

EVERALDO CARMO DA SILVA

UM MÉTODO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO DIRETO

Dissertação apresentada ao Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
para obtenção do Grau de Mestre em Ciências
pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1978

UM MÉTODO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO DIRETO

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

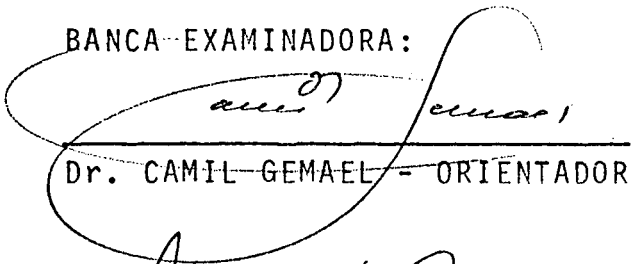
por

EVERALDO CARMO DA SILVA, Engenheiro Agrônomo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1978

BANCA EXAMINADORA:


Dr. CAMIL GEMAEL - ORIENTADOR


Ph.D. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE


M.Sc. QUINTINO DALMOLIN

À minha esposa e filhos:

Raymunda Darlindo

Isabel Helena

e

Everaldo Júnior

À minha mãe Maria Perpétua

AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho exigiu esforços não só do autor, como também de partes integrantes do processo evolutivo deste País. Assim sendo, desejamos externar nossos agradecimentos,

ao Dr. Camil Gemael, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pelo incentivo e orientação na elaboração deste trabalho;

à Faculdade de Ciências Agrárias do Pará por ter concedido meu afastamento para realização do Curso;

à Escola Técnica Federal do Pará pela compreensão demonstrada permitindo também meu afastamento;

ao PEAS pela bolsa de estudos concedida;

e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SINOPSE

Este trabalho apresenta um método para solucionar o problema geodésico direto, tendo como principal objetivo a determinação do contra-azimute de uma geodésica, em função direta das coordenadas do primeiro ponto e do comprimento da mesma.

Apresenta também um quadro de resultados das resoluções de triângulos geodésicos através de fórmulas finitas e desenvolvimento em série.

Para facilitar ao leitor a compreensão destes desenvolvimentos, apresentamos inicialmente os estudos sobre os parâmetros do elipsóide, seções normais e comportamento da geodésica sobre a superfície de um elipsóide de revolução.

SYNOPSIS

This paper presents a method to solve the direct geodetic problem, the main purpose being the determination of the reverse azimuth of a geodesic computed as a function of the coordinates of the first point and the geodetic distance.

It also presents a table showing the results of the computations of the geodetic triangles through closed formulas and series development.

In order to make easy for the reader to understand the mathematical derivations, it is presented at the beginning of this thesis some coment about the ellipsoidal parameters, normal sections, and the behaviour of the geodesic about the surface of a revolution ellipsoid.

CONTEÚDO

| | |
|----------------------|-----|
| Título | ii |
| Dedicatória | iii |
| Agradecimentos | iv |
| Sinopse | v |
| Synopsis | vi |
| Conteúdo | vii |

CAPÍTULO I

| | |
|----------------------|----|
| 1.0 Introdução | 01 |
|----------------------|----|

CAPÍTULO II

| | |
|---|----|
| 2.0 Elipsóide de revolução | 03 |
| 2.1 Equação do elipsóide de revolução | 04 |
| 2.2 Parâmetros do elipsóide de revolução | 06 |
| 2.3 Latitudes: geodésica, geocêntrica e reduzida, relações entre as mesmas | 11 |
| 2.4 Seções normais principais e seus respectivos raios de curvatura | 16 |
| 2.5 Raio vetor de um ponto do elipsóide de revolução | 21 |

CAPÍTULO III

| | |
|--|----|
| 3.0 Seções normais recíprocas | 22 |
| 3.1 Ângulo formado por duas seções normais recíprocas | 26 |
| 3.2 Separação máxima entre os arcos de duas seções normais recíprocas | 27 |

CAPÍTULO IV

| | | |
|-----|--|----|
| 4.0 | Linha geodésica no elipsóide de revolução | 30 |
| 4.1 | Equação diferencial da linha geodésica sobre a superfície de revolução | 30 |
| 4.2 | Comportamento da linha geodésica sobre o elipsóide de revolução | 33 |
| 4.3 | Diferença de comprimento entre a linha geodésica e a seção normal | 37 |
| 4.4 | Ângulo formado pelas seções normais e a linha geodésica | 38 |

CAPÍTULO V

| | | |
|-----|--|----|
| 5.0 | Solução do problema geodésico direto | 41 |
| 5.1 | Equação do ângulo auxiliar para o cálculo do contra-azimute da linha geodésica | 41 |
| 5.2 | Equação da longitude elipsóidica | 45 |
| 5.3 | Equação da latitude elipsóidica | 47 |
| 5.4 | Síntese das fórmulas para o cálculo do contra-azimute da linha geodésica e coordenadas elipsóidicas do segundo ponto | 51 |

CAPÍTULO VI

| | | |
|-----|--|----|
| 6.0 | Solução numérica do problema geodésico direto | 55 |
| 6.1 | Programa em Linguagem de Programação FORTRAN IV | 55 |
| 6.2 | Quadro Comparativo dos resultados obtidos pelas fórmulas de SODANO e as apresentadas | 69 |

CAPÍTULO VII

| | |
|---|----|
| 7.0 Comparação dos resultados das resoluções de triângulos geodésicos por fórmulas finitas e desenvolvimento em série | 74 |
| 7.1 Quadro comparativo dos resultados das resoluções dos triângulos geodésicos | 76 |

CAPÍTULO VIII

| | |
|---|----|
| 8.0 Conclusão | 77 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 79 |
| APÊNDICE A: Fluxograma e Programa em Linguagem FORTRAN IV | 80 |
| APÊNDICE B: Resolução de triângulos geodésicos | 89 |
| B.1 Fórmula finita | 89 |
| B.2 Desenvolvimento em série | 89 |
| B.3 Teorema de LEGENDRE | 90 |

CAPÍTULO I

1.0 INTRODUÇÃO

Em Geodésia Geométrica a solução do problema geodésico direto e inverso, de maneira geral, consiste em se fazer uma aproximação esférica do elipsóide. As operações geodésicas de campo são realizadas sobre a superfície topográfica, e para definirmos um ponto desta, necessitamos de três coordenadas que são: latitude geodésica (ϕ), longitude geodésica (λ) e altitude geométrica (H). Porém, os cálculos são realizados com fórmulas derivadas do elipsóide de revolução. Neste caso a projeção do ponto é definido apenas pela latitude e longitude elipsóidica que são iguais às geodésicas. Por esta razão, trataremos no desenvolvimento deste trabalho de coordenadas elipsóidicas. Neste propomos desenvolver fórmulas simples e práticas para solucionar o problema geodésico direto. A solução deste problema consiste em: determinar as coordenadas elipsóidicas (ϕ, λ) de um segundo ponto e o contra-azimute (A_{21}) da linha geodésica, sendo dados, as coordenadas elipsóidicas do primeiro ponto, o azimute (A_S) da seção normal direta e a distância (S) entre os pontos. Existe vasta literatura tratando do referido problema. Todavia as fórmulas resolutivas são desenvolvimentos em série de difícil aplicação e exigindo um grande volume de cálculo, não obstante o advento dos computadores que eliminam parcialmente o último argumento. O desenvolvimento do tema enfatiza principalmente o cálculo do contra-azimute, observando que as fórmulas já existentes apresentam para este uma dependência direta das coordenadas do segundo ponto. Este

fato nos levou a crer numa possível fórmula, capaz de calcular o contra-azimute sem depender diretamente das coordenadas do segundo ponto.

Para facilitar a compreensão dos desenvolvimentos que serão realizados apresentaremos uma primeira parte que consiste em: representar os parâmetros do elipsóide de revolução; representar as coordenadas elipsóidicas; linha geodésica e seu comportamento no elipsóide de revolução e o desenvolvimento teórico de algumas fórmulas que solucionarão o problema em foco. Numa segunda parte apresentaremos a solução numérica do problema e o programa codificado em linguagem de programação FORTRAN IV. Além disto, apresentaremos um quadro comparativo dos resultados das resoluções dos triângulos geodésicos através de fórmulas finitas e em série.

CAPÍTULO II

2.0 ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

O principal objetivo da Geodésica Geométrica é a determinação das coordenadas geodésicas, também chamadas de elipsóides de um ponto. Para tal determinação, se faz necessário que se eleja uma superfície que melhor represente a forma da Terra. As medidas geodésicas são efetuadas sobre a superfície física da Terra, comumente conhecida por superfície topográfica. Esta superfície é bastante complexa, tornando impossível estabelecer relações matemáticas simples entre os elementos geodésicos, tais como: coordenadas de dois pontos e distância entre os mesmos, em decorrência do número infinito de parâmetros envolvidos. Há uma superfície equipotencial chamada geóide. Esta, por sua vez, é a que mais se aproxima do nível médio dos mares prolongado ao longo dos continentes. Todavia, o geóide torna-se inconveniente para o desenvolvimento dos cálculos geodésicos, como acontece com a superfície física, por ser definida por um número infinito de parâmetros. Se a Terra tivesse um achatamento ($\alpha=0$) teríamos uma superfície esférica representativa da Terra, bastante simples por ser definida por um único parâmetro, seu raio. Como isto não acontece, outro modelo deve ser adotado de forma a facilitar a condução dos cálculos geodésicos e que melhor se aproxime da forma verdadeira da Terra. NEWTON, através de suas especulações teóricas, levando em consideração o campo gravífico, postulou a forma elipsoidal para a Terra. Desta forma chegamos a um modelo capaz de representar a Terra, que é o elipsóide de revolução. Este

modelo apresenta as vantagens de não estabelecer grandes diferenças em relação a forma real e por ser definido por dois parâmetros: semi-eixo maior (a) e achatamento (α). Atualmente existe outro elipsóide que representa a Terra, chamado de elipsóide triaxial ou escaleno. No entanto, sua utilização não é frequente, por apresentar relações matemáticas bastantes trabalhosas. O elipsóide triaxial é definido por quatro parâmetros, sendo três eixos de tamanho desigual, e um ângulo que orienta a direção do semi-eixo maior. O presente trabalho será desenvolvido mediante fórmulas derivadas do elipsóide de revolução.

2.1 EQUAÇÃO DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

As quádricas cêntricas são definidas pela equação,

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{c^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.1)$$

Quando todos os sinais forem positivos, a (2.1.1) toma a forma seguinte:

$$+ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.2)$$

a qual representa um elipsóide escaleno com centro na origem do

sistema cartesiano considerado, fig. (2.1.1).

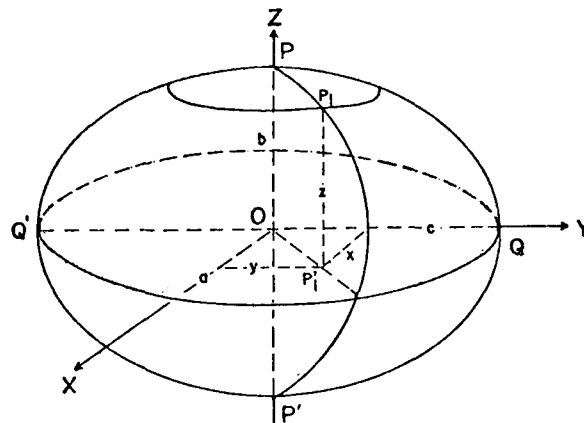


Fig. (2.1.1.)

A condição da equação (2.1.2) é que os semi-eixos do elipsóide triaxial cumpram a seguinte ordem de grandeza

$$b < c < a$$

O elipsóide triaxial ou escaleno apresenta as seguintes características:

a) As cônicas* determinadas pelos planos coordenados $Z=0$, $Y=0$ ou $X=0$ respectivamente são elipses dadas pelas equações:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

b) O elipsóide é simétrico em relação a cada um dos planos co-

* são seções planas de uma quádrica.

ordenados.

c) A cônica, interseção da quádrica com o plano $Z=d$ é dada pela equação |6|,

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2} (b^2 - d^2)} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{b^2} (b^2 - d^2)} = 1 \quad (2.1.3)$$

a qual representa uma elipse. Esta terá parâmetros menores a medida que d aumenta e anula-se para $d=b$ nos polos. De forma análoga verificamos que as seções paralelas aos planos coordenados $y=0$ e $x=0$ também são elipses. Fazendo $a=c$ na (2.1.2), todas as seções paralelas ao equador serão circunferências. Assim obtemos o elipsóide de revolução ou biaxial. Para que este último seja o modelo da Terra, temos que impor a condição $a > b$. Logo diremos que o elipsóide de revolução achatado é a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo menor, e a (2.1.2) toma a forma,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.4)$$

2.2 PARÂMETROS DO ELISPÓIDE DE REVOLUÇÃO

Como o elipsóide de revolução é o modelo sobre a qual irão se desenvolver os estudos a seguir, é de conveniência que

se faça uma análise sobre seus parâmetros. As seções produzidas por planos que contenham o eixo de rotação são elipses de semi-eixo maior (a) e semi-eixo menor (b). Tais afirmações decorrem da (2.1.4). Assim qualquer relação obtida para uma seção será válida para as demais, e por conseguinte válida para o elipsóide de revolução. Consideremos a fig. (2.2.1).

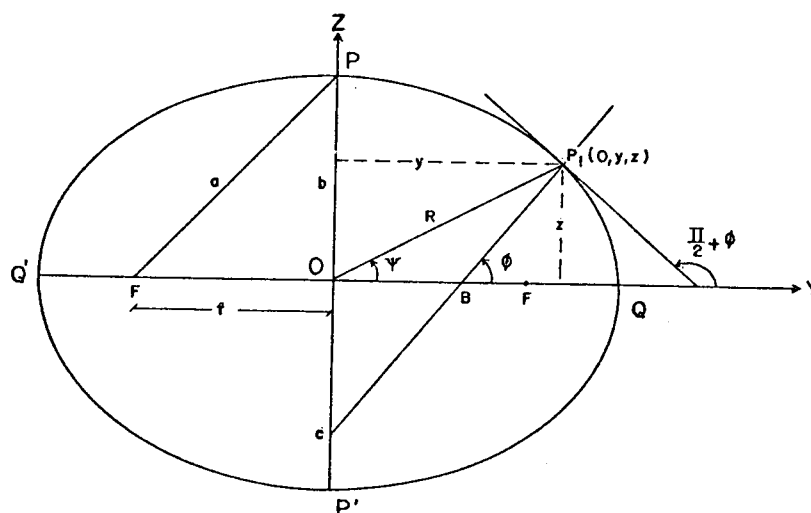


Fig. (2.2.1.)

A elipse meridiana do ponto $P_1(0, y, z)$ é obtida pela interseção do plano coordenado $x=0$ cuja equação se escreve,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.2.1)$$

O elipsóide de revolução fica definido por dois parâmetros: os semi-eixos a e b . Todavia, por tradição o definimos através dos parâmetros semi-eixo maior (a) e o achatamento (α).

A fig. (2.2.1) mostra uma elipse de centro (0) e semi-distância focal (f), da qual podemos definir os seguintes parâ

metros:

- a) semi-eixo maior (a) da elipse;
- b) semi-eixo menor (b) da elipse;
- c) achatamento (α) é a razão entre a diferença dos semi-eixos em módulo e o semi-eixo maior

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.2.2)$$

- d) primeira excentricidade (e) é a razão entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior da elipse.

$$e = \frac{f}{a} = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a} \quad (2.2.3)$$

Sendo as elipses meridianas iguais, terão a mesma excentricidade, que será a mesma do elipsóide de revolução.

- e) Segunda excentricidade (e') é a razão entre a semi-distância focal e o semi-eixo menor da elipse.

$$e' = \frac{f}{b} = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{b} \quad (2.2.4)$$

Os parâmetros a, b, α , e, e' são os principais parâmetros do elipsóide de revolução. Dois são suficientes para defini-lo, desde que, um seja de grandeza linear.

As relações entre as excentricidades primeira (e) e segunda (e') são:

Da (2.2.3) temos,

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

donde

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad (2.2.5)$$

Da (2.2.4) temos

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1$$

donde

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2$$

logo

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{1 + e'^2} \quad (2.2.6)$$

Comparando a (2.2.5) com a (2.2.6) obteremos as seguintes relações entre a primeira excentricidade e a segunda excentricidade:

$$1 - e^2 = \frac{1}{1 + e'^2}$$

$$e^2 = 1 - \frac{1}{1 + e'^2}$$

$$e = \left(\frac{e'^2}{1 + e'^2} \right)^{1/2} \quad (2.2.7a)$$

$$e' = \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^{1/2} \quad (2.2.7b)$$

As relações entre o achatamento e a primeira excentricidade e achatamento e a segunda excentricidade são:

da (2.2.2) temos

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.2.8)$$

Da (2.2.5) temos

$$\frac{b}{a} = (1 - e^2)^{1/2} \quad (2.2.9)$$

Substituindo na (2.2.8) o valor de $\frac{b}{a}$ da (2.2.9) temos as relações entre o achatamento e a primeira excentricidade

$$\alpha = 1 - (1 - e^2)^{1/2} \quad (2.2.10a)$$

$$e = (2\alpha - \alpha^2)^{1/2} \quad (2.2.10b)$$

Substituindo na (2.2.8) o valor de $\frac{b}{a}$ dada pela (2.2.6) obtemos as relações entre o achatamento e a segunda excentricidade

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{1 + e'^2} \right)^{1/2} \quad (2.2.11a)$$

$$(1 - \alpha)^2 = \frac{1}{1 + e'^2}$$

$$e'^2 = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} - 1$$

$$e'^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (2.2.11b)$$

2.3 LATITUDES: ELIPSÓIDICA, GEOCÊNTRICA E REDUZIDA, RELAÇÕES ENTRE AS MESMAS

Consideremos um ponto P_1 sobre a superfície elipsóidica, fig. (2.2.1). A normal ao elipsóide passante por P_1 forma com sua projeção sobre o plano equatorial ($Z=0$) um ângulo que chamamos de latitude elipsóidica (ϕ), também conhecida por latitude geodésica. Se a projeção da normal ao plano equatorial for um ponto, então $\phi = \frac{\pi}{2}$, logo, o ponto estará no polo. A latitude geodésica é medida ao longo da elipse meridiana com uma variação de $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, e por convenção a consideramos positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul. A latitude geocêntrica (ψ) do ponto P_1 é o ângulo formado pelo raio vetor deste ponto com sua projeção sobre o plano equatorial, fig. (2.2.1). A latitude geocêntrica apresenta a mesma variação e convenção da latitude geodésica.

