

LAURO LUIZ SAMOJEDEN

**AS EQUAÇÕES DE BURNETT SEGUNDO A TEORIA
CINÉTICA RELATIVÍSTICA E A PROPAGAÇÃO
DAS ONDAS SONORAS**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Paraná
como parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

CURITIBA
2000

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Doutorado do estudante Lauro Luiz Samojeden, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Tese de Doutorado cujo título é “AS EQUAÇÕES DE BRUNETT SEGUNDO A TEORIA CINÉTICA RELATIVÍSTICA E A PROPAGAÇÃO DAS ONDAS SONORAS”.

Curitiba, 31 de agosto de 2000


Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(Orientador Presidente)
(Dpto. Física/UFPR)


Prof. FERNANDO PABLO DEVECCHI
(Dpto. Física UFPR)


Prof. LUIZ FERNANDO ZIEBELL
(Inst. Física UFRGS)


Prof. WAGNER FIGUEIREDO
(Inst. Física UFSC)


Prof. IBERE LUIZ CALDAS
(Inst. Física USP)

*Para meu pai (in memoriam)
e à minha querida mãe.*

*Para minha querida esposa
Yonara e minha filha Larissa
Natasha.*

“Digo: o real não está na saída nem na chegada: ele se dispõe para a gente é no meio da travessia.”

Guimarães Rosa

Agradecimentos

Ao longo da realização desta tese recebi o apoio de várias pessoas; em especial, agradeço:

ao professor Gilberto Medeiros Kremer pela orientação prestativa;

à professora Suzana Reinecke (in memoriam) pela inestimável colaboração ;

aos colegas do grupo de Termodinâmica Fenomenológica e Estatística: Alcione Silva Fernandes, Cláudio Henrique Lepiensi, Félix Sharipov, Giselle Munhoz Alves, Liliana Madalena Gramani Cumin, Mauro Gomes Rodbard e Wilson Marques Junior;

aos demais colegas do departamento, que de certa forma me auxiliaram e me incentivaram;

à coordenação da Pós-Graduação em Física, representada pelo Prof. Ricardo Luiz Viana;

aos meus alunos.

Resumo

Ao longo deste trabalho tivemos três objetivos:

- (i) primeiramente determinamos as equações de Burnett em segunda ordem para um gás único relativístico com base na teoria cinética e no método dos momentos de Grad. Fizemos uma análise detalhada para todos os coeficientes da pressão dinâmica, fluxo de calor e do deviante do tensor pressão, expandindo estes coeficientes para os casos de temperaturas altas e baixas respectivamente. A seguir verificamos que os resultados obtidos para todos os coeficientes, no limite não-relativístico, concordam com os resultados obtidos por Wang Chang e Uhlenbeck;
- (ii) em seguida determinamos novamente as equações de Burnett relativísticas empregando agora o modelo cinético de Anderson e Witting e comparamos os resultados obtidos para os coeficientes de transporte com o método dos momentos de Grad. O modelo cinético de Anderson e Witting é uma boa aproximação para os resultados encontrados pelo método de Grad no caso ultra-relativístico;
- (iii) e finalmente, como uma aplicação dos resultados encontrados, fizemos uma análise para a propagação de ondas sonoras para os casos de cinco campos e quatorze campos. A seguir fizemos uma análise gráfica para a velocidade de fase e para a absorção das ondas sonoras analisando os limites não-relativístico e ultra-relativístico.

Abstract

In the course of this work we have three objectives:

(i) firstly we obtained the relativistic second order Burnett equations for a single-component gas on the basis of kinetic theory and Grad's moment method. We did a detailed analysis of the coefficients of dynamic pressure, heat flux and pressure deviator, making their expansions for the non-relativistic and ultra-relativistic cases. Then we verified that our results agree with Wang Chang and Uhlenbeck's results, on the non-relativistic limit;

(ii) next, we obtained the relativistic second order Burnett equations for a single-component gas on the basis of the kinetic model of Anderson and Witting and we compared the transport coefficients with results obtained by the Grad's moment method. The kinetic model of Anderson and Witting is a good approximation for the Grad's moment method in the ultra-relativistic limit.

(iii) finally, as an application of our results, we analysed the propagation of sound in the case of five and fourteen fields. Plots of the phase velocity and absorption of sound are given together with their non-relativistic and ultra-relativistic limits.

Conteúdo

| | |
|---|-----------|
| Agradecimentos | i |
| Resumo | ii |
| Abstract | iii |
| Lista de Figuras | viii |
| Introdução | 1 |
| 1 Conceitos Fundamentais da Teoria Cinética Relativística | 4 |
| 1.1 Introdução | 4 |
| 1.2 Dinâmica de uma Colisão Binária | 4 |
| 1.3 A Equação de Boltzmann Relativística | 7 |
| 1.4 A Descrição Macroscópica | 13 |
| 1.5 A Função de Distribuição de Maxwell-Jüttner e as Equações Constitutivas em Equilíbrio | 19 |
| 2 As Equações de Burnett Relativísticas | 22 |
| 2.1 Introdução | 22 |
| 2.2 A Função de Distribuição de Grad | 22 |
| 2.3 Cálculo do Terceiro Momento $T^{\mu\nu\sigma}$ | 26 |
| 2.4 Cálculo do Termo de Produção $P^{\mu\nu}$ | 26 |
| 2.5 Primeira Iteração Maxwelliana | 28 |
| 2.6 Segunda Iteração Maxwelliana | 32 |
| 2.7 Coeficientes de Burnett | 35 |
| 2.8 As Equações de Burnett Não-Relativísticas | 47 |
| 2.9 Conclusão | 52 |
| 3 Modelo Cinético de Anderson e Witting | 54 |
| 3.1 Introdução | 54 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2 | Decomposição de Landau e Lifshitz | 55 |
| 3.3 | A Função de Distribuição de Grad e a Expressão para o Terceiro Mo- mento na Decomposição de Landau e Lifshitz | 59 |
| 3.4 | As Equações de Burnett Relativísticas no Modelo Cinético de Ander- son e Witting | 61 |
| 3.5 | Comparando os Coeficientes de Transporte | 72 |
| 3.6 | Conclusão | 89 |
| 4 | Propagação de Ondas Sonoras | 91 |
| 4.1 | Introdução | 91 |
| 4.2 | Ondas Harmônicas Planas - Cinco Campos | 93 |
| 4.3 | Ondas Harmônicas Planas - Quatorze Campos | 104 |
| 4.4 | Conclusão | 110 |
| 5 | Considerações Finais | 113 |
| A | Deduções Relativas ao Capítulo 1 | 116 |
| A.1 | Expressão para a Velocidade Relativa v_{rel} | 116 |
| A.2 | A Taxa de Variação Temporal $\Delta N/\Delta t$ | 117 |
| A.3 | A Equação de Transporte | 118 |
| A.4 | Determinação das Constantes a e b_μ | 119 |
| A.5 | Determinação do Parâmetro ζ | 122 |
| B | A Função Modificada de Bessel | 124 |
| C | Deduções Relativas ao Capítulo 2 | 126 |
| C.1 | Os Multiplicadores de Lagrange | 126 |
| C.2 | Expressão para $\partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma}$ | 128 |
| C.3 | Resolução das Integrais $I^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ | 129 |
| C.4 | As Derivadas Materiais Convectivas e Gradientes para $\varpi^{(1)}$, $q^{\tau(1)}$ e $p^{<\mu\nu>(1)}$ | 141 |
| C.5 | Coeficientes B_n | 148 |
| C.6 | Coeficientes P_n | 149 |
| C.7 | Coeficientes C_n | 151 |
| C.8 | Determinação das Equações de Burnett para o Caso Não-Relativístico | 151 |
| D | Deduções Relativas ao Capítulo 3 | 156 |
| D.1 | Relações para T_L , p_L e ϖ_L e I^τ | 156 |
| D.2 | A Velocidade Adiabática do Som | 158 |

| | | |
|-----|--|------------|
| D.3 | Expressão para $\partial_\mu T^{\mu\nu\sigma}$ | 159 |
| E | Deduções Relativas ao Capítulo 4 | 160 |
| E.1 | Sistemas de Equações para Cinco Campos | 160 |
| E.2 | O Sistema de Equações para Quatorze Campos | 167 |
| | Bibliografia | 170 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Elemento de volume descrito por um feixe de partículas. | 6 |
| 3.1 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_1 | 73 |
| 3.2 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_2 | 74 |
| 3.3 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_3 | 74 |
| 3.4 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_4 | 75 |
| 3.5 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_5 | 75 |
| 3.6 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_6 | 76 |
| 3.7 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_7 | 76 |
| 3.8 | Gráfico comparativo para o coeficiente η_8 | 77 |
| 3.9 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_1 | 78 |
| 3.10 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_2 | 78 |
| 3.11 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_3 | 79 |
| 3.12 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_4 | 79 |
| 3.13 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_5 | 80 |
| 3.14 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_6 | 80 |
| 3.15 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_7 | 81 |
| 3.16 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ_8 | 81 |
| 3.17 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_1 | 82 |
| 3.18 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_2 | 82 |
| 3.19 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_3 | 83 |
| 3.20 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_4 | 83 |
| 3.21 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_5 | 84 |
| 3.22 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_6 | 84 |
| 3.23 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_7 | 85 |
| 3.24 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_8 | 85 |
| 3.25 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ_9 | 86 |
| 3.26 | Gráfico comparativo para o coeficiente η | 87 |
| 3.27 | Gráfico comparativo para o coeficiente λ | 88 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.28 | Gráfico comparativo para o coeficiente μ | 88 |
| 4.1 | Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para o caso não-relativístico - solução de menor atenuação. | 97 |
| 4.2 | Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para o caso ultra-relativístico - solução de menor atenuação. | 98 |
| 4.3 | Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para alguns valores do parâmetro ζ - caso não-relativístico. | 99 |
| 4.4 | Gráfico da velocidade de fase e atenuação para alguns valores do parâmetro ζ - caso ultra-relativístico. | 100 |
| 4.5 | Gráfico da velocidade de fase e atenuação para a solução de menor atenuação - caso não-relativístico | 103 |
| 4.6 | Gráfico da velocidade de fase e atenuação para a solução de menor atenuação - caso ultra-relativístico. | 104 |
| 4.7 | Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para a solução 1 - caso clássico . . | 108 |
| 4.8 | Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para a solução 1 - caso ultra- relativístico. | 110 |

Introdução

A teoria cinética dos gases deve a sua origem aos trabalhos pioneiros de Daniel Bernoulli, Clausius, Maxwell e Boltzmann, e hoje é conhecida como a teoria cinética clássica. Com o estabelecimento da teoria da relatividade de Einstein (1905), um passo seguinte foi, portanto, construir uma versão relativística para a teoria cinética. Assim, por volta de 1911, Jüttner determinou uma expressão relativística para a função de distribuição em equilíbrio [1]. Esse mesmo autor, no ano de 1928, também determinou a forma relativística da função de distribuição em equilíbrio válida para sistemas de bosons e fermions [2]. A formulação da equação de Boltzmann, sem considerar o termo de colisão, apareceu em um trabalho publicado no ano de 1940 por Lichnerowicz e Marrot [3]. Mas uma generalização relativística da equação de Boltzmann completa, isto é, inserindo o efeito das colisões, somente se concretizaria no ano de 1946 pelo próprio Marrot [5]. Em 1961, Tauber e Weinberg [6] estabeleceram uma teoria cinética coerente, baseada na equação de Boltzmann, onde eles discutem entre outras coisas, o teorema H e o equilíbrio térmico em um campo gravitacional. Portanto, já era possível aplicar a equação de Boltzmann a problemas fora do equilíbrio, como na teoria dos plasmas, na astrofísica e na cosmologia; em particular podemos citar as contribuições de Weinberg [7].

Para resolver a equação de Boltzmann relativística fora do equilíbrio, foram desenvolvidos métodos de aproximação, assim como foi feito para o caso não-relativístico. E o método empregado por nós, ao longo desta tese, é a versão relativística do método dos momentos de Grad, desenvolvida por Israel [8], Kelly [9] e Chernikov [10] que, apesar de ser um método exaustivo, fornece-nos resultados concretos para os coeficientes de transporte.

Portanto, iniciamos o nosso trabalho, expondo, no capítulo 1, os conceitos fundamentais da teoria cinética relativística, que nos fornecem a base para o desenvolvimento de nosso trabalho. Para a elaboração deste primeiro capítulo, utilizamos, como referências básicas, os trabalhos de de Groot, van Leeuwen e van Weert [11], Stewart [12] e Kremer [13], onde fazemos, inicialmente, uma análise da dinâmica de uma colisão binária a qual nos proporcionará obter os elementos necessários para a dedução da equação de Boltzmann. A seguir, determinamos a equação de transporte e introduzimos a quadrivelocidade. Concluimos este primeiro capítulo com a obtenção da função de distribuição de Maxwell-Jüttner.

No segundo capítulo, deduzimos a função de distribuição fora do equilíbrio ou função de Grad. Obtemos, a seguir, as expressões para o terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$ e para o termo de produção $P^{\mu\nu}$. Utilizamos, em seguida, uma variação do método da iteração maxwelliana [15], cuja primeira iteração nos fornece as equações de Navier-Stokes e Fourier e a segunda

as equações de Burnett relativísticas. A partir destas equações procedemos a uma análise detalhada de todos os coeficientes, fazendo as expansões para o caso de temperaturas baixas (caso não-relativístico) e para o caso de temperaturas mais elevadas (caso ultra-relativístico).

Para resolvermos as integrais, necessárias para a obtenção de todos os coeficientes que possuem contribuições devido ao termo de colisão da equação de Boltzmann, devemos conhecer a seção de choque σ , a qual é uma função da velocidade relativa e do ângulo de espalhamento. Essa seção de choque foi escolhida de modo a ser independente da energia e do ângulo de espalhamento. Evidências experimentais mostram que as seções de choque para o espalhamento de hádrons pesados são mais ou menos constantes para a escala de energia que são de interesse na teoria cinética relativística. Por exemplo, a seção de choque total para o espalhamento entre núcleon-núcleon é aproximadamente constante quando se consideram energias da ordem de 2 GeV. E esta é uma energia típica da era hadrônica, isto é, o intervalo de tempo que durou até uns $10^{-4}s$ após o Big-Bang, quando o universo era dominado pela matéria contendo muitos hádrons em equilíbrio com o campo de radiação. A temperatura típica dessa fase era da ordem de $10^{12}K$. Desta forma, utilizaremos em nossos cálculos σ como uma constante. Observa-se ainda que, em uma teoria não relativística, uma seção de choque constante está associada ao modelo de esfera rígida. Por essa razão, o modelo relativístico que empregamos neste trabalho é algumas vezes referido como o modelo de esfera rígida.

Finalmente, para concluir o capítulo 2, mostramos que o limite não-relativístico das equações de Burnett relativísticas encontradas por nós para a pressão dinâmica, o fluxo de calor e o deviante do tensor pressão, correspondem perfeitamente às expressões dadas por Wang Chang e Uhlenbeck [22].

No capítulo 3, novamente, determinamos as equações de Burnett para um gás relativístico, empregando, agora, o modelo cinético devido a Anderson e Witting [24], pois esse modelo simplifica significativamente o termo de colisão da equação de Boltzmann. Esse modelo também é conhecido por modelo de tempo de relaxação, que é uma variação para o caso relativístico do modelo BGK (Bhatnagar, Gross e Krook) [25], desenvolvido por Marle em 1965 [27]. A seguir, comparamos os resultados obtidos para os coeficientes de transporte obtidos através desse modelo aos resultados encontrados no capítulo 2, onde foi empregado o método de Grad. Verificamos, assim, que os resultados encontrados por esse modelo são boas aproximações dos mesmos resultados encontrados por nós, para o caso ultra-relativístico, utilizando o método de Grad.

No quarto e último capítulo, fazemos uma análise da propagação das ondas sonoras empregando cinco campos (densidade do número de partículas, temperatura e quadrivelocidade) e quatorze campos (densidade do número de partículas, temperatura, quadrivelocidade, pressão dinâmica, fluxo de calor e deviante do tensor pressão). Para o caso de cinco campos uti-

lizamos, inicialmente, as equações de Navier-Stokes e Fourier e a seguir as equações de Burnett linearizadas. Verificamos que as soluções encontradas diferem ligeiramente uma da outra, isto é, as equações de Burnett correspondem a uma pequena correção dos resultados encontrados quando empregamos as equações de Navier-Stokes e Fourier. Analisamos, em particular, os limites não-relativístico e ultra-relativístico para a velocidade de fase e para a absorção destas ondas. Para o caso de quatorze campos, verificamos que os limites não-relativístico e ultra-relativístico concordam perfeitamente com os resultados encontrados por Boillat [37] e por Seccia e Strumia [38], que foram obtidos através das teorias fenomenológicas.

Para concluir essa introdução, vamos enumerar os objetivos principais que nortearão este nosso trabalho:

- Determinar as equações de Burnett relativísticas segundo a teoria cinética e utilizando o método de Grad;
- Determinar as expressões algébricas para todos os coeficientes de transporte presentes nas equações de Burnett relativísticas;
- Encontrar as expressões algébricas para os limites não-relativístico e ultra-relativístico de todos os coeficientes encontrados;
- Mostrar que as equações de Burnett relativísticas, no limite não-relativístico, recaem nas equações de Burnett, assim como dadas por Wang Chang e Uhlenbeck;
- Determinar as equações de Burnett relativísticas segundo o modelo de Anderson e Witting;
- Encontrar as expressões algébricas para todos os coeficientes presentes nas equações de Burnett relativísticas segundo o modelo de Anderson e Witting;
- Comparar, numericamente, os coeficientes de transporte encontrados através da resolução da equação de Boltzmann exata e aqueles obtidos através do modelo de Anderson e Witting;
- Estudar a propagação de ondas sonoras empregando cinco campos, inicialmente utilizando as equações de Navier-Stokes e Fourier e depois as equações de Burnett linearizadas determinando os limites não-relativístico e ultra-relativístico para essas soluções ;
- Estudar a propagação de ondas sonoras empregando quatorze campos e analisar os limites não-relativístico e ultra-relativístico para esse caso.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais da Teoria Cinética Relativística

1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma exposição resumida dos conceitos fundamentais da teoria cinética de gases relativísticos. Para desenvolvê-lo, baseamo-nos nas referências [11] e [13].

Iniciamos com uma análise da dinâmica de uma colisão binária a qual nos fornecerá os elementos necessários para a obtenção da equação de Boltzmann relativística. Após obtermos essa equação, analisamos o caso de gases relativísticos na ausência de forças externas e determinamos a equação de transporte. A seguir, fazemos uma descrição macroscópica do gás através dos momentos da função de distribuição e introduzimos uma quadrivelocidade hidrodinâmica e um projetor, assim como algumas de suas propriedades. Este projetor nos proporcionará decompor o quadrifluxo de partículas e o tensor energia momento, que definem os campos: densidade do número de partículas, deviante do tensor pressão, pressão hidrostática, pressão dinâmica, fluxo de calor e energia interna por partícula. Obtemos, desta forma, a equação de balanço da densidade do número de partículas, da energia e do momento linear. E para finalizar este capítulo, que aborda os conceitos fundamentais da teoria cinética necessária para o desenvolvimento desta tese, determinamos a expressão para a função de distribuição no equilíbrio, conhecida na literatura como a função de Maxwell-Jüttner [1].

1.2 Dinâmica de uma Colisão Binária

Vamos fazer, nesta primeira seção, a análise do problema da colisão entre dois feixes de partículas de um gás relativístico, que nos permitirá, a seguir, obter a equação de Boltzmann relativística. A forma desta equação está baseada em quatro hipóteses. A primeira delas estabelece que somente colisões binárias devem ser levadas em conta. A outra nos diz que a

função de distribuição pode ser considerada invariável ao longo de distâncias comparáveis ao tamanho das partículas, porém não ao longo de distâncias comparáveis ao livre caminho médio. Uma terceira estabelece que as forças externas sobre as partículas ao longo de uma colisão são muito pequenas em comparação com as forças de interação entre estas partículas, enquanto a última diz que os momentos de duas partículas não estão correlacionados para qualquer posição e instante. Esta última hipótese é conhecida como a hipótese do caos molecular, ou seja, é uma suposição estatística a respeito do número de colisões binárias.

Na teoria cinética as quantidades macroscópicas são todas definidas com a ajuda de uma função de distribuição escalar, que depende das coordenadas espaço-temporais $x^\mu = (ct, \vec{x})$ e do quadrivetor energia-momento $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, onde a parte temporal está relacionada com a energia de uma partícula, isto é, $cp^0 = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}$, sendo m a sua massa de repouso e c a velocidade da luz no vácuo. Se p^μ e p_1^μ são os quadrivetores energia-momento para duas partículas que colidem, então, pela lei de conservação da energia-momento linear, temos:

$$p^\mu + p_1^\mu = p'^\mu + p_1'^\mu, \quad (1.1)$$

onde as quantidades com plicas denotam os valores do quadrivetor quantidade de movimento das respectivas partículas após a colisão.

Para duas partículas quaisquer que se movem com velocidades \vec{v} e \vec{v}_1 é conveniente utilizarmos a velocidade relativa entre elas. A dedução da relação entre estas velocidades encontra-se na seção (A.1) do apêndice A e o resultado encontrado é:

$$v_{rel} = \frac{1}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{c^2})} \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{v}_1)^2}. \quad (1.2)$$

Uma análise mais acurada desta expressão nos mostra que, para valores das velocidades muito menores que a da luz, chega-se à definição clássica de velocidade relativa, isto é, que a velocidade relativa entre duas partículas quaisquer é dada pelo módulo da diferença entre elas, que é um resultado bem conhecido da mecânica clássica. Outro resultado que pode ser constatado dessa expressão é o fato dela ser simétrica em relação a \vec{v} e \vec{v}_1 . Assim, se tomarmos o seu módulo, podemos utilizar qualquer uma das partículas para defini-la.

Sabemos através da teoria cinética que todos os processos de colisão são caracterizados por suas seções de choque, as quais determinam o número de choques ou colisões que ocorrem entre partículas ou feixes de partículas. Consideremos, portanto, dois destes feixes e representemos por n' e n'_1 as densidades de partículas nestes feixes (isto é, o número de partículas na unidade de volume), e por \vec{v} e \vec{v}_1 as suas respectivas velocidades. Empregando a definição ordinária de seção transversal de choque, que representaremos por σ^* , podemos determinar o número de colisões que ocorrem no volume dV , no intervalo de tempo dt , no referencial em que as partículas n' estão em repouso. Este número é

$$dN = \sigma^* v_{rel} n' n'_1 dV dt, \quad (1.3)$$

onde v_{rel} é o módulo da velocidade relativa entre os dois feixes de partículas, dada pela equação (1.2). O resultado expresso por (1.3) tem a seguinte interpretação: σ^* é uma área perpendicular à direção do movimento das partículas de densidade n'_1 , as quais percorrem uma distância $dL = v_{rel} dt$, no intervalo de tempo dt , conforme mostra a figura (1.1).

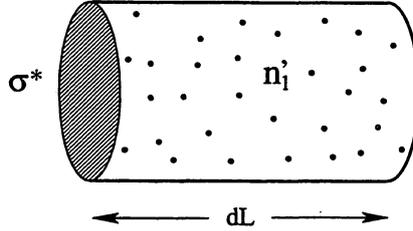


Figura 1.1: Elemento de volume descrito por um feixe de partículas.

Desta maneira, as n'_1 partículas por unidade de volume descrevem um cilindro de volume $dV = \sigma^* v_{rel} dt$. Conseqüentemente, o número de colisões dN , entre esse feixe e outro, cuja densidade por unidade de volume é n' , será $n' dV$.

O número de colisões por unidade de volume e de tempo dN é, por essência, uma grandeza invariante de Lorentz. Nosso objetivo é expressá-la em forma adequada, de modo a torná-la válida para qualquer referencial, para tanto escrevemos:

$$dN = \Sigma^* n' n'_1 dV dt, \quad (1.4)$$

onde Σ^* é uma grandeza a ser determinada. No sistema de repouso de um dos feixes de partículas Σ^* é igual a $\sigma^* v_{rel}$. Desta maneira, vamos sempre considerar σ^* como uma seção de choque relativa ao sistema de repouso de um dos feixes de partículas, isto é, por definição, como uma grandeza invariante.

Na expressão (1.4) o produto $dV dt$ é uma grandeza invariante [13]. Desta forma, o produto $\Sigma^* n' n'_1$ deve ser também um invariante.

A lei de transformação da densidade do número de partículas n' pode ser encontrada observando-se que o número de partículas num elemento de volume dV' , isto é $n' dV'$, é um invariante escalar, logo $n' dV' = n dV$, onde n é a densidade do número de partículas num referencial em repouso e dV é o elemento de volume próprio. A relação entre os dois volumes é dada por:

$$dV' = dV \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.5)$$

Desta forma, encontramos para a lei de transformação para as densidades do número de partículas a seguinte expressão:

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p^0}{mc} n, \quad (1.6)$$

onde utilizamos a definição para p^0 dada por (A.2) do apêndice A.

Portanto, a afirmação acerca da invariância de $\Sigma^* n' n'_1$ é equivalente à invariância da expressão $\Sigma^* p^0 p_1^0$. É mais conveniente representar esta condição na forma:

$$\Sigma^* \frac{p^0 p_1^0}{p_1^\mu p_\mu} = \Sigma^* \frac{p^0 p_1^0}{p^0 p_1^0 - \vec{p} \cdot \vec{p}_1} = \text{invariante}, \quad (1.7)$$

onde no denominador aparece uma grandeza também invariante - o produto dos quadrimomentos de ambas as partículas.

Deste modo, em qualquer referencial temos:

$$\Sigma^* = \sigma^* v_{rel} \frac{p_1^\mu p_\mu}{p_1^0 p^0}. \quad (1.8)$$

Substituindo-se este resultado na equação (1.4), obtemos

$$dN = \sigma^* v_{rel} \frac{p_1^\mu p_\mu}{p_1^0 p^0} dV dt, \quad (1.9)$$

que nesta forma não perde o caráter de invariante escalar.

Considerando-se a equação (A.5) do apêndice A, isto é,

$$\frac{p_1^\mu p_\mu}{p_1^0 p^0} = \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{c^2} \right) \quad (1.10)$$

e utilizando-se o resultado (1.2) para a velocidade relativa, obtemos finalmente a expressão para o número de colisões para os dois feixes de partículas

$$dN = \sigma^* \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{v}_1)^2} n' n'_1 dV dt = \sigma^* g n' n'_1 dV dt, \quad (1.11)$$

onde g é conhecido na literatura como o módulo da velocidade relativa de Møller [17].

1.3 A Equação de Boltzmann Relativística

Consideremos agora um espaço hexa-dimensional μ , caracterizado por três coordenadas de posição \vec{x} e três coordenadas de quantidade de movimento \vec{p} , chamado de espaço de fase. O estado do gás neste espaço é caracterizado pela função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, tal que:

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3x d^3p = f(\vec{x}, \vec{p}, t) dx^1 dx^2 dx^3 dp^1 dp^2 dp^3, \quad (1.12)$$

fornece-nos o número de partículas no elemento de volume d^3x em torno do ponto \vec{x} e com quantidade de movimento no intervalo entre p^i e $p^i + dp^i$ ($i = 1, 2, 3$). O número de partículas no elemento de volume $d^3x d^3p$ é um invariante escalar.

Denotando o elemento de volume no espaço de fase no instante de tempo t , através de $d\mu(t) = d^3x d^3p$, então o número de partículas que está neste elemento de volume no instante de tempo t será dado por:

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\mu(t). \quad (1.13)$$

Para um instante de tempo posterior $t + \Delta t$ teremos:

$$N(t + \Delta t) = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t). \quad (1.14)$$

Assim, as colisões entre as partículas fornecem uma mudança no número de partículas dada por:

$$\Delta N = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t) - f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\mu(t), \quad (1.15)$$

onde $\Delta\vec{x} = \vec{v}\Delta t$ é a mudança na posição, sendo $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$ a velocidade de uma partícula relativística com quantidade de movimento \vec{p} e $\Delta\vec{p} = \vec{\mathcal{F}}\Delta t$ corresponde à mudança na quantidade de movimento, sendo $\vec{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ a força externa exercida sobre as partículas. A relação entre $d\mu(t + \Delta t)$ e $d\mu(t)$ é dada por intermédio de

$$d\mu(t + \Delta t) = |J| d\mu(t), \quad (1.16)$$

onde J é o Jacobiano da transformação e que é dado por:

$$J = \frac{\partial[x^1(t + \Delta t), x^2(t + \Delta t), \dots, p^3(t + \Delta t)]}{\partial[x^1(t), x^2(t), \dots, p^3(t)]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1(t + \Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial x^1(t + \Delta t)}{\partial x^2(t)} & \dots & \frac{\partial x^1(t + \Delta t)}{\partial p^3(t)} \\ \frac{\partial x^2(t + \Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial x^2(t + \Delta t)}{\partial x^2(t)} & \dots & \frac{\partial x^2(t + \Delta t)}{\partial p^3(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p^3(t + \Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial p^3(t + \Delta t)}{\partial x^2(t)} & \dots & \frac{\partial p^3(t + \Delta t)}{\partial p^3(t)} \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Considerando somente termos lineares em Δt , segue da (1.17) que

$$J = 1 + \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]. \quad (1.18)$$

A seguir fazemos a expansão em séries de Taylor da função $f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t)$ em torno do ponto (\vec{x}, \vec{p}, t) a qual resulta em

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) \approx f(\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Delta p^i + \mathcal{O}[(\Delta t)^2], \quad (1.19)$$

onde foram novamente considerados somente termos lineares em Δt . Assim, com a ajuda dos resultados acima, podemos obter a taxa de variação temporal do número de partículas, a saber:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right] d\mu(t). \quad (1.20)$$

Vale ressaltar que ΔN é um invariante escalar, o que não ocorre com o intervalo de tempo Δt . Assim devemos considerar o intervalo de tempo próprio $\Delta\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t = \Delta t/\gamma$, pois ele é o mesmo para todos os observadores que estão em sistemas inerciais. Portanto, para que a expressão (1.20) seja um invariante escalar ela deve ser escrita da seguinte forma:

$$\gamma \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (f \mathcal{F}^i)}{\partial p^i} \right] d\mu(t). \quad (1.21)$$

Este resultado pode ser ainda expresso da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c}{p^0} \left[p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\mu}{\partial p^\mu} \right] d^3x d^3p. \quad (1.22)$$

onde \mathcal{K}^μ é a força de Minkowski. Na seção (A.2) do apêndice A, fazemos a dedução completa desta equação e ainda provamos que o lado direito da (1.21) é um invariante escalar.

A taxa de variação temporal do número de partículas apresenta duas contribuições, ou seja,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^+ - \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^-, \quad (1.23)$$

onde $(\Delta N/\Delta t)^+$ está relacionado ao número de partículas espalhadas que entram no elemento de volume $d^3x d^3p$ e $(\Delta N/\Delta t)^-$ ao número de partículas que deixam este mesmo volume.

Para a determinação da taxa de variação temporal do número de partículas, devemos considerar as seguintes hipóteses:

- para um gás relativístico rarefeito somente as interações entre os pares de partículas são levadas em conta;
- o efeito das forças externas pode ser desprezado durante a colisão;
- as velocidades de duas partículas, em qualquer posição e tempo, não estão correlacionadas (hipótese do caos molecular);
- a função de distribuição pode ser considerada constante ao longo de distâncias comparáveis ao tamanho das partículas, porém não ao longo de distâncias comparáveis ao livre caminho médio.

Vamos, inicialmente, proceder ao cálculo de $(\Delta N/\Delta t)^-$. Para tanto, consideremos o processo de colisão entre um feixe de partículas com velocidade $\vec{v}_1 = c\vec{p}_1/p_1^0$ com outro feixe de partículas com velocidade $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$. O número de partículas espalhadas que deixam o elemento de volume $d^3x d^3p$, do espaço de fase μ , através de um elemento de ângulo sólido $d\Omega$, pode ser obtido através da equação (1.11):

$$\Delta N = \sigma^* g n' n'_1 dV \Delta t \quad (1.24)$$

ao identificarmos $dV \equiv d^3x$, $\sigma^* = \sigma d\Omega$ (onde σ é a seção transversal diferencial de choque), $dn' \equiv f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p$ e $dn'_1 \equiv f(\vec{x}, \vec{p}_1, t) d^3p_1$. O número total de partículas espalhadas é obtido através da integração sobre todos os momentos d^3p_1 e sobre todo ângulo sólido $d\Omega$:

$$(\Delta N)^- = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\vec{p}_1} f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_1, t) g \sigma d\Omega d^3p_1 d^3x d^3p \Delta t. \quad (1.25)$$

Portanto, temos que a taxa de variação temporal do número de partículas que deixam o volume $d^3x d^3p$ é dada por:

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\vec{p}_1} f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_1, t) g \sigma d\Omega d^3p_1 d^3x d^3p. \quad (1.26)$$

Nas expressões acima inserimos o fator 1/2 e podemos justificar tal procedimento da seguinte maneira: desde o início estamos considerando as partículas como sendo idênticas e para que não contemos duas vezes uma mesma partícula, deve ser necessária a introdução deste fator numérico.

Consideremos agora o cálculo de $(\Delta N/\Delta t)^+$. Neste caso devemos repetir o raciocínio acima, porém agora consideraremos uma colisão de restituição, onde um feixe de partículas com velocidade $\vec{v}'_1 = c\vec{p}'_1/p_1^0$ colide com outro feixe de partículas com velocidade $\vec{v}' = c\vec{p}'/p'^0$. Assim o número de partículas espalhadas, que deixam o elemento de volume $d^3x' d^3p'$ e entram no elemento de volume $d^3x d^3p$ do espaço de fase μ , é dado por:

$$(\Delta N)^+ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\vec{p}'_1} f(\vec{x}, \vec{p}', t) f(\vec{x}, \vec{p}'_1, t) g' \sigma' d\Omega' d^3p'_1 d^3x' d^3p' \Delta t'. \quad (1.27)$$

Para o caso de partículas relativísticas g não é um invariante de Lorentz, logo, vai depender do referencial. Assim, $g \neq g'$, resultado este que difere do caso não-relativístico, onde os módulos das velocidades relativas assintóticas pré e pós-colisionais são iguais. Para obtermos uma relação entre os volumes pré e pós-colisionais, vamos utilizar o teorema de Liouville, o qual nos assegura que, se seguirmos o movimento de um volume ocupado por um conjunto de pontos, este volume permanece inalterado com o passar do tempo, embora mude continuamente de forma. No caso em estudo escrevemos:

$$g \Delta t \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 x d^3 p = g' \Delta t' \sigma' d\Omega' d^3 p'_1 d^3 x' d^3 p', \quad (1.28)$$

onde $(g \Delta t \sigma d\Omega d^3 p_1)$ representa o volume ocupado no espaço de fase μ pelas partículas com velocidade $\vec{v}_1 = c\vec{p}_1/p^0$ e $d^3 x d^3 p$ o volume ocupado pelas partículas com velocidade $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$. E, além disso, $g \Delta t$ é a altura e $\sigma d\Omega$ a área da base do cilindro de colisão. Como $d^3 x \Delta t = d^3 x' \Delta t'$, obtemos de (1.28):

$$\int_{\Omega} g \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 p = \int_{\Omega'} g' \sigma' d\Omega' d^3 p'_1 d^3 p'. \quad (1.29)$$

Substituindo este resultado na expressão para $(\Delta N)^+$ (1.27) e dividindo o resultado por Δt , obtemos a seguinte expressão :

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\vec{p}_1} f(\vec{x}, \vec{p}', t) f(\vec{x}, \vec{p}'_1, t) g \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 x d^3 p, \quad (1.30)$$

que nos dá a taxa de variação temporal do número de partículas que entram no elemento de volume $d^3 x d^3 p$.

Substituindo as expressões obtidas para $(\Delta N/\Delta t)^-$ dada por (1.26) e $(\Delta N/\Delta t)^+$ dada por (1.30) na expressão (1.23) e ainda considerando a (1.22), obtemos, finalmente, para a taxa de variação temporal do número de partículas, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{c}{p^0} \left[p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial(fK^\mu)}{\partial p^\mu} \right] d^3 x d^3 p &= \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ - \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- \\ &= \left[\frac{1}{2} \int (f'_1 f' - f_1 f) g \sigma d\Omega d^3 p_1 \right] d^3 x d^3 p, \end{aligned} \quad (1.31)$$

nesse caso empregamos a seguinte notação $f'_1 \equiv f(\vec{x}, \vec{p}'_1, t)$, $f' \equiv f(\vec{x}, \vec{p}', t)$, $f_1 \equiv f(\vec{x}, \vec{p}_1, t)$ e $f \equiv f(\vec{x}, \vec{p}, t)$.

De acordo com a quarta hipótese, a qual estabelece que a função de distribuição pode ser considerada constante ao longo de distâncias comparáveis ao tamanho das partículas, mas não ao longo de distâncias comparáveis ao livre caminho médio, as funções de distribuição são calculadas no mesmo ponto x .

Se denotarmos por F o fluxo invariante

$$F = \frac{p^0 p_1^0}{c} g = \frac{p^0 p_1^0}{c} \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{v}_1)^2}, \quad (1.32)$$

podemos escrever a equação (1.31) da seguinte forma:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial(fK^\mu)}{\partial p^\mu} = \frac{1}{2} \int (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}. \quad (1.33)$$

Essa é a equação de Boltzmann completa na forma relativística, ou seja, é uma equação do tipo íntegro-diferencial, cuja forma foi originalmente proposta por Lichnerowicz e Marrot em 1940 [3]. Analogamente ao caso não-relativístico, em geral, referimo-nos ao primeiro membro dessa equação como o termo de corrente (*streaming term*), e ao lado direito como o termo de colisão (*collision term*).

Ao longo deste trabalho, analisaremos somente o caso de gases relativísticos na ausência da força externa \mathcal{K}^μ . Assim a equação de Boltzmann (1.33) sem este termo fica:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \int (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}. \quad (1.34)$$

A semelhança com a expressão clássica fica mais evidente quando a escrevemos na forma cartesiana:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \int (f'_1 f' - f_1 f) g \sigma d\Omega d^3 p_1, \quad (1.35)$$

onde utilizamos a definição (1.32) para o fluxo invariante F .

Multiplicando agora a equação (1.34) por uma função arbitrária $\psi(p^\nu)$, integrando em $d^3 p/p^0$, e utilizando as propriedades de simetria do termo de colisão, conforme pode ser conferido na seção (A.3) do apêndice A, chegamos à seguinte expressão:

$$\partial_\mu \int \psi p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{8} \int (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.36)$$

isto é, uma equação que surgiu da integração da equação de Boltzmann em relação aos momentos, cuja denominação é equação de transporte para a função ψ . Dependendo da escolha para a função ψ , podemos, a partir dela, obter as equações de balanço para as propriedades macroscópicas do gás. Observamos que o lado direito desta equação recebe a denominação de termo de produção. Este se anula para qualquer função de distribuição quando $\psi + \psi_1 = \psi' + \psi'_1$. Uma função que satisfaça essa expressão é denominada invariante de soma. Salientamos ainda que um invariante de soma $\psi(p^\mu)$ é uma combinação linear de uma constante e do quadrivetor energia-momento p^μ , a saber:

$$\psi = a^* + b_\mu p^\mu, \quad (1.37)$$

onde a^* é uma constante e b_μ é um quadrivetor constante. Em um trabalho recente, Cercignani e Kremer [4], apresentam duas provas de que (1.37) vale para o caso relativístico.

1.4 A Descrição Macroscópica

Nesta seção, apresentaremos a descrição macroscópica de um gás relativístico a partir dos conceitos microscópicos da teoria cinética. Do ponto de vista da termodinâmica, um fluido relativístico pode ser descrito através dos campos básicos, denominados de campos da termodinâmica, que são os momentos da função de distribuição. A obtenção destes campos é realizada através de equações de balanço, que iremos determinar a seguir.

O estado macroscópico de um gás relativístico pode ser caracterizado pelos campos n , N^μ , $T^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu\sigma}$, os quais são definidos em relação aos momentos da função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ como:

$$n = c \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) \frac{d^3p}{p^0}, \quad (1.38)$$

$$N^\mu = c \int p^\mu f(\vec{x}, \vec{p}, t) \frac{d^3p}{p^0}, \quad (1.39)$$

$$T^{\mu\nu} = c \int p^\mu p^\nu f(\vec{x}, \vec{p}, t) \frac{d^3p}{p^0}, \quad (1.40)$$

$$T^{\mu\nu\sigma} = c \int p^\mu p^\nu p^\sigma f(\vec{x}, \vec{p}, t) \frac{d^3p}{p^0}, \quad (1.41)$$

e são chamados, respectivamente, de momento de ordem zero, quadrifluxo de partículas, tensor energia momento e terceiro momento.

As equações de balanço para os campos N^μ , $T^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu\sigma}$ são determinadas com o auxílio da equação de transporte dada por (1.36), onde devemos fazer o seguinte procedimento: inicialmente igualamos a função escalar $\psi(p^\mu)$ à grandeza c , que é a velocidade da luz no vácuo, obtendo desta maneira a lei de conservação do quadrifluxo de partículas,

$$\partial_\mu N^\mu = 0. \quad (1.42)$$

A seguir, igualamos a função $\psi(p^\mu)$ às grandezas cp^μ e $cp^\mu p^\nu$, as quais nos fornecem, respectivamente, as leis de conservação para o tensor energia-momento linear e para o terceiro momento, a saber:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.43)$$

$$\partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} = P^{\mu\nu}, \quad (1.44)$$

onde $P^{\mu\nu}$ é uma produção definida como:

$$P^{\mu\nu} = \frac{c}{4} \int (p'^{\mu} p'^{\nu} + p_1^{\mu} p_1^{\nu} - p^{\mu} p^{\nu} - p_1^{\mu} p_1^{\nu}) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (1.45)$$

Em relação à equação (1.41), para o terceiro momento, podemos fazer o seguinte comentário: ao contrairmos essa expressão, obteremos como resultado o quadrifluxo de partículas, isto é,

$$g_{\nu\sigma} T^{\mu\nu\sigma} = T_{\nu}^{\mu\nu} = c \int (mc)^2 p^{\mu} f \frac{d^3 p}{p^0} = (mc)^2 N^{\mu}, \quad (1.46)$$

onde $g_{\nu\sigma}$ é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski e a convenção de sinais adotada é $(1, -1, -1, -1)$. Da mesma forma, ao contrairmos a equação (1.44), a saber,

$$g_{\mu\nu} \partial_{\sigma} T^{\mu\nu\sigma} = \partial_{\sigma} T_{\nu}^{\nu\sigma} = 0, \quad (1.47)$$

obtém-se a lei de conservação do quadrifluxo de partículas (1.42), pois $P_{\mu}^{\mu} = 0$, como podemos observar da definição do termo de produção (1.45).

Vamos escrever agora a equação de balanço para o quadrifluxo de entropia S^{μ} . Para tal objetivo, deveremos considerar $\psi = -k c \ln f$, onde k é a constante de Boltzmann e f , em particular, não depende do vetor posição \vec{x} . Analogamente à determinação das equações de balanço para o quadrifluxo de partículas, energia-momento e terceiro momento, temos que substituir essa escolha para ψ na equação de transporte (1.36). Desta forma encontramos:

$$\partial_{\mu} \left[-kc \int p^{\mu} f \ln f \frac{d^3 p}{p^0} \right] = -\frac{kc}{8} \int \ln \frac{f f_1}{f' f'_1} (f' f'_1 - f f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.48)$$

onde no segundo membro empregamos as propriedades de soma e subtração do logaritmo de uma função. Verificamos ainda que o produto envolvendo as funções de distribuição pode ser escrito como:

$$\ln \frac{f f_1}{f' f'_1} (f' f'_1 - f f_1) = f' f'_1 \left(1 - \frac{f f_1}{f' f'_1} \right) \ln \frac{f f_1}{f' f'_1}. \quad (1.49)$$

Como f , f_1 , f' e f'_1 são grandezas positivas, concluímos que

$$\left(1 - \frac{f f_1}{f' f'_1} \right) \ln \frac{f f_1}{f' f'_1} \leq 0, \quad (1.50)$$

sendo que teremos a igualdade se e somente se $\frac{f f_1}{f' f'_1} = 1$. Desta forma, chegamos à conclusão de que o lado direito da equação (1.48) é positivo semi-definido.

Com esta consideração, podemos escrever a equação (1.48) da seguinte maneira:

$$\partial_{\mu} S^{\mu} = \varsigma \geq 0, \quad (1.51)$$

onde fizemos a seguinte identificação:

$$S^\mu = -kc \int p^\mu f \ln f \frac{d^3p}{p^0} \quad (1.52)$$

que define o quadrifluxo de entropia, e

$$\varsigma = -\frac{kc}{8} \int \ln \frac{f f_1}{f' f'_1} (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3p_1}{p_1^0} \frac{d^3p}{p^0} \quad (1.53)$$

a produção da entropia. Portanto, a desigualdade (1.51) que relaciona essas duas grandezas termodinâmicas é a equação de balanço para o quadrifluxo de partículas e concorda com a segunda lei da termodinâmica, a qual estabelece que a produção da entropia é nula (sistema em equilíbrio) ou é positiva semi-definida (sistema fora do equilíbrio). Esse importante resultado é conhecido em teoria cinética como o teorema H de Boltzmann.

A fim de prosseguirmos na descrição macroscópica de fluidos relativísticos, vamos introduzir a quadrivelocidade hidrodinâmica $U^\mu(x^\nu)$. Para tanto, consideraremos a decomposição de Eckart [16]. Segundo essa decomposição, a velocidade hidrodinâmica U^μ está diretamente relacionada ao quadrifluxo de partículas N^μ , de acordo com a relação:

$$U^\mu = c \frac{N^\mu}{\sqrt{N^\nu N_\nu}}. \quad (1.54)$$

Essa velocidade é tal que o produto escalar dela por ela mesma é igual ao quadrado da velocidade da luz no vácuo, isto é, $U^\mu U_\mu = c^2$; assim, apesar de U^μ possuir quatro componentes, somente três deles são independentes. Com o auxílio dessa velocidade, podemos definir um tensor simétrico que tem a seguinte forma:

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu. \quad (1.55)$$

Se o tensor simétrico (1.55) for aplicado em um quadrivetor arbitrário, ele age como um projetor, visto que ele anula aquela parte do quadrivetor que é paralela à quadrivelocidade U^μ , isto é:

$$\Delta^{\mu\nu} U_\nu = 0. \quad (1.56)$$

Podemos ainda citar outras propriedades desse tensor simétrico, as quais serão utilizadas ao longo deste trabalho, a saber:

$$\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\nu\sigma} = \Delta^\mu_\sigma, \quad \Delta^\mu_\nu \Delta^{\nu\sigma} = \Delta^{\mu\sigma}, \quad \Delta^\mu_\mu = 3. \quad (1.57)$$

Adotaremos, por conveniência, um sistema de referência que se desloca junto com o fluido. Esse sistema é conhecido como o referencial de Lorentz e será por nós representado pelo sub-índice R (sistema em repouso no fluido). Nesse referencial, a quadrivelocidade hidrodinâmica U^μ tem as seguintes componentes:

$$(U_R^\mu) = (c, 0, 0, 0), \quad (1.58)$$

e o tensor $\Delta^{\mu\nu}$ fica:

$$(\Delta_R^{\mu\nu}) = (\Delta_{R\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\Delta_{R\nu}^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Além disso, se v^μ for um quadrivetor qualquer e $t^{\mu\nu}$ um tensor, então, definimos:

$$v^{(\mu)} = \Delta_\nu^\mu v^\nu, \quad (1.60)$$

$$t^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\mu) t^{\sigma\tau}. \quad (1.61)$$

Observamos que $v^{(\mu)}$ e $t^{(\mu\nu)}$ representam respectivamente um quadrivetor e um tensor simétrico que possuem somente a parte espacial das componentes no referencial de Lorentz. Além disso,

$$t^{<\mu\nu>} = t^{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau} t^{\sigma\tau} \quad (1.62)$$

é um tensor de traço nulo, pois:

$$\Delta_{\mu\nu} t^{<\mu\nu>} = 0. \quad (1.63)$$

Com a introdução da quadrivelocidade U^μ , podemos expressar a derivada contravariante ∂^μ como:

$$\partial^\mu = \frac{1}{c^2} U^\mu D + \nabla^\mu, \quad (1.64)$$

onde D é um operador denominado de derivada temporal convectiva, definido como:

$$D = U^\mu \partial_\mu, \quad (1.65)$$

e ∇^μ um quadri-gradiente, que em termos do projetor $\Delta^{\mu\nu}$ fica:

$$\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (1.66)$$

No referencial de Lorentz estes operadores ficam:

$$D_R = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla_R^\mu = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad \text{e} \quad \nabla_{\mu R} = \left(0, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \quad (1.67)$$

os quais correspondem, respectivamente, à derivada temporal ordinária e ao gradiente usual.

O quadrifluxo de partículas N^μ e o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, na decomposição de Eckart, ficam escritos da seguinte maneira:

$$N^\mu = n U^\mu, \quad (1.68)$$

$$T^{\mu\nu} = p^{<\mu\nu>} - (p + \varpi)\Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}(U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + \frac{n e}{c^2}U^\mu U^\nu, \quad (1.69)$$

aqui foram introduzidas as seguintes grandezas termodinâmicas: n , $p^{<\mu\nu>}$, p , ϖ , q^μ e e , as quais são definidas como:

- densidade do número de partículas

$$n = \frac{1}{c^2} N^\mu U_\mu, \quad (1.70)$$

- deviante do tensor pressão (tensor pressão sem o traço)

$$p^{<\mu\nu>} = (\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau})T^{\sigma\tau}, \quad (1.71)$$

- pressão hidrostática + pressão dinâmica

$$(p + \varpi) = -\frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \quad (1.72)$$

- fluxo de calor:

$$q^\mu = \Delta_\nu^\mu U_\sigma T^{\nu\sigma}, \quad (1.73)$$

- energia interna por partícula

$$e = \frac{1}{nc^2}U_\mu T^{\mu\nu}U_\nu. \quad (1.74)$$

Com a ajuda das equações (1.64) e (1.68), a equação de balanço do quadrifluxo de partículas (1.42) fica:

$$\frac{1}{c^2}U^\mu D(nU_\mu) + \nabla^\mu(nU_\mu) = 0, \quad (1.75)$$

que ao ser simplificada assume a seguinte forma:

$$Dn + n\nabla^\mu U_\mu = 0, \quad (1.76)$$

visto que $U^\mu DU_\mu = 0$ e $U_\mu \nabla^\mu = 0$, de acordo com as definições apresentadas acima. Essa equação expressa simplesmente a conservação da densidade do número de partículas ou a equação da continuidade.

Por outro lado, com a ajuda das equações (1.64) e (1.69), a equação de balanço para o tensor energia-momento (1.43), é representada por:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{c^2} U_\mu D + \nabla_\mu \right) \left[p^{<\mu\nu>} - (p + \varpi) \Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} (U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + \frac{en}{c^2} U^\mu U^\nu \right] = 0, \quad (1.77)$$

que, em termos da derivada material e do gradiente das grandezas termodinâmicas U^μ , q^μ , n , e , p , ϖ , $p^{\mu\nu}$, fica:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} Dq^\mu + \frac{en}{c^2} DU^\mu + \frac{1}{c^2} U^\mu (nDe + eDn) - \frac{1}{c^2} p^{<\mu\nu>} DU_\nu + \frac{1}{c^2} (p + \varpi) DU^\mu \\ & - \frac{1}{c^4} U^\mu q^\nu DU_\nu + \nabla_\nu p^{<\mu\nu>} - \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu (p + \varpi) + \frac{1}{c^2} (p + \varpi) U^\mu \nabla_\nu U^\nu \\ & + \frac{1}{c^2} q^\mu \nabla_\nu U^\nu + \frac{1}{c^2} U^\mu \nabla_\nu q^\nu + \frac{1}{c^2} q^\nu \nabla_\nu U^\mu + \frac{en}{c^2} U^\mu \nabla_\nu U^\nu = 0. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Se multiplicarmos agora a equação (1.78) escalarmente pela quadrivelocidade U_μ , essa se reduz à seguinte expressão:

$$nDe = -(p + \varpi) \nabla_\nu U^\nu + p^{<\mu\nu>} \nabla_\nu U_\mu - \nabla_\nu q^\nu + \frac{2}{c^2} q^\nu DU_\nu, \quad (1.79)$$

que é a equação de balanço da densidade de energia, ou seja, é uma generalização da primeira lei da termodinâmica. Para chegarmos nessa expressão, utilizamos o resultado (1.76) e as propriedades $U_\mu q^\mu = 0$ e $U_\mu p^{<\mu\nu>} = 0$. É interessante notar que, como estamos numa teoria relativística, o último termo não aparece no caso não-relativístico. Da mesma forma, a multiplicação da equação (1.78) pelo tensor simétrico Δ_μ^ν nos conduz ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} DU^\mu &= \frac{c^2}{nh} \left[\nabla^\mu (p + \varpi) - \Delta_\sigma^\mu \nabla_\nu p^{<\nu\sigma>} + \frac{1}{nh} p^{<\mu\nu>} \nabla_\nu p - \frac{1}{nh} \varpi \nabla^\mu p \right] \\ & - \frac{1}{nh} \left(\Delta_\nu^\mu Dq^\nu + q^\mu \nabla_\nu U^\nu + q^\nu \nabla_\nu U^\mu \right), \end{aligned} \quad (1.80)$$

que é a equação de balanço do momento linear. Nessa equação surge uma nova grandeza termodinâmica, denominada de entalpia por partícula, a qual representamos pela letra h e que é definida em termos da densidade de energia e e da pressão hidrostática $p = nkT$ da seguinte maneira:

$$h = e + \frac{p}{n}. \quad (1.81)$$

Para completar esta análise relativística das grandezas termodinâmicas, podemos escrever a equação de balanço da entropia (1.51) em termos da derivada temporal convectiva D e do gradiente ∇_μ . Desta forma temos, então, a seguinte expressão:

$$nDs + \nabla_\nu \phi^\nu + \frac{1}{c^2} U_\mu D\phi^\mu = \varsigma \geq 0. \quad (1.82)$$

Onde, analogamente aos casos das equações (1.79) e (1.80), o último termo somente existe no caso relativístico. Observamos ainda que, ao se determinar a equação (1.82), o quadrivetor fluxo de entropia S^μ foi decomposto como $S^\mu = nsU^\mu + \phi^\mu$, sendo s a entropia por partícula e ϕ^μ o fluxo de entropia, os quais podem ser definidos da seguinte maneira:

$$s = \frac{1}{nc^2} S^\mu U_\mu, \quad \phi^\mu = \Delta_\nu^\mu S^\nu. \quad (1.83)$$

1.5 A Função de Distribuição de Maxwell-Jüttner e as Equações Constitutivas em Equilíbrio

Como o título desta seção indica, vamos agora determinar a forma relativística da função de distribuição em equilíbrio, conhecida na literatura como a função de distribuição de Maxwell-Jüttner. Como já comentamos na introdução, a forma relativística dessa função foi estabelecida por Jüttner por volta de 1911.

De acordo com o que demonstramos na seção anterior, a produção de entropia em termos das funções de distribuição dos feixes de partículas incidentes f e f_1 é dada pela expressão :

$$\varsigma = -\frac{kc}{8} \int \ln \frac{f f_1}{f' f'_1} (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (1.84)$$

Sabemos que no equilíbrio a produção de entropia é mínima, isto é, no equilíbrio a taxa de produção de entropia é nula. Portanto, se aplicarmos essa condição na equação (1.84), chegamos ao seguinte resultado:

$$f_1^{(0)} f^{(0)} = f_1^{(0)} f^{(0)}. \quad (1.85)$$

Podemos observar que esse resultado anula o termo devido às colisões na equação de Boltzmann. O índice (0) indica que a função está sendo considerada no equilíbrio. Podemos tomar o logaritmo de ambos os membros dessa igualdade e ficar com a seguinte expressão:

$$\ln f_1^{(0)} + \ln f^{(0)} = \ln f_1^{(0)} + \ln f^{(0)}. \quad (1.86)$$

Verifica-se que o termo $\ln f^{(0)}$ é um invariante de soma e que de acordo com (1.37) temos:

$$\ln f^{(0)} = a^* - b_\mu p^\mu \quad (1.87)$$

ou ainda:

$$f^{(0)} = a \exp(-b_\mu p^\mu). \quad (1.88)$$

As expressões para a e b^μ estão deduzidas na seção (A.4) do apêndice A, e são dadas respectivamente por (A.36) e (A.37), isto é,

$$a = \frac{n\zeta}{4\pi(mc)^3 K_2(\zeta)}, \quad b^\mu = \left(\frac{\zeta}{mc}\right) \frac{U^\mu}{c}, \quad (1.89)$$

onde $K_2(\zeta)$ é função modificada de Bessel de ordem 2, e cuja definição geral é dada no apêndice B. Desta forma, a função de distribuição em equilíbrio (1.88) fica escrita da seguinte maneira:

$$f^{(0)} = \frac{n\zeta}{4\pi(mc)^3 K_2(\zeta)} \exp\left(-\frac{\zeta}{mc^2} U^\mu p_\mu\right). \quad (1.90)$$

Como foi demonstrado na seção (A.5) do apêndice A, o parâmetro ζ tem a seguinte forma:

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT}, \quad (1.91)$$

isto é, ela é uma razão entre a energia de repouso e a energia térmica de uma partícula, onde T é a temperatura absoluta. Podemos observar que na dedução desse parâmetro fizemos uso da equação de Gibbs (A.49), logo a nossa definição de temperatura baseia-se nessa equação.

Portanto, de acordo com a identificação de ζ dada acima, teremos para a forma final da função de distribuição (1.90) a seguinte expressão:

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{kT} U^\mu p_\mu\right), \quad (1.92)$$

que é a função de distribuição de Maxwell-Jüttner [1] que desejávamos determinar.

Vale a pena salientar que no referencial próprio, que se move com a mesma velocidade do fluido, a função de distribuição de Maxwell-Jüttner passa a ser escrita como:

$$f_R^{(0)} = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2(\zeta)} \exp\left(-\frac{c}{kT} p^0\right) = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2(\zeta)} \exp\left[-\frac{mc^2}{kT} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right], \quad (1.93)$$

onde usamos a expressão (A.2) para p^0 . Se considerarmos o caso de velocidades muito menores do que a velocidade da luz, teremos:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{e} \quad K_2(\zeta) \approx \sqrt{\frac{\pi kT}{2mc^2}} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right), \quad (1.94)$$

onde, para a obtenção da expressão para $K_2(\zeta)$, utilizamos a relação (B.11) do apêndice B. Assim, e a equação (1.93) se reduz à função de distribuição dos momentos lineares de Maxwell:

$$f_R^{(0)} \approx \frac{n}{(2\pi kTm)^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (1.95)$$

Vejamos agora como ficam as equações constitutivas para a pressão dinâmica ϖ , para o fluxo de calor q^μ e para o deviante do tensor pressão $p^{<\mu\nu>}$ em equilíbrio.

Partindo-se da expressão para o tensor energia momento em equilíbrio (A.44) e expressando-a em termos da densidade de energia e dada pela equação (A.45), considerando-se as expressões para ζ e para a pressão hidrostática p dadas em (A.50), e ainda fazendo uso da definição do tensor simétrico $\Delta^{\mu\nu}$, o tensor energia momento fica na seguinte forma:

$$T^{\mu\nu}|_E = -p|_E \Delta^{\mu\nu} + ne|_E \frac{U^\mu U^\nu}{c^2}. \quad (1.96)$$

Substituindo essa expressão para o tensor energia momento nas definições (1.71), (1.72) e (1.73), chegamos ao seguinte resultado:

$$p^{<\mu\nu>}|_E = 0, \quad \varpi|_E = 0, \quad \text{e} \quad q^\mu|_E = 0, \quad (1.97)$$

isto é, obtemos o resultado esperado, ou seja, no equilíbrio o deviante do tensor pressão, a pressão dinâmica e o fluxo de calor se anulam.

Outro resultado que será de muita utilidade para os próximos capítulos é o da expressão em equilíbrio para a entalpia por partícula h . Ela pode ser obtida a partir da definição (1.81) e com o auxílio da expressão para a densidade de energia (A.45), ou seja:

$$h|_E = mc^2 G(\zeta), \quad (1.98)$$

onde $G(\zeta) = K_3(\zeta)/K_2(\zeta)$, conforme o apêndice B.

Capítulo 2

As Equações de Burnett Relativísticas

2.1 Introdução

Iniciaremos este segundo capítulo com a construção da função de distribuição fora do equilíbrio, a qual será dada em função dos quatorze campos básicos, a saber: a densidade do número de partículas n , a temperatura T , a quadrivelocidade hidrodinâmica U^μ , a pressão dinâmica ϖ , o fluxo de calor q^μ e o deviante do tensor pressão $p^{<\mu\nu>}$, isto é, o tensor pressão menos o seu traço. A função de distribuição fora do equilíbrio também é conhecida como a função de distribuição de Grad. A partir desta função, obtemos as expressões para o terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$ e para o termo de produção $P^{\mu\nu}$, os quais, quando substituídos na equação de balanço para o terceiro momento, fornecem-nos as equações de evolução para a pressão dinâmica, fluxo de calor e para o deviante do tensor pressão. A fim de encontrarmos as equações constitutivas empregaremos uma variação do método de iteração maxwelliana. Do resultado da primeira iteração, chegamos às equações de Navier-Stokes e Fourier e, com a segunda iteração, ao nosso objetivo, que são as equações de Burnett relativísticas. A partir dessas equações, procedemos a uma análise detalhada de cada um dos coeficientes encontrados, fazendo as expansões para o caso de baixas temperaturas e para o caso de altas temperaturas. E, para finalizar este capítulo, comparamos as expressões relativísticas encontradas, com os resultados clássicos de Wang Chang e Uhlenbeck. Para tal fim, utilizamos as expansões obtidas para o caso de baixas temperaturas.

2.2 A Função de Distribuição de Grad

Como já mencionamos na introdução acima, aplicaremos neste capítulo o método dos momentos de Grad. Nesse método, a função de distribuição pode ser expandida em termos de todos os momentos necessários. Em geral, a idéia básica do método dos momentos é obter uma solução aproximada para a equação de Boltzmann, expandindo-se a função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ no espaço dos momentos em torno de uma função de distribuição de ordem zero

$f^{(0)}(\vec{x}, \vec{p}, t)$. A escolha desta função é muito importante e deve ser tal que a expansão seja truncada com sucesso após alguns termos. Utilizaremos a função de Maxwell-Jüttner, que foi deduzida no final do capítulo 1, como a função de distribuição de ordem zero.

