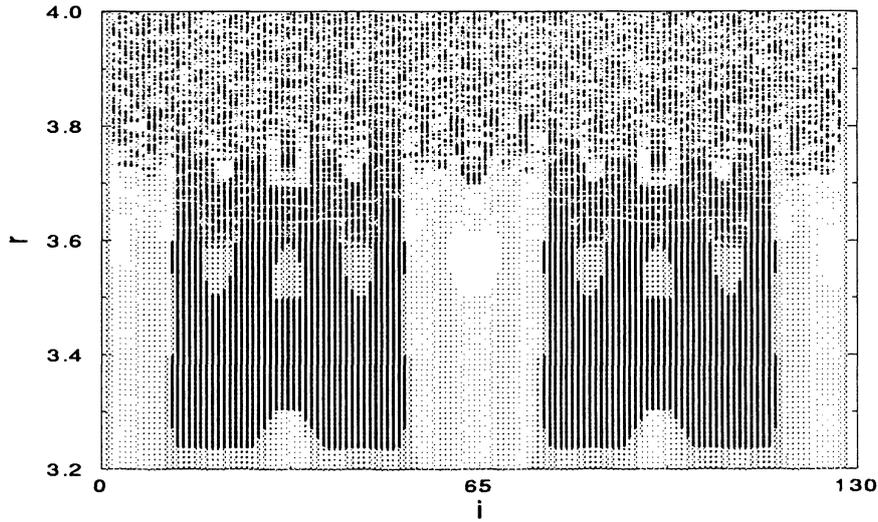


Figura 3.12: Sítio *versus* parâmetro de controle para $\varepsilon = 0,2$ e com 100 iterações transientes desprezadas.

$$\phi = 4 \tan^{-1}[X(x)T(t)], \quad (3.11)$$

sendo que a diferenciação fornece

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{4}{1 + (XT)^2} TX', \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{4TX''}{1 + (XT)^2} - \frac{8(TX')^2 XT}{[1 + (XT)^2]^2}, \quad (3.13)$$

onde $X' = dX/dx$. Obtemos uma equação similar para $\partial^2 \phi / \partial t^2$. Prosseguindo, temos para $\xi = XT$

$$\text{sen}[4 \tan^{-1}(\xi)] = 2\text{sen}[2 \tan^{-1}(\xi)] \cos[2 \tan^{-1}(\xi)] \quad (3.14)$$

$$\text{sen}[4 \tan^{-1}(\xi)] = 4 \frac{\xi(1 - \xi^2)}{(1 + \xi^2)^2}. \quad (3.15)$$

Substituindo esta relação em (3.10), e multiplicando por $1/4[1 + (XT)^2]^2$, (3.10) torna-se

$$TX''[1 + (XT)^2] - 2(TX')^2XT - T''X[1 + (XT)^2] + 2(T'X)^2XT = XT[1 - (XT)^2]. \quad (3.16)$$

A solução é da forma

$$(X')^2 = pX^4 + mX^2 + q, \quad (3.17)$$

$$(T')^2 = -qT^4 + (m - 1)T^2 - p, \quad (3.18)$$

onde p , m e q são constantes.

Para o caso de $p = q = 0$ as equações (3.17) e (3.18) tornam-se para $m \geq 1$

$$X' = \pm m^{1/2}X, \quad (3.19)$$

$$T' = \pm(m - 1)^{1/2}T. \quad (3.20)$$

Se nós considerarmos $c^2 = 1 - m^{-1}$, então

$$\tan\left(\frac{\phi}{4}\right) = e^{\pm(x-ct)(1-c^2)^{-1/2}}, \quad (3.21)$$

onde c pode ser positivo ou negativo. Como uma função de $\xi = (x - ct)(1 - c^2)^{-1/2}$, a solução $\tan(\phi/4) = e^{+\xi}$ é chamada soliton (S), e é também chamada *kink*. A solução $\tan(\phi/4) = e^{-\xi}$ é chamada anti-soliton (A) ou *antikink*. Assim as possíveis soluções estão ilustradas na figura (3.13).

Quando as fronteiras $x = \pm\infty$ não são zero, nós temos os solitons topológicos. Por outro lado, alguns solitons tal que $\phi \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ são solitons não-topológicos (Jackson, 1990).

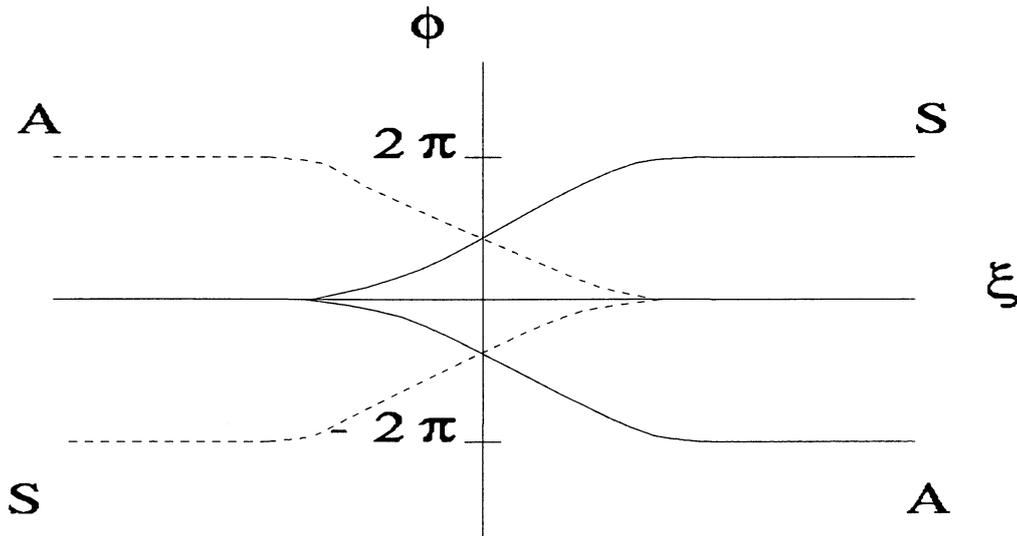


Figura 3.13: $\xi \times \phi$ onde S corresponde ao *kink* e A ao *antikink*.

A dinâmica de *kinks* e *antikinks*, que no nosso caso além de representarem as paredes dos domínios são solitons topológicos, pode ser observada através de diagramas sítio *versus* tempo em mapas acoplados na rede. Neste diagrama representamos a amplitude em tons cinzentos no intervalo que vai de 0,45 a 0,95, os quais são marcados a cada 128 passos no tempo. O acoplamento foi estabelecido em 0,1, começando as iterações com uma onda senoidal para condição inicial.

Na figura (3.14) as iterações indicam a propagação de vários *kinks* e *antikinks*, que com o decorrer do tempo aniquilam-se, resultando em poucos *kinks*. Desta forma, cessa a propagação desses *kinks* a partir de um determinado tempo e o sistema atinge o estado estacionário. Já na figura (3.15) os *kinks* não se aniquilam e o sistema não atinge o estado estacionário, pelo menos para o intervalo de tempo que foi analisado.

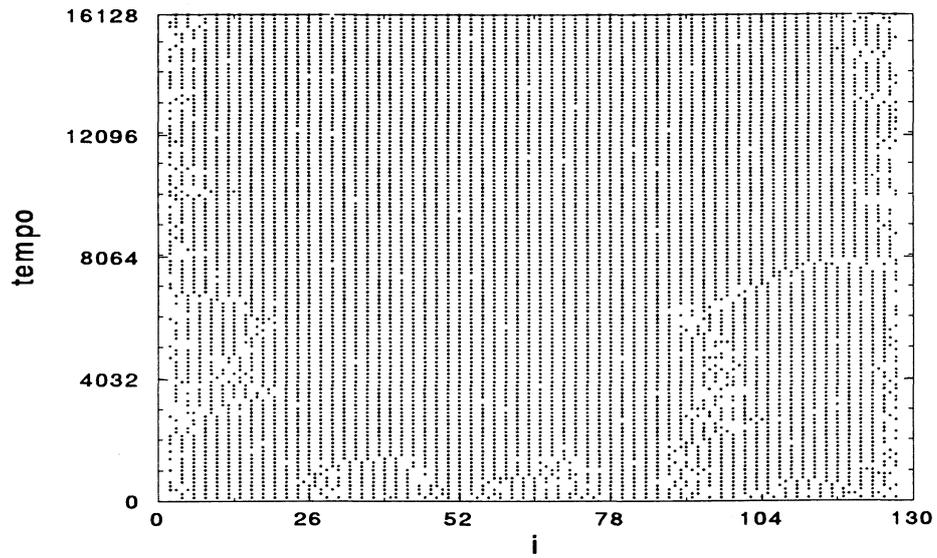


Figura 3.14: Sítio versus tempo para o caso onde o sistema atinge o estado estacionário para um parâmetro de controle igual a 3,91.

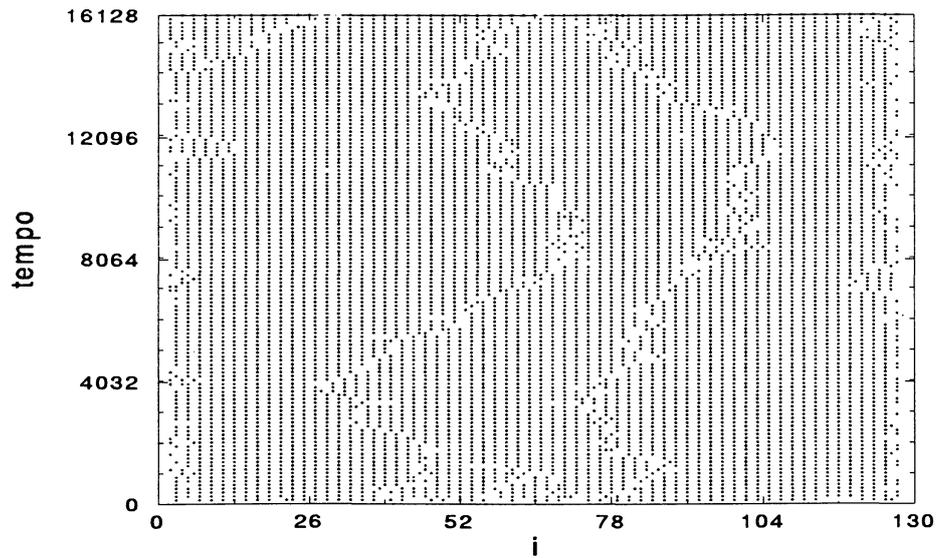


Figura 3.15: Propagação de *kinks* para $r = 3,895$.

Capítulo 4

Oscilador Prototípico de Ding

4.1 Osciladores Pulsados

Osciladores não-lineares forçados constituem um rico laboratório teórico para estudos de comportamentos periódicos e caóticos, sendo bastante estudados nos últimos anos. Sua importância se dá pelo fato de poderem ser utilizados como modelos em diversas áreas científicas, tais como: eletrônica, neurofisiologia, etc (Kapitaniak, 1991).

A força externa pode ser considerada periódica, harmônica ou impulsiva. Quando a força é harmônica, as equações diferenciais que descrevem o sistema frequentemente tornam-se complexas demais para permitir soluções analíticas, fazendo com que só seja possível a sua análise através de simulações numéricas. Já para uma força externa impulsiva, podemos efetuar investigações analíticas e numéricas. Isto se deve ao fato de podermos considerar os pulsos aplicados no sistema como funções delta de Dirac, observando que para usarmos esta aproximação, o tempo de duração do pulso deva ser muito curto em comparação com o período de oscilação do sistema.

Osciladores não-lineares apresentando efeitos de dissipação apresentam, no espaço de fase, atratores conhecidos como ciclos limites, que se constituem basicamente em curvas fechadas, para as quais as trajetórias do sistema são atraídas ou repelidas, quando o intervalo de tempo é suficientemente grande. Nestes casos o ciclo limite é dito estável ou instável, respectivamente (Hagedorn, 1984).

Em particular, se o oscilador apresenta um ciclo limite estável quando não está sujeito a uma força externa, ocorre que para uma força de fraca intensidade o ciclo limite domina, surgindo comportamentos quase-periódicos e periódicos, não apresentando caos. Aumentando o valor da amplitude da força externa, o os-

cilador passa através de uma região de transição começando a exibir comportamentos caóticos. Para uma força de intensidade muito alta, o sistema é dominado por esta força, provocando o desaparecimento do regime caótico (Ding, 1987).

A dinâmica de um oscilador não-linear forçado pode ser reduzido a um mapa através de um mapeamento estroboscópico. Para um sistema cuja força externa seja um pulso, o mapeamento pode ser feito de forma analítica, o que mostraremos na próxima secção. Mencionaremos como exemplo o problema de um rotor rígido amortecido e periodicamente pulsado no sentido do movimento. O rotor consiste numa partícula de massa m fixa a uma haste leve que é presa na outra extremidade, sendo que é exercida sobre este corpo uma força tangencial ao seu movimento. Então, a sua equação de movimento é dada pela seguinte relação:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma \dot{\varphi} = K f(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.1)$$

onde n é inteiro, Γ é a constante de amortecimento, T é o período entre dois pulsos, K é a intensidade do pulso e o momento de inércia é normalizado à unidade. Substituindo $x = \varphi$, $y = \dot{\varphi}$, $z = t$, temos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = y \quad (4.2)$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT) \quad (4.3)$$

$$\dot{z} = 1 \quad (4.4)$$

que podem ser reduzidos ao mapa, a partir do método a ser descrito na próxima secção:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma} [y_n + K f(x_n)] \quad (4.5)$$

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + K f(x_n)] \quad (4.6)$$

Considerando $f(x_n) = (r-1)x_n - rx_n^2$, bem como aplicando os limites $\Gamma \rightarrow \infty$ e $K \rightarrow \infty$, tal que $\Gamma/K = 1$, podemos obter o mapa logístico (2.4) através

da relação (4.5) (Schuster, 1984).

4.2 Determinação Analítica de Mapeamentos Estroboscópicos

Realizaremos a determinação analítica de mapeamentos estroboscópicos utilizando o seguinte sistema (Caldas e Tasso, 1989):

$$\frac{dY}{dt} = M[Y]Y + \sum_m c_m \delta(t - mT) N[Y]Y, \quad (4.7)$$

onde $Y = (y_1, y_2)$ e M, N são matrizes quadradas 2×2 . Considerando $M[Y] = M_{ij}(y_1, y_2)$, $N[Y] = N_{ij}(y_1, y_2)$ e $c_m = 0$ para y_2 (i.e., perturbação apenas ao longo da direção y_1), a equação (4.7) torna-se

$$\dot{y}_1 = M_{11}(y_1, y_2)y_1 + M_{12}(y_1, y_2)y_2 + \sum_m c_m [N_{11}(y_1, y_2)y_1 + N_{12}(y_1, y_2)y_2] \delta(t - mT), \quad (4.8)$$

$$\dot{y}_2 = M_{21}(y_1, y_2)y_1 + M_{22}(y_1, y_2)y_2. \quad (4.9)$$

Analisando a figura (4.1) percebemos que podemos definir algumas variáveis discretas (o procedimento é equivalente à técnica do mapeamento estroboscópico analisado na secção 2.2):

$$(y_{1,2})_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}(t = nT + \varepsilon), \quad (4.10)$$

$$(y_{1,2})_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}[t = (n+1)T + \varepsilon], \quad (4.11)$$

$$(y_{1,2})_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{1,2}[t = (n+1)T - \varepsilon]. \quad (4.12)$$

Primeiramente integraremos a equação (4.8) no intervalo $nT + \varepsilon < t < (n+1)T - \varepsilon$, sendo que neste intervalo $c_m = 0$.

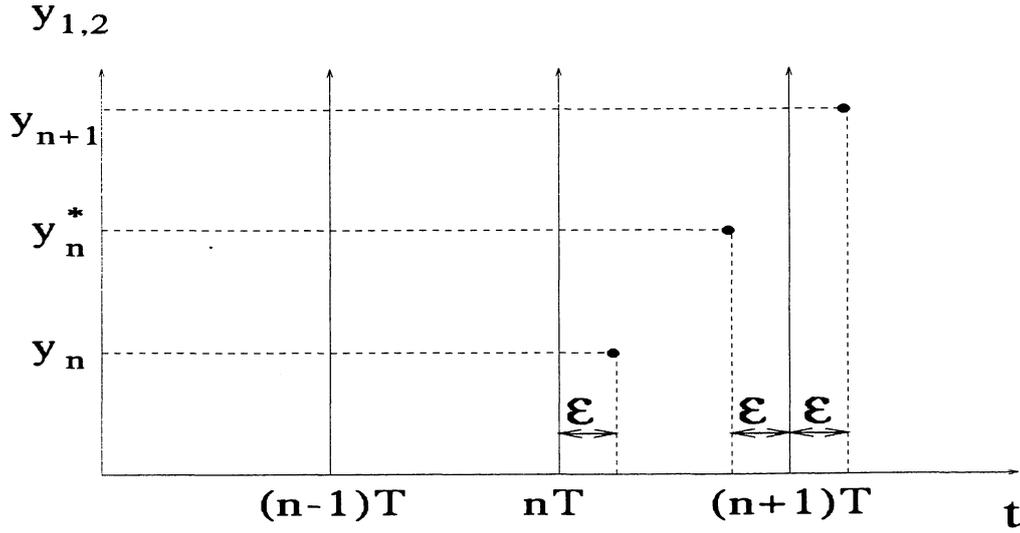


Figura 4.1: Variáveis discretizadas.

$$\int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \frac{dy_1}{dt} dt = \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt \quad (4.13)$$

$$y_1[(n+1)t - \epsilon] - y_1(nT + \epsilon) = \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt. \quad (4.14)$$

Aplicando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y_1[(n+1)T - \epsilon] - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y_1(nT + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt, \quad (4.15)$$

que com a utilização das variáveis discretizadas já definidas, toma a forma

$$(y_1^*)_n = (y_1)_n + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2) dt. \quad (4.16)$$

De maneira análoga, já que c_m é nulo, podemos integrar a equação (4.9) obtendo

$$(y_2^*)_n = (y_2)_n + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{nT+\varepsilon}^{(n+1)T-\varepsilon} (M_{21}y_1 + M_{22}y_2)dt. \quad (4.17)$$

Agora, considerando o *salto* da solução devido à função delta, integraremos a equação (4.8) no intervalo $(n+1)T-\varepsilon < t < (n+1)T+\varepsilon$. Neste intervalo ocorre que c_m não é nulo.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} \frac{dy_1}{dt} dt &= \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2)dt + \\ &\int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} \sum_m c_m (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \delta(t - mT) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} y_1[(n+1)T+\varepsilon] - y_1[(n+1)T-\varepsilon] &= \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (M_{11}y_1 + M_{12}y_2)dt + \\ &\int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \sum_m c_m \delta(t - mT) dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizando a continuidade do integrando $M_{11}y_1 + M_{12}y_2$ e definindo

$$\begin{aligned} A_1 = M_{11}[y_1(t = (n+1)T - \varepsilon), y_2(t = (n+1)T - \varepsilon)]y_1(t = (n+1)T - \\ \varepsilon) + M_{12}[y_1(t = (n+1)T - \varepsilon), y_2(t = (n+1)T - \varepsilon)]y_2(t = (n+1)T - \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.20)$$

temos

$$\begin{aligned} y_1[(n+1)T+\varepsilon] - y_1[(n+1)T-\varepsilon] &= A_1 \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} dt + \\ &\int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \sum_m c_m \delta(t - mT) dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} y_1[(n+1)T+\varepsilon] - y_1[(n+1)T-\varepsilon] &= 2\varepsilon A_1 + \\ &\int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \sum_m c_m \delta(t - mT) dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(y_1)_{n+1} = (y_1^*)_n + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(n+1)T-\varepsilon}^{(n+1)T+\varepsilon} (N_{11}y_1 + N_{12}y_2) \sum_m c_m \delta(t - mT) dt. \quad (4.23)$$

Na última equação caímos numa integral que tem a forma

$$I = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} dt f(t) \delta(t - \tau), \quad (4.24)$$

que com a aplicação do limite $\varepsilon \rightarrow 0$ apresenta a seguinte solução

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} dt f(t) \delta(t - \tau) = f(\tau). \quad (4.25)$$

O problema surge quando não conhecemos a função $f(\tau)$ e temos que usar um aproximante. Não entraremos em detalhes a respeito dos aproximantes porque neste trabalho caímos no caso em que $f(t) = 1$, o que acarreta em $f(\tau) = 1$ (Viana, 1991).