O elipsóide de revolução possui duas esferas principais, uma com raio igual ao semi-eixo menor e a outra com raio igual ao semi-eixo maior, ambas concêntricas, com centro no elipsóide, fig. (2.3.1).

A superfície esférica de raio igual ao semi-eixo maior é tangente ao elipsóide ao longo da linha equatorial. Esta superfície esférica é conhecida por "esfera de jacobi" ou "esfera reduzida". A cada ponto P_1 situado sobre o elipsóide de revolução, fazemos corresponder um ponto P'_1 da esfera reduzida, através do prolongamento da ordenada de P_1 . A fig. (2.3.1) mostra uma relação existente entre as ordenadas dos pontos P_1 e P'_1 .

$$\frac{MP_1}{MP'_1} = \frac{b}{a} = (1 - e^2)^{1/2} \quad (2.3.1)$$

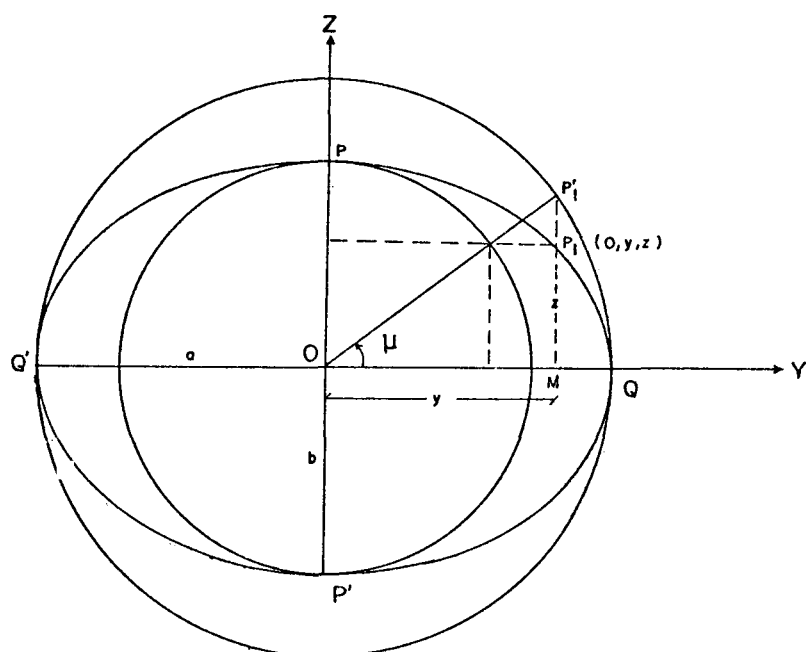


Fig. (2.3.1.)

Latitude reduzida (μ) é o ângulo formado pelo raio vetor ($\overline{OP_1}$) do ponto imagem sobre a esfera reduzida e sua projeção sobre o plano equatorial. Apresenta a mesma variação e convenção das latitudes geodésicas e geocêntricas.

As latitudes obedecem as seguintes características:

- a) $\psi < \mu < \phi$ para pontos não situados nos polos e equador; no caso em que $\phi = \frac{\pi}{4}$, as diferenças entre elas são máximas.
- b) $\psi = \mu = \phi$ para pontos situados nos polos e equador.

Na fig. (2.2.1) os segmentos $\overline{P_1C} = N$ e $\overline{P_1B} = N'$ são chamados respectivamente de grande normal e pequena normal. A relação entre os segmentos em foco é [6],

$$N' = N (1 - e^2) \quad (2.3.2)$$

Agora, com base nos conhecimentos anteriores, podemos estabelecer as coordenadas de um ponto da elipse meridiana em função das latitudes e relações entre as mesmas.

As coordenadas cartesianas retilíneas do ponto P_1 , fig. (2.2.1), em função da latitude geocêntrica são:

$$y = \overline{OP}_1 \cos \psi \quad (2.3.3)$$

$$z = \overline{OP}_1 \operatorname{sen} \psi \quad (2.3.4)$$

Na fig. (2.3.1) obtemos as coordenadas retilíneas do ponto P_1 em função da latitude reduzida (μ)

$$y = a \cos \mu \quad (2.3.5)$$

$$z = b \operatorname{sen} \mu \quad (2.3.6)$$

Para obter as coordenadas de um ponto P_1 , em função da latitude geodésica, derivemos a (2.2.1)

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{b^2 y}{a^2 z} \quad (2.3.7)$$

sendo $\frac{dz}{dy}$ o coeficiente angular da tangente à curva no ponto P_1 , fig. (2.2.1) temos

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = - \operatorname{cotg} \phi$$

donde

$$\operatorname{cotg} \phi = \frac{b^2 y}{a^2 z}$$

$$z = \frac{b^2 y \operatorname{tg} \phi}{a^2} \quad (2.3.8)$$

Introduzindo o valor de z na equação da elipse(2.2.1) obtemos

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{b^4 y^2 \operatorname{tg}^2 \phi}{b^2 a^4} = 1$$

$$a^2 y^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \phi = a^4$$

$$y^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \phi} \quad (2.3.9)$$

Introduzindo na . (2.3.9) a expressão $b^2 = a^2(1 - e^2)$ vem

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{a^4}{a^2 + a^2(1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi} \\ &= \frac{a^4}{a^2 + a^2(1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{a^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \end{aligned}$$

donde

$$y = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3.10)$$

Para obter a ordenada z em função da latitude ϕ , introduzimos a . (2.3.10) na . (2.2.1), após simplificações obtemos

$$z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3.11)$$

Dividindo membro a membro a (2.3.11) pela equação (2.3.10) vem

$$\frac{z}{y} = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.12)$$

Considerando a fig. (2.2.1) podemos escrever que,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z}{y} \quad (2.3.13a)$$

Comparando a (2.3.12) com a (2.3.13a) temos

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.13b)$$

a qual mostra a relação existente entre a latitude geocêntrica e geodésica.

Dividindo membro a membro a (2.3.6) pela equação (2.3.5) temos

$$\frac{z}{y} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \mu \quad (2.3.14a)$$

Introduzindo na (2.3.14a) o valor de $\frac{b}{a}$ dado pela (2.3.1) vem:

$$\frac{z}{y} = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \mu \quad (2.3.14b)$$

Comparando a (2.3.14b) com a (2.3.13a) obtemos

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \mu \quad (2.3.15)$$

a qual estabelece a relação entre a latitude geocêntrica e reduzida.

Comparando a (2.3.13b) com a (2.3.15) temos a relação entre a latitude reduzida e a geodésica

$$\operatorname{tg} \mu = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.16)$$

2.4 SEÇÕES NORMAIS PRINCIPAIS E SEUS RESPECTIVOS RAIOS DE CURVATURA

Por um ponto P_1 sobre a superfície de um elipsóide de revolução, podemos conduzir infinitos planos que contenham a normal à superfície. Qualquer plano que contenha a normal, e por conseguinte, perpendicular ao plano tangente ao elipsóide neste ponto, é chamado de plano normal. A curva resultante da interseção de um plano normal com a superfície elipsóidica é chamada de seção normal. Em cada ponto existem duas seções normais principais que são mutuamente perpendiculares e cujas curvaturas nesse ponto são, uma máxima e outra mínima.

Demonstra-se que o ponto P_1 sobre a superfície de um elipsóide de revolução possui as seções normais principais chamadas, seção normal meridiana e do primeiro vertical. A seção normal do primeiro vertical é gerada pelo plano Ω perpendicular à seção meridiana no ponto P_1 , fig. (2.4.1).

O raio de curvatura da seção meridiana e da seção do primeiro vertical representamos por M e N respectivamente. A curvatura da seção meridiana, quando esta é expressa em função das coordenadas retilíneas, $z=f(y)$, é obtida da fórmula geral de curvatura;

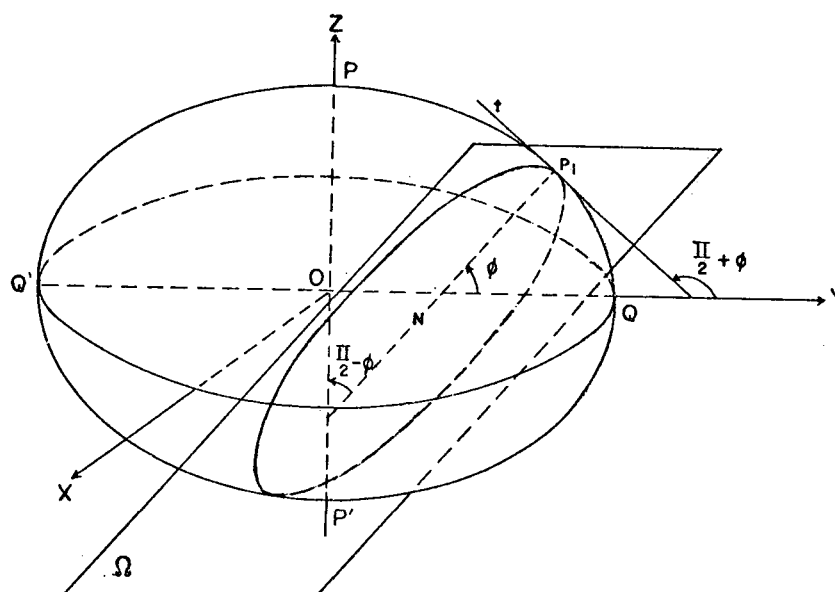


Fig. (2.4.1)

$$K = \frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.4.1)$$

A equação da elipse meridiana em coordenadas retilíneas é dada pela (2.2.1)

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad (2.4.2)$$

As derivadas de primeira e segunda ordem da (2.4.2) são:

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{b^2 y}{a^2 z} \quad (2.4.3a)$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = - \frac{b^4}{a^2 z^3} \quad (2.4.3b)$$

Substituindo as derivadas na (2.4.1) temos

$$K = \frac{- \frac{b^4}{a^2 z^3}}{\left[1 + \frac{b^4 y^2}{a^4 z^2} \right]^{3/2}} \quad (2.4.4)$$

Introduzindo na (2.4.4) o valor de b^2 tirado da (2.3.1) obtemos a equação da curvatura da elipse meridiana em função das coordenadas ortogonais retilíneas,

$$\begin{aligned} K &= - \frac{\frac{a^2 (1 - e^2)^2}{z^3}}{\frac{[z^2 + (1 - e^2)y^2]^{3/2}}{z^3}} \\ &= - \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{[z^2 + (1 - e^2) y^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Introduzindo na (2.4.5) os valores de z e y dados pela (2.3.8) e (2.3.10), obtemos a curvatura meridiana em função da latitude geodésica.

$$K = - \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{\left[\frac{b^4 a^2 \cos^2 \phi \operatorname{tg}^2 \phi}{a^4 (1 - e^2 \sin^2 \phi)} + (1 - e^2)^2 \frac{a^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \right]^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{a^2(1-e^2)^2}{\left[\frac{b^4 a^2 \cos^2 \phi \operatorname{tg}^2 \phi + a^4 (1-e^2)^2 a^2 \cos^2 \phi}{a^4 (1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)} \right]^{3/2}} \\
&= - \frac{a^2(1-e^2)^2}{\left[\frac{b^4 a^2 \left\{ \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{a^4}{b^4} (1-e^2)^2 \cos^2 \phi \right\}}{a^4 (1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)} \right]^{3/2}} \\
&= - \frac{a^2(1-e^2)^2 \cdot (1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}}{a^3(1-e^2)^3} \\
K &= - \frac{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}}{a(1-e^2)} \quad (2.4.6)
\end{aligned}$$

O sinal indica o sentido da curvatura. Em Geodésia todas as curvaturas são positivas, em decorrência da convexidade ser voltada para o interior da superfície.

O raio da curvatura num ponto de uma curva \bar{e} é o inverso de sua curvatura neste ponto. Portanto, o raio de curvatura da seção meridiana \bar{e} :

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{3/2}} \quad (2.4.7)$$

Consideremos agora a curva resultante da interseção do plano paralelo ao xy , passante pelo ponto P_1 fig. (2.4.2), sendo esta, oblíqua à seção do primeiro vertical. Ambas as seções se interceptam segundo a tangente ao elipsóide. Assim podemos enun-

ciar o teorema de MEUSNIER referente às seções oblíquas: o raio de curvatura da seção oblíqua é igual ao raio de curvatura da seção normal multiplicada pelo co-seno do ângulo formado pelas seções. Este, é representado pela equação,

$$r = N \cos \phi \quad (2.4.8)$$

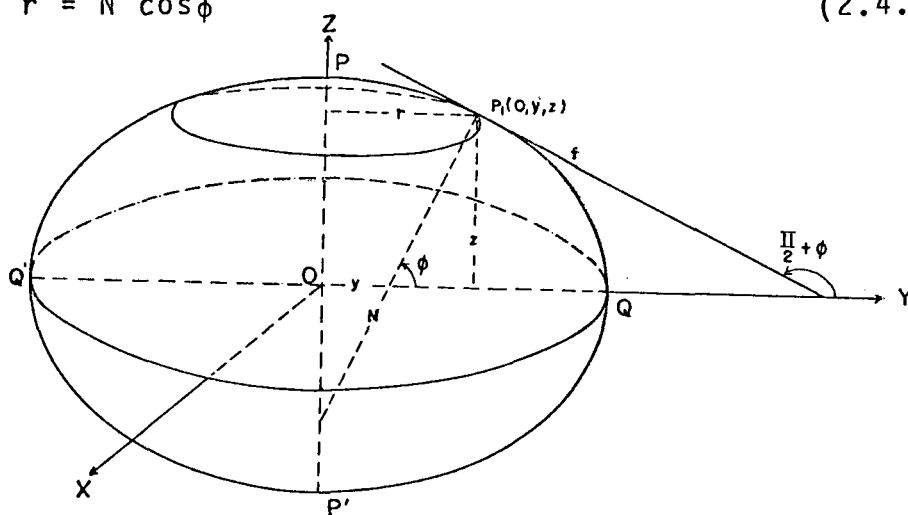


Fig. (2.4.2)

De acordo com os elementos já definidos e a figura (2.4.2) podemos escrever:

$$r = y = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.4.9)$$

logo

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.4.10)$$

Com base no que foi demonstrado podemos obter a ordenada de um ponto P_1 em função da pequena normal (N').

$$z = N' \sin \phi \quad (2.4.11a)$$

Substituindo na (2.4.11a) N' por seu valor dado pela (2.3.2) obtemos:

$$z = N(1 - e^2) \operatorname{sen} \phi \quad (2.4.11b)$$

2.5 RAI0 VETOR DE UM PONTO DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Podemos observar na fig. (2.2.1) que o raio vetor de P_1 , refere-se ao segmento $\overline{OP_1} = R$, distância do centro do elipsóide a um ponto P_1 sobre sua superfície. Este segmento apresenta uma variação de $b \leq R \leq a$.

O raio vetor em função das coordenadas ortogonais retílineas de um ponto P_1 é dado por:

$$R = (y^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.5.1)$$

Substituindo na (2.5.1) y e z por seus valores dados pelas equações (2.4.8) e (2.4.11b) respectivamente, obtemos a expressão do raio vetor em função da latitude geodésica.

$$\begin{aligned} R &= \left[N^2 \cos^2 \phi + N^2 (1 - e^2)^2 \operatorname{sen}^2 \phi \right]^{1/2} \\ &= \left[N^2 \{ \cos^2 \phi + (1 - 2e^2 + e^4) \operatorname{sen}^2 \phi \} \right]^{1/2} \\ R &= N \left[1 + e^2 \operatorname{sen}^2 \phi (e^2 - 2) \right]^{1/2} \quad (2.5.2) \end{aligned}$$

CAPÍTULO III

3.0 SEÇÕES NORMAIS RECÍPROCAS

Sejam dois pontos P_1 e P_2 sobre a superfície de um elipsóide de revolução, com latitudes ϕ_1 e ϕ_2 , tal que, $|\phi_1| < |\phi_2|$ e longitudes λ_1 e λ_2 também diferentes, fig. (3.0.1). As normais à superfície elipsóidica de cada ponto interceptam o eixo de rotação do elipsóide em dois pontos diferentes n_1 e n_2 . Os segmentos de reta definidos por $P_1 n_1 = N_1$ e $P_2 n_2 = N_2$ são as grandes normais dos pontos P_1 e P_2 respectivamente.

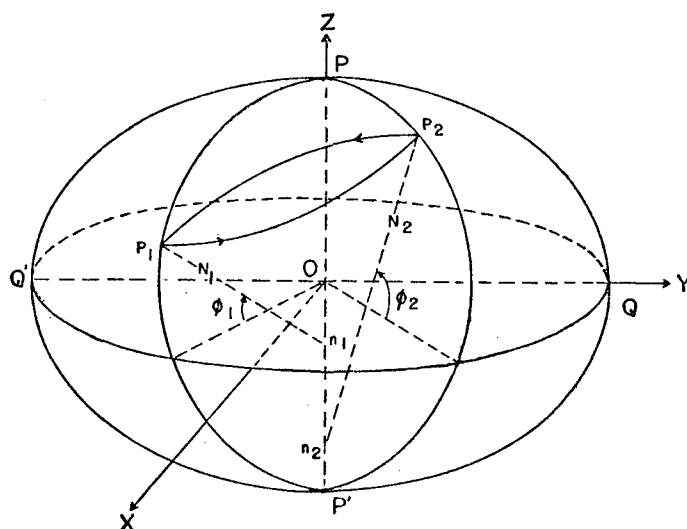


Fig. (3.0.1)

Lembrando que N_1 e N_2 são os raios de curvatura da seção normal do primeiro vertical do ponto P_1 e do ponto P_2 respectivamente, calculados pela (2.4.10). Observamos também na figura (3.0.1) que quanto maior a latitude maior a grande normal.

A seção normal resultante da interseção do plano que

contêm a normal em P_1 e o ponto P_2 , com o elipsóide de revolução, é dita "seção normal direta" de P_1 para P_2 , indicada por uma seta no sentido de P_2 . A seção resultante da interseção do plano que contém a normal em P_2 e o ponto P_1 , com o elipsóide de revolução é dita "seção normal direta" de P_2 para P_1 , ou seção normal recíproca de P_1 para P_2 , indicada por uma seta no sentido de P_1 . Para identificarmos a seção normal direta de um ponto P_1 para P_2 , tomamos como referência o ponto que estiver mais ao sul, e para este sentido, a seção mais ao sul é a direta, fig. (3.0.1). As duas seções são chamadas de "seções normais recíprocas". Os planos que definem as seções normais recíprocas não coincidem quando as latitudes e longitudes são diferentes entre si, fig.(3.0.1). Os casos particulares, em que as normais se interceptam, ou seja, são coplanares:

a) quando os dois pontos P_1 e P_2 possuem a mesma latitude, ou seja, pertencem ao mesmo paralelo, fig. (3.0.2);

b) quando os dois pontos P_1 e P_2 possuem a mesma longitude, ou seja, pertencem ao mesmo meridiano, fig. (3.0.3).