Para determinarmos a função de distribuição de Grad para um gás relativístico fora do equilíbrio, vamos adotar o processo da maximização da entropia S^μ .

Vimos, no capítulo anterior, que o quadrivetor fluxo de entropia S^μ é definido pela seguinte expressão integral:

$$S^\mu = -kc \int p^\mu f \ln f \frac{d^3p}{p^0}. \quad (2.1)$$

Esse quadrivetor pode ser decomposto em duas partes, a saber,

$$S^\mu = nsU^\mu + \Phi^\mu, \quad (2.2)$$

onde s é a entropia por partícula e Φ^μ é o fluxo de entropia. Como foi visto, essas duas grandezas são definidas como:

$$s = \frac{1}{nc^2} U_\mu S^\mu, \quad \Phi^\mu = \Delta^\mu_\nu S^\nu. \quad (2.3)$$

Desta maneira, combinando a expressão (2.1) para o fluxo de entropia, com a primeira das equações (2.3), obtemos, para a entropia por partícula, a seguinte expressão:

$$s = -\frac{k}{nc} U_\mu \int p^\mu f \ln f \frac{d^3p}{p^0}. \quad (2.4)$$

Agora que já encontramos a expressão para a entropia por partícula s , para que possamos encontrar a função de distribuição fora do equilíbrio, devemos maximizar s sujeita a 14 vínculos que são obtidos dos campos: quadri-fluxo de partículas N^μ , tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e o terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$ dados por (1.39), (1.40) e (1.41). Os quatorze vínculos são definidos como:

$$N^\mu U_\mu = cU_\mu \int p^\mu f \frac{d^3p}{p^0}, \quad (2.5)$$

$$T^{\mu\nu} U_\mu = cU_\mu \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3p}{p^0}, \quad (2.6)$$

$$T^{\langle\nu\sigma\rangle\mu} U_\mu = cU_\mu \int p^{\langle\sigma} p^{\nu\rangle} p^\mu f \frac{d^3p}{p^0}. \quad (2.7)$$

De acordo com essas definições, temos que $N^\mu U_\mu$ fornece um vínculo, $T^{\mu\nu} U_\mu$ quatro e $T^{\langle\nu\sigma\rangle\mu} U_\mu$ os demais nove vínculos.

Conforme o cálculo das variações [19], esse problema é equivalente ao da maximização, sem restrições, da seguinte função:

$$F = -\frac{k}{nc}U_\mu \int p^\mu f \ln f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda c U_\mu \int p^\mu f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_\nu c U_\mu \int p^\nu p^\mu f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle} U_\mu \int p^{\langle\sigma} p^{\nu\rangle} p^\mu f \frac{d^3p}{p^0}, \quad (2.8)$$

onde λ , λ_ν e $\lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}$ são conhecidos por multiplicadores de Lagrange e devem ser determinados. Desta maneira, partimos da equação de Euler-Lagrange, a qual é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} = 0. \quad (2.9)$$

Em particular, o segundo termo desta equação é nulo, pois F não é função da derivada temporal da função de distribuição f . Portanto, deveremos resolver o seguinte problema:

$$\frac{\partial}{\partial f} \left\{ -\frac{k}{nc}U_\mu \int p^\mu f \ln f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda c U_\mu \int p^\mu f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_\nu c U_\mu \int p^\nu p^\mu f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle} U_\mu \int p^{\langle\sigma} p^{\nu\rangle} p^\mu f \frac{d^3p}{p^0} \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Considerando-se que $\partial(f \ln f)/\partial f = \ln f + 1$, obtemos a seguinte integral em d^3p/p^0 ,

$$\int \left[-\frac{k}{nc} \left(\ln f + 1 + \frac{nc^2}{k} \lambda \right) - \lambda_\nu c p^\nu - \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle} p^{\langle\sigma} p^{\nu\rangle} \right] U_\mu p^\mu \frac{d^3p}{p^0} = 0. \quad (2.11)$$

Como $U_\mu p^\mu \neq 0$, então a expressão entre colchetes deve, evidentemente, se anular. Portanto, após fazermos essa consideração e as devidas simplificações algébricas, chegamos ao seguinte resultado para a função de distribuição:

$$f = \exp \left[-1 - \frac{nc^2}{k} \left(\lambda + \lambda_\nu p^\nu + \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle} p^\sigma p^\nu \right) \right], \quad (2.12)$$

a qual está expressa em termos dos multiplicadores de Lagrange.

Como estamos interessados em processos perto do equilíbrio, desejamos obter uma função de distribuição da forma $f = f^{(0)}(1 + \phi)$, onde $f^{(0)}$ é a função de distribuição em equilíbrio de Maxwell-Jüttner e ϕ o seu desvio.

Vamos, por conveniência, escrever os multiplicadores de Lagrange da seguinte maneira:

$$\lambda = \lambda^E + \lambda^{FE}, \quad \lambda_\nu = \lambda_\nu^E + \lambda_\nu^{FE}, \quad \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle} = \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE}, \quad (2.13)$$

onde utilizamos a seguinte notação: $(\lambda^E, \lambda_\nu^E)$ representam aquela parte dos multiplicadores de Lagrange em equilíbrio, enquanto que $(\lambda^{FE}, \lambda_\nu^{FE}, \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE})$ a parte fora do equilíbrio. Procedendo

desta maneira, a equação (2.12) pode ser escrita como uma parte em equilíbrio e outra fora do equilíbrio,

$$f = \exp \left[-1 - \frac{nc^2}{k} (\lambda^E + \lambda_\nu^E p^\nu) \right] \exp \left[- \frac{nc^2}{k} (\lambda^{FE} + \lambda_\nu^{FE} p^\nu + \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE} p^\sigma p^\nu) \right]. \quad (2.14)$$

No equilíbrio, essa função se reduz à própria função de distribuição de Maxwell-Jüttner $f^{(0)}$, resultado que pode ser obtido a partir da primeira exponencial e pelo processo desenvolvido na seção (1.5). Como vamos nos ater somente a processos próximos ao equilíbrio, consideraremos que as partes fora do equilíbrio dos multiplicadores de Lagrange são quantidades pequenas. Desta forma, podemos utilizar a aproximação $\exp(-x) \approx 1 - x$, que é válida para $|x| \ll 1$ e deixar a equação (2.14) na seguinte forma:

$$f \approx f^{(0)} \left[1 - \frac{nc^2}{k} (\lambda^{FE} + \lambda_\nu^{FE} p^\nu + \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE} p^\sigma p^\nu) \right]. \quad (2.15)$$

A forma final para a função de distribuição (2.15) será obtida após a determinação dos multiplicadores de Lagrange fora do equilíbrio. O desenvolvimento para a obtenção desses multiplicadores encontra-se detalhado na seção (C.1) do apêndice C. Deste modo, fazendo uso desses resultados, a forma final da função de distribuição fora do equilíbrio é:

$$f = f^{(0)} (1 + a + a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta), \quad (2.16)$$

onde

$$a = \frac{\varpi (15G + 2\zeta - 6G^2\zeta + 5G\zeta^2 + \zeta^3 - G^2\zeta^3)}{p C_5}, \quad (2.17)$$

$$a_\alpha = \frac{3}{mc^2} \frac{\varpi \zeta (6G + \zeta - G^2\zeta)}{C_5} U_\alpha + \frac{1}{mc^2} \frac{q_\alpha}{p} \frac{\zeta G}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)}, \quad (2.18)$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{m^2 c^4} \frac{\varpi \zeta C_6}{p C_5} U_\alpha U_\beta - \frac{1}{m^2 c^4 p} \frac{\zeta}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{1}{2} (q_\alpha U_\beta + q_\beta U_\alpha) + \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{\zeta}{G} \frac{p_{\langle\alpha\beta\rangle}}{p}. \quad (2.19)$$

Nota-se que essa função está expressa em termos dos quatorze campos básicos, como era a nossa intenção. Os coeficientes C_5 e C_6 estão definidos na seção (C.7) do apêndice C. Assim, será essa expressão que utilizaremos ao longo deste capítulo a fim de encontrarmos as equações de Burnett relativísticas.

2.3 Cálculo do Terceiro Momento $T^{\mu\nu\sigma}$

Na seção anterior, determinamos a forma relativística para a função de distribuição de Grad fora do equilíbrio, para tanto utilizamos as referências [11] e [13]. Vamos, agora, utilizar esse resultado com o objetivo de encontrarmos a expressão para o terceiro momento. Assim, substituindo-se (2.16) na definição para o terceiro momento (1.41), encontramos:

$$T^{\mu\nu\sigma} = \frac{n}{4\pi k T m^2 K_2(\zeta)} \left[(1+a) Z^{\mu\nu\sigma} + a_\alpha Z^{\mu\nu\sigma\alpha} + a_{\alpha\beta} Z^{\mu\nu\sigma\alpha\beta} \right]. \quad (2.20)$$

onde utilizamos a função de Maxwell-Jüttner (1.92). Os resultados para as integrais $Z^{\mu\nu\sigma}$, $Z^{\mu\nu\sigma\alpha}$ e $Z^{\mu\nu\sigma\alpha\beta}$ encontram-se na seção (A.4) do apêndice A e são dados por (A.41) a (A.43). Portanto, substituindo-se o resultado para essas integrais na (2.20) e, após simplificarmos, encontraremos a seguinte forma final para o terceiro momento:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\sigma} = & (nC_1 + C_2\varpi)U^\mu U^\nu U^\sigma + \frac{c^2}{6}(nm^2 - nC_1 - C_2\varpi)(g^{\mu\nu}U^\sigma + g^{\mu\sigma}U^\nu + g^{\nu\sigma}U^\mu) \\ & + C_3(g^{\mu\nu}q^\sigma + g^{\mu\sigma}q^\nu + g^{\nu\sigma}q^\mu) - \frac{6}{c^2}C_3(U^\mu U^\nu q^\sigma + U^\mu U^\sigma q^\nu + U^\nu U^\sigma q^\mu) \\ & + C_4(p^{<\mu\nu>}U^\sigma + p^{<\mu\sigma>}U^\nu + p^{<\nu\sigma>}U^\mu), \end{aligned} \quad (2.21)$$

que está expresso em termos dos quatorze campos. Os coeficientes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 estão definidos na seção (C.7) do apêndice C.

Mais adiante, iremos necessitar da derivada do terceiro momento em relação às coordenadas x^μ . Esse resultado encontra-se explicitado na seção C.2 do apêndice C.

2.4 Cálculo do Termo de Produção $P^{\mu\nu}$

Vamos, agora, aplicar novamente o resultado obtido para a função de distribuição de Grad (2.16). Desta feita, queremos determinar a expressão para o termo de produção $P^{\mu\nu}$, em termos dos 14 campos, o qual, como já vimos, é definido da seguinte maneira:

$$P^{\mu\nu} = \frac{c}{4} \int (p'^\mu p'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p^\mu p^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (2.22)$$

Como podemos observar, para que possamos obter a forma completa dessa expressão, precisaremos realizar o produto das funções de distribuição para os dois feixes de partículas que colidem denotadas por $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f^{(0)}(1 + \phi)$ e $f_1(\vec{x}, \vec{p}_1, t) = f_1^{(0)}(1 + \phi_1)$, onde ϕ e ϕ_1 são as partes fora do equilíbrio da função de distribuição de Grad (2.16) para cada um desses feixes de partículas. Assim obtemos para este produto a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
ff_1 = f^{(0)}f_1^{(0)}(1 + \phi + \phi_1 + \phi\phi_1) = f^{(0)}f_1^{(0)} \Big[& 1 + 2a + a^2 + a_\alpha(p^\alpha + p_1^\alpha) + aa_\alpha(p^\alpha + p_1^\alpha) \\
& + a_{\alpha\beta}(p^\alpha p^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta) + aa_{\alpha\beta}(p^\alpha p^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta) + a_\alpha a_\beta p_1^\alpha p^\beta + a_\alpha a_{\beta\sigma}(p_1^\alpha p^\beta p^\sigma \\
& + p^\alpha p_1^\beta p_1^\sigma) + a_{\alpha\beta} a_{\sigma\tau} p_1^\alpha p_1^\beta p^\sigma p^\tau \Big], \tag{2.23}
\end{aligned}$$

que é dada em termos das quantidades a , a_α e $a_{\alpha\beta}$ definidas por (2.17) a (2.19) e das combinações dos quadrimomentos para os dois feixes de partículas. Substituindo-se o produto (2.23) na definição (2.22), chegamos à seguinte expressão simplificada para o termo de produção :

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu} = (1 + 2a + a^2)I^{\mu\nu} + a_\alpha I^{\mu\nu\alpha} + aa_\alpha I^{\mu\nu\alpha} + a_{\alpha\beta} I^{\mu\nu\alpha\beta} + aa_{\alpha\beta} I^{\mu\nu\alpha\beta} \\
+ a_\alpha a_\beta J^{\mu\nu\alpha\beta} + a_\alpha a_{\beta\sigma} I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} + a_{\alpha\beta} a_{\sigma\tau} I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\tau}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Para que tenhamos a forma final deste tensor, deveremos conhecer o resultado das integrais $I^{\mu\nu}$, $I^{\mu\nu\alpha}$, $I^{\mu\nu\alpha\beta}$, $J^{\mu\nu\alpha\beta}$, $I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma}$ e $I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\tau}$, as quais caracterizam um novo tipo de integral, de forma mais complexa que as integrais $Z^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ que vínhamos utilizando até aqui. A definição para cada uma das integrais acima, o seu resultado e o processo utilizado para solucioná-las encontram-se na seção (C.3) do apêndice C. Se recorrermos a este apêndice e verificarmos a forma dessas integrais, notaremos que, para resolvê-las, fizemos a seguinte consideração a respeito da seção transversal de choque σ : segundo de Groot, van Leeuwen e van Weert [11], as seções transversais de choque para um gás constituído de hádrõns pesados, com energias acima de 2GeV, são praticamente constantes como no espalhamento de núcleons-núcleons na era hadrônica da teoria do Big-Bang, isto é, ao redor de $10^{-4}s$ do início do Universo, cuja temperatura era da ordem de $10^{12}K$. Portanto, em nossos cálculos, consideraremos σ , que é uma seção de choque característica. Sabemos que uma seção de choque constante na teoria não-relativística está associada ao modelo de esfera rígida. Por isso, o presente modelo é, algumas vezes, referido como o modelo de esferas rígidas.

Após todas essas considerações e conhecendo-se o resultado de cada integral, encontramos a seguinte expressão final para o termo de produção :

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu} = B_1 Q^{\mu\nu} \varpi + \frac{1}{c^2} B_2 (U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + B_3 p^{<\mu\nu>} - B_4 Q^{\mu\nu} \varpi^2 + \frac{1}{c^2} B_5 (U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) \varpi \\
+ B_6 p^{<\mu\nu>} \varpi + 3B_7 (q^\mu q^\nu - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} q^\alpha q_\alpha) + \frac{1}{3} B_8 Q^{\mu\nu} q^\sigma q_\sigma + \frac{1}{c^2} B_9 (U^\mu p^{<\nu\sigma>} + U^\nu p^{<\mu\sigma>}) q_\sigma
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}B_{10}Q^{\mu\nu}p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>} + 3B_{11}(p^{<\mu\sigma>}p_{\sigma}^{<\nu>} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>}), \quad (2.25)$$

onde os coeficientes denotados por B_n , com $(n = 1, 2, \dots, 11)$ estão todos definidos na seção C.5 do apêndice C e $Q^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico definido por:

$$Q^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{4}{c^2}U^\mu U^\nu. \quad (2.26)$$

Notamos, também, que na expressão para o termo de produção temos termos lineares, isto é, termos envolvendo somente os fluxos termodinâmicos ϖ , q^μ e $p^{<\mu\nu>}$, os quais são multiplicados pelos coeficientes B_1 , B_2 e B_3 , que nos fornecerão as equações de Navier-Stokes e Fourier, como veremos na próxima seção. Há, ainda, termos não lineares, isto é, termos onde aparecem produtos destes fluxos, ou seja, ϖ^2 , $q^\mu q_\mu$, $p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>}$, ϖq^μ , $\varpi p^{<\mu\nu>}$ e $q_\sigma p^{<\sigma\mu>}$, e que estão multiplicados pelos coeficientes B_4 a B_{11} .

2.5 Primeira Iteração Maxwelliana

Visto que já possuímos as expressões para o terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$ dada por (2.21) e para o termo de produção $P^{\mu\nu}$ dada por (2.25), podemos fazer agora as seguintes operações:

$$\frac{U_\mu U_\nu}{c^4} \partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} = \frac{U_\mu U_\nu}{c^4} P^{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

$$U_\mu \Delta_\nu^\tau \partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} = U_\mu \Delta_\nu^\tau P^{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

$$(\Delta_\mu^\theta \Delta_\nu^\phi - \frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} \Delta^{\theta\phi}) \partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} = (\Delta_\mu^\theta \Delta_\nu^\phi - \frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} \Delta^{\theta\phi}) P^{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

as quais são as projecções da equação do terceiro momento.

Considerando-se a derivada do terceiro momento, que se encontra explicitada na seção (C.2) do apêndice C e da expressão para o termo de produção (2.25), obtemos, da primeira projecção (2.27), a seguinte equação de campo para a pressão dinâmica ϖ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(m^2 + C_1)Dn - \frac{\zeta}{2T}(nC'_1 + C'_2\varpi)DT + \frac{1}{2}C_2D\varpi + \frac{1}{6}[nm^2 + 5(nC_1 + C_2\varpi)]\nabla_\mu U^\mu \\ & + \frac{5}{c^2}\frac{\zeta}{T}C'_3q_\mu\nabla^\mu T - \frac{2}{c^2}C_4p^{<\mu\nu>}\nabla_\nu U_\mu - \frac{5}{c^4}C_3(c^2\nabla_\mu q^\mu - 3q^\mu DU_\mu) \\ & = -\frac{3}{c^2}B_1\varpi + \frac{3}{c^2}B_4\varpi^2 - \frac{1}{c^2}B_8q_\sigma q^\sigma - \frac{1}{c^2}B_{10}p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde C'_1 , C'_2 e C'_3 são as derivadas, em relação a ζ , dos coeficientes C_1 , C_2 e C_3 definidos na seção (C.7) do apêndice C.

Analogamente, a projeção (2.28) fornece:

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{6} \left[nm^2 + 5(nC_1 + C_2\varpi) \right] DU^\tau + \frac{c^4}{6} \left[(m^2 - C_1)\nabla^\tau n + \frac{\zeta}{T}(nC'_1 + C'_2\varpi)\nabla^\tau T - C_2\nabla^\tau \varpi \right] \\ & - 5C_3\Delta_\sigma^\tau Dq^\sigma - C_3q_\mu \nabla^\tau U^\mu - 6C_3(q^\sigma \nabla_\sigma U^\tau + q^\tau \nabla_\sigma U^\sigma) \\ & + C_4 \left[c^2 \Delta_\nu^\tau \nabla_\sigma p^{<\nu\sigma>} - 2p^{<\mu\tau>} DU_\mu \right] + \frac{5\zeta}{T} C'_3 q^\tau DT - \frac{c^2 \zeta}{T} C'_4 p^{<\sigma\tau>} \nabla_\sigma T \\ & = B_2 q^\tau + B_5 \varpi q^\tau + B_9 q_\sigma p^{<\sigma\tau>}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

que é a equação de campo para o fluxo de calor, onde C'_4 é a derivada em relação a ζ do coeficiente C_4 . E, finalmente, da projeção (2.29), obtemos:

$$\begin{aligned} & C_4(\Delta_\mu^{<\theta}& \Delta_\nu^{>} Dp^{<\mu\nu>} + p^{<\theta\phi>} \nabla_\sigma U^\sigma + 2p^{<\sigma<\theta>} \nabla_\sigma U^\phi) + \frac{c^2}{3}(nm^2 - nC_1 - C_2\varpi)\nabla^{<\theta} U^\phi > \\ & + 2C_3 \nabla^{<\theta} q^\phi > - \frac{2\zeta}{T} C'_3 q^{<\theta} \nabla^\phi > T - \frac{\zeta}{T} C'_4 p^{<\theta\phi>} DT - \frac{12}{c^2} C_3 q^{<\theta} DU^\phi > \\ & = B_3 p^{<\theta\phi>} + B_6 \varpi p^{<\theta\phi>} + 3B_7 q^{<\theta} q^\phi > + 3B_{11}(p^{<\theta\sigma>} p_{\sigma}^{<\phi} - \frac{1}{3} \Delta^{\theta\phi} p^{<\sigma\tau>} p_{<\sigma\tau>}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

a qual é a equação de campo para o deviante do tensor pressão.

Vamos, agora, eliminar as derivadas temporais convectivas Dn , DT e DU^μ das equações (2.30), (2.31) e (2.32). Para tanto, utilizaremos as equações (1.76), (1.80) e a seguinte equação que surge da (1.79),

$$DT = -\frac{1}{nkC_6} \left[-(p + \varpi)\nabla_\nu U^\nu - \nabla_\nu q^\nu + p^{<\mu\nu>} \nabla_\nu U_\mu + \frac{2}{nh} q^\mu \nabla_\mu p \right], \quad (2.33)$$

onde foi utilizada a definição $e = mc^2(G - 1/\zeta)$ para a energia interna por partícula. Portanto, a equação (2.30) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_2 D\varpi - \frac{1}{3} n(m^2 - C_1)\nabla_\mu U^\mu + \frac{5}{6} C_2 \varpi \nabla_\mu U^\mu + \frac{5}{c^2} \frac{\zeta}{T} C'_3 q_\mu \nabla^\mu T - \frac{5}{c^2} C_3 \nabla_\mu q^\mu \\ & - \frac{2}{c^2} C_4 p^{<\mu\nu>} \nabla_\nu U_\mu + \frac{15}{c^2 nh} C_3 q^\mu \nabla_\mu p - \frac{\zeta C'_2}{2C_6} \varpi \nabla_\nu U^\nu + \frac{\zeta}{2kT} \frac{C'_1}{C_6} \left[-(p + \varpi)\nabla_\mu U^\mu \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\nabla_\mu q^\mu + p^{<\mu\nu>} \nabla_\nu U_\mu + \frac{2}{nh} q^\mu \nabla_\mu p \Big] &= -\frac{3}{c^2} B_1 \varpi + \frac{3}{c^2} B_4 \varpi^2 \\
-\frac{1}{c^2} B_8 q_\sigma q^\sigma - \frac{1}{c^2} B_{10} p^{<\sigma\tau>} p_{<\sigma\tau>}, & \quad (2.34)
\end{aligned}$$

que é a equação de evolução temporal para a pressão dinâmica, isto é, uma equação para $D\varpi$.

Para a equação de campo (2.31), com a substituição das derivadas temporais convectivas para a densidade do número de partículas, temperatura e quadrivelocidade hidrodinâmica, temos:

$$\begin{aligned}
-5C_3 \Delta_\sigma^\tau Dq^\sigma + \frac{c^4}{6} \Big[(m^2 - C_1) \nabla^\tau n + \frac{\zeta}{T} (nC'_1 + C'_2 \varpi) \nabla^\tau T - C_2 \nabla^\tau \varpi \Big] - C_3 q_\mu \nabla^\tau U^\mu \\
-6C_3 (q^\sigma \nabla_\sigma U^\tau + q^\tau \nabla_\sigma U^\sigma) - c^2 \frac{\zeta}{T} C'_4 p^{<\sigma\tau>} \nabla_\sigma T + C_4 \Big[c^2 \Delta_\nu^\tau \nabla_\sigma p^{<\sigma\nu>} - \frac{2c^2}{nh} p^{<\mu\tau>} \nabla_\mu p \Big] \\
+ \frac{5}{6} \frac{c^4}{nh} C_2 \varpi \nabla^\tau p - \frac{2c^2}{nh} C_4 p^{<\mu\tau>} \nabla_\mu p + 5\zeta \frac{C'_3}{C_6} q^\tau \nabla_\nu U^\nu \\
+ \frac{c^4}{6h} (m^2 + 5C_1) \Big\{ \nabla^\tau (p + \varpi) - \Delta_\sigma^\tau \nabla_\nu p^{<\sigma\nu>} + \frac{1}{c^2} \Big[-\Delta_\nu^\tau Dq^\nu - q^\tau \nabla_\mu U^\mu - q_\sigma \nabla^\sigma U^\tau \Big] \\
+ \frac{1}{nh} \Big[p^{<\mu\tau>} \nabla_\mu p - \varpi \nabla^\tau p \Big] \Big\} = B_2 q^\tau + B_5 \varpi q^\tau + B_9 q_\sigma p^{<\sigma\tau>}, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

a qual é a equação de evolução temporal para o fluxo de calor, isto é, a equação para Dq^μ . Observa-se que, no lado direito, aparecem, além do termo linear no fluxo de calor, termos com produtos do fluxo de calor com a pressão dinâmica e com o deviante do tensor pressão.

Considerando-se na equação de campo (2.32) a seguinte transformação :

$$p^{<\theta<\sigma>} \nabla_\sigma U^\phi \rangle = -p^{<\theta<\sigma>} \nabla^\phi \rangle U_\sigma + 2p^{<\theta\sigma>} \nabla_{<\sigma} U^\phi \rangle + \frac{2}{3} p^{<\theta\phi>} \nabla^\lambda U_\lambda, \quad (2.36)$$

onde no termo $2p^{<\theta\sigma>} \nabla_{<\sigma} U^\phi \rangle$ a barra sob as letras θ e ϕ significa que estamos considerando a parte simétrica sem traço em relação a esses índices. Eliminando-se as derivadas temporais convectivas, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_4 \Big(\Delta_\mu^{<\theta} \Delta_\nu^{>} Dp^{<\mu\nu>} - 2p^{<\theta<\sigma>} \nabla^\phi \rangle U_\sigma + 4p^{<\theta\sigma>} \nabla_{<\sigma} U^\phi \rangle + \frac{7}{3} p^{<\theta\phi>} \nabla^\lambda U_\lambda \Big) + \frac{c^2}{3} (nm^2 - nC_1 \\
-C_2 \varpi) \nabla^{<\theta} U^\phi \rangle + 2C_3 \nabla^{<\theta} q^\phi \rangle - \frac{2\zeta}{T} C'_3 q^{<\theta} \nabla^\phi \rangle T - \frac{\zeta C'_4}{C_6} p^{<\phi\theta>} \nabla_\nu U^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{12}{nh}C_3q^{<\theta\nabla\phi>}p &= B_3p^{<\theta\phi>} + B_6\varpi p^{<\theta\phi>} + 3B_7q^{<\theta q\phi>} \\
&+ 3B_{11}(p^{<\theta\sigma>}p_{\sigma}^{<\phi>} - \frac{1}{3}\Delta^{\theta\phi}p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>}), \tag{2.37}
\end{aligned}$$

que corresponde à equação de evolução temporal para o deviante do tensor pressão. Notamos que, no segundo membro desta equação, aparece um termo proporcional ao deviante do tensor pressão e mais outros três proporcionais aos produtos $\varpi p^{<\theta\phi>}$, $q^{<\theta q\phi>}$ e $p^{<\sigma\tau>}p_{<\sigma\tau>}$.

A fim de encontrarmos as equações constitutivas para a pressão dinâmica ϖ , fluxo de calor q^τ e o deviante do tensor pressão $p^{<\mu\nu>}$, utilizaremos as equações de evolução obtidas acima. Para alcançarmos tal objetivo, aplicaremos uma variação do método de iteração de Maxwell [14]. Essa variação, segundo Reinecke e Kremer [15], consiste em passarmos todos os termos não lineares das equações de evolução (2.34), (2.35) e (2.37) para o lado esquerdo e inserirmos nesse mesmo lado os valores em equilíbrio $p^{<\mu\nu>(0)} = 0$, $\varpi^{(0)} = 0$ e $q^{\mu(0)} = 0$. Procedendo-se dessa maneira, obtemos os valores da primeira iteração para a pressão dinâmica, fluxo de calor e deviante do tensor pressão, que correspondem às equações constitutivas de um fluido relativístico viscoso e condutor de calor:

$$\varpi^{(1)} = -\eta\nabla_\mu U^\mu, \tag{2.38}$$

$$q^{\mu(1)} = \lambda(\nabla^\mu T - \frac{T}{nh}\nabla^\mu p), \tag{2.39}$$

$$p^{<\mu\nu>(1)} = 2\mu\nabla^{<\mu}U^{\nu>}, \tag{2.40}$$

as quais representam as leis de Navier-Stokes e Fourier. As quantidades à esquerda ϖ , q^μ e $p^{<\mu\nu>}$, como já mencionamos anteriormente, são os fluxos termodinâmicos, os quais, numa teoria termodinâmica de processos irreversíveis linear, são proporcionais às forças termodinâmicas, que estão representadas pelos gradientes e divergentes da quadrivelocidade, temperatura e pressão hidrostática, que aparecem no lado direito. As constantes de proporcionalidade η , μ e λ que aparecem são usualmente conhecidas como coeficientes de transporte e são dadas por:

$$\eta = \frac{1}{32\pi} \frac{kT}{c\sigma} \frac{(20G + 3\zeta - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2\zeta^4 K_2(\zeta)^2}{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)^2(2K_2(2\zeta) + \zeta K_3(2\zeta))}, \tag{2.41}$$

$$\mu = \frac{15}{32\pi} \frac{kT}{c\sigma} \frac{K_3(\zeta)^2\zeta^4}{[(2 + 15\zeta^2)K_2(2\zeta) + (3\zeta^3 + 49\zeta)K_3(2\zeta)]}, \tag{2.42}$$

$$\lambda = \frac{3}{32\pi} \frac{ck}{\sigma} \frac{(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2 K_2(\zeta)^2 \zeta^4}{[(\zeta^2 + 2)K_2(2\zeta) + 5\zeta K_3(2\zeta)]}, \quad (2.43)$$

que em particular recebem, respectivamente, as denominações de viscosidade volumétrica, viscosidade de cisalhamento e condutividade térmica, conforme [11] e [13].

2.6 Segunda Iteração Maxwelliana

Procederemos, agora, a uma segunda iteração maxwelliana, que nos fornecerá as equações de Burnett relativísticas. Para tanto, repetiremos o mesmo raciocínio desenvolvido para a obtenção das equações de Navier-Stokes e Fourier, ou seja, passaremos, inicialmente, todos os termos não lineares, isto é, termos quadráticos para os fluxos termodinâmicos ou ainda o produto de dois fluxos entre si, para o lado esquerdo nas equações para a evolução da pressão dinâmica (2.34), fluxo de calor (2.35) e deviante do tensor pressão (2.37). Porém, desta feita, deveremos inserir, nesse lado, as expressões para os fluxos termodinâmicos obtidas da primeira iteração, isto é, $\varpi^{(1)}$, $q^{\mu(1)}$ e $p^{<\mu\nu>(1)}$, que são dadas pelas equações (2.38), (2.39) e (2.40). A expressão que se obtém a partir da equação (2.34) é:

$$\begin{aligned} \varpi^2 = & -\frac{c^2}{3B_1} \left\{ \frac{1}{2} C_2 D\varpi^{(1)} - \frac{1}{3} n(m^2 - C_1) \nabla_\mu U^\mu + \frac{5}{6} C_2 \varpi^{(1)} \nabla_\mu U^\mu + \frac{5}{c^2} \frac{\zeta}{T} C'_3 q_\mu^{(1)} \nabla^\mu T - \frac{5}{c^2} C_3 \nabla^\mu q_\mu^{(1)} \right. \\ & - \frac{2}{c^2} C_4 p^{<\mu\nu>(1)} \nabla^\nu U^\mu + \frac{15}{c^2 n h} C_3 q_\mu^{(1)} \nabla^\mu p - \frac{\zeta C'_2}{2C_6} \varpi^{(1)} \nabla_\nu U^\nu + \frac{\zeta}{2kT} \frac{C'_1}{C_6} \left[- (p + \varpi^{(1)}) \nabla_\mu U^\mu \right. \\ & \left. \left. - \nabla^\mu q_\mu^{(1)} + p^{<\mu\nu>(1)} \nabla^\nu U^\mu + \frac{2}{nh} q_\mu^{(1)} \nabla^\mu p \right] - \frac{3}{c^2} B_4 \varpi^{(1)2} + \frac{1}{c^2} B_8 q_\sigma q^\sigma + \frac{1}{c^2} B_{10} p^{<\sigma\tau>} p_{<\sigma\tau>} \right\}. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Nessa equação, a derivada material convectiva da pressão dinâmica $D\varpi^{(1)}$ e o gradiente do fluxo de calor $\nabla^\mu q_\mu^{(1)}$ devem ser expressos como funções da temperatura, da pressão hidrostática e da quadrivelocidade. As expressões para $D\varpi^{(1)}$, $\nabla^\mu q_\mu^{(1)}$ e ainda para $\nabla^\mu U^\nu$ estão na seção (C.4) do apêndice C e são dadas por (C.118), (C.149) e (C.114) respectivamente. O resultado é que teremos para a (2.44) termos proporcionais a $\nabla_\nu \nabla^\nu T$, $\nabla_\mu \nabla^\mu p$, $\nabla_\mu U^\mu \nabla_\nu U^\nu$, $\nabla_\mu T \nabla^\mu T$, $\nabla_\mu p \nabla^\mu p$, $\nabla_\mu T \nabla^\mu p$, $\nabla^{<\mu U^\nu>} \nabla_{<\mu U_\nu>}$ e $\nabla^{[\mu U^\nu]} \nabla_{[\mu U_\nu]}$, os quais, quando agrupados, resultam na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \varpi^{(2)} = & -\eta \nabla_\mu U^\mu + \eta_1 \nabla_\nu \nabla^\nu T - \eta_2 \nabla_\mu \nabla^\mu p + \eta_3 \nabla_\mu U^\mu \nabla_\nu U^\nu + \eta_4 \nabla_\mu T \nabla^\mu T \\ & + \eta_5 \nabla_\mu p \nabla^\mu p - \eta_6 \nabla_\mu T \nabla^\mu p - \eta_7 \nabla^{<\mu U^\nu>} \nabla_{<\mu U_\nu>} \end{aligned}$$

$$+\eta_8 \nabla^{[\mu} U^{\nu]} \nabla_{[\mu} U_{\nu]}, \quad (2.45)$$

que é a equação de Burnett relativística para a pressão dinâmica. O primeiro termo é o resultado da primeira iteração e é proporcional ao divergente da velocidade. O segundo e o terceiro, que também são termos lineares, são proporcionais ao Laplaceano da temperatura e da pressão respectivamente. Esses dois termos já tinham sido estudados por Kremer e Müller[18], que mostraram que o coeficiente do termo proporcional ao Laplaceano na temperatura (*heating term*) é maior que o coeficiente do primeiro termo, isto é, do termo proporcional ao divergente da quadrivelocidade. A seguir, temos dois termos que são proporcionais ao produto de dois gradientes da temperatura e da pressão respectivamente. Há também um termo que é uma combinação do produto de um gradiente da temperatura e pressão. Os últimos dois termos são proporcionais ao produto dos gradientes da quadrivelocidade sem traço simétrico e anti-simétrico, respectivamente, e estão indicados pelos símbolos $\langle \rangle$ e $[\]$ que aparecem junto aos índices. Vale ressaltar que a parte simétrica sem o traço de um tensor $t^{\mu\nu}$ está definida por (1.62) e a parte anti-simétrica desse tensor é definida por:

$$t^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\mu) t^{\sigma\tau}. \quad (2.46)$$

Deixaremos para analisar na próxima seção, as expressões de cada um dos coeficientes que aparecem na equação de Burnett para a pressão dinâmica (2.45), assim como as suas expansões para altas e baixas temperaturas.

Aplicando a segunda iteração maxwelliana na equação (2.35), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} q^{\tau(2)} = & \frac{1}{B_2} \left\{ -5\Delta_\sigma^\tau C_3 D q^{\sigma(1)} + \frac{c^4}{6} \left[(m^2 - C_1) \nabla^\tau n + \frac{\zeta}{T} (nC_1' + C_2' \varpi^{(1)}) \nabla^\tau T - C_2 \nabla^\tau \varpi^{(1)} \right] \right. \\ & - C_3 q_\mu^{(1)} \nabla^\tau U^\mu - 6C_3 (q^{\tau(1)} \nabla_\sigma U^\sigma + q^{\sigma(1)} \nabla_\sigma U^\tau) - c^2 \frac{\zeta}{T} C_4' p^{\langle \sigma\tau \rangle (1)} \nabla_\sigma T + C_4 c^2 \Delta_\nu^\tau \nabla_\sigma p^{\langle \sigma\nu \rangle (1)} \\ & + \frac{5}{6} \frac{c^4}{nh} C_2 \varpi^{(1)} \nabla^\tau p - \frac{5}{nh} C_3 U^\tau q_\nu^{(1)} \nabla^\nu p - \frac{2c^2}{nh} C_4 p^{\langle \mu\tau \rangle (1)} \nabla_\mu p + 5\zeta \frac{C_3'}{C_6} q^{\tau(1)} \nabla_\nu U^\nu \\ & + \frac{c^4}{6h} (m^2 + 5C_1) \left\{ \nabla^\tau (p + \varpi^{(1)}) - \Delta_\nu^\tau \nabla_\sigma p^{\langle \sigma\nu \rangle (1)} + \frac{1}{c^2} \left[-\Delta_\nu^\tau D q^{\nu(1)} - q^{\tau(1)} \nabla_\mu U^\mu \right. \right. \\ & \left. \left. - q_\sigma^{(1)} \nabla^\sigma U^\tau \right] + \frac{1}{nh} \left[p^{\langle \mu\tau \rangle (1)} \nabla_\mu p - \varpi^{(1)} \nabla^\tau p \right] \right\} - B_5 \varpi^{(1)} q^{\tau(1)} - B_9 q_\sigma^{(1)} p^{\langle \sigma\tau \rangle (1)} \left. \right\}. \quad (2.47) \end{aligned}$$

Assim como fizemos na equação (2.44) para a pressão dinâmica, aqui também deveremos expressar a derivada material convectiva $Dq^{\tau(1)}$, e os gradientes $\nabla^\tau \varpi^{(1)}$ e $\nabla_\sigma p^{<\mu\nu>(1)}$ e $\nabla^\tau n$ em termos da temperatura, da pressão hidrostática e da quadrivelocidade. Faremos isso, substituindo os resultados para essas quantidades deduzidas no apêndice C e dadas por (C.131), (C.142), (C.150) e (C.146) respectivamente. A expressão final será dada em função das forças termodinâmicas $\nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu$, $\nabla_\sigma \nabla^{<\sigma U^\tau>}$, $\nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu$, $\nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu$, $\nabla_\sigma p \nabla^{<\sigma U^\tau>}$, $\nabla_\sigma T \nabla^{<\sigma U^\tau>}$, $\nabla_\sigma p \nabla^{[\sigma U^\tau]}$ e $\nabla_\sigma T \nabla^{[\sigma U^\tau]}$, isto é,

$$\begin{aligned}
q^{\tau(2)} = & \lambda \left(\nabla^\tau T - \frac{T}{nh} \nabla^\tau p \right) + \lambda_1 \nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu - \lambda_2 \nabla_\sigma \nabla^{<\sigma U^\tau>} - \lambda_3 \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu \\
& + \lambda_4 \nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu + \lambda_5 \nabla_\sigma p \nabla^{<\sigma U^\tau>} - \lambda_6 \nabla_\sigma T \nabla^{<\sigma U^\tau>} \\
& + \lambda_7 \nabla_\sigma p \nabla^{[\sigma U^\tau]} - \lambda_8 \nabla_\sigma T \nabla^{[\sigma U^\tau]}, \tag{2.48}
\end{aligned}$$

que é a equação de Burnett relativística para o fluxo de calor. Observamos que o primeiro termo é o resultado da primeira iteração. A seguir, temos dois termos lineares, proporcionais ao gradiente de um divergente da quadrivelocidade, sendo o terceiro termo o divergente de um gradiente da quadrivelocidade. Temos também dois termos, os quais são proporcionais ao produto do gradiente da temperatura e da pressão por um divergente da quadrivelocidade. E, finalmente, mais quatro termos que são proporcionais ao gradiente da pressão e da temperatura pelo gradiente da quadrivelocidade, sendo dois simétricos e dois anti-simétricos, como podemos verificar.

Considerando agora a equação (2.37), e aplicando a segunda iteração maxwelliana, ficamos com a seguinte equação para $p^{<\theta\phi>(2)}$:

$$\begin{aligned}
p^{<\theta\phi>(2)} = & \frac{1}{B_3} \left\{ C_4 \left(\Delta_\mu^{<\theta} \Delta_\nu^{>\phi} D p^{<\mu\nu>(1)} - 2 p^{<\theta<\sigma>(1)} \nabla^{>\phi} U_\sigma + 4 p^{<\theta\sigma>(1)} \nabla_{<\sigma} U^{>\phi} + \frac{7}{3} p^{<\theta\phi>(1)} \nabla^\lambda U_\lambda \right) \right. \\
& + \frac{c^2}{3} (nm^2 - n C_1 C_2 \varpi^{(1)}) \nabla^{<\theta} U^{>\phi} + 2 C_3 \nabla^{<\theta} q^{>\phi(1)} - \frac{2\zeta}{T} C_3' q^{<\theta(1)} \nabla^{>\phi} T \\
& - \frac{\zeta C_4'}{C_6} p^{<\phi\theta>(1)} \nabla_\nu U^\nu - \frac{12}{nh} C_3 q^{<\theta(1)} \nabla^{>\phi} p - B_6 \varpi^{(1)} p^{<\theta\phi>(1)} - 3 B_7 q^{<\theta(1)} q^{>\phi(1)} \\
& \left. + 3 B_{11} \left(p^{<\theta\sigma>(1)} p_{\sigma>(1)}^{<\phi} - \frac{1}{3} \Delta^{\theta\phi} p^{<\sigma\tau>(1)} p_{<\sigma\tau>}^{(1)} \right) \right\}. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Deveremos, agora, expressar a derivada material convectiva para o deviante do tensor pressão $p^{<\theta\phi>(1)}$, e os gradientes $\nabla^{<\theta} q^{>\phi(1)}$ em termos da temperatura, da pressão hidrostática e da

quadrivelocidade, assim como fizemos nos casos anteriores. No apêndice C encontramos essas expressões que são dadas por (C.141) e (C.148) respectivamente. A equação obtida dessa maneira é:

$$\begin{aligned}
p^{<\epsilon\tau>(2)} = & 2\mu\nabla^{<\epsilon U^\tau>} + \mu_1\nabla^{<\epsilon\nabla^\tau>}T - \mu_2\nabla^{<\epsilon\nabla^\tau>}p + \mu_3\nabla^{<\epsilon T\nabla^\tau>}T + \mu_4\nabla^{<\epsilon p\nabla^\tau>}p \\
& - \mu_5\nabla^{<\epsilon p\nabla^\tau>}T + \mu_6\nabla^{<\epsilon U^\sigma>}\nabla^\perp U_\sigma - \mu_7\nabla^{<\epsilon U^\tau>}\nabla_\sigma U^\sigma - \mu_8\nabla^{<\mu U^\epsilon>}\nabla^{<\perp U_\mu>} \\
& + \mu_9\nabla_\sigma U^{<\epsilon\nabla^\tau>}U^\sigma, \tag{2.50}
\end{aligned}$$

que é a equação de Burnett relativística para o deviante do tensor pressão. E, da mesma forma que para as equações de Burnett anteriores, o primeiro termo aparece devido à primeira iteração. Observamos que o segundo e o terceiro termo são lineares e proporcionais ao gradiente do gradiente da temperatura e da pressão respectivamente. A seguir, temos três termos que são proporcionais ao produto de gradientes na temperatura e pressão. Finalmente, os últimos termos são proporcionais ao produto de um gradiente na quadrivelocidade por um divergente nesta mesma grandeza. Nas forças termodinâmicas proporcionais aos coeficientes μ_6 e μ_8 adotamos a seguinte convenção :

$$\nabla^{<\epsilon U^\sigma>}\nabla^\perp U_\sigma = \frac{1}{2}\left(\nabla^{<\epsilon U^\sigma>}\nabla^\tau U_\sigma + \nabla^{<\tau U^\sigma>}\nabla^\epsilon U_\sigma\right) - \frac{1}{3}\Delta^{\epsilon\tau}\nabla^{<\alpha U^\sigma>}\nabla_\alpha U_\sigma, \tag{2.51}$$

$$\nabla^{<\mu U^\epsilon>}\nabla^{<\perp U_\mu>} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{<\mu U^\epsilon>}\nabla^{<\tau U_\mu>} + \nabla^{<\mu U^\tau>}\nabla^{<\epsilon U_\mu>}\right) - \frac{1}{3}\Delta^{\epsilon\tau}\nabla^{<\mu U^\alpha>}\nabla_{<\alpha U_\mu>}. \tag{2.52}$$

Observamos que, nas equações de Burnett relativísticas (2.45), (2.48) e (2.50) acima, alguns termos são negativos.

2.7 Coeficientes de Burnett

Vamos, agora, explicitar as expressões para todos os coeficientes que surgiram devido à primeira e à segunda iteração maxwelliana. Em primeiro lugar, escreveremos a expressão para o coeficiente propriamente dito e a seguir a sua expansão para o caso de baixas temperaturas ($\zeta \gg 1$), representada com o índice *BT* e a expansão para o caso de altas temperaturas ($\zeta \ll 1$), representada pelo índice *AT*. Para tanto, iremos utilizar as expansões das funções modificadas de Bessel $K_n(\zeta)$, as quais são dadas pelas expressões (B.11) e (B.12) do apêndice B.

Antes de apresentarmos os coeficientes e as suas expansões, faremos a seguinte observação com relação ao parâmetro ζ : para o cálculo das nossas integrais tivemos de considerar uma

seção de choque característica σ , a qual, como afirmamos na seção (2.4), está associada ao modelo de esferas rígidas. Portanto, antes de fazermos as expansões dos coeficientes, vejamos qual a relação entre ζ e a temperatura T . Assim, considerando um gás de elétrons, cuja massa de cada elétron é da ordem de $m = 10^{-31}$ kg, a constante de Boltzmann $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K e a velocidade da luz no vácuo como $3,0 \times 10^8$ m/s, obtemos a seguinte relação:

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT} \approx \frac{10^9 K}{T}. \quad (2.53)$$

Portanto, para uma temperatura da ordem de 10^{12} K, que corresponde à temperatura na era hadrônica, $\zeta \approx 0,001$. Nesse caso, dizemos que o gás é ultra-relativístico ou $\zeta \ll 1$. Por outro lado, para a temperatura ambiente $T = 300$ K temos que $\zeta \approx 10^6$, para $T = 1$ K, que é a temperatura atual do universo, $\zeta \approx 10^9$. Nesses casos podemos considerar $\zeta \gg 1$, ou o caso não-relativístico. Para valores da temperatura da ordem de 10^9 K, dizemos que estamos no regime relativístico.

Após essas considerações, temos, para os coeficientes da pressão dinâmica e suas respectivas expansões, as seguintes expressões:

- Coeficiente η

$$\eta = \frac{1}{32\pi} \frac{mc}{\sigma} \frac{\zeta^3 K_2^2(\zeta)(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2}{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)^2(2K_2(2\zeta) + \zeta K_3(2\zeta))}, \quad (2.54)$$

$$\eta^{BT} = \frac{25}{128} \left(\frac{mkT}{\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{183}{16} \frac{1}{\zeta} + \frac{41001}{512} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3635165}{8192} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.55)$$

$$\eta^{AT} = \frac{1}{144} \frac{kT}{\pi\sigma} \zeta^4 \left[1 + \left(\frac{49}{12} + 6 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 6\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.56)$$

- Coeficiente η_1

$$\eta_1 = -\frac{1}{p} \frac{(\zeta + 6G - G^2\zeta)(5 - 10G\zeta - 2\zeta^2 + 2G^2\zeta^2)}{(\zeta^2 + 5G\zeta - G^2\zeta^2)(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \eta^\lambda, \quad (2.57)$$

$$\eta_1^{BT} = \frac{375}{4096} \frac{k}{n\pi\sigma^2} \zeta^{-1} \left[1 - \frac{45}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{3069}{128} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{100525}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.58)$$

$$\eta_1^{AT} = \frac{1}{24} \frac{k}{n\pi^2\sigma^2} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{15}{8} + 3 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.59)$$

• **Coefficiente η_2**

$$\eta_2 = \frac{T}{p^2} \frac{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \left[\frac{3k}{m} \eta^2 \frac{(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta G(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} - \eta \lambda \frac{1}{\zeta^2 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{(\zeta + 6G - G^2\zeta)(5 - 10G\zeta - 2\zeta^2 + 2G^2\zeta^2)}{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \right], \quad (2.60)$$

$$\eta_2^{BT} = \frac{375}{8192} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{55}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{5413}{128} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{315491}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.61)$$

$$\eta_2^{AT} = \frac{1}{96} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{3}{2} + 3 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.62)$$

• **Coefficiente η_3**

$$\eta_3 = -\frac{1}{p} \left\{ \left[\frac{4(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2} - \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \right) \times \left(\frac{3\zeta}{3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2} \right) - \frac{3(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \right] \eta^2 - \frac{3(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \frac{16\pi\sigma}{mc} \frac{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \frac{\zeta^4}{K_2^2(\zeta)} \eta^3 P_1 \right\}, \quad (2.63)$$

$$\eta_3^{BT} = \frac{125}{8192} \frac{m}{n\pi\sigma^2} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{135}{16} \frac{1}{\zeta} + \frac{8923}{64} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3948157}{2048} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.64)$$

$$\eta_3^{AT} = \frac{1}{72} \frac{kT}{nc^2 \pi^2 \sigma^2} \zeta^4 \left[1 + \left(\frac{23}{4} + \frac{15}{2} \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \frac{15}{2} \gamma \right) \zeta^2 \dots \right]. \quad (2.65)$$

• Coeficiente η_4

$$\eta_4 = -\frac{1}{pT} \left\{ -\frac{5(1-5G\zeta-\zeta^2+G^2\zeta^2)(7G^3\zeta+2G^2\zeta^2-30G^2-17G\zeta-2\zeta^2)}{\zeta(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)(\zeta+5G+G^2\zeta)^2} \lambda \eta \right. \\ \left. -\frac{(\zeta+6G-G^2\zeta)(5-10G\zeta-2\zeta^2+2G^2\zeta^2)}{(\zeta+5G-G^2\zeta)(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)} \eta \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right. \\ \left. +\frac{16\pi}{3} \frac{\sigma}{ck} \frac{(1-5G\zeta-\zeta^2+G^2\zeta^2)}{(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)} \frac{\zeta^3 P_5}{K_2^2(\zeta)} \lambda^2 \eta \right\}, \quad (2.66)$$

$$\eta_4^{BT} = \frac{11625}{32768} \frac{k}{n\pi\sigma^2 T} \zeta^{-1} \left[1 - \frac{231}{62} \frac{1}{\zeta} + \frac{19749}{3968} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{290595}{15872} \frac{1}{\zeta^3} \dots \right], \quad (2.67)$$

$$\eta_4^{AT} = \frac{7}{36} \frac{k}{n\pi^2\sigma^2 T} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{641}{336} + 3 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.68)$$

• Coeficiente η_5

$$\eta_5 = -\frac{T}{p^3} \left[\frac{(\zeta+6G-G^2\zeta)(15-40G\zeta-9\zeta^2-G^2\zeta^2-2G\zeta^3+2G^3\zeta^3)}{G^2\zeta^3(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)(\zeta+5G-G^2\zeta)} \lambda \eta \right. \\ \left. -\frac{c^2(1-5G\zeta-\zeta^2+G^2\zeta^2)(2\zeta^3-5\zeta+19G\zeta^2-30G-2G^2\zeta^3+45G^2\zeta-9G^3\zeta^2)}{T(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)^2} \right. \\ \left. \times \frac{3(1+G\zeta)}{G^2\zeta^3} \eta^2 + \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma}{ck} \frac{\zeta(1-5G\zeta-\zeta^2+G^2\zeta^2)P_5}{G^2 K_2^2(\zeta)(3\zeta+20G-13G^2\zeta-2G\zeta^2+2G^3\zeta^2)} \lambda^2 \eta \right] \quad (2.69)$$

$$\eta_5^{BT} = \frac{1125}{8192} \frac{1}{n^3\pi\sigma^2 kT} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{139}{24} \frac{1}{\zeta} + \frac{8303}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{93193}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.70)$$

$$\eta_5^{AT} = \frac{1}{36} \frac{1}{n^3\pi^2\sigma^2 kT} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{1259}{768} + 3 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.71)$$

• Coeficiente η_6

$$\begin{aligned} \eta_6 = & \frac{1}{p^2} \frac{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \left\{ \left[\frac{3(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \right. \right. \\ & + \left. \frac{5(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \right] \left[\frac{1}{G\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + \frac{(\zeta + G - G^2\zeta)}{\zeta G^2} \right] - \frac{5(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta^2 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \\ & + \left. \frac{5(7G^3\zeta + 2G^2\zeta^2 - 30G^2 - 17G\zeta - 2\zeta^2)}{\zeta^2 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right\} \lambda \eta \\ & - \frac{c^2}{T} \frac{3(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)(\zeta + 4G - G^2\zeta)}{G^2\zeta^2(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2} \eta^2 \\ & - \left. \frac{32\pi}{3} \frac{\sigma}{ck} \frac{\zeta^2}{G} \frac{P_5}{K_2^2(\zeta)} \lambda^2 \eta \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\eta_6^{BT} = \frac{375}{4096} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2 T} \zeta^{-1} \left[1 + \frac{25}{8} \frac{1}{\zeta} - \frac{5323}{128} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{205869}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.73)$$

$$\eta_6^{AT} = \frac{37}{288} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2 T} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{206}{111} + 3 \ln \frac{\zeta}{2} + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.74)$$

• Coeficiente η_7

$$\begin{aligned} \eta_7 = & -\frac{1}{p} \left\{ \left[\frac{4(\zeta + 6G)(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2) + 6G\zeta(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{G\zeta(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \right] \mu \eta \right. \\ & + \left. \frac{3(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2} \eta^2 \right. \\ & + \left. \frac{128\pi}{15} \frac{\sigma}{mc} \frac{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)}{(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \frac{\zeta^4}{K_2^2(\zeta)} P_7 \mu^2 \eta \right\}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\eta_7^{BT} = \frac{125}{3072} \frac{m}{n\pi\sigma^2} \zeta^{-1} \left[1 - \frac{41}{20} \frac{1}{\zeta} + \frac{19561}{1920} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{128099}{1536} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.76)$$

$$\eta_7^{AT} = \frac{9}{100} \frac{kT}{nc^2\pi^2\sigma^2} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{2263}{1080} + 3 \ln \frac{\zeta}{2} + 3\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.77)$$

• **Coeficiente η_8**

$$\eta_8 = \frac{1}{p} \left[\frac{3(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2} \eta^2 \right], \quad (2.78)$$

$$\eta_8^{BT} = \frac{375}{8192} \frac{m}{n\pi\sigma^2} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{55}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{2685}{128} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{21301}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.79)$$

$$\eta_8^{AT} = \frac{1}{96} \frac{kT}{nc^2\pi^2\sigma^2} \zeta^4 \left[1 + \left(4 + 6 \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 6\gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.80)$$

Verificando-se todas as expansões para baixas temperaturas, vemos que todas elas são inversamente proporcionais a ζ ou a ζ^2 , e que, portanto, no limite para ($\zeta \gg 1$) ou de baixas temperaturas (o que corresponde ao caso não-relativístico) obtemos o resultado de que a pressão dinâmica se anula. Da mesma maneira, observando as expansões para altas temperaturas (caso também conhecido por ultra-relativístico), constatamos que elas são diretamente proporcionais a ζ^2 ou a ζ^4 , e quando fazemos o limite para ($\zeta \ll 1$), todos estes coeficientes se anulam. Concluimos, então, que a pressão dinâmica tende a zero nesses dois limites.

Para os coeficientes do fluxo de calor, assim como para as suas expansões, obtivemos os seguintes resultados:

• **Coeficiente λ**

$$\lambda = \frac{3}{32\pi} \frac{ck}{\sigma} \frac{\zeta^4 K_2^2(\zeta)(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2}{[(2 + \zeta^2)K_2(2\zeta) + 5\zeta K_3(2\zeta)]}, \quad (2.81)$$

$$\lambda^{BT} = \frac{75}{128} \frac{k}{\sigma} \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{13}{16} \frac{1}{\zeta} - \frac{1951}{512} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{57335}{8192} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.82)$$

$$\lambda^{AT} = \frac{ck}{\pi\sigma} \left[1 - \frac{1}{4} \zeta^2 - \left(\frac{13}{64} + \frac{1}{3} \ln \zeta - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{3} \gamma \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.83)$$

• Coeficiente λ_1

$$\lambda_1 = \frac{T}{p} \left\{ \left[\frac{(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(\zeta + 5G - G^2\zeta)(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta + 2G^3\zeta^2 - 2G\zeta^2)} + \frac{(\zeta + 5G)}{\zeta G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \right] \lambda \eta \right. \\ \left. - \frac{m}{k} \lambda^2 \frac{(\zeta^2 + 5G\zeta - G^2\zeta^2 - 5G^2)(\zeta + 4G - G^2\zeta)}{\zeta^2 G^2 (\zeta + 5G - G^2\zeta)^2 (1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \right\}, \quad (2.84)$$

$$\lambda_1^{BT} = \frac{375}{4096} \frac{kT}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{51}{8\zeta} - \frac{1723}{128} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{51777}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.85)$$

$$\lambda_1^{AT} = \frac{7}{48} \frac{kT}{n\pi^2\sigma^2} \zeta^2 \left[1 + \left(\frac{53}{84} + \frac{11}{7} \ln\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \frac{11}{7} \gamma \right) \zeta^2 + \dots \right]. \quad (2.86)$$

• Coeficiente λ_2

$$\lambda_2 = \frac{2T}{p} \frac{1}{\zeta(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \lambda \mu, \quad (2.87)$$

$$\lambda_2^{BT} = \frac{75}{1024} \frac{kT}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{71}{8\zeta} - \frac{689}{384} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{9301}{3072} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.88)$$

$$\lambda_2^{AT} = \frac{3}{10} \frac{kT}{n\pi^2\sigma^2} \left[1 - \frac{3}{40} \zeta^2 - \left(\frac{289}{1600} + \frac{151}{1200} \ln \zeta - \frac{5}{16} \ln 2 + \frac{151}{1200} \gamma \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.89)$$

• Coeficiente λ_3

$$\lambda_3 = \frac{1}{p} \left\{ \frac{m}{k} \left[\left[\frac{(5G\zeta - 5G^2 + \zeta^2 - G^2\zeta^2)}{\zeta^2 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right] \left[\frac{(G\zeta - 1)(1 + 15G\zeta + 2\zeta^2 - 12G^2\zeta^2 - 2G\zeta^3 + 2G^3\zeta^3)}{\zeta G(1 - 5G\zeta + \zeta^2 G^2 - \zeta^2)^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(3 + \zeta G)}{3\zeta G} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\zeta} \frac{\zeta}{(1 - 5G\zeta + \zeta^2 G^2 - \zeta^2)} \right] + \frac{5(7G^3\zeta + 2G^2\zeta^2 - 30G^2 - 17G\zeta - 2\zeta^2)}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)^3 (1 - 5G\zeta + \zeta^2 G^2 - \zeta^2)} \right. \\ \left. - \frac{(50G^2 - 15G\zeta - 5G^3\zeta - 4\zeta^2 + 4G^2\zeta^2)}{3\zeta^2 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right\} \lambda^2 - \frac{(3\zeta^2 + 30G\zeta - 4G^2\zeta^2 + 70G^2 - 20G^3\zeta + G^4\zeta^2)}{G(20G + 3\zeta - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \\ \times \frac{\lambda}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{d\eta}{d\zeta} - \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma}{ck} \frac{\zeta^3}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{P_2}{K_2^2(\zeta)} \eta \lambda^2$$

$$-\frac{\zeta}{\zeta + 5G - G^2\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{\zeta(20G + 3\zeta - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \right] \eta\lambda \} \quad (2.90)$$

$$\lambda_3^{BT} = \frac{375}{4096} \frac{k}{n\pi\sigma^2} \left[1 - \frac{29}{32} \frac{1}{\zeta} + \frac{4685}{256} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{414883}{4096} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.91)$$

$$\lambda_3^{AT} = \frac{5}{8} \frac{k}{n\pi^2\sigma^2} \left[1 - \frac{49}{180} \zeta^2 - \frac{1183}{8640} \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.92)$$

• **Coefficiente λ_4**

$$\begin{aligned} \lambda_4 = & -\frac{T}{p^2} \left\{ \frac{m}{k} \left\{ \frac{(5G\zeta - 5G^2 + \zeta^2 - G^2\zeta^2)}{G^2\zeta^3(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \left[\frac{\zeta}{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\zeta} \right. \right. \right. \\ & + \frac{(25G - 11G^2\zeta - G\zeta^2 + G^3\zeta^2 + 6\zeta)}{3G(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \left. \left. \left. + \frac{(4\zeta^2 + 15G\zeta - 4G^2\zeta^2 - 50G^2 + 5G^3\zeta)}{G^2\zeta^3(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{5(7G^3\zeta + 2G^2\zeta^2 - 30G^2 - 17G\zeta - 2\zeta^2)}{G\zeta^3(\zeta + 5G - G^2\zeta)^3(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)} \right\} \lambda^2 \right. \\ & \left. + \frac{(10G\zeta + 3\zeta^2 + 72G^2\zeta^2 + 8G\zeta^3 - 8G^3\zeta^3 - 50G^2 + 160G^3\zeta - 35G^4\zeta^2)}{G^2\zeta^2(\zeta + 5G - G^2\zeta)(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \eta\lambda \right. \\ & \left. - \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma}{kc} \frac{\zeta^2}{G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{P_2}{K_2^2(\zeta)} \eta\lambda^2 \right\}, \quad (2.93) \end{aligned}$$

$$\lambda_4^{BT} = -\frac{6375}{131072} \frac{1}{n^2\pi\sigma^2} \zeta^{-2} \left[1 - \frac{503}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{603727}{2176} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right], \quad (2.94)$$

$$\lambda_4^{AT} = \frac{5}{16} \frac{1}{n^2\pi^2\sigma^2} \left[1 - \frac{67}{90} \zeta^2 - \frac{7043}{8640} \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.95)$$

• **Coefficiente λ_5**

$$\lambda_5 = \frac{T}{p^2} \left[\frac{m}{k} \frac{2(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta^3 G(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \lambda^2 + \frac{2(\zeta + 7G)}{\zeta^2 G^2(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \lambda \mu - \frac{32\pi \sigma}{15} \frac{\zeta^2}{ck G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{P_6}{K_2^2(\zeta)} \lambda^2 \mu \right], \quad (2.96)$$

$$\lambda_5^{BT} = \frac{75}{1024} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2} \left[1 + \frac{4}{\zeta} - \frac{941}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{10583}{1536} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.97)$$

$$\lambda_5^{AT} = \frac{27}{40} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2} \left[1 - \frac{1}{5} \zeta^2 - \left(\frac{8963}{43200} + \frac{1177}{5400} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{101}{216} \ln 2 \right) \zeta^4 \dots \right]. \quad (2.98)$$

• **Coeficiente λ_6**

$$\lambda_6 = \frac{1}{p} \left[\frac{2(G^2\zeta^2 - 5G\zeta - \zeta^2 + 6G^2)}{\zeta G^2(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \mu \lambda - \frac{2}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} + \frac{m}{k} \frac{2(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta^2(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \lambda^2 - \frac{32\pi \sigma}{15} \frac{\zeta^3}{ck K_2^2(\zeta)} \frac{P_6}{(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \lambda^2 \mu \right], \quad (2.99)$$

$$\lambda_6^{BT} = \frac{3075}{8192} \frac{k}{n \pi \sigma^2} \left[1 + \frac{535}{164} \frac{1}{\zeta} - \frac{16281}{5248} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{34953}{5248} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.100)$$

$$\lambda_6^{AT} = \frac{27}{10} \frac{k}{n \pi^2 \sigma^2} \left[1 - \frac{27}{120} \zeta^2 - \left(\frac{8951}{43200} + \frac{71}{432} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{175}{432} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.101)$$

• **Coeficiente λ_7**

$$\lambda_7 = \frac{1}{p^2} \frac{mT}{k} \left[\frac{2(5G^2 - \zeta^2 - 5G\zeta + G^2\zeta^2)}{G^2\zeta^3(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right] \lambda^2, \quad (2.102)$$

$$\lambda_7^{BT} = \frac{1125}{4096} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2} \zeta^{-1} \left[1 + \frac{171}{8} \frac{1}{\zeta} - \frac{1363}{128} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{10445}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.103)$$

$$\lambda_7^{AT} = \frac{5}{8} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2} \left[1 - \frac{3}{10} \zeta^2 - \left(\frac{17}{64} + \frac{7}{24} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{5}{8} \ln 2 \right) \zeta^4 \dots \right]. \quad (2.104)$$

• Coeficiente λ_8

$$\lambda_8 = \frac{1}{p} \frac{m}{k} \left[\frac{2(5G^2 - \zeta^2 - 5G\zeta + G^2\zeta^2)}{G\zeta^2(\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \right] \lambda^2, \quad (2.105)$$

$$\lambda_8^{BT} = \frac{1125}{4096} \frac{k}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{371}{8} \frac{1}{\zeta} - \frac{443}{128} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{14655}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.106)$$

$$\lambda_8^{AT} = \frac{5}{2} \frac{k}{n\pi^2\sigma^2} \left[1 - \frac{7}{40} \zeta^2 - \left(\frac{97}{320} + \frac{11}{48} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{9}{16} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.107)$$

Uma análise mais detalhada desses coeficientes nos mostra que, com exceção dos coeficientes λ_4 e λ_7 , os quais se anulam no limite não-relativístico, isto é, quando $\zeta \gg 1$, todos os demais são diferentes de zero. Para altas temperaturas somente o coeficiente λ_1 se anula. Todos os demais coeficientes são diferentes de zero, no limite de $\zeta \ll 1$.