4.3 Mapa Prototípico de Ding

Agora vamos aplicar o método do mapeamento estroboscópico ao protótipo de um oscilador não-linear bidimensional, que apresenta um ciclo limite estável quando não está sujeito a uma força externa. Este protótipo, o qual foi proposto por Ding, é descrito pelo sistema de equações diferenciais em coordenadas polares

$$\dot{r} = sr(1 - r^2), \quad (4.26)$$

$$\dot{\theta} = 1, \quad (4.27)$$

onde s é o coeficiente de amortecimento. O ciclo limite é um círculo de raio $\bar{r} = 1$.

Aplicando uma força externa periódica na direção do eixo x fazemos com que o sistema seja representado pelas equações

$$\dot{x} = sx(1 - x^2 - y^2) - y + 2\alpha \sum_n \delta(t - 2\pi n\beta), \quad (4.28)$$

$$\dot{y} = x + sy(1 - x^2 - y^2), \quad (4.29)$$

onde $\beta > 0$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Sendo que s é o parâmetro de dissipação e os parâmetros α e β correspondem à amplitude da força externa e à sua frequência, respectivamente.

Para realizarmos o mapeamento temos que definir algumas variáveis discretizadas (fig. 4.2):

$$x_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(2\pi n\beta + \varepsilon), \quad (4.30)$$

$$x_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x[2\pi(n+1)\beta + \varepsilon], \quad (4.31)$$

$$x_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x[2\pi(n+1)\beta - \varepsilon]. \quad (4.32)$$

De modo similar podemos obter a discretização das variáveis y , r e θ .

De início vamos trabalhar no intervalo $2\pi n\beta + \varepsilon < t < 2\pi(n+1)\beta - \varepsilon$, como estamos utilizando pulso, ocorre que neste intervalo não temos a atuação da força externa. Logo, integrando (4.26):

$$\int_{2\pi n\beta + \varepsilon}^{2\pi(n+1)\beta - \varepsilon} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_{2\pi n\beta + \varepsilon}^{2\pi(n+1)\beta - \varepsilon} s dt \quad (4.33)$$

$$\ln \frac{r^2}{1 - r^2} \Big|_{2\pi n\beta + \varepsilon}^{2\pi(n+1)\beta - \varepsilon} = 4\pi s\beta - 4s\varepsilon. \quad (4.34)$$

Substituindo os limites e aplicando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos usar as variáveis discretizadas, resultando

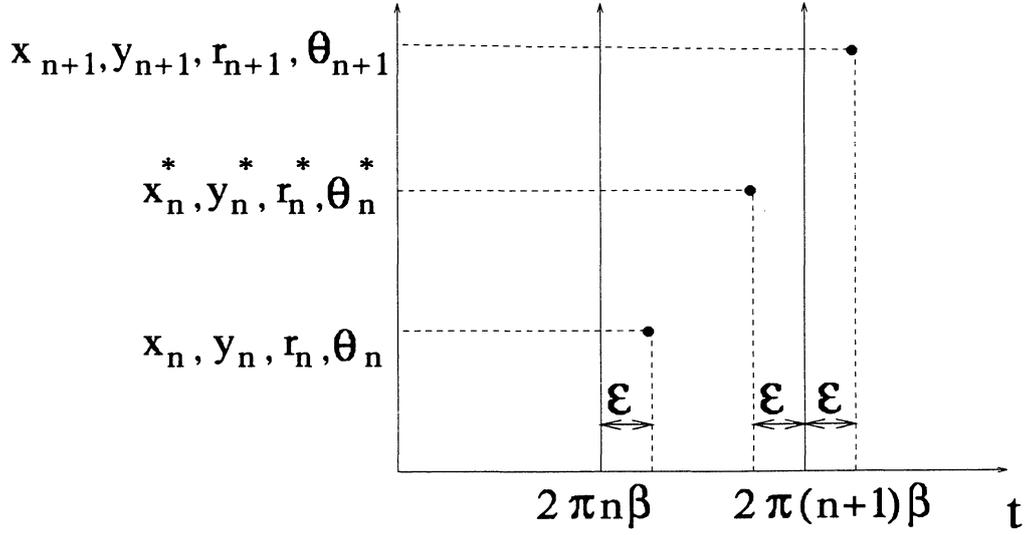


Figura 4.2: Variáveis discretizadas.

$$\ln \left[\frac{(r_n^*)^2}{1 - (r_n^*)^2} \frac{1 - r_n^2}{r_n^2} \right] = 4\pi s\beta \quad (4.35)$$

$$\frac{(r_n^*)^2(1 - r_n^2)}{r_n^2 - r_n^2(r_n^*)^2} = e^{4\pi\gamma}, \quad (4.36)$$

onde $\gamma = s\beta$, portanto

$$r_n^* = \frac{r_n}{[r_n^2 + (1 - r_n^2)e^{-4\pi\gamma}]^{1/2}}. \quad (4.37)$$

Ainda considerando o mesmo intervalo integramos a equação (4.27)

$$\int_{2\pi n\beta + \varepsilon}^{2\pi(n+1)\beta - \varepsilon} d\theta = \int_{2\pi n\beta + \varepsilon}^{2\pi(n+1)\beta - \varepsilon} dt, \quad (4.38)$$

que após a aplicação do limite $\varepsilon \rightarrow 0$, e com a utilização das variáveis discretizadas obtemos

$$\theta_n^* = \theta_n + 2\pi\beta. \quad (4.39)$$

O próximo passo é o de considerarmos o intervalo $t_1 = 2\pi(n+1)\beta - \varepsilon < t < t_2 = 2\pi(n+1)\beta + \varepsilon$, sendo que para este caso devemos levar em conta o pulso. Assim, integraremos a equação (4.28)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} [sx(1 - x^2 - y^2) - y + 2\alpha \sum_n \delta(t - 2\pi n\beta)] dt \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x[2\pi(n+1)\beta + \varepsilon] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x[2\pi(n+1)\beta - \varepsilon] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [sx(t_1)(1 - x^2(t_1) - \\ & y^2(t_1)) - y(t_1)]2\varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_n \delta(t - 2\pi n\beta) dt. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Através da definição das variáveis discretizadas, e como $x = r \cos \theta$, obtemos

$$x_{n+1} = r_n^* \cos \theta_n^* + 2\alpha. \quad (4.42)$$

Agora integraremos a equação (4.29)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{y} dt = \int_{t_1}^{t_2} [x + sy(1 - x^2 - y^2)] dt \quad (4.43)$$

$$y[2\pi(n+1)\beta + \varepsilon] - y[2\pi(n+1)\beta - \varepsilon] = [x + sy(t_1)(1 - x^2(t_1) - y^2(t_1))]2\varepsilon \quad (4.44)$$

$$y_{n+1} = y_n^*. \quad (4.45)$$

Por meio da relação $y = r \sin \theta$ a equação anterior toma a forma

$$y_{n+1} = r_n^* \sin \theta_n^*. \quad (4.46)$$

Portanto, encontramos o mapa bidimensional utilizando as equações (4.39), (4.42) e (4.46), sendo que para r_{n+1} obtemos:

$$r_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \quad (4.47)$$

$$r_{n+1} = [(r_n^* \cos(\theta_n + 2\pi\beta) + 2\alpha)^2 + (r_n^* \sin(\theta_n + 2\pi\beta))^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.48)$$

E para θ_{n+1}

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \quad (4.49)$$

$$\theta_{n+1} = \arctan \frac{r_n^* \sin(\theta_n + 2\pi\beta)}{r_n^* \cos(\theta_n + 2\pi\beta) + 2\alpha}. \quad (4.50)$$

4.4 Análise do Mapa Prototípico de Ding

O mapa bidimensional fornecido pelas relações (4.48) e (4.50) tem sua unicidade garantida pelo fato de que $\sin\theta_{n+1}$ e $\sin(\theta_n + 2\pi\beta)$ apresentam o mesmo sinal.

Trabalharemos com o caso de rápida relaxação, ou seja, quando $\gamma \rightarrow \infty$ e o sistema volta para o seu ciclo limite antes da próxima aplicação do pulso (fig. 4.3). Neste caso a equação (4.37) torna-se

$$r_n^* = 1, \quad (4.51)$$

o que faz com que tenhamos um mapa unidimensional

$$\theta_{n+1} = \arctan \frac{\sin(\theta_n + 2\pi\beta)}{\cos(\theta_n + 2\pi\beta) + 2\alpha}, \quad (4.52)$$

ao contrário do que tínhamos a princípio, que era um mapa bidimensional. O mapa (4.52) pertence à classe dos *mapas do círculo*, pois $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$, com $f : S^1 \rightarrow S^1$, onde S^1 é o círculo de raio unitário $-\pi < \theta \leq \pi$. No limite de rápida relaxação o sistema volta para o seu ciclo limite antes da próxima aplicação do pulso.

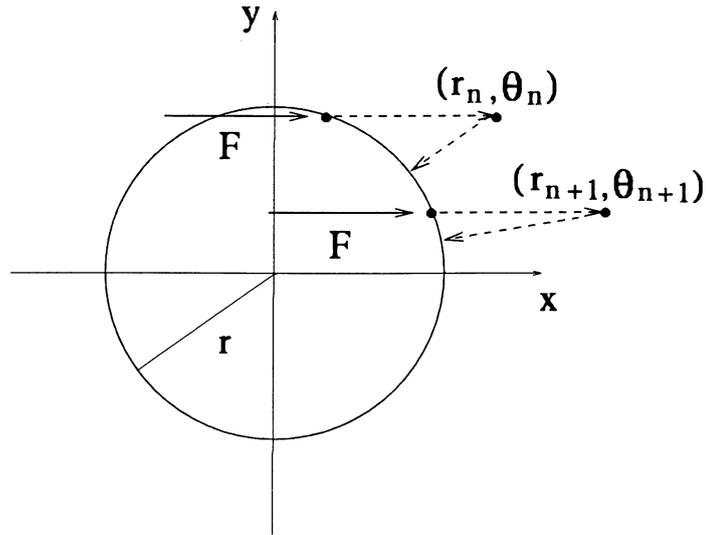


Figura 4.3: Oscilador proposto por Ding no qual é exercido uma força externa F na direção do eixo x . No limite de rápida relaxação o sistema retorna ao ciclo limite com $r = 1$ antes da aplicação da próxima força.

O mapa (4.52) apresenta dois parâmetros de controle, α e β , que podem admitir os valores $\alpha \geq 0$ e $0 < \beta \leq 1$. A construção do gráfico do espaço dos parâmetros $\beta \times \alpha$ (fig. 4.4) mostra uma estrutura complicada, que pode ser dividida em três regiões (fig. 4.5):

a) Região de força fraca: nesta região o sistema apresenta regimes periódicos e quase-periódicos, não havendo, portanto, a existência de comportamentos caóticos. Os regimes quase-periódicos têm a característica de possuírem o número de rotação (*winding number*) igual a um número irracional, enquanto que para órbitas periódicas o número de rotação é igual a um número racional. Nesta região encontramos as chamadas *línguas de Arnold* onde o número de rotação é racional, sendo que entre as *línguas* o número de rotação é irracional. O número de rotação W é definido para mapas do círculo como

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N (\theta_{j+1} - \theta_j). \quad (4.53)$$

O número de rotação para as *línguas de Arnold* também pode ser escrito como $W = p/q$ ($q \neq 0$), onde p é a periodicidade e q é o número de ciclos. O gráfico do número de rotação é usualmente chamado de *escada do demônio*, porque ele é crescente com o número infinito de passos, um para cada regime periódico (Caldas, Baptista, Ullmann, 1995). Na figura (4.6) notamos alguns passos que estão

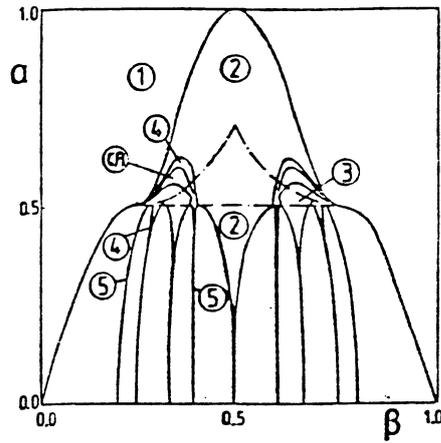


Figura 4.4: Localização de algumas órbitas periódicas (os números dentro dos círculos indicam a periodicidade) e regiões caóticas para o mapa prototípico de Ding (Ding, 1986).

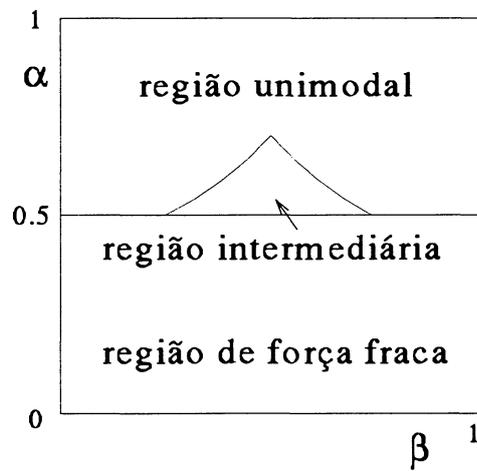


Figura 4.5: As três regiões no espaço de parâmetros (Ding, 1986).

associados a regimes periódicos, já no expoente de Lyapunov da figura (4.7) esses regimes podem ser visualizados através dos vales.

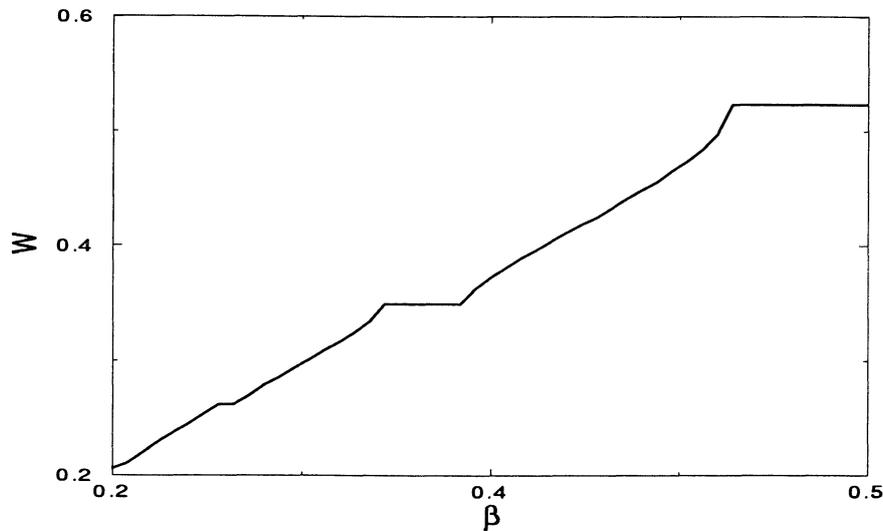


Figura 4.6: Diagrama do número de rotação para $\alpha = 0,45$.

b) Região unimodal: recebe o nome de unimodal porque o mapa apresenta somente um valor extremo (fig. 4.8). Os mapas unimodais são definidos num intervalo e têm um máximo dentro dele, dentre outras condições técnicas. Nesta região, onde a amplitude da força externa é alta, encontramos seqüências de órbitas periódicas que não dependem das condições iniciais, e também encontramos regimes caóticos em determinados locais do espaço de parâmetros (Ding, 1987).

Podemos observar algumas órbitas periódicas e comportamentos caóticos através dos diagramas de bifurcações dados pelas figuras (4.9) e (4.11). Na figura (4.9) fixamos o parâmetro β em 0,65 e consideramos o intervalo $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$, enquanto que na figura (4.11) fixamos $\alpha = 0,5$ e variamos β no intervalo que vai de 0,55 a 0,75. Utilizando os mesmos valores dos parâmetros destes diagramas construímos os respectivos gráficos do expoente de Lyapunov (fig. 4.10 e fig. 4.12), permitindo um diagnóstico sobre as regiões que apresentam regimes caóticos ($\lambda > 0$) e regulares ($\lambda \leq 0$) (Ullmann, Caldas, 1992).

c) Região intermediária: é a região de transição entre a região de força fraca e a unimodal, havendo somente a existência de comportamentos regulares. Na realidade, o que ocorre é o surgimento de uma variedade de novas órbitas periódicas.

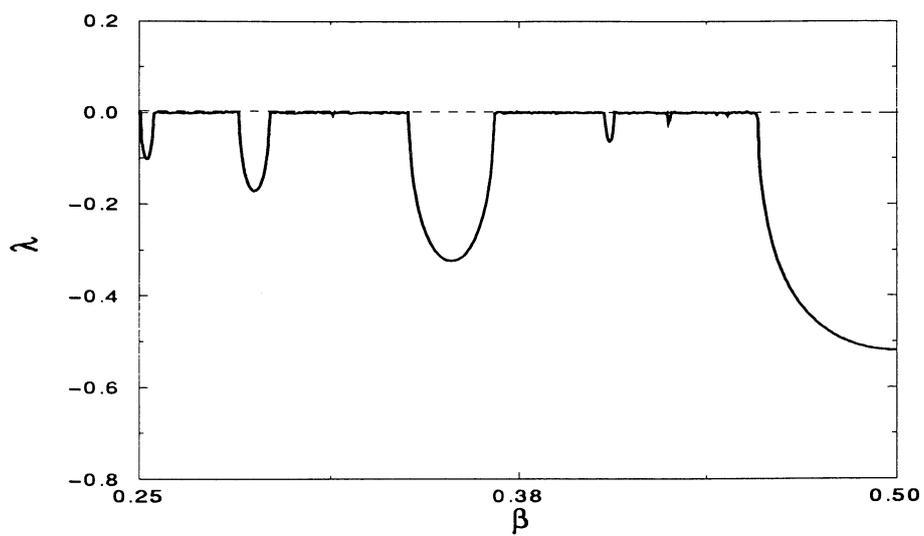


Figura 4.7: Expoente de Lyapunov para $\alpha = 0,45$.

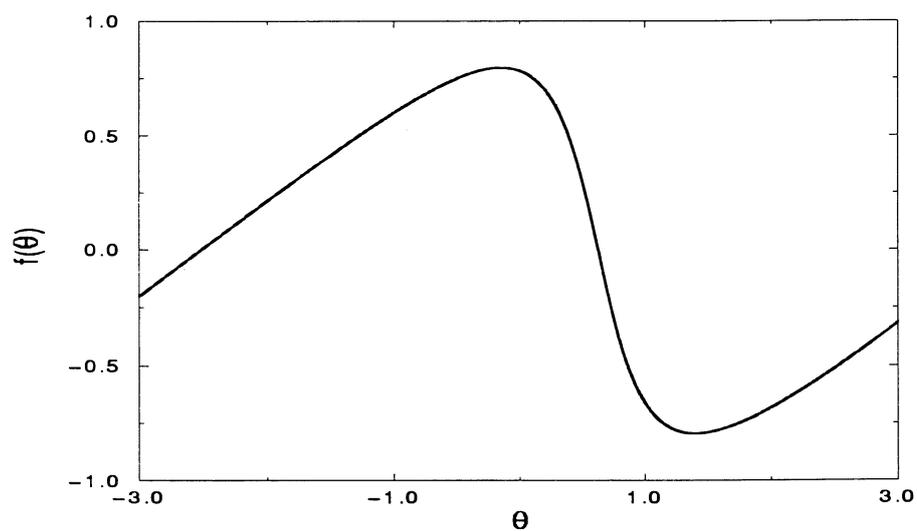


Figura 4.8: Diagrama de Lamerey para o mapa prototípico de Ding considerando $\alpha = 0,7$ e $\beta = 0,4$.