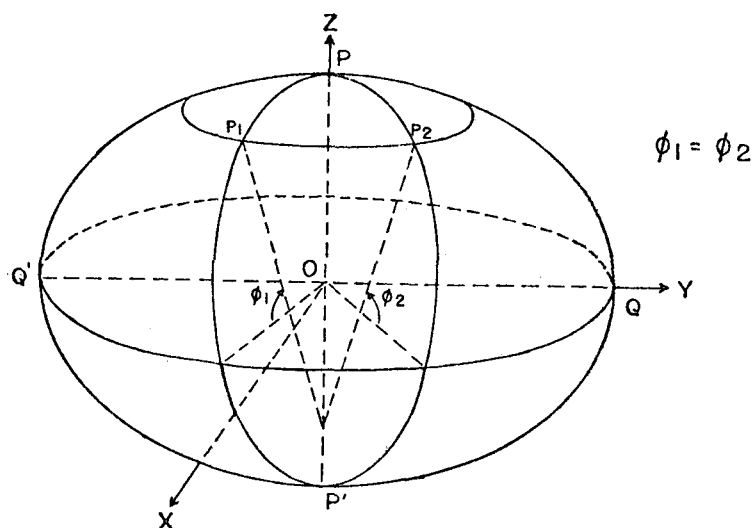


Fig. (3.0.2)

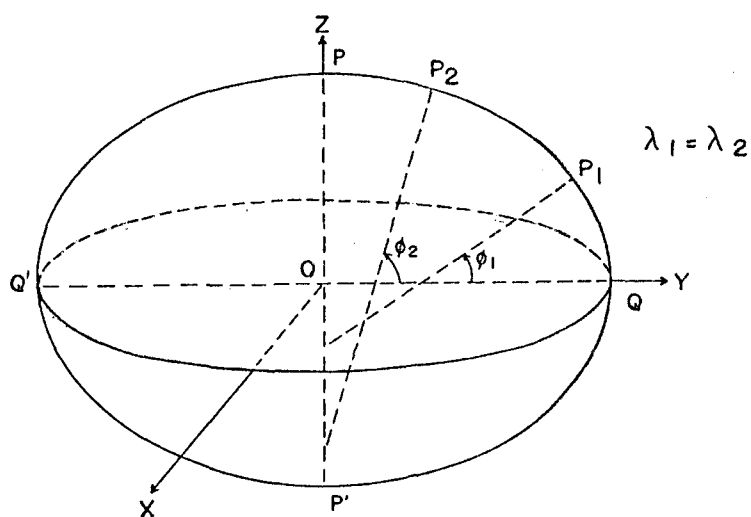


Fig. (3.0.3)

Desta forma, tanto no caso de latitudes como de longitudes iguais, as seções normais recíprocas são coincidentes.

Consideremos agora três pontos P_1 , P_2 e P_3 sobre a superfície de um elipsóide de revolução, fig.(3.0.4). Se fosse possível instalar um teodolito no vértice P_1 , fazendo o eixo vertical coincidir com a normal ao ponto P_1 . Quando apontado para o vértice P_2 o plano de visada coincidiria com o plano da seção normal direta de P_1 para P_2 . De P_2 apontado para P_1 o plano de visada do teodolito interceptaria a superfície do elipsóide ao longo do plano da seção normal recíproca de P_1 para P_2 . A mesma análise poderia ser feita para os outros vértices. A conclusão seria que o triângulo $P_1 P_2 P_3$ não ficaria determinado de maneira única, como podemos observar na fig. (3.0.4), em face da duplicidade das seções normais.

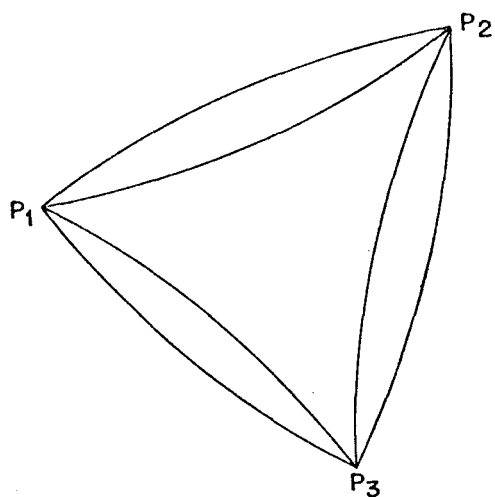


Fig.(3.0.4)

Para definirmos o triângulo elipsoidal $P_1 P_2 P_3$ de maneira única, temos que ligar os vértices $P_1 P_2 P_3$ através do menor caminho. A curva que representa o menor caminho entre dois vértices geodésicos P_1 e P_2 sobre o elipsóide de revolução não é a seção normal direta do P_1 nem a seção normal recíproca do mesmo ponto, e sim uma curva, em geral, reversa, situada entre as seções normais recíprocas denominada de "geodésica", figura (3.0.5).

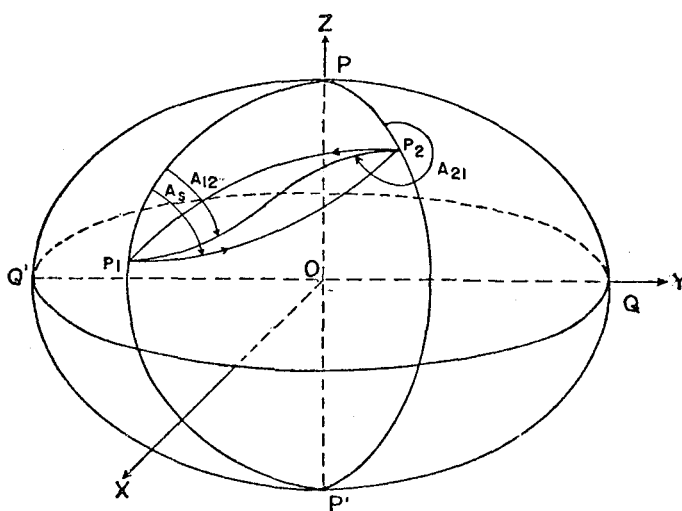


Fig. (3.0.5)

3.1 ÂNGULO FORMADO POR DUAS SEÇÕES NORMAIS RECÍPROCAS

Já sabemos que dois pontos P_1 e P_2 sobre a superfície de um elipsóide de revolução de coordenadas elipsóidicas diferentes definem duas seções normais recíprocas, fig. (3.0.5). Os ângulos formados pelas seções normais recíprocas são obtidos pela equação dada [1]:

$$\theta = \frac{e^2 S^2}{4b^2} \left(\text{sen} 2A_S \cos^2 \phi - \frac{S \text{ sen} A_S \text{ sen} 2\phi}{4b} \right) \quad (3.1.1)$$

Como a diferença entre os ângulos θ_1 e θ_2 formados pelas duas seções normais recíprocas em P_1 e P_2 respectivamente, fig. (3.1.1), é muito pequena, vamos considerá-los iguais, visto que, esta aproximação não comprometerá a precisão dos resultados na solução do problema geodésico direto em qualquer situação. O ângulo (θ) formado por duas seções normais recíprocas pode atingir a ordem dos centésimos de segundos nas triangulações e poligonais geodésicas clássicas.

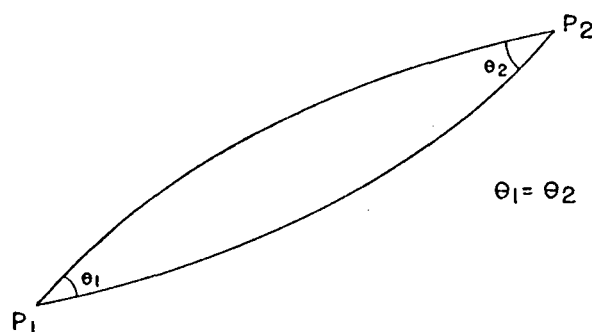


Fig. (3.1.1)

Tendo em vista esta aproximação $\theta_1 = \theta_2$, podemos afirmar que este ângulo depende diretamente dos elementos geodésicos do primeiro ponto (P_1 ; latitude elipsóidica (ϕ_1), azimute da seção

normal direta (A_S) contado a partir do norte no sentido horário e do comprimento (S) da linha geodésica.

Independente da distância (S) o ângulo θ é máximo quando a latitude elipsoidal (ϕ) for igual a zero e o azimute da seção normal direta (A_S) for igual a $\frac{\pi}{4}$.

3.2 SEPARAÇÃO MÁXIMA ENTRE OS ARCOS DE DUAS SEÇÕES NORMAIS RECÍPROCAS

Sejam dois pontos P_1 e P_2 de latitudes (ϕ) e longitudes (λ) diferentes sobre a superfície de um elipsóide de revolução. A fig. (3.2.1) mostra a seção normal direta $P_1 \rightarrow P_2$ do ponto P_1 para P_2 ; a seção normal recíproca $P_2 \rightarrow P_1$ de P_1 para P_2 . Agora faremos algumas considerações simplificativas, tomando arcos elípticos como arcos circulares, em face de lidarmos com grandezas muito pequenas [6]. Os planos geradores das duas seções normais recíprocas se interceptam dentro do elipsóide de revolução formando assim o ângulo plano $\widehat{dcg} = V$ que mede o diedro formado pelos planos e como aresta a corda $\overline{P_1 P_2}$, comum às duas seções normais. O ângulo plano V que mede o diedro é definido pela expressão [6]:

$$V = \beta \operatorname{sen} A_S \quad (3.2.1)$$

onde A_S é o azimute da seção normal direta e β é dado pela equação [6],

$$\beta = \frac{e^2 S \cos^2 \phi \cos A_S}{N} - \frac{e^2 S^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi}{2N^2} \quad (3.2.2)$$

Introduzindo na (3.2.1) o valor de β dado pela equação (3.2.2) temos

$$V = \frac{e^2 S \cos^2 \phi \cos A_S \operatorname{sen} A_S}{N} - \frac{e^2 S^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} A_S}{2N^2} \quad (3.2.3)$$

Considerando na fig. (3.2.1) o arco $\widehat{dg} = \ell$ como estando no ponto médio das duas seções normais, podemos dizer que o arco (ℓ) é a separação máxima entre as duas seções normais recíprocas e representemos por

$$\ell = DV \quad (3.2.4)$$

onde D é o raio que corresponde ao arco máximo (ℓ) e dado pela equação

$$D = \frac{S^2}{8N} \quad (3.2.5)$$

Estamos considerando o comprimento da seção normal como sendo igual ao comprimento da linha geodésica (S). Este assunto será estudado no tópico (4.3).

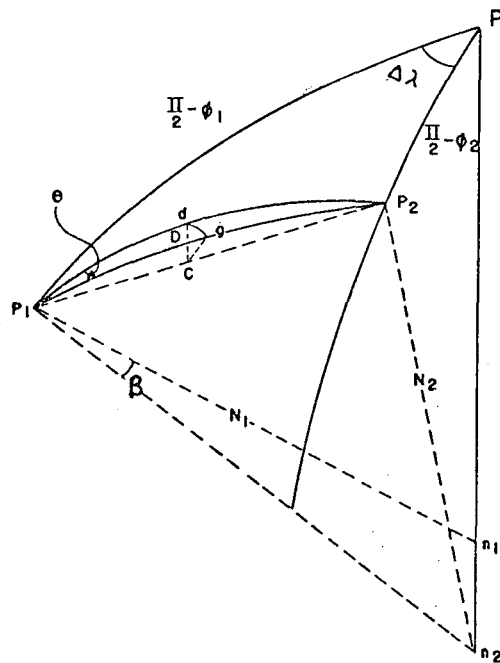


Fig. (3.2.1)

Introduzindo na (3.2.4) os valores V dado pela equação (3.2.3) e D dado pela (3.2.5), obtemos a equação da separação máxima entre as duas seções normais recíprocas, em função da latitude do ponto considerado, azimute da seção normal direta neste ponto e distância entre os dois pontos.

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{e^2 S^3 \cos^2 \phi \cos A_S \operatorname{sen} A_S}{8N^2} - \frac{e^2 S^4 \cos \phi \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} A_S}{16N^3} \\ &= \frac{e^2 S^3 \cos^2 \phi \operatorname{sen} 2A_S}{16N^2} - \frac{e^2 S^4 \operatorname{sen} A_S \operatorname{sen} 2\phi}{32N^3} \end{aligned}$$

logo

$$\ell = \frac{e^2 S^3}{16N^2} \left(\cos^2 \phi \operatorname{sen} 2A_S - \frac{S \operatorname{sen} A_S \operatorname{sen} 2\phi}{2N} \right) \quad (3.2.6)$$

Nas condições mais desfavoráveis $\phi=0$ e $A_S=\frac{\pi}{4}$, o valor da separação máxima (ℓ) entre as duas seções normais recíprocas, para um comprimento de 40000m da geodésica, não atinge um milímetro.

CAPÍTULO IV

4.0 LINHA GEODÉSICA NO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

A linha geodésica representa o menor caminho entre dois pontos sobre uma superfície. No plano corresponde a um segmento de reta, e na esfera a um arco de circunferência máxima. No elipsóide de revolução a geodésica, em geral, é uma curva reversa compreendida por duas seções normais recíprocas. Há casos em que a geodésica no elipsóide de revolução não é uma curva reversa como mostra a fig. (3.0.5), e sim uma curva plana. Já sabemos que as seções normais não definem com unicidade os triângulos elipsóidicos, e sim são definidos pela linha geodésica. Conceituamos a geodésica como sendo uma linha jacente numa superfície, e tal que, em todos os seus pontos o plano osculador é normal à superfície, ou, em todos os seus pontos a normal principal coincide com a normal à superfície [6].

4.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA GEODÉSICA SOBRE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Apresentemos a equação da linha geodésica em função das coordenadas retilíneas ortogonais. Podemos nos basear tanto na primeira como na segunda definição da linha geodésica dadas no tópico (4.0).

Aqui vamos nos referir à segunda definição, a qual diz que, a normal principal da curva coincide com a normal à superfície, em todos os pontos da linha geodésica jacente numa superfí-

cie.

A equação de uma superfície \bar{e} é dada por:

$$F(x,y,z) = 0 \quad (4.1.1)$$

Representemos os ângulos diretores da normal \bar{n} superfície no ponto $P_1(x,y,z)$ por α , β e γ .

Podemos escrever os co-senos diretores da normal \bar{n} superfície como segue:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{D}; \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{D}; \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{D} \quad (4.1.2)$$

onde

$$D^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \quad (4.1.3)$$

Representemos os ângulos diretores do raio de curvatura da geodésica contida no plano osculador no ponto $P_1(x,y,z)$ por α' , β' e γ' .

Os co-senos diretores do raio de curvatura da geodésica são expressos por:

$$\cos\alpha' = \frac{d^2x}{ds^2}\rho; \quad \cos\beta' = \frac{d^2y}{ds^2}\rho; \quad \cos\gamma' = \frac{d^2z}{ds^2}\rho \quad (4.1.4)$$

onde ρ é o raio de curvatura da geodésica dado pelo teorema de GUDERMAN e ds é um arco elementar. Pela definição da linha geodésica vemos que, a normal \bar{n} superfície coincide com a normal principal da curva, assim sendo, os co-senos diretores são iguais,

$$\cos\alpha = \cos\alpha'$$

$$\cos\beta = \cos\beta'$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma'$$

Por conseguinte, é válido comparar os segundos membros da (4.1.2) com os segundos membros da (4.1.4) e obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d^2 x}{ds^2} \rho$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d^2 y}{ds^2} \rho$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d^2 z}{ds^2} \rho$$

donde

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = D\rho$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = D\rho \tag{4.1.5}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2 z}{ds^2}} = D\rho$$

Igualando os primeiros membros das (4.1.5) obtemos a equação diferencial de segunda ordem da linha geodésica em função das coordenadas retilíneas ortogonais.

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2 z}{ds^2}} \quad (4.1.6)$$

No entanto, os problemas da linha geodésica sobre uma superfície de revolução qualquer, são resolvidos em função do Teorema de CLAIRAUT [12]:

$$r \operatorname{sen} A = \text{const} \quad (4.1.7)$$

assim, para a linha geodésica sobre uma superfície de revolução o produto do raio do paralelo pelo seno do azimute (A) da linha geodésica no ponto considerado é constante.

4.2 COMPORTAMENTO DA LINHA GEODÉSICA SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

É de fundamental importância na solução do problema geodésico direto e inverso o conhecimento do comportamento da linha geodésica sobre a superfície de um elipsóide de revolução. O estudo do comportamento será todo baseado no teorema de CLAIRAUT, representado pela (4.1.7).

Da figura (2.3.1) podemos escrever

$$r = a \cos \mu \quad (4.2.1)$$

Introduzindo na (4.1.7) o valor de r dado pela (4.2.1)

vem

$$a \cos\mu \operatorname{sen}A = \text{const} \quad (4.2.2)$$

Podemos escrever para dois pontos quaisquer P_n e P_{n+1} da linha geodésica, as seguintes relações

$$r_n \operatorname{sen}A_n = r_{n+1} \operatorname{sen}A_{n+1} \quad (4.2.3a)$$

e

$$\cos\mu_n \operatorname{sen}A_n = \cos\mu_{n+1} \operatorname{sen}A_{n+1} \quad (4.2.3b)$$

Considerando agora um ponto no equador, onde as latitudes geodésica, geocêntrica e reduzida são nulas, podemos escrever a equação que envolve o azimute equatorial da geodésica (A_Q) a partir da (4.2.2):

$$a \operatorname{sen}A_Q = \text{const} \quad (4.2.4)$$

Baseado na (4.2.4) podemos afirmar que o seno do azimute equatorial da geodésica (A_Q) é mínimo

$$\operatorname{sen}A_Q = \min$$

Comparando a (4.1.7) com a (4.2.4) temos

$$r \operatorname{sen}A = a \operatorname{sen}A_Q \quad (4.2.5)$$

Introduzindo na (4.2.5) o valor de r dado pela (2.4.9) obtemos a equação do azimute equatorial (A_Q) da linha geodésica em função da latitude geodésica (ϕ) de um ponto e do azimute (A) da geodésica neste mesmo ponto. O azimute equatorial de uma

geodésica \bar{e} é do mesmo quadrante do azimute em um ponto qualquer da mesma, com latitude variando de zero até ao paralelo limite.

$$\text{sen}A_Q = \frac{N \cos \phi \text{sen}A}{a} \quad (4.2.6a)$$

Introduzindo na (4.2.5) o valor de r dado pela (4.2.1), obtemos a equação do azimute equatorial da linha geodésica, em função da latitude reduzida (μ) de um ponto e do azimute (A) da linha neste mesmo ponto.

$$\text{sen}A_Q = \cos \mu \text{sen}A \quad (4.2.6b)$$

A linha geodésica sobre uma superfície de revolução, como vimos anteriormente, corta a linha equatorial com um azimute (A_Q). Seguindo o percurso da linha geodésica no sentido nordeste a latitude reduzida (μ) aumenta, assim como o azimute (A) como mostra a (4.2.2). Quando o azimute (A) atinge o valor de $\frac{\pi}{2}$ num ponto P_{\max} a latitude reduzida será máxima (μ_{\max}), portanto a (4.2.2) fica,

$$a \cos \mu_{\max} \text{sen} \frac{\pi}{2} = a \cos \mu_{\max} = \text{const} \quad (4.2.7)$$

Analisando ainda a (4.2.6b) seguindo o percurso da linha geodésica quando parte de um ponto no equador concluímos que nos sentidos nordeste e sudeste a latitude reduzida (μ_{\max}) será $\mu_{\max} = \frac{\pi}{2} - A_Q$. Nos sentidos noroeste e sudoeste será $\mu_{\max} = A_Q - \frac{3\pi}{2}$.

