

SANDRA RAUZIS DE OLIVEIRA

**SOLUÇÕES POLINOMIAIS DAS EQUAÇÕES
DE CAMPO PARA CORDAS CÔSMICAS
ACOPLADAS ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Curitiba
1991



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA


ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DA SRTa. SANDRA RAUZIS DE OLIVEIRA

TÍTULO DA TESE: "Soluções Polinomiais das Equações de Campo de Cor-
das Cômicas Acopladas às Equações de Einstein"


Em sessão pública de defesa de tese, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um seminário sobre o assunto da te-
se e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 22 de outubro de 1991.

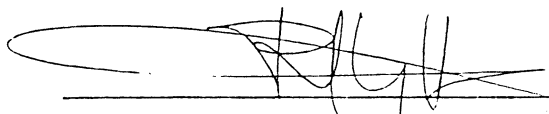
Banca Examinadora:



Prof. EDSON A. B. STÉDILE
Presidente/Orientador - UFPR



Prof. PATRÍCIO A. LETELIER SOTOMAYOR
Instituto de Matemática/UNICAMP



Prof. RICARDO LUIZ VIANA
Depto. de Física/UFPR

**Dedico este esforço
aos meus pais.**

Agradeço

Ao meu orientador professor Edson Stédile, pelo auxílio.

Ao professor Sergio Luiz Meister Berleze, pela indispensável ajuda com os problemas de computação numérica e uso do DEC-10.

A Fabio David A. A. Reis, pela inestimável ajuda.

Ao professor Gilberto M. Kremer, pelos conselhos.

Aos professores Ricardo L. Viana e Germano B. Afonso pelo incentivo.

Aos meus amigos, Denilton, Marcos, Mauro, Luis Augusto, Edival, Chico, Luis Fernando e Arandi pelo apoio, incentivo, sugestões e companhia nos momentos de lazer.

Aos meus amigos Gloria, Giselle e Sheldon, por sua paciência ao me ouvirem.

À minha amiga Cláudia, por tudo que me ensinou sobre a vida.

À secretária Joselanda pela competência e dedicação a nós todos.

À UFPr pelos recursos técnicos.

À Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Consideramos aqui uma corda cósmica descrita por uma lagrangeana de interação, envolvendo um campo vetorial de calibre do grupo $U(1)$, minimalmente acoplado a um campo escalar. Também foi adicionado um termo de interação gravitacional, considerado na forma escalar. Obtivemos as equações de campo decorrentes desta lagrangeana e efetuamos um acoplamento destas com as equações de Einstein. A seguir resolvemos numericamente o sistema de equações e obtivemos expansões polinomiais para os campos. Tais expansões permitiram determinar o termo de segunda ordem, para o déficit angular causado pela corda.

ABSTRACT

Here we consider a cosmic string described by an interaction Lagrangian and including a $U(1)$ gauge vector field, minimally coupled to a scalar field. This Lagrangian includes also a gravitation interacting scalar term. The field equations have been obtained from the above Lagrangian, and we coupled these equations to Einstein's equations. Such a system of equations has been solved numerically and we derived polynomial expansions for the fields which describe the string. With the above solutions we have determined the second order corrections to the angular deficit, produced by the string.

SUMÁRIO

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
Introdução	1
Capítulo 1 – Equações de campo para uma métrica cilíndrica	8
Capítulo 2 – Equações de campo para uma métrica de Killing	13
Capítulo 3 – Equações de campo acopladas às equações de Einstein	18
Capítulo 4 – Determinações numéricas	25
4.1 – Considerações iniciais	25
4.2 – Expressões polinomiais	26
4.3 – Verificações	30
4.4 – Cálculo do déficit angular	31
Conclusões	32
Apêndice A – Obtenção das equações de campo para uma métrica cilíndrica	33
Apêndice B – Obtenção das equações de campo para uma métrica de Killing	39
Apêndice C – Obtenção das equações de campo acopladas às equações de Einstein ..	43
Referências	55

Introdução

O modelo que originou as cordas cósmicas evoluiu a partir da forma sugerida por Dirac¹ na década de 1.940, para o caso de monopolos magnéticos em teorias abelianas. A idéia consistia em remover o monopolo puntual e em seu lugar considerar uma linha infinita de cargas, onde ao final da mesma haveriam tais monopolos. Ao longo dessa linha o potencial seria singular e "fluiriam linhas de campo". Essas cordas de Dirac ainda não tinham realidade física, eram apenas abstrações que tornavam possível a criação de um modelo. Apenas na década de 1.970 é que Nambu² considerou tais cordas como um possível modelo aplicável à realidade. Modernamente cordas cósmicas também são consideradas como um tipo de "defeito topológico"³, o que seria devido ao arrefecimento do universo em seus primeiros minutos de existência, gerado por um complexo mecanismo de quebra de simetria.

Surgiu também a teoria das supercordas, ela encara partículas como cordas. Desde que cordas tem uma extensão, elas podem vibrar como a corda de um violino. Os modos de vibração são determinados pela tensão na corda, cada modo correspondendo a uma partícula. A frequência do modo determina a energia da partícula e conseqüentemente sua massa. As partículas elementares conhecidas seriam encaradas, como diferentes modos de vibração de uma corda. A teoria de supercordas combina a teoria de cordas com uma estrutura matemática chamada supersimetria.

À medida que o universo se expandia e esfriava, após o big-bang, o vácuo primordial passaria por uma rápida sucessão de mudanças conhecidas como "transições de fase". Este é um fenômeno análogo à mudança de estado físico da água, ou a cristalização de substâncias com diferentes orientações nos eixos cristalográficos (Fig. 1). Similar também

aos vórtices quantizados do hélio líquido, ou às linhas de vórtices do campo magnético em supercondutores. Esses defeitos podem ser de várias formas: cordas cósmicas, monopolos e paredes de domínio de vácuo, além de defeitos híbridos como paredes contornadas por cordas, monopolos conectados por cordas e outros³. Cordas também são usadas nos modelos a quarks para hádrons. Os hádrons seriam assim compostos de quarks ligados por cordas duais, ou abertas, tendo quarks em suas pontas². Pela visão de Nielsen e Olesen⁴ os quarks agem como uma fonte de carga magnética, e neste caso uma corda seria uma linha de vórtice ôco no campo de Higgs².

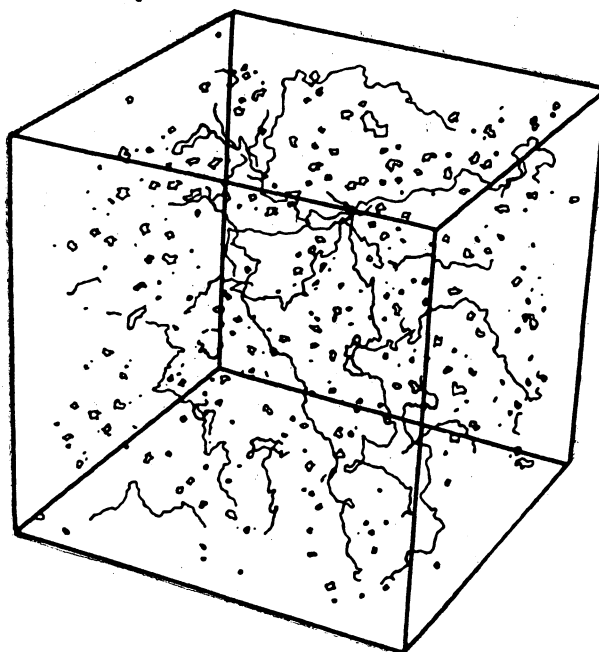


Fig. 1

Cordas cósmicas seriam então finos "tubos de vácuo", (ou falso vácuo)⁵, simétricos, com alta energia, deslocando-se a uma velocidade próxima à da luz. Podem ser retas (daí infinitas) ou em forma de anéis. Suas características físicas são determinadas pela energia do vácuo aprisionado. Estas cordas podem ter aprisionado o vácuo inicial em diferentes fases^{6,7,8,9}. (Vide Tabela a seguir)

A tensão na corda seria numericamente igual à sua densidade linear de massa μ , multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz. Para cordas em forma de anéis esta enorme tensão as faria colapsar rapidamente, e este colapso seria amortecido por mecanismos de dissipação, tais como: fricção devida à interação das cordas com partículas, desvio cosmológico para o vermelho das oscilações, resultado da expansão do universo (efeito análogo ao desvio para o vermelho da radiação cósmica de fundo), mudança de configuração por interseção de cordas, formando anéis fechados e diminuindo seu comprimento e, finalmente, emitindo radiação gravitacional⁹.

	Cordas eletrofracas	Cordas da grande unificação
Origem (s)	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-36}$
Energia aprisionada (GeV)	$\sim 10^2$	$\sim 10^{15}$
Tensão (g/cm^2)	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{51}$
Densidade linear de massa (g/cm)	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{22}$
Diâmetro (cm)	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-28}$

Anéis de formato irregular oscilam e perdem sua energia por radiação gravitacional. De tempos em tempos eles podem auto-interagir quebrando-se em pedaços menores. Se tais auto-interações são frequentes, estes anéis decaem rapidamente em partículas relativísticas. A dinâmica dos anéis ainda não foi bem estudada e a frequência das auto-interações é difícil de ser estimada⁹.

Cordas cósmicas podem fornecer uma descrição para a estrutura do universo em larga escala. A observação de quasares duplos, por exemplo, poderia ser resultado da existência de uma corda (C) entre a Terra (T) e um quasar (Q) (Fig. 2), conhecido como efeito lente gravitacional, o que proporciona duas imagens I_1 e I_2 , vistas da Terra.

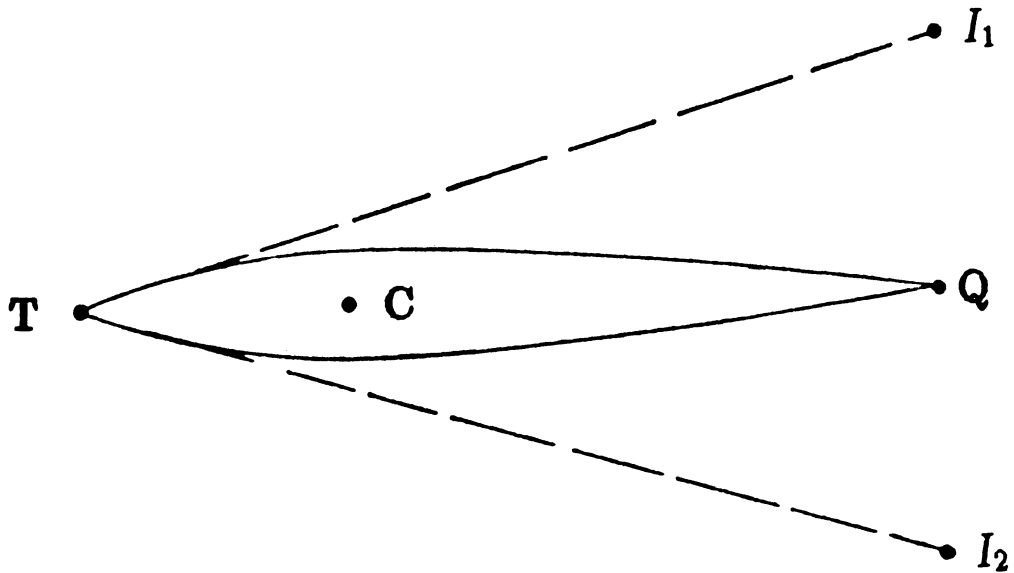


Fig. 2

Do ponto de vista geométrico a corda age como se cortasse parte do espaço-tempo, produzindo uma superfície localmente cônica. Assim um observador não poderia diferenciar localmente um universo cônico de um espaço-tempo plano, pois ambos têm curvatura gaussiana nula. Na geometria euclidiana a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é igual a π . Para circunferências em torno de uma corda cósmica esta razão é um pouco menor (a diferença aparece na 4ª casa decimal). O espaço-tempo em torno da corda curva-se, e a forma final deste pode ser visualizada como sendo a superfície de um cone. Tudo se comporta como se o espaço euclidiano perdesse uma cunha e fosse dobrado até que suas bordas resultantes se unissem (Fig. 3). O ângulo desta cunha é chamado de "déficit angular" (a própria separação angular entre as imagens), e vale aproximadamente 1 segundo de arco para cordas do período da grande unificação, e $2 \cdot 10^{-25}$ segundos de arco para cordas eletrofracas⁷. Este modelo se aplica apenas a cordas retas, pois anéis obedecem a modelos mais complexos.

Uma corda cósmica reta e estacionária produz somente efeitos globais,

então fótons emitidos por um corpo atrás da corda podem seguir dois caminhos possíveis até nossos telescópios. Tal corpo parece então ter sua imagem duplicada. Este fenômeno tem semelhança ao efeito Aharonov-Bohm, da mecânica quântica, e alguns trabalhos já analisaram essa possibilidade¹⁰.

