

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM MECÂNICA COMPUTACIONAL
SETORES DE TECNOLOGIA E DE CIÊNCIAS EXATAS**

ROBERTO PETTRES

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ANÁLISE DA DIFUSÃO E GERAÇÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS**

CURITIBA – PR

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P511f Pettres, Roberto

Formulação do método dos elementos de contorno para análise da difusão e geração do calor em meios contínuos. Roberto Pettres – Curitiba, 2014.

119 p.

Orientador: Prof. D.Sc. Luiz Alkimin de Lacerda
Tese de Doutorado – Universidade Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica Computacional Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Difusão do calor. 3. Difusão-advecção. 4. Termo dissipativo. I. Lacerda, Luiz Alkimin de. II. Universidade Federal do Paraná.

CDD – 515.35

Bibliotecária: Neide O. S. Paula – CRB-9/1477

ROBERTO PETTRES

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ANÁLISE DA DIFUSÃO E GERAÇÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS**

Tese de doutorado apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Ciências, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. D.Sc. Luiz Alkimin de Lacerda

CURITIBA – PR

2014

TERMO DE APROVAÇÃO

ROBERTO PETTRES

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE DA DIFUSÃO E GERAÇÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de doutor no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda
(Orientador) Membro do PPGMNE/UFPR



Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer
Membro do PPGMNE/UFPR



Dr.ª Akemi Kan.
Membro do LACTEC/CEHPAR.



Prof. Dr. Lucas Máximo Alves.
Membro do Dep. de Eng. de Materiais da UEPG



Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago.
Membro da COPPE/UFRJ.

Curitiba, 08 de outubro 2014.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Andréia, ao meu filho Enzo, aos meus pais José e Fátima, meus irmãos Ronaldo, Reginaldo e Jaqueline e aos meus sobrinhos João Lucas e Mirella Larissa.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Federal do Paraná - UFPR e ao Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento – LACTEC pela estrutura e apoio concedidos para a realização da pesquisa e à ELEJOR – Centrais Elétricas do Rio Jordão S.A. pelo apoio financeiro através da lei 10.973/2004 de incentivos à inovação e à pesquisa científica e tecnológica.

Agradecimento especial à minha esposa Andréia pelo amor, carinho, confiança, paciência, compreensão, sempre sendo o meu porto seguro e também me fazendo sentir ser sempre capaz de alcançar meus objetivos, presente em todos os passos dessa jornada, ofertando apoio e incentivo em todos os momentos. Amo você!

Agradecimento especial ao meu filho Enzo, que a cada dia me inspira a sempre continuar batalhando e que em cada dia está sempre me ensinado cada vez mais e mais. Amo você!

Agradecimento especial ao professor José Antonio Marques Carrer, pelo incentivo, colaboração, parceria, compreensão e apoio no desenvolvimento desse trabalho.

Agradecimento especial ao professor Luiz Alkimin de Lacerda pela confiança, incentivo, colaboração, parceria, compreensão e principalmente por sua amizade, sempre trazendo uma palavra confortante e esclarecedora, dispondo de seu tempo para me orientar, tanto na vida acadêmica com na profissional.

Agradecimento especial aos amigos de sala de aula e de trabalho. Raphael Fernando Scuciato, Fábio André Balbo, Amanda Jarek, Eduardo Orłowski, Rafael P. O. Rocha, Ubirajara Zocoli, Márcio A. Batista, Márcio dos Santos, Maristela Bandil e Jair Anjos, obrigado pela amizade e colaboração.

Agradecimento especial a Deus pela vida, saúde e pela oportunidade de ter conhecido as pessoas aqui citadas.

“O homem científico não pretende alcançar um resultado imediato. Ele não espera que suas ideias avançadas sejam imediatamente aceitas. Seus trabalhos são como sementes para o futuro. Seu dever é lançar as bases para aqueles que estão por vir e apontar o caminho. O dia em que descobriremos exatamente o que é a eletricidade, isso irá marcar um evento provavelmente maior, mais importante que qualquer outro na História da Humanidade. Então, será apenas uma questão de tempo para que o Homem consiga ligar suas máquinas diretamente à própria natureza. Imagine o que está por vir...”

Nikola Tesla

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração do uso de um domínio virtual para contornar um ponto de indeterminação.	34
Figura 2 – Uso de coordenadas polares.	35
Figura 3 – Ilustração do modelo geométrico adotado para a análise com o MEC.	39
Figura 4 – Discretização do contorno Γ em elementos Γ_j	40
Figura 5 – Funções lineares de aproximação.	41
Figura 6 – Ilustração da discretização do domínio do problema em células triangulares.	43
Figura 7 – Transformação de coordenadas de x e y em U e V	45
Figura 8 – Ilustração da localização centróide do ponto campo X	46
Figura 9 – Ilustração da localização dos pontos de integração para o caso singular ($X = \xi$) e da subdivisão do domínio transformado.	46
Figura 10 – Ilustração do modelo geométrico utilizado na implementação computacional (mm).	49
Figura 11 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.	50
Figura 12 – Solução no domínio para diferentes tempos e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$	51
Figura 13 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.	56
Figura 14 – Solução no domínio para diferentes tempos contando com o termo dissipativo e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$	57
Figura 15 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco para valor de $h = 0,05$ (azul), $0,5$ (verde), $1,5$ (vermelho) e $5,0$ (ciano).	58
Figura 16 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.	61
Figura 17 – Solução no domínio para diferentes tempos contando com o termo de geração de calor e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$	62
Figura 18 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.	63
Figura 19 – Ilustração do modelo geométrico de sub-regiões.	64
Figura 20 – Discretização do contorno e do domínio.	65
Figura 21 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$	69
Figura 22 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	70
Figura 23 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$	70
Figura 24 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com $\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	70
Figura 25 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	72
Figura 26 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	73
Figura 27 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	73
Figura 28 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 4,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	73
Figura 29 – Convergência dos resultados com o MEC para combinações de α_1 e α_2	74
Figura 30 – Modelo geométrico do problema de difusão-advectação do calor.	78
Figura 31 – Discretização do contorno e do domínio.	80

Figura 32 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$	82
Figura 33 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	83
Figura 34 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$	83
Figura 35 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$	83
Figura 36 – Soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	84
Figura 37 – Ampliação (b) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	85
Figura 38 – Ampliação (c) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	85
Figura 39 – Ampliação (d) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$	85
Figura 40 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,001 \text{ mm/s}$	87
Figura 41 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,005 \text{ mm/s}$	87
Figura 42 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,01 \text{ mm/s}$	88
Figura 43 – Comparação da solução MEC para diferentes velocidades e ampliação de um intervalo específico.....	89
Figura 44 – Modelo geométrico do problema de difusão do calor e difusão-advecção.	90
Figura 45 – Domínio do problema de escoamento fluido e condições de contorno.....	91
Figura 46 – Discretização do domínio do problema com destaque para a região onde ocorre o escoamento fluido (Ω_1 , região em azul).....	92
Figura 47 – Campo vetorial de velocidades no domínio do problema de escoamento.	92
Figura 48 – Módulo do campo de velocidade no domínio do problema de escoamento.	93
Figura 49 – Ilustração da localização dos pontos analisados.	102
Figura 50 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura nos pontos A, B, C, D, E, F e G do domínio.....	102
Figura 51 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura em pontos do disco sob geração interna de calor.....	103
Figura 52 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura no centro do disco para diferentes valores de velocidades do escoamento.	104
Figura 53 – Ilustração do modelo geométrico e discretização do contorno e domínio.....	118
Figura 54 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa quadrada.....	119
Figura 55 – Solução no domínio para diferentes tempos e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de R^2 para diferentes números de pontos de integração.	52
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

u	potencial de temperatura °C
\bar{u}	potencial de temperatura aproximado °C
\hat{u}	potencial de temperatura prescrito °C
u^*	solução fundamental
\mathbf{u}	vetor com os potenciais de temperatura °C
q	fluxo de transferência de calor W/mm ²
\bar{q}	fluxo de transferência de calor aproximado W/mm ²
\hat{q}	fluxo de transferência de calor prescrito W/mm ²
q^*	derivada da solução fundamental
\mathbf{q}	vetor com os fluxos de transferência de calor W/mm ²
t	tempo s
Δt	incremento de tempo s
R	raio mm
$r = X - \xi $	distância entre X e ξ
α	coeficiente de difusividade térmica mm ² /s
k	coeficiente de condutividade térmica W/mm°C
$hu(X, t)$	termo dissipativo °C/mm ²
$\frac{F(X, t)}{k}$	termo de geração interna de calor °C/mm ²
\mathbf{v}	vetor velocidade mm/s
Pe	número de Peclét
X	ponto campo
X_b	centróide da célula
ξ	ponto fonte

Γ	contorno
Ω	domínio
ϕ	função linear de aproximação
ψ	função constante de aproximação
δ	função Delta de Dirac
w	função de ponderação
J_0 e J_1	funções de Bessel de primeira espécie de ordens zero e um
λ	raíz positiva da equação $J_0(\lambda_n)=0$
η	vetor normal
E	erro ou resíduo
ε	raio do semicírculo excluído
(U, V)	espaço cartesiano transformado
R^2	coeficiente de determinação

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados do estudo numérico realizado a partir da equação da difusão do calor e transporte de energia em duas dimensões. No problema difusivo são analisados casos em que termos não homogêneos de dissipação e geração de calor se fazem presentes no modelo. No problema de transporte de energia foram testados diferentes valores para a velocidade advectiva em um caso de escoamento laminar, sendo identificada a influência de tal velocidade na resposta do campo térmico de cada caso simulado. O objetivo desse trabalho está voltado à investigação do comportamento térmico de determinado meio em diferentes situações (condições de contorno), motivado pelo crescente número de aplicações voltadas ao monitoramento de temperaturas. No modelo numérico, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno e adotou-se, na formulação, a solução fundamental para o operador adjunto Laplaciano. Como tal solução fundamental é independente do tempo, técnicas de diferenças finitas para o avanço no tempo foram empregadas e um método de integração das células foi desenvolvido e aplicado. Os resultados obtidos comprovam a eficácia da formulação baseada no Método dos Elementos de Contorno e também demonstram o potencial do emprego da solução fundamental independente do tempo para análise de problemas transientes.

Palavras-Chave: Método dos elementos de contorno, difusão do calor, solução fundamental, termo dissipativo, geração de calor, difusão-advectação.

ABSTRACT

This work presents the results of numerical study developed for the equation of heat diffusion and equation of energy transport in two dimensions. In the diffusive problem are analyzed cases where there is the presence of non-homogeneous terms of dissipation and heat generation in the model. In the problem of energy transport different values for advective velocity in a case of laminar flow were tested, and identified the influence of such velocity on the response of thermal field of each simulated case. The objective of this work is focused on the thermal behavior of a particular environment in different situations (boundary conditions), motivated by the growing number of applications based on monitoring of temperatures. In the numerical model, the Boundary Element Method was used and the fundamental solution for the Laplacian adjoint operator was adopted in the formulation. As such fundamental solution is independent of time, finite difference techniques to advance in time were employed. An alternative method for integrating cells was developed and applied. The results show the effectiveness of the formulation based on the Boundary Element Method and also demonstrate the potential of using the fundamental solution independent of time for analyzing transient problems.

Keywords: **Boundary element method, heat diffusion, fundamental solution, term dissipative, heat generation, diffusion-advection.**

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	18
1.2	JUSTIFICATIVA.....	20
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	20
1.3.1	Objetivo Geral.....	20
1.3.2	Objetivos Específicos.....	21
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	22
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	24
2.1	MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	24
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	29
3.1	MODELO MATEMÁTICO.....	29
3.2	FORMULAÇÃO DO MEC.....	30
3.3	MODELO NUMÉRICO DE AVANÇO NO TEMPO.....	36
4	MODELO GEOMÉTRICO E SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	39
4.1	MODELO GEOMÉTRICO E DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	39
4.2	DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO.....	40
4.3	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DAS CÉLULAS.....	42
4.4	SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	47
4.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE NUMÉRICA.....	48
4.6	RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO.....	50
4.6.1	Análise da quantidade de pontos utilizados no método de integração das células	52
5	EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM TERMO NÃO HOMOGÊNEO.....	53
5.1	EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM TERMO DISSIPATIVO.....	53
5.2	RESULTADOS.....	55

5.3	EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM GERAÇÃO DE CALOR	58
5.4	RESULTADOS	61
6	DIFUSÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS NÃO HOMOGENÊOS.....	64
6.1	MODELO GEOMÉTRICO E DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA	64
6.1.1	Discretização do problema	65
6.2	NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA....	66
6.3	RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO	69
6.4	ANÁLISE DA DIFUSÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS NÃO HOMOGÊNEOS.....	71
6.4.1	Resultados do MEC para a análise com subregiões.....	72
7	DIFUSÃO-ADVECÇÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS	76
7.1	MODELO MATEMÁTICO PARA O CASO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO.....	76
7.2	MODELO GEOMÉTRICO PARA O CASO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO	78
7.2.1	Discretização do problema	80
7.2.2	Notação matricial e solução numérica para o problema.....	80
7.3	RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO	81
7.3.1	Teste 01	81
7.3.2	Teste 02	86
7.4	MODELO GEOMÉTRICO E MATEMÁTICO PARA O CASO DIFUSÃO- ADVECÇÃO: PLACA COM UM OBSTÁCULO SOB GERAÇÃO DE CALOR.....	89
7.4.1	Escoamento ao redor de um obstáculo circular – campo de velocidades 90	
7.4.2	Discretização do modelo geométrico e campo de velocidades	92
7.4.3	Equação básica do MEC para o caso difusivo-advectivo.....	94
7.4.4	Notação matricial e solução numérica para o problema de difusão- advecção	97
7.4.5	Resultados.....	102
8	CONCLUSÕES.....	105
	AGRADECIMENTOS.....	109
	PRODUÇÕES.....	110

PRODUÇÕES ADICIONAIS	111
REFERÊNCIAS	112
ANEXO	118
<i>Solução do MEC para um domínio quadrado.....</i>	<i>118</i>

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A análise de temperaturas, obtidas a partir de ferramentas de monitoramento, tem permitido identificar inúmeros problemas de engenharia. Em muitas aplicações, variações de temperatura podem ser relacionadas a outras grandezas, auxiliando, por exemplo, a detecção de dano em concreto (MALHOTRA e CARINO, 2004), infiltração d'água em solo arenoso (ROCHA *et al.*, 2010), infiltrações em barragens de enrocamento com face de concreto (JAREK *et al.*, 2011) ou a detecção do nível de água em drenos de fundação de barragens (PETTRES, ROCHA e LACERDA, 2012).

Em todos os casos citados, medidas de temperatura foram realizadas de maneira direta, utilizando sensores específicos para coleta de dados a partir de experimentos laboratoriais ou *in loco*.

No entanto, adquirir dados de temperatura e gerar modelos de análise baseados apenas em testes experimentais ou em medições locais podem ser tarefas complexas tendo em vista o processamento dos dados de cada experimento.

Uma alternativa para investigar a dinâmica de determinado fenômeno é o emprego de modelos matemáticos que representem o fenômeno físico estudado ou de interesse, o que permite repetir o processo inúmeras vezes com o uso de métodos numéricos de solução. Uma abordagem numérica consistente permite a realização de análises paramétricas, que se efetuadas em modelos experimentais, destrutivos ou não, resultarão em custo mais elevado.

Entre os diversos métodos numéricos de solução existentes tem-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989; BEER e WATSON, 1994) o qual apresenta-se como técnica ou procedimento numérico alternativo para a resolução de diversos problemas físicos a partir de equações integrais de contorno.

Na literatura corrente, trabalhos do MEC voltados para a análise da equação da difusão são encontrados em grande número; no entanto, trabalhos do MEC que utilizam a solução fundamental independente do tempo para análise da equação da difusão contando com termos não homogêneos, como o termo de dissipação, não foram registrados até a presente data em literaturas livres¹. Trabalhos do MEC abordando a equação da difusão contando com termo não homogêneo, como o termo de geração interna de calor, são encontrados na literatura, porém, a solução fundamental dependente do tempo é adotada (GRAMANN, MATZIG e OSSWALD, 1992, OCHIAI, 2001).

Dessa forma e a partir de tais considerações, propõe-se nesse trabalho um estudo numérico bidimensional do processo de difusão do calor transiente em meios contínuos, contando ora com o acoplamento de um termo dissipativo, ora com um termo de geração de calor no modelo matemático, como encontrado em problemas de reação de hidratação do cimento (MEHTA e MONTEIRO, 2008). Propõe-se ainda, nesse trabalho, o uso da solução fundamental independente do tempo na formulação do MEC, além de um estudo numérico voltado para o problema de difusão-advecção de calor, sendo simulado um escoamento fluido bidimensional. Nessa mesma formulação aborda-se também o caso no qual uma região circular sob geração de calor está presente como um obstáculo ao escoamento.

Para tanto, simulações computacionais a partir do MEC foram realizadas para obtenção de soluções aproximadas para os problemas de difusão e de difusão-advecção, sob condições específicas de contorno. A validação das formulações foi obtida comparando-se os resultados numéricos aos analíticos, sendo calculado o coeficiente de determinação R^2 , indicando o quanto o

¹ A busca por literaturas livres sobre o tema abordado foi baseada no Portal de periódicos da Capes, biblioteca virtual, sites de revistas internacionais e Anais de Congresso Nacionais e Internacionais cujo tema é o Método dos Elementos de Contorno, portal Scientific Electronic Library Online (SciELO), portal Science Direct, teses e dissertações, além de ferramentas de busca na internet.

modelo numérico consegue explicar os valores observados para cada caso testado onde a resposta analítica é conhecida. Os resultados obtidos são apresentados no decorrer do presente trabalho.

1.2 JUSTIFICATIVA

Subsidiar a solução de problemas de engenharia por meio da compreensão de fenômenos de transporte de calor constitui a principal motivação para realização deste estudo, que compreende o desenvolvimento de formulações numéricas voltadas à investigação do processo de difusão, dissipação e/ou geração de calor bidimensional em meios contínuos, sujeitos a diferentes condições de contorno bem como em problemas de difusão-advectação.

Embora existam no mercado pacotes comerciais de simulação numérica com propósito ou capacidade semelhante, a formulação a ser desenvolvida explora formas alternativas para a solução numérica de problemas clássicos da física e matemática, evitando, assim, generalizações e/ou limitações encontradas em programas fechados.

Por fim, este trabalho busca também contribuir com o Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR, disseminando o conhecimento científico e ampliando o número de aplicações e formulações baseadas no MEC.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo desenvolver formulações computacionais baseadas no Método dos Elementos de Contorno com o uso de uma solução fundamental independente do tempo para análise de problemas bidimensionais transientes de difusão e difusão-advecção. Tal objetivo baseia-se na equação da difusão com a inclusão de termos não homogêneos e também a equação da difusão-advecção.

1.3.2 Objetivos Específicos

- (i) Apresentar o desenvolvimento da formulação do MEC para domínios isotrópicos e homogêneos com a solução fundamental independente do tempo para a equação de difusão, bem como sua implementação e validação por meio de soluções analíticas conhecidas;
- (ii) Adaptar a formulação e implementação apresentadas com o acoplamento de um termo dissipativo na equação da difusão do calor. Realizar testes de validação;
- (iii) Adaptar a formulação e implementação apresentadas com o acoplamento de um termo não homogêneo na equação da difusão do calor representando geração interna de calor. Realizar testes de validação;
- (iv) Avaliar a influência da heterogeneidade do material nas simulações por meio da introdução de subregiões, visando representar de maneira mais específica a interação entre diferentes meios adjacentes.
- (v) Simular computacionalmente um meio contínuo contendo um elemento sob geração interna de calor;
- (vi) Implementar o problema de difusão do calor acoplado ao fenômeno de escoamento a partir da equação de difusão-advecção.

- (vii) Avaliar a influência do fenômeno advectivo no problema de difusão do calor e também o desempenho da formulação matemática desenvolvida.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 apresenta-se a revisão da literatura sobre o Método dos Elementos de Contorno e são apresentados, de forma sucinta, trabalhos voltados para análise de problemas de difusão do calor.

A formulação matemática do MEC para solução da equação do calor, contando com uma solução fundamental independente do tempo, é apresentada no capítulo 3, onde também é apresentada a técnica utilizada para o processo de avanço no tempo a partir de diferenças finitas.

O capítulo 4 traz informações sobre o modelo geométrico do problema, discretização de tal modelo, técnica de integração dos elementos de contorno e também de um método de integração das células de domínio. Nesse mesmo capítulo são apresentadas as soluções numéricas obtidas e a validação da formulação do MEC, tomando como referência a solução analítica do problema proposto e o coeficiente de determinação R^2 .

No capítulo 5 são apresentados os resultados dos testes realizados a partir da equação do calor contando com a presença de um termo não homogêneo em dois casos. No primeiro, um termo dissipativo é introduzido na equação do calor e no segundo, um termo representando geração interna de calor é acoplado à equação do calor.

No capítulo 6 são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir das análises térmicas de meios setorialmente homogêneos contando com o uso de sub-regiões e de regiões sob geração interna de calor.

No capítulo 7 são apresentados os resultados da simulação do fenômeno de difusão-advectação do calor. Ainda nesse capítulo é analisada a distribuição de temperaturas em um domínio retangular a partir de um escoamento no qual

o campo de velocidades foi calculado analiticamente, contendo um obstáculo circular sob geração de calor.

No capítulo 8 são apresentadas as conclusões do presente estudo e as sugestões para estudos futuros.

CAPÍTULO 2

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é apresentada a revisão de literatura sobre o Método dos Elementos de Contorno.

2.1 MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Com a utilização de computadores cada vez mais poderosos, com quantidades crescentes de memória interna e externa, tornou-se possível investigar a dinâmica incrivelmente complexa de fenômenos por meio de simulações cada vez mais realistas.

Tais simulações estão aliadas ao desenvolvimento e aplicações de métodos numéricos com o intuito de solucionar problemas físicos regidos por equações diferenciais onde a solução analítica não existe ou não é obtida trivialmente.

Entre os diversos métodos numéricos desenvolvidos tem-se o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA, 1978, BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989; BEER e WATSON, 1994).

Neste método são determinadas as soluções aproximadas para as variáveis não prescritas no contorno ou em pontos pertencentes ao domínio a partir da resolução de um sistema de equações algébricas, obtido a partir das integrais do contorno (BEER e WATSON, 1994) contendo a solução fundamental do problema (GREENBERG, 1971).

Uma das principais vantagens da aplicação do MEC está relacionada à redução das dimensões dos problemas analisados em comparação com outros métodos numéricos (Elementos Finitos, Diferenças Finitas), analisando o

problema em pontos discretos no contorno. Essa característica implica em menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento e menor espaço de armazenamento das informações necessárias no processamento, tornando-o bastante útil (TAGUTI, 2010).

Os primeiros registros que tratam de formulações matemáticas via equações integrais datam do ano de 1903, ano no qual Fredholm apresentou a primeira teoria clássica das equações integrais (JACOBS, 1979).

Ainda no século XX, diversos autores utilizaram a técnica de equações integrais e oportunizaram importantes contribuições para a evolução de tal método, sendo denominado Método dos Elementos de Contorno a partir dos trabalhos de BREBBIA (1978), o qual apresentou uma formulação baseada em equações integrais e em técnicas de resíduos ponderados.

Atualmente, o MEC vem sendo empregado para solucionar um número cada vez maior de problemas em mecânica dos sólidos (BEER e WATSON, 1994), dinâmica dos fluidos e acústica (WROBEL, 2002; SPINDLER, 2013), imageamento eletromagnético (AKALIN-ACAR e GENÇER, 2004), análise de proteção catódica (LACERDA, SILVA e LÁZARIS, 2007), elastodinâmica (TRAUB, 2013) entre outros, contando com o acoplamento de diferentes métodos numéricos em determinadas formulações (JESUS e AZEVEDO, 2002; VANZUIT, 2007; AURADA *et al.*, 2012).