Finalmente, consideremos, agora, todos os coeficientes e as respectivas expansões para o deviante do tensor pressão:

• Coeficiente μ

$$\mu = \frac{15}{32\pi} \frac{mc}{\sigma} \frac{\zeta^3 G^2 K_2^2(\zeta)}{[(2 + 15\zeta^2)K_2(2\zeta) + \zeta(49 + 3\zeta^2)K_3(2\zeta)]}, \quad (2.108)$$

$$\mu^{BT} = \frac{5}{32} \left(\frac{mkT}{\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{25}{16} \frac{1}{\zeta} - \frac{293}{1536} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{20519}{24576} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.109)$$

$$\mu^{AT} = \frac{3}{5} \frac{kT}{\pi c \sigma} \left[1 + \frac{1}{20} \zeta^2 + \left(-\frac{29}{1600} + \frac{1}{50} (\ln \zeta + \gamma) \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.110)$$

• Coeficiente μ_1

$$\mu_1 = \frac{2}{p} \frac{(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta G(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \lambda \mu, \quad (2.111)$$

$$\mu_1^{BT} = \frac{75}{1024} \frac{k}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{271}{8} \frac{1}{\zeta} - \frac{809}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{7893}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.112)$$

$$\mu_1^{AT} = \frac{3}{5} \frac{k}{n\pi^2\sigma^2} \left[1 - \frac{1}{5} \zeta^2 - \left(\frac{299}{1600} + \frac{301}{1200} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{7}{16} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.113)$$

• Coeficiente μ_2

$$\mu_2 = \frac{2}{nmp} \left[\frac{(\zeta + 6G)}{G^3 \zeta} \mu^2 + \frac{m}{k} \lambda \mu \frac{(\zeta + 6G - G^2 \zeta)}{G^2 \zeta^2 (\zeta + 5G - G^2 \zeta)} \right], \quad (2.114)$$

$$\mu_2^{BT} = \frac{25}{512} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2} \left[1 + \frac{25}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{215}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{40321}{3072} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.115)$$

$$\mu_2^{AT} = \frac{21}{50} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2} \left[1 - \frac{13}{70} \zeta^2 - \left(\frac{753}{11200} + \frac{1399}{8400} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{29}{112} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.116)$$

• Coeficiente μ_3

$$\mu_3 = -\frac{1}{p} \left[\frac{2}{T} \frac{(\zeta + 6G - G^2 \zeta)}{G(\zeta + 5G - G^2 \zeta)} \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + \frac{2}{T} \frac{(2G^2 \zeta^2 + 7G^3 \zeta - 2\zeta^2 - 30G^2 - 17G\zeta)}{G\zeta(\zeta + 5G - G^2 \zeta)^2} \mu \lambda - \frac{16\pi}{15} \frac{n\sigma}{cp} \frac{\zeta^3}{G} \frac{P_4}{K_2^2(\zeta)} \lambda^2 \mu \right], \quad (2.117)$$

$$\mu_3^{BT} = \frac{2175}{65536} \frac{k}{n\pi\sigma^2 T} \left[1 + \frac{33471}{232} \frac{1}{\zeta} + \frac{28145}{11136} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{8016541}{89088} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.118)$$

$$\mu_3^{AT} = \frac{4}{5} \frac{k}{n\pi^2 \sigma^2 T} \left[1 - \frac{17}{160} \zeta^2 + \left(\frac{741}{1600} + \frac{623}{2400} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.119)$$

• Coeficiente μ_4

$$\mu_4 = \frac{2}{n^2 m^2 c^2 p} \left[\frac{T}{c^2} \frac{(6 + G\zeta)(\zeta + 6G - G^2 \zeta)}{G^3 \zeta (\zeta + 5G - G^2 \zeta)} \lambda \mu + \frac{(1 + G\zeta)(\zeta + 6G)}{G^4 \zeta} \mu^2 + \frac{8\pi}{15} \frac{m\sigma}{k^2 c} \frac{\zeta^2}{G^3} \frac{\lambda^2 \mu}{K_2^2(\zeta)} P_4 \right], \quad (2.120)$$

$$\mu_4^{BT} = \frac{25}{512} \frac{1}{n^3 \pi \sigma^2 k T} \left[1 + \frac{33}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{827}{96} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{13841}{512} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.121)$$

$$\mu_4^{AT} = \frac{29}{40} \frac{1}{n^3 \pi^2 \sigma^2 k T} \left[1 - \frac{657}{2320} \zeta^2 - \left(\frac{65}{928} + \frac{1679}{6960} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{423}{1160} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.122)$$

• **Coefficiente μ_5**

$$\mu_5 = -\frac{2}{p^2} \left\{ \frac{(7G^3\zeta + 2G^2\zeta^2 - 30G^2 - 17G\zeta - 2\zeta^2)}{\zeta^2 G^2 (\zeta + 5G - G^2\zeta)^2} \lambda\mu + \frac{(\zeta + 6G - G^2\zeta)}{\zeta^2 G^3 (\zeta + 5G - G^2\zeta)} \left[G\zeta \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} \mu \right. \right. \\ \left. \left. + (\zeta - 3G - G^2\zeta) \lambda\mu \right] + \frac{k}{m} \frac{(\zeta + 4G - G^2\zeta)(\zeta + 6G)}{\zeta G^4} \mu^2 - \frac{16\pi}{15} \frac{\sigma}{ck} \frac{\zeta^2}{G^2} \frac{P_4}{K_2^2(\zeta)} \lambda^2 \mu \right\}, \quad (2.123)$$

$$\mu_5^{BT} = \frac{25}{512} \frac{1}{n^2 \pi \sigma^2 T} \left[1 + \frac{751}{64} \frac{1}{\zeta} + \frac{20771}{1536} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{2093485}{24576} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.124)$$

$$\mu_5^{AT} = \frac{13}{10} \frac{1}{n^2 \pi^2 \sigma^2 T} \left[1 - \frac{127}{520} \zeta^2 - \left(\frac{1239}{20800} + \frac{103}{600} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{79}{260} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.125)$$

• **Coefficiente μ_6**

$$\mu_6 = \frac{4}{p} \frac{(\zeta + 6G)}{G^2 \zeta} \mu^2, \quad (2.126)$$

$$\mu_6^{BT} = \frac{25}{256} \frac{m}{n \pi \sigma^2} \left[1 + \frac{33}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{1991}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{4691}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.127)$$

$$\mu_6^{AT} = \frac{54}{25} \frac{kT}{nc^2 \pi^2 \sigma^2} \left[1 + \frac{1}{60} \zeta^2 - \left(\frac{59}{1600} + \frac{9}{400} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{1}{16} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.128)$$

• **Coefficiente μ_7**

$$\mu_7 = \frac{1}{p} \left\{ \left[\frac{14}{3} \frac{(\zeta + 6G)}{G^2 \zeta} + \frac{2(G^2\zeta^2 - 5G\zeta - \zeta^2 + 6G^2)}{\zeta G^3 (1 - 5G\zeta + G^2\zeta^2 - \zeta^2)} \right] \mu^2 - \frac{2(\zeta + 6G)}{G^2 (1 - 5G\zeta + G^2\zeta^2 - \zeta^2)} \mu \frac{\partial\mu}{\partial\zeta} \right. \\ \left. - \frac{2(2\zeta^3 - 5\zeta + 19G\zeta^2 - 30G - 2G^2\zeta^3 + 45G^2\zeta - 9G^3\zeta^2)}{G\zeta(3\zeta + 20G - 2G\zeta^2 - 13G^2\zeta + 2G^3\zeta^2)} \mu\eta + \frac{32\pi}{15} \frac{nc\sigma}{p} \frac{\zeta^3}{K_2^2(\zeta)} \frac{\eta\mu^2}{G} P_3 \right\}, \quad (2.129)$$

$$\mu_7^{BT} = \frac{25}{256} \frac{m}{n \pi \sigma^2} \left[1 + \frac{551}{192} \frac{1}{\zeta} + \frac{18619}{4608} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{88279}{24576} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.130)$$

$$\mu_7^{AT} = \frac{9}{5} \frac{kT}{nc^2 \pi^2 \sigma^2} \left[1 - \frac{37}{900} \zeta^2 - \left(\frac{30337}{216000} + \frac{1139}{6000} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{59}{240} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.131)$$

• Coeficiente μ_8

$$\mu_8 = -\frac{8}{p} \left[\frac{(\zeta + 6G)}{\zeta G^2} - \frac{32\pi}{105} \frac{nc\sigma}{p} \zeta^3 \frac{P_8}{K_2^2(\zeta)} \mu \right] \mu^2, \quad (2.132)$$

$$\mu_8^{BT} = \frac{675}{3584} \frac{m}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{2539}{648} \frac{1}{\zeta} + \frac{17231}{3456} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{321973}{82944} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.133)$$

$$\mu_8^{AT} = \frac{504}{125} \frac{kT}{nc^2\pi^2\sigma^2} \left[1 + \frac{9}{560} \zeta^2 - \left(\frac{1}{28} + \frac{121}{4900} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{1}{16} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.134)$$

• Coeficiente μ_9

$$\mu_9 = \frac{2(\zeta + 6G)}{p G^2 \zeta} \mu^2, \quad (2.135)$$

$$\mu_9^{BT} = \frac{25}{512} \frac{m}{n\pi\sigma^2} \left[1 + \frac{33}{8} \frac{1}{\zeta} + \frac{1991}{384} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{4691}{1024} \frac{1}{\zeta^3} + \dots \right], \quad (2.136)$$

$$\mu_9^{AT} = \frac{27}{25} \frac{kT}{nc^2\pi^2\sigma^2} \left[1 + \frac{1}{60} \zeta^2 - \left(\frac{59}{1600} + \frac{9}{400} (\ln \zeta + \gamma) - \frac{1}{16} \ln 2 \right) \zeta^4 + \dots \right]. \quad (2.137)$$

Observando-se cada uma das expansões acima, tanto no limite para baixas temperaturas como para altas temperaturas, vemos que todas partem de um valor finito diferente de zero e tendem para outro valor finito diferente de zero, e que, portanto, nenhuma delas se anula nesses limites.

2.8 As Equações de Burnett Não-Relativísticas

Nesta seção, vamos mostrar que as equações de Burnett relativísticas, dadas por (2.45), (2.48) e (2.50), recaem nas expressões não-relativísticas quando se considera $\zeta \gg 1$. Veremos que as equações para o fluxo de calor q^r e para o deviante do tensor pressão $p^{<\theta\phi>}$ correspondem exatamente àquelas expressões obtidas inicialmente por Chapman e por Burnett, na notação apresentada por Wang Chang e Uhlenbeck [22].

Vamos iniciar com a pressão dinâmica. Observamos que todas as expansões para baixas temperaturas, para essa equação de Burnett, são inversamente proporcionais a ζ ou a ζ^2 . Portanto, no limite quando $T \rightarrow 0$, ou que $\zeta \rightarrow \infty$, temos para a equação (2.45):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \varpi^{(2)} = 0, \quad (2.138)$$

isto é, todos os termos se anulam, como era de se esperar, pois estamos tratando de gases monatômicos rarefeitos.

A expressão não-relativística para o fluxo de calor é dada por:

$$\begin{aligned} q_i^{(2)} = & -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} + \theta_2 \left[\frac{2T}{3} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \right] \\ & + \theta_3 \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \left(D_{\alpha i} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha i} \right) + \theta_4 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(D_{\alpha i} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha i} \right) \\ & + \theta_5 \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \left(D_{\alpha i} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha i} \right), \end{aligned} \quad (2.139)$$

onde D_{ij} é dado por

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.140)$$

e os coeficientes θ_n são dados em primeira aproximação por:

$$\theta_1 = \frac{15}{4} \left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{\mu^2}{\rho T}, \quad \theta_2 = -\frac{45}{8} \frac{\mu^2}{\rho T}, \quad \theta_3 = -\frac{3\mu^2}{p\rho}, \quad \theta_4 = -\frac{3\mu^2}{\rho}, \quad (2.141)$$

$$\theta_5 = \frac{3\mu^2}{\rho T} \left(\frac{35}{4} + \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) - \frac{9}{5} \frac{\mu^3}{\rho k T^2} \sqrt{\frac{4kT}{\pi m}} \int_0^\infty dg e^{-g^2} \left(g^9 - \frac{7}{2} g^7 \right) Q_\eta(g, T). \quad (2.142)$$

A equação de Burnett para o fluxo de calor (2.139), assim como as expressões para os coeficientes θ_n , foram extraídas do trabalho de Wang Chang e Uhlenbeck [22]. Essas expressões para θ_n valem, em geral, para todos os modelos moleculares.

Vamos analisar, inicialmente, o coeficiente θ_5 , o qual é um pouco mais complicado que os demais, pois apresenta uma integral que deve ser determinada. Essa integral, segundo a notação de Wang Chang e Uhlenbeck, é função da velocidade relativa g medida em unidades de $\sqrt{4kT/m}$ e da seção de choque $Q_\eta(g, T)$. Para o nosso caso, onde o modelo é o das esferas rígidas, a seção de choque é $Q_\eta(g) = \frac{4}{3}\pi\sigma$. Desta forma, procedendo-se à integração, este coeficiente pode ser escrito como:

$$\theta_5 = \frac{3\mu^2}{\rho T} \left(\frac{35}{4} + \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) - \frac{9}{8} \frac{\mu^2}{\rho T} = \frac{213}{8} \frac{\mu^2}{\rho T}, \quad (2.143)$$

onde utilizamos o resultado de que para esferas rígidas $\mu \propto T^{1/2}$.

Assim, todos os coeficientes θ_n estão expressos em função do coeficiente de viscosidade cisalhante μ , da temperatura T e da densidade $\rho = nm$.

A fim de facilitar a nossa comparação, vamos escrever o quinto termo da equação (2.139) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial x_r} \frac{\partial v_r}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_r} \left[D_{ri} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ri} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_r}{\partial x_r}. \quad (2.144)$$

Desta maneira, podemos reescrever a equação de Burnett para o fluxo de calor (2.139), como segue, já deixando-a numa forma que possibilite uma fácil comparação com a expressão que surgirá da nossa equação relativística (2.48),

$$q_i^{(2)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{2T}{3} \theta_2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} + \theta_4 \frac{\partial}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right) + \left(\theta_1 + \frac{4}{3} \theta_2 \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \\ + \theta_3 \frac{\partial p}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right) + \left(\theta_5 + 2\theta_2 \right) \frac{\partial T}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right) + \theta_2 \frac{\partial T}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right). \quad (2.145)$$

Vamos, agora, passar ao limite não-relativístico cada um dos termos da equação de Burnett relativística (2.48) obtida por nós, e deixá-la na forma da equação (2.145). Para tanto, consideremos um referencial geral, onde a quadrivelocidade em componentes contravariantes e covariantes é definida por:

$$U^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad U_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (2.146)$$

essas componentes, no limite quando $v \ll c$ ficam aproximadas por:

$$U^\mu \approx (c, \vec{v}), \quad U_\mu \approx (c, -\vec{v}). \quad (2.147)$$

Desta maneira, considerando-se a equação (2.48), a definição para a derivada covariante (1.64), as definições (2.146), e ainda as expansões para baixas temperaturas para cada um dos termos do fluxo de calor, obtemos:

$$q_i^{(2)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{15}{4} \frac{\mu^2}{nm} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} + 3 \frac{\mu^2}{nm} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right) + \frac{15}{4} \frac{\mu^2}{nmT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \\ - 3 \frac{\mu^2}{nmp} \frac{\partial p}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right) + \frac{123}{8} \frac{\mu^2}{nmT} \frac{\partial T}{\partial x_r} \left(D_{ri} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ri} \right)$$

$$-\frac{45}{8} \frac{\mu^2}{nmT} \frac{\partial T}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right), \quad (2.148)$$

a qual é a própria equação de Burnett não relativística (2.145). Na seção (C.8) do apêndice C, mostramos com detalhes o cálculo do limite não-relativístico a partir da forma relativística para alguns dos termos dessa equação .

Para o deviante do tensor pressão, cuja expressão completa foi primeiramente derivada por Burnett [29], é, segundo Wang Chang and Uhlenbeck [22], dada por:

$$\begin{aligned} p_{\langle ij \rangle}^{(2)} = & p\delta_{ij} - 2\mu \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) + \omega_1 \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) + \omega_2 \left(L_{ij} - \frac{1}{3} L_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \\ & - \omega_2 \left(M_{ij} - \frac{1}{3} M_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) - 2\omega_2 \left(N_{ij} - \frac{1}{3} N_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) + \omega_3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) \\ & + \omega_4 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) + \omega_5 \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) \\ & + \omega_6 \left(Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right), \end{aligned} \quad (2.149)$$

onde as quantidades tensoriais L_{ij} , M_{ij} , N_{ij} e Q_{ij} são definidas por:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad (2.150)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \right), \quad (2.151)$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \left(D_{\alpha j} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha j} \right) + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} \left(D_{\alpha i} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{\alpha i} \right) \right], \quad (2.152)$$

$$Q_{ij} = \left(D_{i\alpha} - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{i\alpha} \right) \left(D_{\alpha j} - \frac{1}{3} D_{\mu\mu} \delta_{\alpha j} \right). \quad (2.153)$$

A seguir, reescreveremos essa equação de modo a facilitar a comparação com os nossos resultados. Em primeiro lugar, devemos levar em conta o fato de não estarmos considerando as forças externas, logo $X_j = 0$ na equação (2.150), que fica:

$$L_{ij} = -\frac{k}{m} \left[\frac{1}{2p} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \frac{T}{p^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{T}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad (2.154)$$

onde utilizamos $\rho = mn$.

Assim, temos que o deviante do tensor pressão (2.149) pode ser reescrito da seguinte maneira, já deixando-o numa forma acessível para a comparação,

$$\begin{aligned}
p_{\langle ij \rangle}^{(2)} = & -2\mu(D_{ij} - \frac{1}{3}D_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) + \omega_3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) - \omega_2 \frac{kT}{mp} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) \\
& + \omega_5 \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) + \omega_2 \frac{kT}{mp^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) - \left(\omega_2 \frac{k}{mp} - \omega_4 \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) - 2\omega_2(N_{ij} - \frac{1}{3}N_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) + \omega_1(D_{ij} - \frac{1}{3}D_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) \\
& - \omega_2(M_{ij} - \frac{1}{3}M_{\alpha\alpha}\delta_{ij}) + \omega_6(Q_{ij} - \frac{1}{3}Q_{\alpha\alpha}\delta_{ij}), \tag{2.155}
\end{aligned}$$

onde os coeficientes ω_n são dados por:

$$\omega_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{\mu^2}{p}, \quad \omega_2 = \frac{2\mu^2}{p}, \quad \omega_3 = \frac{3\mu^2}{T\rho}, \quad \omega_4 = 0, \tag{2.156}$$

$$\omega_5 = \frac{3\mu}{\rho T} \frac{d\mu}{dT} + \frac{9}{20} \frac{\mu^3}{\rho k T^3} \sqrt{\frac{4kT}{\pi m}} \int_0^\infty dg g^3 e^{-g^2} (g^8 - 9g^6 + \frac{63}{4}g^4) Q_\eta, \tag{2.157}$$

$$\omega_6 = \frac{8\mu^2}{p} - \frac{16}{35} \frac{\mu^3}{pkT} \sqrt{\frac{4kT}{\pi m}} \int_0^\infty dg g^3 e^{-g^2} (g^6 - \frac{7}{2}g^4) Q_\eta. \tag{2.158}$$

Analogamente, como fizemos para os coeficientes do fluxo de calor, as integrais em ω_5 e ω_6 podem ser resolvidas. Assim, o resultado para esses coeficientes é:

$$\omega_5 = \frac{3\mu}{\rho T} \frac{d\mu}{dT} - \frac{9}{64} \frac{\mu^2}{\rho T^2} = \frac{87}{64} \frac{\mu^2}{\rho T^2}, \quad \omega_6 = \frac{8\mu^2}{p} - \frac{10}{35} \frac{\mu^2}{p} = \frac{54}{7} \frac{\mu^2}{p}. \tag{2.159}$$

Portanto, partindo da equação de Burnett relativística para o deviante do tensor pressão (2.50), e considerando-se (2.146) e (1.64) e ainda as expansões para baixas temperaturas que encontramos para todos os coeficientes, obtemos:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} = & -2\mu \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} - 2 \frac{\mu^2}{\rho p} \frac{\partial^2 p}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \frac{87}{64} \frac{\mu^2}{\rho T^2} \frac{\partial T}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial T}{\partial x_{j \rangle}} \\
& + 2 \frac{\mu^2}{\rho p^2} \frac{\partial p}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial p}{\partial x_{j \rangle}} - 2 \frac{\mu^2}{\rho p T} \frac{\partial p}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial T}{\partial x_{j \rangle}} - 4 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{\langle r}} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_r} \\
& + 4 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} D_{rr} + \frac{54}{7} \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v_{\langle \langle i}} \partial v_{\langle j \rangle}}{\partial x_{r \rangle} \partial x_r} - 2 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v_r}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_r}, \tag{2.160}
\end{aligned}$$

a qual é a forma não-relativística para a equação de Burnett para o deviante do tensor pressão. Vemos, desta forma, que a equação de Burnett relativística, para o deviante do tensor pressão, corresponde ao mesmo resultado obtido por Wang Chang e Uhlenbeck.

2.9 Conclusão

Um dos objetivos desta tese, que se encontra desenvolvido ao longo deste capítulo que ora estamos concluindo, é a determinação das equações de Burnett para um gás relativístico. Para atingirmos tal objetivo, baseamo-nos na teoria cinética e no método dos momentos de Grad. Os conceitos básicos necessários para se chegar a estes resultados foram descritos no capítulo que precede a este.

As equações de Burnett relativísticas foram obtidas considerando-se, nas integrais que surgem no termo de produção, uma seção transversal de choque σ constante.

Analisando-se o resultado obtido para a pressão dinâmica, equação (2.45), verificamos que essa é composta por nove termos. O primeiro surge da primeira iteração maxwelliana, cujo coeficiente é denominado de viscosidade volumétrica. A seguir, deparamo-nos com dois termos lineares cujos coeficientes são proporcionais aos laplacianos da temperatura e da pressão. Observamos, também, o interessante resultado, já constatado anteriormente por Kremer e Müller [21], de que o coeficiente, que é proporcional ao laplaciano da temperatura, contribui de uma maneira mais efetiva para a pressão dinâmica do que a viscosidade volumétrica. Essa constatação ficará mais óbvia quando compararmos os gráficos desses coeficientes, que será um dos objetivos do próximo capítulo. A seguir, temos ainda mais seis termos não lineares, os quais são: o quadrado do divergente da quadrivelocidade, a sua parte sem traço e a sua parte anti-simétrica, um termo proporcional ao produto de dois gradientes da temperatura, outro proporcional ao produto de dois gradientes da pressão e um que é proporcional ao produto do gradiente da pressão pelo gradiente da temperatura. Vale ressaltar, aqui, que o coeficiente desse último termo contribui significativamente para a pressão dinâmica, muito mais que o coeficiente do laplaciano da temperatura, como poderemos verificar no próximo capítulo, onde voltaremos a comentar esses resultados.

Outro fato que merece ser mencionado com relação à pressão dinâmica, e que pode ser facilmente constatado, é que tanto para baixas temperaturas como para altas temperaturas os coeficientes se anulam, o que é verdadeiro quando se trata de gases monatômicos rarefeitos.

A seguir, analisaremos os resultados obtidos para o fluxo de calor, equação (2.48). Como podemos observar, essa expressão é composta por nove termos, sendo o primeiro deles a forma relativística da lei de Fourier, que surge como resultado da primeira iteração maxwelliana. O termo seguinte, linear e proporcional ao gradiente do divergente da quadrivelocidade, é um termo cujo coeficiente se anula para o caso de altas temperaturas e tende a um valor finito no caso de baixas temperaturas, diferentemente de todos os demais termos. O coeficiente do termo proporcional ao gradiente da pressão vezes o divergente da quadrivelocidade, isto é, λ_4 , anula-se no caso de baixas temperaturas, enquanto que os demais coeficientes tendem a um valor limite. A seguir, verificamos que, para o caso de baixas temperaturas, a equação de

Burnett relativística para o fluxo de calor apresenta o mesmo resultado obtido por Wang Chang e Uhlenbeck [22].

No que se refere à equação de Burnett relativística. (2.50), observamos que ela é composta por dez termos, sendo o primeiro oriundo da primeira iteração e os nove restantes da segunda iteração. O segundo termo apresenta uma força que é dada pelo laplaciano sem o traço da temperatura, o terceiro uma força dada pelo laplaciano sem o traço da pressão. O quarto, o quinto e sexto termo apresentam combinações dos gradientes sem o traço da temperatura e da pressão, enquanto que os demais são combinações do gradiente da quadrivelocidade sem o traço. E, analogamente ao caso do fluxo de calor, a expressão relativística apresenta o mesmo resultado obtido por Wang Chang e Uhlenbeck quando passamos cada termo para o caso não-relativístico.

No capítulo 4, aplicaremos os resultados encontrados ao longo desse capítulo, no estudo da propagação de ondas sonoras.

Capítulo 3

Modelo Cinético de Anderson e Witting

3.1 Introdução

Ao longo deste capítulo nos defrontaremos com dois objetivos principais. O primeiro deles será a determinação das equações de Burnett relativísticas segundo o modelo desenvolvido por Anderson e Witting [24], que simplifica, significativamente, o termo de colisão da equação de Boltzmann. Esse modelo também é conhecido por modelo de tempo de relaxação, que é uma variação, para o caso relativístico, do modelo BGK desenvolvido por Marle [27] em 1965.

No modelo de Marle, a equação de Boltzmann, para um gás relativístico e sem forças externas, é dada por:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = -\frac{m}{\tau}(f - f^{(0)}), \quad (3.1)$$

onde m é a massa de repouso de uma partícula do gás, τ é um tempo característico que está relacionado com o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas entre as partículas e f e $f^{(0)}$ são as funções de distribuição fora do equilíbrio e no equilíbrio local respectivamente.

Por outro lado, a equação de Boltzmann, segundo o modelo BGK relativístico, proposta por Anderson e Witting, tem a seguinte forma:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = -\frac{U_L^\mu p_\mu}{c^2 \tau}(f - f^{(0)}). \quad (3.2)$$

Comparando-se as duas equações, vemos que elas são ligeiramente diferentes, isto é, na equação de Marle o termo de colisão é escrito, explicitamente, em função da massa m das partículas, e na equação de Anderson e Witting ele é expresso em termos da quadrivelocidade, do quadrimomento e do quadrado da velocidade da luz, isto é, $U_L^\mu p_\mu c^{-2}$, onde o índice L , na quadrivelocidade, significa que estamos considerando a decomposição de Landau e Lifshitz, que será discutida com mais detalhes na próxima seção.

A pergunta que se poderia fazer agora é: por que Anderson e Witting escolheram essa forma para a equação de Boltzmann? Para responder a essa pergunta consideraremos que

a função de distribuição nas equações (3.1) e (3.2) não dependa das coordenadas espaciais e ainda utilizaremos o referencial de Lorentz em repouso no fluido, isto é, $U_L^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Desta maneira, o termo de corrente para ambas as equações se reduz a $\frac{p^0}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ e obtemos assim duas equações diferenciais lineares de primeira ordem não homogêneas. A solução para essas equações pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo superior, como, por exemplo, [20], podendo ser escrita da seguinte maneira:

$$f_{m,aw}(t) = e^{-\frac{t}{T_{(m,aw)}}} \left[\frac{1}{T_{(m,aw)}} \int_0^t e^{\frac{t'}{T_{(m,aw)}}} f^{(0)}(t') dt' + f(0) \right], \quad (3.3)$$

onde adotamos a seguinte convenção : $f_m(t)$ é a solução para a equação de Marle, enquanto que $f_{aw}(t)$, a solução para o modelo de Anderson e Witting. Assim $T_m = E\tau/mc^2$ é o tempo de relaxação da função de distribuição, correspondente à equação de Marle. Observamos que esse tempo é uma função da energia da partícula $E = cp^0$. E $T_{aw} = \tau$ é o tempo de relaxação da equação de Anderson e Witting. Desta forma, para o caso não relativístico, temos que $E \approx mc^2$ e, portanto, $T_{(m,aw)} = \tau$, para ambas as equações. Por outro lado, quando consideramos partículas de massa de repouso muito pequena, como é o caso dos neutrinos, $E = c|\mathbf{p}|$ e o tempo de relaxação da função de distribuição T_m tende para o infinito, enquanto no modelo de Anderson e Witting isso não acontece. Desta maneira, observamos que o modelo de Anderson e Witting é mais geral do que o modelo de Marle, pois, além de satisfazer o caso não-relativístico, ainda pode ser aplicado a partículas de massa muito pequenas.

O segundo objetivo deste capítulo será fazer uma análise através de gráficos para todos os coeficientes que aparecem nas equações de Burnett relativísticas, obtidos pelo modelo de Anderson e Witting, e aqueles obtidos na seção (2.7), do capítulo 2, através da solução da equação de Boltzmann exata, aplicando-se o método de Grad.

3.2 Decomposição de Landau e Lifshitz

Da mesma maneira que no capítulo 2, a fim de podermos obter as equações de Burnett relativísticas, precisaremos determinar a função de distribuição fora do equilíbrio f , ou a função de distribuição de Grad. Como podemos observar na equação (3.2), o termo de colisão é função apenas da diferença entre as funções de distribuição fora do equilíbrio e no equilíbrio local. Bem mais simples no entanto, do que na equação de Boltzmann exata, onde temos uma integral envolvendo o produto de duas funções de distribuição, uma para cada feixe de partículas.

Para encontrarmos as equações de Burnett relativísticas, no capítulo 2, empregamos o método de Grad e a decomposição devida a Eckart [16]. Segundo essa decomposição, a velocidade hidrodinâmica U^μ está diretamente relacionada ao quadrifluxo de partículas N^μ , de acordo com a relação:

$$U^\mu = c \frac{N^\mu}{\sqrt{N^\nu N_\nu}}. \quad (3.4)$$

Essa definição está normalizada segundo a relação $U^\mu U_\mu = c^2$, como vimos no capítulo 1. E, assim, a (3.4) pode ser escrita como:

$$U^\mu = c^2 \frac{N^\mu}{N^\nu U_\nu} = \frac{N^\mu}{n}, \quad (3.5)$$

onde $n = N^\mu U_\mu c^{-2}$ é a densidade do número de partículas. Vimos, também, que o tensor energia momento nessa decomposição era dado segundo a equação (1.69) por:

$$T^{\mu\nu} = p^{<\mu\nu>} - (p + \varpi)\Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}(U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + \frac{ne}{c^2}U^\mu U^\nu. \quad (3.6)$$

Vejamos, agora, como fica definida a quadrivelocidade hidrodinâmica U_L^μ e o tensor energia momento $T^{\mu\nu}$ na decomposição de Landau e Lifshitz [28]. Neste capítulo, empregaremos o índice L para salientar que estamos considerando a decomposição de Landau e Lifshitz. Portanto, nessa decomposição, a quadrivelocidade é definida por [11]:

$$U_L^\mu = \frac{cU_\nu T^{\mu\nu}}{\sqrt{U_\sigma T^{\sigma\alpha} T_{\alpha\beta} U^\beta}}. \quad (3.7)$$

De acordo com essa definição, a quadrivelocidade está relacionada ao fluxo de energia, ou, o que é equivalente, à densidade do momento. Analogamente à decomposição de Eckart, essa velocidade também tem a normalização $U_L^\mu U_{L\mu} = c^2$.

O quadrifluxo de partículas e o tensor energia momento têm, nesse caso, a seguinte decomposição:

$$N^\mu = n_L U_L^\mu + I^\mu, \quad (3.8)$$

$$T^{\mu\nu} = p_L^{<\mu\nu>} - (p_L + \varpi_L)\Delta_L^{\mu\nu} + \frac{n_L e_L}{c^2} U_L^\mu U_L^\nu. \quad (3.9)$$

Observamos que na equação (3.8), para o quadrifluxo de partículas, aparece o termo I^μ , o qual, como veremos a seguir, está relacionado com o fluxo de calor e com a pressão dinâmica.

Dadas as definições acima, vamos estabelecer agora as relações que existem entre as grandezas termodinâmicas nas duas decomposições. Iniciemos comparando a equação (3.5) e a (3.8) para N^μ , isto é,

$$nU^\mu = n_L U_L^\mu + I^\mu. \quad (3.10)$$

Multiplicando-se agora, escalarmente o lado esquerdo dessa igualdade por nU_μ e o lado direito por $n_L U_{L\mu} + I_\mu$, aplicando-se a normalização para a quadrivelocidade e ainda levando-se em conta o fato de que I^μ é perpendicular à quadrivelocidade $U_{L\mu}$, isto é, $U_{L\mu} I^\mu = 0$, obtemos:

$$n = n_L \left(1 + \frac{1}{n_L^2 c^2} I^\mu I_\mu \right)^{1/2} \approx n_L \left(1 + \frac{1}{2n_L^2 c^2} I^\mu I_\mu \right), \quad (3.11)$$

que é a relação entre as densidades de partículas nas duas decomposições. Observamos que em uma teoria linear o segundo termo, proporcional ao produto $I^\mu I_\mu$ é desprezado, e temos então que $n = n_L$. Salientamos, ainda, que não iremos considerar termos de ordem superior aos termos quadráticos, por isso o resultado (3.11) é aproximado.

Da igualdade (3.10), podemos obter ainda uma relação entre as quadrivelocidades nas duas decomposições, a saber:

$$U_L^\mu = \frac{n}{n_L} U^\mu - \frac{1}{n_L} I^\mu, \quad (3.12)$$

ou, considerando-se a relação aproximada para as densidades do número de partículas (3.11),

$$U_L^\mu \approx U^\mu \left(1 + \frac{1}{2n^2 c^2} I^\alpha I_\alpha \right) - \frac{I^\mu}{n}. \quad (3.13)$$

Com o auxílio das transformações para a densidade do número de partículas n e da quadrivelocidade U^μ , podemos, analogamente, obter a seguinte relação entre os projetores nas duas decomposições:

$$\Delta_L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U_L^\mu U_L^\nu = \Delta^{\mu\nu} - \frac{1}{n^2 c^4} U^\mu U^\nu I^\alpha I_\alpha + \frac{1}{n c^2} \left(U^\mu I^\nu + U^\nu I^\mu \right) - \frac{1}{n^2 c^2} I^\mu I^\nu, \quad (3.14)$$

onde, segundo a nossa aproximação, consideraremos somente duplos produtos envolvendo I^μ .

De posse da transformação para o projetor $\Delta_L^{\mu\nu}$, da quadrivelocidade e da densidade do número de partículas, podemos, agora, relacionar as expressões para o tensor energia momento nas duas decomposições. Portanto, das equações (3.6) e (3.9), obtemos:

$$\begin{aligned} p^{<\mu\nu>} - (p + \varpi) \Delta^{\mu\nu} + \frac{2}{c^2} U^{<\mu} q^{\nu>} + \frac{en}{c^2} U^\mu U^\nu = p_L^{<\mu\nu>} - \left[p_L + \varpi_L + \frac{1}{3nc^2} h_L I^\alpha I_\alpha \right] \Delta_L^{\mu\nu} \\ - \frac{2}{nc^2} (\varpi_L + n_L h_L) U^{<\mu} I^{\nu>} + \frac{1}{2n^2 c^2} n_L h_L I^{<\mu} I^{\nu>} + \left[\frac{e_L n_L}{c^2} \left(1 + \frac{1}{n^2 c^2} I^\alpha I_\alpha \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{n^2 c^4} p_L I^\alpha I_\alpha \right] U^\mu U^\nu, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde utilizamos as seguintes relações:

$$U^\mu I^\nu + U^\nu I^\mu = 2U^{<\mu} I^{\nu>} + \frac{2}{3} U^\alpha I_\alpha \Delta^{\mu\nu} = 2U^{<\mu} I^{\nu>} + \frac{2}{3n_L} I^\alpha I_\alpha \Delta^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

$$U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu = 2U^{<\mu} q^{\nu>}, \quad I_\mu U^\mu = \frac{1}{n_L} I^\alpha I_\alpha. \quad (3.17)$$

Comparando-se ambos os membros da igualdade (3.15) e, ainda, considerando-se a definição da entalpia por partícula $h_L = e_L + p_L/n_L$, obtemos as seguintes relações para as grandezas e fluxos termodinâmicos:

- **Temperatura**

$$T_L = T \left[1 + \frac{1}{2n^2 c^2} \frac{(1 + \xi G_L)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} I^\alpha I_\alpha \right], \quad (3.18)$$

- **Pressão Hidrostática**

$$p_L = p \left[1 + \frac{1}{2n^2 c^2} \frac{\xi(\xi + 6G_L - G_L^2 \xi)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} I^\alpha I_\alpha \right], \quad (3.19)$$

- **Entalpia por Partícula**

$$h_L = h \left[1 + \frac{1}{2n^2 c^2} \frac{(1 + \xi G_L)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} I^\alpha I_\alpha \right], \quad (3.20)$$

- **Pressão Dinâmica**

$$\varpi_L = \varpi - \frac{m}{n} \frac{(3\xi + 20G_L - 13G_L^2 \xi - 2G_L \xi^2 + 2G_L^3 \xi^2)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} I^\alpha I_\alpha, \quad (3.21)$$

- **Quadrifluxo de Partículas**

$$I^\mu = -\frac{1}{h} q^\mu + \frac{1}{nh^2} \varpi q^\mu, \quad (3.22)$$

- **Deviante do Tensor Pressão**

$$p_L^{<\mu\nu>} = p^{<\mu\nu>} - \frac{h}{nc^2} I^{<\mu} I^{\nu>}. \quad (3.23)$$

Nas relações acima, $G_L = G_L(\xi)$ e $\xi = mc^2/kT_L$. Podemos, também, escrever as seguintes relações para os operadores:

$$D_L = D + \frac{1}{nh} q^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_L = \nabla - \frac{1}{nc^2 h} \left[q^\mu D + U^\mu q^\nu \nabla_\nu \right], \quad (3.24)$$

as quais correspondem às relações de transformação para a derivada temporal convectiva e para o gradiente. Na seção (D.1) do apêndice D, mostramos, em detalhes, como determinamos algumas das relações de transformação referidas acima.

3.3 A Função de Distribuição de Grad e a Expressão para o Terceiro Momento na Decomposição de Landau e Lifshitz

Devemos recordar que um dos nossos objetivos neste capítulo é a obtenção das equações de Burnett relativísticas no modelo descrito por Anderson e Witting. Para tanto, analogamente ao desenvolvimento descrito no capítulo 2, para a equação de Boltzmann exata, vamos precisar das expressões para a função de distribuição de Grad e do terceiro momento, porém agora na decomposição de Landau e Lifshitz. Para a determinação da função de distribuição de Grad, nesta nova decomposição, faremos a sua expansão num polinômio no quadrivetor quantidade de movimento p^μ em torno da função local de Maxwell-Jüttner,

$$f = f_L^{(0)}(1 + r_\mu p^\mu + r_{\mu\nu} p^\mu p^\nu), \quad (3.25)$$

onde os coeficientes r_μ e $r_{\mu\nu}$ são calculados a partir das definições do quadri-fluxo de partículas N^μ e do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, dados respectivamente por

$$N^\mu = c \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad T^{\mu\nu} = c \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.26)$$

e a função de Maxwell-Jüttner nessa decomposição é:

$$f_L^{(0)} = \frac{n_L}{4\pi k T_L m^2 c K_2(\xi)} e^{-\frac{1}{k T_L} p^\mu U_{L\mu}}. \quad (3.27)$$

Os coeficientes r_μ e $r_{\mu\nu}$ podem ser decompostos da seguinte maneira:

$$r_\mu = \lambda_L U_{L\mu} + \lambda_L^\nu \Delta_{L\nu\mu}, \quad (3.28)$$

$$r_{\mu\nu} = \Lambda_L g_{\mu\nu} + \tilde{\Lambda}_L U_{L\mu} U_{L\nu} + \frac{1}{2} \Lambda_L^\sigma (\Delta_{L\sigma\nu} U_{L\mu} + \Delta_{L\sigma\mu} U_{L\nu}) + \Lambda_L^{\langle\sigma\tau\rangle} (\Delta_{L\sigma\mu} \Delta_{L\tau\nu} - \frac{1}{3} \Delta_{L\sigma\tau} \Delta_{L\mu\nu}). \quad (3.29)$$

Assim, para determinarmos a forma completa da função de distribuição (3.25), devemos calcular as quantidades λ_L , λ_L^ν , Λ_L , $\tilde{\Lambda}_L$, Λ_L^σ e $\Lambda_L^{\langle\sigma\tau\rangle}$. Para tanto, devemos substituir as decomposições para r_μ e para $r_{\mu\nu}$ e a função de Maxwell-Jüttner (3.27) na função de distribuição (3.25). A seguir, substituímos essa expressão resultante para f nas definições para N^μ e $T^{\mu\nu}$ dadas

em (3.26) que, depois de resolvidas, devem ser comparadas com (3.8) e (3.9). Esse processo nos fornecerá um sistema de equações envolvendo essas quantidades e os fluxos termodinâmicos que, ao ser resolvido, nos fornece:

$$\Lambda_L^\nu = \frac{1}{(\xi + 5G_L - \xi G_L^2)} \frac{G_L}{p_L k T_L} I^\nu, \quad \lambda_L^\nu = -\frac{(\xi + 5G_L)}{(\xi + 5G_L - \xi G_L^2)} \frac{I^\nu}{p_L}, \quad (3.30)$$

$$\Lambda_L^{\langle\sigma\tau\rangle} = \frac{p_L^{\langle\sigma\tau\rangle}}{p_L} \frac{\xi}{2G_L} \frac{1}{m^2 c^2}, \quad \lambda_L = \frac{3(\xi + 6G_L - G_L^2 \xi)}{(3\xi + 20G_L - 2G_L \xi^2 - 13\xi G_L^2 + 2\xi^2 G_L^3)} \frac{\varpi_L}{p_L k T_L} \quad (3.31)$$

$$\Lambda_L = \frac{(\xi^3 + 5G_L \xi^2 - 6\xi G_L^2 - G_L^2 \xi^3 + 15G_L + 2\xi)}{(3\xi + 20G_L - 2G_L \xi^2 - 13\xi G_L^2 + 2\xi^2 G_L^3)} \frac{\varpi_L}{p_L k T_L m \xi}, \quad (3.32)$$

$$\tilde{\Lambda}_L = \frac{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)}{(3\xi + 20G_L - 2G_L \xi^2 - 13\xi G_L^2 + 2\xi^2 G_L^3)} \frac{\varpi_L}{\xi k^2 T_L^2 p_L}. \quad (3.33)$$

Assim, de posse desses resultados, encontramos a função de distribuição de Grad na decomposição de Landau e Lifshitz,

$$\begin{aligned} f = f_L^{(0)} & \left\{ 1 + \frac{\varpi_L}{p_L} \frac{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)}{(3\xi + 20G_L - 2G_L \xi^2 - 13\xi G_L^2 + 2\xi^2 G_L^3)} \right. \\ & \times \left[\frac{(15G_L + 2\xi - 6G_L^2 \xi + 5G_L \xi^2 + \xi^3 - G_L^2 \xi^3)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} + \frac{3\xi}{m c^2} \frac{(\xi + 6G_L - G_L^2 \xi)}{(1 - 5G_L \xi - \xi^2 + G_L^2 \xi^2)} U_L^\mu p_{L\mu} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi}{m^2 c^4} U_L^\mu U_L^\nu p_{L\mu} p_{L\nu} \right] + \frac{I^\mu}{p_L} \frac{1}{(\xi + 5G_L - G_L^2 \xi)} \left[-(\xi + 5G_L) p_{L\mu} + \frac{G_L}{k T_L} U_L^\nu p_{L\mu} p_{L\nu} \right] \right. \\ & \left. + \frac{p_L^{\langle\mu\nu\rangle}}{p_L} \frac{\xi}{2G_L} \frac{1}{m^2 c^2} p_{L\mu} p_{L\nu} \right\}. \quad (3.34) \end{aligned}$$

cuja forma difere da expressão (2.16) vista no capítulo 2, que emprega a decomposição de Eckart, somente nos termos envolvendo o quadrifluxo de partículas I^μ .

Encontrada a função de distribuição fora do equilíbrio (3.34), podemos determinar a expressão para o terceiro momento, dada por:

$$T^{\mu\nu\sigma} = c \int p^\mu p^\nu p^\sigma f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.35)$$

Portanto, substituindo-se a função de distribuição (3.34) nessa equação para o terceiro momento e fazendo-se as integrações necessárias, com a utilização dos resultados para as integrais $Z^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ descritas na seção A.4 do apêndice A, simplificando-se, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\sigma} = & (n_L C_{L1} + C_{L2} \varpi_L) U_L^\mu U_L^\nu U_L^\sigma + \frac{c^2}{6} (n_L m^2 - n_L C_{L1} - C_{L2} \varpi_L) (g^{\mu\nu} U_L^\sigma + g^{\mu\sigma} U_L^\nu + g^{\nu\sigma} U_L^\mu) \\
& - h_L \tilde{C}_{L3} (g^{\mu\nu} I^\sigma + g^{\mu\sigma} I^\nu + g^{\nu\sigma} I^\mu) + (m^2 + 6m G_L \tilde{C}_{L3}) (U_L^\mu U_L^\nu I^\sigma + U_L^\mu U_L^\sigma I^\nu + U_L^\nu U_L^\sigma I^\mu) \\
& + C_4 (p_L^{\langle\mu\nu\rangle} U_L^\sigma + p_L^{\langle\mu\sigma\rangle} U_L^\nu + p_L^{\langle\nu\sigma\rangle} U_L^\mu), \tag{3.36}
\end{aligned}$$

que, assim como a sua expressão equivalente na decomposição de Eckart (2.21), é dada em termos dos quatorze campos, e difere daquela nos termos dependentes do quadrifluxo de partículas I^μ . Os coeficientes C_{L1} , C_{L2} , e C_{L4} assumem a mesma forma, assim como estão definidos em (C.171), porém salientamos que $G(\zeta)$ deve ser substituído por $G_L(\xi)$ e ζ por ξ , enquanto para o coeficiente \tilde{C}_{L3} temos uma forma diferente que é dada por:

$$\tilde{C}_{L3} = -\frac{m}{\xi} \frac{G_L}{(\xi + 5G_L - G_L^2 \xi)}. \tag{3.37}$$

3.4 As Equações de Burnett Relativísticas no Modelo Cinético de Anderson e Witting

Com o que vimos nas seções anteriores, já estamos aptos para a determinação das equações de Burnett relativísticas no modelo cinético de Anderson e Witting.

Multiplicando-se ambos os membros da equação (3.2) por $cp^\nu p^\sigma$, integrando, e aplicando-se a definição (3.35) para o terceiro momento, a equação de Anderson e Witting fica escrita como:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu\sigma} = -\frac{U_{L\mu}}{c^2 \tau} (T^{\mu\nu\sigma} - T_E^{\mu\nu\sigma}), \tag{3.38}$$

onde $T_E^{\mu\nu\sigma}$ é a expressão para o terceiro momento na decomposição de Landau e Lifshitz para o equilíbrio, isto é, quando fazemos na expressão (3.36) $\varpi_L = 0$, $I^\mu = 0$ e $p_L^{\langle\mu\nu\rangle} = 0$, que são os valores em equilíbrio para os fluxos termodinâmicos.

Multiplicando-se ambos os membros da equação (3.38) por $U_{L\nu} U_{L\sigma}$ obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (m^2 + C_{L1}) D_L n_L - \frac{\xi}{2T_L} (n_L C'_{L1} + C'_{L2} \varpi_L) D_L T_L + \frac{1}{2} C_{L2} D_L \varpi_L + \frac{1}{6} \left[n_L m^2 + 5(n_L C_{L1} \right. \\
& \left. + C_{L2} \varpi_L) \right] \nabla_{L\mu} U_L^\mu - \frac{5}{c^2} \frac{\xi}{T_L} \left(h'_L \tilde{C}_{L3} + h_L \tilde{C}'_{L3} \right) I^\alpha \nabla_{L\alpha} T_L - \frac{2}{c^2} C_{L4} p_L^{\langle\mu\nu\rangle} \nabla_{L\nu} U_{L\mu}
\end{aligned}$$

$$+\left(m^2 + \frac{5}{c^2}h_L\tilde{C}_{L3}\right)\nabla_{L\mu}I^\mu - \frac{3}{c^2}\left(m^2 + \frac{5}{c^2}h_L\tilde{C}_{L3}\right)I^\mu D_L U_{L\mu} = \frac{1}{2\tau}C_{L2}\varpi_L, \quad (3.39)$$

que é a equação de campo para a pressão dinâmica no modelo de Anderson e Witting. Para determinarmos esse resultado, consideramos a expressão para a derivada do terceiro momento $\partial_\mu T^{\mu\nu\sigma}$, que se encontra explicitada na seção (D.3) do apêndice D.

Multiplicando-se agora a (3.38) por $U_{L\nu}\Delta_{L\sigma}^\tau$, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{6}\left[n_L m^2 + 5(n_L C_{L1} + C_{L2}\varpi_L)\right]D_L U_L^\tau + \frac{c^4}{6}\left[(m^2 - C_{L1})\nabla_L^\tau n_L + \frac{\xi}{T_L}(n_L C'_1 + C'_2\varpi_L)\nabla_L^\tau T_L \right. \\ & \left. - C_{L2}\nabla_L^\tau \varpi_L\right] - \frac{c^2\xi}{T_L}C'_{L4}p_L^{\langle\sigma\tau\rangle}\nabla_{L\sigma}T_L + C_{L4}\left[c^2\Delta_{L\mu}^\tau\nabla_{L\sigma}p_L^{\langle\sigma\mu\rangle} - 2p_L^{\langle\mu\tau\rangle}D_L U_{L\mu}\right] \\ & + (m^2 c^2 + 6h_L\tilde{C}_{L3})(I^\sigma\nabla_{L\sigma}U_L^\tau + I^\tau\nabla_{L\sigma}U_L^\sigma) - \frac{5\xi}{T_L}(h_L\tilde{C}'_{L3} + h'_L\tilde{C}_{L3})I^\tau D_L T_L \\ & + (m^2 c^2 + 5h_L\tilde{C}_{L3})D_L I^\tau + h_L\tilde{C}_{L3}I_\alpha\nabla_L^\tau U_L^\alpha = -\frac{1}{\tau}(m^2 c^2 + 5h_L\tilde{C}_{L3})I^\tau, \end{aligned} \quad (3.40)$$

que é a equação de campo para o quadrifluxo de partículas I^τ .

E, finalmente, multiplicando a (3.38) por $(\Delta_{L\nu}^{\langle\tau}\Delta_{L\sigma}^{\epsilon\rangle} - \frac{1}{3}\Delta_{L\nu\sigma}\Delta_{L\tau}^{\epsilon\rangle})$ e ainda fazendo uso da relação (2.36) obtemos:

$$\begin{aligned} & C_{L4}\left(\Delta_{L\mu}^{\langle\epsilon}\Delta_{L\nu}^{\tau\rangle}D_L p_L^{\langle\mu\nu\rangle} + \frac{7}{3}p_L^{\langle\epsilon\tau\rangle}\nabla_{L\sigma}U_L^\sigma - 2p_L^{\langle\epsilon\langle\sigma\rangle}\nabla_L^\tau U_{L\sigma} + 4p_L^{\langle\epsilon\sigma\rangle}\nabla_{L\langle\sigma}U_L^{\tau\rangle}\right) + \frac{c^2}{3}\left(n_L m^2 \right. \\ & \left. - n_L C_{L1} - C_{L2}\varpi_L\right)\nabla_L^{\langle\theta}U_L^{\phi\rangle} + \frac{2\xi}{T_L}\left(h'_L\tilde{C}_{L3} + h_L\tilde{C}'_{L3}\right)I^{\langle\theta}\nabla_L^{\phi\rangle}T_L - \frac{\xi}{T_L}C'_{L4}p_L^{\langle\phi\theta\rangle}D_L T_L \\ & - 2h_L\tilde{C}_{L3}\nabla_L^{\langle\theta}I^{\phi\rangle} + 2(m^2 + 6mG_L\tilde{C}'_{L3})I^{\langle\epsilon}D_L U_L^{\tau\rangle} = -\frac{C_{L4}}{\tau}p_L^{\langle\epsilon\tau\rangle}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

que é a equação de campo para o deviante do tensor pressão.

Agora que temos as equações de campo para os fluxos termodinâmicos, escritas no modelo de Anderson e Witting e na decomposição de Landau e Lifshitz, podemos escolher dois caminhos alternativos: um deles, seria eliminar as derivadas temporais convectivas dessas equações, isto é, no caso da equação de campo para a pressão dinâmica, eliminar $D_L n_L$, $D_L T_L$ e $D_L U_L^\mu$, as quais seriam obtidas através das equações de balanço para o quadrifluxo de partículas N^μ e para o tensor energia momento $T^{\mu\nu}$, definidas por (3.8) e (3.9) e assim obter a equação de evolução para ϖ_L . Procedimento análogo realizamos no capítulo 2, aplicando o método de Grad. E, desta forma, obter todos os coeficientes que aparecem nas equações de Burnett relativísticas.

O outro procedimento a ser seguido, e que será adotado por nós, é o seguinte: como queremos comparar os resultados obtidos para os coeficientes das equações de Burnett, através deste modelo, com aqueles obtidos pela equação de Boltzmann exata, vamos, a partir das equações de campo para os fluxos termodinâmicos, fazer as transformações da decomposição de Landau e Lifshitz para a decomposição de Eckart.

Desta maneira, considerando-se, na equação de campo para a pressão dinâmica (3.39), as relações de transformação que se encontram na seção (3.2) e que são dadas por (3.11), (3.13), e (3.18) até (3.23), assim como, utilizando-se as expressões para os operadores ∇_L e D_L dadas por (3.24), obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\varpi = & -\frac{2\tau}{C_2} \left\{ \frac{1}{2}(m^2 + C_1) \left[-n\nabla_\mu U^\mu + \frac{1}{ph} q^\mu \nabla_\mu p - \frac{1}{Th} q^\mu \nabla_\mu T \right] + \frac{1}{2} C_2 D\varpi \right. \\
& - \frac{1}{2T} \zeta \left(nC'_1 + C'_2 \varpi \right) \left(DT + \frac{1}{nh} q^\mu \nabla_\mu T \right) + \frac{1}{6} \left[nm^2 + 5(nC_1 + C_2 \varpi) \right] \left[\nabla_\mu U^\mu - \frac{1}{nc^2 h} q^\mu DU_\mu \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{nh} \nabla^\mu q_\mu - \frac{\zeta G}{n^2 h^2} q^\mu \nabla_\mu p + \frac{1}{nhT} \left(1 + \frac{\zeta G'}{G} \right) q^\mu \nabla_\mu T - \frac{1}{n^2 c^2 h} U^\mu q_\sigma \nabla^\sigma U_\mu \right] \\
& - \frac{2}{c^2} C_4 p^{<\mu\nu>} \nabla_\mu U_\nu + \frac{3}{c^2 h} \left(m^2 + \frac{5}{c^2} h \tilde{C}_3 \right) q^\sigma DU_\sigma - \frac{1}{h} \left(m^2 + \frac{5}{c^2} h \tilde{C}_3 \right) \nabla_\mu q^\mu \\
& \left. - \frac{\zeta}{T} \frac{h'}{h^2} \left(m^2 + \frac{5}{c^2} h \tilde{C}_3 \right) q^\mu \nabla_\mu T + \frac{5}{c^2 T} \left(\frac{h'}{h} \tilde{C}_3 + \tilde{C}'_3 \right) q^\sigma \nabla_\sigma T \right\} + \frac{m}{n} \frac{1}{h^2} \frac{C_5}{C_6} q^\sigma q_\sigma, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

que é a expressão para a pressão dinâmica. Observemos que o último termo surgiu do fato de termos considerado a relação de transformação (3.21) para ϖ_L . Notemos, também, que essa equação está expressa em função de ζ e $G(\zeta)$.

Da equação de campo para o quadrifluxo de partículas I^τ (3.40), considerando-se as mesmas relações de transformação empregadas para o caso da pressão dinâmica, obtemos:

$$\begin{aligned}
q^\tau = & -\frac{\tau}{m} \frac{\zeta G C_9}{C_{11}} \left\{ \frac{c^2}{6} \left[nm^2 + 5(nC_1 + C_2 \varpi) \right] \left[DU^\tau + \frac{1}{nh} \Delta_\mu^\tau Dq^\mu + \frac{\zeta}{T} \frac{1}{nh} \frac{h'}{h} q^\tau DT \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{nh} q^\tau \nabla_\mu U^\mu + \frac{1}{nh} q^\mu \nabla_\mu U^\tau \right] + \frac{c^4}{6} \left[(m^2 - C_1) \left(\frac{1}{kT} \nabla^\tau T + \frac{1}{c^2 h} q^\tau \nabla_\mu U^\mu \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{p}{kT^2} \nabla^\tau T \right) + \frac{\zeta}{T} (nC'_1 + C'_2 \varpi) \nabla^\tau T - C_2 \nabla^\tau \varpi \right] - c^2 \frac{\zeta}{T} C'_4 p^{<\mu\tau>} \nabla_\mu T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +5\frac{\zeta}{hT}\left(h\tilde{C}_3 + h\tilde{C}'_3\right)q^\tau DT - \left(\frac{m^2c^2}{h} + 5\tilde{C}_3\right)\left(\Delta_\mu^\tau Dq^\mu + \frac{\zeta}{T}\frac{h'}{h}q^\tau DT\right) - \tilde{C}_3q_\mu\nabla^\tau U^\mu \\
& - \left(\frac{m^2c^2}{h} + 6\tilde{C}_3\right)\left(q^\tau\nabla_\mu U^\mu + q_\mu\nabla^\mu U^\tau\right) + C_4\left[c^2\nabla_\mu p^{<\mu\tau>} - 2p^{<\mu\tau>}DU_\mu\right] \\
& + \frac{c^2}{6h}\left(m^2 + 5C_1\right)\varpi DU^\tau + \frac{c^4}{6nh}\left(m^2 - C_1\right)\varpi\left(\frac{1}{kT}\nabla^\tau p - \frac{p}{kT^2}\nabla^\tau T\right) \\
& + \frac{c^4}{6}\frac{\zeta}{T}\frac{C'_1}{h}\varpi\nabla^\tau T\}, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

que é a equação para o fluxo de calor. Analogamente, considerando-se a equação (3.41) chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
p^{<\tau\epsilon>} &= -\frac{\tau}{C_4}\left\{C_4\left[\Delta_\mu^{<\tau\epsilon>}\Delta_\nu^{<\epsilon\sigma>}Dp^{<\mu\nu>} + \frac{7}{3}p^{<\tau\epsilon>}\nabla_\mu U^\mu - 2p^{<\epsilon\langle\sigma\rangle}\nabla^\tau U_\sigma + 4p^{<\epsilon\sigma\rangle}\nabla_{<\sigma}U^\tau\right]\right. \\
& + \frac{nc^2}{3}(m^2 - C_1)\left[\nabla^{<\epsilon}U^\tau + \frac{1}{nh}\nabla^{<\epsilon}q^\tau - \frac{\zeta G}{n^2h^2}q^{<\tau\nabla\epsilon>}p + \frac{1}{nhT}\left(1 + \frac{\zeta G'}{G}\right)q^{<\tau\nabla\epsilon>}T\right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{nc^2T}q^{<\epsilon DU^\tau>}\right] - \frac{c}{3}C_2\varpi\nabla^{<\epsilon}U^\tau - \frac{\zeta}{T}C_4p^{<\tau\epsilon>}DT \\
& - \frac{2}{h}\left(m^2 + 6mG\tilde{C}_3\right)q^{<\epsilon DU^\tau>} - 2\frac{\zeta}{T}\left(\frac{h'}{h}\tilde{C}_3 + \tilde{C}'_3\right)q^{<\epsilon\nabla\tau>}T + 2\tilde{C}_3\nabla^{<\epsilon}q^\tau > \\
& \left. + 2\frac{\zeta}{T}\frac{h'}{h}\tilde{C}_3q^{<\epsilon\nabla\tau>}T\right\} + \frac{1}{nc^2h}\lambda^2\left(\nabla^{<\epsilon}T\nabla^\tau T - \frac{2T}{nh}\nabla^{<\epsilon}T\nabla^\tau p + \frac{T^2}{n^2h^2}\nabla^{<\epsilon}p\nabla^\tau p\right), \tag{3.44}
\end{aligned}$$

que é a equação para o deviante do tensor pressão.