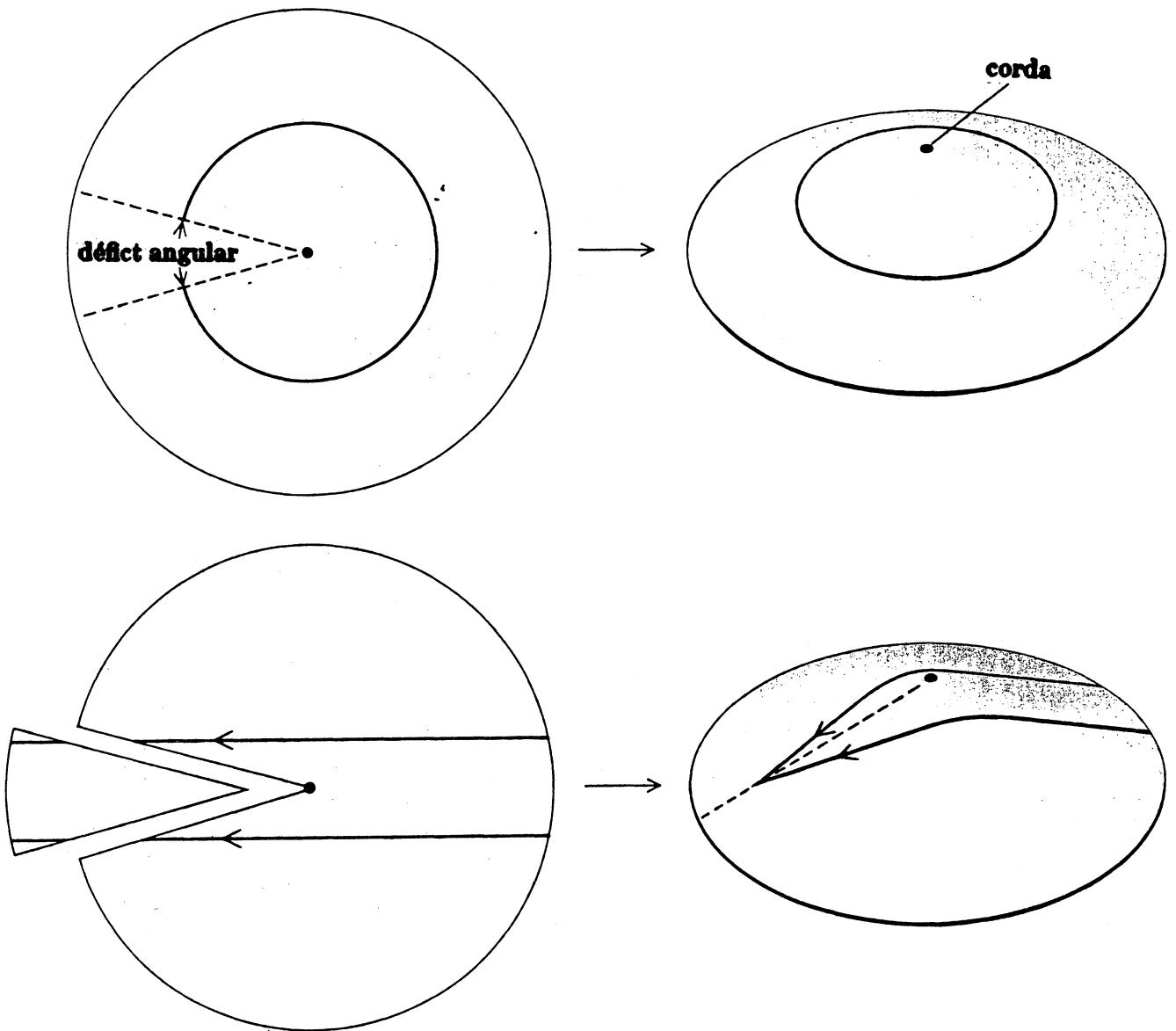


Fig. 3

O modelo com cordas cósmicas pode dar uma boa descrição para a forma-

ção de galáxias. Em 1985 Albrecht e Turok¹¹ desenvolveram um programa para simular a evolução destas cordas. Mais tarde Turok usou a simulação para calcular o número e a distribuição dos aglomerados de galáxias, previstos pela teoria de cordas. Seus resultados concordaram com os coletados de observações. Como galáxias tendem a formar aglomerados, grandes anéis podem ser a causa da nucleação de galáxias, o que explicaria a distribuição destas no espaço. Os anéis menores podem colapsar e produzir buracos negros. Apesar dessa concordância, a teoria não explica ainda satisfatoriamente a formação de galáxias.

Richard Gott¹² afirma que cordas em movimento produzem perturbações na radiação de fundo do universo. A radiação no rastro das cordas seria desviada para o vermelho, e no caminho das cordas para o azul. Isto criaria um aspecto único na radiação infravermelha observada. A falha em detectar qualquer perturbação indica que a densidade linear de massa μ de tais cordas deve ser menor que 10^{-5} . Medidas melhores e redução nas incertezas teóricas podem alcançar esse limite e trazer mais uma evidência da existência de cordas cósmicas¹³.

Há modelos teóricos que propõem que cordas cósmicas podem se comportar como supercondutores e conduzir grandes correntes elétricas. Porém, o acréscimo do campo eletromagnético aumentaria a interação destas com suas vizinhanças. Elas seriam mais facilmente observadas do que cordas não condutoras, pois a oscilação emitiria radiação gravitacional, e também intensa radiação eletromagnética.

Com sua alta densidade de energia armazenada, cordas cósmicas e outros defeitos topológicos podem ainda ser uma solução para a questão da "matéria escura"⁵.

Vilenkin⁷ considerou uma corda cósmica infinitamente longa e estática. Baseando-se em argumentos dimensionais, ele ignorou sua espessura e usou a aproximação de campo gravitacional fraco, negligenciando a auto-interação. Ele mostrou também que o espaço-tempo em torno da corda é semelhante ao de Minkowski, a menos de uma cunha

(Fig. 3). Neste caso o déficit angular $\Delta\varphi$ e a massa por unidade de comprimento μ estão relacionadas por

$$\Delta\varphi = 8\pi\mu$$

no sistema natural de unidades.

O modelo de aproximação com campo fraco que negligencia a espessura da corda é plenamente justificado, pois cordas de interesse astrofísico têm $\mu \simeq 10^{-6}$.

A aproximação feita por Vilenkin não é única. Podemos tratar cordas longas e retas sem negligenciar suas espessuras e sem a aproximação de campo fraco. Para um tratamento mais completo é necessário usar as equações de Einstein, acopladas aos campos que definem a corda. Um modelo com uma lagrangeana padrão é feito em [14] e [15] e com uma lagrangeana não padrão em [16]. Em [14] Garfinkle mostrou que um tratamento usando os campos escalares, invariantes por calibre e acoplados às equações de Einstein, resulta numa métrica que, a grandes distâncias da corda, é a mesma de Minkowski, a menos de uma cunha. Porém, aí não se verifica mais a igualdade $\Delta\varphi = 8\pi\mu$, e a quantidade $\Delta\varphi - 8\pi\mu$ não será mais nula, tendo um valor da ordem de μ^2 . Isto é obtido apenas numa aproximação de segunda ordem.

Neste trabalho consideramos os resultados de Garfinkle e Laguna [17]. Determinamos as equações de campo para uma corda cósmica descrita por uma lagrangeana com um campo vetorial de calibre do grupo $U(1)$, minimalmente acoplado a um campo escalar, onde foi adicionado um termo de interação gravitacional. A partir desta lagrangeana obtivemos as equações de campo e fizemos um acoplamento com as equações de Einstein. Isto resultou num sistema de equações não lineares de segunda ordem acopladas, que resolvemos numericamente. A partir dos dados numéricos obtivemos as formas polinomiais dos campos que determinam completamente as características da corda. Assim feito calculamos também o termo de segunda ordem para o déficit angular, produzido pela corda.

Capítulo 1. Equações de campo com métrica cilíndrica.

Cordas cósmicas são distribuições unidimensionais de energia, caracterizadas por uma grande densidade linear e um comprimento supostamente infinito. Tais cordas podem ser representadas por uma configuração cilíndrica e simétrica, através de uma auto-interação de um campo escalar com acoplamento minimal a um campo vetorial de calibre.

A distribuição de energia na corda ocasiona um acoplamento ao campo gravitacional, cujos efeitos ficam evidenciados através das equações de Einstein.

Neste modelo usamos uma densidade de lagrangeana que envolve um campo escalar complexo $\Phi = Re^{i\psi}$ (R e ψ reais) acoplado minimalmente a um campo vetorial de calibre A_a , do grupo $U(1)$, na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\nabla_a R \nabla^a R - \frac{R^2}{2}(\nabla_a \psi + qA_a)(\nabla^a \psi + qA^a) - \frac{\lambda}{8}(R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} \quad (1.1)$$

onde

$$F_{ab} \equiv \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \quad (1.2)$$

sendo q a carga do campo vetorial, λ uma constante de acoplamento, η^2 a intensidade do campo gravitacional e η a escala de energia de uma quebra de simetria.

As massas associadas aos campos vetorial e escalar são $m_A^2 = q^2\eta^2$ e $m_\Phi^2 = \lambda\eta^2$, respectivamente. O termo $V(|\Phi|) = \lambda(\Phi^2 - \eta^2)^2$ é um potencial efetivo com simetria axial. A quebra de simetria é introduzida neste potencial através de um deslocamento $\Phi^2 \rightarrow \Phi^2 - \eta^2$. (Fig. 1.1)

Consideramos que existe uma barreira no potencial, entre o falso vácuo $|\Phi| = 0$ e o vácuo global $|\Phi| = \eta$. A relação $\alpha = \frac{m_A}{m_\Phi} = \frac{q}{\sqrt{\lambda}}$ dá a medida entre o raio do

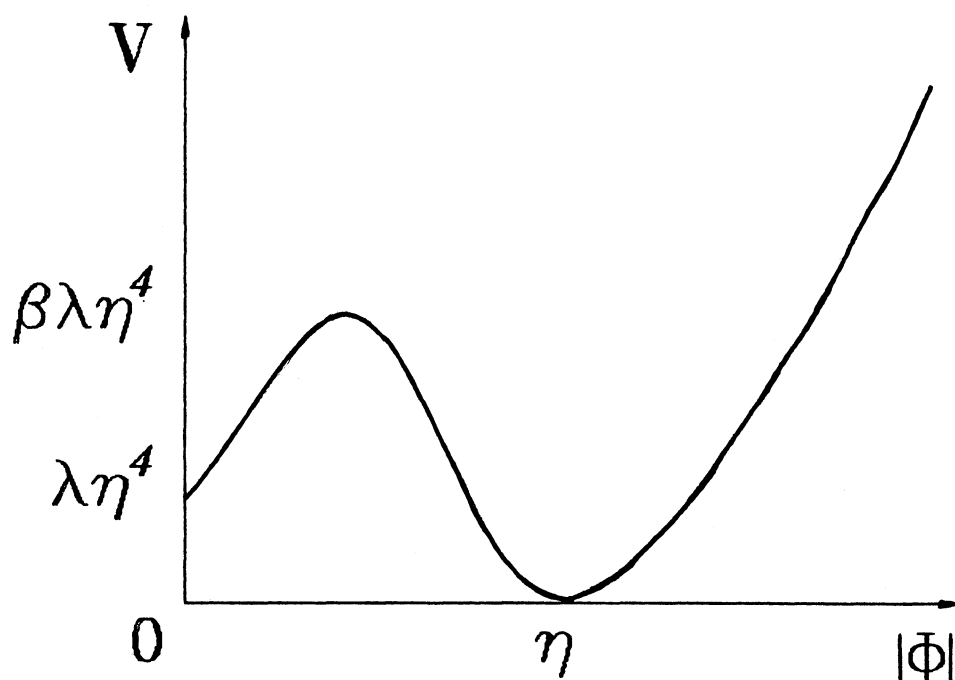


Fig. 1.1

núcleo de falso vácuo e o raio do tubo de campo magnético da corda. Segundo o modelo de Ginsburg-Landau para supercondutores, cordas com $\alpha > 1$ têm vórtice atrativo e com $\alpha < 1$ têm vórtice repulsivo.

Admitimos que para η suficientemente pequeno (valor que minimiza o potencial efetivo) existem soluções para as equações de campo de uma corda isolada, decorrentes da lagrangeana (1.1).

As equações de movimento são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange

$$\nabla^c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.3)$$

onde φ representa cada um dos três campos R , ψ , e A^j .

Para $\varphi = R$ o primeiro termo de (1.3) é (Vide apêndice A1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c R)} = -\nabla_c R \quad (1.4)$$

e o segundo termo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = -R(\nabla_a \psi + qA_a)(\nabla^a \psi + qA^a) - \frac{\lambda}{2}(R^2 - \eta^2)R \quad (1.5)$$

Assim sendo, com (1.4) e (1.5) a equação (1.3) fica

$$\nabla^c \nabla_c R - R\{(\nabla_a \psi + qA_a)(\nabla^a \psi + qA^a) - \frac{\lambda}{2}(R^2 - \eta^2)\} = 0 \quad (1.6)$$

Para $\varphi = \psi$, o primeiro termo de (1.3) fica (Vide apêndice A2)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c \psi)} = -R^2(\nabla_c \psi + qA_c) \quad (1.7)$$

e o segundo termo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad (1.8)$$

Desta forma, com (1.7) e (1.8) a equação (1.3) torna-se

$$\nabla^c [R^2(\nabla_c \psi + qA_c)] = 0 \quad (1.9)$$

Para $\varphi = \mathbf{A}^j$ o segundo termo de (1.3) é (Vide apêndice A3)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^j} = -qR^2(\nabla_j \psi + qA_j) \quad (1.10)$$

e o primeiro termo (Vide apêndice A4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c A^j)} = -F_{cj} \quad (1.11)$$

Então , com (1.10) e (1.11), a equação (1.3) passa a ser

$$\nabla^c F_{cj} - qR^2(\nabla_j \psi + qA_j) = 0 \quad (1.12)$$

Para obtermos as equações dos campos em uma aproximação cilíndrica usaremos a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$$

e a simetria cilíndrica ficará assegurada se considerarmos

$$R = R(\rho) \tag{1.13}$$

$$\psi = \phi \tag{1.14}$$

$$A_a = \frac{1}{q}[P(\rho) - 1]\nabla_a \phi \tag{1.15}$$

sendo (1.15) uma transformação de calibre do potencial A_a , que elimina A_a e A^a de (1.1), permitindo escrever as equações de movimento com termos em P .

Fazendo a substituição de (1.13), (1.14) e (1.15) nas equações (1.6), (1.9) e (1.12) temos, respectivamente:

para (1.6), com $\varphi = R$

$$\nabla^a \nabla_a R - R\{\nabla_a \phi \nabla^a \phi P^2 + \frac{\lambda}{2}(R^2 - \eta^2)\} = 0 \tag{1.16}$$

para (1.9), com $\varphi = \psi$

$$\nabla^c (R^2 P \nabla_c \phi) = 0 \tag{1.17}$$

e para (1.12), com $\varphi = \mathbf{A}^j$

$$\nabla^a F_{ab} - qR^2 P \nabla_b \phi = 0 \tag{1.18}$$

As equações de movimento são calculadas a partir de (1.16) e (1.18), pois a (1.17) é redundante, não fornecendo informação adicional (Vide apêndice A5). Teremos assim:

de (1.16), para $\varphi = R$, (Vide apêndice A6a)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{RP^2}{\rho^2} - \frac{R\lambda^2}{2}(R^2 - \eta^2) = 0 \tag{1.19}$$

e de (1.18), para $\varphi = \mathbf{A}^j$, (Vide apêndice A6b)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} = q^2 R^2 P \tag{1.20}$$

As equações (1.19) e (1.20) podem ser reparametrizadas se usarmos

$$\alpha \equiv \frac{e}{\sqrt{\lambda}} \quad r \equiv \rho\eta\sqrt{\lambda} \quad X \equiv \frac{R}{\eta} \quad (1.21)$$

o que permite escrever (1.19) e (1.20) nas formas

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} - \frac{XP^2}{r^2} - \frac{X}{2}(X^2 - 1) = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} - X^2 P \alpha^2 = 0 \quad (1.23)$$

respectivamente.

As equações (1.22) e (1.23) são as equações para os campos X e P com uma métrica cilíndrica, válidas para o caso plano. Trata-se das equações de Nielsen-Olesen [4].