Ainda, no que consta na literatura sobre os aspectos históricos da evolução do MEC, sugerem-se os trabalhos de TAGUTI (2010) e KEIDEL (2011)², além do trabalho intitulado “*Heritage and early history of the Boundary Element Method*” dos autores CHENG e CHENG (2005).

Na literatura corrente registram-se inúmeros trabalhos envolvendo análise numérica a partir do MEC para o problema de difusão do calor. Entre eles, JESUS e PEREIRA (2004) apresentam análises de fluxo bidimensional em meios contínuos porosos utilizando subregiões homogêneas em um caso estacionário baseado na equação de Laplace. Adotando uma mesma linha de implementação numérica, VANZUIT (2007) e JESUS e AZEVEDO (2002), apresentaram soluções para o problema dinâmico de difusão do calor,

² O autor apresenta uma linha do tempo mostrando a evolução do MEC.

adotando uma solução fundamental independente do tempo, esquemas de marcha no tempo baseados em diferenças finitas, além do método de Houbolt presente no primeiro trabalho, do método de Hammer no segundo e do uso de células para aproximação das integrais de domínio em ambos.

BREBBIA e SKERGET (1984) apresentaram uma formulação do MEC utilizando solução fundamental independente do tempo para o caso de difusão-advecção em regime estacionário. Para o caso transiente de difusão-advecção os autores utilizaram uma solução fundamental dependente do tempo.

DESILVA *et al.* (1998) apresentaram soluções para o problema de difusão-advecção em duas dimensões utilizando uma solução fundamental dependente do tempo com o uso de velocidades variáveis e células de domínio.

Ainda com o uso de células, LIMA JR., VENTURINI e BENALLAL (2012), analisaram numericamente o comportamento mecânico de meios contínuos porosos saturados a partir de uma formulação implícita do MEC, contando com uma solução fundamental independente do tempo. Nesse trabalho, os autores acoplaram o problema elástico ao de fluxo, adotando, na formulação, procedimento numérico de Gauss para integração sobre elementos de contorno e um esquema semi-analítico para as integrais de domínio.

YOUNG *et al.* (2004), AZIS e CLEMENTS (2008) e ABREU (2013), também analisaram o problema dinâmico de difusão do calor, com a diferença de que a solução fundamental adotada na formulação apresenta dependência temporal.

LOEFFLER e COSTALONGA (2012) utilizaram dupla reciprocidade para resolver problemas difusivo-advectivos, variando a velocidade do escoamento e analisando a influência no transporte de energia diante da difusão térmica. Ainda adotando reciprocidade, OCHIAI (2001), apresenta a análise de difusão do calor transiente bidimensional, utilizando na formulação do MEC uma solução fundamental independente do tempo. Nesse trabalho o autor demonstra que é possível obter distribuições de temperatura satisfatórias com o uso de soluções fundamentais de baixa ordem. GUO *et al.* (2013), apresentaram uma formulação para resolver problemas tridimensionais de condução e geração de calor transiente. Nesse trabalho, a dependência do tempo no problema foi removida temporariamente das equações pela

transformada de Laplace, preservando as equações integrais de contorno, evitando-se a discretização do domínio.

O uso de reciprocidade também é observado no trabalho de TANAKA, KUROKAWA e MATSUMOTO (2008), os quais apresentaram uma formulação do MEC para problemas de condução bidimensional do calor transiente em meios anisotrópicos. Esse trabalho fez uso de uma solução fundamental independente do tempo para materiais isotrópicos e esquema de marcha no tempo baseado em diferenças finitas.

SINGH e TANAKA (2000) apresentaram uma formulação do método dos elementos de contorno alternativa baseada na transformação exponencial variável para problemas de difusão-advecção estáveis, convertendo a equação da difusão-advecção na equação de Helmholtz modificada. Nesse trabalho os autores discutem três transformações e diferenciam seu uso para problemas dominados pela difusão e advecção.

SUTRADHAR e PAULINO (2004) apresentaram uma análise para a condução de calor transiente sem a discretização do domínio, transformando um problema não homogêneo em um problema de difusão homogênea a partir da transformada de Laplace e de aproximações de Galerkin. Nesse trabalho a dependência do tempo é restaurada pela inversão numérica da transformação de Laplace por meio do algoritmo de Stehfest (STEHFEST, 1970). Os resultados obtidos com a formulação adotada foram comparados com as soluções obtidas com simulações de elementos finitos. WEI e ZHANG (2013) utilizaram o método de separação de variáveis e o princípio de Duhamel para transformar o problema unidimensional de difusão e geração de calor em um problema de análise inversa baseado no MEC.

YU, YAO e GAO (2014) analisaram problemas de condução do calor transiente com o uso de integração radial na formulação do MEC. Em tal análise os autores resolveram o problema de condução para meios os quais apresentam condutividades térmicas variáveis.

Em todos os trabalhos citados, o MEC é utilizado para se obter uma solução aproximada do problema e o acoplamento de outros métodos é prática comum (diferenças finitas entre outros).

Para o desenvolvimento do presente trabalho, adotou-se a linha teórica de análise térmica de meios contínuos utilizada pelos autores: VANZUIT,

JESUS e AZEVEDO, TANAKA, KUROKAWA e MATSUMOTO e LOEFFLER e COSTALONGA, com vistas em contribuir para os estudos baseados no Método dos Elementos de Contorno e em problemas de difusão do calor e difusão-advectação.

CAPÍTULO 3

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática do MEC para solução da equação da difusão do calor, contando com uma solução fundamental independente do tempo, obtida a partir do operador Laplaciano em duas dimensões. Também é apresentado nesse capítulo o método utilizado para o processo de avanço no tempo a partir de diferenças finitas, utilizando o critério de estabilidade (WROBEL (1981) *apud* ONISHI, KUROKI e TANAKA (1984)) para definição do incremento de tempo.

3.1 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático escolhido para este estudo é a equação da difusão, que, de acordo com GREENBERG (1998), é dada por:

$$\nabla^2 u(X,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$X \in \Omega, \quad X = (x,y)$$

onde α representa o coeficiente de difusividade térmica do material cuja unidade é o mm^2/s , u é o potencial de temperatura medido em $^\circ\text{C}$, Ω é o domínio do problema e t é o tempo, cuja unidade é o segundo.

As condições de contorno são:

Essenciais

$$u(X,t) = \hat{u}(X,t) \quad X \in \Gamma_u \quad (2)$$

Naturais

$$q(X,t) = -k \frac{\partial u(X,t)}{\partial n(X)} = \hat{q}(X,t) \quad X \in \Gamma_q \quad (3)$$

onde k é a condutividade térmica cuja unidade é $W/mm^\circ C$.

A condição inicial em t_0 é dada por:

$$u(X,t) = u_0(X,t_0) \quad X \in \Omega \quad (4)$$

onde Γ é o contorno e q é o fluxo de transferência de calor cuja unidade é W/mm^2 .

3.2 FORMULAÇÃO DO MEC

Sendo \bar{u} uma solução aproximada do problema, que não atende às condições de contorno, três tipos de resíduos ou erros são gerados:

I. no domínio Ω :

$$E_\Omega = \nabla^2 \bar{u}(X,t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial t} \neq 0 \quad (5)$$

II. no contorno em Γ_u :

$$E_{\Gamma_u} = \bar{u} - \hat{u} \neq 0 \quad (6)$$

III. e no contorno em Γ_q :

$$E_{\Gamma_q} = \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial n} - \frac{\partial \hat{u}(X,t)}{\partial n} = \bar{q} - \hat{q} \neq 0 \quad (7)$$

A sentença básica de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \bar{u}(X,t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial t} \right) w d\Omega + \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (\bar{q} - \hat{q}) \bar{w} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

As funções de ponderação w , \bar{w} e $\bar{\bar{w}}$ podem ser escolhidas convenientemente, visando simplificar o problema.

Calculando a integral que contém o Laplaciano na equação (8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \bar{u} \right) w d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} n_y \right) w d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \quad (9)$$

onde n_x e n_y são os cossenos diretores, ou seja:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} n_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \bar{q} \quad (10)$$

Calculando a integral de domínio à direita na equação (9), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) \bar{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \bar{u} d\Omega \quad (11)$$

onde:

$$\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = \frac{\partial w}{\partial n} \quad (12)$$

Substituindo a equação (11) na equação (9):

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \bar{u} \right) w d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega \quad (13)$$

e depois a equação (13) na equação (8), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left(\bar{u} - \hat{u} \right) \bar{w} d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_q} \left(\bar{q} - \hat{q} \right) \bar{w} d\Gamma - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial t} w d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Fazendo $\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial n}$, $\bar{w} = -w$ na equação (14), aplicando o resultado na equação (8) e levando em consideração que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, obtém-se a equação denominada formulação inversa de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u}(X,t) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{u}(X,t) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{q}(X,t) w d\Gamma + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{u}(X,t)}{\partial t} w d\Omega \quad (15)$$

No Método dos Elementos de Contorno, a função de ponderação w é a solução do problema singular equivalente, isto é, é a solução fundamental (GREENBERG, 1971) para o operador diferencial.

Para a equação de Poisson (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989), a solução fundamental para o operador adjunto Laplaciano, representada por $u^*(\xi, X)$, é a solução do problema:

$$\nabla^2 u^*(\xi, X) = -\delta(\xi, X) \quad (16)$$

onde $\delta(\xi, X)$ representa a função Delta de Dirac (PRESS *et al.*, 2007) em um ponto fonte ξ e X é denominado ponto campo.

Assim, $u^*(\xi, X)$ pode ser interpretada como o efeito, no ponto campo X , de uma fonte concentrada unitária aplicada no ponto fonte ξ .

Em duas dimensões, X é o ponto de coordenadas $(x, y) = (x_1, x_2)$ e ξ é o ponto de coordenadas $(\xi_x, \xi_y) = (\xi_1, \xi_2)$. De acordo com GREENBERG (1971), a expressão de $u^*(\xi, X)$ é:

$$u^*(\xi, X) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (17)$$

onde $r = |X - \xi|$ é a distância entre X e ξ .

Conhecida a solução fundamental do problema, a sua derivada em relação à direção normal ao contorno é denotada por q^* e calculada como:

$$q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dr}{dn} \quad (18)$$

Aplicando as soluções fundamentais equação (17) e equação (18) na equação (15) e mudando \bar{u} para u , tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, X) u(X, t) d\Omega = \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega \quad (19)$$

Como $\nabla^2 u^*(\xi, X) = -\delta(\xi, X)$, a primeira integral de domínio do lado esquerdo da equação (19) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, X) u(X, t) d\Omega = - \int_{\Omega} \delta(\xi - X) u(\xi, t) d\Omega = -u(\xi, t) \quad (20)$$

Da substituição da equação (20) na equação (19), resulta a equação integral para pontos internos:

$$u(\xi, t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega \quad (21)$$

Embora a equação integral (21) represente a solução do problema para pontos ξ pertencentes ao domínio, ela não pode ser utilizada enquanto os valores de $q(X, t)$ em Γ_u e de $u(X, t)$ em Γ_q não forem conhecidos. Para resolver esse problema, torna-se necessário encontrar uma expressão limite da equação (21), na qual $\xi \in \Gamma$.

Para a obtenção da expressão limite, que torna possível a solução do problema, o ponto ξ é levado ao contorno. Em seguida, exclui-se um círculo (ou semicírculo) de raio ε e centro em ξ do domínio e calcula-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (Figura 1).

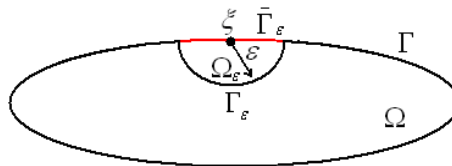


Figura 1 – Ilustração do uso de um domínio virtual para contornar um ponto de indeterminação.

Observações:

Se Ω_ε é o domínio excluído, em $(\Omega - \Omega_\varepsilon)$, tem-se $\nabla^2 u^*(\xi, X) = 0$ porque $\xi \notin (\Omega - \Omega_\varepsilon)$.

As integrais de contorno devem ser avaliadas em $(\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon)$, onde $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ representa o contorno excluído de Γ , e em Γ_ε , que representa o contorno do semicírculo.

Assim, a equação (19) é escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma - \right. \\ \left. \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma + \right. \\ \left. \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

As integrais em Γ_ε podem ser calculadas utilizando coordenadas polares, fazendo $r = \varepsilon = \text{constante (cte)}$, $d\Gamma = \varepsilon d\theta$ e $X' = (r, \theta)$ (Figura 2):

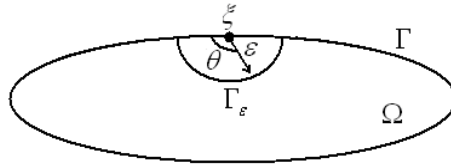


Figura 2 – Uso de coordenadas polares.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\xi, X) q(X', t) d\Gamma \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\theta \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln \varepsilon q(X', t) \varepsilon d\theta \right) \quad (23)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se o seguinte resultado:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\xi, X) q(X', t) d\Gamma \right) = 0 \quad (24)$$

Para a integral que contém $q^*(\xi, X)$, o limite pode ser calculado como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(u(X, t) - u(\xi, t)) d\Gamma + u(\xi, t) \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* d\Gamma \right] \quad (25)$$

Utilizando a equação (18) na equação (25), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X, t) \int_0^\theta \frac{-1}{2\pi \varepsilon} \frac{dr}{dn} \varepsilon d\theta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X, t) \int_0^\theta \frac{-1}{2\pi} (-1) d\theta \right) = u(\xi, t) \frac{\theta}{2\pi} \end{aligned} \quad (26)$$

O termo $\frac{\theta}{2\pi}$ é designado por $C(\xi)$. Assim:

$$C(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi \text{ é ponto de contorno suave } (\theta = \pi) \\ 1, & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases} \quad (27)$$

Assim, a equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$\begin{aligned} C(\xi) u(\xi, t) &= \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma - \\ &\quad \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

3.3 MODELO NUMÉRICO DE AVANÇO NO TEMPO

Acoplado ao MEC, diferentes métodos numéricos são utilizados em determinadas formulações (JESUS e AZEVEDO, 2002, VANZUIT, 2007, AURADA *et al.*, 2012). Nesse trabalho, para o processo de avanço no tempo acopla-se o Método de Diferenças Finitas ao MEC.

O Método de Diferenças Finitas tem por finalidade obter a taxa de variação de uma grandeza, por exemplo entre dois instantes de tempo, sendo uma aproximação para o valor da derivada em determinado ponto quando $\Delta t \rightarrow 0$ (MORTON e MAYERS, 1994).

Desta forma, a derivada no tempo presente na equação (28) é aproximada pelo quociente da variação dos potenciais pelo intervalo de tempo correspondente, conforme a equação (29).

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = \frac{u(X,t + \Delta t) - u(X,t)}{\Delta t} \quad (29)$$

Substituindo (29) em (28) e agrupando-se convenientemente os termos, obtém-se:

$$C(\xi)u(\xi,t + \Delta t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X)q(X,t + \Delta t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X)u(X,t + \Delta t)d\Gamma - \frac{1}{\alpha \Delta t} \left(\int_{\Omega} u(X,t + \Delta t) u^*(\xi, X) d\Omega - \int_{\Omega} u(X,t) u^*(\xi, X) d\Omega \right) \quad (30)$$

Usando a aproximação de Diferenças Finitas a equação original passa a ser uma equação com solução obtida recursivamente em um número m de passos de tempo. Nesse trabalho, optou-se em utilizar Δt constante, calculado a partir do critério de estabilidade (utilizado para o caso dependente do tempo) que relaciona Δt ao tamanho do elemento de contorno Γ_j e ao coeficiente de difusividade térmica α do material, que segundo WROBEL (1981) *apud* ONISHI, KUROKI e TANAKA (1984) pode ser estimado da seguinte forma:

$$\Delta t \leq \frac{\Gamma_j^2}{2\alpha} \quad (31)$$

cuja unidade é o segundo.

CAPÍTULO 4

4 MODELO GEOMÉTRICO E SOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentados: o modelo geométrico do problema considerando-se homogeneidade para o meio, a discretização e as técnicas de integração dos elementos de contorno e das células de domínio. Ao final desse capítulo apresentam-se as soluções numéricas obtidas e a validação da formulação do MEC a partir da comparação com a solução analítica do problema proposto.

4.1 MODELO GEOMÉTRICO E DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

O modelo geométrico adotado é um disco plano de raio R unitário cuja unidade é o milímetro (Figura 3).

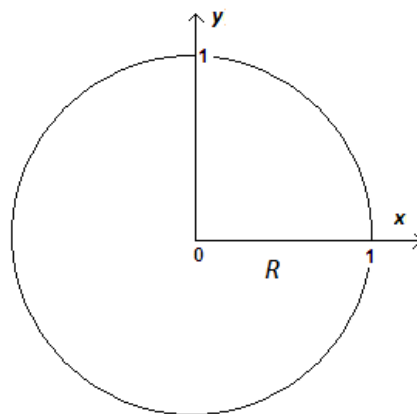


Figura 3 – Ilustração do modelo geométrico adotado para a análise com o MEC.

A partir do modelo geométrico e com base na equação integral (30) chega-se a um sistema de equações algébricas pela discretização do contorno em elementos lineares e do domínio em células constantes.

4.2 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

O contorno Γ do domínio Ω é dividido em elementos retos de contorno Γ_j (Figura 4 meramente ilustrativa).

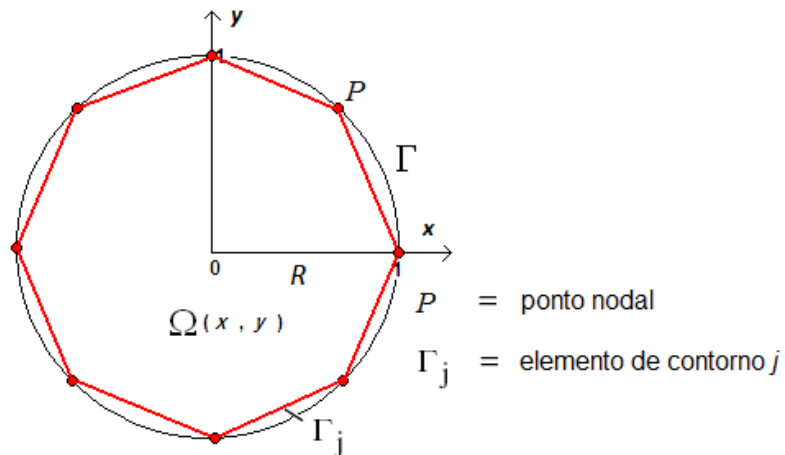


Figura 4 – Discretização do contorno Γ em elementos Γ_j .

Aproximando-se a geometria de cada elemento Γ_j em função de suas coordenadas nodais tem-se, para um ponto P qualquer:

$$x_1(P) = \phi_1(P)x_1^{j1} + \phi_2(P)x_1^{j2} \quad (32)$$

$$x_2(P) = \phi_1(P)x_2^{j1} + \phi_2(P)x_2^{j2} \quad (33)$$

onde j indica o elemento Γ_j , ϕ é a função de aproximação linear e x_1 e x_2 são os nós extremos do elemento .

A cada elemento de contorno, Γ_j , associam-se um ou mais pontos denominados "nós funcionais" ou "pontos nodais" e os valores das variáveis a eles associados são denominados "valores nodais". Ao longo de cada elemento as variáveis do problema (potencial u e fluxo q) são aproximadas por funções polinomiais (constantes, lineares, quadráticas, etc) em função das quais é definido o número de pontos nodais: 1,2 e 3, respectivamente.

Utilizando dois pontos nodais as variáveis são aproximadas de maneira linear como ilustra a Figura 5, adotando as seguintes funções de aproximação (TAGUTI, 2010).

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (34)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (35)$$

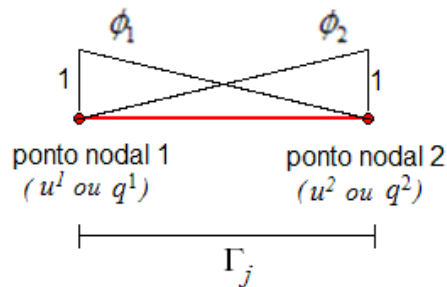


Figura 5 – Funções lineares de aproximação.

Dessa forma, as integrais de contorno são calculadas da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r} \frac{dr}{dn} [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$$\int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde u^1, u^2, q^1 e q^2 são os valores nodais em cada elemento.

Quando o ponto fonte está localizado fora do elemento que está sendo integrado ($r \neq 0$), nenhum problema de singularidade é observado e as integrais (36) e (37) podem ser calculadas analítica ou numericamente (nesse trabalho optou-se em utilizar o método numérico da *Quadratura de Gauss* (HUNTER, 2001)). Porém, quando o ponto fonte está sobre o elemento que está sendo integrado ($r = 0$), as integrais em (36) e (37) apresentam termos com no máximo singularidade fraca envolvendo a derivada da solução fundamental e a própria solução fundamental, respectivamente. De acordo com CRUZ (2001), tradicionalmente utiliza-se uma técnica de regularização local através de “movimento de corpo rígido” (prescrição de potencial de temperatura constante em todo o contorno) para o cálculo da integral em (36), que, segundo CHAVES (2003), pode ser aplicada em problemas potenciais; já a integral em (37), pode-se calculá-la analiticamente, ou através de integração logarítmica, ou ainda através da transformação de coordenadas polinomial de segunda e terceira ordem proposta por TELLES (1987), a qual foi adotada nesse trabalho.

A transformação citada baseia-se em uma transformação não linear de coordenadas que resulta em um jacobiano nulo quando a distância entre o ponto fonte e o ponto campo é zero. Nesse processo, os pontos de integração são reposicionados em função da mudança de coordenadas.

4.3 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DAS CÉLULAS

Nesse trabalho em razão das integrais de domínio presentes em (30), optou-se em discretizar o domínio com o emprego de células constantes, cuja função de aproximação é dada por (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989):

$$\psi = 1 \quad (38)$$

Nesse modelo, admite-se que as variáveis apresentam comportamento constante em cada célula. Uma célula genérica é definida pelos vértices $k_1(x_1, y_1)$, $k_2(x_2, y_2)$ e $k_3(x_3, y_3)$, ilustrada na Figura 6.

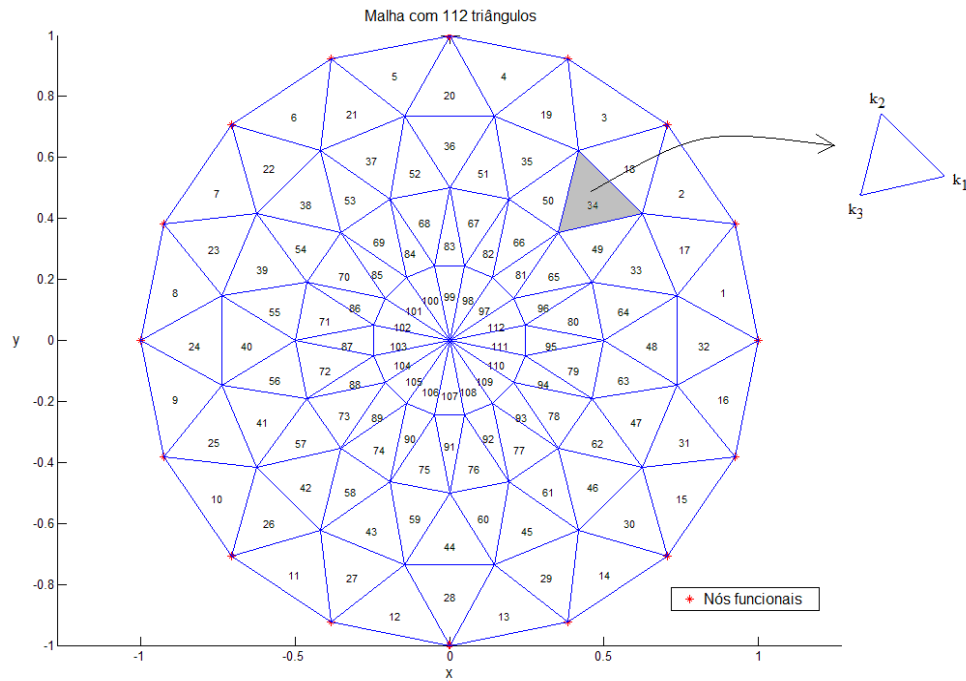


Figura 6 – Ilustração da discretização do domínio do problema em células triangulares.