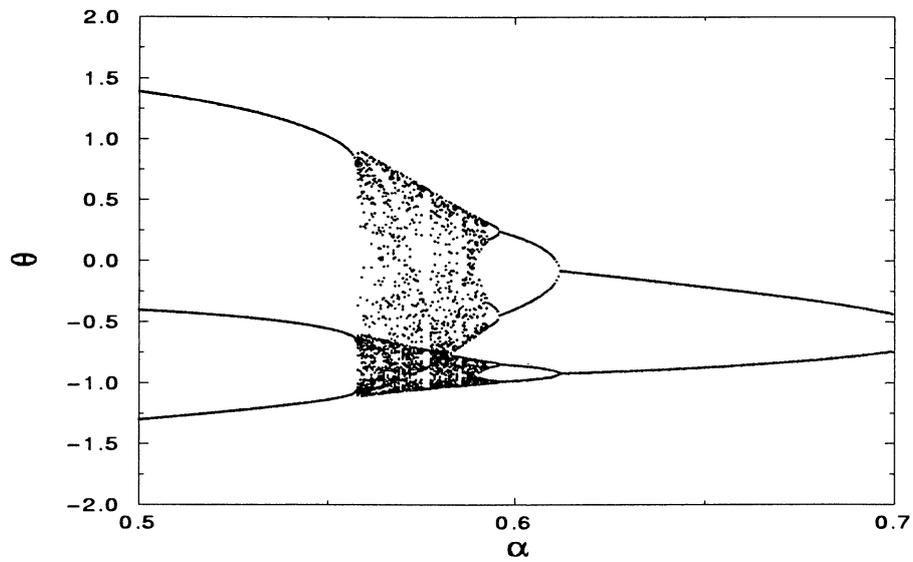


Figura 4.9: Diagrama de bifurcações considerando $\beta = 0,65$.

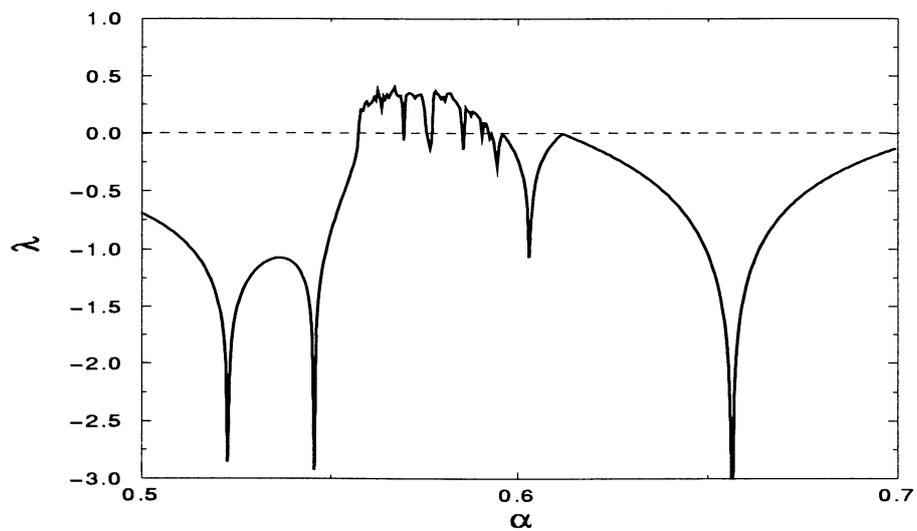


Figura 4.10: Expoente de Lyapunov com β igual a 0,65.

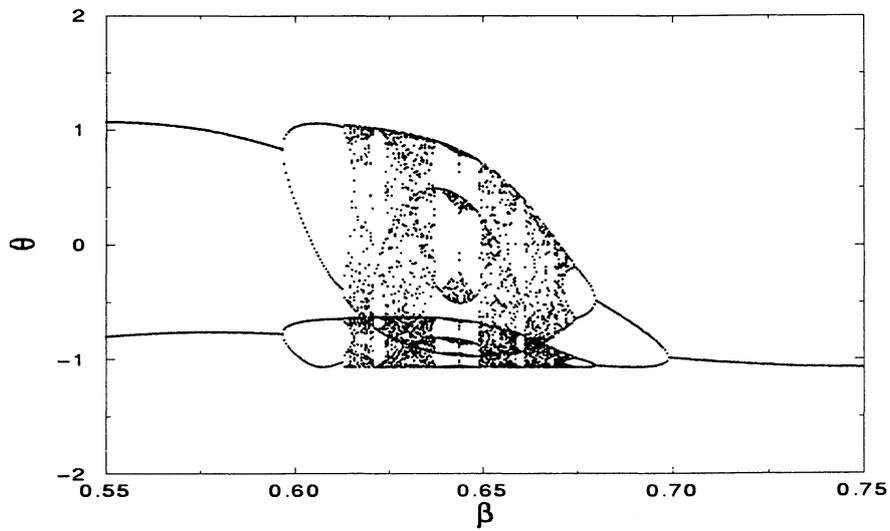


Figura 4.11: Diagrama de bifurcações para $\alpha = 0,57$.

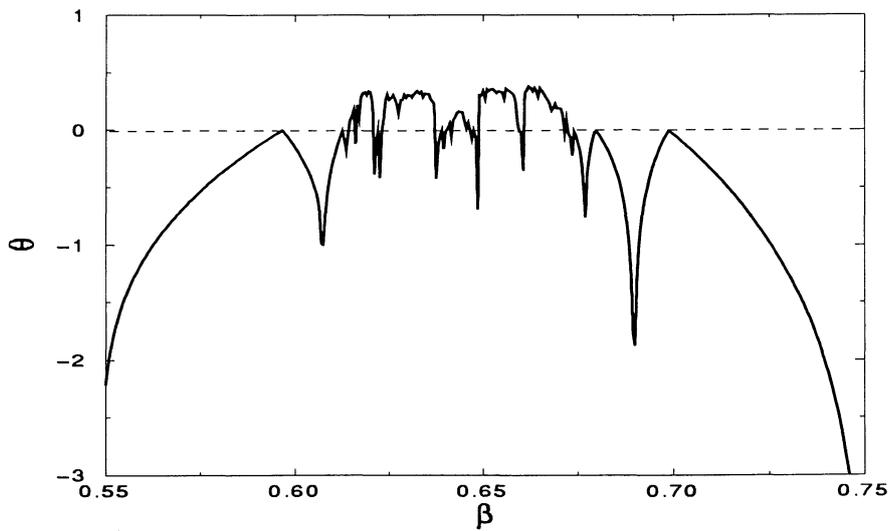


Figura 4.12: Expoente de Lyapunov fixando α em 0,57.

Capítulo 5

Mapas Prototípicos de Ding Acoplados na Rede

Neste capítulo acoplaremos os mapas prototípicos de Ding através do acoplamento local, onde o sítio é influenciado pelos sítios $i - 1$, i e $i + 1$. Dos vários casos de acoplamentos, inicialmente nos restringiremos ao laplaciano futuro

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \frac{\varepsilon}{2}[f(\theta_n^{i+1}) + f(\theta_n^{i-1})] \quad (5.1)$$

e ao unidirecional

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \varepsilon f(\theta_n^{i-1}), \quad (5.2)$$

onde

$$f(\theta) = \arctan \frac{\text{sen}(\theta + 2\pi\beta)}{2\alpha + \cos(\theta + 2\pi\beta)}. \quad (5.3)$$

A rede exige que se escolha condições iniciais e condições de contorno, as quais consideramos uma onda senoidal para condições iniciais e fixamos as extremidades $i = 1$ e $i = N$.

Para o mapa prototípico de Ding desacoplado, vimos no capítulo anterior que a unicidade é garantida pelo fato de que $\text{sen}(\theta_{n+1})$ e $\text{sen}(\theta_n + 2\pi\beta)$ têm o mesmo sinal. Mas quando o acoplamos ocorre que alguns sítios não obedecem a condição de unicidade. Para continuar garantindo a unicidade, após o acoplamento,

não adianta trabalhar com outra forma de acoplamento devido ao motivo de continuar ocorrendo este problema para determinadas regiões no espaço de parâmetros e para determinados valores da intensidade do acoplamento ε . Também não resolve somarmos π ao ângulo θ do sítio quando ele foge da unicidade porque isto altera o sinal da função seno e da cosseno, provocando alteração no resultado devido a modificação da operação aritmética realizada entre a função cosseno e a parte 2α do denominador da equação (4.50). Portanto, como não estamos em princípio preocupados com toda a região do espaço de parâmetros, resolvemos restringir o nosso estudo a uma determinada faixa que não apresenta problema de unicidade, que é delimitada no intervalo $0,545 \leq \alpha \leq 0,61$ para $\beta = 0,315$. Escolhemos esta região pelo fato dos mapas apresentarem, quando estão desacoplados, duplicação de período inversa atingindo o regime caótico (fig. 5.1). Esta duplicação é chamada inversa porque ocorre quando vamos diminuindo o valor do parâmetro de controle α . A figura (5.2) mostra o expoente de Lyapunov para este caso.

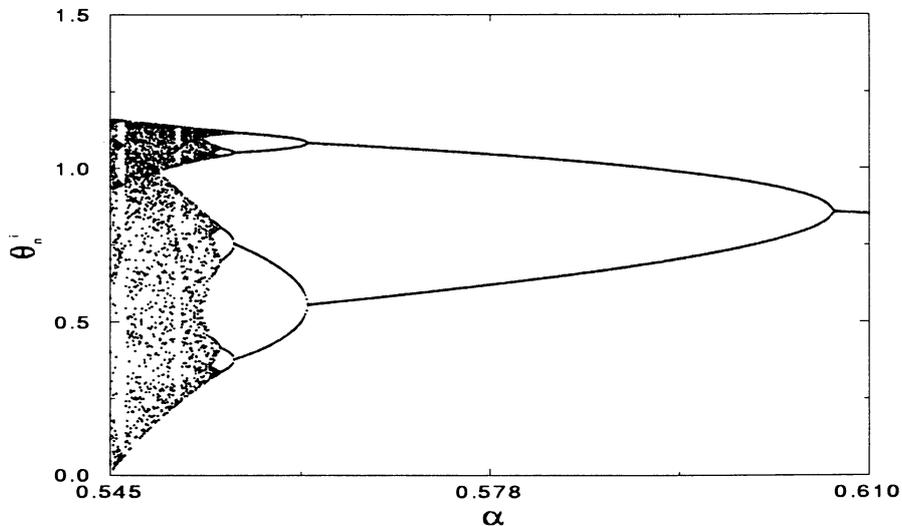


Figura 5.1: Diagrama de bifurcações para o mapa de Ding com $\beta = 0,315$.

5.1 Configuração dos Domínios

Para observarmos a configuração dos domínios utilizaremos o acoplamento laplaciano futuro, realizando 1032 iterações e desprezando 1000 iterações transientes e levando em conta que as extremidades da rede θ^1 e θ^N estarão fixadas em 0,0.

Para o caso onde $N = 128$, $\varepsilon = 0,1$, $\alpha = 0,56$, $\beta = 0,315$ e para

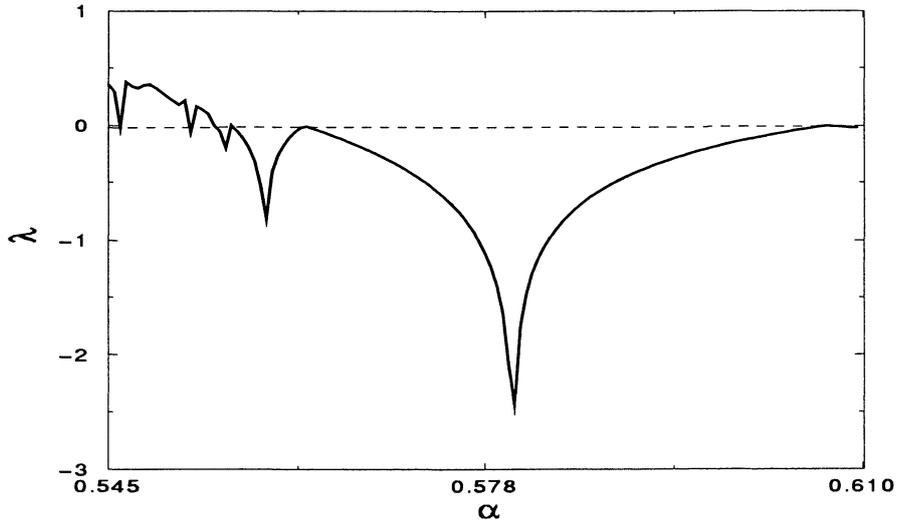


Figura 5.2: Expoente de Lyapunov para o mapa de Ding com $\beta = 0.315$.

condições iniciais numa onda senoidal, podemos perceber alterações nos domínios, com modificações nas condições iniciais. Logo, a figura (5.3) construída com as condições iniciais de $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi i N^{-1})$ apresenta domínios menores e em maior quantidade do que a figura (5.4) com $\theta_0^i = 0,5\text{sen}(2\pi i N^{-1})$, onde também aparecem mudanças na posição e quantidade de *kinks*. Este fato também foi observado na análise que fizemos do mapa logístico.

Agora variaremos o tamanho da rede com os mapas apresentando órbitas de período 8 quando estão desacoplados, o que corresponde a $\alpha = 0,554$. Quando efetuamos o acoplamento para $\varepsilon = 0,2$ e condições iniciais $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi i N^{-1})$ surgem sítios com periodicidade 2 para $N = 4$ (fig. 5.5). Em seguida aumentamos o tamanho da rede para $N = 8$ e ocorre uma duplicação do período dos sítios de 2 para 4 (fig. 5.6), o que se repete para $N = 16$ com o aparecimento de sítios com periodicidade 8 (fig. 5.7). Já para $N = 32$ (fig. 5.8) aparecem domínios que apresentam sítios com diferentes periodicidades, o que mostra a dependência do número de pontos fixos estáveis com a variação do tamanho da rede.

Podemos variar a não-linearidade do sistema através do parâmetro de controle α , já que β está fixo em 0,315. Assim, aumentando a não-linearidade do sistema com a diminuição do valor de α , mantendo $N = 128$ e $\varepsilon = 0,2$, notamos por meio da figura (5.9) e da figura (5.10) que ocorre uma diminuição no tamanho dos domínios e um aumento na quantidade de pontos fixos estáveis. Novamente, podemos explicar este comportamento a partir da análise do diagrama de bifurcações

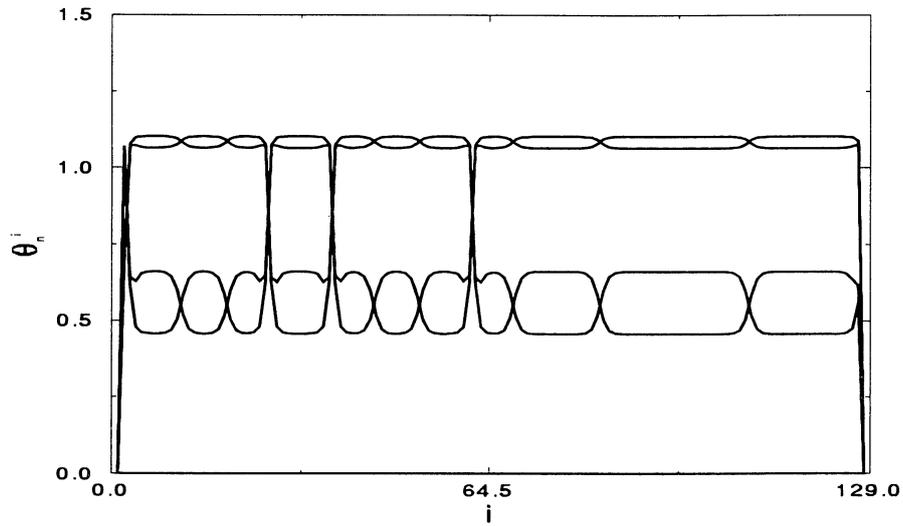


Figura 5.3: Sítio *versus* θ para $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi iN^{-1})$, $\alpha = 0,56$, $\varepsilon = 0,1$ e $N = 128$. A figura corresponde ao *overlap* de 32 iterações, a partir de 1000 iterações transientes desprezadas.

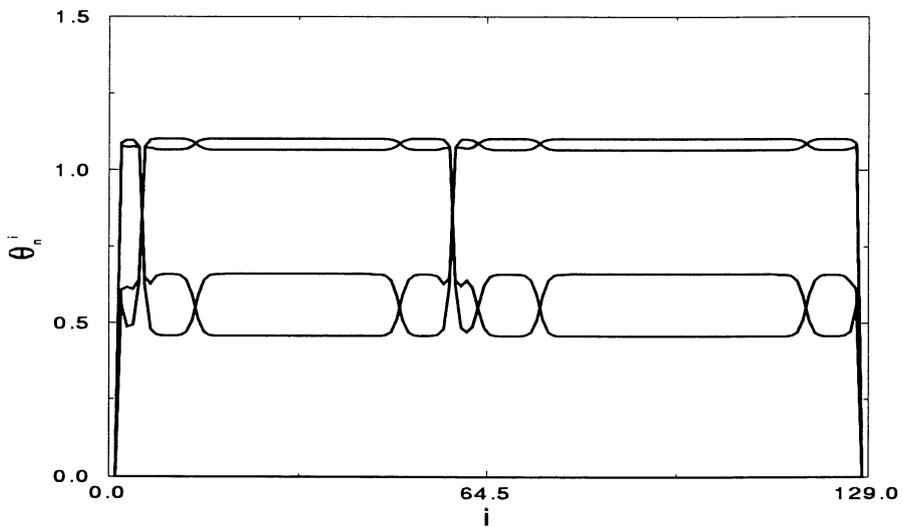


Figura 5.4: Gráfico considerando como condição inicial $\theta_0^i = 0,5\text{sen}(2\pi iN^{-1})$. Os demais parâmetros são os mesmos da figura anterior.

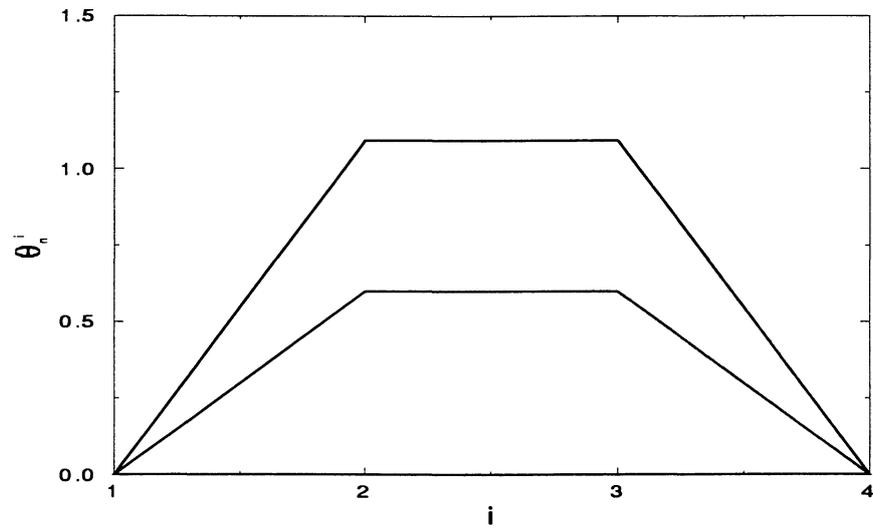


Figura 5.5: Acoplamento para $N = 4$, $\alpha = 0,554$ e $\varepsilon = 0,2$.

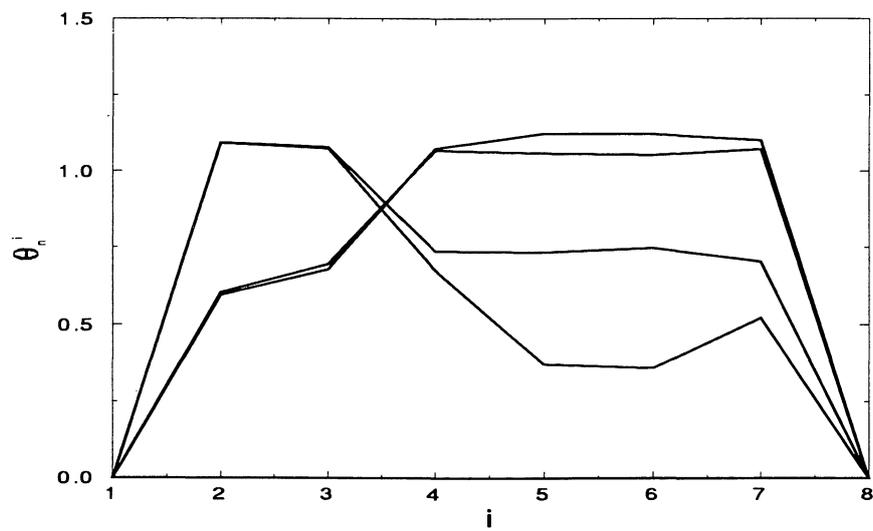


Figura 5.6: Sítio *versus* θ para $N = 8$.