Capítulo 2. Equações de campo com métrica de Killing.

No espaço-tempo curvo consideramos que os campos escalares e de calibre são estáticos, e que o tensor energia-momento da corda tem simetria cilíndrica. A métrica considerada é estática e também tem simetria cilíndrica. Para obter as equações dos campos X e P com uma aproximação de espaço curvo, usaremos a métrica de Killing.

Como foi feito no capítulo 1, usaremos a Lagrangeana (1.1) considerando a forma (1.2). Partindo das equações de Euler-Lagrange (1.3) as equações (1.16) para $\varphi = R$ e (1.18) para $\varphi = A^j$ tornam-se

$$\nabla^a \nabla_a R - R \left\{ \nabla_a \phi \nabla^a \phi P^2 + \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) \right\} = 0$$

$$\nabla^a F_{ab} - q R^2 P \nabla_a \phi = 0$$

respectivamente. Estas equações serão agora resolvidas considerando a métrica

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\phi^2 + d\rho^2 \quad (2.1)$$

onde A, B, C são funções apenas de ρ . As coordenadas t e z são escolhidas tais que as funções A e B satisfaçam às condições de contorno $A(0)=B(0)=0$ e também $\lim_{\rho \rightarrow 0} e^C = \rho^2$, para obtermos a métrica de Minkowski ao longo do eixo z .

Tomemos a base ortogonal, definida pelos quatro versores

$$\begin{aligned} \hat{t}^a &\equiv e^{-\frac{A}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \\ \hat{z}^a &\equiv e^{-\frac{B}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a \\ \hat{\phi}^a &\equiv e^{-\frac{C}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\hat{\rho}^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^a$$

onde $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$ é o campo de Killing tipo-tempo, $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a$ é o campo de Killing tipo-espaço com órbita fechada e $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a$ é o campo de Killing tipo-espaço ortogonal aos outros. O campo de Killing com órbita fechada é tal que φ varia de 0 a 2π ao longo de uma integral de linha, com $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ sendo pontos coincidentes. Os outros dois campos têm normas +1 ou -1 sobre os eixos.

Para explicitar a dependência em $t, z, \phi, e \rho$ em (2.2) é necessário saber como operam as quantidades: ∇^a , ∇_a , ∇_b e $\nabla^a \nabla_a$. (Vide apêndice B1 e B2), são estas

$$\nabla^a \phi = \frac{1}{h^2} \hat{\phi}^a = e^{-\frac{c}{2}} \hat{\phi}^a \quad (2.3a)$$

$$\nabla_a \phi = \frac{1}{h_2} \hat{\phi}_a = e^{-\frac{c}{2}} \hat{\phi}_a \quad (2.3b)$$

$$\nabla^a R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \hat{\rho}^a \quad (2.4a)$$

$$\nabla_a R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \hat{\rho}_a \quad (2.4b)$$

$$\nabla^a \nabla_a R = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (A + B + C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2} \right\} \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3), (2.4) e (2.5) em (1.16) para $\varphi = R$ temos (Vide apêndice B3)

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A + B + C) \frac{dR}{d\rho} = R \left\{ \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) + e^{-C} P^2 \right\} \quad (2.6)$$

e de (1.18) para $\varphi = A^j$ obtemos (Vide apêndice B4)

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A + B + C) \frac{dP}{d\rho} = q^2 R^2 P \quad (2.7)$$

As equações (2.6) e (2.7) são as equações de movimento para a corda com a métrica (2.1), para os campos R e P respectivamente.

A seguir vamos determinar o tensor energia-momento, com componentes escritas na base (2.2). Em termos da lagrangeana (1.1) podemos escrever

$$T_{ab} = -\nabla_a R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b R)} - \nabla_a \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b \phi)} - \nabla_a A^c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b A^c)} + \mathcal{L} g_{ab} \quad (2.8)$$

e considerando (1.1), onde substituímos (1.14) para A_a , teremos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \nabla_a R \nabla^a R - \frac{1}{2} R^2 P^2 \nabla_a \phi \nabla^a \phi - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \quad (2.9)$$

Usando a forma (1.2) para F_{ab} , o termo $F_{ab} F^{ab}$ de (2.9) será

$$F_{ab} F^{ab} = \nabla_a A_b \nabla^a A^b - \nabla_a A_b \nabla^b A^a - \nabla_b A_a \nabla^a A^b + \nabla_b A_a \nabla^b A^a$$

o que permite escrever para (2.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \nabla_a R \nabla^a R - \frac{1}{2} R^2 P^2 \nabla_a \phi \nabla^a \phi - \\ & \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4} (\nabla_a A_b \nabla^a A^b - \nabla_a A_b \nabla^b A^a - \nabla_b A_a \nabla^a A^b + \nabla_b A_a \nabla^b A^a) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Procederemos agora ao cálculo das derivadas parciais requeridas por (2.8), usando a forma expandida de \mathcal{L} , dada por (2.10). Temos assim

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b \phi)} = -\frac{1}{2} R^2 P^2 \nabla_b \phi \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b R)} = -\frac{1}{2} \nabla_b R \quad (2.12)$$

e ainda (Vide apêndice B5)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^b A^c)} = -\frac{1}{2} F_{bc} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.8) obtemos

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_a R \nabla_b R + \frac{1}{2} R^2 P^2 \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{1}{2} \nabla_a A^c F_{bc} + \mathcal{L} g_{ab} \quad (2.14)$$

Considerando que (Vide apêndice B6)

$$\nabla_a A^c F_{bc} = \frac{1}{2} F_a^c F_{bc} \quad (2.15)$$

e substituindo a expressão (2.10) para \mathcal{L} e (2.15) em (2.14) teremos

$$\begin{aligned} T_{ab} = & \nabla_a R \nabla_b R + R^2 P^2 \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{1}{2} F_a^c F_{bc} + \\ & g_{ab} \left\{ -\frac{1}{2} \nabla^d R \nabla_d R - \frac{1}{2} \nabla_d \phi \nabla^d \phi - \frac{1}{4} F^{dm} F_{dm} - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

As componentes não nulas de T_{ab} são

$$\begin{aligned} T_{00} = & e^A \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 + \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\} \\ T_{11} = & -e^B \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 + \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\} \\ T_{22} = & e^C \left\{ -\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\} \quad (2.17) \\ T_{33} = & \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \end{aligned}$$

Definindo

$$\sigma = -P_z = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 + \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\}$$

$$P_\phi = \left\{ - \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\} \quad (2.18)$$

$$P_\rho = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - \frac{e^{-C}}{2} R^2 P^2 + \frac{e^{-C}}{2q^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} (R^2 - \eta^2)^2 \right\}$$

podemos escrever (2.17) como

$$\begin{aligned} T_{00} &= \sigma e^A \\ T_{11} &= -\sigma e^B \\ T_{22} &= P_\phi e^C \\ T_{33} &= P_\rho \end{aligned} \quad (2.19)$$

e assim T_{ab} pode ser expresso na forma diagonalizada

$$T_{ab} = \sigma \hat{t}_a \hat{t}_b + P_z \hat{z}_a \hat{z}_b + P_\phi \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b + P_\rho \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b \quad (2.20)$$

na base dos versores de Killing.

Capítulo 3. Equações de campos acopladas às equações de Einstein.

Para determinarmos os efeitos gravitacionais de uma corda não é suficiente considerarmos o correspondente tensor energia-momento e obtermos a métrica. Teríamos assim apenas a solução geométrica do problema. Para uma solução mais completa, devemos encontrar a métrica pela resolução simultânea das equações de campos acopladas às equações de Einstein.

Consideramos as equações de Einstein dadas na forma

$$R_{ab} = 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}) \quad (3.1)$$

onde T_{ab} é dado em (2.21) e T seu traço

$$T = g^{ab}T_{ab} \quad (3.2)$$

As componentes do tensor de Ricci são dadas como

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c \quad (3.3)$$

onde, para uma base holônoma

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}) \quad (3.4)$$

Para resolver a equação (3.1) precisamos calcular inicialmente todos os símbolos de Christoffel não nulos. Considerando (3.4) e (2.1) temos

$$g_{00} = -e^A \quad g_{11} = e^B \quad g_{22} = e^C \quad g_{33} = 1 \quad (3.5)$$

e como se trata de um sistema ortogonal,

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \quad (3.6)$$

As componentes não nulas de Γ são

$$\begin{aligned} \Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_3 g_{00} \\ \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_3 g_{11} \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_3 g_{22} \\ \Gamma_{00}^3 &= -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{00} \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{11} \\ \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{22} \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{33} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ou, considerando (3.5),

$$\begin{aligned} \Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} \\ \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} \frac{dB}{d\rho} \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} \\ \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho} \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2} e^B \frac{dB}{d\rho} \\ \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2} e^C \frac{dC}{d\rho} \\ \Gamma_{33}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como T_{ab} e g_{ab} são representados por matrizes diagonais, as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \partial_3 \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{03}^0 \\
 R_{11} &= \partial_3 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1 \\
 R_{22} &= \partial_3 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{23}^2 \\
 R_{33} &= -\partial_3 \Gamma_{30}^0 - \partial_3 \Gamma_{31}^1 - \partial_3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{32}^2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituindo os valores de (3.8) em (3.9) temos (Vide apêndice C1)*

$$R_{00} = \frac{e^A}{2} \{ (d_\rho^2 A) + \frac{1}{2} d_\rho A d_\rho (A + B + C) \} \tag{3.10a}$$

$$R_{11} = -\frac{e^B}{2} \{ (d_\rho^2 B) + \frac{1}{2} d_\rho B d_\rho (A + B + C) \} \tag{3.10b}$$

$$R_{22} = -\frac{e^C}{2} \{ (d_\rho^2 C) + \frac{1}{2} d_\rho C d_\rho (A + B + C) \} \tag{3.10c}$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2} \{ d_\rho^2 (A + B + C) + \frac{1}{2} [(d_\rho A)^2 + (d_\rho B)^2 + (d_\rho C)^2] \} \tag{3.10d}$$

Para determinar o segundo membro de (3.1) consideramos (Vide apêndice C2)

$$T = g^{ab} (\sigma \hat{t}_a \hat{t}_b + P_z \hat{z}_a \hat{z}_b + P_\phi \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b + P_\rho \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b) \tag{3.11}$$

ou

$$T = -2\sigma + P_\phi + P_\rho \tag{3.12}$$

Usando as equações (2.19) e (3.10) temos para cada componente de (3.1)

* — onde fizemos $d_\rho = \frac{d}{d\rho}$ e $d_\rho^2 = \frac{d^2}{d\rho^2}$

$$\begin{aligned}
 2R_{00}e^{-A} &= 8\pi(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) \\
 -2R_{11}e^{-B} &= 8\pi(T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11}) \\
 -2R_{22}e^{-C} &= 8\pi(T_{22} - \frac{1}{2}Tg_{22}) \\
 -2R_{33} &= 8\pi(T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33})
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo as formas de T_{ab} e T já encontradas chegamos a (Vide apêndice C3)

$$2R_{00}e^{-A} = 8\pi\{P_\phi + P_\rho\} \tag{3.14a}$$

$$-2R_{11}e^{-B} = 8\pi\{P_\phi + P_\rho\} \tag{3.14b}$$

$$-2R_{22}e^{-C} = 8\pi\{P_\rho - 2\sigma - P_\phi\} \tag{3.14c}$$

$$-2R_{33} = 8\pi\{P_\phi - P_\rho - 2\sigma\} \tag{3.14d}$$

e igualando as equações (3.14) às (3.10) temos

$$2R_{00}e^{-A} = d_\rho^2 A + \frac{1}{2}d_\rho A d_\rho(A + B + C) = 8\pi\{P_\phi + P_\rho\} \tag{3.15a}$$

$$-2R_{11}e^{-B} = d_\rho^2 B + \frac{1}{2}d_\rho B d_\rho(A + B + C) = 8\pi\{P_\phi + P_\rho\} \tag{3.15b}$$

$$-2R_{22}e^{-C} = d_\rho^2 C + \frac{1}{2}d_\rho^2 C d_\rho(A + B + C) = 8\pi\{P_\rho - 2\sigma - P_\phi\} \tag{3.15c}$$

$$-2R_{33} = d_\rho^2(A + B + C) + \frac{1}{2}\{(d_\rho A)^2 + (d_\rho B)^2 + (d_\rho C)^2\} = 8\pi\{P_\phi - P_\rho - 2\sigma\} \tag{3.15d}$$

As equações (3.15) devem ser resolvidas para os campos considerando a métrica de Killing. Mostramos no apêndice C4 que as equações (3.15a) e (3.15d) são redundantes, por isso, vamos resolver apenas (3.15b) e (3.15c). Antes, porém, introduziremos a quantidade $H \equiv e^{A + \frac{C}{2}}$ nas equações (3.15b) e (3.15c) (Vide apêndice C5) o que resulta

$$d_\rho^2 H = 4H\pi(-2\sigma + 3P_\rho + P_\phi) \tag{3.16}$$

$$d_\rho(Hd_\rho A) = 8\pi H(P_\rho + P_\phi) \quad (3.17)$$

As equações (2.6), (2.7), (3.16) e (3.17) formam o sistema de equações dos campos para a corda. Para tentarmos uma solução deste sistema usaremos a reparametrização dada em (1.21), considerando ainda

$$K = \sqrt{\lambda}\eta e^{A+\frac{C}{2}} \quad (3.18)$$

Obteremos assim um sistema de 4 equações diferenciais não lineares de segunda ordem, que são as equações dos campos acopladas às equações de Einstein, para as funções A, K, X e P. (Vide apêndice C6)

Substituindo (3.18) em (2.6), (2.7), (3.16) e (3.17) temos, respectivamente,*

$$d_r(Kd_r A) - 4\pi\eta^2 \left\{ \frac{2e^{2A}}{\alpha^2} (d_r P)^2 - \frac{K}{2} (X^2 - 1)^2 \right\} = 0 \quad (3.19)$$

$$d_r^2 K - 4\pi\eta^2 \left\{ -\frac{2e^{2A} X^2 P^2}{K} - \frac{3K}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{e^{2A}}{\alpha^2 K} (d_r P)^2 \right\} = 0 \quad (3.20)$$

$$Kd_r(Kd_r X) - X \left\{ \frac{1}{2} K^2 (X^2 - 1) + e^{2A} P^2 \right\} = 0 \quad (3.21)$$

$$e^{-2A} Kd_r \left\{ \frac{e^{2A}}{K} d_r P \right\} = \alpha^2 X^2 P \quad (3.22)$$

O sistema de equações composto por (1.22), (1.23), (3.19) e (3.20) consiste nas equações para os campos X, P, A e K acopladas às equações de Einstein com aproximação cilíndrica. Para resolvê-lo, vamos impor as seguintes condições de contorno:

i) no núcleo da corda ($r=0$), os campos escalar e vetorial devem ser nulos, o que fornece $X(0)=0$, $P(0)=1$ e $V(\Phi) = \lambda\eta^4$;

ii) com $\lim_{\rho \rightarrow 0} e^C = \rho^2$, $r = \rho\eta\sqrt{\lambda}$, (1.15), e também com $A(0)=0$, chegamos a $K(0)=0$;

* — Onde, $d_r = \frac{d}{dr}$ e $d_r^2 = \frac{d^2}{dr^2}$

iii) o potencial efetivo e o campo magnético devem ser nulos em $r = \infty$, então $X(\infty) = 1$ e $P(\infty) = 0$;

iv) na superfície da corda devemos ter $V(\Phi) = \beta\lambda\eta^4$, onde $\Phi = \Phi_0$ ($0 < \Phi_0 < \eta$), sendo $\beta > 1$ um parâmetro;

v) para garantir que perto do eixo a métrica seja suave e que a normalização do campo de Killing $(\frac{\partial}{\partial\phi})^\alpha$ seja preservada devemos ter

$$A'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} e^{\frac{c}{2}} = 1$$

o que conduz a $K'(0) = 1$;

vi) admitindo um calibre semelhante ao de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A}_a = 0$ (em $r=0$), obtemos como consequência, $P'(0) = 0$;

vii) perto do eixo ($r = \epsilon > 0$) e em primeira ordem, supomos

$$X(\epsilon) = X'(\epsilon) = A'(\epsilon) \simeq 0 \quad \text{e} \quad K \simeq \epsilon$$

com isto a (3.19) conduz à equação de Bessel

$$(e^A)'' + \frac{1}{\epsilon}(e^A)' + 2\pi\eta^2 \left[1 - \frac{4(P')^2}{\alpha^2 r^2} \right] e^A = 0 \tag{3.23}$$

onde, para termos soluções regulares no eixo, impuzemos $A'(0) = 0$.