As integrais em $\Omega(x, y)$ são integrais duplas e são calculadas utilizando-se uma transformação no plano a partir dos vértices do triângulo da forma:

$$\begin{aligned} x &= (1 - U) x_1 + U [(1 - V) x_2 + V x_3] \\ y &= (1 - U) y_1 + U [(1 - V) y_2 + V y_3] \end{aligned} \quad (39)$$

Tem-se, portanto, U e V (coordenadas do sistema triangular) como funções de x e y , ou seja:

$$\begin{aligned} U &= U(x, y) \\ V &= V(x, y) \end{aligned} \quad (40)$$

De acordo com LEITHOLD (1994), para o cálculo da integral dupla de uma função de duas variáveis, exige-se que a função seja definida numa região fechada³ em um espaço \mathfrak{R}^2 (real de duas dimensões), condição essa, satisfeita pela região triangular de cada célula.

Efetuando tais transformações, faz-se necessário calcular o determinante do Jacobiano de transformação.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \quad (41)$$

De acordo com SOUZA e CODA (2005), para a célula triangular plana o determinante do Jacobiano de transformação tem valor numericamente igual ao dobro da área A da célula, ou seja:

$$|J| = 2 A \quad (42)$$

Assim, as integrais não singulares em $\Omega(x, y)$ passam a ser calculadas da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u^*(\xi, X) d\Omega = \sum_{j=1}^{j=M} \int_0^{1-U} \int_0^{1-U} \psi u^*(\xi, X_j) |J_j| dV dU \quad (43)$$

onde ψ é dada por (38), M é o número de células e os limites de integração variam entre 0 e 1 (domínio (U, V)), como ilustrado na Figura 7.

³ Uma região fechada é que aquela que inclui sua fronteira (LEITHOLD, 1994).

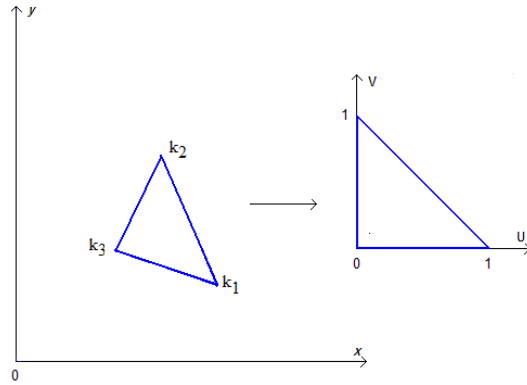


Figura 7 – Transformação de coordenadas de x e y em U e V .

A solução fundamental $u^*(\xi, X)$ presente em (43) é uma função que depende do espaço, adquirindo valores que se relacionam com a posição onde a mesma é avaliada. No entanto, o presente trabalho utiliza células constantes como uma aproximação para variáveis de domínio, definindo um único valor para cada célula em cada instante específico de tempo, aproximando a integração da solução fundamental com a utilização de um único ponto.

Procedendo da maneira indicada, a solução aproximada da integral dupla não depende mais das variáveis x , y , U e V , mas apenas das coordenadas dos vértices das células e da distância r entre o ponto fonte ξ e o ponto campo X como segue:

$$\int_0^{1-U} \int_0^{1-U} u^*(\xi, X) |J| dV dU = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (44)$$

que corresponde à solução fundamental ponderada pela área A da célula, ou seja:

$$\int_0^{1-U} \int_0^{1-U} u^*(\xi, X) |J| dV dU = A \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (45)$$

A distância euclidiana do ponto fonte ξ ao centróide X_b é determinada pelas coordenadas dos vértices das células, onde a coordenada X_b é dada por (Figura 8):

$$X_b = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (46)$$

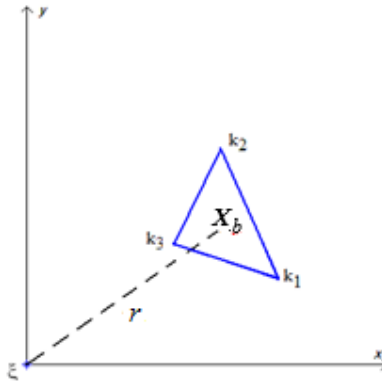


Figura 8 – Ilustração da localização centróide do ponto campo X .

Quando o ponto fonte ξ coincide com o ponto X_b , a integral (45) é fracamente singular. Nesse caso, integra-se tal célula subdividindo-a e alocando pontos de integração no domínio das células, não coincidentes com o ponto fonte ξ como ilustra a Figura 9.

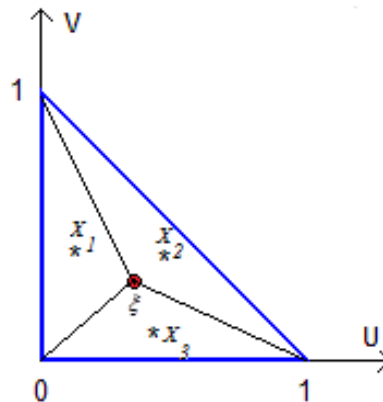


Figura 9 – Ilustração da localização dos pontos de integração para o caso singular ($X = \xi$) e da subdivisão do domínio transformado.

Determinadas as coordenadas dos pontos de integração e as subáreas (A_i) no domínio triangular, a integral singular de domínio é calculada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u^*(\xi, X) d\Omega = \sum_{i=1}^{i=3} A_i \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_i}\right) \quad (47)$$

onde r_i representa a distância entre ξ e x_1, x_2 e x_3 .

Dessa forma, aproximando-se o domínio do problema a partir de células triangulares constantes, forma-se um sistema de equações, que, em notação matricial e com base na equação (30), tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} - \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \{ [\mathbf{u}^d]_{m+1} - [\mathbf{u}^d]_m \} \quad (48)$$

Na equação (48), \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes que resultam das integrais de contorno que contém $q^*(\xi, X)u(x)$ e $u^*(\xi, X)q(x)$, respectivamente, \mathbf{M} resulta das integrais de domínio e \mathbf{I} é a matriz identidade. O primeiro elemento de cada duplo superíndice indica a localização do ponto fonte ξ e o segundo, do ponto campo X , com c indicando contorno e d , domínio. Os subíndices $m+1$ e m indicam o tempo $t^{m+1} = (m+1)\Delta t$ e $t^m = m\Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo. Na formulação apresentada nesse trabalho adotou-se Δt constante, calculado a partir da equação (31).

Agrupando os termos semelhantes da equação (48), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^d]_m \quad (49)$$

4.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A partir da imposição das condições de contorno e iniciais, pode-se utilizar a equação (49) para obter a solução do problema. Dessa forma, o sistema de equações dado em (49) é reescrito como:

$$\mathbf{A} x^{m+1} = y^{m+1} + y^m \quad (50)$$

onde:

- x^{m+1} é o vetor de valores nodais desconhecidos no tempo t^{m+1} ;
- \mathbf{A} é a matriz de coeficientes que contém termos relativos a \mathbf{H} , \mathbf{G} e \mathbf{M} ;
- y^{m+1} é um vetor que representa a contribuição do instante t^{m+1} , e y^m , a contribuição do instante t^m .

Assim, a partir da equação (50) obtém-se o vetor incógnita x^{m+1} :

$$x^{m+1} = \mathbf{A}^{-1} (y^{m+1} + y^m) \quad (51)$$

4.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE NUMÉRICA

A formulação do MEC foi implementada no software Matlab R2012® e aplicada para o modelo geométrico ilustrado pela (Figura 10) sob as seguintes condições de contorno e iniciais:

$$u(X, t) = 10 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Gamma \quad (52)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno e fixa para todo o intervalo de análise e

$$u_0(X, t_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Omega \quad (53)$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema no tempo inicial de análise.

A análise numérica foi realizada a partir de 16 elementos lineares de contorno sendo utilizados 16 pontos para a *Quadratura de Gauss* no processo de integração de tais elementos e 112 células triangulares constantes de domínio⁴.

A numeração das células foi definida no sentido anti-horário tanto no sistema global composto por elementos e células quanto no sistema local de cada célula definida pelas coordenadas de seus vértices (Figura 10).

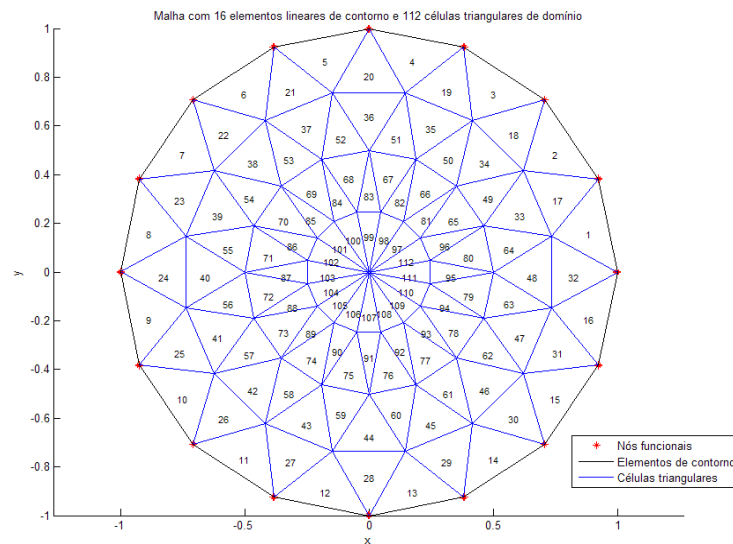


Figura 10 – Ilustração do modelo geométrico utilizado na implementação computacional (mm).

O intuito dessa análise foi verificar o desempenho da formulação desenvolvida a partir do MEC em relação ao resultado analítico, que, em coordenadas polares, é dado por GREENBERG (1998):

$$u(r, t) = \bar{u} - \frac{2\bar{u}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (54)$$

⁴ Esse mesmo problema também foi resolvido a partir do MEC adotando-se um domínio quadrado, cuja solução encontra-se no Anexo do presente trabalho.

onde J_0 e J_1 são funções de Bessel de primeira espécie de ordens zero e um, respectivamente. Os parâmetros λ_n são as raízes positivas da equação $J_0(\lambda_n)=0$ e nesse trabalho foram utilizadas as 100 primeiras em todas as análises como aproximação da solução analítica.

4.6 RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

Para verificar a significância dos valores obtidos numericamente com o MEC, foi aplicado o método estatístico de regressão linear sobre os resultados numéricos ($MEC(0,t)$) e analíticos ($u(0,t)$) até a convergência dos mesmos, avaliados no centro do disco, sendo calculado o coeficiente de determinação R^2 (quadrado do coeficiente de Pearson). O valor de R^2 muito próximo da unidade indica uma forte relação entre as duas variáveis (MONTGOMERY e RUNGER, 2003). Estes resultados e a distribuição dos valores de temperatura são ilustrados pelas figuras a seguir.

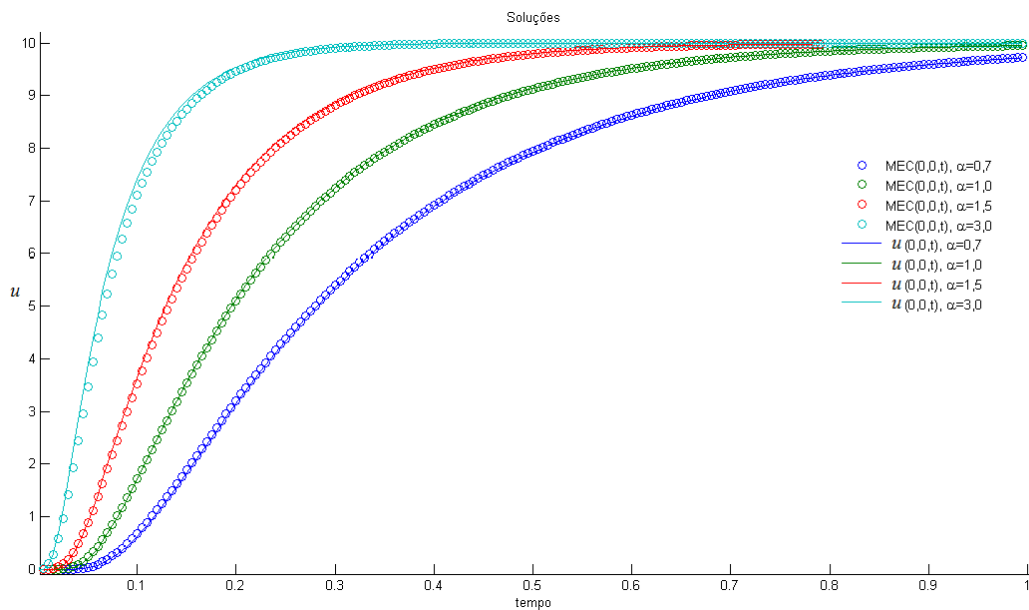


Figura 11 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,99992, 0,99998, 0,99968 e 0,99686, para os casos em que α teve como valor 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente, indicando excelente correlação entre as variáveis.

Na Figura 12 é ilustrado o processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em instantes de tempo específicos para o caso em que a difusividade térmica (α) é igual a 1,0 mm^2/s .

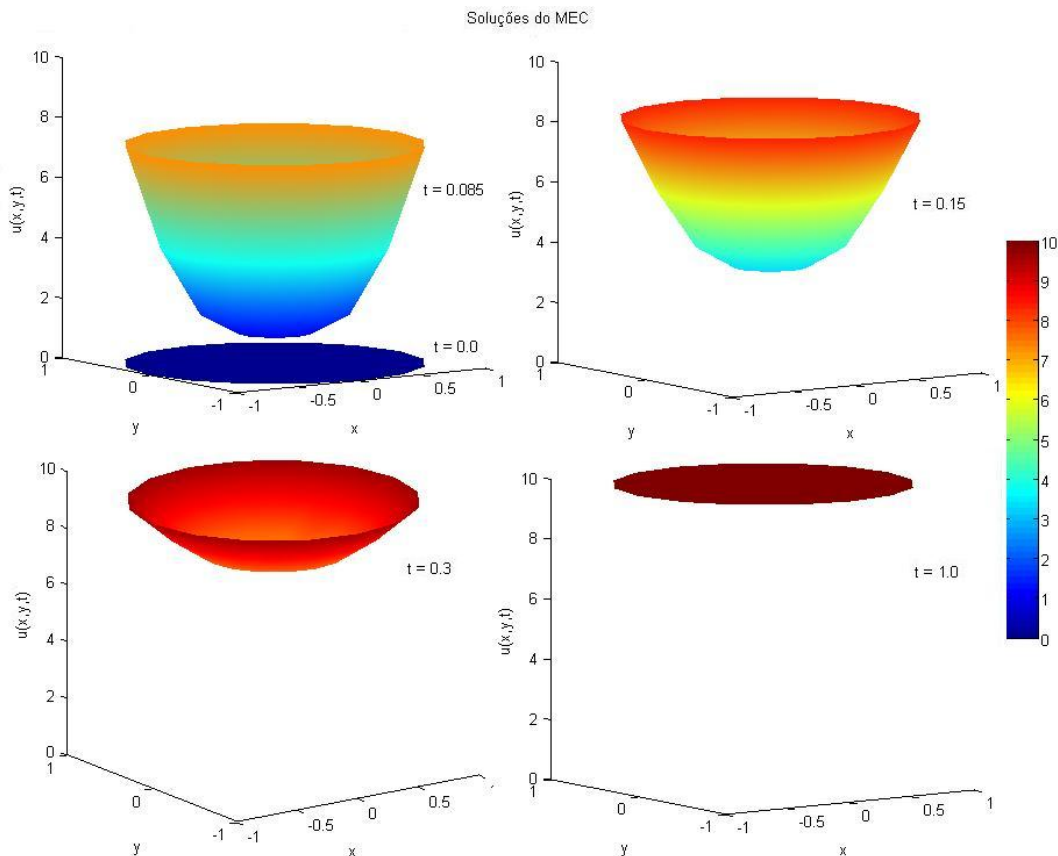


Figura 12 – Solução no domínio para diferentes tempos e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

A partir da Figura 12 é possível verificar a gradual elevação da temperatura do domínio, sendo a maior taxa de elevação observada na região mais próxima do contorno. Resultados similares foram verificados para os casos em que $\alpha = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$, $\alpha = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha = 3,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

4.6.1 Análise da quantidade de pontos utilizados no método de integração das células

Os resultados obtidos anteriormente foram alcançados com o uso de um único ponto de integração em cada célula. Com o intuito de verificar a eficiência do método de integração das células, optou-se em ampliar o número de pontos de integração, sendo obtidos os seguintes resultados para $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Tabela 1 – Valores de R^2 para diferentes números de pontos de integração.

Nº de pontos de Gauss	R^2
1	0,99998
4	0,99992
9	0,99996
16	0,99996
25	0,99997
100	0,99997
400	0,99997

Na Tabela 1 verifica-se que com o aumento no número de pontos de integração em cada célula o resultado para o coeficiente R^2 converge para 0,99997 com 25 pontos de integração, não apresentando nenhum acréscimo significativo na aproximação ao passar para 100 ou 400 pontos e principalmente em relação a aproximação obtida com um único ponto, igual a 0,99998. Isto posto, optou-se em utilizar um único ponto de interação em cada célula de domínio nas análises numéricas seguintes.

CAPÍTULO 5

5 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM TERMO NÃO HOMOGÊNEO

A fim de verificar a potencialidade da formulação do MEC para solução da equação da difusão do calor, dois testes complementares foram realizados a partir do mesmo modelo geométrico. Esses testes consistiram no acoplamento de termos não homogêneos na equação diferencial da difusão do calor. O primeiro teste é apresentado na primeira parte do presente capítulo, onde acopla-se um termo dissipativo ($hu(X,t)$) na equação da difusão do calor, representando a presença de uma fonte irreversível de calor. Na segunda parte, a não homogeneidade na equação da difusão do calor é devida ao acoplamento de um termo constante igual a $F(X,t)/k$ na equação, representando geração interna de calor. Em ambos os casos, a inclusão de tais termos não traz novas singularidades, permitindo que as mesmas rotinas de integração sejam utilizadas. Esses dois testes são de grande importância, pois além de testar a rotina de integração de células que adota um único ponto, permitem analisar, de forma inédita, o desempenho da formulação para problemas transientes com a aplicação de uma solução fundamental independente do tempo.

5.1 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM TERMO DISSIPATIVO

A equação da difusão com termo dissipativo ($hu(X,t)$), cuja unidade é $^{\circ}\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$ de acordo com ZILL e CULLEN (2001) é dada por:

$$\nabla^2 u(X,t) - hu(X,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} \quad (55)$$

$$X \in \Omega, \quad X = (x, y); \quad h > 0; \quad t > 0$$

A equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$C(\xi)u(\xi,t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X)q(X,t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X)u(X,t) d\Gamma - \quad (56)$$

$$\int_{\Omega} hu(X,t)u^*(\xi, X)d\Omega - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} u^*(\xi, X)d\Omega$$

Utilizando o MDF e agrupando convenientemente os termos, obtém-se:

$$C(\xi)u(\xi, t + \Delta t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X)q(X, t + \Delta t) d\Gamma - \quad (57)$$

$$\int_{\Gamma} q^*(\xi, X)u(X, t + \Delta t) d\Gamma - \int_{\Omega} hu(X, t + \Delta t)u^*(\xi, X) d\Omega -$$

$$\frac{1}{\alpha \Delta t} \left(\int_{\Omega} u(X, t + \Delta t)u^*(\xi, X) d\Omega - \int_{\Omega} u(X, t)u^*(\xi, X) d\Omega \right)$$

Assim, utilizando notação matricial, pode-se escrever a equação (57) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} - h \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} + \quad (58)$$

$$- \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \left\{ [\mathbf{u}^d]_{m+1} - [\mathbf{u}^d]_m \right\}$$

Agrupando convenientemente os termos da equação (58), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} + h\right) \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} + h\right) \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^d]_m \quad (59)$$

As condições de contorno e iniciais utilizadas nas simulações são:

$$u(X, t) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Gamma \quad (60)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno e fixa para todo o intervalo de análise e

$$u_0(X, t_0) = 1 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Omega \quad (61)$$

que corresponde a uma temperatura constante e unitária no domínio do problema no tempo inicial de análise.

O intuito dessa análise foi verificar o desempenho da formulação do MEC em relação ao resultado analítico, que em coordenadas polares é dado por ZILL e CULLEN (2001):

$$u(r, t) = 2 e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (62)$$

5.2 RESULTADOS

Procedendo da mesma forma como no caso anterior, têm-se os seguintes resultados para $h = 1$:

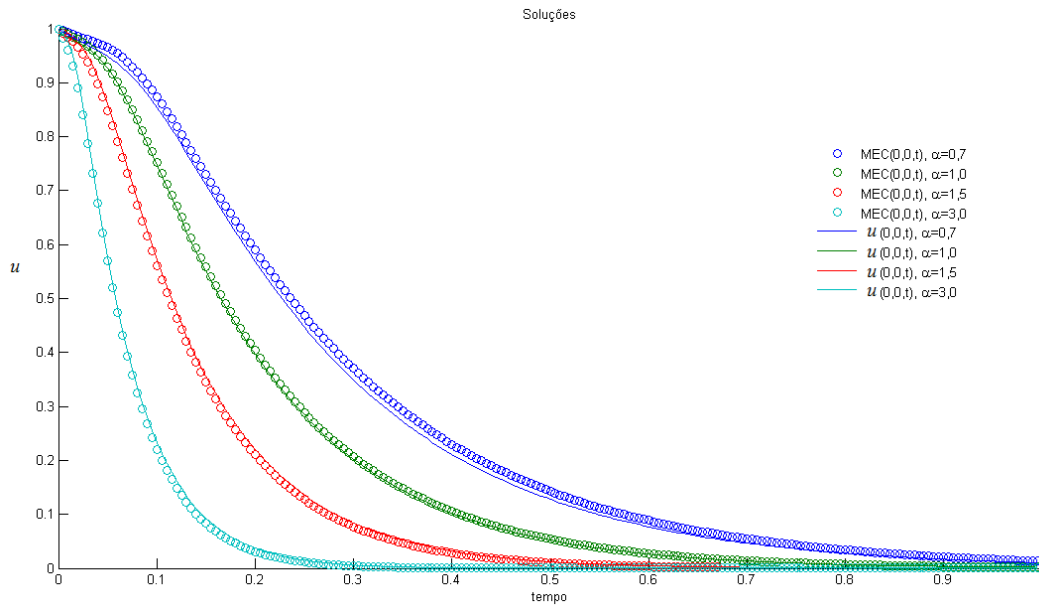


Figura 13 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,99788, 0,99988, 0,99949 e 0,99931, para os casos em que α teve como valor 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente, indicando excelente correlação entre as variáveis.

Na Figura 14 é ilustrado o processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em instantes de tempo específicos para o caso em que a difusividade térmica (α) é igual a 1,0 mm^2/s .