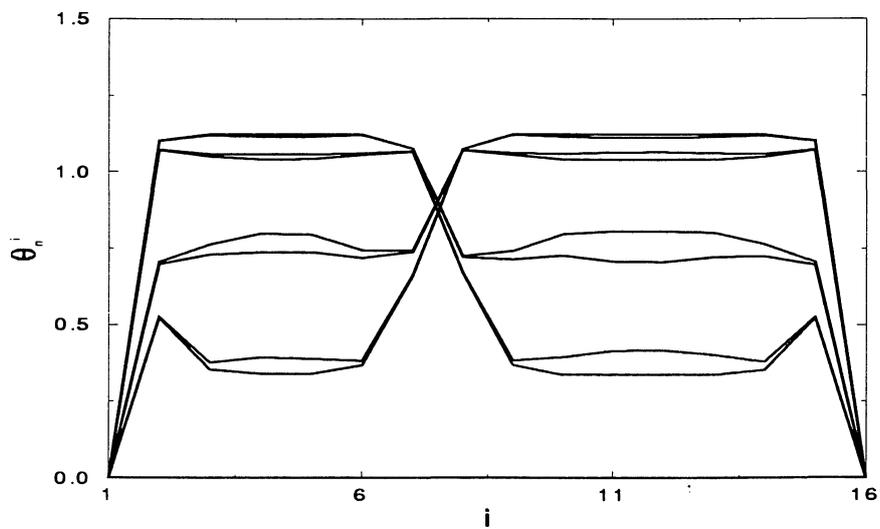


Figura 5.7: 16 sítios acoplados em rede.

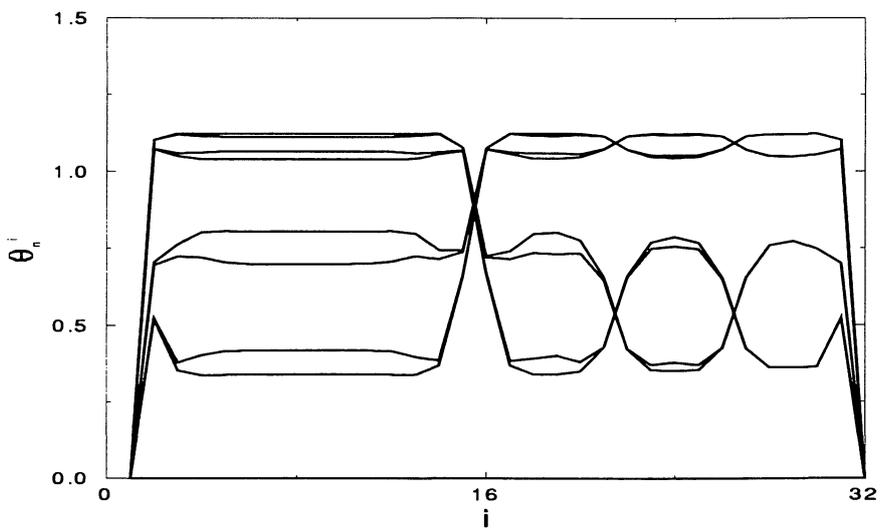


Figura 5.8: Gráfico para uma rede com $N = 32$.

para o mapa isolado, onde vemos que, à medida em que α aumenta, temos órbitas periódicas de período cada vez mais baixo. Pelo contrário, quando atingimos a região caótica existem domínios que apresentam sítios com uma dinâmica regular e outros com uma dinâmica caótica à medida em que diminuimos α , também pela análise de mapa isolado. Ao continuarmos aumentando a não-linearidade ocorre que todos os sítios da rede passam a apresentar regimes caóticos, provocando a inexistência de regiões com regimes periódicos e o surgimento de caos espaço-temporal.

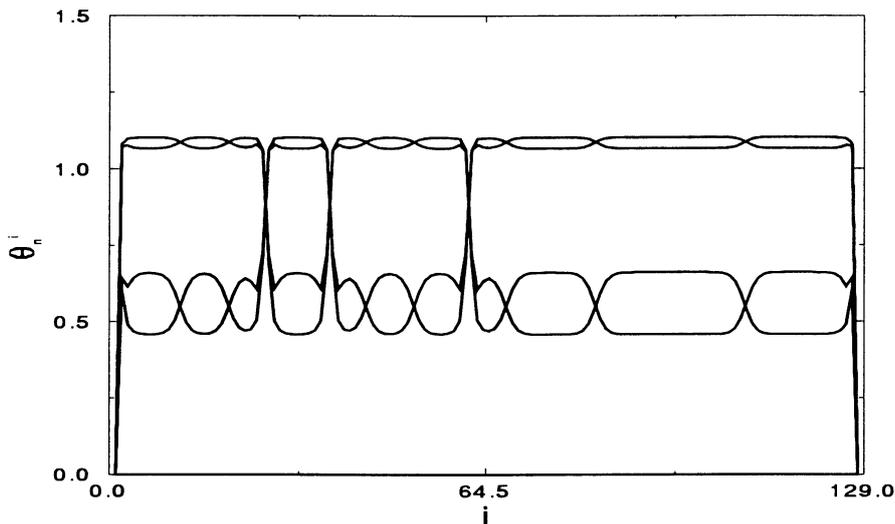


Figura 5.9: Rede de mapas considerando o parâmetro de controle α igual a 0,56, $N = 128$ e $\varepsilon = 0,2$.

A configuração dos domínios e dos *kinks* também apresenta dependência em relação ao valor do acoplamento ε . Analisamos esta dependência para o caso onde $\alpha = 0,56$ e $N = 128$, sendo que utilizamos $\varepsilon = 0,05$ para traçarmos a figura (5.11) e $\varepsilon = 0,3$ para a figura (5.12). Com o aumento do valor do acoplamento verificamos que a distância entre os *kinks* e o tamanho dos domínios aumentam, também ocorre a diminuição do número de pontos fixos estáveis com o aumento de ε . Isso indica que o aumento da intensidade do acoplamento tende a uniformizar a distribuição espacial dos domínios.

A variação do parâmetro de controle produz alterações no número de atratores da rede, o que ocasiona mudanças nos domínios e nos *kinks*. Isto pode ser visualizado por meio do histograma de bifurcações (fig. 5.13) e do diagrama $i \times \alpha$ (fig. 5.14), nos quais utilizamos $N = 128$ e $\varepsilon = 0,2$. Na figura (5.13) realizamos 1100 iterações com 1000 iterações desprezadas, sendo que em preto está indicado a alta probabilidade de obtermos θ , enquanto que a baixa probabilidade está em cinza.

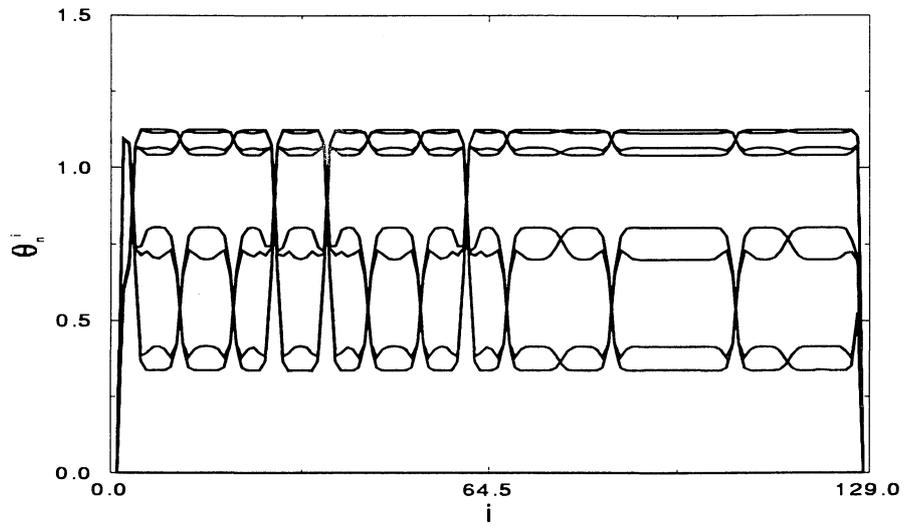


Figura 5.10: Idem à figura anterior para $\alpha = 0,5544$.

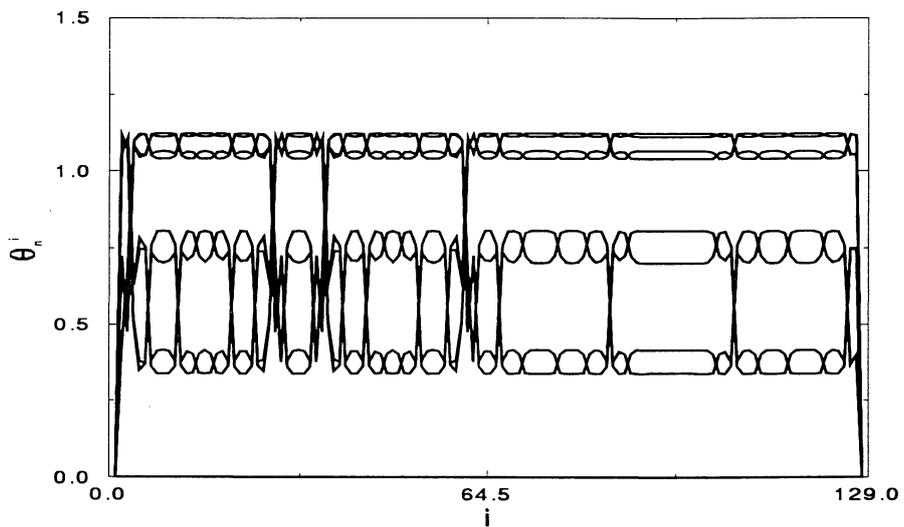


Figura 5.11: Valor do acoplamento ε igual a 0,05, e os demais consideramos $\alpha = 0,56$ e $\beta = 0,315$.

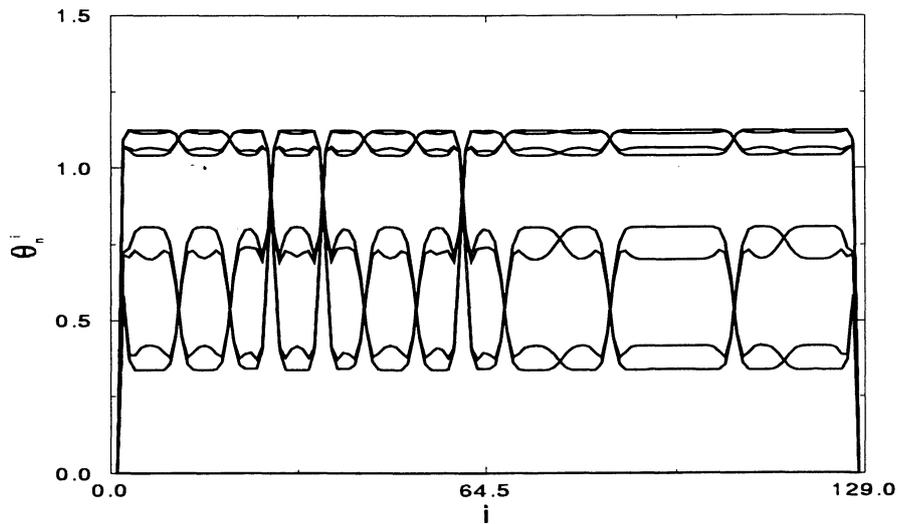


Figura 5.12: Gráfico construído utilizando $\varepsilon = 0,3$.

Os domínios contribuem para a alta probabilidade e os sítios que se encontram nas fronteiras dos domínios fornecem a baixa probabilidade. A figura (5.14) foi construída exatamente na 101^{a} iteração e ilustra como a estrutura sofre alterações através da mesma faixa dos parâmetros, sendo que estão representados os valores de θ em escala cinza. A escala começa do branco para o menor valor de θ e segue para o preto para o maior valor de θ . As características observadas lembram o caso do mapa logístico, com a diferença de que a cascata de bifurcações é inversa (com a diminuição de α).

5.2 Estruturas *Zigzags*

Uma grande classe de mapas acoplados em rede exibem estruturas *zigzags*, sendo que estas estruturas são caracterizadas pela condição

$$(x_n^{i+1} - x_n^i)(x_n^i - x_n^{i-1}) < 0. \quad (5.4)$$

A estrutura é observada em uma grande faixa dos valores do parâmetro quando é utilizado o acoplamento linear, sendo que também é possível observá-la em acoplamentos futuros para o caso onde a intensidade do acoplamento é fraca. Com o acoplamento futuro a instabilidade *zigzag* é suprimida, especialmente com a intensi-

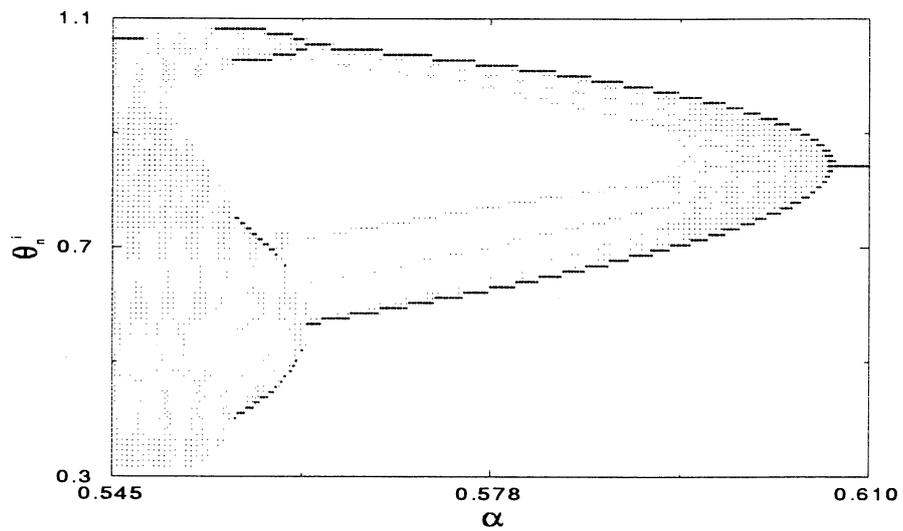


Figura 5.13: Histograma de bifurcações para um valor do acoplamento igual a 0,2.

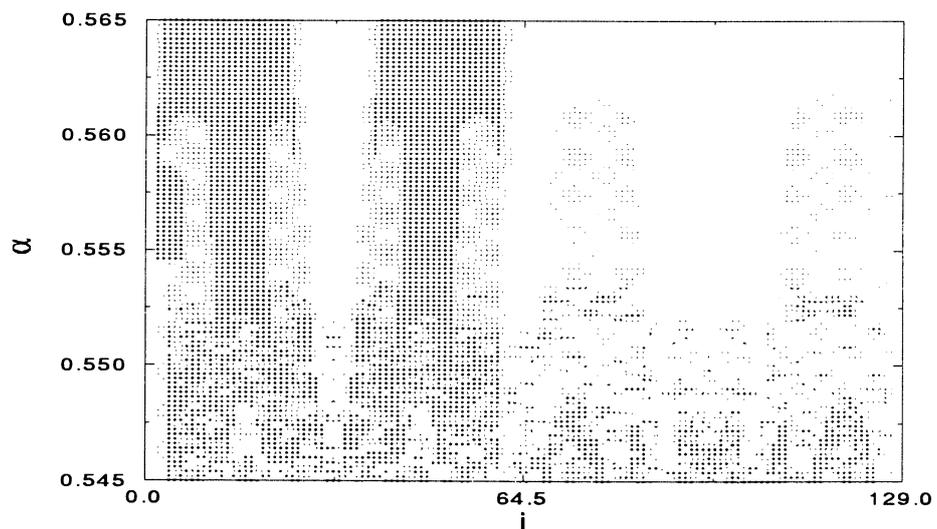


Figura 5.14: Gráfico de $i \times \alpha$ com os valores de θ no intervalo $0,325 < \theta < 0,575$ em branco, $0,575 \leq \theta < 0,95$ em escala cinza e $0,95 \leq \theta < 1,2$ em preto.

dade do acoplamento forte, já que os sítios vizinhos são mantidos em fase pela sua futura ou pré-iteração. As estruturas *zigzags* são importantes porque podem levar a uma rota de quase periodicidade para o caos (Crutchfield e Kaneko, 1987).

Os mapas prototípicos de Ding acoplados em rede apresentam estruturas *zigzags* para determinados valores do parâmetro α e do acoplamento ε , sendo que estes valores dependem da forma do acoplamento. Podemos observar estas estruturas pela figura (5.15), onde consideramos $N = 128$, $\alpha = 0,5544$, $\beta = 0,315$, $\varepsilon = 0,3$, $\theta_0^i = \sin(2\pi i N^{-1})$ e adotamos o acoplamento laplaciano linear que é dado por:

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \frac{\varepsilon}{2}[\theta_n^{i+1} + \theta_n^{i-1}], \quad (5.5)$$

onde $\theta_n^1 = \theta_n^N = 0,0$. Neste caso aparecem *kinks* que separam os domínios que exibem estruturas *zigzags*.

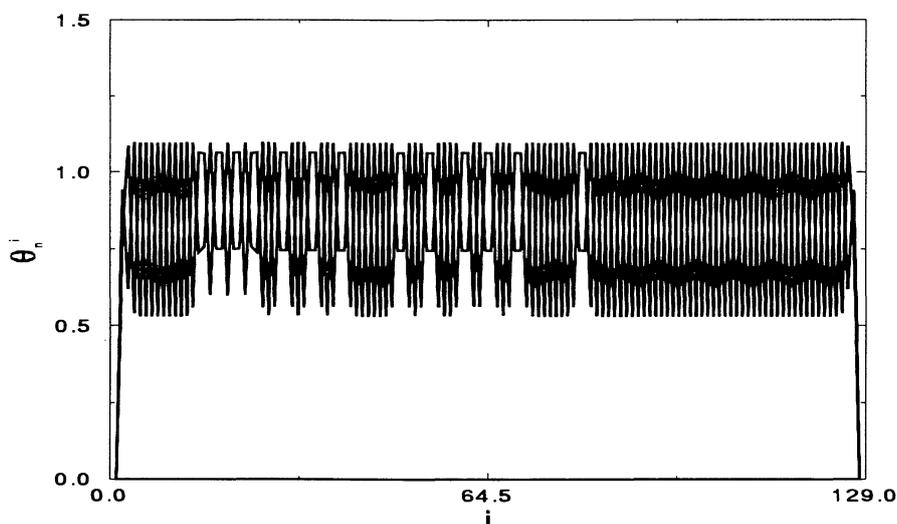


Figura 5.15: Estruturas *zigzags* considerando um acoplamento laplaciano linear.