Com tais condições, nas equações (3.19) e (3.20), obtivemos as formas de A e K.

Perto do eixo da corda ($r = \epsilon$) a equação (3.23) conduz a

$$(e^A)'' + \frac{1}{\epsilon}(e^A)' - \frac{8\pi}{\lambda\eta^2}(P_\rho + P_\phi)e^A = 0 \tag{3.24}$$

sendo que, para $\alpha < 1$ P_ρ e P_ϕ são negativos, (3.24) torna-se uma equação de Bessel com solução regular

$$e^A = J_0(\epsilon) \simeq 1 - \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^4}{64} - \dots < 1 \tag{3.25}$$

e com $\alpha > 1$, P_ρ e P_ϕ são positivos, (3.24) torna-se uma equação de Bessel modificada, com solução

$$e^A = I_0(\epsilon) \simeq 1 + \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^4}{64} + \dots > 1 \quad (3.26)$$

Para $\alpha = 1$ (caso de transição) P_ρ e P_ϕ são nulos, obtemos a solução

$$e^A = \ln(e^a b) \quad (a, b = \text{ctes}) \quad (3.27)$$

o que mostra que A é uma função constante, neste caso.

Na aproximação de campo fraco ($\eta^2 \rightarrow 0$), as equações (3.19) e (3.20) conduzem a $K_o = r$, $A_o = 0$ e $A'(0) = 0$. Com estes valores as equações (3.21) e (3.22) se reduzem a

$$r(rX'_o P'_o)' - X_o \left[\frac{1}{2} r^2 (X_o^2 - 1) + P_o^2 \right] = 0 \quad (3.28)$$

$$r(r^{-1} P'_o)' - \alpha^2 X_o^2 P_o = 0 \quad (3.29)$$

que são as equações de Nielsen-Olesen⁴, válidas para o caso de se negligenciar os efeitos gravitacionais.

Capítulo 4. Determinações numéricas.

4.1 – Considerações iniciais

Determinamos numericamente as soluções das equações

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} - \frac{XP^2}{r^2} - \frac{X}{2}(X^2 - 1) = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} - X^2 P \alpha^2 = 0 \quad (1.23)$$

$$d_r(K d_r A) - 4\pi\eta^2 \left\{ \frac{2e^{2A}}{\alpha^2} (d_r P)^2 - \frac{K}{2} (X^2 - 1)^2 \right\} = 0 \quad (3.19)$$

$$d_r^2 K - 4\pi\eta^2 \left\{ -\frac{2e^{2A} X^2 P^2}{K} - \frac{3K}{4} (X^2 - 1)^2 + \frac{e^{2A}}{\alpha^2 K} (d_r P)^2 \right\} = 0 \quad (3.20)$$

Obtivemos as formas polinomiais de X, P, A e K, para $\alpha = 0,5$; $\alpha = 1$ e $\alpha = 1,5$, em (1.23).

Usando o método das diferenças finitas, primeiramente consideramos uma expansão em torno de $r = 0$ dos campos X e P, como segue

$$X = ar + X_2 r^2 + X_3 r^3 + \dots \quad (4.1.1)$$

$$P = 1 - \frac{b}{4} r^2 + P_3 r^3 + P_4 r^4 + \dots \quad (4.1.2)$$

Substituindo estas expansões nas equações diferenciais originais (1.22) e (1.23) observamos que os X_i e os P_i dependem apenas de a e b , nas formas

$$a = X'(0) \quad \text{e} \quad b = -2P''(0) \quad (4.1.3)$$

Com diversas tentativas de $X'(0)$ e $P''(0)$, além de $X(0) = 0$, $P(0) = 1$ e $P'(0) = 0$, procuramos satisfazer às condições¹⁵ $X = 1 - ce^{-r}$ e $P = de^{-\sqrt{f}r}$ quando

$r \rightarrow \infty$ com as expansões feitas até $r = 9$. As condições de contorno (i) a (vii) do capítulo 3, também são satisfeitas.

A partir das condições (4.1.3) determinamos os outros coeficientes das equações (4.1.1) e (4.1.2). Obtivemos então os polinômios de X e P . Com estes resultados calculamos as aproximações de A e K como

$$A = cr + A_2r^2 + A_3r^3 + \dots$$

$$K = dr + K_2r^2 + K_3r^3 + \dots$$

e transformando as equações diferenciais originais (3.19) e (3.20) em equações de diferenças finitas, como fizemos para X e P . Para tal usamos $A'(0) = 0$ e $K'(0) = 1$. O valor de η considerado para as equações (3.19) e (3.20) foi de 10^{-2} , que é válido para cordas da GUT.

4.2 – Expressões polinomiais

Fazendo $\alpha = 0,5; 1,0$ e $1,5$ nas equações (1.22), (1.23), (3.19) e (3.20), obtivemos três conjuntos de soluções para os campos X , P , A e K , que são :

Para $\alpha = 0,5$

$$X = 2,05 \cdot 10^{-6}r^5 - 6,36 \cdot 10^{-4}r^4 + 0,0157r^3 - 0,15r^2 + 0,637r - 0,0275$$

$$P = 1,1 \cdot 10^{-4}r^5 - 3,05 \cdot 10^{-3}r^4 + 0,031r^3 - 0,124r^2 + 4,62 \cdot 10^{-3}r + 1$$

$$A = (-1,98 \cdot 10^{-4}r^6 + 6,04 \cdot 10^{-3}r^5 - 0,0708r^4 + 0,387r^3 - 0,878r^2 - 4,21 \cdot 10^{-3}r + 0,0277)10^{-8}$$

$$K = r$$

Para $\alpha = 1,0$

$$X = -8,84 \cdot 10^{-4}r^4 + 0,0213r^3 - 0,188r^2 + 0,716r - 0,0133$$

$$P = 2,57 \cdot 10^{-4}r^5 - 6,18 \cdot 10^{-3}r^4 + 0,0504r^3 - 0,132r^2 - 0,196r + 1,05$$

$$A = (3,51 \cdot 10^{-5}r^6 - 1,59 \cdot 10^{-3}r^5 + 0,0272r^4 - 0,224r^3 + 0,867r^2 - 0,703r + 0,129)10^{-15}$$

$$K = r$$

Para $\alpha = 1,5$

$$X = -1,3 \cdot 10^{-7}r^6 + 1,39 \cdot 10^{-4}r^5 - 4,2 \cdot 10^{-3}r^4 + 0,0501r^3 - 0,296r^2 + 0,868r - 0,0292$$

$$P = 2,62 \cdot 10^{-5}r^7 - 9,35 \cdot 10^{-4}r^6 + 0,0135r^5 - 0,0996r^4 + 0,386r^3 - 0,672r^2 + 0,0305r + 1$$

$$A = (-1,01 \cdot 10^{-4}r^5 - 7,62 \cdot 10^{-3}r^4 + 0,217r^3 - 1,94r^2 + 7,13r - 1,21)10^{-9}$$

$$K = r$$

Os gráficos das soluções de X e P estão representados na Fig. 4.1. As soluções de A estão nas Figs. 4.2; 4.3 e 4.4, e as de K na Fig. 4.5.