Desta maneira, agora que temos as expressões para os fluxos termodinâmicos, ϖ , q^τ e $p^{<\epsilon\tau>}$, vamos, analogamente ao que fizemos no capítulo 2, aplicar sucessivamente o método da iteração maxwelliana, a fim de obtermos, inicialmente, as equações de Navier-Stokes e Fourier, e em seguida, as equações de Burnett relativísticas.

Assim, façamos a primeira iteração maxwelliana nas equações de evolução dadas por (3.42), (3.43) e (3.44). Para tanto, substituiremos os valores em equilíbrio para os fluxos termodinâmicos, isto é, $\varpi = 0$, $q^\tau = 0$ e $p^{<\epsilon\tau>} = 0$ no lado direito dessas equações. Desse modo, obtemos:

$$\varpi^{(1)} = -\eta^{AW} \nabla^\mu U_\mu, \quad q^{(1)\tau} = \lambda^{AW} \left(\nabla^\tau T - \frac{T}{nh} \nabla^\tau p \right), \quad p^{(1)\langle \epsilon \tau \rangle} = 2\mu^{AW} \nabla^{\langle \epsilon} U^{\tau \rangle}, \quad (3.45)$$

onde η^{AW} , λ^{AW} e μ^{AW} são os coeficientes de transporte para a viscosidade volumétrica, condutividade térmica e viscosidade de cisalhamento no modelo de Anderson e Witting, representado pelo índice (AW) e que são, respectivamente, dados por:

$$\eta^{AW} = \frac{1}{6\pi} \frac{(mkT)^{1/2}}{\sigma} \frac{CC_5^2}{C_6 C_{12}}, \quad (3.46)$$

$$\lambda^{AW} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{k^3 T}{m} \right)^{1/2} \frac{C\zeta G C_9^2}{C_{11}}, \quad (3.47)$$

$$\mu^{AW} = \frac{1}{2\pi} \frac{(mkT)^{1/2}}{\sigma} \frac{CG^2}{(\zeta + 6G)}, \quad (3.48)$$

onde o coeficiente C é definido por:

$$C = \left(-\frac{\zeta G C_6}{C_9} \right)^{1/2}, \quad (3.49)$$

e os demais C_n encontram-se definidos na seção (C.7) do apêndice C.

Para obtermos as expressões (3.46) até (3.48), tivemos de fazer a seguinte consideração a respeito do tempo característico τ : o tempo característico adotado, geralmente, nos modelos cinéticos é proporcional ao tempo entre as colisões das partículas e, no caso do modelo de esferas rígidas, que é o modelo empregado por nós, é dado por:

$$\tau = \frac{1}{n\pi a^2 v_s}, \quad (3.50)$$

onde a é o diâmetro das partículas e está relacionado com a seção de choque diferencial σ por $a^2 = 2\sigma$. E v_s é a velocidade adiabática do som, cuja expressão é definida por:

$$v_s = \left(\frac{kT_0 c_p^0 c^2}{h_0 c_v^0} \right) = \left[\frac{(\zeta^2 + 5G\zeta - G^2\zeta^2)}{G(\zeta^2 + 5G\zeta - G^2\zeta^2 - 1)} \frac{kT}{m} \right]^{1/2}, \quad (3.51)$$

onde utilizamos o fato de que $h_0 = mc^2 G$ e c_p^0 e c_v^0 estão dados por (E.31). Assim, com as considerações acima, obtemos, finalmente, para o tempo característico τ , a seguinte expressão:

$$\tau = \frac{1}{2\pi n\sigma} \left[\frac{G(\zeta^2 + 5G\zeta - G^2\zeta^2 - 1)}{\zeta(\zeta + 5G - G^2\zeta)} \frac{m}{kT} \right]^{1/2}. \quad (3.52)$$

Vamos, agora, proceder à segunda iteração maxwelliana. Para tanto, devemos substituir as expressões obtidas para $\varpi^{(1)}$, $q^{(1)\tau}$ e $p^{(1)\langle \tau \epsilon \rangle}$ dadas, respectivamente, por (3.45) nas equações (3.42), (3.43) e (3.44). Nestas condições obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\varpi^{(2)} = & -\eta^{AW} \nabla_{\mu} U^{\mu} + \eta_1^{AW} \nabla_{\nu} \nabla^{\nu} T - \eta_2^{AW} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} p + \eta_3^{AW} \nabla_{\mu} U^{\mu} \nabla_{\nu} U^{\nu} + \eta_4^{AW} \nabla_{\mu} T \nabla^{\mu} T \\
& + \eta_5^{AW} \nabla_{\mu} p \nabla^{\mu} p - \eta_6^{AW} \nabla_{\mu} T \nabla^{\mu} p - \eta_7^{AW} \nabla^{<\mu} U^{\nu>} \nabla_{<\mu} U_{\nu>} \\
& + \eta_8^{AW} \nabla^{[\mu} U^{\nu]} \nabla_{[\mu} U_{\nu]}, \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^{\tau(2)} = & \lambda^{AW} \left(\nabla^{\tau} T - \frac{T}{nh} \nabla^{\tau} p \right) + \lambda_1^{AW} \nabla^{\tau} \nabla_{\mu} U^{\mu} - \lambda_2^{AW} \nabla_{\sigma} \nabla^{<\sigma} U^{\tau>} - \lambda_3^{AW} \nabla^{\tau} T \nabla_{\mu} U^{\mu} \\
& - \lambda_4^{AW} \nabla^{\tau} p \nabla_{\mu} U^{\mu} + \lambda_5^{AW} \nabla_{\sigma} p \nabla^{<\sigma} U^{\tau>} - \lambda_6^{AW} \nabla_{\sigma} T \nabla^{<\sigma} U^{\tau>} \\
& + \lambda_7^{AW} \nabla_{\sigma} p \nabla^{[\sigma} U^{\tau]} - \lambda_8^{AW} \nabla_{\sigma} T \nabla^{[\sigma} U^{\tau]}, \tag{3.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^{<\epsilon\tau>(2)} = & 2\mu^{AW} \nabla^{<\epsilon} U^{\tau>} + \mu_1^{AW} \nabla^{<\epsilon} \nabla^{\tau>} T - \mu_2^{AW} \nabla^{<\epsilon} \nabla^{\tau>} p + \mu_3^{AW} \nabla^{<\epsilon} T \nabla^{\tau>} T \\
& + \mu_4^{AW} \nabla^{<\epsilon} p \nabla^{\tau>} p - \mu_5^{AW} \nabla^{<\epsilon} p \nabla^{\tau>} T + \mu_6^{AW} \nabla^{<\epsilon} U^{\sigma>} \nabla^{\perp} U_{\sigma} \\
& - \mu_7^{AW} \nabla^{<\epsilon} U^{\tau>} \nabla_{\sigma} U^{\sigma} - \mu_8^{AW} \nabla^{<\mu} U^{\nu>} \nabla^{<\perp} U_{\mu>} + \mu_9^{AW} \nabla^{<\epsilon} U^{\sigma} \nabla_{\sigma} U^{\tau>}, \tag{3.55}
\end{aligned}$$

que são, respectivamente, as equações de Burnett relativísticas para a pressão dinâmica, fluxo de calor e deviante do tensor pressão, para o modelo de Anderson e Witting. Analogamente ao que fizemos no capítulo 2, para o caso da equação de Boltzmann exata e aplicando-se o método de Grad, escrevemos todos os gradientes e derivadas materiais que aparecem nas equações (3.42), (3.43) e (3.44) em termos dos gradientes da temperatura, da pressão e da quadrivelocidade. Para tanto, fizemos, mais uma vez, uso das expressões que se encontram deduzidas na seção (C.4) do apêndice C. Como ficou dito acima, todo o processo é análogo ao desenvolvido no capítulo 2, de modo que não vemos razão para repeti-lo em detalhes, aqui, novamente. Se observarmos as equações de Burnett encontradas no capítulo 2, veremos que mantivemos os mesmos termos e na mesma ordem. Apenas, como era de se esperar, os coeficientes de transporte são diferentes. Para o caso da pressão dinâmica eles são dados por:

- Coeficiente η_1^{AW}

$$\eta_1^{AW} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{k}{n\sigma^2} \frac{G^3 \zeta^2 C_6 C_5^2}{C_9 C_{12}} \left[\frac{3C_{10}}{C_6} + \frac{5C_{10}}{\zeta C_9} \right] \frac{C_9^2}{C_{11}} \quad (3.56)$$

- Coeficiente η_2^{AW}

$$\eta_2^{AW} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2} \frac{G \zeta C_5 C_6}{C_9 C_{12}} \left[\left(\frac{3C_{10}}{C_6} - \frac{5C_{10}}{\zeta C_9} \right) \frac{C_9^2}{C_{11}} - \frac{C_5}{\zeta G C_6} \right], \quad (3.57)$$

- Coeficiente η_3^{AW}

$$\begin{aligned} \eta_3^{AW} = & -\frac{1}{12\pi^2} \frac{m}{n\sigma^2} \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta C_5}{C_{12}} \left\{ \frac{C_{12}}{C_5 C_6} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{C_5^2}{C_6 C_{12}} \right] + \left[\frac{3\zeta}{C_6} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{C_{12}}{\zeta C_5} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3C_{10}}{C_6} - \frac{4C_{12}}{\zeta C_5} \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{C_5^2}{3C_6 C_{12}} \right\}, \quad (3.58) \end{aligned}$$

- Coeficiente η_4^{AW}

$$\begin{aligned} \eta_4^{AW} = & -\frac{1}{12\pi^2} \frac{k}{n\sigma^2 T} \left\{ \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta C_5}{C_{12}} \left\{ -C_{10} \left(\frac{3\zeta}{C_6} + \frac{5}{C_9} \right) \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{G \zeta C_9^2}{C_{11}} \right] \right. \right. \\ & \times \left[-\frac{1}{G} \left(1 + 3\frac{G}{\zeta} \right) + \frac{3C_{10}}{G\zeta} + \frac{1}{G} \left(1 + 5\frac{G}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{\zeta G'}{G} \right) - \frac{\zeta G'}{G^2} \left(1 - \frac{5G^2}{\zeta C_9} \right) \right. \\ & \left. \left. - 5\zeta \left[\frac{G'}{\zeta C_9} + \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9} \right) \right] \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta G C_9^2}{C_{11}} \right\} + \frac{\zeta G C_5 C_9^3}{C_{11}^2} \right\}, \quad (3.59) \end{aligned}$$

- Coeficiente η_5^{AW}

$$\begin{aligned} \eta_5^{AW} = & -\frac{1}{12\pi^2} \frac{1}{n^3 \sigma^2 k T} \left\{ \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta C_5}{C_{12}} \left\{ \frac{C_5 (1 + G\zeta)}{C_6 \zeta^2 G^2} \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} + \left[\frac{3(2 + \zeta G) C_{10}}{\zeta^2 G^2} \frac{C_{10}}{C_6} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\zeta + 3G)}{\zeta^2 G^2} + \frac{(\zeta + 5G)(1 + 2\zeta G)}{\zeta^3 G^2} - \frac{3}{\zeta^2 G^3} \left(1 - \frac{5G^2}{\zeta C_9} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\zeta G} \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta G C_9^2}{C_{11}} \right\} + \frac{C_5 C_9^3}{\zeta G C_{11}^2} \right\}, \quad (3.60) \end{aligned}$$

- Coeficiente η_6^{AW}

$$\begin{aligned}
\eta_6^{AW} = & -\frac{1}{12\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2 T} \left\{ \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta C_5}{C_{12}} \left\{ \left[\frac{3C_{10}}{GC_6} + \frac{5G}{\zeta} + \frac{5}{\zeta C_9} \right] \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right] \right. \right. \\
& + \left[-\frac{2(1+\zeta G)}{\zeta G^2} - \frac{3C_{10}}{\zeta GC_6} \left(4 + \frac{\zeta G'}{G} \right) - \frac{3C_{10}}{\zeta^2 G^2} - \frac{1}{\zeta G^2} \left(1 + \frac{5G}{\zeta} \right) \left(2 + \frac{\zeta G'}{G} \right) \right. \\
& - \frac{1}{\zeta G^2} \left(1 + \frac{5G}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{\zeta G'}{G} \right) + \frac{3}{\zeta G} \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) + \frac{1}{\zeta G} \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) \left(2 + \frac{\zeta G'}{G} \right) \\
& \left. \left. + \frac{G'}{G^2} \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) + \frac{5}{G} \left(\frac{G'}{\zeta C_9} + \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9} \right) \right) \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right. \\
& \left. - \frac{C_{12}}{\zeta GC_5} \left(1 + \frac{\zeta G'}{G} \right) \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{C_5^2}{C_6 C_{12}} \right\} - \frac{6C_5 C_9^3}{C_{11}^2} \left. \right\}, \tag{3.61}
\end{aligned}$$

• Coeficiente η_7^{AW}

$$\eta_7^{AW} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{m}{n\sigma^2} \frac{\zeta GC_5 C_6}{C_9 C_{12}} \left\{ \frac{3C_5}{\zeta C_6} - \left[\frac{4(\zeta + 6G)}{\zeta G} + \frac{6C_{10}}{C_6} \right] \frac{G}{(\zeta + 6G)} \right\}, \tag{3.62}$$

• Coeficiente η_8^{AW}

$$\eta_8^{AW} = -\frac{1}{12\pi^2} \frac{m}{n\sigma^2} \frac{GC_5^2}{C_9 C_{12}}. \tag{3.63}$$

Vejamos, agora, as expressões completas para os coeficientes de transporte que aparecem na equação de Burnett relativística para o fluxo de calor:

• Coeficiente λ_1^{AW}

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{AW} = & \frac{1}{4\pi^2} \frac{kT}{n\sigma^2} \frac{\zeta G^2 C_6}{C_{11}} \left\{ \left[\frac{C_{12}}{C_5} - \frac{\zeta}{G} \left(1 + \frac{5G}{\zeta} \right) \right] \frac{C_5^2}{3C_6 C_{12}} - \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) \left[\frac{1}{C_6} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\zeta G} \left(\frac{1}{C_6} - 1 \right) \right] \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right\}, \tag{3.64}
\end{aligned}$$

• Coeficiente λ_2^{AW}

$$\lambda_2^{AW} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{kT}{n\sigma^2} \frac{\zeta G^4 C_6}{C_{11}(\zeta + 6G)}, \tag{3.65}$$

• Coeficiente λ_3^{AW}

$$\begin{aligned}
\lambda_3^{AW} = & -\frac{1}{4\pi^2} \frac{k}{n\sigma^2} \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9}{C_{11}} \left\{ \left[\frac{\zeta^2}{G} \left(1 + \frac{5G}{\zeta}\right) - \zeta \frac{C_{12}}{C_5} \right] \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{C_5^2}{3C_6 C_{12}} \right] \right. \\
& - \frac{5}{C_6} \left[\frac{1}{\zeta C_9} \frac{dG}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9} \right) \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta^2 GC_9^2}{C_{11}} - \left[1 + \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{C_{12}}{\zeta C_5} \right) - \frac{C_{10}}{G} \right] \\
& \times \left(-\frac{GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{C_5^2}{3C_6 C_{12}} - \left(\frac{1}{G} - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) \left[-\frac{1}{C_6} \left(-\frac{C_9}{GC_6}\right)^{1/2} \frac{C_{11}}{GC_9^2} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right] \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{C_6} \left(1 - \frac{1}{\zeta G}\right) \left(1 + \zeta \frac{C_5}{C_6}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{\zeta G} + \frac{\zeta}{GC_6} \frac{dG}{d\zeta} \right] \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right\}. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

• Coeficiente λ_4^{AW}

$$\begin{aligned}
\lambda_4 = & -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2} \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9}{C_{11}} \left\{ \left[1 - \frac{5C_{12}}{\zeta GC_5} \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{C_5^2}{3C_6 C_{12}} - \frac{1}{GC_6} \left(\frac{1}{G} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{5G}{\zeta C_9} \right) \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right] + \left[\frac{G'}{GC_6} \left(\frac{1}{G^2} - \frac{5}{G\zeta} - \frac{5}{\zeta C_9} \right) + \frac{5}{GC_6} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\zeta^2 C_9} \left(-\frac{20}{3} - \frac{10}{C_6} + \frac{5}{G\zeta C_6} - \frac{5}{\zeta G} \right) + \frac{1}{\zeta G} \left(\frac{2}{GC_6} + \frac{1}{G} + \frac{1}{\zeta} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{G^2 \zeta^2} - \frac{1}{G^2 \zeta C_6} \right) \right] \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9^2}{C_{11}} \right\}, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

• Coeficiente λ_5^{AW}

$$\lambda_5^{AW} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2} \frac{G^2 C_6}{C_{11}} \left[\frac{(\zeta + 7G)}{(\zeta + 6G)} + \frac{GC_9}{C_{11}} \right], \tag{3.68}$$

• Coeficiente λ_6^{AW}

$$\begin{aligned}
\lambda_6^{AW} = & -\frac{1}{\pi^2} \frac{k}{n\sigma^2} \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta GC_9}{C_{11}} \left\{ -\zeta \frac{d}{d\zeta} \left[\left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{G^2}{(\zeta + 6G)} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\zeta^2}{2} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\zeta + 6G}{\zeta G} \right) \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{G^2}{\zeta + 6G} + \left(-\frac{GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{G^2 C_9}{4C_{11}} \right\}, \tag{3.69}
\end{aligned}$$

- Coeficiente λ_7^{AW}

$$\lambda_7^{AW} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2} \frac{\zeta G C_6 C_9^2}{C_{11}^2} \left(1 - \frac{5G^2}{\zeta C_9}\right), \quad (3.70)$$

- Coeficiente λ_8^{AW}

$$\lambda_8^{AW} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{k}{n \sigma^2} \frac{\zeta^2 G^2 C_6 C_9^2}{C_{11}^2} \left(1 - \frac{5G^2}{\zeta C_9}\right). \quad (3.71)$$

Finalmente, vamos escrever as expressões para os coeficientes da equação de Burnett relativística para o deviante do tensor pressão:

- Coeficiente μ_1^{AW}

$$\mu_1^{AW} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{k}{n \sigma^2} \frac{\zeta G^3}{(\zeta + 6G)} \frac{C_6 C_{10}}{C_{11}}, \quad (3.72)$$

- Coeficiente μ_2^{AW}

$$\mu_2^{AW} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2} \frac{C_6}{C_9} \frac{G^2}{(\zeta + 6G)} \left(1 + \frac{C_9 C_{10}}{C_{11}}\right), \quad (3.73)$$

- Coeficiente μ_3^{AW}

$$\begin{aligned} \mu_3^{AW} = & -\frac{1}{2\pi^2} \frac{k}{n \sigma^2 T} \left\{ \left(\frac{-GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta G}{(\zeta + 6G)} \left\{ \frac{C_{10}}{C_9} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{-GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \frac{\zeta G C_9^2}{C_{11}} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[\zeta^2 G \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9}\right) - G - \zeta G' \right] \frac{C_9^2}{C_{11}} \left(\frac{-GC_6}{C_9}\right)^{1/2} \right\} + \frac{\zeta G^2 C_9^3 C_6}{2 C_{11}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

- Coeficiente μ_4^{AW}

$$\begin{aligned} \mu_4^{AW} = & -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^3 \sigma^2 k T} \left\{ -\frac{\zeta G^2}{(\zeta + 6G)} \frac{C_6}{C_9} \left\{ -\frac{2(1 + \zeta G)}{\zeta^2 G} - \frac{2}{\zeta} \left[1 + \frac{1}{\zeta G} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{G^2} \left(1 - \frac{6G^2}{\zeta C_9}\right) \right] \frac{C_9^2}{C_{11}} \right\} + \frac{C_6 C_9^3}{\zeta C_{11}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

- Coeficiente μ_5^{AW}

$$\begin{aligned} \mu_5^{AW} = & -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2 \sigma^2 T} \left\{ \left(\frac{-GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta G}{(\zeta + 6G)} \left\{ \frac{2}{\zeta} \left(1 + \frac{\zeta G'}{G} \right) \left(\frac{-GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \right. \right. \\ & - \frac{2}{\zeta G} \frac{C_{10}}{C_9} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{-GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{\zeta G C_9^2}{C_{11}} \right] + \left[\frac{2}{\zeta} \left(4 + \zeta G + 2\zeta \frac{G'}{G} \right) \right. \\ & - \frac{2}{G} \left(1 - \frac{6G^2}{\zeta C_9} \right) + 2 \left[-\zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{G}{\zeta C_9} \right) + \left(2 + \zeta \frac{G'}{G} \right) \frac{G^2}{C_9} \right] \left. \left. \left(\frac{-GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{C_9^2}{C_{11}} \right\} \right. \\ & \left. \left. - 2G \frac{C_6 C_9^3}{C_{11}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

- Coeficiente μ_6^{AW}

$$\mu_6^{AW} = -\frac{1}{\pi^2} \frac{m}{n \sigma^2} \frac{C_6}{C_9} \frac{G^3}{(\zeta + 6G)}, \quad (3.77)$$

- Coeficiente μ_7^{AW}

$$\begin{aligned} \mu_7^{AW} = & \frac{1}{4\pi^2} \frac{m}{n \sigma^2} \frac{\zeta G^2}{(\zeta + 6G)} \frac{C_6}{C_9} \left\{ -\frac{2(\zeta + 6G)}{G} \left(\frac{-C_9}{GC_6^3} \right)^{1/2} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{-GC_6}{C_9} \right)^{1/2} \frac{G^2}{(\zeta + 6G)} \right] \right. \\ & \left. + \left[\frac{7(\zeta + 6G)}{3\zeta G} - \frac{\zeta}{C_6} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\zeta + 6G}{\zeta G} \right) \right] \frac{2G^2}{(\zeta + 6G)} - \frac{2}{3} \frac{C_5}{\zeta C_6} \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

- Coeficiente μ_8^{AW}

$$\mu_8^{AW} = \frac{2}{\pi^2} \frac{m}{n \sigma^2} \frac{C_6}{C_9} \frac{G^3}{(\zeta + 6G)}, \quad (3.79)$$

- Coeficiente μ_9^{AW}

$$\mu_9^{AW} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{m}{n \sigma^2} \frac{C_6}{C_9} \frac{G^3}{(\zeta + 6G)}. \quad (3.80)$$

Com a determinação desses coeficientes, concluímos a primeira etapa deste capítulo. O segundo objetivo será comparar esses resultados com aqueles obtidos através da solução da equação de Boltzmann exata e que se encontram explicitados na seção (2.7) do capítulo 2. Portanto, na próxima seção, iremos comparar esses dois resultados, analisando-se os gráficos para cada coeficiente nos dois métodos em função do parâmetro ζ .

3.5 Comparando os Coeficientes de Transporte

Como já comentamos acima, nesta seção, compararemos os resultados obtidos para os coeficientes de transporte que aparecem nas equações de Burnett relativísticas e que resultaram da solução da equação de Boltzmann exata, com aqueles obtidos através do modelo cinético de Anderson e Witting. Para alcançarmos tal objetivo, faremos os gráficos para cada um dos coeficientes e estudaremos o seu comportamento para uma faixa de valores para a quantidade adimensional ζ .

Assim, nas figuras 3.1 até 3.8 temos os gráficos comparativos correspondentes aos coeficientes das equações de Burnett para a pressão dinâmica (2.45) e (3.53). Nas figuras 3.9 até 3.16, temos os gráficos comparativos correspondentes aos coeficientes das equações de Burnett para o fluxo de calor (2.48) e (3.54) e, finalmente, nas figuras 3.17 até 3.25 os gráficos correspondentes aos coeficientes das equações de Burnett para o deviante do tensor pressão (2.50) e (3.55). Nas figuras 3.26, 3.27 e 3.28 apresentamos os gráficos correspondentes aos coeficientes de transporte das equações de Navier-Stokes e Fourier nos dois métodos. Em todos os gráficos temos duas curvas: uma com linha cheia, que representa o resultado do coeficiente encontrado para a equação de Boltzmann exata, e outra com linha tracejada, que corresponde ao resultado encontrado para o mesmo coeficiente no modelo cinético de Anderson e Witting. Todos os gráficos são dados em função do parâmetro $\zeta = mc^2/kT$, eixo horizontal. No eixo vertical indicamos os coeficientes, sem a sua dimensão, que estão sendo comparados. Temos, ainda, em cada gráfico, uma legenda, para que não haja qualquer dúvida com relação ao método ou modelo a que uma determinada curva corresponde.

As curvas representadas em cada gráfico foram ajustadas no limite ultra-relativístico, isto é, para $\zeta \ll 1$. Esse procedimento é permitido em decorrência da flexibilidade no cálculo do tempo entre duas colisões τ . Vimos na equação (3.50) que esse tempo foi calculado em função da velocidade adiabática do som v_s , dada por (3.51). Mas, esse mesmo tempo, poderia ter sido calculado utilizando-se por exemplo a velocidade média das partículas ou ainda pela velocidade relativa de Møller g . Assim, como temos esta arbitrariedade na escolha da velocidade, podemos multiplicar esse tempo característico por um fator que nos permita ajustar as curvas em um determinado limite, no caso ajustamos no limite ultra-relativístico. Em particular, para o caso dos gráficos correspondentes aos coeficientes da pressão dinâmica, figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 obtivemos os seguintes valores para o ajuste:

$$\frac{\eta_1^{EBE}}{\eta_1^{AW}} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\eta_2^{EBE}}{\eta_2^{AW}} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\eta_3^{EBE}}{\eta_3^{AW}} = 3,000, \quad \frac{\eta_4^{EBE}}{\eta_4^{AW}} = 3,431, \quad (3.81)$$

$$\frac{\eta_5^{EBE}}{\eta_5^{AW}} = 2,837, \quad \frac{\eta_6^{EBE}}{\eta_6^{AW}} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\eta_7^{EBE}}{\eta_7^{AW}} = 1,620, \quad \frac{\eta_8^{EBE}}{\eta_8^{AW}} = 3,000, \quad (3.82)$$

onde os índices EBE e AW correspondem, respectivamente, ao coeficiente obtido pela equação de Boltzmann exata e pelo modelo de Anderson e Witting. Como nós não encontramos as expressões algébricas para os limites não-relativístico e ultra-relativístico para os coeficientes de transporte obtidos pelo modelo de Anderson e Witting, os valores para os ajustes foram encontrados a partir do cálculo numérico, quando da obtenção dos dados necessários para a obtenção das curvas indicadas nos gráficos. As expressões para os coeficientes obtidos pela equação de Boltzmann exata, no caso da pressão dinâmica, são dadas pelas equações (2.57), (2.60), (2.63), (2.66), (2.72), (2.75) e (2.78).

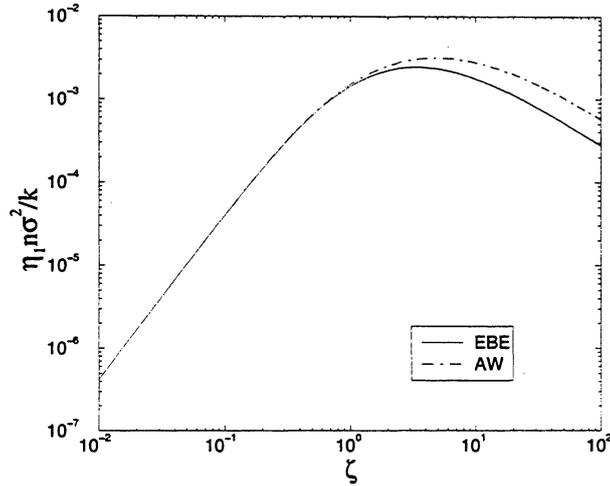


Figura 3.1: Gráfico comparativo para o coeficiente η_1 .

Vamos, agora, analisar cada uma das curvas que aparecem nos gráficos correspondentes aos coeficientes de transporte da equação de Burnett para a pressão dinâmica, isto é, figuras 3.1 até 3.8. Para o primeiro gráfico, coeficiente η_1 , observa-se que as curvas coincidem até aproximadamente o valor $\zeta = 1$, o que corresponde a um regime relativístico. A partir desse valor, as curvas tomam rumos diferentes e nas regiões para $\zeta > 20$, seguem paralelamente, tendendo para zero no regime clássico. Se compararmos este gráfico com o gráfico representado na figura 3.26, para o coeficiente de viscosidade volumétrica, concluiremos que o coeficiente η_1^{EBE} apresenta uma contribuição maior para a pressão dinâmica que o coeficiente de viscosidade volumétrica η . Esse resultado já havia sido constatado por Müller e Kremer [21].

Para os demais coeficientes observamos o mesmo comportamento. Desta forma, constatamos que, para η_2 , η_3 , η_4 , η_5 , η_6 , η_7 e η_8 , as curvas coincidem até aproximadamente $\zeta = 0,8$; $\zeta = 0,6$; $\zeta = 0,8$; $\zeta = 1,0$; $\zeta = 0,1$; $\zeta = 0,4$ e $\zeta = 0,9$ respectivamente. Constatamos novamente que os coeficientes η_4^{EBE} , η_6^{EBE} e η_7^{EBE} são de ordem superior ao apresentado pela viscosidade volumétrica η .

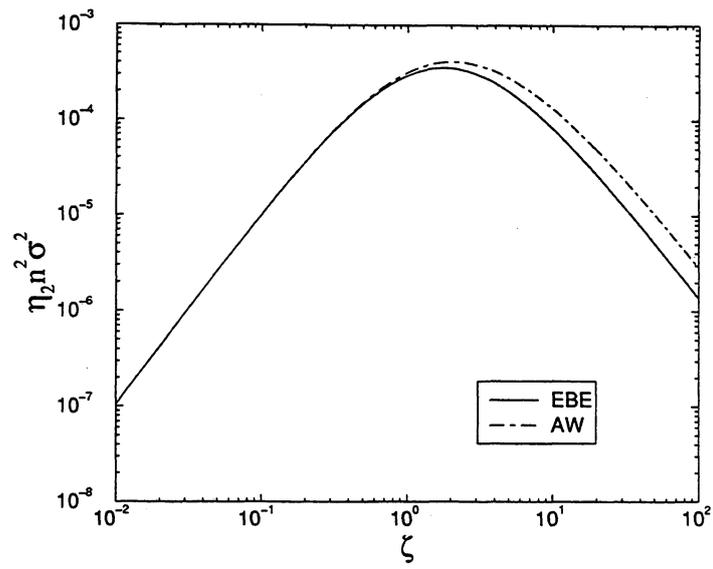


Figura 3.2: Gráfico comparativo para o coeficiente η_2 .

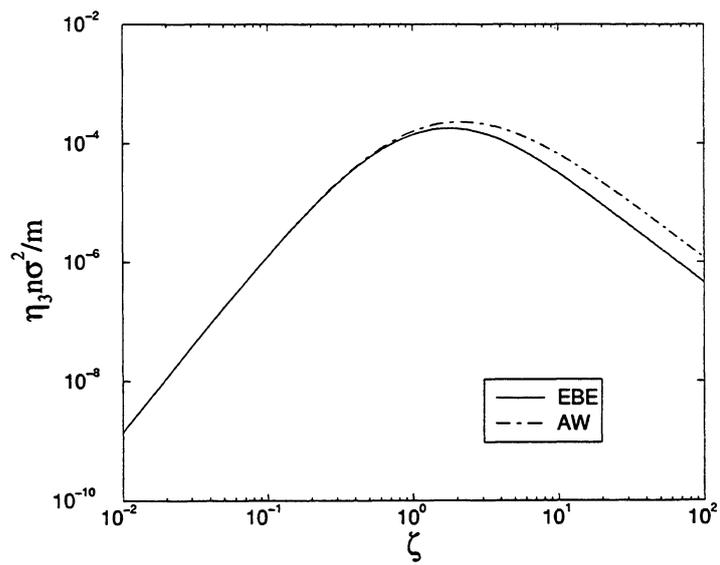


Figura 3.3: Gráfico comparativo para o coeficiente η_3 .

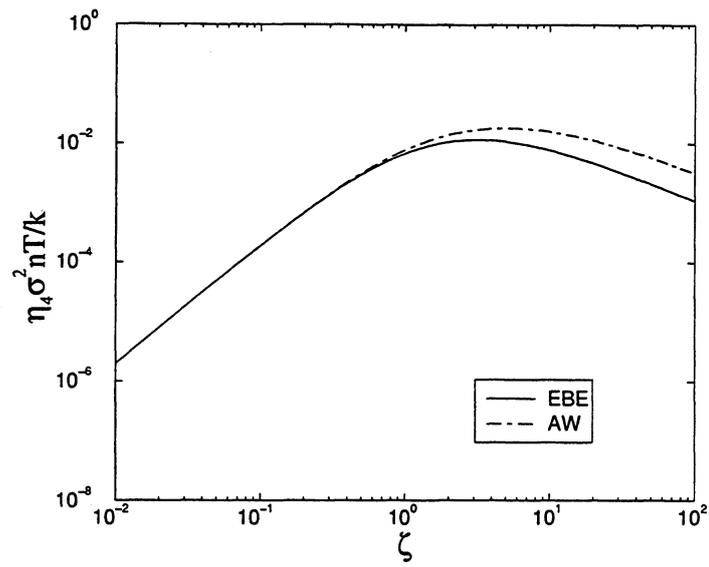


Figura 3.4: Gráfico comparativo para o coeficiente η_4 .

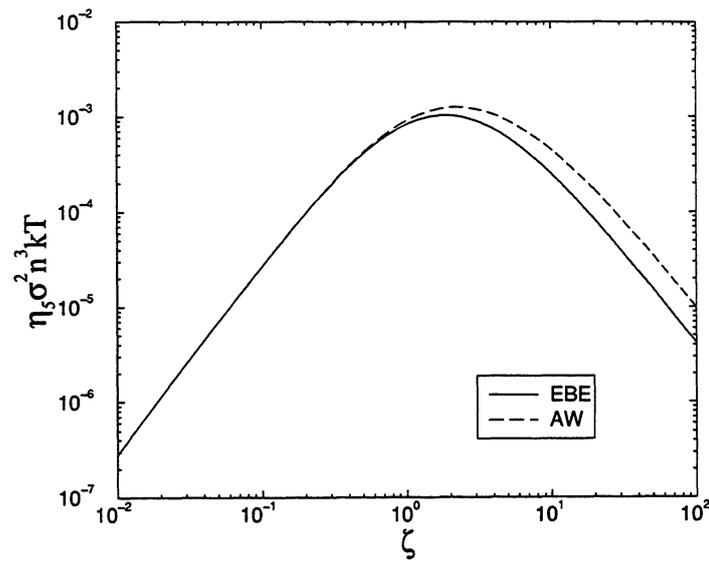


Figura 3.5: Gráfico comparativo para o coeficiente η_5 .

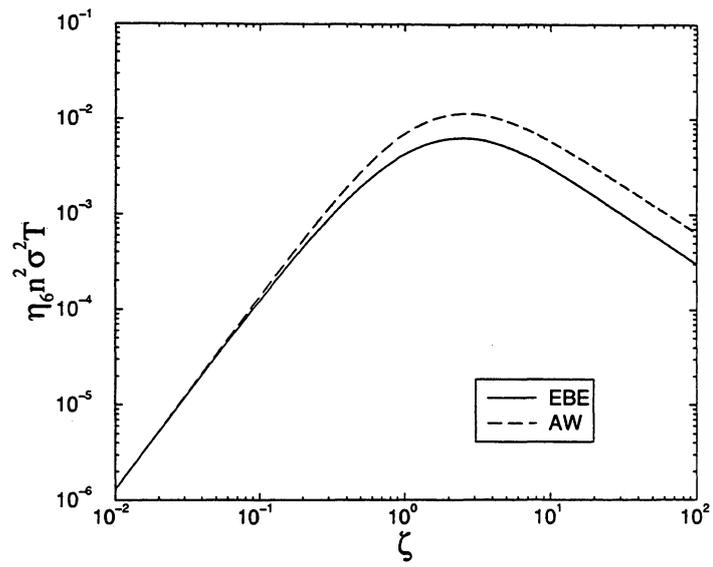


Figura 3.6: Gráfico comparativo para o coeficiente η_6 .

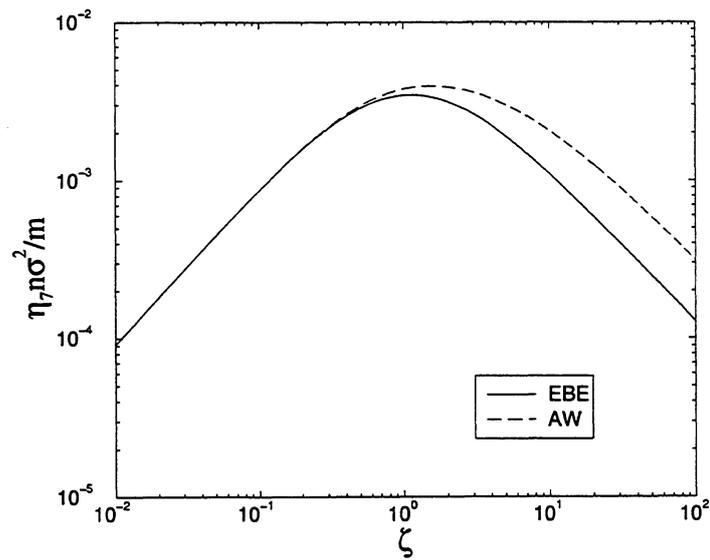


Figura 3.7: Gráfico comparativo para o coeficiente η_7 .

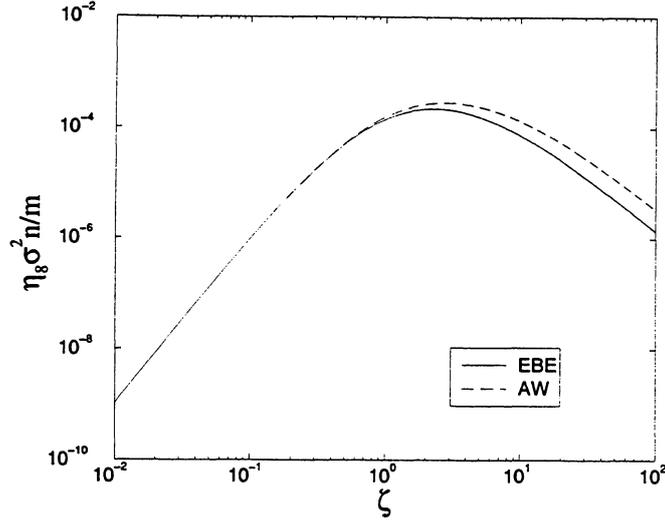


Figura 3.8: Gráfico comparativo para o coeficiente η_8 .

Consideremos, agora, as figuras 3.9 até 3.16, que mostram os gráficos correspondentes aos coeficientes de transporte para as equações de Burnett relativísticas para o fluxo de calor (2.48) e (3.54). Neste caso, as curvas possuem um comportamento diferente do apresentado pelos coeficientes da pressão dinâmica analisados anteriormente. Da mesma forma, aqui, ajustamos as curvas para o caso ultra-relativístico e os valores obtidos para cada par de coeficientes são dados por:

$$\frac{\lambda_1^{EBE}}{\lambda_1^{AW}} = \frac{35}{16}, \quad \frac{\lambda_2^{EBE}}{\lambda_2^{AW}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\lambda_3^{EBE}}{\lambda_3^{AW}} = 3,4722, \quad \frac{\lambda_4^{EBE}}{\lambda_4^{AW}} = 1,8382, \quad (3.83)$$

$$\frac{\lambda_5^{EBE}}{\lambda_5^{AW}} = \frac{135}{82}, \quad \frac{\lambda_6^{EBE}}{\lambda_6^{AW}} = 1,6446, \quad \frac{\lambda_7^{EBE}}{\lambda_7^{AW}} = \frac{25}{12}, \quad \frac{\lambda_8^{EBE}}{\lambda_8^{AW}} = 2,0830. \quad (3.84)$$

Para o coeficiente λ_1 , vemos que as curvas coincidem até aproximadamente $\zeta = 2$ e depois para ζ grande as curvas seguem paralelamente. Para o coeficiente λ_2 , as curvas coincidem até aproximadamente $\zeta = 0,5$ e depois elas divergem, isto é, enquanto para a equação de Boltzmann exata os valores diminuem, para o modelo de Anderson e Witting os valores aumentam. Este é o mesmo caso para o coeficiente de condução térmica que será analisado a seguir. No caso do coeficiente λ_3 , as curvas coincidem até $\zeta = 1$ e, em seguida, para grandes valores de ζ , elas divergem. O coeficiente λ_4 possui duas particularidades: ele se anula no caso não-relativístico e em ambos os modelos há uma região em que esse coeficiente assume valores negativos, a qual é um pouco mais pronunciada para o coeficiente relativo à equação de Boltzmann exata. Neste caso, as curvas coincidem até $\zeta = 0,1$, aproximadamente.

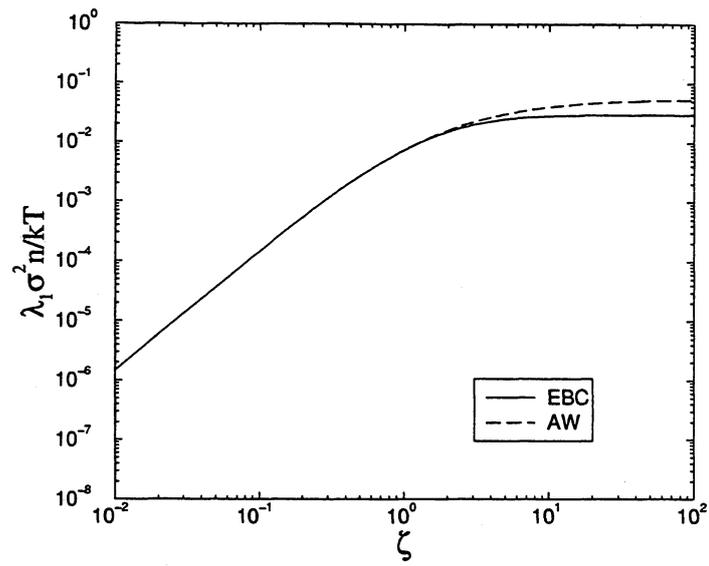


Figura 3.9: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_1 .

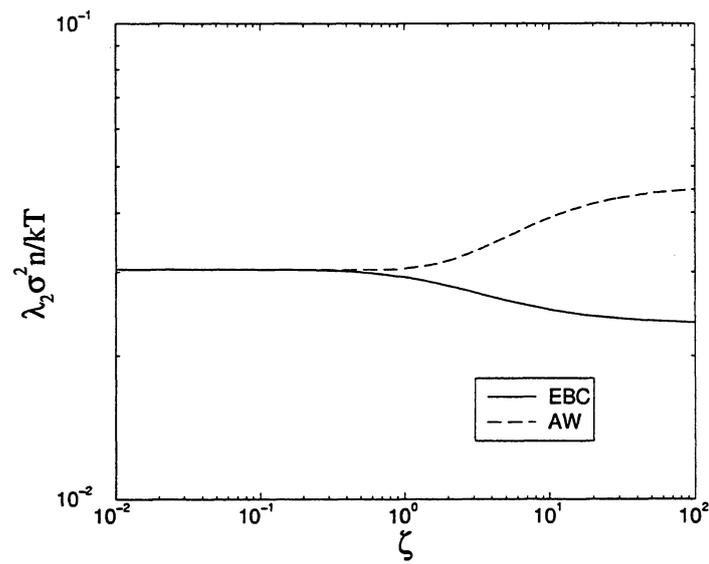


Figura 3.10: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_2 .

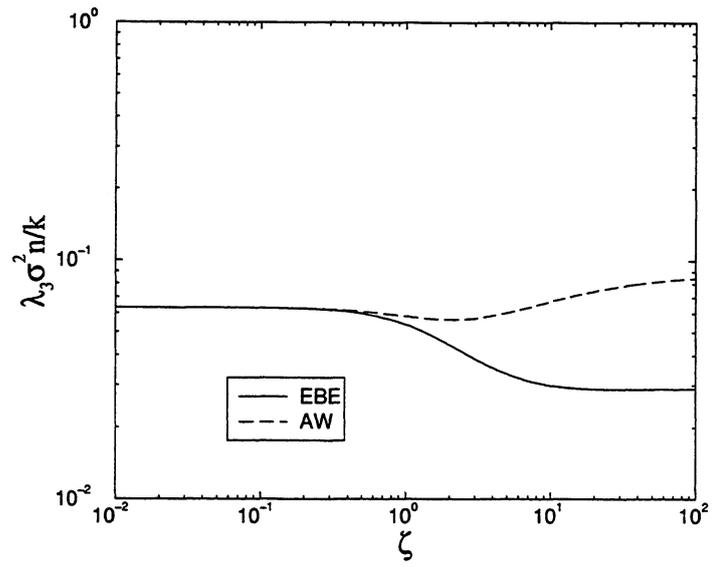


Figura 3.11: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_3 .

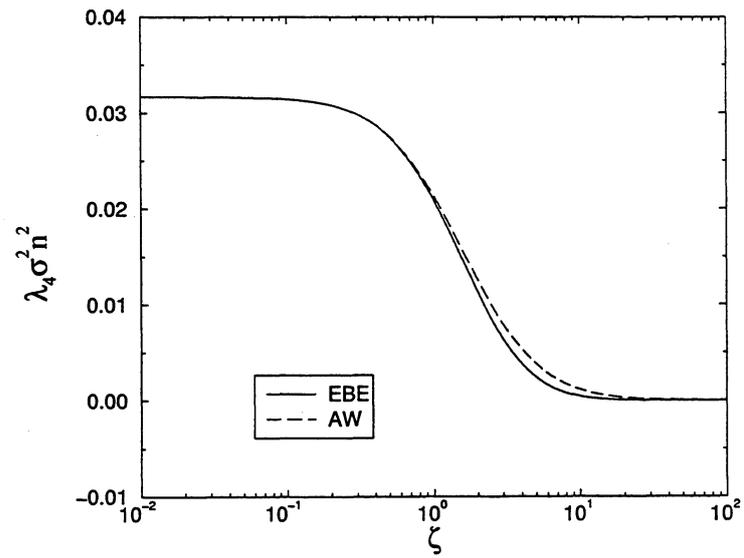


Figura 3.12: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_4 .

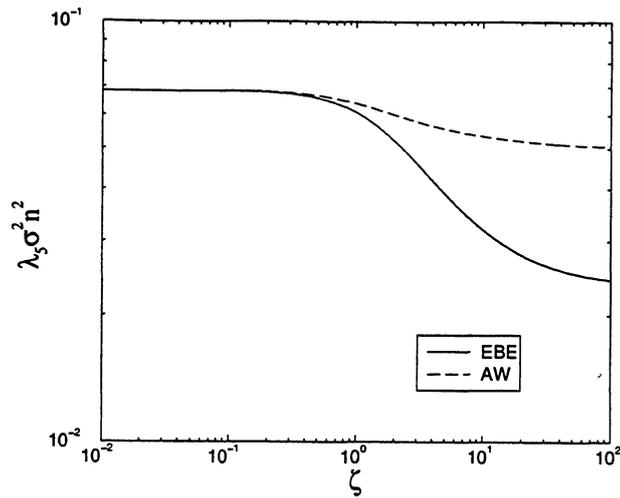


Figura 3.13: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_5 .

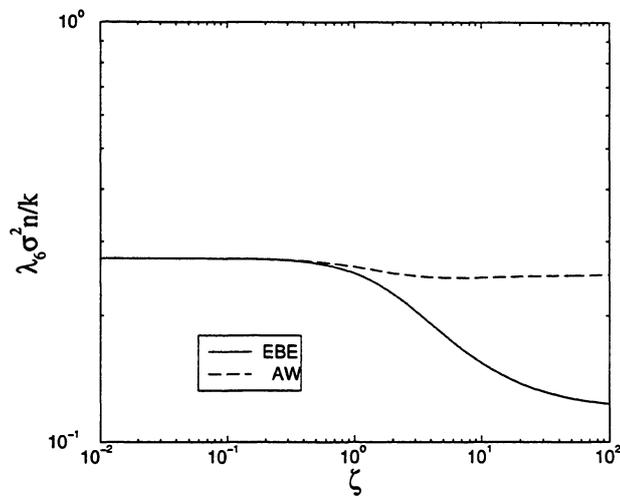


Figura 3.14: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_6 .

Os coeficientes λ_5 , λ_6 e λ_8 , como podemos observar, apresentam um comportamento semelhante a partir do ponto em que as curvas deixam de coincidir. As curvas não seguem paralelamente para grandes valores de ζ . Para os coeficiente λ_5 e λ_6 , elas coincidem até $\zeta = 0,4$, aproximadamente, e para λ_8 até $\zeta = 2$. O comportamento do coeficiente λ_7 é diferente desses últimos três, pois as curvas coincidem até $\zeta = 2$; para grandes valores elas seguem paralelamente.

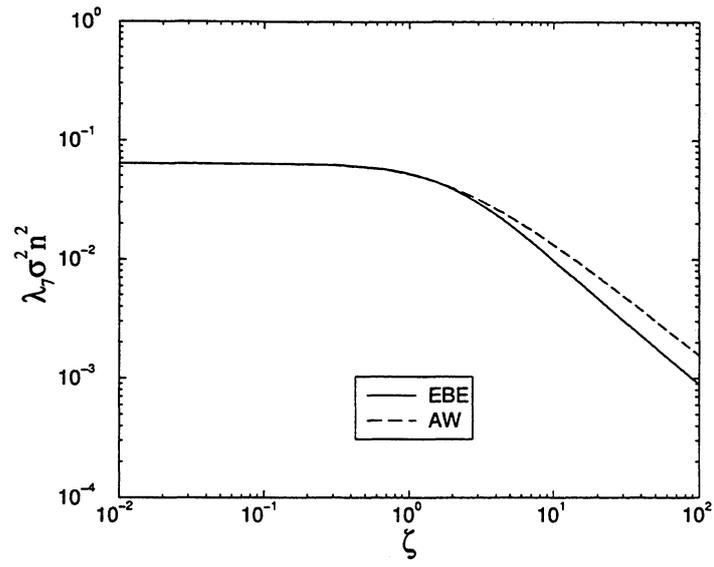


Figura 3.15: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_7 .

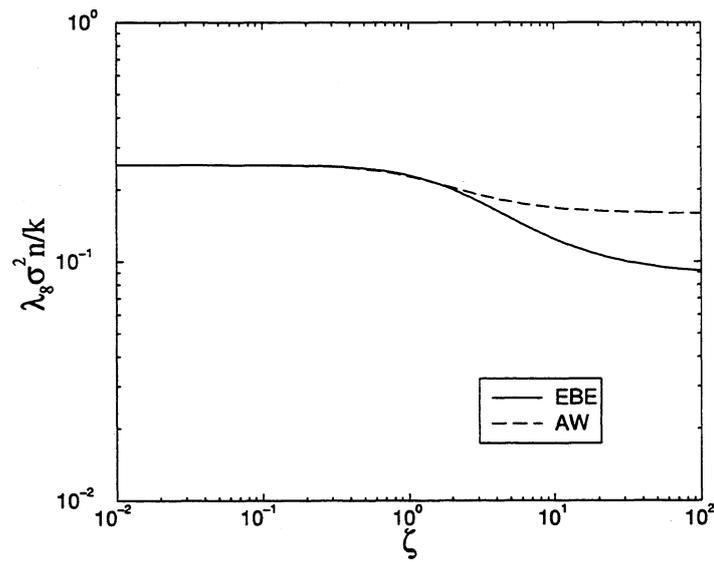


Figura 3.16: Gráfico comparativo para o coeficiente λ_8 .

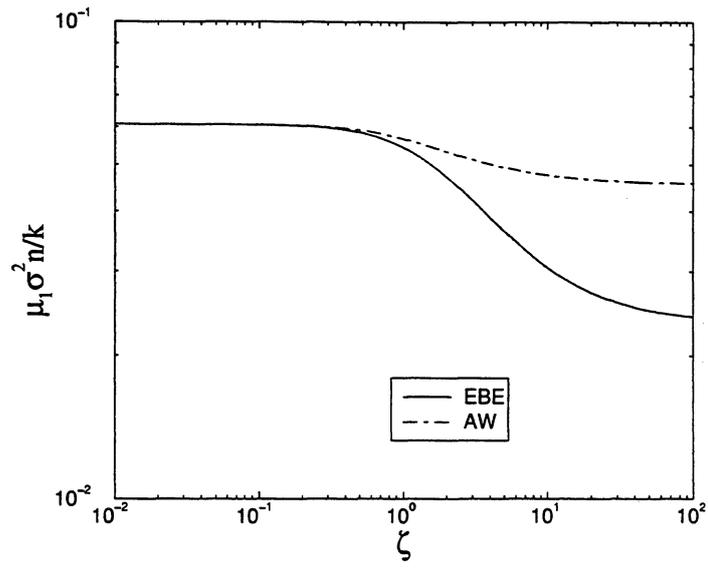


Figura 3.17: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_1 .

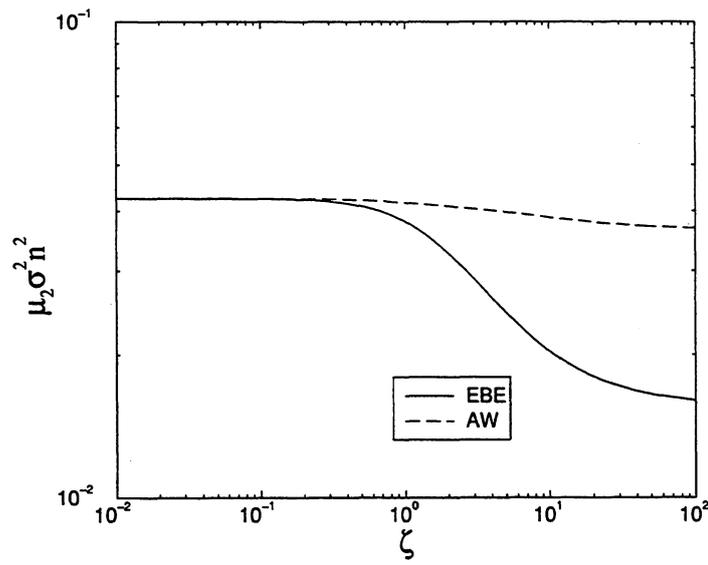


Figura 3.18: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_2 .

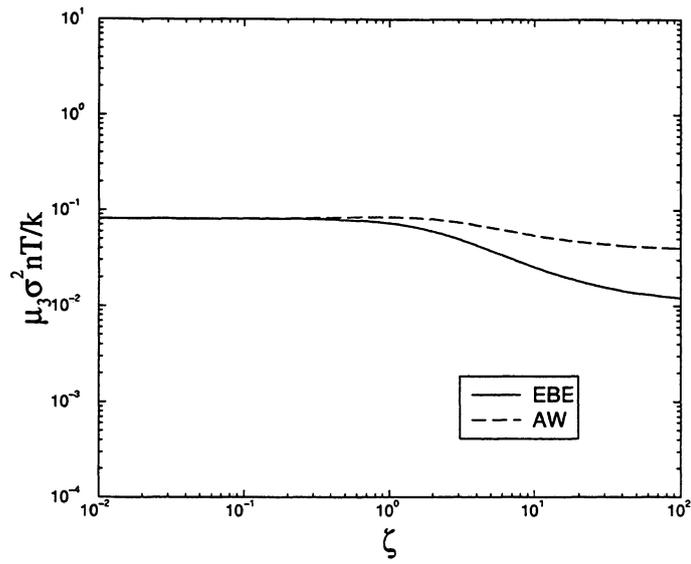


Figura 3.19: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_3 .

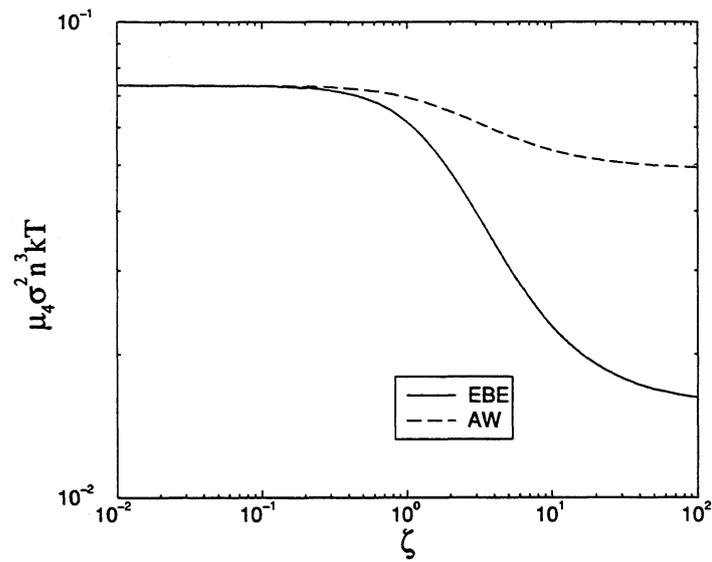


Figura 3.20: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_4 .

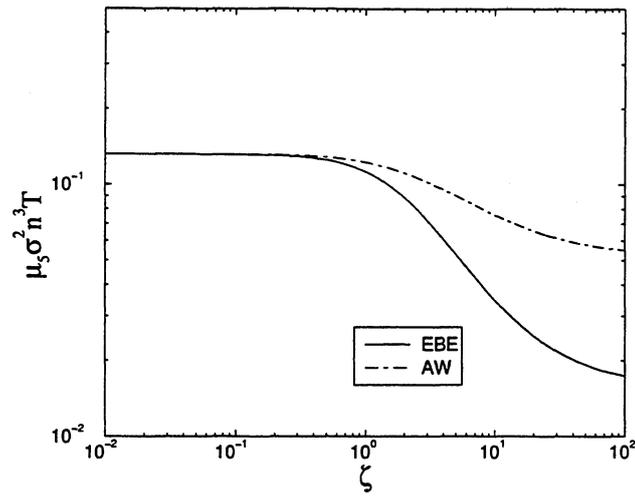


Figura 3.21: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_5 .

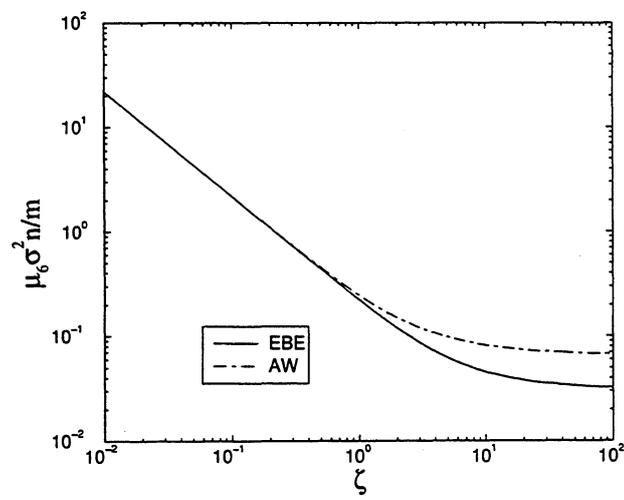


Figura 3.22: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_6 .

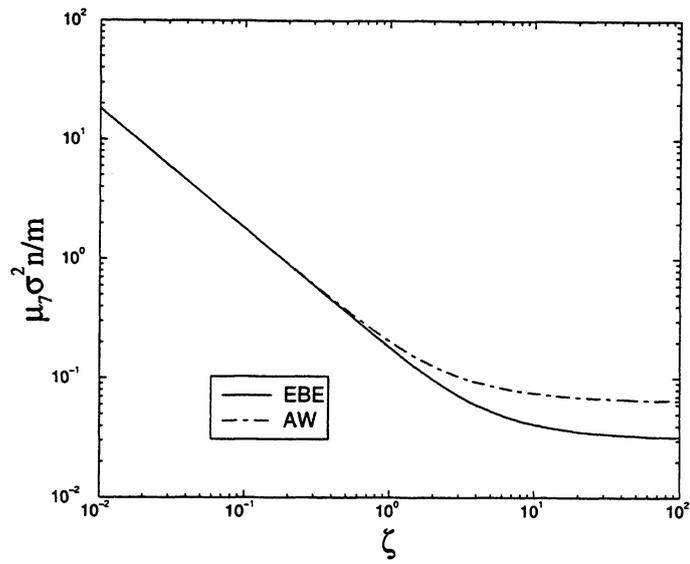


Figura 3.23: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_7 .

