

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FRANCIS DIEGO MORETTO SARTURI

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
REFORÇADAS COM AÇO E COMPÓSITOS DE FIBRA DE CARBONO**

**CURITIBA**

**2014**

FRANCIS DIEGO MORETTO SARTURI

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
REFORÇADAS COM AÇO E COMPÓSITOS DE FIBRA DE CARBONO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Mecânica Computacional da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

**CURITIBA**

**2014**

## TERMO DE APROVAÇÃO

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências, programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração Mecânica Computacional, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

PPGMNE - UFPR

Prof. Dr. Sergio Scheer

PPGMNE – UFPR

Prof. Dr. Rafael Alves de Souza

Departamento de Engenharia Civil, UEM

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Lizi de Oliveira Maggi

Departamento de Engenharia Civil, UP

Curitiba, 14 de Março de 2014.

## RESUMO

Devido aos processos de deterioração que ocorrem nas edificações, é cada vez maior a demanda por soluções que reabilitem ou reforcem construções, surgindo novas técnicas que ajudam a restabelecer a segurança estrutural. Dentre elas, pode-se citar reforços que utilizam compósitos de fibra de carbono (CFRP), uma tecnologia que surgiu na indústria aeronáutica e que cada vez mais está sendo empregada na área da construção civil. Alguns dos fatores que estão levando a maior utilização de tais materiais são as suas excelentes propriedades mecânicas aliadas com o baixo peso. Entretanto, um fator que ainda limita a sua expansão de mercado é o seu elevado custo. Devido a isso, um projeto de reforço que utilize este tipo de material deverá otimizar a solução para buscar um equilíbrio entre o benefício técnico e o custo econômico. Embora existam modelos analíticos que permitam a avaliação estrutural deste sistema de reforço, a modelagem computacional pode proporcionar uma visão mais aprofundada do problema, permitindo ao projetista avaliar parâmetros que não podem ser obtidos por outras técnicas, sendo esse o principal enfoque deste trabalho. A modelagem computacional é uma área ampla, onde diversos métodos numéricos podem ser utilizados, destacando-se o Método dos Elementos Finitos na área de análise estrutural, um dos métodos mais robustos e eficazes, sendo utilizado para o desenvolvimento deste trabalho através do *software* comercial ABAQUS®. Os modelos constitutivos utilizados são baseados na Mecânica do Dano, utilizando-se também os conceitos de energia de fratura. Foram realizadas simulações de vigas de concreto sem e com reforço de CFRP. A aderência do reforço foi analisada considerando-se a união perfeita dos materiais e também através de um Modelo de Zona de Coesão, o que permite a consideração mais realista das propriedades do adesivo químico de ligação reforço/concreto e do sistema como um todo. Os resultados obtidos se mostraram muito próximos e satisfatórios quando comparados com os disponíveis na literatura, sejam de simulações numéricas ou de ensaios experimentais.

**Palavras-chave:** Elementos finitos, estruturas de concreto, compósitos de fibra de carbono, reforço estrutural.

## ABSTRACT

*Due to the deterioration processes that occur in buildings, the demand for solutions that strengthen or rehabilitate constructions are increasing, emerging new techniques that help restore the structural safety. Among these techniques, it is possible to mention the carbon fiber reinforced polymer (CFRP), a technology that has emerged in the industry and it is increasingly being employed in civil construction. Some of the factors that led to large-scale use of these materials are its excellent mechanical properties coupled with low weight. However, a factor that also limits its widespread use is its high cost. Because of this, a project of reinforcements that uses this type of material should optimize the solution to reach a balance between technical benefit and economic cost. Although there are analytical models that enable the evaluation of the structural reinforcement system, computational modeling can provide further insight into the problem, allowing the designer to evaluate parameters that can not be obtained by other techniques, being this the main focus of this work. Computer modeling is a large area where several numerical methods can be used, highlighting the Finite Element Method in the area of structural analysis, one of the most robust and effective methods, being used to develop this work through the commercial software ABAQUS<sup>®</sup>. The constitutive models used are based on Damage Mechanics, also using the concepts of fracture energy. Simulations of concrete beams with and without CFRP strengthening were performed. The reinforcement adhesion was analyzed considering the perfect union of the materials and also through a Cohesion Zone Model, which allows more realistic consideration of the chemical adhesive properties in the reinforcement/concrete bond. The results were compared with those available in the literature, whether numerical simulations or experimental trials.*

**Keywords:** *Finite elements, concrete structures, composite carbon fiber, structural reinforcement.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Hipóteses de decisões para estruturas com desempenho.....	23
Figura 2 – Elemento de interface de Ngo & Scordelis (1967).....	30
Figura 3 – Elemento de interface de Goodman <i>et al.</i> (1968).....	31
Figura 4 – Esquema de classificação para as ligas ferrosas.....	39
Figura 5 – Esquema de reforço de estrutura com chapa de aço colada. ....	40
Figura 6 – Complementação da ligação com bucha metálica. ....	42
Figura 7 – Compósito e seus constituintes.....	45
Figura 8 – Diferentes tipos de fibras.....	46
Figura 9 – Placa laminada com fibras orientadas em diferentes direções .....	47
Figura 10 – Representação esquemática de estruturas moleculares (a) lineares, (b) ramificadas, (c) com ligação cruzada e (d) em rede. ....	49
Figura 11 – Gráfico tensão-deformação para alguns tipos de fibras. ....	54
Figura 12 – Esquema do processo de pultrusão.....	56
Figura 13 – Constituintes do Laminado CFRP. ....	56
Figura 14 – Rolo comercial de lâminas de fibra de carbono. ....	57
Figura 15 – Esquema de fabricação da manta de fibra de carbono.....	58
Figura 16 – Tecido de fibra de carbono.....	59
Figura 17 – Esquema da preparação da peça para aplicação do reforço CFRP. ....	61
Figura 18 – Processo de aplicação de mantas flexíveis de CFRP. ....	62
Figura 19 – Aplicação de lâminas de CFRP em laje nervurada. ....	63
Figura 20 – Aplicação do CFRP em reforço de longarina de uma ponte. ....	63
Figura 21 – Aplicação de manta de CFRP em um pilar. ....	64
Figura 22 – Abordagem esquemática do comportamento mecânico dos.....	66
Figura 23 - Modos de abertura de fratura.....	67

Figura 24 – Volumes representativos utilizados nas diferentes abordagens da integridade estrutural.....	68
Figura 25 – Abordagens diferentes para o início de trincas. ....	69
Figura 26 – Volume representativo de um sólido com dano interno.....	70
Figura 27 – Tensão nominal (a) e tensão efetiva (b).....	70
Figura 28 – Acréscimo no comprimento devido à abertura dos defeitos.....	72
Figura 29 – Variação do módulo de elasticidade no ensaio de tensão-deformação. ....	74
Figura 30 – Deformações permanentes na análise plástica e de dano.....	75
Figura 31 – Efeito das fissuras em uma viga de concreto armado.....	79
Figura 32 – Resposta do concreto para tensão uniaxial de tração (a) e de compressão (b). ....	81
Figura 33 – Espaço de tensões de Haigh-Westergaard.....	85
Figura 34 – Exemplo de uma superfície de falha olhando-se pelo eixo hidrostático. ....	87
Figura 35 – Exemplo de interseção da superfície de falha com o plano definido por $\sigma_1$ e $\sigma_2$ .....	87
Figura 36 – Possíveis estados de tensão em relação à superfície de falha (observada pelo eixo hidrostático). ....	88
Figura 37 – Estado de tensão em um ponto projetado no plano desviador. ....	90
Figura 38 – Forma geral da superfície de falha para um material isotrópico.....	91
Figura 39 – Comportamento de encruamento do material.....	93
Figura 40 – Representação bidimensional de diferentes modelos da lei de encruamento do material.....	94
Figura 41 – Regra associativa e não associativa de escoamento plástico.....	96
Figura 42 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager (a) e plano meridiano (b). ....	99
Figura 43 – Plano desviador da superfície de falha para o modelo CDP. ....	103
Figura 44 – Superfície de falha para o modelo CDP no estado plano de tensões. ....	103

Figura 45 – Curvas tensão-deformação plástica ( $\sigma - \varepsilon^p$ ) na tração (a) e na compressão (b). .....	105
Figura 46 – Função linear e hiperbólica de Drucker-Prager.....	113
Figura 47 – Modelagem de interface com molas.....	119
Figura 48 – Leis constitutivas para os Modos puros. ....	125
Figura 49 – Composição da Lei de amolecimento do modo misto.....	128
Figura 50 – Diagrama equivalente da lei constitutiva pra Modo Misto. ....	129
Figura 51 – Ensaio DCB.....	136
Figura 52 – Ensaio ENF.....	136
Figura 53 – Ensaio MMB.....	137
Figura 54 – Estado de tensões no elemento coesivo.....	138
Figura 55 – União química de chapas metálicas analisada. ....	145
Figura 56 – Região de sobreposição das chapas no modelo simulado no ABAQUS®. ....	147
Figura 57 – Simetria do modelo de chapas metálicas sobrepostas. ....	148
Figura 58 – Vinculação e carregamento no modelo de chapas sobrepostas. ....	148
Figura 59 – Tensões principais obtidas no modelo de Samways (2013) (a) e no Modelo 1 (b). ....	150
Figura 60 – Tensões principais nos adesivos obtidas por Samways (2013) (a) e no Modelo 1 (b). ....	151
Figura 61 – Deformada do Modelo 1 em escala aumentada.....	152
Figura 62 – Restrições adicionais de deslocamentos impostas no Modelo 2. ....	153
Figura 63 – Tensões principais no adesivo no Modelo 2. ....	154
Figura 64 – Deformada do Modelo 2 em escala aumentada.....	154
Figura 65 – Tensões principais no adesivo no Modelo 3. ....	155
Figura 66 – Tensões principais no adesivo no Modelo 4. ....	156



Figura 67 – Critério de falha quadrático – Modelo 1.....	156
Figura 68 – Variável de dano $d$ – Modelo 1.....	157
Figura 69 – Esquema utilizado para a análise numérica do ensaio MMB.....	159
Figura 70 – Regiões do modelo numérico MMB. ....	162
Figura 71 – Local de aplicação do carregamento no ensaio MMB.....	163
Figura 72 – Vinculações aplicadas ao modelo numérico MMB. ....	163
Figura 73 – Malha utilizada na simulação do ensaio MMB. ....	164
Figura 74 – Curva carga-deslocamento para a simulação do ensaio MMB. ....	165
Figura 75 – Modelo de perfil com reforço (a) e características geométricas (b).....	167
Figura 76 – Modelos analisados de reforços mecânico de um perfil metálico.....	169
Figura 77 – Modelo estrutural analisado. ....	170
Figura 78 – Região de apoio na extremidade dos elementos bi e tridimensionais..	171
Figura 79 – Geometria da viga no problema de fissuração (dimensões em mm) ...	173
Figura 80 – Curva experimental de compressão uniaxial para o concreto B50. ....	174
Figura 81 – Curva experimental de tração uniaxial para o concreto B50. ....	174
Figura 82 – Curva de Kupfer para o concreto B50.....	175
Figura 83 - Modelo para viga com entalhe (a) e malha na região do entalhe (b)...	177
Figura 84 – Padrões de fissuração obtidos experimentalmente por Davies (1996) (a) e numericamente pelo autor (b). ....	178
Figura 85 – Desvio da trinca no concreto devido à heterogeneidade do material...	178
Figura 86 – Corpo de prova cilindro em ensaio de compressão uniaxial. ....	179
Figura 87 – Sólido de revolução e seção simulada.....	181
Figura 88 – Características geométricas e condições de contorno para o ensaio uniaxial.....	181
Figura 89 – Tensões (a) e deformações (b) axiais uniformes na amostra em determinado estágio de carregamento.....	182

Figura 90 – Curva tensão-deformação para o concreto B50 obtida numericamente pelo autor e experimentalmente por Jankowiak & Lodygowski (2006).....	183
Figura 91 – Curva de evolução do dano com a deformação para o concreto B50..	184
Figura 92 – Curva de evolução da tensão em função do dano para o concreto B50. .....	184
Figura 93 - Geometria para o problema da flexão de viga com entalhe.....	185
Figura 94 – Comportamento “ <i>tension softening</i> ” com relação linear.....	186
Figura 95 – Trinca devido ao entalhe (a) e esquema genérico do Modo I de abertura de fissuras (b). ....	186
Figura 96 – Curva do dano na tração em função do deslocamento da fissura. ....	187
Figura 97 – Simetria no modelo de viga com entalhe. ....	188
Figura 98 – Comportamento “ <i>tension stiffening</i> ” com quatro segmentos.....	189
Figura 99 – Comparação dos resultados em termos da curva carga-deslocamento no ponto central da viga com entalhe. ....	190
Figura 100 – Viga estudada na modelagem com CFRP. ....	191
Figura 101 – Curva Tensão-Deformação na compressão uniaxial para o concreto OB30.....	192
Figura 102 – Curva Tensão-Deformação na tração uniaxial para o concreto OB30. .....	193
Figura 103 – Curva Tensão-Deformação para o aço imerso no concreto OB30.....	194
Figura 104 – Curvas Tensão-Deformação para o concreto OB30. ....	195
Figura 105 – Curva de dano-deslocamento para o concreto OB30. ....	196
Figura 106 – Simplificação do problema devido à simetria. ....	196
Figura 107 – Condições de contorno utilizadas para as simulações de vigas com concreto OB30. ....	197
Figura 108 – Malha de elementos finitos utilizada para a viga de referência. ....	197
Figura 109 – Armadura imersa no interior da viga de referência.....	198

Figura 110 – Curva carga-deslocamento para a viga de concreto armado de.....	199
Figura 111 – Curvas carga-deslocamento numéricas para a viga de concreto armado de referência.....	200
Figura 112 – Curvas carga-deslocamento obtidas numericamente (Viga1) e experimental (Obaidt (2007)) para a viga de referência.....	200
Figura 113 – Malhas de elementos finitos utilizada nas simulações Viga1 (a) e Viga1A (b). ....	202
Figura 114 – Reforço de CFRP na viga de concreto armado.....	203
Figura 115 – Orientação do material ortotrópico utilizado para o CFRP. ....	204
Figura 116 – Modelo constitutivo para a interface coesiva entre concreto/CFRP. ...	205
Figura 117 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com aderência perfeita. ....	206
Figura 118 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço ortotrópico para a modelagem numérica com aderência perfeita. ....	207
Figura 119 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço para a modelagem numérica com aderência perfeita. ....	208
Figura 120 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com elementos de coesão. ....	209
Figura 121 – Refinos sucessivos de malha para a simulação da viga com reforço de CFRP. ....	211
Figura 122 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com elementos de coesão com sucessivos refinamentos de malha. ....	212
Figura 123 – Avaliação do ganho de capacidade resistente da viga com reforço em relação à viga de concreto armado de referência. ....	213
Figura 124 – Comparação dos modos de falha na interface entre viga/reforço. ....	214
Figura 125 – Comparação do padrão de fissuração da viga de concreto. ....	215

Figura 126 – Esquema com as mudanças das propriedades geométricas do reforço de CFRP. ....	217
Figura 127 – Comparação dos resultados obtidos no modelo com alteração de largura do reforço de CFRP. ....	218
Figura 128 – Comparação dos resultados obtidos no modelo com alteração do comprimento do reforço de CFRP.....	218
Figura 129 – Previsão dos valores de B-K. ....	234

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades com componentes do reforço de chapa de aço. ....	43
Tabela 2 – Propriedades mecânicas de algumas resinas .....	51
Tabela 3 - Propriedades típicas de algumas fibras. ....	53
Tabela 4 – Limites de irregularidades em superfícies reforçadas por CFRP. ....	60
Tabela 5 – Modelos de Zona de Coesão .....	121
Tabela 6 – Propriedades Mecânicas do adesivo LETOXIT.....	146
Tabela 7 – Propriedades Mecânicas da chapa metálica. ....	146
Tabela 8 – Propriedades Geométricas do modelo analisado.....	146
Tabela 9 – Resumo dos modelos analisados de chapas sobrepostas.....	158
Tabela 10 – Propriedades mecânicas para o ensaio MMB.....	160
Tabela 11 – Propriedades mecânicas para o ensaio MMB.....	160
Tabela 12 – Carga máxima obtida no ensaio MMB.....	165
Tabela 13 – Propriedades mecânicas e geométricas.....	167
Tabela 14 – Resultados de máxima flecha dos modelos analisados.....	172
Tabela 15 – Parâmetros para a análise de formação de trinca na viga. ....	176
Tabela 16 – Resumo dos modelos analisados.....	220

## LISTA DE SIGLAS

ASTM	Sociedade Americana para Testes e Materiais, do inglês <i>American Society for Testing and Materials</i> .
CDP	Modelo de dano plástico para o concreto, do inglês <i>Concrete Damaged Plasticity</i> .
CFRP	Compósito de polímero reforçado com fibra de carbono, do inglês <i>Composite Fiber Reinforced Polymer</i> .
CM	Meridiano de compressão, do inglês <i>compressive meridian</i> .
DCB	Amostra de viga bi-engastada, do inglês <i>Double Cantilever Beam Specimen</i> .
ENF	Teste de flexão com entalhe, do inglês <i>End Notched Flexure Test</i> .
HM	Elevado módulo, do inglês <i>high modulus</i> .
HS	Elevada resistência, do inglês <i>high strength</i> .
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MMB	Ensaio de Modo Misto de flexão, do inglês <i>Mixed-Mode Bending</i> .
MZC	Modelo de Zona de Coesão.
PAN	Poliacrilonitrile.
TM	Meridiano de tração, do inglês <i>tensile meridian</i> .

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E_0$	Módulo de elasticidade inicial
$E$	Módulo de elasticidade
$E^*$	Módulo de elasticidade efetivo
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G$	Módulo de elasticidade transversal (cisalhamento)
$d$	Variável de dano escalar
$d_c$	Variável de dano escalar na compressão
$d_t$	Variável de dano escalar na tração
$d_n$	Variável de dano escalar em uma superfície com direção normal $n$
$\bar{k}$	Vetor de dano plástico
$k_c$	Variável escalar de dano plástico na compressão
$k_t$	Variável escalar de dano plástico na tração
$k$	Variável escalar de dano plástico
$\dot{k}$	Taxa de dano plástico
$c$	Coesão do material
$\bar{c}$	Vetor coesivo do material
$c_c$	Coesão do material na compressão
$c_t$	Coesão do material na tração
$\dot{c}$	Taxa de coesão do material
$f_y$	Tensão de escoamento do aço

$\sigma$	Tensão escalar nominal
$\sigma^*$	Tensão escalar efetiva
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensões de Cauchy
$\bar{\sigma}^*$	Tensor de tensões efetivas
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais de um tensor de tensões
$\sigma_{cu}$	Tensão escalar compressiva última no ensaio de compressão uniaxial
$\sigma_{c0}$	Tensão escalar compressiva de escoamento no ensaio de compressão uniaxial
$\sigma_{t0}$	Tensão escalar de tração última/escoamento no ensaio de tração uniaxial
$\sigma_{b0}$	Tensão escalar compressiva de escoamento no ensaio de compressão equibiaxial
$\sigma_{tb0}$	Tensão escalar trativa de escoamento no ensaio de compressão equibiaxial
$\sigma_{\max}$	Valor algébrico máximo das tensões principais
$\tau_1, \tau_2, \tau_3$	Tensões na interface para os Modos I, II e III, respectivamente
$\tau_1^0, \tau_2^0, \tau_3^0$	Tensões máximas na interface para os Modos I, II e III, respectivamente
$\varepsilon$	Deformação escalar uniaxial
$\varepsilon^e$	Deformação escalar uniaxial elástica
$\varepsilon^{pl}$	Deformação escalar uniaxial plástica
$\varepsilon^*$	Deformação escalar uniaxial efetiva
$\bar{\varepsilon}$	Tensor de deformações
$\bar{\varepsilon}^*$	Tensor de deformações efetiva
$\dot{\varepsilon}^{pl}$	Taxa de deformação plástica



$G_1, G_2, G_3$	Taxas individuais de perda de energia na interface para os Modos I, II e III, respectivamente
$G_c$	Taxa crítica de perda de energia na interface
$G_T$	Taxa total de perda de energia na interface
$G_{1c}, G_{2c}, G_{3c}$	Energias de fratura para da interface para os Modos I, II e III, respectivamente
$u_1, u_2, u_3$	Deslocamentos relativos na interface para os Modos I, II e III, respectivamente
$\bar{u}$	Vetor de deslocamentos
$F$	Força
$S^*$	Área efetiva de uma seção
$S$	Área de uma seção
$S_{\text{vazios}}$	Área de vazios em uma seção
$a$	Medida do comprimento de trinca
$n$	Versor normal a uma superfície
$\Delta l$	Variação de comprimento
$l_0$	Comprimento inicial
$l$	Comprimento
$\Delta d$	Medida da variação de comprimento devido aos vazios em um sólido
$\bar{J}$	Matriz Jacobiana
$J$	Determinante da matriz Jacobiana
$m$	Excentricidade da superfície potencial plástica
$K_c$	Razão entre o segundo invariante do tensor desviador no plano meridiano de tração pelo de compressão

$\psi$	Ângulo de dilatância
$\phi$	Ângulo de atrito interno do material
$I_1$	Primeiro invariante do tensor de tensões
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviador
$q$	Tensão equivalente de Von Mises
$\theta$	Ângulo de Lode
$p$	Distância da origem do espaço de tensões até o plano desviador medida ao longo do eixo hidrostático
$\bar{I}$	Tensor identidade
$g_t$	Área abaixo do gráfico tensão de tração-deformação plástica
$g_c$	Área abaixo do gráfico tensão de compressão-deformação plástica
$\bar{D}$	Tensor de elasticidade
$\beta$	Razão entre os deslocamentos de cisalhamento e normal na interface
$K_0$	Rigidez de penalidade

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
1.1 OBJETIVOS.....	25
1.1.1 Objetivo Geral.....	25
1.1.2 Objetivos Específicos .....	25
1.2 METODOLOGIA .....	26
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	27
1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO.....	34
<b>2 ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM REFORÇO EXTERNO .....</b>	<b>37</b>
2.1 ESTRUTURAS REFORÇADAS COM CHAPAS DE AÇO.....	38
2.1.1 Processo Executivo .....	43
2.2 ESTRUTURAS REFORÇADAS COM FIBRA DE CARBONO.....	44
2.2.1 Matriz.....	48
2.2.2 Fibras de Carbono.....	51
2.2.3 Propriedades do Compósito de Fibra de Carbono (CFRP) .....	54
2.2.4 Produtos Comerciais .....	55
2.2.5 Processo Executivo .....	59
<b>3 MECÂNICA DO DANO.....</b>	<b>65</b>
<b>4 CONCRETO ESTRUTURAL .....</b>	<b>77</b>
4.1 MODELO DE DANO PLÁSTICO .....	80
4.1.1 Critério de Escoamento .....	98
4.1.2 Regra de Escoamento Plástico .....	104
4.1.3 Variável de Dano Plástico.....	104
4.1.4 Relação entre Coesão e Dano Plástico ( $c-k$ ).....	108
4.2 MODELO DE DANO PLÁSTICO MODIFICADO por Lee & Fenves (1998) ..	109
4.2.1 Superfície de Escoamento.....	111
4.2.2 Regra de Escoamento.....	112
<b>5 JUNTAS ADESIVADAS.....</b>	<b>117</b>

5.1	MODELO CONSTITUTIVO DE Camanho & Davila (2002).....	124
5.1.1	Início e Propagação do Dano .....	131
5.2	ELEMENTO FINITO DE COESÃO .....	137
<b>6</b>	<b>MODELOS E APLICAÇÕES.....</b>	<b>145</b>
6.1	MODELAGEM DE JUNTAS ADESIVADAS.....	145
6.1.1	Chapas Sobrepostas .....	145
6.1.2	Simulação Numérica do Ensaio MMB .....	158
6.2	MODELAGEM DE ESTRUTURAS REFORÇADAS .....	166
6.2.1	Flexão de Perfil Metálico .....	166
6.3	MODELAGEM DE ESTRUTURAS DE CONCRETO.....	172
6.3.1	Propagação de Trinca em uma Barra de Concreto Simples .....	172
6.3.2	Ensaio de Compressão Uniaxial.....	179
6.3.3	Flexão de uma Viga de Concreto com Entalhe .....	185
6.3.4	Viga de Concreto Armando Reforçada com CFRP .....	190
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>221</b>
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	224
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>225</b>
	<b>ANEXO A – OBTENÇÃO DO PARÂMETRO EXPERIMENTAL <math>\eta</math> .....</b>	<b>233</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade o ser humano busca construir edificações que visam garantir o seu conforto, segurança ou outra necessidade qualquer, como transposição de rios com pontes, armazenamento de água em barragens, interligação de caminhos através de estradas e outros. A construção, sendo uma das atividades mais antigas da humanidade, proporcionou ao longo do tempo grande acúmulo de conhecimento no assunto, chegando ao estágio atual onde é possível determinar de forma realista o comportamento de uma estrutura através dos mais variados métodos, sejam eles computacionais ou analíticos.

Os materiais empregados na construção variaram ao longo do tempo. A técnica de edificar começou nos primórdios da civilização com simples abrigos de materiais encontrados em estado bruto na natureza. Apresentou grande evolução nas civilizações egípcia e grega, onde a pedra, esculpida nas suas mais diversas formas, proporcionou a construção de grandes estruturas. Atualmente, destaca-se o emprego em larga escala do concreto e do aço, aliados aos produtos de alta tecnologia, como polímeros e fibras diversas.

As razões do emprego do concreto em estruturas são muitas, tanto em aspectos técnicos como econômicos, sendo no mundo o material mais utilizado para construções. As definições para consideração de um material como concreto variam entre os autores. Conforme a definição de Callister Jr. (2008), o concreto é um composto comum, feito com partículas grandes dispersas em um material aglomerante, composto por materiais cerâmicos. Já Nilson et al. (2009) apresenta a definição de que o concreto é o resultado de uma mistura de agregados graúdos com areia, água e cimento, formando um material semelhante à pedra. Independente da definição dos autores, o concreto, como a maioria dos materiais cerâmicos, quando utilizado sozinho e não submetido ao confinamento é relativamente fraco e extremamente frágil, sendo que a maioria das suas limitações pode ser melhorada ou até mesmo eliminada através de reforços ou aditivos, sendo o aço o mais comum dos reforços.

O reforço do concreto através de vergalhões de aço torna a estrutura capaz de suportar maiores tensões de tração, compressão e cisalhamento. Mesmo havendo fissuras no concreto, uma resistência considerável ainda é mantida. Além das pro-

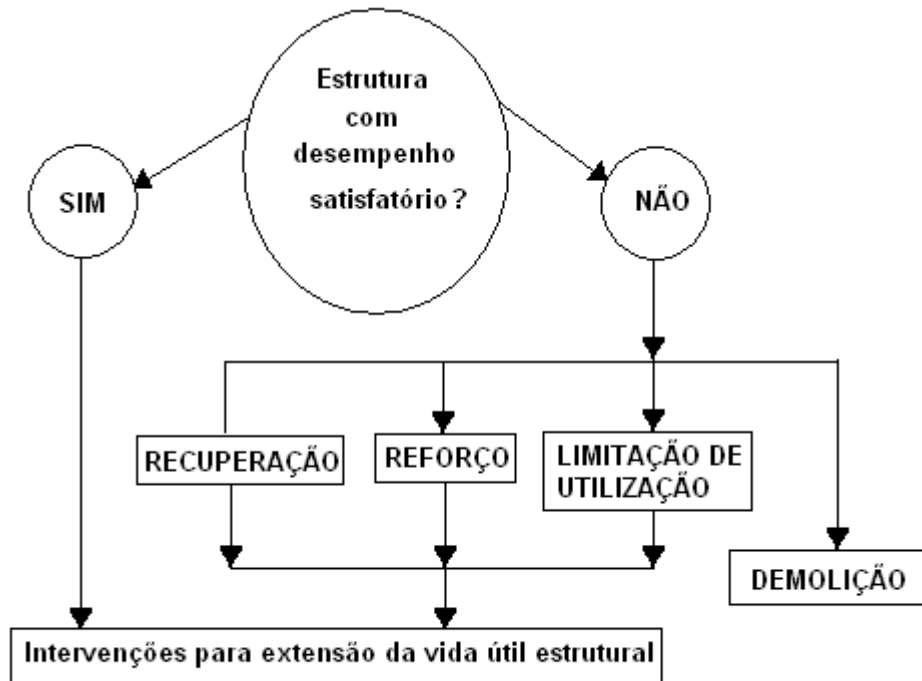
priedades dúcteis do aço, ele possui o coeficiente de expansão térmico muito parecido com o do concreto, sendo um material de reforço adequado e muito utilizado hoje em dia, obtendo-se peças altamente resistentes, sejam elas de concreto armado ou protendido.

Apesar da utilização de materiais com grande controle tecnológico e resistência, os processos que ocorrem na natureza, como variação de temperatura, radiação solar e muitos outros, aliados a fatores como acidentes, uso inadequado ou mesmo o envelhecimento natural do material, provocam o processo conhecido como deterioração estrutural. Este último pode ser entendido como qualquer processo que gere diminuição da resistência da estrutura, podendo levar a situações extremas onde ocorre o colapso da mesma.

Além da deterioração provocada por agentes agressivos já citados, as alterações de conceitos de espaços, reutilizações de ambientes ou re-adequações de funcionalidade levam a mudanças significativas nos níveis de solicitações e carregamentos de uma edificação, com o surgimento das mais diversas patologias, tornando-a muitas vezes inadequada para o uso. A durabilidade e vida útil dependerão significativamente dos processos de deterioração existentes, assim como das medidas adotadas para evitá-la.

Independente da causa da deterioração, modernamente se busca aliar o conceito de segurança e economia. As normas vigentes que regem o projeto e execução estrutural estabelecem condições mínimas para segurança, conforto e durabilidade, buscando que a construção atenda satisfatoriamente os objetivos para qual foi projetada. Para que isso aconteça, deve-se proceder com a sua manutenção.

Conforme Custódio & Ripper (1998), a manutenção estrutural é o conjunto de atividades necessárias à garantia do seu desempenho satisfatório ao longo do tempo, ou seja, o conjunto de rotinas que tenham por finalidade o prolongamento da vida útil, a um custo compensador. Os responsáveis pela estrutura deverão estar habilitados a tomar a melhor decisão sobre como proceder, adotando a opção mais conveniente, tanto tecnicamente como economicamente, conforme esquema apresentado na Figura 1.



**Figura 1 – Hipóteses de decisões para estruturas com desempenho insatisfatório.**

FONTE: Custódio & Ripper (1998).

Caso a opção escolhida no esquema da Figura 1 seja a recuperação ou reforço, a técnica a ser utilizada dependerá dos objetivos e recursos disponíveis. Existem diversos procedimentos que visam readequar a resistência estrutural a níveis compatíveis aos das solicitações existentes, sendo o principal deles o reforço mecânico, ou seja, aquele onde objetiva-se a elevação da resistência dos componentes. Este procedimento muitas vezes é uma intervenção significativa, que deve ser elaborada com atenção e muito critério.

Os reforços mecânicos que exijam o aumento de dimensões nas peças ou intervenções prolongadas podem muitas vezes não serem práticos. O ambiente construído e ocupado muitas vezes não permite estas intervenções, abrindo espaço para outros tipos menos impactantes, tanto visualmente como funcionalmente, podendo-se destacar os reforços colados de chapas de aço e fibra de carbono.

Diversos manuais, normas, códigos e livros abordam o assunto de reforço estrutural. Foram desenvolvidos diversos modelos analíticos para os estudos de vigas

reforçadas, como por exemplo, os métodos citados em Custódio & Ripper (1998) (conhecidos como métodos de Bresson, Canóvas, Van Gemert, Ziraba e Hussein, Campagnolo, Silveira e Souza) para os reforços com chapa de aço e o método da norma americana ACI 440.2R (2008) com complemento do ACI 318 (2008) e os boletins técnicos da FIB (2001) para os reforços com fibra de carbono, detalhados e exemplificados em Perelles (2013). Entretanto, estes modelos analíticos não representam o comportamento tridimensional da peça, contando apenas com expressões para o cálculo da sua capacidade resistente.

A modelagem computacional pode fornecer diversas informações que os métodos analíticos não são capazes. Esta técnica surgiu a partir da metade do século XX e se propagou logo em seguida com a popularização dos computadores. Diversos métodos matemáticos utilizados na engenharia foram implementados em códigos e processados nos computadores, destacando-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno e principalmente o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este último método consiste na divisão do domínio de análise em tantos sub-domínios quanto forem necessários e na transformação das equações diferenciais que regem o problema em um sistema de equações algébrico, que pode ser mais facilmente resolvido através das diversas técnicas existentes na matemática.

Dentro da engenharia estrutural o MEF proporcionou grande revolução, permitindo a resolução de problemas complexos cuja solução analítica se mostra inviável. Na análise de estruturas de concreto, esta técnica tem permitido a avaliação detalhada do seu comportamento, tendo-se ao mesmo tempo modelagem bastante abrangente e específica dos componentes envolvidos no sistema estrutural.

Haja vista a importância do assunto dentro da engenharia moderna e a necessidade de um conhecimento e desenvolvimento maior do assunto, este trabalho está baseado na análise computacional de vigas de concreto reforçadas com chapas de aço e com compósitos de fibra de carbono. Serão utilizados conceitos da Mecânica do Contínuo e do Dano para caracterizar o comportamento dos materiais, sendo que esta última será utilizada conjuntamente com a Teoria da Plasticidade para representar o comportamento do concreto através da Teoria do Dano Plástico.

Atenção especial será dada para caracterizar as regiões de interface entre a peça de concreto e o reforço externo (aço ou compósito de fibra de carbono). Dois



modelos de união foram utilizados, um que considera a aderência perfeita entre os materiais e outro onde as propriedades do adesivo químico aderente podem sofrer alterações conforme o nível de sollicitação, modelo esse baseado na Mecânica do Dano. Para tanto, será utilizado o *software* comercial de elementos finitos ABAQUS®, da empresa Dassault Systèmes.

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

O principal objetivo deste trabalho é a análise de estruturas de concreto armado reforçadas através da colagem de reforços externos de compósitos de fibra de carbono. Este estudo é baseado na modelagem computacional. As técnicas de produção e execução serão brevemente apresentadas. Apesar de existirem inúmeros modelos analíticos para a análise do problema, eles não proporcionam uma visão global do elemento estrutural, assunto que pode ser mais bem abordado através da modelagem numérica.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

Dentro da análise global da peça de concreto reforçada, objetiva-se avaliar o comportamento das interfaces entre o concreto - película de cola - reforço através de dois modelos, um que considera a união perfeita dos materiais e outro onde uma região coesiva com propriedades degenerativas é considerada, analisando-se assim a metodologia mais adequada a ser utilizada nesta região de interface. Busca-se também determinar as propriedades geométricas e dimensionais dos reforços que melhor contribuam para o binômio economia/segurança, determinando-se o seu melhor posicionamento, dimensão, espessura, etc.

Com relação ao elemento de concreto armado, objetiva-se determinar a capacidade limite de carga e conseqüentemente o ganho de resistência obtido com a peça reforçada. Os padrões de deformação e de fissuração serão comparados entre as

peças com e sem reforço externo e também com os ensaios experimentais disponíveis na literatura, verificando se os modelos adotados conseguem representar adequadamente estes fenômenos.

Pelo fato dos modelos numéricos simulados utilizarem o MEF, questões relacionadas à malha, como por exemplo, seu tamanho e tipo de elemento finito utilizado são levados em consideração nos resultados finais, avaliando-se, por exemplo, o custo/benefício de se utilizar uma malha mais ou menos refinada.

## 1.2 METODOLOGIA

Primeiramente serão apresentados os fundamentos teóricos necessários para os desenvolvimentos seguintes, com especial atenção para os modelos constitutivos dos materiais e a caracterização da região coesiva (cola de união entre o compósito e o concreto). Uma visão geral da técnica de execução dos reforços de aço e de fibra de carbono também é apresentada.

O tema abordado neste trabalho é bastante abrangente, envolvendo diversas áreas do conhecimento, como Mecânica do Dano, plasticidade, teorias de falha, modelos constitutivos, elementos finitos, teoria de contato, materiais coesivos e outros. Busca-se, antes de modelar numericamente o problema final, avaliar individualmente cada assunto, visando garantir a validade dos modelos utilizados, sendo que estas análises foram realizadas através do *software* comercial ABAQUS<sup>®</sup>, versão V10.

São verificados primeiramente os resultados obtidos com a modelagem de juntas adesivadas. Posteriormente, o modelo constitutivo para o concreto é avaliado através de diversos problemas simples, tendo-se conhecimento então das suas vantagens e limitações. Uma vez analisados os problemas intermediários, realiza-se a modelagem do problema proposto, ou seja, a avaliação de uma viga de concreto armado reforçada com aço e fibra de carbono, comparando-se os resultados obtidos com os disponíveis na literatura.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A idéia de reforçar estruturas de concreto surgiu primeiramente na França no final da década de 60 do século XX, conforme Juvandes (1999), onde pesquisadores locais realizaram os primeiros estudos com chapas de aço coladas externamente em vigas. Na Inglaterra, estudos desenvolvidos na década de 70 do século passado proporcionaram a reabilitação de centenas de pontes, como apresentado em Mays *et al.* ((1985) *apud* Juvandes (1999)). Primeiramente, as estruturas reforçadas com chapas de aço tinham como objetivo os esforços decorrentes de flexão, sendo que posteriormente esforços de cisalhamento também se valeram deste sistema, conforme Jones *et al.* ((1985) *apud* Juvandes (1999)).

Apesar da grande utilização ao longo dos anos das chapas de aço como sistema de reforço estrutural, algumas limitações do sistema, como por exemplo, o risco de corrosão e o peso do aço, que acarreta em dificuldades para trabalhos de campo, têm limitado o seu maior emprego e conseqüentemente ocorrendo a substituição por reforços de outros materiais, como as fibras de carbono.

Com o desenvolvimento de novas tecnologias, especialmente das fibras e compósitos laminados, pesquisadores japoneses, apoiados pelo governo local, empregaram um grande esforço para a aplicação destes materiais em edificações, de modo a permitir maior segurança das estruturas, principalmente em situações de abalos sísmicos (Gallardo (2002)). Após a destruição causada pelo grande abalo sísmico de Kobe em 1995, a tecnologia do emprego de fibras de carbono em estruturas de concreto obteve grandes avanços, desenvolvendo-se enormemente.

Após a realização de diversos ensaios experimentais para caracterizar o sistema viga/reforço como um todo, pesquisadores do mundo todo se voltaram para os métodos analíticos com objetivo de expressar o comportamento da viga reforçada, seja este reforço de aço ou de CFRP. Surgiram diversos métodos, como por exemplo, para reforços de chapa de aço, os métodos de Bresson, Canóvas, Van Gemert, Ziraba e Hussein, Campgnolo, Silveira e Souza, todos apresentados em Custódio & Ripper (1998) e também os métodos para reforços de CFRP, como os métodos da

norma americana ACI 440.2R (2008) com complemento do ACI 318 (2008) e os boletins técnicos da FIB (2001).

Apesar dos métodos analíticos apresentarem uma boa estimativa para a capacidade de carga, não são capazes muitas vezes de apresentar outros dados importantes, como o padrão de fissuração, a influência do comprimento do reforço, a caracterização da região de interface e outros assuntos. Já os métodos experimentais se mostram relativamente caros e pouco práticos. Todas estas questões puderam ser melhor abordadas através da modelagem computacional a partir da segunda metade do século XX, com a popularização dos computadores.

Conforme Kwak & Filippou (1990), as vigas de concreto armado começaram a ser simuladas numericamente pelo Método dos Elementos finitos por Ngo & Scordelis (1967) através de modelos simples. O concreto e a armadura eram representados por elementos triangulares de deformação constante e um elemento de mola era utilizado para conectar o aço ao concreto, caracterizando assim o efeito de deslizamento entre eles. Esse modelo também pode ser considerado como um dos primeiros estudos no sentido de se modelar interfaces entre dois materiais. Ele será apresentado de forma mais concisa um pouco mais adiante.

Diversos outros modos de representar estruturas de concreto através de elementos finitos surgiram com o decorrer do tempo, apresentados com mais detalhes em Kwak & Filippou (1990). Independentemente do modelo de elemento finito utilizado, o comportamento do material deve ser expresso por um modelo constitutivo adequado. Esse é um fator fundamental para que simulações numéricas representem adequadamente o comportamento de uma estrutura de concreto ou outro material qualquer.

Uma compilação de diversos modelos constitutivos para o concreto pode ser encontrada em Babu *et al.* (2005). Neste trabalho são citados modelos empíricos, elástico lineares, elástico não-lineares, plásticos, macro-micromecânicos, modelos baseados na Mecânica da Fratura e do Dano, entre outros. Os modelos baseados na Mecânica da Fratura e Dano são fundamentados nos conceitos de coalescência e propagação de micro-fissuras, presentes no concreto antes mesmo da aplicação de um carregamento externo. O trabalho de Hillerborg *et al.* (1976) foi pioneiro ao utilizar o conceito de fissuras incorporadas ao concreto em modelagens de elemen-

tos finitos, prevendo uma zona de processo plástico na ponta da fissura onde é assumido que as tensões são perpendiculares às fissuras.

A Mecânica do Dano difere da Mecânica da Fratura na medida em que esta última representa defeitos discretos no material, enquanto a primeira considera micro-defeitos distribuídos de forma homogênea. O conceito de dano foi introduzido originalmente por Kachanov ((1958) *apud* Botta (1998)) para problemas relacionados à fluência de materiais, sendo depois estendido para outras aplicações. O desenvolvimento teórico da Mecânica do Dano com base na termodinâmica dos processos irreversíveis foi apresentado por Lemaitre e Chabouche (1985), citados em Babu *et al.* (2005).

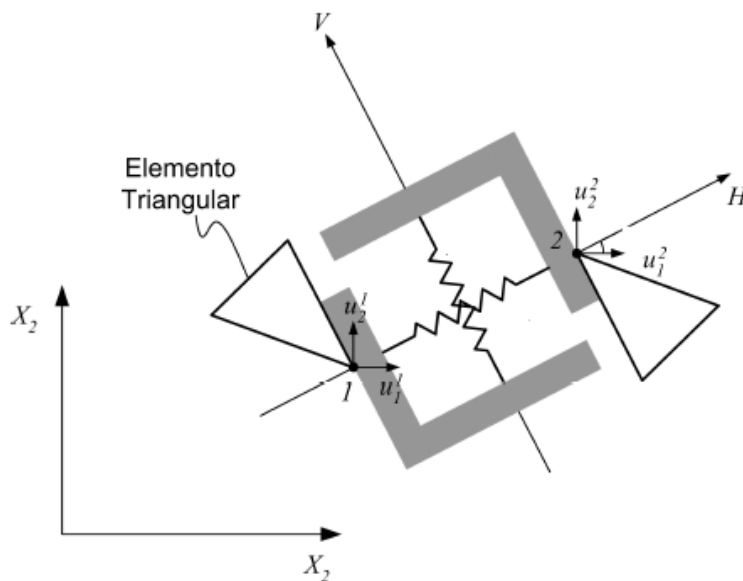
Um modelo bastante simples, mas que introduziu o conceito de variável escalar de dano, foi desenvolvido por Mazars (1984 *apud* Penna (2011)). Os conceitos propostos por este autor eram expressos em função de deformações equivalentes e calculados a partir das deformações principais positivas. A degradação do material era obtida por uma combinação de uma variável de dano na tração e outra na compressão através de uma função de peso usada para compatibilizar o comportamento do material.

Visando contornar alguns problemas apresentados por outros modelos de concreto, Lubliner *et al.* (1988) propuseram representar as características não-lineares do concreto através de um modelo constitutivo simples, baseado na teoria da plasticidade, onde tanto a falha na compressão como na tração eram considerados. Neste, uma variável escalar de dano é utilizada para representar todos os estados de danificação, sendo acoplada com a deformação plástica nas relações constitutivas. Entretanto, esse acoplamento provoca instabilidade numérica (Lee & Fenves (1998)).

Por utilizar apenas uma variável de dano, o modelo de Lubliner *et al.* (1988) não se mostrou adequado para representar carregamentos cíclicos. Um novo modelo de dano-plástico foi proposto por Lee & Fenves (1998) baseado no trabalho original de Lubliner *et al.* (1988), utilizando-se duas variáveis de dano, uma para a tração e outra para a compressão. A função e regra de escoamento também foram modificadas. O modelo Lee & Fenves (1998) foi extensivamente utilizado por diversos outros autores, sendo implementado em diversos códigos computacionais.

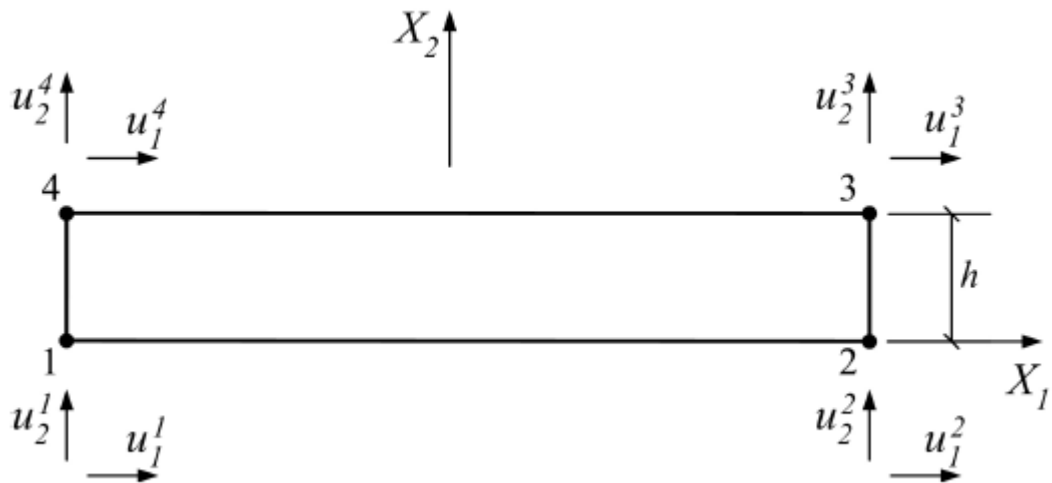
Em aplicações práticas do modelo de Lee & Fenves (1994), pode-se citar o trabalho de Lee *et al.* (2008). Em alguns casos, as vigas de ligação das torres do Edifício Burj Dubai apresentaram solicitações ao cisalhamento três vezes maiores que as resistências recomendadas por normas, levando os projetistas a optar por modelagens numéricas com o propósito de compreender o comportamento destas vigas. Neste estudo, foi utilizado, entre outros, o Modelo de Dano Plástico, obtendo-se resultados que indicavam que a referência normativa utilizada era conservadora em relação ao limite máximo de solicitação ao cisalhamento, possibilitando assim o projeto destas vigas.

Uma das questões fundamentais quando se analisa a união química de dois componentes, como é o caso de vigas com reforço externo, é com relação à região de interface. Os modelos para caracterizar a interface entre corpos diferentes, não apenas na união química de dois componentes, começaram a ser estudados juntamente com as vigas de concreto por Ngo & Scordelis (1967), como comentado anteriormente. Neste modelo, os elementos de interface são representados por meio de um conjunto de molas lineares ortogonais, conforme a Figura 2. Uma das vantagens deste elemento é que ele apresenta espessura nula, podendo ser utilizado em situações onde não há elementos de transição ou interface no sistema real, como na interação solo-estrutura.



**Figura 2 – Elemento de interface de Ngo & Scordelis (1967).**  
 FONTE: Adaptado de Lázaro (2004).

Pouco tempo depois Ngo & Scordelis (1967), em estudos de maciços rochosos, Goodman *et al.* (1968) propuseram um elemento de interface baseado nos deslocamentos relativos entre os nós opostos, caracterizando assim a deformação do elemento. O elemento finito desenvolvido por estes autores é composto por quatro nós e com dois graus de liberdade cada nó, podendo ser visualizado na Figura 3. Este modelo foi aplicado em diversas situações encontradas na Mecânica dos Solos, como no projeto de túneis trapezoidais e em formato de semicírculo.



**Figura 3 – Elemento de interface de Goodman *et al.* (1968)**

FONTE: Adaptado de Lázaro (2004).

Diversos outros autores apresentaram seus modelos após os trabalhos pioneiros de Ngo & Scordelis (1967) e Goodman *et al.* (1968), sendo que Lázaro (2004) apresenta uma visão geral de diversos deles. Uma das características dos modelos compilados por Lázaro (2004) é que eles apresentam nas suas formulações questões relacionadas a deslocamentos relativos entre nós adjacentes, não apresentando propriedades que representem a degradação desta interface.

Visando representar as propriedades degenerativas dos materiais em uma interface, Barenblatt (1959) descreve o primeiro Modelo de Zona De Coesão (MZC).

Este trabalho tinha como objetivo inicial ser uma alternativa para o conceito de fraturas em materiais frágeis.

O conceito de zona de coesão corresponde a regiões onde duas superfícies são unidas por um elemento com propriedades aderentes, seja este qual for. Algumas características são fundamentais no MZC, como por exemplo, as dimensões desprezíveis da região aderente. A principal vantagem deste modelo é o fato de se prever o surgimento e propagação da delaminação sem o conhecimento prévio da localização da trinca e sua direção de propagação.

Após Barenblatt (1959), a aplicação do MZC foi introduzida para materiais dúcteis, como o aço, por Dugdale (1960), conforme Chandra *et al.* (2002). Este último apresenta um histórico da evolução dos MZC, notando-se que a maioria dos modelos utiliza a relação entre tensão e deslocamento relativo para o estudo da interface.

Nos modelos apresentados por Chandra *et al.* (2002), a diferença principal entre os diversos autores está na forma de representação da lei tensão-deslocamento relativo. Pode-se destacar o trabalho de Needleman (1987), que foi um dos primeiros pesquisadores a utilizar modelos exponenciais e polinomiais de equação constitutivas.

Diversos outros autores, todos apresentados em Chandra *et al.* (2002), tiveram contribuições importantes em modelos de zona de coesão, como Rice e Wang (1989), que propuseram uma lei tensão-deslocamento baseada em modelos atômicos aplicados a problemas de segregação de solutos. Tvergaard e Hutchinson (1992) utilizaram uma forma trapezoidal da lei constitutiva, isso para calcular a resistência de fissuras quando submetidas a carregamentos externos.

Recentemente, podem-se destacar na área de MZC os trabalhos de Camacho e Ortiz (1996), onde foram empregadas relações lineares para a avaliação da propagação de fissuras em materiais submetidos a carregamentos de impacto. Também para análise de problemas de impacto, uma relação bi-linear foi proposta por Guebelle e Baylor (1998). Posteriormente, adaptações foram feitas neste modelo por Camanho & Davila (2002) para representar os modos de dano em elementos de interface que possuem espessura quase nula, mostrando as vantagens de se utilizar



o modelo de Benzeggagh & Kenane (1996) em situações onde a evolução do dano ocorre sob carregamentos simultâneos de diversos tipos (Modo Misto de carregamento).

Ensaio experimentais foram realizados por Reeder & Crews (1990) para caracterizar o comportamento de compósitos laminados unidos por adesivos químicos. Posteriormente, Camanho & Davila (2002) realizaram simulações numéricas de corpos de prova que simulam três diferentes formas de carregamento de um material e compararam os resultados obtidos com os experimentais de Reeder & Crews (1990). A primeira forma de carregamento corresponde ao ensaio de uma viga bi-engastada, ou ensaio DCB (*“Double Cantilever Beam Test”*), o segundo é um teste de flexão com entalhe, teste ENF (*“End Notched Flexure Test”*) e o terceiro corresponde ao modo misto de carregamento de um material, ensaio MMB (*“Mixed-Mode Bending”*). Os resultados obtidos numericamente por Camanho & Davila (2002) utilizaram a formulação de elementos finitos de coesão desenvolvida por Balzani & Wagner (2008), correspondendo a um elemento sólido hexaedral de oito nós.

Com relação específica às vigas de concreto reforçadas com CFRP, foram realizadas diversas pesquisas experimentais relativamente recentes, como por exemplo, os trabalho de Juvandes (1999) e Beber (2003). Neste último, vigas de concreto armado reforçadas com mantas flexíveis de CFRP foram ensaiadas com o objetivo de verificar o aumento da resistência à flexão. Destaca-se o trabalho de Coronado & Lopez (2006), que além de ensaios experimentais, realizaram modelagens numéricas com o objetivo de se comparar com os resultados experimentais. Os mesmos modos de falha presentes no ensaio experimental foram obtidos no modelo numérico e as curvas carga-deslocamento se apresentaram muito semelhantes. O modelo constitutivo utilizado na modelagem de Coronado & Lopez (2006) corresponde a um modelo de dano plástico e o comportamento à tração foi representado por uma curva de amolecimento com modelos linear e bi-linear.

Ensaio experimentais desenvolvidos por Obaidt (2007) também foram comparados com modelagens numéricas em Obaidt *et al.* (2010). Neste último, o *software* comercial ABAQUS<sup>®</sup> foi utilizado para modelos tri-dimensionais de vigas de concreto armado reforçadas com CFRP. A região de interface do compósito com a viga foi abordada através da consideração da união perfeita entre ambos e também

através de um MZC, este último baseado no trabalho de Camanho & Davila (2002). Modelagens paramétricas com o objetivo de verificar a influência do tamanho do compósito na capacidade de carga da viga também foram apresentadas em Obaidt *et al.* (2010). As curvas de carga-deslocamento dos ensaios numéricos se apresentaram condizentes com os resultados experimentais.

Foram apresentados alguns autores de referência para o presente trabalho, sendo que muitos dos resultados obtidos nas pesquisas desenvolvidas por eles servirão de base de comparação para as modelagens realizadas.

#### **1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO**

Inicialmente é realizada uma introdução ao assunto abordado nesta dissertação, realizando uma apresentação histórica e a sua importância social, demonstrando a relevância técnica e econômica do assunto. Ainda, são apresentados os principais pesquisadores da área, tanto aqueles que desenvolveram o assunto no passado como os que se destacam atualmente.

As descrições qualitativas dos reforços de aço e fibra de carbono são apresentadas no Capítulo 2. São mostrados dados técnicos sobre os materiais utilizados, os processos de fabricação, os sistemas construtivos empregados, as limitações de uso, as recomendações dos fabricantes e pesquisadores.

Para o entendimento e clareza da dissertação, a base teórica da Mecânica do Dano está contida no Capítulo 3. Este capítulo será fundamental para os seguintes, já que tanto os modelos constitutivos de uniões coladas como o de concreto utilizam como base a Mecânica do Dano.

O concreto estrutural é o assunto abordado no Capítulo 4. Nesse, os aspectos matemáticos da sua modelagem são discutidos. Os principais modelos constitutivos existentes na literatura são abordados, com destaque para o modelo de Lubliner *et al.* (1988) e as adaptações apresentadas por Lee & Fenves (1998) para utilizar o modelo de Lubliner *et al.* (1988) em análises que envolvam cargas cíclicas, já que esse é mais adequado para situações onde as cargas são monotômicas.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo das uniões adesivadas, ou seja, a união de dois materiais através de cola. São evidenciadas as características, vantagens e desvantagens deste sistema e a sua utilização na engenharia moderna. As relações constitutivas utilizadas, baseadas no modelo de zona de coesão, são extensivamente apresentadas, finalizando o capítulo com o procedimento de abordagem do problema sob o ponto de vista de elementos finitos.

As simulações realizadas no *software* ABAQUS® para a comprovação das teorias expostas nos capítulos anteriores são apresentadas no Capítulo 6. Os resultados dos modelos de juntas adesivadas baseados no trabalho de Samways (2013) são discutidos, assim como os diversos problemas que envolvam o modelo de dano plástico para o concreto. Após isto, os modelos completos de viga de concreto com reforço de aço ou fibra de carbono são abordados, com ênfase no procedimento de modelagem numérica e também nos resultados, sempre comparando-os com os disponíveis na literatura.

No último capítulo (Capítulo 7) apresentam-se as conclusões sobre os problemas desenvolvidos no trabalho, assim como a análise crítica dos resultados obtidos. Ao final, são sugeridos estudos futuros complementares a este trabalho.



## 2 ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM REFORÇO EXTERNO

Será apresentada a seguir uma visão geral da técnica de reforço de estruturas de concreto, com enfoque nos reforços externos em vigas, sejam esses com chapa de aço ou fibra de carbono, objetivos deste trabalho. Ao final deste capítulo, poderá se ter uma compreensão mais clara dos problemas e situações abordados numericamente nos capítulos seguintes.