Os pontos da linha que possuem latitude reduzida máxima chamamos de v̄rtices da geod̄esica. De imediato podemos concluir tamb̄m que cada espira da geod̄esica possui dois v̄rtices, um no hemisf̄rio norte e outro no hemisf̄rio sul.

Ambos os v̄rtices possuem latitudes iguais em valor absoluto. Agora analisemos apenas o caso de uma linha geod̄esica de azimute ($0 < A < \frac{\pi}{2}$) que parte de um ponto do equador e atinja o seu v̄rtice num ponto P_{\max} de latitude reduzida máxima (μ_{\max}) com um azimute $\frac{\pi}{2}$. O azimute (A) continua crescendo tomando o sentido sudeste em direç̄o ao hemisf̄rio sul, cruzando novamente o equador com um azimute ($\pi - A_0$), prosseguindo at̄ atingir o outro v̄rtice de latitude reduzida máxima ($-\mu_{\max}$) e azimute $\frac{3\pi}{2}$. Deste ponto, a linha toma a direç̄o do hemisf̄rio norte no sentido noroeste at̄ cruzar novamente o equador com outro azimute A_0 . Assim, inicia novamente o mesmo procedimento. Isto ocorre em n̄mero indefinido sempre entre dois paralelos limites de latitude reduzida μ_{\max} e $-\mu_{\max}$, sem que haja coincid̄ncia com a espira anterior.

Mediante o que foi estudado at̄ aqui podemos concluir que a linha geod̄esica sobre a superf̄cie de um elips̄ide de revoluç̄o ̄ representada por uma curva reversa aberta confinada entre dois paralelos limites.

Mostremos agora a express̄o da latitude geod̄esica m̄xima (ϕ_{\max}) de uma linha geod̄esica em funç̄o do azimute equatorial.

Da (2.3.16) podemos escrever a equaç̄o da latitude reduzida m̄xima em funç̄o da latitude geod̄esica m̄xima e desenvolvendo,

$$\operatorname{tg} \mu_{\max} = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \phi_{\max}$$

$$\operatorname{tg}^2 \mu_{\max} = (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi_{\max}$$

$$\operatorname{sec}^2 \mu_{\max} = 1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi_{\max}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \mu_{\max}} = 1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi_{\max} \quad (4.2.8)$$

Da (4.2.6b) podemos deduzir a expressão $\operatorname{sen} A_Q = \cos \mu_{\max}$ e substituir na (4.2.8) o valor de $\cos \mu_{\max}$, obtemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A_Q} = 1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi_{\max}$$

e fazendo algumas transformações vamos obter a equação da latitude geodésica máxima em função do azimute equatorial

$$\operatorname{tg}^2 \phi_{\max} = \frac{1}{(1 - e^2)} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A_Q} - 1 \right) \quad (4.2.9)$$

4.3 DIFERENÇA DE COMPRIMENTO ENTRE A LINHA GEODÉSICA E A SEÇÃO NORMAL

Já sabemos que as seções normais não formam com unicidade os triângulos elipsóidicos e para solucionar o problema geodésico temos que conhecer a linha geodésica correspondente às seções normais. Estas curvas, seções normais e geodésica, são muito importantes para a solução do problema geodésico direto e inverso.

A diferença de comprimento da seção normal relativa a dois pontos P_1 e P_2 e o comprimento da correspondente linha geodésica é calculada através de uma série. Sendo suficiente apenas o uso do primeiro termo desta série [6]:

$$\delta - S = \frac{S^5 e^4 \cos^4 \phi \sin^2 2A}{360N^4} + \dots \quad (4.3.1)$$

onde δ é o comprimento da seção normal e S o comprimento da linha geodésica. Fazendo a aplicação da (4.3.1) para os dados: latitude do ponto $P_1 \phi = 10^\circ$, o azimute da linha geodésica entre P_1 e $P_2 A = \frac{\pi}{4}$ e comprimento da mesma de 40000m, encontramos uma diferença $\delta - S = 7 \times 10^{-12}$ m. Para a mesma latitude e azimute, porém de comprimento igual a 500000m, encontramos uma diferença $\delta - S = 2 \times 10^{-6}$ m. Desta maneira podemos dizer que a diferença entre os comprimentos da seção normal e da linha geodésica é muito pequena. Por esta razão, confundimos o comprimento da seção normal com o comprimento da geodésica.

4.4 ÂNGULO FORMADO PELAS SEÇÕES NORMAIS RECÍPROCAS E A LINHA GEODÉSICA

Já sabemos que duas seções normais recíprocas sobre a superfície de um elipsóide de revolução formam entre si um ângulo θ . Se fosse possível instalar um teodolito sobre a superfície do elipsóide, as medidas angulares se refeririam às seções normais. Todavia, necessitamos transformar as medidas correspondentes às seções normais em medidas angulares correspondente à linha geodésica. Por esta razão, trataremos neste tópico da transformação do azimute da seção normal direta no azimute da correspondente linha geodésica.

A fig. (4.4.1) mostra duas seções normais recíprocas e a correspondente linha geodésica (S).

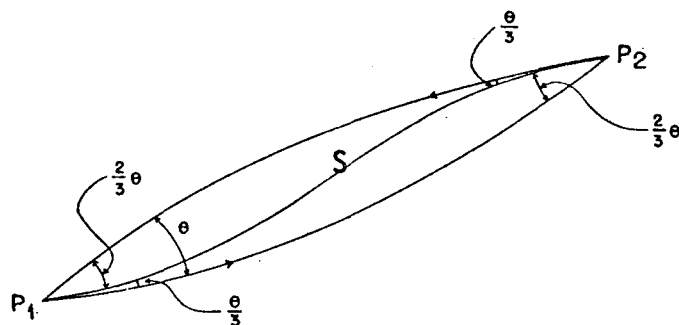


Fig. (4.4.1)

A linha geodésica (S) divide o ângulo θ de duas seções normais recíprocas na razão de 1:2. O ângulo formado pela geodésica e a seção normal direta de P_1 para P_2 corresponde a um terço do ângulo formado pelas seções normais recíprocas ($\frac{\theta}{3}$). O ângulo formado pela geodésica e a seção normal recíproca de P_1 para P_2 é de dois terços do ângulo formado pelas seções normais recíprocas ($\frac{2\theta}{3}$), fig. (4.4.1).

O ângulo formado pelas seções normais recíprocas é dado pela (3.3.1), logo:

$$\frac{\theta}{3} = \frac{e' 2s^2}{12b^2} \left(\text{sen} 2A_S \cos^2 \phi - \frac{S \text{sen} A_S \text{sen} 2\phi}{4b} \right) \quad (4.4.1a)$$

Para se transformar o azimute da seção normal direta (A_S) no azimute da correspondente geodésica (A_{12}) subtraímos um terço do ângulo formado pelas seções normais recíprocas ($\frac{\theta}{3}$) do

azimute da seção normal direta (A_S).

$$A_{12} = A_S - \frac{\theta}{3} \quad (4.4.2)$$

Lembramos que neste trabalho o azimute \bar{A} é contado a partir do norte no sentido horário com variação $0 \leq A \leq 2\pi$.

CAPÍTULO V

5.0 SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO DIRETO

Os problemas geodésicos direto e inverso são resolvidos mediante uma representação esférica do elipsóide. Todavia, as latitudes, longitudes, distâncias e ângulos não podem ser tomados simultaneamente conservados, fazendo-se necessário determinar correções para calcular valores reais de alguns elementos citados acima. Deste modo, com auxílio da trigonometria esférica podemos facilmente obter a solução do problema. Neste trabalho procuramos desenvolver fórmulas simples e práticas para solucionar o problema geodésico direto, que consiste em se obter as coordenadas elipsóidicas de um segundo ponto e o contra-azimute da linha geodésica neste ponto.

5.1 EQUAÇÃO DO ÂNGULO AUXILIAR PARA O CÁLCULO DO CONTRA-AZIMUTE DA LINHA GEODÉSICA

Para calcular o contra-azimute (A_{21}) da linha geodésica definida por dois pontos P_1 e P_2 sobre a superfície de um elipsóide de revolução, fazemos a sua representação esférica conservando as latitudes e utilizando o azimute da seção normal direta (A_S). Evitamos no cálculo do contra-azimute a dependência direta das coordenadas do segundo ponto. Para cada caso elegemos uma esfera, tangente ao elipsóide ao longo do paralelo do ponto P_1 , de raio igual a grande normal (N_1), (técnica usada por PUISSANT).

A fig. (5.1.1) ilustra o triângulo esférico de uma esfera de raio N , para o cálculo do ângulo ω , dito auxiliar na obtenção do contra-azimute geodésico.

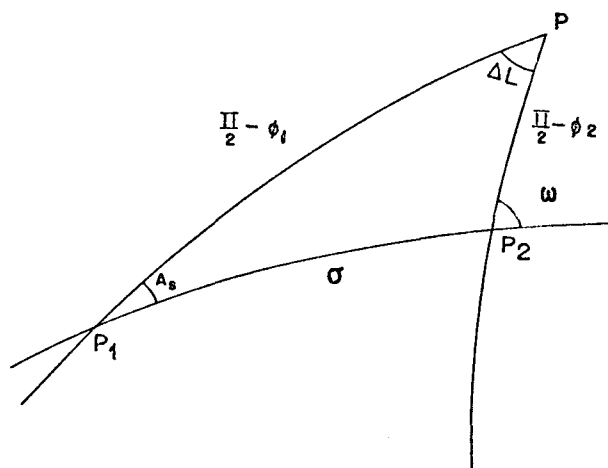


Fig. (5.1.1)

A normal do ponto P_1 e do ponto P_2 definem a seção normal direta de amplitude σ sobre a esfera. Pela condição de tangência da esfera ao elipsóide, ao longo do paralelo do ponto P_1 conservamos a latitude elipsóidica ϕ_1 .

Aplicando no triângulo esférico fig. (5.1.1), a fórmula dos quatro elementos relativa a lados e a analogia dos senos temos:

$$\text{sen}\phi_1 = \text{cos}\sigma \text{sen}\phi_2 - \text{sen}\sigma \text{cos}\phi_2 \text{cos}\omega \quad (5.1.1)$$

$$\text{sen}\phi_2 = \text{sen}\phi_1 \text{cos}\sigma + \text{cos}\phi_1 \text{sen}\sigma \text{cos}A_S \quad (5.1.2)$$

$$\text{cos}\phi_2 = \frac{\text{cos}\phi_1 \text{sen}A_S}{\text{sen}\omega} \quad (5.1.3)$$

Da (5.1.1) tiramos

$$\cos \omega = \frac{\cos \sigma \operatorname{sen} \phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1}{\operatorname{sen} \sigma \cos \phi_2} \quad (5.1.4)$$

Substituindo na (5.1.4) os valores de $\operatorname{sen} \phi_2$ e $\cos \phi_2$ dados pelas equações (5.1.2) e (5.1.3) respectivamente e fazendo simplificações de natureza trigonométrica, obtemos a equação do ângulo auxiliar (ω) para o cálculo do contra-azimute da linha geodésica.

$$\cos \omega = \frac{\cos \sigma (\operatorname{sen} \phi_1 \cos \sigma + \cos \phi_1 \operatorname{sen} \sigma \cos A_S) - \operatorname{sen} \phi_1}{\operatorname{sen} \sigma \frac{\cos \phi_1 \operatorname{sen} A_S}{\operatorname{sen} \omega}}$$

$$\cot \omega = \frac{\cos^2 \sigma \operatorname{sen} \phi_1 + \cos \sigma \cos \phi_1 \operatorname{sen} \sigma \cos A_S - \operatorname{sen} \phi_1}{\operatorname{sen} \sigma \cos \phi_1 \operatorname{sen} A_S}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\cos^2 \sigma \operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} A_S} + \frac{\cos \sigma \cos A_S}{\operatorname{sen} A_S} - \frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} A_S}$$

$$= \frac{-\operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{sen} \sigma + \cos \sigma \cos A_S}{\operatorname{sen} A_S}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{sen} A_S}{\cos \sigma \cos A_S - \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{sen} \sigma} \quad (5.1.5)$$

Esta fornece o ângulo auxiliar (ω) em função dos elemen

tos: latitude geodésica (ϕ_1) do primeiro ponto, azimute da seção normal direta (A_S) de P_1 para P_2 no ponto considerado e do comprimento da seção normal direta; este último fazemos igual ao comprimento da linha geodésica (S).

A amplitude esférica $P_1P_2 = \sigma$ é dada pela equação:

$$\sigma = \frac{S}{N_1} \quad (5.1.6)$$

onde N_1 é a grande normal e S o comprimento da seção normal direta.

O valor correspondente a dois terço do ângulo θ obtido pela (3.1.1) ($\frac{2\theta}{3}$), somado com o ângulo ω obtemos um valor ϵ correspondente ao ângulo formado pela geodésica e o meridiano do ponto P_2 , fig. (5.1.2)

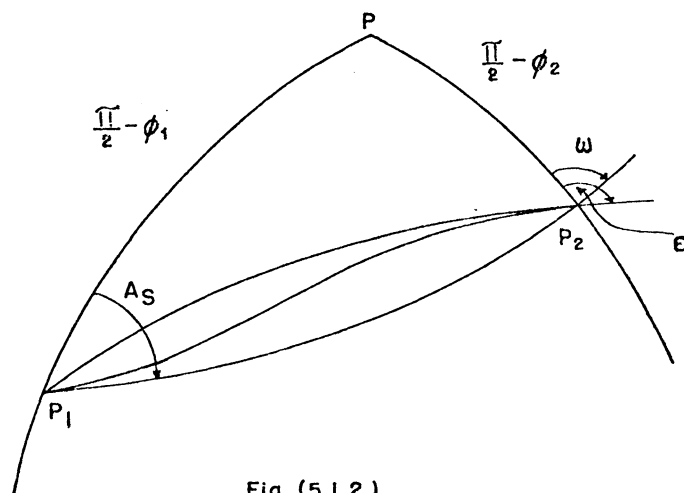


Fig. (5.1.2)

$$\epsilon = \omega + \frac{2\theta}{3} \quad (5.1.7)$$

Este valor somado com π obtemos o contra-azimute da geodésica para o caso que ilustra a fig. (3.0.5).

$$A_{21} = \epsilon + \pi \quad (5.1.8)$$

O contra-azimute sofre variação de quadrante em função do azimute da geodésica e do comprimento da mesma. Por esta razão, apresentemos o quadro (5.1.1) que identifica o quadrante do contra-azimute da geodésica.

| QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO QUADRANTE DO CONTRA-AZIMUTE (A_{21}) | |
|---|--|
| $0 < A_{12} < \pi$ | se ω for positivo (+) ou negativo (-) o A_{21} estará no terceiro ou quarto quadrante respectivamente. |
| $\pi < A_{12} < 2\pi$ | se ω for positivo (+) ou negativo (-) o A_{21} estará no primeiro ou segundo quadrante respectivamente. |

quadro (5.1.1)

Os quadrantes são numerados no sentido horário.

Quando o azimute da linha geodésica for zero ou π o contra-azimute será π ou zero respectivamente. Fato este, que pode ser verificado em função das equações (5.1.5) e (5.1.6). Sabemos que a linha geodésica no plano é um segmento de reta, neste caso o contra-azimute difere do azimute de π . Quando operamos sobre uma superfície de revolução o contra-azimute difere do azimute de π mais um valor angular γ , que chamamos de convergência meridiana:

$$\pi + \gamma = A_{21} - A_{12} \quad (5.1.9)$$

5.2 EQUAÇÃO DA LONGITUDE ELIPSÓIDICA

O cálculo da longitude elipsóidica (λ) se verifica mediante relações matemáticas entre elementos elipsóidicos e esféricos. A representação esférica do elipsóide se faz através de uma esfera de raio N em função de ϕ_1 , conservando a latitude e-

lipsóidica ϕ_1 , longitude elipsóidica e utilizando o ângulo ϵ .

A fig. (5.2.1) ilustra o triângulo esférico para o cálculo da diferença de longitude ($\Delta\lambda$).

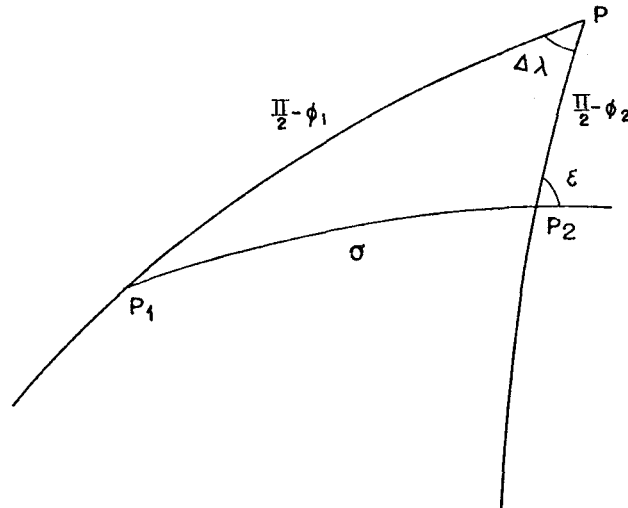


Fig. (5.2.1)

Na fig. (5.2.1) a amplitude esférica ver (5.1.6) σ é definida pelos pontos P_1 e P_2 de latitudes elipsóidicas ϕ_1 e ϕ_2 respectivamente.

Aplicando na fig. (5.2.1) a analogia dos senos temos:

$$\text{sen}\Delta\lambda = \frac{\text{sen}\sigma \text{ sen}|\epsilon|}{\text{cos}\phi_1} \quad (5.2.1)$$

que calcula a diferença de longitude elipsóidica entre dois pontos sobre a superfície esférica. O valor ϵ é usado em módulo para facilitar a obtenção da longitude do segundo ponto. Consideremos a longitude negativa para oeste e positiva para leste do meridiano de Greenwich. Desta forma, estabelecemos a expressão geral para calcular a longitude do segundo ponto,

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \pm \Delta\lambda \quad (5.2.2)$$

Valendo o sinal positivo quando o segundo ponto se achar a leste do primeiro.