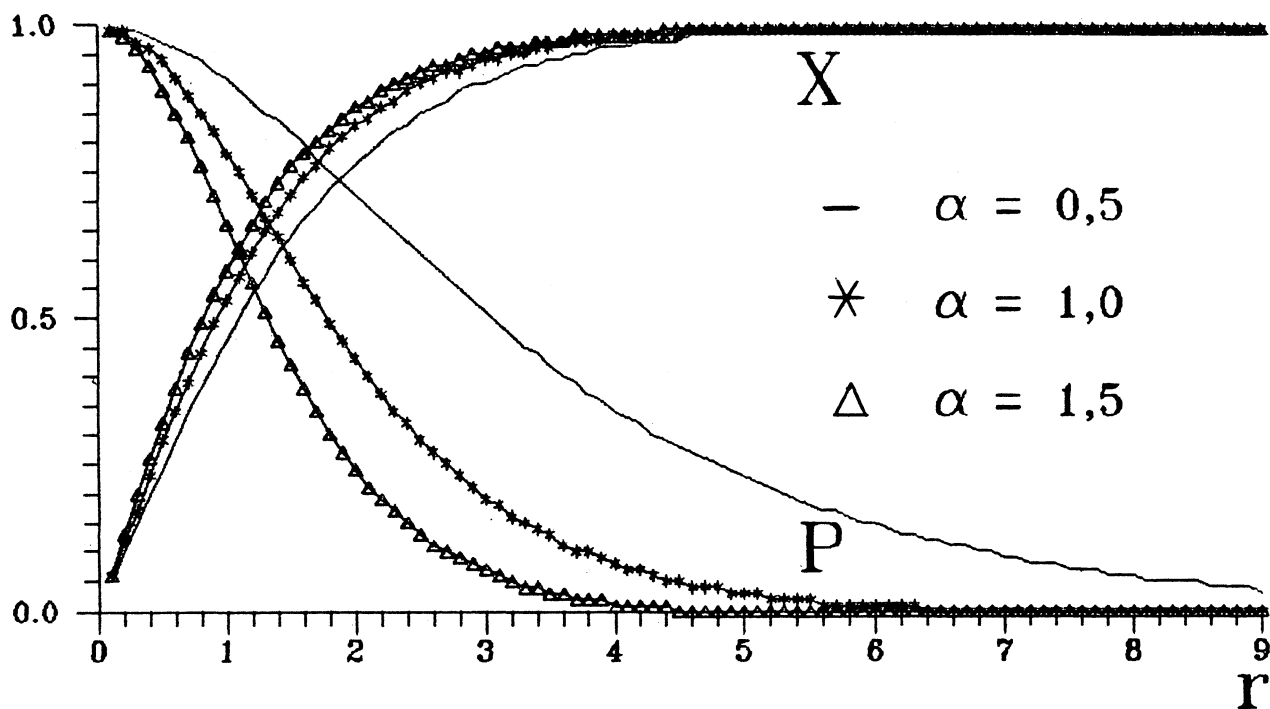


Fig. 4.1

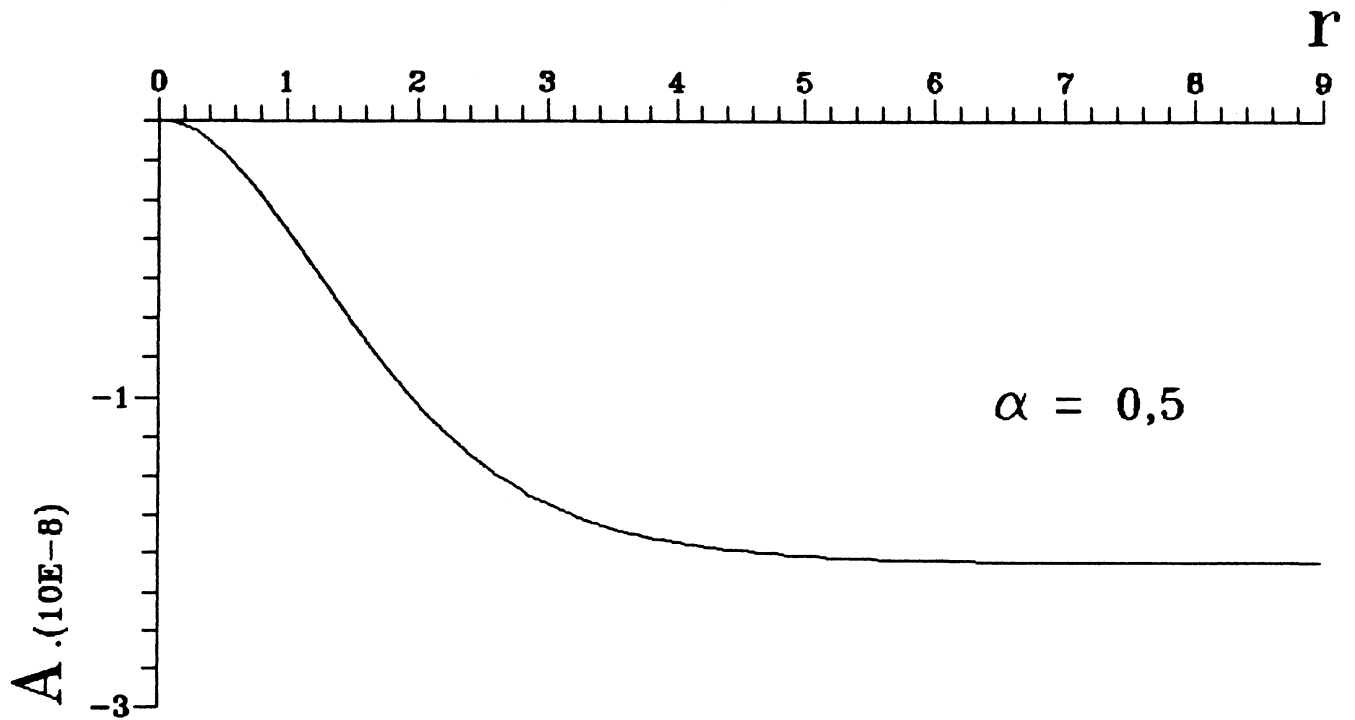


Fig. 4.2

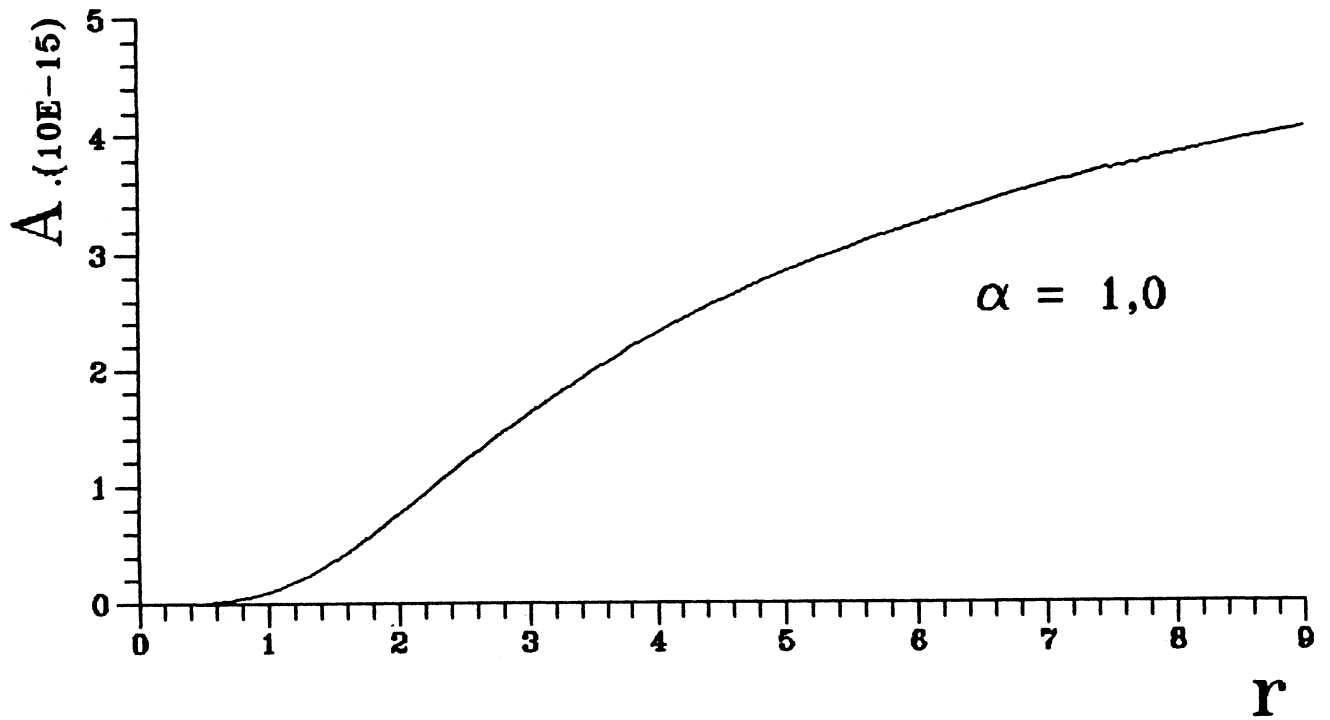


Fig. 4.3

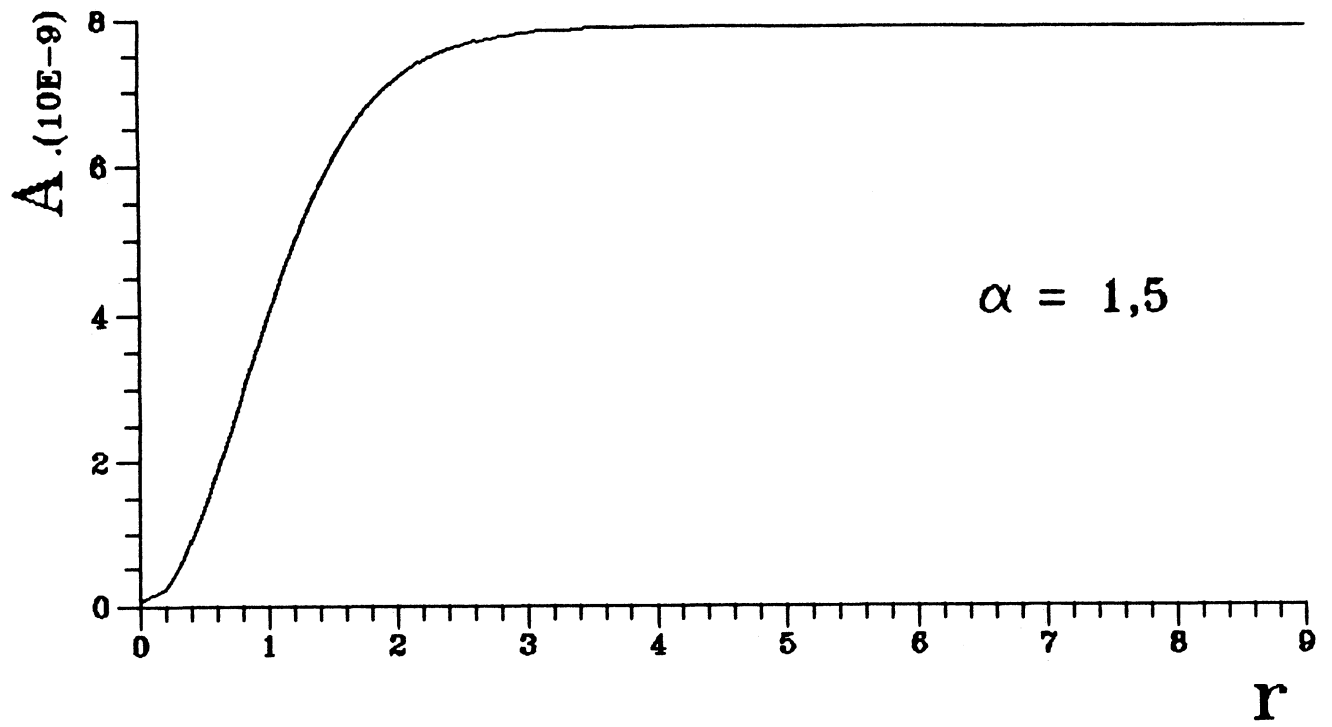


Fig. 4.4

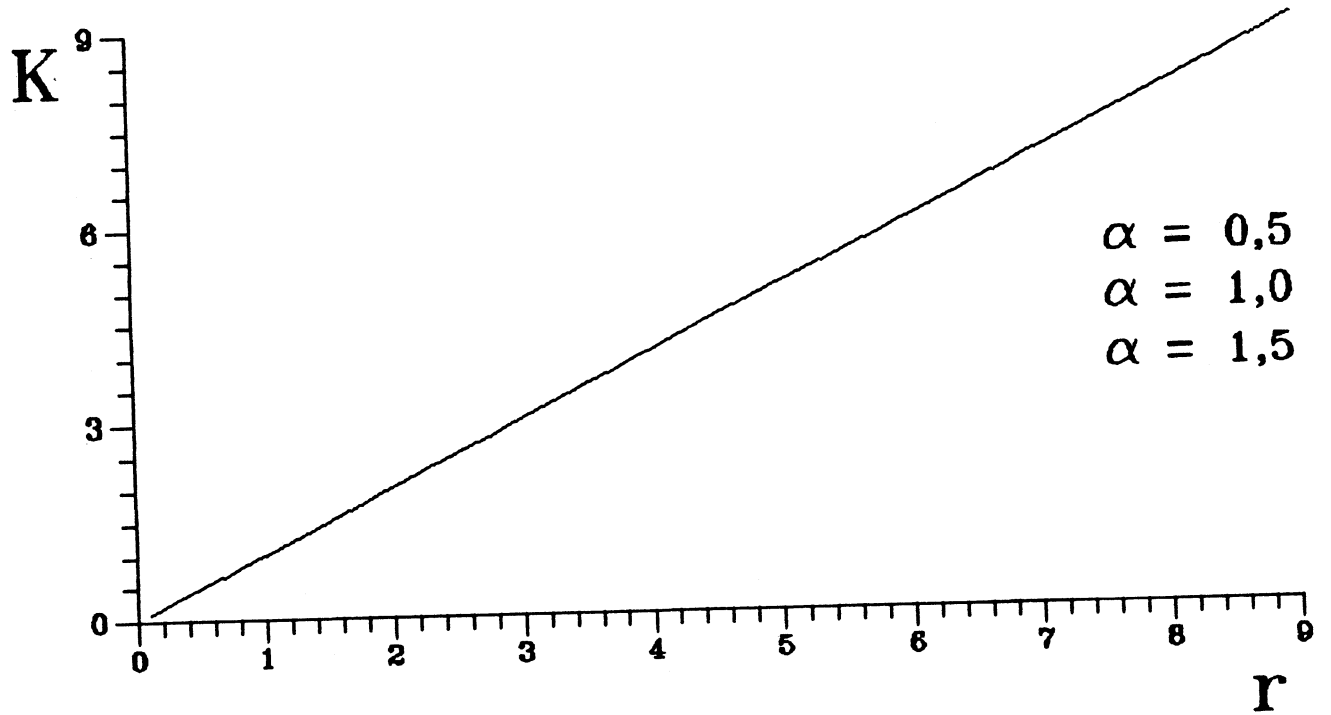


Fig. 4.5

4.3 – Verificações

Os polinômios obtidos fornecem valores bastante consistentes com as condições de contorno impostas analiticamente, como mostramos na tabela a seguir.

Valor analítico	Valor numérico		
	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 1,5$
$X(0) = 0$	$X(0) = -0.0275$	$X(0) = -0,0133$	$X(0) = -0,0292$
$X(\infty) = 1$	$X(9) = 0,9490$	$X(9) = 0,9304$	$X(9) = 0,9122$
$X'(\infty) = 0$	$X'(9) = -0.0352$	$X'(9) = -0,0698$	$X'(9) = -0,0190$
$P(0) = 1$	$P(0) = 1$	$P(0) = 1,05$	$P(0) = 1$
$P'(0) = 0$	$P'(0) = 0,0046$	$P'(0) = -0,1960$	$P'(0) = 0,0305$
$P(\infty) = 0$	$P(9) = 0,0809$	$P(9) = -0,0357$	$P(9) = 0,3388$
$A(0) = 0$	$A(0) = 2,77 \cdot 10^{-10}$	$A(0) = 1,29 \cdot 10^{-16}$	$A(0) = -1,21 \cdot 10^{-9}$
$A'(0) = 0$	$A'(0) = -4,21 \cdot 10^{-11}$	$A'(0) = -7,03 \cdot 10^{-16}$	$A'(0) = 7,13 \cdot 10^{-9}$
$A(\infty) = 0$	$A(9) = -2,09 \cdot 10^{-8}$	$A(9) = 3,95 \cdot 10^{-15}$	$A(9) = 8,05 \cdot 10^{-9}$
$K(0) = 0$	$K(0) = 0$	$K(0) = 0$	$K(0) = 0$
$K'(0) = 1$	$K'(0) = 1$	$K'(0) = 1$	$K'(0) = 1$
$V(0) = \lambda\eta^4$	$V(0) = 0,9984\lambda\eta^4$	$V(0) = 0,9996\lambda\eta^4$	$V(0) = 0,9982\lambda\eta^4$
$V(\infty) = 0$	$V(9) = 0,0098\lambda\eta^4$	$V(9) = 0,0180\lambda\eta^4$	$V(9) = 0,0281\lambda\eta^4$

Aqui V é o potencial efetivo na lagrangeana (1.1), dado como $V = \frac{\lambda}{4}\eta^4(X^2 - 1)^2$, com $R = X\eta$.

4.4 – Cálculo do déficit angular

O déficit angular causado pela corda é dado em [14] na forma

$$\Delta\varphi = 8\pi\mu + \delta\varphi \quad (4.4.1)$$

com

$$\delta\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-A} K(A')^2 dr \quad (4.4.2)$$

onde (4.4.2) é a correção de segunda ordem de (4.4.1). Para determiná-la integramos (4.4.2) entre 0 e ϑ , expandimos e^{-A} até quarta ordem e consideramos as formas polinomiais de A e K para $\alpha = 0,5$; 1,0 e 1,5. Assim obtivemos os seguintes resultados.

$$\alpha = 0,5 \quad \longrightarrow \quad \delta\varphi = 1,028\pi \cdot 10^{-16}$$

$$\alpha = 1,0 \quad \longrightarrow \quad \delta\varphi = 3.856\pi \cdot 10^{-30}$$

$$\alpha = 1,5 \quad \longrightarrow \quad \delta\varphi = 1,339\pi \cdot 10^{-17}$$

As correções para $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1,5$ são da ordem de η^4 , como previsto por Garfinkle e Laguna em [17]. No entanto, para o caso $\alpha = 1,0$, sendo A uma função constante, conforme mostrado em (3.27), a contribuição $\delta\varphi$ deve ser nula. Seu valor, aqui obtido, é da ordem de 10^{-30} , o que é aceitável em face da aproximação numérica.

Conclusões

As formas polinomiais calculadas para os campos X e P foram obtidas para um intervalo de r entre 0 e 9 e para três valores diferentes de α , ($\alpha = 0,5; 1,0$ e $1,5$). Calculamos também as formas dos campos A e K para o mesmo intervalo de r e os correspondentes valores de α . O intervalo de r deste trabalho é maior que o considerado por Garfinkle em [14], onde usou r entre 0 e 3 e também considerou apenas $\alpha = 1,0$, na obtenção dos campos X e P. Os polinômios obtidos para X, P, A e K fornecem valores bastante consistentes com as condições de contorno obtidas analiticamente.

As soluções para os campos X e P com diferentes valores de α , mostraram um comportamento semelhante, ao obtido por Garfinkle em [14]. O campo K apresentou solução idêntica para cada um dos α considerados. Já o campo A apresentou um comportamento variado em relação aos valores de α . Para $\alpha = 0,5$, A é negativo em relação a r . Com $\alpha = 1$ o campo A deve ser uma função constante em relação a r e a função que obtivemos mostra uma variação entre o ponto inicial [$A(0) \simeq 10^{-17}$] e o final [$A(9) \simeq 4 \cdot 10^{-15}$] da ordem de 10^{-15} , que é bastante suave, parecendo estabilizar em $4 \cdot 10^{-15}$. Podemos então considerar a solução numérica obtida como uma boa aproximação neste intervalo. Com $\alpha = 1,5$ o campo A também mostra uma variação entre seus pontos inicial [$A(0) \simeq -1 \cdot 10^{-9}$] e final [$A(9) \simeq 8 \cdot 10^{-9}$] em torno de 10^{-9} , apresentando uma possível estabilização após $r = 2,5$.