Uma viga pode ser reforçada para aumentar a sua resistência aos esforços normais e/ou de cisalhamento. A necessidade do reforço pode ocorrer por diversos motivos, podendo-se citar os principais:

- i. Insuficiência de armadura de tração na flexão e alongamento excessivo dos estribos no cisalhamento/torção;
- ii. Resistência inadequada à compressão do banzo e diagonais na flexão e cisalhamento, respectivamente, seja pela má qualidade do concreto ou pela insuficiência de armadura de compressão (flexão).

A ampliação da capacidade resistente (reforço) de uma estrutura pode ser realizada de diversas formas, dependendo das suas causas, objetivos e recursos disponíveis, sendo que os mais utilizados atualmente são:

- a) Adição de perfis metálicos;
- b) Aumento da seção transversal;
- c) Aumento da área de armadura;
- d) Protensão;
- e) Colagem de chapas metálicas;
- f) Reforço com compósitos de fibra de carbono.

Dentre os métodos citados, os dois últimos têm a vantagem de apresentar execução rápida e permitem intervenções de emergência em tempo curto, sendo que a técnica empregada é simples, em termos de concepção, mas exigente quanto ao

rigor executivo e de cálculo. As características e técnicas de execução deles serão apresentados mais detalhadamente na sequência.

As normas e códigos nacionais na área de engenharia estrutural não contemplam o assunto. Entretanto, as normas europeia e americana trazem um conjunto de recomendações ao projetista visando garantir o desempenho satisfatório do reforço, podendo-se destacar o ACI 440.2R (2008) e o FIB (2001).

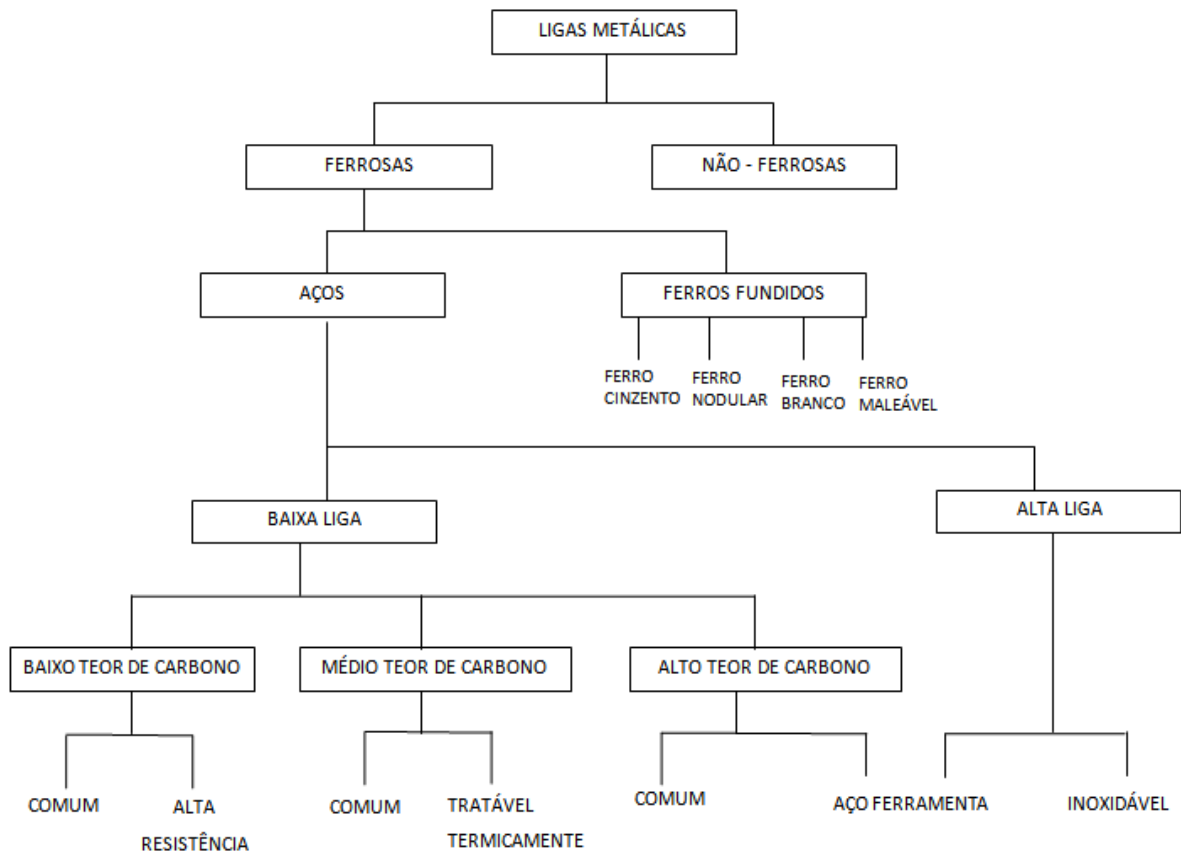
Outras fontes de informação muito importantes na execução e projeto dos reforços são os fabricantes dos produtos, que muitas vezes possuem manuais de execução baseados em diversos ensaios experimentais, realizados em ambiente controlado e monitorado.

## **2.1 ESTRUTURAS REFORÇADAS COM CHAPAS DE AÇO**

O aço é um material muito utilizado na engenharia estrutural, apresentando boa relação entre propriedades mecânicas geralmente antagônicas, a resistência e ductilidade. Depois de atingida a sua tensão de escoamento, pode ocorrer significativo aumento da resistência mecânica com as deformações plásticas, propriedade essa conhecida como encruamento.

A composição química dos aços é baseada em ligas de ferro-carbono que podem conter concentrações apreciáveis de outros elementos de liga. As propriedades mecânicas são bastante sensíveis ao teor de carbono, que normalmente é inferior a 1%. A classificação mais comum dos aços é em função do teor de carbono e dos elementos de liga presentes.

Quando um aço apresenta alta concentração de elementos de liga ele é conhecido como aço-liga ou alta liga. Caso contrário, ele é classificado como aço baixa liga ou aço carbono. Os aços carbono são separados em três grupos, conforme a concentração de carbono, podendo ser um aço de baixo, médio ou elevado teor de carbono. Como por exemplo, pode-se citar o aço comercial de classificação SAE 1020, que contém porcentagem de carbono de 0,2%. A Figura 4 apresenta um esquema de classificação das ligas ferrosas.

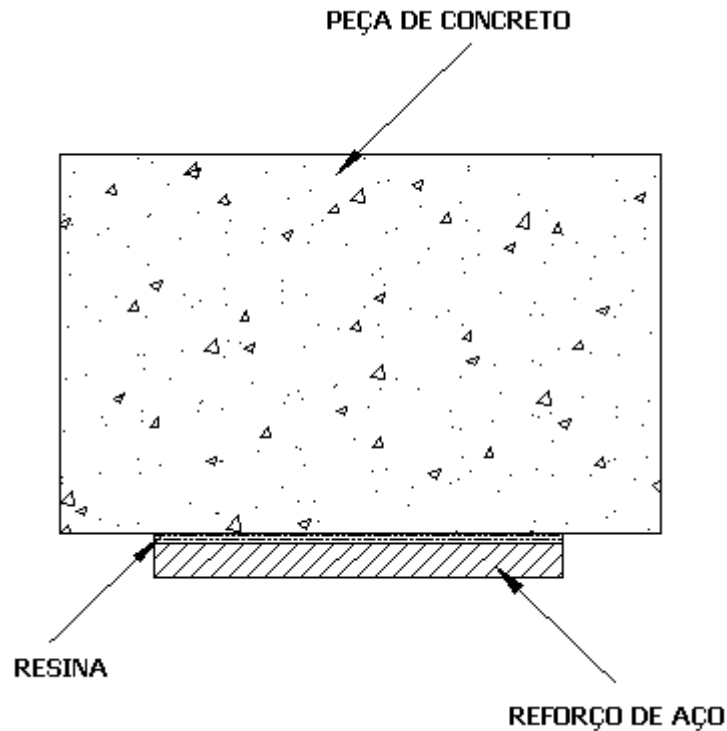


**Figura 4 – Esquema de classificação para as ligas ferrosas.**  
 FONTE: Adaptado de Callister Jr. (2008).

Os processos de fabricação existentes na indústria siderúrgica moderna permitem obter diversas formas, habilitando os produtos de aço para as mais diversas aplicações. Dentre as formas geométricas mais utilizadas, podem-se destacar as barras circulares utilizadas em larga escala na construção civil, os perfis metálicos extrudados ou soldados e as chapas laminadas, que podem ser dobradas e conformadas de diversas formas. Outra técnica bastante comum quando se trabalha com aços são os tratamentos térmicos, que permitem alterações das propriedades mecânicas através da modificação da microestrutura da liga.

A utilização de chapas finas de aço coladas ao concreto é uma técnica bastante atual e muito eficiente quando o trabalho é bem executado. Surgiu na França nos finais da década 60 do século XX, onde pesquisadores locais fizeram os primeiros ensaios com vigas reforçadas com chapas coladas. Conforme Custódio & Ripper

(1998), este método é bastante simples, tratando-se da colagem de finas chapas de aço à superfície de concreto com uma resina, conforme a Figura 5, criando-se um elemento estrutural composto concreto-aço-resina.



**Figura 5 – Esquema de reforço de estrutura com chapa de aço colada.<sup>1</sup>**

Diversos ensaios foram realizados para verificar a efetividade da colagem de chapas de aço nas faces da viga, chegando-se a conclusão de que ocorrem aumentos significativos na resistência à flexão em conjunto com aumento da rigidez evidenciados por menores deformações e fissuras (Beber (2003)).

O tipo de aço a ser utilizado dependerá do nível de resistência necessário, sendo um parâmetro a ser definido em projeto. Entretanto, Juvandes (1999) recomenda a utilização de aços de baixa ou média resistência, de modo a não ser necessária uma deformação elevada para mobilizar a sua capacidade resistente.

---

<sup>1</sup> As figuras e tabelas sem indicação de fonte foram criadas pelo próprio autor.

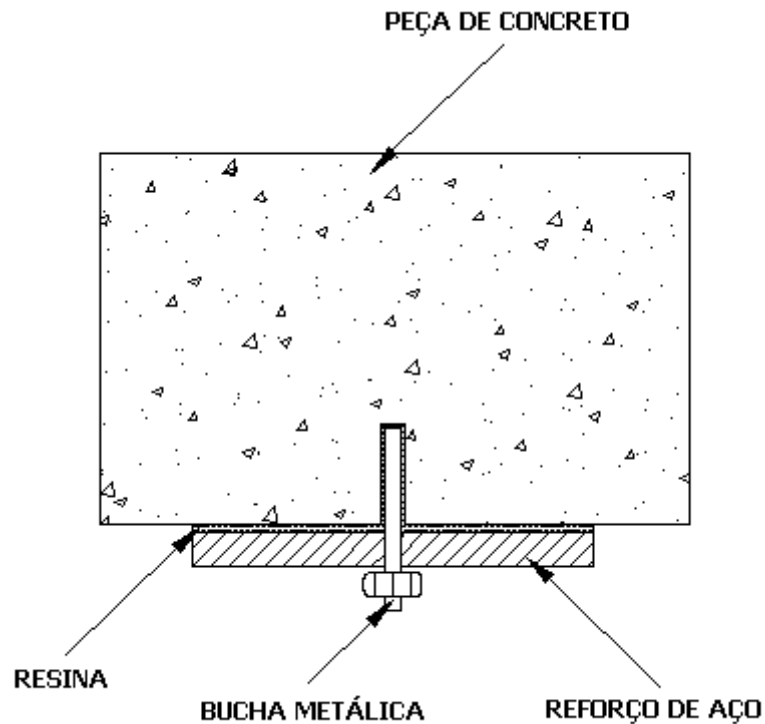


Com relação ao adesivo químico que realiza a interligação entre o aço e a peça de concreto, as características pretendidas são geralmente obtidas com uma resina epoxídica, e são elas:

- i. Retração reduzida.
- ii. Baixa fluência sob carga constante ao longo do tempo.
- iii. Bom comportamento em relação às mudanças de temperaturas.
- iv. Adesão perfeita ao aço e ao concreto.
- v. Estabilidade de características ao longo do tempo.
- vi. Bom comportamento em atmosferas úmidas ou agressivas.
- vii. Elevadas resistências mecânicas.
- viii. Adequado módulo de elasticidade.

Alguns aspectos com relação a este tipo de reforço são destacados em Juvandes (1999) e devem sempre ser lembrados pelo projetista antes da proposição da sua utilização:

- a) É uma técnica adequada quando há deficiência nas armaduras existentes.
- b) Requer cuidadosa preparação da superfície de concreto e das chapas para garantir condições de boa interligação entre ambas.
- c) Os problemas de transmissão de forças ao longo da interface da resina podem ser atenuados, desde que se opte por um adesivo químico com boa resistência ao cisalhamento. Caso necessário, a ligação pode ser complementada com buchas metálicas (Figura 6).
- d) Aconselha-se aliviar a estrutura de todas as sobrecargas acidentais e permanentes que possam ser removidas na execução do reforço, de modo a garantir que as chapas sejam solicitadas para as ações de serviço.



**Figura 6 – Complementação da ligação com bucha metálica.**

Este sistema também apresenta algumas desvantagens significativas que muitas vezes impedem a sua utilização, podendo-se citar:

- a) Dificuldades de montagem devido ao grande peso do aço, necessitando-se muitas vezes de escoramentos ou até mesmo a inacessibilidade em locais com maior confinamento.
- b) Risco de corrosão.
- c) Necessidade de juntas de dilatação entre as chapas devido à limitações no tamanho das chapas para transporte.

Como toda construção que utiliza o aço como material estrutural, a corrosão é um sério risco, conforme citado anteriormente. Caso ela venha ocorrer de forma pronunciada, pode-se perder a efetividade do reforço, recomendando-se medidas preventivas como o revestimento da chapa com argamassa ou pintura a base de tinta epóxi.

A Tabela 1 apresenta algumas das propriedades dos componentes do sistema de reforço em questão, destacando-se a baixa resistência à tração do adesivo e do concreto, compensada pelo aço.

**Tabela 1 – Propriedades com componentes do reforço de chapa de aço.**  
 FONTE: Adaptado de Juvandes (1999).

PROPRIEDADES	ADESIVO [i]	CONCRETO	AÇO
RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO (MPa)	55 - 100	25 - 150	200 - 2000
RESISTÊNCIA À TRAÇÃO (MPa)	9 - 20	1 - 4	200 - 2000
MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	0,5 - 20	20 - 50	200
COEF. DE DILATAÇÃO TÉRMICA ( $\times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ )	25 - 30	8 - 16	10 - 15
DENSIDADE ( $\text{kg/m}^3$ )	1450 - 1550	2300	7800
COEFICIENTE DE POISSON	0,3	0,2	0,3

[i] - Adesivo do tipo epoxídico

### 2.1.1 Processo Executivo

No processo executivo do reforço, a preparação prévia das superfícies é de extrema importância. A rugosidade da superfície do concreto é fundamental para aumentar a aderência química entre as partes. Conforme Custódio & Ripper (1998), uma superfície muito rugosa tornará difícil a aplicação da resina, podendo levar a descontinuidades na película de cola, com a formação localizada de bolhas de ar que nada mais serão do que o resultado do desprendimento da resina pela ação do seu próprio peso. Já uma superfície praticamente lisa também pode implicar dificuldades, particularmente em termos de compatibilidade com a estrutura da superfície do reforço.

Devido ao exposto acima, os fabricantes de resinas recomendam superfícies uniformemente rugosas, obtidas através da aplicação de jatos de areia ou pela contínua e cuidadosa percussão provocada por martelo de agulhas. Para evitar resíduos indesejáveis na interface, depois de apicoada, a superfície deve ser limpa com jatos da água sob pressão e seca pela aplicação de jatos de ar comprimido. Antes da aplicação da resina, qualquer fissura previamente existente na peça de concreto deverá ser adequadamente tratada, evitando-se assim a fuga da cola.

Assim como no concreto, a superfície da chapa de aço deverá estar adequadamente tratada. As recomendações de Custódio & Ripper (1998) são que primeiramente a superfície seja desengordurada com tricloruretano e que seja obrigatoriamente submetida à decapagem a jato abrasivo, sendo que o grau de decapagem satisfaça ao grau AS 2<sup>1/2</sup> fixado pela Norma Sueca SIS – 0055 – 900 – 67.

Após a aplicação da resina e correto posicionamento na superfície de concreto, as chapas de aço devem ser submetidas a uma ligeira pressão, uniforme, para que o excesso de resina seja expulso. O tempo de endurecimento dependerá da resina (cola) e das condições ambientais, devendo-se seguir as recomendações do fabricante.

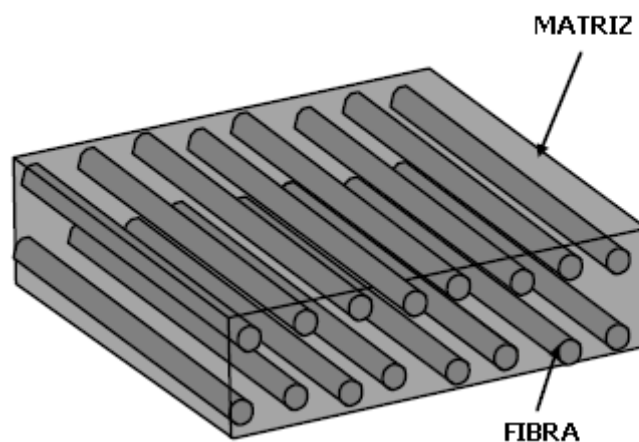
## **2.2 ESTRUTURAS REFORÇADAS COM FIBRA DE CARBONO**

O surgimento do reforço de fibra de carbono em estruturas civis é de origem japonesa, onde o governo local, em meados da década de 80, com o intuito de preparar as construções existentes para eventuais terremotos, realizou um esforço significativo juntamente com a iniciativa privada e o meio acadêmico para o desenvolvimento de novas tecnologias que permitissem maior segurança das estruturas. Baseado nas indústrias de alta tecnologia, como a aeronáutica, automobilística e a naval que já utilizavam a fibra de carbono para elementos de alto desempenho, surgiu a ideia de adaptação às estruturas civis (Juvandes (1999)).

Para reforços estruturais, a fibra de carbono não é utilizada sozinha, mas sim associada a uma matriz, formando um compósito, chamado de compósito de políme-

ro reforçado com fibra de carbono, conhecido da sigla inglesa CFRP (“*Composite Fiber Reinforced Polymer*”).

A definição de Mendonça (2005) para compósitos é a de materiais combinados que apresentam juntas propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresentaria. As características de desempenho deste tipo de sistema dependem basicamente dos elementos constituintes, a matriz e as fibras, conforme a Figura 7.



**Figura 7 – Compósito e seus constituintes.**

FONTE: Obaidt (2007).

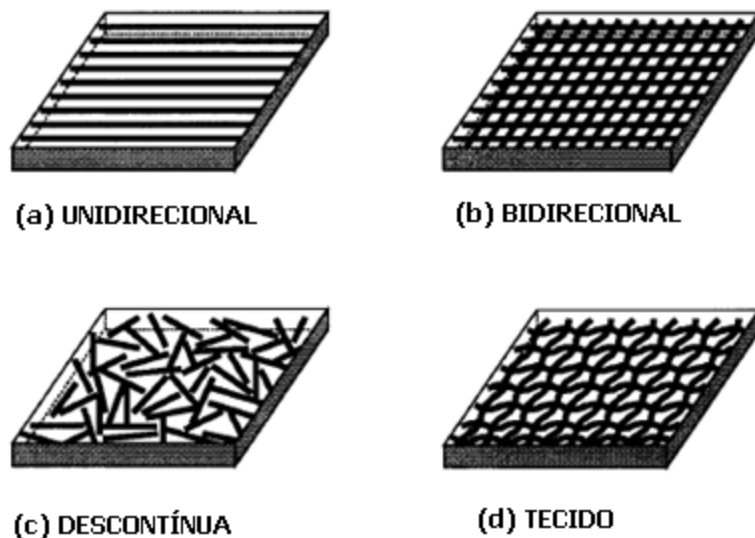
A função essencial da matriz, além da união das fibras, é a transmissão de tensões e deformações. A fibra deve estar totalmente associada à matriz para o funcionamento do componente como um corpo monolítico, sendo que a rigidez e resistência do componente são atribuídas à fibra.

A união da fibra com matriz resultando em um elemento no formato de placa é denominado na literatura técnica como lâmina, que pode ser combinada em camadas com as fibras orientadas em diversas direções para melhorar o seu desempenho e alcançar determinada resistência ou espessura, formando os materiais laminados.

Segundo Reddy (1997), as fibras podem ser contínuas ou descontínuas. Quanto a sua disposição podem ser unidirecionais, bidirecionais, na forma de tecidos, ou distribuídas aleatoriamente, como apresentado na Figura 8. Já Mendonça (2005)

ainda define os “compostos reforçados por partículas ou compostos particulados”, onde a partícula não possui uma dimensão predominante e não é tão efetiva no incremento da resistência da matriz. A justificativa de Mendonça (2005) para o emprego de tal compósito é pelo incremento de outras propriedades, tais como:

- Condutividade ou isolamento térmico e elétrico;
- Resistência a altas temperaturas;
- Redução do atrito;
- Resistência ao desgaste superficial;
- Melhoria na usinabilidade;
- Aumento da dureza superficial;
- Redução de custos.

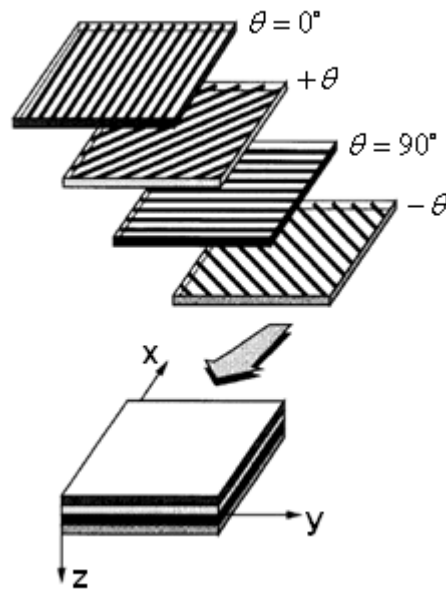


**Figura 8 – Diferentes tipos de fibras.**

FONTE: Reddy (1997).

No empilhamento das lâminas, as fibras de cada lâmina podem estar orientadas na mesma ou em direções diversas, definindo-se uma sequência de empilhamento. A Figura 9 apresenta um exemplo de empilhamento onde as orientações das fibras variam conforme a lâmina. Uma sequência de empilhamento tem como objeti-

vo atender a determinado requisito de projeto ou fabricação que não seria alcançado caso as fibras de todas as lâminas estivessem na mesma direção.



**Figura 9 – Placa laminada com fibras orientadas em diferentes direções**  
 FONTE: Reddy (1997).

Algumas das características que tornam os compósitos bastante utilizáveis atualmente são a alta resistência, o baixo peso próprio, a grande durabilidade e a facilidade de assumir formas complexas. Com o reforço de polímeros através das fibras, aumenta-se muito a rigidez, a resistência à tração, à compressão e ao impacto, além de melhorar a resistência à fadiga.

Existe uma grande diversidade de materiais utilizados atualmente para fibras e matrizes, caracterizando uma boa variedade de propriedades mecânicas que podem ser obtidas com as mais diversas combinações de fibras e matrizes. As principais fibras utilizadas pela indústria moderna são a fibra de vidro, de carbono e grafite, de aramida (Kevlar<sup>®</sup>), de monocristais, o asbesto e fibras cerâmicas. Já as matrizes mais utilizadas são de materiais metálicos, cerâmicos ou resinas poliméricas.

### 2.2.1 Matriz

A inter-relação entre a fibra e a matriz é fundamental quando se analisa o processo de danificação do compósito. Existem basicamente dois tipos de matriz, definidas por Balaguru *et al.* (2009) como orgânicas e inorgânicas, sendo a primeira a mais utilizada, conhecida também por resina ou polímero.

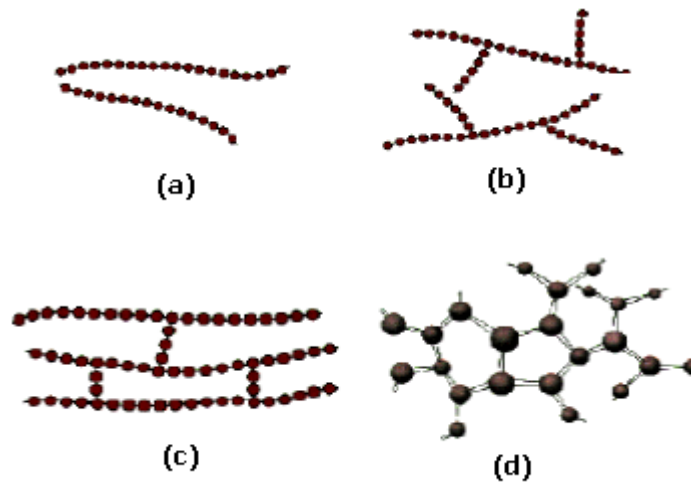
Conforme Canevarolo Jr. (2006), a palavra polímero origina-se do grego *poli* (muitos) e *mero* (unidade de repetição). O termo polímero então significa uma macromolécula composta por muitas unidades de repetição denominadas meros, ligadas por ligação covalente. Dá-se o nome de monômero à matéria-prima para a produção de um polímero, ou seja, o monômero é uma molécula com uma unidade de repetição. Copolímero é um polímero que apresenta mais de um mero diferente na cadeia polimérica.

As características físicas macroscópicas de um polímero dependem de vários fatores, entre eles o peso molecular, sua forma e a estrutura da cadeia. A proposição de Callister Jr. (2008) para a classificação em função da estrutura molecular é a seguinte:

- a) Polímeros lineares: as unidades estão unidas ponta a ponta em cadeias únicas, sendo que essas cadeias são flexíveis, Figura 10a. São exemplos de polímeros que se formam como estruturas lineares o polietileno, o cloreto de polivinila, o poliestireno, o polimetil, metacrilato, o náilon e os fluorocarbonos.
- b) Polímeros ramificados: as cadeias de ramificações laterais encontram-se conectadas as cadeias principais, como indicado esquematicamente na Figura 10b. A eficiência de compactação da cadeia é reduzida com a formação de ramificações laterais, o que resulta em uma diminuição da densidade do polímero.
- c) Polímeros com ligações cruzadas: as cadeias lineares adjacentes estão unidas umas às outras em várias posições através de ligações covalentes, como está representado na Figura 10c. Muitos dos materiais elásticos com características de borracha apresentam ligações cruzadas.
- d) Polímeros em rede: as unidades mero possuem três ligações covalentes ativas, formando redes tridimensionais, Figura 10d.



Os polímeros geralmente não são de um único tipo estrutural, como por exemplo, um polímero predominantemente linear pode possuir uma quantidade limitada de ramificações e de ligações cruzadas.



**Figura 10 – Representação esquemática de estruturas moleculares (a) lineares, (b) ramificadas, (c) com ligação cruzada e (d) em rede.**

FONTE: Callister Jr. (2008).

Em geral, as resinas orgânicas mais comuns são o poliéster, o vinil-éster e o epóxi, destacando-se esta última nos reforços CFRP. A seguir são apresentadas brevemente as características de cada uma.

- a) **Poliéster:** é o tipo de resina mais comum e barata, tendo grande aplicação na indústria náutica. Através de sua formulação, pode-se obter uma variedade grande de propriedades, com característica dúctil e mole até dura e frágil. Ainda como vantagens podem-se citar a sua baixa viscosidade, baixo custo, pequeno tempo de cura e pouco tóxica. A principal desvantagem é a sua alta contração na cura (cerca de 6% em volume ou 2% nas dimensões lineares), podendo prejudicar o acabamento superficial ou até mesmo apresentar o surgimento de fissuras.

- b) Éster-Vinílico: são resinas mais flexíveis e têm resistência à fratura maior que outras resinas poliméricas. Em nível de dificuldade de manuseio é similar á resina de poliéster. A sua principal vantagem é a melhor resistência contra ataques químicos e corrosivos, entretanto, tem um custo mais alto que as demais.
  
- c) Epóxi: é uma família de materiais que proporcionam melhor desempenho comparado com outras resinas orgânicas. Supera praticamente todas as outras resinas em termos de resistência mecânica e resistência ao meio-ambiente. Apresenta excelente aderência a diversos tipos de fibras e substratos. As resinas epóxi utilizadas na engenharia estrutural geralmente são bi componentes, compostas por um agente principal (própria resina) e o catalisador. É muito utilizada na indústria aeronáutica, exceto quando o desempenho a temperatura elevada é necessário, já que a nestas condições a resina acaba perdendo suas propriedades.

A Tabela 2 apresenta algumas propriedades mecânicas das resinas citadas anteriormente, destacando-se a maior resistência à tração e o maior módulo de elasticidade da resina epóxi.

**Tabela 2 – Propriedades mecânicas de algumas resinas**

FONTE: Beber (2003).

PROPRIEDADE	RESINA		
	Poliéster	Éster-vinílico	Epóxi
Resistência à tração (MPa)	20 - 100	79 - 90	55 - 130
Módulo de elasticidade (GPa)	2,1 - 4,1	3,0 - 3,3	2,5 - 4,1
Deformação na ruptura (%)	1 - 6	3,9 - 5,2	1 - 9
Resistência à flexão (MPa)	125	110 - 149	131
Peso específico (kN/m <sup>3</sup> )	9,8 - 14,2	10,9 - 12,9	10,8 - 12,7

Resumidamente, as principais funções da matriz em um compósito são:

- i. Transferir tensões e deformações entre as fibras;
- ii. Agente protetor contra o meio-ambiente;
- iii. Proteger as fibras contra abrasão mecânica.
- iv. Dispersar e separar ordenadamente as fibras.

A matriz absorve uma parcela muito pequena da solicitação do compósito.

### 2.2.2 Fibras de Carbono

Devido à sua função de atribuir resistência e rigidez ao compósito, o material da fibra deverá estar apto a resistir à maior parte do carregamento. A fibra de carbono é um material que apresenta alta resistência, baixo peso próprio, grande durabilidade e capacidade de assumir formas complexas.

Conforme a definição de Beber (2003), fibra é um material filamentar cuja razão entre comprimento e diâmetro seja no mínimo igual a 100. O mesmo autor ainda ressalta que não existe um diâmetro mínimo, mas o máximo não deve ser superior a 0,25mm.

O termo fibra de carbono é designado para fibras que possuem conteúdos de carbono de cerca de 80% a 95% do material total. A sua técnica de fabricação é relativamente complexa, sendo feita a partir de três filamentos orgânicos precursores: fibra de poliacrilonitrile (PAN), *rayon* (fibra feita a partir da celulose) e fibras *pitch* (alcatrão derivado do petróleo ou carvão). Basicamente, a fibra precursora é esticada durante um período de 24 horas a uma temperatura a faixa de 230°C, depois é carbonizada a 1500°C em atmosfera inerte e ainda sofre um processo de grafitação a 3000°C.

Iniciou-se a fabricação das fibras de carbono a partir do *rayon*, entretanto, o alto custo de fabricação e a incerteza na obtenção da matéria prima tornaram este tipo de fibra inviável (Beber (2003)). A segunda geração de fibras de carbono utilizou o PAN e alcançou o domínio de mercado através de menores custo de produção e boas propriedades físicas. Já a terceira geração é baseada nas fibras *pitch*, que consiste em uma mistura isotrópica de grandes compostos aromáticos, sendo muito mais barata que o *rayon* e as fibras PAN. A Tabela 3 apresenta algumas propriedades mecânicas de algumas fibras mais utilizadas na engenharia moderna e também do aço CA-50, bastante utilizado na construção civil. Percebe-se que a fibra de carbono de elevado módulo (HM) é a que proporciona maior resistência e módulo de elasticidade, entretanto, o seu preço também é o mais elevado<sup>2</sup>.

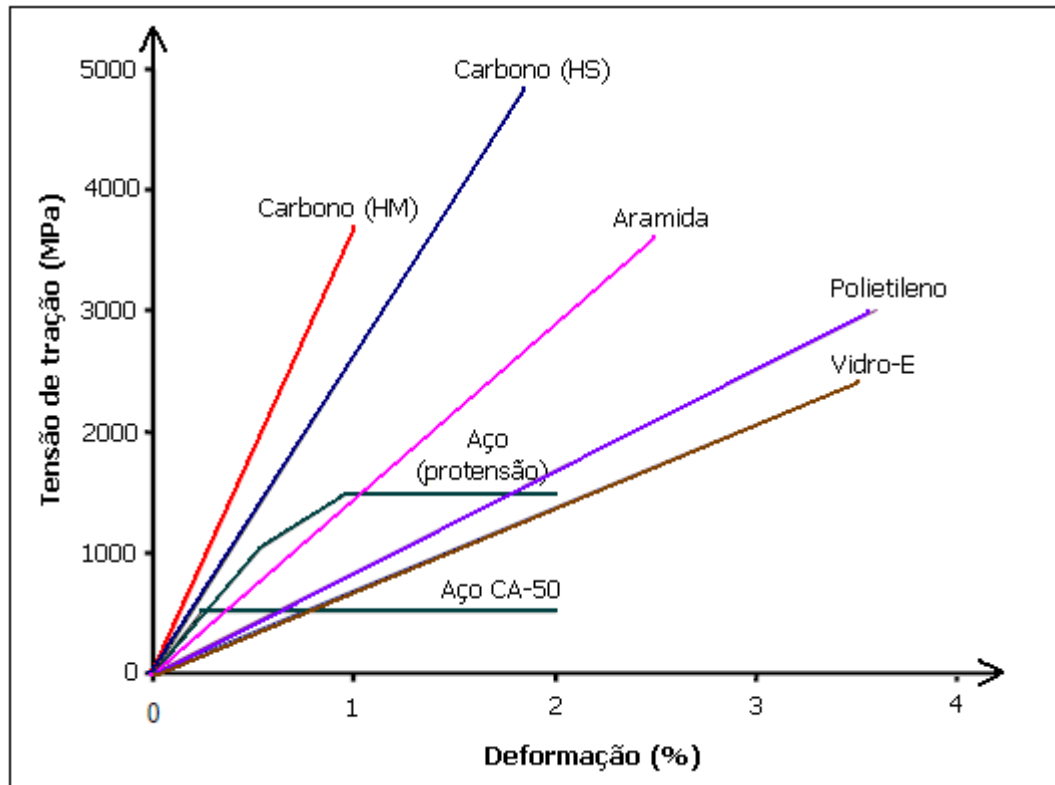
---

<sup>2</sup> Os valores do custo da fibra são apenas para efeitos comparativos.

**Tabela 3 - Propriedades típicas de algumas fibras.**  
 FONTE: Beber (2003).

PROPRIEDADE	Vidro E	Aramida (A) Kevlar 49™	Carbono de elevada res. (HS)	Carbono de elevado módulo (HM)	Aço CA-50
RESISTÊNCIA À TRACÇÃO (MPa)	2400	3600	3300 - 5000	1500 - 4700	500 (escoamento)
					550 (ruptura)
MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	70	130	230 - 300	345 - 590	210
DEFORMAÇÃO NA RUPTURA (%)	3,5	2,5	1,5 - 2,2	0,6 - 1,4	0,2 (escoamento)
					6 (ruptura)
PESO ESPECÍFICO (kN/m <sup>3</sup> )	25,6	14,4	18	19	78,5
COEF. DE DILATAÇÃO TÉRMICA (10 <sup>-6</sup> /°C)	5,0	-2 (longitudinal)	-1 (longitudinal)	-1 (longitudinal)	12 (longitudinal)
		+59(transversal)	+17 (transversal)		
CUSTO DA FIBRA (US\$/kg)	2	22	15 - 22	90	1

A Figura 11 apresenta o diagrama tensão-deformação para alguns materiais encontrados comercialmente, evidenciando claramente a diferença de resistência da fibra de carbono principalmente em relação aos aços utilizados na construção civil, podendo assim contribuir muito na resistência de peças de concreto armado ou protendido.



**Figura 11 – Gráfico tensão-deformação para alguns tipos de fibras.**  
 FONTE: Beber (2003).

### 2.2.3 Propriedades do Compósito de Fibra de Carbono (CFRP)

Além das características gerais que os compósitos possuem, os compósitos de fibra de carbono possuem propriedades únicas que justificam a sua larga utilização atualmente, podendo-se destacar:

- As fibras de carbono possuem os maiores módulos de elasticidade e as maiores resistências dentre todos os materiais fibrosos utilizados em reforços.
- As fibras retêm seus elevados módulos de tração e suas grandes resistências mesmo a temperaturas elevadas; a oxidação a temperaturas elevadas, no entanto, pode ser um problema.

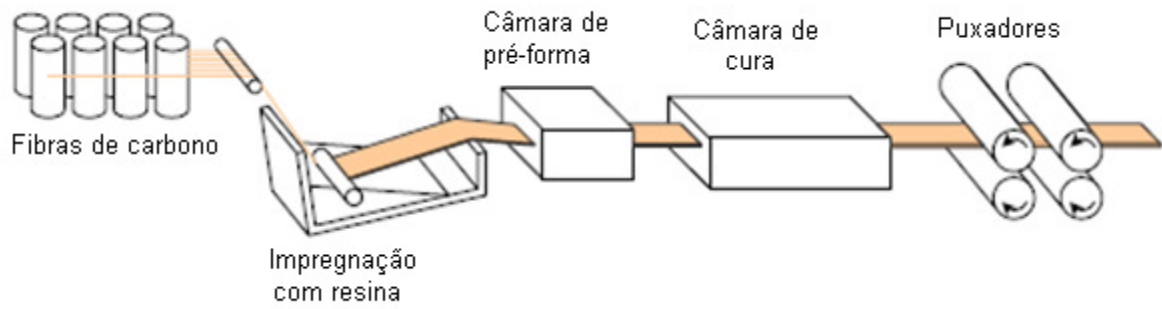
- À temperatura ambiente, as fibras de carbono não são afetadas pela umidade ou por ampla variedade de solventes, tanto ácidos como básicos.
- Foram desenvolvidos processos de fabricação para as fibras e compósitos que são relativamente baratos e de boa relação custo-benefício.
- Apresentam maiores relações entre resistência e rigidez em relação ao peso próprio.
- Apresentam variedade de características físicas e mecânicas, permitindo as aplicações mais diversas possíveis.

Além das aplicações de reforço em estruturas de concreto, Callister Jr. (2008) destaca a utilização dos CFRP em equipamentos esportivos e de recreação (varas de pesca, tacos de golfe, raquetes de tênis), em carcaças de motores a jato enroladas com filamentos, em vasos de pressão e em componentes estruturais de aeronaves, tanto militares como comerciais.

#### **2.2.4 Produtos Comerciais**

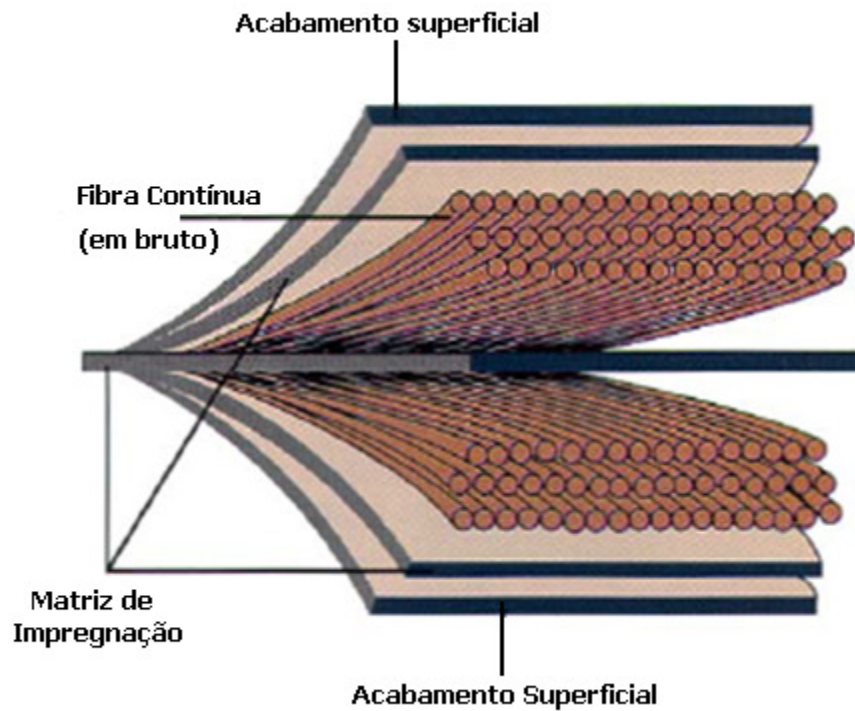
Quando o compósito é comercializado na forma de laminados semi-rígidos, o sistema é conhecido como pré-fabricado, bastando apenas à aplicação no local de destino semelhante à aplicação de uma chapa metálica.

As lâminas são fabricadas pelo método da pultrusão, onde primeiramente são desenroladas, esticadas e alinhadas e posteriormente prensadas a quente juntamente com a resina. Este processo proporciona bom controle de qualidade e custo relativamente baixo, conforme Gallardo (2002). A Figura 12 mostra esquematicamente este processo e a Figura 13 apresenta os constituintes do laminado. Já a Figura 14 apresenta a forma comercial de rolos de lâminas de fibra de carbono.



**Figura 12 – Esquema do processo de pultrusão.**

FONTE: Beber (2003).



**Figura 13 – Constituintes do Laminado CFRP.**

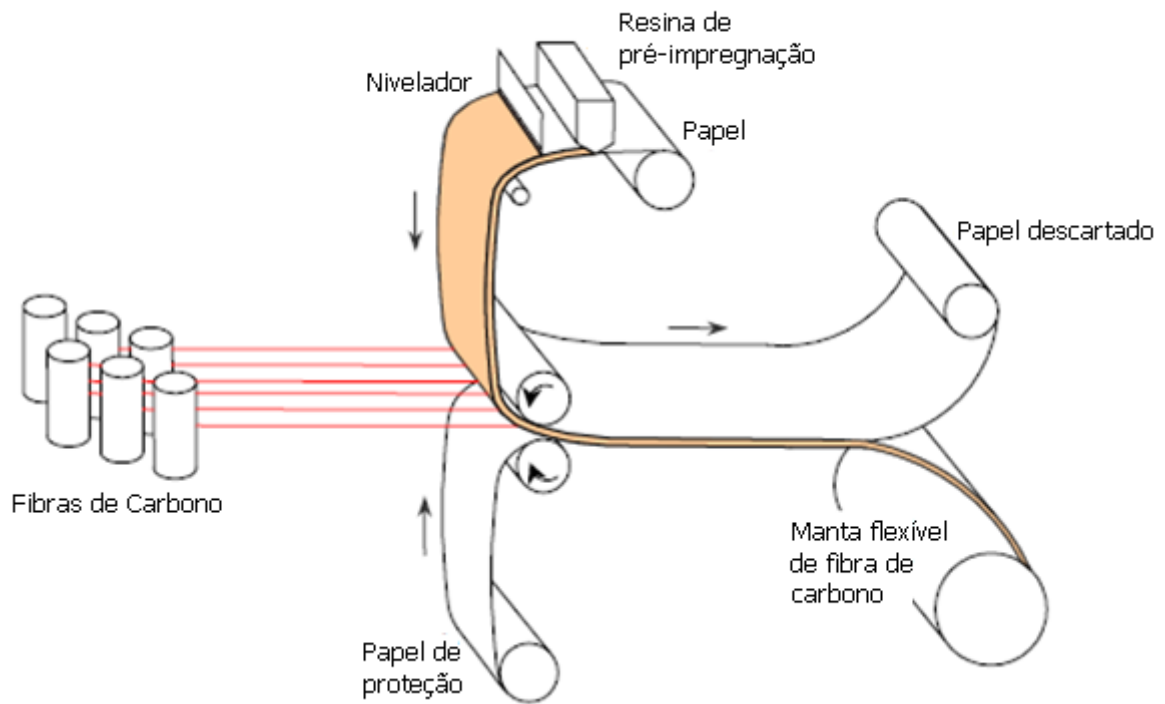
FONTE: Adaptado de Juvandes (1999).





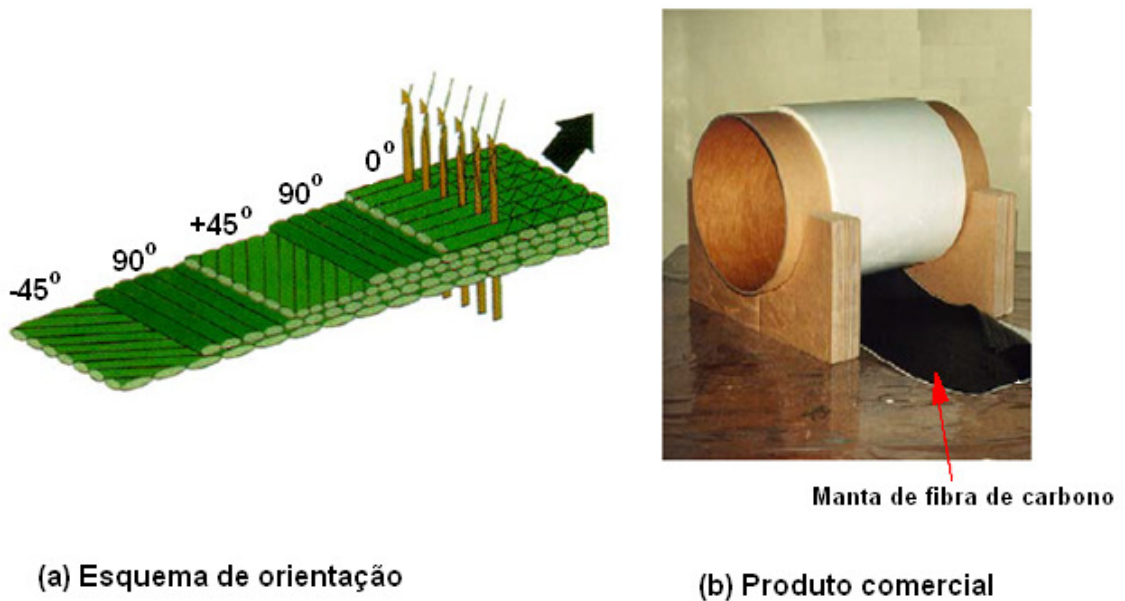
**Figura 14 – Rolo comercial de lâminas de fibra de carbono.**  
FONTE: Obaidt (2007).

Em outro sistema, conhecido como *in situ*, há a utilização de fibras contínuas no formato de mantas, fios ou tecidos em estado seco ou pré-impregnado aplicados sobre um adesivo epóxi previamente espalhado sobre a superfície do elemento de concreto a ser reforçado (Juvandes (1999)). O processo de fabricação destas mantas é esquematizado na Figura 15, onde o produto final é composto de fios embebidos em uma resina parcialmente curada.



**Figura 15 – Esquema de fabricação da manta de fibra de carbono.**  
 FONTE: Beber (2003).

Pode-se considerar que a manta se tornará um compósito CFRP apenas após a sua cura *in situ*, devendo apresentar comportamento semelhante ao laminado pré-fabricado. A Figura 16 apresenta um esquema de orientação das fibras (Figura 16(a)) e o produto comercial final (Figura 16(b)).



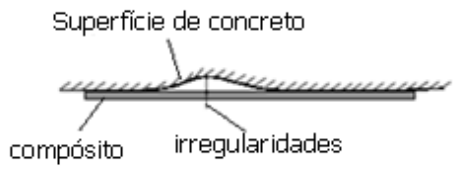
**Figura 16 – Tecido de fibra de carbono.**

FONTE: Adaptado de Juvandes (1999).

### 2.2.5 Processo Executivo

Assim como no reforço com chapas de aço, o desempenho da peça reforçada por CFRP dependerá fortemente do processo de execução. Entretanto, não se deseja na aplicação de fibra de carbono uma superfície rugosa obtida pelo efeito do apicoamento, mas sim a simples remoção de sujeiras e da fina camada de nata de cimento que sempre reveste os elementos de concreto. As recomendações do FIB (2001) para os limites de irregularidades superficiais são apresentados na Tabela 4, notando-se que o sistema *in situ* tem limites mais rigorosos para a aplicação.

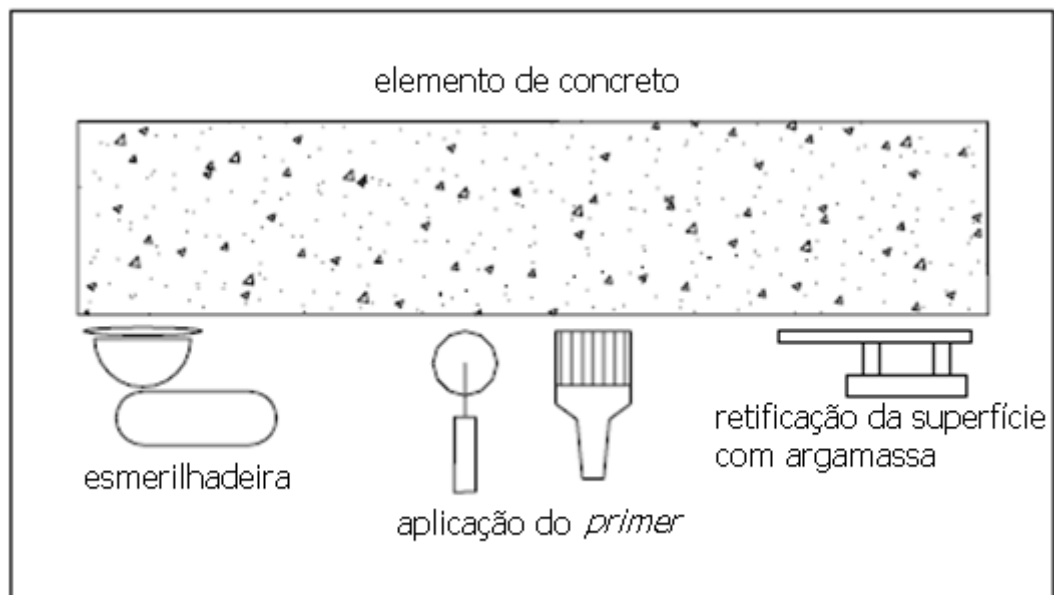
**Tabela 4 – Limites de irregularidades em superfícies reforçadas por CFRP.**  
 FONTE: Adaptado de Beber (2003).

SISTEMA DE REFORÇO		
	Irregularidade aceitável em um comprimento de 2m	Irregularidade aceitável em um comprimento de 0,3m
Laminado pré-fabricado (esp. >1mm)	10mm	4mm
Laminado pré-fabricado (esp. <1mm)	6mm	2mm
Curado <i>in situ</i>	4mm	2mm

As recomendações de Beber (2003) são que a regularização da superfície de concreto seja feita através de esmerilhadora com disco adiantado, lixadeira, jato de areia ou jato de água.

Além dos processos abrasivos de regularização da superfície citados anteriormente, caso necessário ela deverá ser regularizada com a aplicação de argamassa epoxídica alisada com espátula, sendo que as fissuras deverão estar totalmente preenchidas. Ainda, deverão ser tomados cuidados especiais com os cantos vivos, que deverão ser arredondados com raio de curvatura mínimo de 30mm (Custódio & Ripper (1998)).

Após a regularização da superfície, no sistema *in situ* deve-se aplicar um *primer*, com função de reforçar a superfície de concreto para o recebimento da resina. A Figura 17 mostra um esquema da preparação da superfície no sistema *in situ*.



**Figura 17 – Esquema da preparação da peça para aplicação do reforço CFRP.**  
 FONTE: Adaptado Beber (2003).

Após a preparação da superfície, procede-se com a aplicação da resina, que além de garantir a aderência entre o reforço e o substrato, no sistema *in situ* tem a função de impregnar as fibras formando a matriz do compósito.

Aplica-se também uma camada de resina sobre o laminado, com o objetivo de evitar os vazios quando o laminado é aplicado sobre o concreto (Beber (2003)). Após o posicionamento do reforço, deve-se aplicar ligeira pressão com rolo de borracha para garantir o contato com a superfície de concreto e remoção do excesso de resina.

O processo de reforço termina após a cura da resina, que varia conforme o fabricante, não ultrapassando geralmente os sete dias, podendo-se proceder com o revestimento e proteção do reforço através de pintura, reboco ou outro processo. A Figura 18 apresenta esquematicamente o processo de aplicação das mantas flexíveis.



**Figura 18 – Processo de aplicação de mantas flexíveis de CFRP.**

FONTE: Custódio & Ripper (1998).

Algumas situações práticas corriqueiras do uso de reforço de CFRP em sistemas estruturais de concreto são ilustradas na Figura 19 a Figura 21, mostrando a versatilidade do sistema.



**Figura 19 – Aplicação de lâminas de CFRP em laje nervurada.**

FONTE: <http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/84/artigo286279-2.aspx>



**Figura 20 – Aplicação do CFRP em reforço de longarina de uma ponte.**

FONTE: Meneghetti (2007)



**Figura 21 – Aplicação de manta de CFRP em um pilar.**

FONTE: Obaidt (2007).

Pode-se perceber pelo exposto neste capítulo que os produtos utilizados nos reforços de CFRP têm propriedades de elevada resistência aliado ao baixo peso, diferentemente do aço, que não possui um nível de resistência tão elevado e seu peso específico é da ordem quatro vezes a da fibra de carbono, por exemplo.

A técnica utilizada para a execução dos reforços tanto de aço como de CFRP é bastante simples, porém devem ser tomadas algumas medidas para obter o seu adequado desempenho em serviço.

No próximo capítulo serão apresentados os conceitos da Mecânica do Dano, fundamentais para o desenvolvimento das teorias de juntas adesivadas e do modelo constitutivo do concreto utilizado neste trabalho.



### 3 MECÂNICA DO DANO

O comportamento da interface entre dois materiais unidos por adesão, dependendo do nível de sollicitação, pode apresentar degradação das suas propriedades. Para expressar este comportamento, serão apresentados neste capítulo alguns conceitos da Mecânica do Dano, que posteriormente serão utilizados para caracterizar a região adesiva entre a viga e o reforço estrutural. Como será visto no Capítulo 4, o modelo constitutivo utilizado para o concreto também utilizará conceitos semelhantes.

Os materiais, quando submetidos a certos níveis de esforços ou condições ambientais desfavoráveis apresentam mudanças nas suas propriedades, sejam elas macroscópicas ou microscópicas. Conforme Kachanov (1986), desde que as mudanças impliquem na alteração das propriedades mecânicas do material, o termo dano pode ser utilizado. A definição de Lemaître (1996) para dano é a de um processo de degradação física progressivo existente antes da falha do material. Assim, pode-se dizer que a mecânica do dano é o estudo, realizado através das variáveis mecânicas, dos mecanismos envolvidos na deterioração dos materiais quando submetidos a determinado carregamento.

Os mecanismos de danificação estão envolvidos em diversos tipos de sistemas estruturais, entre eles os apresentados neste trabalho, sendo de fundamental importância o conhecimento dos conceitos envolvidos nesta área. Para exemplificar, pode-se citar o dano provocado por micro-cavidades, micro-fissuras geradas por fadiga, deslizamento da matriz cristalina e cavidades que aparecem nos contornos de grãos dos metais, defeitos gerados pelo descolamento do agregado e aglomerante em concretos, descolamento das fibras na matriz em compósitos, entre outros.

A deterioração do material pode ser ou não visível ao olho humano. O dano que ocorre na micro-escala está relacionado à acumulação de tensões na vizinhança dos defeitos internos ou nas interfaces, que provoca quebra de ligações atômicas e surgimento de micro-fissuras. Na meso-escala, o dano é caracterizado pelo crescimento e coalescência das micro-fissuras e micro-vazios que juntos iniciam uma trinca. Já na escala visível ao olho humano, a macro-escala, o dano é caracterizado pelo crescimento e propagação das trincas. Os dois primeiros níveis de escala (mi-

cro e meso) são abordados através do conceito das variáveis de dano, já o dano em macro-escala é geralmente estudado utilizando-se os conceitos da mecânica da fratura. A Figura 22 apresenta um resumo esquemático da abordagem usual utilizada no estudo da integridade dos materiais.