5.3 EQUAÇÃO DA LATITUDE ELIPSÓIDICA

Consideremos um elipsóide de revolução e sua esfera reduzida gerada pela revolução da circunferência de raio igual ao semi-eixo maior (a) em torno do eixo de rotação (Z) do elipsóide, e baseados nos estudos já realizados podemos escrever que os raios dos paralelos (r) dos pontos da linha geodésica e seus correspondentes na esfera reduzida são iguais. Desta forma podemos apresentar a seguinte igualdade:

$$N_1 \cos \phi_1 = a \cos \mu_1 \quad (5.3.1)$$

onde N_1 é o raio de curvatura da seção normal do primeiro vertical de um ponto P_1 sobre o elipsóide de revolução de latitude elipsóidica ϕ_1 e latitude reduzida μ_1 correspondente ao mesmo ponto P_1 .

Demonstra-se que o azimute da linha geodésica dado pela (4.4.2) em seus pontos sobre a superfície de um elipsóide de revolução é igual ao azimute da linha nos seus correspondes pontos-imagem sobre a esfera reduzida. De acordo com o exposto, podemos formular relações entre elementos elipsóidicos e elementos da esfera reduzida para o cálculo da latitude elipsóidica do segundo ponto P_2 .

A fig. (5.3.1) ilustra um triângulo esférico correspondente à esfera reduzida.

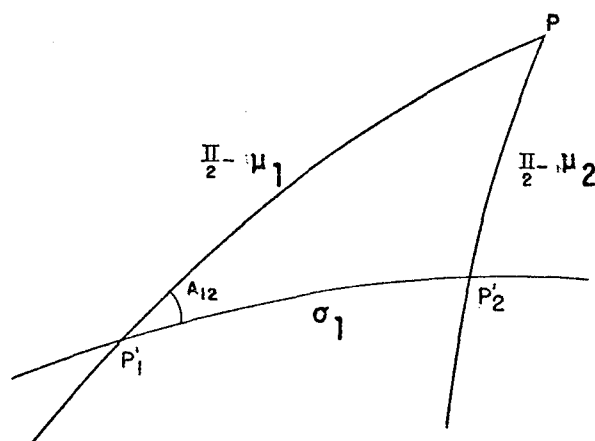


Fig. (5.3.1)

Os dois pontos-imagem P_1' e P_2' sobre a esfera reduzida definem a amplitude esférica σ_1 , que corresponde à distância entre os dois pontos P_1 e P_2 sobre o elipsóide de revolução.

Aplicando na figura (5.3.1) a fórmula dos quatro elementos referente a lados temos

$$\text{sen}\mu_2 = \text{sen}\mu_1 \cos\sigma_1 + \cos\mu_1 \text{sen}\sigma_1 \cos A_{12} \quad (5.3.2)$$

A (2.3.16) estabelece a relação entre as latitudes elipsóidica (ϕ) e reduzida (μ) de um ponto.

$$\text{tg}\mu_1 = (1 - e^2)^{1/2} \text{tg}\phi_1 \quad (5.3.3a)$$

$$\text{sen}\mu_1 = (1 - e^2)^{1/2} \text{tg}\phi_1 \cos\mu_1 \quad (5.3.3b)$$

Introduzindo na (5.3.3b) o valor de $\cos\mu_1$ tirado da (5.3.1), temos

$$\text{sen}\mu_1 = \frac{N_1}{a} (1 - e^2)^{1/2} \text{sen}\phi_1 \quad (5.3.4)$$

Introduzindo na (5.3.2) o valor de $\cos\mu_1$ da (5.3.1) e o valor de $\operatorname{sen}\mu_1$ dado pela (5.3.4), temos a equação da latitude reduzida do segundo ponto P_2 .

$$\operatorname{sen}\mu_2 = \frac{N_1}{a} \left[(1-e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\phi_1 \cos\sigma_1 + \cos\phi_1 \operatorname{sen}\sigma_1 \cos A_{12} \right] \quad (5.3.5)$$

Já sabemos que a (2.3.16) estabelece a relação entre as latitudes elipsóidica e reduzida. Podemos expressá-la na forma $\phi=f(\mu)$.

$$\operatorname{tg}\phi_2 = \frac{\operatorname{sen}\mu_2}{\left[(1-e^2)(1-\operatorname{sen}^2\mu_2) \right]^{1/2}} \quad (5.3.6)$$

Esta permite o cálculo da latitude elipsóidica de um ponto em função da latitude reduzida do mesmo ponto, com auxílio da (5.3.5). A latitude $\bar{\phi}$ é considerada positiva para o hemisfério norte e negativa para o hemisfério sul, com uma variação de 0 a $\frac{\pi}{2}$ em valor absoluto para ambos hemisférios. No cálculo das coordenadas elipsóidicas de um segundo ponto o maior percalço é a obtenção da amplitude esférica que normalmente é realizada mediante uma série, que causa um grande volume de cálculo. Neste trabalho, a amplitude esférica (σ_1) para o cálculo da latitude do segundo ponto é dada pela equação:

$$\sigma_1 = \frac{S}{R_e} \quad (5.3.7)$$

onde S corresponde ao comprimento da geodésica e R_e representa o parâmetro linear da esfera, dado pela equação:

$$R_e = \frac{M_1 + R_1}{2} \quad (5.3.8)$$

sendo M_1 o raio de curvatura da seção meridiana e R_1 o raio vetor, ambos relativos ao primeiro ponto e dados pelas equações (2.4.7) e (2.5.2), respectivamente.

$$M_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}} \quad (5.3.9)$$

$$R_1 = N_1 \left[1 + e^2 \sin^2 \phi_1 (e^2 - 2) \right]^{1/2} \quad (5.3.10)$$

Lembramos que a cada ponto da geodésica sobre a superfície elipsoidal corresponde a um ponto-imagem da circunferência máxima da esfera reduzida. No entanto, o cálculo da amplitude esférica (σ_1) não se verifica sobre esta superfície pelo fato de causar grande deformação linear à geodésica. Existe vasta bibliografia que trata do referido problema. Todavia, o cálculo da amplitude esférica é desenvolvido em série, como já dissemos antes, acarretando grande volume de cálculo. No intuito de minimizar os cálculos tentamos encontrar uma esfera, mediante testes, que solucionasse o problema em foco de forma satisfatória. Adotamos a latitude obtida pelas fórmulas de SODANO como padrão, com a qual comparamos a latitude obtida pelas fórmulas ora apresentadas. Vários casos foram testados variando latitude, distância e azimuth, e para cada caso variamos a esfera, porém a que ofereceu melhor resultado foi de raio R_e dado pela (5.3.8).

5.4 SÍNTESE DAS FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DO CONTRA-AZIMUTE DA LINHA GEODÉSICA E COORDENADAS ELIPSÓIDICAS DO SEGUNDO PONTO

1) Fórmulas usadas no cálculo do contra-azimute da linha geodésica (A_{21}).

1.1 Excentricidade primeira

$$e = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a}$$

1.2 Excentricidade segunda

$$e' = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{b}$$

1.3 Ângulo formado por duas seções normais recíprocas

$$\theta = \frac{e'^2 S^2}{4b^2} (\text{sen} 2A_S \cos^2 \phi_1 - \frac{S \text{sen} A_S \text{sen} 2\phi_1}{4b})$$

1.4 Raio de curvatura da seção normal do primeiro vertical

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi_1)^{1/2}}$$

1.5 Amplitude esférica

$$\sigma = \frac{S}{N_1}$$

1.6 Ângulo auxiliar para o cálculo do contra-azimute da linha geodésica

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{sen} A_S}{\cos \sigma \cos A_S - \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{sen} \sigma}$$

1.7 Ângulo ϵ , relativo à geodésica

$$\epsilon = \omega + \frac{2\theta}{3}$$

1.8 Expressão que calcula o contra-azimute da geodésica para o caso da fig. (3.0.5)

$$A_{21} = \epsilon + \pi$$

Para os demais casos ver quadro (5.1.1), pág. (45).

2) Fórmulas usadas no cálculo da longitude elipsoidal do segundo ponto (λ_2).

2.1 Amplitude esférica

$$\sigma = \frac{S}{N_1}$$

2.2 Diferença de longitude

$$\operatorname{sen} \Delta \lambda = \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} |\epsilon|}{\cos \phi_1}$$

2.3 Expressão geral da longitude elipsoidal do segundo ponto

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \pm \Delta\lambda$$

3) Fórmulas usadas no cálculo da latitude elipsoidal do segundo ponto (ϕ_2).

3.1 Raio de curvatura da seção normal meridiana

$$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1)^{3/2}}$$

3.2 Raio de curvatura da seção normal do primeiro vertical

$$N_1 = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1)^{1/2}}$$

3.3 Raio vetor de um ponto do elipsóide de revolução

$$R_1 = N_1 \left[1 + e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 (e^2 - 2) \right]^{1/2}$$

3.4 Parâmetro linear da esfera sobre a qual calculamos a amplitude esférica correspondente ao comprimento da geodésica

$$R_e = \frac{M_1 + R_1}{2}$$

3.5 Amplitude esférica

$$\sigma_1 = \frac{S}{R_e}$$

3.6 Azimute da linha geodésica

$$A_{12} = A_S - \frac{\theta}{3}$$

3.7 Latitude reduzida do segundo ponto

$$\text{sen}\mu_2 = \frac{N_1}{a} \left[(1-e^2)^{1/2} \text{sen}\phi_1 \cos\sigma_1 + \cos\phi_1 \text{sen}\sigma_1 \cos A_{12} \right]$$

3.8 Latitude elipsoidal do segundo ponto

$$\text{tg}\phi_2 = \frac{\text{sen}\mu_2}{\left[(1-e^2)(1-\text{sen}^2\mu_2) \right]^{1/2}}$$

CAPÍTULO VI

6.0 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA GEODÉSICO DIRETO

A solução do problema geodésico direto consiste em se determinar as coordenadas elipsóidicas do segundo ponto, assim como o contra-azimute da linha geodésica. Para tal, se faz necessário o conhecimento das coordenadas do primeiro ponto como também o azimute da seção normal direta neste ponto e a distância entre os mesmos. As fórmulas que serão usadas encontram-se resumidas no tópico (5.4). Facilita ao usuário a utilização de máquinas de calcular simples para efetuar o transporte de coordenadas. Apresentaremos a seguir o programa em linguagem de programação FORTRAN IV, acompanhado de seu fluxograma, para solucionar o problema geodésico direto em diversas situações e alguns exemplos.

6.1 PROGRAMA EM LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO FORTRAN IV

O programa que apresentaremos soluciona o problema geodésico direto especificamente em poligonais geodésicas. Este programa se caracteriza pelo seu funcionamento especificado a seguir.

Para o primeiro ponto ou vértice são dados: latitude (ϕ_1), longitude (λ_1), azimute da seção normal direta (A_S) neste ponto e a distância (S) do primeiro ao segundo ponto. O programa comanda a execução do cálculo do azimute da geodésica (A_{12}) no primeiro ponto, das coordenadas do segundo ponto (ϕ_2, λ_2) e con-

tra-azimute (A_{21}) da geodésica. A partir do segundo ponto ou vértice da poligonal são dados: o ângulo interno formado pelos dois lances (anterior e posterior) da poligonal contado no sentido horário e a distância do ponto considerado ao seguinte. Assim se procede para n-pontos.

Instruções para utilização do programa.

1. Definir o elipsóide de revolução que está sendo usado, através de seus parâmetros.
2. Entrar com os dados via cartão:
 - 2.1 Definir o número de vértices ou pontos da poligonal geodésica, incluindo os extremos.
 - 2.2 Latitude (ϕ_1) e longitude (λ_1).
 - 2.3 Ângulo horizontal e distância (S) em metros.

Entrar com os ângulos em graus, minutos e segundos, cujos campos estão definidos no comando de especificação de entrada (ver listagem do programa, apêndice A). O ângulo horizontal para o primeiro ponto corresponde ao azimute geodésico e a partir do segundo ponto corresponde ao ângulo interno.

Lembramos que a latitude sul e longitude oeste são consideradas negativas. O azimute é contado a partir do norte no sentido horário.

A partir do segundo ponto entrar apenas com um cartão com os dados correspondentes ao item (2.3).

3. Imprime os elementos geodésicos correspondentes:
 - a) ao primeiro ponto: latitude, longitude, azimute da geodésica e distância em metros;
 - b) ao segundo ponto: latitude, longitude e contra-azimute da geodésica.

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

PONTO LATITUDE= -1 28 30.5631
 LONGITUDE= -48 30 25.4320
 1 AZIMUTE= 10 25 10.3490
 DISTANCIA= 30860.120

 LATITUDE= -1 12 2.4291
 2 LONGITUDE= -48 27 24.9081
 CONTRA-AZIMUTE= 190 25 6.1337

PONTO LATITUDE= -1 12 2.4291
 LONGITUDE= -48 27 24.9081
 2 AZIMUTE= 350 47 56.4764
 DISTANCIA= 62640.600

 LATITUDE= 0 -38 29.2956
 3 LONGITUDE= -48 32 48.8248
 CONTRA-AZIMUTE= 170 48 1.6829

PONTO LATITUDE= 0 -38 29.2956
 LONGITUDE= -48 32 48.8248
 3 AZIMUTE= 31 28 23.8914
 DISTANCIA= 185371.230

 LATITUDE= 0 47 17.9954
 4 LONGITUDE= -47 40 39.0897
 CONTRA-AZIMUTE= 211 28 27.9045

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

PONTO LATITUDE= -23 4 45.8959
 LONGITUDE= -48 53 32.4464
 1 AZIMUTE= 238 22 26.9135
 DISTANCIA= 56896.553

 LATITUDE= -23 20 53.1461
 2 LONGITUDE= -49 21 57.9514
 CONTRA-AZIMUTE= 58 33 39.1629

PONTO LATITUDE= -23 20 53.1461
 LONGITUDE= -49 21 57.9514
 2 AZIMUTE= 121 44 20.2030
 DISTANCIA= 39742.395

 LATITUDE= -23 32 11.4501
 3 LONGITUDE= -49 2 6.4124
 CONTRA-AZIMUTE= 301 36 26.1771

PONTO LATITUDE= -23 32 11.4501
 LONGITUDE= -49 2 6.4124
 3 AZIMUTE= 182 39 22.1429
 DISTANCIA= 39598.950

 LATITUDE= -23 53 37.1867
 4 LONGITUDE= -49 3 11.2820
 CONTRA-AZIMUTE= 2 39 48.2315

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

PONTO LATITUDE= -45 12 45.8452
 LONGITUDE= -48 20 10.3218
 1 AZIMUTE= 90 0 0.0000
 DISTANCIA= 100210.250

 LATITUDE= -45 12 20.2019
 2 LONGITUDE= -47 3 38.4775
 CONTRA-AZIMUTE= 269 5 41.1761

PONTO LATITUDE= -45 12 20.2019
 LONGITUDE= -47 3 38.4775
 2 AZIMUTE= 109 16 11.6124
 DISTANCIA= 205430.609

 LATITUDE= -45 47 18.7870
 3 LONGITUDE= -44 33 59.5235
 CONTRA-AZIMUTE= 287 29 27.1079

PONTO LATITUDE= -45 47 18.7870
 LONGITUDE= -44 33 59.5235
 3 AZIMUTE= 37 56 5.3670
 DISTANCIA= 300840.286

 LATITUDE= -43 37 48.0181
 4 LONGITUDE= -42 16 30.6946
 CONTRA-AZIMUTE= 216 19 20.8295

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

PONTO LATITUDE= -85 25 41.3458
 LONGITUDE= -50 40 25.3543
 1 AZIMUTE= 330 35 21.3990
 DISTANCIA= 80420.330

 LATITUDE= -84 47 20.2112
 2 LONGITUDE= -54 34 9.8392
 CONTRA-AZIMUTE= 154 28 15.0612

PONTO LATITUDE= -84 47 20.2112
 LONGITUDE= -54 34 9.8392
 2 AZIMUTE= 316 43 27.3208
 DISTANCIA= 183370.584

 LATITUDE= -83 29 44.8390
 3 LONGITUDE= -64 33 12.6961
 CONTRA-AZIMUTE= 146 39 25.7083

PONTO LATITUDE= -83 29 44.8390
 LONGITUDE= -64 33 12.6961
 3 AZIMUTE= 27 26 1.1053
 DISTANCIA= 250470.550

 LATITUDE= -81 26 34.6449
 4 LONGITUDE= -57 35 40.4582
 CONTRA-AZIMUTE= 200 32 0.4457

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

PONTO LATITUDE= -50 30 20.0000
 LONGITUDE= -49 40 25.0000
 1 AZIMUTE= 300 35 20.1690
 DISTANCIA= 400000.000

 LATITUDE= -48 34 44.7535
 2 LONGITUDE= -54 20 31.7804
 CONTRA-AZIMUTE= 124 8 32.9774

PONTO LATITUDE= -48 34 44.7535
 LONGITUDE= -54 20 31.7804
 2 AZIMUTE= 14 48 32.5773
 DISTANCIA= 600000.000

 LATITUDE= -43 20 40.9868
 3 LONGITUDE= -52 27 12.0230
 CONTRA-AZIMUTE= 193 26 59.1311

PONTO LATITUDE= -43 20 40.9868
 LONGITUDE= -52 27 12.0230
 3 AZIMUTE= 34 16 58.4209
 DISTANCIA= 800000.000

 LATITUDE= -37 16 27.5341
 4 LONGITUDE= -47 22 45.9986
 CONTRA-AZIMUTE= 210 59 40.9777

| | | | | |
|-------|-----------------|-------------|----|---------|
| PONTO | LATITUDE= | -37 | 16 | 27.5341 |
| | LONGITUDE= | -47 | 22 | 45.9986 |
| 4 | AZIMUTE= | 91 | 19 | 51.8925 |
| | DISTANCIA= | 1000000.000 | | |
| | LATITUDE= | -36 | 56 | 51.5961 |
| 5 | LONGITUDE= | -36 | 7 | 47.4598 |
| | CONTRA-AZIMUTE= | 264 | 31 | 46.2266 |