Com o acoplamento laplaciano futuro verificamos o surgimento de estruturas *zigzags* para baixos valores do acoplamento ε e para o caso onde temos uma não-linearidade alta do sistema. Agora, além dos domínios que apresentam estruturas *zigzags* aparecem regiões com regimes caóticos, os quais denominaremos de defeitos. Através da figura (5.16) podemos ver tais defeitos tomando $\alpha = 0,5455$ e $\varepsilon = 0,075$. A caoticidade dos defeitos pode ser comprovada por meio do expoente

de Lyapunov, o qual foi calculado para os mesmos valores utilizados na construção da figura (5.16). Assim, nós podemos perceber que o diagrama do expoente de Lyapunov (fig. 5.17), no qual temos sítio *versus* expoente de Lyapunov, apresenta $\lambda > 0$ exatamente nos mesmos domínios onde aparecem os defeitos. Na figura (5.17) realizamos para cada sítio 1000 iterações e desprezamos as 300^{as} iterações. O expoente de Lyapunov para o caso de mapas acoplados é calculado utilizando-se

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M-1} \ln \left| \frac{d(\theta_{n+1}^i)}{d\theta_n^i} \right|, \quad (5.6)$$

onde para o acoplamento laplaciano temos

$$\frac{d(\theta_{n+1}^i)}{d\theta_n^i} = (1 - \varepsilon) f'(\theta_n^i), \quad (5.7)$$

com

$$f'(\theta) = \frac{1 + 2\alpha \cos(\theta + 2\pi\beta)}{1 + 4\alpha \cos(\theta + 2\pi\beta) + 4\alpha^2}. \quad (5.8)$$

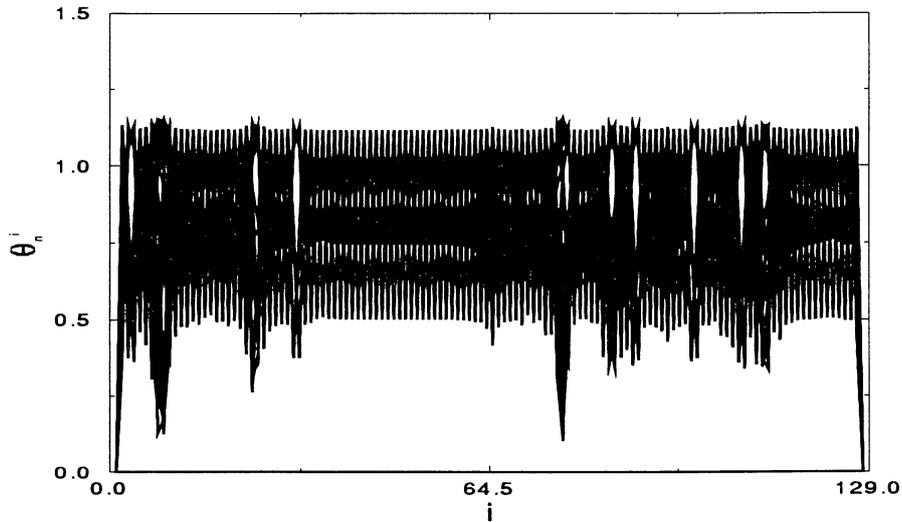


Figura 5.16: Estruturas *zigzags* apresentando defeitos.

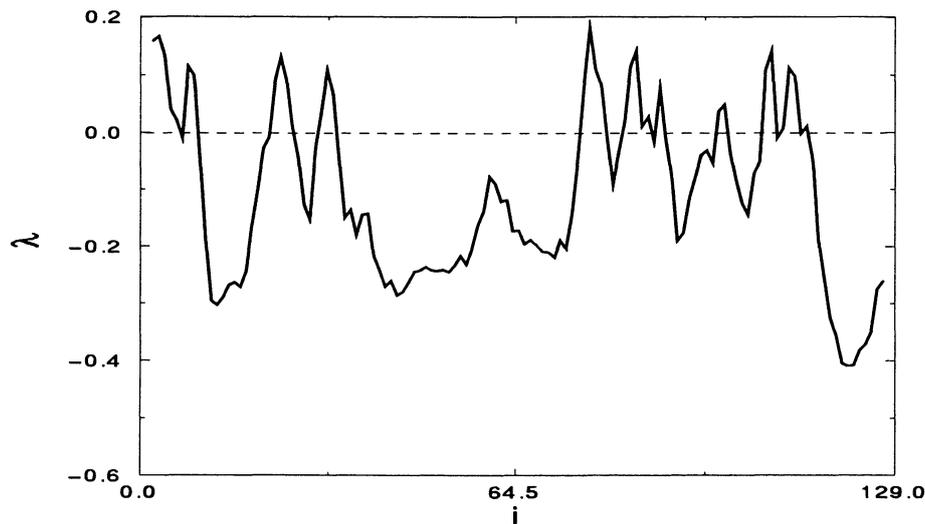


Figura 5.17: Sítio *versus* expoente de Lyapunov onde $\lambda > 0$ denota a posição dos defeitos.

Os defeitos podem propagar-se na rede, sendo que eles alteram sua forma e movimentam-se no espaço com o decorrer das iterações. Através do gráfico sítio versus iterações vemos esta propagação com o crescimento do número de iterações. Para construirmos a figura (5.18) utilizamos o acoplamento laplaciano futuro, com $\alpha = 0,5455$ e $\varepsilon = 0,075$, onde somente os defeitos são marcados em preto. Quando θ se encontra no intervalo de 0,1 a 0,45 marcamos os defeitos. Isto é possível devido ao fato de que os defeitos são caracterizados por estouros (*bursts*) e acentuamos de preto no gráfico os casos onde eles ocorrem e atingem o intervalo. Analisando a figura (5.18) percebemos nitidamente que os defeitos além de alterarem a posição na rede sofrem mudanças no seu tamanho, e também ocorrem variações no número de defeitos que propagam-se na rede.

Devido às mudanças que os defeitos sofrem com o passar das iterações, há a necessidade de delimitarmos um intervalo de iterações para o cálculo do expoente de Lyapunov, porque pode acontecer que em um determinado intervalo os defeitos sofrem alterações radicais, ou seja, alguns sítios mudem seus regimes de periódicos para caóticos ou vice-versa.

Caso aumentemos a não-linearidade do sistema ocorre um aumento no tamanho dos defeitos na rede provocando o surgimento de caos espaço-temporal e a supressão das estruturas *zigzags*. Isto pode ser visto através da figura (5.19) na qual utilizamos os mesmos valores da figura (5.16) com exceção do parâmetro α que

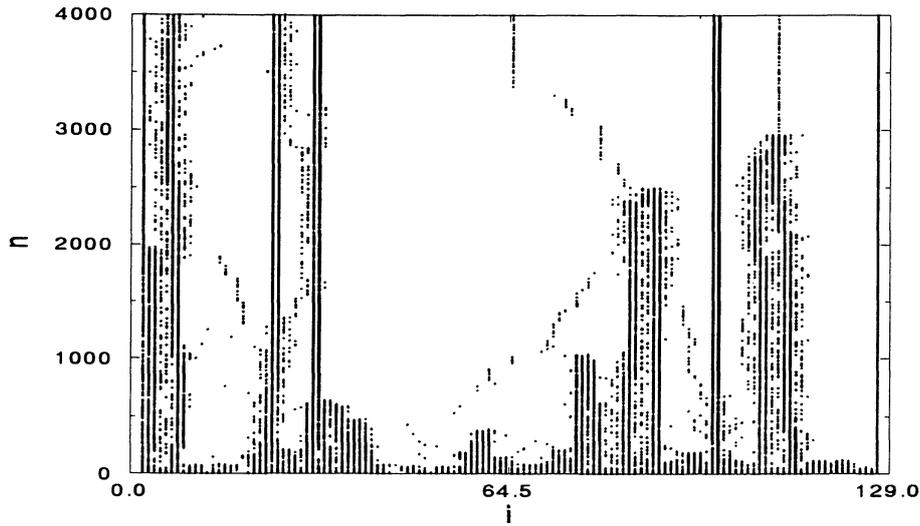


Figura 5.18: Alterações na forma e na posição de defeitos com o decorrer das iterações.

foi variado de tal forma que a não-linearidade do sistema foi aumentada acarretando a supressão das estruturas *zigzags* com o aparecimento de caos espaço-temporal.

5.3 Redes de Fluxo Aberto (*Open Flow Lattices*)

Agora veremos o caso onde a forma do acoplamento é assimétrica, o qual ocorre em modelos de redes de fluxos abertos e a forma do acoplamento é dada pela relação (5.9). Para uma classe de modelos de fluxos abertos o grau de acoplamento unidirecional é controlado pelo parâmetro de assimetria $\varphi = 0$, o que fornece a equação (5.2), onde o acoplamento é unidirecional indo somente da esquerda para a direita.

$$\theta_{n+1}^i = f(\theta_n^i) + \varepsilon[\varphi f(\theta_n^{i+1}) + (1 - \varphi)f(\theta_n^{i-1}) - f(\theta_n^i)]. \quad (5.9)$$

Um fenômeno que ocorre em redes de fluxos abertos é a duplicação espacial de períodos. Isto é observado à medida que vamos nos deslocando espacialmente pela rede, da esquerda para a direita, com alguns sítios apresentando uma determinada periodicidade. Após alguns passos os sítios começam a apresentar uma

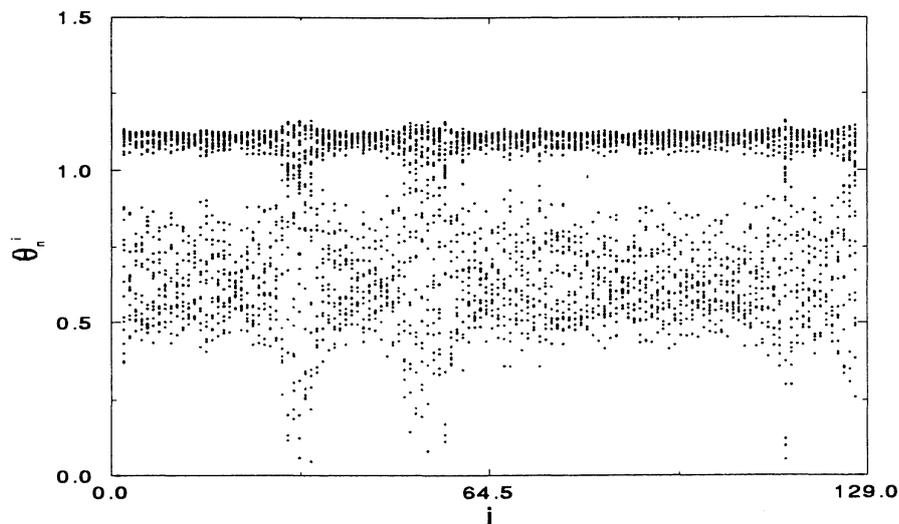


Figura 5.19: $i \times \theta_n^i$ mostrando a supressão de estruturas *zigzags* para $N = 128$, $\alpha = 0,5443$, $\beta = 0,315$, $\varepsilon = 0,075$ e $\theta_0^i = \text{sen}(2\pi i N^{-1})$.

periodicidade duplicada, e assim sucessivamente. A duplicação é finita, podendo terminar na extremidade da rede ou mesmo em sítios anteriores da extremidade.

A figura (5.20) foi construída considerando $\alpha = 0,554$ e $\varepsilon = 0,3$. Nela notamos que a duplicação ocorre a partir de um determinado sítio, e que se encerra com o término da rede. Já a figura (5.21), para $\alpha = 0,545$ e $\varepsilon = 0,5$, apresenta duplicação que vai culminar em uma região que exhibe sítios com periodicidades que quebram a duplicação. Quando realizamos 1032 iterações e desprezamos 1000 ocorreu que a figura (5.21) apresentou a característica de que os últimos sítios da rede tinham um comportamento caótico, mas o cálculo do expoente de Lyapunov (fig. 5.22) exibiu comportamento regular para estes sítios ($\lambda < 0$). Esta característica foi proveniente do número de iterações transientes desprezadas, sendo que ao efetuarmos 3032 iterações, desconsiderando 3000 iterações, conseguimos verificar com clareza a dinâmica regular dos sítios confirmada pelo expoente de Lyapunov. O fato é que a figura (5.21) mostra que o acoplamento unidirecional para a direita fez com que, a partir de um determinado ponto da rede, os sítios começassem a apresentar uma estrutura *zigzag*.

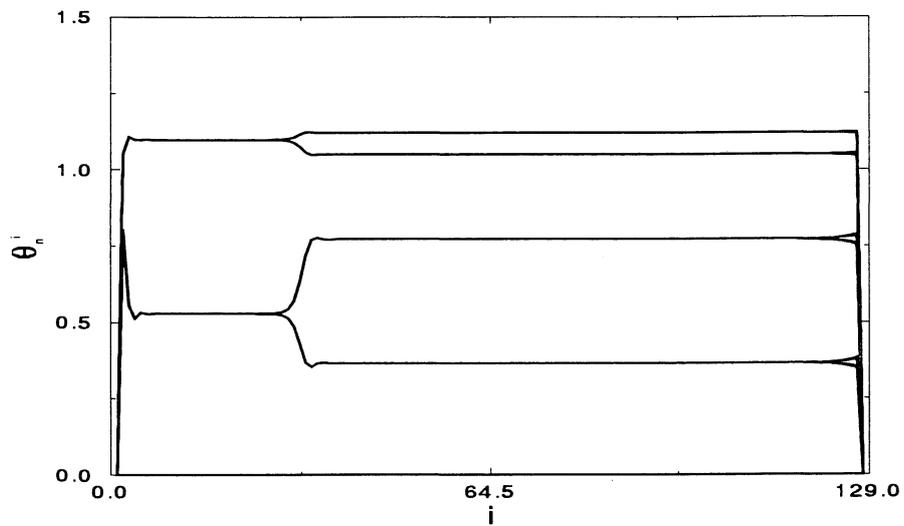


Figura 5.20: Acoplamento unidirecional para a direita considerando $\alpha = 0,554$, $\varepsilon = 0,3$ e 1032 iterações.

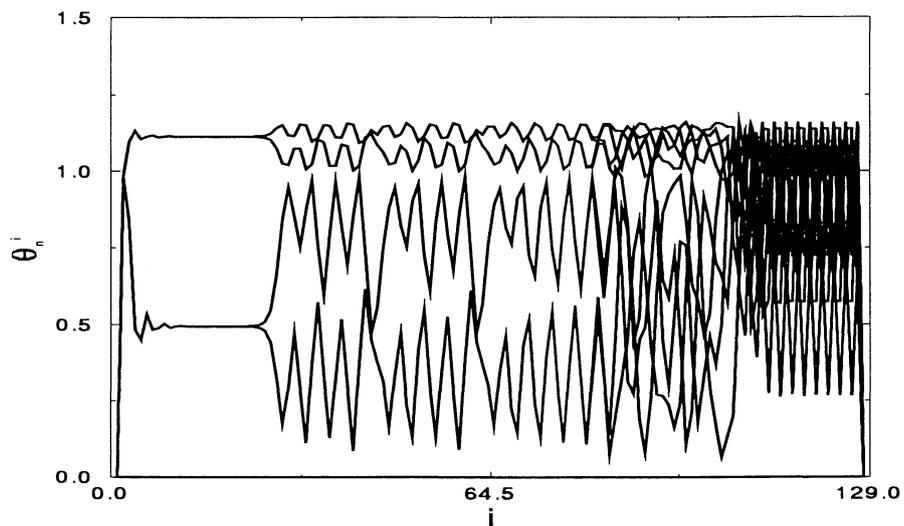


Figura 5.21: Idem a figura anterior para $\alpha = 0,545$, $\varepsilon = 0,5$ e 3032 iterações.

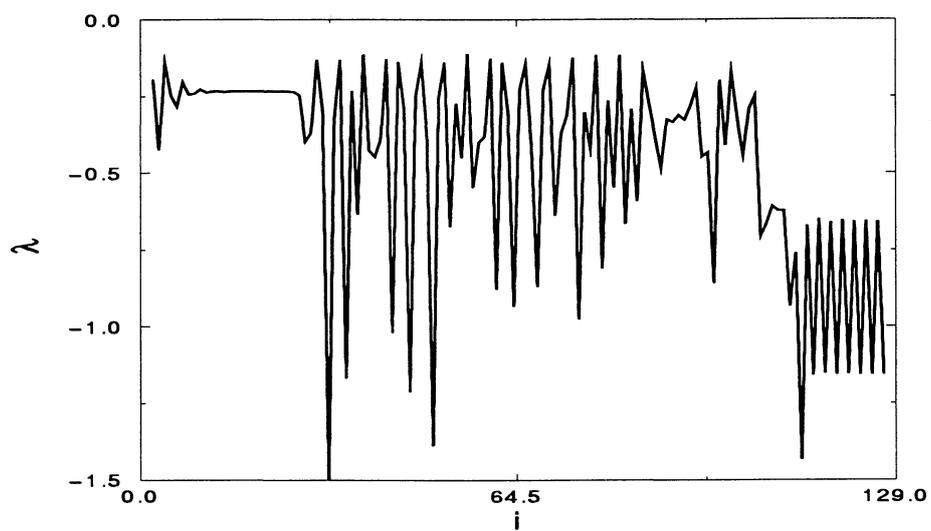


Figura 5.22: Expoente de Lyapunov para um acoplamento unidirecional com $\alpha = 0,545$ e $\varepsilon = 0,5$.

Capítulo 6

Sincronização de Mapas Acoplados na Rede

6.1 Sincronização Para Acoplamento Local

No acoplamento local a dinâmica de um sítio é afetada pelos seus sítios vizinhos, sendo que no nosso caso a dinâmica do sítio i é influenciada pelos sítios $i - 1$, i , $i + 1$ e admitiremos inicialmente para o estudo da sincronização o acoplamento laplaciano futuro.

Devido à característica do sítio, no acoplamento local, estar vinculado somente aos seus sítios vizinhos, trabalharemos com poucos mapas acoplados, sendo que usaremos o mapa prototípico de Ding no limite de rápida relaxação. Para realizarmos as análises sobre a sincronização faremos 499 iterações com os mapas desacoplados e exatamente na 500^a iteração efetuaremos o acoplamento. As extremidades ficarão fixas em 0,0, enquanto que tomaremos como condições iniciais $\theta_0^i = 0,0$.

Primeiramente analisaremos, através de gráficos de sítio versus θ_n^i , o que ocorre se acoplarmos 4 mapas prototípicos de Ding, não esquecendo que as extremidades θ^1 e θ^N são fixas em 0,0. Assim, o que vai ser importante para o nosso estudo é a dinâmica dos sítios $i = 2$ e $i = 3$. Ao considerarmos os mapas desacoplados, sendo um deles num regime caótico com $\alpha^2 = 0,545$ e o outro num regime regular de periodicidade 8 com $\alpha^3 = 0,5544$ (fig. 6.1), percebemos que quando os acoplamos utilizando $\varepsilon = 0,2$, os dois mapas passam a apresentar a mesma periodicidade (fig. 6.2). Isto mostra que além de ter sido possível sincronizar os dois mapas, também foi possível mudar a dinâmica do mapa, de caótica em regular, apenas através do acoplamento.

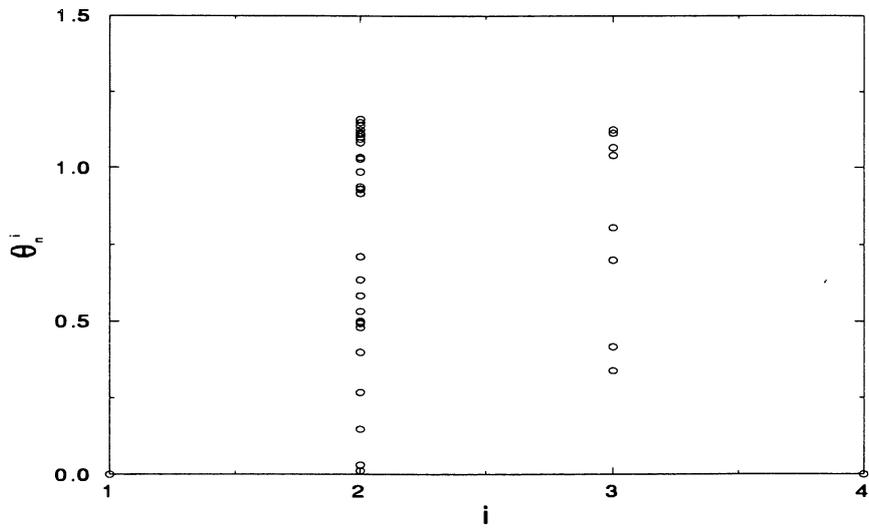


Figura 6.1: Gráfico de $i \times \theta_n^i$ onde $\alpha^2 = 0,545$, $\alpha^3 = 0,5544$ e $\varepsilon = 0,0$.