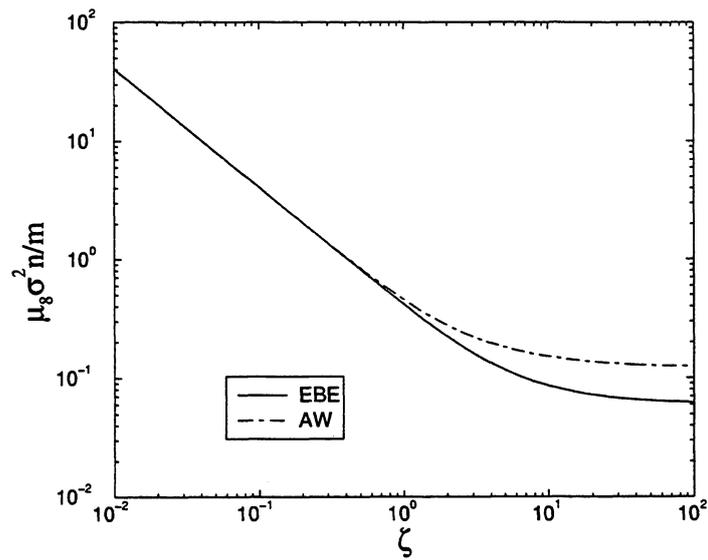


Figura 3.24: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_8 .

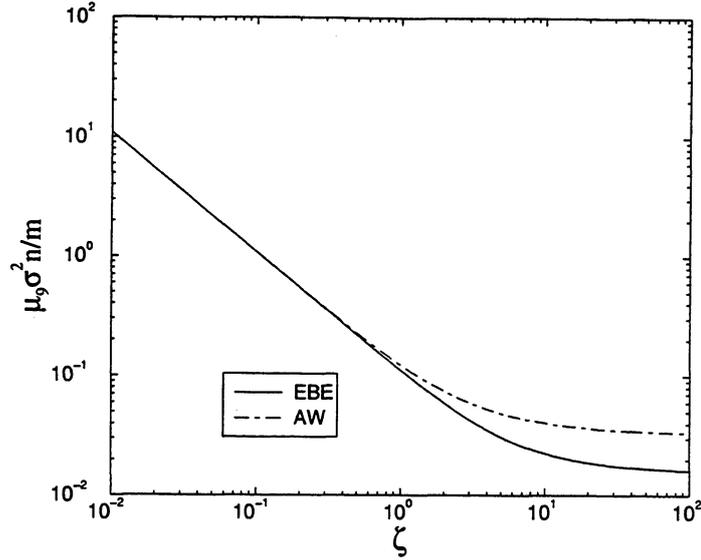


Figura 3.25: Gráfico comparativo para o coeficiente μ_9 .

Consideremos agora os conjuntos de gráficos 3.17 até 3.25, que correspondem aos coeficientes das equações de Burnett para o deviante do tensor pressão (2.50) e (3.55). Inicialmente, consideremos os valores obtidos para o ajuste das curvas:

$$\frac{\mu_1^{EBE}}{\mu_1^{AW}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\mu_2^{EBE}}{\mu_2^{AW}} = 1, 2, \quad \frac{\mu_3^{EBE}}{\mu_3^{AW}} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\mu_4^{EBE}}{\mu_4^{AW}} = 1, 6, \quad (3.85)$$

$$\frac{\mu_5^{EBE}}{\mu_5^{AW}} = 1, 7, \quad \frac{\mu_6^{EBE}}{\mu_6^{AW}} = \frac{\mu_7^{EBE}}{\mu_7^{AW}} = \frac{\mu_8^{EBE}}{\mu_8^{AW}} = \frac{\mu_9^{EBE}}{\mu_9^{AW}} = 1, 1. \quad (3.86)$$

No caso desses coeficientes, observamos que μ_1 , μ_2 , μ_4 e μ_5 apresentam um comportamento aproximadamente semelhante: as curvas coincidem até um determinado valor e após ocorre uma grande separação entre elas. Para esses coeficientes as curvas coincidem até $\zeta = 0, 4$; $\zeta = 0, 3$; $\zeta = 0, 2$ e $\zeta = 0, 3$ respectivamente. Para o coeficiente μ_3 , observamos que as curvas coincidem até $\zeta = 0, 4$ e para grandes valores de ζ elas seguem paralelamente. O restante dos coeficientes do deviante do tensor pressão, isto é, μ_6 , μ_7 , μ_8 e μ_9 apresentam, como podemos observar, um comportamento diferente dos coeficientes analisados acima. Todos eles coincidem para um valor de $\zeta = 0, 6$ e para grandes valores de ζ as curvas seguem paralelamente. Notamos, também, que os valores para o ajuste dessas curvas é o mesmo.

Devemos observar que os coeficientes para o fluxo de calor relativos à equação de Boltzmann exata, que analisamos acima, correspondem às equações (2.84), (2.88), (2.90), (2.93), (2.96), (2.99), (2.102) e (2.105). Os coeficientes para o deviante do tensor pressão nesse mesmo método,

comparados com o modelo de Anderson e Witting, correspondem às equações: (2.111), (2.114), (2.117), (2.120), (2.123), (2.126), (2.129), (2.132) e (2.135).

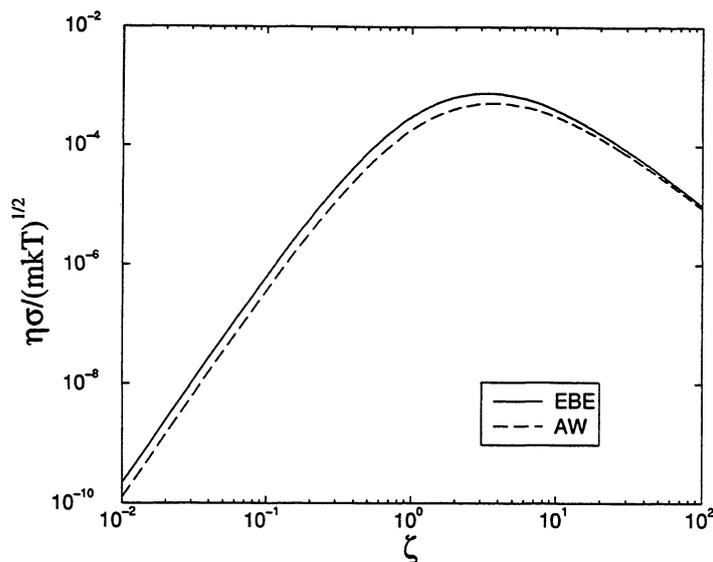


Figura 3.26: Gráfico comparativo para o coeficiente η .

Para concluir este capítulo, vamos aproveitar o fato de possuímos os gráficos que mostram o comportamento de todos os coeficientes de Burnett obtidos através da equação de Boltzmann exata, e comparar com os resultados encontrados para os coeficientes de transporte que aparecem nas equações de Navier-Stokes e Fourier, isto é, o coeficiente de viscosidade volumétrica, condutividade térmica e viscosidade cisalhante, que são dados respectivamente por (2.54), (2.81) e (2.108). O comportamento de cada um desses coeficientes encontra-se exposto nas figuras 3.26, 3.27 e 3.28 e é representado pelas linhas cheias. As linhas tracejadas mostram o comportamento dos mesmos coeficientes, porém, agora, no modelo cinético de Anderson e Witting, isto é, os coeficientes (3.46), (3.47) e (3.48). No gráfico relativo à condução de calor, a expressão para λ^{AW} teve que ser multiplicada pelo fator $3/2$, pois o número de Prandtl, para gases monatômicos, é $2/3$. A definição do número de Prandtl é $P_r = c_p \mu / \lambda$, onde c_p é a capacidade calorífica a pressão constante.

Já discutimos acima que, para os coeficientes da pressão dinâmica, figuras 3.1 até 3.8, ao serem comparados com o resultado obtido para a viscosidade volumétrica η , figura 3.26, observamos que os coeficientes η_1 , η_4 , η_6 e η_7 , apresentam uma maior contribuição para a pressão dinâmica que a viscosidade volumétrica η .

Já para os coeficientes do fluxo de calor, como podemos comparar entre as figuras 3.9 até 3.16 e a figura 3.27, nenhum coeficiente supera o valor máximo obtido para a condutividade

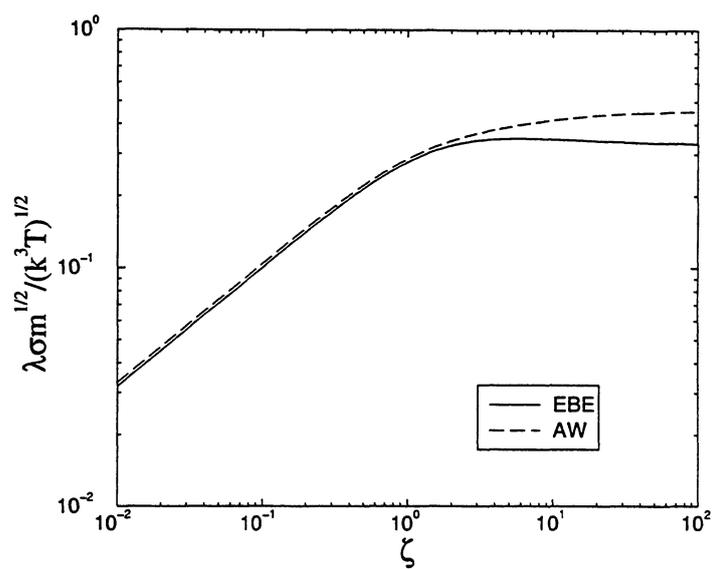


Figura 3.27: Gráfico comparativo para o coeficiente λ .

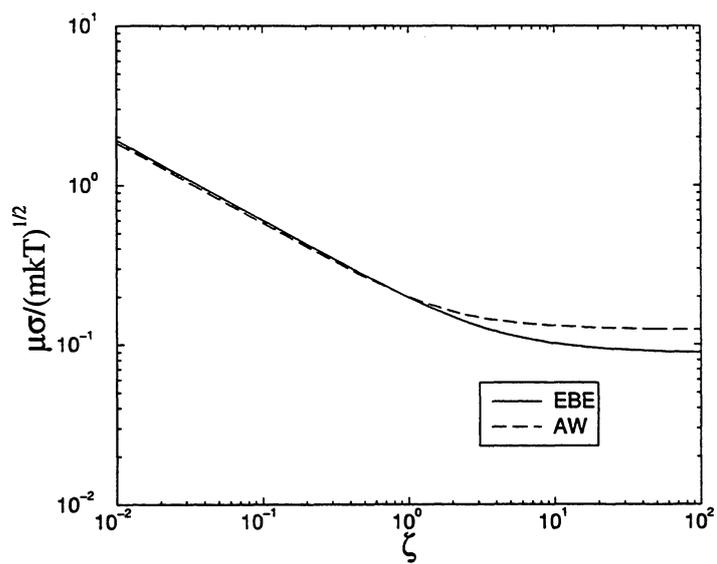


Figura 3.28: Gráfico comparativo para o coeficiente μ .

térmica λ , enquanto que, se compararmos as figuras 3.17 até 3.25 para os coeficientes do deviante do tensor pressão, observamos que μ_6 , μ_7 , μ_8 e μ_9 apresentam valores superiores ao coeficiente de cisalhamento μ na região ultra-relativística e ligeiramente inferiores na região não-relativística.

Seria interessante saber até que ponto esses coeficientes de Burnett, que fornecem uma contribuição maior do que aqueles que aparecem nas equações de Navier-Stokes e Fourier, influem na explicação de algum problema real, como no estudo da teoria dos plasmas, na astrofísica ou ainda na cosmologia.

3.6 Conclusão

Começamos este capítulo apresentando e, ao mesmo tempo, justificando o modelo cinético proposto por Anderson e Witting. A seguir, vimos que a obtenção das equações de Burnett relativísticas, nesse modelo, estava associada à decomposição de Landau e Lifshitz e que, nessa decomposição, o tensor quadrifluxo de partículas N^μ possui uma parte fora do equilíbrio, a qual é dada em termos do produto da pressão dinâmica e do fluxo de calor, como podemos ver na expressão (3.22). Portanto, o quadrifluxo de partículas somente é definido no equilíbrio na decomposição de Eckart. Após, determinamos as relações para a quadrivelocidade, temperatura, pressão hidrostática, entalpia por partícula, pressão dinâmica e para o deviante do tensor pressão, nessa decomposição.

Determinamos, também, a função de distribuição de Grad, fazendo a sua expansão num polinômio no quadrivetor quantidade de movimento p^μ em torno da função local de Maxwell-Jüttner. Conhecendo-se essa função, determinamos a expressão para o terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$. Em seguida encontramos a sua derivada $\partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma}$. Desta maneira, obtivemos todos os elementos da equação (3.38). Procedemos, então, a determinadas projeções, as quais nos forneceram as equações de campo para a pressão dinâmica ϖ_L , para o quadrifluxo de partículas I^τ e para o deviante do tensor pressão $p_L^{\langle\epsilon\tau\rangle}$. Nas equações de campo, utilizamos as relações encontradas para a decomposição de Landau e Lifshitz. A seguir, eliminamos as derivadas materiais convectivas e deixamos todos os gradientes em função de temperatura, da pressão hidrostática e da quadrivelocidade. Pelo método da iteração maxwelliana, obtivemos as equações de Navier-Stokes e Fourier, e numa segunda iteração, as equações de Burnett relativísticas, as quais foram dadas por (3.53), (3.54) e (3.55). A seguir, explicitamos todos os coeficientes de transporte para essas equações. Para podermos estudar com mais detalhes o comportamento de cada coeficiente, representamos graficamente cada um deles, em função do parâmetro ζ . A mesma coisa fizemos para os coeficientes de transporte obtidos da equação de Boltzmann exata, o que nos permitiu comparar o resultado, para esses coeficientes, nos dois métodos estudados.

Vimos que o modelo cinético proposto por Anderson e Witting é bem mais simples do que o da equação de Boltzmann exata. Mas essa simplicidade, como podemos observar pelos gráficos estudados, fornece resultados que são aproximados àqueles encontrados quando se aplica a equação de Boltzmann exata. Portanto, acreditamos que o esforço desenvolvido por nós para obter os coeficientes de Burnett, através da equação de Boltzmann exata, está plenamente justificado.

Podemos citar, aqui, a título de informação, que Anderson e Payne Jr. [26], encontraram as equações de Burnett relativísticas, através do modelo de tempo de relaxação, utilizando uma versão relativística do método de Chapman-Enskog. Os resultados encontrados por esses autores, como pode ser constatado na referência citada acima, são, a despeito da simplicidade, aproximados. Analogamente, as expressões relativísticas, para os coeficientes encontrados por eles, recaem nas expressões clássicas, conforme Wang Chang e Uhlenbeck.

Capítulo 4

Propagação de Ondas Sonoras

4.1 Introdução

Podemos definir uma onda sonora como sendo o resultado de pequenas variações na pressão e na densidade, em relação aos valores de equilíbrio dessas grandezas, ou seja, a onda sonora constitui uma perturbação no gás.

A variação da pressão Δp é da forma [23]:

$$\Delta p = A \exp\{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)\}, \quad (4.1)$$

onde A é uma amplitude complexa, ω é a frequência circular da onda, $\vec{\kappa}$ é o vetor propagação da onda. Se tomarmos a direção de $\vec{\kappa}$ como sendo o eixo x , então $\vec{\kappa} \cdot \vec{r} = \kappa x$.

No estudo da propagação de ondas sonoras, devemos antes de mais nada, decidir em qual problema estamos interessados: (1) “O problema de fonte” (2) “O problema de valor inicial”. Para o caso (1) a perturbação é mantida pela ação contínua de uma fonte de frequência constante ω . Nesse caso, a magnitude do vetor propagação deve ser complexa, de modo que em um ponto muito afastado da fonte não haja perturbações, isto é,

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} + i\alpha, \quad (4.2)$$

onde λ é o comprimento de onda e α é o recíproco do comprimento de absorção (distância na qual a amplitude decresce de e^{-1}). A velocidade de fase da onda é:

$$v_f = \frac{\lambda}{2\pi} \omega = \left[\text{Re} \left(\frac{\kappa}{\omega} \right) \right]^{-1}. \quad (4.3)$$

Em geral, a velocidade de fase e o comprimento de absorção são funções da frequência ω .

No caso (2) a perturbação do gás não é mantida constante, mas evolui a partir de algum valor inicial, então $\kappa = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda da perturbação inicial, e neste caso κ é real. A frequência ω deve agora ser complexa de modo que não haja mais perturbação após um tempo suficientemente longo. Assim,

$$\omega = \omega' - \frac{i}{t'}, \quad (4.4)$$

onde ω' é uma frequência inicial e t' é o tempo de relaxação (tempo no qual a amplitude decresce de e^{-1}). A velocidade de fase da onda é agora dada por:

$$v_f = \frac{\lambda}{2\pi} \omega' = \text{Re} \left(\frac{\omega}{\kappa} \right). \quad (4.5)$$

Assim, a escolha de κ ou ω real em Δp vai depender do tipo de problema em que estamos interessados; um problema de fonte ou de um problema de valor inicial. Qualquer que seja a escolha, o resultado da análise será sempre uma relação de dispersão:

$$F(\omega, \kappa) = 0, \quad (4.6)$$

que nos fornece a relação entre ω e κ . Para o problema de fonte resolvemos κ como uma função de ω real, enquanto que para o problema de valor inicial, resolvemos ω como uma função de κ real. A relação de dispersão, contudo, é sempre a mesma.

A primeira teoria de propagação do som em gases é devida a Newton, publicada em 1687 nos seus "Principia". Ele usou um modelo análogo ao das oscilações numa série de molas acopladas e cometeu o erro em assumir que as compressões e rarefações seriam isotérmicas. O valor experimental constatado na época era de aproximadamente 1,186 vezes maior do que o valor previsto pela sua teoria. Newton justificou a discrepância entre esses valores dizendo que 1/9 do espaço seria ocupado por "partículas sólidas" de ar, através das quais o som se transmitiria instantaneamente.

A explicação correta só foi obtida por Laplace em 1816. Segundo ele, as expansões e compressões de uma onda sonora são tão rápidas que não há tempo para que a temperatura se uniformize: não chega a haver trocas de calor, ou seja, o processo é adiabático. Mais tarde, Stokes e Kirchhoff fundamentaram de maneira mais rigorosa os resultados de Laplace.

Ao longo deste capítulo analisaremos o problema de uma onda que se propaga através de um fluido relativístico viscoso e condutor de calor que, na frente da onda, está em repouso. Estaremos interessados somente no problema de fonte, para o qual, como discutimos acima, a magnitude do vetor de propagação deve ser complexa, isto é,

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} + i\alpha. \quad (4.7)$$

Neste caso, a velocidade de fase e a atenuação são dadas respectivamente por:

$$v_f = \frac{\omega}{\text{Re}\{\kappa\}} \quad \text{e} \quad \alpha = \text{Im}\{\kappa\}. \quad (4.8)$$

Inicialmente, estudaremos a propagação de ondas sonoras para o caso de cinco campos; primeiro, considerando as equações de Navier-Stokes e Fourier e, depois, as equações de Burnett linearizadas. A seguir, consideraremos o caso da propagação de ondas para um sistema que consiste de quatorze campos.

4.2 Ondas Harmônicas Planas - Cinco Campos

Estudaremos, ao longo desta seção, a propagação de ondas sonoras para o caso de cinco campos, a saber, a densidade do número de partículas n , a temperatura T e a quadrivelocidade U^μ . Inicialmente, consideraremos as equações de Navier-Stokes e Fourier e, logo a seguir, desenvolveremos o mesmo raciocínio, aplicando as equações de Burnett que foram estudadas no capítulo 2. Aqui, no entanto, consideraremos somente os termos lineares dessas equações.

Segundo [7] e [34], temos para esses campos as seguintes soluções de ondas harmônicas planas:

$$n = n_0 + \bar{n} \exp[i(\kappa x - \omega t)], \quad (4.9)$$

$$T = T_0 + \bar{T} \exp[i(\kappa x - \omega t)], \quad (4.10)$$

$$U^\mu = (c, \bar{v} \exp[i(\kappa x - \omega t)]), \quad (4.11)$$

onde as amplitudes \bar{n} , \bar{T} e \bar{v} são consideradas pequenas de tal forma que o produto entre elas será desprezado por nós. Ressaltamos também que nestas soluções n_0 e T_0 são os valores em equilíbrio para a densidade do número de partículas e para a temperatura e os termos envolvendo as exponenciais são as perturbações. Vemos assim que, no equilíbrio, $n = n_0$ e $T = T_0$.

Começemos analisando a propagação de ondas sonoras, levando-se em conta, primeiramente, as equações de Navier-Stokes e Fourier. Vimos no capítulo 2 que, para um fluido relativístico viscoso e condutor de calor, valem as equações (2.38), (2.39) e (2.40), isto é,

$$\varpi = -\eta_0 \nabla_\mu U^\mu, \quad p^{(\mu\nu)} = 2\mu_0 \nabla^{(\mu} U^{\nu)}, \quad q^\mu = \lambda_0 \left(\nabla^\mu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu p \right), \quad (4.12)$$

que correspondem às equações de Navier-Stokes e Fourier.

As equações de campo que deveremos utilizar já foram deduzidas no capítulo 1 e são dadas por (1.76), (1.79) e (1.80), que são as equações de balanço correspondentes para a densidade do número de partículas, para a energia e também para o momento linear. Assim, considerando somente os termos lineares dessas equações, temos:

$$Dn + n\nabla^\mu U_\mu = 0, \quad (4.13)$$

$$nDe + p\nabla^\mu U_\mu + \nabla_\mu q^\mu = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{nh}{c^2}DU^\mu - \nabla^\mu(p + \varpi) + \nabla_\nu p^{(\mu\nu)} + \frac{1}{c^2}Dq^\mu = 0. \quad (4.15)$$

Substituindo-se agora as soluções para as ondas harmônicas planas (4.9), (4.10) e (4.11) e as equações de Navier-Stokes e Fourier (4.12) nas equações de balanço linearizadas (4.13) a (4.15) e ainda levando-se em conta que o operador derivada temporal convectiva e o gradiente correspondem, respectivamente, às derivadas temporal e espacial ordinárias,

$$D = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla^\mu = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}U^\mu U^\nu \right) \partial_\nu = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \nabla_\mu = \left(0, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (4.16)$$

de acordo com as definições (1.65) e (1.66), obtemos o seguinte conjunto de equações para as amplitudes \bar{n} , \bar{v}_\parallel , \bar{v}_\perp e \bar{T} :

$$\omega\bar{n} - n_0\kappa\bar{v}_\parallel = 0, \quad (4.17)$$

$$-i\lambda_0 \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa^2 \bar{n} - n_0 k T_0 \kappa \bar{v}_\parallel + \left[n_0 c_v^0 \omega + i\lambda_0 \kappa^2 \frac{e_0}{h_0} \right] \bar{T} = 0. \quad (4.18)$$

$$\left[-kT_0\kappa + i\frac{\lambda_0}{c^2} \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa\omega \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0 h_0}{c^2} \omega + i\left(\eta_0 + \frac{4}{3}\mu_0 \right) \kappa^2 \right] \bar{v}_\parallel - \left[n_0 k \kappa + i\frac{\lambda_0}{c^2} \frac{e_0}{h_0} \omega \kappa \right] \bar{T} = 0. \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{n_0 h_0}{c^2} \omega + i\mu_0 \kappa^2 \right) \bar{v}_\perp = 0, \quad (4.20)$$

onde introduzimos as seguintes notações: $\bar{v}_\parallel = \vec{v} \cdot \vec{n}$, $\bar{v}_\perp = (\vec{n} \times \vec{v})$, que se referem, respectivamente, à parte longitudinal e à parte transversal da amplitude da velocidade e \vec{n} é o vetor unitário na direção de propagação. Na seção (E.1) do apêndice E, mostramos, passo a passo, como obtivemos esse sistema de equações.

Uma solução não trivial da equação (4.20) é dada por:

$$\frac{n_0 h_0}{c^2} \omega = -i\mu_0 \kappa^2, \quad (4.21)$$

que representa a relação de dispersão de uma onda transversal de cisalhamento. Como para um valor real do vetor de propagação \vec{k} a frequência circular ω é puramente imaginária, essa equação nos indica que a onda transversal de cisalhamento não se propaga.

Para o caso das ondas longitudinais, que correspondem às equações (4.17), (4.18) e (4.19), teremos solução somente se o determinante dos coeficientes for igual a zero, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\kappa}{\omega} & 0 \\ -\frac{\kappa}{\omega} k T_0 \left(1 - i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{T_0}{n_0 h_0} \omega\right) & \frac{h_0}{c^2} + i \left(\eta_0 + \frac{4}{3} \mu_0\right) \frac{\kappa^2}{n_0 \omega} & -\frac{\kappa}{\omega} + i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{\kappa}{n_0 k} \left(\frac{k T_0}{h_0} - 1\right) \\ -i \lambda_0 \frac{k T_0^2}{n_0 h_0} \frac{\kappa^2}{\omega} & -k T_0 \frac{\kappa}{\omega} & \frac{c_v^0}{k} + i \lambda_0 \frac{\kappa^2}{\omega} \frac{e_0}{h_0} \frac{1}{n_0 k} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.22)$$

e tal solução nos fornecerá a relação de dispersão para as ondas longitudinais. Como já possuímos as expressões para os coeficientes de transporte η_0 , λ_0 e μ_0 , tanto no limite não-relativístico como no ultra-relativístico, conforme expressões que podem ser encontradas na seção (2.7) do capítulo 2, vamos analisar as soluções para esse determinante nestes dois limites em particular.

Mas, vejamos, primeiramente, o caso não-relativístico, onde por caso não-relativístico queremos dizer que somente consideraremos, para os coeficientes de transporte, as seguintes expressões:

$$\eta_0 \rightarrow 0, \quad \lambda_0 = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu_0 \quad \text{e} \quad \mu_0 = \frac{5}{32\pi} \left(\frac{m k T_0}{\pi}\right), \quad (4.23)$$

que correspondem, respectivamente, ao primeiro termo das expansões (2.54), (2.82) e (2.109), isto é, sem as correções relativísticas. Com essas considerações, podemos expressar o determinante (4.22) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Gamma & 0 \\ -\frac{3}{5}\Gamma & 1 + i \frac{4}{3} \frac{\Gamma^2}{R} & -\Gamma \\ 0 & -\frac{3}{5}\Gamma & \frac{3}{2} + i \frac{15}{4} \frac{\Gamma^2}{R} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.24)$$

onde introduzimos as seguintes quantidades adimensionais:

$$\Gamma = \frac{\kappa}{\omega} v_0 \quad \text{e} \quad R = \frac{m n_0 v_0^2}{\mu_0 \omega}, \quad (4.25)$$

sendo R o número de Reynolds. O v_0 , que aparece em Γ e R , corresponde à velocidade adiabática do som, que, no caso não-relativístico, é definida por:

$$v_0 = \left(\frac{5}{3} \frac{k T_0}{m}\right)^{1/2}. \quad (4.26)$$

A dedução desta expressão encontra-se na seção (E.1) do apêndice E.

Resolvendo o determinante (4.24) algebricamente, encontraremos uma relação de dispersão para as ondas longitudinais em termos de Γ e R que é de quarta ordem em Γ . Portanto, ela

nos fornece quatro soluções, a saber, duas positivas e duas negativas, que representam ondas que se propagam segundo valores positivos de x e segundo valores negativos de x . Nestas soluções tem-se uma parte real, que vai estar relacionada com a velocidade de fase da onda e outra imaginária, relacionada com a atenuação dessa onda. Assim, para o caso não-relativístico obtemos a seguinte equação de dispersão a partir do determinante (4.24):

$$\Gamma^4 \left[-\frac{3}{2} \frac{i}{R} - \frac{10}{3} \frac{1}{R^2} \right] + \Gamma^2 \left[-1 + \frac{23}{6} \frac{i}{R} \right] + 1 = 0, \quad (4.27)$$

que corresponde à expressão dada por Greenspan [32]. Portanto, verificamos que no caso não-relativístico, o determinante (4.22) chega na relação de dispersão conhecida na literatura.

Como já dissemos acima, essa equação nos fornece duas soluções positivas. Destas, vamos somente considerar uma delas que é a que apresenta a menor atenuação, a outra, não é de interesse prático. No gráfico correspondente à figura 4.1, mostramos o comportamento dessa solução, no caso analisamos a evolução das grandezas v_0/v_f e α/β . Para compreender melhor essa notação, lembremos que a relação de dispersão nos fornece Γ que é do tipo $\Gamma = a + bi$ e que, utilizando a definição de que $Re\{\kappa\} = \omega/v_f$, vista na introdução, temos:

$$Re\{\Gamma\} = Re\left\{ \frac{v_0}{\omega} \kappa \right\} = \frac{v_0}{\omega} Re\{\kappa\} = \frac{v_0}{v_f}, \quad (4.28)$$

para a parte real desta solução, onde v_f é a velocidade de fase da onda; para a parte imaginária temos:

$$Im\{\Gamma\} = Im\left\{ \frac{v_0}{\omega} \kappa \right\} = \frac{v_0}{\omega} Im\{\kappa\} = \frac{v_0}{\omega} \alpha = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (4.29)$$

onde consideramos a notação $\beta = \omega/v_0$. Assim, analisando o gráfico correspondente à figura 4.1, verificamos que, no limite, quando o número de Reynolds tende a valores grandes, a velocidade de fase tende para a velocidade adiabática do som, e que, para valores de R tendendo para zero, a velocidade tende para o infinito. Esse resultado é conhecido na literatura como o paradoxo da condução do calor, pois prevê que as perturbações na temperatura se propagam com velocidade infinita. Essa contradição pode ser resolvida quando se aumenta o número de campos, assim como faremos na próxima seção.

Vejamos, agora, o caso ultra-relativístico. Para tanto, devemos adimensionalizar o determinante (4.22), considerando as seguintes expressões limites para os coeficientes de transporte:

$$\eta_0 \rightarrow 0, \quad \lambda_0 = \frac{5}{3} \frac{c^2}{T} \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{3}{5} \frac{kT}{\pi \sigma c}, \quad (4.30)$$

que são os primeiros termos das expansões (2.56), (2.83) e (2.110) respectivamente, isto é, sem as correções relativísticas, quando se considera $\zeta \ll 1$. Verificamos também que $e_0 = 3kT$,

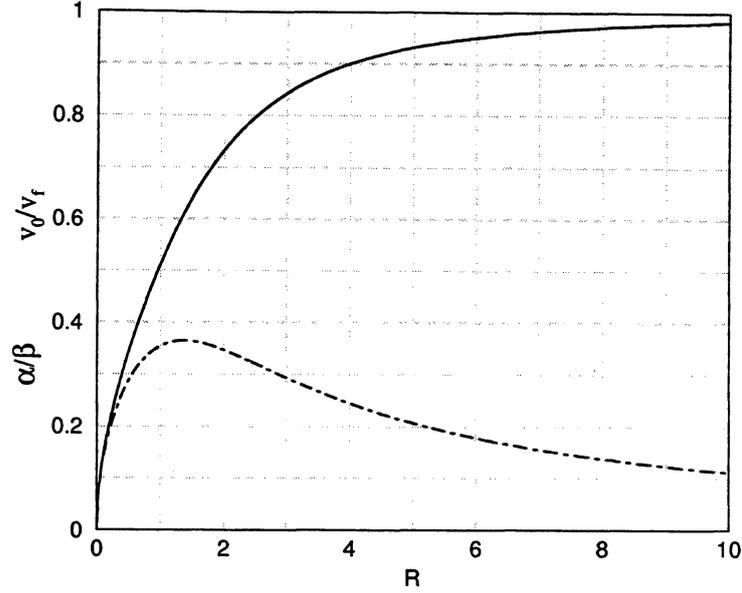


Figura 4.1: Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para o caso não-relativístico - solução de menor atenuação.

$h_0 = 4kT$ e $c_v^0 = 3k$, conforme (E.33). Assim, o determinante (4.22), para o caso ultra-relativístico e adimensionalizado, fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}\Gamma & 0 \\ -\sqrt{3}\Gamma\left(1 - i\frac{5}{12}\frac{1}{r}\right) & 4 + i4\frac{\Gamma^2}{r} & -\sqrt{3}\Gamma - i\frac{5}{4}\sqrt{3}\frac{\Gamma}{r} \\ -i\frac{5}{4}\frac{\Gamma^2}{r} & -\sqrt{3}\Gamma & 3 + i\frac{15}{4}\frac{\Gamma^2}{r} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.31)$$

onde $\Gamma = \kappa v_0/w$ e $r = p/(\mu_0\omega)$ é uma quantidade adimensional. No caso ultra-relativístico a velocidade adiabática do som corresponde a $v_0 = c/\sqrt{3}$, onde c é a velocidade da luz. Verificamos, neste caso, que a relação de dispersão encontrada é:

$$\Gamma^4 \left[\frac{5}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{5}{4} \frac{i}{r} \right] + \Gamma^2 \left[1 - \frac{9}{4} \frac{i}{r} \right] - 1 = 0, \quad (4.32)$$

e na figura 4.2 mostramos o gráfico correspondente à solução de menor atenuação. Constatamos dessa maneira que as ondas sonoras, para o caso ultra-relativístico e considerando as equações de Navier-Stokes e Fourier possuem dispersão e são atenuadas.

A seguir vamos adimensionalizar o determinante (4.22) da seguinte maneira:

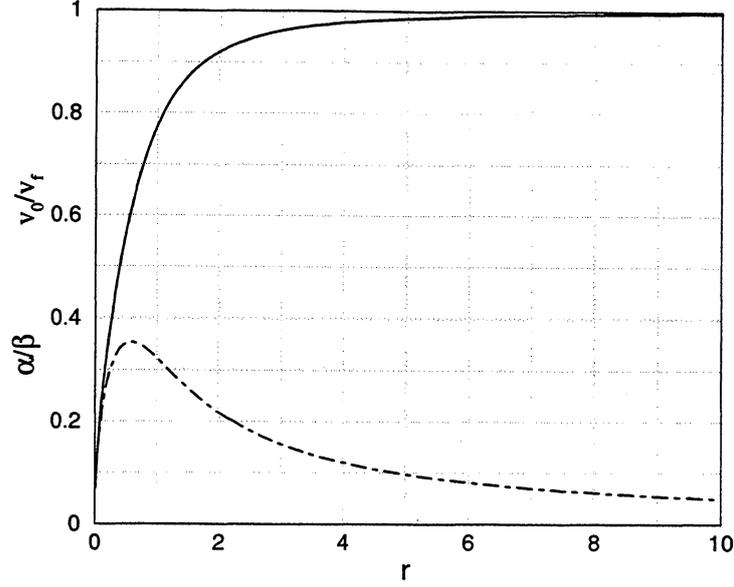


Figura 4.2: Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para o caso ultra-relativístico - solução de menor atenuação.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Gamma' & 0 \\ -\frac{3}{5}\Gamma' \left(1 - \frac{i}{R} \frac{\zeta^{5/2}}{\pi^{1/2}} \mathcal{A}_1\right) & G + i \left(\frac{\eta_0}{\mu_0} + \frac{4}{3}\right) \frac{\Gamma'^2}{R} \frac{3\zeta^{7/2}}{\pi^{1/2}} \mathcal{A}_2 & -\Gamma' + i \frac{\Gamma'}{R} G \zeta^{7/2} \mathcal{A}_1 \left(\frac{1}{\zeta G} - 1\right) \\ -i \frac{9}{25} \frac{\Gamma'^2}{R} \frac{\zeta^{7/2}}{\pi^{1/2}} \mathcal{A}_1 & -\frac{3}{5}\Gamma' & \frac{c_v^0}{k} + i \frac{3}{5} \frac{\Gamma'^2}{R} \frac{G \zeta^{9/2}}{\pi^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{\zeta G}\right) \mathcal{A}_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.33)$$

onde agora consideramos:

$$v_0 = \left(\frac{5}{3} \frac{kT}{m}\right)^{1/2}, \quad R = \frac{nmv_0^2}{\omega \mu_c}, \quad \mu_c = \frac{5}{32\sigma} \left(\frac{mkT}{\pi}\right)^{1/2}, \quad (4.34)$$

as quais são as expressões não-relativísticas para a velocidade adiabática do som e para a viscosidade cisalhante. Neste caso utilizaremos as expressões relativísticas completas para os coeficientes de transporte, isto é, para η_0 , λ_0 e μ_0 , dadas respectivamente por (2.41), (2.42) e (2.43). O mesmo consideraremos para as demais grandezas termodinâmicas, como e_0 , h_0 e c_v^0 , conforme (E.31). Procedemos dessa maneira a fim de podermos verificar o comportamento para a solução de menor atenuação, a qual surge quando resolvemos o determinante (4.33), para vários valores do parâmetro ζ . Neste caso, definimos ainda:

$$\Gamma' = \frac{\kappa}{\omega} v_s \frac{v_0}{v_s} = \left(\frac{5G}{3\gamma}\right)^{1/2} \frac{\kappa}{\omega} v_s, \quad (4.35)$$

onde utilizamos a expressão relativística para a velocidade adiabática do som, a saber:

$$v_s = \left(\frac{kT_0 c_p^0 c^2}{h_0 c_v^0} \right)^{1/2}. \quad (4.36)$$

No apêndice E.1 mostramos que v_0 é um caso particular de v_s quando consideramos $\zeta \gg 1$. Notemos que o número de Reynolds está expresso somente em termos das grandezas não-relativísticas. Para simplificar o nosso determinante consideramos ainda as quantidades \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 definidas por:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{K_3(\zeta)^2 (\zeta + 5G - G^2 \zeta)^2}{G^3 [(\zeta^2 + 2)K_2(2\zeta) + 5\zeta K_3(2\zeta)]}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{K_3(\zeta)^2}{[(2 + 15\zeta^2)K_2(2\zeta) + (3\zeta^3 + 49\zeta)K_3(2\zeta)]}. \quad (4.37)$$

No gráfico mostrado na figura 4.3, analisamos o comportamento para a velocidade de fase

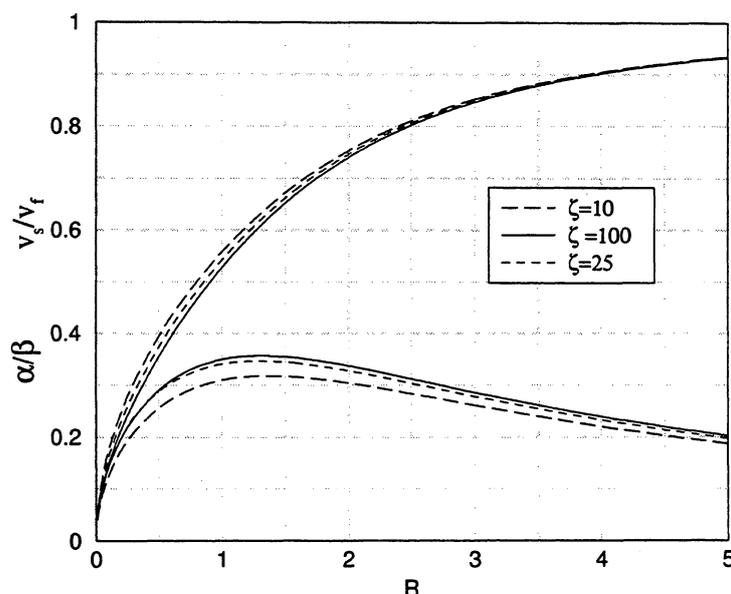


Figura 4.3: Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para alguns valores do parâmetro ζ - caso não-relativístico.

e atenuação dessa solução, considerando três valores para o parâmetro ζ . Verificamos que, à medida que o valor do parâmetro ζ aumenta, a solução tende para a solução encontrada no caso não-relativístico, de acordo com a figura 4.1, e que corresponde à linha cheia ou $\zeta = 100$. Esse comportamento já era esperado, pois sabemos que, à medida que ζ diminui, tendemos para o regime relativístico e, desta forma, a velocidade de fase tende mais rapidamente ao limite v_0 , ou seja, a solução torna-se mais atenuada.

Adimensionalizando agora, o determinante (4.22) como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}\Gamma' & 0 \\ -\sqrt{3}\Gamma' \left(1 - \frac{5\pi}{3} \frac{i}{r} \frac{\lambda_0^*}{\zeta G}\right) & \zeta G + i5\pi \left(\eta_0^* + \frac{4}{3}\mu_0^*\right) \frac{\Gamma'^2}{r} & -\sqrt{3}\Gamma' + i\frac{5\pi\sqrt{3}}{3} \frac{\Gamma'}{r} \lambda_0^* \left(\frac{1}{\zeta G} - 1\right) \\ -i5\pi \frac{\Gamma'^2}{r} \frac{\lambda_0^*}{\zeta G} & -\sqrt{3}\Gamma' & \frac{c_0^2}{k} + i5\pi \frac{\Gamma'^2}{r} \lambda_0^* \left(1 - \frac{1}{\zeta G}\right) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.38)$$

onde fizemos agora as seguintes considerações:

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma' = \frac{\kappa}{\omega} v_s \left(\frac{\zeta G}{3\gamma}\right)^{1/2}, \quad r = \frac{p}{\mu_R \omega}, \quad \mu_R = \frac{3}{5\pi} \frac{kT}{\sigma c}. \quad (4.39)$$

Para v_0 utilizamos a forma ultra-relativística que vem da expressão de v_s dada em (4.34) e no número de Reynolds consideramos o primeiro termo da expansão da viscosidade cisalhante (2.56) para o caso $\zeta \ll 1$. E ainda, $\eta_0^* = c\sigma/(kT)\eta_0$, $\lambda_0^* = \sigma/(ck)\lambda_0$ e $\mu_0^* = c\sigma/(kT)\mu_0$.

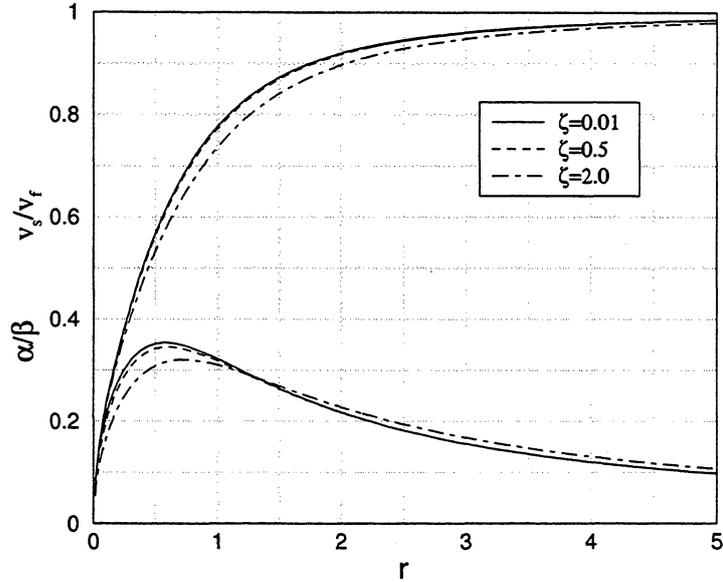


Figura 4.4: Gráfico da velocidade de fase e atenuação para alguns valores do parâmetro ζ - caso ultra-relativístico.

Novamente somente consideramos a solução que apresenta a menor atenuação, como podemos verificar na figura 4.4, onde analisamos a velocidade de fase e a atenuação para três valores distintos do parâmetro ζ . Verificamos que à medida que diminuímos os valor de ζ nos aproximamos rapidamente da solução ultra-relativística, a qual está representada pela linha cheia.

Em um trabalho recente, Boillat e Ruggeri [33] mostraram que quando se aumenta infinitamente o número de momentos, a velocidade de propagação máxima no equilíbrio, das ondas

sonoras, tende para valores cada vez mais próximos da velocidade da luz. No caso, eles utilizam um sistema de momentos associados com a equação relativística de Boltzmann.

Vejamos, agora, o estudo das ondas sonoras, considerando as equações de Burnett relativísticas linearizadas; isto é, das equações de Burnett completas (2.45), (2.48) e (2.50) levaremos em conta apenas os seguintes termos:

$$\varpi^{(2)} = -\eta_0 \nabla_\mu U^\mu + \eta_1 \nabla_\nu \nabla^\nu T - \eta_2 \nabla_\mu \nabla^\mu p \quad (4.40)$$

$$q^{(2)\mu} = \lambda_0 (\nabla^\mu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu p) + \lambda_1 \nabla^\mu \nabla_\sigma U^\sigma - \lambda_2 \nabla_\sigma \nabla^{<\sigma} U^{\mu>}, \quad (4.41)$$

$$p^{(2)<\mu\nu>} = 2\mu_0 \nabla^{<\mu} U^{\nu>} + \mu_1 \nabla^{<\mu} \nabla^{\nu>} T - \mu_2 \nabla^{<\mu} \nabla^{\nu>} p, \quad (4.42)$$

que são chamados termos lineares das equações de Burnett relativísticas, pois não aparecem produtos de dois gradientes das grandezas termodinâmicas; isto é, não incluímos, por exemplo, produtos do tipo $\nabla_\nu p \nabla^\nu T$.

Substituindo as equações de Burnett acima e as relações para n , T e U^μ definidas por (4.9), (4.10) e (4.11) nas equações de campo (4.13), (4.14) e (4.15), assim como fizemos para as equações de Navier-Stokes e Fourier, obteremos um sistema de equações, para as amplitudes \bar{n} , \bar{v} e \bar{T} , que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\omega \bar{n} - n_0 \kappa \bar{v} = 0, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \left[-kT_0 \kappa \left(1 + \kappa^2 \eta_2 + \frac{2}{3} \kappa^2 \mu_2 - i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{T_0}{n_0 h_0} \omega \right) \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0 h_0}{c^2} \omega + i \left(\eta_0 + \frac{4}{3} \mu_0 \right) \kappa \right. \\ & \left. + \frac{\omega \kappa^2}{c^2} \left(\lambda_1 - \frac{2}{3} \lambda_2 \right) \right] \bar{v} + \left[-n_0 \kappa k + \kappa^3 \eta_1 - \kappa^3 n_0 k \eta_2 + \frac{2}{3} \kappa^3 \mu_1 - \frac{2}{3} \mu_2 n_0 k \kappa^3 \right. \\ & \left. + i \frac{\lambda_0}{c^2} \omega \kappa \left(\frac{kT_0}{h_0} - 1 \right) \right] \bar{T} = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$-i \lambda_0 \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa^2 \bar{n} + \left[-n_0 k T_0 \kappa - \left(\lambda_1 - \frac{2}{3} \lambda_2 \right) \kappa^3 \right] \bar{v} + \left[n_0 \omega c_v^0 + i \lambda_0 \kappa^2 \frac{e_0}{h_0} \right] \bar{T} = 0, \quad (4.45)$$

onde somente estamos considerando a componente longitudinal para essas ondas. Na seção (E.1), do apêndice E, mostramos, em detalhes, como obtivemos esse sistema de equações e, também, definimos todos os coeficientes que nela aparecem. Novamente, inicialmente vamos nos ater aos casos não-relativístico e ao ultra-relativístico desse sistema. Observamos que, a

solução desse sistema vai nos fornecer uma equação de dispersão longitudinal de sexta ordem. Isso significa que temos seis soluções para esse caso. Destas soluções, três são positivas e três negativas. Consideraremos somente as soluções positivas, sendo que, destas, duas não são de interesse prático, pois apresentam uma forte atenuação. Vamos analisar, separadamente, os casos não-relativístico e ultra-relativístico para a única solução de interesse.

O sistema acima, compreendido pelas equações (4.43), (4.44) e (4.45) somente terá solução se o determinante dos coeficientes para as amplitudes for igual a zero. Assim, para o caso não-relativístico ou $\zeta \gg 1$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Gamma & 0 \\ -\frac{3}{5}\Gamma\left(1 + \frac{20}{9}\frac{\Gamma^2}{R^2}\right) & 1 + i\frac{4}{3}\frac{\Gamma^2}{R} & -\Gamma + \frac{10}{9}\frac{\Gamma^3}{R^2} \\ 0 & -\frac{3}{5}\Gamma - \frac{7}{4}\frac{\Gamma^3}{R^2} & \frac{3}{2} + i\frac{15}{4}\frac{\Gamma^2}{R} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.46)$$

Novamente, temos que Γ e R são definidos por (4.25) e v_0 por (4.26), onde utilizamos as seguintes expressões para os coeficientes de transporte que aparecem nas equações de Burnett:

$$\begin{aligned} \eta_0 &\rightarrow 0, & \lambda_0 &= \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu_0, & \mu_0 &= \frac{5}{32\sigma} \left(\frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2}, \\ \eta_1 &\rightarrow 0, & \lambda_1 &= \frac{15}{4} \frac{\mu_0^2}{nm}, & \mu_1 &= 3 \frac{\mu_0^2}{nmT}, \\ \eta_2 &\rightarrow 0, & \lambda_2 &= 3 \frac{\mu_0^2}{nm}, & \mu_2 &= 2 \frac{\mu_0^2}{n^2 mkT}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

que são os primeiros termos dos limites não-relativísticos para estes coeficientes e que estão todos definidos na seção (2.7). Desta forma, resolvendo esse determinante, obtemos a seguinte solução:

$$\Gamma^6 \left[\frac{35}{27} \frac{1}{R^4} - \frac{10}{3} \frac{i}{R^3} \right] + \Gamma^4 \left[-\frac{97}{18} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{i}{R} \right] + \Gamma^2 \left[-1 + \frac{23}{6} \frac{i}{R} \right] + 1 = 0. \quad (4.48)$$

que está de acordo com o resultado obtido por Greenspan [32]. No gráfico da figura 4.5 mostramos o comportamento da solução de menor atenuação desta relação de dispersão, para a velocidade de fase e para a sua atenuação. Vemos que, se compararmos com o gráfico da figura 4.1, que corresponde ao caso não-relativístico para Navier-Stokes e Fourier, elas diferem ligeiramente.

Observando o gráfico representado na figura 4.5, chegamos às seguintes conclusões a respeito da velocidade de fase para a solução de menor atenuação: quando $R \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow \infty$, temos que:

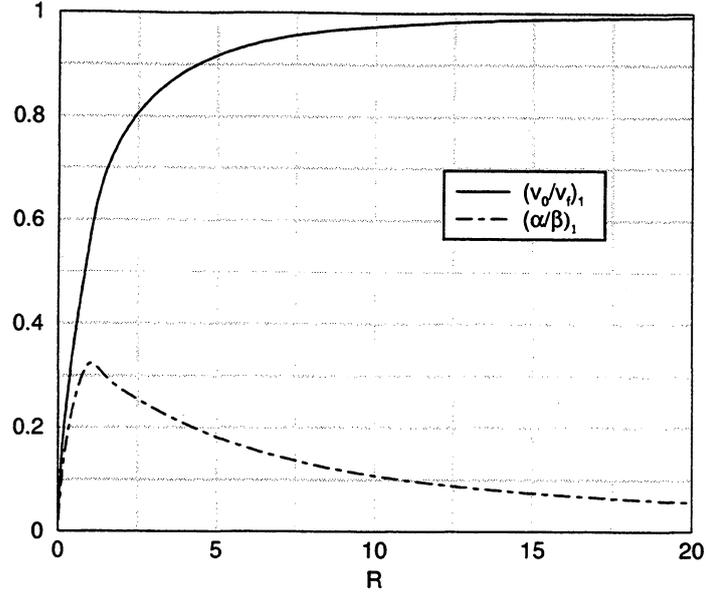


Figura 4.5: Gráfico da velocidade de fase e atenuação para a solução de menor atenuação - caso não-relativístico

$$\left(\frac{v_0}{v_f}\right)_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_f}{v_0}\right)_1 \rightarrow \infty \quad (4.49)$$

e quando $R \rightarrow \infty$ ou $\omega \rightarrow 0$ temos

$$\left(\frac{v_0}{v_f}\right)_1 \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_f}{v_0}\right)_1 \rightarrow 1, \quad (4.50)$$

conclusões, essas, análogas para o caso em que consideramos somente as equações de Navier-Stokes e Fourier.

Para o caso ultra-relativístico teremos um determinante para os coeficientes para as amplitudes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}\Gamma & 0 \\ -\sqrt{3}\Gamma\left(1 + \frac{7}{3}\frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{5}{12}\frac{i}{r}\right) & 4 + 4i\frac{\Gamma^2}{r} - \frac{5}{3}\frac{\Gamma^2}{r^2} & -\sqrt{3}\Gamma + \sqrt{3}\frac{\Gamma^3}{r^2} - \frac{5}{4}\sqrt{3}i\frac{\Gamma}{r} \\ -i\frac{5}{4}\frac{\Gamma^2}{r} & -\sqrt{3}\Gamma + \frac{5\sqrt{3}}{3}\frac{\Gamma^3}{r^2} & 3 + i\frac{15}{4}\frac{\Gamma^2}{r} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.51)$$

Para chegarmos nesse determinante consideramos para os coeficientes de transporte que nele aparecem como sendo dados por:

$$\eta_0 \rightarrow 0, \quad \lambda_0 = \frac{5}{3} \frac{\mu_0 c^2}{T_0}, \quad \mu_0 = \frac{3}{5\pi} \frac{kT}{c\sigma},$$

$$\eta_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_1 \rightarrow 0, \quad \mu_1 = \frac{5}{3} \frac{\mu_0^2 c^2}{n_0 k T_0^2},$$

$$\eta_2 \rightarrow 0, \quad \lambda_2 = \frac{5}{6} \frac{\mu_0^2 c^2}{n_0 k T_0}, \quad \mu_2 = \frac{7}{6} \frac{\mu_0^2 c^2}{n_0^2 k^2 T_0^2}, \quad (4.52)$$

que são os primeiros termos dos limites ultra-relativísticos para esses coeficientes e que estão todos definidos na seção (2.7).

O determinante (4.51) nos fornece a seguinte relação de dispersão de sexta ordem:

$$\Gamma^6 \left[\frac{45}{2} \frac{i}{r^3} + \frac{5}{r^4} \right] + \Gamma^4 \left[\frac{28}{r^2} + 15 \frac{i}{r} \right] - \Gamma^2 \left[27 \frac{i}{r} - \frac{5}{r^2} - 12 \right] - 12 = 0. \quad (4.53)$$

Verificamos assim, que as ondas sonoras, quando são consideradas as equações relativísticas de Burnett linearizadas, possuem dispersão e são atenuadas. Na figura 4.6 mostramos o gráfico para a solução de menor atenuação para essa relação dispersão.

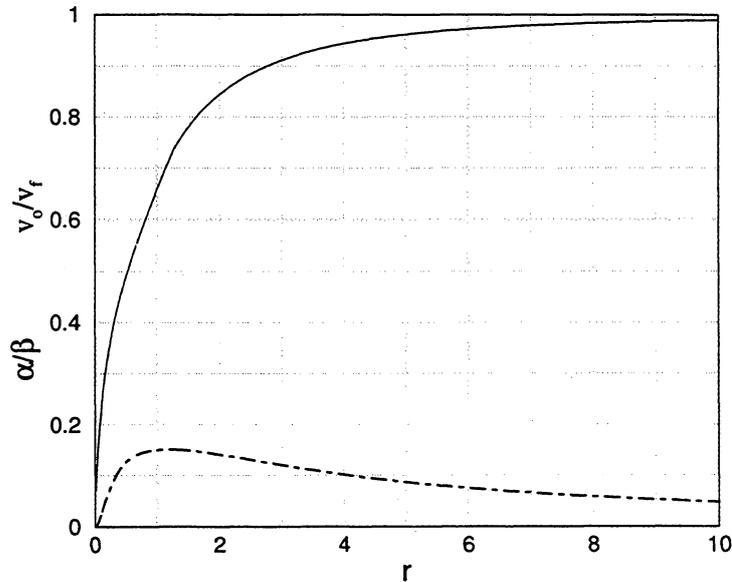


Figura 4.6: Gráfico da velocidade de fase e atenuação para a solução de menor atenuação - caso ultra-relativístico.

4.3 Ondas Harmônicas Planas - Quatorze Campos

Na seção anterior, estudamos as ondas sonoras, para o caso de cinco campos, onde consideramos, inicialmente, as equações de Navier-Stokes e Fourier e, depois, as equações

de Burnett linearizadas. Vamos, agora, estudar a propagação das ondas sonoras quando aumentamos o número desses campos para quatorze. Para tanto, vamos acrescentar mais onze campos, que são dados por ϖ , q^μ e $p^{<\mu\nu>}$. Analogamente à seção anterior, vamos analisar o comportamento da velocidade de fase e a atenuação para a propagação de ondas sonoras considerando quatorze campos. Neste caso, para simplificar o problema, vamos considerar somente a propagação das ondas em uma direção particular, a saber, a direção do eixo x .

As ondas harmônicas planas longitudinais, de pequena amplitude, são definidas, para o caso de quatorze campos, de tal modo que, fora do equilíbrio, são dadas por:

$$n = n_0 + \bar{n} \exp[i(kx - \omega t)], \quad T = T_0 + \bar{T} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (4.54)$$

$$U^\mu = (c, \bar{v} \exp[i(kx - \omega t)], 0, 0), \quad \varpi = \bar{P} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (4.55)$$

$$q^\mu = \bar{Q} \exp[i(kx - \omega t)], \quad p^{<\mu\nu>} = \bar{R} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (4.56)$$

onde \bar{n} , \bar{T} , \bar{v} , \bar{P} , \bar{Q} e \bar{R} são as respectivas amplitudes.

As equações de campo para o conjunto das grandezas termodinâmicas, descritas acima, são obtidas a partir das equações (1.76), (1.79), (1.80) do capítulo 1 e das equações (2.30), (2.31) e (2.32) do capítulo 2, isto é,

$$Dn + n\nabla^\nu U_\nu = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{nh}{c^2} DU^\mu - \nabla^\mu p - \nabla^\mu \varpi + \nabla_\nu p^{<\mu\nu>} + \frac{1}{c^2} Dq^\mu = 0, \quad (4.58)$$

$$nDe + p\nabla_\nu U^\nu + \nabla_\nu q^\nu = 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{C_2}{2} D\varpi + \frac{1}{2}(m^2 + C_1)Dn - \frac{\zeta}{2T} nC_1' DT - \frac{5}{c^2} C_3 \nabla^\nu q_\nu + \frac{1}{6} n(m^2 + 5C_1) \nabla^\nu U_\nu = -\frac{3}{c^2} B_1 \varpi, \quad (4.60)$$

$$5C_3 Dq^\mu - \frac{c^4}{6} \left[(m^2 - C_1) \nabla^\mu n + \frac{\zeta}{T} nC_1' \nabla^\mu T - C_2 \nabla^\mu \varpi \right] - \frac{c^2}{6} n(m^2 + 5C_1) DU^\mu - c^2 C_4 \nabla_\nu p^{<\mu\nu>} = -B_2 q^\mu, \quad (4.61)$$

$$C_4 Dp^{<\mu\nu>} + 2C_3 \nabla^{<\mu} q^{\nu>} + \frac{c^2}{3} n(m^2 - C_1) \nabla^{<\mu} U^{\nu>} = B_3 p^{<\mu\nu>}. \quad (4.62)$$

onde consideramos apenas os termos lineares dessas equações de campo.

Agora vamos expressar este conjunto de seis equações em termos das amplitudes, observando que estamos considerando somente a propagação dessas ondas ao longo da direção do eixo x e, ainda, somente a componente x do fluxo de calor e a componente xx do deviatante do tensor pressão. Inicialmente, substituímos nesse sistema as equações (4.54), (4.55) e (4.56) e, a seguir, efetuamos todas as derivadas. O resultado será um sistema de equações para as amplitudes \bar{n} , \bar{v} , \bar{T} , \bar{P} , \bar{Q} e \bar{R} :

$$-\omega\bar{n} + n_0\kappa\bar{v} = 0, \quad (4.63)$$

$$+\kappa k T_0 \bar{n} - n_0 m G \omega \bar{v} + \kappa n_0 k \bar{T} + \kappa \bar{P} - \frac{1}{c^2} \omega \bar{Q} + \kappa \bar{R} = 0, \quad (4.64)$$

$$-n_0 k T_0 \kappa \bar{v} + n_0 c_v^0 \omega \bar{T} - \kappa \bar{Q} = 0, \quad (4.65)$$

$$\frac{1}{2}(m^2 + C_1)\omega\bar{n} - \frac{n_0}{6}(m^2 + 5C_1)\kappa\bar{v} - \frac{\zeta}{2T_0}n_0\omega\frac{dC_1}{d\zeta}\bar{T} + \frac{1}{2}C_2\omega\bar{P} + \frac{5}{c^2}C_3\kappa\bar{Q} + i\frac{3}{c^2}B_1\bar{P} = 0, \quad (4.66)$$

$$-\frac{c^4}{6}\kappa(m^2 - C_1)\bar{n} - \frac{c^4}{6}\kappa\frac{\zeta}{T_0}n_0C_1'\bar{T} - \frac{c^2}{6}n_0(m^2 + 5C_1)\omega\bar{v} + \frac{c^4}{6}\kappa C_2\bar{P} \\ + (5C_3\omega + iB_2)\bar{Q} + c^2\kappa C_4\bar{R} = 0. \quad (4.67)$$

$$\frac{2}{9}c^2n_0\kappa(m^2 - C_1)\bar{v} + \frac{4}{3}C_3\kappa\bar{Q} + (C_4\omega - iB_3)\bar{R} = 0. \quad (4.68)$$

Essas expressões encontram-se deduzidas detalhadamente na seção (E.2) do apêndice E.