PROBLEMA GEODESICO DIRETO

FORMULAS DE SODANO

PONTO LATITUDE= -1 28 30.5631
 LONGITUDE= -48 30 25.4320
 1 AZIMUTE= 10 25 10.3490
 DISTANCIA= 30860.120

 LATITUDE= -1 12 2.4231
 2 LONGITUDE= -48 27 24.9081
 CONTRA-AZIMUTE= 190 25 6.1337

PONTO LATITUDE= -1 12 2.4291
 LONGITUDE= -48 27 24.9081
 2 AZIMUTE= 350 47 56.4764
 DISTANCIA= 62640.600

 LATITUDE= 0 -38 29.2829
 3 LONGITUDE= -48 32 48.8246
 CONTRA-AZIMUTE= 170 48 1.6799

PONTO LATITUDE= 0 -38 29.2956
 LONGITUDE= -48 32 48.8248
 3 AZIMUTE= 31 28 23.8914
 DISTANCIA= 185371.230

 LATITUDE= 0 47 18.0260
 4 LONGITUDE= -47 40 39.0916
 CONTRA-AZIMUTE= 211 28 27.9028

PONTO LATITUDE= -23 4 45.8959
 LONGITUDE= -48 53 32.4464
 1 AZIMUTE= 238 22 26.9135
 DISTANCIA= 56896.553

 LATITUDE= -23 20 53.1446
 2 LONGITUDE= -49 21 57.9513
 CONTRA-AZIMUTE= 58 33 39.1627

PONTO LATITUDE= -23 20 53.1461
 LONGITUDE= -49 21 57.9514
 2 AZIMUTE= 121 44 20.2037
 DISTANCIA= 39742.395

 LATITUDE= -23 32 11.4505
 3 LONGITUDE= -49 2 6.4122
 CONTRA-AZIMUTE= 301 36 26.1771

PONTO LATITUDE= -23 32 11.4501
 LONGITUDE= -49 2 6.4124
 3 AZIMUTE= 182 39 22.1429
 DISTANCIA= 39598.950

 LATITUDE= -23 53 37.1819
 4 LONGITUDE= -48 59 11.2818
 CONTRA-AZIMUTE= 2 39 48.2312

PONTO LATITUDE= -45 12 45.8452
 LONGITUDE= -48 20 10.3218
 1 AZIMUTE= 90 0 0.0000
 DISTANCIA= 100210.250

 LATITUDE= -45 12 20.2020
 2 LONGITUDE= -47 3 38.4774
 CONTRA-AZIMUTE= 269 5 41.1761

PONTO LATITUDE= -45 12 20.2019
 LONGITUDE= -47 3 38.4775

2 AZIMUTE= 109 16 11.6124
 DISTANCIA= 205430.609

 LATITUDE= -45 47 18.7580
 3 LONGITUDE= -44 33 59.5235
 CONTRA-AZIMUTE= 287 29 27.1088

PONTO LATITUDE= -45 47 18.7870
 LONGITUDE= -44 33 59.5235
 3 AZIMUTE= 37 56 5.3670
 DISTANCIA= 300840.286

 LATITUDE= -43 37 47.4981
 4 LONGITUDE= -42 16 30.7014
 CONTRA-AZIMUTE= 216 19 20.8231

PONTO LATITUDE= -85 25 41.3458
 LONGITUDE= -50 40 25.3543
 1 AZIMUTE= 330 35 21.3990
 DISTANCIA= 80420.330

 LATITUDE= -84 47 20.1926
 2 LONGITUDE= -54 34 9.8428
 CONTRA-AZIMUTE= 154 28 15.0634

PONTO LATITUDE= -84 47 20.2112
 LONGITUDE= -54 34 9.8392
 2 AZIMUTE= 316 43 27.3208
 DISTANCIA= 183370.584

 LATITUDE= -83 29 44.7738
 3 LONGITUDE= -64 33 12.7034
 CONTRA-AZIMUTE= 146 39 25.7152

PONTO LATITUDE= -83 29 44.8390
 LONGITUDE= -64 33 12.6961
 3 AZIMUTE= 27 26 1.1053
 DISTANCIA= 250470.550

 LATITUDE= -81 26 34.4904
 4 LONGITUDE= -57 35 40.4539
 CONTRA-AZIMUTE= 200 32 0.4401

PONTO LATITUDE= -50 30 20.0000
 LONGITUDE= -49 40 25.0000
 1 AZIMUTE= 300 35 20.1690
 DISTANCIA= 400000.000

 LATITUDE= -48 34 44.3321
 2 LONGITUDE= -54 20 31.7711
 CONTRA-AZIMUTE= 124 8 32.9814

PONTO LATITUDE= -48 34 44.7535
 LONGITUDE= -54 20 31.7804
 2 AZIMUTE= 14 48 32.5773
 DISTANCIA= 600000.000

 LATITUDE= -43 20 38.0298
 3 LONGITUDE= -52 27 12.0590
 CONTRA-AZIMUTE= 193 26 59.1109

PONTO LATITUDE= -43 20 40.9868
 LONGITUDE= -52 27 12.0230
 3 AZIMUTE= 34 16 58.4209
 DISTANCIA= 800000.000

 LATITUDE= -37 16 23.5599
 4 LONGITUDE= -47 22 46.1588
 CONTRA-AZIMUTE= 210 59 40.9121

| | | | | |
|-------|-----------------|-------------|----|---------|
| PONTO | LATITUDE= | -37 | 16 | 27.5341 |
| | LONGITUDE= | -47 | 22 | 45.9986 |
| 4 | AZIMUTE= | 91 | 19 | 51.8925 |
| | DISTANCIA= | 1000000.000 | | |
| | LATITUDE= | -36 | 56 | 51.5737 |
| 5 | LONGITUDE= | -36 | 7 | 47.4597 |
| | CONTRA-AZIMUTE= | 264 | 31 | 46.3322 |

6.2 QUADRO COMPARATIVO DOS RESULTADOS OBTIDOS PELAS FÓRMULAS DE SODANO E AS APRESENTADAS

* Diferença entre os resultados, em valor absoluto, obtidos pelas fórmulas de SODANO e as apresentadas.

| SIMB. | DADOS | SIMB. | R E S U L T A D O S | | DIF. ENTRE OS RESULTADOS (em segundos)* |
|-----------|----------------|-----------|---------------------|-----------------|---|
| | | | FORM. SODANO | FORM. APRESENT. | |
| ϕ | -01 28 30,5631 | ϕ | -01 12 02,4231 | -01 12 02,4291 | -0,0060" |
| λ | -48 30 25,4320 | λ | -48 27 24,9081 | -48 27 24,9081 | 0,0000 |
| A_{12} | 10 25 10,3490 | A_{21} | 190 25 06,1337 | 190 25 06,1337 | 0,0000 |
| S | 30.860,120 | | | | |
| ϕ | -01 12 02,4291 | ϕ | -00 38 29,2829 | -00 38 29,2956 | -0,0127 |
| λ | -48 27 24,9081 | λ | -48 32 48,8246 | -48 32 48,8248 | -0,0002 |
| A_{12} | 350 47 56,4764 | A_{21} | 170 48 01,6799 | 170 48 01,6829 | -0,0030 |
| S | 62.640,600 | | | | |
| ϕ | -00 38 29,2956 | ϕ | 00 47 18,0260 | 00 47 17,9954 | +0,0306 |
| λ | -48 32 48,8248 | λ | -47 40 39,0916 | -47 40 39,0897 | +0,0019 |
| A_{12} | 31 28 23,8914 | A_{21} | 211 28 27,9028 | 211 28 27,9045 | -0,0017 |
| S | 185.371,230 | | | | |

| SIMB. | DADOS | SIMB. | R E S U L T A D O S | | DIF. ENTRE OS RESULTADOS (em segundos)* |
|-----------------|----------------|-----------------|---------------------|-----------------|---|
| | | | FORM. SODANO | FORM. APRESENT. | |
| ϕ | -23 04 45,8959 | ϕ | -23 20 53,1446 | -23 20 53,1461 | -0,0015" |
| λ | -48 53 32,4464 | λ | -49 21 57,9513 | -49 21 57,9514 | -0,0001 |
| A ₁₂ | 238 22 26,9135 | A ₂₁ | 58 33 39,1627 | 58 33 39,1629 | -0,0002 |
| S | 56.896,553 | | | | |
| ϕ | -23 20 53,1461 | ϕ | -23 32 11,4505 | -23 32 11,4501 | +0,0004 |
| λ | -49 21 57,9514 | λ | -49 02 06,4122 | -49 02 06,4124 | -0,0002 |
| A ₁₂ | 121 44 20,2030 | A ₂₁ | 301 36 26,1771 | 301 36 26,1771 | 0,0000 |
| S | 39.742,395 | | | | |
| ϕ | -23 32 11,4501 | ϕ | -23 53 37,1819 | -23 53 37,1867 | -0,0048 |
| λ | -49 02 06,4124 | λ | -48 59 11,2818 | -49 03 11,2820 | -0,0002 |
| A ₁₂ | 182 39 22,1429 | A ₂₁ | 2 39 48,2312 | 2 39 48,2315 | -0,0003 |
| S | 39.598,950 | | | | |
| ϕ | -45 12 45,8452 | ϕ | -45 12 20,2020 | -45 12 20,2019 | +0,0001 |
| λ | -48 20 10,3218 | λ | -47 03 38,4774 | -47 03 38,4775 | -0,0001 |
| A ₁₂ | 90 00 00,0000 | A ₂₁ | 269 05 41,1761 | 269 05 41,1761 | 0,0000 |
| S | 100.210,250 | | | | |

| SIMB. | DADOS | SIMB. | R E S U L T A D O S | | DIF. ENTRE OS RESULTADOS (em segundos)* |
|-----------|----------------|-----------|---------------------|-----------------|---|
| | | | FORM. SODANO | FORM. APRESENT. | |
| ϕ | -45 12 20,2019 | ϕ | -45 47 18,7580 | -45 47 18,7870 | -0,0290" |
| λ | -47 03 38,4775 | λ | -44 33 59,5235 | -44 33 59,5235 | 0,0000 |
| A_{12} | 109 16 11,6124 | A_{21} | 287 29 27,1088 | 287 29 27,1079 | +0,0009 |
| S | 205.430,609 | | | | |
| ϕ | -45 47 18,7870 | ϕ | -43 37 47,4981 | -43 37 48,0181 | -0,5200 |
| λ | -44 33 59,5235 | λ | -42 16 30,7014 | -42 16 30,6946 | +0,0068 |
| A_{12} | 37 56 05,3670 | A_{21} | 216 19 20,8231 | 216 19 20,8295 | -0,0064 |
| S | 300.840,286 | | | | |
| ϕ | -85 25 41,3458 | ϕ | -84 47 20,1926 | -84 47 20,2112 | -0,0186 |
| λ | -50 40 25,3543 | λ | -54 37 09,8428 | -54 37 09,8392 | +0,0036 |
| A_{12} | 330 35 21,3990 | A_{21} | 154 28 15,0634 | 154 28 15,0612 | +0,0022 |
| S | 80.420,330 | | | | |
| ϕ | -84 47 20,2112 | ϕ | -83 29 44,7738 | -83 29 44,8390 | -0,0652 |
| λ | -54 34 09,8392 | λ | -64 33 12,7034 | -64 33 12,6961 | +0,0073 |
| A_{12} | 316 43 27,3208 | A_{21} | 146 39 25,7152 | 146 39 25,7083 | +0,0069 |
| S | 183.370,584 | | | | |

| SIMB. | DADOS | SIMB. | R E S U L T A D O S | | DIF. ENTRE OS RESULTADOS (em segundos)* |
|-----------------|----------------|-----------------|---------------------|-----------------|---|
| | | | FORM. SODANO | FORM. APRESENT. | |
| ϕ | -83 29 44,8390 | ϕ | -81 26 34,4904 | -81 26 34,6449 | -0,1545" |
| λ | -64 33 12,6961 | λ | -54 35 40,4539 | -54 35 40,4582 | -0,0043 |
| A ₁₂ | 27 26 01,1053 | A ₂₁ | 200 32 00,4401 | 200 32 00,4457 | -0,0056 |
| S | 250.470,550 | | | | |
| ϕ | -50 30 20,0000 | ϕ | -48 34 44,3321 | -48 34 44,7535 | -0,4214 |
| λ | -49 40 25,0000 | λ | -54 20 31,7711 | -54 20 31,7804 | -0,0093 |
| A ₁₂ | 300 35 20,1690 | A ₂₁ | 124 08 32,9814 | 124 08 32,9774 | +0,0040 |
| S | 400,000,000 | | | | |
| ϕ | -48 34 44,7535 | ϕ | -43 20 38,0298 | -43 20 40,9868 | -2,9570 |
| λ | -54 20 31,7804 | λ | -52 27 12,0590 | -52 27 12,0230 | +0,0360 |
| A ₁₂ | 14 48 32,5773 | A ₂₁ | 193 26 59,1109 | 193 26 59,1311 | -0,0202 |
| S | 600.000,000 | | | | |
| ϕ | -43 20 40,9868 | ϕ | -37 16 23,5599 | -37 16 27,5341 | -3,9742 |
| λ | -52 27 12,0230 | λ | -47 22 46,1588 | -47 22 45,9986 | +0,1602 |
| A ₁₂ | 34 16 58,4209 | A ₂₁ | 210 59 40,9121 | 210 59 40,9777 | -0,0656 |
| S | 800.000,000 | | | | |

| SIMB. | DADOS | SIMB. | R E S U L T A D O S | | DIF. ENTRE OS RESULTADOS (em segundos)* |
|-----------------|----------------|-----------------|---------------------|-----------------|---|
| | | | FORM. SODANO | FORM. APRESENT. | |
| ϕ | -37 16 27,5341 | ϕ | -36 56 51,5737 | -36 56 51,5961 | -0,0224" |
| λ | -47 22 45,9986 | λ | -36 07 47,4597 | -36 07 47,4598 | -0,0001 |
| A ₁₂ | 91 19 51,8925 | A ₂₁ | 264 31 46,3322 | 264 31 46,2266 | +0,1056 |
| S | 1.000.000,000 | | | | |

Quadro (6.2.1)

CAPITULO VII

7.0 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DAS RESOLUÇÕES DE TRIÂNGULOS GEODÉSICOS POR FÓRMULAS FINITAS E DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

A resolução de triângulos geodésicos ocorre com maior frequência em triangulações e trilaterações geodésicas. Aqui, focalizaremos apenas triângulos equivalentes aos de triangulação.

Os triângulos oriundos de triangulações, comumente são resolvidos mediante o Teorema de LEGENDRE que em sua aplicação elimina funções de arcos pequenos. Com o advento dos computadores eletrônicos que utilizam vários dígitos, como por exemplo: HP-30 que calcula doze (12) e imprime onze (11) dígitos, talvez possamos substituir o Teorema de LEGENDRE pela analogia dos senos. Esta possibilidade de substituição será estudada neste capítulo, na forma de comparação entre os resultados obtidos pelas resoluções através de fórmulas finitas com sete (7) e doze (12) dígitos, e o Teorema de LEGENDRE. Comparamos também com os resultados oriundos do desenvolvimento em série, com um, dois e três termos.

Adotemos para o referido estudo seis triângulos geodésicos. Os elementos dados para cada triângulo são: um lado e três ângulos, como ocorre normalmente em triangulação.

Convém salientar que os elementos dados são aleatórios e que os ângulos internos estão afetados do erro de fechamento.

Inicialmente apresentemos os triângulos, em seguida o quadro (7.1.1) comparativo dos resultados obtidos através das fôr-

mulas finitas e desenvolvimento em sêrie (ver apêndice B).

TRIÂNGULOS GEODÉSICOS

1. $c = 00^0 10 36,40$
 $A = 75 30 45,26$
 $B = 60 45 08,36$
 $C = 43 44 08,23$

4. $c = 00 20 05,88$
 $A = 70 30 40,28$
 $B = 50 20 10,15$
 $C = 59 09 10,90$

2. $c = 00 22 53,74$
 $A = 81 41 20,46$
 $B = 51 12 19,60$
 $C = 47 06 23,04$

5. $c = 00 18 47,85$
 $A = 68 10 20,56$
 $B = 54 19 29,39$
 $C = 57 30 12,05$

3. $c = 00 15 29,81$
 $A = 45 21 10,20$
 $B = 79 36 15,45$
 $C = 55 02 35,65$

6. $c = 00 25 30,56$
 $A = 62 55 44,70$
 $B = 60 46 19,31$
 $C = 56 17 59,10$

7.1 QUADRO COMPARATIVO DOS RESULTADOS DAS RESOLUÇÕES DOS TRIÂNGULOS GEODÉSICOS

| Nº DE EXEMP | SIMB | ANALOGIA DOS SENOS | | DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE | | | TEOREMA DE LEGENBRE |
|----------------|------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| | | C/ 7 DECIMAIS | C/12 DECIMAIS | C/ UM TERMO | C/DOIS TERMOS | C/TRÊS TERMOS | |
| 1 | a | 00 ⁰ 14' 51,252" | 00 ⁰ 14' 51,273" | 00 ⁰ 14' 51,274" | 00 ⁰ 14' 51,273" | 00 ⁰ 14' 51,273" | 00 ⁰ 14'51,276" |
| | b | 00 13 23,172 | 00 13 23,188 | 00 13 23,190 | 00 13 23,188 | 00 13 23,188 | 00 13 23,191 |
| 2 | a | 00 30 55,416 | 00 30 55,428 | 00 30 55,441 | 00 30 55,428 | 00 30 55,428 | 00 30 55,449 |
| | b | 00 24 21,444 | 00 24 21,456 | 00 24 21,467 | 00 24 21,456 | 00 24 21,456 | 00 24 21,468 |
| 3 | a | 00 13 27,120 | 00 13 27,129 | 00 13 27,132 | 00 13 27,129 | 00 13 27,129 | 00 13 27,131 |
| | b | 00 18 35,856 | 00 18 35,868 | 00 18 35,872 | 00 18 35,868 | 00 18 35,868 | 00 18 35,873 |
| 4 | a | 00 22 04,086 | 00 22 04,100 | 00 22 04,107 | 00 22 04,100 | 00 22 04,100 | 00 22 04,108 |
| | b | 00 18 01,230 | 00 18 01,241 | 00 18 01,247 | 00 18 01,241 | 00 18 01,241 | 00 18 01,246 |
| 5 | a | 00 20 41,346 | 00 20 41,361 | 00 20 41,367 | 00 20 41,361 | 00 20 41,361 | 00 20 41,368 |
| | b | 00 18 06,264 | 00 18 06,280 | 00 18 06,285 | 00 18 06,280 | 00 18 06,280 | 00 18 06,285 |
| 6 | a | 00 27 18,168 | 00 27 18,172 | 00 27 18,187 | 00 27 18,172 | 00 27 18,172 | 00 27 18,188 |
| | b | 00 26 45,492 | 00 26 45,497 | 00 26 45,512 | 00 26 45,497 | 00 26 45,497 | 00 26 45,513 |

Quadro (7.1.1)

CAPÍTULO VIII

8.0 CONCLUSÃO

No presente trabalho verificamos que a solução do problema geodésico direto desenvolveu-se de forma bastante simples, evitando assim grande volume de cálculo. Neste método os elementos do segundo ponto são obtidos sem depender diretamente das coordenadas calculadas. Desta maneira evidenciamos o cálculo do contra-azimute da geodésica.