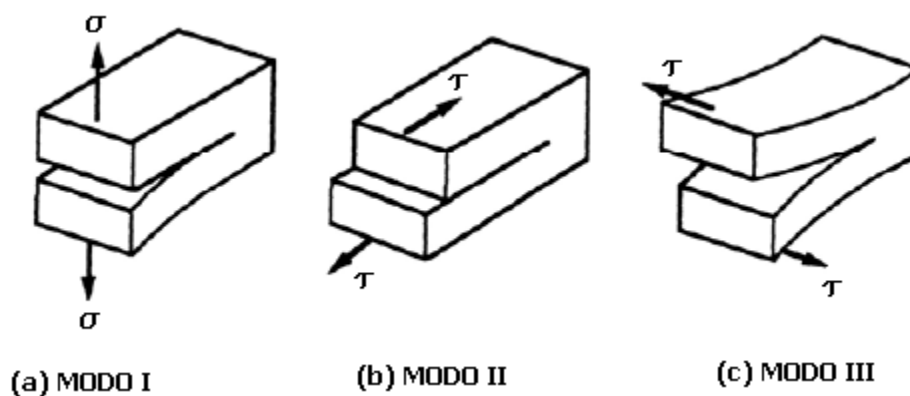


**Figura 22 – Abordagem esquemática do comportamento mecânico dos materiais.**

A diferença fundamental entre a Mecânica da Fratura e do Dano é que no primeiro considera-se que a resistência de uma estrutura é afetada por um defeito particular, sendo que o meio em volta pode ser considerado íntegro. Já a mecânica do dano considera que os defeitos estão continuamente distribuídos em determinada região ou na totalidade da peça, sendo que a quantificação da danificação não é

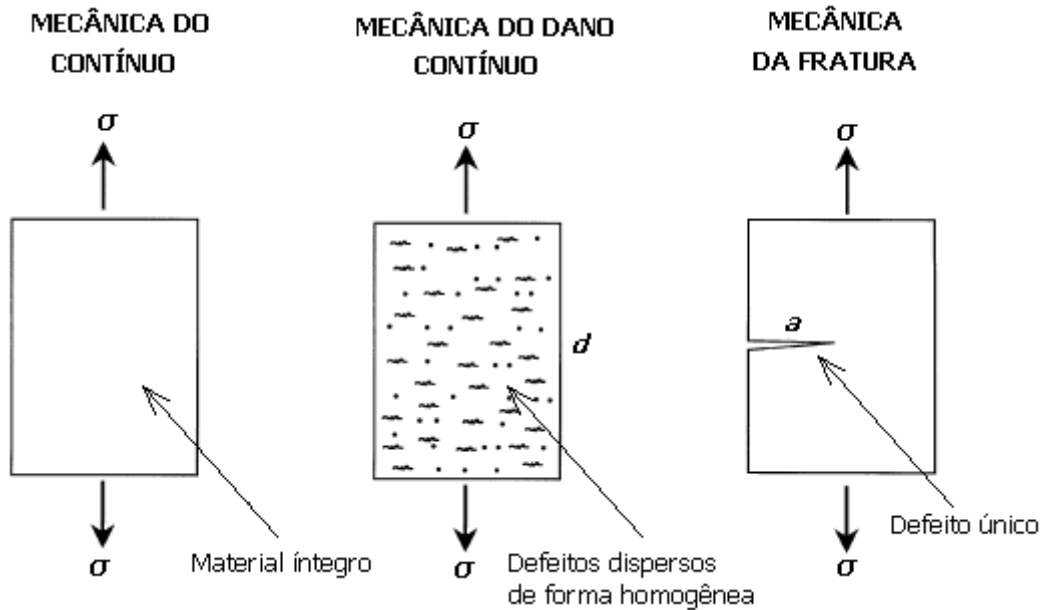
uma grandeza física mensurável como o comprimento e abertura de trinca, devendo-se utilizar para este fim outras técnicas que serão apresentadas posteriormente.

Para entender o processo de danificação em um material, deve-se compreender também o modo como as fissuras surgem, sendo que são basicamente três modos. O modo I é caracterizado por um esforço perpendicular à abertura da fissura, Figura 23 (a), sendo que este modo pode excitar o mecanismo de ruptura por clivagem, logo, levando à ruptura frágil, com pequenas absorções de energia no processo de fratura. O modo II é devido ao cisalhamento na direção paralela ao defeito (Figura 23 (b)), ocorrendo um escorregamento entre as faces da fissura. Já no modo III ocorre o cisalhamento na direção perpendicular ao defeito (Figura 23 (c)).



**Figura 23 - Modos de abertura de fratura.**

Apesar da Mecânica do Dano considerar o material com defeitos internos distribuídos generalizadamente, pode-se utilizar a abordagem de meios contínuos para a sua modelagem (Besson (2010)). Para se trabalhar com um volume representativo do material, com tensões e deformações médias, é necessário que os defeitos sejam pequenos e em número suficientes. A Figura 24 apresenta os volumes representativos esquemáticos utilizados nas diferentes abordagens quando se estuda a integridade dos materiais, sendo que na Mecânica da Fratura a questão fundamental está em torno de uma trinca e seu comprimento  $a$ . Na Mecânica do Dano, busca-se expressar o comportamento do material através de uma variável que expresse o processo de degradação das propriedades, a variável de dano  $d$ .

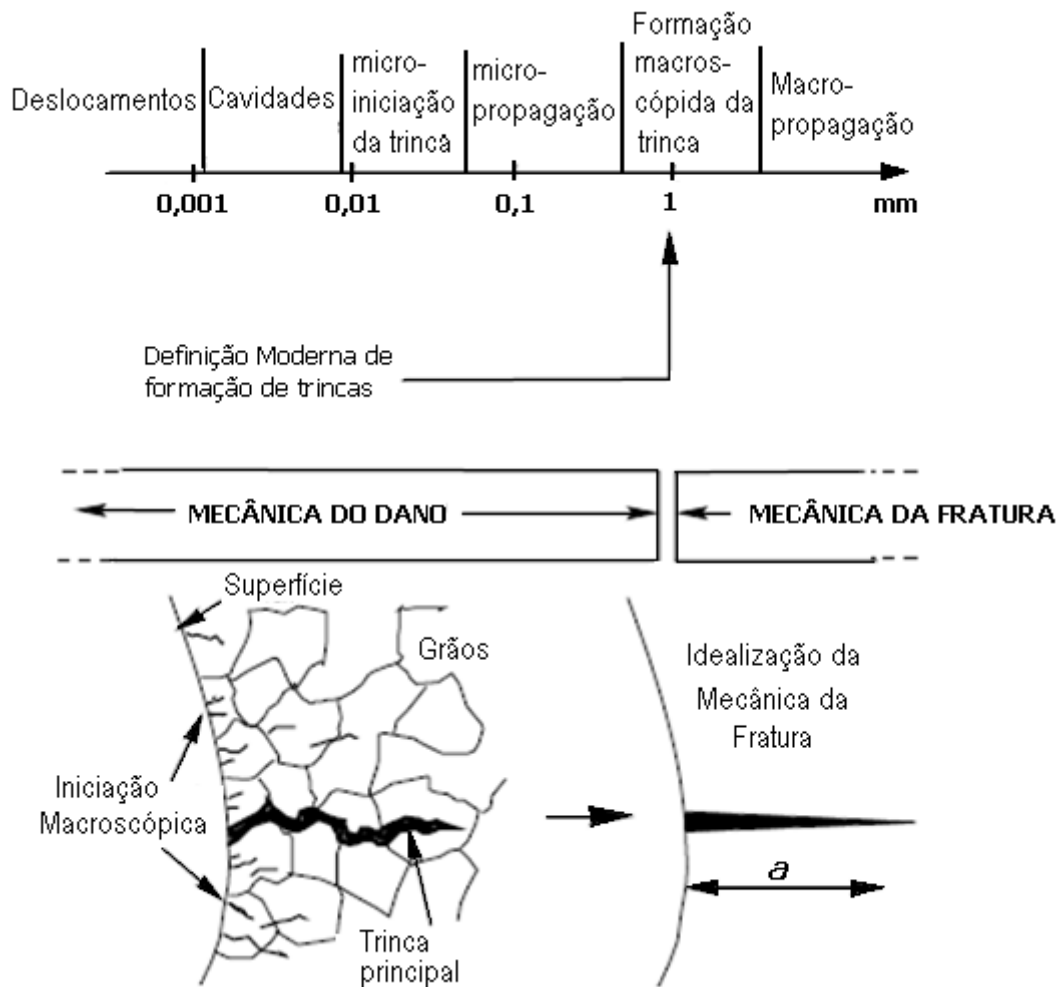


**Figura 24 – Volumes representativos utilizados nas diferentes abordagens da integridade estrutural.**

FONTE: Adaptado de Besson (2010).

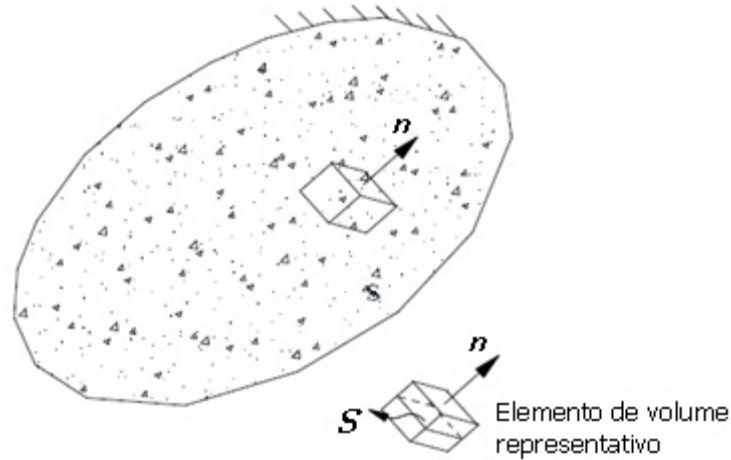
A Figura 25 apresenta um exemplo de escala de abordagem para o problema de defeitos internos decorrentes de fadiga em metais, podendo-se observar a transição do dano para a fratura, ocorrendo quando a variável de dano  $d$  atinge o valor 1, ou seja, quando processo de danificação está completo.

Apesar de Besson (2010) indicar na Figura 25 a dimensão de  $1\text{mm}$  para caracterizar o início da formação de trincas, este valor apresenta divergências na literatura. Para materiais como o concreto, pode-se caracterizar o conceito de trinca para valores menores, como por exemplo,  $0,3\text{mm}$ .



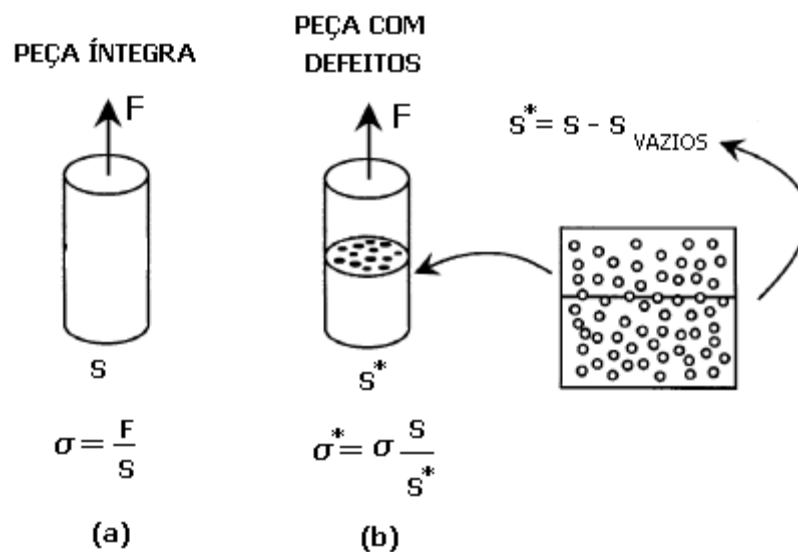
**Figura 25 – Abordagens diferentes para o início de trincas.**  
 FONTE: Adaptado de Besson (2010).

Conforme Proença (2000), um volume representativo deve possuir dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade na distribuição dos efeitos em seu interior, mas deve também ser suficientemente pequeno para evitar gradientes elevados das variáveis do problema, como tensões e deformações. Assim sendo, é admissível a continuidade dos fenômenos que ocorrem no volume e as propriedades medidas nele são valores médios que podem ser associados a um ponto infinitesimal. A Figura 26 representa a definição esquemática de um volume representativo, juntamente com o seu versor normal  $n$ .



**Figura 26 – Volume representativo de um sólido com dano interno.**  
 FONTE: Proença (2000).

A tensão efetiva em um volume representativo submetido a determinado carregamento pode ser estabelecida em função da área líquida ou área resistente da seção,  $s^*$ , conforme a Figura 27, representando um caso de carregamento uniaxial. Esta área é calculada descontando-se os vazios existentes no material, ou seja, considera-se que os vazios e defeitos não sejam capazes de resistir a qualquer tipo de esforço.



**Figura 27 – Tensão nominal (a) e tensão efetiva (b).**  
 FONTE: Adaptado de Besson (2010).

A variável escalar de dano unidimensional,  $d$ , no caso isotrópico, é definida por Kachanov (1986) como

$$d = \frac{S_{\text{vazios}}}{S} ; \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (1)$$

onde a variação de  $d$  ocorre no intervalo de 0 a 1, ou seja,  $d = 0$  corresponde a um material totalmente íntegro e  $d = 1$  refere-se ao dano completo ou o início do fraturamento. A tensão efetiva  $\sigma^*$  é calculada considerando-se a área líquida da seção, Figura 27, pela seguinte expressão,

$$\sigma^* = \frac{F}{S - S_{\text{vazios}}} = \frac{F}{S(1-d)} = \frac{\sigma}{(1-d)} \quad (2)$$

onde  $\sigma$  é a tensão nominal, sendo que sob tensão uniaxial ela é dada por

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (3)$$

Pode-se generalizar os conceitos apresentados anteriormente, sendo que a variável de dano pode assumir valores diferentes em um mesmo ponto conforme a orientação do vetor normal  $n$  a determinada superfície. A expressão genérica resultante é:

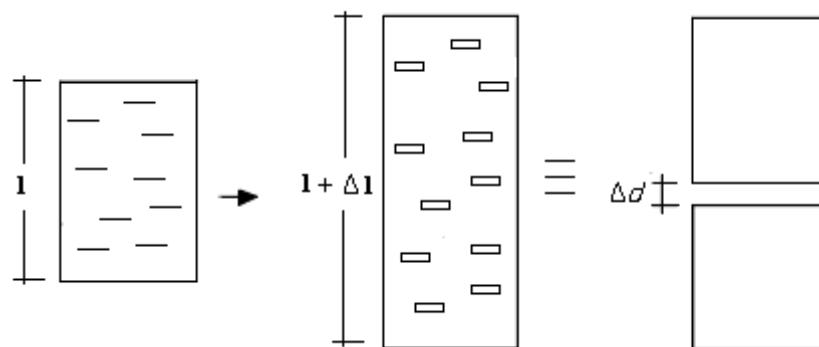
$$\bar{\sigma}^* = \frac{\bar{\sigma}}{(1-d_n)} \quad (4)$$

onde  $\bar{\sigma}^*$  é o tensor de tensões efetivas,  $\bar{\sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy e  $d_n$  é o dano na superfície considerada, sendo esta última representada pelo seu vetor normal  $n$ .

Paralelamente ao conceito de tensão efetiva, surge o conceito de deformação efetiva, que decorre da mesma análise do volume representativo apresentado na Figura 27. O conceito de deformação linear nominal ( $\varepsilon$ ) é conhecido da mecânica do contínuo, onde para um estado uniaxial de tensão, a seguinte relação é válida,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (5)$$

onde  $\Delta l$  corresponde à variação de comprimento  $l_0$ . Na abordagem de Proença (2000), o comprimento final de um elemento representativo com dano é separado na parte correspondente à abertura/fechamento dos vazios ( $\Delta d$ ) e a real deformação da peça ( $\Delta l - \Delta d$ ), conforme a Figura 28.



**Figura 28 – Acréscimo no comprimento devido à abertura dos defeitos.**  
 FONTE: Adaptado de Proença (2000).



A deformação efetiva pode ser calculada por:

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta l - \Delta d}{l_0} \quad (6)$$

sendo que uma segunda definição para a variável de dano pode ser proposta,

$$d_n = \frac{\Delta d}{\Delta l} \quad (7)$$

de onde se obtém, em termos genéricos, a relação entre os tensores de deformação efetiva e nominais,

$$\bar{\varepsilon}^* = (1 - d_n) \bar{\varepsilon} \quad (8)$$

Através do conhecimento da lei constitutiva do material pode-se avaliar o dano em função da mudança de propriedades de rigidez. Para um material isotrópico elástico linear, a tensão se relaciona genericamente com a deformação através da Lei de Hooke,

$$\sigma = E\varepsilon \quad (9)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Da equação (2) e (9), obtém-se:

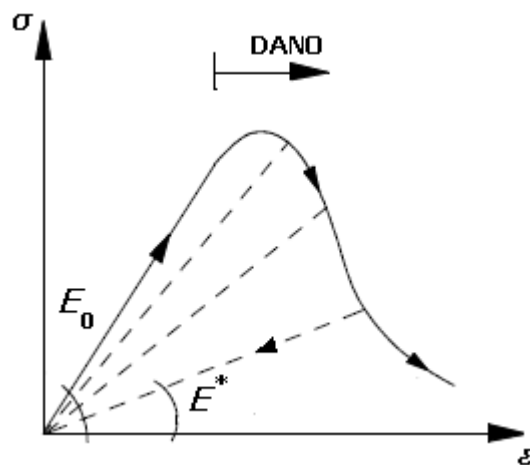
$$\sigma^* = \frac{\sigma}{(1-d)} = \frac{E\varepsilon}{(1-d)} \quad (10)$$

que resulta na relação entre a rigidez do material danificado e do material íntegro, conforme a seguinte expressão:

$$E^* = (1-d)E_0 \quad (11)$$

Resumindo, Proença (2000) estabelece que a lei constitutiva do meio danificado seja obtida da lei constitutiva do meio íntegro onde o tensor de tensões nominais é substituído pelo tensor de tensões efetivas e o tensor de deformação linear pelo tensor de deformação efetiva.

A equação (11) estabelece que é possível, no caso do ensaio uniaxial de tensões, conhecer o parâmetro de dano  $d$  com base na rigidez secante dos ensaios de tensão-deformação, conforme a Figura 29.

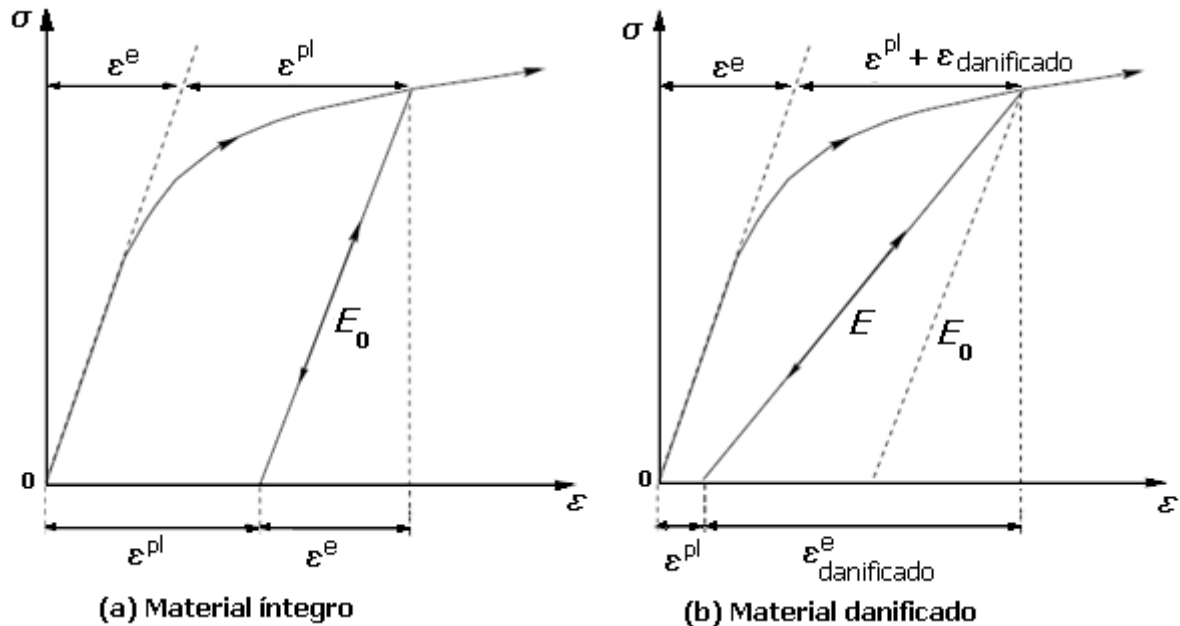


**Figura 29 – Variação do módulo de elasticidade no ensaio de tensão-deformação.**

FONTE: Adaptado de Proença (2000).

A Figura 30 apresenta dois gráficos tensão-deformação de um material íntegro (Figura 30 (a)) e material danificado (Figura 30 (b)). A deformação plástica permanente na amostra íntegra não pode ser considerada irreversível, já que através de uma deformação contrária pode-se chegar à forma inicial da amostra. Já o dano é

assumido como um processo irreversível, tornando o material mais fraco mecanicamente, como mostra a Figura 30 (b), correspondendo a um caso típico de dano frágil, onde a maior parte da não linearidade é correspondente à danificação, notada pelo decréscimo do módulo de elasticidade e pequena deformação plástica residual.



**Figura 30 – Deformações permanentes na análise plástica e de dano**  
 FONTE: Adaptado de Besson (2010).

Existem outros métodos laboratoriais para a determinação experimental do processo de danificação além da medição das propriedades elásticas, sendo que os mais utilizados atualmente são:

- **Propagação de ondas ultrassônicas:** através da medição da velocidade da onda propagando dentro de um material, pode-se estimar a sua integridade. As frequências utilizadas dependem do material:
  - 1 a 50 MHz para metais;
  - 0,1 a 5 MHz para polímeros e madeira;
  - 0,2 a 1 MHz para concreto.

- **Varição da microdureza:** a microdureza pode ser considerada como uma pequena endentação. Definindo-se a dureza para um material íntegro e um danificado através da força aplicada para a endentação, pode-se estabelecer o nível de danificação do material.
- **Varição da densidade:** no caso de dano dúctil, o surgimento de cavidades no interior do material causa o aumento de volume, conseqüentemente, a diminuição da densidade, que através de relações específicas pode representar o processo de danificação.
- **Varição da resistência elétrica:** com o surgimento de vazios no interior do material, uma corrente elétrica encontrará maiores dificuldades para percorrer o material, aumentando a sua resistência elétrica, podendo-se obter assim informações sobre o nível de danificação do material.
- **Micrografia:** conhecendo-se a estrutura dos grãos do material, pode-se detectar o aumento dos defeitos e cavidades no seu interior, bastando fazer correlações para determinar o nível de danificação do mesmo.
- **RaioX, Ensaio de Vibrações, etc.**

Devido às dificuldades encontradas em ensaios experimentais e sob carregamentos mais genéricos ou geometrias complexas, a avaliação prática do dano fica restrita. Surgiu então a necessidade do estabelecimento de modelos numérico-analíticos que representem esse tipo de não linearidade, sendo apresentados nos próximos capítulos alguns dos modelos desenvolvidos por pesquisadores para os materiais abordados neste trabalho.

## 4 CONCRETO ESTRUTURAL

O concreto é resultante de uma mistura de materiais onde um meio aglomerante supostamente contínuo une partículas de agregados dispersas nele. O agregado é um material granular, podendo ser subdividido em agregado graúdo e miúdo, sendo que o primeiro corresponde, conforme a definição de Mehta & Monteiro (2008), às partículas maiores do que 4,8 mm e o agregado miúdo é aquele onde as partículas são menores que 4,8 mm, porém maiores que 75  $\mu\text{m}$ . Normalmente, o agregado graúdo corresponde à brita (brita 0 à brita 4) e o miúdo à areia. Entretanto, podem-se utilizar outros materiais para esta composição

O material responsável pela união dos agregados é o cimento, um material finamente pulverizado, que sozinho não é aglomerante, entretanto, desenvolve propriedades ligantes como resultado da hidratação (reações químicas entre os minerais do cimento e a água) (Mehta & Monteiro (2008)), sendo denominado de cimento hidráulico. Atualmente, o cimento hidráulico mais utilizado é o Portland, composto basicamente por silicatos de cálcio hidráulicos.

Com a mistura de água, areia e cimento forma-se a argamassa, que é o meio contínuo onde o agregado graúdo estará envolto. Ainda, pode-se encontrar na mistura juntamente com os componentes do concreto diversos tipos de aditivos, que podem modificar significativamente as propriedades mecânicas e reológicas do concreto.

O comportamento do concreto é um dos assuntos mais estudados na engenharia moderna, buscando-se representar de forma adequada a sua resposta mecânica sob determinado carregamento ao longo do tempo. Por ser um material cerâmico, apresenta um comportamento quase-frágil quando não submetido ao confinamento, apresentando certas limitações ao ser utilizado sozinho, principalmente em carregamentos que provoquem tração, situação que pode ser contornada através da introdução de barras de aço ou outro material dúctil no seu interior. Já quando submetido a pressões confinantes suficientes para a prevenção da propagação de trincas, o seu comportamento na falha é determinado pela coalescência das porosidades internas, levando a um comportamento macroscópico semelhante ao dos materiais dúcteis.

Mesmo com a associação de outro material que possa resistir forças de tração, acima de determinado nível de sollicitação ocorre o surgimento de fissuras e que tendem a crescer com o aumento das sollicitações, sendo que o comportamento da peça é fortemente influenciado por elas. Um projeto adequado deve estar baseado em modelos teóricos que expressem o mais fielmente possível o seu comportamento, levando em consideração a formação e propagação de fissuras, sendo que dentro deste estudo se enquadram os seguintes assuntos:

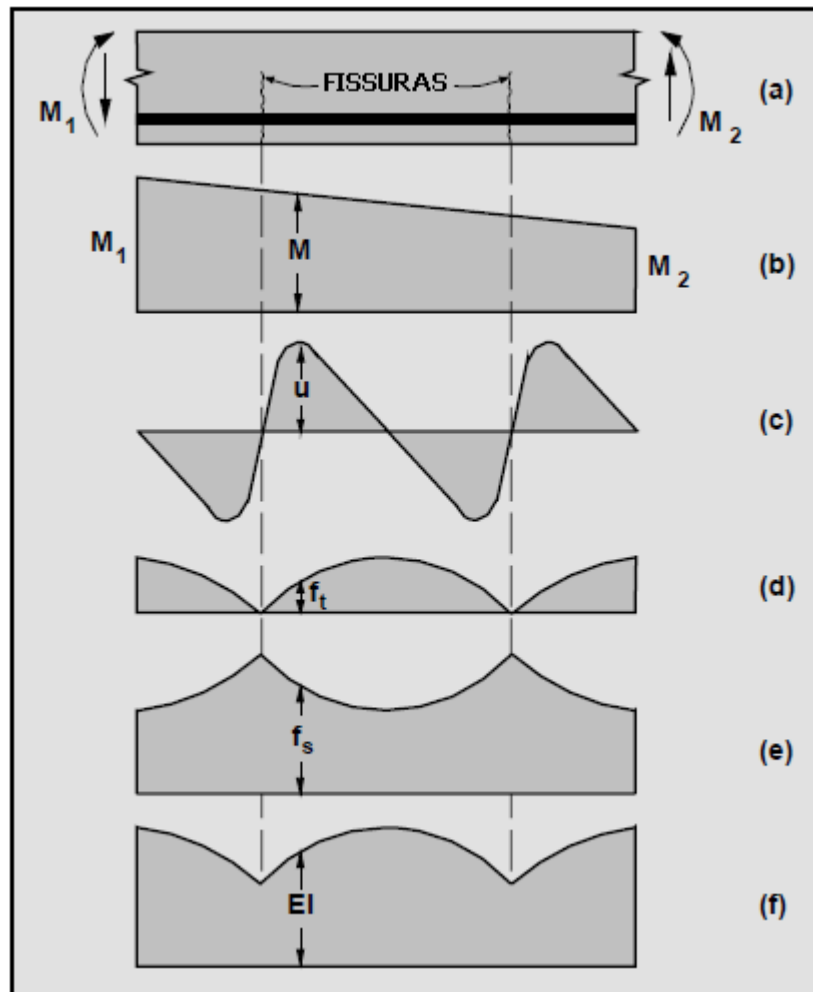
- tamanho e distribuição das fissuras na flexão;
- fissuras de cisalhamento e seus efeitos na capacidade ao cisalhamento;
- momento de fissuração de peças de concreto simples e armadas;
- microtrincas na compressão e falha por compressão.
- fissuras devido à tração

Além destas abordagens, o modelo proposto deve também representar adequadamente outros fenômenos, como:

- interação entre concreto e o reforço imerso;
- interação entre a matriz cimentícia e os agregados;
- fluência;
- viscosidade;
- plasticidade;
- desempenho termo-mecânico;
- reposta às cargas cíclicas

Como mencionado anteriormente, uma das principais causas da não linearidade do concreto é devida a sua fissuração, o que resulta em falhas localizadas. Para exemplificar o efeito da fissuração, a Figura 31 apresenta uma viga genérica de concreto armado (Figura 31(a)) submetida a determinado momento sollicitante (Figura 31(b)) variável ao longo do comprimento da peça. A distribuição de tensões de tração entre a armadura e o concreto entre as fissuras é determinada pelas tensões aderentes entre ambos os materiais. Novas fissuras podem surgir entre as existentes caso a tensão de tração exceda a resistência à tração do concreto, sendo que o padrão final de fissuração é alcançado quando a magnitude da tensão é grande o

suficiente para que não haja mais transferência de forças por aderência do concreto para a armadura. Ou seja, pode-se concluir que o número e a extensão das fissuras é controlado pelo tamanho e posicionamento do reforço de aço na peça, o que se reflete na transferência de tensões entre o concreto e aço.



**Figura 31 – Efeito das fissuras em uma viga de concreto armado.**

- (a) Viga genérica de concreto.
- (b) Distribuição de momento fletor.
- (c) Tensão de aderência.
- (d) Tensão de tração no concreto.
- (e) Tensão de tração no aço.
- (f) Rigidez à flexão no regime elástico.

FONTE: Adaptado de Kwak & Filippou (1990)

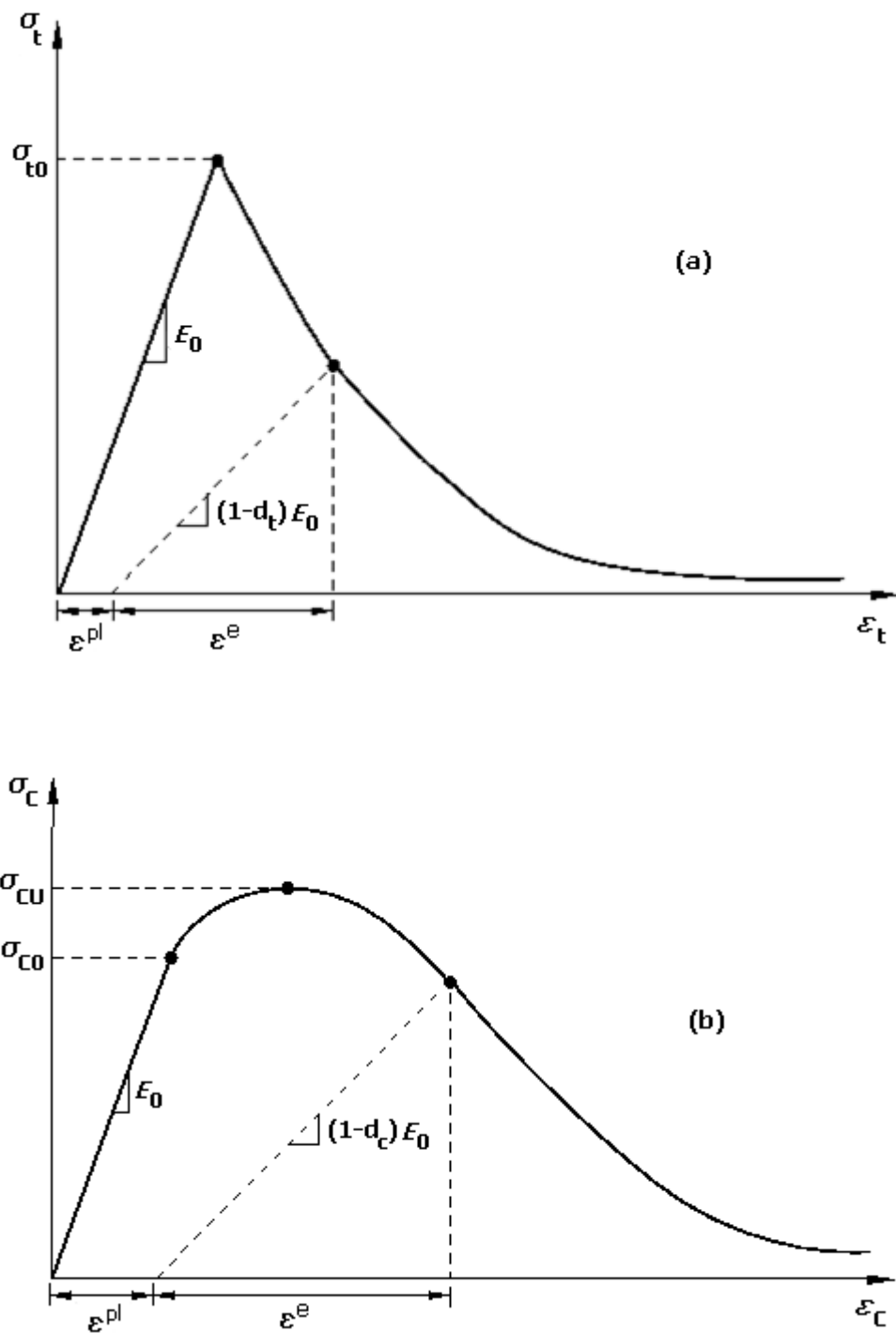
A Figura 31(c) apresenta o padrão idealizado de distribuição da tensão de aderência (entre concreto e armadura) na região fissurada, percebendo-se que no local exato da fissura a tensão se anula, como esperado. A tensão de tração no concreto é mostrada na Figura 31(d) e no aço na Figura 31(e), sendo que no aço ela é máxima no ponto onde no concreto ela é nula. Pelo fato do concreto resistir a certa tração entre as fissuras, a rigidez da peça nessa região é sensivelmente maior que no local exato das fissuras, como pode ser visto na Figura 31(f), sendo este fenômeno conhecido como *tension stiffening*.

A modelagem computacional do concreto é bastante complexa e abrangente. Diversos pesquisadores formularam e testaram seus modelos, chegando a resultados de simulações muito próximos dos obtidos em ensaios experimentais. A seguir será apresentado mais detalhadamente o modelo utilizado neste trabalho, conhecido como modelo de dano plástico para o concreto (CDP), evidenciando as suas características, limitações e vantagens.

#### 4.1 MODELO DE DANO PLÁSTICO

Buscando expressar o comportamento não-linear do concreto, incluindo a sua falha tanto na compressão e na tração, Lubliner *et al.* (1988) propôs um modelo baseado na Teoria da Plasticidade e também na Mecânica do Dano Contínuo. Assim, os conceitos de danos são incorporados em um modelo plástico (Lee & Fenves (1998)), ou seja, o conceito de tensões efetivas da Mecânica do Dano é utilizado para representar a perda de rigidez. Neste tipo de modelo, o concreto e outros materiais são vistos como materiais coesivos com atrito, sendo que uma eventual perda de rigidez (dano) pode ser relacionada a uma perda de coesão (Lubliner *et al.* (1988)). As duas principais formas de danificação neste modelo são as fissuras devido à tração e o esmagamento devido à compressão, sendo que a Figura 32 representa separadamente o comportamento do material na tração e na compressão uniaxial, já que as respostas a estes dois tipos de carregamentos são bastante distintas.





**Figura 32 – Resposta do concreto para tensão uniaxial de tração (a) e de compressão (b).**

Pela Figura 32 (a), o comportamento do material é elástico linear até o valor da tensão de falha na tração  $\sigma_{t0}$  ser atingida, sendo que esta falha corresponde ao surgimento de micro-fissuras no concreto. Após esta tensão, a formação de micro-

trincas é representada por um amolecimento na curva tensão-deformação, o que induz à deformação localizada na estrutura de concreto. Para a compressão (Figura 32 (b)), a resposta é linear até a tensão de escoamento  $\sigma_{c0}$ . No regime plástico, a resposta típica é caracterizada por um aumento na tensão até ser atingida a tensão última ( $\sigma_{cu}$ ) seguida por um amolecimento<sup>3</sup> caracterizado pela diminuição da tensão com o aumento da deformação<sup>4</sup>.

Considerando-se que as deformações elásticas não provocam dano e representando o módulo de elasticidade por  $E$ , através Figura 32 pode-se decompor as deformações totais ( $\varepsilon$ ) em suas parcelas elástica ( $\varepsilon^e$ ) e plástica ( $\varepsilon^{pl}$ ). Matematicamente, a seguinte equação é válida:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{pl}; \quad \varepsilon^e = \sigma / E \quad (12)$$

A equação (12) representa o caso genérico de tensão-deformação, sendo que na Figura 32 a tração está separada da compressão.

Pode-se perceber pela Figura 32 que, após ser atingida a parte de deformação plástica das curvas, a resposta no descarregamento é caracterizada por uma diminuição da rigidez da parte elástica (diminuição do módulo de elasticidade inicial  $E_0$ ), ou seja, pode-se considerar que houve danificação do material. As mesmas equações do capítulo anterior podem ser reutilizadas neste capítulo. O módulo de elasticidade danificado (ou efetivo) pode ser relacionado com o módulo elástico inicial através da equação (11),

$$E^* = (1-d)E_0 \quad (11) \text{ Repetida}$$

obtendo-se a seguinte relação entre tensão e deformação:

---

<sup>3</sup> O termo amolecimento não é considerado por alguns autores o mais adequado. Isso se deve, pois o material não fica mais mole, ou seja, a sua resistência à indentação não muda, ocorrendo sim uma diminuição do seu módulo à deformação.

<sup>4</sup> Este é apenas um modelo que representa um comportamento típico do concreto, sendo que a curva tensão-deformação pode variar conforme as características dos agregados/aditivos.

$$\sigma = (1-d)E_0(\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (13)$$

ou separando a compressão da tração para o caso uniaxial

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (1-d_t)E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}) \\ \sigma_c &= (1-d_c)E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl}) \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $d_t$  e  $d_c$  são as variáveis de dano escalar na tração e compressão, respectivamente. A tensão efetiva ( $\sigma^*$ ) se relaciona com a tensão nominal ( $\sigma$ ) por

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{(1-d)} \quad (10) \text{ Repetida}$$

sendo  $d$  a variável de dano escalar no caso de dano isotrópico. Rearranjando as expressões anteriores e separando-se a tração da compressão, a tensão efetiva se relaciona com a tensão elástica inicial por

$$\begin{aligned} \sigma_t^* &= \frac{\sigma_t}{(1-d_t)} = E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}) \\ \sigma_c^* &= \frac{\sigma_c}{(1-d_c)} = E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl}) \end{aligned} \quad (15)$$

Até agora foram apresentadas as relações constitutivas para o estado uniaxial de tensões, entretanto, sabe-se que na prática uma estrutura dificilmente está sob estas condições e que a resposta do concreto é totalmente diferente em estados mais complexos de tensão. Como exemplo, Kmiecik & Kaminski (2011) cita o fato do con-

creto sob estado compressivo bi-axial ter uma resistência entre 10% e 20% maior que no estado compressivo uniaxial enquanto em um estado hidrostático de tensões (compressão tri-axial uniforme) a sua resistência é teoricamente infinita. Necessita-se então definir as relações para o caso genérico de tensões. Para isso, sabe-se pela teoria da plasticidade que os elementos essenciais para a determinação de um modelo constitutivo são:

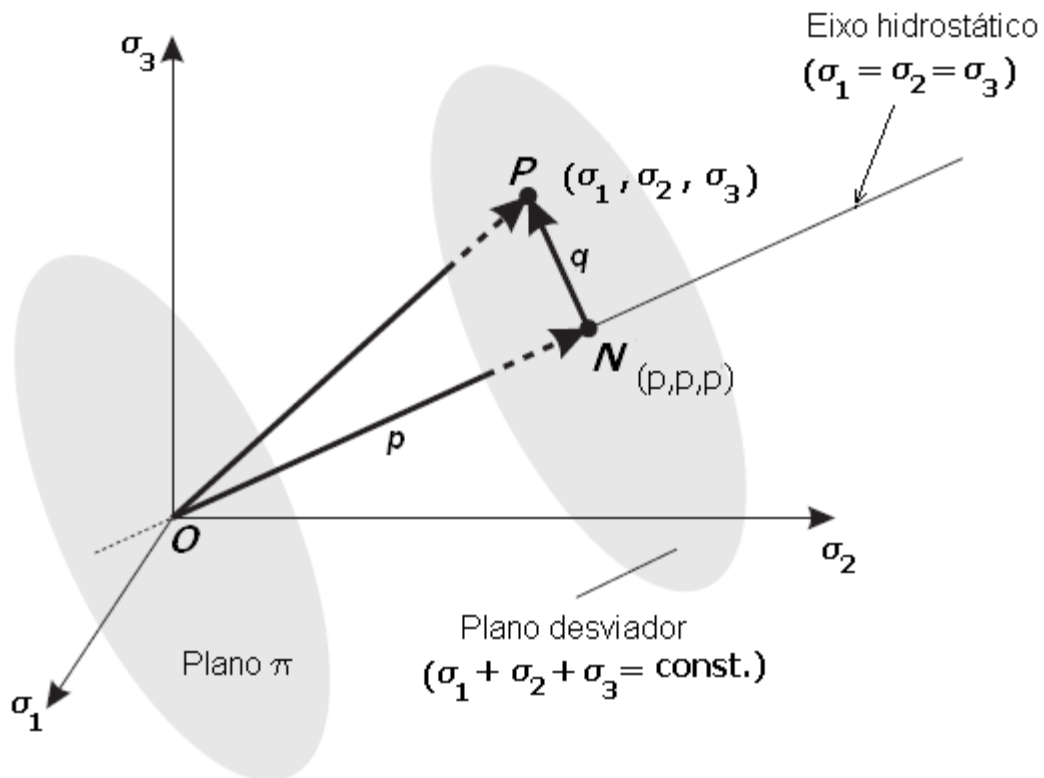
- **Critério de escoamento:** indica, através do tensor de tensões, o nível de tensão no qual ocorrerá o início da plastificação (escoamento) do material. A representação geométrica deste critério é conhecida como superfície de escoamento ou de falha.
- **Regra de encruamento:** é uma lei que expressa o comportamento do critério de escoamento com a evolução da deformação plástica.
- **Regra de escoamento:** define o comportamento entre tensão e deformação após a plastificação, considerando a deformação total e os componentes elástico e plástico.

A condição onde se inicia o escoamento, ou critério de escoamento, é de fundamental importância para prever o comportamento de determinado material. Em um carregamento axial, como os que ocorrem em ensaios de tração ou compressão, o escoamento plástico ocorre quando é atingida a tensão de escoamento. Entretanto, no estado múltiplo de tensões, empregam-se relações matemáticas que definem as condições em que ele se inicia, sendo que na sua forma mais geral pode ser escrita por:

$$F(\bar{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (16)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é o tensor de tensões e  $\alpha$  é um conjunto de variáveis que dependem do material. O critério de escoamento pode ser representado graficamente, entretanto, para melhor entendimento, primeiramente precisa-se definir o espaço de tensões de Haigh-Westergaard, o que será feito a seguir baseado no trabalho de Chen & Han (2007).

O tensor de tensões real ou de Cauchy ( $\bar{\sigma}$ ), por ter seis componentes independentes, pode ser representado graficamente em um espaço hexa-dimensional, de difícil manuseio. Uma alternativa é trabalhar com as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  como coordenadas em um espaço tridimensional de tensões, sendo este espaço conhecido com espaço de tensões de Haigh-Westergaard. Neste espaço, cada ponto com coordenadas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  representa um possível estado de tensões. A Figura 33 mostra este espaço juntamente com uma superfície genérica de escoamento, cuja representação matemática é dada pela equação (16). A função de escoamento pode ter diversas formas com representações geométricas distintas.



**Figura 33 – Espaço de tensões de Haigh-Westergaard.**  
 FONTE: Adaptado de Kossa (2011).

Na Figura 33 está representado também o eixo hidrostático, ou seja, um eixo onde as tensões principais são iguais ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Conseqüentemente, cada ponto desta linha corresponde a um estado de tensões hidrostático ou esférico. Qualquer

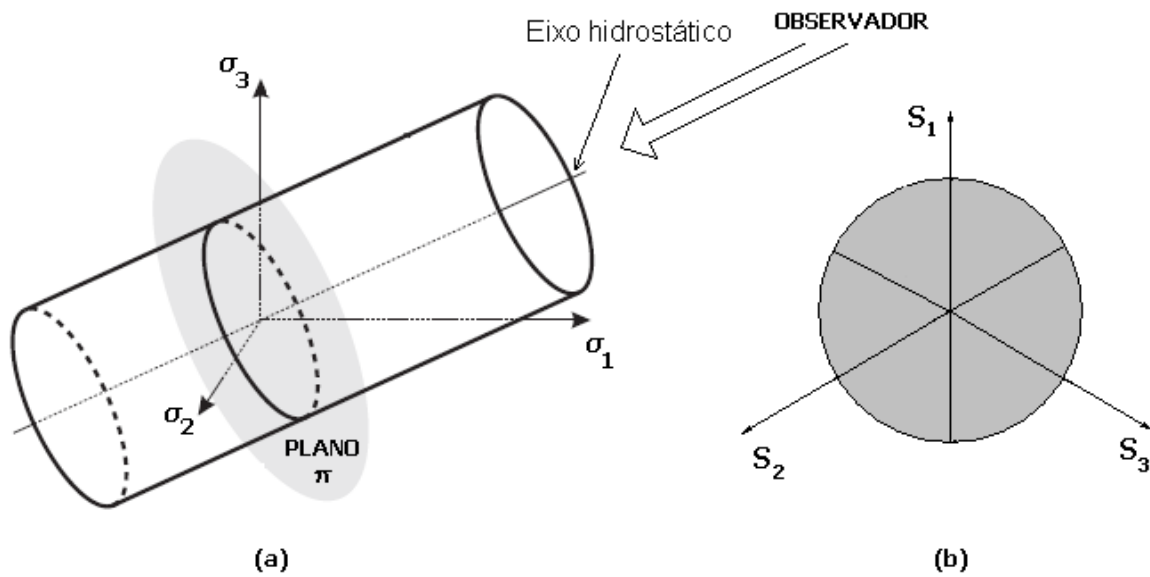
plano perpendicular ao eixo hidrostático é chamado de plano desviador (conforme Figura 33), sendo que matematicamente este plano é representado por

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}p \quad (17)$$

onde  $p$  é a distância da origem do espaço de tensões até o plano desviador medida ao longo do eixo hidrostático, conforme esquematizado na Figura 33. Um caso particular de plano desviador é aquele que passa pela origem, conhecido como plano  $\pi$ , sendo que a equação (17) se torna

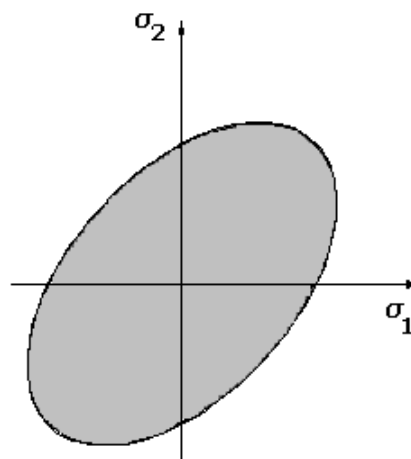
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (18)$$

Outra forma bastante comum de representação gráfica do espaço de Haigh-Westergaard é aquela onde o observador está olhando através do eixo hidrostático, conforme a Figura 34 (a), podendo-se observar de forma mais clara o formato da superfície de falha ao longo do plano desviador, Figura 34 (b).



**Figura 34 – Exemplo de uma superfície de falha olhando-se pelo eixo hidrostático.**

A interseção da superfície de falha com o plano definido por  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  também é uma forma interessante de observar a superfície de falha, sendo que esta representação decorre, por exemplo, da inexistência de  $\sigma_3$  (Alves Filho (2012)), conforme a Figura 35.

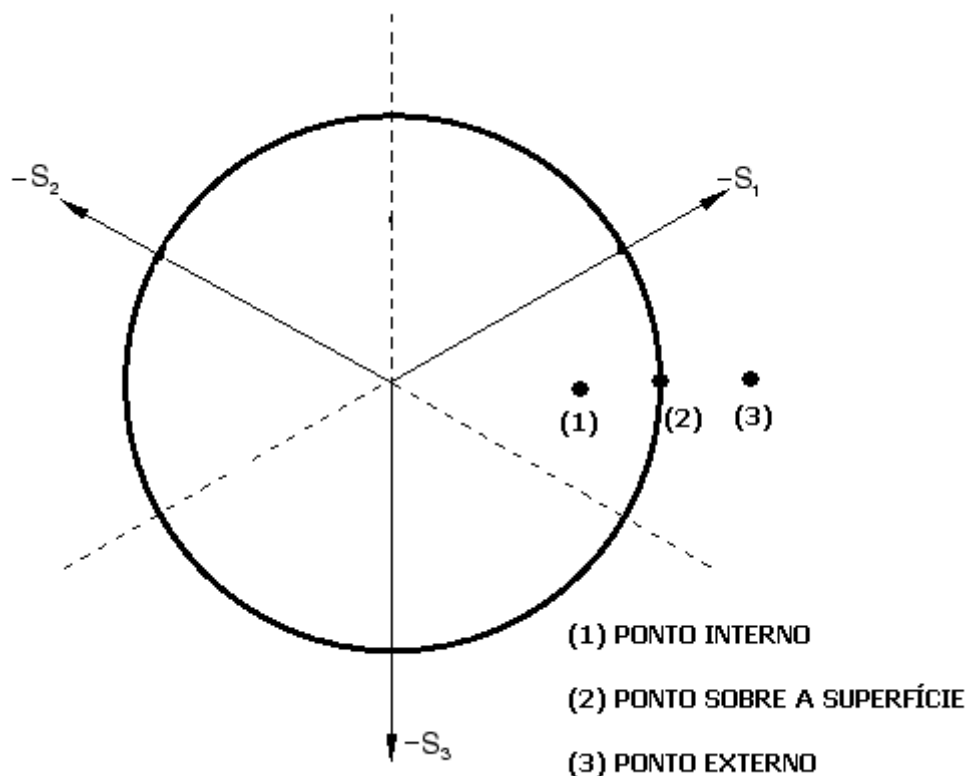


**Figura 35 – Exemplo de interseção da superfície de falha com o plano definido por  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .**

Como já definido, no espaço de Haigh-Westergaard o estado de tensões de um elemento infinitesimal qualquer é caracterizado pelas tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Caso as tensões principais representem um ponto interno à superfície de falha, têm-se um comportamento elástico, ou seja, não há escoamento do material. Se o ponto estiver exatamente sobre a superfície de falha, têm-se o início do escoamento do sólido infinitesimal e caso a tensão de escoamento seja ultrapassada o ponto estará fora da superfície de falha, sendo que neste caso duas situações são possíveis (Kmiecik & Kaminski (2011)):

- Aumento na deformação sem mudança na tensão (plasticidade ideal);
- Ruptura do material.

A Figura 36 resume os possíveis estados de tensão em relação à superfície de falha, essa observada a partir do plano desviador.



**Figura 36 – Possíveis estados de tensão em relação à superfície de falha (observada pelo eixo hidrostático).**



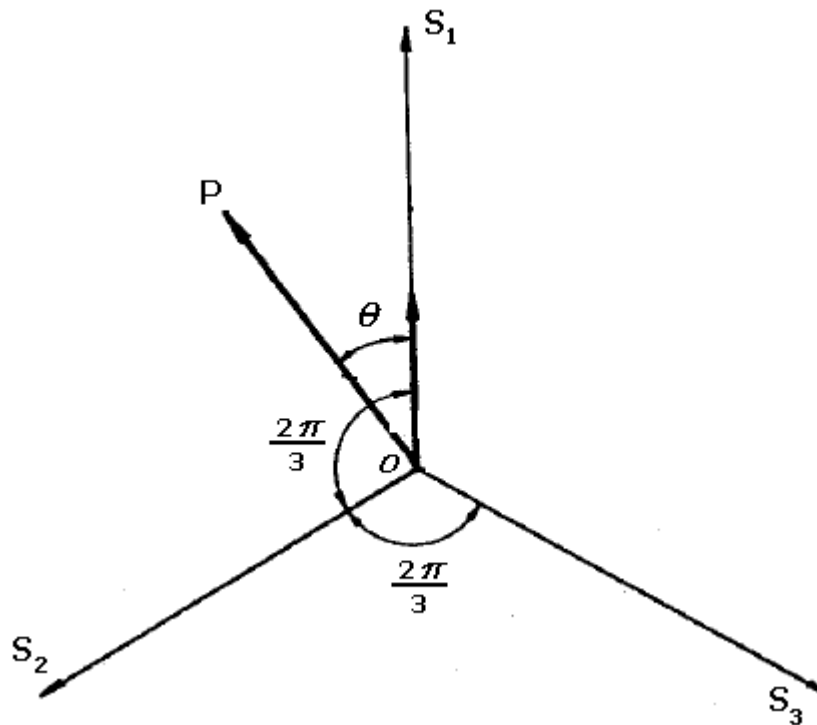
O estado de tensões  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  também pode ser expresso pelos coordenadas de Haigh-Westergaard  $(p, q, \theta)$ , sendo que a coordenada  $p$  já foi definida anteriormente e representa a distância da origem do espaço ao plano desviador ao longo do eixo hidrostático (Figura 33), a coordenada  $q$  representa a distância no plano desviador do ponto P de tensões  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  até o eixo hidrostático (Figura 33) e o ângulo  $\theta$ , também conhecido com ângulo de Lode, corresponde o ângulo formado pelo vetor que liga o ponto de tensões P  $(\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3)$  à origem do espaço de tensões com a projeção do eixo  $\sigma_1$  no plano desviador ( $S_1$ ), sendo melhor visualizado na Figura 37.

Matematicamente, pode-se definir  $p$  e  $q$  por

$$p = -\frac{1}{3}\bar{\sigma}.\bar{I} \quad (19)$$

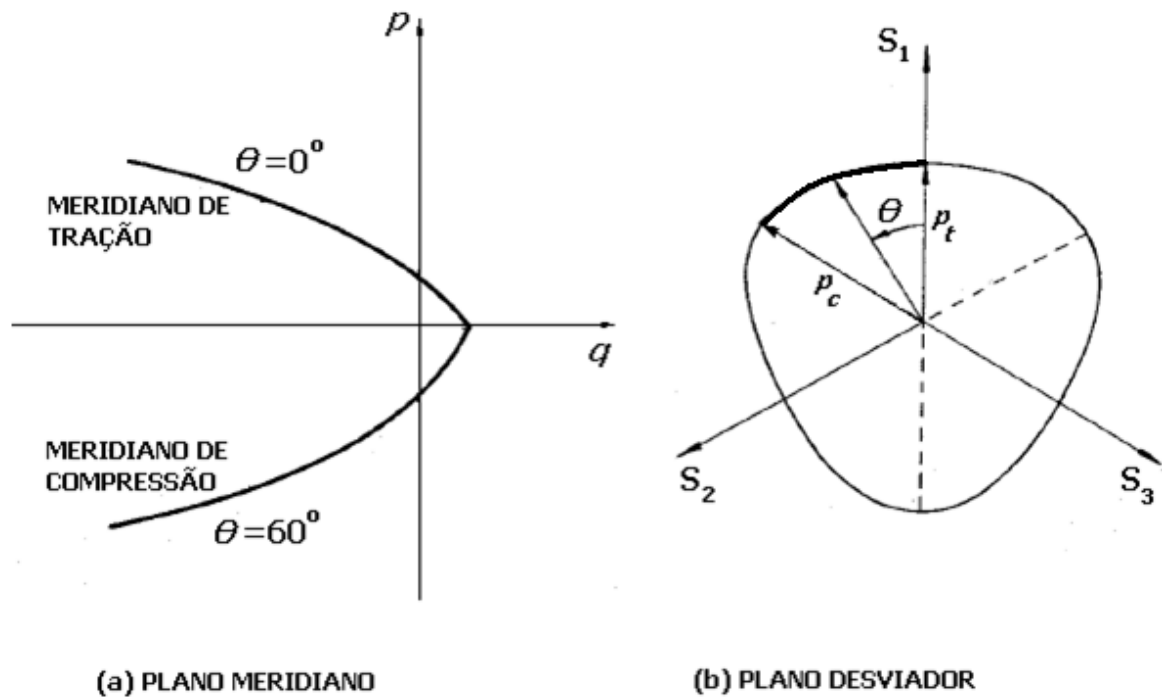
$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{S}.\bar{S}} \quad (20)$$

onde  $\bar{I}$  é o tensor identidade e  $\bar{S}$  é a parte desviadora do tensor de tensões  $\bar{\sigma}$ , sendo  $q$  conhecido também tensão equivalente de Von Mises.