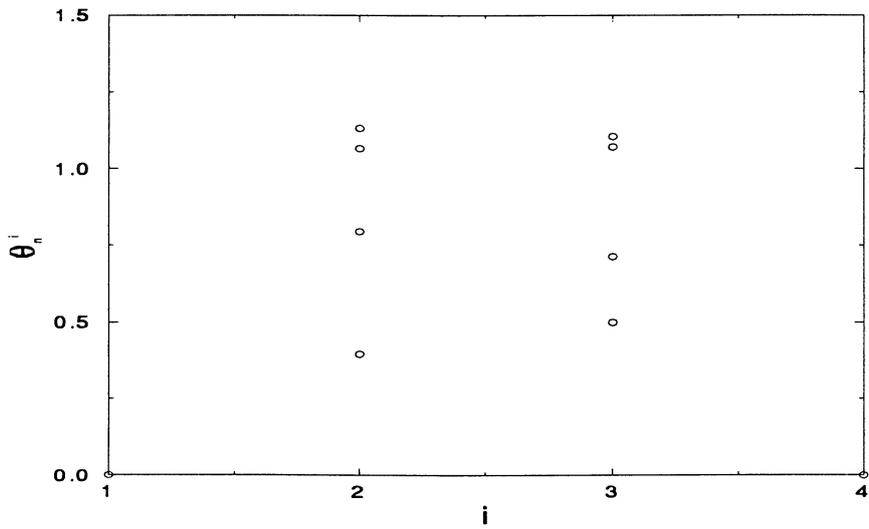


Figura 6.2: Idem à figura anterior exceto por $\varepsilon = 0,2$.

Da mesma forma, ao invés de acoplarmos um mapa com regime caótico a um regular, ao acoplarmos, com $\varepsilon = 0,2$, um mapa com periodicidade 2 a um mapa de periodicidade 8 notamos que os dois mapas continuam regulares, só que ambos passam a exibir um regime regular de período 4 (fig. 6.3).

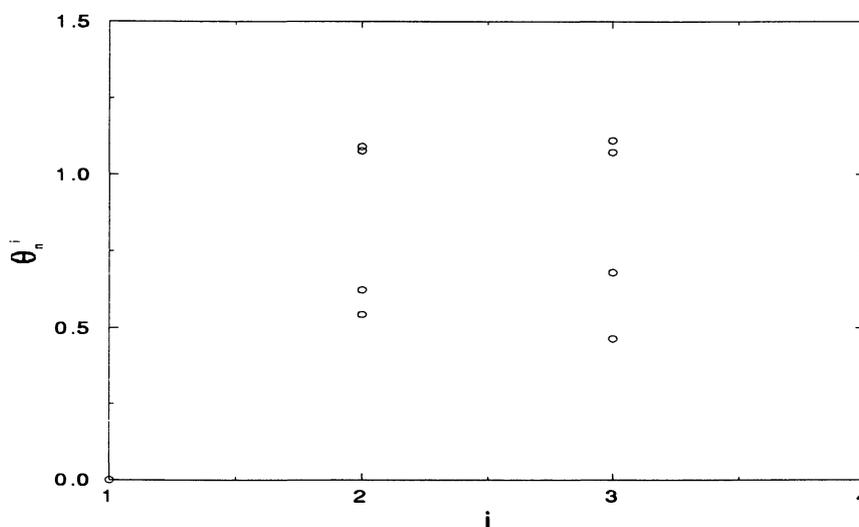


Figura 6.3: Acoplamento com $\varepsilon = 0,2$ de um mapa com período 2 com um de período 8, onde $\alpha = 0,58$ e $\alpha = 0,5544$, respectivamente.

Um mapa caótico também pode ser regularizado acoplado a ele um outro mapa caótico. A figura (6.4) que foi construída tomando $\alpha^2 = \alpha^3 = 0,545$ e $\varepsilon = 0,26$, mostra que não apenas um mapa caótico, mas os dois atingem o regime regular com o acoplamento e apresentam a mesma periodicidade (no caso, período 4).

As mesmas análises que foram realizadas anteriormente para $N = 4$ podem ser feitas para $N = 5$, só que neste caso são considerados o acoplamento de 3 mapas, pois as extremidades estão fixas. A figura (6.5), na qual foi considerado $N = 5$, $\varepsilon = 0,2$, $\alpha^2 = \alpha^4 = 0,545$ e $\alpha = 0,58$, permite-nos ver que os três mapas acoplados possuem uma dinâmica regular com período 4. O que ocorreu é que os dois mapas caóticos que ocupam os sítios 2 e 4 tornaram-se regulares por meio de seus acoplamentos com o mapa de período 2 que ocupa o sítio 3. Se acoplarmos 3 mapas com regime caótico temos que usar um elevado valor de acoplamento ε para conseguir que tornem-se regulares atingindo a mesma periodicidade.

Como um mapa caótico pode tornar-se regular utilizando o acoplamento com outro mapa, o que se deve conhecer é o valor do acoplamento para tornar

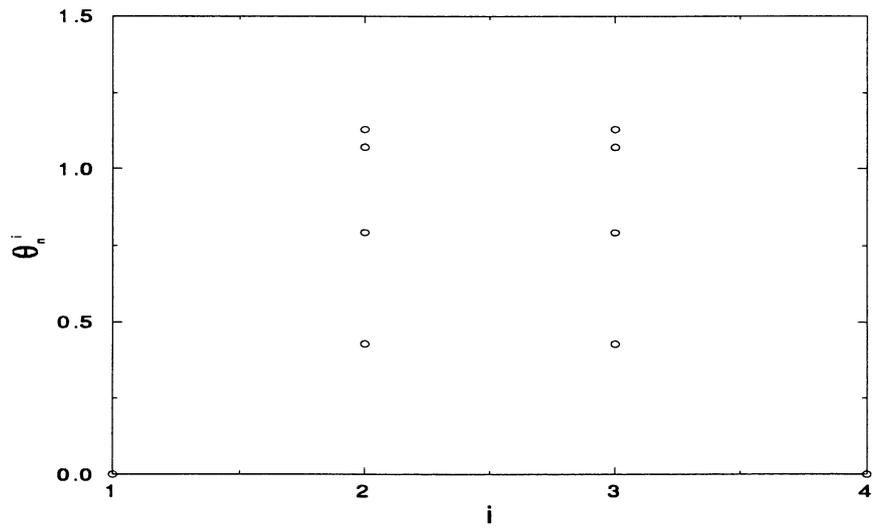


Figura 6.4: Dois mapas caóticos que quando acoplados passam a exibir uma dinâmica regular, onde temos $\alpha = 0,545$ e $\varepsilon = 0,26$.

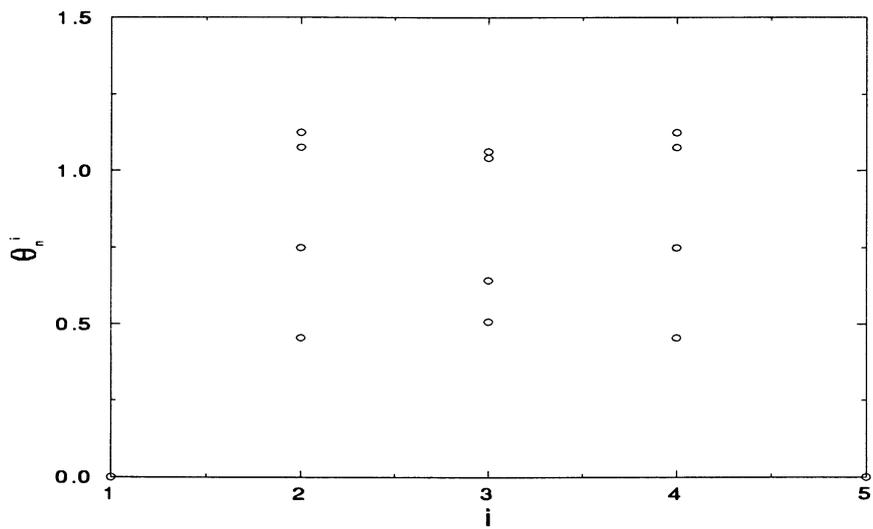


Figura 6.5: Gráfico de $i \times \theta_n^i$ considerando $N = 5$, $\alpha^2 = \alpha^4 = 0,545$, $\alpha^3 = 0,58$ e $\varepsilon = 0,2$.

esta regularização possível. Para encontrarmos os valores de ε que regularizem o mapa caótico, bem como, sincronizando-o com o outro mapa acoplado, nós utilizaremos o diagrama de bifurcações $\varepsilon \times \theta_n^i$. Acoplando um mapa caótico a um mapa de período 8 verificamos na figura (6.6), a qual foi construída para o sítio com o mapa caótico, que a partir de um determinado valor do acoplamento o regime caótico torna-se regular, sendo que neste gráfico consideramos $N = 4$, $\alpha^2 = 0,545$ e $\alpha^3 = 0,5544$. Notamos que a variação de ε não permite apenas a regularização do mapa caótico, mas também possibilita que se possa escolher a periodicidade. O expoente de Lyapunov (fig. 6.7) calculado para os mesmos dados usados na figura (6.6) mostra que o mapa caótico altera seu regime para periódico com o aumento do acoplamento. Também realizamos o acoplamento do mapa caótico com um mapa de período 2 e o mapa caótico com um mapa de período 4, e verificamos que o acoplamento com o mapa de período 2 faz com que seja possível que o regime caótico torne-se periódico com um valor de ε menor do que o valor obtido com os outros dois mapas de períodos 4 e 8.

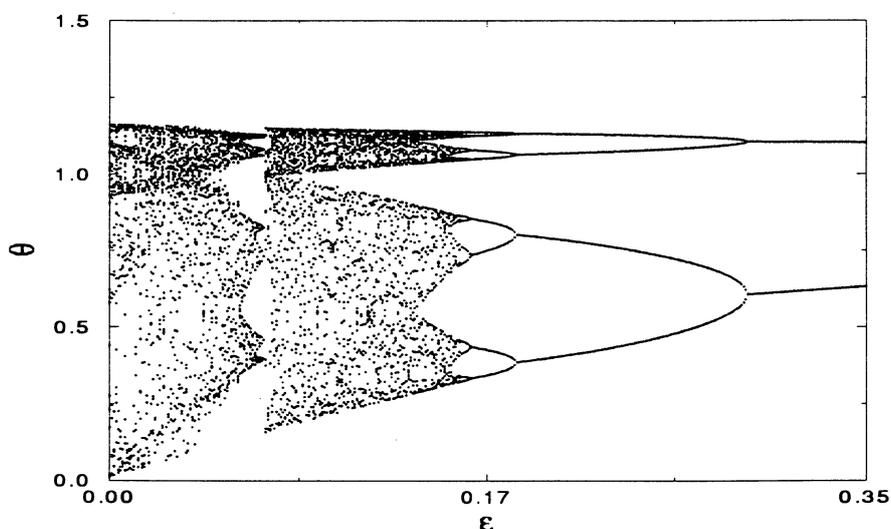


Figura 6.6: Diagrama de bifurcações para o mapa caótico utilizando $\alpha^2 = 0,545$ e $\alpha^3 = 0,5544$.

Quando acoplamos dois mapas que apresentam regimes caóticos, onde $\alpha^2 = \alpha^3 = 0,545$, o diagrama de $\varepsilon \times \theta_n^i$ (fig. 6.8) mostra que com o aumento do valor do acoplamento ε os dois mapas sincronizam numa dinâmica periódica. Como temos uma duplicação inversa de período nós podemos escolher a periodicidade com que os mapas sincronizem apenas variando o valor de ε .

O próximo passo é estudar o transiente que ocorre a partir do acopla-

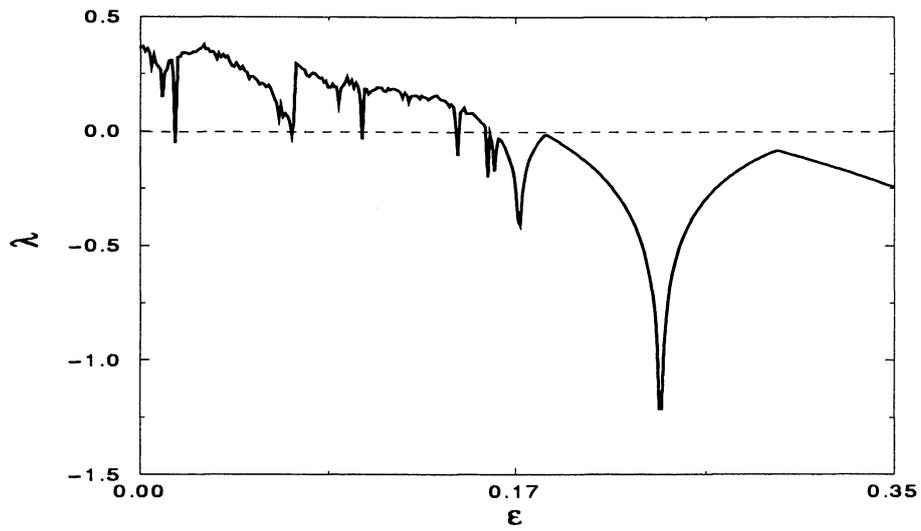


Figura 6.7: Expoente de Lyapunov mostrando os valores possíveis de ε para que o mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ torne-se regular quando acoplado a um mapa de período 8 com $\alpha^3 = 0,5544$.

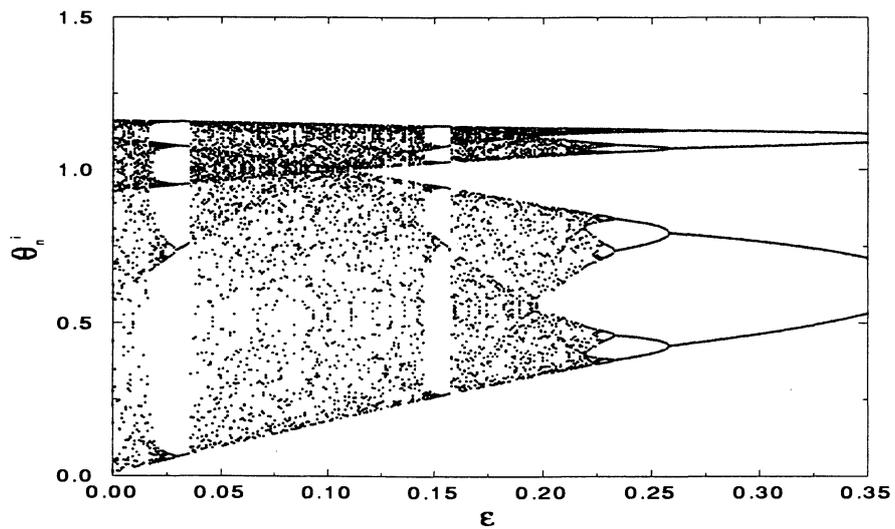


Figura 6.8: Diagrama de bifurcações para 2 mapas caóticos acoplados com $\alpha^2 = \alpha^3 = 0,545$, este diagrama é somente para o mapa caótico do sítio 2.

mento de um mapa que apresenta uma dinâmica caótica com um mapa de dinâmica periódica. Este transiente é definido como o número de iterações para que o mapa com regime caótico atinja o regime periódico. Nós realizamos 499 iterações com os mapas desacoplados e exatamente na 500ª iteração quando é feito o acoplamento nós começamos a contar o transiente. O gráfico de $n \times \theta_n^i$ permite-nos observar o transiente do sítio 2, que é ocupado pelo mapa com uma dinâmica caótica, sendo que na figura (6.9) podemos ver o transiente de um mapa com regime caótico acoplado a um mapa com período 4. Nesta situação tomamos $\alpha^2 = 0,545$, $\alpha^3 = 0,56$, $\varepsilon = 0,2$ e observamos um transiente de aproximadamente 70 iterações. Se alterarmos o valor do acoplamento ε , o número de iterações transientes varia. Isto é verificado quando pegamos as mesmas condições da figura (6.9) e aumentamos ε , o que produz mudanças no transiente.

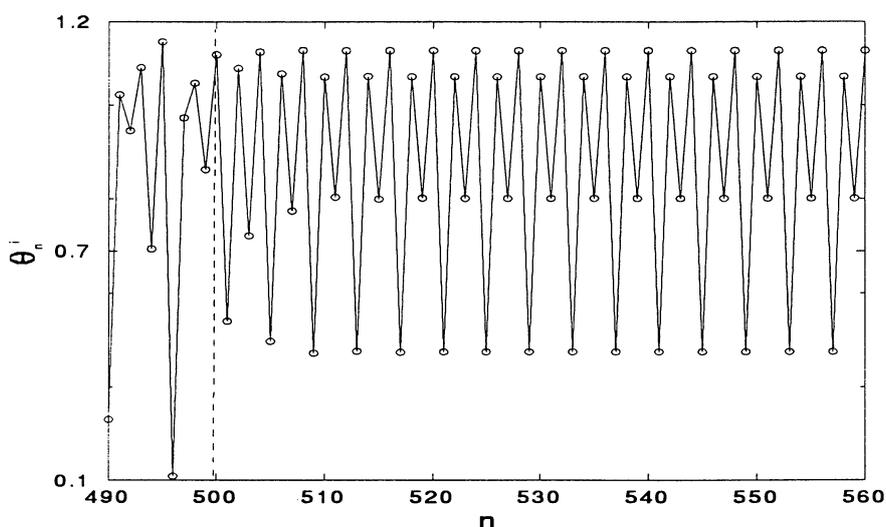


Figura 6.9: Transiente do mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ acoplado a um mapa de período 4 com $\alpha^3 = 0,56$, onde o acoplamento ε é igual a 0,2. O transiente começa a partir da 500ª iteração.

Utilizando os mesmos valores da figura (6.9) e mudando apenas o acoplamento de um mapa de período 4 com um mapa de período 2 ($\alpha = 0,58$) e depois um de período 8 ($\alpha = 0,5544$), verificamos que o número de iterações para que o regime caótico atinja o periódico é menor para o acoplamento com o mapa de período 2. Assim, o transiente vai aumentando de acordo com o aumento da periodicidade do mapa que é acoplado com o mapa que exibe comportamento caótico.

A característica de que o transiente apresenta uma dependência em

relação ao acoplamento ε pode ser vista por meio do gráfico do número de iterações transientes $\tau \times \varepsilon$. Construímos este gráfico (fig. 6.10) acoplado um mapa com regime caótico a um mapa com um período igual a 2, sendo $\alpha^2 = 0,545$ e $\alpha^3 = 0,58$, respectivamente. Observamos que o transiente do regime caótico para o periódico é maior quando o valor do acoplamento está próximo dos pontos de bifurcações existentes nos diagramas de $\varepsilon \times \theta_n^i$, enquanto que o transiente é menor para os valores de ε afastados dos pontos de bifurcações.

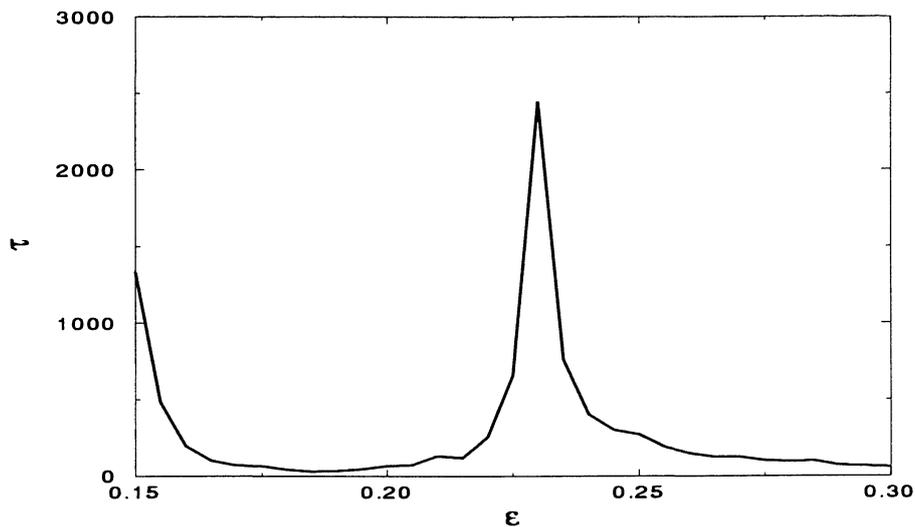


Figura 6.10: Gráfico mostrando o número de iterações transientes para o mapa caótico com $\alpha^2 = 0,545$ acoplado a um mapa de período 2 com $\alpha = 0,58$.