As experiências realizadas através de aplicações das fórmulas abrangeram todos os quadrantes, com latitudes e distâncias variáveis. A verificação da discrepância que estas fórmulas podem apresentar, foi feita mediante comparação com os resultados obtidos pelas fórmulas de SODANO, as quais consideramos padrão. Assim concluímos que para situações correspondentes a triangulações e poligonais geodésicas a discrepância foi da ordem do milésimo de segundo. Para situações correspondentes a trilateração de lados curtos 150 a 400 Km atingiu o centésimo de segundo. Além destas situações, foram feitas comparações para comprimentos da geodésica entre quatrocentos e mil quilômetros e os resultados acusaram uma discrepância da ordem do décimo de segundo, sendo que para latitude, em alguns casos, atingiu o segundo.

O método em foco foi desenvolvido de tal forma que os percalços correspondentes à obtenção da amplitude esférica foram suprimidos, conforme se constata através das fórmulas apresentadas.

Verificamos de conformidade com as experiências realizadas, que para distâncias não superiores a dez quilômetros podemos confundir o azimute da seção normal direta com a da geodésica. Esta consideração não vem influir nos resultados já que a diferença entre os azimutes, para este caso, não atinge o milésimo de segundo.

Outras conclusões foram obtidas referentes a resolução de triângulos geodésicos. Estas fundamentadas nos resultados oriundos do desenvolvimento em série tomados como padrão. Analisando o quadro (7.1.1) concluimos que o Teorema de Legendre pode ser substituído pela analogia dos senos. Isto quando dispomos de calculadora com mais de sete dígitos. Concluimos também que para o desenvolvimento em série é suficiente até o segundo termo, pelo fato de não haver diferença entre o segundo e terceiro termo até a quinta decimal do segundo. É evidente que estas últimas conclusões referem-se a triângulos geodésicos equivalentes aos de triangulações.

Pretendemos desenvolver num trabalho futuro estudos sobre o problema geodésico inverso.

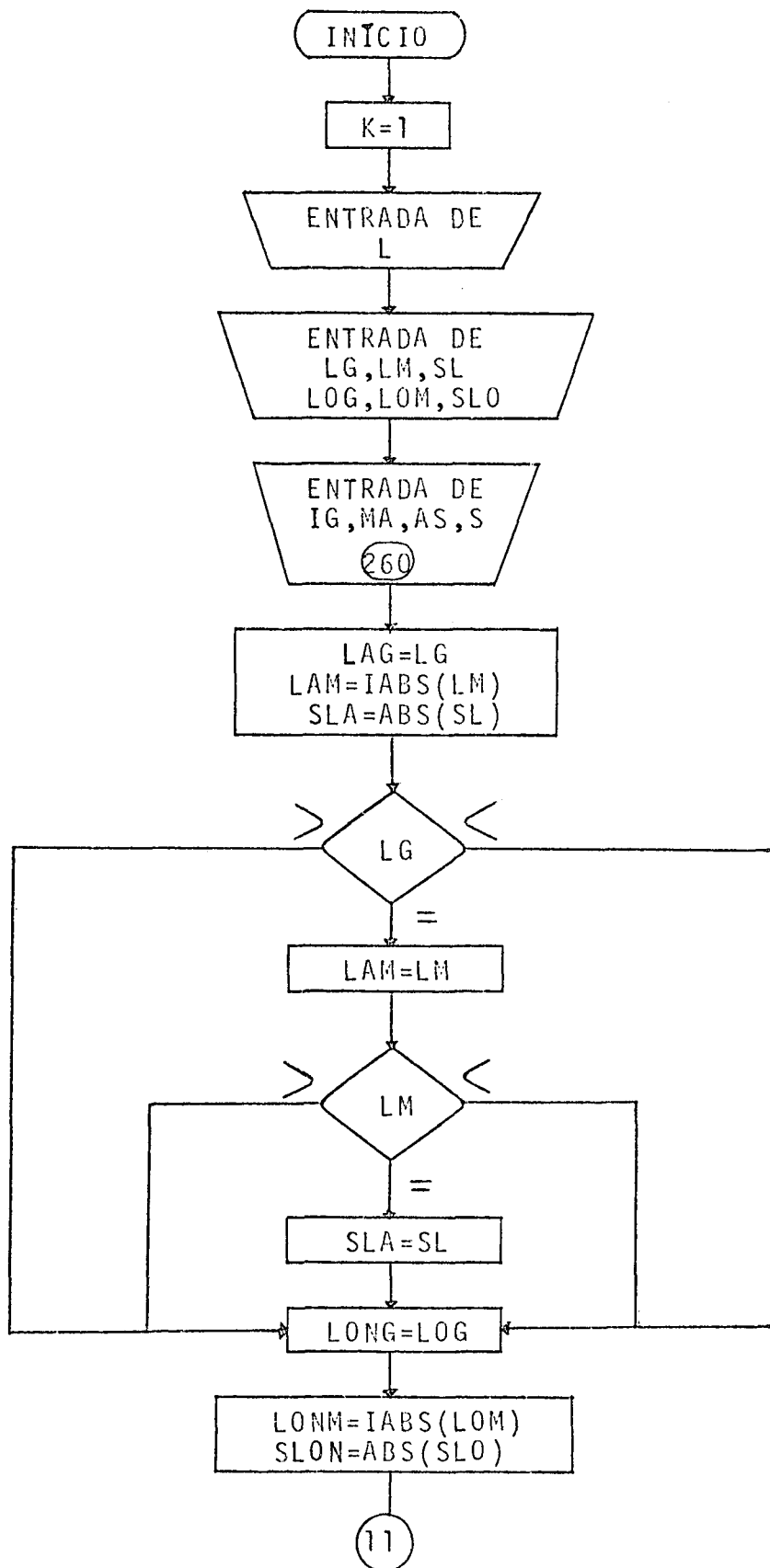
Acreditamos que este trabalho proporcione informações úteis aos interessados no estudo da geodésica sobre a superfície de um elipsóide de revolução e na resolução de triângulos geodésicos.

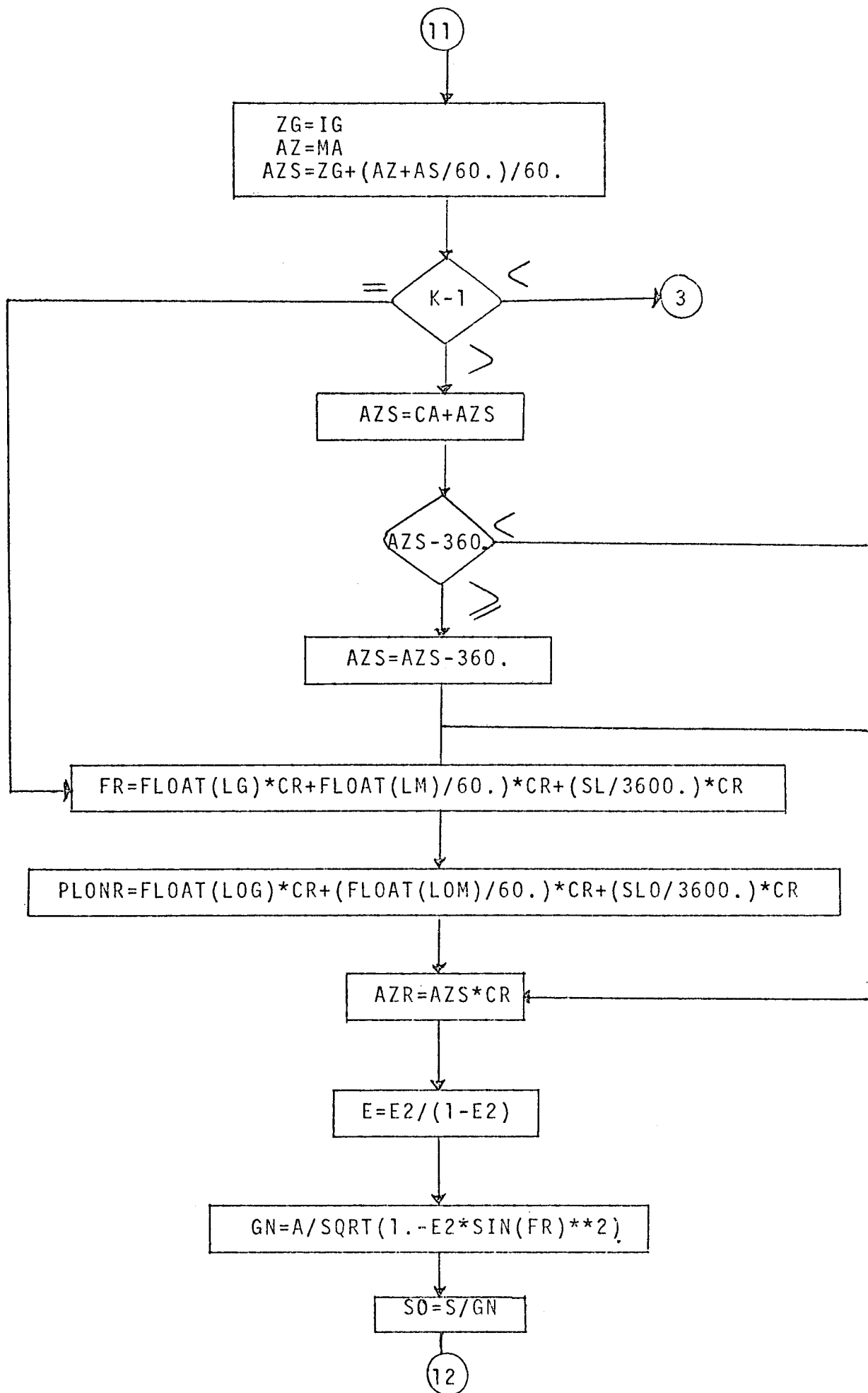
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

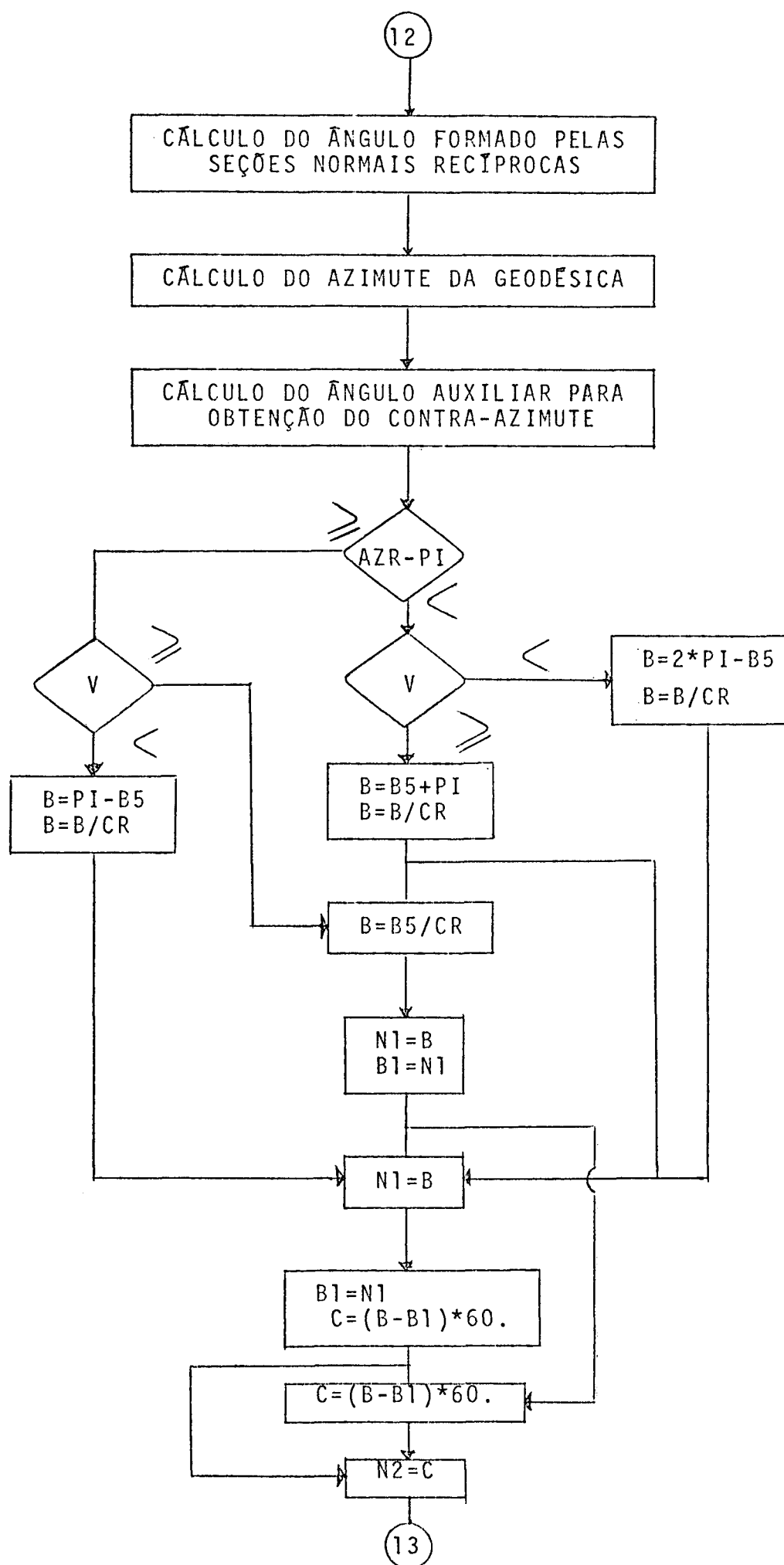
- [01] BOMFORD, G. Geodesy. 3th ed. Oxford, Clarendon Press, 1971. 731p.
- [02] BOWRING, B.R. Solution for azimuth of the geodesic in near antipodal situation with especial reference to the behaviour of lines for which the azimuth is the region of 90°. Bulletin Geodesique, Paris, 51(1): 17, 1977.
- [03] CLARK, A.R. Tratado de geodésia. 2.^a ed., Madrid, Bailly -Bailliere, 1910. 539p.
- [04] EWING, E. & MITCHELL, M.M. Introduction to geodesy. New York, American Elsevier Publishing Company, 1970. 304p.
- [05] GEMAEL, C. Elementos de trigonometria esférica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, DAST, 1978. 86p.
- [06] _____. Introdução à geodésia geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1977. 144p.
- [07] HOSMER, G.L. Geodesy. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, 1929. 461p.
- [08] LEVALLOIS, J.J. Géodésie générale. Paris, Éditions Eyrolles (Collection Scientifique de L'Institut Géographique National); 1970, v.2, 408p.
- [09] PACITTI, T. Fortran-Monitor; princípios. 3.^a ed., Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1977. 372p.
- [10] ROBBINS, A.R. Long lines on the spheroid. Empire Survey Review, London, XVI(125):336-301, July, 1962.
- [11] SODANO, E.M. General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problem. Bulletin Geodesique, (75): 69, Nov. 1965.
- [12] ZAKATOV, P.S. A course in higher geodesy spheroidal geodesy and fundamentals of gravimetry and practical astronomy. 2nd ed. Jerusalem, Israel Program for scientific translations, 1962. 389p.