**Figura 37 – Estado de tensão em um ponto projetado no plano desviador.**  
 FONTE: Adaptado de Chen & Han (2007).

A forma geral da superfície de falha em um espaço tri-dimensional pode ser descrita por uma seção ao longo do plano desviador como visto anteriormente e também por seus meridianos. Os meridianos da superfície de falha são as curvas de interseção entre a superfície de falha e um plano (plano meridiano) contendo o eixo hidrostático com  $\theta = const.$ , como apresentado de forma genérica na Figura 38 (a) para o caso de um material isotrópico. Neste caso os índices 1, 2 e 3 indicados nos eixos do sistema de coordenadas da Figura 38 (b) são arbitrários, sendo necessário, devido à simetria, investigar apenas os setores com  $\theta = 0^\circ$  até  $\theta = 60^\circ$ .



**Figura 38 – Forma geral da superfície de falha para um material isotrópico**  
 FONTE: Adaptado de Chen & Han (2007)

O setor típico destacado na Figura 38 (b) por uma linha mais grossa corresponde à ordem comum das tensões principais,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , sendo que com esta ordem há dois casos extremos:

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \quad (21)$$

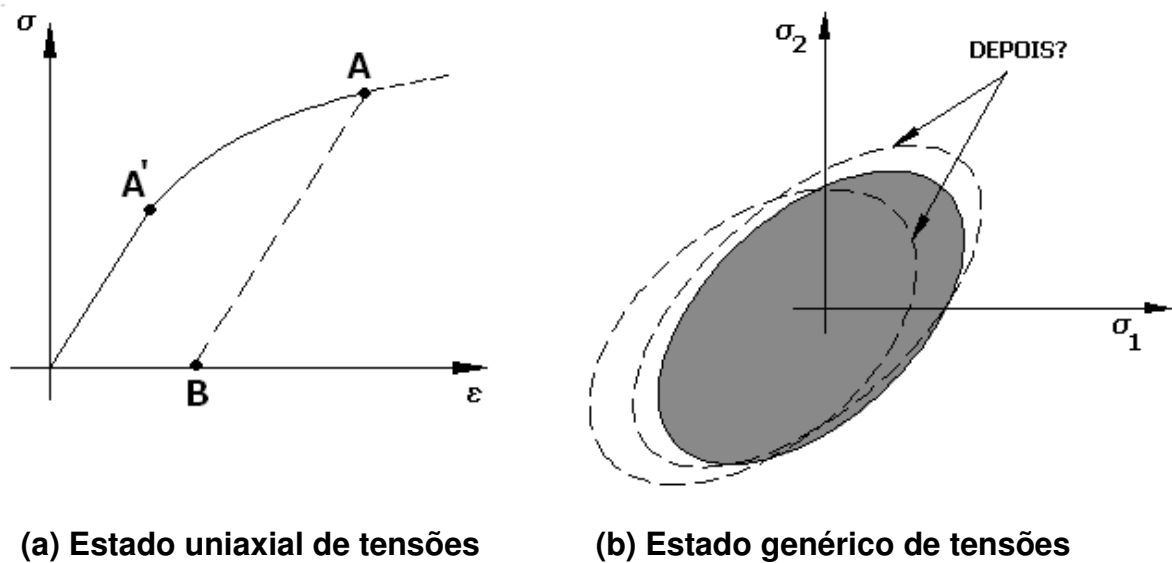
e

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad (22)$$

correspondendo a  $\theta_1 = 60^\circ$  e  $\theta_2 = 0^\circ$ , respectivamente. O meridiano correspondente a  $\theta_1 = 60^\circ$  é chamado de meridiano compressivo ou de compressão e a equação (21)

representa um estado hidrostático de tensões com uma componente de compressão se destacando em uma direção. O meridiano determinado por  $\theta_2 = 0^\circ$  representa um estado hidrostático de tensões com uma componente de tração se destacando em uma direção, sendo então chamado de meridiano de tração. Assim, o espaço de tensões de Haigh-Westergaard fica caracterizado.

Já se sabe que uma estrutura ao ser carregada além do seu limite elástico por determinado carregamento qualquer não recupera a configuração inicial, ou seja, ocorrem deformações permanentes. Para exemplificar, volta-se ao caso de tensão uniaxial, representado pela curva tensão-deformação da Figura 39 (a). Nesta figura, a estrutura ao ser carregada até o ponto representado por A, terá uma deformação permanente após o descarregamento, representado pelo ponto B. Caso ocorra novamente um carregamento, até o ponto A o comportamento será elástico, sendo que uma nova plastificação ocorrerá somente neste ponto, podendo-se dizer que o limite de escoamento aumentou, já que originalmente o escoamento ocorria no ponto A', ou seja, ocorreu encruamento. Pode-se generalizar este conceito para o caso multiaxial de tensões, onde a tensão de escoamento é substituída pela superfície de escoamento, podendo ocorrer mudança na sua forma à medida que a plastificação ocorre (Figura 39 (b)), sendo que a regra ou lei que rege este comportamento é conhecida como regra de encruamento.

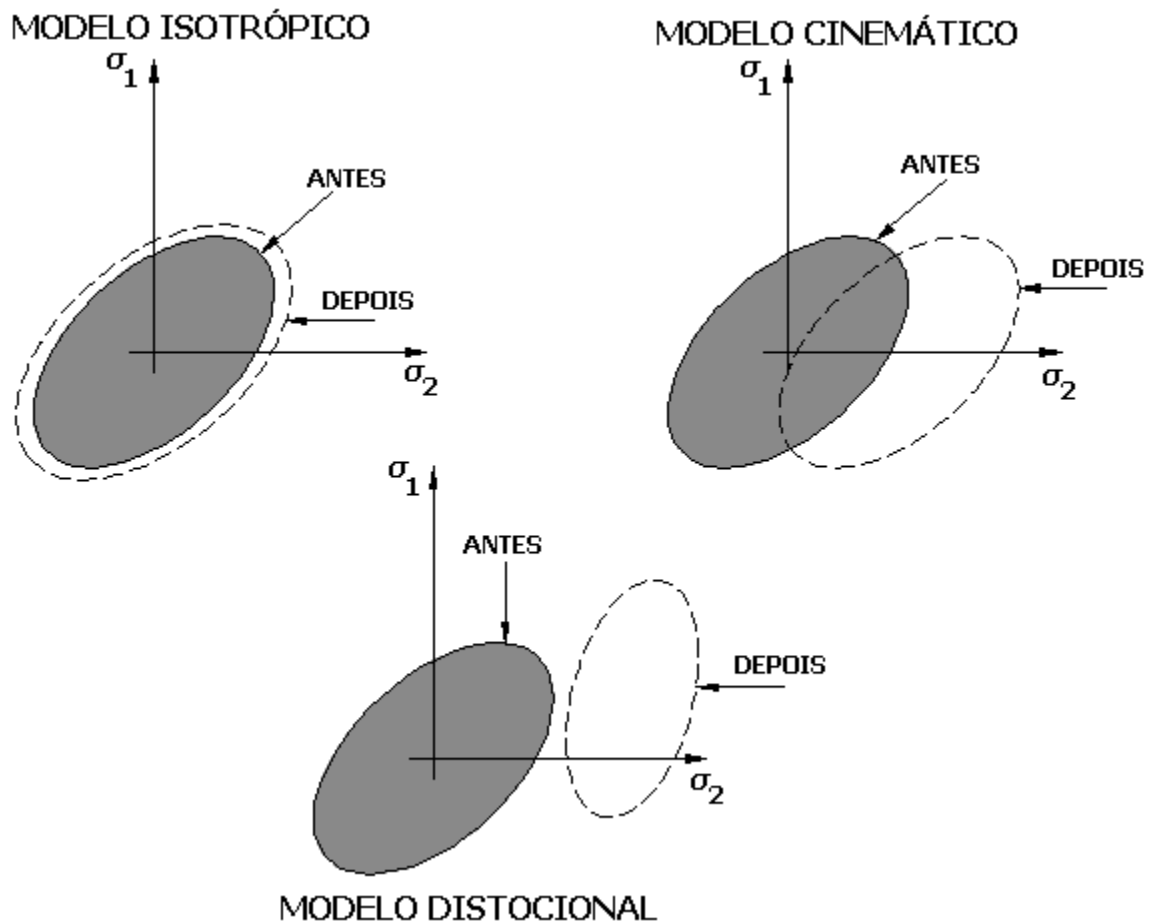


**Figura 39 – Comportamento de encruamento do material.**

FONTE: Adaptado de Alves Filho (2012).

Em relação ao fato da superfície de escoamento poder se alterar tem-se diferentes comportamentos, podendo-se classificá-los em três modelos básicos diferentes (Alves Filho (2012)):

- 1) **Modelo Isotrópico:** A superfície de escoamento no estágio seguinte, provocada pelo incremento de deformação plástica, é uma expansão uniforme da superfície de escoamento do estágio anterior. Para o caso bidimensional, a representação é dada pela Figura 40 (a).
- 2) **Modelo Cinemático:** A superfície de escoamento no estágio seguinte, provocada pelo incremento de deformação plástica, mantém a mesma forma, porém sofre uma translação no espaço das tensões como um corpo rígido (Figura 40 (b)).
- 3) **Modelo de Endurecimento Distorcional:** Admite a expansão, translação e a rotação da superfície de escoamento, e/ou inclusive a sua mudança de forma (Figura 40 (c)).



**Figura 40 – Representação bidimensional de diferentes modelos da lei de encruamento do material.**

Conforme apresentado para o caso unidimensional da Figura 39 (a), as deformações não são determinadas apenas pelo conhecimento do estado de tensões, pois dependem da história do carregamento atuante sobre a estrutura. Na determinação da evolução das deformações da estrutura, devem-se determinar os incrementos de deformação plástica à medida que o carregamento é aplicado. A deformação total é obtida pelo somatório destes incrementos ((Alves Filho (2012))). A relação matemática que expressa a evolução das deformações com as tensões é conhecida como regra de escoamento plástico.

A regra de escoamento plástico pode ser determinada considerando-se que o incremento de deformação plástica é obtido por intermédio da derivada de uma função potencial. Essa função ( $G$ ) é uma função escalar do tensor de tensões a partir

do qual os incrementos de deformação plástica podem ser determinados por derivadas parciais em relação aos componentes do tensor de tensões,

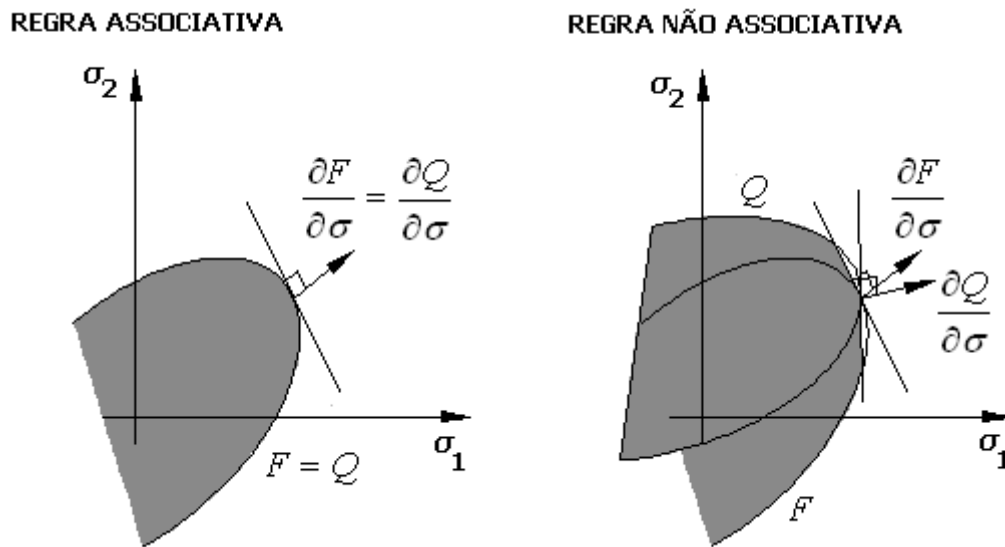
$$d\varepsilon^{pl} = d\gamma \cdot \frac{dG}{d\sigma} \quad (23)$$

ou de forma mais geral

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\gamma \cdot \frac{dG}{d\sigma_{ij}} \quad (24)$$

onde  $d\gamma$  é uma constante de proporcionalidade maior que zero, denominada multiplicador plástico. A regra de escoamento é chamada de associativa se o potencial plástico coincide com a função de escoamento, ou seja,  $G = F$ . Caso contrário, a regra é chamada de não associativa, ou seja,  $G \neq F$ . A Figura 41 expressa graficamente estas duas possibilidades.

A regra associativa é normalmente utilizada para materiais dúcteis e a não associativa é mais adequada para solos e materiais granulares, como o concreto.



**Figura 41 – Regra associativa e não associativa de escoamento plástico.**

Foram vistos anteriormente conceitos genéricos da Teoria da Plasticidade, apresentando-se a partir de agora o modelo desenvolvido por Lubliner *et al.* (1988), também conhecido como modelo de Barcelona. Neste modelo, para definir os conceitos de dano plástico<sup>5</sup>, a coesão deve ser estabelecida na função de escoamento conforme a seguinte equação,

$$F(\bar{\sigma}) = c \quad (25)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $c$  a coesão e  $F(\bar{\sigma})$  é uma função homogênea positiva de primeira ordem em relação ao tensor de tensões, ou seja, conforme definido em Zhang *et al.* (2010),

$$F(x\bar{\sigma}) = xF(\bar{\sigma}) , \quad \forall x > 0 \quad (26)$$

onde  $x$  é um número real positivo

---

<sup>5</sup> No modelo de dano plástico, a deformação plástica representa todas as deformações irreversíveis, incluindo aquelas causadas pela fissuração.



O critério da equação (25) vale para diversas teorias clássicas, como a de Mohr Coulomb e Drucker Prager. Entretanto, conforme Lubliner *et al.* (1988), elas não representam bem o comportamento do concreto. Inúmeras outras teorias de escoamento e falha foram propostas por diversos autores para caracterizar o comportamento do concreto, mas não utilizam a forma da equação (25) no sentido de definir a regra de escoamento como uma função homogênea do tensor de tensões. O trabalho de Lubliner *et al.* (1988) propôs um novo critério de escoamento na forma da equação (25) que esteja em acordo com os resultados experimentais, sendo então adaptado por diversos outros autores e implementado em diversos *softwares* comerciais, obtendo grande sucesso em simulações envolvendo estruturas de concreto.

No modelo de Barcelona, o valor inicial da coesão  $c$  é definido como a tensão inicial de escoamento em um ensaio de compressão uniaxial ( $\sigma_{c_0}$ ), definida na Figura 32 (b). Ainda, neste modelo, a regra de encruamento da Teoria Clássica da Plasticidade é substituída por uma variável de dano-plástico,  $k$ , similarmente à variável de dano no caso uniaxial, sendo que o seu valor aumenta à medida que a deformação plástica ocorre. Esta variável escalar, baseada nos conceitos da energia de fratura, é utilizada para representar todos os estados de danificação do material, sejam eles fissuras ou deformações permanentes. Uma vantagem do modelo de dano plástico é que o dano, que era originalmente acoplado na equação constitutiva, pode ser desacoplado da deformação plástica linearizando-se as equações de evolução de dano.

Relacionando a coesão com a variável de dano  $k$ , quando  $c = \sigma_{c_0}$  não há dano, ou seja,  $k=0$ . Já quando a coesão for nula ( $c=0$ ) a variável de dano tem seu valor máximo ( $k=1$ ). Entretanto, ao contrário dos modelos clássicos da plasticidade com encruamento isotrópico, a coesão não é uma função simples do dano  $k$ , sendo que seu valor depende do processo de carregamento, ou seja, a coesão é assumida como uma variável interna, governada por uma taxa  $\dot{c}$  que é proporcional a taxa de dano  $\dot{k}$ . A equação assumida por Lubliner *et al.* (1988) para a taxa de dano  $\dot{k}$  tem da seguinte forma:

$$\dot{k} = h^T(\bar{\sigma}, c, d)\dot{\epsilon}^{pl} \quad (27)$$

onde  $\dot{\epsilon}^{pl}$  taxa de deformação plástica, ou regra de escoamento, definida genericamente por:

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}} \quad (28)$$

sendo que a variável  $\dot{\lambda}$  representa o fator de carregamento e  $\frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}}$  o gradiente de deformação plástica. A taxa de coesão  $\dot{c}$  é proposta no modelo de Barcelona da seguinte forma,

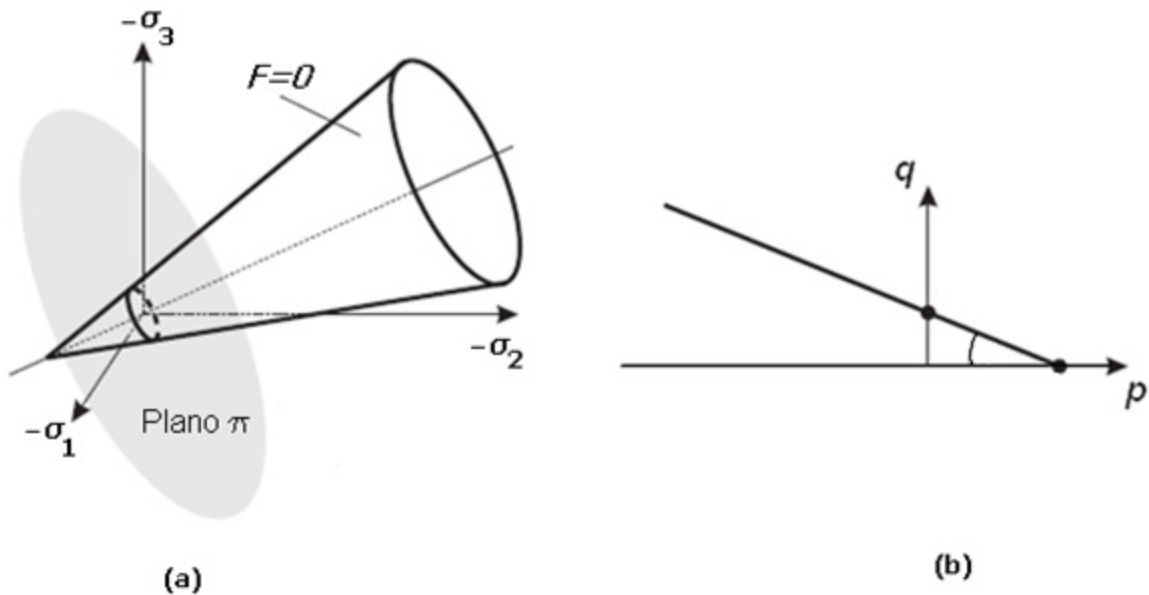
$$\dot{c} = k(\bar{\sigma}, c, d)\dot{k} \quad (29)$$

A seguir será apresentado detalhadamente cada item que faz parte do modelo proposto por Lubliner *et al.* (1988), definindo-se o critério de escoamento e a sua representação geométrica, a regra de escoamento plástico, a variável de dano plástico que substitui o critério de encruamento da Teoria Clássica da Plasticidade e também a relação entre a coesão e o dano, relação  $c-k$ .

#### 4.1.1 Critério de Escoamento

Como apresentado anteriormente, uma das questões fundamentais do modelo de Lubliner *et al.* (1988) é definir a função de escoamento ( $F(\bar{\sigma})$ ) de forma homogênea até primeira ordem e que leve em consideração a coesão do material, sendo que os critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager também o fazem de forma similar.

De um modo geral, os critérios citados acima são quadráticos na tensão cisalhante octaédrica (ou equivalente a  $\sqrt{J_2}$ , onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador) e lineares na tensão normal média (ou em  $I_1$ , o primeiro invariante do tensor de tensões). O terceiro invariante entra através do ângulo polar  $\theta$  (ou ângulo de Lode) no plano desviador. Com esta forma, os meridianos no espaço de tensão são curvos, sendo que a superfície de falha tende para um cilindro circular assim que o eixo hidrostático tende ao infinito ( $I_1 \rightarrow \infty$ ), conforme a Figura 42, que representa o critério de Drucker-Prager.



**Figura 42 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager (a) e plano meridiano (b).**

FONTE: Kossa (2011).

Caso as regiões de alta-pressão sejam excluídas, os invariantes de tensão citados acima e outros dados de falha podem ser adequados na equação (25) da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha} (\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{\max} \rangle) \quad (30)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes adimensionais e  $\sigma_{\max}$  é o valor algébrico máximo das tensões principais, sendo esta a forma matemática da superfície de falha desenvolvida por Lubliner *et al.* (1988). Quando  $\sigma_{\max} = 0$ , por exemplo, em compressão biaxial, a equação (30) se torna o critério de Drucker-Prager.

A constante adimensional  $\alpha$  pode ser obtida comparando-se os valores obtidos em ensaios experimentais das tensões de escoamento na compressão no caso uniaxial ( $\sigma_{c0}$ ) e equi-biaxial ( $\sigma_{b0}$ ), através de

$$\alpha = \frac{\sigma_{b0} - \sigma_{c0}}{2\sigma_{b0} - \sigma_{c0}} ; \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 0,5 \quad (31)$$

Valores típicos obtidos em laboratório para a relação  $\frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}}$  variam entre 1,10 e 1,16, tendo-se então  $\alpha$  normalmente entre 0,08 e 0,12.

Uma vez conhecido o valor de  $\alpha$ , a constante  $\beta$  pode ser determinada conhecendo-se a tensão de escoamento na tração no caso uniaxial ( $\sigma_{t0}$ ), que geralmente é a mesma que a tensão de tração última, podendo-se determinar  $\beta$  por:

$$\beta = (\alpha - 1) \frac{\sigma_{c0}}{\sigma_{t0}} - (1 + \alpha) \quad (32)$$

A tensão de escoamento na tração biaxial ( $\sigma_{bt0}$ ) depende das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  e quase sempre é cerca de 2% menor que no caso uniaxial ( $\sigma_{t0}$ ) (Lubliner *et al.* (1988)).

O parâmetro  $\gamma$  deve ser definido no ensaio triaxial do concreto. Denotando-se, na superfície de escoamento, o meridiano de tração ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) por TM e o meridiano de compressão ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) por CM, tem-se, para o primeiro,

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{3}(I_1 + 2\sqrt{3J_2}) \quad (33)$$

e para o segundo

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{3}(I_1 + \sqrt{3J_2}) \quad (34)$$

Com  $\sigma_{\max} < 0$ , a equação de cada meridiano fica

$$(2\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)\sigma_c \quad (\text{TM}) \quad (35)$$

$$(\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)\sigma_c \quad (\text{CM}) \quad (36)$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão crítica na compressão uniaxial, sendo a tensão de escoamento para a superfície de escoamento e a tensão última para a superfície de falha.

Definindo-se a razão entre o segundo invariante do tensor desviador no meridiano de tração pelo de compressão,

$$K_c = \frac{(\sqrt{J_2})_{TM}}{(\sqrt{J_2})_{CM}} \quad (37)$$

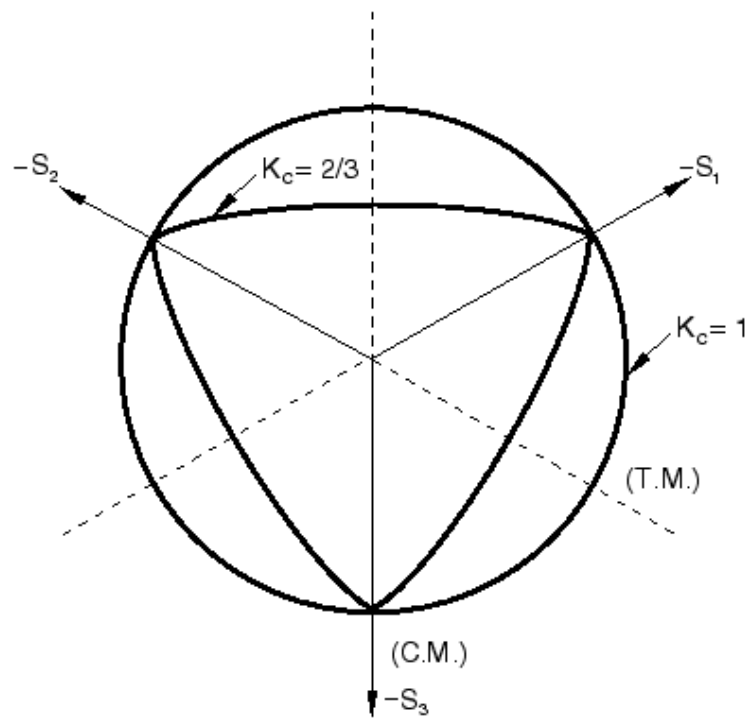
e substituindo as equações (35) e (36) na equação (37), obtém-se

$$K_c = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3} \quad (38)$$

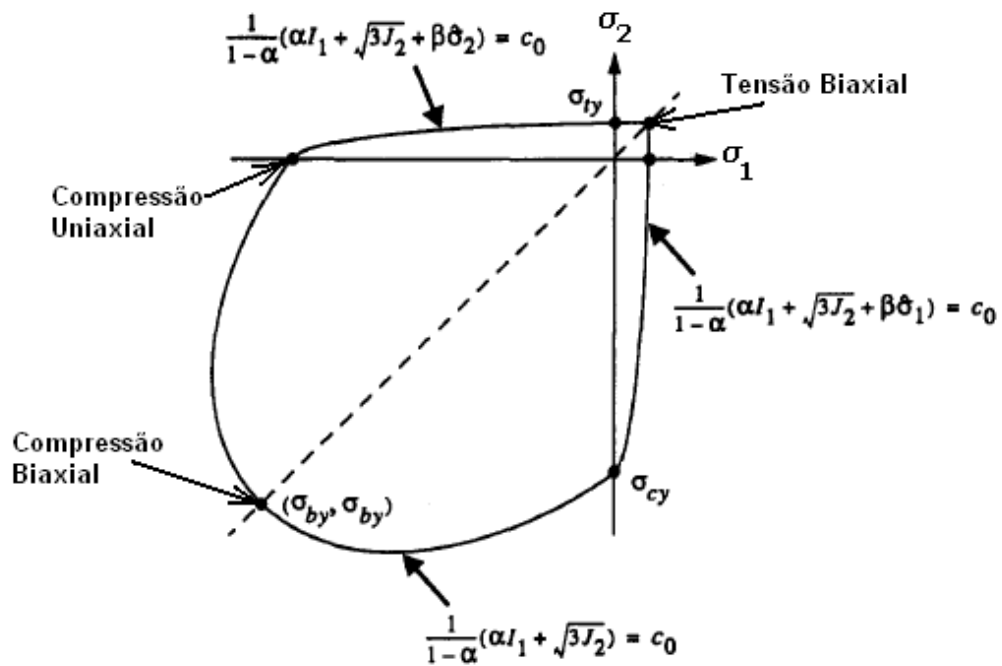
que é uma constante. Valores típicos de  $K_c$  variam entre  $0,5 < K_c \leq 1$ . A partir da equação (38), pode-se determinar o valor de  $\gamma$ ,

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1} \quad (39)$$

Fisicamente, o valor de  $K_c$  representa a razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão no plano desviador. A Figura 43 mostra a representação gráfica da superfície de falha no plano desviador. O valor de  $K_c = 2/3$  é normalmente recomendado para o modelo CDP (Kmiecik & Kaminski (2011)), sendo que a forma gráfica para este valor de  $K_c$  no plano desviador (Figura 43) corresponde à combinação de três elipses tangentes. Com valor de  $K_c = 1$ , a superfície de falha se torna um círculo, como no critério clássico de Drucker-Prager. A Figura 44 mostra a superfície de escoamento para o estado plano de tensões.



**Figura 43 – Plano desviador da superfície de falha para o modelo CDP.**  
 FONTE: Kmiecik & Kaminski (2011)



**Figura 44 – Superfície de falha para o modelo CDP no estado plano de tensões.**  
 FONTE: Adaptado de Lee & Fenves (1998).

A próxima definição necessária para a caracterização do modelo de Barcelona é com relação à Regra de Escoamento, apresentada a seguir.

#### 4.1.2 Regra de Escoamento Plástico

Os materiais granulares, como o concreto, podem exibir uma mudança significativa de volume causada por severas deformações plásticas. Esta mudança de volume pode ser bem reproduzida utilizando-se uma função potencial plástica  $G$  adequada na definição da regra de escoamento, dada genericamente pela equação (28).

No trabalho de Lubliner *et al.* (1988), a função potencial plástica clássica de Mohr-Coulumb foi utilizada, sendo que o ângulo de dilatância  $\psi$  foi substituído pelo ângulo de atrito interno  $\phi$ :

$$G(\bar{\sigma}, \psi) = \frac{I_1}{3} \text{sen}\psi + \sqrt{J_2} \left( \cos\theta - \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\psi}{\sqrt{3}} \right) \quad (40)$$

sendo essa uma regra de escoamento associativa.

#### 4.1.3 Variável de Dano Plástico

Primeiramente, a variável de dano plástico será caracterizada para o estado uniaxial de tensões, generalizando-se o conceito posteriormente.

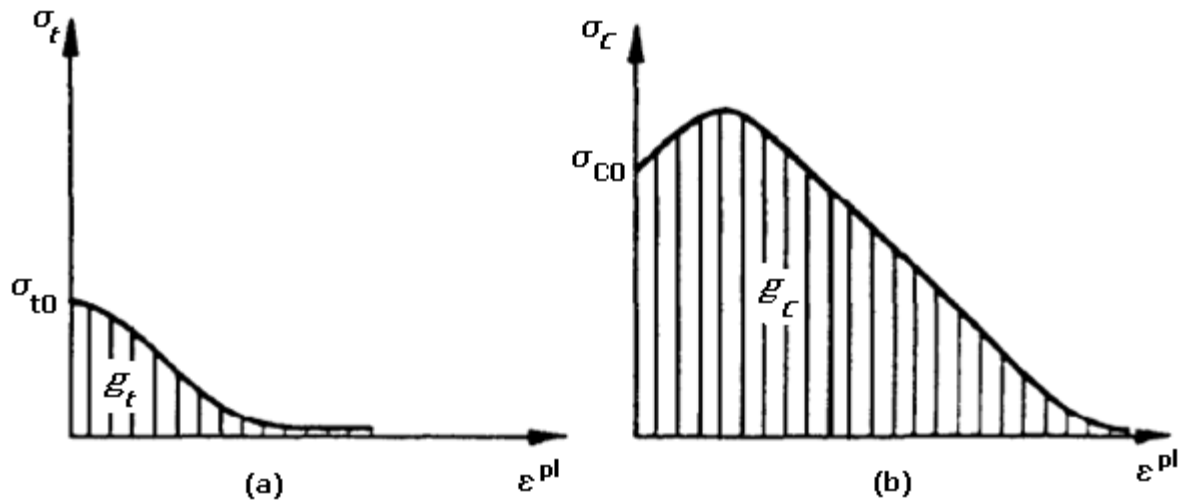
Através da transformação do gráfico tensão-deformação de um ensaio de tração/compressão uniaxial ( $\sigma - \varepsilon$ ) (Figura 32) em uma curva tensão-deformação plástica ( $\sigma - \varepsilon^{pl}$ ), conforme a Figura 45, e calculando-se a área abaixo dos gráficos,  $g_t$  para o ensaio de tração e  $g_c$  para o de compressão, pode-se definir



$$k = \frac{1}{g_t} \int_0^{\varepsilon^{pL}} \sigma d\varepsilon^p \quad (41)$$

$$k = \frac{1}{g_c} \int_0^{\varepsilon^{pL}} \sigma d\varepsilon^p \quad (42)$$

para o ensaio de tração e compressão respectivamente, sendo  $k$  uma variável independente de dano.



**Figura 45 – Curvas tensão-deformação plástica ( $\sigma - \varepsilon^p$ ) na tração (a) e na compressão (b).**

Definido-se uma função analítica conveniente  $\sigma = \sigma(k)$  válida tanto para a tração como para a compressão, de tal forma que:

$$\sigma_t(0) = \sigma_{t0} \text{ e } \sigma_t(1) = 0 \quad (43)$$

$$\sigma_c(0) = \sigma_{c0} \text{ e } \sigma_c(1) = 0 \quad (44)$$

e observando o fato de que experimentalmente as curvas tensão-deformação tendem para um nível de tensão nula assintoticamente, a relação analítica  $\sigma - \varepsilon^{pl}$  tanto para a tração como para a compressão pode ser representada por

$$\sigma = \sigma_0[(1+a)\exp(-b\varepsilon^{pl}) - a\exp(-2b\varepsilon^{pl})] \quad (45)$$

onde as constantes adimensionais  $a$  e  $b$  podem ser obtidas considerando-se

$$g = \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^{pl} \text{ e } \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pl}}\right)\Big|_{\varepsilon^{pl}=0} \quad (46)$$

e finalmente chegando-se a

$$g = \frac{\sigma_0}{b} \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (47)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pl}}\right)\Big|_{\varepsilon^{pl}=0} = \sigma_0 b(a-1) \quad (48)$$

Quando a constante  $a > 1$ , tem-se encruamento inicial no gráfico tensão-deformação plástica (Figura 45), e quando  $a < 1$  tem-se um amolecimento logo após o escoamento.

Através da integração de funções, obtém-se a expressão para a variável de dano plástico  $k$ ,

$$k = \frac{1}{g} \int_0^{\varepsilon^{pl}} \sigma d\varepsilon^{pl} = 1 - \frac{1}{2+a} [2(1+a)\exp(-b\varepsilon^{pl}) - a\exp(-2b\varepsilon^{pl})] \quad (49)$$

e, para  $a \neq 0$ ,

$$\sigma = \sigma(k) = \frac{\sigma_0}{a} [(1+a)\sqrt{1+a(2+a)k} - 1 + a(2+a)k] \quad (50)$$

que é a relação entre a tensão e a variável de dano plástico.

Pode-se estender os conceitos apresentados acima para o estado multiaxial de tensões. Para isso, Lubliner *et al.* (1988) utiliza a taxa ( $\dot{k}$ ) da variável  $k$  através de uma equação que contempla todos os estados de tensão, dada por:

$$\dot{k} = -\frac{r(\bar{\sigma})}{g_t} \sigma_t(k) \dot{\epsilon}_1^{pl} - \frac{1-r(\bar{\sigma})}{g_c} \sigma_c(k) \dot{\epsilon}_3^{pl} \quad (51)$$

onde  $r(\bar{\sigma})$  é um fator de peso de tensão multiaxial, continuamente dependente do tensor de tensões  $\bar{\sigma}$  de tal forma que  $0 \leq r(\bar{\sigma}) \leq 1$ , com  $r(\bar{\sigma}) = 1$  se  $\sigma_i \geq 0$  (tensão pura) para  $i = 1, 2, 3$  e  $r(\bar{\sigma}) = 0$  se  $\sigma_i \leq 0$  (compressão pura) para todo  $i$ . Uma forma particular de definir  $r(\bar{\sigma})$  é

$$r(\bar{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (52)$$

onde  $\langle \rangle$  corresponde ao operador de Macauley, definido por

$$\langle x \rangle = \frac{|x| + x}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\langle x \rangle}{x} = 0 \quad \text{se} \quad x = 0 \quad (53)$$

Este operador retorna o valor de 0 caso a variável arbitrária seja negativa e a própria variável caso ela seja positiva.

O último item que precisa ser definido para caracterizar o modelo de Barcelona será apresentado a seguir, correspondendo à relação entre a coesão e a variável de dano plástico.

#### 4.1.4 Relação entre Coesão e Dano Plástico ( $c$ - $k$ )

Conforme visto anteriormente, a coesão deve ser definida de tal forma que quando o dano atingir o valor máximo  $k = 1$  deve-se ter perda de coesão ( $c = 0$ ). De uma forma geral, a equação da taxa para a coesão  $c$ , definida genericamente na equação (29) e reproduzida abaixo, deve ter a solução  $c = \sigma_c(k)$  na compressão uniaxial e  $c = \left(\frac{\sigma_{c0}}{\sigma_{t0}}\right)\sigma_t(k)$  para a tração.

$$\dot{c} = k(\bar{\sigma}, c, k)\dot{k} \quad (29) \text{ Repetida}$$

Analisando-se a equação (29), a função  $k(\bar{\sigma}, k, c)$  deve atender aos valores estabelecidos anteriormente, sendo que Lubliner *et al.* (1988) propôs a seguinte relação:

$$k(\bar{\sigma}, c, k) = c \left[ \frac{r(\bar{\sigma})}{\sigma_t(k)} \sigma_t'(k) + \frac{1 - r(\bar{\sigma})}{\sigma_c(k)} \sigma_c'(k) \right] \quad (54)$$

onde o fator de peso  $r(\bar{\sigma})$  é definido com anteriormente pela equação (52).

Para demonstrar que a condição  $c = 0$  para  $k = 1$  é válida para qualquer processo, com o auxílio das equações (52) e (54), a equação (29) pode se reescrita por

$$d \ln c = rd \ln \sigma_t + (1-r) \ln \sigma_c \quad (55)$$

e através da integração por partes, reescreve-se a equação anterior para

$$d \ln c = d(rd \ln \sigma_t + (1-r) \ln \sigma_c) + \ln(\sigma_c / \sigma_t) dr \quad (56)$$

Finalmente, pode-se integrar a equação (56) para se obter a relação entre  $c-k$ ,

$$c = \sigma_{c0} \left( \frac{\sigma_t}{\sigma_{t0}} \right)^r \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_{c0}} \right)^{1-r} \exp \left( \int_{r=0}^{r=1} \ln \frac{\sigma_c}{\sigma_t} dr \right) \quad (57)$$

já que  $\sigma = \sigma(k)$ .

Com isso, todos os conceitos necessários para o entendimento do modelo de Barcelona foram definidos. Entretanto, este modelo não é adequado para representar o comportamento do concreto sob cargas cíclicas, fato que será explicado a seguir, com as modificações propostas por Lee & Fenves (1998).

## 4.2 MODELO DE DANO PLÁSTICO MODIFICADO POR LEE & FENVES (1998)

No modelo de Barcelona, visto anteriormente, as variáveis de dano estão acopladas à deformação plástica na equação constitutiva, sendo bastante conveniente para calibração de parâmetros com resultados experimentais (Lee & Fenves (1998)). Entretanto, as equações acopladas apresentam dificuldades numéricas, que causam

descarregamentos plásticos espúrios durante as iterações do algoritmo numérico (Lee & Fenves (1994)).

Outro fato presente no modelo de Barcelona é a utilização de uma variável de dano que represente tanto a compressão como a tração, conforme a equação (27). Em cargas cíclicas, o concreto está submetido à estados de danificação diversos, podendo ser devido à trincas de tração, esmagamento na compressão ou perda de rigidez, sendo que a utilização de uma variável de dano única não é apropriada.

Visando eliminar as dificuldades supracitadas do modelo de Barcelona, (Lee & Fenves (1998) propuseram um novo modelo de dano plástico para cargas cíclicas utilizando-se o mesmo critério de energia de fratura do modelo de Lubliner *et al.* (1988). Para isso, duas variáveis de dano plástico foram utilizadas, uma para tração e outra para compressão, representadas através do vetor de dano  $\bar{k}$ ,

$$\bar{k} = \begin{Bmatrix} k_t \\ k_c \end{Bmatrix} \quad (58)$$

caracterizando-se assim os diferentes estágios de danificação. A função de escoamento é modificada utilizando-se este nova vetor de dano, tendo a seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}, \bar{k}) \leq 0 \quad (59)$$

A coesão, agora não é mais uma função escalar do dano, como na equação (57), sendo definida como uma função do vetor de dano  $\bar{k}$ ,

$$\bar{c} = \bar{c}(\bar{k}) = \begin{Bmatrix} c_c(k_c) \\ c_t(k_t) \end{Bmatrix} \quad (60)$$

As considerações citadas acima terão implicações na superfície e regra de escoamento, sendo detalhadas a seguir.

#### 4.2.1 Superfície de Escoamento

Na superfície de escoamento originalmente definida por Lubliner *et al.* (1988), equação (30), a coesão é a única variável representando a resistência do material, sendo que a variável de dano afeta apenas a coesão, assim, a equação (30) pode ser genericamente representada por

$$F(\bar{\sigma}) = c(k) \quad (61)$$

A equação (61) representa o encruamento isotrópico na teoria clássica da plasticidade, o que apresenta bons resultados para cargas monotônicas, não sendo apropriada para representar o comportamento cíclico do concreto. Isso se deve ao fato de uma resistência afetar fortemente a outra, ou seja, a resistência de compressão tem influência na de tração e vice-versa, sendo necessário utilizar as duas variáveis de coesão ao invés de uma, como originalmente no modelo de Barcelona.

A nova função de escoamento é obtida definindo-se de forma diferente o parâmetro  $\beta$ , anteriormente uma constante no modelo de Lubliner *et al.* (1988) (equação (32)), com duas variáveis de coesão, de tal forma que

$$\beta = \beta(\bar{k}) \quad (62)$$

$$\beta = \frac{c_c(\bar{k})}{c_t(\bar{k})} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (63)$$

onde é  $c_t$  a coesão de tração e  $c_c$  a coesão compressiva e  $\alpha$  é definido da mesma forma já apresentada, através da equação (31). Da forma como a coesão e as variáveis de dano estão definidas, dados por

$$c_t = \sigma_t(k_t) \quad (64)$$

$$c_c = -\sigma_c(k_c) \quad (65)$$

a função de escoamento da equação (59) se torna

$$F(\bar{\sigma}, \bar{k}) = \frac{1}{1-\alpha} (\alpha I_1 + \sqrt{3} J_2 + \beta(\bar{k}) \langle \sigma_{\max} \rangle) - c_c(\bar{k}) \quad (66)$$

A seguir será apresentado como a nova regra de escoamento é definida.

#### 4.2.2 Regra de Escoamento

Pelo fato da superfície de falha definida por Lee & Fenves (1998) (equação (66)) ser uma combinação geométrica de duas diferentes funções de Drucker-Prager, a função potencial plástica hiperbólica de Drucker-Prager foi utilizada para definir a regra de escoamento,

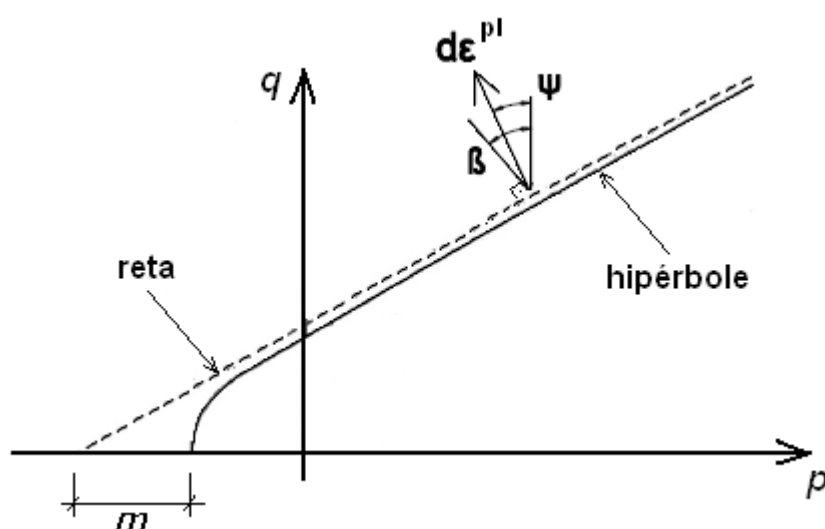
$$G = \sqrt{(\sigma_{co} - m \cdot \sigma_{to} \cdot \text{tg} \psi)^2 + q^2} - p \cdot \text{tg} \psi - \bar{\sigma} \quad (67)$$

onde  $\sigma_{co}$  e  $\sigma_{to}$  são as tensões resistentes uniaxiais de compressão e tração do concreto, respectivamente. O ângulo de dilatação  $\psi$  é medido no plano meridional  $p$ - $q$  em altas pressões confinantes, enquanto  $m$  é a excentricidade da superfície poten-



cial plástica. Esta função potencial plástica é não associativa, ou seja, não coincide com a superfície de escoamento,  $G \neq F$ .

O ângulo de dilatação  $\psi$  pode ser visualizado no plano meridional  $p$ - $q$ , Figura 46, juntamente com a função linear de Drucker-Prager (linha pontilhada) e a função hiperbólica (linha contínua), correspondendo ao ângulo de inclinação entre a direção do incremento de deformação plástica e a vertical, fisicamente sendo interpretado como o ângulo de atrito interno do concreto, geralmente com valores entre  $35^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$ .



**Figura 46 – Função linear e hiperbólica de Drucker-Prager.**  
 FONTE: Adaptado de Johannsson & Reitzel (2011).

Como já citado anteriormente, a forma da função potencial plástica no plano meridional é hiperbólica, sendo que esta forma é ajustada por um parâmetro conhecido por excentricidade ( $m$ ). Esta excentricidade é um valor pequeno que expressa a taxa de aproximação da hipérbole (linha contínua na Figura 46) da sua assíntota (linha pontilhada na Figura 46). Em outras palavras, é o comprimento (medido ao longo do eixo hidrostático  $p$ ) do segmento entre o vértice da hipérbole e a interseção da assíntota com o eixo hidrostático, conforme a Figura 46. A excentricidade pode ser calculada também como a razão da tensão última de tração pela de compressão no caso uniaxial. Com o aumento do valor da excentricidade, a curvatura para a função

potencial aumenta, implicando que o ângulo de dilatação aumente mais rapidamente à medida que a pressão confinante diminui. Quando a excentricidade tiver o valor de  $m=0$ , a superfície no plano meridional se torna uma linha reta, ou seja, o critério clássico de Drucker-Prager.

Neste capítulo foram definidos os conceitos básicos do modelo constitutivo utilizado para o concreto, o modelo CDP, que inicialmente foi proposto por Lubliner *et al.* (1988) e posteriormente incorporou as modificações definidas por Lee & Fenves (1998) para expressar os efeitos de cargas cíclicas. Resumidamente, para definir o modelo CDP necessita-se de curvas tensão-deformação para o caso de tração e compressão uniaxial, sendo que o efeito *tension stiffening* da curva de tração pode ser representada pela energia de fratura, pela deformação plástica ou pelo deslocamento. Ainda, necessita-se definir a variável de dano na tração e compressão com a evolução das deformações compressivas e de tração, respectivamente.

Para representar os efeitos do estado multiaxial de tensões, quatro parâmetros são fundamentais para o modelo CDP, sendo eles:

- 1)  $\frac{\sigma_{bo}}{\sigma_{co}}$ , correspondendo à razão entre as tensões de escoamento no ensaio equibiaxial e no ensaio uniaxial (o valor típico está em torno de 1,16).
- 2)  $K_c$ , representando a razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão no plano desviador. Deve ter valores compreendidos entre ,  $0,5 \leq K_c \leq 1$  sendo  $K_c = 2/3$  o valor mais utilizado.
- 3)  $\psi$ , sendo o ângulo de dilatação medido no plano meridional  $p$ - $q$  em pressões confinantes elevadas. Valores típicos para o concreto variam entre  $35^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$ .
- 4)  $m$ , correspondendo à excentricidade, sendo um valor pequeno que expressa a taxa de aproximação da hipérbole da sua assíntota no plano  $p$ - $q$ , sendo que seu valor deve estar compreendido entre  $0 \leq m \leq 1$ .

O primeiro, segundo e quarto parâmetros são obtidos através da definição do critério de falha, sendo que o terceiro vem do conceito da superfície potencial plástica.

O próximo capítulo abordará os conceitos de juntas adesivadas sob o ponto de vista de elementos finitos, sendo utilizado posteriormente para modelar as regiões que são unidas através de colagem de adesivos químicos.



## 5 JUNTAS ADESIVADAS

Através da realização de ensaios experimentais, diversos pesquisadores observaram o comportamento de vigas reforçadas com CFRP, notando-se que devido à alta resistência da fibra de carbono, um dos principais tipos de falha que ocorre é devido à delaminação na junta entre o concreto e o compósito. Com isso, a consideração da região de interface para caracterizar o comportamento do sistema como um todo é de fundamental importância. Para isto, serão apresentadas neste capítulo as principais características do modelo utilizado neste trabalho, o Modelo de Zona de Coesão (MZC), onde os conceitos da Mecânica do Dano também estarão fortemente presentes.

A utilização das uniões mecânicas em qualquer ramo da atividade industrial é muito antiga, chegando hoje a processos de alta tecnologia, como a solda a *laser*, a sinterização e muitos outros.

O sucesso ou falha de um projeto pode depender da seleção apropriada e uso das uniões. Um exemplo da importância deste assunto é apresentado por Norton (2004), correspondendo ao caso do avião Boeing 747, que utiliza aproximadamente 2,5 milhões de juntas, algumas delas custando milhares de dólares.

Embora as uniões mecânicas por meio de soldas ou rebites sejam ainda muito utilizadas, este tipo de procedimento de fixação de peças acaba danificando localmente as superfícies e componentes. Também, algumas vezes podem não ser o procedimento mais adequado nos aspectos técnico (principalmente pela concentração de tensões) e econômico para determinada aplicação, abrindo espaço para a utilização das uniões ou juntas adesivada.

As juntas adesivadas correspondem a um sistema estrutural onde a união é feita através da colagem dos componentes empregando-se um adesivo químico, denominado popularmente de “cola”. Podemos citar atualmente o emprego deste tipo de sistema em componentes de máquinas de elevado custo e precisão, como turbinas, motores, compósitos de elevada resistência, *risers* e colunas de poços de petróleo, componentes eletrônicos sensíveis e também em outras áreas, como a medicina e a odontologia.

Algumas das vantagens da utilização de adesivos são evidenciadas em Ribeiro (2007), sendo elas:

- Capacidade de unir materiais quimicamente dissimilares, como metais, plásticos, borrachas, compósitos fibrosos, madeiras, etc.;
- Capacidade de unir, de forma efetiva, aderentes de pequena espessura;
- Adequada distribuição de tensões na junta, permitindo eficiente resistência à fadiga mecânica;
- Flexibilidade em projetos de componentes estruturais, permitindo novos conceitos e materiais a serem empregados;
- Maior resistência à corrosão dos componentes aderidos, uma vez que eliminam a presença de fixadores metálicos na junta.

Ainda, pode-se destacar as vantagens de adesivos visco-elásticos, que podem absorver energia mecânica aplicada à junta e sua posterior dissipação, conferindo ao sistema maior resistência à fadiga em relação aos sistemas de fixação mecânicos.

Como todo sistema utilizado na engenharia, os adesivos apresentam defeitos que muitas vezes limitam a sua utilização, sendo destacados por Ribeiro (2007) os seguintes:

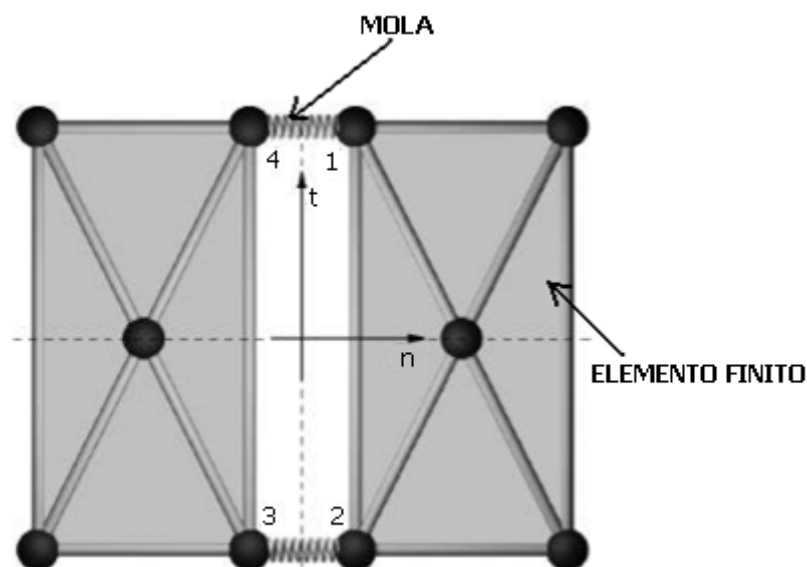
- Em sistemas onde é requerida longa vida útil em ambiente hostil (presença de contaminantes e umidade), o fator envelhecimento da junta torna-se preponderante, freqüentemente necessitando-se da aplicação de processos de tratamento superficiais sobre os substratos;
- Os adesivos possuem menor capacidade de suportar as condições de serviços onde a temperatura seja elevada em relação aos métodos tradicionais, como soldagem ou aparafusamento;
- Possuem menor capacidade mecânica em situações de tração e cisalhamento que os sistemas tradicionais, a menos que a área de contato da junta seja grande e a camada adesiva seja mantida em compressão.

Com relação à modelagem numérica, uniões e estruturas com interface têm sido abordadas de diversas formas, sendo que os principais modelos utilizados, conforme Chandra *et al.* (2002), são:

- modelo da mecânica do contínuo com propriedades degenerativas;
- modelo de região infinitesimal separada por molas;
- modelo de zona de coesão (MZC);

O modelo que considera materiais adesivados como meio contínuo é utilizado quando as dimensões da cola utilizada não podem ser desprezadas e proporcionam a medição macroscópica das propriedades mecânicas, como a rigidez e a resistência. Ou seja, a interface é discretizada em elementos finitos assim como o restante da estrutura.

Molas podem também ser utilizadas para se descrever interfaces entre dois materiais, sendo estas inseridas entre as faces dos elementos finitos de modo a representar o adesivo ou outra interface qualquer (Figura 47). As propriedades mecânicas da interface neste caso são introduzidas no modelo através da rigidez das molas, sejam elas lineares ou não.



**Figura 47 – Modelagem de interface com molas.**  
 FONTE: Adaptado de Quinino (2004).

Já o modelo de zona de coesão é utilizado onde as dimensões da cola podem ser consideradas desprezíveis, podendo ser adotado como zero para todos os efeitos práticos. Nesse caso, as propriedades macroscópicas não são de grande relevância diretamente, sendo que o fundamento do comportamento da cola é derivado da mecânica do dano e fratura.

O modelo de zona de coesão vem sendo muito utilizado e com resultados bastante satisfatórios para descrever o comportamento na falha e fratura de grande número de materiais e em grande variedade de estudos, como plasticidade na ponta das trincas, deformação lenta sob cargas estáticas e dinâmicas, trincas de interface entre bi-materiais, juntas adesivadas, interação solo/viga, concreto/reforço, concreto/solo e outros, conforme Chandra et al. (2002).

Utilizando-se o MZC, o comportamento da junta adesivada é modelado por expressões independentes entre elas, que correlacionam, respectivamente, a interação normal ou tangencial da interface com o respectivo deslocamento entre as superfícies unidas. O deslocamento normal provoca o modo I de fraturamento, já os deslocamentos tangenciais são responsáveis pelos modos II e III.

A principal vantagem de se utilizar o MZC é o fato de se prever o surgimento e propagação da delaminação sem o conhecimento prévio da localização da trinca e sua direção de propagação. Todo o embasamento teórico deste modelo está de acordo com a teoria da fratura de Griffith quando se considera a zona coesiva com espessura desprezível.

Diversos pesquisadores desenvolveram estudos utilizando o MZC criando assim seus próprios modelos. Apesar destas pesquisas serem na maioria das vezes independentes e distintas, a maior parte delas utiliza a relação entre tensão e deslocamento relativo para o estudo da interface, onde a tensão ao longo da mesma alcança um nível máximo com o aumento do deslocamento e em seguida pode diminuir até certo ponto onde se anula, ocorrendo então a decoesão (perda completa de resistência do material colante). A diferença principal entre os modelos dos diversos pesquisadores está na forma de representação da lei tensão-deslocamento. A Tabela 5 apresenta alguns MZC mais frequentemente encontrados na literatura.