6.2 Sincronização Para Acoplamento Global

Enquanto que no acoplamento local a dinâmica do sítio é determinada apenas pelos sítios vizinhos, no acoplamento global a dinâmica é determinada por todos os sítios da rede. O acoplamento global do tipo *campo médio* é uma das possibilidades (Shinbrot, 1994). Acoplaremos os mapas prototípicos de Ding considerando duas formas de acoplamento global linear:

$$\theta_{n+1}^i = f(\theta_n^i) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N \theta_n^j \quad (6.1)$$

e o futuro:

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(\theta_n^j), \quad (6.2)$$

sendo

$$f(\theta) = \arctan \frac{\text{sen}(\theta + 2\pi\beta)}{2\alpha + \cos(\theta + 2\pi\beta)}. \quad (6.3)$$

O que se pode perceber pelos acoplamentos adotados é que a dinâmica do sítio i é afetada por uma média dos valores de θ dos demais sítios, sendo que esta média pode ser aumentada ou diminuída por meio do valor do acoplamento ε .

De início trabalharemos com o acoplamento (6.1) para uma rede onde consideramos valores dos parâmetros α e β , tais que os mapas apresentem regimes caóticos quando desacoplados. Temos como objetivo sincronizar todos os mapas da rede em órbitas estáveis através do acoplamento. Mas, surgem problemas de unicidade, os quais já foram mencionados no capítulo anterior. Este problema de unicidade faz com que tenhamos que nos limitar à determinados valores de ε para realizar a sincronização. Sendo assim a sincronização é possível, só que restrita a certos intervalos de parâmetros. A figura (6.11) mostra alguns valores de ε que são possíveis para realizarmos a sincronização sem termos problemas de unicidade. Nesta figura consideramos $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\theta_0^i = 0,5 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$ e realizamos 1032 iterações com 1000 iterações desprezadas. Notamos que a sincronização é alcançada, o que pode ser visto porque estão marcados na figura os valores de θ para todos os sítios da rede. Existe um transiente até que todos os mapas estejam sincronizados e podemos ver claramente a existência do transiente nas figuras (6.12) e (6.13). Na figura (6.12) consideramos $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,03$ e observamos quando os mapas sincronizam, que a cada iteração alguns mapas assumem um determinado θ e o restante dos mapas outro valor de θ , mas todos apresentam a mesma periodicidade e com os mesmos valores para os pontos fixos estáveis. Já na figura (6.13), onde realizamos as mesmas considerações anteriores exceto por ε , que agora é igual a 0,035, observamos que a cada iteração, após a sincronização, todos os mapas ocupam o mesmo valor de θ ao descreverem suas órbitas periódicas.

Usando os mesmos dados das figuras (6.12) e (6.13) calculamos os expoentes de Lyapunov que estão representados nas figuras (6.14) e (6.15), respectivamente. Os gráficos de sítio *versus* expoente de Lyapunov mostram que todos os mapas tornam-se regulares com o acoplamento.

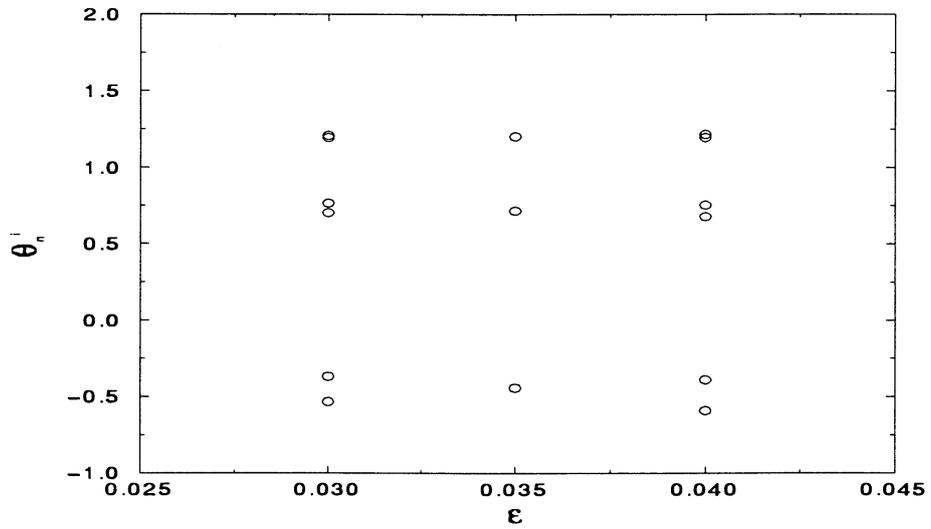


Figura 6.11: Gráfico mostrando 3 valores possíveis para ϵ considerando $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e para condições iniciais $\theta_0^i = 0,5 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$.

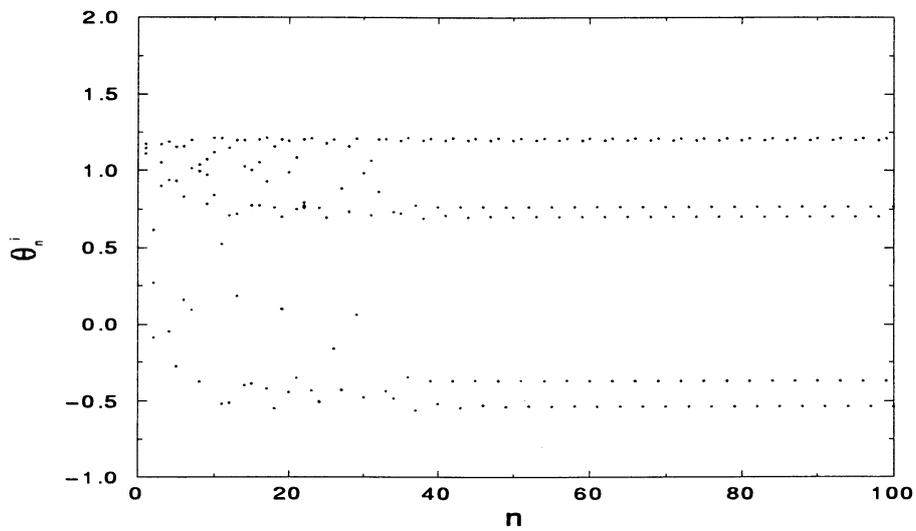


Figura 6.12: $n \times \theta_n^i$ para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\epsilon = 0,03$.

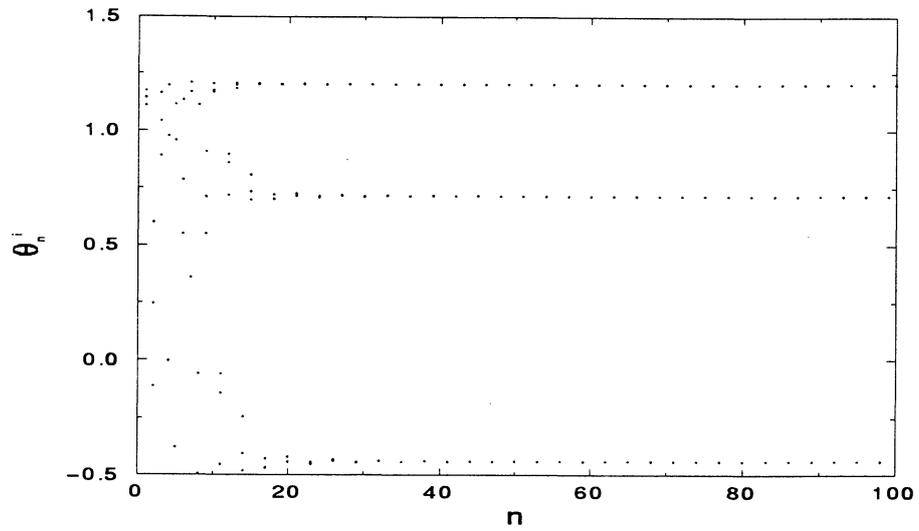


Figura 6.13: Idem à figura anterior para $\varepsilon = 0,035$.

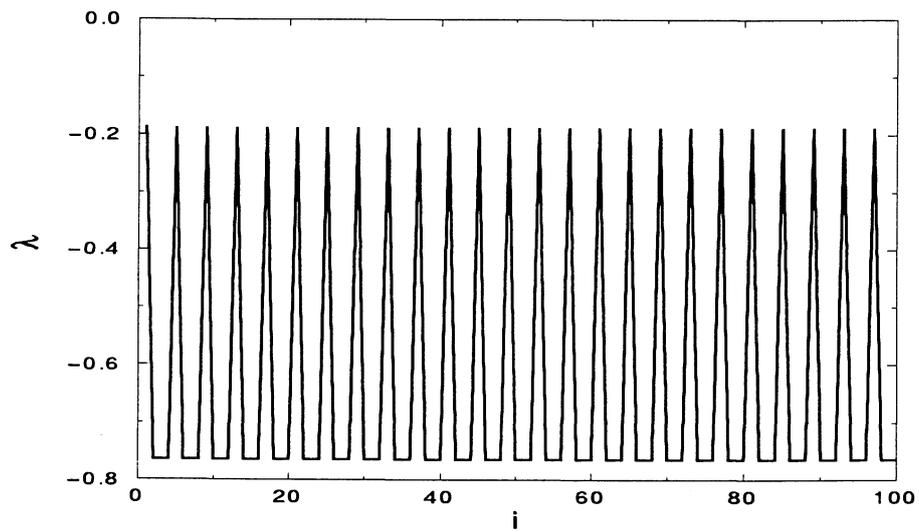


Figura 6.14: Expoente de Lyapunov mostrando a periodicidade dos sítios com $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,03$.

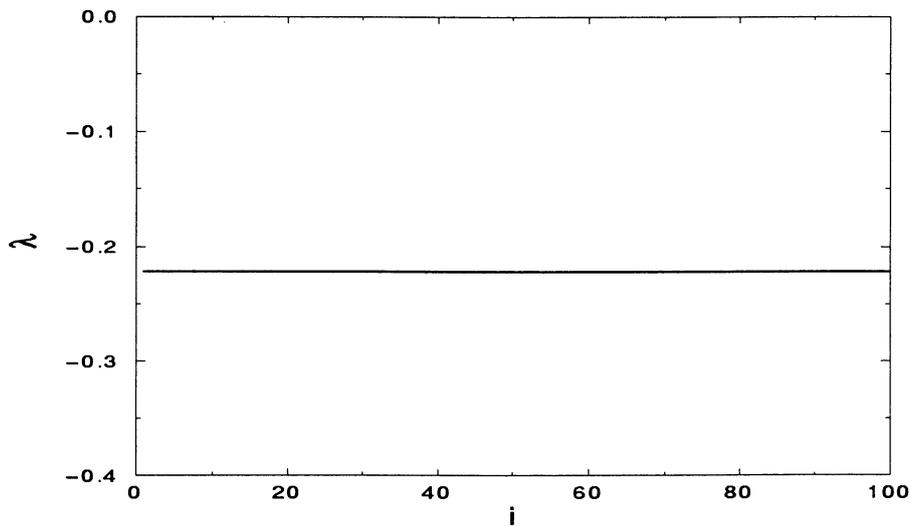


Figura 6.15: Sítio *versus* expoente de Lyapunov para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,035$.

Agora trabalharemos com o acoplamento (6.2) também para uma rede com 100 mapas e com os mapas apresentando um regime caótico quando desacoplados. Nesta forma de acoplamento a dinâmica do sítio além de ser determinada por todos os outros sítios também sofre a contribuição dele próprio. O fato é que no acoplamento (6.2) não surgem tantos problemas de unicidade como o acoplamento (6.1). Os problemas existem, mas em menor quantidade, e isso possibilita que possamos realizar a sincronização numa maior faixa dos valores de ε . Podemos observar alguns valores de ε , que podem ser utilizados para sincronizar os mapas, que exibem regime caótico quando desacoplados, através do gráfico de $\varepsilon \times \theta_n^i$ (fig. 6.16). Na figura (6.16) consideramos $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$ e $\theta_0^i = 0,52 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$, sendo que estão marcados os valores de θ de todos os sítios.

Ao realizarmos o acoplamento dos mapas caóticos verificamos que eles levam um determinado número de iterações até que todos estejam sincronizados. Para verificarmos o transiente escolhemos o valor do acoplamento ε igual a 0,189. Pela figura (6.16) vemos que para este acoplamento os mapas apresentarão um regime regular com periodicidade 2. A figura (6.17) mostra que realmente todos os mapas da rede passam a apresentarem uma periodicidade 2 após algumas iterações. Nós dizemos que todos os mapas da rede apresentam a mesma periodicidade porque no gráfico de $n \times \theta_n^i$ são marcados os valores de θ de todos os mapas. Para este caso ocorre que a cada iteração, logo após a sincronização, alguns sítios apresentam um determinado θ enquanto que os outros apresentam o outro valor de θ , os quais são os

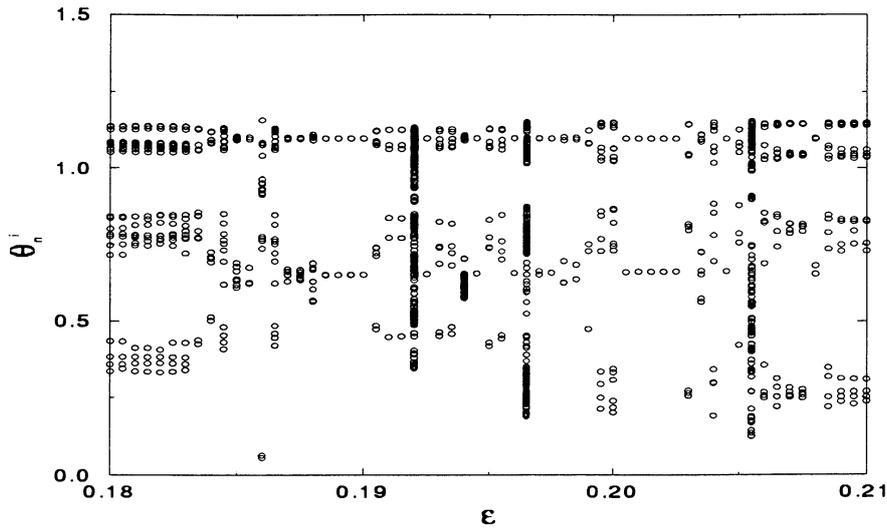


Figura 6.16: Acoplamento global utilizando a relação (6.2) para $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\theta_0^i = 0,52 + 0,1\text{sen}(i\pi/2)$.

dois pontos fixos estáveis do regime periódico descrito pelos mapas. O expoente de Lyapunov (fig. 6.18) é negativo para todos os sítios da rede, sendo que isto demonstra a regularização dos sítios por meio do acoplamento (6.2).

6.3 Sincronização Para Acoplamento Global do Tipo Exponencial e do Tipo Gaussiano

O acoplamento global do tipo exponencial é dado pela seguinte relação:

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \varepsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp(-c|i - j|)f(\theta_n^j), \quad (6.4)$$

onde c é a constante de decaimento da exponencial. No acoplamento global realizado na seção anterior a dinâmica do sítio i é determinada através do *campo médio* dos sítios da rede, já no acoplamento (6.4) não trabalhamos mais com o *campo médio*, e sim consideramos que a contribuição dos sítios da rede sobre o sítio i decai numa forma exponencial com o aumento da distância entre o sítio i e o sítio j .

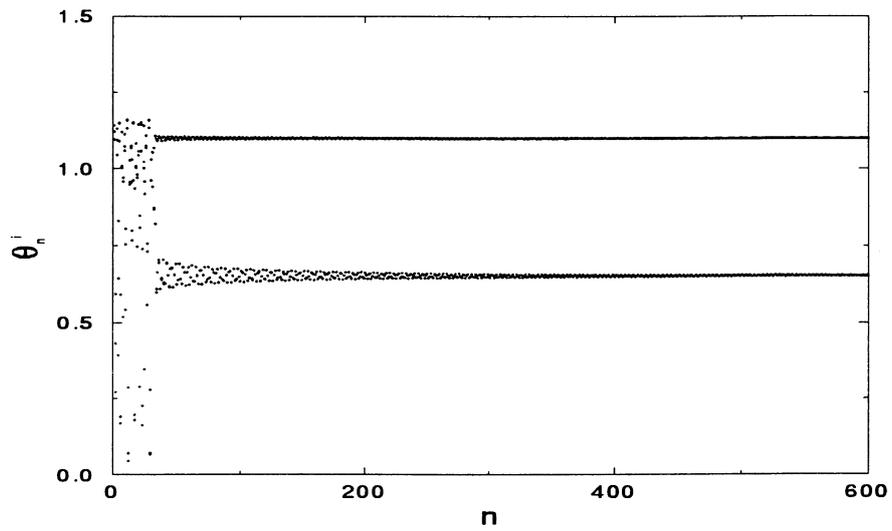


Figura 6.17: Transiente para o caso de $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,189$.

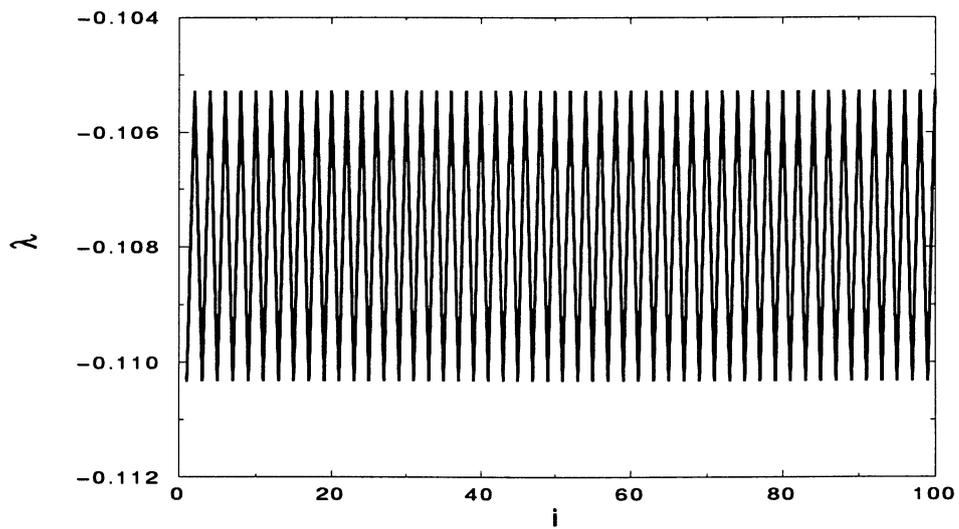


Figura 6.18: Sítio *versus* expoente de Lyapunov com $\alpha = 0,545$, $\beta = 0,315$ e $\varepsilon = 0,189$.

Através do acoplamento (6.4) é possível sincronizar uma rede com mapas exibindo regimes caóticos, e também regulares, com exceção das extremidades da rede que podem apresentar periodicidade diferente dos sítios sincronizados e diferentes valores dos pontos fixos estáveis. Isto pode ser observado por meio da figura (6.19), na qual utilizamos $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,2$, $c = 0,25$ e para condições iniciais $\theta_0^i = 0,1\text{sen}(i\pi/2)$.

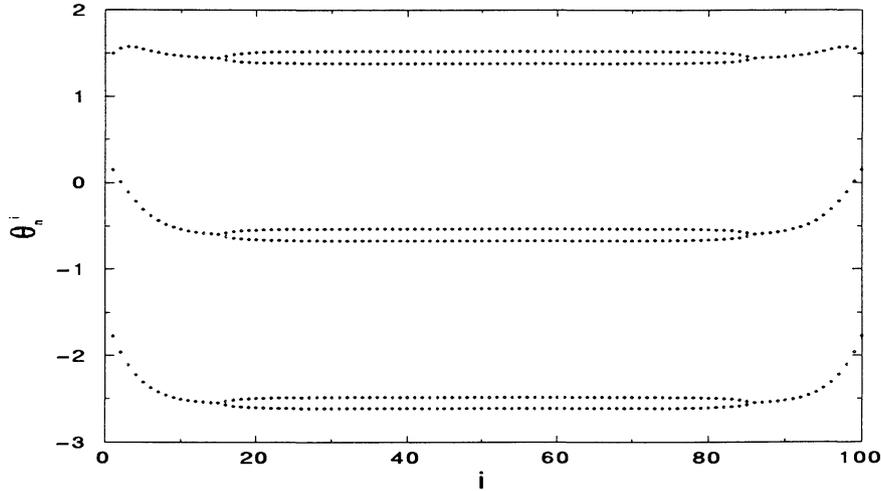


Figura 6.19: Sítio *versus* θ_n^i para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,2$ e $c = 0,25$.