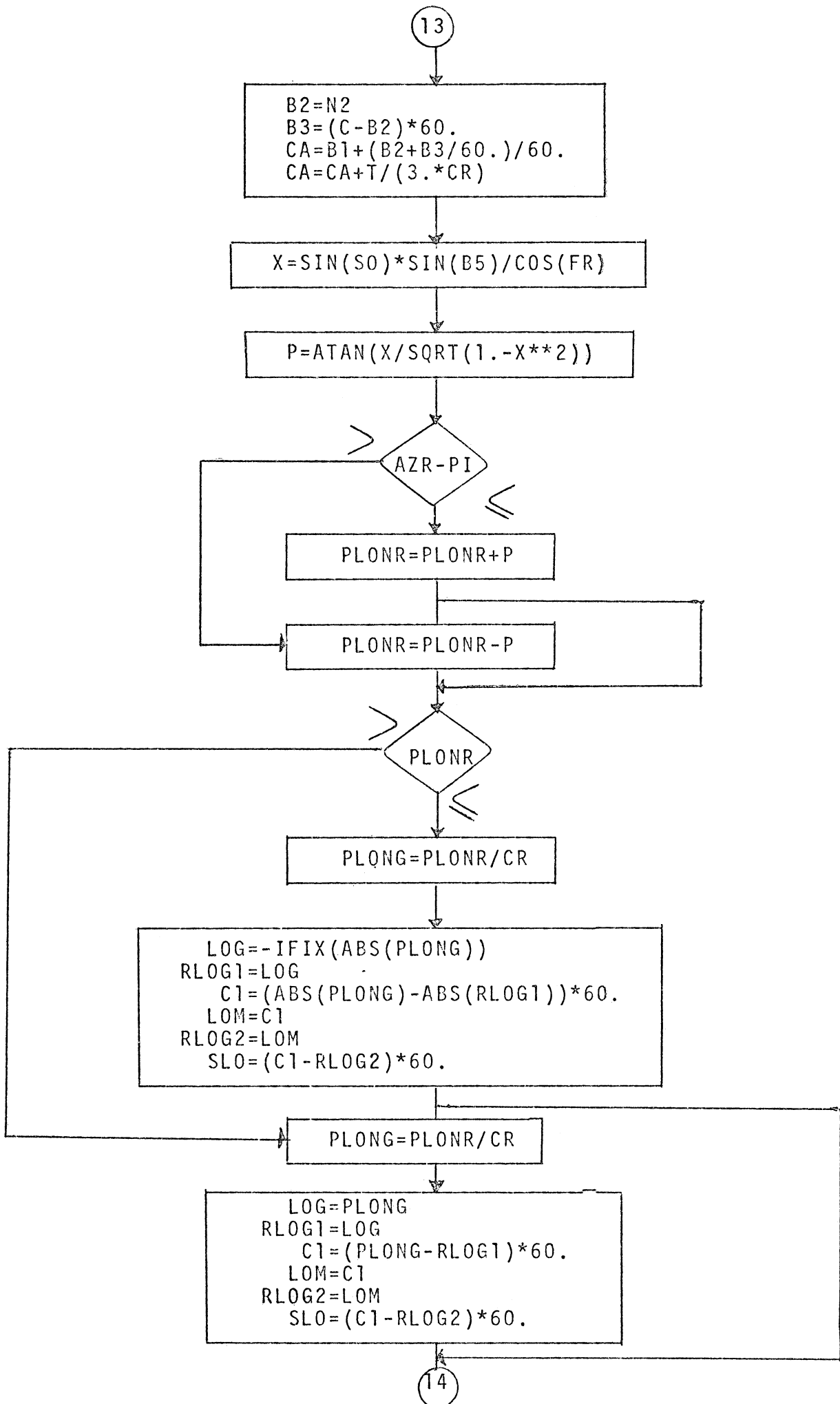
APÉNDICE A

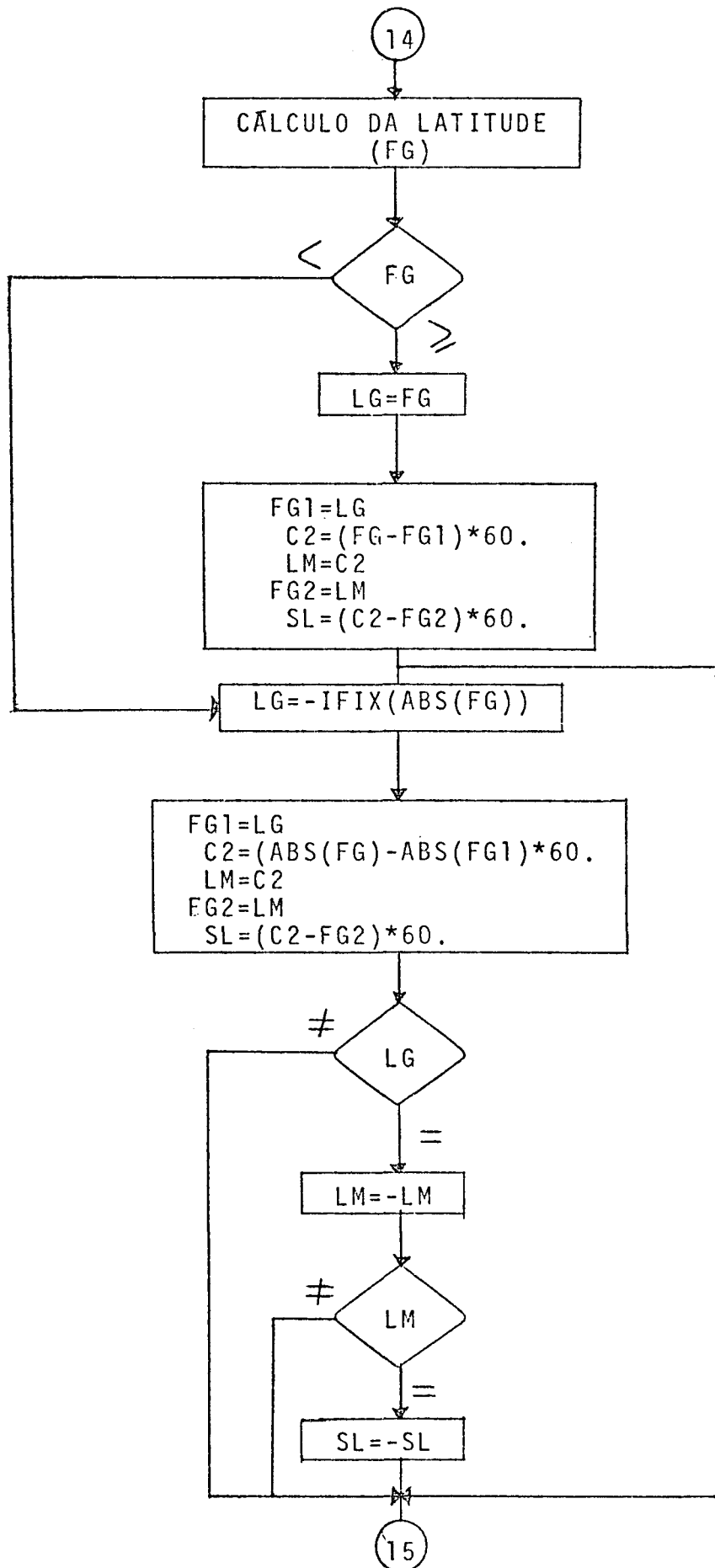
FLUXOGRAMA

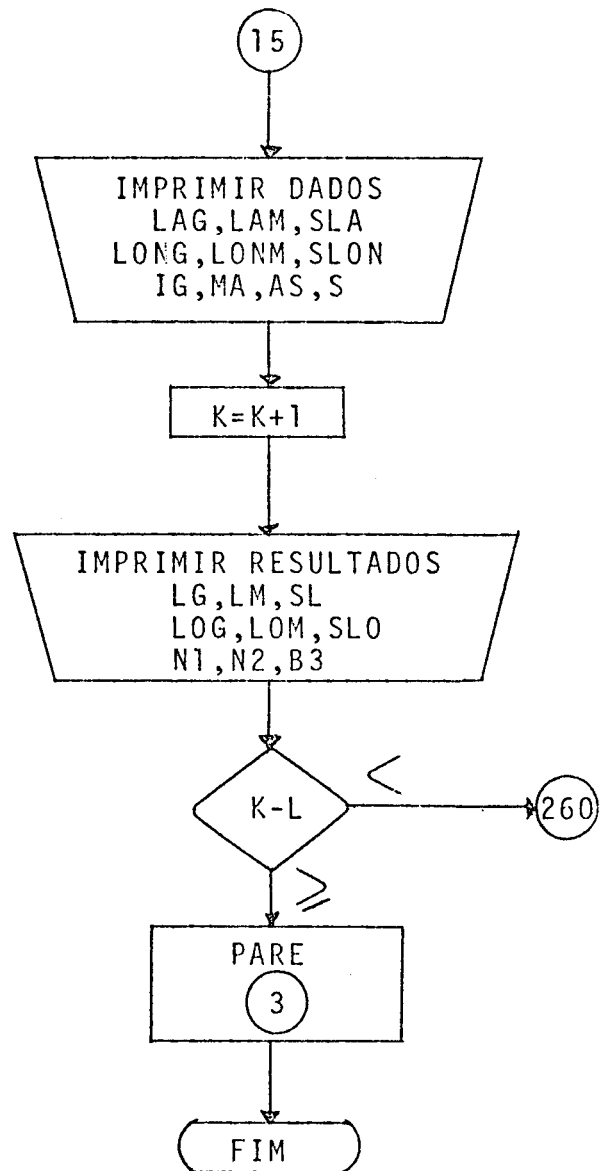












PROGRAMA

```

WRITE(5,10)
10 FORMAT('1',35X,'PROBLEMA GEODESICO DIRETO',///)
C-----AZIMUTE CONTADO DO NORTE CORRESPONDENTE A SECAO NORMAL DIRETA
C-----LONGITUDE CONSIDERADA NEGATIVA POR OESTE
PI=3.14159265
CR=PI/180.
K=1
C-----DEFINICAO DO ELIPSOIDE DE REVOLUCAO
A=6378388.
E2=0.00672267
B0=6356911.946
C-----NUMERO DE VERTICES DA POLIGONAL
READ(2,20)L
20 FORMAT(I2)
C-----LATITUDE E LONGITUDE
READ(2,30)LG,LM,SL,LOG,LOM,SLO
30 FORMAT(2I3,F8.4,2I4,F8.4)
C-----ANGULO HORIZONTAL E DISTANCIA
260 READ(2,40)IG,MA,AS,S
40 FORMAT(2I4,F8.4,F12.3)
LAG=LG
LAM=IABS(LM)
SLA=ABS(SL)
IF(LG)270,280,270
280 LAM=LM
IF(LM)270,300,270
300 SLA=SL
270 LONG=LOG
LONM=IABS(LOM)
SLON=ABS(SLO)
ZG=IG
AZ=MA
AZS=ZG+(AZ+AS/60.)/60.
IF(K-1)3,4,5
5 AZS=CA+AZS
IF(AZS-360.)9,8,8
8 AZS=AZS-360.
GOTO 9
C-----CONVERSAO DOS ANGULOS NO SISTEMA SEXAGESIMAL EM RADIANO
4 FR=FLOAT(LG)*CR+(FLOAT(LM)/60.)*CR+(SL/3600.)*CR
PLOWR=FLOAT(LOG)*CR+(FLOAT(LOM)/60.)*CR+(SLO/3600.)*CR
9 AZR=AZS*CR
E=E2/(1.-E2)
GN=A/SQRT(1.-E2*SIN(FR)**2)
S0=(S/GN)
C-----CALCULO DO ANGULO FORMADO PELAS SECOES NORMAIS RECIPROCAS
P1=((E*S)/B0)*S/(4.*B0)
P2=COS(FR)**2*SIN(2.*AZR)
P3=(S*SIN(2.*FR)*SIN(AZR))/(4.*B0)
T=P1*(P2-P3)
C-----CALCULO DO AZIMUTE DA GEODESICA
AZGR=AZR-T/3.
AZG=AZGR/CR
IG=AZG
PG1=IG
C3=(AZG-PG1)*60.

```

```

      MA=C3
      PG2=MA
      AS=(C3-PG2)*60.
C-----CALCULO DO ANGULO AUXILIAR PARA OBTENCAO DO CONTRA-AZIMUTE
      D=COS(S0)*COS(AZR)-(SIN(FR)/COS(FR))*SIN(S0)
      V=ATAN(SIN(AZR)/D)
      B5=ABS(V+(2.*T )/3.)
C-----TESTE DO QUADRANTE DO CONTRA-AZIMUTE
      IF(AZR-PI)50,70,70
50 IF(V)80,60,60
60 B=B5+PI
      B=B/CR
      GOTO 110
80 B=2.*PI-B5
      B=B/CR
      GOTO 110
70 IF(V)90,100,100
90 B=PI-B5
      B=B/CR
      GOTO 110
100 B=B5/CR
      N1=B
      B1=N1
      GOTO 130
110 N1=B
      B1=N1
      C=( B-B1)*60.
      GOTO 120
130 C=(B -B1)*60.
120 N2=C
      B2=N2
      B3=(C-B2)*60.
      CA=B1+(B2+B3/60.)/60.
      CA=CA+T/(3.*CR)
C-----CALCULO DA LONGITUDE
      X=SIN(S0)*SIN(B5)/COS(FR)
      P=ATAN(X/SORT(1.-X**2))
      IF(AZR-PI)180,180,190
180 PLONR=PLONR+P
      GOTO 205
190 PLONR=PLONR-P
205 IF(PLONR)200,200,210
200 PLONG=PLONR/CR
      LOG=-IFIX(ABS(PLONG))
      RLOG1=LOG
      C1=(ABS(PLONG)-ABS(RLOG1))*60.
      LOM=C1
      RLOG2=LOM
      SLO=(C1-RLOG2)*60.
      GOTO 215
210 PLONG=PLONR/CR
      LOG=PLONG
      RLOG1=LOG
      C1=(PLONG-RLOG1)*60.
      LOM=C1
      RLOG2=LOM

```



```

SLO=(C1-RLOG2)*60.
C-----CALCULO DA LATITUDE
215 RM=(A*(1.-E2))/SQRT((1.-E2*SIN(FR)**2)**3)
R=GN*(SQRT(1.+E2*SIN(FR)**2*(E2-2.)))
R1=(RM+R)/2.
S1=(S/R1)
P6=GN/A
P7=SQRT(1.-E2)*SIN(FR)*COS(S1)
P8=SIN(S1)*COS(AZGR)*COS(FR)
U=P6*(P7+P8)
G=U/SQRT((1.-E2)*(1.-U**2))
FR=ATAN(G)
FG=FR/CR
IF (FG)220,230,230
230 LG=FG
FG1=LG
C2=(FG-FG1)*60.
LM=C2
FG2=LM
SL=(C2-FG2)*60.
GOTO 330
220 LG=-IFIX(ABS(FG))
FG1=LG
C2=(ABS(FG)-ABS(FG1))*60.
LM=C2
FG2=LM
SL=(C2-FG2)*60.
IF(LG)330,350,330
350 LM=-LM
IF(LM)330,360,330
360 SL=-SL
C-----IMPRESSAO DOS DADOS
330 WRITE(5,240) LAG,LAM,SLA,LONG,LONM,SLON,K,IG,MA,AS,S
240 FORMAT(22X,'PONTO',8X,'LATITUDE=',I4,2X,I3,2X,F8.4,/,34X,'LONGITU
1DE=',I5,2X,I3,2X,F8.4,/,23X,I2,11X,'AZIMUTE=',I5,2X,I3,2X,F8.4,/,
2,34X,'DISTANCIA=',F12.3,///)
K=K+1
C-----IMPRESSAO DOS RESULTADOS
WRITE(5,250) LG,LM,SL,K,LOG,LOM,SLO,N1,N2,B3
250 FORMAT(35X,'LATITUDE=',I4,2X,I3,2X,F8.4,/,23X,I2,9X,'LONGITUDE=',
1I5,2X,I3,2X,F8.4,/,29X,'CONTRA-AZIMUTE=',I5,2X,I3,2X,F8.4,///)
IF(K-L) 260,3,3
3 CALL EXIT
END

```

APÊNDICE B

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS GEODÉSICOS

B.1 FÓRMULA FINITA

Os triângulos geodésicos oriundos de triangulações podem ser resolvidos como esféricos. Assim sendo, a fig. (B.1.1) ilustra um triângulo esférico.

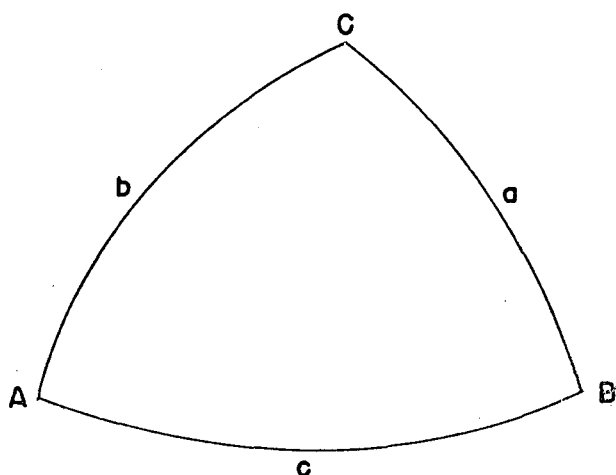


Fig. (B.1.1)

na qual os ângulos esféricos são representados por A, B e C, e os lados esféricos por a, b e c.

Aplicando na fig. (B.1.1) a analogia dos senos temos

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C} \quad (\text{B.1.1})$$

B.2 DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

Esta forma de resolução consiste em substituir as funções trigonométricas pelas respectivas séries.

Podemos escrever

$$a = \frac{m}{R_0} ; \quad b = \frac{n}{R_0} \quad e \quad c = \frac{q}{R_0} \quad (\text{B.2.1})$$

onde m , n e q definem os comprimentos dos arcos correspondentes às amplitudes esféricas a , b e c respectivamente. O R_0 corresponde ao raio da esfera sobre a qual consideremos os triângulos e dados por

$$R_0 = \sqrt{NM} \quad (\text{B.2.2})$$

sendo N e M raios das seções normais do primeiro vertical e meridiana e dados pelas . (2.4.10) e (2.4.7) respectivamente.

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_m)^{1/2}} \quad (\text{B.2.3})$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_m)^{3/2}} \quad (\text{B.2.4})$$

onde ϕ_m é a latitude média entre os vértices de cada triângulo.

Substituindo na . (B.1.1) as funções senos pelas séries correspondentes, sem considerar potências acima da quinta temos

$$\frac{\frac{m}{R_0} - \frac{m^3}{6R_0^3} + \frac{m^5}{120R_0^5}}{\text{sen}A} = \frac{\frac{n}{R_0} - \frac{n^3}{6R_0^3} + \frac{n^5}{120R_0^5}}{\text{sen}B} = \frac{\frac{q}{R_0} - \frac{q^3}{6R_0^3} + \frac{q^5}{120q^5}}{\text{sen}C} \quad (\text{B.2.5})$$

B.3 TEOREMA DE LEGENDRE

Esta forma de resolução, em geral é aplicada aos tri-

ângulos geodésicos oriundos de triangulações. Em síntese, consiste em tomar triângulos esféricos como planos, fazendo os lados do triângulo plano corresponderem aos do esférico e os ângulos internos iguais aos ângulos esféricos abatidos de um terço do excesso esférico mais o erro de fechamento.

A fig. (B.3.1) representa um triângulo plano correspondente ao esférico da fig. (B.1.1).

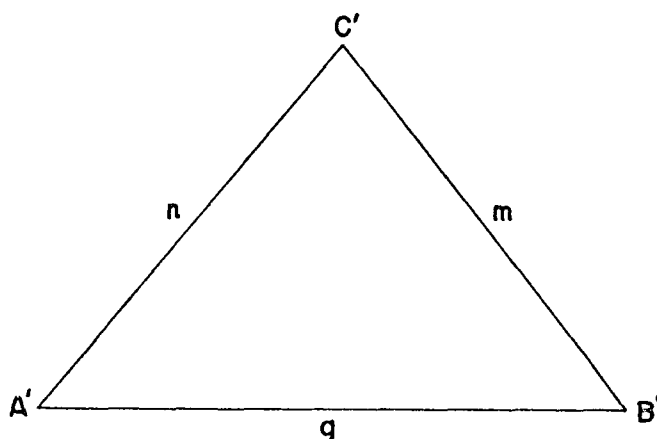


Fig. (B.3.1)

onde m , n e q são obtidos pela . (B.2.1)

$$m = aR_0; \quad n = bR_0 \quad \text{e} \quad q = cR_0 \quad (\text{B.3.1})$$

Os ângulos planos são:

$$A' = A - \frac{\Sigma}{3}$$

$$B' = B - \frac{\Sigma}{3} \quad (\text{B.3.2})$$

$$C' = C - \frac{\Sigma}{3}$$

sendo

$$\Sigma = A + B + C - \pi \quad (\text{B.3.3})$$

onde Σ corresponde a soma do excesso esférico com o erro de fechamento.

Aplicando na fig. (B.3.1) a analogia dos senos temos

$$\frac{m}{\text{sen}A^r} = \frac{n}{\text{sen}B^r} = \frac{q}{\text{sen}C^r} \quad (\text{B.3.4})$$

Esta permite a aplicação do Teorema de LEGENDRE, onde m , n e q correspondem aos comprimentos dos arcos.

Substituindo m , n e q na (B.3.4) por seus valores correspondentes dados pela (B.3.1) temos

$$\frac{a}{\text{sen}A^r} = \frac{b}{\text{sen}B^r} = \frac{c}{\text{sen}C^r} \quad (\text{B.3.5})$$

Esta analogia permite o cálculo dos lados esféricos de acordo com o Teorema de LEGENDRE, onde a , b e c são expressos em radianos.