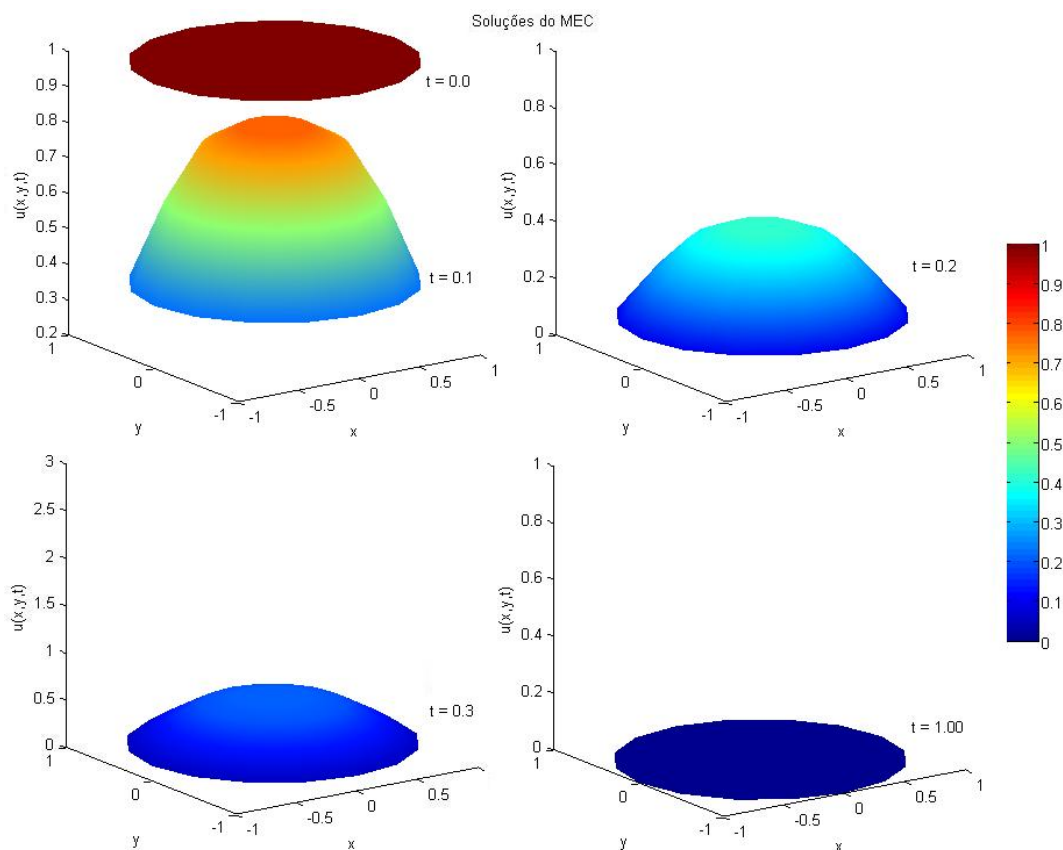


Figura 14 – Solução no domínio para diferentes tempos contando com o termo dissipativo e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

A partir da Figura 14 é possível verificar a gradual diminuição da temperatura do domínio, sendo observado o resfriamento com maior velocidade na região mais exterior do disco, resultado da proximidade da mesma ao contorno. Resultados similares foram verificados para os casos em que $\alpha = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$, $\alpha = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha = 3,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Ainda em relação ao problema contendo o termo dissipativo, buscou-se determinar a influência do coeficiente h no modelo matemático. Para tanto, testes subsequentes foram realizados adotando-se $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$ e tomando os valores 0,05, 0,5, 1,5 e 5,0 para o coeficiente h . A Figura 15 apresenta a distribuição de temperatura para cada caso testado.

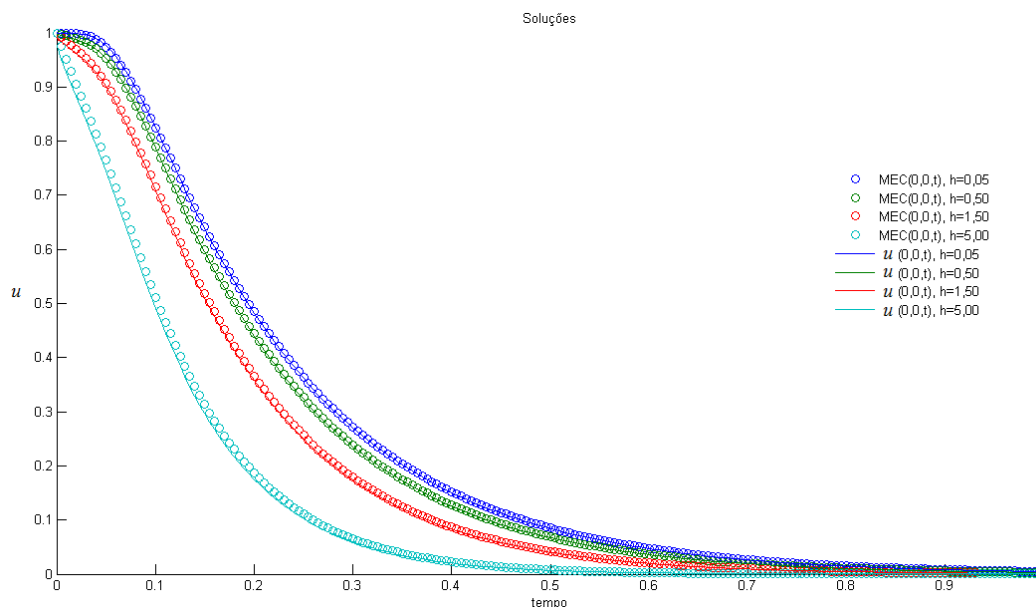


Figura 15 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco para valor de $h = 0,05$ (azul), $0,5$ (verde), $1,5$ (vermelho) e $5,0$ (ciano).

Observa-se na Figura 15 uma redução (dissipação) do calor a uma taxa maior para o caso em $h = 5,0$ (linha e circunferências em ciano), seguido por menores taxas para $h = 1,5$ (linha e circunferências em vermelho), $h = 0,5$ (linha e circunferências em verde) e $h = 0,05$ (linha e circunferências em azul), respectivamente. Esses resultados indicam que para valores maiores de h , obtém-se maiores taxas de dissipação do calor mantendo-se α constante.

Comparando os resultados numéricos obtidos aos analíticos, obteve-se nessas simulações, R^2 igual a 0,99998, 0,99995, 0,99979 e 0,99852, para os casos em que h teve como valor 0,05, 0,5, 1,5 e 5,0, respectivamente, indicando alto nível de correlação entre as variáveis.

5.3 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM GERAÇÃO DE CALOR

De acordo com WALL (2009) a equação da difusão com termo não homogêneo igual a $F(X,t)/k$ ($^{\circ}\text{C}\cdot\text{mm}^{-2}$), representando a geração interna de calor, é dada por:

$$\nabla^2 u(X,t) + \frac{F(X,t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} \quad (63)$$

$$X \in \Omega, X = (x,y)$$

onde k é a condutividade térmica cuja unidade é $W/mm^\circ C$.

A equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$C(\xi)u(\xi,t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi,X)q(X,t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi,X)u(X,t) d\Gamma - \quad (64)$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} u^*(\xi,X) d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u^*(\xi,X)F(X,t) d\Omega$$

Utilizando o MDF e agrupando convenientemente os termos, obtém-se:

$$C(\xi)u(\xi,t+\Delta t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi,X)q(X,t+\Delta t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi,X)u(X,t+\Delta t) d\Gamma - \quad (65)$$

$$\frac{1}{\alpha \Delta t} \left(\int_{\Omega} u(X,t+\Delta t) u^*(\xi,X) d\Omega - \int_{\Omega} u(X,t) u^*(\xi,X) d\Omega \right) +$$

$$\frac{1}{k} \int_{\Omega} u^*(\xi,X)F(X,t+\Delta t) d\Omega$$

Em notação matricial, pode-se escrever a equação (65) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} - \quad (66)$$

$$\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \left\{ [\mathbf{u}^d]_{m+1} - [\mathbf{u}^d]_m \right\} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{cd} \\ \mathbf{F}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1}$$

Na equação (66), \mathbf{F} resulta da integral de domínio que contém a solução fundamental ponderada pelo termo de geração de calor.

Agrupando os termos semelhantes da equação (66), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_m + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{cd} \\ \mathbf{F}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \quad (67)$$

As soluções numéricas para o modelo matemático contendo geração constante de calor foram obtidas a partir das condições de contorno e iniciais dadas por:

$$u(X, t) = 0^\circ C \quad X \in \Gamma \quad (68)$$

que corresponde a uma temperatura nula e constante ao longo de todo o contorno e fixa para todo o intervalo de análise e

$$u_0(X, t_0) = 0^\circ C \quad X \in \Omega \quad (69)$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema no tempo inicial de análise.

O termo de geração de calor é definido da seguinte forma (fonte constante):

$$\frac{F(X, t)}{k} = 10^\circ C \text{ mm}^{-2} \quad X \in \Omega, \quad 0 < t < \infty \quad (70)$$

que representa geração constante de calor ao longo do tempo em todo o domínio. Pelas condições impostas em (68) e (69), a evolução térmica do problema proposto depende da fonte geradora de calor (70).

A solução analítica do presente problema em coordenadas polares é dada por WALL (2009):

$$u(r,t) = \frac{R^2 - r^2}{4s} - \frac{2}{Rs} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n R)} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (71)$$

onde $s = \frac{k}{F(X,t)}$.

5.4 RESULTADOS

Procedendo da mesma forma como no caso anterior, têm-se os seguintes resultados:

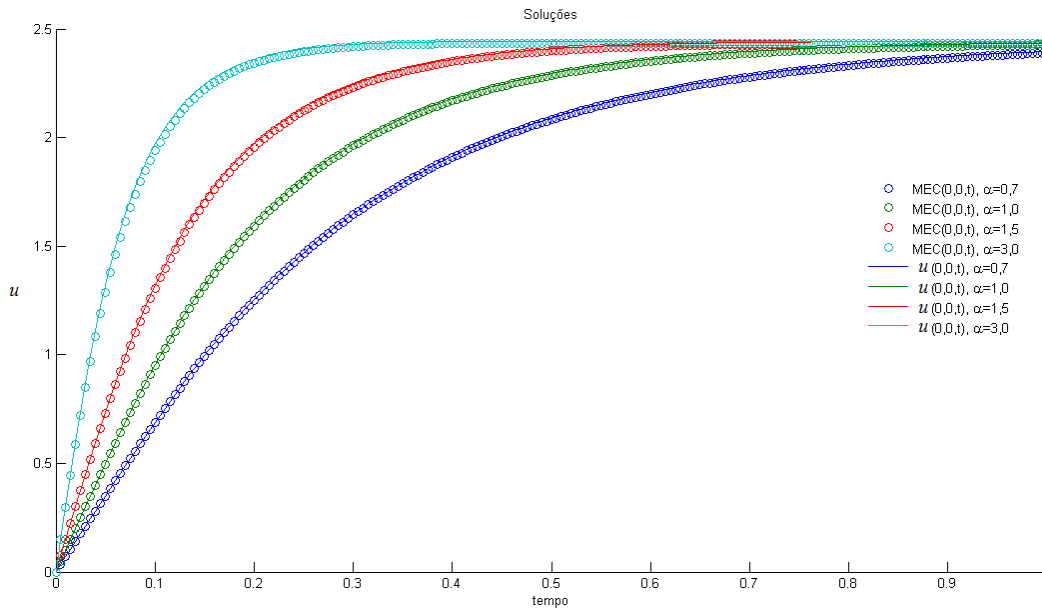


Figura 16 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,99991, 0,99981, 0,99962 e 0,99888 para os casos em que α teve como valor 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente, indicando excelente correlação entre as variáveis.

Na Figura 17 é apresentado o processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em instantes específicos de tempo, utilizando-se o valor 1,0 mm^2/s para a difusividade térmica (α).

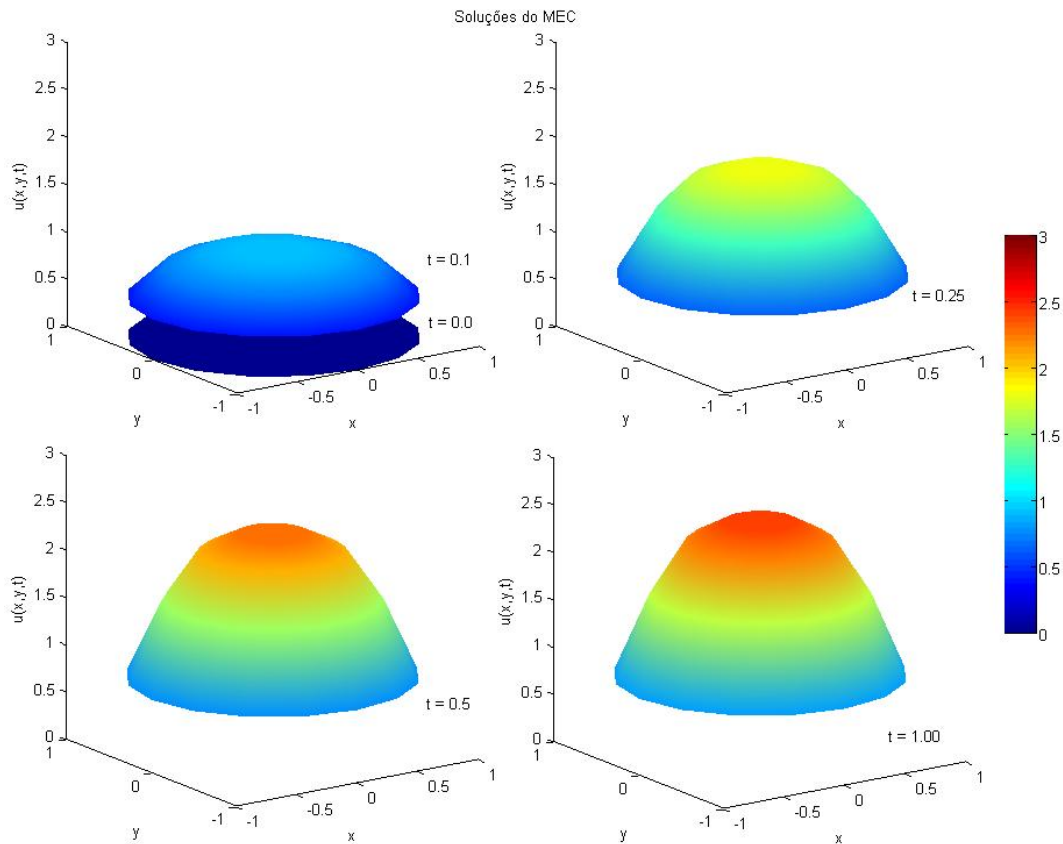


Figura 17 – Solução no domínio para diferentes tempos contando com o termo de geração de calor e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

A partir da Figura 17 é possível verificar a gradual elevação da temperatura das células de domínio, apresentando maior taxa de elevação na região central do disco, resultado do efeito do termo de geração de calor e da condição de contorno adotada, mantendo a região mais externa do disco sob temperaturas menores. Resultados similares foram verificados para os casos em que $\alpha = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$, $\alpha = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha = 3,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Em uma análise complementar, sob a mesma condição de contorno e inicial, testou-se o modelo numérico para o caso em que o termo de geração de calor é negativo, assumindo a seguinte forma:

$$\frac{F(X,t)}{k} = -10 \text{ } ^\circ\text{C mm}^{-2} \quad X \in \Omega, \quad 0 < t < \infty \quad (72)$$

Os resultados obtidos para esse caso são simétricos em relação ao eixo do tempo aos registrados no caso do termo positivo de geração de calor, estando o modelo numérico do MEC de acordo com a solução analítica do problema como mostra a Figura 18.

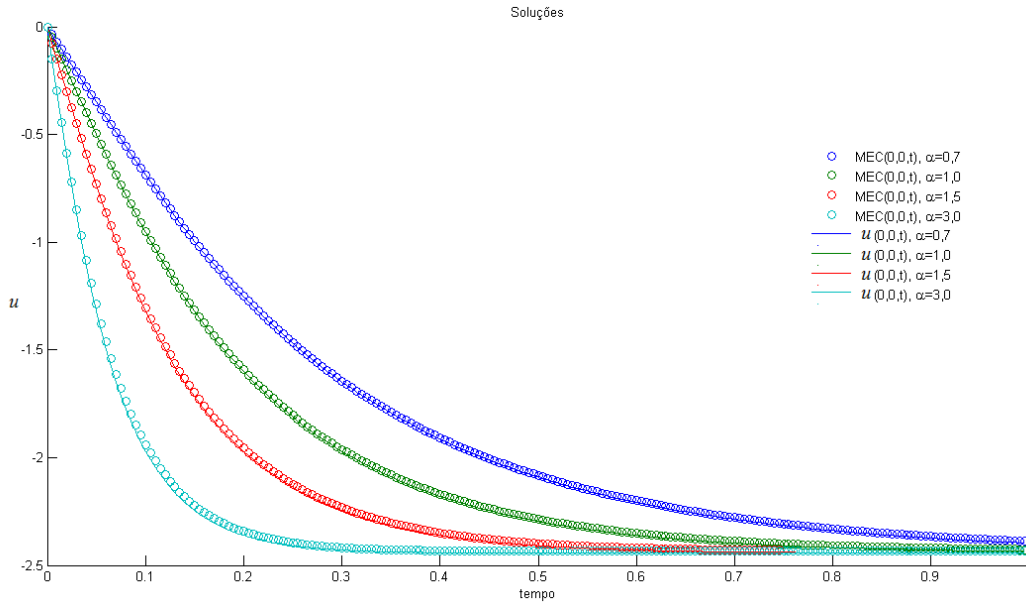


Figura 18 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central do disco.

Os resultados obtidos para ambos os casos demonstram a versatilidade da formulação, dada a simplicidade de inclusão de tais termos observada na montagem do sistema linear de equações.

CAPÍTULO 6

6 DIFUSÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS NÃO HOMOGÊNEOS

A formulação do MEC desenvolvida é ampliada para a análise de meios contínuos não homogêneos. Para tanto, subregiões setorialmente homogêneas foram aplicadas para simular um problema de difusão com geração interna de calor (equação (63)), cujo domínio é composto por um anel e um disco concêntricos. As condições de compatibilidade, mesmo potencial e fluxo oposto na região de contato, são testadas confrontando os resultados numéricos aos analíticos em um caso onde ambas as subregiões apresentam a mesma difusividade térmica, validando a formulação. Após esse passo, a formulação do MEC é utilizada para análise de problemas nos quais são adotadas difusividades térmicas distintas para o anel e disco, concentrando a geração de calor em apenas uma determinada subregião.

6.1 MODELO GEOMÉTRICO E DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

O modelo geométrico adotado na análise é um anel plano de raio R (mm) unitário cuja difusividade é dada por α_1 contendo em seu interior um disco de raio $R/2$ e difusividade α_2 (Figura 19).

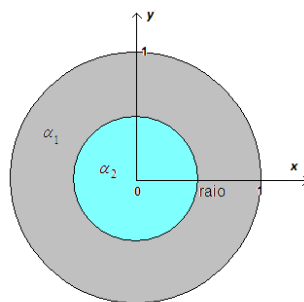


Figura 19 – Ilustração do modelo geométrico de sub-regiões.

A partir do modelo geométrico e baseando-se na equação integral (65) chega-se a um sistema de equações algébricas pela discretização do contorno em elementos lineares e do domínio em células constantes.

6.1.1 Discretização do problema

Para a discretização do domínio e contorno do problema foram adotadas as mesmas técnicas apresentadas nos capítulos anteriores. A Figura 20 ilustra o domínio Ω dividido em duas subregiões Ω_1 e Ω_2 .

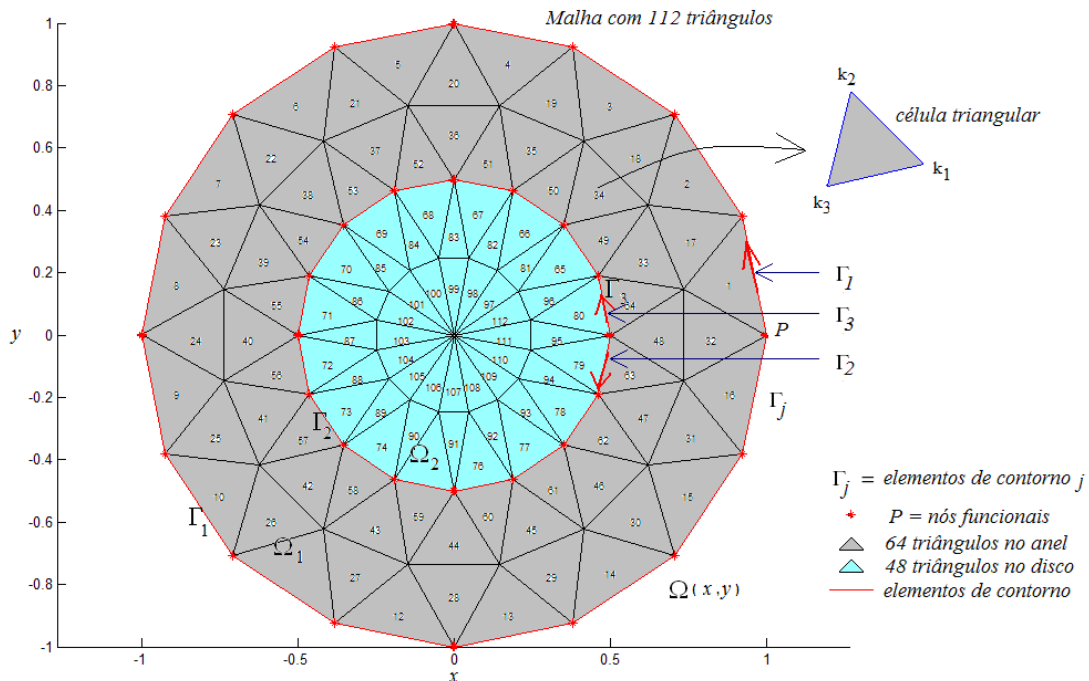


Figura 20 – Discretização do contorno e do domínio.

Na Figura 20 são ilustrados os elementos de contorno em Γ_1 e Γ_2 , com a geometria de Γ_2 coincidindo com Γ_3 , porém, com o sentido contrário representando a zona de contato entre as subregiões Ω_1 e Ω_2 , discretizadas

com uso de células triangulares de domínio. É importante salientar que na zona de contato u é igual para ambas sub-regiões (condição de continuidade) e os valores de q são opostos (condição de equilíbrio).

6.2 NOTAÇÃO MATRICIAL E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA

A partir da equação (65), dos procedimentos utilizados para discretização do problema e do esquema de montagem das matrizes para o caso de sub-regiões descrito por BREBBIA e DOMINGUEZ (1989), forma-se um sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} - \\
 & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^d \end{bmatrix}_{m+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^d \end{bmatrix}_m \right\} - \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_m \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{cd} \\ \mathbf{F}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Na formulação apresentada nesse trabalho adotou-se Δt constante, definido a partir da equação (31).

Agrupando os termos semelhantes da equação (73), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_2^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} = \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^d \end{bmatrix}_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{cd} \\ \mathbf{F}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Transladando as colunas das matrizes que contém coeficientes relacionados às incógnitas do lado direito para o esquerdo na equação (74), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} & 0 & -\mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_2^{dd} & 0 & -\mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} = \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^d \end{bmatrix}_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{cd} \\ \mathbf{F}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1}
 \end{aligned} \tag{75}$$

Pelas condições de continuidade e equilíbrio (compatibilidade), tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2^c &= \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{q}_2^c &= -\mathbf{q}_3^c\end{aligned}\quad (76)$$

A partir das equações de compatibilidade, pode-se montar um sistema de equações somando-se as colunas de coeficientes relacionados às variáveis equivalentes no vetor de incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & 0 & -\mathbf{G}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & 0 & -\mathbf{G}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c = \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{q}_2^c = -\mathbf{q}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{q}_1^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1^d]_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_2^d]_m + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{cd} \\ \mathbf{F}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \quad (77)$$

As condições de contorno e iniciais para essa análise são:

$$u(X, t) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Gamma_1 \quad (78)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno em todo o período de análise e

$$u_0(X, t_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Omega \quad (79)$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema no instante inicial. O termo de geração de calor é definido de acordo com Wall (2009) dado pela equação (70) representando geração constante de calor ao longo do tempo em todo o domínio Ω .

Com o intuito de verificar o desempenho da formulação do MEC foram comparados os resultados numéricos aos analíticos para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2$, que em coordenadas polares é dado pela equação (71) (WALL, 2009).