Vamos agora considerar o caso não-relativístico. Portanto, adimensionalizando o sistema acima obtemos o seguinte resultado:

$$-\bar{n}^*\Gamma'\bar{v}^* = 0, \quad (4.69)$$

$$\Gamma'\bar{n}^* - \frac{5}{3}G\bar{v}^* + \Gamma'\bar{T}^* + \Gamma'\bar{P}^* - \frac{5}{3}\frac{1}{\zeta}\bar{Q}^* + \Gamma'\bar{R}^* = 0, \quad (4.70)$$

$$\Gamma'\bar{v}^* - \frac{c_v^0}{k}\bar{T}^* + \Gamma'\bar{Q}^* = 0, \quad (4.71)$$

$$-\frac{1}{2}(1 + C_1^*)\bar{n}^* + \frac{1}{6}\Gamma'(1 + 5C_1^*)\bar{v}^* + \frac{\zeta}{2}\frac{dC_1^*}{d\zeta}\bar{T}^* - \left(\frac{C_2^*}{2\zeta} + i\frac{9}{32}\frac{R}{\zeta^{3/2}}\frac{B_1^*}{\pi^{1/2}}\right)\bar{P}^* - \frac{5}{\zeta}\Gamma'C_3^*\bar{Q}^* = 0, \quad (4.72)$$

$$\frac{1}{6}\Gamma'(1 - C_1^*)\bar{n}^* + \frac{5}{18\zeta}(1 + 5C_1^*)\bar{v}^* + \frac{\zeta}{6}\frac{dC_1^*}{d\zeta}\Gamma'\bar{T}^* - \frac{1}{6}\frac{\Gamma'}{\zeta}C_2^*\bar{P}^* - \left(\frac{25}{3}\frac{C_3^*}{\zeta^2} + i\frac{5}{32}\frac{R}{\pi^{1/2}}\frac{B_2^*}{\zeta^{5/2}}\right)\bar{Q}^* - \frac{\Gamma'}{\zeta}C_4^*\bar{R}^* = 0, \quad (4.73)$$

$$-\frac{2}{9}\Gamma'(1 - C_1^*)\bar{v}^* - \frac{4}{3}\frac{C_3^*}{\zeta}\Gamma'\bar{Q}^* - \left(\frac{C_4^*}{\zeta} - i\frac{3}{32}\frac{R}{\zeta^{3/2}}\frac{B_3^*}{\pi^{1/2}}\right)\bar{R}^* = 0, \quad (4.74)$$

onde R e Γ' estão definidos em (4.34) e (4.35), e para as amplitudes com asterisco, temos:

$$\bar{n}^* = \frac{\bar{n}}{n_0}, \quad \bar{T}^* = \frac{\bar{T}}{T_0}, \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{v_0}, \quad \bar{P}^* = \frac{\bar{P}}{p}, \quad \bar{Q}^* = \frac{\bar{Q}}{v_0 p}, \quad \bar{R}^* = \frac{\bar{R}}{p}. \quad (4.75)$$

Observamos que novamente tivemos que utilizar a definição relativística para a velocidade de fase v_s , assim como nos casos referentes a cinco campos. Os demais coeficientes com asteriscos, são definidos por:

$$B_1^* = \frac{c}{nkT\sigma}B_1, \quad B_2^* = \frac{c}{nkT\sigma}B_2, \quad B_3^* = \frac{c}{nkT\sigma}B_3, \quad (4.76)$$

onde B_1 , B_2 e B_3 estão definidos na seção (C.5) do apêndice C. Temos também que:

$$C_1^* = \frac{C_1}{m}, \quad C_2^* = \frac{c^2}{m}C_2, \quad C_3^* = \frac{C_3}{m}, \quad C_4^* = \frac{B_4}{m}, \quad (4.77)$$

cujas expressões completas podem ser encontradas na seção (C.7) do apêndice C.

Na figura 4.7 mostramos o gráfico correspondente à solução de menor atenuação, para o determinante formado pelos coeficientes das amplitudes \bar{n}^* , \bar{v}^* , \bar{T}^* , \bar{P}^* e \bar{Q}^* , \bar{R}^* . Analogamente ao caso de cinco campos para Navier-Stokes e Fourier, a equação de dispersão para esse determinante será de quarta ordem, e que para o caso não-relativístico é dada por:

$$\left(\frac{\kappa v_0}{\omega}\right)^4 \left[\frac{189}{10} \frac{1}{r} + \frac{159}{10} \frac{i}{r^2} - \frac{3}{r} \right] - \left(\frac{\kappa v_0}{\omega}\right)^2 \left[\frac{147}{5} \frac{1}{r^3} + \frac{288}{5} \frac{i}{r^2} - \frac{21}{r} - \frac{10}{3} i \right] + \frac{15}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{35}{2} \frac{i}{r^2} - \frac{40}{3} \frac{1}{r} - \frac{10}{3} i = 0. \quad (4.78)$$

Essa relação de dispersão foi obtida da mesma maneira como no caso correspondente a cinco campos, e analogamente $r = p/(\omega\mu_0)$, salientado que neste caso a expressão utilizada para μ_0 está dada por (4.23). Na figura 4.7 a solução de menor atenuação está representada pela linha cheia.

Observemos nessa figura que a solução parte de um valor finito, para $R = 0$, comportamento que não existia no caso de cinco campos. Ressaltamos, também, que há outra solução, a qual designaremos por $(v_s/v_f)_{sol.2}$, cujo limite para Reynolds, tendendo para zero, é finito e que não

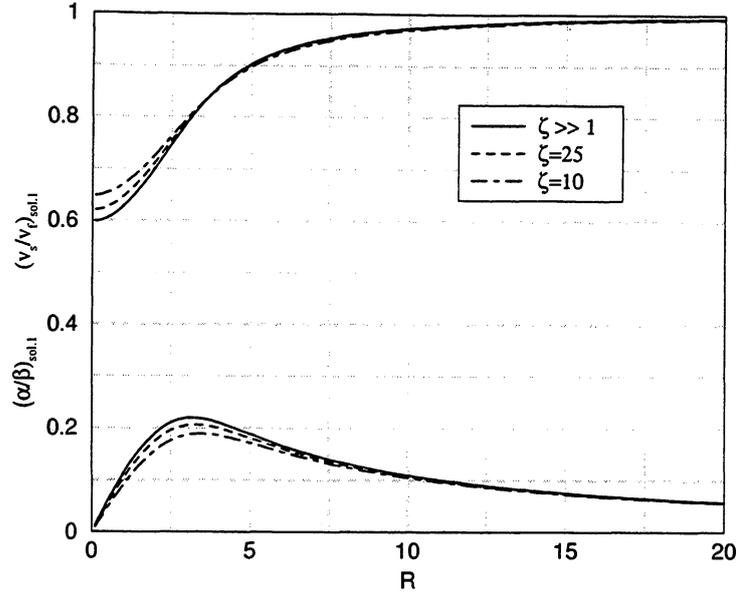


Figura 4.7: Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para a solução 1 - caso clássico

se encontra representada na figura 4.7, por ter uma forte atenuação. Os valores limites para a (v_s/v_f) encontrados por nós, para essas duas soluções, quando Reynolds tende para zero, são:

$$\left(\frac{v_s}{v_f}\right)_{sol.1} \rightarrow 0,57 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_f}{v_0}\right)_{sol.1} \rightarrow 1,73 \quad (4.79)$$

$$\left(\frac{v_s}{v_f}\right)_{sol.2} \rightarrow 1,11 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_f}{v_0}\right)_{sol.2} \rightarrow 0,90 \quad (4.80)$$

Esses valores, que correspondem ao caso não-relativístico, estão em concordância com os resultados encontrados por Boillat [37] e por Seccia e Strumia [38], que foram obtidos através das teorias fenomenológicas. Observamos, também, que quando $R \rightarrow \infty$, obtemos $v_f \rightarrow v_s$ para a solução 1 e $v_f \rightarrow \infty$ para a solução 2.

No gráfico correspondente à figura 4.7, mostramos o comportamento para a $(v_s/v_0)_{sol.1}$ e para a sua atenuação, considerando, além do valor correspondente a $\zeta \gg 1$, mais dois valores para o parâmetro ζ . Notamos que, à medida que ζ tende para valores muito elevados, as curvas se aproximam da solução não-relativística, que corresponde à linha cheia.

Vejamos agora o caso ultra-relativístico. Neste caso após adimensionalizarmos o sistema (4.63) à (4.68), chegamos ao seguinte resultado:

$$-\bar{n}^* + \Gamma' \bar{v}^* = 0, \quad (4.81)$$

$$\Gamma' \bar{n}^* - \frac{\zeta G}{3} \bar{v}^* + \Gamma' \bar{T}^* + \Gamma' \bar{P}^* - \frac{1}{3} \bar{Q}^* + \Gamma' \bar{R}^* = 0, \quad (4.82)$$

$$\Gamma' \bar{v}^* - \frac{c_v^0}{k} \bar{T}^* + \Gamma' \bar{Q}^* = 0, \quad (4.83)$$

$$-\frac{1}{2}(1 + C_1^*) \bar{n}^* + \frac{1}{6} \Gamma' (1 + 5C_1^*) \bar{v}^* + \frac{\zeta}{2} \frac{dC_1^*}{d\zeta} \bar{T}^* - \left(\frac{C_2^*}{2\zeta} + i \frac{15 R}{\pi \zeta^3} B_1^* \right) \bar{P}^* - \frac{5}{\zeta} \Gamma' C_3^* \bar{Q}^* = 0, \quad (4.84)$$

$$\frac{1}{6} \Gamma' (1 - C_1^*) \bar{n}^* + \frac{1}{18} (1 + 5C_1^*) \bar{v}^* + \frac{\zeta}{6} \frac{dC_1^*}{d\zeta} \Gamma' \bar{T}^* - \frac{1}{6} \frac{\Gamma'}{\zeta} C_2^* \bar{P}^* - \left(\frac{5 C_3^*}{3 \zeta} + i \frac{5 R B_2^*}{3 \pi \zeta^3} \right) \bar{Q}^* - \frac{\Gamma'}{\zeta} C_4^* \bar{R}^* = 0, \quad (4.85)$$

$$-\frac{2}{9} \Gamma' (1 - C_1^*) \bar{v}^* - \frac{4 C_3^*}{3 \zeta} \Gamma' \bar{Q}^* - \left(\frac{C_4^*}{\zeta} - i 5 \frac{R B_3^*}{\zeta^3 \pi} \right) \bar{R}^* = 0, \quad (4.86)$$

onde, novamente consideramos (4.39) para Γ' e R . A relação de dispersão correspondente ao caso ultra-relativístico para esse sistema é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa v_0}{\omega} \right)^4 \left[\frac{9}{5} \frac{1}{r^3} + \frac{8}{25} \frac{i}{r^2} + \frac{4}{25} \frac{1}{r} \right] - \left(\frac{\kappa v_0}{\omega} \right)^2 \left[\frac{14}{5} \frac{1}{r^3} + \frac{76}{75} \frac{i}{r^2} + \frac{8}{15} \frac{1}{r} + \frac{16}{125} i \right] \\ & + \frac{1}{r^3} + \frac{44}{75} \frac{i}{r^2} + \frac{92}{375} \frac{1}{r} + \frac{16}{125} i = 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

com r definido em (4.39). A solução de menor atenuação para essa relação de dispersão está representada pela linha cheia no gráfico dado pela figura 4.8. Nesse gráfico mostramos o comportamento para a velocidade de fase e para a sua atenuação, para mais dois valores para o parâmetro ζ . Notamos também que à medida que diminuimos o valor para o parâmetro ζ , a solução se aproxima cada vez mais do valor ultra-relativístico, dado pela curva cheia.

Para o caso ultra-relativístico, obtivemos os seguintes resultados limites para a velocidade de fase para as soluções 1 e 2:

$$\left(\frac{v_s}{v_f} \right)_{sol.1} \rightarrow 0,999 \quad \Rightarrow \quad (v_f)_{sol.1} \rightarrow \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (4.88)$$

$$\left(\frac{v_0}{v_f} \right)_{sol.2} \rightarrow 0,746 \quad \Rightarrow \quad (v_f)_{sol.2} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{5}} c. \quad (4.89)$$

Esses resultados foram obtidos quando consideramos o valor 0,01 para o parâmetro ζ . Portanto, esse é um forte indicativo que, para esse valor de ζ , estamos no limite ultra-relativístico. Esses valores encontrados também estão em concordância com os resultados obtidos por Boillat [37] e Seccia e Strumia [38].

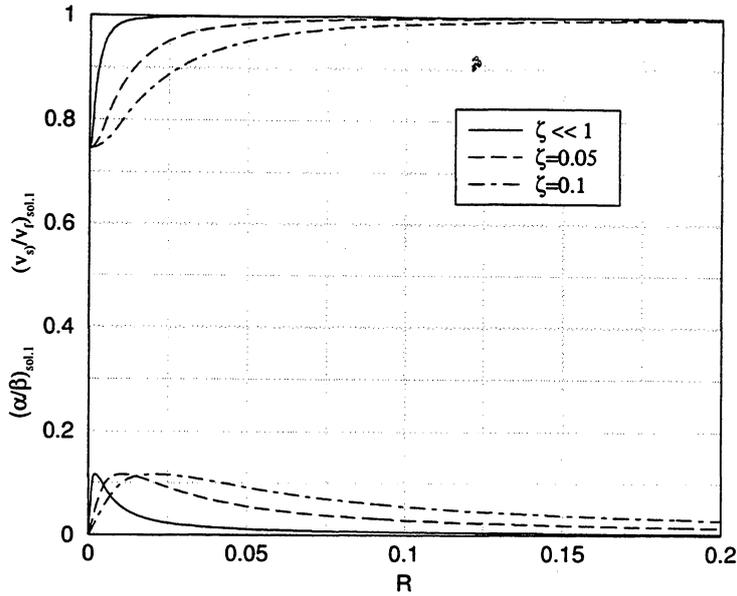


Figura 4.8: Gráfico da velocidade de fase e da atenuação para a solução 1 - caso ultra-relativístico.

4.4 Conclusão

O objetivo desse capítulo foi fazer uma aplicação ao estudo da propagação de ondas sonoras, utilizando para tal fim alguns dos resultados obtidos nos capítulos que antecedem a esse.

Inicialmente consideramos a propagação de ondas sonoras para o caso de cinco campos, a saber, a densidade do número de partículas n , a temperatura T e a quadrivelocidade U^μ . Começamos considerando as equações de Navier-Stokes e Fourier e, a seguir, desenvolvemos o mesmo raciocínio, aplicando as equações relativísticas de Burnett linearizadas que foram obtidas no capítulo 2. E, por último, consideramos a propagação de ondas sonoras para o caso de quatorze campos, isto é, além da densidade do número de partículas, da temperatura e da quadrivelocidade, incluímos a pressão dinâmica ϖ , o fluxo de calor q^μ e o deviante do tensor pressão $p^{<\mu\nu>}$.

Para o estudo da propagação de ondas sonoras considerando cinco campos e utilizando as equações de Navier-Stokes e Fourier, encontramos um sistema de equações em termos das amplitudes e que para as ondas longitudinais deixamos na forma do determinante (4.22). A solução desse determinante nos fornece uma relação de dispersão de quarta ordem. Inicialmente mostramos que as soluções desse determinante no caso não-relativístico e ultra-relativístico concordam perfeitamente com resultados encontrados na literatura. Vimos que o caso não-relativístico desse determinante nos forneceu a relação de dispersão (4.27) que concorda com

Greenspan. No gráfico da figura 4.1 mostramos a solução de menor atenuação para esse caso. Verificamos assim que quando o número de Reynolds tende para zero a velocidade de fase tende ao infinito e quando o número de Reynolds tende ao infinito a velocidade de fase tende para a velocidade adiabática do som. Esse resultado corresponde ao paradoxo da condução do calor, e que pode ser resolvido quando se aumenta o número de campos do modelo. A seguir aplicamos ao determinante (4.22) o caso ultra-relativístico no que resultou no determinante (4.31) e cujo resultado foi a relação de dispersão (4.32). Vimos assim que para o caso ultra-relativístico há dispersão e atenuação para as ondas sonoras. Na figura 4.2 mostramos a velocidade de fase e a atenuação para a solução de menor atenuação para esse caso.

Analisados esses dois casos extremos, aplicamos a seguir ao determinante (4.22) as expressões completas para os coeficientes que aparecem nas equações de Navier-Stokes e Fourier, assim como para as demais grandezas termodinâmicas que nele aparecem. Consideramos novamente dois casos, um considerando a forma não relativística para a velocidade adiabática do som e para o número de Reynolds, e no outro caso considerando a forma ultra-relativística para essas duas quantidades. Os resultados estão expressos pelos determinantes (4.33) e (4.38), e pelos gráficos 4.3 e 4.4, como podemos verificar. No gráfico da figura 4.3 constatamos que à medida que aumentamos o parâmetro ζ a solução tende para o caso não-relativístico, representado pela curva cheia. Analogamente verificamos na figura 4.4, somente que agora, à medida que diminuimos o parâmetro ζ , a solução tende ao resultado limite, resultados esses que satisfazem as nossas equações .

O próximo passo foi repetir o mesmo raciocínio acima, somente que agora considerando as equações de Burnett linearizadas. Desta forma obtivemos o sistema de equações de campo (4.43) até (4.45). Considerando o caso não-relativístico desse sistema chegamos à equação de dispersão (4.48) e que concorda com Greenspan [32]. Na figura 4.5 mostramos o gráfico para a solução de menor atenuação. Para o caso ultra-relativístico obtivemos a relação de dispersão (4.53). Portanto, novamente mostramos que nesse caso as ondas sonoras têm dispersão e são atenuadas. Na figura 4.6 mostramos o comportamento da velocidade de fase e da atenuação para a solução com a menor atenuação.

Finalmente consideramos um sistema de equações correspondente a quatorze campos. O sistema de equações geral encontrado para esse caso é dado por (4.63) até (4.68), como podemos verificar. O sistema adimensional para o caso onde consideramos a expressão não-relativística para a velocidade adiabática do som e para o número de Reynolds, mas levando em conta as expressões completas para as demais grandezas envolvidas, está dada por (4.69) até (4.74) e cujo resultado para a onda de menor atenuação encontra-se exposto no gráfico dado pela figura 4.7. Observamos agora que no limite quando o número de Reynolds tende a zero, as soluções são finitas. No caso da solução mostrada no gráfico 4.7 o valor limite corresponde a $(v_s/v_f) = 0,57$,

que concorda com valores encontrados por Boillat, Strumia e Seccia, os quais utilizaram uma teoria fenomenológica. Adimensionalizando agora o sistema (4.63) até (4.68) para o caso ultra-relativístico, obtemos o sistema (4.81) até (4.86), cuja solução de menor atenuação para alguns valores do parâmetro ζ encontra-se no gráfico dado pela figura 4.8. Novamente constatamos que a solução é limitada quando o número de Reynolds tende a zero e o valor encontrado por nós, foi $(v_s/v_f) = 0,999$, que também concorda com Boillat, Strumia e Seccia.

Assim, verificamos que as expressões encontradas para os coeficientes de transporte no capítulo 2, onde foi utilizado o modelo de Grad e a teoria cinética, quando aplicadas ao estudo de ondas sonoras, fornecem resultados idênticos aos resultados encontrados por outros autores e utilizando modelos diferentes.

Capítulo 5

Considerações Finais

Na introdução desta tese enumeramos uma série de nove objetivos, o quais deveríamos cumprir. Portanto, neste capítulo final, denominado de considerações finais, vamos comentar cada um daqueles objetivos e ainda ressaltar quais foram os resultados originais dessa tese.

O primeiro objetivo era determinar as equações de Burnett relativísticas segundo a teoria cinética e utilizando o método de Grad. Como podemos verificar no capítulo 2, seção 2.6, estas equações foram determinadas com sucesso e são dadas por (2.45), (2.48) e (2.50) e correspondem respectivamente à equação de Burnett relativística para a pressão dinâmica, para o fluxo de calor e para o deviante do tensor pressão. Observamos que essas equações, expressas dessa maneira e utilizando a teoria cinética e o método de Grad, ainda não foram encontradas na literatura, portanto consideramos a obtenção dessas equações como um resultado original dessa tese. Salientamos, porém, que as equações de Burnett relativísticas já haviam sido obtidas por Anderson e Payne Jr. [26], através do método BGK, que como sabemos é um método aproximado de resolver a equação de Boltzmann.

O segundo objetivo era determinar as expressões algébricas para todos os coeficientes de transporte presentes nas equações de Burnett relativísticas. Na seção 2.7 explicitamos todos esses coeficientes, em número de 25, que aparecem nessas equações. Observamos que esse resultado também é um resultado inédito desta tese. A seguir encontramos as expressões algébricas para os limites não-relativístico e ultra-relativístico de todos esses coeficientes e constatamos que, a partir das expressões obtidas para o limite não-relativístico, obtivemos, na seção 2.8, as equações de Burnett, assim como dadas por Wang Chang e Uhlenbeck [22].

A seguir, no capítulo 3, determinamos novamente as equações de Burnett relativísticas, somente que agora utilizando o modelo proposto por Anderson e Witting. Esse era o nosso quinto objetivo e julgamos atingido, como podemos verificar pelas equações (3.53), (3.54) e (3.55). A seguir, da mesma maneira como fizemos no capítulo 2, explicitamos todos os coeficientes de transporte que aparecem nessas equações.

O nosso sexto objetivo era comparar, numericamente, os coeficientes de transporte encontrados através da resolução da equação de Boltzmann exata, empregando a teoria cinética

e o método de Grad, com aqueles obtidos através do modelo de Anderson e Witting. Dessa comparação obtivemos 25 gráficos que se encontram expostos na seção 3.5. A partir dessa comparação, verificamos que as soluções se ajustam perfeitamente no caso ultra-relativístico, mas diferem em menor ou maior grau nas regiões correspondentes ao caso não-relativístico. Desta maneira, concluímos que, empregando o método de Grad para resolver a equação de Boltzmann completa, os resultados são melhores que os obtidos por Anderson e Witting. Outro resultado importante que pudemos constatar é o fato dos coeficientes η_1 , η_4 , η_6 e η_7 serem de ordem superior ao coeficiente de viscosidade volumétrica η . Esse não é um resultado inédito, pois Kremer e Müller [21] já haviam previsto esse resultado empregando as teorias fenomenológicas. Para os coeficientes do fluxo de calor verificamos que os coeficientes de transporte são da mesma ordem que a condutividade térmica. Para os coeficientes do deviante do tensor pressão, observamos que os coeficientes μ_6 , μ_7 , μ_8 e μ_9 apresentam valores superiores ao coeficiente de viscosidade cisalhante na região ultra-relativística e são ligeiramente inferiores na região não-relativística. A comparação desses últimos resultados também é um resultado inédito obtido por nós.

Os dois últimos objetivos dessa tese eram estudar a propagação de ondas sonoras empregando cinco campos, inicialmente utilizando as equações de Navier-Stokes e Fourier e depois as equações de Burnett linearizadas e também estudar a propagação de ondas sonoras empregando quatorze campos e analisar os limites não-relativístico e ultra-relativístico para cada caso. Esses resultados encontram-se expostos ao longo do capítulo 4. Como um dos resultados inéditos destes dois últimos objetivos foi o fato de mostrarmos que as ondas sonoras, quando se consideram, quer sejam as equações de Navier-Stokes e Fourier, ou as equações de Burnett linearizadas, no caso ultra-relativístico, possuem dispersão e são ondas atenuadas, conforme as relações de dispersão (4.32) e (4.53) e cujas soluções encontram-se representadas, respectivamente, nas figuras 4.2 e 4.6. Os resultados encontrados para o caso não-relativístico tinham sido obtidos anteriormente por Greenspan [32]. Além desses resultados, mostramos graficamente os comportamentos para as soluções que possuem a menor atenuação para os casos não-relativístico e ultra-relativístico, para as equações de Navier-Stokes e Fourier e Burnett linearizadas, conforme figuras 4.3 e 4.4. Esses gráficos foram obtidos considerando-se as expressões relativísticas completas para os coeficientes de transporte, e mostram o comportamento da solução que possui a menor atenuação para alguns valores do parâmetro $\zeta = mc^2/kT$.

Finalmente, estudamos a propagação de ondas sonoras, considerando quatorze campos. Analogamente ao caso de cinco campos, encontramos as relações de dispersão para o caso não-relativístico (4.78) e para o caso ultra-relativístico (4.87). A relação de dispersão para o caso ultra-relativístico também é um resultado inédito. Nas figuras 4.7 e 4.8, mostramos as soluções de menor atenuação para essas relações de dispersão assim como as soluções para outros valores para o parâmetro ζ . Verificamos, através desses gráficos, tanto no caso não-relativístico, como

no caso ultra-relativístico, que, no limite para o número de Reynolds tendendo a zero, as soluções limites coincidem com os valores encontrados por Boillat [37] e Seccia e Strumia [38], os quais utilizam teorias fenomenológicas.

Desta forma concluímos esse capítulo, onde mostramos que os objetivos iniciais, enumerados na introdução, foram atingidos com sucesso, e ainda quais foram os resultados inéditos obtidos por nós. Muitos dos resultados intermediários, assim como os expostos no primeiro capítulo e nos apêndices, são resultados já amplamente conhecidos e cujas fontes de referência utilizadas por nós encontram-se devidamente assinaladas nas várias partes do texto e enumeradas na bibliografia que se encontra nas páginas finais.

Apêndice A

Deduções Relativas ao Capítulo 1

A.1 Expressão para a Velocidade Relativa v_{rel}

A expressão para a velocidade relativa entre duas partículas de mesma massa m e velocidades \vec{v} e \vec{v}_1 pode ser obtida da seguinte maneira: substituindo-se no produto dos quadrimomenta

$$p^\mu p_{1\mu} = p^0 p_1^0 - \vec{p} \cdot \vec{p}_1, \quad (\text{A.1})$$

as expressões de p^0 e \vec{p} para as duas partículas dadas por:

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_1^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p}_1 = \frac{m\vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad (\text{A.2})$$

e considerando-se um sistema de referência em que uma das partículas está em repouso, isto é, $v = 0$, temos:

$$p^\mu p_{1\mu} = \frac{m^2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}}, \quad (\text{A.3})$$

onde v_{rel} é o módulo da velocidade relativa, isto é, a velocidade da partícula denotada pelo índice 1 no sistema de referência em que a partícula sem índice está em repouso. De acordo com (A.3), a expressão para a velocidade relativa é:

$$v_{rel} = c \sqrt{1 - \frac{m^4 c^4}{(p^\mu p_{1\mu})^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Se considerarmos agora um referencial qualquer, podemos expressar $p^\mu p_{1\mu}$ como:

$$p^\mu p_{1\mu} = \frac{m^2 c^2 - m^2 (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}_1}{c}\right) p^0 p_1^0, \quad (\text{A.5})$$

onde empregamos as relações (A.2).

Como o produto $p^\mu p_{1\mu}$ é um invariante escalar, isto é, ele é independente do referencial adotado, podemos substituir (A.5) na expressão (A.4), de onde obtemos, após um pouco de álgebra,

$$v_{rel} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{c^2}} \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{v}_1)^2}, \quad (\text{A.6})$$

que é a expressão para a velocidade relativa em termos das velocidades \vec{v} e \vec{v}_1 . Para chegarmos à expressão (A.6) fizemos uso da seguinte identidade vetorial:

$$(\vec{v} \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{v} \times \vec{v}_1) = (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) - (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)^2. \quad (\text{A.7})$$

A.2 A Taxa de Variação Temporal $\Delta N/\Delta t$

Vamos mostrar que o lado direito da equação (1.21) é um invariante escalar. Consideremos inicialmente o termo:

$$\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Como $v^i = cp^i/p^0$ e $p^0 = \gamma mc$, este termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{cp^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \frac{c\gamma}{p^0} p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Como f é um invariante escalar e $\partial f/\partial x^\mu$ é um quadrivetor, o produto escalar entre dois quadrivetores é um invariante escalar.

Verifiquemos agora que $\gamma \partial(f\mathcal{F}^i)/\partial p^i$ é da mesma forma um invariante escalar. Para tanto, devemos utilizar a força de Minkowski \mathcal{K}^μ , definida da seguinte forma:

$$\mathcal{K}^\mu p_\mu = \mathcal{K}^0 p_0 - \vec{\mathcal{K}} \cdot \vec{p} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo a substituição:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{mc}{p^0} \vec{\mathcal{K}}, \quad (\text{A.11})$$

onde p^0 é uma variável independente e m é a massa de repouso de uma partícula do gás, chegamos ao seguinte resultado:

$$\gamma \frac{\partial f \mathcal{K}^i}{\partial p^i} = \gamma \frac{mc}{p^0} \left[\frac{\partial f \mathcal{K}^0}{\partial p^0} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (f \vec{\mathcal{K}}) \right] = \gamma \frac{mc}{p^0} \frac{\partial f \mathcal{K}^\mu}{\partial p^\mu} = \frac{\partial f \mathcal{K}^\mu}{\partial p^\mu}, \quad (\text{A.12})$$

que é um invariante escalar. Desta forma a equação (1.20) fica:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c}{p^0} \left[p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\mu}{\partial p^\mu} \right] d^3 x d^3 p. \quad (\text{A.13})$$

que também é um invariante escalar.

A.3 A Equação de Transporte

Multiplicando a equação (1.34) por uma função arbitrária $\psi(p^\nu)$ e integrando-a em $d^3 p/p^0$, obtemos:

$$\int \psi p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{2} \int \psi (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.14})$$

Como somente f é uma função das coordenadas espaço-temporais, podemos trocar as operações da derivada e da integral no primeiro membro desta equação, a qual toma a seguinte forma:

$$\int \psi p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} = \partial_\mu \int \psi p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.15})$$

Para o primeiro termo do segundo membro, observamos que podemos trocar a posição das plicas, isto é,

$$\int \psi f'_1 f' F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \int \psi' f_1 f F' \sigma' d\Omega' \frac{d^3 p'_1}{p_1'^0} \frac{d^3 p'}{p'^0}. \quad (\text{A.16})$$

Podemos justificar este procedimento observando que todas as grandezas envolvidas são funções do quadrimomento p^μ e que é possível obter uma relação entre os momentos das partículas antes e após uma colisão. De acordo com a igualdade (1.29) este termo pode ainda ser escrito da seguinte maneira:

$$\int \psi f'_1 f' F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \int \psi' f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.17})$$

Com estas considerações, o lado direito da equação (A.14) fica:

$$\int \psi (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \int (\psi' - \psi) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.18})$$

Se agora mudarmos o papel das partículas que colidem, isto é, trocando-se (p^μ, p'^μ) por $(p_1^\mu, p_1'^\mu)$ obtemos:

$$\int (\psi' - \psi) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \int (\psi'_1 - \psi_1) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.19})$$

Desta forma temos para a equação (A.18) o seguinte resultado:

$$\int \psi(f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{2} \int (\psi' + \psi'_1 - \psi - \psi_1) f_1 f F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.20})$$

Fazendo agora a mudança (p^μ, p_1^μ) por $(p'^\mu, p_1'^\mu)$ a equação (A.20) pode também ser escrita como:

$$\int \psi(f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{4} \int (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.21})$$

Substituindo-se os resultados encontrados para o primeiro termo e para o segundo termo na equação (A.14), ficamos com a seguinte equação:

$$\partial_\mu \int \psi p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{8} \int (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) (f'_1 f' - f_1 f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (\text{A.22})$$

que é a equação de transporte (1.36).

A.4 Determinação das Constantes a e b_μ

Vamos nesta seção determinar as constantes a e b_μ . Para tal fim utilizaremos a definição do quadrifluxo de partículas (1.39), isto é,

$$N^\mu = c \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} = c \int p^\mu f^{(0)} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.23})$$

Consideremos a seguinte definição:

$$Z = \int \exp(-b_\mu p^\mu) \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{1}{a} \int f^{(0)} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (\text{A.24})$$

que é um invariante escalar, pois $d^3 p/p^0$ e $b_\mu p^\mu$ são invariantes escalares. Podemos ainda escrever:

$$N^\mu = -ca \frac{\partial Z}{\partial b_\mu}, \quad (\text{A.25})$$

pois

$$\frac{\partial Z}{\partial b_\mu} = - \int p^\mu \exp(-b_\nu p^\nu) \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{A.26})$$

A grande vantagem de ser Z um invariante escalar é que ele pode ser calculado em qualquer referencial. Escolheremos, então, um referencial onde a única componente diferente de zero é a componente temporal de b_μ , a qual será denotada por $b_0 = \zeta/mc$, isto é,

$$(b_\mu^R) = \left(\frac{\zeta}{mc}, 0, 0, 0 \right). \quad (\text{A.27})$$

Mais adiante mostraremos que essa escolha corresponde ao referencial próprio que se move com a mesma velocidade do fluido. De (A.27) temos que:

$$b_\mu^R b^{R\mu} = \left(\frac{\zeta}{mc} \right)^2 = b_\mu b^\mu. \quad (\text{A.28})$$

Para determinarmos a integral Z , vamos considerar coordenadas esféricas. Desta forma temos que:

$$d^3p = p^2 \sin\theta d|\vec{p}| d\theta d\phi. \quad (\text{A.29})$$

Como

$$b_\mu^R p^\mu = \frac{\zeta}{mc} p^0, \quad (\text{A.30})$$

a equação (A.24) se reduz a:

$$Z = 4\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta}{mc} p^0\right) |\vec{p}|^2 \frac{d|\vec{p}|}{p^0}, \quad (\text{A.31})$$

onde foi efetuada a integração nos limites $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Utilizando-se a relação $p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}$ para o momento linear da partícula e que vem da mecânica relativística, e ainda introduzindo-se a variável $y = p^0/mc$, obtemos:

$$|\vec{p}|^2 = m^2 c^2 (y^2 - 1), \quad d|\vec{p}| = mc \frac{y dy}{(y^2 - 1)^{1/2}}. \quad (\text{A.32})$$

A equação (A.31) se reduz assim a:

$$Z = 4\pi (mc)^2 \int_1^\infty \exp(-\zeta y) (y^2 - 1)^{1/2} dy = 4\pi (mc)^2 \frac{K_1(\zeta)}{\zeta}, \quad (\text{A.33})$$

onde usamos a definição da função modificada de Bessel dada pela equação (B.1) do apêndice B.

Desta forma temos para a derivada de (A.33):

$$\frac{\partial Z}{\partial b_\mu} = -4\pi (mc)^4 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta^2} b^\mu, \quad (\text{A.34})$$

onde utilizamos a relação (B.3) do apêndice B para a derivada da função modificada de Bessel.

Fazendo agora a substituição do resultado encontrado em (A.34) na equação (A.25), e considerando que $N^\mu = nU^\mu$, obtemos o seguinte resultado:

$$N^\mu = nU^\mu = 4\pi ca(mc)^4 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta^2} b^\mu. \quad (\text{A.35})$$

Mas no referencial próprio, $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ e as componentes espaciais de b^μ são nulas. Desta forma, no referencial próprio, as componentes de b^μ são dadas pela equação (A.27), e, assim, neste referencial, obtemos de (A.35) que:

$$a = \frac{n\zeta}{4\pi(mc)^3 K_2(\zeta)}. \quad (\text{A.36})$$

Se agora substituirmos este resultado para a em (A.35), encontraremos

$$b^\mu = \left(\frac{\zeta}{mc} \right) \frac{U^\mu}{c}, \quad (\text{A.37})$$

as quais são as expressões que queríamos determinar.

Pelo processo descrito acima podemos obter as expressões para todas as integrais $Z^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ que serão necessárias ao longo desta tese. O resultado para cada uma delas é dado a seguir:

$$Z = \int \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = 4\pi m k T K_1(\zeta), \quad (\text{A.38})$$

$$Z^\mu = \int p^\mu \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = 4\pi m^2 k T K_2(\zeta) U^\mu, \quad (\text{A.39})$$

$$Z^{\mu\nu} = \int p^\mu p^\nu \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = -4\pi (m k T)^2 K_2(\zeta) g^{\mu\nu} + 4\pi m^3 k T K_3(\zeta) U^\mu U^\nu, \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} Z^{\mu\nu\sigma} = \int p^\mu p^\nu p^\sigma \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = & -4\pi m^3 (kT)^2 K_3(\zeta) [g^{\mu\nu} U^\sigma + g^{\mu\sigma} U^\nu + g^{\sigma\nu} U^\mu] \\ & + 4\pi m^4 k T K_4(\zeta) U^\mu U^\nu U^\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} Z^{\mu\nu\sigma\tau} = \int p^\mu p^\nu p^\sigma p^\tau \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = & 4\pi (m k T)^3 K_3(\zeta) [g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} + g^{\sigma\nu}] \\ & - 4\pi m^4 (kT)^2 K_4(\zeta) [g^{\mu\nu} U^\sigma U^\tau + g^{\mu\sigma} U^\nu U^\tau + g^{\sigma\nu} U^\mu U^\tau + g^{\mu\tau} U^\sigma U^\nu \\ & + g^{\sigma\tau} U^\nu U^\mu + g^{\nu\tau} U^\mu U^\sigma] + 4\pi m^5 k T K_5(\zeta) U^\mu U^\nu U^\sigma U^{\tau\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$Z^{\mu\nu\sigma\tau\epsilon} = \int p^\mu p^\nu p^\sigma p^\tau p^\epsilon \exp(-b_\lambda p^\lambda) \frac{d^3 p}{p^0} = 4\pi m^4 (kT)^3 K_4(\zeta) [U^\epsilon (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} + g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} + g^{\sigma\nu} g^{\mu\tau})$$

$$\begin{aligned}
& +U^\tau(g^{\mu\sigma}g^{\nu\epsilon} + g^{\mu\nu}g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\nu}g^{\mu\epsilon}) + U^\sigma(g^{\mu\nu}g^{\tau\epsilon} + g^{\mu\tau}g^{\nu\epsilon} + g^{\tau\nu}g^{\mu\epsilon}) + U^\nu(g^{\mu\sigma}g^{\tau\epsilon} + g^{\mu\tau}g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\tau}g^{\mu\epsilon}) \\
& +U^\mu(g^{\tau\sigma}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\tau}g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\nu}g^{\tau\epsilon}) - 4\pi m^5(kT)^2 K_5(\zeta)[g^{\mu\nu}U^\sigma U^\tau U^\epsilon + g^{\mu\sigma}U^\nu U^\tau U^\epsilon + g^{\sigma\nu}U^\mu U^\tau U^\epsilon \\
& +g^{\mu\tau}U^\sigma U^\nu U^\epsilon + g^{\sigma\tau}U^\nu U^\mu U^\epsilon + g^{\nu\tau}U^\mu U^\sigma U^\epsilon + g^{\mu\epsilon}U^\nu U^\sigma U^\tau + g^{\nu\epsilon}U^\mu U^\sigma U^\tau + g^{\epsilon\tau}U^\mu U^\nu U^\sigma] \\
& +4\pi m^6 kTK_6(\zeta)U^\mu U^\nu U^\sigma U^\tau U^\epsilon.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

A.5 Determinação do Parâmetro ζ

Para a determinação do parâmetro ζ devemos proceder da seguinte maneira: inicialmente, calculamos o tensor energia-momento em equilíbrio (neste caso usamos o índice E), onde devemos fazer uso da definição (1.40) e da função Z definida na seção (A.4) desse apêndice e dada por (A.24), assim:

$$T^{\mu\nu}|_E = c \int p^\mu p^\nu f^{(0)} \frac{d^3p}{p^0} = ac \frac{\partial^2 Z}{\partial b_\mu \partial b_\nu} = mc^2 n \left[-\frac{1}{\zeta} g^{\mu\nu} + \frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} \right]. \tag{A.44}$$

A seguir, deveremos determinar a expressão para a energia interna por partícula e . A partir da equação (1.74) e com o resultado obtido acima para $T^{\mu\nu}|_E$, temos:

$$e|_E = mc^2 \left[\frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} \right]. \tag{A.45}$$

O próximo passo é calcular o quadri vetor fluxo de entropia definido em (1.52) e de onde obtemos

$$S^\mu|_E = -k \left\{ \ln \left[\frac{n\zeta}{4\pi(mc)^3 K_2(\zeta)} \right] N^\mu - \frac{\zeta}{mc^2} U_\nu T^{\mu\nu}|_E \right\} \tag{A.46}$$

A partir da entropia por partícula definida da seguinte forma:

$$s = \frac{1}{nc^2} S^\mu U_\mu, \tag{A.47}$$

e tomando a sua derivada temporal convectiva, obtém-se:

$$Ds|_E = \frac{k\zeta}{mc^2} \left[De|_E - \frac{mc^2}{n\zeta} Dn \right]. \tag{A.48}$$

Se compararmos este resultado com a equação de Gibbs:

$$Ds|_E = \frac{1}{T} \left[De|_E - \frac{p|_E}{n^2} Dn \right], \quad (\text{A.49})$$

encontramos:

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT} \quad e \quad p|_E = nkT, \quad (\text{A.50})$$

onde T é a temperatura absoluta e p é a pressão hidrostática..

Apêndice B

A Função Modificada de Bessel

A maioria dos resultados obtidos por nós ao longo deste trabalho estão expressos em função de $G(\zeta)$, a qual é, por definição, a razão entre as funções modificadas de Bessel de terceira e de segunda ordem. Portanto, este apêndice será dedicado à apresentação da função de Bessel, assim como de algumas de suas propriedades.

A função modificada de Bessel de ordem n , que é usualmente representada por $K_n(\zeta)$ [30] é definida como:

$$K_n(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \int_1^\infty e^{-\zeta x} (x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dx, \quad (\text{B.1})$$

onde e é a base natural de logaritmos e $\Gamma(n)$ é a função gama, para a qual valem as seguintes relações :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.2})$$

Fazendo agora a seguinte mudança de variável $x = \cosh t$, encontramos a seguinte expressão alternativa para a função modificada de Bessel, em termos das funções trigonométricas hiperbólicas:

$$K_n(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \int_0^\infty e^{-\zeta \cosh t} \sinh^{2n} t dt. \quad (\text{B.3})$$

Relacionamos a seguir duas fórmulas envolvendo $K_n(\zeta)$:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{K_n(\zeta)}{\zeta^n} \right) = -\frac{K_{n+1}(\zeta)}{\zeta^n}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d}{d\zeta} (\zeta^n K_n(\zeta)) = -\zeta^n K_{n-1}(\zeta), \quad (\text{B.5})$$

as quais podem ser combinadas de modo a obtermos as seguintes fórmulas de recorrência:

$$K_{n+1}(\zeta) - K_{n-1}(\zeta) = \frac{2n}{\zeta} K_n(\zeta), \quad (\text{B.6})$$

$$K_{n+1}(\zeta) = \frac{n}{\zeta} K_n(\zeta) - \frac{dK_n(\zeta)}{d\zeta}. \quad (\text{B.7})$$

Considerando $G(\zeta) = K_3(\zeta)/K_2(\zeta)$ e fazendo uso das fórmulas de recorrência (B.6) e (B.7), encontramos as seguintes relações úteis envolvendo $K_n(\zeta)$:

$$\frac{K_4(\zeta)}{K_2(\zeta)} = 1 + 6\frac{G(\zeta)}{\zeta}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{K_5(\zeta)}{K_2(\zeta)} = G(\zeta) + 48\frac{G(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{8}{\zeta}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{K_6(\zeta)}{K_2(\zeta)} = 1 + \frac{80}{\zeta^2} + 16\frac{G(\zeta)}{\zeta} + 480\frac{G(\zeta)}{\zeta^3}. \quad (\text{B.10})$$

No capítulo 2 precisamos expandir os coeficientes obtidos nas equações de Burnett para os casos ($\zeta \gg 1$) e para ($\zeta \ll 1$). Portanto, as expansões para $K_n(\zeta)$, nestes dois limites, são dadas respectivamente por:

$$K_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \frac{1}{e^\zeta} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8\zeta} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8\zeta)^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!(8\zeta)^3} + \dots \right], \quad (\text{B.11})$$

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n-2k}} + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\ln \frac{\zeta}{2} - \frac{1}{2}\psi(k+1) - \frac{1}{2}\psi(n+k+1) \right], \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -\gamma. \quad (\text{B.13})$$

Na equação acima $\gamma = 0,577215\dots$ é a constante de Euler.

Na verdade, quando realizamos estas expansões, utilizamos o programa algébrico **Maple**; e as expansões acima podem ser obtidas de acordo com os comandos **asympt** e **series** respectivamente.

Apêndice C

Deduções Relativas ao Capítulo 2

C.1 Os Multiplicadores de Lagrange

Vamos determinar, nesta seção, as expressões para os multiplicadores de Lagrange fora do equilíbrio λ^{FE} , λ_ν^{FE} e $\lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE}$. O conhecimento desses multiplicadores nos possibilitará obtermos a função de distribuição de Grad.

Iniciemos considerando as seguintes decomposições:

$$\lambda_\nu^{FE} = \tilde{\lambda}U_\nu + \tilde{\lambda}_\sigma\Delta_\nu^\sigma, \quad (C.1)$$

$$\lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE} = \Lambda U_\sigma U_\nu + \frac{1}{2}\Lambda_\mu (\Delta_\sigma^\mu U_\nu + \Delta_\nu^\mu U_\sigma) + \Lambda_{\mu\tau} \left(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\nu^\tau - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\tau} \Delta_{\sigma\nu} \right). \quad (C.2)$$

Desta forma podemos escrever a equação (2.15) como:

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 - \frac{nc^2}{k} \lambda^{FE} - \frac{nc^2}{k} (\tilde{\lambda}U_\mu + \tilde{\lambda}_\sigma\Delta_\mu^\sigma) p^\mu - \frac{nc^2}{k} \left[\Lambda U_\mu U_\nu + \frac{1}{2}\Lambda_\sigma (\Delta_\mu^\sigma U_\nu + \Delta_\nu^\sigma U_\mu) + \Lambda_{\sigma\tau} \left(\Delta_\mu^\sigma \Delta_\nu^\tau - \frac{1}{3}\Delta^{\sigma\tau} \Delta_{\mu\nu} \right) \right] p^\mu p^\nu \right\}. \quad (C.3)$$

Substituindo a expressão (C.3) na definição do quadrifluxo de partículas (1.39) e integrando, obtemos o seguinte resultado:

$$\lambda^{FE}U^\mu + \lambda_\nu^{FE} \left[mG(\zeta)U^\mu U^\nu - \frac{mc^2}{\zeta}g^{\mu\nu} \right] + \lambda_{\langle\sigma\nu\rangle}^{FE} \left[-\frac{G(\zeta)}{\zeta}(g^{\mu\nu}U^\sigma + g^{\mu\sigma}U^\nu + g^{\sigma\nu}U^\mu) + \frac{1}{c^2} \left(1 + 6\frac{G(\zeta)}{\zeta} \right) U^\mu U^\nu U^\sigma \right] = 0, \quad (C.4)$$

onde usamos as integrais que se encontram na seção (A.4) do apêndice A e que são dadas por (A.38) a (A.41). Multiplicando agora este resultado pela quadrivelocidade U_μ e pelo tensor simétrico Δ_μ^ν , encontramos respectivamente as seguintes relações:

$$\lambda^{FE} + \tilde{\lambda}mc^2\left(G - \frac{1}{\zeta}\right) + \Lambda m^2c^4\left(1 + 3\frac{G}{\zeta}\right) = 0, \quad (C.5)$$

$$\tilde{\lambda}_\sigma\Delta^{\sigma\nu} + mc^2G\Lambda_\sigma\Delta^{\sigma\nu} = 0. \quad (C.6)$$

Fazendo agora a substituição da expressão (C.3) na definição do tensor energia-momento (1.40) e novamente utilizando os resultados das integrais que se encontram na seção (A.4) do apêndice A, determinamos para este tensor o resultado:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & -\frac{n}{\zeta}mc^2g^{\mu\nu} + nmGU^\mu U^\nu + n^2c^2T\lambda^{FE}g^{\mu\nu} - \frac{n^2mc^2}{k}\lambda^{FE}GU^\mu U^\nu \\ & + n^2mc^2TG[c^2\tilde{\lambda}g^{\mu\nu} + 2\tilde{\lambda}U^\mu U^\nu + \tilde{\lambda}_\alpha(\Delta^{\alpha\mu}U^\nu + \Delta^{\alpha\nu}U^\mu)] - n^2mc^2T\left(\zeta + 6G(\zeta)\right)\tilde{\lambda}U^\mu U^\nu \\ & - n^2c^2T\Lambda\frac{G(\zeta)}{\zeta}(c^2g^{\mu\nu} + 2U^\mu U^\nu) + n^2T\Lambda\left(1 + 6\frac{G(\zeta)}{\zeta}\right)(c^4g^{\mu\nu} + 5c^2U^\mu U^\nu) - n^2T\zeta\left(G(\zeta)\right. \\ & \left. + 48\frac{G(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{8}{\zeta}\right)c^2\Lambda U^\mu U^\nu - n^2c^2T\Lambda_\alpha\frac{G(\zeta)}{\zeta}(\Delta^{\alpha\mu}U^\nu + \Delta^{\alpha\nu}U^\mu) + n^2c^2T\Lambda_\alpha\left(1 + 6\frac{G(\zeta)}{\zeta}\right) \\ & (\Delta^{\alpha\mu}U^\nu + \Delta^{\alpha\nu}U^\mu) - n^2c^2\Lambda_{\alpha\beta}T\frac{G(\zeta)}{\zeta}(\Delta^{\alpha\mu}\Delta^{\beta\nu} + \Delta^{\alpha\nu}\Delta^{\beta\mu} - \frac{2}{3}\Delta^{\alpha\beta}\Delta^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (C.7)$$

Substituindo agora, esse resultado para $T^{\mu\nu}$ nas equações (1.71) a (1.74):

$$\left(\Delta_\mu^\sigma\Delta_\nu^\tau - \frac{1}{3}\Delta^{\sigma\tau}\Delta_{\mu\nu}\right)T^{\mu\nu} = p^{(\sigma\tau)}, \quad \Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -3(p + \varpi), \quad (C.8)$$

$$\Delta_\mu^\sigma U_\nu T^{\mu\nu} = q^\sigma, \quad U_\mu U_\nu T^{\mu\nu} = nc^2e, \quad (C.9)$$

obtemos as seguintes expressões:

$$p^{(\sigma\tau)} = -2n^2m^2c^4T\frac{G}{\zeta}\Lambda^{(\sigma\tau)}, \quad (C.10)$$

$$\varpi = -n^2c^2T\left[\lambda^{FE} + Gmc^2\tilde{\lambda} + \left(1 + 5\frac{G}{\zeta}\right)m^2c^4\Lambda\right], \quad (C.11)$$

$$q^\sigma = n^2c^4T\left[Gm\Delta^{\tau\sigma}\tilde{\lambda}_\tau + \left(1 + 5\frac{G}{\zeta}\right)m^2c^2\Delta^{\tau\sigma}\Lambda_\tau\right], \quad (C.12)$$

$$\lambda^{FE}\left(G - \frac{1}{\zeta}\right) + \tilde{\lambda}mc^2\left(3\frac{G}{\zeta} + 1\right) + \Lambda m^2c^4\left(15\frac{G}{\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} + G\right) = 0. \quad (C.13)$$

Resolvendo agora o sistema composto pelas equações (C.5), (C.11) e (C.13) ficamos com:

$$\lambda^{\text{FE}} = -\frac{(15G + 2\zeta - 6G^2\zeta + 5G\zeta^2 + \zeta^3 - G^2\zeta^3) \varpi}{C_6 n^2 c^2 T}, \quad (\text{C.14})$$

$$\tilde{\lambda} = -\frac{3\zeta(6G + \zeta - G^2\zeta) \varpi}{C_6 m n^2 c^4 T}, \quad (\text{C.15})$$

$$\Lambda = -\frac{\zeta C_5 \varpi}{C_6 n^2 m^2 c^6 T}, \quad (\text{C.16})$$

onde os coeficientes C_5 e C_6 são dados por (C.172).

Do sistema de equações (C.6) e (C.12) resulta que:

$$\Lambda_\sigma = \frac{\zeta}{\zeta + 5G - G^2\zeta} \frac{q^\sigma}{n^2 m^2 c^6 T}, \quad (\text{C.17})$$

$$\tilde{\lambda}_\sigma = \frac{-G\zeta}{\zeta + 5G - G^2\zeta} \frac{q^\sigma}{m n^2 c^4 T}. \quad (\text{C.18})$$

E, finalmente, temos da equação (C.10) o seguinte resultado:

$$\Lambda^{(\sigma\tau)} = -\frac{\zeta}{2G} \frac{p^{(\sigma\tau)}}{n^2 m^2 c^4 T}. \quad (\text{C.19})$$

As expressões (C.14) a (C.16) e (C.17) a (C.19) são os multiplicadores de Lagrange que precisávamos encontrar. Observamos que eles são dados em função dos quatorze campos.

C.2 Expressão para $\partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma}$

Com a ajuda da relação (1.64) podemos obter a seguinte expressão para a derivada do terceiro momento $T^{\mu\nu\sigma}$:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} &= \left(\frac{1}{c^2} U_\sigma D + \Delta_\sigma \right) T^{\mu\nu\sigma} = \left(C_1 D n - \frac{\zeta}{T} n C'_1 D T - \frac{\zeta}{T} C'_2 \varpi D T + C_2 D \varpi \right) U^\mu U^\nu \\ &+ (n C_1 + C_2 \varpi) (U^\mu D U^\nu + U^\nu D U^\mu) + \frac{1}{6} \left(m^2 D n - C_1 D n + \frac{\zeta}{T} n C'_1 D T \right. \\ &\quad \left. - C_2 D \varpi + \frac{\zeta}{T} C'_2 \varpi D T \right) (c^2 g^{\mu\nu} + 2U^\mu U^\nu) + \frac{1}{6} \left(n m^2 - n C_1 - C_2 \varpi \right) \\ &\quad \times (U^\mu D U^\nu + U^\nu D U^\mu) - \frac{\zeta}{T} \frac{1}{c^2} C'_3 D T (U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + \frac{C_3}{c^2} \left(g^{\mu\nu} U_\sigma D q^\sigma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +U^\mu Dq^\nu + U^\nu Dq^\mu) + \frac{6}{c^2} \frac{\zeta}{T} C'_3 DT(U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) - \frac{6}{c^2} C_3 \left(\frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu U_\sigma Dq^\sigma \right. \\
& \left. +U^\mu Dq^\nu + q^\nu DU^\mu + U^\nu Dq^\mu + q^\mu DU^\nu \right) - \frac{\zeta}{T} C'_4 DT p^{<\mu\nu>} + C_4 (Dp^{<\mu\nu>} \\
& \left. + \frac{1}{c^2} U^\nu U_\sigma Dp^{<\mu\sigma>} + \frac{1}{c^2} U^\mu U_\sigma Dp^{<\nu\sigma>} \right) + (nC_1 + C_2 \varpi) U^\mu U^\nu \nabla_\sigma U^\sigma \\
& + \frac{c^2}{6} \left(m^2 U^\nu \nabla^\mu n - C_1 U^\nu \nabla^\mu n + \frac{\zeta}{T} C'_1 n U^\nu \nabla^\mu T - C_2 U^\nu \nabla^\mu \varpi + \frac{\zeta}{T} C'_2 \varpi U^\nu \nabla^\mu T \right) \\
& + \frac{c^2}{6} \left(m^2 U^\mu \nabla^\nu n - C_1 U^\mu \nabla^\nu n + \frac{\zeta}{T} C'_1 n U^\mu \nabla^\nu T - C_2 U^\mu \nabla^\nu \varpi + \frac{\zeta}{T} C'_2 \varpi U^\mu \nabla^\nu T \right) \\
& + \frac{c^2}{6} \left(nm^2 - nC_1 - C_2 \varpi \right) (g^{\mu\nu} \nabla_\sigma U^\sigma + \nabla^\mu U^\nu + \nabla^\nu U^\mu) - \frac{\zeta}{T} C'_3 (g^{\mu\nu} q^\sigma \nabla_\sigma T \\
& + q^\nu \nabla^\mu T + q^\mu \nabla^\nu T) + C_3 (g^{\mu\nu} \nabla_\sigma q^\sigma + \nabla^\mu q^\nu + \nabla^\nu q^\mu) + \frac{6}{c^2} \frac{\zeta}{T} C'_3 U^\mu U^\nu q^\sigma \nabla_\sigma T \\
& - \frac{6}{c^2} C_3 \left(U^\mu U^\nu \nabla_\sigma q^\sigma + U^\mu q^\sigma \nabla_\sigma U^\nu + U^\nu q^\sigma \nabla_\sigma U^\mu + U^\mu q^\nu \nabla_\sigma U^\sigma + U^\nu q^\mu \nabla_\sigma U^\sigma \right) \\
& - \frac{\zeta}{T} C'_4 \nabla_\sigma T (p^{<\mu\sigma>} U^\nu + p^{<\nu\sigma>} U^\mu) + C_4 (U^\nu \nabla_\sigma p^{<\mu\sigma>} + p^{<\mu\nu>} \nabla_\sigma U^\sigma \\
& \left. + p^{<\mu\sigma>} \nabla_\sigma U^\nu + p^{<\nu\sigma>} \nabla_\sigma U^\mu + U^\mu \nabla_\sigma p^{<\nu\sigma>} \right). \tag{C.20}
\end{aligned}$$

C.3 Resolução das Integrais $I^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$

Para que possamos encontrar a solução completa para o termo de produção (2.24) será necessário resolvermos as seguintes integrais:

$$I^{\mu\nu} = \frac{c}{4} \int (p_1^\mu p_1^\nu + p'^\mu p'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p^\mu p^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \tag{C.21}$$

$$I^{\mu\nu\alpha} = \frac{c}{4} \int (p_1^\mu p_1^\nu + p'^\mu p'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p^\mu p^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} (p^\alpha + p_1^\alpha) \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \tag{C.22}$$

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c}{4} \int (p_1'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} (p^\alpha p^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta) \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (\text{C.23})$$

$$J^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c}{4} \int (p_1'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} p^\alpha p_1^\beta \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (\text{C.24})$$

$$I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} = \frac{c}{4} \int (p_1'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} (p_1^\alpha p_1^\beta p^\sigma + p^\alpha p_1^\beta p_1^\sigma) \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{C.25})$$

$$I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{c}{4} \int (p_1'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) f^{(0)} f_1^{(0)} p_1^\alpha p_1^\beta p^\sigma p^\tau \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{C.26})$$

As duas primeiras integrais deste conjunto, a saber (C.21) e (C.22), são identicamente nulas. A explicação para este resultado pode ser apresentada da seguinte maneira: Se ψ e ϕ forem funções arbitrárias e $I(\phi)$ representar a integral

$$I(\phi) = \int f^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1' + \phi' - \phi_1 - \phi) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (\text{C.27})$$

então vale a seguinte propriedade:

$$\int \psi I(\phi) \frac{d^3 p}{p^0} = \int \phi I(\psi) \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{C.28})$$

A demonstração é semelhante àquela utilizada na dedução do lado direito da equação de transporte, conforme seção (A.3) do apêndice A. Em particular se ϕ for um invariante de soma, isto é, $\phi_1' + \phi' = \phi_1 + \phi$ a integral (C.27) é igual a zero. Portanto, como na integral $I^{\mu\nu}$ a função ψ é igual a c , então ela é nula. Já na integral $I^{\mu\nu\alpha}$ a função ψ é igual a cp^σ , logo, pela lei de conservação do momento linear e energia, ela também é nula.

Deveremos então, resolver somente as integrais (C.23) a (C.26). Apresentaremos aqui somente o roteiro do cálculo de uma delas, conforme [13], a saber (C.23), pois, para as demais, apesar de serem mais complexas, o processo é análogo e daremos somente a resposta final.

Consideremos a integral:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c}{4} \int (p_1'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_1'^\nu - p_1^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_1^\nu) (p^\alpha p^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta) f^{(0)} f_1^{(0)} \sigma F d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{C.29})$$

Para o seu cálculo, vamos introduzir o quadri vetor quantidade de movimento total P^μ e o quadri vetor quantidade de movimento relativo Q^μ definidos como:

$$P^\mu = p^\mu + p_1^\mu, \quad P'^\mu = p'^\mu + p_1'^\mu, \quad (\text{C.30})$$

$$Q^\mu = p^\mu - p_1^\mu, \quad Q'^\mu = p'^\mu - p_1'^\mu. \quad (\text{C.31})$$

Das equações acima e considerando as leis de conservação da energia e momento linear, seguem as propriedades:

$$P^\mu = P'^\mu, \quad P^\mu Q_\mu = P'^\mu Q'_\mu = 0, \quad (\text{C.32})$$

$$P^2 = 4m^2 c^2 + Q^2, \quad (\text{C.33})$$

onde

$$P^\mu P_\mu = P^2, \quad Q^\mu Q_\mu = -Q^2. \quad (\text{C.34})$$

As transformações inversas de (C.30) e (C.31) são:

$$p^\mu = \frac{1}{2} (P^\mu + Q^\mu), \quad p_1^\mu = \frac{1}{2} (P^\mu - Q^\mu), \quad (\text{C.35})$$

$$p'^\mu = \frac{1}{2} (P^\mu + Q'^\mu), \quad p_1'^\mu = \frac{1}{2} (P^\mu - Q'^\mu). \quad (\text{C.36})$$

Desta forma, temos:

$$p_1'^\mu p_1^\nu + p'^\mu p^\nu - p_1^\mu p_1^\nu + p^\mu p^\nu = \frac{1}{2} (Q'^\mu Q'^\nu - Q^\mu Q^\nu), \quad (\text{C.37})$$

$$p^\alpha p^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta = \frac{1}{2} (P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta), \quad (\text{C.38})$$

$$d^3 p d^3 p_1 = |J| d^3 P d^3 Q = \frac{1}{2^3} d^3 P d^3 Q. \quad (\text{C.39})$$

Por outro lado, da expressão que define o fluxo invariante (1.32), a qual pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} F &= \frac{p^0 p_1^0}{c} \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{v}_1)^2} = \sqrt{(p_1^\mu p_\mu)^2 - m^4 c^4} \\ &= p^0 p_1^0 \sqrt{\left(\frac{\vec{p}}{p^0} - \frac{\vec{p}_1}{p_1^0}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{p}}{p^0} \times \frac{\vec{p}_1}{p_1^0}\right)^2} = \frac{p^0 p_1^0}{c} g, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

ficamos com a seguinte relação:

$$F \frac{d^3 p d^3 p_1}{p^0 p_1^0} = \frac{1}{2^3} \frac{g}{c} d^3 P d^3 Q. \quad (\text{C.41})$$

Escolhendo o referencial centro de massa, onde as componentes espaciais do momento linear se anulam, temos:

$$(P^\mu) = (P, \vec{0}), \quad (Q^\mu) = (0, \vec{Q}). \quad (\text{C.42})$$

O módulo da velocidade relativa de Møller, com o auxílio da (C.40) fica:

$$g = \frac{c}{p^0 p_1^0} \sqrt{(p_1^\mu p_\mu)^2 - (mc)^4} = 2c \frac{Q}{P^0}, \quad (\text{C.43})$$

onde consideramos que:

$$p_1^\mu p_\mu = \frac{1}{4}(P^2 + Q^2), \quad p^0 p_1^0 = \frac{(P^0)^2}{4}. \quad (\text{C.44})$$

Das considerações acima, podemos escrever a integral (C.29) em função do quadrivetor quantidade de movimento total P^μ e do quadrivetor quantidade de movimento relativo Q^μ

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c}{2^6} \int (Q'^\mu Q'^\nu - Q^\mu Q^\nu) (P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta) f^{(0)} f_1^{(0)} \sigma Q d^3 Q \frac{d^3 P}{P^0} d\Omega. \quad (\text{C.45})$$

Escrevendo o elemento de ângulo sólido $d\Omega = \text{sen}\Theta d\Theta d\Phi$, onde Θ e Φ são ângulos polares de Q'^μ em relação a Q^μ e tal que Θ é o ângulo de espalhamento, temos:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c}{2^6} \int (Q'^\mu Q'^\nu - Q^\mu Q^\nu) (P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta) d\Phi f^{(0)} f_1^{(0)} \sigma Q d^3 Q \frac{d^3 P}{P^0} \text{sen}\Theta d\Theta. \quad (\text{C.46})$$

Se agora orientarmos Q^μ segundo o eixo x_3 , obteremos a seguinte representação:

$$(Q^\mu) = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (Q'^\mu) = Q \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\Theta \cos\Phi \\ \text{sen}\Theta \text{sen}\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.47})$$

e o resultado para a integral em $d\Phi$ é:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (Q'^\mu Q'^\nu - Q^\mu Q^\nu) d\Phi &= \pi Q^2 \text{sen}^2 \Theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \pi Q^2 \text{sen}^2 \Theta \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - 3 \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Por outro lado, se Q , θ e ϕ denotarem as coordenadas polares de Q^μ então podemos escrever:

$$(Q^\mu) = Q \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad d^3 Q = Q^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi dQ = Q^2 d\Omega^* dQ. \quad (\text{C.49})$$

Substituindo estes resultados na expressão para a integral (C.46), ficamos com:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c\pi}{2^6} \int \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - 3 \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right) (P^\alpha P^\beta + Q^\alpha Q^\beta) f^{(0)} f_1^{(0)} Q^5 \sigma \sin^3 \Theta d\Theta d\Omega^* dQ \frac{d^3 P}{P^0}. \quad (\text{C.50})$$

As integrais em $d\Omega^*$ podem ser calculadas e apresentam os seguintes resultados:

$$\int Q^{\alpha_1} Q^{\alpha_2} \dots Q^{\alpha_{2k+1}} d\Omega^* = 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.51})$$

$$\int Q^{\alpha_1} Q^{\alpha_2} \dots Q^{\alpha_{2k}} d\Omega^* = \frac{4\pi Q^{2k}}{(2k+1)!!} K^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}. \quad (\text{C.52})$$

Observa-se que as integrais com número ímpar de Q^μ são nulas; aqui utilizamos a seguinte notação:

$$K^{\mu\nu} = \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad K^{\mu\nu\sigma\tau} = K^{\mu\nu} K^{\sigma\tau} + K^{\mu\sigma} K^{\nu\tau} + K^{\mu\tau} K^{\sigma\nu}. \quad (\text{C.53})$$

Podemos também fazer uso da seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - 3 \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right) P^{\alpha_1} \dots P^{\alpha_k} d\Omega^* = \\ & = \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} \right) P^{\alpha_1} \dots P^{\alpha_k} \int d\Omega^* - \frac{3}{Q^2} P^{\alpha_1} \dots P^{\alpha_k} \int Q^\mu Q^\nu d\Omega^* \\ & = 4\pi \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} \right) P^{\alpha_1} \dots P^{\alpha_k} - \frac{3}{Q^2} P^{\alpha_1} \dots P^{\alpha_k} \frac{4\pi Q^2}{3} \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

isto é, as integrais em $d\Omega^*$ que apresentam o produto dos quadrivetores quantidade de movimento total P^α pelo fator $\left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - 3 \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right)$ se anularão.