Os resultados para o potencial efetivo, no intervalo entre 0 e 9, mostraram-se bastante razoáveis, o que confirma as soluções para o campo X como boas aproximações neste intervalo.

Os termos de correção de segunda ordem do déficit angular, para os valores de $\alpha \neq 1$, confirmam que as soluções para os campos A e K são consistentes. Tais correções são da ordem de μ^2 , no caso do período da GUT. No caso $\alpha = 1,0$ a correção é aproximadamente nula.

APÊNDICE A. Obtenção das equações de campo com métrica cilíndrica.

APÊNDICE A1

Dedução do primeiro termo da equação (1.3) para $\varphi = R$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c R)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} (\nabla_a R \nabla^a R) \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \nabla_a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} \nabla^a R + \nabla^a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} \nabla_a R \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \nabla_a R \delta_c^a + \nabla^a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} g_{ab} \nabla^b R \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \nabla_a R \delta_c^a + \nabla^a R g_{ab} \delta_c^b \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \nabla_c R + \nabla^c R g_{ac} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \nabla_c R + \nabla_c R \right\}
 \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c R)} = -\nabla_c R \quad (1.5)$$

APÊNDICE A2

Dedução do primeiro termo da equação (1.3) para $\varphi = \psi$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c \psi)} &= -\frac{R^2}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\nabla^c \psi)} \nabla^a \psi (\nabla^a \psi + qA^a) + (\nabla_a \psi + qA_a) \frac{\partial}{\partial(\nabla^c \psi)} \nabla^a \psi \right\} \\
 &= -\frac{R^2}{2} \left\{ g_{ab} \delta_c^b (\nabla^a \psi + qA^a) + (\nabla_a \psi + qA_a) \delta_c^a \right\} \\
 &= -\frac{R^2}{2} \left\{ (\nabla_c \psi + qA_c) + (\nabla_c \psi + qA_c) \right\}
 \end{aligned}$$

e finalmente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c \psi)} = -R^2 (\nabla_c \psi + qA_c) \quad (1.8)$$

APÊNDICE A3

Dedução do segundo termo de (1.3) para $\varphi = A^j$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^j} = -\frac{R^2}{2} \left\{ q \frac{\partial A_a}{\partial A^j} (\nabla^a \psi + q A^a) + (\nabla_a \psi + q A_a) q \frac{\partial A^a}{\partial A^j} \right\}$$

mas como $A_a = g_{ia} A^i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^j} &= -\frac{qR^2}{2} \left\{ g_{ia} \frac{\partial A^i}{\partial A^j} (\nabla^a \psi + q A^a) + (\nabla_a \psi + q A_a) \frac{\partial A^a}{\partial A^j} \right\} \\ &= -\frac{qR^2}{2} \{ g_{aj} (\nabla^a \psi + q A^a) + (\nabla_j \psi + q A_j) \} \end{aligned}$$

finalmente temos a expressão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^j} = -qR^2 (\nabla_j \psi + q A_j) \tag{1.10}$$

APÊNDICE A4

Dedução do primeiro termo da equação (1.3) para $\varphi = A^j$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c A^j)} = \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right\}$$

Usando (2.2) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c A^j)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \left\{ \nabla_a A_b \nabla^a A^b - \nabla_a A_b \nabla^b A^a - \nabla_b A_a \nabla^a A^b + \nabla_b A_a \nabla^b A^a \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \nabla_a A_b \delta_c^a \delta_j^b + \nabla^a A^b \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \nabla_a A_b - \nabla_a A_b \delta_c^b \delta_j^a - \nabla^b A^a \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \nabla_a A_b \right. \\ &\quad \left. - \nabla_b A_a \delta_c^a \delta_j^b - \nabla^a A^b \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \nabla_b A_a + \nabla_b A_a \delta_c^b \delta_j^a + \nabla^b A^a \frac{\partial}{\partial (\nabla^c A^j)} \nabla_b A_a \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \left\{ \nabla_c A_j + \nabla^a A^b g_{ak} g_{bi} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c A^j)} \nabla^k a^i - \nabla_j A_c - \nabla^b A^a g_{ab} g_{bi} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c A^j)} \nabla^k A^i \right. \\
 &\quad \left. - \nabla_j A_c - \nabla^a A^b g_{bi} g_{ak} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c A^j)} \nabla^i A^k + \nabla_c A_j + \nabla^b A^a g_{bi} g_{ak} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c A^j)} \nabla^i A^k \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ 2\nabla_c A_j - 2\nabla_j A_c + \nabla^a A^b g_{ak} g_{bi} \delta_c^k \delta_j^i - \nabla^b A^a g_{ak} g_{bi} \delta_c^k \delta_j^i \right. \\
 &\quad \left. - \nabla^a A^b g_{bi} g_{ak} \delta_c^i \delta_j^k + \nabla^b A^a g_{bi} g_{ak} \delta_c^i \delta_j^k \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ 2\nabla_c A_j - 2\nabla_j A_c + \nabla^a A^b g_{ac} g_{bj} - \nabla^b A^a g_{ac} g_{bj} - \nabla^a \nabla^b g_{bc} g_{aj} + \nabla^b A^a g_{bc} g_{aj} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ 2\nabla_c A_j - 2\nabla_j A_c + \nabla_c A_j - \nabla_j A_c - \nabla_j A_c + \nabla_c A_j \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ 4\nabla_c A_j - 4\nabla_j A_c \right\}
 \end{aligned}$$

resultando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c A^j)} = -F_{cj} \tag{1.11}$$

APÊNDICE A5

Mostraremos que a equação (1.17) é redundante.

$$\nabla_c [R^2 P \nabla_c \phi] = (\nabla^c R^2) P \nabla_c \phi + R^2 \nabla^c P \nabla_c \phi + \nabla^c \nabla_c \phi$$

e como $\nabla^c \nabla_c \phi = 0$, resulta

$$2RP \nabla^c R \nabla_c \phi + R^2 \nabla^c P \nabla_c \phi \tag{A.5.1}$$

Como a métrica é

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$$

sabemos que

$$\nabla_0 = \nabla^0 = \partial_t \quad \nabla^1 = \nabla_1 = \partial_z \quad \nabla^3 \nabla_3 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

e

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f)$$

e também que

$$\nabla^2 \nabla_2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \quad \nabla^3 \nabla_3 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Para o termo $2RP\nabla^c R\nabla_c \phi$ da equação (A5.1) temos que

$$\nabla^c R \begin{cases} = 0, & \text{para } c=0,1,3; \\ \neq 0, & \text{para } c=2 \end{cases}$$

$$\nabla_c \phi \begin{cases} = 0, & \text{para } c=0,1,2; \\ \neq 0, & \text{para } c=3 \end{cases}$$

e assim a quantidade $\nabla^c R\nabla_c \phi$ será sempre nula. Para o termo $R^2\nabla^c P\nabla_c \phi$ de (A5.1) temos:

$$\nabla^c P \begin{cases} = 0, & \text{para } c=0,1,3; \\ \neq 0, & \text{para } c=2 \end{cases}$$

logo a quantidade $\nabla^c P\nabla_c \phi$ também será sempre nula, resultando que toda a expressão (A5.1) é identicamente nula.

APÊNDICE A6

Resolução das equações (1.16) e (1.18).

a) A equação (1.16) para $\varphi = R$ fica

$$\nabla^c \nabla_c R - R\{(\nabla_a \psi + qA_a)(\nabla^a \psi + qA^a) + \frac{\lambda}{2}(R^2 - \eta^2)\} = 0$$

$$\nabla^c \nabla_c R - R\{\nabla_a \phi \nabla^a \phi P^2 + \frac{\lambda}{2}(R^2 - \eta^2)\} = 0 \quad (A6.1)$$

e a quantidade $\nabla^c \nabla_c R$ de (A6.1), quando desenvolvida, fica

$$\nabla^c \nabla_c R = \nabla^0 \nabla_0 R + \nabla^1 \nabla_1 R + \nabla^2 \nabla_2 R + \nabla^3 \nabla_3 R$$

como $\nabla^i \nabla_i R = 0$ com $i=0,1,3$ resta então

$$\nabla^2 \nabla_2 R = \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} \quad (A6.2)$$

A quantidade $\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi$ do segundo termo é

$$\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi = \nabla_0 \phi \nabla^0 \phi + \nabla_1 \phi \nabla^1 \phi + \nabla_2 \phi \nabla^2 \phi + \nabla_3 \phi \nabla^3 \phi = \frac{1}{\rho^2} \quad (A6.3)$$

pois, $\nabla_i \phi \nabla^i \phi$ é nulo para $i=0,1,3$ e é igual a $\frac{1}{\rho^2}$ para $i=2$.

Substituindo (A6.1) e (A6.2) em (A6.3) temos, finalmente,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{R\lambda^2}{\rho^2} - \frac{RP^2}{2}(R^2 - \eta^2) = 0 \quad (1.19)$$

b) A equação (1.18), para $\varphi = A^j$, fica

$$\nabla^c F_{cj} = qR^2(\nabla_j \phi + qA_j)$$

$$\nabla^c F_{cj} = qR^2 \nabla_j \phi + q^2 R^2 A_j$$

$$\nabla^c F_{cj} = qR^2 \nabla_j \phi + q^2 R^2 \left\{ \frac{1}{q} [P(\rho) - 1] \nabla_j \phi \right\}$$

$$\nabla^c F_{cj} = qR^2 \nabla_j \phi + qR^2 P \nabla_j \phi - qR^2 \nabla_j \phi$$

$$\nabla^c F_{cj} = qR^2 P \nabla_j \phi$$

$$\nabla^c F_{cj} = \nabla^c [\nabla_c A_j - \nabla_j A_c]$$

como F_{cj} não depende de z nem de t , a equação de campo fica sendo

$$\nabla^2 F_{2j} + \nabla^3 F_{3j} = qR^2 P \nabla_j \phi$$

como $\nabla_j \phi \neq 0$ apenas para $j = 3$ teremos:

$$j = 3 \quad \nabla^2 F_{23} + \nabla^3 F_{33} = qR^2 P \nabla_3 \phi$$

$$j = 2 \quad \nabla^2 F_{22} + \nabla^3 F_{32} = 0$$

sendo que $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, temos que $F_{22} = F_{33} = 0$.

A equação de campo é então

$$\nabla^2 F_{23} = qR^2 P \nabla_3 \phi$$

$$\begin{aligned} \nabla^2[\nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2] &= \frac{1}{q} \nabla^2 \{ \nabla_2 [(P-1)\nabla_3 \phi] - \nabla_3 [(P-1)\nabla_2 \phi] \} \\ &= \frac{1}{q} \nabla^2 [\nabla_2 (P-1)\nabla_3 \phi + (P-1)\nabla_2 \nabla_3 \phi] \\ &= \frac{1}{q} \nabla^2 [\nabla_2 (P-1) \frac{1}{\rho}] + \frac{1}{q} \nabla^2 [(P-1)\nabla_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)] \end{aligned}$$

como $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho f)$, então

$$\nabla^2 [\nabla_2 (P-1) \frac{1}{\rho}] = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho \nabla_2 (P-1) \frac{1}{\rho}] = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 P}{d\rho^2}$$

e

$$\nabla^2 [(P-1)\nabla_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)] = (P-1)\nabla^2 \nabla_2 \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho (P-1) \right] \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho}\right) + (P-1) \frac{1}{\rho^3} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dP}{d\rho}$$

de modo que

$$\nabla^2 F_{23} = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d^2 P}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dP}{d\rho} \right] = qR^2 P \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} = q^2 R^2 P \tag{1.20}$$

onde usamos

$$\nabla^2 \nabla_2 \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho}\right) \right] = \frac{1}{\rho^3}$$

APÊNDICE B. Obtenção das equações de campo com métrica de Killing.

APÊNDICE B1

Cálculo das quantidades $\nabla^a, \nabla_a, \nabla_b$.

Consideramos que:

$$\nabla^a \varphi = \frac{1}{h^0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \hat{t}^a + \frac{1}{h^1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}^a + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi}^a + \frac{1}{h^3} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{\rho}^a \quad (B1.1a)$$

$$\nabla_a \varphi = \frac{1}{h_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \hat{t}_a + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}_a + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi}_a + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{\rho}_a \quad (B1.1b)$$

onde

$$h_0 = -e^{\frac{A}{2}} \quad h_1 = e^{\frac{B}{2}} \quad h_2 = e^{\frac{C}{2}} \quad e \quad h_3 = 1 \quad (B1.2)$$

são fatores de escala então, se em (B1.1a) e em (B1.1b) fizermos $\varphi = \phi$ estas se transformam em

$$\nabla^a \phi = \frac{1}{h^2} \hat{\phi}^a = e^{-\frac{C}{2}} \hat{\phi}^a \quad (2.3a)$$

$$\nabla_a \phi = \frac{1}{h_2} \hat{\phi}_a = e^{-\frac{C}{2}} \hat{\phi}_a \quad (2.3b)$$

Da mesma forma, para $\varphi = R$, (B1.1a) e (B1.1b) ficam

$$\nabla^a R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \hat{\rho}^a \quad (2.4a)$$

$$\nabla_a R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \hat{\rho}_a \quad (2.4b)$$

APÊNDICE B2

Cálculo de $\nabla^a \nabla_a$.

Tomamos a expressão geral do operador ∇^2 , em termos dos fatores de escala

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a R = \frac{1}{h_0 h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_0} \frac{\partial R}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h_0 h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial R}{\partial z} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{h_0 h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{h_0 h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right] \right\} \end{aligned} \quad (B2.1)$$

Substituindo (B1.2) em (B2.1) vem

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a R = \frac{-1}{e^{\frac{A+B+C}{2}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-e^{\frac{A+B+C}{2}} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right] \right\} = \\ \frac{1}{e^{\frac{A+B+C}{2}}} \left\{ e^{\frac{A+B+C}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{A+B+C}{2} \right] \frac{\partial R}{\partial \rho} + e^{\frac{A+B+C}{2}} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} \right\} \end{aligned}$$

e finalmente

$$\nabla^a \nabla_a R = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2} \right\} \quad (2.5)$$

APÊNDICE B3

Determinação da equação (2.6).