6.3 RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

Procedendo da forma indicada no item anterior, têm-se os seguintes resultados:

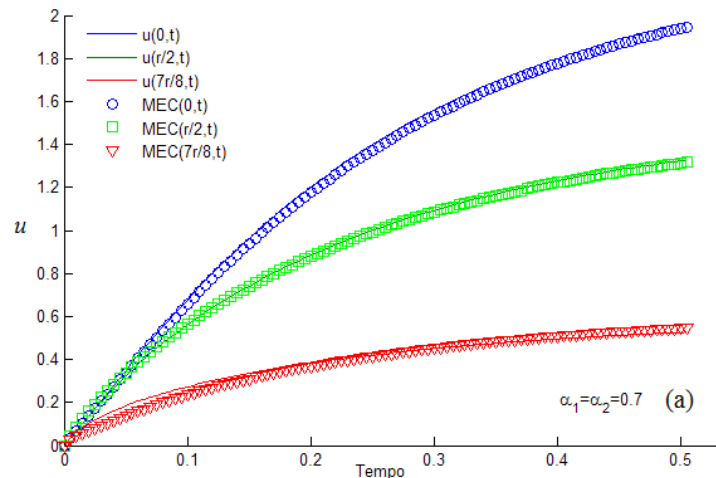


Figura 21 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}.$$

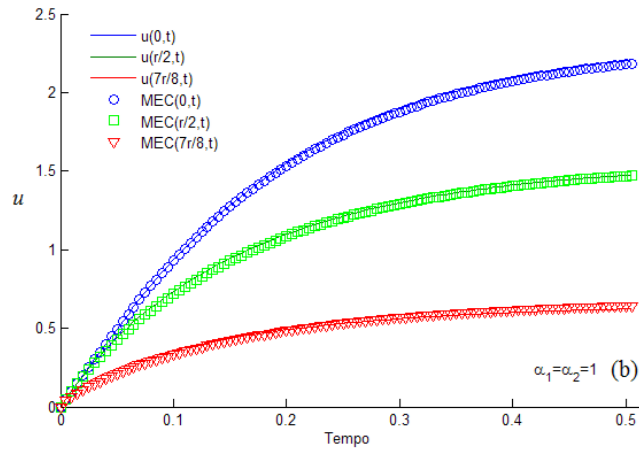


Figura 22 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ mm}^2/\text{s}.$$

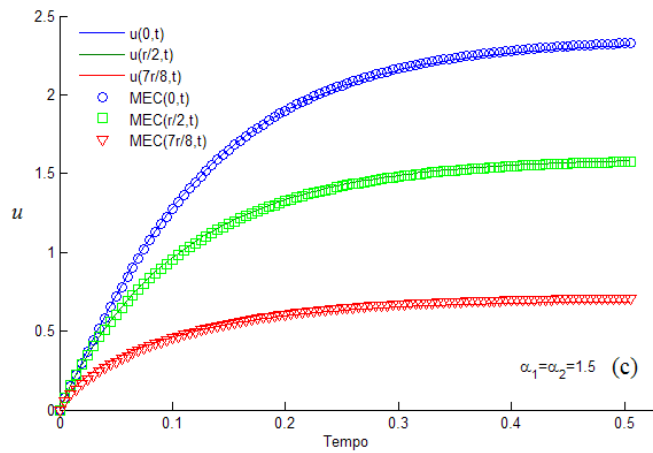


Figura 23 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}.$$

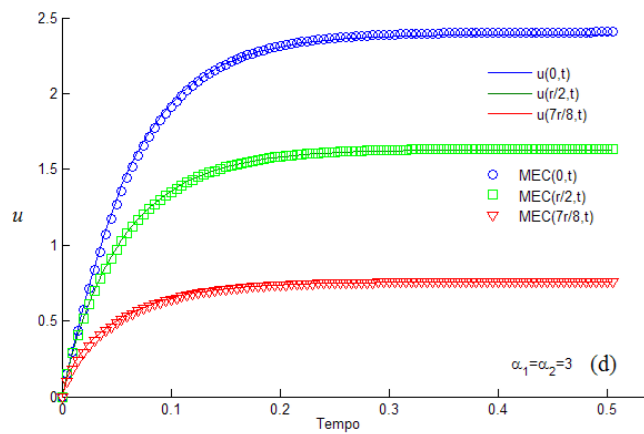


Figura 24 – Comparação entre a solução analítica e o MEC em pontos do domínio com

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}.$$

A partir das Figuras 21, 22, 23 e 24 observa-se a influência do coeficiente de difusividade térmica (α) na resposta de temperatura de cada caso testado, sendo verificada maior taxa de elevação da temperatura ao se utilizar valores crescentes para α (0,7, 1, 1,5 e 3 mm²/s, respectivamente). Ainda nas Figuras 21, 22, 23 e 24, verifica-se que a solução do MEC aproxima-se da solução analítica. Sendo obtido, em média, o valor 0,9993 para o coeficiente R² para os quatro casos testados, o que comprova a eficiência do MEC e valida a formulação desenvolvida.

6.4 ANÁLISE DA DIFUSÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS NÃO HOMOGÊNEOS

Após a validação do modelo numérico e computacional, testes de difusão do calor em meios não homogêneos foram realizados para diferentes valores de difusividade térmica de cada meio (combinações de α_1 e α_2 para o anel e disco): $\alpha_1 = 0,7$ mm²/s e $\alpha_2 = 3$ mm²/s, $\alpha_1 = 1,5$ mm²/s e $\alpha_2 = 3$ mm²/s, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ mm²/s e $\alpha_1 = 4,5$ mm²/s e $\alpha_2 = 3$ mm²/s.

As seguintes condições de contorno e iniciais foram adotadas:

$$u(X,t) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Gamma_1 \quad (80)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno Γ_1 em todo o período de análise e

$$u_0(X,t_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Omega \quad (81)$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema apenas no instante inicial.

Nessas simulações o termo de geração de calor foi definido apenas no domínio Ω_2 , e de forma similar ao caso anterior adotou-se geração constante de calor em todo o período de análise sob a seguinte forma (fonte constante):

$$\frac{F(X,t)}{k} = 10^\circ C mm^{-2} \quad X \in \Omega_2, \quad 0 < t < \infty \quad (82)$$

6.4.1 Resultados do MEC para a análise com subregiões

Os resultados obtidos são ilustrados a seguir:

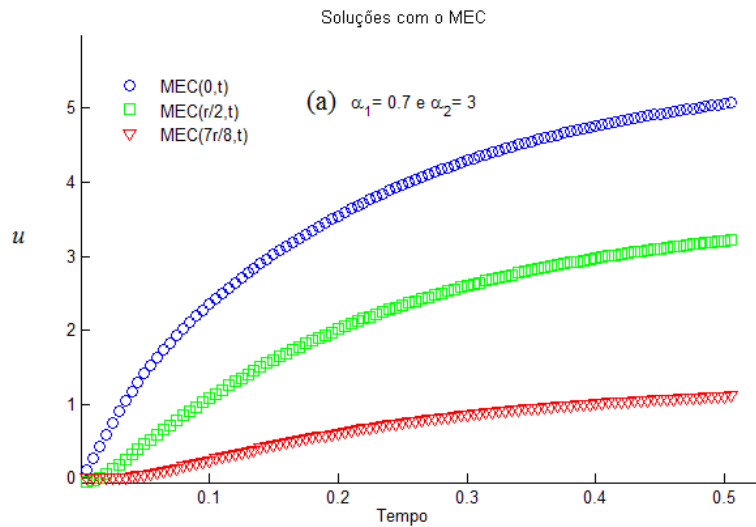


Figura 25 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$.

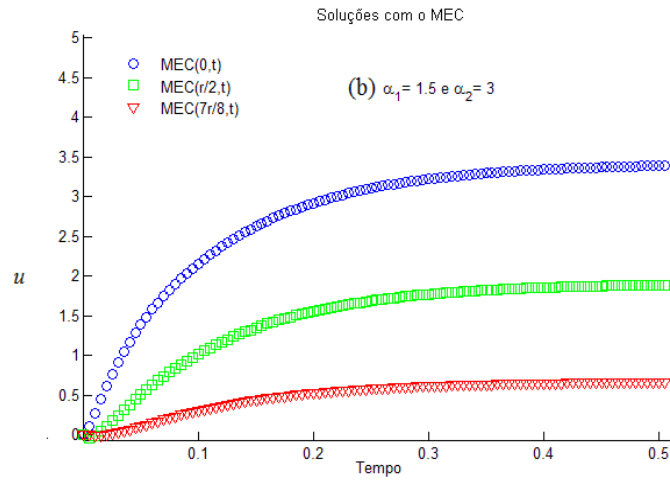


Figura 26 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$.

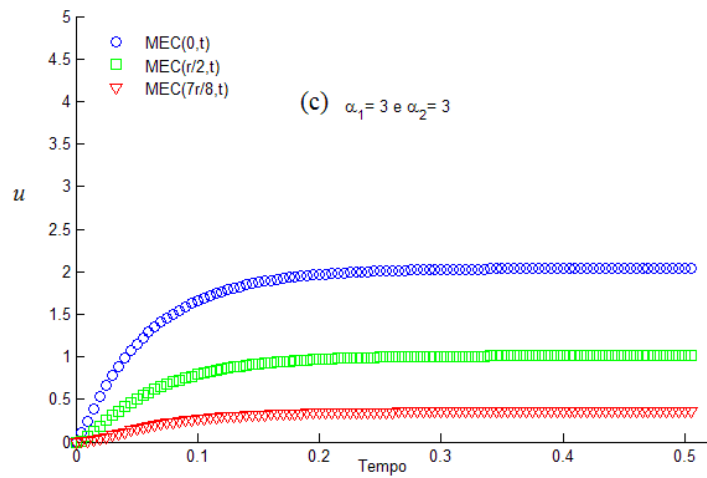


Figura 27 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$.

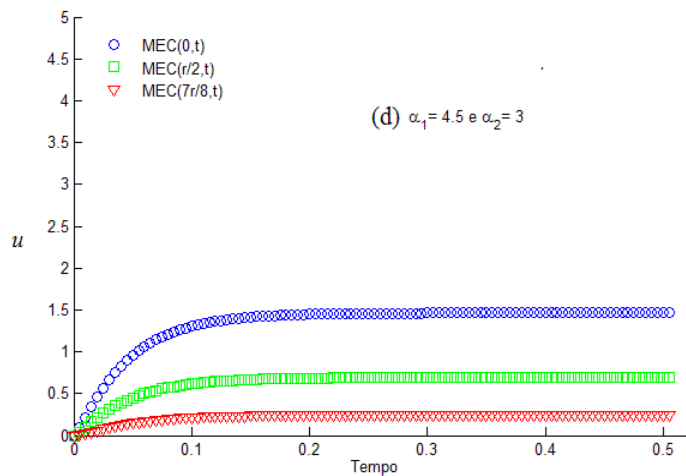


Figura 28 – Resultados com o MEC para de $\alpha_1 = 4,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$.

A partir das Figuras 25, 26, 27 e 28 é possível verificar a influência do material que compõe Ω_1 na difusão do calor gerado em Ω_2 , sendo observada maior concentração do calor nos casos em que foram adotados $\alpha_1 = 0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ (a) e $\alpha_1 = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ (b). Temperaturas menores foram registradas para os casos em que foram adotados $\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ (c) e $\alpha_1 = 4,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha_2 = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$ (d), respectivamente.

A razão da desigual elevação de temperatura está relacionada à facilidade ou dificuldade que o calor encontra ao se deslocar de Ω_2 para Ω_1 , encontrando menor resistência nos casos em que $\alpha_1 \geq \alpha_2$, atingindo menores temperaturas como ilustrado na Figura 29.

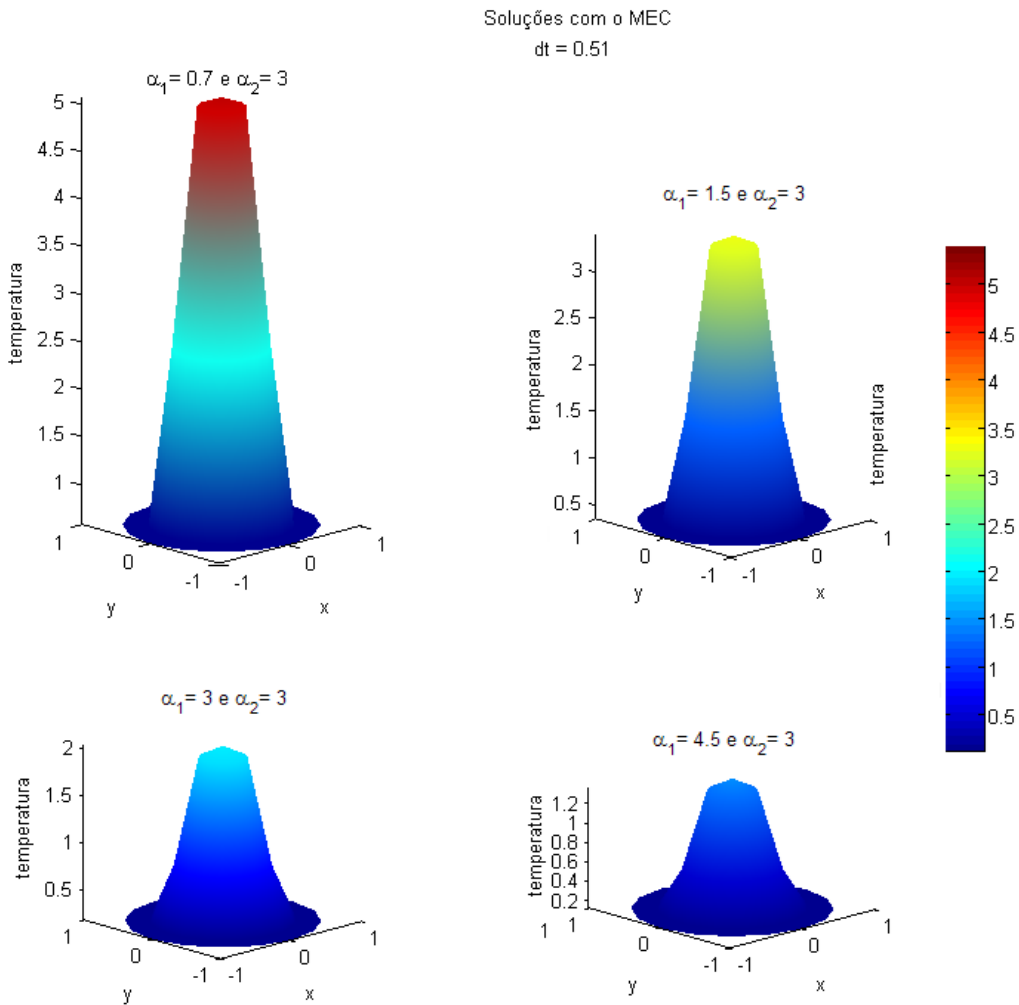


Figura 29 – Convergência dos resultados com o MEC para combinações de α_1 e α_2 .

Na Figura 29 observa-se nos dois primeiros casos ($\alpha_1 \leq \alpha_2$) que o meio Ω_1 age como uma barreira isolante, concentrando o calor em Ω_2 (onde ocorre a geração de calor). Já nos dois casos seguintes ($\alpha_1 \geq \alpha_2$) o resultado é oposto, isto é, Ω_1 retira calor de Ω_2 com maior facilidade por apresentar difusividade térmica igual ou superior, difundindo o calor de Ω_2 para o meio Ω_1 , cuja fronteira externa se encontra a uma temperatura nula.

CAPÍTULO 7

7 DIFUSÃO-ADVECÇÃO DO CALOR EM MEIOS CONTÍNUOS

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento e implementação da formulação do MEC para a análise do problema transiente de difusão-advecção com o uso de uma solução fundamental independente do tempo. A formulação toma por base os desenvolvimentos dos capítulos anteriores onde foram analisados os casos de difusão do calor e difusão sob geração interna de calor.

A validação da formulação foi realizada comparando os resultados numéricos a duas soluções analíticas conhecidas. Após a validação da formulação, optou-se em analisar a distribuição de temperaturas em um domínio retangular no qual faz-se presente um obstáculo circular sob geração de calor. Os procedimentos já validados para os casos de geração de calor, sub-regiões e difusão-advecção foram empregados.

7.1 MODELO MATEMÁTICO PARA O CASO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

ONISHI, KUROIKI e TANAKA (1984) apresentam a equação da difusão-advecção (83), a qual é adotada como modelo matemático nesse estudo.

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = -\nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)] + \frac{1}{Pe} \nabla^2 u(X,t) \quad (83)$$

$$X \in \Omega, X = (x, y)$$

onde: Pe é o número de Peclét, definido como:

$$Pe = |\mathbf{v}| \frac{B}{\alpha} \quad (84)$$

\mathbf{v} é o vetor velocidade (mm/s) de convecção, B é o comprimento característico (mm) e α é o coeficiente de difusividade.

De acordo com SINGH e TANAKA (2000), a equação (83) também pode ser utilizada em muitas outras situações físicas que envolvem o transporte de energia e/ou produtos químicos.

Utilizando o Método dos Elementos de Contorno baseado em técnicas de resíduos ponderados, a formulação para a equação da difusão-advecção é similar à formulação para a equação da difusão, exceto pela inclusão de uma integral de domínio cujo integrando é composto por um termo cinético, $\nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)]$, ponderado pela solução fundamental. Assim, a equação básica do MEC para a equação da difusão-advecção é:

$$\begin{aligned} C(\xi)u(\xi,t) = & \int_{\Gamma} u^*(\xi,X)q(X,t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi,X)u(X,t) d\Gamma + \\ & - Pe \int_{\Omega} \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} u^*(\xi,X) d\Omega - Pe \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)] u^*(\xi,X) d\Omega \end{aligned} \quad (85)$$

$X \in \Omega, X = (x,y)$

O termo $\nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)]$ pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)] = \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X,t) + u(X,t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X) \quad (86)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (86), representa o gradiente térmico, devido ao transporte da massa fluida com velocidade \mathbf{v} e o segundo termo representa a temperatura estabelecida pelo gradiente de velocidade (variação da velocidade com a posição). Assim, a integral contendo $\nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)]$ assume a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{v}(X)u(X,t)]u^*(\xi, X)d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X,t) u^*(\xi, X)d\Omega + \int_{\Omega} u(X,t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X)u^*(\xi, X)d\Omega \quad (87)$$

onde

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X,t) u^*(\xi, X)d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} v_x(X) \frac{\partial u(X,t)}{\partial x} u^*(\xi, X)d\Omega + \int_{\Omega} v_y(X) \frac{\partial u(X,t)}{\partial y} u^*(\xi, X)d\Omega \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(X,t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X)u^*(\xi, X)d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} u(X,t) \frac{\partial v_x(X)}{\partial x} u^*(\xi, X)d\Omega + \int_{\Omega} u(X,t) \frac{\partial v_y(X)}{\partial y} u^*(\xi, X)d\Omega \end{aligned} \quad (89)$$

7.2 MODELO GEOMÉTRICO PARA O CASO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Quanto ao modelo geométrico, foi analisado o caso de difusão de calor a partir de um domínio retangular ($A \times B$, mm) como ilustra a Figura 30, sujeito a um escoamento laminar com o seguinte campo analítico de velocidades:

$$\begin{aligned} v_x &= cte \\ v_y &= 0 \end{aligned} \quad (90)$$

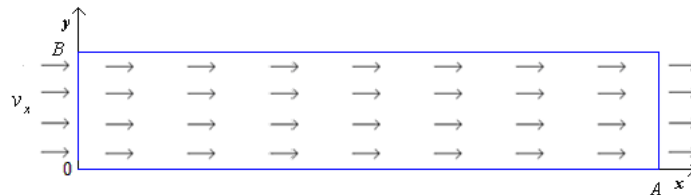


Figura 30 – Modelo geométrico do problema de difusão-advectão do calor.

Na Figura 30 tem-se a representação do campo de velocidade cujo valor é constante e não nulo na direção do eixo x em todo o domínio.

Sabendo-se que o campo de velocidades é constante na direção x , ou seja, $v_y = 0$ e $\frac{\partial v_y(X)}{\partial y} = 0$, as integrais em (88) e (89) tornam-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X, t) u^*(\xi, X) d\Omega = \int_{\Omega} v_x(X) \frac{\partial u(X, t)}{\partial x} u^*(\xi, X) d\Omega \quad (91)$$

e

$$\int_{\Omega} u(X, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X) u^*(\xi, X) d\Omega = 0 \quad (92)$$

Integrando-se uma vez por partes o termo do lado direito da igualdade em (91), obtém-se:

$$\int_{\Omega} v_x(X) \frac{\partial u(X, t)}{\partial x} u^*(\xi, X) d\Omega = \quad (93)$$

$$v_x \int_{\Gamma} u(X, t) \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) n_x d\Gamma + v_x \int_{\Omega} u(X, t) \frac{1}{2\pi r \cos(\theta)} d\Omega$$

Na equação (93), θ representa o ângulo entre o vetor \mathbf{r} e o versor \hat{x} . A integral de contorno (em Γ), resultante da integração por partes, é calculada com o uso de elementos lineares, sendo adotados os mesmos procedimentos já apresentados na equação (37), isto é:

$$v_x \int_{\Gamma} u(X, t) \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) n_x d\Gamma = v_x \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) n_x \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (94)$$

O resultado da integral em (94) produz coeficientes adicionais para a matriz \mathbf{H}^{cc} em razão da incógnita potencial presente na formulação.

7.2.1 Discretização do problema

A Figura 31 ilustra a discretização do problema em 48 elementos de contorno e 160 células triangulares de domínio.

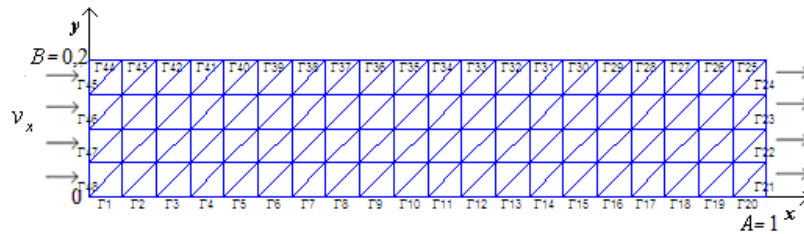


Figura 31 – Discretização do contorno e do domínio.

7.2.2 Notação matricial e solução numérica para o problema

A partir da equação (85), forma-se um sistema de equações que, em notação matricial, é escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \quad (95)$$

$$-\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \left\{ [\mathbf{u}^d]_{m+1} - [\mathbf{u}^d]_m \right\} - \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{cc} \\ \mathbf{V}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^c]_{m+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{cd} \\ \mathbf{V}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^d]_{m+1}$$

Na equação (95) as matrizes \mathbf{V} resultam das integrais de contorno e de domínio nas quais o termo de velocidade se faz presente.

Agrupando-se os termos semelhantes da equação (95), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} + \mathbf{V}^{cc} & \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{cd} + \mathbf{V}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} + \mathbf{V}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}^{dd} + \mathbf{V}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^d]_m
 \end{aligned} \tag{96}$$

7.3 RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

7.3.1 Teste 01

No primeiro teste, as soluções numéricas foram obtidas a partir das seguintes condições de contorno:

$$u(0, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(-1-v_x t)^2}{\alpha(4t+1)}\right] \circ C \tag{97}$$

$$u(A, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(-v_x t)^2}{\alpha(4t+1)}\right] \circ C$$

$$q(x, 0, t) = 0 \text{ W / mm}^2$$

$$q(x, B, t) = 0 \text{ W / mm}^2$$

representando temperaturas u variáveis e decrescentes ao longo do tempo nas extremidades esquerda e direita de Ω , contando com fluxo nulo na região inferior e superior da placa. A condição inicial é dada por:

$$u_0(x, y, t_0) = \exp\left(\frac{-x^2}{\alpha}\right) \circ C \tag{98}$$

que corresponde a uma temperatura variável e não nula ao longo do domínio do problema no instante inicial.