Tabela 5 – Modelos de Zona de Coesão

FONTE: Adaptado de Chandra *et al.* (2002).

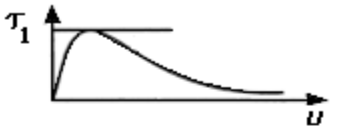
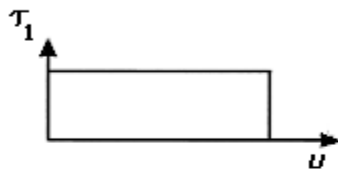
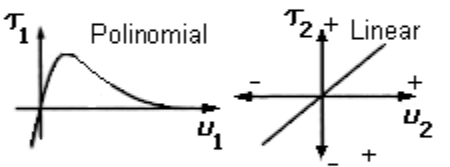
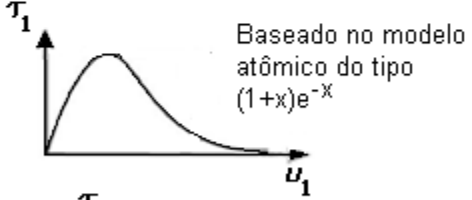
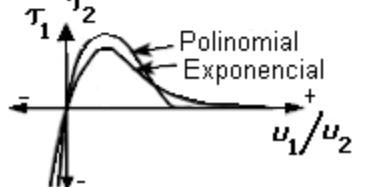
Autor (ano)	Modelo Proposto	Aplicação	Comentários
Barenblatt (1959,1962)		Materiais perfeitamente frágeis	O primeiro a propor o modelo de zona de coesão
Dugdale (1960)		Escoamento de placas finas de aço elasto-plástico ideal	Tensão de coesão igualada com a tensão de escoamento do material
Needleman (1987)		Decoção de matrizes particuladas	Prevê separação normal Fenomenológica
Rice and Wang (1989)		Segregação de solutos	A parte ascendente iguala-se a $E_0$ e considera a separação normal e ignora a de cisalhamento
Needleman (1990a)		Decoção de matriz particulada	Prevê separação normal Ajuste polinomial para $\tau_1$ e linear para $\tau_2$

Tabela 5 - Continuação

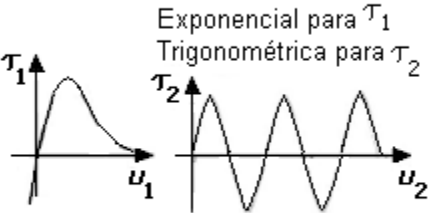
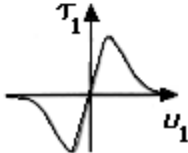
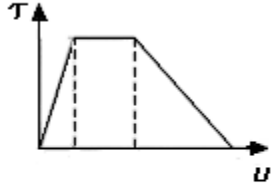
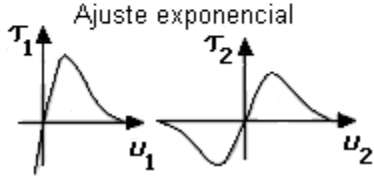
Autor (ano)	Modelo Proposto	Aplicação	Comentários
Needleman (1990b)	 <p>Exponencial para <math>\tau_1</math> Trigonométrica para <math>\tau_2</math></p>	Decoção de interfaces sob tensão hidrostática	Tensão de cisalhamento periódica para o modelo. Tensões cisalhantes Pieriels devido ao deslizamento
Tvergaard (1990)		Interfaces de <i>whiskers</i> de matriz compósitas reforçadas por metal	Modelo quadrático
Tvergaard e Hutchinson (1992)		Crescimento de trinca em materiais elasto-plásticos, descamação de juntas adesivadas	A forma da lei de separação é relativamente sem importância
Xu e Needleman (1993)	 <p>Ajuste exponencial</p>	Decoção de matriz particulada	Prevê cisalhamento e separação normal

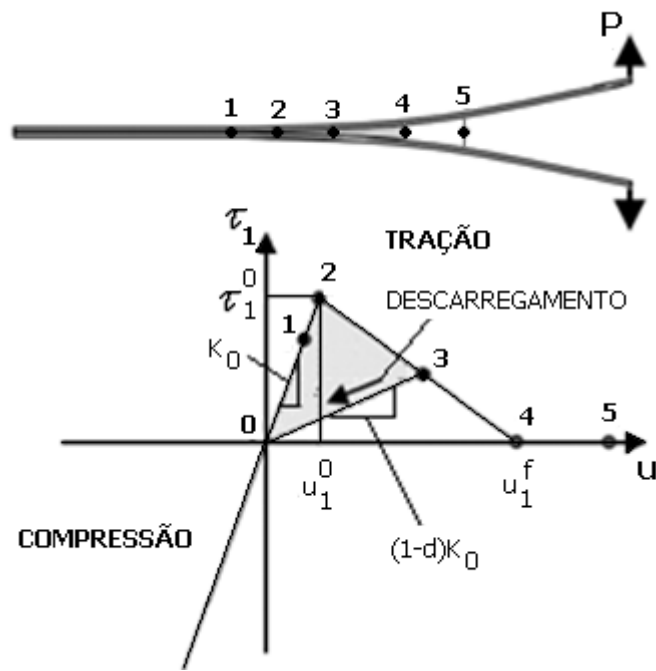
Tabela 5 – Continuação.

Autor (ano)	Modelo Proposto	Aplicação	Comentários
Camacho e Ortiz (1996)		Problemas de Impacto	Utiliza critério adicional de fratura; prevê a falha tanto por separação normal quanto de cisalhamento na tração e separação por cisalhamento na compressão
Guebelle e Baylor (1998)		Delaminação a baixa velocidade devido ao impacto	Modelo bi-linear; a curva ascendente pode ser ajustada pela rigidez inicial do material

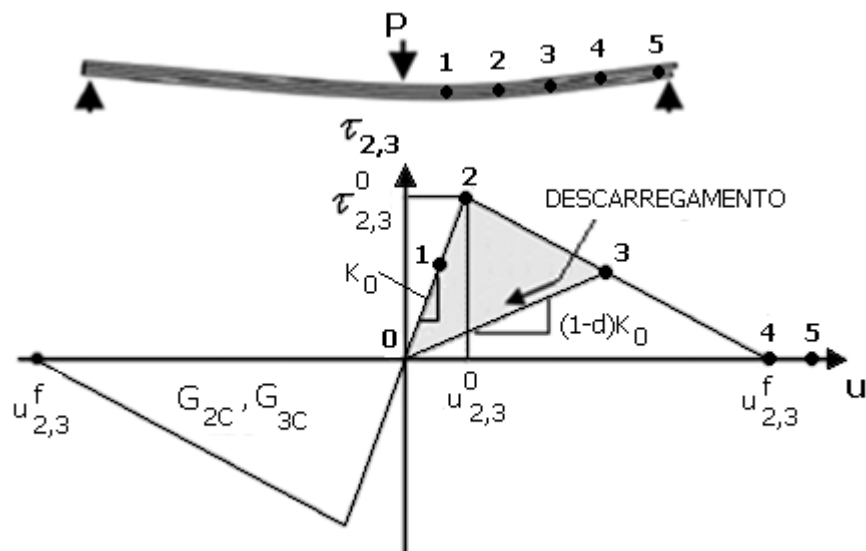
Um modelo constitutivo apropriado na formulação de um elemento coesivo é fundamental para a correta simulação do problema, sendo que a seguir será apresentado detalhadamente o modelo constitutivo mais utilizado atualmente em problemas de modelagem similares ao abordado neste trabalho, conhecido como modelo de Camanho & Davila (2002).

### **5.1 MODELO CONSTITUTIVO DE CAMANHO & DAVILA (2002)**

O modelo desenvolvido por Camanho & Davila (2002) pode ser utilizado para descrever o processo de danificação na interface entre elementos finitos sólidos, tanto nos Modos I, II ou III ou na combinação deles, chamado de Modo Misto. A Figura 48 apresenta a forma de carregamento utilizada para simulação dos modos de falha.



(b) Modo I



(a) Modo II ou Modo III

**Figura 48 – Leis constitutivas para os Modos puros.**  
 FONTE: Camanho & Davila (2002).

Uma lei constitutiva bi-linear é utilizada para simular os modos puros, conforme a Figura 48. Enquanto a interface estiver unida, o comportamento é simulado por uma rigidez  $K_0$  linear (ponto 1 da Figura 48), conhecida como rigidez de penalidade (*penalty stiffness*). Após as tensões (tensão normal para o Modo I e cisalhantes para os modos II e III) atingirem certo valor (ponto 2 da Figura 48), a rigidez é reduzida gradualmente até zero, sendo que os deslocamentos no início do dano são obtidos por:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \frac{\tau_1^0}{K_0} \\ u_2^0 &= \frac{\tau_2^0}{K_0} \\ u_3^0 &= \frac{\tau_3^0}{K_0} \end{aligned} \tag{68}$$

onde  $\tau_1^0$  é a tensão normal inter-laminar e  $\tau_2^0$  e  $\tau_3^0$  são as tensões cisalhantes inter-laminares. Para formular um modelo mais completo, o descarregamento foi proposto passando pela origem (ponto 0 da Figura 48). Ainda, conforme Balzani & Wagner (2008), tensões puramente compressivas não causam delaminação, assim como os efeitos de fricção são desprezados neste modelo.

Pode-se definir uma função de carregamento através de uma variável, denominada por Camanho & Davila (2002) como deslocamento relativo máximo ( $u^{\max}$ ), dado por:

$$\begin{aligned} u_i^{\max} &= \max \{u_i^{\max}, |u_i|\}, \quad i = 2, 3 \quad \text{Modos II e III} \\ u_1^{\max} &= \max \{u_1^{\max}, u_1\}, \quad u_1^{\max} \geq 0 \quad \text{Modo I} \end{aligned} \tag{69}$$

A função de carregamento  $F$  é utilizada para distinguir o carregamento do descarregamento, tendo-se

$$F = \frac{\langle |u_i| - u_i^{\max} \rangle}{|u_i| - u_i^{\max}}, \quad i = 2, 3 \quad \text{Modos II e III}$$

$$F = \frac{\langle u_1 - u_1^{\max} \rangle}{u_1 - u_1^{\max}}, \quad \text{com } u_1^{\max} \geq 0 \quad \text{Modo I} \quad (70)$$

onde o operador  $\langle \rangle$  representa o operador de Macaulay, definido no Capítulo 4 na equação (53). Assim a equação (70) tem o valor de 1 caso ocorra o carregamento e 0 no descarregamento.

A equação constitutiva da Figura 48, com comportamento bi-linear, irreversível e com características de amolecimento, pode ser definida,

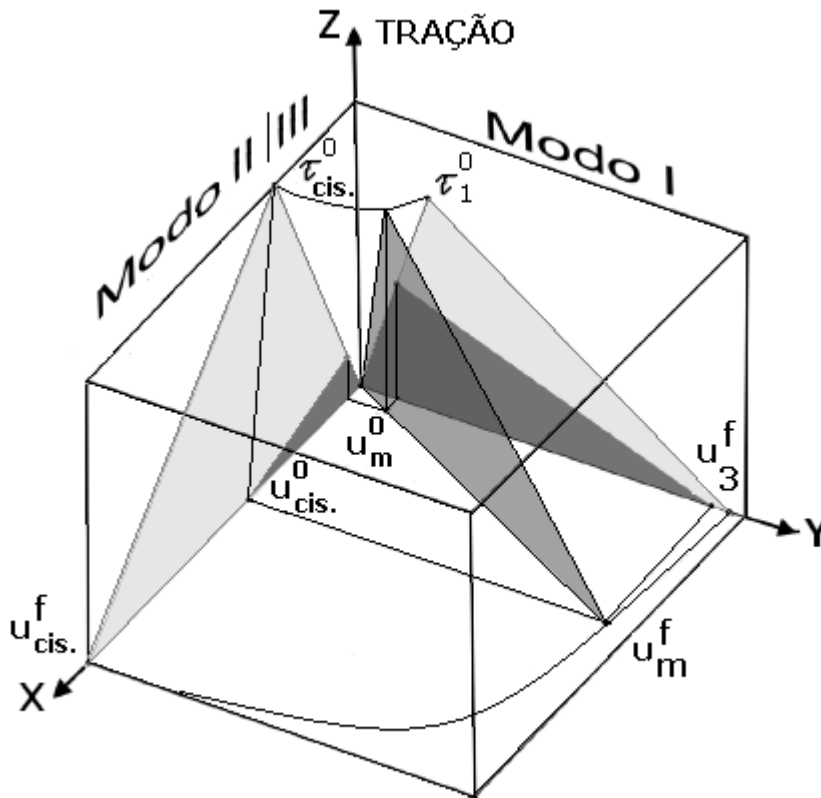
$$\tau_i = \begin{cases} Ku_i \Rightarrow u_i^{\max} \leq u_i^0 \\ (1-d_i)Ku_i \Rightarrow u_i^0 \leq u_i^{\max} \leq u_i^f, \quad i = i, 2, 3 \\ 0 \Rightarrow u_i^{\max} \geq u_i^f \end{cases} \quad (71)$$

onde  $d_i$  é definido por Balzani & Wagner (2008) como variável escalar de dano,

$$d_i = \frac{u_i^f (u_i^{\max} - u_i^0)}{u_i^{\max} (u_i^f - u_i^0)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad d_i \in [0, 1] \quad (72)$$

ou seja, caso o valor seja  $d_i$  seja 0 corresponde à situação de um material totalmente íntegro, já quando seu valor atingir 1 o dano está completo.

No caso mais geral de modo misto de falha, a lei constitutiva pode ser obtida como uma combinação dos modos individuais, como mostra a Figura 49, onde o Modo I é representado no plano Y-Z, e os modos de cisalhamento no plano X-Z.



**Figura 49 – Composição da Lei de amolecimento do modo misto.**

FONTE: Adaptado de Camanho & Davila (2002).

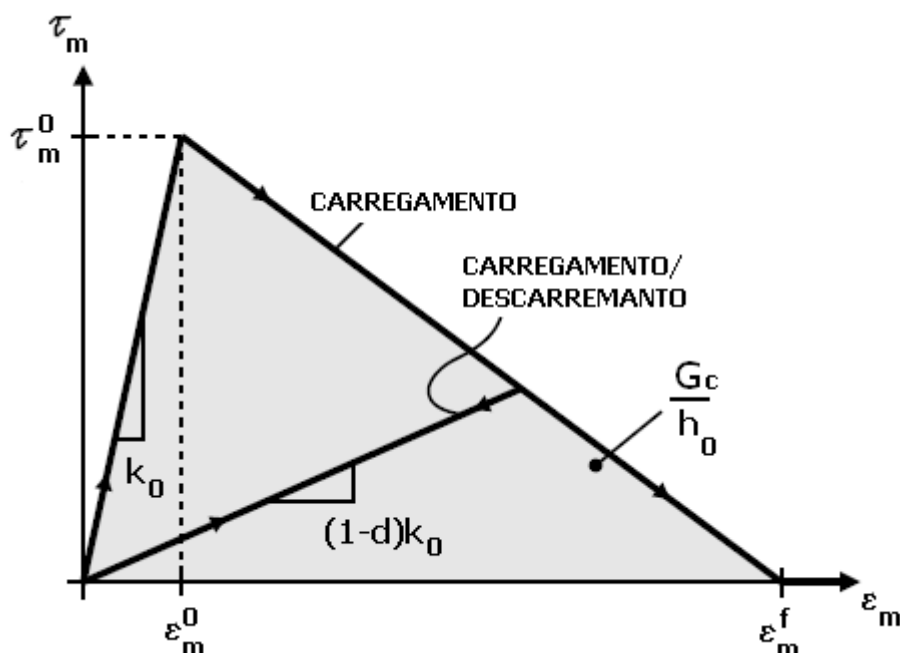
O diagrama equivalente para o modo misto, apresentado por Balzani & Wagner (2008), é mostrado na Figura 50, onde no lugar dos deslocamentos estão expressas as deformações. Assim, o deslocamento equivalente para o modo misto é definido por:

$$u_m = \sqrt{\langle u_1 \rangle^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\langle u_{normal} \rangle^2 + u_{cisalhamento}^2} \quad (73)$$



Com a convenção da equação (53), o fato de uma tensão normal compressiva não provocar delaminação é levada em conta. Outra variável de interesse pode ser definida, chamada de razão de modo misto  $\beta$ , que no caso de deslocamentos positivos é definida por

$$\beta = \frac{u_{\text{cisalhamento}}}{u_{\text{normal}}} \quad (74)$$



**Figura 50 – Diagrama equivalente da lei constitutiva pra Modo Misto.**

FONTE: Adaptado de Balzani & Wagner (2008).

A lei que representa o modo misto (Figura 50), assim como nos modos individuais, também é função de apenas uma variável, podendo ser completamente definida pela rigidez de penalidade  $K_0$ , a função de evolução de dano  $d$  e os deslocamentos relativos no modo misto no início e final do dano,  $u_m^0$  e  $u_m^f$  respectivamente, sendo definida matematicamente em Balzani & Wagner (2008) como:

$$\bar{\tau} = \bar{D}\bar{u} \quad (75)$$

onde  $\bar{u}$  representa os deslocamentos e  $\bar{D}$  o tensor de elasticidade, que contém as diferentes etapas coesivas e é expresso da seguinte forma:

$$\bar{D} = \begin{cases} K\bar{I} \Rightarrow u_m^{\max} \leq u_m^0 \\ (1-d)K\bar{I} + dK\bar{I}_c \Rightarrow u_m^0 \leq u_m^{\max} \leq u_m^f \\ K\bar{I}_c \Rightarrow u_m^{\max} \geq u_m^f \end{cases} \quad (76)$$

$$d = \frac{u_m^f (u_m^{\max} - u_m^0)}{u_m^{\max} (u_m^f - u_m^0)}, \quad d \in [0,1] \quad (77)$$

O tensor  $\bar{I}$  representa o tensor identidade e o tensor  $\bar{I}_c$  representa a compressão no histórico de carregamento, ou seja, anula a parcela referente ao dano durante a compressão, sendo:

$$\bar{I}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\langle -u_1 \rangle}{-u_1} \end{bmatrix} \quad (78)$$

A rigidez inicial  $K_0$  definida anteriormente (conforme a Figura 50) para representar o comportamento linear da interface antes do início do processo de danificação, conhecida como rigidez de penalidade, é utilizada também para evitar a interpenetração das faces durante a compressão, sendo que a seguinte expressão é proposta por Camanho & Davila (2002):

$$\tau_1 = Ku_1 \Rightarrow u_1 \leq 0 \quad (79)$$

O valor de  $K_0$  pode variar muito conforme as diferentes linhas de pesquisa, entretanto, o seu valor deve ser grande o suficiente para prover uma rigidez suficiente para a ligação e ao mesmo tempo deve ser pequeno o suficiente para reduzir os riscos de problemas numéricos como oscilações espúrias causadas pelas tensões (Turon *et al.* (2007)). O valor de rigidez de penalidade da interface proposto por Turon *et al.* (2007) que não afeta as propriedades elásticas dos materiais base leva em consideração o módulo de elasticidade  $E$  do material e a altura  $h$  do substrato ou material base, obtendo-se, conforme Samways (2013),

$$K_{0ij} = \alpha \frac{E_{ij}}{h} \quad (80)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro muito maior que 1 ( $\alpha \gg 1$ ). Conforme Turon *et al.* (2007), com valores de  $\alpha \geq 50$ , a perda de rigidez por causa da interface é menor que 2%, sendo de razoável precisão para a maioria dos problemas.

### 5.1.1 Início e Propagação do Dano

Conforme Camanho & Davila (2002), a área sob as curvas tensão-deslocamento representa a energia de fratura da interface ( $G_{iC}$ ), sendo calculadas para cada modo de falha:

$$G_{iC} = \int_0^{u_i^f} \tau_i du_i = \frac{1}{2} \tau_i u_i^f, \quad i = 1, 2, 3 \quad (81)$$

Os deslocamentos finais podem ser obtidos conhecendo-se a energia de fratura da interface para cada modo, através da equação (81), obtendo-se:

$$u_i^f = \frac{2G_{iC}}{\tau_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (82)$$

sendo que os deslocamentos na fase elástica antes do início do dano podem ser determinados pela equação (68), repetida a seguir.

$$u_1^0 = \frac{\tau_1^0}{K_0}$$

$$u_2^0 = \frac{\tau_2^0}{K_0}$$

$$u_3^0 = \frac{\tau_3^0}{K_0}$$

**(68) REPETIDA**

Para a determinação do deslocamento na fase elástica para o modo misto, a seguinte expressão pode ser utilizada:

$$u_m^0 = \begin{cases} u_3^0 u_1^0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{(u_3^0)^2 + (\beta u_1^0)^2}} \Rightarrow u_1 > 0 \\ u_{\text{cisalhamento}}^0 \Rightarrow u_1 \leq 0 \end{cases} \quad (83)$$

O início do processo de danificação pode ser definido matematicamente quando certo critério for satisfeito. Para os modos independentes, a aparecimento do dano ocorre na interface quando a componente de tração alcança seu respectivo valor máximo, estabelecido graficamente na Figura 48. Entretanto, no modo misto pode ocorrer o dano antes que uma das componentes de tração atinja seu valor máximo.

O critério de falha quadrática levando em consideração a interação entre os modos de falha foi demonstrado por Cui *et al.* (1992) como sendo aquele que melhor determina o início da danificação, expresso pela seguinte equação:

$$\left(\frac{\langle \tau_1 \rangle}{\tau_1^0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_2^0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_3}{\tau_3^0}\right)^2 = 1 \quad (84)$$

Este critério considera apenas as tensões máximas nos modos independentes, podendo ser definidas pela equação (68) conhecendo-se a rigidez de penalidade.

A representação matemática da propagação do dano no modo misto mais utilizada atualmente, conforme Camanho & Davila (2002), é denominada de “*Power-law*”, definida em termos das energias de fratura:

$$\left(\frac{G_1}{G_{1c}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_2}{G_{2c}}\right)^\alpha = 1 \quad (85)$$

O expoente  $\alpha = 1$  da equação (85) é suficiente para a previsão de falha de matriz de compósitos termoplásticos (Camanho & Davila (2002)), entretanto com valores de  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 2$ , a equação (85) falha na correta captura da interdependência da energia de fratura no modo misto, sendo utilizado o critério de Benzeggagh & Kenane (1996), conhecido como critério “*B-K*”. Este critério é expresso como uma função da energia de fratura no Modo I e Modo II e de um parâmetro  $\eta$  obtido experimentalmente (ver anexo A):

$$G_c = G_{1c} + (G_{2c} - G_{1c}) \left(\frac{G_2}{G_T}\right)^\eta, \text{ com } G_T = G_1 + G_2 \quad (86)$$

Caso o Modo III de carregamento ocorra, este critério fica:

$$G_C = G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left( \frac{G_{\text{cisalhamento}}}{G_T} \right)^\eta, \text{ com } G_T = G_1 + G_{\text{cisalhamento}} \quad (87)$$

$$G_{\text{cisalhamento}} = G_2 + G_3 \quad (88)$$

onde  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são as taxas individuais de perda de energia para cada modo, obtidas através das equações (89), (90) e (91) e  $G_C$  é a taxa crítica de perda de energia no modo misto, sendo que  $G_T$  corresponde à taxa total de perda de energia.

$$G_1 = \int_0^{u_m^{1f}} \tau_1 du_1 = \frac{K u_m^{1f} u_m^{\text{cisalh}0}}{2} \quad (89)$$

$$G_2 = \int_0^{u_m^{2f}} \tau_2 du_2 = \frac{K u_m^{2f} u_m^{\text{cisalh}0}}{2} \quad (90)$$

$$G_3 = \int_0^{u_m^{3f}} \tau_3 du_3 = \frac{K u_m^{3f} u_m^{\text{cisalh}0}}{2} \quad (91)$$

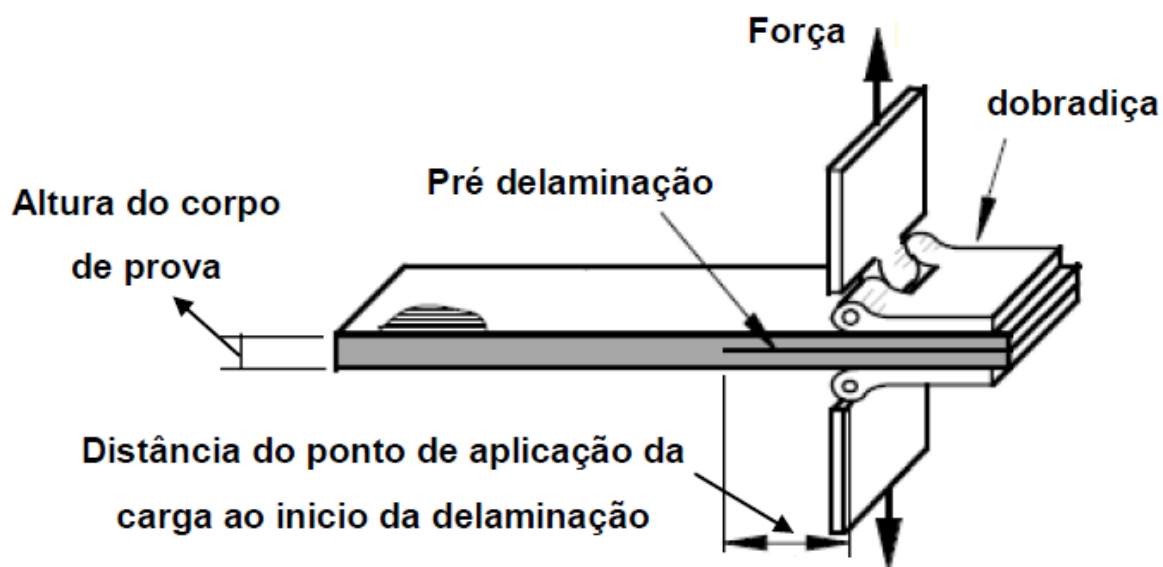
Nas equações (89), (90) e (91),  $u_m^{\text{cisalh}0}$  representa o deslocamento relativo inicial de cisalhamento no modo misto. As componentes dos deslocamentos finais avaliados também modo misto de falha são  $u_m^{1f}$ ,  $u_m^{2f}$  e  $u_m^{3f}$ , sendo que a relação entre elas e o deslocamento relativo máximo  $u_m^f$  é dada pela equação (73). Este deslocamento pode ser dado em função das taxas de perda de energia através do rearranjo das expressões anteriores, tendo-se para o para o critério “B-K”:

$$u_m^f = \begin{cases} \frac{2}{K_0 u_m^0} \left[ G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left( \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) \right] \Rightarrow u_3 > 0 \\ \sqrt{(u_1^f)^2 + (u_2^f)^2} \Rightarrow u_3 \leq 0 \end{cases} \quad (92)$$

Até o momento foram apresentados gráficos e relações constitutivas que equacionam deslocamentos, tensões máximas e energias. Entretanto, para a obtenção dos valores que permitam a formulação matemática dos modelos, necessita-se recorrer aos métodos experimentais.

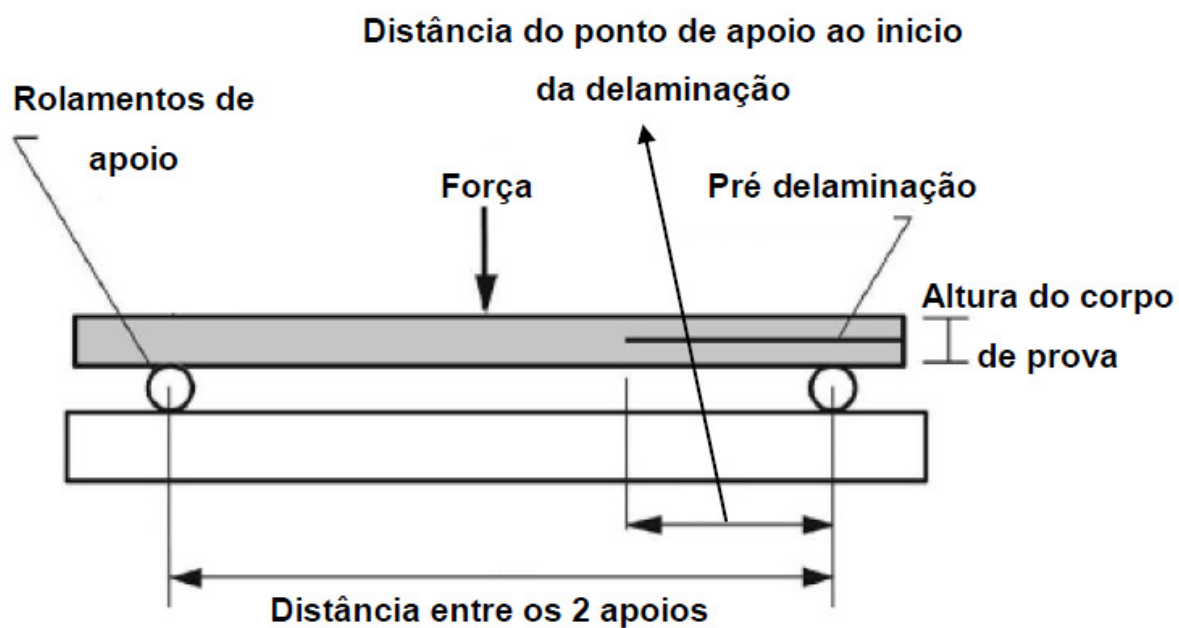
Os ensaios mais utilizados para obtenção da energia de fratura na interface ( $G_{1c}$ ,  $G_{2c}$  e  $G_{3c}$ ) correspondem ao ensaio DCB (*Double Cantilever Beam Specimen*) para o Modo I, ensaio ENF (*End Notched Flexure Test*) para o Modo II e o MMB (*Mixed-Mode Bending*) para o Modo Misto, sendo que todos eles estão padronizados pelas normas ASTM TEST METHOD D5528-01 (2002), JSA METHOD JIS 7086 (1983) e ASTM TEST METHOD D6671-01 (2002). As tensões máximas normais ( $\tau_1^0$ ) e de cisalhamento ( $\tau_2^0$  e  $\tau_3^0$ ) podem ser determinados de acordo com os critérios da ASTM TEST METHOD D3039/D M00 (2000) e ASTM TEST METHOD D2344-84 (1995), respectivamente.

O ensaio DCB corresponde à aplicação de uma carga normal à superfície de interface, simulando o Modo I de delaminação, conforme a Figura 51. O ensaio ENF utiliza as tensões cisalhantes oriundas da flexão de uma viga com pré-delaminação para a realização do teste, Figura 52. Já o ensaio MMB tenta reproduzir o efeito simultâneo dos dois testes anteriores, gerando ao mesmo tempo tensões cisalhantes e normais à superfície de delaminação, Figura 53.



**Figura 51 – Ensaio DCB.**

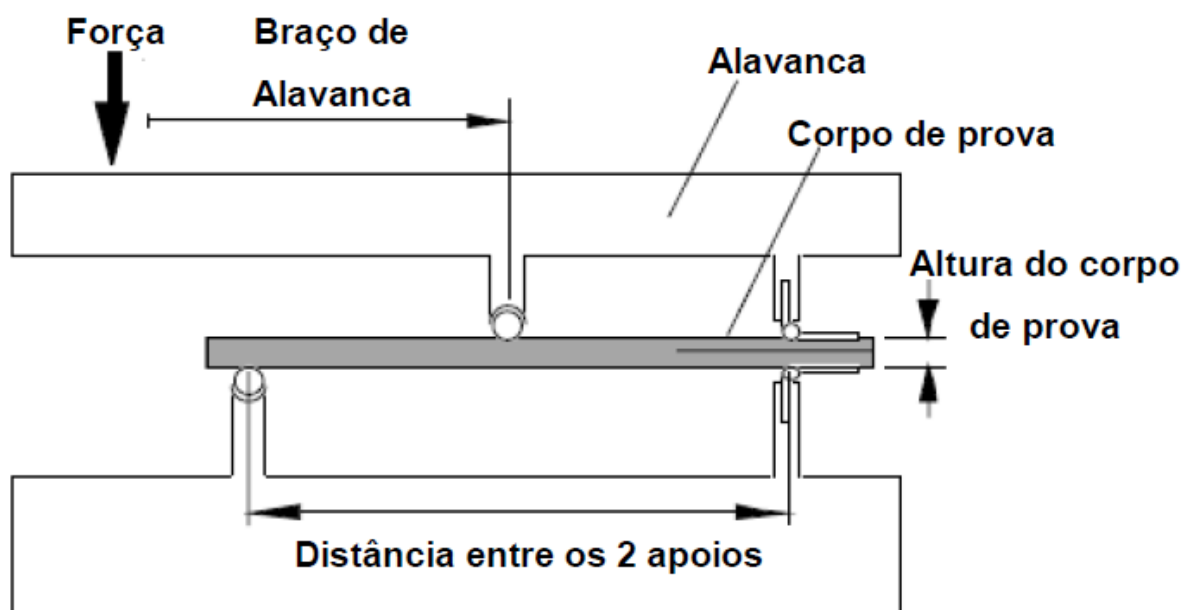
FONTE: Samways (2013).



**Figura 52 – Ensaio ENF**

FONTE: Samways (2013).



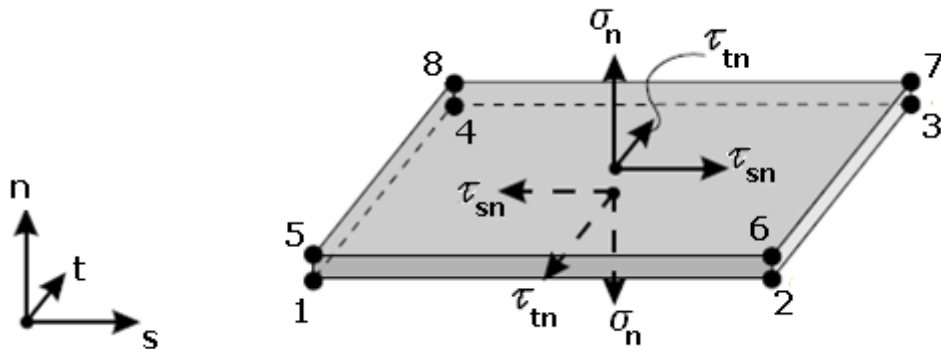


**Figura 53 – Ensaio MMB.**  
 FONTE: Samways (2013).

A seguir será apresentada a formulação de elementos finitos utilizados para a teoria coesiva apresentada anteriormente.

## 5.2 ELEMENTO FINITO DE COESÃO

Apresenta-se, a seguir, um elemento finito de coesão de oito nós (Figura 54), bastante similar a um elemento contínuo (elemento sólido). Entretanto, é conveniente pensar neste elemento como sendo composto por duas faces separadas por uma espessura. O deslocamento relativo (aproximação ou afastamento) da face superior e inferior medido ao longo da espessura representa a abertura ou fechamento da interface (surgimento de tensão normal), já a mudança relativa destas faces medido no plano ortogonal à espessura quantifica o comportamento de cisalhamento do elemento coesivo (surgimento de tensões cisalhantes por deslizamento).



**Figura 54 – Estado de tensões no elemento coesivo.**

FONTE: Adaptado de Balzani & Wagner (2008).

Para caracterizar a superfície de interface, um sistema global de coordenadas retangular é definido através dos eixos  $n$ ,  $s$  e  $t$ , conforme a Figura 54. O deslocamento ao longo da coordenada  $n$  pode acarretar o Modo I de falha, ou seja, quando a interface está se abrindo. Já na direção de  $s$  e  $t$ , a falha corresponde ao Modo II e III (cisalhamento paralelo e transversal).

Representando o volume do elemento por  $V$  e a área superficial por  $\partial V$ , Balzani & Wagner (2008) estabelecem o princípio do trabalho virtual para interfaces sólidas,

$$\delta \Pi(\bar{u}) = \int_V \delta \bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dV \quad (93)$$

sendo  $\delta \bar{\epsilon}$  o vetor de deformações virtuais,  $\bar{\sigma}$  o vetor de tensões e o  $\bar{u}$  vetor de deslocamentos. O vetor de deformações  $\bar{\epsilon}$  e os demais vetores são definidos por

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \gamma_{sn} \\ \gamma_{tn} \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s,n} + u_{n,s} \\ u_{t,n} + u_{n,t} \\ u_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial u_n} + \frac{\partial u_n}{\partial u_s} \\ \frac{\partial u_t}{\partial u_n} + \frac{\partial u_n}{\partial u_t} \\ \frac{\partial u_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau_{sn} \\ \tau_{tn} \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (94)$$

Similarmente à equação (94), pode-se escrever as deformações virtuais ( $\delta\bar{\varepsilon}$ ) e incrementais ( $\Delta\bar{\varepsilon}$ ),

$$\delta\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta\gamma_{sn} \\ \delta\gamma_{tn} \\ \delta\varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{s,n} + \delta u_{n,s} \\ \delta u_{t,n} + \delta u_{n,t} \\ \delta u_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \Delta\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma_{sn} \\ \Delta\gamma_{tn} \\ \Delta\varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_{s,n} + \Delta u_{n,s} \\ \Delta u_{t,n} + \Delta u_{n,t} \\ \Delta u_{n,n} \end{bmatrix} \quad (95)$$

sendo  $\delta\bar{u}$  e  $\Delta\bar{u}$  os vetores de deslocamento virtual e incremental, respectivamente. As deformações virtuais e incrementais definidas na equação (95) são as medidas dos deslocamentos relativos entre os nós superiores e inferiores.

Como o problema é abordado sob o ponto de vista de elementos finitos, a discretização do domínio em diversos elementos é necessária, sendo definida uma função de forma  $N_i$ , dada pela equação (96) e um sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \chi, \nu)$ .

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi\xi_i)(1 + \chi\chi_i)(1 + \nu\nu_i) \quad (96)$$

Considerando  $\bar{x}$  o vetor de posição nodal no sistema global ( $n, s$  e  $t$ ), qualquer posição de um nó dentro do elemento isoparamétrico pode ser transformada para o sistema global pela seguinte equação:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^8 N_i \bar{x}_i, \text{ com } \bar{x}_i = [x_{is}, x_{it}, x_{in}] \quad (97)$$

Com isso, os vetores de deslocamento real, virtual e incremental podem ser escritos através de:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, \chi, \nu) &= \sum_{i=1}^8 N_i \bar{u}_i \\ \delta \bar{u}(\xi, \chi, \nu) &= \sum_{i=1}^8 N_i \delta \bar{u}_i \\ \Delta \bar{u}(\xi, \chi, \nu) &= \sum_{i=1}^8 N_i \Delta \bar{u}_i \end{aligned} \quad (98)$$

Da mesma forma, pode-se definir o vetor de deformações como sendo:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^8 \bar{B}_i \bar{u}_i \\ \delta \bar{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^8 \bar{B}_i \delta \bar{u}_i \\ \Delta \bar{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^8 \bar{B}_i \Delta \bar{u}_i \end{aligned} \quad (99)$$

onde

$$\bar{B}_i = \begin{pmatrix} N_{i,n} & 0 & N_{i,s} \\ 0 & N_{i,n} & N_{i,t} \\ 0 & 0 & N_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_s} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_n} & \frac{\partial N_i}{\partial x_t} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (100)$$

Através da linearização da equação (93), tem-se

$$\delta \Pi(\bar{u}) = \int_V \delta \bar{\epsilon}^T C(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_0) dV = \int_V \delta \bar{\epsilon}^T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \Delta \bar{\epsilon} dV, \text{ com } C = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} \quad (101)$$

e com o rearranjo das expressões anteriores, o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \sum_{i=1}^8 \delta \bar{u}_i^T \int_V \bar{B}_i^T \bar{\sigma} dV = \sum_{i=1}^8 \delta \bar{u}_i^T \int_V \bar{B}_i^T C(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_0) dV \\ \delta \Pi &= \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^8 \delta \bar{u}_i^T \int_V \bar{B}_i^T C \bar{B}_k dV \Delta \bar{u}_k = \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^8 \delta \bar{u}_i^T \bar{K}_{Tik}^e \Delta \bar{u}_k \end{aligned} \quad (102)$$

onde  $\bar{K}_T^e$  é a matriz de rigidez tangente do elemento, dada por

$$\bar{K}_{Tik}^e = \int_V \bar{B}_i^T C \bar{B}_k dV \quad (103)$$

Ao invés de realizar a integração da equação (103) em relação a um volume  $V$ , pode-se realizá-la ao longo de um elemento isoparamétrico bidimensional e multiplicá-la pela espessura  $w$  do elemento (neste caso a largura e não a altura  $h$ ). Para isso, é necessário se obter a relação entre as derivadas dos deslocamentos no sistema locais ( $x_\xi$ ,  $x_\zeta$  e  $x_\nu$ ) em relação ao global ( $x_n$ ,  $x_s$  e  $x_t$ ). Para isso, é necessária a utilização da regra da cadeia clássica da derivação, que pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial \xi} \\
\frac{\partial u}{\partial \chi} &= \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial \chi} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \chi} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \end{bmatrix} = \bar{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_s} \\ \frac{\partial u}{\partial x_t} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial v}
\end{aligned} \tag{104}$$

onde  $\bar{J}$  se refere à matriz Jacobiana, descrita na equação (105).

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial \xi} & \frac{\partial x_s}{\partial \xi} & \frac{\partial x_t}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_n}{\partial \chi} & \frac{\partial x_s}{\partial \chi} & \frac{\partial x_t}{\partial \chi} \\ \frac{\partial x_n}{\partial v} & \frac{\partial x_s}{\partial v} & \frac{\partial x_t}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{in} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{is} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{it} \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \chi} x_{in} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \chi} x_{is} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \chi} x_{it} \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial v} x_{in} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial v} x_{is} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial v} x_{it} \end{bmatrix} \tag{105}$$

A integral da equação (103) agora pode ser transformada na seguinte equação para obtenção da matriz de rigidez do elemento de coesão:

$$\bar{K}_{Tik}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{B}_i^T C \bar{B}_k |J| w d\xi d\chi \tag{106}$$

onde  $J$  corresponde ao determinante da matriz Jacobiana  $\bar{J}$ , apresentada na equação (105).

Normalmente na análise de elementos finitos é utilizada a integração numérica, sendo que para a resolução da equação (102), Balzani & Wagner (2008) e Camanho & Davila (2002) recomendam a integração de Newton-Cotes.

Os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento das aplicações propostas neste trabalho foram apresentados até o momento. No próximo capítulo, serão apresentadas as aplicações desenvolvidas com base na teoria dos capítulos anteriores.





## 6 MODELOS E APLICAÇÕES

A seguir são apresentadas algumas das simulações que foram realizadas para a validação dos conceitos apresentados anteriormente. Primeiramente são demonstrados casos existentes na literatura de modelagens de juntas adesivadas, buscando-se obter resultados confiáveis para posteriormente incorporar estes modelos nas análises de reforço de vigas. Simulações que envolvam a teoria utilizada para o concreto (CDP) também foram realizadas para comprovar a eficiência deste modelo constitutivo.

### 6.1 MODELAGEM DE JUNTAS ADESIVADAS

#### 6.1.1 Chapas Sobrepostas

A primeira simulação apresentada consiste na sobreposição parcial de duas chapas metálicas unidas por um adesivo químico, conforme Figura 55. Esta análise foi desenvolvida por Samways (2013), cujas soluções são tomadas como parâmetros de comparação para os resultados obtidos no presente trabalho.

O adesivo utilizado na análise é o 5M LETOXIT KFL 120, uma resina aderente que geralmente é utilizada em junções de componentes metálicos na indústria aeronáutica, especialmente em componentes de turbinas.

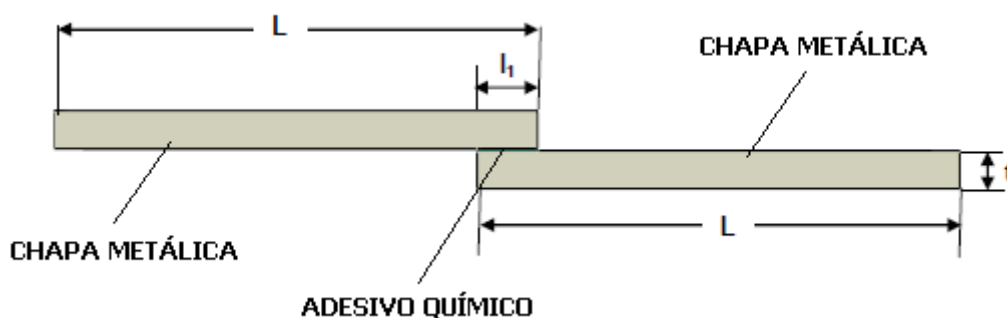


Figura 55 – União química de chapas metálicas analisada.

As propriedades mecânicas da cola estrutural são mostradas na Tabela 6. Os valores da energia de fratura para o Modo II ( $G_{2C}$ ) e tensão de cisalhamento ( $\tau_2^0$ ) foram os únicos dados fornecidos pelo fabricante, adotando-se assim as mesmas propriedades para a direção normal (Samways (2013)). As propriedades mecânicas (tensão de escoamento, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson) das chapas metálicas são apresentadas na Tabela 7, correspondendo a um material ASTM A572 GR.

**Tabela 6 – Propriedades Mecânicas do adesivo LETOXIT.**

FONTE: Samways (2013)

$G_{1C}(N/mm)$	$G_{2C}(N/mm)$	$\tau_1^0(MPa)$	$\tau_2^0(MPa)$
4	4	36	36

**Tabela 7 – Propriedades Mecânicas da chapa metálica.**

FONTE: Samways (2013)

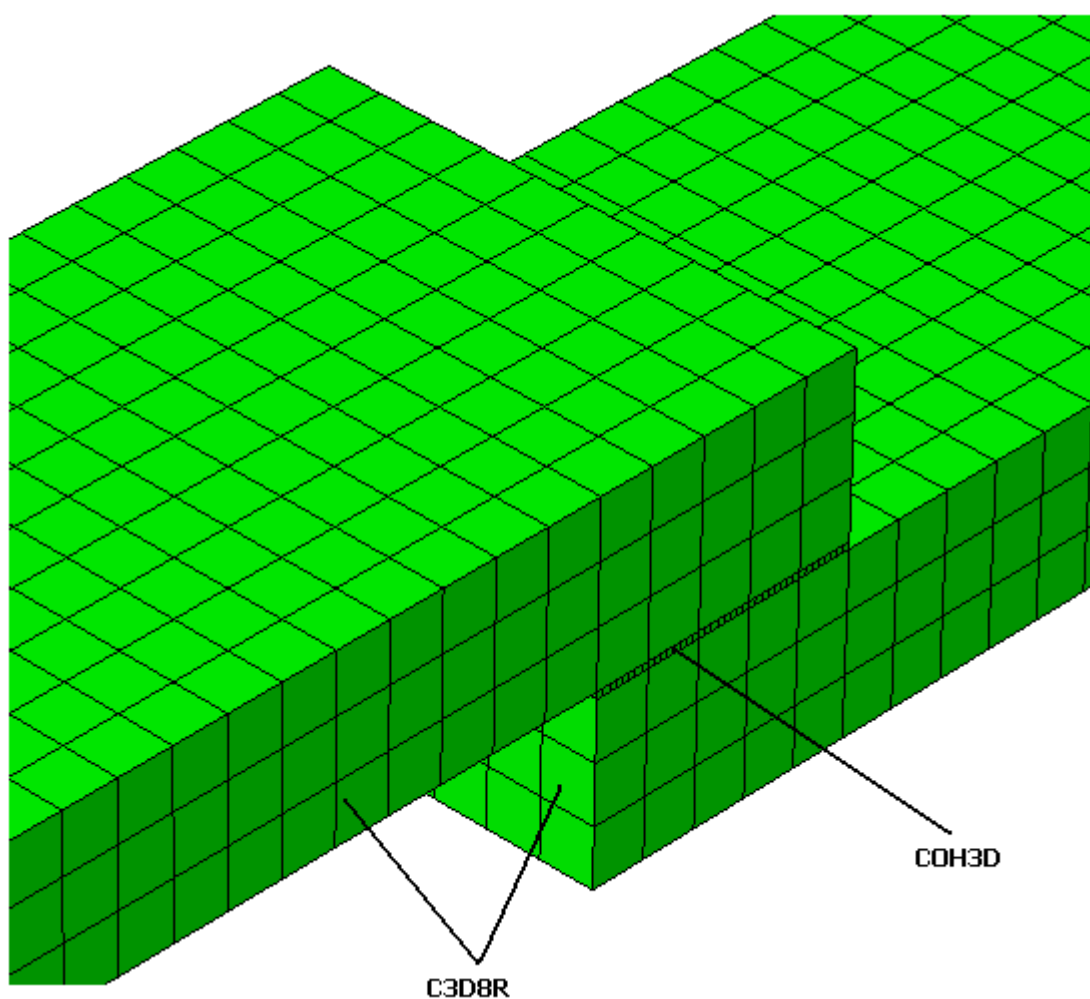
$\sigma_y(MPa)$	$E(MPa)$	$\nu$
345	207000	0,28

As dimensões do modelo analisado, conforme esquema da Figura 55, podem ser vistos na Tabela 8. Com as propriedades geométricas estabelecidas, o valor da rigidez de penalidade  $K_0$  pode ser calculado, sendo de  $K_{01} = K_{02} = K_{03} = 10e^6 N/mm^3$ , conforme as considerações de Camanho & Davila (2002).

**Tabela 8 – Propriedades Geométricas do modelo analisado.**

$L(mm)$	$I_1(mm)$	$w(mm)$	$h(mm)$	$t(mm)$
80	10	40	0,25	6,35

Os modelos analisados no ABAQUS® possuem exatamente a mesma geometria que a Figura 55. Para a malha utilizada nos elementos sólidos das tiras metálicas foram utilizados elementos C3D8R (elemento de oito nós e com integração reduzida); para a cola (elementos coesivo) foram utilizados elementos COH3D (elemento de coesão com oito nós). A região de sobreposição das chapas no modelo pode ser visto na Figura 56.



**Figura 56 – Região de sobreposição das chapas no modelo simulado no ABAQUS®.**

Para tornar a simulação mais rápida e eficiente, foram utilizadas condições de contorno de simetria, simulando-se apenas a metade da união, conforme a Figura 57. Foram também aplicadas condições de vinculação de engastamento em um das

bordas do sistema, sendo que o carregamento foi gerado através de um deslocamento imposto na borda contrária à condição de engastamento, conforme (Figura 58).

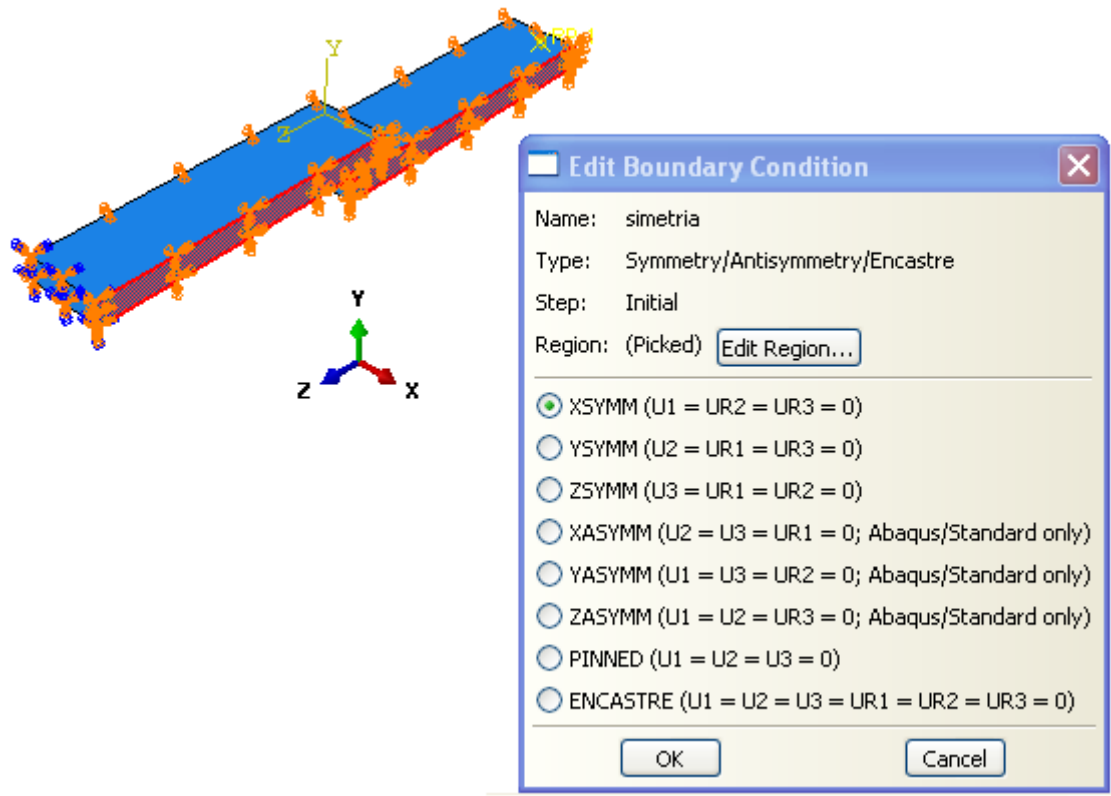


Figura 57 – Simetria do modelo de chapas metálicas sobrepostas.

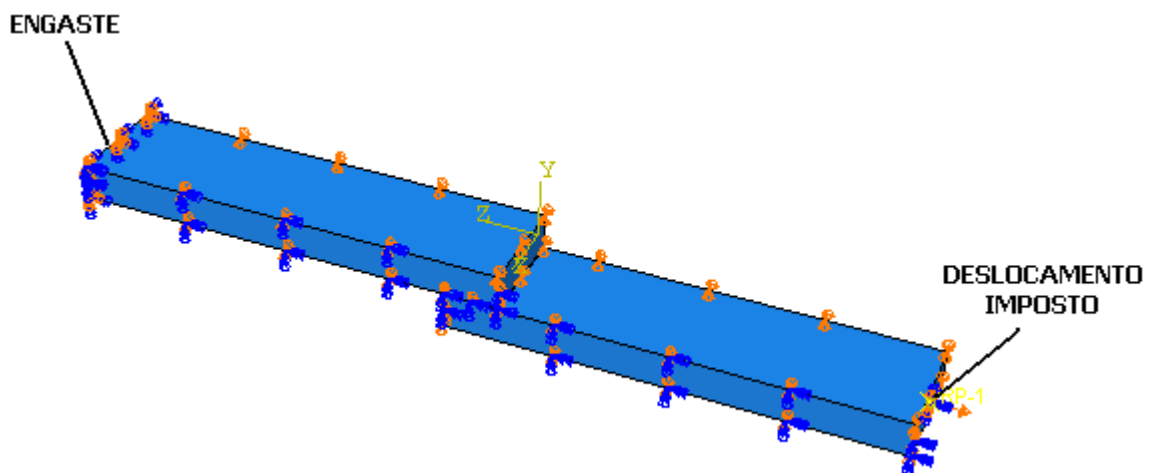


Figura 58 – Vinculação e carregamento no modelo de chapas sobrepostas.

A adesão entre os elementos metálicos e a cola foi imposta através da opção de *constrain* “TIE” do ABAQUS®, definindo-se as superfícies “*master*” e “*slave*”. Esta condição de *constrain* estabelece que haja união perfeita entre o adesivo e a chapa metálica, não podendo haver descolamentos relativos nestas superfícies.

#### 6.1.1.1 Resultados dos Modelos

Primeiramente, para validação dos modelos desenvolvidos, optou-se por reproduzir da forma mais idêntica possível o modelo de Samways (2013). Como o modelo de Samways (2013) também foi desenvolvido no ABAQUS®, adotou-se no presente trabalho as mesmas considerações que o autor de referência, denominando esta análise de Modelo 1. Este modelo possui malha das chapas metálicas com dimensão aproximada de  $2\text{mm} \times 2,11\text{mm} \times 2\text{mm}$  e malha cúbica do elemento coesivo de 0,25mm.

A Figura 59 mostra o resultado do diagrama de tensão (S) no momento do início do dano no adesivo obtido por Samways (2013) e pelo autor no Modelo 1, chegando-se a resultados idênticos, conforme pode ser visto pela escala numérica, pois as escalas de cores utilizadas nos dois trabalhos foram diferentes. Já a Figura 60 apresenta os resultados no adesivo que une as duas chapas, novamente encontrando-se valores idênticos nos dois trabalhos.