Substituindo as equações (2.3), (2.4) e (2.5) na equação (1.16) para $\varphi = R$ temos

$$\nabla^a \nabla_a R - R \{ \nabla_a \phi \nabla^a \phi P^2 + \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) \} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2} - R \left\{ e^{-\frac{C}{2}} \hat{\phi}_a e^{-\frac{C}{2}} \hat{\phi}^a P^2 + \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2} - R \left\{ P^2 e^{-C} + \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) \right\} = 0$$

e finalmente obtemos

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} = R \left\{ \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2) + e^{-C} P^2 \right\} \quad (2.6)$$

APÊNDICE B4

Determinação da equação (2.7).

Substituindo as equações (2.3), (2.4) e (2.5) na equação (1.8) para $\varphi = A^j$

temos

$$\nabla^a F_{ab} - eR^2 P \nabla_a \phi = 0$$

$$\nabla^a (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) - eR^2 P \nabla_b \phi = 0$$

Substituindo as expressões de A_a e A_b de (1.15) e expandindo temos

$$\frac{1}{e} \{ \nabla^a (\nabla_a P \nabla_b \phi) - \nabla^a (\nabla_a \nabla_b \phi) - \nabla^a (\nabla_b P \nabla_a \phi) - \nabla^a (\nabla_b \nabla_a \phi) \} - eR^2 P \nabla_b \phi = 0$$

$$\nabla^a \nabla_a P \nabla_b \phi - e^2 R^2 P \nabla_b \phi = 0$$

colocando $\nabla_b \phi$ em evidência resulta

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A + B + C) \frac{dp}{d\rho} = e^2 R^2 P \quad (2.7)$$

APÊNDICE B5

O termo (c) de (2.8) vem da equação (2.10) e assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b A^c)} &= \nabla_a A_b \delta_b^a \delta_c^b - \nabla_a A_b \delta_c^a - \nabla_b A_a \delta_b^a \delta_c^b + \nabla_b A_a \delta_c^a \\ &= \nabla_b A_c - \nabla_c A_b - \nabla_c A_b + \nabla_b A_c \\ &= F_{bc} + F_{bc} = 2F_{bc} \end{aligned}$$

e resulta

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b A^c)} = -\frac{1}{2} F_{bc} \quad (2.13)$$

APÊNDICE B6

Provaremos agora que

$$\nabla_a A^c F_{bc} = \frac{1}{2} F_a^c F_{bc} \quad (2.15)$$

Seja

$$F_a^c F_{bc} = (\nabla_a A^c - \nabla^c A_a) F_{bc}$$

$$F_a^c F_{bc} = \nabla_a A^c F_{bc} - \nabla^c A_a F_{bc}$$

mas, sabemos que

$$\nabla^c A_a F_{bc} = \nabla_i g^{ic} A^j g_{ja} F_{bc}$$

e redefinindo $i=a$ e $j=c$ obtemos

$$\nabla^c A_a F_{bc} = \nabla_a A^c g^{ac} g_{ca} F_{bc} = -\nabla_a A^a F_{bc}$$

o que permite verificar (2.15).

APÊNDICE C. Obtenção das equações de campo acopladas às equações de Einstein

APÊNDICE C1

Obtenção das componentes do tensor de Ricci

As componentes não nulas são

$$R_{00} = \partial_3 \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{03}^0$$

$$R_{11} = \partial_3 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1$$

$$R_{22} = \partial_3 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{23}^2 \quad (3.9)$$

$$R_{00} = -\partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_3 \Gamma_{31}^1 - \partial_3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{32}^2$$

Substituindo os valores de Γ dados pelas equações (4.8) teremos:

$$R_{00} = d_\rho \left(\frac{1}{2} e^A d_\rho A \right) + \left(\frac{1}{2} e^A d_\rho A \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho B \right) + \left(\frac{1}{2} e^A d_\rho A \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho C \right) - \left(\frac{1}{2} e^A d_\rho A \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho A \right)$$

$$R_{11} = d_\rho \left(-\frac{1}{2} e^B d_\rho B \right) + \left(-\frac{1}{2} e^B d_\rho B \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho A \right) + \left(-\frac{1}{2} e^B d_\rho B \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho C \right) - \left(-\frac{1}{2} e^B d_\rho B \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho B \right)$$

$$R_{22} = d_\rho \left(-\frac{1}{2} e^C d_\rho C \right) + \left(-\frac{1}{2} e^C d_\rho C \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho A \right) + \left(-\frac{1}{2} e^C d_\rho C \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho B \right) - \left(-\frac{1}{2} e^C d_\rho C \right) \left(\frac{1}{2} d_\rho C \right)$$

$$R_{33} = -d_\rho \left(\frac{1}{2} d_\rho A - \frac{1}{2} d_\rho B - \frac{1}{2} d_\rho C \right) - \frac{1}{2} (d_\rho A)^2 - \frac{1}{2} (d_\rho B)^2 - \frac{1}{2} (d_\rho C)^2$$

Fazendo as derivadas e expandindo os produtos temos:

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^A (d_\rho A)^2 + \frac{1}{2} e^A d_\rho^2 A + \frac{1}{4} e^A d_\rho A d_\rho B + \frac{1}{4} e^A d_\rho A d_\rho C - \frac{1}{4} e^A (d_\rho A)^2$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} e^B (d_\rho B)^2 - \frac{1}{2} e^B d_\rho^2 B - \frac{1}{4} e^B d_\rho A d_\rho B - \frac{1}{4} e^B d_\rho B d_\rho C + \frac{1}{4} e^B (d_\rho B)^2$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}e^C(d_\rho C)^2 - \frac{1}{2}e^C d_\rho^2 C - \frac{1}{4}e^C d_\rho A d_\rho C - \frac{1}{4}e^C d_\rho B d_\rho C + \frac{1}{4}e^C (d_\rho C)^2$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2}(d_\rho^2 A + d_\rho^2 B + d_\rho^2 C) - \frac{1}{4}\{(d_\rho A)^2 + (d_\rho B)^2 + (d_\rho C)^2\}$$

e finalmente temos:

$$R_{00} = \frac{1}{2}e^A \left\{ d_\rho^2 A + \frac{1}{2}d_\rho A d_\rho (A + B + C) \right\}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}e^B \left\{ d_\rho^2 B + \frac{1}{2}d_\rho B d_\rho (A + B + C) \right\}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}e^C \left\{ d_\rho^2 C + \frac{1}{2}d_\rho C d_\rho (A + B + C) \right\} \quad (3.10)$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2}(d_\rho^2 A + d_\rho^2 B + d_\rho^2 C) - \frac{1}{4}\{(d_\rho A)^2 + (d_\rho B)^2 + (d_\rho C)^2\}$$

APÊNDICE C2

Obtenção de T_{ab} e T.

Substituindo (2.21) e (3.5) em (3.2) teremos

$$T = g^{ab} \{ \sigma \hat{t}_a \hat{t}_b + P_x \hat{z}_a \hat{z}_b + P_\phi \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b + P_\rho \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b \} \quad (3.11)$$

mas de (2.2) temos

$$\hat{t}^a \hat{t}^a = e^{-A} ; \hat{t}_a \hat{t}_a = e^A \quad e \quad \hat{t}^a \hat{t}_a = 1$$

$$\hat{z}^a \hat{z}^a = e^{-B} ; \hat{z}_a \hat{z}_a = e^B \quad e \quad \hat{z}^a \hat{z}_a = 1$$

$$\hat{\phi}^a \hat{\phi}^a = e^{-C} ; \hat{\phi}_a \hat{\phi}_a = e^C \quad e \quad \hat{\phi}^a \hat{\phi}_a = 1$$

$$\hat{\rho}^a \hat{\rho}^a = 1 ; \hat{\rho}_a \hat{\rho}_a = 1 \quad e \quad \hat{\rho}^a \hat{\rho}_a = 1$$

o que permite obter

$$g^{ab} \hat{t}_a \hat{t}_b \longrightarrow g^{00} \hat{t}_0 \hat{t}_0 = -e^{-A} e^A = -1$$

$$g^{ab} \hat{z}_a \hat{z}_b \longrightarrow g^{11} \hat{z}_1 \hat{z}_1 = e^{-B} e^B = 1$$

$$g^{ab} \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \longrightarrow = g^{22} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_2 = e^{-C} e^C = 1$$

$$g^{ab} \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b \longrightarrow = g^{33} \hat{\rho}_3 \hat{\rho}_3 = 1$$

Substituindo estes resultados em (3.2) e considerando a forma (2.21) para T_{ab} , temos

$$T = g^{00} \sigma \hat{t}_0 \hat{t}_0 + g^{11} P_z \hat{z}_1 \hat{z}_1 + g^{22} P_\phi \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_2 + g^{33} P_\rho \hat{\rho}_3 \hat{\rho}_3$$

ou, finalmente

$$T = -2\sigma + P_\phi + P_\rho \tag{3.12}$$

APÊNDICE C3

Determinação das equações (3.15).

Das equações (2.20) podemos escrever

$$T_{00} e^{-A} = \sigma$$

$$T_{11} e^{-B} = P_z = -\sigma$$

$$T_{22} e^{-C} = P_\phi$$

$$T_{33} = P_\rho$$

o que juntamente com (3.12) permite escrever para cada componente de (3.1)

$$\begin{aligned} R_{00} &= 8\pi(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) \\ &= 8\pi \left\{ \sigma e^A - \frac{1}{2}(-2\sigma + P_\phi + P_\rho)(-e^A) \right\} \\ &= 8\pi \frac{e^A}{2} (P_\phi + P_\rho) \end{aligned}$$

$$2R_{00} e^{-A} = 8\pi(P_\phi + P_\rho) \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= 8\pi(T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11}) \\
 &= 8\pi\left\{-\sigma e^B - \frac{1}{2}(-2\sigma + P_\phi + P_\rho)e^B\right\} \\
 &= 8\pi\frac{e^B}{2}(-P_\phi - P_\rho)
 \end{aligned}$$

$$-2R_{11}e^{-B} = 8\pi(P_\phi + P_\rho) \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= 8\pi(T_{22} - \frac{1}{2}Tg_{22}) \\
 &= 8\pi\left\{P_\phi e^C - \frac{1}{2}(-2\sigma + P_\phi + P_\rho)e^C\right\} \\
 &= 8\pi e^C\left(P_\phi + \sigma - \frac{P_\phi}{2} - \frac{P_\rho}{2}\right) \\
 &= 8\pi\frac{e^C}{2}(P_\phi + 2\sigma - P_\rho)
 \end{aligned}$$

$$-2R_{22}e^{-C} = 8\pi(P_\rho - 2\sigma - P_\phi) \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= 8\pi(T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33}) \\
 &= 8\pi\left\{P_\rho - \frac{1}{2}(-2\sigma + P_\phi + P_\rho)e^C\right\} \\
 &= 8\pi\left(P_\rho + \sigma - \frac{P_\phi}{2} - \frac{P_\rho}{2}\right) \\
 &= 8\pi\frac{1}{2}(P_\rho + 2\sigma - P_\phi)
 \end{aligned}$$

$$-2R_{33} = 8\pi(P_\phi - 2\sigma - P_\rho) \quad (3.14d)$$

Cada uma das expressões (3.14) compoem o primeiro membro das equações de Einstein (3.1).

APÊNDICE C4

Demonstração de que A=B:

Igualando (3.15a) com (3.15b) teremos:

$$0 = \frac{d^2 B}{d\rho^2} - \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A + B + C) \frac{dB}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A + B + C) \frac{dA}{d\rho}$$

$$0 = \frac{d^2}{d\rho^2} (A - B) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A - B) \frac{d}{d\rho} (A + B) + C$$

Seja

$$\frac{d}{d\rho} (A - B) = \alpha \quad e$$

$$(A + B + C) = \beta$$

e então

$$\frac{d\alpha}{d\rho} + \frac{1}{2} \alpha \frac{d\beta}{d\rho} = 0$$

com solução

$$\alpha e^{\int \frac{1}{2} \frac{d\beta}{\beta} d\rho} = cte = a$$

Porém de (C3.1) temos

$$\frac{\beta}{2} = \ln \frac{a}{2} = \ln a - \ln 2 = a_1 - \ln 2$$

$$\ln \alpha = a_1 - \frac{\beta}{2}$$

Assim

$$\alpha = a_2 e^{-\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{d}{d\rho} (A - B) = a_2 e^{-\frac{1}{2}(A+B+C)}$$

$$\frac{d}{d\rho}(A - B) = \frac{a_2}{e^{\frac{A}{2}} e^{\frac{B}{2}} e^{\frac{C}{2}}}$$

Impondo as condições de contorno no eixo

$$A(0) = B(0) = 0 \tag{C3.2a}$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^C}{\rho^2} \rightarrow 1 \tag{C3.2b}$$

onde consideramos $a_2 = 0$. Com isto concluímos

$$\frac{d}{d\rho}(A - B) = 0 \quad A - B = cte$$

e portanto, por (C3.2), obtemos que $A=B$ em qualquer ponto do espaço-tempo. Assim as equações (3.15c) e (3.15b) fornecem informações idênticas. Isto mostra que a corda tem uma invariância de Lorentz ao longo de seu eixo.

APÊNDICE C5

a) Dedução de (3.16).