Assim a integral (C.50) assume a seguinte forma:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c\pi}{2^6} \int \left(\frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - 3 \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2} \right) Q^\alpha Q^\beta f^{(0)} f_1^{(0)} Q^5 \sigma \sin^3 \Theta d\Theta d\Omega^* dQ \frac{d^3 P}{P^0}. \quad (\text{C.55})$$

Considerando a função de Maxwell-Jüttner e o resultado para a integral em $d\Theta$

$$f^{(0)} f_1^{(0)} = \frac{n^2}{[4\pi kT m^2 c K_2(\zeta)]^2} e^{-\frac{1}{kT} U_\mu P^\mu}, \quad \int_0^\pi \sin^3 \Theta d\Theta = \frac{4}{3}, \quad (\text{C.56})$$

e integrando em $d\Omega^*$, chegamos ao resultado:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{n^2 \sigma}{192(kT)^2 m^4 c K_2(\zeta)^2} \int \left(\frac{K^{\mu\nu} K^{\alpha\beta}}{3} - \frac{K^{\mu\nu\alpha\beta}}{5} \right) e^{-\frac{1}{kT} U_\mu P^\mu} Q^7 dQ \frac{d^3 P}{P^0}. \quad (\text{C.57})$$

Substituindo as expressões para $K^{\mu\nu}$ e $K^{\mu\nu\alpha\beta}$ dadas por (C.53) encontramos que:

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu\alpha\beta} = & \frac{n^2\sigma}{192(kT)^2m^4cK_2(\zeta)^2} \int \left[-\frac{32Q^7}{15P^4} \mathcal{Z}^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{16Q^7}{15P^2} g^{\alpha\beta} \mathcal{Z}^{\mu\nu} - \frac{16Q^7}{15P^2} g^{\mu\nu} \mathcal{Z}^{\alpha\beta} \right. \\
& + \frac{16Q^7}{15} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \mathcal{Z} + \frac{8Q^7}{5P^2} g^{\nu\alpha} \mathcal{Z}^{\mu\beta} + \frac{1Q^7}{5P^2} g^{\mu\beta} \mathcal{Z}^{\nu\alpha} - \frac{8Q^7}{5} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \mathcal{Z} + \frac{8Q^7}{5P^2} g^{\nu\beta} \mathcal{Z}^{\mu\alpha} \\
& \left. + \frac{8Q^7}{5P^2} g^{\mu\alpha} \mathcal{Z}^{\nu\beta} - \frac{8Q^7}{5} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{Z} \right] dQ, \tag{C.58}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{Z}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ representam as seguintes integrais:

$$\mathcal{Z}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} = \int P^{\alpha_1} P^{\alpha_2} \dots P^{\alpha_k} e^{-\frac{1}{kT} P^\mu U_\mu} \frac{d^3P}{P^0}. \tag{C.59}$$

Podemos simplificar ainda mais a integral (C.58) se considerarmos

$$\mathcal{R}_{mn}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} = \int \frac{Q^{(2n+1)}}{P^m} \mathcal{Z}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} dQ. \quad (n, m = 0, 1, 2, 3\dots) \tag{C.60}$$

Portanto, em termos de $\mathcal{R}_{mn}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$, a integral (C.58) fica:¹

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu\alpha\beta} = & \frac{n^2\sigma}{960(kT)^2m^4cK_2(\zeta)^2} \left[-\frac{4}{3} \mathcal{R}_{43}^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{2}{3} g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{23}^{\mu\nu} - \frac{2}{3} g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{23}^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{03} \right. \\
& \left. + g^{\nu\beta} \mathcal{R}_{23}^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha} \mathcal{R}_{23}^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha} \mathcal{R}_{23}^{\mu\beta} + g^{\mu\beta} \mathcal{R}_{23}^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{R}_{03} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \mathcal{R}_{03} \right] \tag{C.61}
\end{aligned}$$

Para chegarmos ao resultado final desta integral, deveremos encontrar a solução para \mathcal{R}_{03} , $\mathcal{R}_{23}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{R}_{43}^{\mu\nu\alpha\beta}$. Vejamos, portanto, como chegar a estas soluções.

Segundo a equação (C.33) temos:

$$P^2 = (P^0)^2 - |\vec{P}|^2 = (Q^2 + 4m^2c^2). \tag{C.62}$$

Considerando

$$y = \frac{P^0}{(Q^2 + 4m^2c^2)^{1/2}}, \tag{C.63}$$

temos para $|\vec{P}|^2$ e $d|\vec{P}|$ as seguintes expressões:

$$|\vec{P}|^2 = (Q^2 + 4m^2c^2)(y^2 - 1), \tag{C.64}$$

¹Representaremos estas integrais pelo símbolo \mathcal{R} como uma forma de reconhecimento ao trabalho desenvolvido pela nossa ex-colega Suzana Reinecke, falecida prematuramente quando realizávamos este trabalho. Ela efetuou este desenvolvimento a fim de facilitar o seu emprego na computação algébrica, da qual era profunda conhecedora.

$$d|\vec{P}| = \frac{(Q^2 + 4m^2c^2)^{1/2}}{(y^2 - 1)^{1/2}} y dy. \quad (\text{C.65})$$

Precisaremos ainda do seguinte elemento de volume:

$$d^3|\vec{P}| = \text{sen}\vartheta d\vartheta d\phi |\vec{P}|^2 d|\vec{P}|, \quad (\text{C.66})$$

ou ainda considerando (C.64) e (C.65):

$$\frac{d^3|\vec{P}|}{P^0} = \text{sen}\vartheta d\vartheta d\phi (Q^2 + 4m^2c^2)(y^2 - 1)^{1/2} dy. \quad (\text{C.67})$$

Assim, podemos resolver as integrais $\mathcal{Z}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ (C.59). Em particular vamos resolver

$$\mathcal{Z} = \int e^{-\frac{1}{kT} P^\mu U_\mu} \frac{d^3P}{P^0}. \quad (\text{C.68})$$

Efetando as integrais em θ e em ϕ e utilizando o referencial de Lorentz de repouso no fluido, chegamos à seguinte expressão para (C.68):

$$\mathcal{Z} = 4\pi(Q^2 + 4m^2c^2) \int_1^\infty e^{-\frac{c}{kT}(Q^2 + 4m^2c^2)^{1/2}y} (Q^2 + 4m^2c^2)(y^2 - 1)^{1/2} dy. \quad (\text{C.69})$$

Com o objetivo de simplificarmos esta integral, consideremos a seguinte definição:

$$Q^* = \left(\frac{Q^2}{m^2c^2} + 4 \right)^{1/2}. \quad (\text{C.70})$$

Assim a (C.69) fica:

$$\mathcal{Z} = 4\pi m^2 c^2 Q^{*2} \int_1^\infty e^{-\zeta Q^* y} (y^2 - 1)^{1/2} dy. \quad (\text{C.71})$$

A integral em (C.71) é uma função modificada de Bessel e segundo a equação (B.1) do apêndice B, temos:

$$\int_1^\infty e^{-\zeta Q^* y} (y^2 - 1)^{1/2} dy = \frac{K_1(\zeta Q^*)}{\zeta Q^*}. \quad (\text{C.72})$$

Desta forma chegamos ao resultado final para a integral \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z} = 4\pi m^2 c^2 Q^{*2} \frac{K_1(\zeta Q^*)}{\zeta Q^*}. \quad (\text{C.73})$$

A derivada da equação (C.73) em relação a b_μ pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial b_\mu} = 4\pi(m^2 c^2) \frac{\partial}{\partial b_\mu} \left(\frac{K_1(\zeta)}{\zeta} \right) = 4\pi(m^2 c^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{K_1(\zeta)}{\zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial b_\mu}. \quad (\text{C.74})$$

onde b_μ é dada por (1.89) e conforme dedução que se encontra na seção (A.4) do apêndice A. Assim,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial b_\mu} = \frac{(mc^2)}{\zeta} b^\mu, \quad (\text{C.75})$$

e utilizando a relação (B.4) do apêndice B, obtemos desta forma os seguintes resultados para as integrais:

$$\mathcal{Z}^\mu = 4\pi m^2 kT Q^{*2} K_2(\zeta Q^*) U^\mu, \quad (\text{C.76})$$

$$\mathcal{Z}^{\mu\nu} = 4\pi (mkT)^2 Q^{*2} [-g^{\mu\nu} K_2(\zeta Q^*) + \frac{m}{kT} Q^* K_3(\zeta Q^*) U^\mu U^\nu], \quad (\text{C.77})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\mu\nu\alpha\beta} = 4\pi (mkT)^3 Q^{*3} & \left[K_3(\zeta Q^*) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) - \frac{m}{kT} Q^* K_4(\zeta Q^*) (g^{\mu\nu} U^\alpha U^\beta \right. \\ & + g^{\alpha\beta} U^\mu U^\nu + g^{\mu\alpha} U^\nu U^\beta + g^{\mu\beta} U^\nu U^\alpha + g^{\nu\alpha} U^\mu U^\beta + g^{\nu\beta} U^\mu U^\alpha) \\ & \left. + \left(\frac{m}{kT} \right)^2 Q^{*2} K_5(\zeta Q^*) U^\mu U^\nu U^\alpha U^\beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Agora estamos aptos para resolver as integrais \mathcal{R}_{03} , $\mathcal{R}_{23}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{R}_{43}^{\mu\nu\alpha\beta}$.

Descreveremos agora, detalhadamente, a solução para \mathcal{R}_{03} e para as demais somente daremos a solução. Assim:

$$\mathcal{R}_{03} = \int Q^7 \mathcal{Z} dQ. \quad (\text{C.79})$$

Da definição (C.70) temos

$$Q = mc(Q^{*2} - 4)^{1/2}, \quad Q^7 dQ = m^8 c^8 (Q^{*2} - 4)^3 Q^* dQ^*. \quad (\text{C.80})$$

Substituindo o resultado para \mathcal{Z} dado por (C.73) e ainda usando a (C.80), obtemos:

$$\mathcal{R}_{03} = 4\pi m^{10} c^{10} \int Q^{*2} (Q^{*2} - 4)^3 K_1(\zeta Q^*) dQ^*. \quad (\text{C.81})$$

Fazendo agora a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \zeta Q^*, \quad \text{com} \quad 2\zeta \leq x < \infty, \quad (\text{C.82})$$

ficamos com a seguinte expressão para \mathcal{R}_{03} :

$$\mathcal{R}_{03} = 4\pi \frac{m^{10} c^{10}}{\zeta^4} \int_{2\zeta}^{\infty} x^2 \left(\frac{x^2}{\zeta^2} - 4 \right)^3 K_1(x) dx. \quad (\text{C.83})$$

A integral acima deve ser resolvida utilizando-se as fórmulas de recorrência (B.6) e (B.7) para as funções de Bessel. O resultado final é:

$$\mathcal{R}_{03} = 6144\pi \frac{m^{10} c^{10}}{\zeta^7} [4\zeta K_2(2\zeta) + (12 + \zeta^2)K_3(2\zeta)], \quad (\text{C.84})$$

$$\mathcal{R}_{23}^{\mu\nu} = 3072\pi \frac{m^{10} c^{10}}{\zeta^7} \left\{ -g^{\mu\nu} [\zeta K_2(2\zeta) + 4K_3(2\zeta)] + \frac{2}{c^2} U^\mu U^\nu [6\zeta K_2(2\zeta) + (20 + \zeta^2)K_3(2\zeta)] \right\}, \quad (\text{C.85})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{43}^{\mu\nu\alpha\beta} = 1536\pi \frac{m^{10} c^{10}}{\zeta^7} & \left\{ (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \left[\frac{2}{\zeta} K_2(2\zeta) + K_3(2\zeta) \right] - \frac{2}{c^2} (g^{\mu\nu} U^\alpha U^\beta \right. \\ & g^{\alpha\beta} U^\mu U^\nu + g^{\nu\beta} U^\mu U^\alpha + g^{\mu\alpha} U^\beta U^\nu + g^{\mu\beta} U^\alpha U^\nu + g^{\nu\alpha} U^\mu U^\beta) \left[\left(\zeta + \frac{6}{\zeta} \right) K_2(2\zeta) + 7K_3(2\zeta) \right] \\ & \left. + \frac{4}{c^4} \left[\left(\frac{24}{\zeta} + 10\zeta \right) K_2(2\zeta) + (48 + \zeta^2) K_3(2\zeta) \right] U^\mu U^\nu U^\alpha U^\beta \right\}. \quad (\text{C.86}) \end{aligned}$$

Substituindo os resultados de todas estas integrais na (C.61) e procedendo às devidas simplificações, obtemos finalmente a solução:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{32 n^2 \pi \sigma(T) (kT)^6}{9 m^2 c^7 K_2(\zeta)^2} & \left\{ - [2K_2(2\zeta) + \zeta K_3(2\zeta)] O^{\mu\nu} O^{\alpha\beta} + 3[(2 + \zeta^2)K_2(2\zeta) \right. \\ & \left. + 5\zeta K_3(2\zeta)] R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{6}{5} [(2 + 15\zeta^2)K_2(2\zeta) + \zeta(49 + 3\zeta^2)K_3(2\zeta)] D^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}. \quad (\text{C.87}) \end{aligned}$$

No resultado acima, utilizamos as seguintes quantidades tensoriais:

$$O^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu} - \frac{3}{c^2} U^\mu U^\nu, \quad (\text{C.88})$$

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{c^4} \left[\Delta^{\mu\alpha} U^\nu U^\beta + \Delta^{\mu\beta} U^\nu U^\alpha + \Delta^{\nu\alpha} U^\mu U^\beta + \Delta^{\nu\beta} U^\mu U^\alpha \right], \quad (\text{C.89})$$

$$D^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} + \Delta^{\mu\beta} \Delta^{\nu\alpha} \right) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.90})$$

onde $\Delta^{\mu\nu}$ está definido em (1.55).

Analogamente a este processo, podemos determinar as demais integrais, que portanto apresentam o seguinte resultado:

$$J^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{2}I^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{C.91})$$

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma} = & \frac{32}{45} \frac{n^2 \pi \sigma(T) (kT)^7}{m^3 c^9 K_2(\zeta)^2} \left\{ - \left[\zeta(235 + 10\zeta^2) K_3(2\zeta) + (30 + 65\zeta^2) K_2(2\zeta) \right] \left[R^{\mu\nu\beta\sigma} \frac{U^\alpha}{c^2} - X^{\mu\nu\alpha} O^{\beta\sigma} \right] \right. \\ & + 6 \left[\zeta(-173 - 24\zeta^2) K_3(2\zeta) + (6 - 59\zeta^2 - 3\zeta^4) K_2(2\zeta) \right] D^{\mu\nu\beta\sigma} \frac{U^\alpha}{c^2} \\ & + \left[35\zeta K_3(2\zeta) + (30 + 5\zeta^2) K_2(2\zeta) \right] Y^{\alpha\beta\sigma} O^{\mu\nu} \\ & + 6 \left[\zeta(247 + 27\zeta^2) K_3(2\zeta) + (6 + 79\zeta^2 + 3\zeta^4) K_2(2\zeta) \right] \left[D^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{U^\sigma}{c^2} + D^{\mu\nu\alpha\sigma} \frac{U^\beta}{c^2} \right] \\ & \left. + 6 \left[-\zeta(13 + \zeta^2) K_3(2\zeta) + (6 - 5\zeta^2) K_2(2\zeta) \right] \left[D^{\mu\alpha\beta\sigma} \frac{U^\nu}{c^2} + D^{\nu\alpha\beta\sigma} \frac{U^\mu}{c^2} - \frac{5}{3} R^{\mu\nu\beta\sigma} \frac{U^\alpha}{c^2} \right] \right\}, \quad (\text{C.92}) \end{aligned}$$

onde temos para os tensores $X^{\mu\nu\sigma}$ e $Y^{\mu\nu\sigma}$ as seguintes definições:

$$X^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{c^2} \left(\Delta^{\mu\sigma} U^\nu + \Delta^{\nu\sigma} U^\mu \right), \quad (\text{C.93})$$

$$Y^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{c^6} U^\mu U^\nu U^\sigma - \frac{1}{3c^2} \left(\Delta^{\mu\nu} U^\sigma + \Delta^{\nu\sigma} U^\mu + \Delta^{\mu\sigma} U^\nu \right). \quad (\text{C.94})$$

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\tau} = & \frac{8}{105} \frac{n^2 \pi \sigma(T) (kT)^8}{m^4 c^{11} K_2(\zeta)^2} \left\{ \frac{1}{27} \left[210(6 + 19\zeta^2) K_2(2\zeta) + 210\zeta(77 + 2\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] O^{\mu\nu} P^{\alpha\beta\sigma\tau} \right. \\ & - \left[70(6 + 48\zeta^2 + \zeta^4) K_2(2\zeta) + 35\zeta(314 + 25\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[\frac{1}{c^4} R^{\mu\nu\alpha\beta} U^\sigma U^\tau + \frac{1}{c^4} R^{\mu\nu\sigma\tau} U^\alpha U^\beta \right] \\ & + \frac{1}{3} \left[210(2 + 3\zeta^2) K_2(2\zeta) + 70\zeta(37 + \zeta^2) K_3(2\zeta) \right] O^{\mu\nu} R^{\alpha\beta\sigma\tau} \\ & - \frac{1}{9} \left[210(2 + 7\zeta^2) K_2(2\zeta) + 70\zeta(77 + 3\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[O^{\mu\nu} O^{\alpha\beta} O^{\sigma\tau} + O^{\mu\nu} P^{\alpha\beta\sigma\tau} \right] \\ & \left. + \left[21(4 + 274\zeta^2 + 21\zeta^4) K_2(2\zeta) + 14\zeta(1237 + 196\zeta^2 + 3\zeta^4) K_3(2\zeta) \right] \left[\frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\alpha\sigma} U^\beta U^\tau \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\alpha\tau} U^\beta U^\sigma + \frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\beta\sigma} U^\alpha U^\tau + \frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\beta\tau} U^\alpha U^\sigma \Big] \\
& - \left[21(-4 + 170\zeta^2 + 17\zeta^4) K_2(2\zeta) + 14\zeta(763 + 141\zeta^2 + 3\zeta^4) K_3(2\zeta) \right] \left[\frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\alpha\beta} U^\tau U^\sigma \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{c^4} D^{\mu\nu\tau\sigma} U^\alpha U^\beta \right] \\
& + \left[28(3 + 51\zeta^2 + 2\zeta^4) K_2(2\zeta) + 7\zeta(634 + 71\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[R^{\mu\nu\sigma\tau} \Delta^{\alpha\beta} + R^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta^{\sigma\tau} \right] \\
& - \left[14(-6 + 28\zeta^2 + \zeta^4) K_2(2\zeta) + 7\zeta(166 + 19\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[R^{\mu\nu\alpha\sigma} \Delta^{\beta\tau} + R^{\mu\nu\beta\tau} \Delta^{\alpha\sigma} \right. \\
& \quad \left. + R^{\mu\nu\beta\sigma} \Delta^{\alpha\tau} + R^{\mu\nu\alpha\tau} \Delta^{\beta\sigma} \right] \\
& + \frac{2}{3} \left[14(13\zeta^2 - 6) K_2(2\zeta) + 14\zeta(43 + 2\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] O^{\mu\nu} D^{\alpha\beta\sigma\tau} \\
& + \left[(-12 + 938\zeta^2 + 45\zeta^4) K_2(2\zeta) + 46\zeta(61 + 8\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[2D^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta^{\sigma\tau} + 2D^{\mu\nu\sigma\tau} \Delta^{\alpha\beta} \right] \\
& + \left[(-12 + 182\zeta^2 + 3\zeta^4) K_2(2\zeta) + 2\zeta(283 + 23\zeta^2) K_3(2\zeta) \right] \left[2D^{\mu\nu\sigma\alpha} \Delta^{\tau\beta} \right. \\
& \quad \left. + 2D^{\mu\nu\beta\tau} \Delta^{\alpha\sigma} + 2D^{\mu\nu\sigma\beta} \Delta^{\alpha\tau} + 2D^{\mu\nu\alpha\tau} \Delta^{\sigma\beta} \right] \Big\}. \tag{C.95}
\end{aligned}$$

Onde fizemos uso dos seguintes resultados para as integrais $\mathcal{Z}^{\mu\nu\sigma\tau\epsilon}$ e $\mathcal{Z}^{\mu\nu\sigma\tau\epsilon\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{\mu\nu\sigma\tau\epsilon} &= \int p^\mu p^\nu p^\sigma p^\tau p^\epsilon e^{-b_\lambda p^\lambda} \frac{d^3 p}{p^0} = 4\pi m^4 (kT)^3 Q^{*4} \left\{ K_4(\zeta Q^*) \left[U^\mu (g^{\sigma\tau} g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\tau} g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\nu} g^{\tau\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\nu (g^{\sigma\tau} g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\tau} g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\mu} g^{\tau\epsilon}) + U^\sigma (g^{\mu\tau} g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\tau} g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\nu} g^{\tau\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\tau (g^{\sigma\nu} g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\epsilon}) + U^\epsilon (g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} + g^{\mu\tau} g^{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} g^{\tau\nu}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m}{kT}Q^*K_5(\zeta Q^*) \left[g^{\sigma\tau}U^\mu U^\nu U^\epsilon + g^{\mu\tau}U^\nu U^\sigma U^\epsilon + g^{\nu\tau}U^\mu U^\sigma U^\epsilon + g^{\sigma\nu}U^\mu U^\tau U^\epsilon + g^{\sigma\mu}U^\tau U^\nu U^\epsilon \right. \\
& \quad \left. + g^{\mu\nu}U^\tau U^\sigma U^\epsilon + g^{\mu\epsilon}U^\nu U^\sigma U^\tau + g^{\nu\epsilon}U^\mu U^\sigma U^\tau + g^{\sigma\epsilon}U^\mu U^\nu U^\tau + g^{\tau\epsilon}U^\mu U^\nu U^\sigma \right] \\
& \quad + \left(\frac{m}{kT} \right)^2 Q^{*2} K_6(\zeta Q^*) U^\mu U^\nu U^\sigma U^\tau U^\epsilon \}, \tag{C.96}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Z^{\mu\nu\sigma\tau\epsilon\lambda} &= \int p^\mu p^\nu p^\sigma p^\tau p^\epsilon p^\lambda e^{-b_\lambda p^\lambda} \frac{d^3 p}{p^0} = 4\pi(mkT)^4 Q^{*4} \left\{ -K_4(\zeta Q^*) \left[g^{\mu\nu}(g^{\sigma\tau}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\tau}g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\lambda}g^{\tau\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + g^{\mu\sigma}(g^{\nu\tau}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\tau}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\lambda}g^{\tau\epsilon}) + g^{\mu\tau}(g^{\sigma\nu}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\sigma}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\lambda}g^{\sigma\epsilon}) + g^{\mu\epsilon}(g^{\sigma\nu}g^{\lambda\tau} + g^{\nu\tau}g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda}g^{\tau\sigma}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + g^{\mu\lambda}(g^{\sigma\tau}g^{\nu\epsilon} + g^{\epsilon\tau}g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\epsilon}g^{\tau\nu}) \right] + \frac{m}{kT}Q^*K_5(\zeta Q^*) \left[U^\mu U^\nu (g^{\sigma\tau}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\tau}g^{\sigma\epsilon} + g^{\sigma\lambda}g^{\tau\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\mu U^\sigma (g^{\nu\tau}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\tau}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\lambda}g^{\tau\epsilon}) + U^\mu U^\tau (g^{\nu\sigma}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\sigma}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\lambda}g^{\sigma\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\mu U^\epsilon (g^{\nu\sigma}g^{\lambda\tau} + g^{\lambda\sigma}g^{\nu\tau} + g^{\nu\lambda}g^{\sigma\tau}) + U^\mu U^\lambda (g^{\nu\epsilon}g^{\sigma\tau} + g^{\nu\sigma}g^{\epsilon\tau} + g^{\nu\tau}g^{\sigma\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\nu U^\sigma (g^{\mu\tau}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\tau}g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\lambda}g^{\epsilon\tau}) + U^\nu U^\tau (g^{\mu\sigma}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\sigma}g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\lambda}g^{\sigma\epsilon}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\nu U^\epsilon (g^{\mu\sigma}g^{\lambda\tau} + g^{\lambda\sigma}g^{\mu\tau} + g^{\mu\lambda}g^{\sigma\tau}) + U^\nu U^\lambda (g^{\mu\sigma}g^{\epsilon\tau} + g^{\epsilon\sigma}g^{\mu\tau} + g^{\mu\epsilon}g^{\sigma\tau}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\sigma U^\tau (g^{\mu\nu}g^{\lambda\epsilon} + g^{\lambda\nu}g^{\mu\epsilon} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\epsilon}) + U^\sigma U^\epsilon (g^{\nu\mu}g^{\lambda\tau} + g^{\lambda\nu}g^{\mu\tau} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\sigma U^\lambda (g^{\nu\nu}g^{\epsilon\tau} + g^{\nu\epsilon}g^{\mu\tau} + g^{\nu\tau}g^{\mu\epsilon}) + U^\tau U^\epsilon (g^{\nu\mu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + U^\tau U^\lambda (g^{\nu\mu}g^{\sigma\epsilon} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\epsilon} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\epsilon}) + U^\lambda U^\epsilon (g^{\nu\mu}g^{\sigma\tau} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau} + g^{\mu\tau}g^{\sigma\nu}) \right] \right\} \\
& \quad - \left(\frac{m}{kT} \right)^2 Q^{*2} K_6(\zeta Q^*) \left[U^\mu U^\nu U^\sigma U^\tau g^{\epsilon\lambda} + U^\mu U^\nu U^\sigma U^\epsilon g^{\tau\lambda} + U^\mu U^\nu U^\sigma U^\lambda g^{\epsilon\tau} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +U^\mu U^\nu U^\epsilon U^\tau g^{\sigma\lambda} + U^\mu U^\nu U^\lambda U^\tau g^{\epsilon\sigma} + U^\mu U^\epsilon U^\sigma U^\tau g^{\nu\lambda} + U^\mu U^\lambda U^\sigma U^\tau g^{\epsilon\nu} \\
& +U^\epsilon U^\nu U^\sigma U^\tau g^{\mu\lambda} + U^\nu U^\sigma U^\lambda U^\tau g^{\epsilon\mu} + U^\lambda U^\epsilon U^\sigma U^\tau g^{\nu\mu} + U^\nu U^\lambda U^\epsilon U^\tau g^{\mu\sigma} \\
& +U^\nu U^\sigma U^\epsilon U^\lambda g^{\mu\tau} + U^\mu U^\epsilon U^\lambda U^\tau g^{\nu\sigma} + U^\mu U^\epsilon U^\sigma U^\lambda g^{\nu\tau} + U^\mu U^\nu U^\epsilon U^\lambda g^{\sigma\tau} \Big] \\
& + \left(\frac{m}{kT} \right)^3 Q^{*3} K_7(\zeta Q^*) U^\mu U^\nu U^\sigma U^\epsilon U^\tau U^\lambda \Big\}. \tag{C.97}
\end{aligned}$$

Concluimos, aqui, este exaustivo apêndice, apresentando parte do cálculo necessário para a obtenção das integrais $I^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ que fazem parte do termo de produção $P^{\mu\nu}$ e que representam uma parte muito importante desta tese, pois precisamos delas para a obtenção das equações de Burnett relativísticas.

O cálculo destas integrais é muito exaustivo e cheio de detalhes de modo que para a sua determinação utilizamos em certas passagens a computação algébrica, onde em particular se usou o programa algébrico Maple.

C.4 As Derivadas Materiais Convectivas e Gradientes para $\varpi^{(1)}$, $q^{\tau(1)}$ e $p^{<\mu\nu>(1)}$

Nesta seção iremos determinar as derivadas materiais convectivas para a pressão dinâmica $D\varpi^{(1)}$, para o fluxo de calor $Dq^{\tau(1)}$ e para o deviante do tensor pressão $Dp^{<\mu\nu>(1)}$, que aparecem no cálculo das equações de Burnett relativísticas.

Vejamus inicialmente o cálculo para $D\varpi^{(1)}$. Para tanto consideremos a expressão para $\varpi^{(1)}$ definida por (2.38), que resultou da primeira iteração maxwelliana, logo,

$$D\varpi^{(1)} = D[-\eta \nabla_\mu U^\mu] = -D\eta \nabla_\mu U^\mu - \eta D(\nabla_\mu U^\mu). \tag{C.98}$$

A derivada material convectiva para η pode ser escrita da seguinte maneira:

$$D\eta = U^\mu \partial_\mu \eta = U^\mu \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial T} U^\mu \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = -\frac{\zeta}{T} \eta' DT, \tag{C.99}$$

onde empregamos a definição para a derivada material convectiva (1.65), a definição para ζ (1.91) e η' representa a derivada de η em relação a ζ . Finalmente, considerando o primeiro termo que aparece na expressão para DT (2.33), isto é,

$$DT = \frac{1}{nk} \frac{p}{C_6} \nabla_\mu U^\mu, \tag{C.100}$$

chegamos ao seguinte resultado para o primeiro termo de (C.98):

$$D\eta\nabla_\mu U^\mu = -\frac{\zeta}{C_6}\eta'(\nabla_\mu U^\mu)^2. \quad (\text{C.101})$$

Observa-se que os demais termos em DT foram desprezados, no cálculo da (C.101), pois segundo a nossa aproximação, desprezaremos termos de ordem superior aos quadráticos nos gradientes e divergentes.

Vejam agora o segundo termo da (C.98), isto é, a derivada material do divergente da quadrivelocidade. Através da definição do gradiente ∇^μ (1.66), este termo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = U^\sigma \partial_\sigma (\nabla_\mu U^\mu) = U^\sigma \partial_\sigma (\partial^\mu U_\mu) - \frac{1}{c^2} U^\sigma \partial_\sigma U^\mu U^\nu \partial_\nu U_\mu. \quad (\text{C.102})$$

Como

$$\partial_\nu (U^\mu U_\mu) = 0 = U^\mu \partial_\nu U_\mu + U_\mu \partial_\nu U^\mu = 2U_\mu \partial_\nu U^\mu, \quad (\text{C.103})$$

verificamos que $U_\mu \partial_\nu U^\mu = 0$ e que portanto o segundo termo da (C.102) é nulo. Desta forma a (C.102) se reduz à seguinte expressão:

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = U^\sigma \partial_\sigma \partial^\mu U_\mu. \quad (\text{C.104})$$

Trocando a ordem das derivadas covariante e contravariante e utilizando a seguinte relação:

$$U^\sigma \partial_\mu (\partial_\sigma U_\mu) = \partial^\mu (U^\sigma \partial_\sigma U_\mu) - (\partial^\mu U^\sigma) (\partial_\sigma U_\mu), \quad (\text{C.105})$$

a (C.104) pode ser escrita como:

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = \partial^\mu (U^\sigma \partial_\sigma U_\mu) - (\partial^\mu U^\sigma) (\partial_\sigma U_\mu). \quad (\text{C.106})$$

Novamente empregando as definições para ∂_μ e ∂^μ (1.64) e simplificando, obtemos:

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = \frac{1}{c^2} U^\mu DDU_\mu + \nabla^\mu (DU_\mu) - \nabla_\sigma U_\mu \nabla^\mu U^\sigma. \quad (\text{C.107})$$

Pode-se verificar facilmente que $U^\mu DDU_\mu = -DU^\mu DU_\mu$, quando se utiliza a propriedade $U^\mu DU_\mu = 0$, logo,

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = \nabla^\mu (DU_\mu) - \frac{1}{c^2} DU^\mu DU_\mu - \nabla_\sigma U_\mu \nabla^\mu U^\sigma. \quad (\text{C.108})$$

Para os dois primeiros termos devemos utilizar a expressão (1.80) para DU^μ , onde também consideraremos somente o primeiro termo, isto é,

$$DU^\mu = \frac{c^2}{nh} \nabla^\mu p. \quad (\text{C.109})$$

Assim, o primeiro termo da (C.108) pode ser escrito como:

$$\nabla^\mu(DU_\mu) = \nabla^\mu\left(\frac{c^2}{nh} \nabla_\mu p\right) = \nabla^\mu\left(\frac{c^2}{nh}\right) \nabla_\mu p + \frac{c^2}{nh} \nabla^\mu \nabla_\mu p. \quad (\text{C.110})$$

Para encontrar a expressão do gradiente $\nabla^\mu(c^2/nh)$, devemos considerar que $n = p/kT$ e $h = mc^2G$, definidos, respectivamente, pela segunda equação da (A.50) e por (1.98). Desta forma encontramos para este gradiente o seguinte resultado:

$$\nabla^\mu\left(\frac{c^2}{nh}\right) = -\frac{c^2}{nh^2} \nabla^\mu h + \frac{kc^2}{ph} \nabla^\mu T - \frac{c^2 kT}{hp^2} \nabla^\mu p = -\frac{c^2}{n^2 h^2} \zeta G \nabla^\mu p + \frac{c^2}{nhT} \left(1 + \zeta \frac{G'}{G}\right) \nabla^\mu T. \quad (\text{C.111})$$

Desta forma a (C.110) fica:

$$\nabla^\mu(DU_\mu) = -\frac{c^2}{n^2 h^2} \zeta G \nabla^\mu p \nabla_\mu p + \frac{c^2}{nhT} \left(1 + \zeta \frac{G'}{G}\right) \nabla^\mu T \nabla_\mu p + \frac{c^2}{nh} \nabla^\mu \nabla_\mu p, \quad (\text{C.112})$$

que está expressa em termos dos gradientes da pressão hidrostática p e da temperatura T .

Para o segundo termo da (C.108) temos:

$$\frac{1}{c^2} DU^\mu DU_\mu = \frac{c^2}{n^2 h^2} \nabla_\mu p \nabla^\mu p. \quad (\text{C.113})$$

onde consideramos a (C.109). E, finalmente, para o último termo da (C.108) devemos considerar o fato de que um tensor pode ser expresso em termos da sua parte simétrica sem o traço e da sua parte anti-simétrica, portanto aplicando esta propriedade para o gradiente da quadrivelocidade, temos:

$$\nabla^\sigma U^\mu = \nabla^{<\sigma} U^{\mu>} + \nabla^{[\sigma} U^{\mu]} + \frac{1}{3} \Delta^{\sigma\mu} \Delta_{\nu\tau} \nabla^\nu U^\tau, \quad (\text{C.114})$$

e desta forma encontramos o seguinte resultado:

$$\nabla_\sigma U_\mu \nabla^\mu U^\sigma = \nabla_{<\sigma} U_{\mu>} \nabla^{<\mu} U^{\sigma>} + \nabla_{[\sigma} U_{\mu]} \nabla^{[\mu} U^{\sigma]} + \frac{1}{3} (\nabla^\mu U_\mu)^2. \quad (\text{C.115})$$

Na dedução acima utilizamos também as seguintes propriedades:

$$\Delta_{\mu\nu} \nabla^{[\mu} U^{\nu]} = 0, \quad \Delta_{\mu\nu} \nabla^{<\mu} U^{\nu>} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^{<\mu} U^{\nu>} \nabla_{[\mu} U_{\nu]} = 0, \quad (\text{C.116})$$

Desta maneira, considerando os resultados (C.112), (C.113), (C.115), a (C.108) fica:

$$D(\nabla_\mu U^\mu) = \frac{c^2}{nh} \nabla^\mu \nabla_\mu p - \frac{c^2}{n^2 h^2} (1 + \zeta G) \nabla^\mu p \nabla_\mu p + \frac{c^2}{nhT} \left(1 + \zeta \frac{G'}{G}\right) \nabla^\mu T \nabla_\mu p$$

$$-\nabla_{\langle\sigma}U_{\mu\rangle}\nabla^{\langle\mu}U^{\sigma\rangle}-\nabla_{[\sigma}U_{\mu]}\nabla^{[\mu}U^{\sigma]}-\frac{1}{3}(\nabla^{\mu}U_{\mu})^2. \quad (\text{C.117})$$

Substituindo agora os resultados (C.101) e (C.117) em (C.98), obtemos a expressão final para a derivada material convectiva da pressão dinâmica, a saber:

$$D\varpi^{(1)} = \frac{\zeta}{C_6}\eta'(\nabla_{\mu}U^{\mu})^2 - \eta\left[\frac{c^2}{nh}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}p - \frac{c^2}{n^2h^2}(1+\zeta G)\nabla^{\mu}p\nabla_{\mu}p + \frac{c^2}{nhT}\left(1+\frac{G'\zeta}{G}\right)\nabla^{\mu}T\nabla_{\mu}p - \nabla^{\langle\mu}U^{\sigma\rangle}\nabla_{\langle\mu}U_{\sigma\rangle} + \nabla^{[\mu}U^{\sigma]}\nabla_{[\mu}U_{\sigma]} - \frac{1}{3}(\nabla^{\mu}U_{\mu})^2\right]. \quad (\text{C.118})$$

Vamos agora proceder à determinação da derivada material do fluxo de calor $Dq^{\tau(1)}$, para tanto devemos utilizar a expressão para $q^{\tau(1)}$ dada por (2.39), assim:

$$Dq^{\tau(1)} = D\left[\lambda(\nabla^{\tau}T - \frac{T}{nh}\nabla^{\tau}p)\right] = D\lambda(\nabla^{\tau}T - \frac{T}{nh}\nabla^{\tau}p) + \lambda\left[D(\nabla^{\tau}T) - D\left(\frac{T}{nh}\nabla^{\tau}p\right)\right]. \quad (\text{C.119})$$

Para a determinação de $D\lambda$, devemos proceder da mesma forma como fizemos para $D\eta$, assim:

$$D\lambda = -\frac{\zeta}{T}\lambda'DT = -\frac{\zeta}{C_6}\lambda'\nabla_{\mu}U^{\mu}, \quad (\text{C.120})$$

onde consideramos a expressão (C.100) para DT . Desta maneira o primeiro termo da (C.119) fica:

$$D\lambda(\nabla^{\tau}T - \frac{T}{nh}\nabla^{\tau}p) = -\frac{\zeta}{C_6}\lambda'\left(\nabla^{\tau}T\nabla_{\mu}U^{\mu} - \frac{T}{nh}\nabla^{\tau}p\nabla_{\mu}U^{\mu}\right). \quad (\text{C.121})$$

Para a determinação da expressão do segundo termo da (C.119), vamos precisar da derivada material $D(\nabla^{\tau}T)$. Desta forma, aplicando as definições para a derivada material, para a derivada covariante e do gradiente ∇^{τ} , obtemos:

$$D(\nabla^{\tau}T) = U^{\mu}\partial_{\mu}(g^{\nu\tau} - \frac{1}{c^2}U^{\nu}U^{\tau})\partial_{\nu}T = -\frac{1}{c^2}DU^{\tau}DT - \frac{1}{c^2}U^{\tau}DU^{\nu}\nabla_{\nu}T + U^{\mu}\partial^{\tau}\partial_{\mu}T. \quad (\text{C.122})$$

Considerando que

$$U^{\mu}\partial^{\tau}\partial_{\mu}T = \partial^{\tau}(U^{\mu}\partial_{\mu}T) - \partial^{\tau}U^{\mu}\partial_{\mu}T, \quad (\text{C.123})$$

a (C.122) fica expressa da seguinte forma:

$$D(\nabla^{\tau}T) = -\frac{1}{c^2}DU^{\tau}DT - \frac{1}{c^2}U^{\tau}DU^{\nu}\nabla_{\nu}T + \nabla^{\tau}DT - \nabla^{\tau}U^{\mu}\nabla_{\mu}T, \quad (\text{C.124})$$

ou ainda, considerando as expressões para DU^{τ} e DT temos:

$$\begin{aligned}
D(\nabla^\tau T) = & -\frac{T}{nhC_6} \nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu - \frac{1}{nh} U^\tau \nabla^\nu p \nabla_\nu T + \frac{1}{C_6} \left(1 + \zeta \frac{C_5}{C_6}\right) \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu \\
& + \frac{T}{C_6} \nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu - \nabla_\mu T \nabla^{\langle \tau} U^{\mu \rangle} - \nabla_\mu T \nabla^{[\tau} U^{\mu]} - \frac{1}{3} \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu.
\end{aligned} \tag{C.125}$$

Seja agora a seguinte derivada,

$$D\left(\frac{T}{nh} \nabla^\tau p\right) = D\left(\frac{T}{nh}\right) \nabla^\tau p + \frac{T}{nh} D(\nabla^\tau p), \tag{C.126}$$

para a qual temos:

$$D\left(\frac{T}{nh}\right) = \frac{T}{nh} \left[1 + \frac{1}{C_6} \left(1 + \zeta \frac{G'}{G}\right)\right] \nabla^\mu U_\mu. \tag{C.127}$$

Na dedução para essa derivada utilizamos (1.76) para Dn . Para o segundo termo da (C.126), vamos precisar da derivada material do gradiente da pressão, isto é,

$$D(\nabla^\tau p) = -\frac{1}{c^2} DU^\tau Dp - \frac{1}{c^2} U^\tau DU^\nu \nabla_\nu p + \nabla^\tau Dp - \nabla^\tau U^\mu \nabla_\mu p, \tag{C.128}$$

que é análoga à (C.124) para T . Mas como $p = nkT$, temos:

$$Dp = kTDn + nkDT = -p\left(1 - \frac{1}{C_6}\right) \nabla_\mu U^\mu. \tag{C.129}$$

E o gradiente de Dp é,

$$\nabla^\tau Dp = -\left(1 - \frac{1}{C_6}\right) \nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu - p\left(1 - \frac{1}{C_6}\right) \nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu + p \frac{\zeta}{T} \frac{C_5}{C_6^2} \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu. \tag{C.130}$$

Substituindo agora os resultados (C.121), (C.125) e (C.126) na (C.119), obtemos a seguinte expressão para a derivada material do fluxo de calor:

$$\begin{aligned}
Dq^\tau = & \lambda \left[\frac{T}{C_6} - \frac{pT}{nh} \left(\frac{1}{C_6} - 1 \right) \right] \nabla^\tau (\nabla_\sigma U^\sigma) + \lambda \left[-\frac{\lambda' \zeta}{\lambda C_6} + \frac{1}{C_6} \left(1 - \frac{1}{\zeta G}\right) \left(1 + \frac{\zeta C_5}{C_6}\right) - \frac{1}{3} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\zeta G} \right] \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu - \lambda \frac{T}{nh} \left[\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{C_6}\right) \frac{1}{\zeta C_6} + \frac{\lambda' \zeta}{\lambda C_6} - \frac{1}{C_6} \left(2 + \frac{\zeta G'}{G}\right) \right] \nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu \\
& - \frac{\lambda U^\tau}{nh} \left[\nabla_\mu p \nabla^\mu T - \frac{T}{nh} \nabla_\mu p \nabla^\mu p \right] - \lambda \left(\nabla_\mu T - \frac{T}{nh} \nabla_\mu p \right) \left(\nabla^{\langle \tau} U^{\mu \rangle} + \nabla^{[\tau} U^{\mu]} \right),
\end{aligned} \tag{C.131}$$

onde como já vimos os coeficientes C_5 e C_6 estão definidos na seção (C.7) do apêndice C.

Queremos determinar agora a derivada material convectiva para o deviante do tensor pressão. Considerando a expressão para $p^{<\epsilon\tau>(1)}$ resultante da primeira iteração (2.40), temos:

$$Dp^{<\epsilon\tau>(1)} = 2D[\mu\nabla^{<\epsilon U^\tau>}] = 2D\mu\nabla^{<\epsilon U^\tau>} + 2\mu D(\nabla^{<\epsilon U^\tau>}). \quad (\text{C.132})$$

Onde temos para $D\mu$ a seguinte expressão:

$$D\mu = -\frac{\zeta}{T}\mu' DT = -\frac{\zeta}{C_6}\mu'\nabla_\mu U^\mu. \quad (\text{C.133})$$

O cálculo do segundo termo da expressão (C.132) é mais sutil. Começemos escrevendo-o da seguinte forma:

$$D(\nabla^{<\epsilon U^\tau>}) = D[\nabla^{(\epsilon U^\tau)} - \frac{1}{3}\Delta^{\epsilon\tau}\nabla^\sigma U_\sigma], \quad (\text{C.134})$$

onde aplicamos a definição do traço de um tensor. Efetuando a derivada material no primeiro termo ficamos com:

$$D(\nabla^{<\epsilon U^\tau>}) = D(\nabla^{(\epsilon U^\tau)}) - \frac{1}{3}\Delta^{\epsilon\tau}D(\nabla^\sigma U_\sigma) - \frac{1}{3}\nabla^\sigma U_\sigma D\Delta^{\epsilon\tau}. \quad (\text{C.135})$$

Portanto, deveremos determinar agora as seguintes derivadas materiais: $D(\nabla^{(\epsilon U^\tau)})$ e $D\Delta^{\epsilon\tau}$.

Considerando a definição para o projetor $\Delta^{\epsilon\tau}$ (1.55) e a (C.109), obtemos:

$$D\Delta^{\epsilon\tau} = -\frac{1}{n\hbar}\left(U^\epsilon\nabla^\tau p + U^\tau\nabla^\epsilon p\right). \quad (\text{C.136})$$

Vejamos agora o cálculo de $D(\nabla^{(\epsilon U^\tau)})$. Para evitar futuras confusões, ao invés dos parênteses indicando a simetria dos dois índices, vamos utilizar um traço. Assim ficamos com $D(\nabla^\epsilon U^\perp)$. Considerando as definições para a derivada material e para o gradiente temos que:

$$D(\nabla^\epsilon U^\perp) = U^\sigma\partial_\sigma[(g^{\epsilon\mu} - \frac{1}{c^2}U^\epsilon U^\mu)\partial_\mu U^\perp] = U_\sigma\partial^\epsilon(\partial^\sigma U^\perp) - \frac{1}{c^2}U^\sigma\partial_\sigma(U^\epsilon DU^\perp). \quad (\text{C.137})$$

Se utilizarmos a definição para a derivada covariante, como fizemos anteriormente, chegaremos na seguinte expressão:

$$D(\nabla^\epsilon U^\perp) = \nabla^\epsilon DU^\perp - \frac{1}{c^2}DU^\epsilon DU^\perp - \nabla^\epsilon U_\sigma\nabla^\sigma U^\perp - \frac{1}{c^2}U^\epsilon DU_\sigma\nabla^\sigma U^\perp. \quad (\text{C.138})$$

A qual escrita em termos dos gradientes da temperatura, da pressão e da quadrivelocidade, e ainda utilizando a notação original com os parenteses, fica:

$$D(\nabla^{(\epsilon U^\tau)}) = \frac{c^2}{n\hbar}\nabla^{(\epsilon\nabla^\tau)}p - \frac{c^2}{n^2\hbar^2}(1 + \zeta G)\nabla^{(\epsilon}p\nabla^{\tau)}p - \nabla^{(\epsilon}U_\sigma\nabla^\sigma U^{\tau)}$$

$$+\frac{c^2}{nhT}\left(1+\zeta\frac{G'}{G}\right)\nabla^{(\epsilon T\nabla^\tau)}p-\frac{1}{nh}U^{(\epsilon\nabla_\sigma p\nabla^\sigma U^\tau)}. \quad (C.139)$$

Substituindo agora o resultado para $D\Delta^{\epsilon\tau}$ dado por (C.136), o resultado para $D(\nabla^{(\epsilon U^\tau)})$ dado por (C.139) e considerando ainda a (C.117) para $D(\nabla^\mu U_\mu)$ em (C.135), e simplificando, determinamos a derivada material para o gradiente da quadrivelocidade sem o traço, a saber:

$$D(\nabla^{<\epsilon U^\tau>})=\frac{c^2}{nh}\nabla^{<\epsilon\nabla^\tau>}p-\frac{c^2}{n^2h^2}(1+\zeta G)\nabla^{<\epsilon p\nabla^\tau>}p+\frac{c^2}{nhT}\left(1+\zeta\frac{G'}{G}\right)\nabla^{<\epsilon T\nabla^\tau>}p \\ -\nabla^{<\epsilon U_\sigma\nabla^\sigma U^\tau>}-\frac{1}{nh}U^{<\epsilon\nabla_\sigma p\nabla^\sigma U^\tau>}+\frac{2}{3nh}U^{<\epsilon\nabla^\tau>}p\nabla_\sigma U^\sigma. \quad (C.140)$$

Se substituirmos esse resultado para $D(\nabla^{<\epsilon U^\tau>})$ na (C.132) e ainda levando em conta (C.133), obtemos:

$$Dp^{<\epsilon\tau>(1)}=-\frac{2\zeta}{C_6}\mu'\nabla^{<\epsilon U^\tau>}\nabla_\sigma U^\sigma+2\mu\left[\frac{c^2}{nh}\nabla^{<\epsilon\nabla^\tau>}p+\frac{c^2}{nhT}\left(1+\frac{\zeta G'}{G}\right)\nabla^{<\epsilon T\nabla^\tau>}p\right. \\ \left.-\nabla^{<\epsilon U_\sigma\nabla^\sigma U^\tau>}-\frac{c^2}{n^2h^2}(1+\zeta G)\nabla^{<\epsilon p\nabla^\tau>}p-\nabla^{<\epsilon U_\mu\nabla^\mu U^\tau>}-\frac{1}{nh}U^{<\epsilon\nabla^\mu p\nabla_\mu U^\tau>}+\frac{2}{3nh}U^{<\epsilon\nabla^\tau>}p\nabla_\lambda U^\lambda\right], \quad (C.141)$$

que é a expressão final para a derivada material do deviante do tensor pressão.

Vamos escrever a seguir as expressões para os gradientes da pressão dinâmica, do fluxo de calor e do deviante do tensor pressão. Portanto considerando (2.38) temos,

$$\nabla^\tau\varpi^{(1)}=-\nabla^\tau(\eta\nabla_\mu U^\mu)=\frac{\zeta}{T}\eta'\nabla^\tau T\nabla_\mu U^\mu-\eta\nabla^\tau\nabla_\mu U^\mu, \quad (C.142)$$

onde, considerando a definição para ζ utilizamos o seguinte resultado para o gradiente de η ,

$$\nabla^\tau\eta=-\frac{\zeta}{T}\eta'\nabla^\tau T. \quad (C.143)$$

Observamos que a notação η' corresponde à derivada de η em relação a ζ .

Considerando a (2.39) temos

$$\nabla^\mu q^{\nu(1)}=\nabla^\mu\left[\lambda\left(\nabla^\nu T-\frac{T}{nh}\nabla^\nu p\right)\right]=\nabla^\mu\lambda\left(\nabla^\nu T-\frac{T}{nh}\nabla^\nu p\right)+\lambda\left[\nabla^\mu\nabla^\nu T-\nabla^\mu\left(\frac{T}{nh}\nabla^\nu p\right)\right] \quad (C.144)$$

Considerando o gradiente de T/nh ,

$$\nabla_\nu\left(\frac{T}{nh}\right)=\frac{T}{nh}\left[\frac{(G^2\zeta-3G-\zeta)}{TG}\nabla_\nu T-\frac{1}{p}\nabla_\nu p\right], \quad (C.145)$$

onde $h = mc^2G$ e

$$\nabla^\mu n = \nabla^\mu \left(\frac{p}{nk} \right) = \frac{n}{p} \nabla^\mu p - \frac{n}{T} \nabla^\mu T, \quad (\text{C.146})$$

obtemos a seguinte expressão para o gradiente do fluxo de calor:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu q^{\nu(1)} &= \lambda (\nabla^\mu \nabla^\nu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu \nabla^\nu p) - \frac{\zeta}{T} \lambda' \nabla^\mu T \nabla^\nu T + \frac{\zeta GT}{n^2 h^2} \lambda \nabla^\mu p \nabla^\nu p \\ &\quad + \left[\frac{\zeta}{nh} \lambda' - \frac{\lambda}{nh} \left(2 + \zeta \frac{G'}{G} \right) \right] \nabla^\mu T \nabla^\nu p. \end{aligned} \quad (\text{C.147})$$

Analogamente temos para o gradiente sem o traço

$$\begin{aligned} \nabla^{<\mu} q^{\nu>(1)} &= \lambda (\nabla^{<\mu} \nabla^{\nu> T} - \frac{T}{nh} \nabla^{<\mu} \nabla^{\nu> p}) - \frac{\zeta}{T} \lambda' \nabla^{<\mu} T \nabla^{\nu> T} + \frac{\zeta GT}{n^2 h^2} \lambda \nabla^{<\mu} p \nabla^{\nu> p} \\ &\quad + \left[\frac{\zeta}{nh} \lambda' - \frac{\lambda}{nh} \left(2 + \zeta \frac{G'}{G} \right) \right] \nabla^{<\mu} T \nabla^{\nu> p}, \end{aligned} \quad (\text{C.148})$$

e para o divergente

$$\begin{aligned} \nabla^\mu q_\mu^{(1)} &= \lambda (\nabla^\mu \nabla_\mu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu \nabla_\mu p) - \frac{\zeta}{T} \lambda' \nabla^\mu T \nabla_\mu T + \frac{\zeta GT}{n^2 h^2} \lambda \nabla^\mu p \nabla_\mu p \\ &\quad + \left[\frac{\zeta}{nh} \lambda' - \frac{\lambda}{nh} \left(2 + \zeta \frac{G'}{G} \right) \right] \nabla^\mu T \nabla_\mu p. \end{aligned} \quad (\text{C.149})$$

Para o cálculo do gradiente do deviante do tensor pressão temos:

$$\nabla_\sigma p^{<\sigma\tau>(1)} = \nabla_\sigma [2\mu \nabla^{<\sigma} U^{\tau>}] = -\frac{2\zeta}{T} \mu' \nabla_\sigma T \nabla^{<\sigma} U^{\tau>} + 2\mu \nabla_\sigma \nabla^{<\sigma} U^{\tau>}, \quad (\text{C.150})$$

onde μ' é a derivada de μ em relação a ζ .

C.5 Coeficientes B_n

$$B_1 = \frac{32\pi p\sigma}{3c} \frac{(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2)[2K_2(2\zeta) + \zeta K_3(2\zeta)]}{\zeta^3 K_2^2(\zeta)(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)}, \quad (\text{C.151})$$

$$B_2 = -\frac{32\pi p\sigma}{3c} \frac{[(2 + \zeta^2)K_2(2\zeta) + 5\zeta K_3(2\zeta)]}{\zeta^3 K_2^2(\zeta)(\zeta + 5G - G^2\zeta)}, \quad (\text{C.152})$$

$$B_3 = -\frac{32\pi p\sigma}{15c} \frac{[(2 + 15\zeta^2)K_2(2\zeta) + \zeta(3\zeta^2 + 49)K_3(2\zeta)]}{\zeta^3 G K_2^2(\zeta)}, \quad (\text{C.153})$$

$$B_4 = \frac{16\pi\sigma}{3c} \frac{\zeta^4}{K_2^2(\zeta)} P_1, \quad (\text{C.154})$$

$$B_5 = \frac{16\pi \sigma}{3} \frac{\zeta^4}{c K_2^2(\zeta)} P_2, \quad (\text{C.155})$$

$$B_6 = \frac{16\pi \sigma}{15} \frac{\zeta^4}{c K_2^2(\zeta)} P_3, \quad (\text{C.156})$$

$$B_7 = \frac{16\pi \sigma}{45} \frac{\zeta^4}{c^3 K_2^2(\zeta)} P_4, \quad (\text{C.157})$$

$$B_8 = \frac{16\pi \sigma}{3} \frac{\zeta^4}{c^3 K_2^2(\zeta)} P_5, \quad (\text{C.158})$$

$$B_9 = \frac{16\pi \sigma}{15} \frac{\zeta^4}{c K_2^2(\zeta)} P_6, \quad (\text{C.159})$$

$$B_{10} = \frac{32\pi \sigma}{15} \frac{\zeta^4}{c K_2^2(\zeta)} P_7, \quad (\text{C.160})$$

$$B_{11} = \frac{64\pi \sigma}{315} \frac{\zeta^4}{c K_2^2(\zeta)} P_8. \quad (\text{C.161})$$

As expressões para os coeficientes P_n com $(n = 1, 2, \dots, 8)$ estão explicitados na seção a seguir.