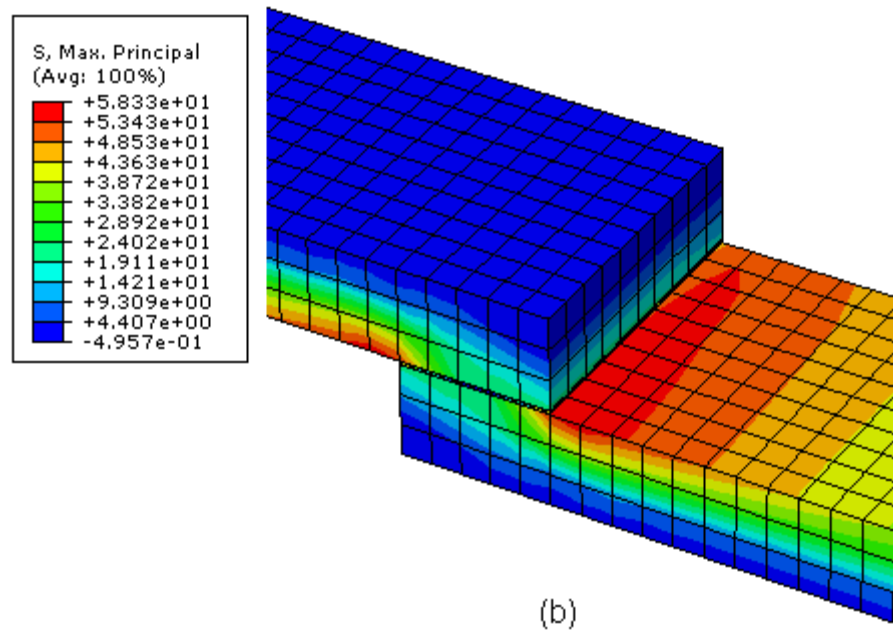
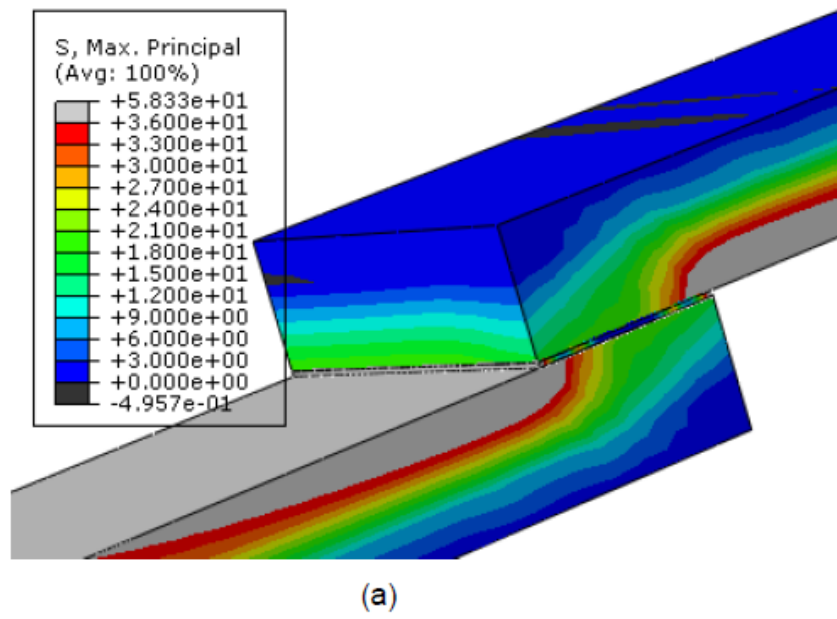
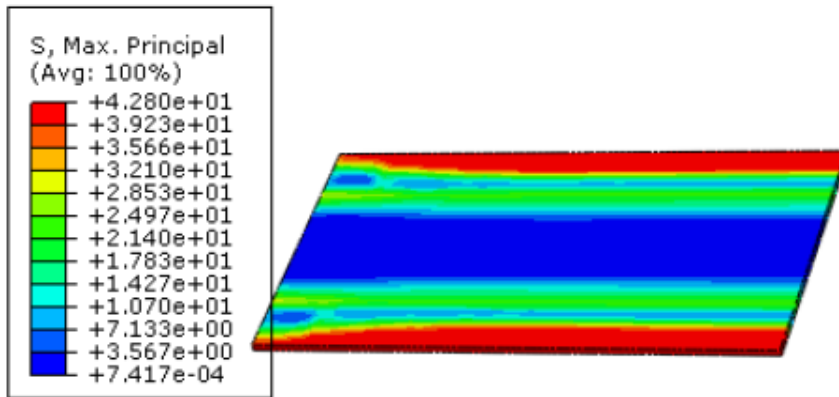
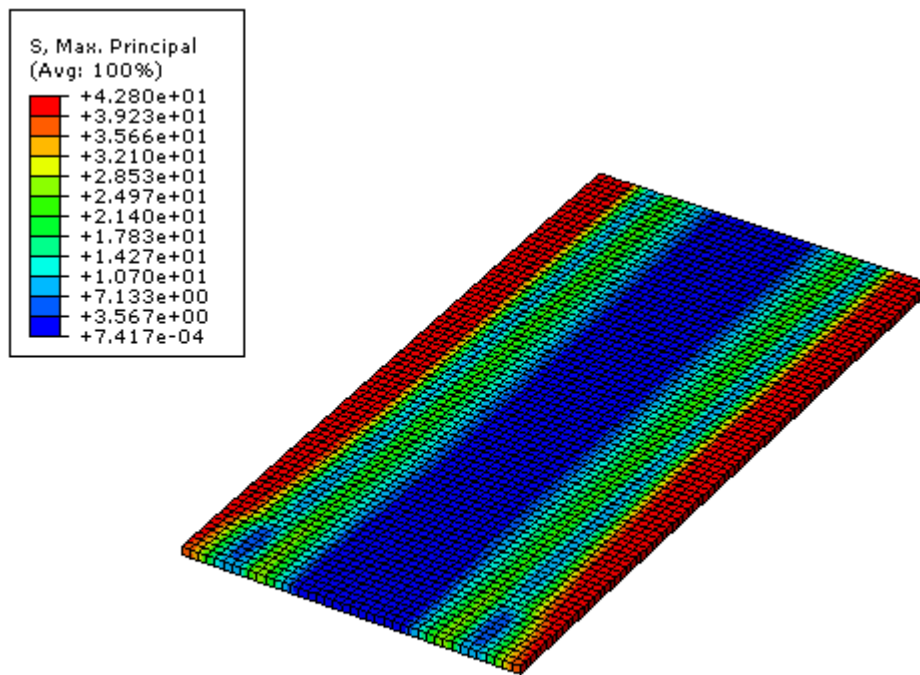


Figura 59 – Tensões principais obtidas no modelo de Samways (2013) (a) e no Modelo 1 (b).



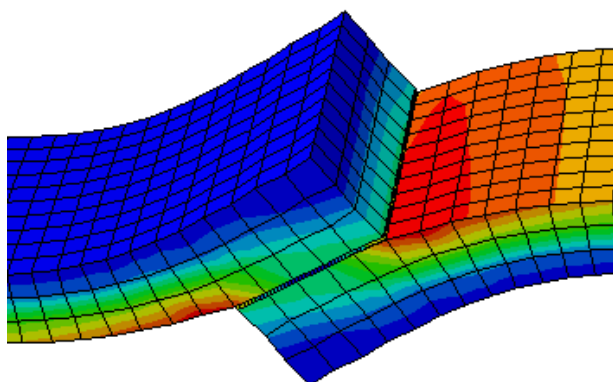
(a)



(b)

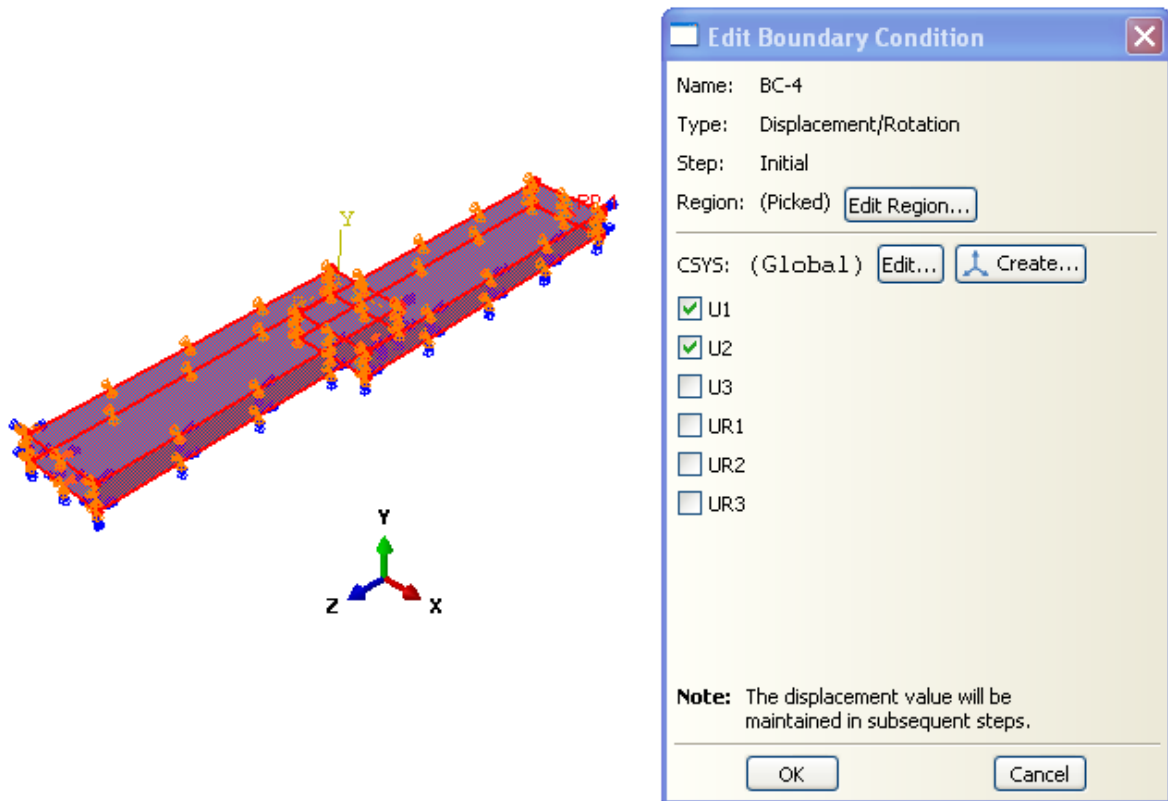
**Figura 60 – Tensões principais nos adesivos obtidas por Samways (2013) (a) e no Modelo 1 (b).**

Pela Figura 60, as tensões no início do dano no adesivo são de  $S = 42,8MPa$ , próximas ao nível de  $\tau = 36MPa$ , a resistência máxima do adesivo químico, conforme Tabela 6. Analisando-se em escala aumentada a deformada do Modelo 1 (Figura 61), percebe-se que há um desvio de linearidade nas placas, devido à excentricidade da carga, não ocorrendo um carregamento de cisalhamento puro (ocorre uma pequena parcela do Modo I). Então, foi gerado um novo modelo onde foram aplicadas restrições de deslocamentos na direção “X” e “Y” (Figura 62), ou seja, apenas o deslocamento ao longo do comprimento da chapa é permitido. Esta análise foi denominada de Modelo 2, com o objetivo de avaliar quais as implicações destas novas condições de contorno.



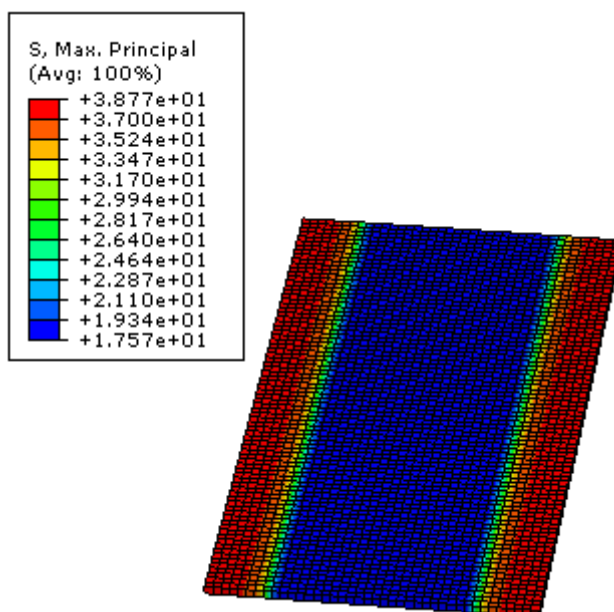
**Figura 61 – Deformada do Modelo 1 em escala aumentada.**



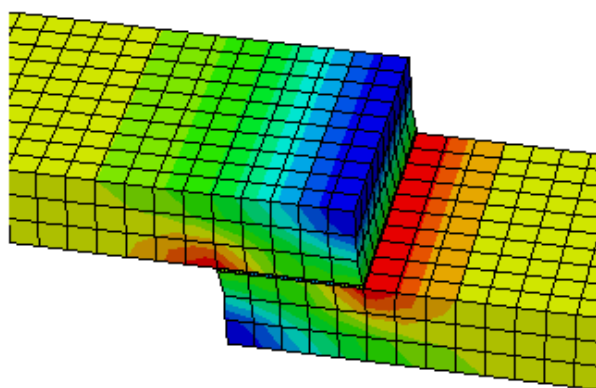


**Figura 62 – Restrições adicionais de deslocamentos impostas no Modelo 2.**

Os resultados do Modelo 2 indicam que a tensão principal ( $S = 38,77MPa$ ) no adesivo no momento do início do dano se aproxima mais de  $\tau = 36MPa$  e há também uma distribuição de tensão mais uniforme, conforme Figura 63. É gerado um carregamento de cisalhamento puro conforme pode ser visto na deformada da estrutura (Figura 64), sendo utilizada a mesma escala de aumento que a deformada do Modelo 1 (Figura 61).



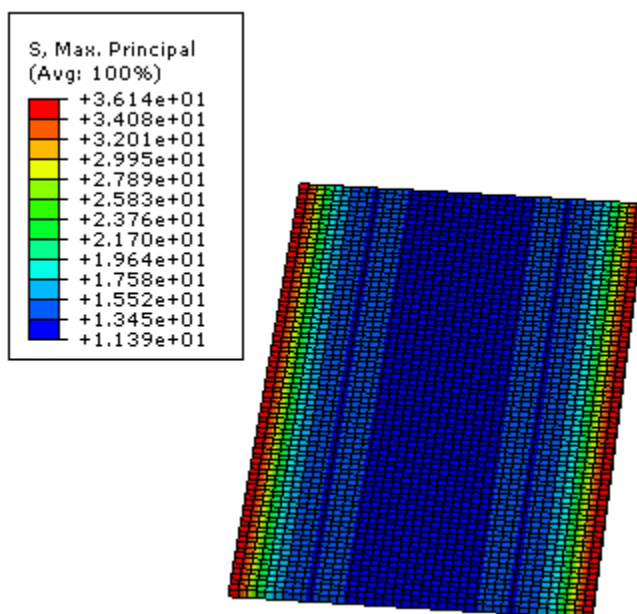
**Figura 63 – Tensões principais no adesivo no Modelo 2.**



**Figura 64 – Deformada do Modelo 2 em escala aumentada.**

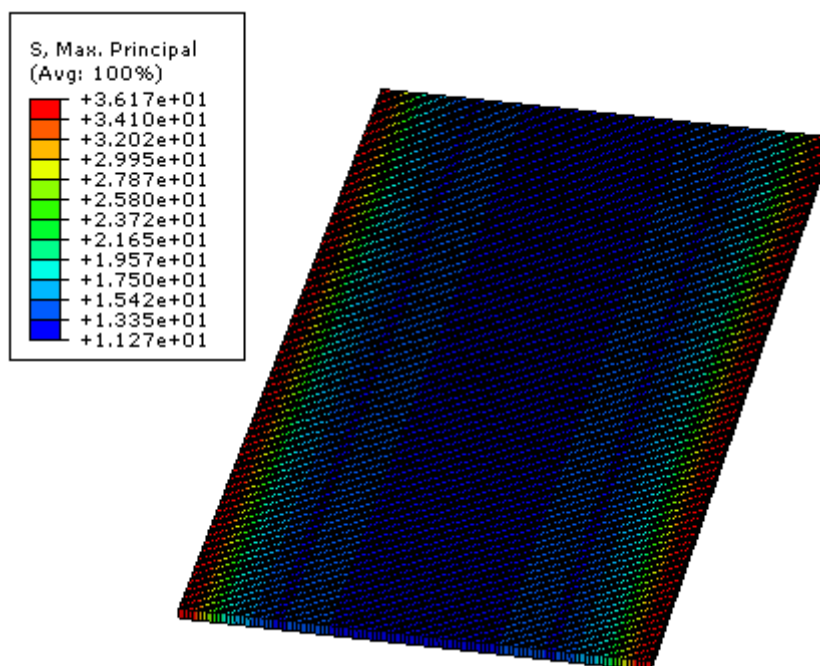
É de consenso comum na literatura de elementos finitos que os resultados das simulações são dependentes do refino da malha utilizada. Para levar em consideração este fato, refinou-se a malha das chapas de aço do Modelo 2 para o tamanho

aproximado de  $1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm}$ , denominando-se esta análise de Modelo 3. A malha cúbica do adesivo químico foi mantida na dimensão de  $0,25\text{mm}$ , chegando-se a níveis de tensão  $S = 36,17\text{MPa}$  no adesivo, resultado mais próximo ainda do nível teórico de  $\tau = 36\text{MPa}$  (Figura 65).



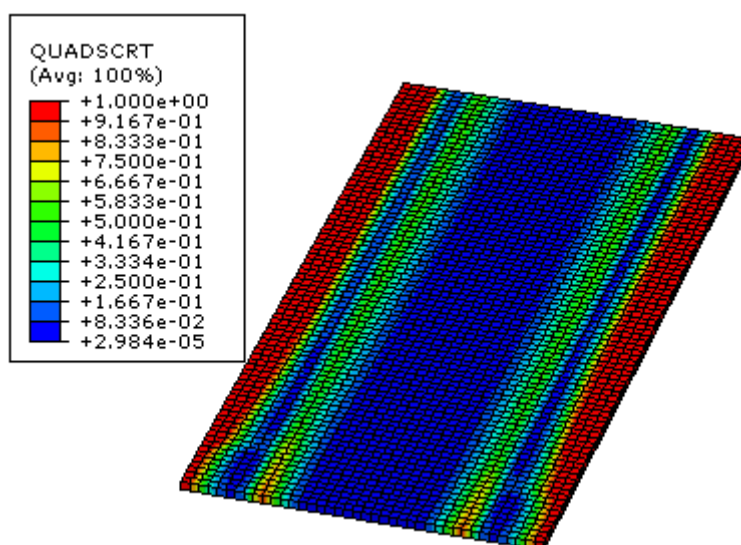
**Figura 65 – Tensões principais no adesivo no Modelo 3.**

Foi realizado um novo refino de malha, desta vez na malha do adesivo químico, tendo agora o tamanho de  $0,1\text{mm} \times 0,1\text{mm} \times 0,25\text{mm}$  e mantendo-se a malha da chapa com  $1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm}$ , denominando esta análise como Modelo 4. Os resultados não indicam uma melhora no nível de tensão em relação ao Modelo 3, como pode ser visto na Figura 66.

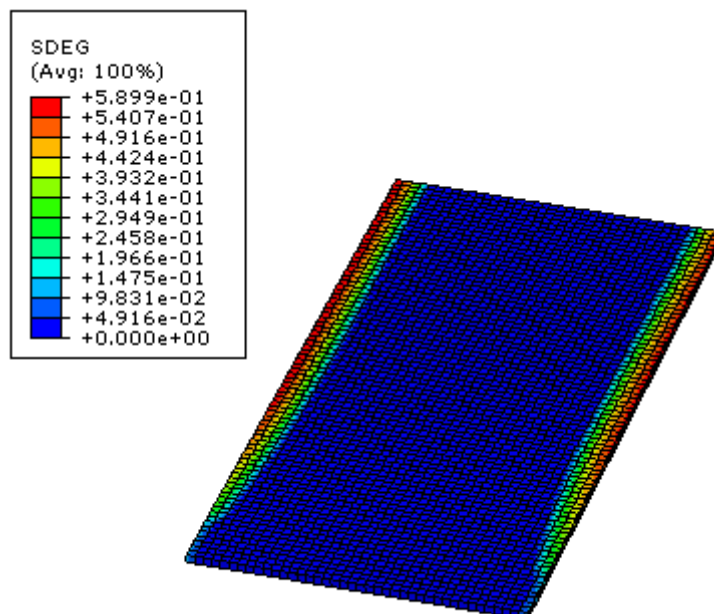


**Figura 66 – Tensões principais no adesivo no Modelo 4.**

Nos resultados das simulações apresentadas anteriormente, para identificar o início do dano na cola foi utilizada a variável de saída “QUADSCRT” do ABAQUS®, que indica o critério de falha quadrático (Equação (84)), ou seja, quando atinge o valor de 1 o dano é iniciado. Outra variável de interesse disponível no *software* é a “SDEG”, a variável de dano  $d$ , conforme Equação (1), com valores variando ente 0 e 1. Estas variáveis para o Modelo 1 são apresentadas na Figura 67 e Figura 68.



**Figura 67 – Critério de falha quadrático – Modelo 1.**



**Figura 68 – Variável de dano  $d$  – Modelo 1.**

A Tabela 9 apresenta um resumo das análises estudadas para este modelo. Percebe-se no modelo desenvolvido por Samways (2013) através da deformada da estrutura (Figura 61) que não há um modo de cisalhamento puro, ou seja, há uma predominância de cisalhamento com uma pequena parcela do modo misto, por isso os resultados de tensão estão mais afastados que os valores teóricos, fato que foi comprovado nas análises subseqüentes. O refino de malha dos elementos da chapa metálica proporcionou melhora significativa no resultado, fato que não foi observado no refino dos elementos coesivos, isso porque suas dimensões já são bastante reduzidas. Os valores obtidos nos Modelo 3 e Modelo 4 estão bem próximos dos valores teóricos, indicando que o modelo numérico representa bem o problema proposto.

**Tabela 9 – Resumo dos modelos analisados de chapas sobrepostas.**

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Malha Chapas Metálicas	$2mm \times 2,11mm \times 2mm$	$2mm \times 2,11mm \times 2mm$	$1mm \times 1mm \times 1mm$	$1mm \times 1mm \times 1mm$
Malha Adesivo	Cúbica 0,25mm	Cúbica 0,25mm	Cúbica 0,25mm	$0,1mm \times 0,1mm \times 0,25mm$
Tensão no início do dano	42,8MPa	38,77MPa	36,14MPa	36,17MPa
Diferença Percentual*	18,8%	7,69%	0,38%	0,47%

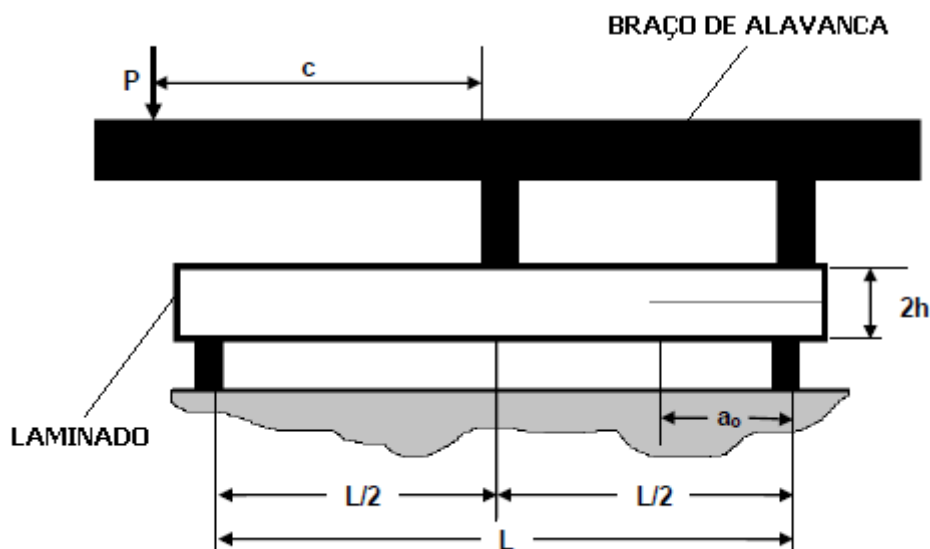
\*Diferença percentual em relação ao valor teórico de  $\tau = 36MPa$ .

Nas análises de chapas sobreposta, o Modo II de início e propagação do dano atua preponderantemente ou exclusivamente, apresentando valores coerentes com os teóricos. Para exemplificar uma análise onde o Modo Misto ocorre, será apresentada a seguir a análise numérica do ensaio MMB.

### 6.1.2 Simulação Numérica do Ensaio MMB

O Modo Misto de início e propagação do dano é o caso mais geral onde mais de um modo individual ocorre simultaneamente. Experimentalmente, o ensaio MMB pode reproduzir condições para ocorrência do Modo I e II simultaneamente, sendo apresentada a seguir a análise numérica deste ensaio. Modelos experimentais dele foram desenvolvidos por Camanho & Davila (2002) e numericamente por Samways (2013) e também Camanho & Davila (2002), sendo que será adotada a mesma metodologia de Samways (2013).

O corpo de prova para o ensaio MMB já foi apresentado na Figura 53. A Figura 69 apresenta a simbologia utilizada para as dimensões dos elementos constituintes do aparato de ensaio.



**Figura 69 – Esquema utilizado para a análise numérica do ensaio MMB.**  
 FONTE: Adaptado de Samways (2013).

Na Figura 69, percebe-se que o braço de alavanca se apóia em duas regiões distintas do corpo de prova (laminado). Com isso, surgem duas formas de dano ao mesmo tempo, uma para o Modo I e outra para o Modo II, caracterizando o Modo Misto. As propriedades mecânicas do laminado e do adesivo químico podem ser visualizadas na Tabela 10. A direção de laminação do compósito corresponde à mesma do seu eixo longitudinal, ou seja, a propriedade  $E_{11}$  corresponde ao módulo de elasticidade ao longo do eixo longitudinal do laminado,  $E_{22}$  corresponde à mesma propriedade na direção da espessura e  $E_{33}$  na direção da largura.

**Tabela 10 – Propriedades mecânicas para o ensaio MMB.**

FONTE: Adaptado de Reeder &amp; Crews (1990).

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}=E_{33}$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\mu_{12}=\mu_{13}$
122.7	10.1	5.5	3.7	0.25
$\mu_{23}$	$G_{1c}$ (N/mm)	$G_{2c}$ (N/mm)	$\tau_1^0$ (Mpa)	$\tau_2^0$ (Mpa)
0.45	0.969	1.719	80	100

Nas análises realizadas por Reeder & Crews (1990), diversos valores para a relação  $G_2/G_T$  (ver equação (86)) foram utilizados de modo a se obter diferentes modos de aplicação de carga para o ensaio. Assim, quando  $G_2/G_T=0$  tem-se a aplicação pura do Modo I e quando  $G_2/G_T=1$  tem-se o Modo II aplicado isoladamente. Em valores intermediários entre 0 e 1 para  $G_2/G_T$ , a aplicação da carga corresponde ao Modo Misto. A Tabela 11 apresenta os valores das propriedades geométricas apresentadas na Figura 69 que foram variadas no ensaio realizado por Reeder & Crews (1990). As demais propriedades geométricas são constantes, correspondendo ao comprimento do laminado  $L=102mm$ , a sua largura  $w=25,4mm$  e a altura de cada camada,  $h=1,56mm$ .

**Tabela 11 – Propriedades mecânicas para o ensaio MMB.**

FONTE: Adaptado de Reeder &amp; Crews (1990).

$G_2/G_T$	0% (MODO I)	20%	50%	80%	100% (MODO II)
$G_c$ (N/mm)	0.969	1.103	1.131	1.376	1.719
$a_0$ (mm)	32.9	33.7	34.1	31.4	39.9
$c$ (mm)	-	97.4	42.2	27.6	-



Diferentes valores da relação  $G_2 / G_T$  para o ensaio MMB podem ser obtidos através da variação do comprimento da alavanca utilizada, ou seja, o valor de  $c$ , conforme a Figura 69.

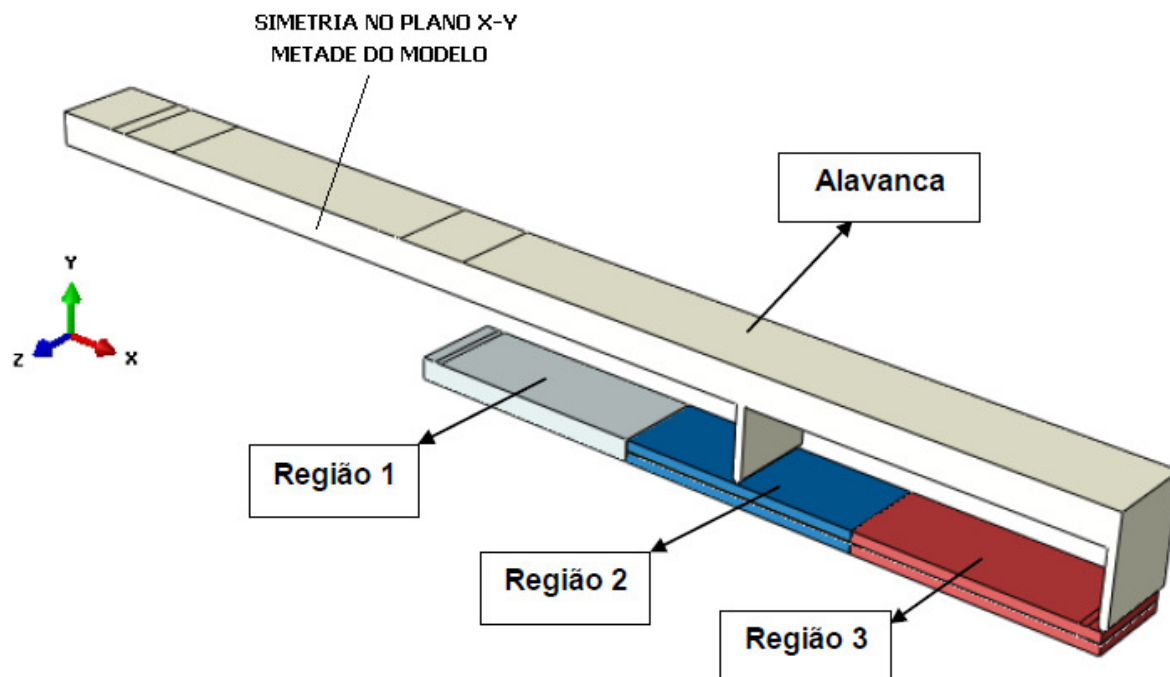
Na análise realizada por Samways (2013), adotou-se a relação  $G_2 / G_T = 0,5$ , ou seja, 50%, isso pelo fato de se ter uma parcela igual de carregamento no Modo I e Modo II. A taxa crítica de perda de energia, conforme a Tabela 11, corresponde a  $G_C = 1,131 N / mm$ . Para a rigidez de penalidade ( $K_0$ ) foi utilizado o valor proposto por Camanho & Davila (2002),  $K_0 = 10^6 N / mm^3$ . Por se tratar de uma análise onde o Modo Misto está presente, utilizou-se o critério “B-K”, sendo que o parâmetro  $\eta = 2,209$  foi obtido em Camanho & Davila (2002) através de curvas semelhantes à apresentada no Anexo A. Assim, o critério “B-K”, para esta análise, fica:

$$G_C = G_{1c} + (G_{2c} - G_{1c}) \left( \frac{G_2}{G_T} \right)^\eta, \text{ com } G_T = G_1 + G_2$$

$$G_C = 0,969 + (1,719 - 0,969)(0,5)^{2,209}$$

$$G_C = 1,131 N / mm$$

No modelo numérico de Samways (2013), o aparato MMB foi dividido em três regiões, conforme a Figura 70. Nesta figura está representada apenas metade do modelo, já que se utilizou a condição de simetria para diminuir o tempo de processamento.

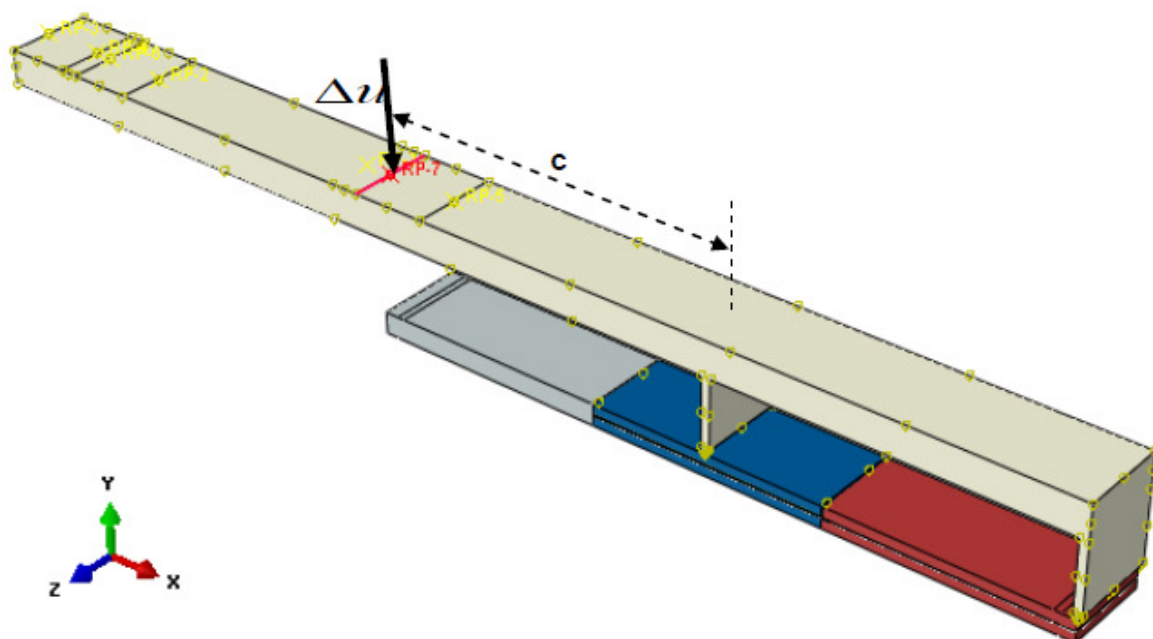


**Figura 70 – Regiões do modelo numérico MMB.**

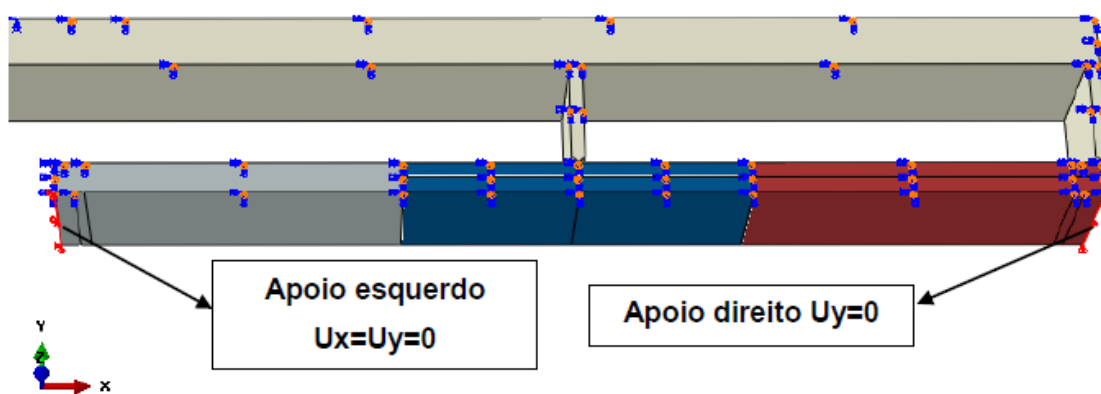
FONTE: Adaptado de Samways (2013).

A Região 1 da Figura 70 corresponde à região íntegra do componente, sendo que nela a propagação do dano não é possível. Na Região 2, o elemento coesivo (COH3D) é implementado entre as duas camadas de compósitos, sendo então esta região responsável pela identificação do início e também pela propagação do dano no modelo. A Região 3 é referente a uma pré-trinca ou pré-delaminação criada no corpo de prova. O valor inicial para os elementos coesivos é suficientemente representada pela relação  $h_0 = 2h/100$ , onde  $h$  corresponde à espessura das lâminas de compósito, obtendo-se assim  $h_0 = 0,032mm$ .

A aplicação do carregamento nesta modelagem é realizada através de um deslocamento imposto e o local exato de aplicação deste carregamento é mostrado na Figura 71. Este ponto também será utilizado para avaliar a curva carga-deslocamento. O corpo de prova teve na extremidade esquerda da Região 1 os graus de liberdade referentes ao deslocamento lateral e vertical impedidos e na Região 3 apenas o deslocamento vertical foi restringido. A Figura 72 mostra esta situação.



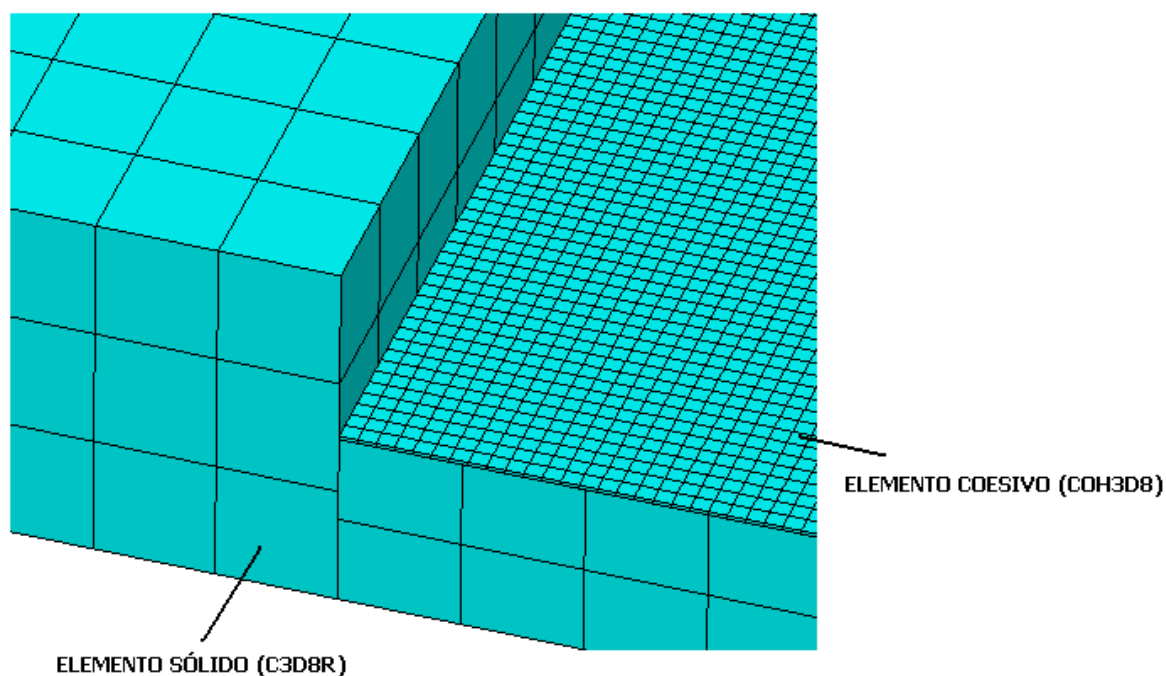
**Figura 71 – Local de aplicação do carregamento no ensaio MMB.**  
 FONTE: Samways (2013).



**Figura 72 – Vinculações aplicadas ao modelo numérico MMB.**  
 FONTE: Samways (2013).

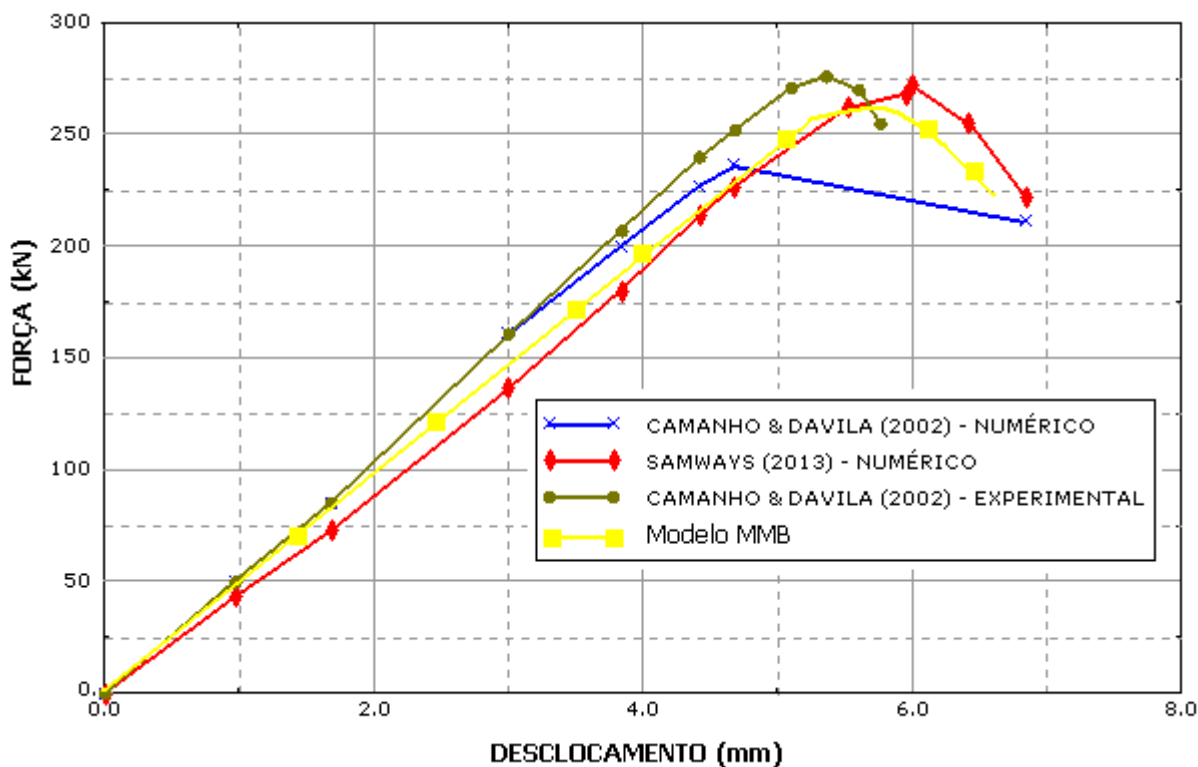
O braço de alavanca utilizado para impor o carregamento aos laminados é modelado como um sólido indeformável. Isso para que os resultados não sejam afetados por possíveis distorções deste elemento.

A malha utilizada para a simulação neste trabalho corresponde à malha que proporcionou os melhores resultados nas análises de Samways (2013). O grau de refino corresponde a uma malha de  $1mm$  para os elementos sólidos do laminado (C3D8R) e  $0,15mm$  para os elementos coesivos (COH3D8). A Figura 73 estes detalhes na região do elemento coesivo.



**Figura 73 – Malha utilizada na simulação do ensaio MMB.**

A Figura 74 apresenta os resultados em termos da curva carga-deslocamento obtidos na simulação realizada (denominada Modelo MMB) juntamente com os resultados obtidos nos modelos numéricos de Samways (2013) e Camanho & Davila (2002) e também no ensaio experimental realizado por este último.



**Figura 74 – Curva carga-deslocamento para a simulação do ensaio MMB.**

Pela Figura 74 percebe-se que o ensaio numérico de Camanho & Davila (2002) apresentou carga máxima menor que nas análises de Samways (2013) e também no Modelo MMB, sendo que a Tabela 12 apresenta o resumo dos resultados. A diferença percentual entre o Modelo MMB e o ensaio experimental ficou em  $-5,92\%$ , valores muito próximos para uma análise de elementos finitos como a apresentada.

**Tabela 12 – Carga máxima obtida no ensaio MMB.**

	Camanho & Davila (2002) - Experimental	Camanho & Davila (2002) - Numérico	Samways (2013) - Numérico	Modelo MMB
Força Máxima (N)	275,40	236,60	272	260
Diferença relativa (%)*	-	-14,08%	-1,23%	-5,92%

\*Diferença percentual em relação ao valor experimental de Camanho & Davila (2002).

Alguns fatores que podem influenciar no resultado da simulação do ensaio MMB foram destacados por Samways (2013), entre os principais, pode-se citar a falta de algumas informações sobre o procedimento experimental de Camanho & Davila (2002), como por exemplo, a dimensão exata e o peso próprio da alavanca não serem fornecidos e também os pontos exatos de aplicação dos apoios. A diferença entre os resultados de Samways (2013) e do Modelo MMB, apesar de serem pequenos, podem ser explicados devido à dificuldade de se reproduzir fielmente um ensaio numérico. Questões relativas à malha, dimensões exatas do modelo, tipo de análise empregada e também as condições de interação entre as partes do modelo são alguns exemplos de fatores que afetam os resultados.

As análises de juntas adesivadas realizadas, seja no caso das chapas sobreposta ou do ensaio MMB apresentaram resultados coerentes com os disponíveis na literatura. Este tipo de análise pode ser aplicada a muitas situações práticas encontradas na engenharia, sendo que neste trabalho ela será incorporada nos modelos de vigas de concreto quando for analisada o seu comportamento juntamente com um reforço externo aderido quimicamente.

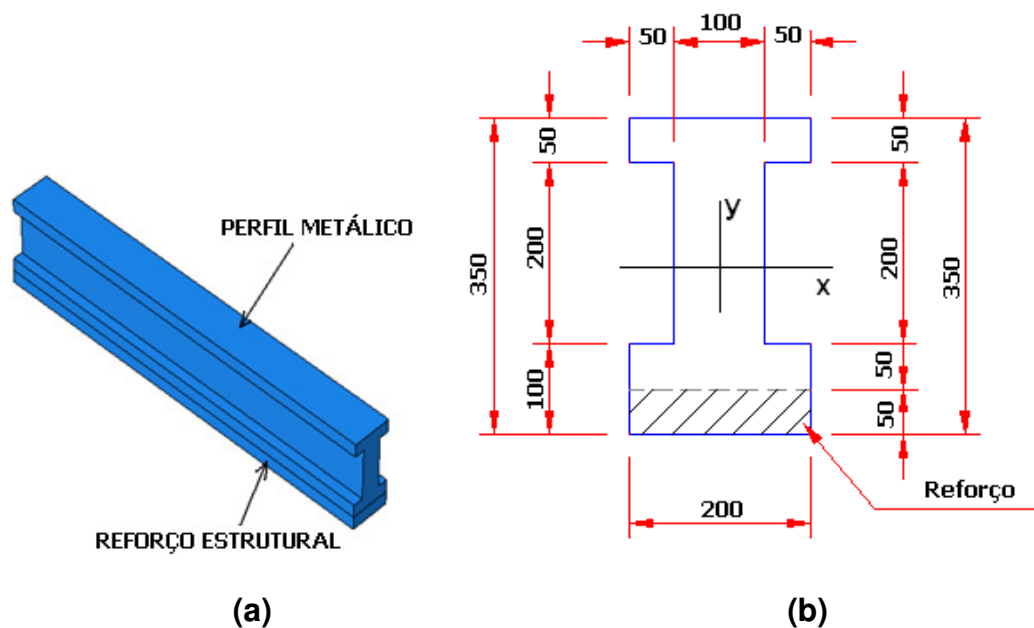
## **6.2 MODELAGEM DE ESTRUTURAS REFORÇADAS**

Existem diferentes maneiras de se realizar a modelagem numérica de um componente ou estrutura que recebe a adição de material externo com a intenção de aumentar a sua inércia e/ou resistência. Para ilustrar algumas das técnicas que estão disponíveis no ABAQUS<sup>®</sup>, será apresentada a seguir a modelagem de uma viga metálica carregada com uma carga uniformemente distribuída, podendo-se assim avaliar as características e resultados obtidos de cada modelo.

### **6.2.1 Flexão de Perfil Metálico**

A flexão de um perfil metálico no regime elástico e linear é um dos assuntos mais estudados nos cursos básicos de engenharia estrutural na graduação, tendo-se

conhecimento das expressões analíticas para a determinação de flechas e tensões, sendo fácil de verificar a validade de um modelo de elementos finitos. A Figura 75 apresenta o modelo em estudo com as características geométricas, sendo composto de um perfil genérico reforçado na sua mesa inferior por uma chapa de mesmo material. As propriedades mecânicas e geométricas utilizadas se encontram na Tabela 13.



**Figura 75 – Modelo de perfil com reforço (a) e características geométricas (b).**

**Tabela 13 – Propriedades mecânicas e geométricas.**

Módulo de Elasticidade	$E = 200\text{GPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Momento de Inércia do Perfil (eixo x)	$I_p = 3,83 \times 10^{-4} \text{m}^4$
Momento de Inércia do Perfil + reforço (eixo x)	$I = 6,3 \times 10^{-4} \text{m}^4$
Comprimento	$L = 2\text{m}$

Foram realizadas seis simulações diferentes do mesmo problema, comparando os resultados com a teoria clássica da resistência dos materiais. Os modelos simulados podem ser vistos na Figura 76, e são eles:

- 1) Modelo unidimensional de viga (elemento de viga com propriedades geométricas do perfil+reforço.) (Modelo 1);
- 2) Modelo tridimensional com elementos sólidos (Modelo 2);
- 3) Modelo tridimensional do perfil metálico e reforço com elementos sólidos considerando a aderência perfeita (Modelo 3).
- 4) Modelo tridimensional do perfil com elementos sólidos e reforço com elemento de placa considerando aderência perfeita (Modelo 4)
- 5) Modelo tridimensional do perfil metálico e reforço com elementos sólidos considerando a aderência através de elementos coesivos (Modelo 5).
- 6) Modelo tridimensional do perfil com elementos sólidos e reforço com elemento de placa considerando a aderência através de elementos coesivos (Modelo 6).



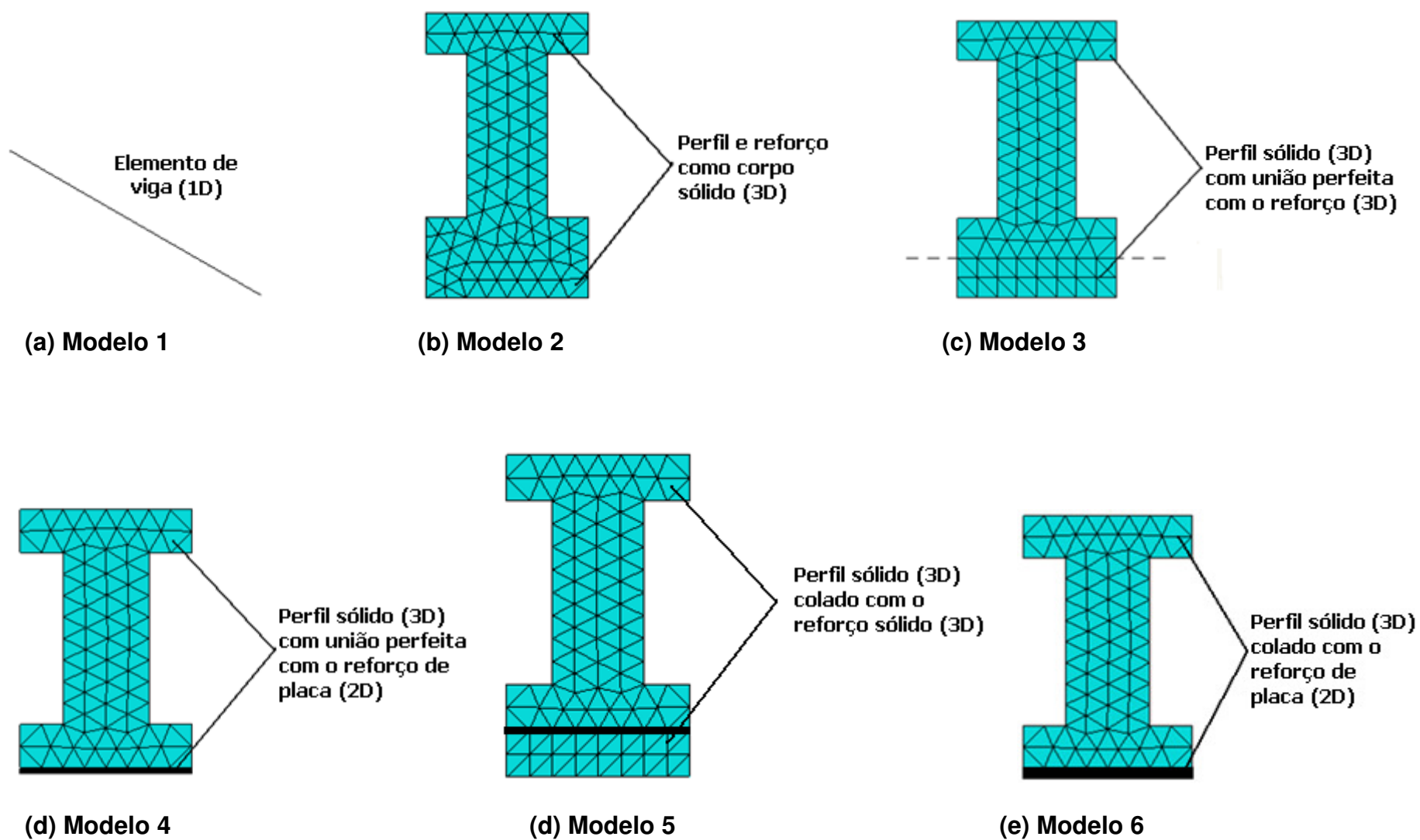
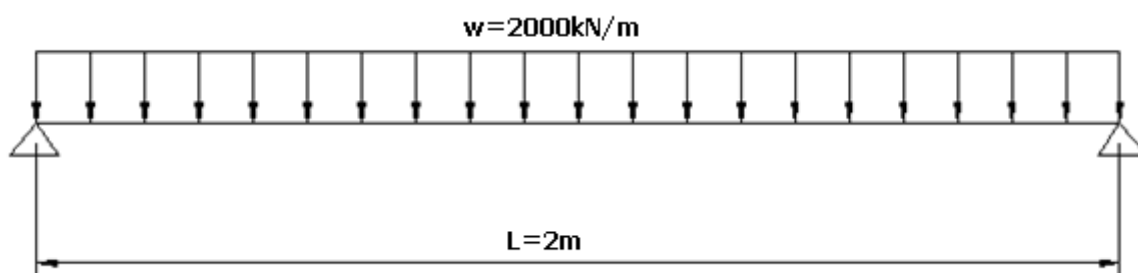


Figura 76 – Modelos analisados de reforços mecânico de um perfil metálico.

Como critério de avaliação dos modelos de elementos finitos, serão avaliadas as flechas máxima para o caso de um elemento estrutural bi-apoiado e com carregamento uniformemente distribuído ( $w = 2000\text{kN} / \text{m}$ ), conforme Figura 77, comparando-se com os resultados de expressões analíticas. A dedução da expressão para a flecha máxima de um elemento bi-apoiado pode ser realizada por diferentes métodos, podendo ser encontrada em Beer & Johnston Jr. (2008), sendo que seu valor é

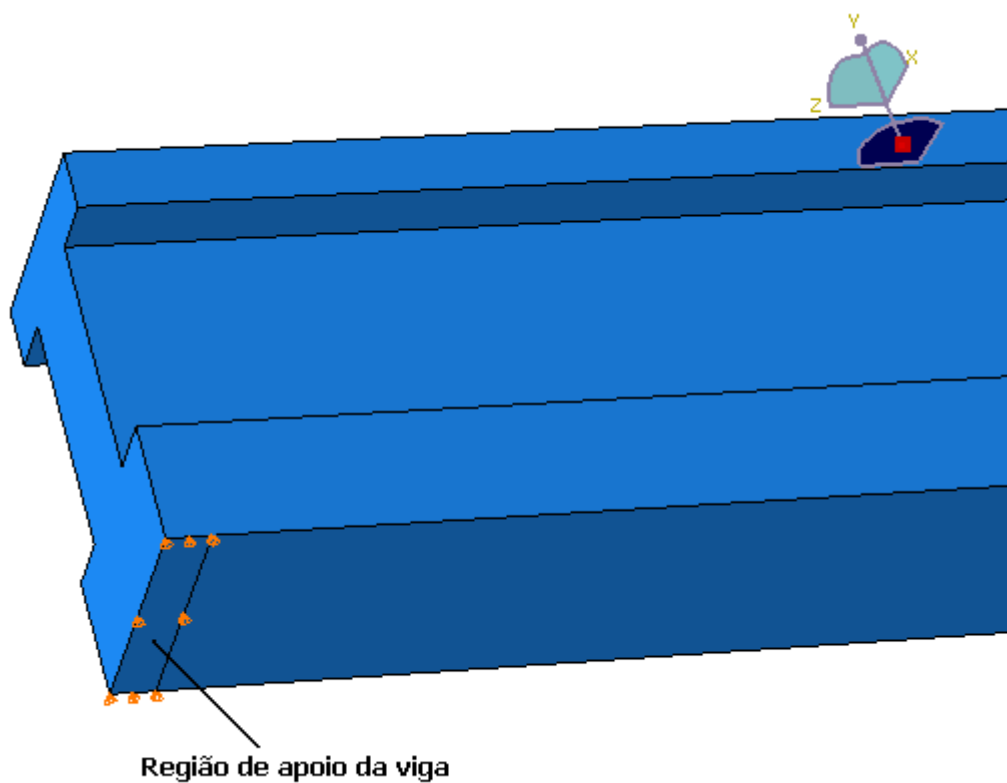
$$y_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI} \quad (107)$$

obtendo-se, para o caso em estudo (Figura 77), o valor de  $y_{\max} = 3,31\text{mm}$ , localizada no ponto central da viga.