Consideremos a quantidade $H = e^{A + \frac{C}{2}}$. Suas derivadas são

$$d_\rho H = H(d_\rho A + \frac{1}{2}d_\rho C) \tag{C5.1}$$

$$d_\rho^2 H = d_\rho H(d_\rho A + \frac{1}{2}d_\rho C) + H(d_\rho^2 A + \frac{1}{2}d_\rho^2 C) \tag{C5.2}$$

Substituindo (C5.1) em (C5.2) temos

$$d_\rho^2 H = \left\{ (d_\rho A)^2 + \frac{1}{4}(d_\rho C)^2 + d_\rho A d_\rho C + d_\rho^2 A + \frac{1}{2}d_\rho^2 C \right\} H$$

ou

$$\frac{1}{H} d_\rho^2 H + \left\{ (d_\rho^2 A)^2 + \frac{1}{2}d_\rho A d_\rho C + d_\rho^2 A \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(d_\rho C)^2 + d_\rho A d_\rho C + d_\rho^2 C \right\} \tag{C5.3}$$

Com $A=B$ nas equações (3.15), temos para (3.14b)

$$d_\rho^2 A + \frac{1}{2} d_\rho A (2A + C) = 8\pi(P_\rho + P_\phi)$$

ou

$$d_\rho^2 A + (d_\rho A)^2 + \frac{1}{2} d_\rho C d_\rho A = 8\pi(P_\rho + P_\phi) \quad (C5.4a)$$

e para (3.14c)

$$d_\rho^2 C + \frac{1}{2} d_\rho C (2A + C) = 8\pi(-2\sigma + P_\rho - P_\phi)$$

ou

$$d_\rho^2 C + \frac{1}{2} (d_\rho C)^2 + \frac{1}{2} d_\rho C d_\rho A = 8\pi(-2\sigma + P_\rho - P_\phi) \quad (C5.4b)$$

Comparando estes resultados com (C5.3) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} d_\rho^2 H &= 8\pi(P_\rho + P_\phi) + \frac{1}{2} d_\rho A d_\rho C + \frac{1}{4} (d_\rho C)^2 + \frac{1}{2} d_\rho^2 C \\ \frac{2}{H} d_\rho^2 H &= 16\pi(P_\rho + P_\phi) + d_\rho A d_\rho C + \frac{1}{2} (d_\rho C)^2 + d_\rho^2 C \\ &= 16\pi(P_\rho + P_\phi) + 8\pi(-2\sigma + P_\rho - P_\phi) \\ \frac{1}{H} d_\rho^2 H &= 8\pi(P_\rho + P_\phi - 2\sigma + P_\rho - P_\phi) \\ \frac{1}{H} d_\rho^2 H &= 4\pi(3P_\rho + P_\phi - 2\sigma) \end{aligned} \quad (3.16)$$

b) Dedução de (3.17)

Da equação (C5.2) temos

$$\begin{aligned} d_\rho^2 H &= d_\rho A d_\rho H + H d_\rho^2 A + H d_\rho^2 C + d_\rho C d_\rho H \\ \frac{1}{H} d_\rho^2 H &= (d_\rho A + d_\rho C) d_\rho H \frac{1}{H} + d_\rho (d_\rho A + d_\rho C) \end{aligned} \quad (C5.5)$$

e usando a relação $H = e^{A+\frac{C}{2}}$ em (C5.1) obtemos

$$d_\rho H = e^{A+\frac{C}{2}} (d_\rho A + \frac{1}{2} d_\rho C)$$

$$d_\rho C = \frac{2}{H} d_\rho H - 2d_\rho A \quad (C5.6)$$

Substituindo (C5.6) em (C5.5) ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} d_\rho^2 H &= \frac{1}{H} d_\rho H (d_\rho A + \frac{2}{H} d_\rho H - 2d_\rho A) + d_\rho (d_\rho A + \frac{2}{H} d_\rho H - 2d_\rho A) \\ &= \frac{1}{H} d_\rho H (\frac{2}{H} d_\rho H - d_\rho A) + d_\rho (\frac{2}{H} d_\rho H - d_\rho A) \\ &= \frac{2}{H^2} (d_\rho H)^2 - \frac{1}{H} d_\rho H d_\rho A + 2 \left\{ d_\rho \left(\frac{1}{H} \right) \right\} d_\rho H + \frac{2}{H} d_\rho^2 H - d_\rho^2 A \\ &= \frac{2}{H^2} d_\rho H^2 - \frac{1}{H} d_\rho H d_\rho A - \frac{2}{H^2} (d_\rho H)^2 + \frac{2}{H} d_\rho^2 H - d_\rho^2 A \\ &= \frac{2}{H} d_\rho^2 H - \frac{1}{H} d_\rho H d_\rho A - d_\rho^2 A \end{aligned}$$

e finalmente

$$\frac{1}{H} d_\rho^2 H = \frac{1}{H} d_\rho (H d_\rho A) \quad (C5.7)$$

Substituindo (C5.7) em (C5.4a) e considerando que

$$d_\rho^2 A = \frac{1}{H} (d_\rho^2 H - d_\rho A d_\rho H)$$

chegamos a

$$\frac{1}{H} (d_\rho^2 H - d_\rho A d_\rho H) + (d_\rho A)^2 + \frac{1}{2} d_\rho A \left\{ \frac{2}{H} d_\rho H - 2d_\rho A \right\} = 8\pi (P_\rho + P_\phi)$$

$$\frac{1}{H} d_\rho^2 H = 8\pi (P_\rho + P_\phi)$$

o que devido à (C5.7) permite escrever

$$d_\rho (H d_\rho A) = 8\pi H (P_\rho + P_\phi) \quad (3.17)$$

APÊNDICE C6

Obtenção das equações (3.19) a (3.22).

a) A equação (3.17) é

$$d_\rho(H d_\rho A) = 8\pi H(P_\rho + P_\phi)$$

mas, com P_ρ e P_ϕ dados em (2.19) e usando as reparametrizações (1.21) teremos

$$\frac{d}{d\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda\eta}}\right)} \left\{ \frac{K}{\sqrt{\lambda\eta}} \frac{dA}{d\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda\eta}}\right)} \right\} = \frac{8\pi K}{\sqrt{\lambda\eta}} \frac{1}{2} \left\{ (d_\rho R)^2 - R^2 P^2 e^{-C} + \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 - \right.$$

$$\left. \frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 - (d_\rho R)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 - \frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 \right\}$$

$$d_r(K d_r A) \sqrt{\lambda\eta} = \frac{8\pi K}{\sqrt{\lambda\eta}} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{e^{-C}}{q^2} \left[\frac{dP}{d\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda\eta}}\right)} \right]^2 - 2 \frac{\lambda}{4} (X^2 \eta^2 - \eta^2)^2 \right\}$$

$$= \frac{8\pi K}{\lambda\eta^2} \frac{1}{2} \left\{ \frac{2e^{-C}}{q^2} (d_r P)^2 \lambda\eta^2 - \frac{\lambda}{2} \eta^4 (X^2 - 1)^2 \right\}$$

$$= 4\pi K \left\{ \frac{2e^{-C}}{q^2} (d_r P)^2 - \frac{\eta^2}{2} (X^2 - 1)^2 \right\}$$

$$= 4\pi K \left\{ \frac{2e^{2A} \lambda \eta^2}{K^2 \alpha^2 \lambda} (d_r P)^2 - \frac{\eta^2}{2} (X^2 - 1)^2 \right\}$$

e finalmente

$$d_r[K d_r A] = 4\pi K \eta^2 \left\{ \frac{2e^{2A}}{\alpha^2} (d_r P)^2 - \frac{K}{2} (X^2 - 1)^2 \right\} \quad (3.19)$$

b) A equação (3.16) é:

$$d_\rho^2 H = 4\pi H(-2\sigma + 3P_\rho + P_\phi)$$

e com σ , P_ρ e P_ϕ dados pelas equações (2.19) se usarmos as reparametrizações (1.21) teremos

$$\begin{aligned}
 d_\rho^2 H &= 4\pi H \left\{ - \left[(d_\rho R)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 + \frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[(d_\rho R)^2 - R^2 P^2 e^{-C} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 - \frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[-(d_\rho R)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 - \frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 \right] \right\} \\
 &= 4\pi H \left\{ -2R^2 P^2 e^{-C} + \frac{e^{-C}}{q^2} (d_\rho P)^2 - 3\frac{\lambda}{4} (R^2 - \eta^2)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$d_r^2 K \sqrt{\lambda} \eta = 4\pi H \left\{ -2X^2 \eta^2 P^2 \frac{e^{2A} \lambda \eta^2}{K^2} + \frac{e^{2A} \eta^2}{K^2 \alpha^2} (d_r P)^2 - \frac{3}{4} \lambda (X^2 \eta^2 - \eta^2)^2 \right\}$$

$$= \frac{4\pi K}{\sqrt{\lambda} \eta} \left\{ -\frac{2X^2 \eta^4 P^2 e^{2A} \lambda}{K^2} + \frac{e^{2A} \eta^2}{K^2 \alpha^2} (d_r P)^2 \lambda \eta^2 - \frac{3}{4} \lambda \eta^4 (X^2 - 1)^2 \right\}$$

$$d_r^2 K = \frac{4\pi K \lambda \eta^4}{\lambda \eta^2 K} \left\{ -\frac{2X^2 P^2 e^{2A}}{K} + \frac{e^{2A}}{K \alpha^2} (d_r P)^2 - \frac{3}{4} K (X^2 - 1)^2 \right\}$$

e finalmente

$$d_r^2 K = 4\pi \eta^2 \left\{ -\frac{2e^{2A} X^2 P^2}{K} - \frac{3}{4} K (X^2 - 1)^2 + \frac{e^{2A}}{\alpha^2 K} (d_r P)^2 \right\} \quad (3.20)$$

c) A equação (2.6) é

$$d_\rho^2 R + \frac{1}{2} d_\rho (A + B + C) = R \left\{ \frac{\lambda}{2} (R^2 - \eta^2)^2 + e^{-C} P^2 \right\}$$

e com as reparametrizações de (1.21) teremos

$$d_r^2 X \lambda \eta^2 \eta + \frac{1}{2} d_r \sqrt{\lambda \eta} (A + B + C) d_r X \eta \sqrt{\lambda \eta} = X \eta \left\{ \lambda (X^2 \eta^2 - \eta^2) + \frac{e^{2A} \lambda \eta^2 P^2}{K} \right\}$$

$$d_r^2 X \lambda \eta^3 + \frac{1}{2} d_r (2A + C) d_r X \lambda \eta^3 = \lambda \eta^3 X \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - 1) + \frac{e^{2A} A P^2}{K^2} \right\}$$

$$K^2 d_r^2 X + \frac{1}{2} d_r (2A + C) d_r X K^2 = X \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - 1) K^2 + e^{2A} P^2 \right\}$$

$$K^2 d_r^2 X + K d_r K d_r X - X \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - 1) K^2 + e^{2A} P^2 \right\} = 0$$

e finalmente

$$K d_r (K d_r X) - X \left\{ \frac{1}{2} K^2 (X^2 - 1) + e^{2A} P^2 \right\} = 0 \quad (3.21)$$

d) A equação (2.7) é:

$$d_\rho^2 P + \frac{1}{2} d_\rho (A + B + C) d_\rho P = e^2 R^2 P$$

porém, se usarmos novamente as reparametrizações (1.21), teremos

$$d_r^2 P \lambda \eta^2 + \frac{1}{2} \lambda \eta^2 d_r (2A + C) d_r P = \alpha^2 \lambda \eta^2 X^2 P$$

$$d_r^2 P + \frac{1}{2} d_r (2A + C) d_r P = \alpha^2 X^2 P \quad (C6.1)$$

e como

$$d_\rho \left\{ A + \frac{C}{2} \right\} = \frac{1}{H} d_\rho H$$

$$2d_\rho A - d_\rho \left\{ A + \frac{C}{2} \right\} = 2d_\rho A - \frac{1}{H} d_\rho H$$

$$\frac{e^{2A}}{H} \left\{ 2d_\rho A - d_\rho \left[A + \frac{C}{2} \right] \right\} = \left\{ \frac{2e^{2A}}{H} d_\rho A - \frac{e^{2A}}{H^2} d_\rho H \right\}$$

$$d_\rho \left\{ A + \frac{C}{2} \right\} = e^{-2A} H d_\rho (e^{2A} H^{-1})$$

de modo que

$$d_r \left\{ A + \frac{C}{2} \right\} = e^{-2A} H d_r (e^{2A} H^{-1})$$

Substituindo a equação anterior em (C6.1) teremos

$$d_r^2 P + e^{-2A} K d_r (e^{2A} K^{-1}) d_r P = \alpha^2 X^2 P$$

$$e^{2A} K \left\{ 2d_r A \frac{e^{2A}}{K^2} - \frac{e^{2A}}{K} d_r K \right\} = 2d_r A - \frac{1}{K} d_r K$$

$$d_r^2 P + 2d_r A d_r P - \frac{1}{K} d_r P d_r K = \alpha^2 X^2 P$$

e finalmente

$$e^{-2A} K d_r \left\{ \frac{e^{2A}}{K} d_r P \right\} = \alpha^2 X^2 P \tag{3.22}$$

Neste apêndice consideramos as transformações

$$e^{\frac{C}{2}} = H e^{-A}$$

$$e^C = H^2 e^{-2A}$$

$$H = \frac{K}{\sqrt{\lambda \eta}}$$

$$e^{-C} = \frac{e^{2A} \lambda \eta^2}{K^2}$$

Referências

- 1 – Dirac, Paul André Maurice – Quantised singularities in the eletromagnetic field – Proceedings of Royal Society, 133, 60-72, (1.931).
- 2 – Nanbu, Y. – Strings, monopoles and gauge fields – Physical Review D,10, 12, 4262-4268, (1.974).
- 3 – Vilenkin, Alexander – Cosmic strings and domain walls – Physics Reports,121, 5, 263-315, (1.985).
- 4 – Nielsen, H. B. & Olesen, P. – Vortex-line models for dual strings – Nuclear Physics,61, 45-61, (1.976).
- 5 – Vilenkin, Alexander – String-dominated universe – Physical Review Letters,53, 10, 1016-1018, (1.984).
- 6 – Zel'dovich, Yakov B. – Cosmological fluctuations produced near a singularity – Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 192, 663-667, (1.980).
- 7 – Vilenkin, Alexander – Gravitational field vaccum domain walls and strings – Physical Review D,23, 4, 852-857, (1.981).
- 8 – Vilenkin, Alexander – Cosmic strings – Physical Review D,24, 8, 2082-2089, (1.981).
- 9 – Vilenkin, Alexander – Cosmological density produced by vacuum strings – Physical Review Letters,46, 17, 1169-1172, (1.981).
- 10 – Stédile, Edson – Geometry at the boundary of a pure magnetic string – European Journal of Physics, 12, 116-118, (1.991).
- 11 – Albrecht, Andreas & Turok, Niel – Evolution of cosmic strings – Physical Review Letters,54, 16, 1868-1871, (1.985).

- 12** – Gott III, Richard – Gravitational lensing effects of vacuum string: exact solution – *Astrophysical Journal*, 288, 422-427, (1.985).
- 13** – Hewitt, J. N.; Perley, R. A. & Hu, E. M. – Radio observations of a candidate cosmic string gravitational lens – *Astrophysical Journal*, 356, 57-61, (1.990).
- 14** – Garfinkle, David – General relativistic strings – *Physical Review D*, 32, 6, 1323-1329, (1.985).
- 15** – Laguna-Castilho, Pablo & Matzner, Richard A.— Coupled field solutions for U(1)-gauge cosmic strings — *Physical Review D*, 36, 12, 3663-3673, (1.987).
- 16** – Laguna-Castilho, Pablo & Matzner, Richard A. – Discontinuity cylinder model of gravitating U(1) cosmic strings – *Physical Review D*, 35, 12, 2933-2939, (1.987).
- 17** – Garfinkle, David & Laguna, Pablo – Contribution of gravitational self-interaction to $\Delta\phi$ and μ for a cosmic string – *Physical Review D*, 39, 6, 1552-1557, (1.989).