A solução analítica do presente problema é dada por SARI, GÜRARSLAN e ZEYTINOĞLU (2010):

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-1-v_x t)^2}{\alpha(4t+1)}\right) \quad (99)$$

7.3.1.1 Resultados

Adotando $v_x = 0,001$ mm/s e Pe calculado a partir da equação (84), têm-se os seguintes resultados para diferentes valores de α (mm^2/s):

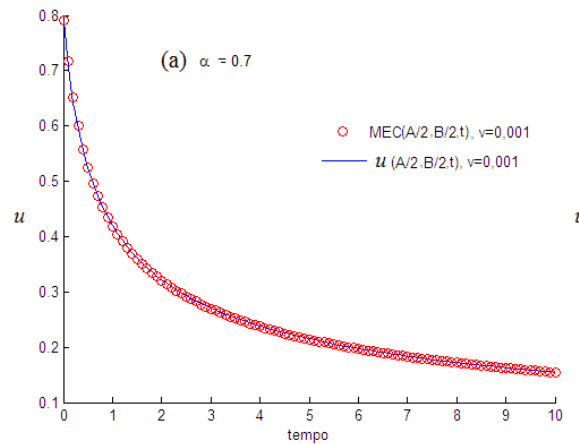


Figura 32 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 0,7$ mm^2/s .

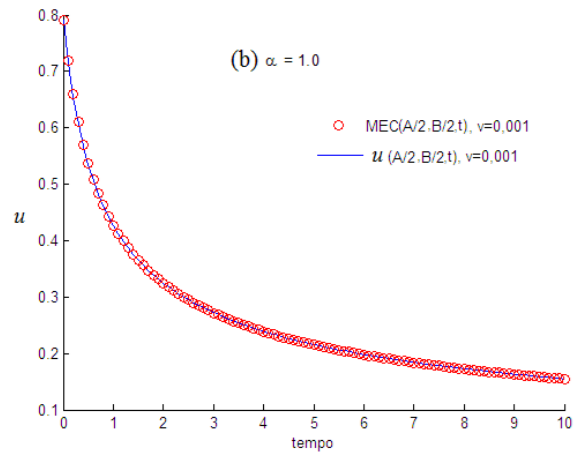


Figura 33 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

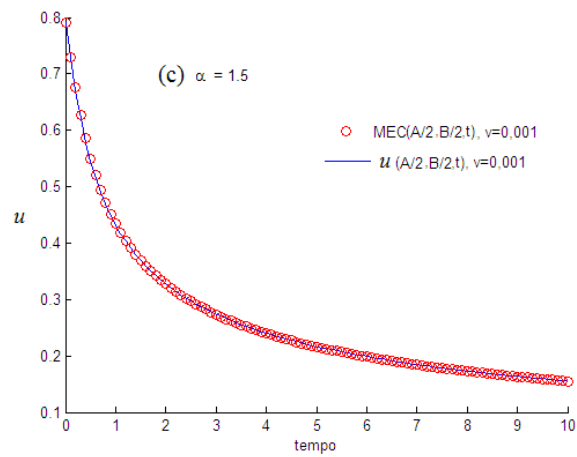


Figura 34 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 1,5 \text{ mm}^2/\text{s}$.

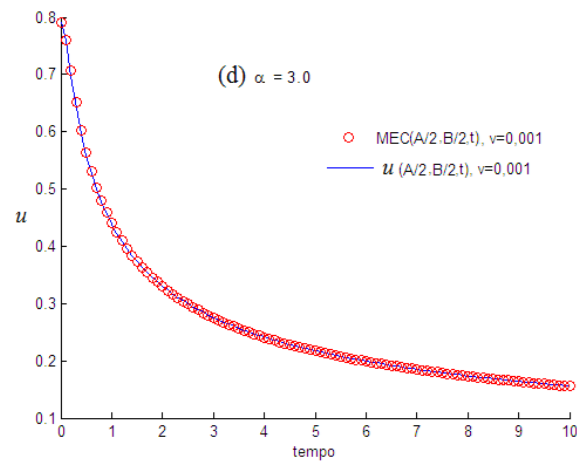


Figura 35 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa para $\alpha = 3 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,99975, 0,99993, 0,99986 e 0,99979 para os casos em que α teve como valor 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente, indicando alto nível de correlação entre as variáveis. Observa-se nas Figuras 32, 33, 34 e 35, semelhança entre uma análise e outra. Esse resultado decorre do uso de valores relativamente próximos para os coeficientes de difusividade testados em tais análises numéricas. Foram testados os casos nos quais os valores 10 mm^2/s e 100 mm^2/s foram adotados para o coeficiente de difusividade térmica, obtendo-se R^2 igual a 0,99495 e 0,99969 para cada um dos testes, respectivamente.

Em nova análise, mantendo a difusividade unitária e variando os valores de velocidade, obteve-se R^2 igual a 0,99856, 0,99993 (citado anteriormente), 0,99968 e 0,99856 para os casos em que a velocidade v_x assumiu os valores 0,0, 0,001, 0,005 e 0,01 mm/s , respectivamente, validando a formulação matemática desenvolvida.

Realizando uma análise comparativa entre as soluções do MEC para as diferentes velocidades empregadas anteriormente, observam-se ínfimas variações nas distribuições de temperatura a partir da Figura 29 (a). Esse fato decorre dos pequenos valores de velocidade. Ainda na continuação da Figura 29, em (b), (c) e (d) são ilustradas ampliações de intervalos de tempo específicos da presente análise numérica, sendo possível observar com melhor distinção o efeito da velocidade no transporte de energia em cada caso testado, onde verificam-se menores temperaturas ao longo do tempo ao adotar-se valores crescentes para a velocidade.

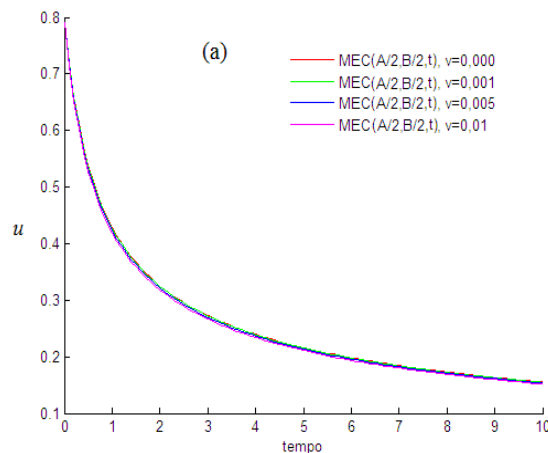


Figura 36 – Soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

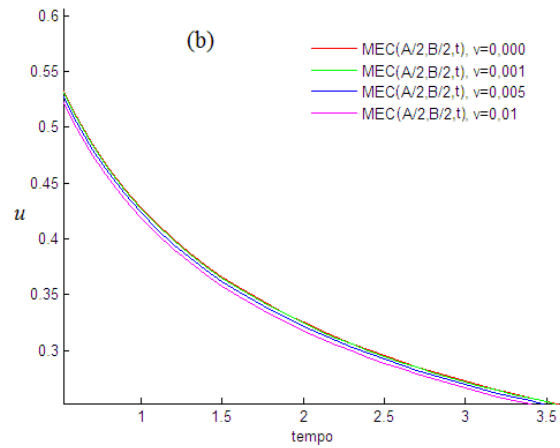


Figura 37 – Ampliação (b) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

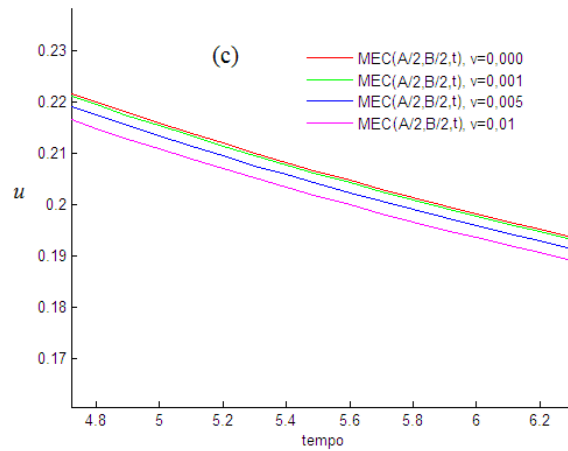


Figura 38 – Ampliação (c) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

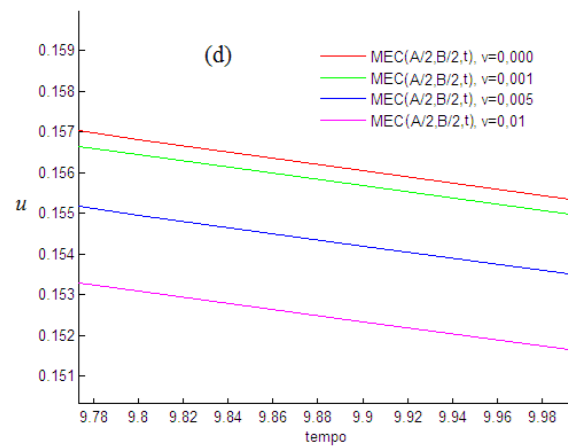


Figura 39 – Ampliação (d) das soluções do MEC para a distribuição de temperatura de um ponto no centro da placa para $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Como nessa análise a difusividade foi mantida constante, conclui-se que os resultados são influenciados pelo processo advectivo, tendo como base o caso exclusivo de difusão do calor onde a velocidade é nula (linha em vermelho).

7.3.2 Teste 02

No segundo teste foram obtidas a partir das seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 1^\circ C \\ u(A, y, t) &= 0^\circ C \\ q(x, 0, t) &= 0 \text{ W / mm}^2 \\ q(x, B, t) &= 0 \text{ W / mm}^2 \end{aligned} \quad (100)$$

representando temperatura u constante e unitária na aresta lateral esquerda, nula na aresta lateral direita e fluxo q nulo na região inferior e superior do domínio retangular Ω . A condição inicial é dada por:

$$u_0(x, y, t_0) = 0^\circ C \quad (101)$$

que corresponde a uma temperatura nula em todo o domínio do problema no instante inicial.

A solução analítica do presente problema é dada por DESILVA *et al.* (1998):

$$u(x, y, t) = \frac{\exp(Pe x) - \exp(-Pe)}{1 - \exp(-Pe)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi x}{\lambda_n} \exp\left(\frac{Pe x}{2} - \lambda_n t\right) \sin(n \pi x) \quad (102)$$

onde:

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2$$

7.3.2.1 Resultados

Adotando $\alpha = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$, Pe calculado a partir da equação (84) e $v_x = 0,001, 0,005$ e $0,01 \text{ mm/s}$, têm-se os seguintes resultados:

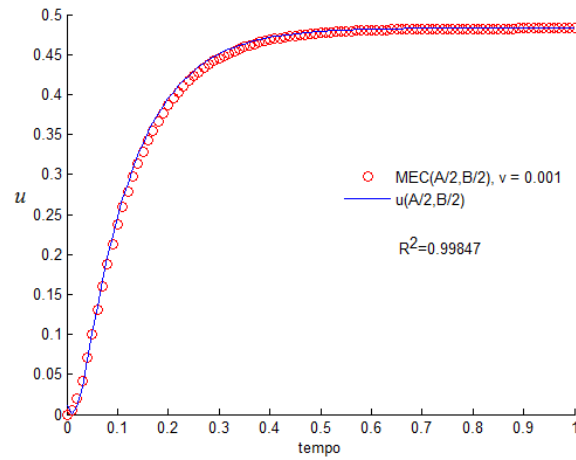


Figura 40 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,001 \text{ mm/s}$.

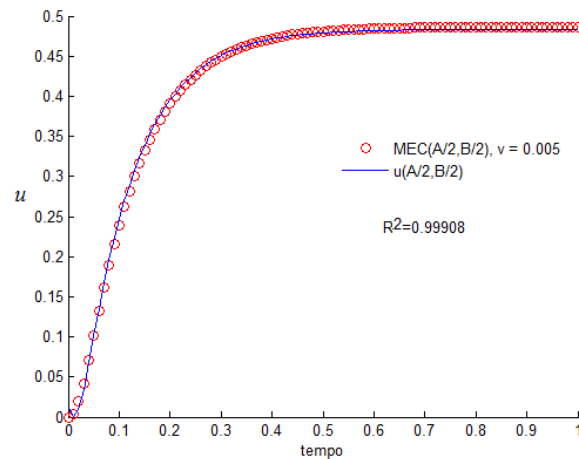


Figura 41 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,005 \text{ mm/s}$.

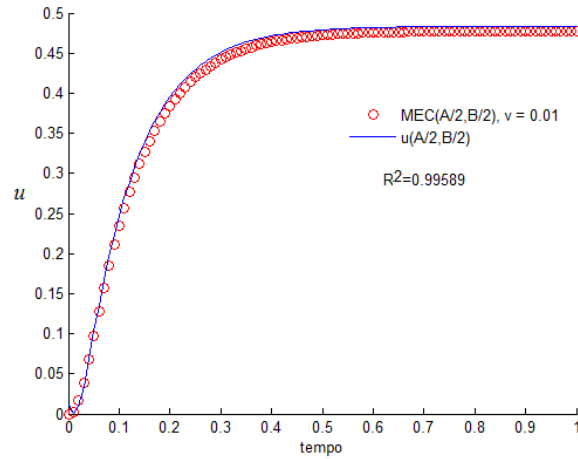


Figura 42 – Comparação entre a solução analítica e MEC $v_x = 0,01$ mm/s.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,99847, 0,99908, e 0,99589 para os casos em que v_x foi igual a 0,001, 0,005 e 0,01 mm/s, respectivamente, indicando excelente nível de correlação entre as variáveis. Observa-se nas Figuras 38, 39 e 40, semelhança entre uma análise e outra. Esse resultado decorre do uso de valores relativamente próximos para as velocidades testadas em tais análises numéricas.

Com o intuito de verificar o efeito da velocidade no fenômeno difusivo-advectivo do problema em questão, a seguir são ilustradas as distribuições de temperatura para os casos já estudados em conjunto com a solução puramente difusiva, na qual tem-se velocidade nula (linha em azul da Figura 43).

Na ampliação setorial apresentada na Figura 43 é possível verificar o efeito da velocidade do processo de transporte de energia: velocidades crescentes indicam maiores elevações de temperatura na direção do campo de velocidades, ou seja, maior dissipação da energia térmica introduzida no domínio devido à condição de contorno natural e unitária, $u(0, y, t) = 1^\circ\text{C}$.

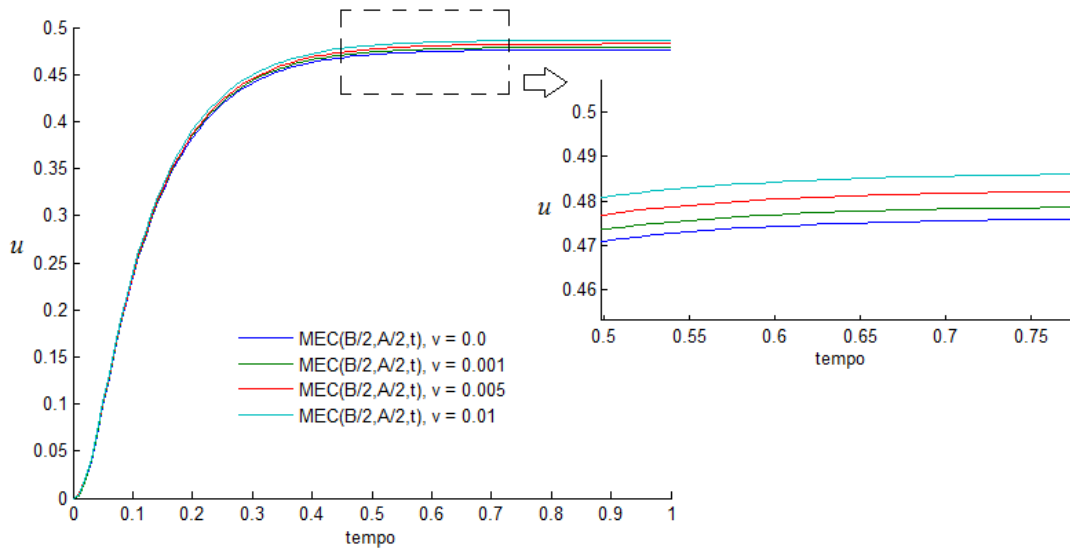


Figura 43 – Comparação da solução MEC para diferentes velocidades e ampliação de um intervalo específico.

Ainda na ampliação da Figura 43, verifica-se que as variações de temperatura entre uma análise e outra demonstram que a taxa de energia térmica dissipada é menor para os casos onde a velocidade advectiva é menor, atingindo temperaturas menores em um mesmo intervalo de tempo.

7.4 MODELO GEOMÉTRICO E MATEMÁTICO PARA O CASO DIFUSÃO-ADVECÇÃO: PLACA COM UM OBSTÁCULO SOB GERAÇÃO DE CALOR

Os resultados obtidos até a seção anterior demonstram o potencial da formulação do MEC desenvolvida nesse trabalho para análise numérica de problemas de difusão-advecção. Baseando-se em tal afirmação, apresenta-se a seguir o estudo numérico de difusão-advecção observado em um escoamento contendo um obstáculo circular sob geração de calor. Tal escoamento é uma aproximação finita de um escoamento cujo domínio é infinito. Para tanto, a formulação do MEC desenvolvida nesse trabalho é ampliada para o problema citado e as soluções obtidas são apresentadas ao final da presente seção.

7.4.1 Escoamento ao redor de um obstáculo circular – campo de velocidades

Nesse estudo numérico optou-se em analisar o caso de difusão de calor a partir de um obstáculo circular (Ω_2), no qual ocorre geração de calor (equação (63)), sujeito a um escoamento laminar irrotacional em um domínio retangular (Ω_1) como ilustra a Figura 44.

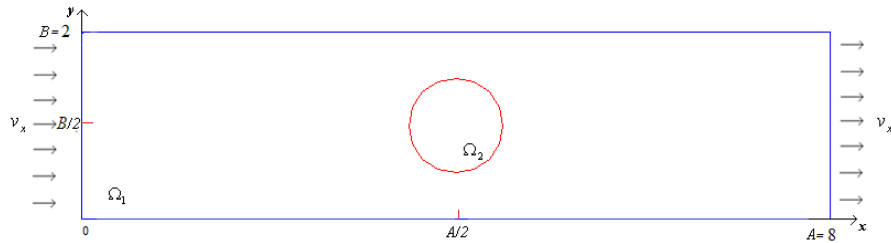


Figura 44 – Modelo geométrico do problema de difusão do calor e difusão-advectação.

Quanto ao escoamento, ROGERS (1992) apresenta a equação da continuidade para o caso laminar citado, dada por:

$$\nabla^2 \Phi(X) = 0 \quad (103)$$

A equação (103) representa uma função potencial escalar de velocidade e em uma região irrotacional de escoamento, o vetor velocidade $\mathbf{v}(X)$ pode ser expresso como o gradiente de tal função, dado por:

$$\nabla \Phi(X) = \mathbf{v}(X) \quad (104)$$

A partir do modelo geométrico ilustrado pela Figura 44, das equações (103) e (104) e adotando as condições de contorno dadas pelas equações (105) e (106) (apresentadas a seguir e ilustradas pela Figura 45), tem-se o seguinte campo de velocidades (equação (107)):

Condições de contorno essenciais

$$v_x = \frac{\partial\Phi(X)}{\partial x} = cte \quad ; \quad v_y = \frac{\partial\Phi(X)}{\partial y} = 0 \quad X \in \Gamma_1 \quad (105)$$

que representa uma velocidade constante ao longo da direção do eixo x e nula na direção do eixo y no contorno da placa ao longo do tempo.

Condição de contorno natural

$$\Lambda(X) = \frac{\partial\Phi(X)}{\partial n(X)} = 0 \quad X \in \Gamma_2 \quad (106)$$

que representa velocidade nula na direção normal ao contorno Γ_2 .

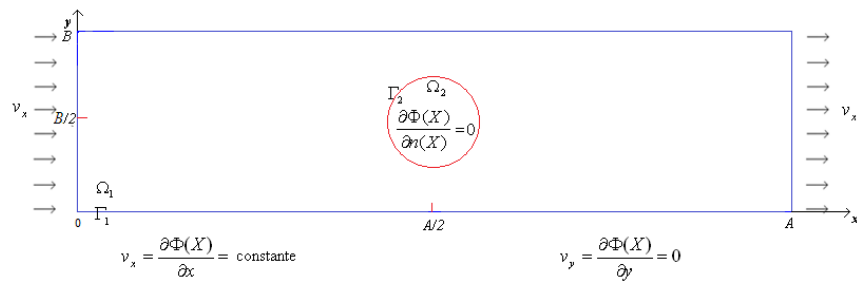


Figura 45 – Domínio do problema de escoamento fluido e condições de contorno.

O campo de velocidades em coordenadas polares com os versores \hat{i} e \hat{j} nas direções r e θ é dado por (ÇENCEL e CIMBALA, 2007):

$$\mathbf{v}(X) = \mathcal{G} \hat{i} + \nu \hat{j} \quad (107)$$

As variáveis \mathcal{G} e ν são dadas por:

$$\mathcal{G}(r, \theta) = v_x \left[1 - \frac{R^2 \cos(2\theta)}{r^2} \right] \quad (108)$$

$$v(r, \theta) = -v_x \frac{R^2 \sin(2\theta)}{r^2} \quad (109)$$

onde R representa o raio do obstáculo circular (disco Ω_2).

7.4.2 Discretização do modelo geométrico e campo de velocidades

O domínio do problema foi discretizado em elementos de contorno e em células triangulares (Figura 46), no qual, 504 células estão presentes na região Ω_1 e 32 para a região do disco Ω_2 .

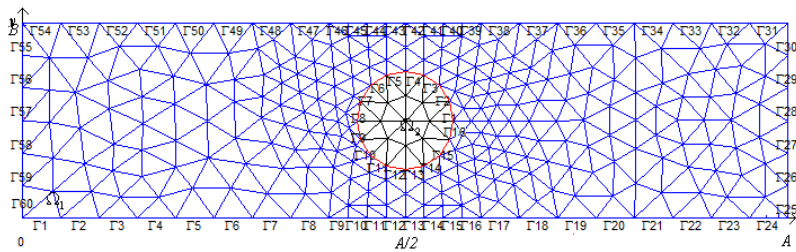


Figura 46 – Discretização do domínio do problema com destaque para a região onde ocorre o escoamento fluido (Ω_1 , região em azul).

A Figura 47 ilustra o módulo do campo de velocidades para o escoamento no domínio do problema.

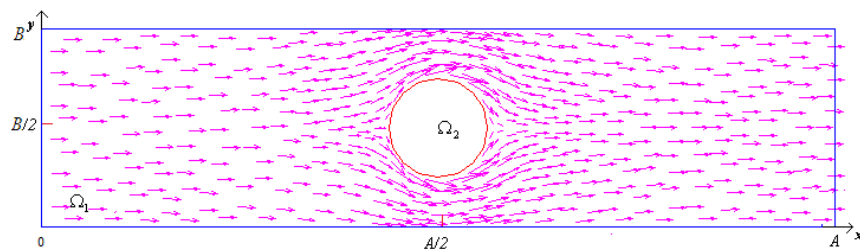


Figura 47 – Campo vetorial de velocidades no domínio do problema de escoamento.

Os vetores adotados na Figura 47 representam a magnitude e a direção do fluido no domínio do problema. É possível observar o desvio do fluido para

parte superior e inferior do domínio, devido à presença do disco no escoamento, agindo como um obstáculo e obrigando o fluido a desviar, traçando um caminho com velocidades diferentes ao redor do disco.

Na Figura 48 é apresentado, com o uso de uma escala de cores, o módulo do campo de velocidades em mm/s.

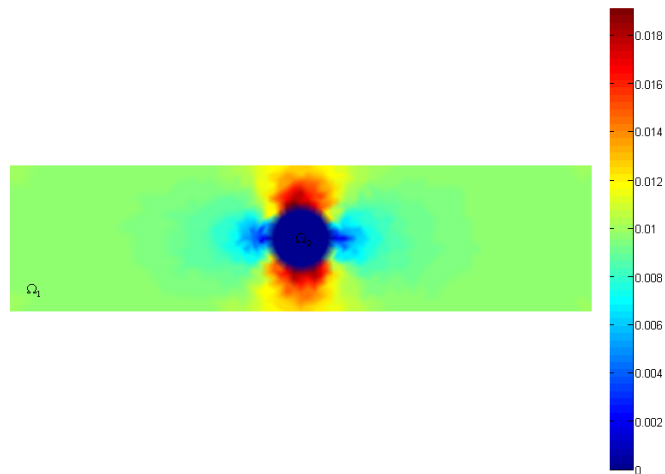


Figura 48 – Módulo do campo de velocidade no domínio do problema de escoamento.