**Figura 77 – Modelo estrutural analisado.**

Para os elementos bi e tridimensionais, os apoios não foram considerados apenas como uma linha de pontos nas extremidades da viga, como no caso do elemento de barra (unidimensional), mas sim em uma pequena região perto das extremidades, como pode ser visto na Figura 78. Isso se deve ao fato das cargas concentradas em elementos tridimensionais provocarem distorções de malha que podem afetar os resultados. A largura considerada para este apoio foi de  $3,5\text{ cm}$ .



**Figura 78 – Região de apoio na extremidade dos elementos bi e tridimensionais.**

A Tabela 14 apresenta os resultados das simulações realizadas, juntamente com a diferença percentual em relação ao valor teórico apresentado pela equação (107). Percebe-se que os diferentes modelos apresentam resultados muito próximos, variando entre eles no máximo cerca de 2%.

**Tabela 14 – Resultados de máxima flecha dos modelos analisados.**

	Analítico	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6
Flecha Máxima (mm)	3,31	3,28	3,32	3,33	3,34	3,32	3,30
Diferença Percentual	-	-0,9%	0,3%	0,6%	0,9%	0,3%	-0,3%

Em uma modelagem numérica, a técnica utilizada para modelar a união do reforço com a peça vai depender dos objetivos da análise. Por exemplo, caso questões relacionadas à interface sejam relevantes (delaminação, por exemplo), os Modelos 1, 2, 3 e 4 não seriam adequados para este fim. Dentre as técnicas apresentadas, algumas delas serão utilizadas posteriormente para simular o problema de uma viga de concreto armado com reforço externo. A justificativa para a escolha de determinado modelo será então apresentada.

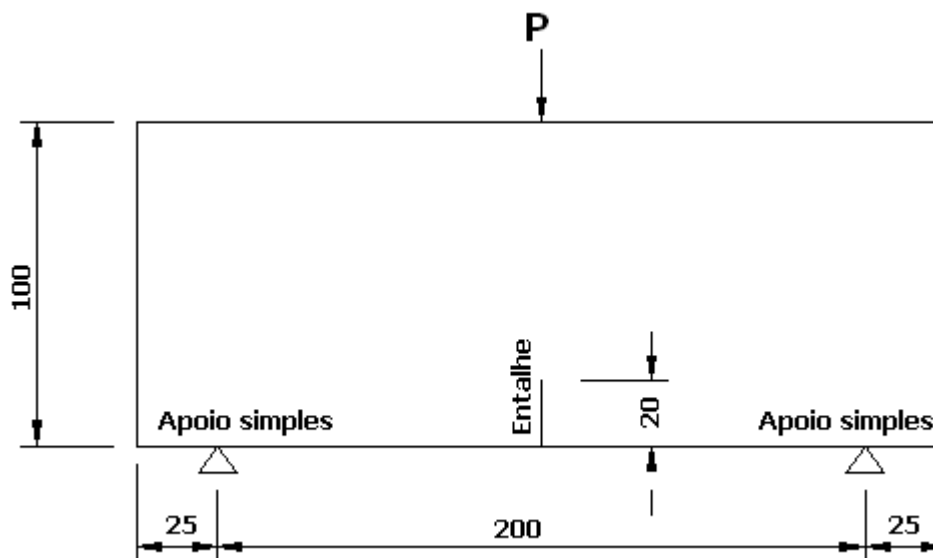
### **6.3 MODELAGEM DE ESTRUTURAS DE CONCRETO**

A seguir serão apresentadas as simulações realizadas que envolvem o modelo constitutivo de dano plástico para o concreto (CDP).

#### **6.3.1 Propagação de Trinca em uma Barra de Concreto Simples**

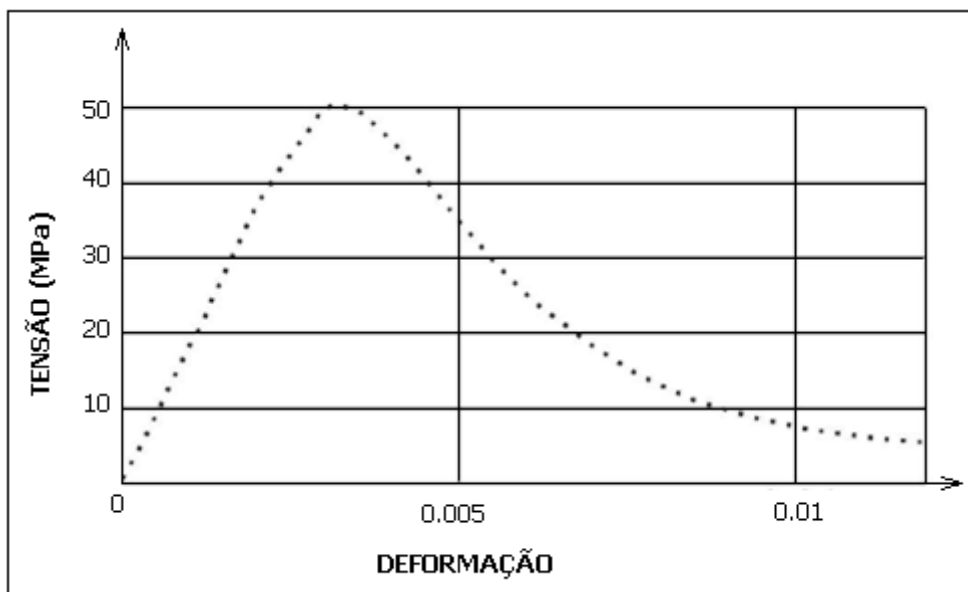
O padrão de propagação de trinca em uma barra retangular com um entalhe de *20mm* na metade do seu comprimento e localizado na sua borda inferior será analisado para comprovar a eficiência do modelo constitutivo utilizado, sendo que a variável de dano na tração é utilizada para comparar com os padrões de fissuração obtidos experimentalmente no trabalho de Davies (1996). A geometria da barra analisada pode ser visualizada na Figura 79 (semelhante a uma viga). A sua largura cor-

responde à  $100\text{mm}$  e está submetida à uma carga centrada. As condições de vinculação correspondem a dois apoios simples distantes  $25\text{mm}$  das bordas da viga. A largura do entalhe, conforme Davies (1996), é de  $1,5\text{mm}$ .

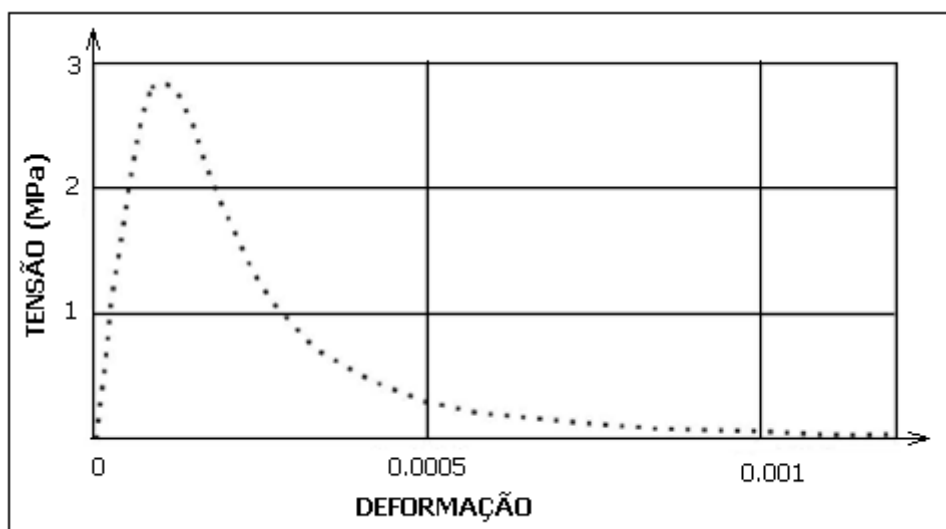


**Figura 79 – Geometria da viga no problema de fissuração (dimensões em mm)**

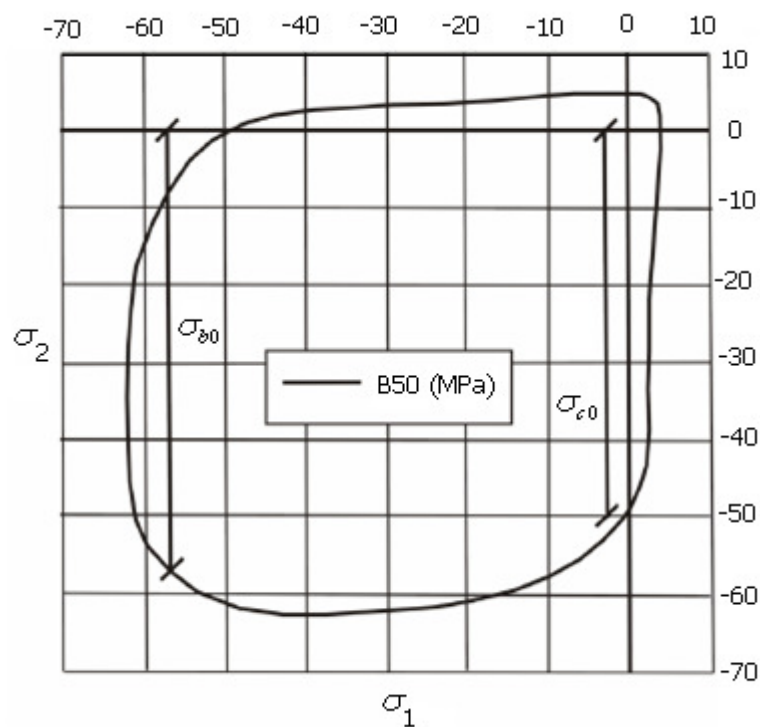
Outros autores também estudaram numericamente o mesmo problema, destacando-se Jankowiak & Lodygowski (2006) e também Johannsson & Reitzel (2011). As simulações realizadas por estes autores utilizaram um concreto denominado B50, cujas curvas do ensaio uniaxial de compressão e tração se encontram na Figura 80 e Figura 81, respectivamente. A curva do ensaio biaxial (curva de Kupfer) está apresentada na Figura 82.



**Figura 80 – Curva experimental de compressão uniaxial para o concreto B50.**  
FONTE: Jankowiak & Lodygowski (2006).



**Figura 81 – Curva experimental de tração uniaxial para o concreto B50.**  
FONTE: Jankowiak & Lodygowski (2006).



**Figura 82 – Curva de Kupfer para o concreto B50.**  
 FONTE: Jankowiak & Lodygowski (2006).

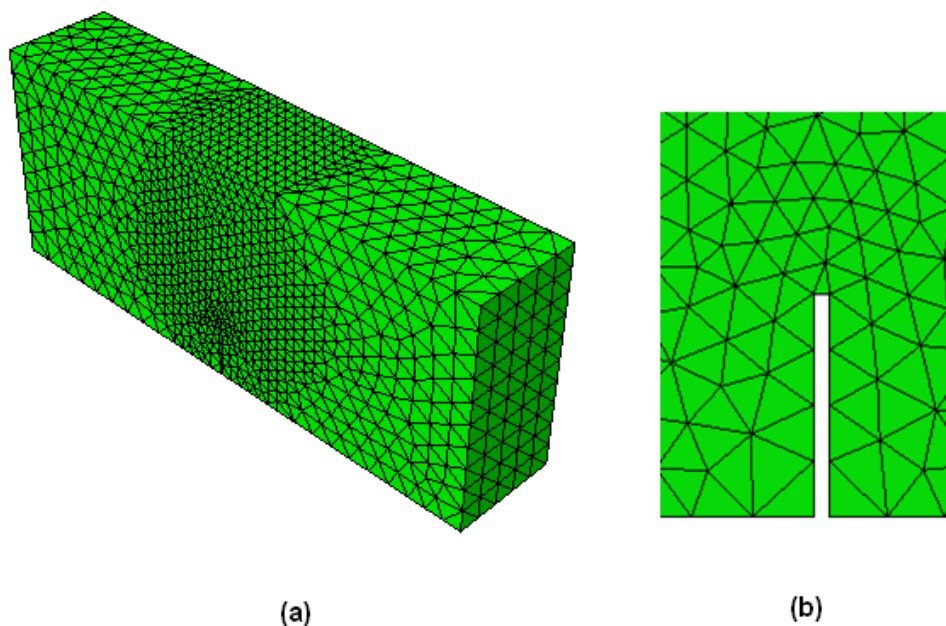
Os dados de entrada no *software* contendo a plastificação do material, a evolução do dano na tração/compressão e também os parâmetros para o modelo CDP são apresentados na Tabela 15. A discretização em elementos finitos pode ser observada na Figura 83.

**Tabela 15 – Parâmetros para a análise de formação de trinca na viga.**

FONTE: Adaptado Jankowiak &amp; Lodygowski (2006).

MATERIAL	Concreto B50	PARÂMETROS PARA O MODELO CDP	
		Ângulo de dilatação	$\psi = 38^\circ$
<b>ELASTICIDADE DO CONCRETO</b>		Excentricidade	$m = 1$
Módulo de elasticidade	$E = 19,7GPa$	Razão entre tensões do ensaio bi e uniaxial	$\frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}} = 1,12$
Coef. de Poisson	$\nu = 0,2$	Parâmetro $K_c$	$K_c = 0,666$
<b>CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PLÁSTICA NA COMPRESSÃO</b>		<b>DANO DO CONCRETO NA COMPRESSÃO</b>	
Tensão (MPa)	Deformação plástica	Dano	Deformação Plástica
15,0	0,0	0,0	0,0
20,19	$7,47 \times 10^{-5}$	0,0	$7,47 \times 10^{-5}$
30,0	$9,88 \times 10^{-5}$	0,0	$9,88 \times 10^{-5}$
40,3	$1,54 \times 10^{-4}$	0,0	$1,54 \times 10^{-4}$
50,0	$7,61 \times 10^{-4}$	0,0	$7,61 \times 10^{-4}$
40,23	$2,55 \times 10^{-3}$	0,195	$2,55 \times 10^{-3}$
20,23	$5,67 \times 10^{-3}$	0,596	$5,67 \times 10^{-3}$
5,25	$1,17 \times 10^{-2}$	0,894	$1,17 \times 10^{-2}$
<b>CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PLÁSTICA NA TRAÇÃO</b>		<b>DANO DO CONCRETO NA TRAÇÃO</b>	
Tensão (MPa)	Deformação plástica	Dano	Deformação plástica
1,99	0,0	0,0	0,0
2,84	$3,33 \times 10^{-5}$	0,0	$3,33 \times 10^{-5}$
1,86	$1,60 \times 10^{-4}$	0,406	$1,60 \times 10^{-4}$
0,86	$2,79 \times 10^{-4}$	0,696	$2,79 \times 10^{-4}$
0,22	$6,84 \times 10^{-4}$	0,920	$6,84 \times 10^{-4}$
0,05	$1,08 \times 10^{-3}$	0,980	$1,08 \times 10^{-3}$





**Figura 83 - Modelo para viga com entalhe (a) e malha na região do entalhe (b).**

A comparação do padrão de fissuração obtido na análise numérica com aquele obtido experimentalmente visa comprovar a capacidade do *software* de determinar o ponto de início e a propagação de um trinca ou fissura, podendo-se observar isto na Figura 84 para diferentes etapas de carregamento. A análise desta figura mostra uma semelhança grande entre os modelos numérico e experimental, sendo que no primeiro utilizou-se a variável de dano na tração para efeitos de comparação.

A captura de micro-trincas na simulação numérica utilizando-se o modelo CDP é muito difícil, necessitando-se de uma malha extremamente refinada que pode inviabilizar as simulações. Como o modelo constitutivo utilizado é caracterizado por um material homogêneo, os desvios de micro-trinca devido à heterogeneidade do material (agregado graúdos, agregados miúdos e pasta de cimento), como aqueles esquematizados na Figura 85, são praticamente impossíveis de serem detectados.

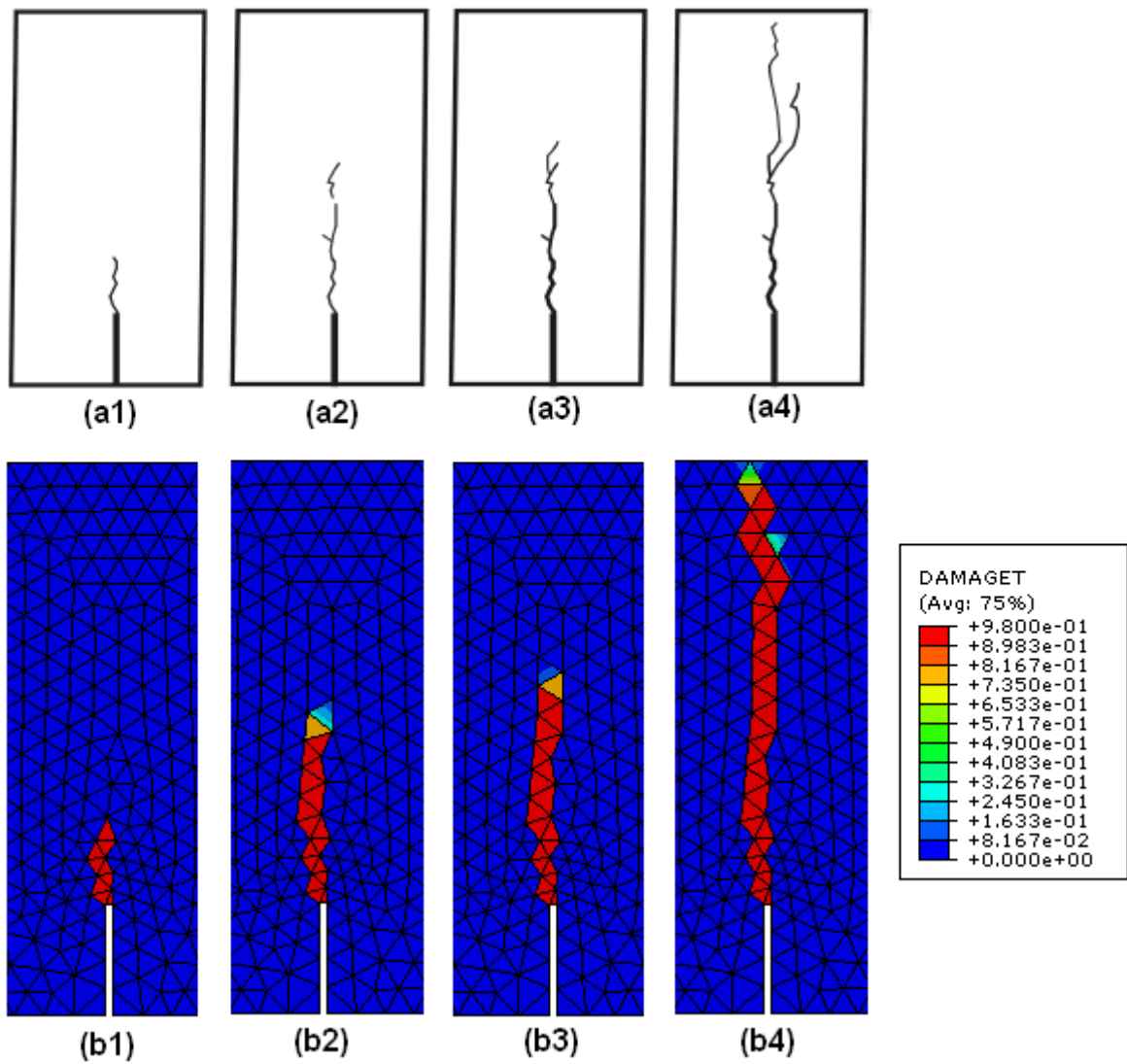


Figura 84 – Padrões de fissuração obtidos experimentalmente por Davies (1996) (a) e numericamente pelo autor (b).

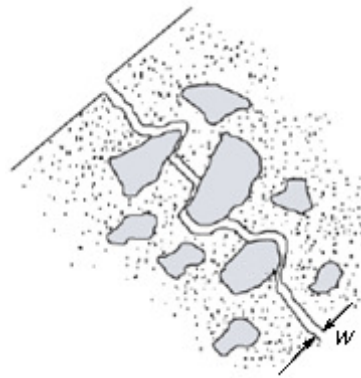
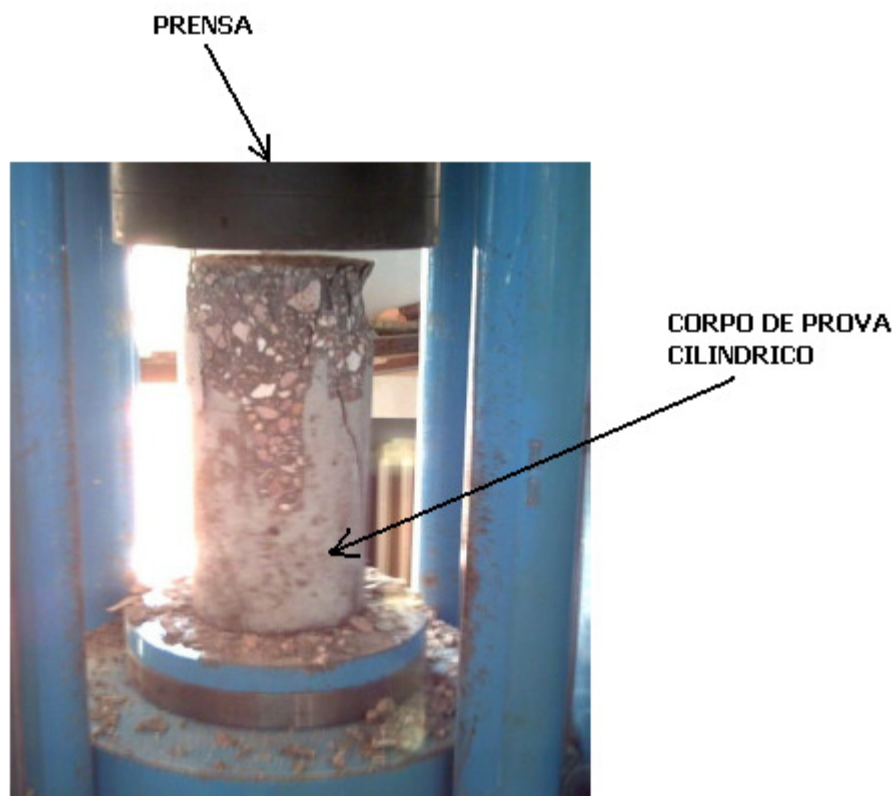


Figura 85 – Desvio da trinca no concreto devido à heterogeneidade do material.  
 FONTE: Johannsson & Reitzel (2011).

### 6.3.2 Ensaio de Compressão Uniaxial

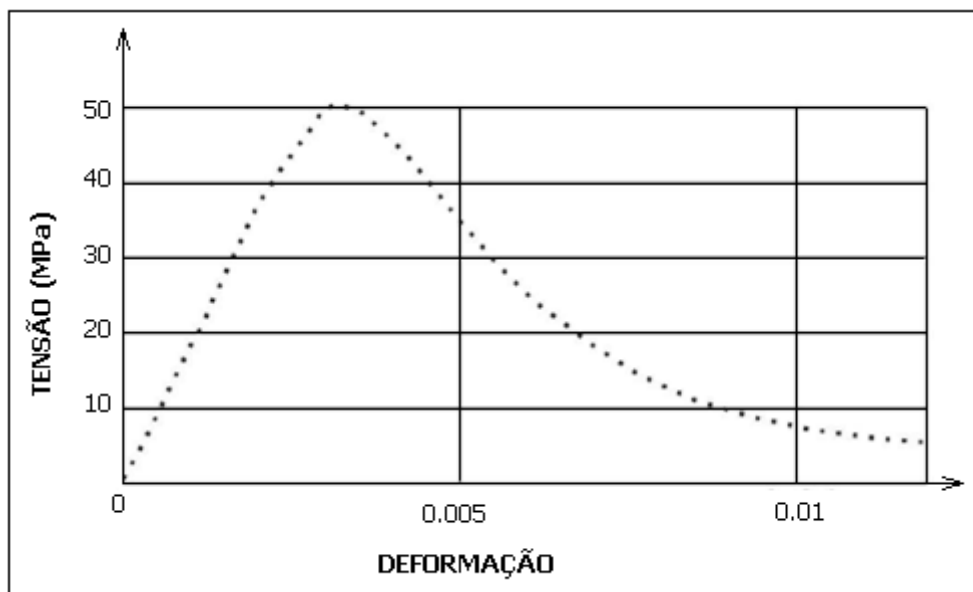
O ensaio de compressão uniaxial do concreto consiste em submeter um corpo de prova normalmente cilíndrico a um carregamento até sua ruptura, anotando-se tanto os valores de tensão aplicada como as deformações uniaxiais obtidas. A Figura 86 apresenta um corpo de prova<sup>6</sup> em um ensaio de compressão real. Através deste ensaio, pode-se construir a curva tensão-deformação, como a da Figura 80, reproduzida abaixo.



**Figura 86 – Corpo de prova cilindro em ensaio de compressão uniaxial.**  
FONTE: Obaidt (2007).

---

<sup>6</sup> Na Figura 86, o corpo de prova já se encontra rompido, ou seja, o ensaio de compressão já foi realizado.



**Figura 80 (REPRODUÇÃO) – Curva experimental de compressão uniaxial para o concreto B50.**

FONTE: Jankowiak & Lodygowski (2006).

As simulações apresentadas a seguir visam obter numericamente os resultados do ensaio uniaxial de compressão utilizando o modelo de dano plástico para o concreto (CDP). As propriedades utilizadas para esta simulação se encontram na Tabela 15 (concreto B50), devendo-se obter uma curva muito próxima da apresentada na Figura 80 caso o modelo proposto seja realístico.

Como o objeto analisado consiste num sólido de revolução, utilizou-se um modelo axi-simétrico, ou seja, apenas metade de uma seção transversal é simulada, conforme pode ser visto na Figura 87. A geometria do problema, assim como as dimensões e condições de contorno são apresentados na Figura 88, correspondendo a um cilindro com 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro.

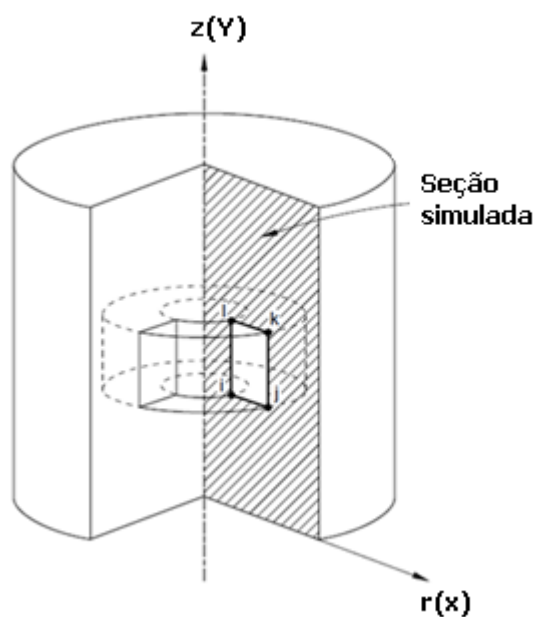


Figura 87 – Sólido de revolução e seção simulada.

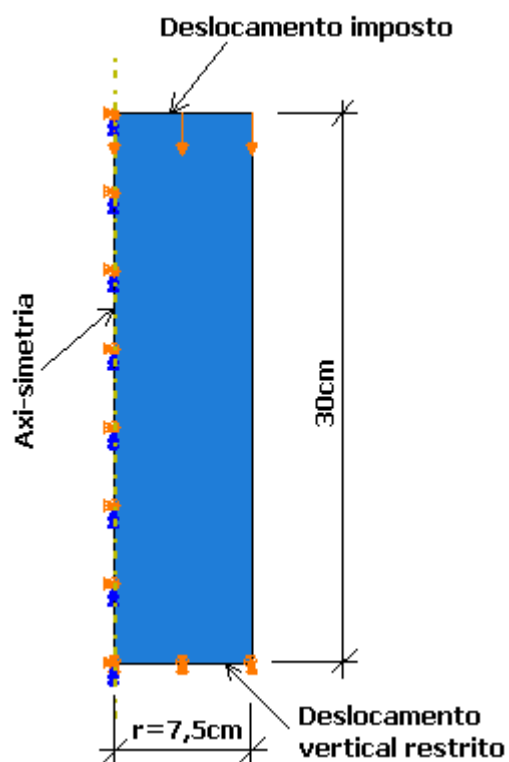
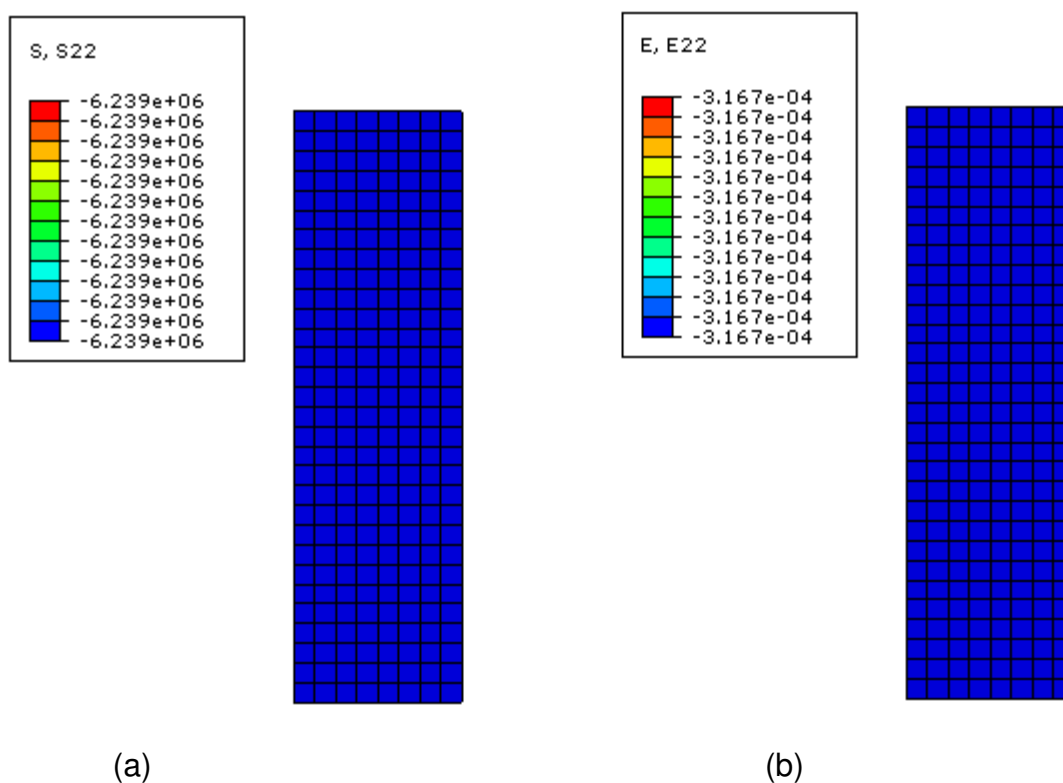


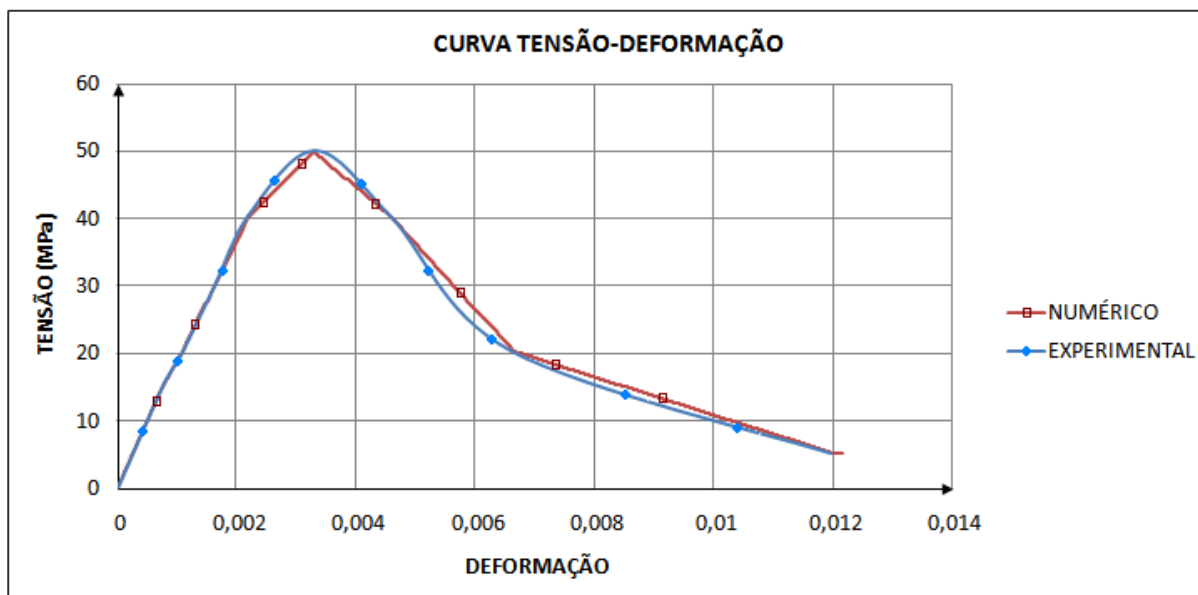
Figura 88 – Características geométricas e condições de contorno para o ensaio uniaxial.

Os resultados obtidos de tensão e deformação axiais são avaliados nos pontos de integração numérica de um elemento finito qualquer, já que todo o cilindro de concreto está submetido ao mesmo estado de tensões e deformações em qualquer etapa do carregamento (Figura 89).



**Figura 89 – Tensões (a) e deformações (b) axiais uniformes na amostra em determinado estágio de carregamento.**

A Figura 90 mostra o resultado numérico obtido juntamente com a curva experimental (Figura 80). Percebe-se que há grande concordância entre os dois resultados, comprovando a eficácia do modelo constitutivo CDP.



**Figura 90 – Curva tensão-deformação para o concreto B50 obtida numericamente pelo autor e experimentalmente por Jankowiak & Lodygowski (2006).**

As curvas de evolução do dano com a deformação e da tensão em função do dano são apresentadas na Figura 91 e Figura 92 respectivamente, podendo-se perceber que, na parte ascendente da curva tensão-deformação, não ocorre dano.

Observa-se também que quando os parâmetros de dano atingem valores próximos de  $d = 0,9$ , é caracterizada a falha do material. Teoricamente, a falha deve ocorrer quando  $d = 1,0$ . Entretanto, em valores próximos deste limite, ocorrem dificuldades de convergência numérica, muitas vezes impossibilitando a continuação das simulações.

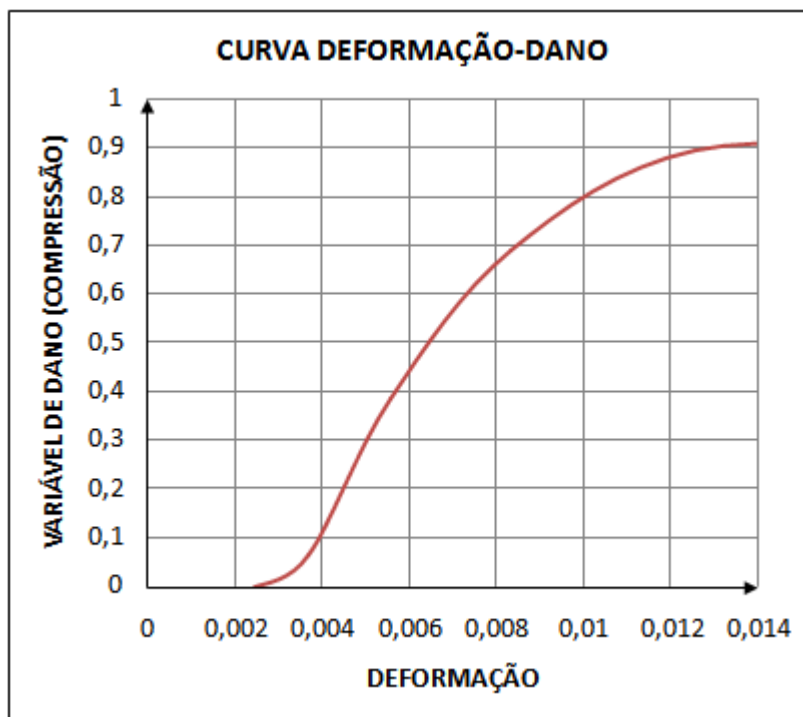


Figura 91 – Curva de evolução do dano com a deformação para o concreto B50.

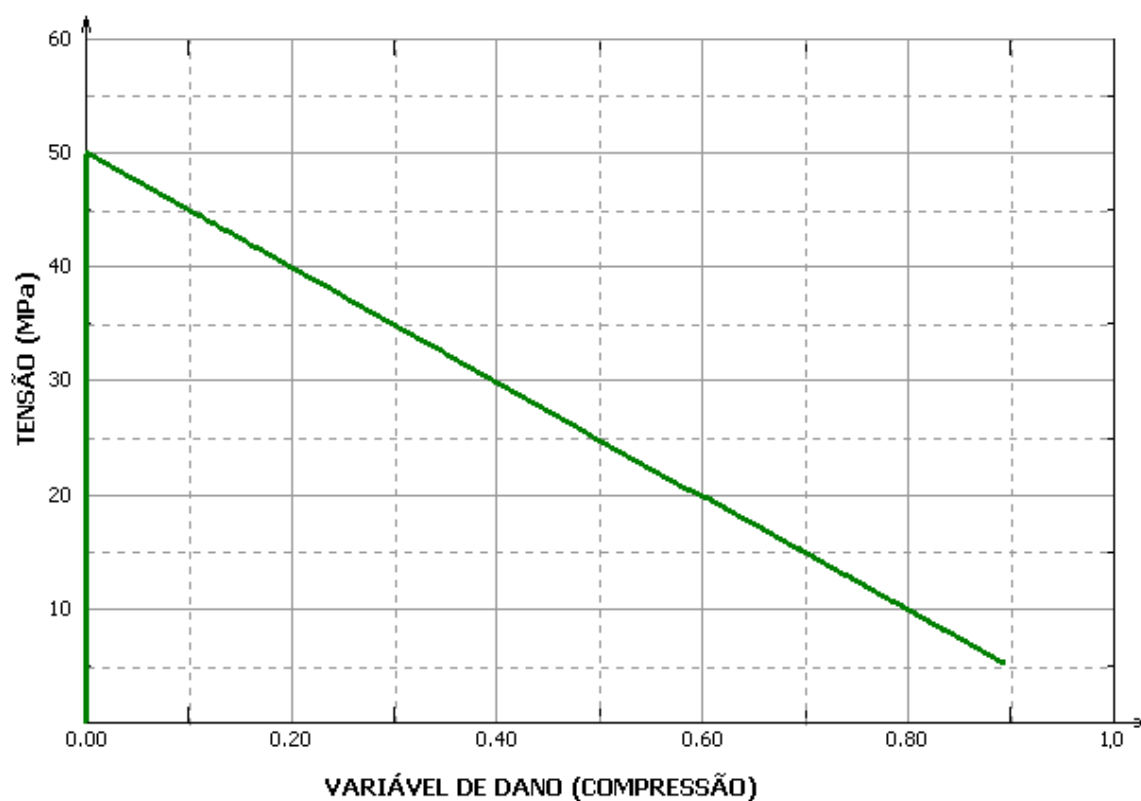


Figura 92 – Curva de evolução da tensão em função do dano para o concreto B50.



### 6.3.3 Flexão de uma Viga de Concreto com Entalhe

Ao contrário do problema apresentado anteriormente onde se buscou avaliar o padrão de fissuração provocado por um entalhe em uma viga, no presente exemplo busca-se determinar a resposta em termos da curva carga-deslocamento do modelo numérico para compará-la à curva obtida experimentalmente.

A geometria da viga analisada pode ser vista na Figura 93, correspondendo a uma viga bi-apoiada com um carregamento transversal uniforme aplicado na porção média do seu comprimento. O material da viga possui um módulo de elasticidade de  $E = 30GPa$ , coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,2$ , densidade de  $2400 \text{ kg/m}^3$  e tensão de tração onde começa a fissuração de  $\sigma_{tu} = 3,33MPa$ . O comportamento na tração após a tensão última é especificado através da energia de fratura para o Modo I de abertura de trinca,  $G_f^I = 126N/m$ , representado graficamente na Figura 94. Essa energia é especificada para o Modo I porque um entalhe cria uma situação onde a tensão devido à flexão atuará perpendicularmente à trinca, como esquematizado na Figura 95.

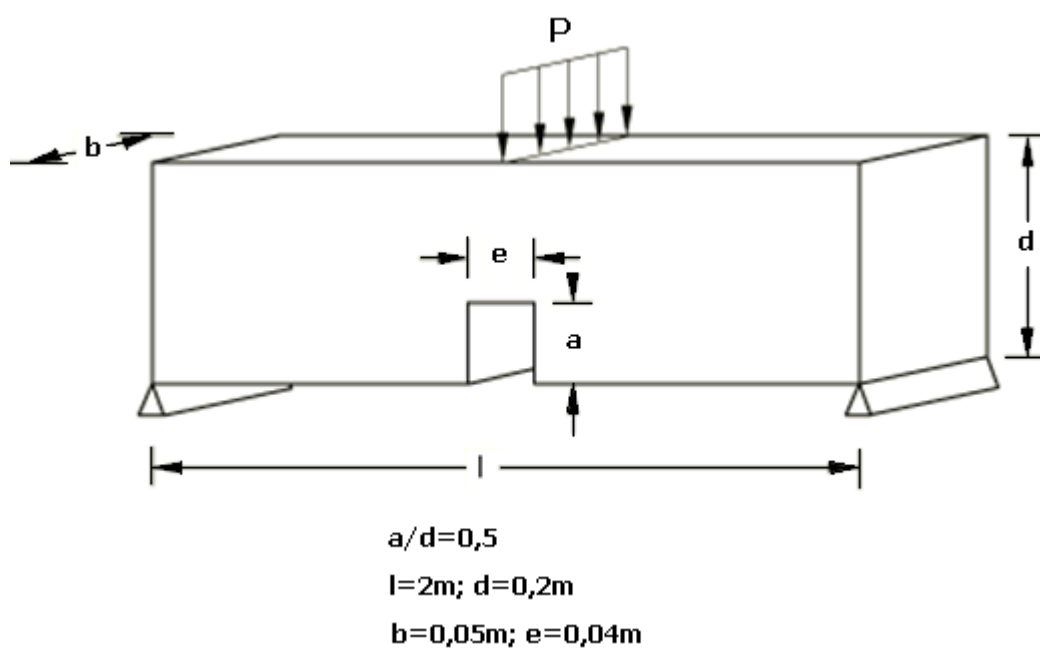


Figura 93 - Geometria para o problema da flexão de viga com entalhe.

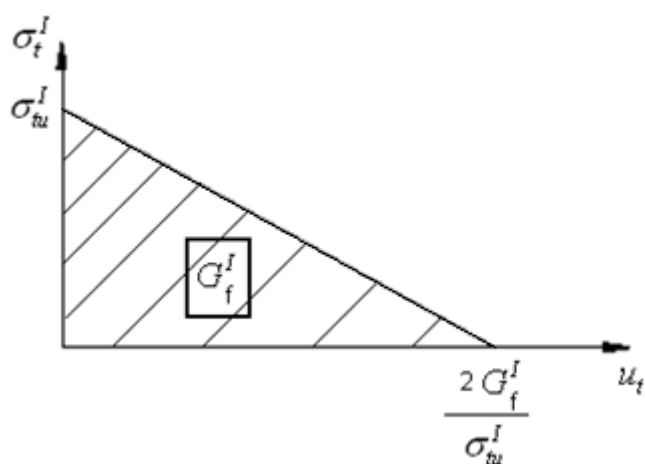


Figura 94 – Comportamento “*tension softening*” com relação linear.

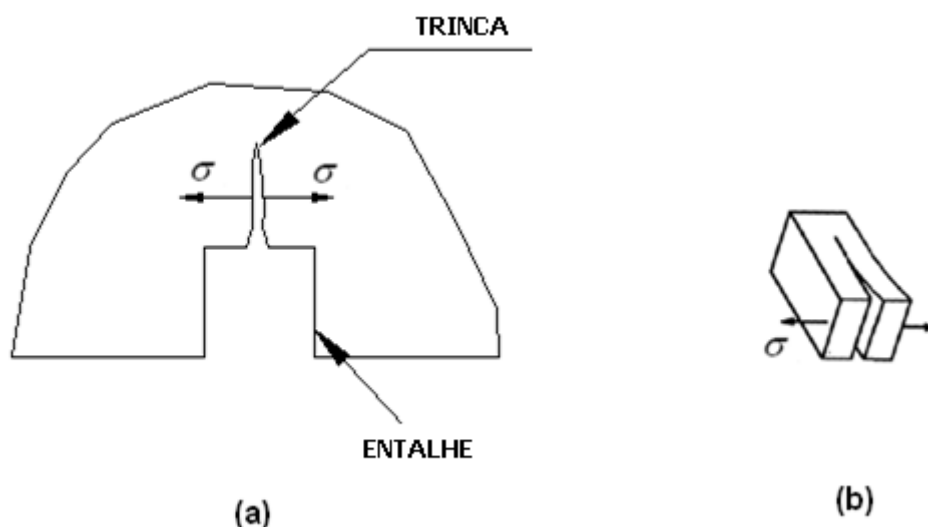
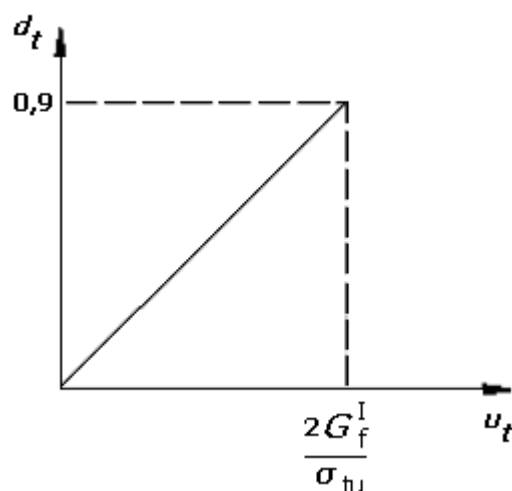


Figura 95 – Trinca devido ao entalhe (a) e esquema genérico do Modo I de abertura de fissuras (b).

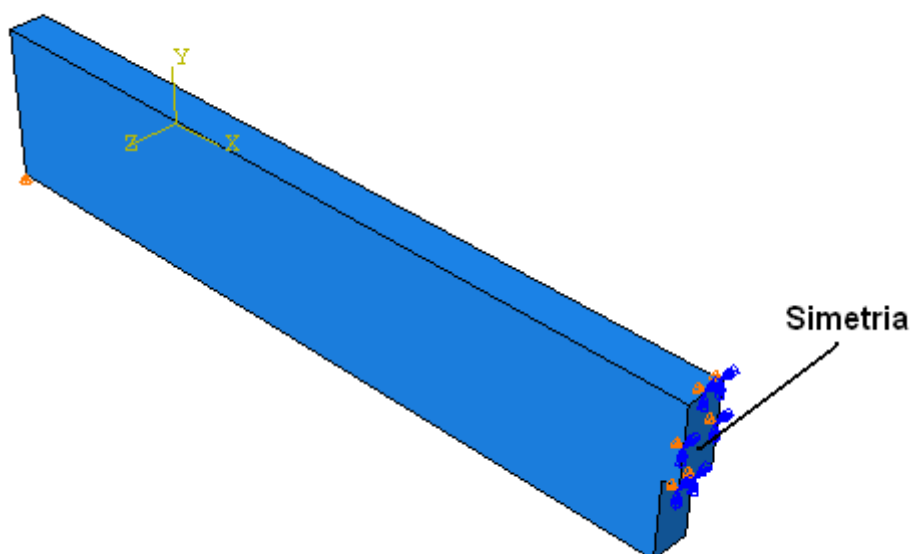
As propriedades de dano na tração também dependem da energia de fratura, sendo utilizado um comportamento linear de evolução, com mostra a Figura 96. Por se tratar de uma análise onde não há reforço de amadura (concreto simples), a simulação apresentará maior estabilidade se os parâmetros de dano forem fornecidos em termos de deslocamentos ao invés de energia de fratura (Lubliner *et al.* (1988)).



**Figura 96 – Curva do dano na tração em função do deslocamento da fissura.**

O problema descrito acima foi inicialmente estudado experimentalmente por Petersson (1981) e os resultados das simulações numéricas estão disponíveis no manual do ABAQUS® (Abaqus Benchmarks Manual 6.10). Entretanto, neste trabalho foram realizadas simulações totalmente independentes para comprovar a efetividade do modelo CDP em prever o comportamento do concreto estrutural sob determinado carregamento.

Utilizaram-se condições de simetria (Figura 97) para diminuir o tempo de processamento do modelo. Para aplicação do carregamento, optou-se por uma condição de velocidade imposta ao invés de uma carga estática. Isso pelo fato do método de solução estático padrão de elementos finitos ser mais susceptível a não convergência em problemas não lineares do que um algoritmo dinâmico explícito. Assim, ao invés da carga “*P*” da Figura 93, estabeleceu-se uma velocidade  $V = 0,06m/s$  aplicada em um período total de 0,05 segundos. Esta velocidade é baixa o suficiente para que os efeitos dinâmicos sejam desprezíveis, tendo-se assim uma solução quase-estática.



**Figura 97 – Simetria no modelo de viga com entalhe.**

Os resultados obtidos através da modelagem numérica são apresentados através da curva carga-deslocamento avaliada no ponto central da viga, Figura 99. Conjuntamente, são disponibilizados também os resultados experimentais de Petersson (1981). Neste, os resultados dos ensaios foram avaliados através de duas energias de fratura diferentes,  $G_f^I = 115 \text{ N/m}$  e  $G_f^I = 137 \text{ N/m}$ . O valor utilizado na modelagem numérica de  $G_f^I = 126 \text{ N/m}$  corresponde à média dos valores de Petersson (1981).

A consideração de uma lei linear para representar o comportamento “*tension stiffening*” do concreto (Figura 94 reproduzia abaixo) conduz a uma resposta com rigidez mais elevada que a real, como pode ser observado na Figura 99. No manual do ABAQUS® (Abaqus Benchmarks Manual V.10) é recomendada a utilização desta lei através de um número maior de segmentos, utilizando-se agora quatro segmentos, como pode ser visto na Figura 98. Observa-se uma melhora considerável nos resultados, conforme a Figura 99, evidenciando-se a importância da correta definição dos parâmetros de simulação.

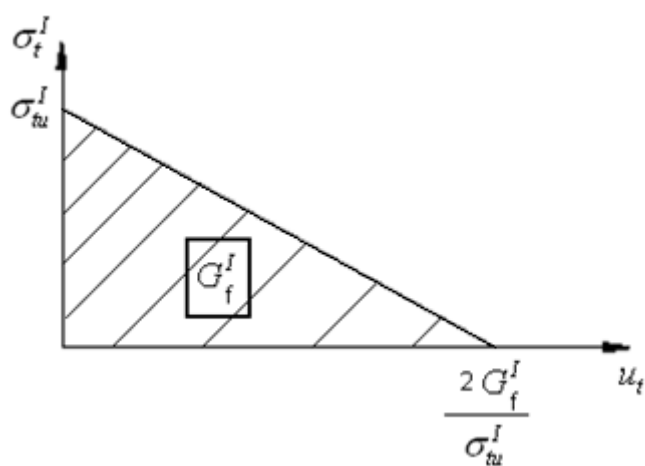


Figura 94 (REPRODUZIDA) – Relação linear para o comportamento “*tension stiffening*” do concreto.

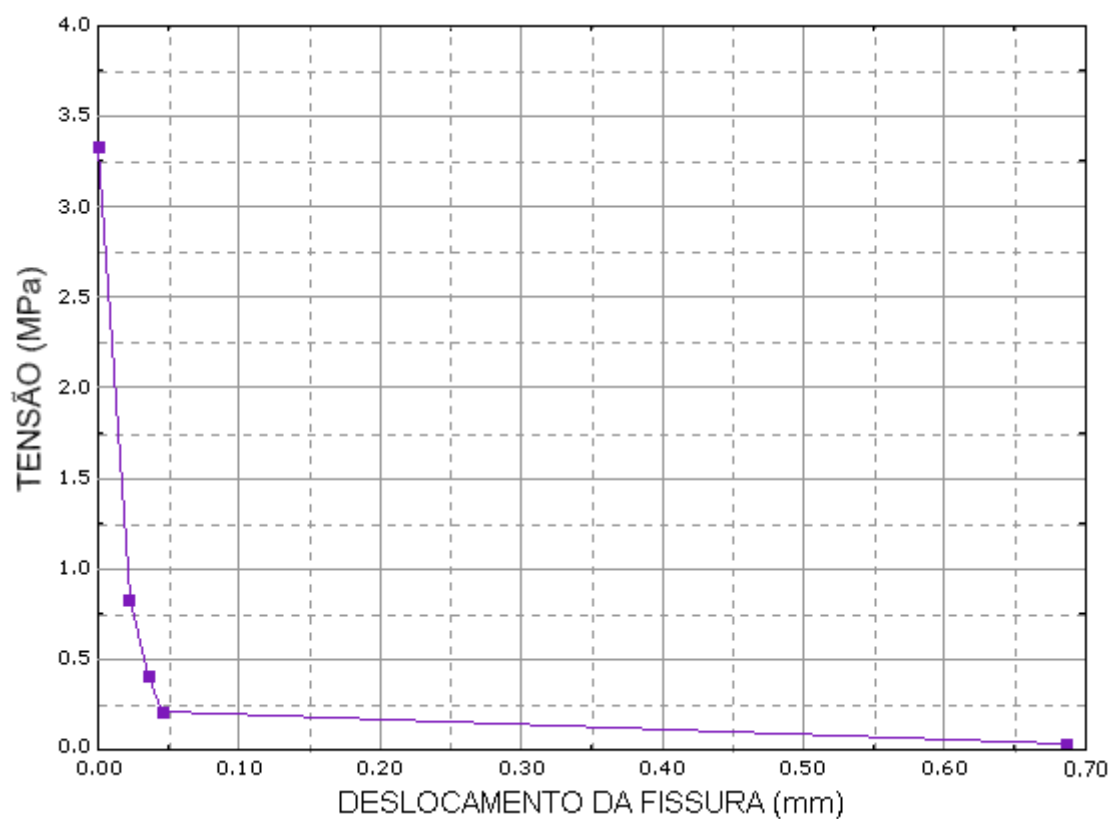
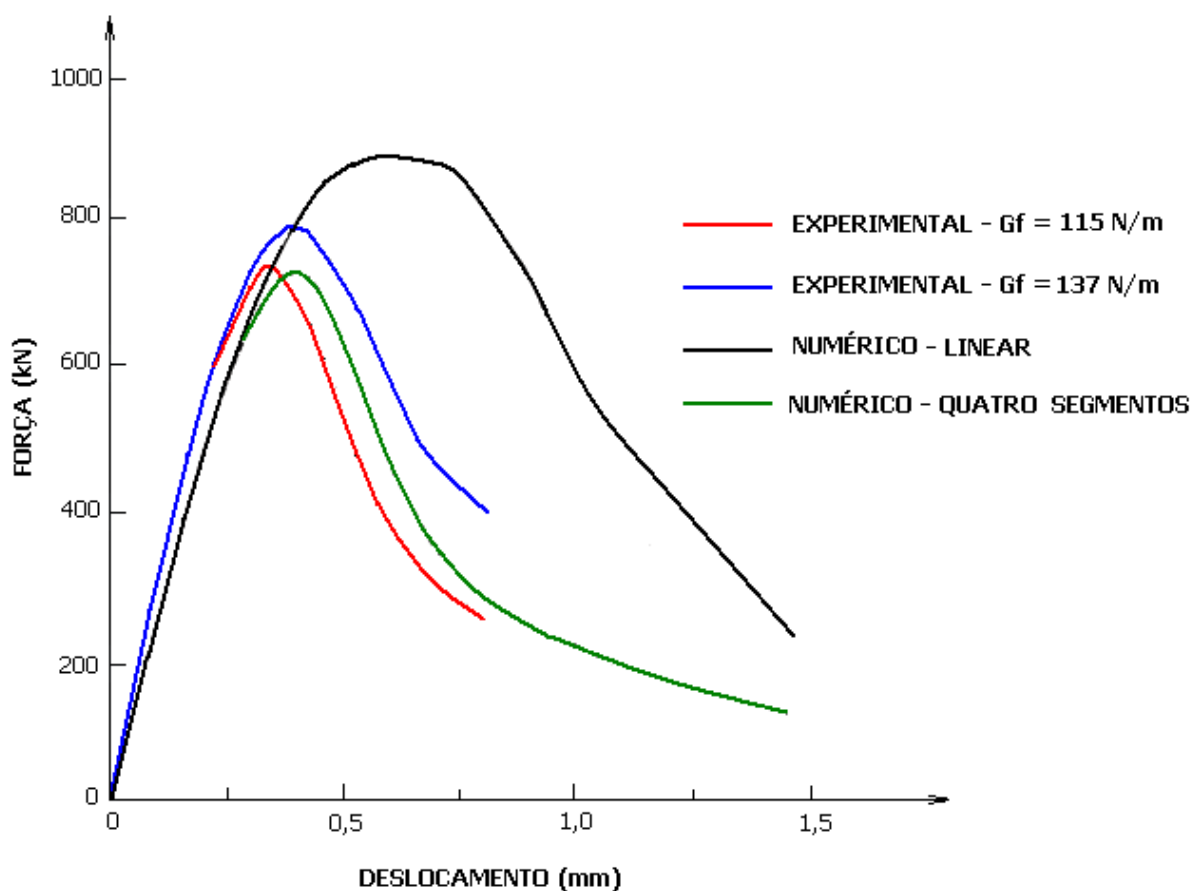


Figura 98 – Comportamento “*tension stiffening*” com quatro segmentos.