Não ocorrem alterações na periodicidade dos mapas da rede e nem tampouco nos valores de seus pontos fixos estáveis quando mudamos as condições iniciais. Mas, ocorrem alterações na dinâmica dos mapas acoplados na rede quando variamos o valor do acoplamento ε ou quando variamos o valor do decaimento c da exponencial. Este fato é observado através dos gráficos de $\varepsilon \times \theta_n^i$ (fig. 6.20) e de $c \times \theta_n^i$ (fig. 6.21), sendo que para os quais utilizamos $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e tomamos somente o sítio $i = 50$ porque não é possível colocar os valores de θ de todos os sítios da rede devido às suas extremidades. Na figura (6.20) fixamos c igual a 0,25 e notamos que a variação do valor do acoplamento ε possibilita a alteração da periodicidade dos sítios sincronizados. Também podemos ver pela figura (6.21), onde consideramos $\varepsilon = 0,2$, alterações da periodicidade dos sítios sincronizados apenas variando o valor do decaimento c da exponencial.

O acoplamento global do tipo gaussiano futuro é dado pela relação:

$$\theta_{n+1}^i = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^i) + \varepsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp[-(i - j)^2/\Delta]f(\theta_n^j), \quad (6.5)$$

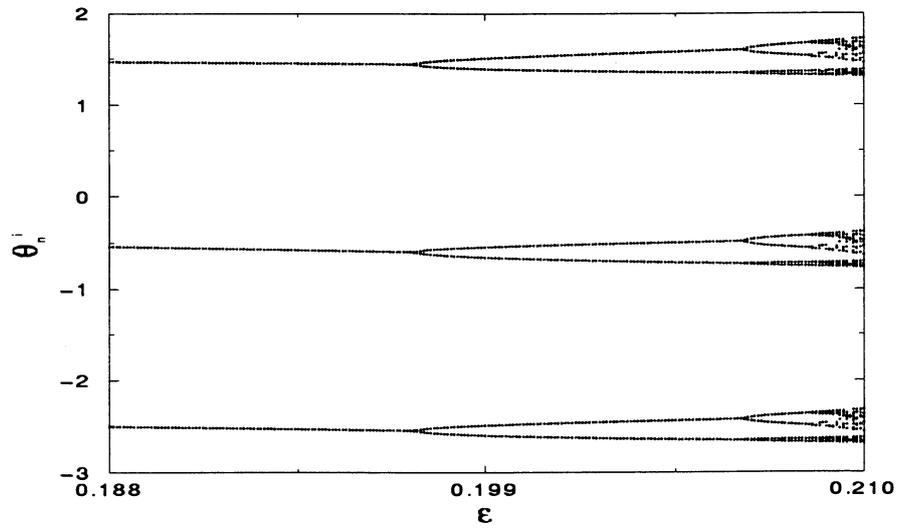


Figura 6.20: $\epsilon \times \theta_n^i$ considerando $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $c = 0,25$ para o sítio $i = 50$.

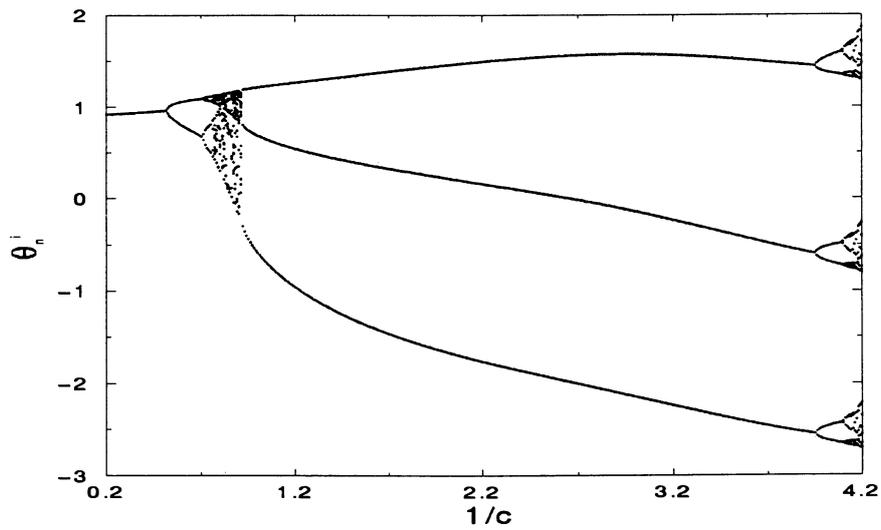


Figura 6.21: Acoplamento (6.4) para o caso onde $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\epsilon = 0,2$ sendo considerado o sítio $i = 50$.

onde Δ fornece a largura da gaussiana. Neste acoplamento o valor do acoplamento ε decai numa forma gaussiana com o aumento da distância entre o sítio i e o sítio j .

No acoplamento do tipo gaussiano podemos sincronizar uma rede de mapas acoplados onde todos os mapas exibem regimes caóticos quando não estão acoplados ($\varepsilon = 0,0$). Esta sincronização ocorre de tal maneira que todos os mapas passam a apresentar a mesma periodicidade e os mesmos valores dos pontos fixos estáveis, com exceção, como no acoplamento do tipo exponencial, dos sítios que ocupam as fronteiras da rede. Podemos observar que todos os mapas acoplados, com exceção dos mapas que estão nas extremidades, são sincronizados através da figura (6.22), a qual foi construída considerando $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 0,315$, $\varepsilon = 0,2$, $\theta_0^i = 0,1\text{sen}(i\pi/2)$ e $\Delta = 23$. A sincronização ocorre para determinados valores de Δ , sendo que é possível escolher determinadas órbitas periódicas, nas quais os mapas prototípicos de Ding podem ser sincronizados, apenas variando a largura Δ da gaussiana (fig. 6.23). A figura (6.23) mostra algumas órbitas periódicas nas quais os mapas podem ser sincronizados, sendo que construímos a figura apenas para o sítio $i = 50$ devido as fronteiras da rede e utilizamos $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,2$.

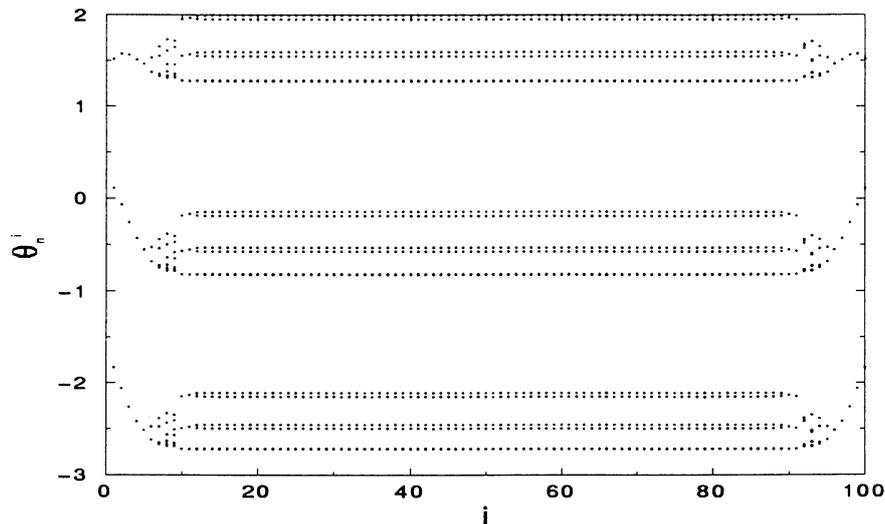


Figura 6.22: Sítio *versus* θ_n^i para $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$, $\varepsilon = 0,2$ e $\Delta = 23$.

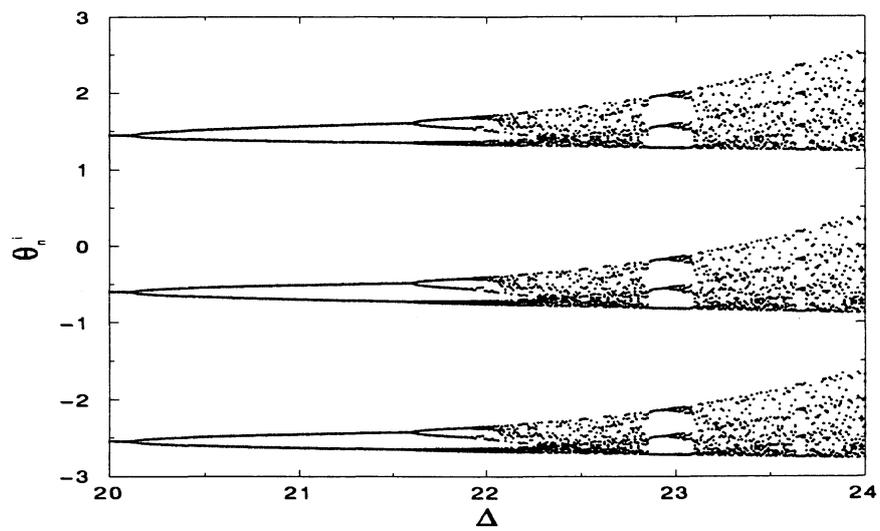


Figura 6.23: Acoplamento (6.5) para o caso onde $\alpha = 0,54$, $\beta = 0,315$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,2$ sendo considerado o sítio $i = 50$.

Capítulo 7

Conclusões

Nos últimos anos tem sido grande o interesse sobre os osciladores não-lineares forçados por uma força periódica ou pulsos. Uma variedade de sistemas físicos podem ser modelados por um conjunto de equações resultando em dinâmicas, para uma ampla classe de sistemas, que exibem comportamentos caóticos similares e de bifurcações. Em particular, se o oscilador apresenta um ciclo limite estável ocorre que o espaço de parâmetros exhibe regiões caóticas, periódicas e quase-periódicas. Para uma força externa de intensidade fraca o ciclo limite domina e ocorrem órbitas periódicas e quase periódicas. Aumentando a amplitude da força externa o oscilador passa através de uma complicada região de transição apresentando órbitas periódicas e regimes caóticos. Para uma força externa com amplitude elevada o oscilador é dominado pela força externa e o regime caótico desaparece. O oscilador que escolhemos trabalhar apresenta um ciclo limite estável quando não perturbado, bem como apresenta as características já mencionadas quando sujeito a uma força externa na forma de pulsos. Como estes pulsos têm curta duração no tempo podemos aproximá-los por funções delta de Dirac. Esta aproximação propicia que seja feito um mapeamento discretizando a variável temporal para a obtenção do mapa prototípico de Ding.

A caracterização de dinâmicas complexas é um dos problemas mais estudados na atualidade, sendo a existência de regimes caóticos em sistemas com poucos graus de liberdade um grande incentivo nesta direção. Mas é visto que certas dinâmicas complexas não são observadas em sistemas com poucos graus de liberdade, e para o estudo de tais sistemas pode-se usar modelos de sistemas acoplados. Trabalhamos com uma rede de mapas prototípicos de Ding acoplados, ou seja, construímos uma rede unidimensional de osciladores não-lineares pulsados.

O mapa prototípico de Ding quando não está acoplado não apresenta problemas de unicidade, mas quando acoplado numa rede pode apresentar problemas de unicidade sob certas condições. Devido a estes problemas nos limitamos a determinadas faixas no espaço de parâmetros.

No acoplamento local laplaciano a configuração dos domínios, bem como a dos *kinks*, depende: das condições iniciais, do tamanho da rede, dos parâmetros α e β e do valor do acoplamento ε . No acoplamento local unidirecional pode ocorrer duplicação espacial de período. É possível observar a propagação de defeitos em estruturas *zigzags* usando o acoplamento laplaciano futuro para o caso onde a intensidade do acoplamento é fraca.

Para uma rede com quatro mapas, onde é considerado que as extremidades são fixas, $\theta_0^n = 0, 0$ e o acoplamento é local e laplaciano, ocorre que dois mapas com regimes periódicos ao serem acoplados passam a apresentar a mesma periodicidade para determinados valores do acoplamento ε . Caso sejam acoplados dois mapas inicialmente com regimes caóticos, além de apresentarem a mesma periodicidade, eles apresentam os mesmos pontos fixos estáveis para certos valores de ε . Existe uma dependência em ε da duração do transiente que o regime caótico leva para atingir o regime periódico. Também é possível fazer as mesmas observações para uma rede com cinco mapas, sendo que as extremidades são fixas.

Através dos acoplamentos global linear e global futuro, onde a dinâmica do sítio i é determinada pelo *campo médio*, é possível sincronizar uma rede de mapas caóticos, sendo que para determinados valores de ε todos os mapas além de apresentarem a mesma periodicidade apresentam os mesmos valores para os pontos fixos estáveis. Pode-se escolher certas órbitas periódicas, nas quais a rede de mapas caóticos pode ser sincronizada, apenas variando-se ε .

No acoplamento global do tipo gaussiano futuro não ocorre sincronização dos sítios que estão nas extremidades da rede. Mas os sítios que estão afastados das extremidades podem ser sincronizados, apresentado a mesma periodicidade e os pontos fixos estáveis, variando-se o valor do acoplamento ε ou a largura Δ da gaussiana. Pode-se escolher certas órbitas periódicas, nas quais os sítios podem ser sincronizados, variando-se ε ou Δ . Para o acoplamento global do tipo exponencial é possível sincronizar todos os mapas com regimes caóticos, com exceção dos sítios das extremidades da rede, variando-se o valor do acoplamento ε ou o decaimento da exponencial c , permitindo-nos a escolha de certas órbitas periódicas.

Para trabalhos futuros devemos prosseguir a linha desta análise para o mapa do seno-círculo (que pode ser considerado o limite do mapa prototípico de Ding para valores pequenos do parâmetro α):

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega + k \text{sen}(\theta_n), \quad (7.1)$$

onde $-\pi \leq \theta \leq \pi$, sendo que Ω é um parâmetro constante e k é um coeficiente que mede a não-linearidade do mapa, visto que $k = 0$ corresponde a um mapa trivial do

círculo. Esta opção surge do fato de que este mapa não apresenta limitações quanto aos valores possíveis para seus parâmetros, ao contrário do que ocorre com o mapa prototípico de Ding, que apresenta tais limitações quando sujeito a acoplamentos. Isto nos permitirá uma maior liberdade quanto a variações paramétricas.

Pretende-se, utilizando o mapa (7.1), empregar o acoplamento unidirecional local e o global para caracterização espaço-temporal, bem como, abordar o controle de caos na rede, no espírito do trabalho de Shinbrot para acoplamento global (Shinbrot, 1994). Pretende-se também trabalhar com o caso bidimensional, onde os sítios são rotulados por (i, j) , com $i=1,2,\dots,N$ e $j=1,2,\dots,N$ numa rede quadrada $N \times N$. Neste caso apenas o acoplamento futuro entre os primeiros vizinhos será considerado:

$$\theta_{n+1}^{i,j} = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^{i,j}) + \frac{\varepsilon}{4}[f(\theta_n^{i-1,j}) + f(\theta_n^{i+1,j}) + f(\theta_n^{i,j-1}) + f(\theta_n^{i,j+1})]. \quad (7.2)$$

Também, como um trabalho futuro, iremos nos concentrar na análise espectral do mapa acoplado em redes uni e bidimensionais, para a identificação de padrões espaciais de complexidade, tendo como meta a caracterização de turbulência.

Bibliografia

Aranson, I., Golomb, D. and Sompolinsky, H. (1992): *Spatial coherence and temporal chaos in macroscopic systems*, Physical Review Letters, **68**, 4, 3495-3498.

Beraldi, L. C. (1995): *Dinâmica de um oscilador não-linear forçado sujeito a um potencial biestável*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, p. 19.

Bishop, A. R. (1989): *Coherence and chaos in condensed matter*. Lecture notes: First Winter School on Nonlinear Physical Phenomena. International Centre of Condensed Matter Physics, Brasília.

Caldas, I. L., Baptista, M. S., Ullmann, K., Viana, R. L. and Pereira, J. M. (1995): *Control of Oscillations*, Proceedings of Theoretical Physics Symposium, Instituto de Física Teórica, UNESP, São Paulo.

Caldas, I. L. and Jasso, H. (1989): *Limit cycles of periodically forced oscillations*, Physics Letters A, **135** (4,5), 264-266.

Crutchfield, J. P. (1983): *Noisy chaos*, Ph. D. dissertation, University of California, Santa Cruz.

Crutchfield, J. P. and Kaneko, K. (1987): *Phenomenology of spatiotemporal chaos*, in: *Directions in chaos*, Vol. 1, Ed. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore.

Ding, E. J. (1987): *Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle*, Physical Review A, **35**, 6, 2669-2683.

Ding, E. J. (1986): *Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator*, Physical Review A, **34**, 4, 3547-3550.

Ding, E. J. (1987): *Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator*, Physical Review A, **36**, 3, 1488-1491.

- Ditto, W. L. and Pecora, L. M. (1993): *Mastering chaos*, Science Am., 62-68.
- Fiedler, N., -F e Prado, C. P. C. (1994): *Caos, uma introdução*, Ed. Edgard Blücher, p. 85.
- Froehling, H., Crutchfield, J. P., Farmer, D., Packard, N. H. and Shaw, R. (1981): *On determining the dimension of chaotic flows*, Physica D, **3**, 605-617.
- Gang, H. and Kaifen, H. (1993): *Controlling chaos in systems described by partial differential equations*, Physical Review Letters, **71**, 3794.
- Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J. A. (1987): *Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*, Science, **238**, 632-638.
- Hagerdon, P. (1984): *Osciladores não-lineares*, Ed. Edgard Glücher, São Paulo.
- Hénon, M. (1982): *On the numerical computation of Poincaré maps*, Physica D, **5**, 412-414.
- Hirsch, M. W. and Smale, S.: *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, p. 239 (1974).
- Jackson, A. E. (1990): *Perspectives of nonlinear dynamics*, Vol. 2, Cambridge University Press, 390-393.
- Kaneko, K. (1989): *Chaotic but regular posi-nega switch among coded attractors by cluster-size variation*, Physical Review Letters, **63**, 3, 219-223.
- Kaneko, K. (1983): *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, Ph. D. thesis, p. 222 (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986).
- Kaneko, K. (1990): *Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements*, Physica D, **41**, 137-172.
- Kaneko, K. (1987): *Pattern dynamics in spatiotemporal chaos*, Physica D, **34**, 1-41.
- Kaneko, K. (1989): *Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices*, Physica D, **37**, 60-82.
- Kapitaniak, T. (1991): *Chaotic Oscillations in mechanical systems*, Manchester University Press, Manchester & New York.

Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. and Dayawansa, W. P. (1992): *Controlling chaotic dynamical systems*, Physica D, **58**, 165-192.

Russell, D. A., Hanson, J. D. and Ott, E. (1980): *Dimension of strange attractors*, Physical Review Letters, **45**, 14, 431-447.

Shinbrot, T. (1994): *Synchronization of coupled maps and stable windows*, Physical Review E, **50**, 4, 3230-3233.

Shinbrot, T., Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J. A. (1993): *Using small perturbations to control chaos*, Nature, **363**, 411-417.

Schuster, H. G. (1984): *Deterministic chaos*, 2nd edition, Weinheim, Physik-Verlag, p. 17, 24, 113.

Ullmann, K. and Caldas, I. L. (1992): *Attractors of a periodically forced dissipative system*, Proceedings of V Latin American Workshop on Plasma Physics, Mexico City (Contr. papers)

Umberger, D. K., Grebogi, C., Edward, O. and Afeyan, B. (1989): *Spatiotemporal dynamics in a dispersively coupled chain of nonlinear oscillators*, Physical Review A, **39**, 9, 4835-4842.

Viana, R. L. (1993): *Ordem e caos em sistemas dinâmicos não-lineares*, notas de aula do curso ministrado no Laboratório Central de Eletrotécnica da COPEL/PR (não publicadas).

Viana, R. L. (1991): *Problemas não-lineares com perturbação impulsiva e aplicações em física de plasmas*, Tese de Doutorado, Instituto de Física da USP, São Paulo, p.15.

Wiggins, S. (1990): *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer - Verlag, p. 357.