A Figura 48 representa o campo de velocidades do fluido ao passar ao redor do disco (domínio Ω_2). As cores utilizadas representam a magnitude das velocidades, cores quentes, velocidades maiores. Neste caso a cor verde corresponde à velocidade em regiões distantes do disco, ou seja, velocidade de fluxo livre, da esquerda para a direita.

À medida que o fluido se aproxima do disco, observa-se que os valores de velocidade começam a diminuir na região equatorial, mudando para a cor azul. Nessa região está localizado um ponto onde a velocidade do fluido é nula, chamado de ponto de estagnação ($\theta = 0$) à montante do disco.

A velocidade ao longo da superfície do disco está em uma direção tangencial, ou seja, paralelamente à superfície do mesmo. Em razão disso, observa-se na Figura 48 que o fluido que passa pela parte superior ou inferior do disco, região dos pólos, apresenta elevação na magnitude da velocidade (mudança para cor vermelha), atingindo o dobro da velocidade de fluxo livre (valor máximo da equação (107) para $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$).

Na jusante do disco observa-se novamente uma diminuição na velocidade do fluido, atingindo um segundo ponto de estagnação no equador ($\theta = \pi$). A partir desse ponto, o fluido à jusante começa a aumentar sua velocidade, retornando gradualmente ao valor do fluxo livre em decorrência do campo conservativo de velocidades e não variável no tempo.

Após ser definido o campo de velocidades do escoamento, o passo seguinte desse estudo foi a determinação da equação básica do MEC para o caso difusivo-advectivo, a qual é apresentada a seguir.

7.4.3 Equação básica do MEC para o caso difusivo-advectivo

Sendo definido o campo de velocidades, a equação básica do MEC para o domínio Ω_1 é dada por:

$$C(\xi)u(\xi, t) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma - \quad (110)$$

$$Pe \int_{\Omega} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega - Pe \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{v}(X) u(X, t)] u^*(\xi, X) d\Omega$$

$$X \in \Omega_1, \quad X = (x, y)$$

Assim, a integral contendo $\nabla \cdot [\mathbf{v}(X) u(X, t)]$, na qual $\mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X, t) \neq 0$ e $u(X, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X) \neq 0$, assume a forma da equação (87), a saber (equação(111)):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{v}(X) u(X, t)] u^*(\xi, X) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X, t) u^*(\xi, X) d\Omega + \int_{\Omega} u(X, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X) u^*(\xi, X) d\Omega \quad (111)$$

Como o campo de velocidade é conhecido e admitindo-se que o comportamento térmico em cada célula é constante, o cálculo da primeira integral do lado direito de (111) toma a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(X) \cdot \nabla u(X, t) u^*(\xi, X) d\Omega = \sum_{d=1}^m \mathbf{v}(X_d) \int_{\Omega_d} \nabla u(X_d, t) u^*(\xi, X_d) d\Omega_d \quad (112)$$

ou, em termos das componentes de velocidade em x e y :

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^m \mathbf{v}(X_d) \int_{\Omega_d} \nabla u(X_d, t) u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\ & \sum_{d=1}^m v_x(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X, t)}{\partial x} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d + \sum_{d=1}^m v_y(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X, t)}{\partial y} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d \end{aligned} \quad (113)$$

Integrando uma vez por partes as integrais do lado direito de (113) de acordo com a formulação do MEC, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^m v_x(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X_d, t)}{\partial x} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\ & \sum_{c=1}^n v_x(X_c) \int_{\Gamma} u(X_c, t) \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_c + \sum_{d=1}^m v_x(X_d) \int_{\Omega} u(X_d, t) \frac{1}{2\pi r \cos(\theta)} d\Omega_d \\ & \sum_{d=1}^m v_y(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X_d, t)}{\partial y} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\ & \sum_{c=1}^n v_y(X_c) \int_{\Gamma} u(X_c, t) \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_c + \sum_{d=1}^m v_y(X_d) \int_{\Omega} u(X_d, t) \frac{1}{2\pi r \sin(\theta)} d\Omega_d \end{aligned} \quad (114)$$

onde η é a normal, d e c indicam domínio e contorno e m e n , número de células e de elementos de contorno, respectivamente.

Sabendo que o comportamento térmico em cada célula é constante e que no contorno admite-se variação linear, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{d=1}^m v_x(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X_d, t)}{\partial x} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\
& \sum_{c=1}^n v_x(X_c) \int_{\Gamma} \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma_c \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{d=1}^m v_x(X_d) u(X_d, t) \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi r \cos(\theta)} d\Omega_d \\
& \sum_{d=1}^m v_y(X_d) \int_{\Omega_d} \frac{\partial u(X_d, t)}{\partial y} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\
& \sum_{c=1}^n v_y(X_c) \int_{\Gamma} \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma_c \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{d=1}^m v_y(X_d) u(X_d, t) \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi r \sin(\theta)} d\Omega_d
\end{aligned} \tag{115}$$

Baseando-se no fato de que o comportamento térmico em cada célula é constante, a segunda integral do lado direito de (111) toma a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u(X, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(X) u^*(\xi, X) d\Omega = \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \nabla \cdot \mathbf{v}(X_d) u^*(\xi, X_d) d\Omega_d \tag{116}$$

em termos das componentes v_x e v_y da velocidade:

$$\begin{aligned}
& \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \nabla \cdot \mathbf{v}(X_d) u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\
& \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \frac{\partial v_x(X_d)}{\partial x} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d + \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \frac{\partial v_y(X_d)}{\partial y} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d
\end{aligned} \tag{117}$$

Adotando um procedimento análogo ao dado à equação (113), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \frac{\partial v_x(X_d)}{\partial x} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\
& \sum_{c=1}^n u(X_c, t) \int_{\Gamma} v_x(X_c) \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_c + \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega} v_x(X_d) \frac{1}{2\pi r \cos(\theta)} d\Omega_d \\
& \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega_d} \frac{\partial v_y(X_d)}{\partial y} u^*(\xi, X_d) d\Omega_d = \\
& \sum_{c=1}^n u(X_c, t) \int_{\Gamma} v_y(X_c) \eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_c + \sum_{d=1}^m u(X_d, t) \int_{\Omega} v_y(X_d) \frac{1}{2\pi r \sin(\theta)} d\Omega_d
\end{aligned} \tag{118}$$

Dessa forma e a partir de tais aproximações, a integral do lado esquerdo de (111) é calculada como:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{v}(X) u(X, t)] u^*(\xi, X) d\Omega =$$

$$\sum_{c=1}^n v_x(X_c) \int_{\Gamma} \eta \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma_c \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{d=1}^m v_x(X_d) u(X_d, t) \int_{\Omega} \frac{1}{\pi r \cos(\theta)} d\Omega_d + \quad (119)$$

$$\sum_{c=1}^n v_y(X_c) \int_{\Gamma} \eta \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma_c \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{d=1}^m v_y(X_d) u(X_d, t) \int_{\Omega} \frac{1}{\pi r \sin(\theta)} d\Omega_d$$

As integrais de contorno (em Γ) resultantes da integração por partes são calculadas com o uso de elementos lineares, sendo adotados os mesmos procedimentos numéricos para o cálculo da integral de contorno apresentada pela equação (37), porém, para incógnita u .

Para calcular as integrais de domínio utiliza-se o mesmo procedimento citado nos capítulos anteriores, baseando-se no uso células triangulares.

7.4.4 Notação matricial e solução numérica para o problema de difusão-advectação

A partir da discretização da equação (110) para o transporte de matéria, da equação (65) para o disco (região onde ocorre geração de calor) e dos métodos de integração citados ao longo desse trabalho, forma-se um sistema de equações que, em notação matricial, é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} + \quad (120) \\
& - \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \left\{ \left[\mathbf{u}_1^d \right]_{m+1} - \left[\mathbf{u}_1^d \right]_m \right\} - \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} \left\{ \left[\mathbf{u}_2^d \right]_{m+1} - \left[\mathbf{u}_2^d \right]_m \right\} + \\
& - \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{V}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{V}_{1,1}^{dd} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\mathbf{u}_1^d \right]_{m+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,1}^{cc} & \mathbf{V}_{1,2}^{cc} \\ \mathbf{V}_{2,1}^{cc} & \mathbf{V}_{2,2}^{cc} \\ \mathbf{V}_{1,1}^{dc} & \mathbf{V}_{1,2}^{dc} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1}
\end{aligned}$$

Na equação anterior, \mathbf{V}^{cd} , \mathbf{V}^{dc} e \mathbf{V}^{dd} são matrizes resultantes das integrais de domínio e \mathbf{V}^{cc} , resultante das integrais de contorno presentes na equação (119).

Agrupando os termos semelhantes da equação (120), obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{H}_{1,1}^{cc} + \mathbf{V}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} + \mathbf{V}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} + \mathbf{V}_{1,1}^{cd} & 0 & 0 \\
 \mathbf{H}_{2,1}^{cc} + \mathbf{V}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} + \mathbf{V}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} + \mathbf{V}_{2,1}^{cd} & 0 & 0 \\
 \mathbf{H}_{1,1}^{dc} + \mathbf{V}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} + \mathbf{V}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} + \mathbf{V}_{1,1}^{dd} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_2^{dd}
 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1^d]_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_2^d]_m + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \quad (121)$$

Transladando as colunas das matrizes que contém incógnitas do lado direito para o esquerdo na equação (121), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} + \mathbf{V}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} + \mathbf{V}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} + \mathbf{V}_{1,1}^{cd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} + \mathbf{V}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} + \mathbf{V}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} + \mathbf{V}_{2,1}^{cd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} + \mathbf{V}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} + \mathbf{V}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} + \mathbf{V}_{1,1}^{dd} & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} & 0 & -\mathbf{G}_{3,3}^{cc} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_2^{dd} & 0 & -\mathbf{G}_{2,3}^{dc} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \\ \mathbf{q}_2^c \\ \mathbf{q}_3^c \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{q}_i^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1^d]_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_2^d]_m + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \quad (122)$$

Pelas condições de continuidade e equilíbrio (compatibilidade) dadas pela equação (76), pode-se montar um sistema de equações somando-se entre si as colunas que se relacionam com as variáveis equivalentes no vetor de incógnitas presente na equação (122):

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}_{1,1}^{cc} - \mathbf{V}_{1,1}^{cc} & \mathbf{H}_{1,2}^{cc} - \mathbf{V}_{1,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} - \mathbf{V}_{1,1}^{cd} & \mathbf{G}_{1,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{2,1}^{cc} - \mathbf{V}_{2,1}^{cc} & \mathbf{H}_{2,2}^{cc} - \mathbf{V}_{2,2}^{cc} & \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{2,1}^{cd} - \mathbf{V}_{2,1}^{cd} & \mathbf{G}_{2,2}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}_{1,1}^{dc} - \mathbf{V}_{1,1}^{dc} & \mathbf{H}_{1,2}^{dc} - \mathbf{V}_{1,2}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{M}_{1,1}^{dd} - \mathbf{V}_{1,1}^{dd} & \mathbf{G}_{1,2}^{dc} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{3,3}^{cc} & 0 & -\mathbf{G}_{3,3}^{cc} & \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ 0 & \mathbf{H}_{2,3}^{dc} & 0 & -\mathbf{G}_{2,3}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \mathbf{M}_2^{dd} \end{array} \right] \times \quad (123)$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1^c \\ \mathbf{u}_2^c = \mathbf{u}_3^c \\ \mathbf{u}_1^d \\ \mathbf{q}_2^c = -\mathbf{q}_3^c \\ \mathbf{u}_2^d \end{array} \right]_{m+1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{1,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{cc} \\ \mathbf{G}_{1,1}^{dc} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] [\mathbf{q}_1^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{array} \right] [\mathbf{u}_1^d]_m + \frac{1}{\alpha_2 \Delta t} \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}_{1,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,1}^{cd} \\ \mathbf{M}_{1,1}^{dd} \\ \mathbf{M}_{3,2}^{cd} \\ \mathbf{M}_{2,2}^{dd} \end{array} \right] [\mathbf{u}_2^d]_m + \frac{1}{k} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{3,3}^{cd} \\ \mathbf{F}_{2,2}^{dd} \end{array} \right]_{m+1}$$

As condições de contorno e iniciais para essa análise são:

$$u(X, t) = 0^\circ C \quad X \in \Gamma_1 \quad (124)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno em todo o período de análise e

$$u_0(X, t_0) = 0^\circ C \quad X \in \Omega \quad (125)$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema no instante inicial.

O termo de geração de calor é definido no domínio Ω_2 e apresenta a seguinte forma (fonte constante):

$$\frac{F(X, t)}{k} = 10^\circ C mm^{-2} \quad X \in \Omega_2, \quad 0 < t < \infty \quad (126)$$

representando geração constante de calor ao longo do tempo apenas na região circular do domínio.

7.4.5 Resultados

Procedendo da mesma forma como nos caso anteriores e adotando $\alpha_1=0,7 \text{ mm}^2/\text{s}$, $\alpha_2=4,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $v_x = 0,001 \text{ mm/s}$, têm-se os seguintes valores de temperatura para determinados pontos ao longo do domínio (Figura 49):

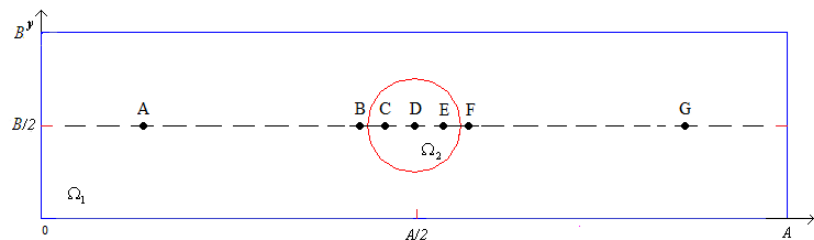


Figura 49 – Ilustração da localização dos pontos analisados.

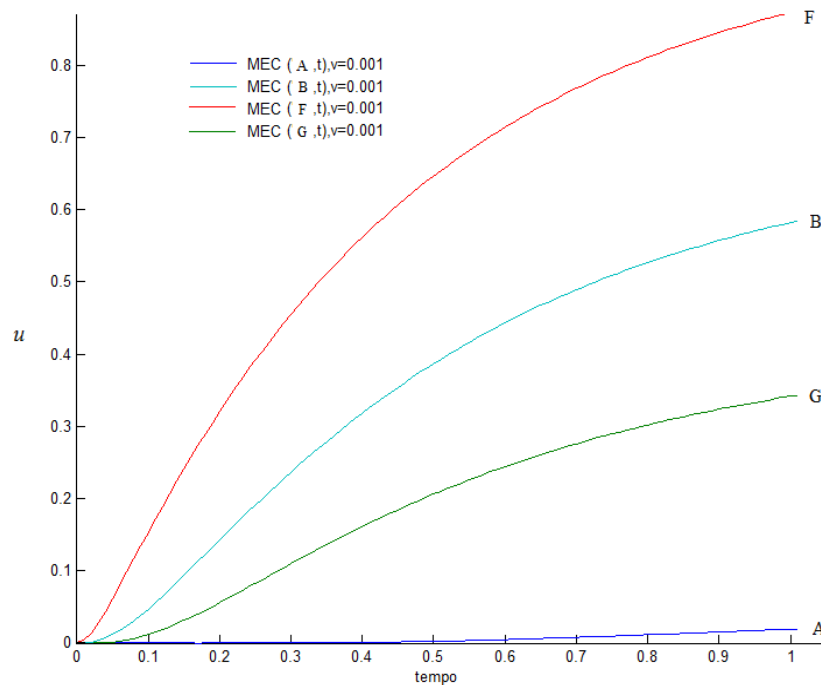


Figura 50 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura nos pontos A, B, C, D, E, F e G do domínio.

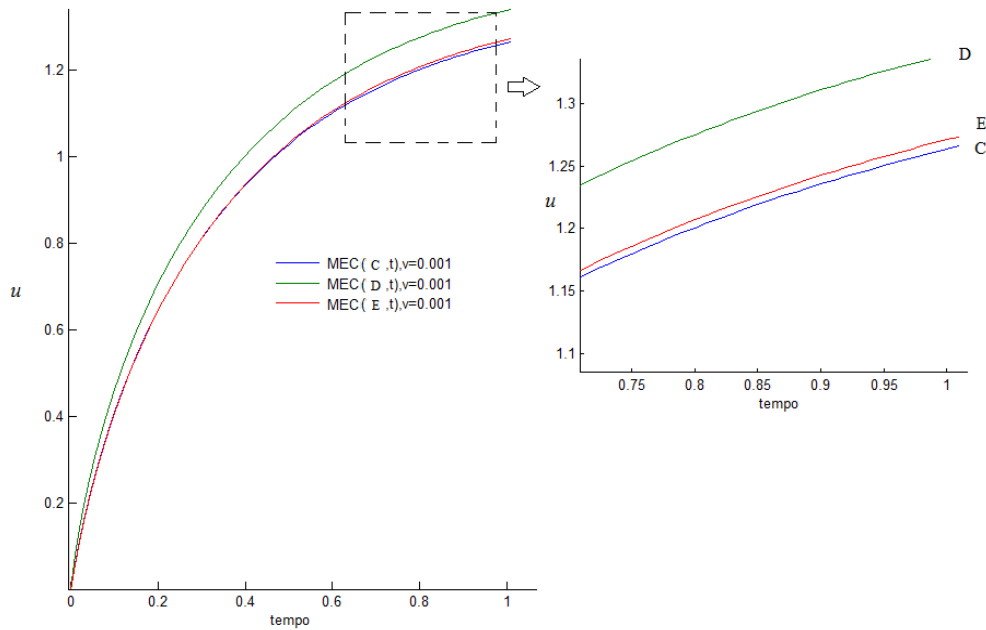


Figura 51 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura em pontos do disco sob geração interna de calor.

Na Figura 50 são ilustradas as distribuições de temperatura de quatro pontos da placa, dois anteriores (A e B) ao disco sob geração de calor e dois posteriores (F e G). Verifica-se que apesar da condição de contorno e da geometria utilizada apresentar simetria, os resultados de temperatura em pontos simétricos não o são. Isso é devido ao transporte de energia térmica causado pelo escoamento, fazendo com que a distribuição de temperaturas dos pontos se dê de maneira desigual. Os menores valores de temperatura foram verificados no ponto A em razão da condição de contorno na face esquerda do modelo geométrico onde origina-se o escoamento. Analisando a temperatura dos pontos seguintes, observa-se que o ponto B atingiu menores valores de temperatura em comparação aos valores registrados no ponto F e, apesar da simetria, verifica-se que o escoamento teve sua entropia elevada entre esses dois pontos. A razão desse fenômeno deve-se ao movimento de massa na chegada à fonte de calor, ao longo do contorno da fonte até a saída, recebendo energia da fonte e, em seu curso, reduzindo gradualmente seus valores em direção à face direita da placa, atingindo uma menor distribuição de temperaturas como ilustra a linha do ponto G.

Desigual distribuição de temperaturas também é observada na Figura 51 que refere-se ao comportamento térmico no interior da fonte de calor (disco),

onde registraram-se as maiores temperaturas no centro do disco, ponto D, ponto geometricamente mais afastado dos efeitos do escoamento, e, de forma semelhante à análise da placa, os valores de temperatura registrados na região de chegada do escoamento, ponto C, são menores do que os observados na região de saída, ponto E, comprovando o efeito do transporte de energia.

Em uma análise complementar, foram comparados os valores de temperatura no centro do disco, ponto D, ao utilizar os valores de velocidade iguais à 0,001, 0,005 e 0,01 mm/s. Os resultados dessa análise são ilustrados na Figura 52.

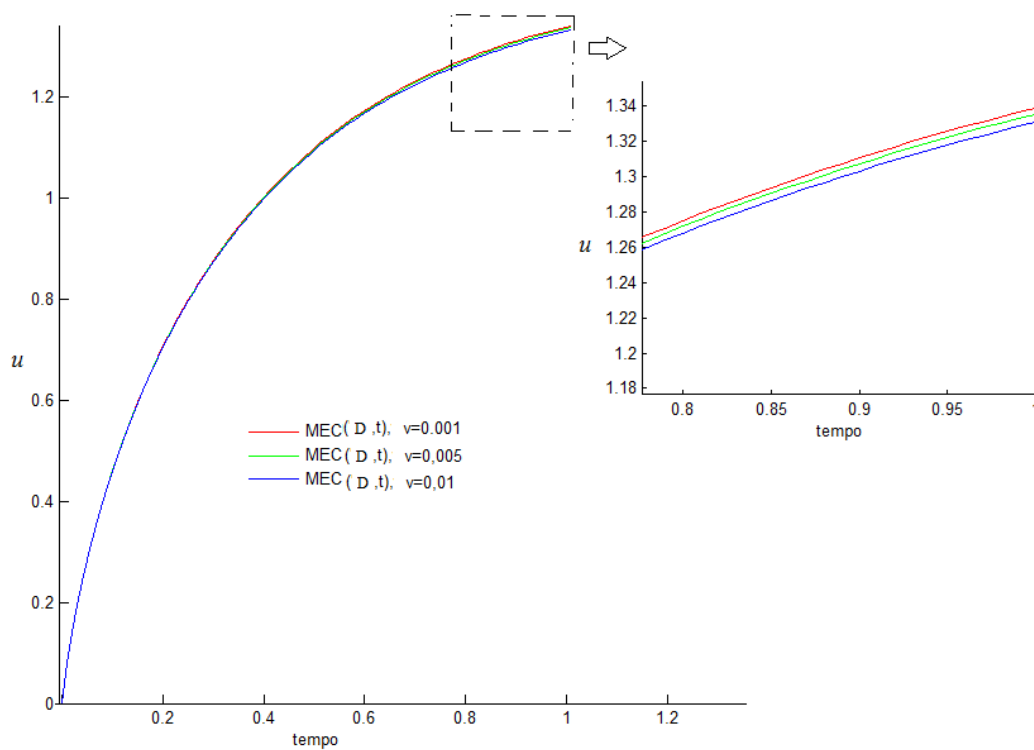


Figura 52 – Soluções do MEC para as distribuições de temperatura no centro do disco para diferentes valores de velocidades do escoamento.

Na Figura 52 é possível observar o efeito da velocidade do escoamento na distribuição de temperatura no centro da fonte de calor, sendo registradas menores temperaturas ao adotar-se valores crescentes para a mesma. Esses resultados comprovam o efeito do transporte de energia e indicam uma maior taxa de dissipação do calor com o aumento da velocidade do escoamento.

CAPÍTULO 8

8 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos para a equação da difusão a partir do modelo geométrico e matemático revelaram um alto nível de correlação entre as soluções numérica e analítica, tomando como referência o estimador R^2 . Para esse estimador foram obtidos valores iguais a 0,99992, 0,99998, 0,99968 e 0,99686, para os casos em que a constante α teve valores iguais a 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente. Esses resultados se referem à análise realizada em um ponto central do domínio (ponto simetricamente mais afastado do contorno do problema), tornando evidente o potencial da formulação do Método dos Elementos de Contorno baseada em técnicas de resíduos ponderados, mostrando-se versátil ao atuar em conjunto com o método de Diferenças Finitas e com o emprego da solução fundamental independente do tempo para análise de problemas transientes.

Com a intenção de testar a formulação desenvolvida e ampliar a gama de aplicações, dois casos complementares de difusão foram analisados. O primeiro contou com a inserção de um termo dissipativo no modelo, sendo obtidos valores de R^2 iguais a 0,99788, 0,99988, 0,99949 e 0,99931, para os casos em que α teve como valores, 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm^2/s , respectivamente. Ainda nesse problema, observou-se a influência do coeficiente h no modelo matemático, sendo registrada maior dissipação do calor ao utilizar valores crescentes para tal coeficiente. As simulações indicaram alto nível de correlação entre as soluções numérica e analítica, com R^2 igual a 0,99998, 0,99995, 0,99979 e 0,99852, para os casos em que h teve como valores 0,05, 0,5, 1,5 e 5,0, respectivamente, mantendo-se α constante e unitário.