C.6 Coeficientes P_n

$$P_1 = \frac{1}{\zeta^8(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)^2} \times \left\{ K_2(2\zeta) \left[-40\zeta^4 + 12G^4\zeta^4 + 6 \right. \right. \\ \left. \left. + 164G\zeta^5 + 17\zeta^6 + 96G\zeta - 60G^3\zeta^3 + 423G^2\zeta^4 + 18G^2\zeta^2 - 164G^3\zeta^5 + 17G^4\zeta^6 \right. \right. \\ \left. \left. - 194G\zeta^3 + 35\zeta^2 - 34G^2\zeta^6 \right] + K_3(2\zeta)\zeta \left[42\zeta^4 + 56G^4\zeta^4 + 40G\zeta^5 + 4\zeta^6 - 548G\zeta \right. \right. \\ \left. \left. - 506G^3\zeta^3 + 2G^2\zeta^4 + 1263G^2\zeta^2 - 40G^3\zeta^5 + 4G^4\zeta^6 + 77 + 436G\zeta^3 - 114\zeta^2 - 8G^2\zeta^6 \right] \right\}, \quad (\text{C.162})$$

$$P_2 = \frac{1}{\zeta^8(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)(-\zeta - 5G + G^2\zeta)} \left\{ 4K_2(2\zeta) \left[24\zeta^4 \right. \right. \\ \left. \left. + 3G^2\zeta^2 + \zeta^6 - G^2\zeta^6 + 5G^3\zeta^5 - 21G\zeta + 130G\zeta^3 - 3 - 28\zeta^2 - 50G^2\zeta^4 \right] \right. \\ \left. + K_3(2\zeta)\zeta \left[35\zeta^4 + 64G^3\zeta^3 + 267\zeta^2 - 4G\zeta^5 - 55G^2\zeta^4 + 4G^3\zeta^5 + 1562G\zeta \right. \right. \right.$$

$$+115G\zeta^3 - 314 - 622G^2\zeta^2 \Big] \Big\}, \quad (\text{C.163})$$

$$P_3 = \frac{1}{\zeta^8 G(3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2)} \left\{ K_2(2\zeta) \left[494\zeta^2 + 3G\zeta^5 - 3\zeta^6 \right. \right. \\ \left. \left. - 28G^2\zeta^4 + 3G^2\zeta^6 - 96G\zeta + 44G\zeta^3 - 41\zeta^4 - 12 \right] + 2K_3(2\zeta)\zeta \left[- 50G^2\zeta^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 34G\zeta - 5\zeta^2 + 17G\zeta^3 - 11\zeta^4 + 2G^2\zeta^4 + 763 \right] \right\}, \quad (\text{C.164})$$

$$P_4 = \frac{1}{\zeta^8(-\zeta - 5G + G^2\zeta)^2} \left\{ K_2(2\zeta) \left[- 12G\zeta^5 - 24G\zeta + 822\zeta^2 + 63\zeta^4 + 12 \right. \right. \\ \left. \left. - 316G\zeta^3 + 30G^2\zeta^4 + 4G^2\zeta^2 \right] + 2K_3(2\zeta)\zeta \left[49G^2\zeta^2 - 54G\zeta^3 - 494G\zeta \right. \right. \\ \left. \left. + 3\zeta^4 + 196\zeta^2 + 1237 + 3G^2\zeta^4 \right] \right\}, \quad (\text{C.165})$$

$$P_5 = \frac{1}{\zeta^8(-\zeta - 5G + G^2\zeta)^2} \left\{ K_2(2\zeta) \left[- 2G\zeta^3 + 2G^2\zeta^2 - 12G\zeta + 9\zeta^2 + 6 \right] \right. \\ \left. + K_3(2\zeta)\zeta \left[- 14G\zeta + \zeta^2 + G^2\zeta^2 + 37 \right] \right\}, \quad (\text{C.166})$$

$$P_6 = \frac{1}{\zeta^8 G(-\zeta - 5G + G^2\zeta)} \left\{ 2K_2(2\zeta) \left[5G\zeta^3 - 6G\zeta + 6 - 28\zeta^2 - \zeta^4 \right] \right. \\ \left. + K_3(2\zeta)\zeta \left[2G\zeta^3 - 19\zeta^2 + 26G\zeta - 166 \right] \right\}, \quad (\text{C.167})$$

$$P_7 = \frac{K_2(2\zeta)(-6 + 13\zeta^2) + K_3(2\zeta)\zeta(43 + 2\zeta^2)}{4G^2\zeta^8}, \quad (\text{C.168})$$

$$P_8 = \frac{K_2(2\zeta)(3\zeta^4 + 182\zeta^2 - 12) + 2K_3(2\zeta)\zeta(23\zeta^2 + 283)}{4G^2\zeta^8}. \quad (\text{C.169})$$

C.7 Coeficientes C_n

$$C_1 = m^2 \left(1 + 6\frac{G}{\zeta}\right), \quad C_2 = -6 \left(\frac{m}{c^2}\right) \frac{(2 - \frac{5}{\zeta^2}) + (\frac{19}{\zeta} - \frac{30}{\zeta^3})G - (2 - \frac{45}{\zeta^2})G^2 - \frac{9}{\zeta}G^3}{\frac{3}{\zeta} + (\frac{20}{\zeta^2} - 2)G - 13\frac{G^2}{\zeta} + 2G^3}, \quad (\text{C.170})$$

$$C_3 = -\left(\frac{m}{\zeta}\right) \frac{1 + 6\frac{G}{\zeta} - G^2}{1 + 5\frac{G}{\zeta} - G^2}, \quad C_4 = m \left(\frac{1}{G} + \frac{6}{\zeta}\right). \quad (\text{C.171})$$

$$C_5 = 3\zeta + 20G - 13G^2\zeta - 2G\zeta^2 + 2G^3\zeta^2, \quad C_6 = 1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2, \quad (\text{C.172})$$

$$C_7 = \zeta + 3G - G^2\zeta, \quad C_8 = \zeta + 4G - G^2\zeta, \quad C_9 = \zeta + 5G - G^2\zeta. \quad (\text{C.173})$$

$$C_{10} = \zeta + 6G - G^2\zeta, \quad C_{11} = G^2\zeta^2 - 5G^2 - 5G\zeta - \zeta^2. \quad (\text{C.174})$$

$$C_{12} = 30G + 5\zeta - 45G^2\zeta - 19G\zeta^2 + 9G^3\zeta^2 - 2\zeta^3 + 2G^2\zeta^3. \quad (\text{C.175})$$

C.8 Determinação das Equações de Burnett para o Caso Não-Relativístico

Mostraremos, nesta seção, como encontramos as equações de Burnett não-relativísticas a partir das expressões relativísticas (2.148) e (2.160).

Vimos que a quadrivelocidade U^μ na forma contravariante e covariante pode ser decomposta segundo uma parte temporal e outra espacial, em um referencial qualquer, como:

$$U^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad U_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (\text{C.176})$$

as quais, quando $v \ll c$ podem ser aproximadas por:

$$U^\mu \approx (c, \vec{v}), \quad U_\mu \approx (c, -\vec{v}). \quad (\text{C.177})$$

Consideremos o primeiro termo da equação de Burnett relativística (2.48) para o fluxo de calor, isto é, $\lambda(\nabla^\mu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu p)$. Aplicando as definições (1.55) e (1.66), temos:

$$\nabla^\mu T = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu \right) \partial_\nu T. \quad (\text{C.178})$$

Fazendo $\mu = 0$ em (C.178) encontramos que:

$$\nabla^0 T = g^{0\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\nu} - \frac{1}{c^2} U^0 U^\nu \frac{\partial T}{\partial x^\nu} = g^{00} \frac{\partial T}{\partial x^0} - \frac{c^2}{c^2} \frac{\partial T}{\partial x^0} - \frac{v^i}{c} \frac{\partial T}{\partial x_i} \simeq 0, \quad (\text{C.179})$$

onde consideramos que para o tensor métrico $g^{00} = 1$, $g^{0i} = 0$ e $g^{ii} = -1$ com $i = 1, 2, 3$, isto é, somente os termos da diagonal principal são diferentes de zero, a (C.177) para as velocidades, e ainda o fato que que $v \ll c$ no caso clássico.

Considerando agora $\mu = i$, temos:

$$\nabla^i T = g^{i\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\nu} - \frac{1}{c^2} U^i U^\nu \frac{\partial T}{\partial x^\nu} = g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{v^i}{c} \frac{\partial T}{\partial x_0} - \frac{v^i v^j}{c^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \simeq g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{C.180})$$

nesse caso e nos demais que serão analisados a seguir consideramos a seguintes relações para as componentes do gradiente contravariante e covariante:

$$\nabla^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad \nabla_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right), \quad (\text{C.181})$$

onde $\vec{\nabla}$ é o gradiente usual.

Vamos determinar agora a expressão não-relativística para o coeficiente T/nh :

$$\frac{T}{nh} = \frac{T}{nmc^2 G} = \frac{1}{nkG\zeta} \rightarrow 0, \quad (\text{C.182})$$

pois no caso não-relativístico, como já vimos $\zeta \gg 1$. Desta forma, o primeiro termo da equação de Burnett relativística fica:

$$\lambda (\nabla^\mu T - \frac{T}{nh} \nabla^\mu p) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (\text{C.183})$$

Para o segundo termo da (2.48), isto é, $\lambda_1 \nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu$, temos que calcular a expressão não-relativística para o gradiente do divergente da quadrivelocidade. Assim, aplicando as mesmas regras utilizadas para o cálculo de $\nabla^\mu T$, temos para o divergente da quadrivelocidade:

$$\nabla_\mu U^\mu = \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U_\mu U_\nu \right) \frac{\partial U^\mu}{\partial x_\nu}. \quad (\text{C.184})$$

Observa-se que para $\mu = 0$, temos $\nabla_0 U^0 = 0$, pois $\partial c / \partial x_\nu = 0$. E para $\mu = j$ ficamos com:

$$\nabla_j U^j = \left(g_{j\nu} - \frac{1}{c^2} U_j U_\nu \right) \frac{\partial U^j}{\partial x_\nu} = \left(g_{jj} - \frac{(v^j)^2}{c^2} \right) \left(-\frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v^j}{\partial x_j}, \quad (\text{C.185})$$

onde utilizamos (C.181).

Se tomarmos agora, o gradiente desse divergente, obtemos:

$$\nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu = -\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial^2 v^j}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (\text{C.186})$$

A expressão não-relativística do coeficiente λ_1 é obtido, ao considerarmos somente o primeiro termo da expansão (2.85). Assim

$$\lambda_1 = \frac{375}{4096} \frac{kT}{n\pi\sigma} = \frac{15}{4} \frac{\mu^2}{\rho}, \quad (\text{C.187})$$

onde o expressamos em termos da viscosidade de cisalhamento μ dada por:

$$\mu = \frac{5}{32} \sqrt{\frac{mkT}{\pi\sigma^2}}, \quad (\text{C.188})$$

isto é, o primeiro termo da expansão (2.109). Reunindo então os resultados (C.186) e (C.187), obtemos a expressão não-relativística para o segundo termo da equação de Burnett relativística para o fluxo de calor, a saber:

$$\lambda_1 \nabla^\tau \nabla_\mu U^\mu = -\frac{15}{4} \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (\text{C.189})$$

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido para a obtenção das expressões não-relativísticas para os dois termos acima, podemos encontrar os demais termos da equação de Burnett relativística para o fluxo de calor. Para não nos tornarmos repetitivos apresentaremos somente os resultados finais para cada um deles, assim:

- 3º Termo = $-\lambda_2 \nabla_\sigma \nabla^{<\sigma} U^\tau > \rightarrow 3 \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} D^{<ij>}$,
- 4º Termo = $-\lambda_3 \nabla^\tau T \nabla_\mu U^\mu \rightarrow \frac{15}{4} \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v^j}{\partial x_j}$,
- 5º Termo = $-\lambda_4 \nabla^\tau p \nabla_\mu U^\mu \rightarrow 0$,
- 6º Termo = $\lambda_5 \nabla_\sigma p \nabla^{<\sigma} U^\tau > \rightarrow -3 \frac{\mu^2}{\rho p} \frac{\partial p}{\partial x_i} D^{<ij>}$,
- 7º Termo = $-\lambda_6 \nabla_\sigma T \nabla^{<\sigma} U^\tau > \rightarrow \frac{123}{8} \frac{\mu^2}{\rho p T} \frac{\partial T}{\partial x_i} D^{<ij>}$,
- 8º Termo = $\lambda_7 \nabla_\sigma p \nabla^{[\sigma} U^{\tau]} \rightarrow 0$,
- 9º Termo = $-\lambda_8 \nabla_\sigma T \nabla^{[\sigma} U^{\tau]} \rightarrow -\frac{45}{4} \frac{\mu^2}{\rho p T} \frac{\partial T}{\partial x_i} D^{[ij]}$,

onde nos termos acima temos que

$$D^{<ij>} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} D_{\lambda\lambda} \delta_{ij}, \quad (\text{C.190})$$

e ainda $\rho = nm$. Para todos os coeficientes, consideramos os primeiros termos para as suas expansões quando $\zeta \gg 1$, de acordo com os resultados encontrados na seção (2.7).

Vamos agora obter as expressões não-relativísticas para os termos da equação de Burnett para o deviante do tensor pressão (2.50). Para obtermos o primeiro termo, isto é, $2\mu\nabla^{\langle\epsilon U^\tau\rangle}$, precisamos calcular o deviante do gradiente da velocidade $\nabla^{\langle\epsilon U^\tau\rangle}$. Inicialmente temos:

$$\nabla^{\langle\epsilon U^\tau\rangle} = \frac{1}{2} \left(\nabla^\epsilon U^\tau + \nabla^\tau U^\epsilon - \frac{2}{3} \Delta^{\epsilon\tau} \nabla_\alpha U^\alpha \right), \quad (\text{C.191})$$

onde aplicamos a definição da parte sem o traço de um tensor, isto é, a sua parte simétrica menos o traço. Para o projetor $\Delta^{\epsilon\tau}$ podemos verificar facilmente que, $\Delta^{00} \simeq 0$ e $\Delta^{ij} \simeq g^{ij}$. E, para o gradiente da quadrivelocidade temos:

$$\nabla^\epsilon U^\tau = \left(g^{\epsilon\mu} - \frac{1}{c^2} U^\epsilon U^\mu \right) \frac{\partial U^\tau}{\partial x^\mu}. \quad (\text{C.192})$$

Verifica-se que para $\epsilon = 0$ e $\tau = 0$ tem-se $\nabla^0 U^0 = 0$; $\epsilon = 0$ e $\tau = j$, $\nabla^0 U^j = 0$ e para $\epsilon = i$ e $\tau = 0$, $\nabla^i U^0 = 0$. E que, para $\epsilon = i$ e $\tau = j$ obtemos:

$$\nabla^i U^j = \left(g^{i\mu} - \frac{1}{c^2} U^i U^\mu \right) \frac{\partial U^j}{\partial x^\mu} \simeq g^{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x^k}. \quad (\text{C.193})$$

Desta maneira, considerando esses resultados e ainda (C.184) encontramos para (C.191) a seguinte expressão:

$$\nabla^{\langle i U^j \rangle} \equiv D^{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} \left(g^{ik} \frac{\partial v^j}{\partial x^k} + g^{jk} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) - \frac{1}{3} g^{ij} \frac{\partial v^k}{\partial x^k}. \quad (\text{C.194})$$

E assim, o primeiro termo da equação de Burnett relativística para o deviante do tensor pressão é fica:

$$2\mu\nabla^{\langle\epsilon U^\tau\rangle} = 2\mu \left(D^{(ij)} - \frac{1}{3} g^{ij} \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \right). \quad (\text{C.195})$$

Analogamente, podemos obter os demais termos. A seguir, listamos os resultados obtidos para cada um deles:

- 2º Termo = $\mu_1 \nabla^{\langle\epsilon \nabla^\tau\rangle} T \rightarrow 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}}$,
- 3º Termo = $-2\mu_2 \nabla^{\langle\epsilon \nabla^\tau\rangle} p \rightarrow -\frac{\mu^2}{\rho p} \frac{\partial^2 p}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}}$,
- 4º Termo = $\mu_3 \nabla^{\langle\epsilon T \nabla^\tau\rangle} T \rightarrow \frac{87}{64} \frac{\mu^2}{\rho T^2} \frac{\partial T}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial T}{\partial x_{j \rangle}}$,
- 5º Termo = $\mu_4 \nabla^{\langle\epsilon p \nabla^\tau\rangle} p \rightarrow 2 \frac{\mu^2}{\rho p^2} \frac{\partial p}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial p}{\partial x_{j \rangle}}$,
- 6º Termo = $-\mu_5 \nabla^{\langle\epsilon p \nabla^\tau\rangle} T \rightarrow -2 \frac{\mu^2}{\rho p T} \frac{\partial p}{\partial x_{\langle i}} \frac{\partial T}{\partial x_{j \rangle}}$,
- 7º Termo = $\mu_6 \nabla^{\langle\sigma U^\epsilon\rangle} \nabla_\sigma U^\tau \rightarrow -4 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_\alpha}$,

- 8º Termo = $-\mu_7 \nabla^{<\epsilon U^\tau>} \nabla_\sigma U^\sigma \rightarrow 4 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v^{<i}}{\partial x_{j>}} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x_\alpha}$,
- 9º Termo = $-\mu_8 \nabla^{<\epsilon U^\mu>} \nabla_{<\mu U^\tau>} \rightarrow \frac{54}{7} \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v^{<i}}{\partial x^\alpha>} \frac{\partial v^{j>}}{\partial x^{<\alpha}}$,
- 10º Termo = $\mu_9 \nabla^{<\epsilon U^\sigma \nabla_\sigma U^\tau>} \rightarrow -2 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^{<i}} \frac{\partial v^{j>}}{\partial x^\alpha}$,

onde expressamos todos os termos em função de μ . Observamos mais uma vez que utilizamos os primeiros termos das expansões obtidas para cada um dos coeficientes acima, no caso $\zeta \gg 1$, obtidos na seção (2.7).

Apêndice D

Deduções Relativas ao Capítulo 3

D.1 Relações para T_L , p_L e ϖ_L e I^τ

Mostraremos nesta seção, como obtivemos as relações de transformação para a temperatura T_L , pressão hidrostática p_L , pressão dinâmica ϖ_L e I^τ .

Vamos, inicialmente, obter a relação de transformação para a temperatura. Para tanto comparemos os coeficientes do produto $U^\mu U^\nu$ que aparecem em ambos os membros da expressão (3.15) e dados por:

$$\frac{en}{c^2} = \frac{e_L n_L}{c^2} \left(1 + \frac{1}{n^2 c^2} I^\alpha I_\alpha \right) + \frac{1}{n^2 c^2} n_L k T_L I^\alpha I_\alpha. \quad (\text{D.1})$$

Substituindo a relação de transformação para n_L , dada por (3.11) e simplificando obtemos a seguinte expressão de transformação para a energia interna por partícula:

$$e = e_L \left(1 + \frac{1}{2n^2 c^2} I^\alpha I_\alpha \right) + \frac{k T_L}{2n^2 c^2}. \quad (\text{D.2})$$

Mas de acordo com a definição para a entalpia por partícula (1.81) podemos escrever para e e e_L as seguintes expressões:

$$e = mc^2 \left(G - \frac{1}{\zeta} \right), \quad e_L = mc^2 \left(G_L - \frac{1}{\xi} \right), \quad (\text{D.3})$$

onde $\xi = mc^2/kT$.

Com esta consideração temos para (D.2):

$$G(\zeta) - \frac{1}{\zeta} = \left(G_L - \frac{1}{\xi} \right) \left(1 + \frac{1}{2n^2 c^2} I^\alpha I_\alpha \right) + \frac{1}{n^2 c^4} \frac{k T_L}{m c^2} I^\alpha I_\alpha. \quad (\text{D.4})$$

Vamos agora expandir a função $G(\zeta)$ em torno de ξ em séries de Taylor, isto é,

$$G(\zeta) \approx G_L(\xi) + G'_L(\xi)(\zeta - \xi) + \frac{1}{2!} G''_L(\xi)(\zeta - \xi)^2 + \dots \quad (\text{D.5})$$

Desprezando o termo proporcional a $(\zeta - \xi)^2$ e os termos de ordem superiores a esse, ficamos com a seguinte expressão:

$$G(\zeta) \approx G_L(\xi) + G'_L(\xi)(\zeta - \xi) = G_L(\xi) + \left[G_L^2 - \frac{5}{\xi} G_L - 1 \right] (\zeta - \xi), \quad (\text{D.6})$$

onde utilizamos $G'_L = G_L^2 - 5G_L/\xi - 1$. Considerando a expansão (D.6) e as definições $\zeta = mc^2/kT$ e $\xi = mc^2/kT_L$, a (D.4) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\left[G_L^2 - \frac{5}{\xi} G_L - 1 \right] \frac{mc^2}{kT_L} \frac{\Delta_{TT}}{T} + \frac{kT_L}{mc^2} \frac{\Delta_{TT}}{T_L} = \frac{1}{2n^2c^2} \left(G_L - \frac{1}{\xi} \right) I^\alpha I_\alpha, \quad (\text{D.7})$$

onde utilizamos a seguinte notação $\Delta_{TT} = T_L - T$. Resolvendo (D.7) para Δ_{TT} , ficamos com

$$\Delta_{TT} = \frac{T}{2n^2c^2} \frac{(G_L\xi + 1)}{(1 - 5G_L\xi - 5G_L^2\xi^2 - \xi^2)} I^\alpha I_\alpha. \quad (\text{D.8})$$

Finalmente, escrevendo para T_L chegamos no resultado:

$$T_L = T \left(1 + \frac{1}{2n^2c^2} \frac{(G_L\xi + 1)}{(1 - 5G_L\xi - 5G_L^2\xi^2 - \xi^2)} I^\alpha I_\alpha \right), \quad (\text{D.9})$$

que é a relação de transformação para a temperatura. Notemos que em uma teoria linear o último termo não existe.

Após encontrarmos a expressão para a temperatura T_L , podemos determinar a relação para a pressão hidrostática p_L , a qual é definida na decomposição de Landau e Lifshitz como $p_L = n_L k T_L$, portanto basta substituir as relações para n_L dada por (3.11) e T_L e ficamos com o seguinte resultado:

$$p_L = p \left[1 + \frac{1}{2n^2c^2} \frac{\xi(\xi + 6G_L - G_L^2\xi)}{(1 - 5G_L\xi - \xi^2 + G_L^2\xi^2)} I^\alpha I_\alpha \right]. \quad (\text{D.10})$$

Para encontrarmos a relação para a pressão dinâmica nas duas decomposições, devemos comparar os termos em $\Delta^{\mu\nu}$ na expressão (3.15). Desta maneira temos a identidade:

$$p + \varpi = p_L + \varpi_L + \frac{1}{3n^2c^2} n_L h_L I^\alpha I_\alpha. \quad (\text{D.11})$$

Portanto, substituindo as expressões para n_L , p_L e h_L , dadas respectivamente por (3.11), (D.10) e a (3.20), obtemos:

$$\varpi_L = \varpi - \frac{m}{n} \frac{(3\xi + 20G_L - 13G_L^2\xi - 2G_L\xi^2 + 2G_L^3\xi^2)}{(1 - 5G_L\xi - \xi^2 + G_L^2\xi^2)} I^\alpha I_\alpha. \quad (\text{D.12})$$

A relação para I^r pode ser obtida comparando-se os termos em $U^{<\mu q^\nu>}$ na expressão (3.15), isto é,

$$\frac{2}{c^2}U^{<\mu q^\nu>} = -\frac{2}{n_L c^2}(\varpi_L + n_L h_L)U^{<\mu I^\nu>}, \quad (\text{D.13})$$

de onde obtemos que:

$$q^\nu = -\frac{1}{n_L}(\varpi_L + n_L h_L)I^\nu = -h_L\left(1 + \frac{1}{n_L h_L}\varpi_L\right)I^\nu. \quad (\text{D.14})$$

Ou, escrevendo para I^ν , ficamos com:

$$I^\nu = -\frac{1}{h_L}q^\nu\left(1 + \frac{\varpi_L}{n_L h_L}\right)^{-1} \approx -\frac{q^\nu}{h_L}\left(1 - \frac{\varpi_L}{n_L h_L}\right). \quad (\text{D.15})$$

D.2 A Velocidade Adiabática do Som

A velocidade adiabática do som, como está definida na seção (4.2) do capítulo 4, o qual trata da propagação de ondas, é dada por

$$v_s = \left(\frac{kT c_p c^2}{h c_v}\right)^{1/2}, \quad (\text{D.16})$$

onde c_v e c_p são as capacidades caloríficas a volume constante e a pressão constante respectivamente e são definidas por:

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v, \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p. \quad (\text{D.17})$$

Os valores em equilíbrio para a energia interna e_L e para a entalpia h_L são:

$$h_L = mc^2 G_L, \quad e_L = mc^2 \left[G_L(\xi) - \frac{1}{\xi}\right], \quad (\text{D.18})$$

onde $G_L(\xi) = K_3(\xi)/K_2(\xi)$. Desta forma, fazendo as respectivas derivadas encontramos que:

$$c_v = k\xi^2\left(1 + 5\frac{G_L}{\xi} - G_L^2 - \frac{1}{\xi^2}\right), \quad c_p = k\xi^2\left(1 + 5\frac{G_L}{\xi} - G_L^2\right). \quad (\text{D.19})$$

Substituindo as expressões encontradas para a entalpia por partícula h_L e para as capacidades caloríficas c_p e c_v , chegamos na seguinte expressão para a velocidade adiabática do som:

$$v_s = \left[\frac{\xi^2 + 5G_L\xi - G_L^2\xi^2}{G_L(\xi^2 + 5G_L\xi - G_L^2\xi^2 - 1)} \frac{kT_L}{m}\right]^{1/2}. \quad (\text{D.20})$$

D.3 Expressão para $\partial_\mu T^{\mu\nu\sigma}$

Considerando a derivada covariante

$$\partial_\nu = \frac{1}{c^2} U_{L\nu} D_L + \nabla_{L\nu}, \quad (\text{D.21})$$

obtemos o seguinte resultado para a derivada $\partial_\mu T^{\mu\nu\sigma}$:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma T^{\mu\nu\sigma} &= (C_{L1} D_L n_L + n_L D_L C_{L1} + \varpi_L D_L C_{L2} + C_{L2} D_L \varpi_L) U_L^\mu U_L^\nu + (n_L C_{L1} + C_{L2} \varpi_L) (U_L^\mu D_L U_L^\nu \\ &+ U_L^\nu D_L U_L^\mu) + \frac{1}{6} \left(m^2 D_L n_L - C_{L1} D_L n_L - n_L D_L C_{L1} - C_{L2} D_L \varpi_L - \varpi_L D_L C_{L2} \right) (c^2 g^{\mu\nu} + 2 U_L^\mu U_L^\nu) \\ &+ \frac{1}{6} \left(n_L m^2 - n_L C_{L1} - C_{L2} \varpi_L \right) (U_L^\mu D_L U_L^\nu + U_L^\nu D_L U_L^\mu) - \frac{1}{c^2} \left(\tilde{C}_{3L} D_L h_L + h_L D_L \tilde{C}_{3L} \right) (U_L^\mu I^\nu + U_L^\nu I^\mu) \\ &- \frac{1}{c^2} h_L \tilde{C}_{L3} (U_L^\mu D_L I^\nu + U_L^\nu D_L I^\mu + g^{\mu\nu} U_\alpha D_L I^\alpha) + 6m (\tilde{C}_{L3} D_L G_L + G_L D_L \tilde{C}_{L3}) (U_L^\mu I^\nu + U_L^\nu I^\mu) \\ &+ (m^2 + 6m G_L \tilde{C}_{L3}) (U_L^\mu D_L I^\nu + I^\nu D_L U_L^\mu + U_L^\nu D_L I^\mu + I^\mu D_L U_L^\nu + \frac{1}{c^2} U_L^\mu U_L^\nu U_{L\alpha} D_L I^\alpha) \\ &+ p_L^{\langle\mu\nu\rangle} D_L C_{L4} + \frac{1}{c^2} C_{L4} \left(c^2 D_L p_L^{\langle\mu\nu\rangle} + U_{L\alpha} U_L^\nu D_L p_L^{\langle\mu\alpha\rangle} + U_L^\mu U_{L\alpha} D_L p_L^{\langle\nu\alpha\rangle} \right) \\ &+ (n_L C_{L1} + C_{L2} \varpi_L) U_L^\mu U_L^\nu \nabla_{L\sigma} U_L^\sigma + \frac{c^2}{6} \left(m^2 \nabla_{L\alpha} n_L - n_L \nabla_{L\alpha} C_{L1} - C_{L1} \nabla_{L\alpha} n_L + C_{L2} \nabla_{L\alpha} \varpi_L \right. \\ &- \left. \varpi_L \nabla_{L\alpha} C_{L2} \right) (g^{\mu\alpha} U_L^\nu + g^{\nu\alpha} U_L^\mu) + \frac{c^2}{6} \left(n_L m^2 - n_L C_{L1} - C_{L2} \varpi_L \right) (g^{\mu\nu} \nabla_{L\alpha} U_L^\alpha + g^{\alpha\nu} \nabla_{L\alpha} U_L^\mu \\ &+ g^{\alpha\mu} \nabla_{L\alpha} U_L^\nu) - (\tilde{C}_{L3} \nabla_{L\alpha} h_L + h_L \nabla_{L\alpha} \tilde{C}_{L3} (g^{\mu\alpha} I^\nu + g^{\nu\alpha} I^\mu + g^{\mu\nu} I^\alpha) \\ &- h_L \tilde{C}_{L3} (\nabla_L^\mu I^\nu + \nabla_L^\nu I^\mu + g^{\mu\nu} \nabla_{L\alpha} I^\alpha) \\ &+ (m^2 + 6m G_L \tilde{C}_{L3}) (U_L^\mu U_L^\nu \nabla_{L\sigma} I^\sigma + U_L^\mu I^\sigma \nabla_{L\sigma} U_L^\nu + U_L^\nu I^\sigma \nabla_{L\sigma} U_L^\mu + U_L^\nu I^\mu \nabla_{L\sigma} U_L^\sigma \\ &+ U_L^\mu I^\nu \nabla_{L\sigma} U_L^\sigma) + 6m (\tilde{C}_{L3} \nabla_{L\alpha} G_L + G_L \nabla_{L\alpha} \tilde{C}_{L3}) U_L^\mu U_L^\nu I^\alpha + \nabla_{L\alpha} C_{L4} (p_L^{\langle\mu\alpha\rangle} U_L^\nu + p_L^{\langle\nu\alpha\rangle} U_L^\mu) \\ &+ C_{L4} (\nabla_{L\alpha} p_L^{\langle\alpha\mu\rangle} U_L^\nu + p_L^{\langle\alpha\mu\rangle} \nabla_{L\alpha} U_L^\nu + U_L^\mu \nabla_{L\alpha} p_L^{\langle\alpha\nu\rangle} + p_L^{\langle\alpha\nu\rangle} \nabla_{L\alpha} U_L^\mu + p_L^{\langle\mu\nu\rangle} \nabla_{L\alpha} U_L^\alpha). \quad (\text{D.22}) \end{aligned}$$

Apêndice E

Deduções Relativas ao Capítulo 4

E.1 Sistemas de Equações para Cinco Campos

Nesta seção vamos mostrar com detalhes como obtivemos o sistema de equações (4.17) a (4.20), referente às equações de Navier-Stokes e Fourier e o sistema de equações composto por (4.43), (4.44) e (4.45) referente às equações de Burnett linearizadas.

Substituindo as equações de Navier-Stokes e Fourier, dadas por (4.12) nas equações de balanço (4.13), (4.14) e (4.15), resulta:

$$Dn + n\nabla^\mu U_\mu = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$nDe + p\nabla^\mu U_\mu + \nabla_\mu[\lambda(\nabla^\mu T - \frac{T}{nh}\nabla^\mu p)] = 0, \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{nh}{c^2}DU^\mu - \nabla^\mu p + \nabla^\mu(\eta\nabla^\nu U_\nu) + 2\nabla_\nu(\mu\nabla^{<\mu}U^{\nu>}) + \frac{1}{c^2}D[\lambda(\nabla^\mu T - \frac{T}{nh}\nabla^\mu p)] = 0. \quad (\text{E.3})$$

As ondas harmônicas planas longitudinais de pequena amplitude são definidas por:

$$n = n_0 + \bar{n} \exp[i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)] = n_0 + \bar{n} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.4})$$

$$T = T_0 + \bar{T} \exp[i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)] = T_0 + \bar{T} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.5})$$

$$U^\mu = (c, \vec{v} \exp[i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)]) = (c, \vec{v} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)]), \quad (\text{E.6})$$

com $\vec{\kappa} = \kappa\vec{n}$, onde \vec{n} é um vetor unitário na direção de propagação da onda (devemos ter o cuidado para não confundir com a densidade do número de partículas, também representado por n) e ainda as amplitudes \bar{n} , \bar{T} e \vec{v} são consideradas pequenas de tal forma que os seus produtos podem ser desprezados.

Como os operadores derivada material e gradiente, em componentes, são dados respectivamente por:

$$D = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla^\mu = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu \right) \partial_\nu = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \nabla_\mu = \left(0, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (\text{E.7})$$

então, considerando (E.4) e (E.6), obtemos

$$Dn = \frac{\partial n}{\partial t} = -i\omega\bar{n} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.8})$$

$$\nabla_i U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^i} = i\kappa\delta_{ij} n^j \bar{v}^i \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.9})$$

pois $\nabla_\mu U^\mu = (0, \nabla_i U^i)$, onde $i = 1, 2, 3$.

Levando-se em conta os resultados (E.8) e (E.9), a equação de balanço (E.1) pode ser escrita como:

$$\omega\bar{n} - n_0\kappa\bar{v}_\parallel = 0, \quad (\text{E.10})$$

onde $\bar{v}_\parallel = \delta_{ij} n^j \bar{v}^i$ é a componente longitudinal da amplitude da velocidade, e termos em que aparecem produtos de duas ou mais amplitudes foram desprezados.

Seja agora a equação de balanço (E.2). Vamos precisar escrever em termos das amplitudes \bar{n} , \bar{v}_\parallel e \bar{T} e em componentes, as quantidades De , $\nabla_\mu \nabla^\mu T$ e $\nabla_\mu \nabla^\mu p$. Assim, considerando (E.4) e a (E.5) mais as expressões (E.7) para as derivadas, obtemos:

$$De = \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -ic_v^0 \bar{T} \omega \exp[i(\kappa n_i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.11})$$

onde utilizamos a definição $(\partial e / \partial T) = c_v$ para a capacidade calorífica por partícula a volume constante. O índice zero que aparece em c_v^0 e que vai aparecer em todas as grandezas termodinâmicas daqui para a frente, vai indicar que estamos considerando o estado de referência em que $T = T_0$ e $n = n_0$. E ainda temos que:

$$\nabla_i \nabla^i T = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^i \partial x^i} = \kappa^2 \bar{T} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.12})$$

$$\nabla_i \nabla^i p = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^i} = \kappa^2 (\bar{n} k T_0 + \bar{T} n_0 k) \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.13})$$

onde consideramos que $p = nkT$.

Portanto, levando em conta os resultados (E.11), (E.12), (E.13) e ainda (E.9), a equação de balanço (E.2) se reduz à seguinte expressão em termos das amplitudes:

$$-i\lambda_0 \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa^2 \bar{n} - n_0 k T_0 \kappa \bar{v}_\parallel + \left[n_0 c_v^0 \omega + i\lambda_0 \kappa^2 \frac{e_0}{h_0} \right] \bar{T} = 0. \quad (\text{E.14})$$

Para chegarmos a esse resultado consideramos a definição $h = e + p/n$ para a entalpia por partícula.

Finalmente, para a equação de campo (E.3), vamos precisar encontrar as expressões para DU^μ , $\nabla^\mu(\nabla^\nu U_\nu)$, $\nabla_\nu(\nabla^{<\mu}U^{>})$, $D(\nabla^\mu T)$ e $D(\nabla^\mu p)$ em termos das amplitudes e em componentes. Assim, da (E.6) e (E.7), temos que:

$$DU^i = \frac{\partial U^i}{\partial t} = -i\omega \bar{v}^i \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.15})$$

$$\nabla^j(\nabla^i U_i) = \kappa^2 \delta_{ki} n^k n^i \bar{v}^i \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.16})$$

$$\nabla_i(\nabla^{<j}U^{i>}) = \nabla_i \left[\frac{1}{2} (\nabla^j U^i + \nabla^i U^j) - \frac{1}{3} g^{ij} \nabla_k U^k \right] = \frac{2}{3} \kappa^2 n_i n^j \bar{v}^i \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.17})$$

onde $g^{ij} = -1$ se $i = j$ e zero se $i \neq j$ e ainda levamos em conta o resultado:

$$\nabla^j U^i = -\frac{\partial U^i}{\partial x^j} = -i\kappa n^j \bar{v}^i \exp[i(\kappa n_i x^i - \omega t)]. \quad (\text{E.18})$$

As derivadas temporais para os gradientes da temperatura e pressão são dadas por:

$$D(\nabla^j T) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial x^j} \right) = -\kappa \omega \bar{T} n^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.19})$$

$$D(\nabla^j p) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x^j} \right) = -\kappa \omega n^j (kT_0 \bar{n} + n_0 k \bar{T}) \exp[i(\kappa n_i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.20})$$

onde novamente utilizamos que $p = nkT$.

Desta forma, considerando os resultados (E.15) a (E.20), que multiplicados escalarmente por n^j chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \left[-kT_0 \kappa + i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa \omega \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0 h_0}{c^2} \omega + i \left(\eta_0 + \frac{4}{3} \mu_0 \right) \kappa^2 \right] \bar{v}_{\parallel} \\ & - \left[n_0 k \kappa + i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{e_0}{h_0} \omega \kappa \right] \bar{T} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Reunindo, agora, os resultados (E.10), (E.14) e (E.21), ficamos com o seguinte sistema:

$$\omega \bar{n} - n_0 \kappa \bar{v}_{\parallel} = 0, \quad (\text{E.22})$$

$$-i\lambda_0 \frac{kT_0^2}{n_0 h_0} \kappa^2 \bar{n} - n_0 k T_0 \kappa \bar{v}_{\parallel} + [n_0 c_v^0 \omega + i\lambda_0 \kappa^2 \frac{e_0}{h_0}] \bar{T} = 0, \quad (\text{E.23})$$

$$\left[-kT_0\kappa + i\frac{\lambda_0}{c^2}\frac{kT_0^2}{n_0h_0}\kappa\omega \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0h_0}{c^2}\omega + i\left(\eta_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right)\kappa^2 \right] \bar{v}_{\parallel} - \left[n_0k\kappa + i\frac{\lambda_0}{c^2}\frac{e_0}{h_0}\omega\kappa \right] \bar{T} = 0. \quad (\text{E.24})$$

que são as equações (4.17), (4.19) e (4.20) que queríamos determinar.

Se agora multiplicarmos a equação (E.21) vetorialmente por n^j , encontramos a seguinte equação:

$$\left(\frac{n_0h_0}{c^2}\omega + i\mu_0\kappa^2 \right) \bar{v}_{\perp} = 0, \quad (\text{E.25})$$

que é a equação (4.20) para a componente transversal da amplitude da velocidade e onde utilizamos a notação $\bar{v}_{\perp} = \bar{n} \times \bar{v}$

Para a determinação do sistema (E.22), (E.23) e (E.24), e de todos os sistemas referentes a propagação de ondas relativos ao capítulo 4, devemos adimensionalizar cada equação, para tanto precisaremos conhecer a velocidade adiabática do som no gás. Ela é definida da seguinte maneira:

$$v_0 = \left(\frac{kT_0c_p^0c^2}{h_0c_v^0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{E.26})$$

que ao ser expandida no caso $\zeta \gg 1$, isto é, no limite não relativístico, toma a seguinte forma:

$$v_0 = \left(\frac{5}{3} \frac{k}{m} T_0 \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{7}{4} \frac{kT_0}{mc^2} + \dots \right]. \quad (\text{E.27})$$

Para chegarmos nessa expressão, tivemos que expandir a entalpia e as capacidades caloríficas a volume e pressão constantes, para o caso de baixas temperaturas. O resultado para estas expansões é:

$$h = mc^2 + \frac{5}{2}kT + \frac{15}{8} \frac{(kT)^2}{mc^2} + \dots, \quad (\text{E.28})$$

e

$$c_v = \frac{3}{2}k + \frac{15}{4} \frac{k^2T}{mc^2} + \dots \quad \text{e} \quad c_p = \frac{5}{2}k - \frac{5}{3} \frac{k^2T}{mc^2} + \dots \quad (\text{E.29})$$

onde utilizamos a expansão (B.11) do apêndice B, para a função de Bessel e ainda as expressões para h e e dadas por (1.98) e (A.45), com c_p e c_v definidas respectivamente por:

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v, \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{E.30})$$

onde

$$\frac{e_0}{h_0} = 1 - \frac{1}{G\zeta}, \quad \frac{c_v^0}{k} = -(1 - 5G\zeta - \zeta^2 + G^2\zeta^2), \quad \frac{c_p^0}{k} = \zeta(\zeta + 5G - G^2\zeta), \quad (\text{E.31})$$

A expansão da (4.24) para o caso onde $\zeta \ll 1$, ou o caso ultra-relativístico, é:

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (\text{E.32})$$

sendo que a energia e a entalpia por partícula, são dadas por:

$$e = 3kT, \quad h|_E = 4kT, \quad (\text{E.33})$$

nesse caso fizemos uso da expansão (B.12) para a função de Bessel. Ressaltamos que utilizaremos esses resultados ao longo de todo este capítulo.

Vamos agora mostrar como chegamos ao sistema de equações composta por (4.43), (4.44) e (4.45), que se referem à propagação de ondas harmônicas planas, para cinco campos e considerando as equações de Burnett linearizadas.

Muitos dos resultados encontrados acima vão ser novamente utilizados aqui. Assim, vamos em primeiro lugar substituir as equações de Burnett linearizadas e dadas por (4.87), (4.41) e (4.42) nas equações de campo (4.13), (4.14) e (4.15) para encontrarmos o seguinte conjunto de equações:

$$Dn + n\nabla^\mu U_\mu = 0, \quad (\text{E.34})$$

$$\begin{aligned} & \frac{n\hbar}{c^2} DU^\mu - \nabla^\mu p + \eta_0 \nabla^\mu (\nabla_\nu U^\nu) - \eta_1 \nabla^\mu (\nabla_\nu \nabla^\nu T) - \eta_2 \nabla^\mu (\nabla_\nu \nabla^\nu p) + 2\mu_0 \nabla_\nu (\nabla^{<\mu} U^{\nu>}) \\ & + \mu_1 \nabla_\nu (\nabla^{<\mu} \nabla^{\nu>} T) + \mu_2 \nabla_\nu (\nabla^{<\mu} \nabla^{\nu>} p) + \frac{1}{c^2} \left\{ \lambda_0 \left[D(\nabla^\mu T) - \frac{T}{n\hbar} D(\nabla^\mu p) \right] \right. \\ & \left. + \lambda_1 D(\nabla^\mu \nabla_\sigma U^\sigma) + \lambda_2 D(\nabla_\sigma \nabla^{<\sigma} U^{\mu>}) \right\} = 0, \quad (\text{E.35}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & nDe + p\nabla_\mu U^\mu + \lambda_0 \left[\nabla_\mu (\nabla^\mu T) - \frac{T}{n\hbar} \nabla_\mu (\nabla^\mu p) \right] + \lambda_1 \nabla_\mu (\nabla^\mu \nabla_\sigma U^\sigma) \\ & + \lambda_2 \nabla_\mu (\nabla_\sigma \nabla^{<\sigma} U^{\mu>}) = 0. \quad (\text{E.36}) \end{aligned}$$

A equação (E.34), em termos das amplitudes, já foi obtida nessa seção e é dada por (E.10). As expressões para DU^μ , $\nabla^\mu p$, $\nabla^\mu (\nabla_\nu U^\nu)$, $\nabla_\nu (\nabla^{<\mu} U^{\nu>})$, $D(\nabla^\mu T)$ e $D(\nabla^\mu p)$ em termos das

amplitudes e componentes, que aparecem na equação (E.35), também já foram encontradas na seção (E.1). Em termos das soluções (E.4) e (E.5), e considerando (E.7) encontramos que:

$$\nabla^j(\nabla_i \nabla^i T) = -i\kappa^3 n^j T_0 \bar{T} \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.37})$$

$$\nabla^j(\nabla_i \nabla^i p) = -i\kappa^3 n^j n_0 k T_0 (\bar{n} + \bar{T}) \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.38})$$

onde levamos em conta os resultados para $\nabla_i \nabla^i T$ e $\nabla_i \nabla^i p$ dados respectivamente por (E.12) e (E.13).

Vamos agora determinar as expressões para $\nabla_\nu(\nabla^{<\mu\nabla^\nu>}T)$ e $\nabla_\nu(\nabla^{<\mu\nabla^\nu>}p)$ em termos das amplitudes e que estão relacionadas aos coeficientes μ_1 e μ_2 . Para tanto vamos precisar conhecer a expressão para $\nabla^{<i\nabla^j>}T$, que pode ser escrita como:

$$\nabla^{<i\nabla^j>}T = \nabla^i \nabla^j T - \frac{1}{3} \delta^{ij} \nabla_k \nabla^k T. \quad (\text{E.39})$$

Considerando a seguinte expressão:

$$\nabla^i \nabla^j T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = -\kappa^2 T_0 \bar{T} n^i n^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.40})$$

e a (E.12), temos que:

$$\nabla^{<i\nabla^j>}T = -\kappa^2 T_0 \bar{T} \left(n^i n^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} \right) \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)]. \quad (\text{E.41})$$

Desta forma, considerando esse resultado, encontramos:

$$\nabla_i(\nabla^{<i\nabla^j>}T) = -\frac{2}{3} i\kappa^3 T_0 \bar{T} n^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.42})$$

$$\nabla_i(\nabla^{<i\nabla^j>}p) = -\frac{2}{3} i\kappa^3 (\bar{n} + \bar{T}) n_0 k T_0 n^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)]. \quad (\text{E.43})$$

Vejamos agora as expressões para $D(\nabla^\mu \nabla_\sigma U^\sigma)$ e $D(\nabla_\sigma \nabla^{<\sigma U^\sigma>})$. Para tanto, deveremos aqui simplesmente calcular a derivada temporal das expressões (E.16) e (E.17), obtendo o seguinte resultado:

$$D(\nabla^j \nabla_\sigma U^\sigma) = -i\kappa^2 \omega v_0 n^j \delta_{ik} n^i \bar{v}^k \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \quad (\text{E.44})$$

$$D(\nabla_k \nabla^{<k U^j>}) = -i\frac{2}{3} \kappa^2 \omega v_0 \delta_{ik} n^k n^i \bar{v}_i \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)]. \quad (\text{E.45})$$

Reunindo agora todos esses resultados e multiplicando a expressão resultante escalarmente por n_j , encontramos a seguinte forma para a equação de balanço (E.35), em termos das amplitudes:

$$\begin{aligned}
& \left[-n_0 k T_0 \kappa + i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{k T_0^2 \omega \kappa}{h_0} - n_0 k T_0 \kappa^3 \left(\eta_2 - \frac{2}{3} \mu_2 \right) \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0 v_0 h_0}{c^2} \omega + i \left(\eta_0 + \frac{4}{3} \mu_0 \right) v_0 \kappa^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\kappa^2}{c^2} v_0 \omega \left(\lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2 \right) \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[-n_0 k T_0 \kappa - i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{e_0}{h_0} T_0 \omega \kappa - T_0 \kappa^3 (\eta_1 + n_0 k \eta_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} \kappa^3 T_0 (\mu_1 + k n_0 \mu_2) \right] \bar{T} = 0. \tag{E.46}
\end{aligned}$$

Vamos agora escrever a equação (E.36) em termos das amplitudes. Novamente observamos que quase todos os gradientes encontram-se calculados na seção (E.1) e que devemos simplesmente calcular $\nabla_{\mu}(\nabla^{\mu} \nabla_{\sigma} U^{\sigma})$ e $\nabla_{\mu}(\nabla_{\sigma} \nabla^{\langle \sigma} U^{\mu \rangle})$. Assim obtemos:

$$\nabla_{\mu}(\nabla^{\mu} \nabla_{\sigma} U^{\sigma}) = i v_0 \kappa^3 \delta_{ij} n^i \bar{v}^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \tag{E.47}$$

$$\nabla_{\mu}(\nabla_{\sigma} \nabla^{\langle \sigma} U^{\mu \rangle}) = i \frac{2}{3} \kappa^3 v_0 \delta_{ij} n^i \bar{v}^j \exp[i(\kappa n^i x^i - \omega t)], \tag{E.48}$$

onde mais uma vez utilizamos os resultados dados por (E.16) e (E.17). Desta forma, reunindo esses resultados e substituindo na equação (E.36) obtemos:

$$-i \lambda_0 \frac{k T_0^2}{h_0} \kappa^2 \bar{n} - \left[n_0 k T_0 v_0 \kappa + \kappa^3 \left(\lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2 \right) v_0 \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[c_v^0 n_0 T_0 \omega + i \lambda_0 \kappa^2 T_0 \frac{e_0}{h_0} \right] \bar{T} = 0. \tag{E.49}$$

Reunindo os resultados (E.10), (E.46), e (E.49), encontramos o seguinte sistema:

$$n_0 \omega \bar{n} - n_0 v_0 \kappa \bar{v}_{\parallel} = 0, \tag{E.50}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-n_0 k T_0 \kappa + i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{k T_0^2 \omega \kappa}{h_0} - n_0 k T_0 \kappa^3 \left(\eta_2 - \frac{2}{3} \mu_2 \right) \right] \bar{n} + \left[\frac{n_0 v_0 h_0}{c^2} \omega + i \left(\eta_0 + \frac{4}{3} \mu_0 \right) v_0 \kappa^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\kappa^2}{c^2} v_0 \omega \left(\lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2 \right) \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[-n_0 k T_0 \kappa - i \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{e_0}{h_0} T_0 \omega \kappa - T_0 \kappa^3 (\eta_1 + n_0 k \eta_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} \kappa^3 T_0 (\mu_1 + k n_0 \mu_2) \right] \bar{T} = 0, \tag{E.51}
\end{aligned}$$

$$-i \lambda_0 \frac{k T_0^2}{h_0} \kappa^2 \bar{n} - \left[n_0 k T_0 v_0 \kappa + \kappa^3 \left(\lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2 \right) v_0 \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[c_v^0 n_0 T_0 \omega + i \lambda_0 \kappa^2 T_0 \frac{e_0}{h_0} \right] \bar{T} = 0. \tag{E.52}$$

Vamos agora escrever o sistema acima na forma adimensional. Para tanto, deveremos dividir a equação (E.50) por $n_0\omega$, a equação (E.51) por $n_0kT_0\omega/v_0$ e a terceira (E.52) por $n_0kT_0\omega$, e encontramos o seguinte resultado:

$$\bar{n} - \Gamma\bar{v}_{\parallel} = 0, \quad (\text{E.53})$$

$$\begin{aligned} & \left[-\Gamma + i\frac{\Gamma\lambda_0^* m^2 c^4}{\zeta\mu_0^* h_0^2} \frac{1}{Re} \frac{c_p^0}{c_v^0} - \frac{\Gamma^3}{Re^2} \frac{\zeta}{\mu_0^{*2}} \frac{mc^2}{h_0} \frac{c_p^0}{c_v^0} \left(\eta_2^* - \frac{2}{3}\mu_2^* \right) \right] \bar{n} + \left[\frac{c_p^0}{c_v^0} + i\left(\frac{\eta_0^*}{\mu_0^*} + \frac{4}{3} \right) \frac{mc^2}{h_0} \frac{\Gamma^2}{Re} \frac{c_p^0}{c_v^0} \right. \\ & + \left. \left(\lambda_1^* + \frac{2}{3}\lambda_2^* \right) \frac{1}{\mu_0^{*2}} \frac{\Gamma^2}{Re^2} \frac{m^2 c^4}{h_0^2} \left(\frac{c_p^0}{c_v^0} \right)^2 \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[-\Gamma - i\frac{\lambda_0^* e_0}{\mu_0^* h_0} \frac{\Gamma}{Re} \frac{mc^2}{h_0} \frac{c_p^0}{c_v^0} - (\eta_1^* + \eta_2^*) \frac{\Gamma^3}{\mu_0^{*2}} \frac{\zeta}{Re^2} \frac{mc^2}{h_0} \frac{c_p^0}{c_v^0} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3}(\mu_1^* + \mu_2^*) \frac{\Gamma^3}{Re^2} \frac{mc^2}{h_0} \frac{\zeta}{\mu_0^{*2}} \frac{c_p^0}{c_v^0} \right] \bar{T} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

$$-i\frac{\lambda_0^*}{\mu_0^*} \frac{\Gamma^2}{Re} \frac{mc^2}{h_0} \bar{n} + \left[-\Gamma - \frac{\Gamma^3}{\mu_0^{*2}} \left(\lambda_1^* + \frac{2}{3}\lambda_2^* \right) \frac{\zeta}{Re^2} \frac{mc^2}{h_0} \frac{c_p^0}{c_v^0} \right] \bar{v}_{\parallel} + \left[\frac{c_v^0}{k} + i\frac{\lambda_0^* e_0}{\mu_0^* h_0} \frac{\zeta}{Re} \Gamma^2 \right] \bar{T} = 0, \quad (\text{E.55})$$

que são as equações que queríamos determinar. E onde consideramos a seguinte notação:

$$\eta_0^* = \frac{c\sigma}{kT_0}\eta_0, \quad \lambda_0^* = \frac{\sigma}{ck}\lambda_0, \quad \mu_0^* = \frac{c\sigma}{kT_0}\mu_0, \quad \eta_1^* = \frac{n_0\sigma^2}{k}\eta_1, \quad \eta_2^* = \frac{n_0\sigma}{k}\eta_2, \quad (\text{E.56})$$

$$\lambda_1^* = \frac{n_0\sigma^2}{kT_0}\lambda_1, \quad \lambda_2^* = \frac{n_0\sigma}{kT_0}\lambda_2, \quad \mu_1^* = \frac{n_0\sigma^2}{k}\mu_1, \quad \mu_2^* = n_0\sigma\mu_2, \quad (\text{E.57})$$

sendo que as expressões para todos esses coeficientes estão definidos na seção (2.7) do capítulo 2.

E.2 O Sistema de Equações para Quatorze Campos

Para encontrarmos o sistema de equações referente à propagação de ondas, considerando quatorze campos, devemos inicialmente substituir as soluções (4.54), (4.55) e (4.56) nas equações de campo linearizadas (4.57) até (4.62). A seguir deveremos efetuar todas as derivadas, lembrando que o movimento está sendo considerado somente ao longo da direção do eixo x . Assim, para a equação (4.57), que já foi obtida na seção anterior e dada por (E.10), temos:

$$\omega\bar{n} - n_0\kappa\bar{v} = 0. \quad (\text{E.58})$$

onde

$$\nabla^i U_i = \frac{\partial U_x}{\partial x} = i\kappa\bar{v} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.59})$$

Neste caso somente vamos considerar a componente longitudinal para a propagação destas ondas.

Para a equação (4.58), podemos utilizar a expressão para DU^μ dada por (E.15) com $i = x$. Para o gradiente da pressão $\nabla^\mu = (0, \nabla^i p)$ temos:

$$\nabla^i p = -\frac{\partial nkT}{\partial x} = -i\kappa(kT_0\bar{n} + n_0k\bar{T}) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.60})$$

E para os gradientes $\nabla^\mu \varpi = (0, \nabla^i \varpi)$ e $\nabla_\nu p^{<\mu\nu>} = (0, \nabla_i p^{<ij>})$, temos:

$$\nabla^i \varpi = -\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -i\kappa\bar{P} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (\text{E.61})$$

$$\nabla_i p^{<ij>} = \frac{\partial p^{<xx>}}{\partial x} = i\kappa\bar{R} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.62})$$

Para a derivada material do fluxo de calor temos:

$$Dq^i = \frac{\partial q^x}{\partial t} = -i\omega\bar{Q} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.63})$$

Reunindo os resultados acima obtemos a seguinte expressão para a equação de campo (4.58):

$$-\kappa kT_0\bar{n} + \frac{n_0 h_0}{c^2} \omega \bar{v} - \kappa n_0 k\bar{T} - \kappa\bar{P} + \frac{1}{c^2} \omega \bar{Q} - \kappa\bar{R} = 0. \quad (\text{E.64})$$

Para a equação (4.59) obtemos a seguinte expressão:

$$-n_0 kT_0 \kappa \bar{v} + n_0 c_v^0 \omega \bar{T} - \kappa \bar{Q} = 0, \quad (\text{E.65})$$

onde utilizamos (E.11) e (E.15) e ainda o seguinte gradiente:

$$\nabla_i q^i = \frac{\partial q^x}{\partial x} = i\kappa\bar{Q} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.66})$$

Analogamente, obtemos para as equações (4.60) e (4.61) as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(m^2 + C_1)\omega\bar{n} - \frac{n_0}{6}(m^2 + 5C_1)\kappa\bar{v} - \frac{\zeta}{2T_0}n_0\omega C_1'\bar{T} + \frac{1}{2}C_2\omega\bar{P} \\ & + \frac{5}{c^2}C_3\kappa\bar{Q} + i\frac{3}{c^2}B_1\bar{P} = 0, \quad (\text{E.67}) \\ & -\frac{c^4}{6}\kappa(m^2 - C_1)\bar{n} - \frac{c^4}{6}\kappa\frac{\zeta}{T_0}n_0C_1'\bar{T} - \frac{c^2}{6}n_0(m^2 + 5C_1)\omega\bar{v} + \frac{c^4}{6}\kappa C_2\bar{P} \end{aligned}$$

$$+(5C_3\omega + iB_2)\bar{Q} + c^2\kappa C_4\bar{R} = 0. \quad (\text{E.68})$$

Na equação (4.62) vamos precisar dos resultados abaixo:

$$Dp^{<ij>} = -i\omega\bar{R} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (\text{E.69})$$

$$\nabla^{<iq^j>} = -\left(\frac{\partial q^x}{\partial x} - \frac{1}{3}\frac{\partial q^x}{\partial x}\right) = -\frac{2}{3}i\kappa\bar{Q} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (\text{E.70})$$

$$\nabla^{<iU^j>} = -\left(\frac{\partial U^x}{\partial x} - \frac{1}{3}\frac{\partial U^x}{\partial x}\right) = -\frac{2}{3}i\kappa\bar{v} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (\text{E.71})$$

Desta forma, considerando as expressões acima, a (4.62) fica:

$$\frac{2}{9}c^2n_0\kappa(m^2 - C_1)\bar{v} + \frac{4}{3}C_3\kappa\bar{Q} + (C_4\omega - iB_3)\bar{R} = 0. \quad (\text{E.72})$$

Bibliografia

- [1] Jüttner, F., *Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie*. Ann. Physik und Chemie, **34**, 856 (1911).
- [2] Jüttner, F., *Die Relativistische Quantentheorie des Idealen Gases*. Zeitschr. Phys., **47**, 546 (1928).
- [3] Lichnerowitz, A., Marrot, R., *Propriétés Statistiques des Ensembles de Particules en Relativité Restreinte*. C.r. hebdom. Séanc. Acad. Sci., Paris **210**, 759-761 (1940).
- [4] Cercignani, C., Kremer G.M., *On Relativistic Collisional Invariants*. J. Stat. Phys. **96**, 439-445 (1999).
- [5] Marrot, R., *Sur L'Equation Intégrodifférentielle de Boltzmann*. J. Math. Pures et Appl., **25**, 93 (1946).
- [6] Tauber, G. E., Weinberg J. W., *Internal State of a Graviting Gas*. Phys. Rev., **122**, 1342 (1961).
- [7] Weinberg, S., *Entropy Generation and the Survival of Proto-Galaxies in an Expanding Universe*. Ap. J., **168**, 175 (1971).
- [8] Israel, W., *Relativistic Kinetic Theory of a Simple Gas*. J. Math. Phys., **4**, 1163 (1963).
- [9] Kelly D. C., *The Kinetic Theory of Relativistic Gas*. Miami University, Oxford, unpublished report, (1963).
- [10] Chernikov N. A., *Microscopic Foundation of Relativistic Hydrodynamics*. Acta Physica Polonica, **27**, 465 (1964).
- [11] de Groot, S. R., van Leeuwen, W. A., van Weert, Ch. G., *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [12] Stewart, J. M., *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory*. Lecture Notes in Physics, **10**, Springer-Verlanger, Heidelberg (1971).

- [13] Kremer, G. M., *Uma Introdução à Teoria Cinética Relativística*. Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, (1998).
- [14] Ikenberry, E., Truesdel, C., *On the Pressure and the Flux of Energy in a Gas According to Maxwell's Kinetic Theory I*. J. Ration. Mech. Anal., **5** 1-54 (1956).
- [15] Reinecke, S., Kremer, G.M., *Burnett's Equations from a $(13+9N)$ -Field Theory*. Continuum Mech. Thermodyn., **8**, 1-10, (1996).
- [16] Eckart, C., *The Thermodynamics of Irreversible Processes, III. Relativistic Theory of the Simple Fluid*. Physical Review, **58**, 919-924 (1940).
- [17] Møller, C., *The Theory of Relativity*. The International Series of Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1952.
- [18] Kremer, G.M., Müller, I.; *Linearized Burnett Equation for Dynamic Pressure of a Relativistic Gas*. Continuum Mech. Thermodyn., **10**, 49-53, (1988).
- [19] Butkov, E., *Física Matemática*. Ed. Guanabara Dois S.A., 1978, (Cap. 13).
- [20] Kreyszig, E., *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1984, Vol.1, (Cap.1).
- [21] Kremer, G. M., Müller I., *Dynamic Pressure in Relativistic Thermodynamics*. Ann. Inst. Henri Poincaré, **67** 111-121 (1997).
- [22] Wang Chang, C.S., Uhlenbeck G.E; *On the Transport Phenomena in Monoatomic Gases. Studies in Statistical Mechanics*. (Ed. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck). Vol. V, pp. 1-16, Amsterdam, North-Holland (1967).
- [23] Foch Jr, J.D., Ford, G.W.; *The Dispersion of Sound in Monoatomic Gases. Studies in Statistical Mechanics*. (Ed. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck). Vol. V, pp. 1-16, Amsterdam, North-Holland (1967).
- [24] Anderson, J.L., Witting, H.R, *A Relativistic Relaxation-Time Model for the Boltzmann Equation*. Physica, **74A** 466-488 (1974).
- [25] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., Krook, M., *A Model for Collision Processes in Charged and Neutral One-Component Systems*. Phys. Rev. **94** 511-525 (1954).
- [26] Anderson, J.L., Payne Jr, A.C., *The Relativistic Burnett Equations and Sound Propagation*, **85A** 261-286 (1975).

- [27] Marle, C., *Modèle Cinétique pour L'Etablissement des Lois de la Conduction de la Chaleur et de la Viscosité en Théorie de la Relativité*. C. R. Acad. Sc. Paris, **260**, 6539-6541 (1965).
- [28] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London, (1980).
- [29] Burnett, D., *The Distribution of Molecular Velocities and the Mean Motion in a Non-Uniform Gas*, Proc. London Math. Soc. **40**, 382-435 (1935).
- [30] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York (1968).
- [31] Chapman, S., *The Kinetic Theory of Simple and Composite Gases: Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion*. Proc. Roy. Soc. Lond. **A93**, 1-20 (1916).
- [32] Greenspan, M., *Propagation of Sound in Five Monoatomic Gases*. The Journal of the Acoustical Society of America, **28**, 644-648 (1956).
- [33] Boillat, G., Ruggeri, T., *Maximum Wave Velocity in the Moments System of a Relativistic Gas*. Continuum Mech. Thermodyn. **11**, 107-111 (1999).
- [34] Guichelaar, J., van Leeuwen, W. A., de Groot, S. R., *On Relativistic Kinetic Gas Theory, VII. The Propagation and Absorption of Sound*. Physica, **59**, 97-108 (1972).
- [35] Kranyš, M., *Relativistic of Waves in Dissipative Media, Modern Developments in Thermodynamics*. Ed. John Wiley & Sons, Israel, 259-278 (1974).
- [36] Kranyš, M., *Phase and Signal Velocities of Waves in Dissipative Media. Special Relativistic Theory*. Arch. Ration. Mech. Anal., **48**, 274-301 (1972).
- [37] Boillat, G., *Wave Velocities in Relativistic Extended Thermodynamics*. Proceedings of the Symposium on Kinetic Theory and Extended Thermodynamics. Bologna, May 18-20th, (1987). Edited by I. Müller and T. Ruggeri, 55-60, Bologna: Pitagora Editrice (1987).
- [38] Seccia, L., Strumia, A., *Wave Propagation in Relativistic Extended Thermodynamics*. Continuum Mech. Thermodyn. **2**, 151-161 (1990).
- [39] Chernikov, N. A., *The Relativistic Gas in the Gravitational Field*. Acta Phys. Pol., **23**, 629 (1963).
- [40] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. University of Chicago Press, Chicago, (1939).
- [41] Synge, J. L., *The Relativistic Gas*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1957).

- [42] Enskog, D., *Kinetische Theorie der Vorgänge in Mässig Verdünnten Gasen*. Thesis, Uppsala, (1917).
- [43] Choquet-Bruhat, Y., *Theorem of Uniqueness and Local Stability for Liouville-Einstein Equations*. J. Math. Phys., **11**, 3238 (1970).