No segundo caso de difusão analisado, um termo não homogêneo, simulando geração interna de calor, foi introduzido no modelo, obtendo-se R^2

igual a 0,99991, 0,99981, 0,99962 e 0,99888, fazendo uso dos valores 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm²/s para a constante α , respectivamente.

Destacam-se aqui, a simplicidade de inserção de termos não homogêneos na formulação do MEC desenvolvida nesse trabalho e também a eficiência da mesma ao apontar soluções numéricas para problemas específicos de difusão.

Sendo verificada a potencialidade da formulação desenvolvida, estendeu-se o estudo de difusão com geração de calor para a análise de meios contínuos com o uso de sub-regiões. Os resultados obtidos a partir do modelo de subregiões aproximaram-se da solução analítica ao se testar um meio contínuo e homogêneo ($\alpha_1 = \alpha_2$), demonstrando a eficiência da formulação apresentada.

Na análise de meios contínuos não homogêneos foi verificada a interação existente entre diferentes materiais ao se adotar diferentes valores para o coeficiente de difusividade térmica dos mesmos. Os resultados indicaram a influência do meio exterior (anel) na resposta térmica da região onde ocorria a geração de calor (disco), sendo verificada maior concentração de calor para os casos em que $\alpha_1 < \alpha_2$ e, de maneira oposta, para os casos em que $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Após a validação da formulação do MEC para problemas de difusão do calor em meios homogêneos e não homogêneos, optou-se em analisar o problema de difusão-advecção a partir de uma placa retangular. Os resultados numéricos dessa análise demonstraram o efeito da velocidade do escoamento em problemas de difusão do calor, sendo verificado que o aumento da velocidade do escoamento produz aumento na dissipação do calor. No teste 01, obteve-se R² igual a 0,99975, 0,99993, 0,99986 e 0,99979, com α igual a 0,7, 1,0, 1,5 e 3,0 mm²/s, respectivamente, com $v = 0,001$ mm/s. Adotando α igual a 1,0 mm²/s e assumindo velocidades iguais 0,001, 0,005 e 0,01 mm/s, obteve-se no teste 02, R² igual a 0,99847, 0,99908, e 0,99589, respectivamente, indicando excelente nível de correlação entre as variáveis, validando a formulação a partir das duas soluções analíticas utilizadas.

Resultados numéricos importantes para o problema de difusão-advecção também foram obtidos para o caso onde simulou-se analiticamente um

escoamento contendo um obstáculo. Tais resultados indicaram maior quantidade de calor dissipada pela fonte circular (obstáculo) na direção do escoamento, demonstrando o efeito advectivo no processo difusivo.

Em uma análise complementar, os resultados obtidos com o modelo numérico revelaram o efeito da velocidade do escoamento na distribuição de temperatura na região de geração de calor, sendo registradas menores temperaturas ao se adotar valores crescentes para a velocidade, demonstrando novamente o efeito advectivo.

Além dos resultados significativos obtidos, cabe aqui salientar outro fator relevante que refere-se à aplicação da técnica de integração de tais células, a qual utiliza apenas um ponto de integração, a possibilidade de obter soluções com um nível de precisão satisfatório adotando-se os valores teoricamente propostos para o incremento de tempo na formulação.

Em relação à formulação matemática apresentada nesse trabalho, a partir dos resultados obtidos comprova-se a eficácia da formulação do Método dos Elementos de Contorno desenvolvida para análise de problemas transientes, apresentando resultados com alto nível de aproximação em relação ao resultado analítico de cada problema analisado, tomando por base os valores obtidos para o coeficiente R^2 .

A formulação desenvolvida tem sua originalidade evidenciada pelo uso da solução fundamental independente do tempo em problemas transientes de difusão:

- i. com termo dissipativo;
- ii. com termo de geração de calor;
- iii. com termo advectivo;
- iv. em combinação com a geração de calor e a advecção;

Finalizando, ressalta-se que todos os objetivos específicos traçados no início desse trabalho foram atingidos. Para trabalhos futuros, seguem algumas sugestões para sua continuidade:

- (i) Implementação da anisotropia do material nas simulações e análise das respostas do modelo numérico;
- (ii) Implementação da formulação MEC para cálculo do campo de velocidade e acoplamento à presente formulação;

- (iii) Comparação da presente formulação a partir de modelos físicos de difusão do calor e advecção.

Ainda, a presente formulação contribui com o presente programa de pós-graduação, disseminando e fomentando o conhecimento científico, ampliando o número de aplicações e formulações baseadas no MEC.

AGRADECIMENTOS

Ao LACTEC pela infraestrutura, e à ELEJOR/ANEEL e à PETROBRAS pelo apoio financeiro para condução deste trabalho de pesquisa.

PRODUÇÕES

PETTRES, R.; SCUCIATO, R. F.; LACERDA, L. A. Formulação do Método dos Elementos de Contorno em Matlab para problemas potenciais bidimensionais. In: **I SMNC - Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná**, Curitiba - PR, Brasil, 2011.

PETTRES, R.; LACERDA, L. A. Análise da equação da difusão com fonte variável no tempo a partir do Método dos Elementos de Contorno. In: **II SMNC - Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná**, Curitiba - PR, Brasil, 2012.

PETTRES, R.; LACERDA, L. A.; CARRER, J. A. M. On the modeling of a transient heat generation problem with a boundary element formulation and a time independent fundamental solution. In: **6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)**, Vienna – Austria, 2012.

PETTRES, R.; CARRER, J. A. M.; LACERDA, L. A. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para geração interna e transferência de calor – um estudo paramétrico. In: **XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Pirenópolis – GO, Brasil, 2013.

PETTRES, R.; LACERDA, L. A. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para o problema de difusão do calor bidimensional. In: **III SMNC - Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná**, Curitiba - PR, Brasil, 2013.

PETTRES, R.; CARRER, J. A. M.; LACERDA, L. A. A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, (submetido para publicação e aceito para análise, 2014).

PRODUÇÕES ADICIONAIS

PETTRES, R.; ROCHA, R. P.; LACERDA, L. A. Método para avaliação de drenos de fundação de barragens de concreto baseado em fibras óticas. In: **VIII SPMCH - Simpósio sobre Pequenas e Médias Centrais Hidrelétricas**, Porto Alegre – RS, Brasil, 2012.

PETTRES, R.; ROCHA, R. P.; LACERDA, L. A. Metodologia para determinação de nível d'água com monitoramento através de fibras óticas. In: **XXIX Seminário Nacional de Grandes Barragens**, Porto de Galinhas – PE, Brasil, 2013.

REFERÊNCIAS

- ABREU, A. I. A Boundary Integral Formulation Based On The Convolution Quadrature Method For Transient Heat Conduction In Functionally Graded Materials. In: **Symposium of the International Association for Boundary Element - IABEM 2013**, Chile, 2013.
- AKALIN-ACAR, Z.; GENÇER, N. G. An advanced boundary element method (BEM) implementation for the forward problem of electromagnetic source imaging, **Physics in Medicine and Biology** – Department of Electrical and Electronics Engineering Publishing, Middle East Technical University, Turkey, V. 49, N. 1, pp 5011-5028, 2004.
- AURADA, M. M.; FEISCHL, T.; FÜHRER, M.; KARKULIK, J.; MELENK, D. Convergence of adaptive FEM-BEM coupling driven by residual-based error estimators. In: **6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)**, Vienna, Austria, 2012.
- AZIS, M. I.; CLEMENTS, D. L. Nonlinear transient heat conduction problems for a class of inhomogeneous anisotropic materials by BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.32, N. 12, pp 1054-1060, 2008.
- BEER, G. WATSON, J.O. **Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers**. Wiley, England, 1994.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. Pentech Press, London, 1978.
- BREBBIA, C. A. DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introduction Course**. Bath Press, Great Britain, 1989.
- BREBBIA, C. A., SKERGET, P. Diffusion-advection problems using boundary elements. **Adv. In Water Resources**. V. 7, pp. 50-57, 1984.
- CARRER, J. A. M. OLIVEIRA, M. F. VANZUIT, R. J. MANSUR, W. J. Transient heat conduction by the boundary element method: D-BEM approaches.

International Journal for Numerical Methods in Engineering, V.89, N. 7 , pp 897-913, 2011.

CHAVES, A. P. **Estudo e Implementação das Equações Integrais de Contorno para Problemas Tridimensionais de Elasticidade**. Dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

CHENG, A.H.-D.; CHENG, D.T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V. 29, N. - , pp. 268–302, 2005.

CRUZ, J. P. **Formulações não-singulares do método dos elementos de contorno aplicados a problemas bidimensionais de potencial**, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

DESILVA, S. J; CHAN, L. C.; CHANDRA, A.; LIM, J. Boundary element method analysis for the transient conduction-convection in 2-D with spatially variable convective velocity. **Applied Mathematical Modelling**, V. 22, pp. 81-112, 1998.

GRAMANN, P. J.; MATZIG, J. C.; OSSWALD, T. A. Boundary Element Simulation of the Mixing Process of Polymer Blends. **Boundary Element Technology VII**, V. 7, pp. 117-134, 1992.

GREENBERG, M. D. **Application of Green's Functions in Science and Engineering**. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

_____. **Advanced Engineering Mathematics** (2nd Edition). Prentice-Hall, New Jersey, 1998.

GUO, S.; ZHANG, J.; LI, G.; ZHOU, F. Three-dimensional transient heat conduction analysis by Laplace transformation and multiple reciprocity boundary face method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.37, N. 1, pp 15-22, 2013.

HUNTER, P. **FEM / BEM Notes**. Department of Engineering Science, 2001.

JACOBS, D. **The State of the Art in Numerical Analysis**, Academic Press, New York, USA, 1979.

- JAREK, A.; OLIVEIRA, P.A.; SILVEIRA, R.M.; BURAS, M.; LACERDA L. A.; ROCHA, R. P. O.; GOLTZ, M. "Improving DTS Spatial Resolution for Detection of Infiltration. In: **Concrete Face Rockfill Dams**". **6th International Conference on Dam Engineering**. Portugal, 2011.
- JESUS, J. C. AZEVEDO, J. P. Simulação computacional para problemas de difusão transiente 2D pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando a solução fundamental independente do tempo. In: **Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería – Argentina, Mecánica Computacional**. Argentina, 2002.
- JESUS, J. C. PEREIRA, L. L. Modelagem matemática computacional pelo Método dos Elementos de Contorno para problemas de fluxos em meios porosos. In: **XIII Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas**, 2004.
- KEIDEL, C. **Aplicação do método dos elementos de contorno na modelagem de testes de pressão em poços de petróleo**, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- LACERDA, L. A., SILVA, J. M., LÁZARIS, J. Dual boundary element formulation for half-space cathodic protection analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.31, N. 6, pp 559-567, 2007.
- LEITHOLD, L., **Cálculo com geometria analítica – Vol. 1**. São Paulo, Harbra, 1994.
- LIMA JR., E. T. L. e VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A. BEM modeling of saturated porous media susceptible to damage. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V. 36, N. 2, pp 147–153, 2012.
- LOEFFLER, C. F. e COSTALONGA, F. Formulação hipersingular do método dos elementos de contorno aplicada em problemas difusivo-advectivos. In: **X SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional** Belo Horizonte – MG, Brasil, 2012.
- MALHOTRA, V. M., CARINO, N. J. **Handbook on Nondestructive testing of concrete**. New York: CRC Press, 2004.

- MEHTA, K., MONTEIRO, J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: IBRACON, 2008.
- MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. Student Workbook with Solutions, 3rd Edition. USA: WILEY, 2003.
- MORTON K. W., MAYERS, D. F. **Numerical Solutions of Partial Differential Equations**. Cambridge University Press, New York, 1994.
- OCHIAI, Y. Two-dimensional unsteady heat conduction analysis with heat generation by triple-reciprocity BEM. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.51, N. 2, pp 143-157, 2001.
- ONISHI, K. KUROKI, T. TANAKA, M. A application of a Boundary Element Method to natural convection, **Appl. Math. Modelling**, V. 8, N. - , pp 383-390, 1984.
- PETTRES, R.; ROCHA, R. P.; LACERDA, L. A. Método para avaliação de drenos de fundação de barragens de concreto baseado em fibras óticas. In: **VIII SPMCH - Simpósio sobre Pequenas e Médias Centrais Hidrelétricas**, Porto Alegre – RS, Brasil, 2012.
- PRESS, W. H. *et al.* **Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing**. 3rd Edition – Cambridge University Press, New York, 2007.
- ROACHE, P. J. **Fundamentals of Computacional Fluid Dynamics**. Hermosa Publishers, Albuquerque, 1998.
- ROCHA, R. P. O.; SANCHEZ, P. F.; BOSZCZOWSKI, R. B.; LACERDA, L. A.; KORMANN, A. C. M. Desenvolvimento e Avaliação de Instrumentação Geotécnica para o Monitoramento da Infiltração da Água em Solo Arenoso com Base em Tecnologia de Fibra Ótica. In: **Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica - COBRAMSEG**, Gramado, RS, 2010.
- ROGERS, D. F. **Laminar Flow Analysis**. Cambridge University Press, 1992.
- SARI, M., GÜRARSLAN, G., ZEYTINOĞLU, A. High-order finite difference schemes for solving the advection-diffusion equation. **Mathematical and Computational Applications**, V. 15, N. 3, pp. 449-460, 2010.

- SINGH, K. M, TANAKA, M. On exponential variable transformation based boundary element formulation for advection–diffusion problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.24, N. 3, pp 225-235, 2000.
- SOUZA, V. J. B. e CODA, H. B, Algoritmo de integração eficiente para o método dos elementos de contorno tridimensional. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, V. 7, N. 26, pp 97-130, 2005.
- SPINDLER, E. Second-kind Single Trace BEM for Acoustic Scattering. In: **Symposium of the International Association for Boundary Element - IABEM 2013**, Chile, 2013.
- STEHFEST, H. Numerical inversion of Laplace transform, **Commun. Assoc. Comput. Mach**, V. 13, N. - , pp 19–47, 1970.
- SUTRADHAR, A.; PAULINO, G. H. The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, V. 193, N. - , pp 4511–4539, 2004.
- TAGUTI, Y. **Método dos elementos de contorno na resolução do problema de segunda ordem em placas delgadas**. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.
- TANAKA, M.; KUROKAWA, K.; MATSUMOTO, T. A time-stepping DRBEM for transient heat conduction in anisotropic solids. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.32, N. 12, pp 1046-1053, 2008.
- TELLES, J. C. F.; A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, **Int. J. Num. Meth. Eng.**, V.24, pp 959-973, 1987.
- TRAUB, T. A Directional fast multipole method for elastodynamics. In: **Symposium of the International Association for Boundary Element - IABEM 2013**, Chile, 2013.
- VANZUIT, J. R. **Análise do fluxo bidimensional de calor pelo método dos elementos de contorno com soluções fundamentais independentes**

- do tempo**, Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.
- YOUNG, D.L.; TSAI, C.C.; MURUGESAN, K.; FAN, C.M.; CHEN C.W.; Time dependent Fundamental Solutions for Homogeneous Diffusion Problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V. 28, pp. 1463-1473, 2004.
- YU, B.; YAO, W.; GAO, Q. A precise integration Boundary Element Method for solving transient heat conduction problems with variable thermal, **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology**, V. 65, N. 5, pp 472-493, 2014.
- WALL, J. **Transient Heat Conduction: Analytical Methods**, (2009). Disponível em: < <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~wallj2/> >. Acesso em 07 Nov 2012.
- WEI, T.; ZHANG, Z. Q. Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V.37, N. 1, pp 23-31, 2013.
- WROBEL, L. C. **Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method**, Ph.D. Thesis, University of Southampton, U. K., 1981.
- WROBEL, L.C. **The Boundary Element Method Volume 1 Applications in Thermo-Fluids and Acoustic**, England: John Wiley and Sons LTD, 2002.
- ZILL, D. G, CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais Volume 2**, São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- ÇENCEL, Y. A. CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações**, McGrawHill, São Paulo, 2007.

ANEXO

Solução do MEC para um domínio quadrado

De forma complementar ao estudo desenvolvido em 4.1, realizou-se uma análise em um domínio quadrado de aresta unitária ($x = y = 1$ mm) a partir da formulação do MEC proposta. Nessa análise, 20 elementos lineares de contorno e 200 células de domínio (Figura 53) foram utilizados, sob as seguintes condições de contorno (127) e iniciais (128):

$$u(X, t) = 10 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Gamma \quad (127)$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno e fixa para todos os tempos e

$$u_0(X, t_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad X \in \Omega \quad (128)$$

que corresponde a uma temperatura constante no domínio do problema apenas no início da propagação do calor.

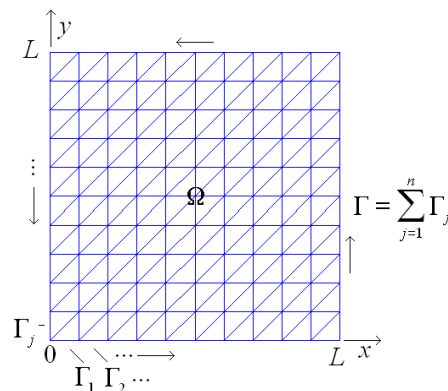


Figura 53 – Ilustração do modelo geométrico e discretização do contorno e domínio.

O intuito dessa análise foi verificar o desempenho da formulação adotada a partir do MEC em relação ao resultado analítico, que segundo CARRER *et al.* (2011) é dado pela equação (129):

$$u(x, y, t) = \bar{u} - \frac{16\bar{u}}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha \pi^2}{L^2}(m^2+n^2)t}}{m n} \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{L}\right) \quad (129)$$

para m e n ímpares.

Os resultados obtidos para α igual a 0,05 mm²/s, 0,5 mm²/s e 1,0 mm²/s, respectivamente, são apresentadas a seguir.

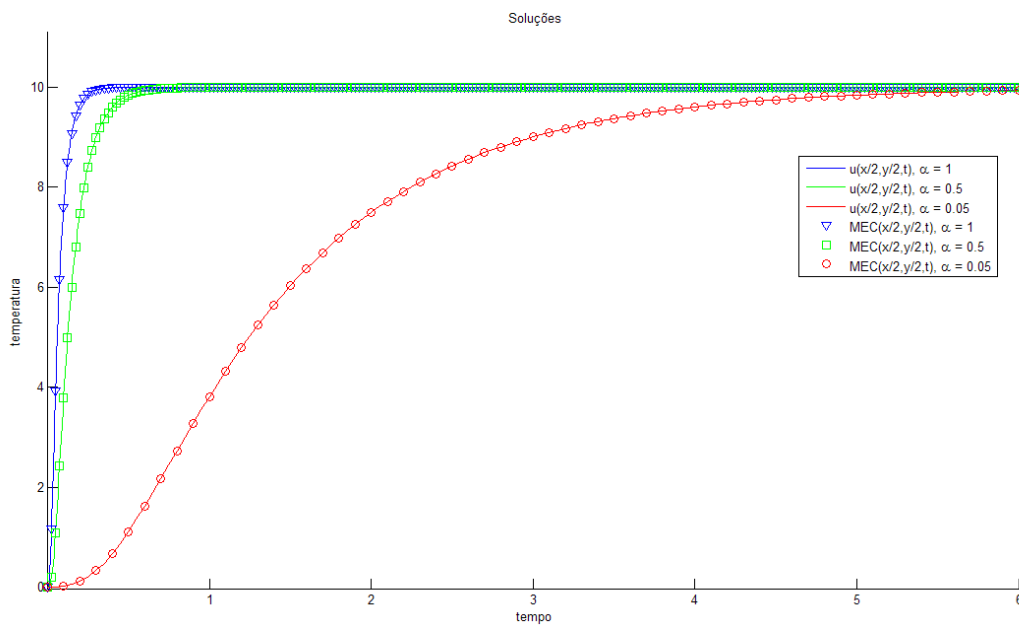


Figura 54 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa quadrada.

Para as simulações realizadas, obteve-se R^2 igual a 0,9994, 0,9992 e 0,9991, para os casos em que α teve como valor 0,05 mm²/s, 0,5 mm²/s e 1,0 mm²/s, respectivamente, indicando grande correlação entre as variáveis.

Na Figura 55 é ilustrado o processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em instantes de tempo específicos para o caso em que a difusividade térmica (α) é igual a 1,0 mm²/s.

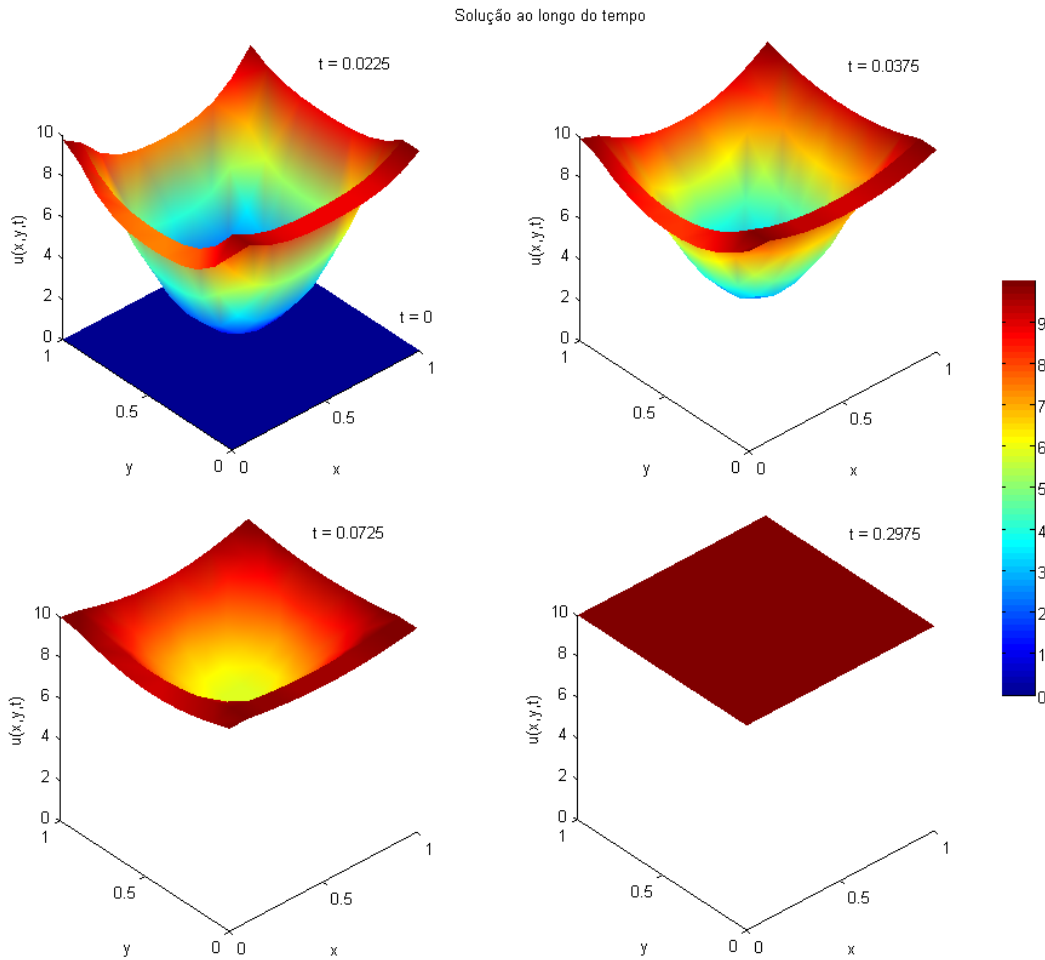


Figura 55 – Solução no domínio para diferentes tempos e $\alpha = 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

A partir da Figura 55 é possível verificar a gradual elevação da temperatura do domínio, sendo a maior taxa de elevação observada na região mais próxima do contorno. Resultados similares foram verificados para os casos em $\alpha = 0,05 \text{ mm}^2/\text{s}$ e $\alpha = 0,5 \text{ mm}^2/\text{s}$.