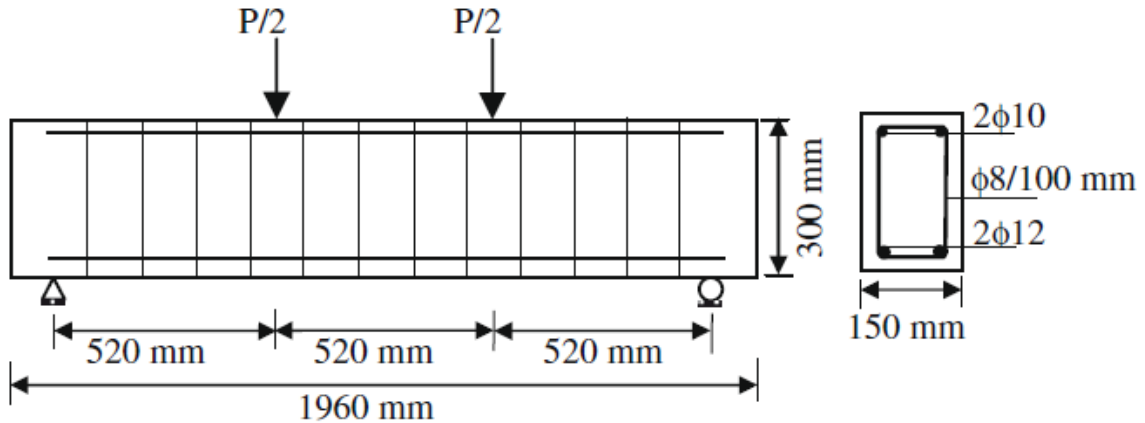
**Figura 99 – Comparação dos resultados em termos da curva carga-deslocamento no ponto central da viga com entalhe.**

#### 6.3.4 Viga de Concreto Armado Reforçada com CFRP

Os motivos da utilização de reforço de fibra de carbono em vigas de concreto armado já foram apontados anteriormente, apresentado-se agora o procedimento de modelagem computacional utilizado neste trabalho. Para isso, o trabalho desenvolvido por Obaidt *et al.* (2010) será tomado como referência.

Diversas vigas de concreto armado com e sem reforço de fibra de carbono foram estudadas experimentalmente em Obaidt (2007) e numericamente em Obaidt *et al.* (2010). A geometria da viga analisada neste trabalho, seu carregamento e condições de vinculações são apresentados na Figura 100. A armadura de aço imersa no interior do concreto corresponde a duas barras de  $12\text{mm}$  na borda inferior e duas barras de  $10\text{mm}$  na borda superior, sendo que os estribos são de ramos duplos com bitolas

de 8mm espaçados a cada 10cm. O cobrimento da armadura não foi especificado em Obaidt *et al.* (2010), adotando-se o valor de 2,5cm.



**Figura 100 – Viga estudada na modelagem com CFRP.**  
 FONTE: Obaidt *et al.* (2010).

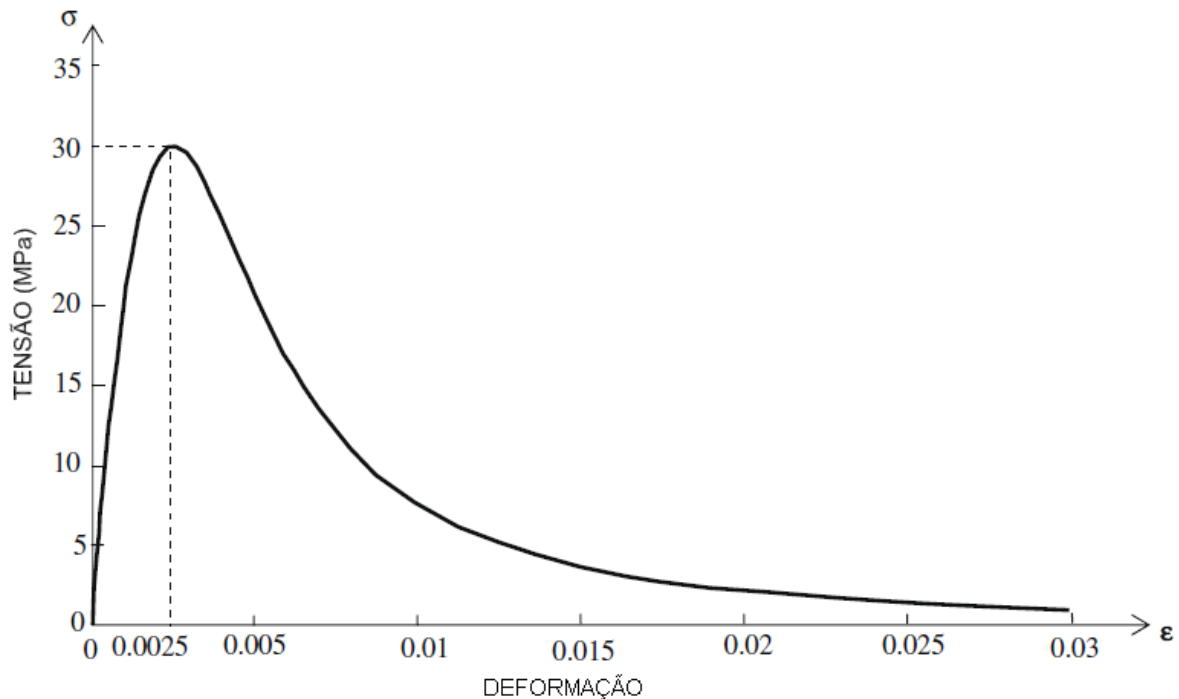
O concreto utilizado por Obaidt *et al.* (2010), denominado no presente trabalho por OB30, têm tensão máxima de compressão de  $\sigma_{cu} = 30\text{MPa}$ , módulo de elasticidade na fase inicial elástica de  $E_c = 26\text{GPa}$  e a sua curva tensão-deformação é representada pela seguinte equação,

$$\sigma = \frac{E_c \varepsilon}{1 + (R + R_E - 2) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - (2R - 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + R \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3} \quad (108)$$

onde

$$E_0 = \frac{f_c}{\varepsilon_0}, \quad R_E = \frac{E_c}{E_0}, \quad R = \frac{R_E (R_\sigma - 1)}{(R_\sigma - 1)^2} \quad (109)$$

e  $\varepsilon_0 = 0.0025$ ,  $R_\varepsilon = 4$ ,  $R_\sigma = 4$ . O módulo de Poisson utilizado corresponde a  $\nu = 0,2$  e a curva definida pela equação (108) pode ser visualizada na Figura 101.



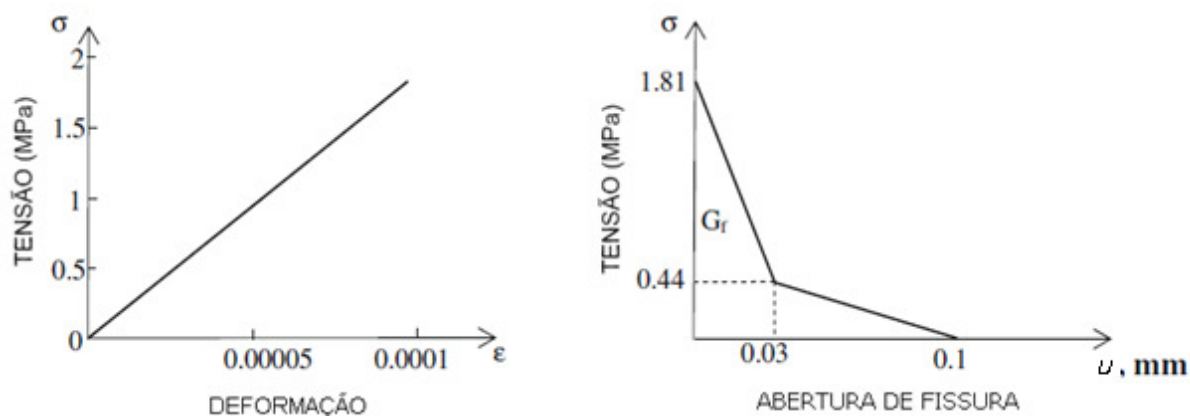
**Figura 101 – Curva Tensão-Deformação na compressão uniaxial para o concreto OB30.**

FONTE: Adaptado de Obaidt *et al.* (2010).

Para representar o comportamento de tração para o concreto OB30, Obaidt *et al.* (2010) utilizaram um modelo onde até a tensão de falha ( $f_{ct}$ ) a resposta do material é linear. A falha é caracterizada pelo aparecimento de micro-trincas no concreto. Após esta tensão, ocorre diminuição da rigidez, conforme a Figura 102. O método da energia de fratura foi utilizado para a caracterização da curva, sendo especificada uma energia de fratura no Modo I de  $G_f = 90 J / m^2$ , correspondendo à área sob a curva. A expressão utilizada por Obaidt *et al.* (2010) para a determinação da tensão última na tração é:

$$f_{ct} = 0,33\sqrt{f_c} = 1,81 MPa \quad (110)$$



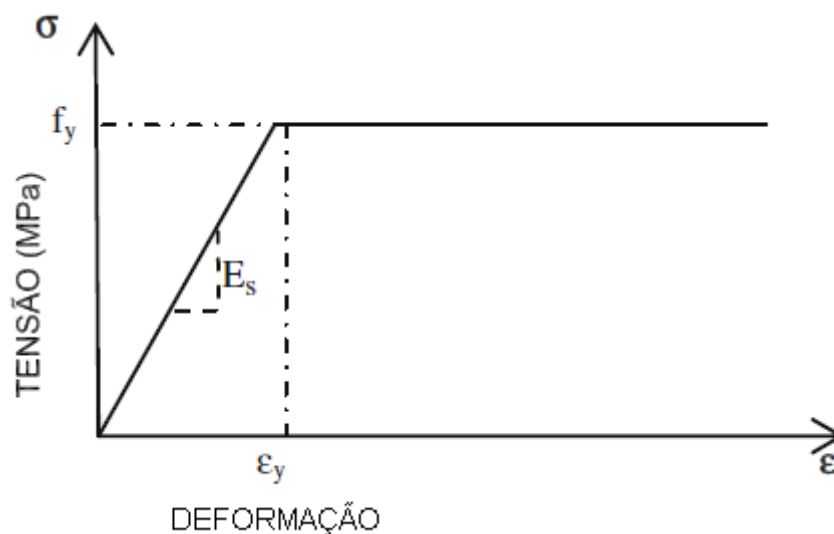


(a) Comportamento até tensão de falha. (b) Comportamento após tensão de falha.

**Figura 102 – Curva Tensão-Deformação na tração uniaxial para o concreto OB30.**

FONTE: Adaptado de Obaidt *et al.* (2010).

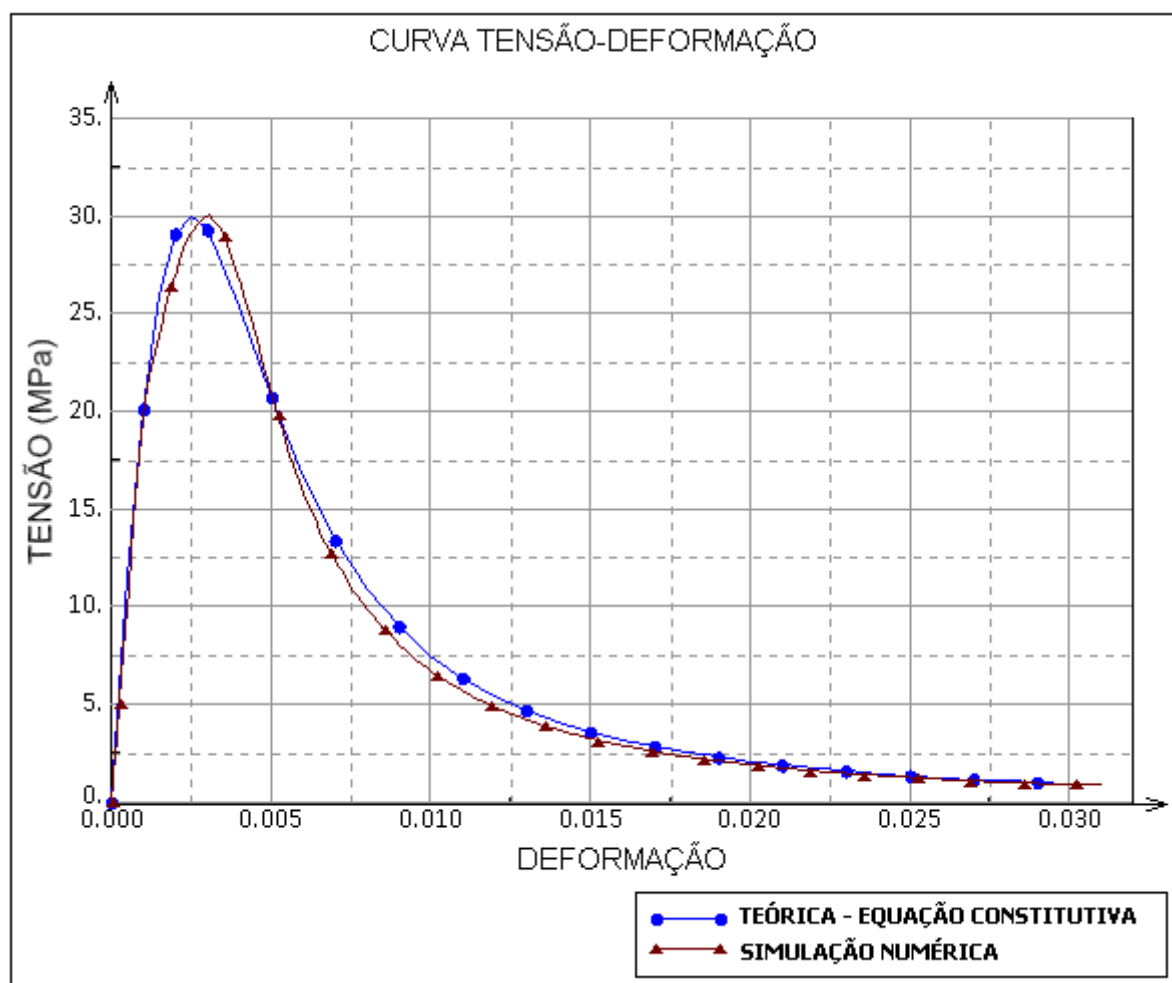
As características do aço imerso no concreto foram consideradas com um comportamento elasto-plástico perfeito e idêntico na tração e compressão, como mostra a Figura 103. A tensão de escoamento foi medida por Obaidt *et al.* (2010) em ensaios experimentais e obtiveram-se valores de  $f_y = 507 \text{ MPa}$ . O valor do módulo de elasticidade foi de  $E_s = 209 \text{ GPa}$  e o coeficiente de Poisson utilizado tem valor de  $\nu = 0,3$ . Tanto no trabalho de Obaidt *et al.* (2010) como no presente trabalho considerou-se a aderência perfeita entre a armadura e o concreto. Os efeitos da perda da aderência entre os dois materiais com o surgimento das fissuras e outros efeitos degradantes estão implícitos no modelo constitutivo do concreto, como apresentado no Capítulo 4.



**Figura 103 – Curva Tensão-Deformação para o aço imerso no concreto OB30.**  
 FONTE: Adaptado de Obaidt *et al.* (2010).

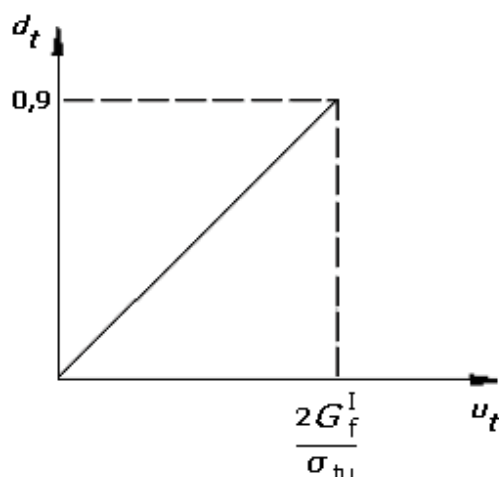
No trabalho de Obaidt *et al.* (2010) não foram especificadas as propriedades de dano no concreto com a evolução das deformações/tensões. Estas características tanto na compressão como na tração são necessárias para o modelo GDP utilizado neste trabalho. Com isso, se propôs similarmente, a relação linear na compressão utilizada por Jankowiak & Lodygowski (2006) na Figura 92. Nessa, o dano começa a ocorrer após ser atingida a tensão máxima de compressão do concreto (no presente exemplo,  $\sigma_{cu} = 30MPa$ ) e varia linearmente com a tensão.

Para verificar a validade do modelo de dano proposto, realizou-se a simulação computacional do ensaio uniaxial de compressão da mesma forma que foi realizado para a o modelo constitutivo do concreto utilizado por Jankowiak & Lodygowski (2006), apresentado no ítem 6.3.2. Com isso, pode-se avaliar a validade do modelo tensão-dano proposto comparando-se a curva tensão-deformação obtida numericamente através da simulação computacional com a curva teórica proposta pela equação (108). A Figura 104 mostra os resultados obtidos, tendo-se uma boa aproximação entre as duas curvas, indicando que o modelo de dano proposto está coerente.



**Figura 104 – Curvas Tensão-Deformação para o concreto OB30.**

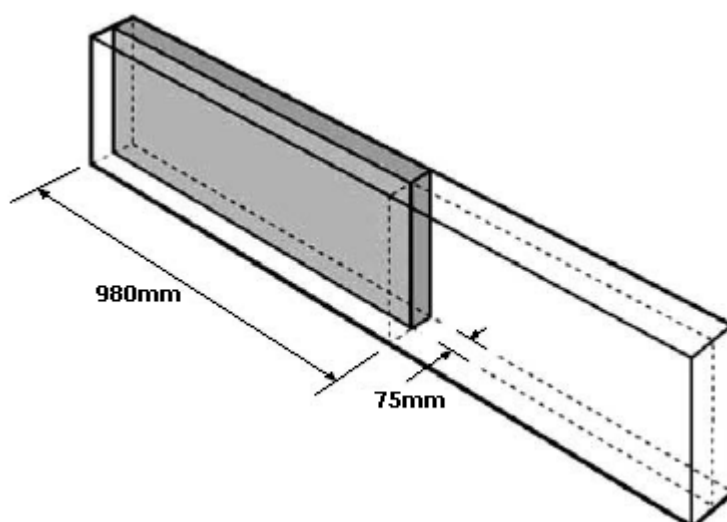
Para o dano na tração, utilizou-se um modelo linear com o deslocamento, conforme esquema da Figura 105.



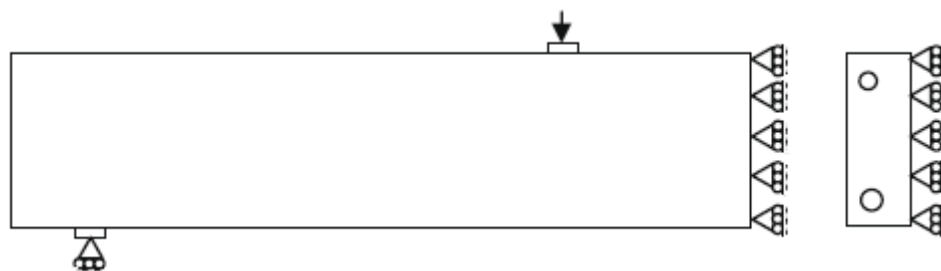
**Figura 105 – Curva de dano-deslocamento para o concreto OB30.**

Antes de definir os modelos utilizados para o reforço de CFRP, serão apresentados os resultados obtidos com as simulações da viga de concreto armado representada na Figura 100 (viga de referência), denominando esta análise de Viga1, comparando-se os resultados obtidos com os valores experimentais disponíveis em Obaidt (2007) e os numéricos disponíveis em Obaidt et al. (2010).

Para diminuir o tempo de processamento do modelo numérico, foram utilizadas duas condições de simetria, simulando-se então apenas um quarto da viga, como mostra a Figura 106. As condições de contorno são mostradas na Figura 107.



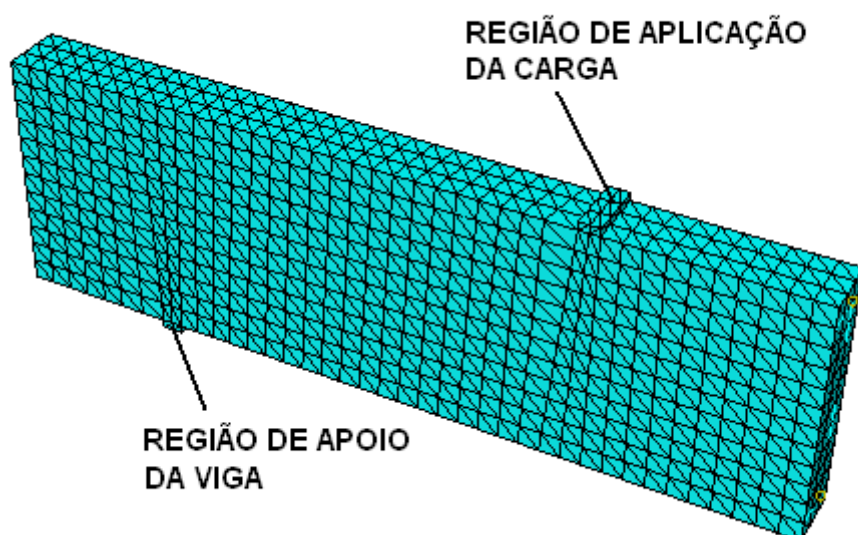
**Figura 106 – Simplificação do problema devido à simetria.**  
 FONTE: Obaidt *et al.* (2010).



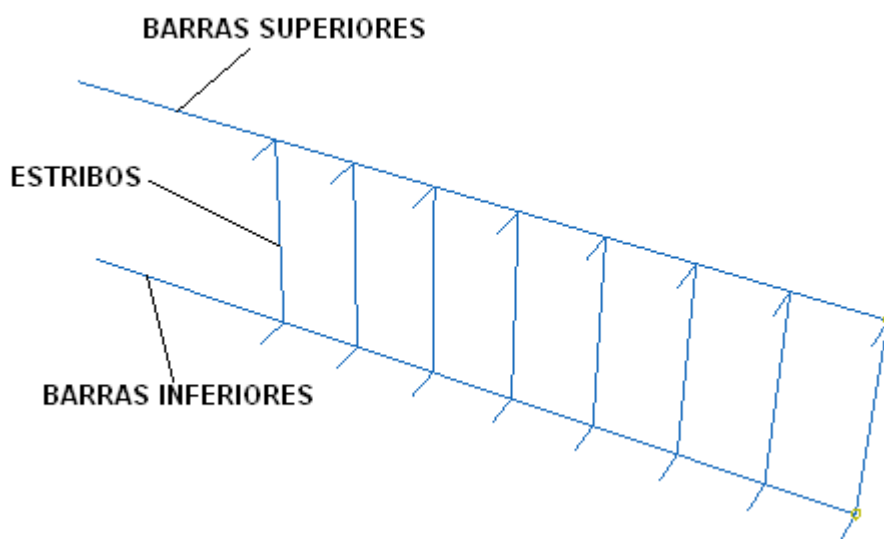
**Figura 107 – Condições de contorno utilizadas para as simulações de vigas com concreto OB30.**

FONTE: Obaidt *et al.* (2010).

Para a condição de perfeita aderência entre a armadura e o concreto, foi utilizada a técnica de “*Embedded Region*” disponível no ABAQUS®, ou seja, com esta técnica são criadas condições de vinculações entre as duas malhas de elementos finitos no qual há perfeita concordância de deslocamentos entre os elementos de concreto e aço. Para o concreto foram utilizados elementos lineares tetraédricos de quatro nós e para a armadura elementos lineares de barra. A Figura 108 mostra a malha de elementos finitos utilizada e a Figura 109 a armadura da viga.



**Figura 108 – Malha de elementos finitos utilizada para a viga de referência.**



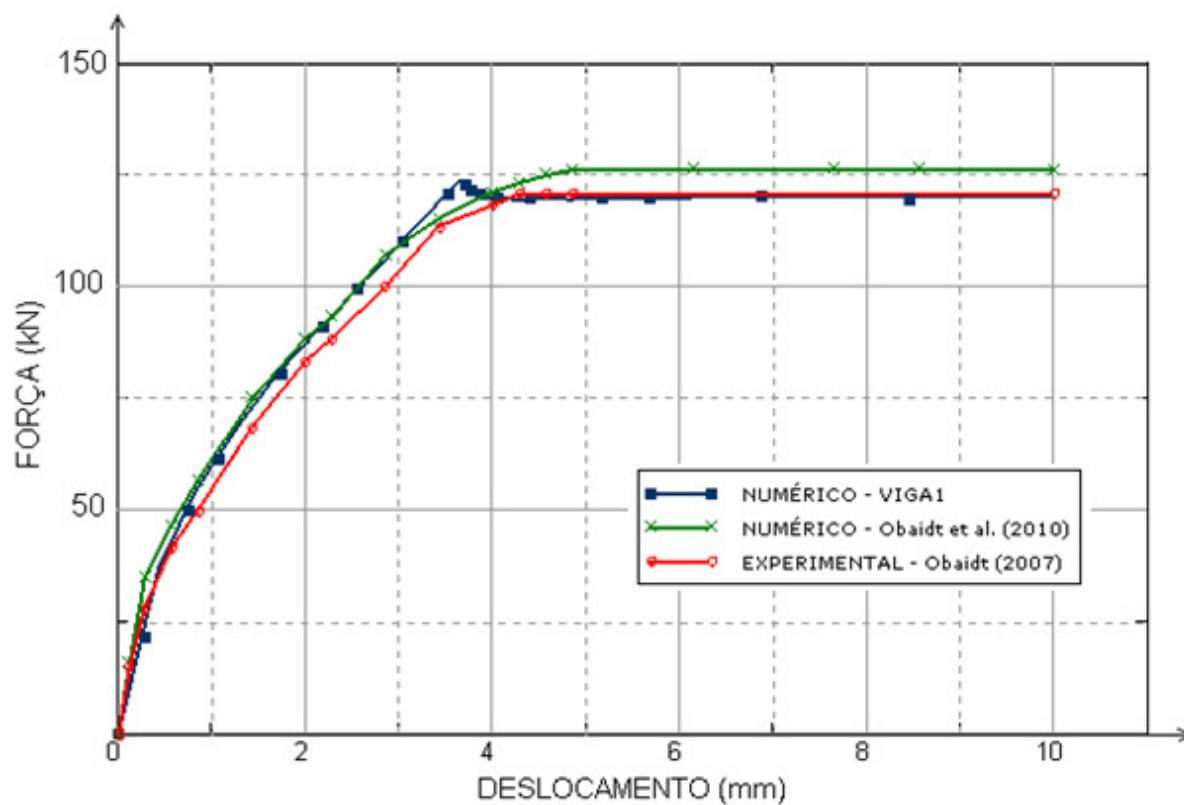
**Figura 109 – Armadura imersa no interior da viga de referência.**

Nas regiões de apoio e aplicação de cargas, conforme a Figura 108, foram criados elementos sólidos que proporcionam a distribuição da força concentrada, evitando assim as distorções de resultados devido às regiões de alta concentração de tensão.

Para o processamento do modelo no ABAQUS<sup>®</sup>, foi utilizado o módulo *Standard* do *software* aplicando-se um deslocamento controlado na região de aplicação de carga (Figura 108). O deslocamento total foi subdividido em vários incrementos menores para convergência da análise.

A Figura 110 apresenta a curvas carga-deslocamento obtida na análise Viga1 e os resultados numéricos de Obaidt et al. (2010) e experimentais de Obaidt (2007). As curvas têm boa concordância, indicando que os modelos constitutivos utilizados representam bem o problema analisado. Percebe-se que os modelos numéricos apresentam uma rigidez um pouco maior que o obtido experimentalmente. Isso se deve ao fato da consideração de perfeita aderência entre o aço e concreto. O valor de carga última obtida na análise Viga1 (120,5 kN) se aproximou mais da curva experimental (121 kN) do que os valores numéricos obtidos por Obaidt *et al.* (2010) (125 kN). Para melhor visualização, a Figura 111 apresenta as curvas obtidas nume-

ricamente e a Figura 112 apresenta a curva numérica obtida na análise Viga1 e experimentalmente por Obaidt (2007).



**Figura 110 – Curva carga-deslocamento para a viga de concreto armado de referência.**

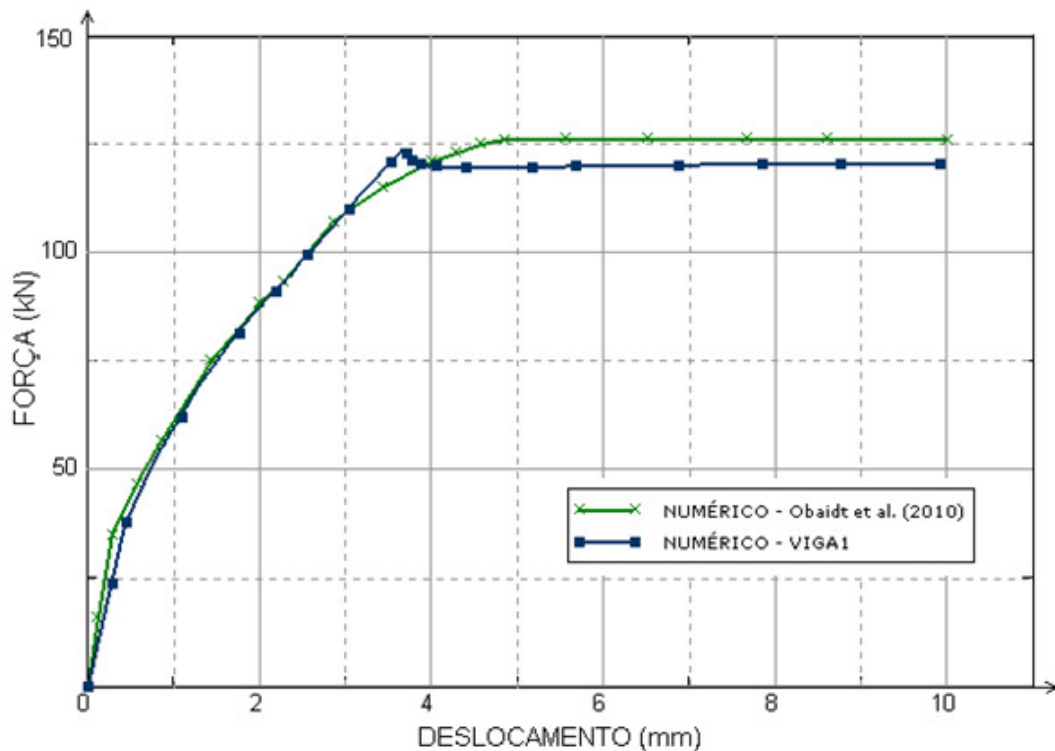


Figura 111 – Curvas carga-deslocamento numéricas para a viga de concreto armado de referência.

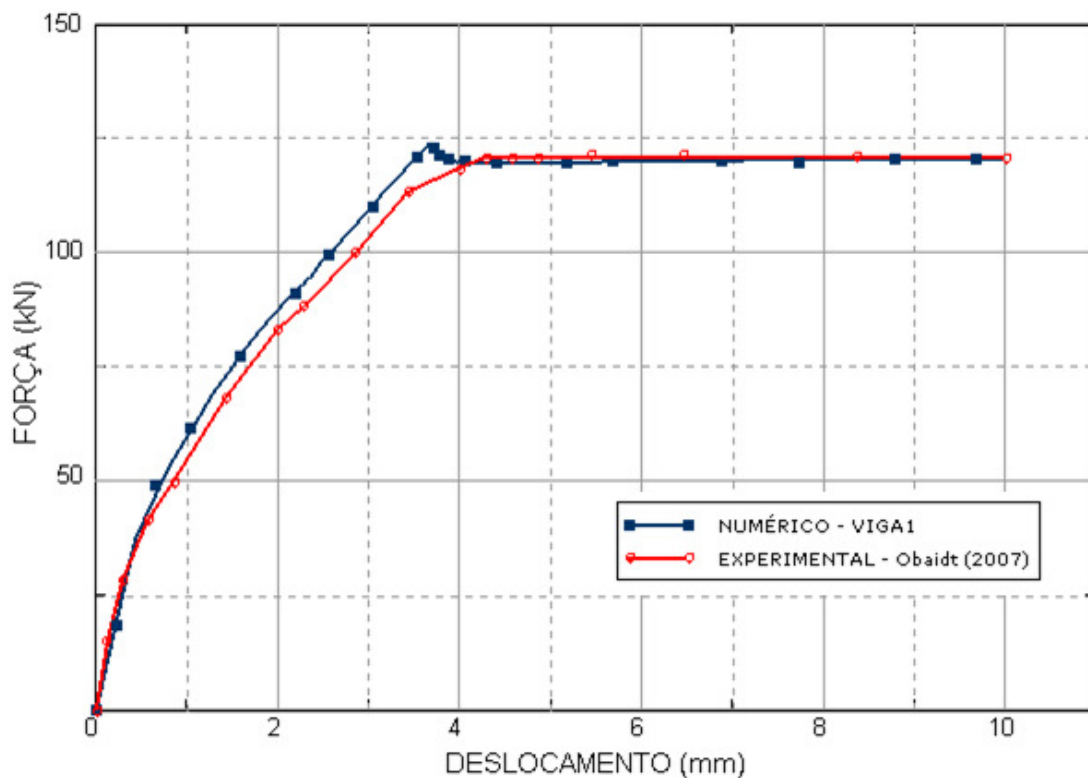


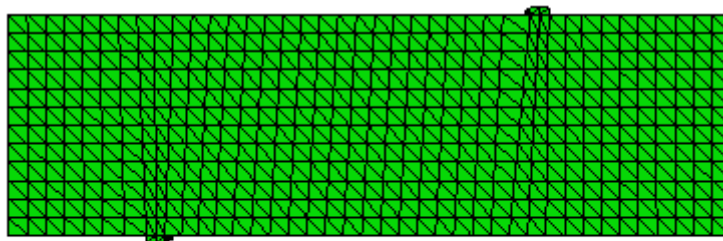
Figura 112 – Curvas carga-deslocamento obtidas numericamente (Viga1) e experimental (Obaidt (2007)) para a viga de referência.



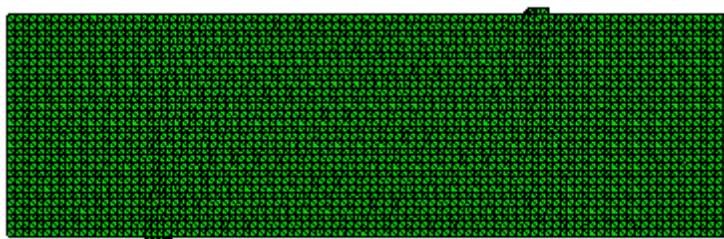
Os resultados numéricos obtidos por Obaidt *et al.* (2010) utilizaram na malha 150.813 elementos finitos. O número de graus de liberdade (DOF) chegou a 79.428. Nos resultados obtidos na simulação Viga1, o número de elementos finitos foi de 10.184, menos de 7% do número de elementos simulado por Obaidt *et al.* (2010). O número de graus de liberdade chegou a 7.695, mesmo assim, as duas simulações apresentaram curvas carga-deslocamento muito próximas, como pode ser visto na Figura 110. Na análise Viga1, foram necessários 127 incrementos de deslocamento para a o resultado final e o número de iterações foi de 276.

Por se tratar de uma análise de elementos finitos, realizou-se um refino de malha na análise Viga1 com o objetivo de verificar a influência nos resultados, denominado-se esta simulação de Viga1A. Na Figura 113 estão apresentadas as duas malhas utilizadas, sendo que na Viga1A ela é muito mais densa que na Viga1. Em termos quantitativos, a malha da Viga1A é composta de 137.874 elementos, uma diferença percentual de 1254% em relação ao número de elementos da Viga1.

As curvas carga-deslocamento obtidas nestas duas análises foram praticamente as mesmas, apenas a carga última apresenta pela Viga1A (120kN) ficou um pouco abaixo da Viga1 (120,5kN), indicando que o refino de malha utilizado já era adequado.



(a) VIGA1

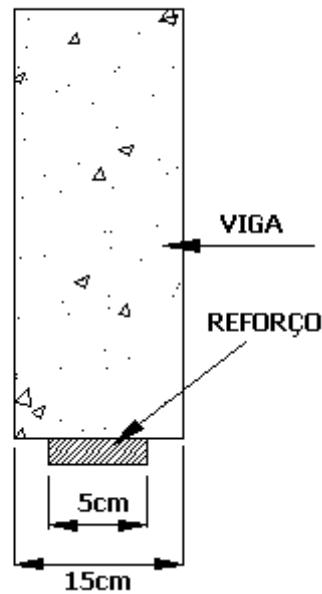


(b) VIGA1A

**Figura 113 – Malhas de elementos finitos utilizada nas simulações Viga1 (a) e Viga1A (b).**

Na sequência de análises, os reforços de CFRP foram aderidos na face inferior da viga com as fibras orientadas na sua direção axial. Nos ensaios experimentais de Obaidt (2007) o reforço de CFRP é centralizada e possui  $1,2\text{mm}$  de espessura e  $5\text{cm}$  de largura, conforme esquema da Figura 114.

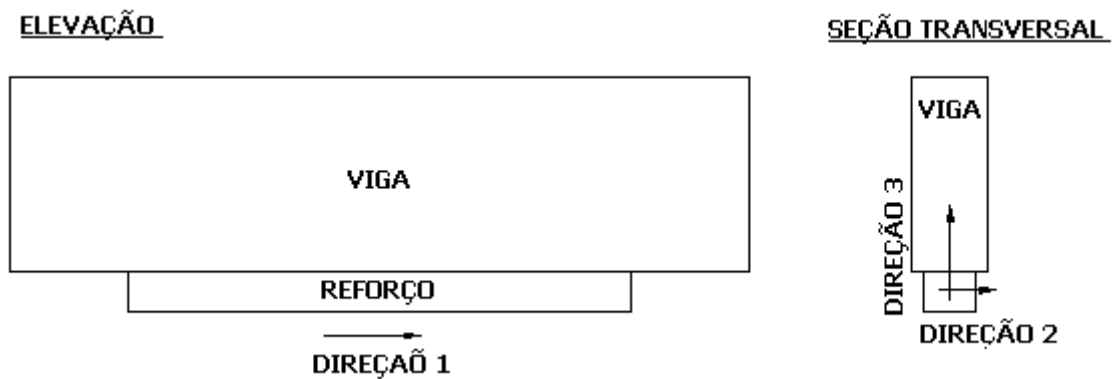
SEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA



**Figura 114 – Reforço de CFRP na viga de concreto armado.**

Dois diferentes modelos de reforço CFRP foram considerados. O primeiro corresponde a um material isotrópico e com propriedades elásticas e lineares. Já no segundo modelo, a placa de CFRP foi modelada como material elástico com propriedades ortotrópicas. O módulo elástico na direção das fibras corresponde ao parâmetro mais importante, já que a placa basicamente será solicitada nesta direção, por isso o modelo isotrópico é aceitável.

Os módulos de elasticidade utilizados por Obaidt (2007) e Obaidt *et al.* (2010) foram especificados pelo fabricante do compósito. Para o modelo isotrópico o valor do módulo de elasticidade foi de  $E = 165\text{GPa}$  e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Já para o modelo ortotrópico, na direção das fibras o compósito possui módulo de elasticidade de  $E_{11} = 165\text{GPa}$  e nas outras duas direções perpendiculares o valor é o mesmo ( $E_{22} = E_{33} = 9,65\text{GPa}$ ), os coeficientes de Poisson são  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,3$  e  $\nu_{23} = 0,45$ . Os módulos de elasticidade transversais valem  $G_{12} = G_{13} = 5,2\text{GPa}$  e  $G_{23} = 3,4\text{GPa}$ . A orientação utilizada para o material ortotrópico pode ser vista esquematicamente na Figura 115.



**Figura 115 – Orientação do material ortotrópico utilizado para o CFRP.**

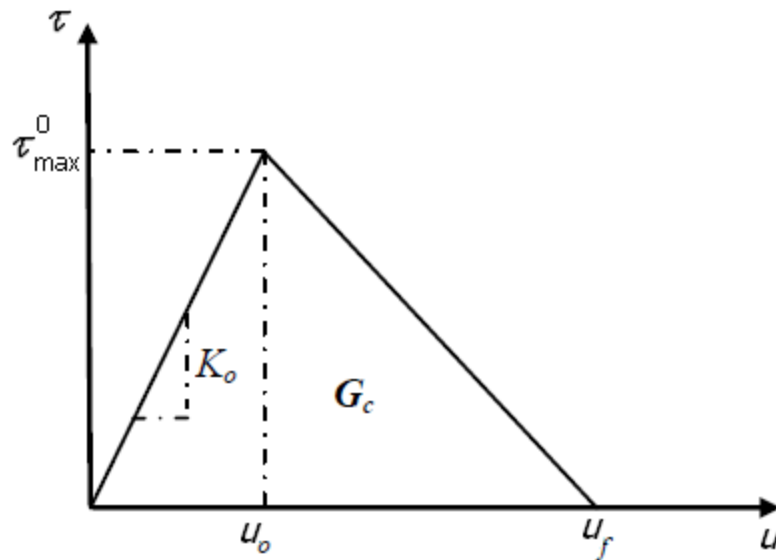
Nos testes experimentais realizados por Obaidt (2007), as inúmeras vigas ensaiadas não apresentaram ruptura das fibras ou matriz do reforço de CFRP e sim delaminação na região de ligação com a peça de concreto. Com isso, nas modelagens realizadas Obaidt *et al.* (2010) não foram especificados critérios de falha para o compósito, apenas para a interface. De forma similar à Obaidt *et al.* (2010), foram utilizados dois modelos para caracterizar a região de interface concreto/CFRP. O primeiro considera a aderência perfeita entre os dois materiais e o segundo atribui propriedades coesivas ao material de ligação através de um MZC, com os mesmos conceitos apresentados no Capítulo 5.

A Figura 116 apresenta a lei constitutiva bilinear entre tensão-deslocamento utilizada para a interface concreto/CFRP. A rigidez de penalidade ( $K_0$ ) é definida em Obaidt *et al.* (2010) por:

$$K_0 = \frac{1}{\frac{t_i}{G_i} + \frac{t_c}{G_c}} \quad (111)$$

onde  $t_i$  é a espessura da resina adesiva,  $t_c$  é a espessura efetiva de concreto que será afetada pela deformação da camada adesiva, e  $G_i$  e  $G_{concreto}$  são os módulos de elasticidade transversais da resina e do concreto, respectivamente. Foram utilizados em Obaidt *et al.* (2010) os valores de  $t_i = 1mm$ ,  $t_c = 5mm$ ,  $G_i = 0,665GPa$  e

$G_{concreto} = 10,8GPa$ . A energia de fratura da interface ( $G_c$ ), correspondendo à área abaixo da curva da Figura 116 e representa a energia necessária para abertura de trinca, foi considerada por Obaidt *et al.* (2010) com o valor de  $G_c = 900J / m^2$ .



**Figura 116 – Modelo constitutivo para a interface coesiva entre concreto/CFRP.**

O critério utilizado para caracterizar o início de dano foi o critério quadrático apresentado na equação (84), repetida abaixo, onde o dano se inicia quando a equação atinge o valor de 1.

$$\left(\frac{\langle \tau_1 \rangle}{\tau_1^0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_2^0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_3}{\tau_3^0}\right)^2 = 1 \quad (84) \text{ Repetida}$$

Na equação (84),  $\tau_1^0$ ,  $\tau_2^0$  e  $\tau_3^0$  correspondem às tensões coesivas normais e de cisalhamento. Os valores utilizados por Obaidt *et al.* (2010) são  $\tau_1^0 = 1,81MPa$  e  $\tau_2^0 = \tau_3^0 = \tau_{max} = 1,5MPa$ .

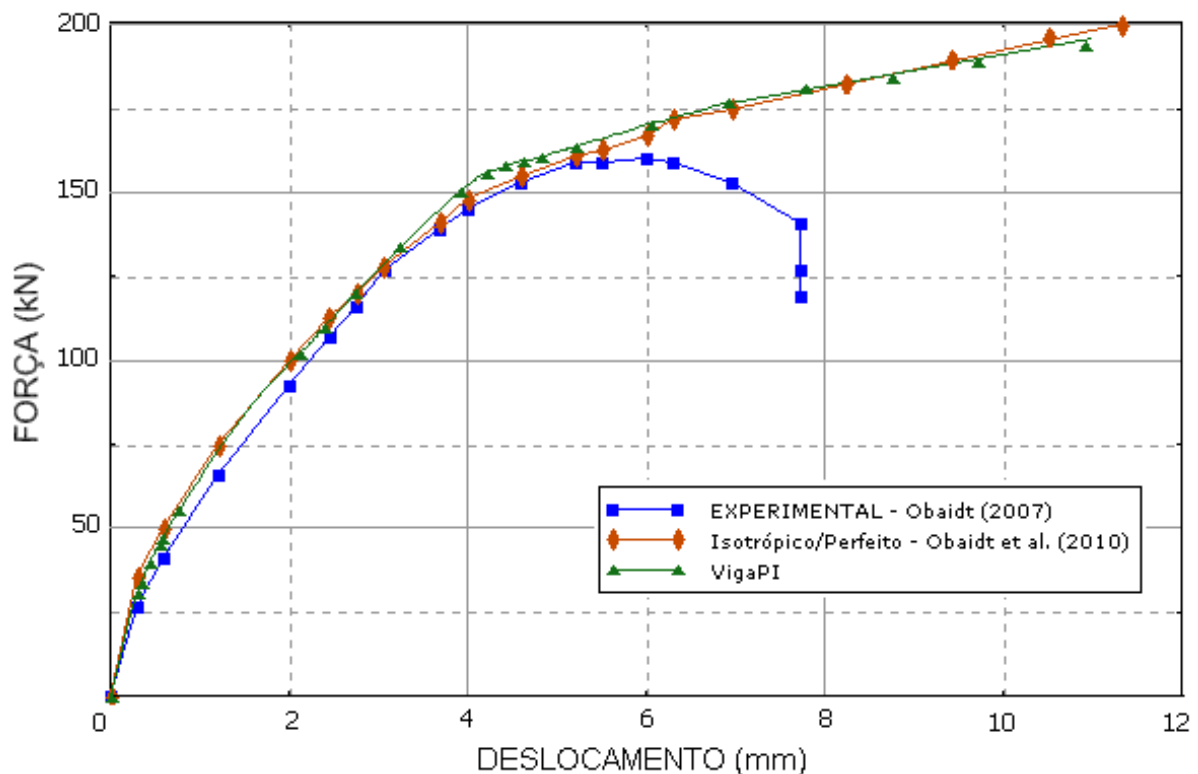
Para a evolução do dano, o critério utilizado foi do de Benzeggagh-Kenane, ou critério “B-K”, conforme equação (87) e (88), repetidas a seguir. As energias de fra-

tura  $G_{1C} = 90 J / m^2$ ,  $G_{2C} = G_{3C} = 900 J / m^2$  e o parâmetro experimental  $\eta = 1,45$  são dados fornecidos por Obaidt *et al.* (2010).

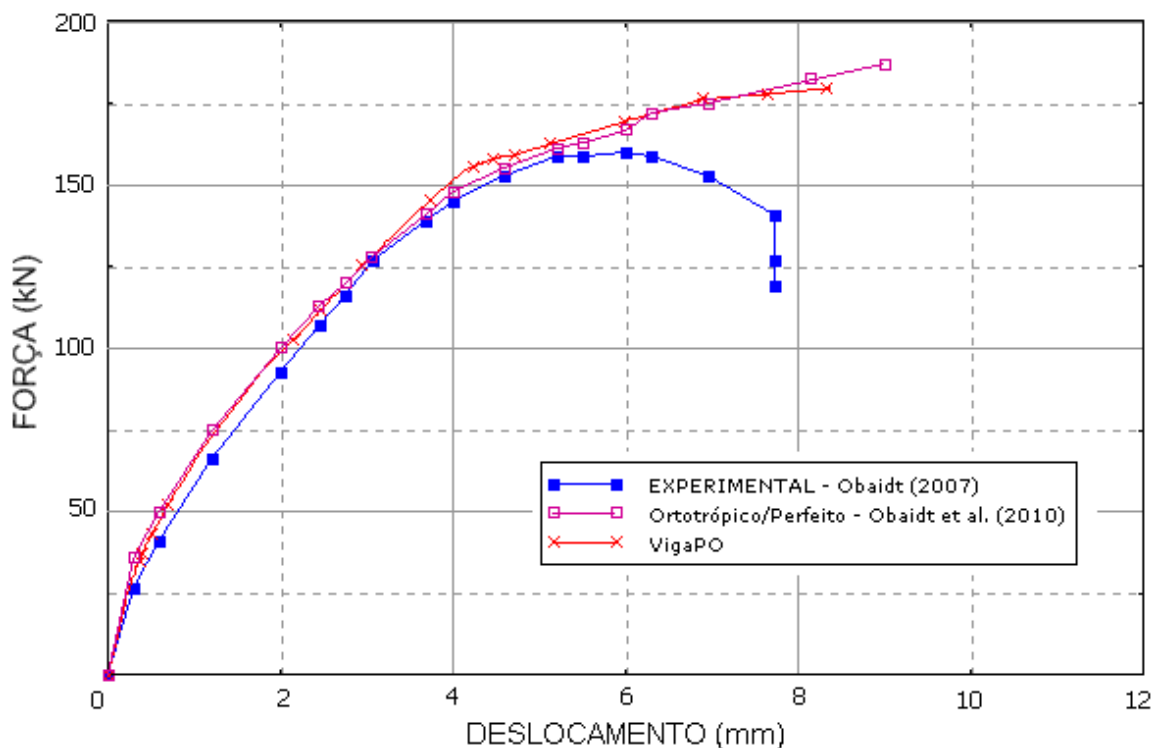
$$G_C = G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left( \frac{G_{\text{cisalhamento}}}{G_T} \right)^\eta, \text{ com } G_T = G_1 + G_{\text{cisalhamento}} \quad (87) \text{ Repetida}$$

$$G_{\text{cisalhamento}} = G_2 + G_3 \quad (88) \text{ Repetida}$$

A Figura 117 apresenta as curvas de carga-deslocamento do ponto central da viga para a análise experimental de Obaidt (2007) e para as análises numéricas da viga reforçada com CFRP, esse com propriedades isotrópicas, considerando-se a aderência perfeita entre estes dois materiais. Esta análise foi denominada de VigaPI. Já a Figura 118 apresenta as curvas para a modelagem com a consideração das propriedades ortotrópicas do CFRP, denominando-se esta análise de VigaPO.



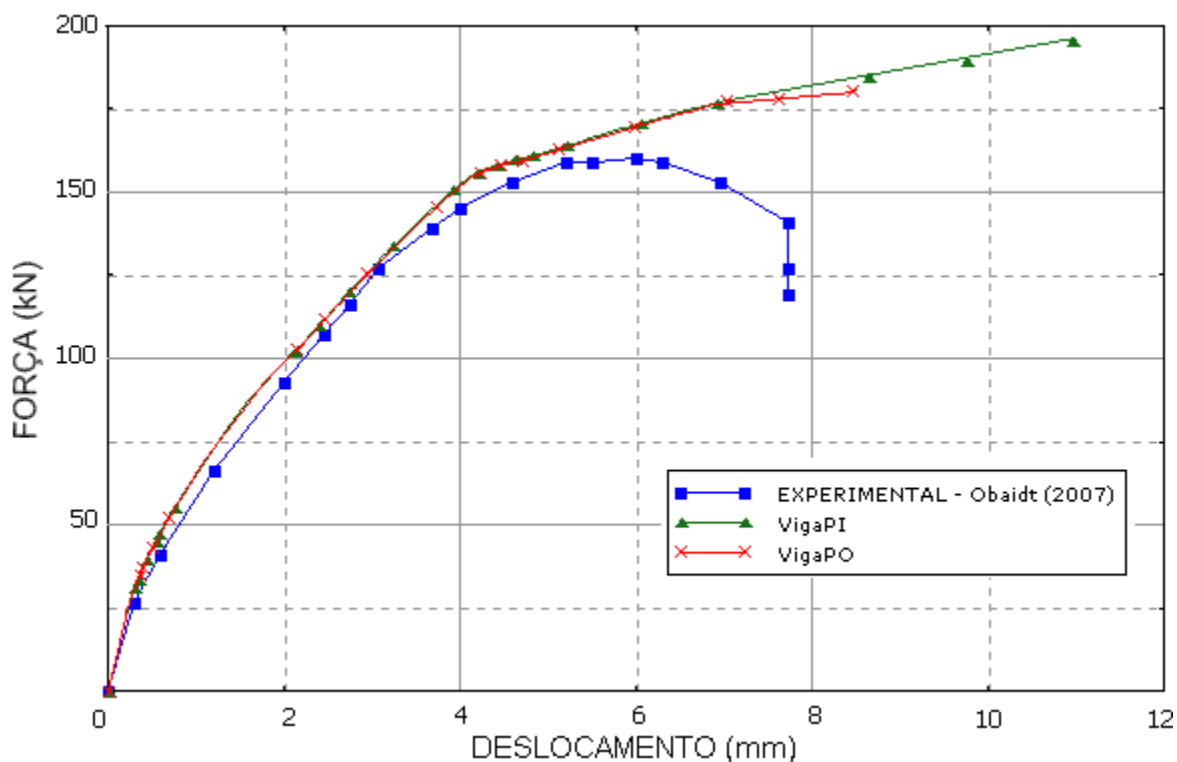
**Figura 117 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com aderência perfeita.**



**Figura 118 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço ortotrópico para a modelagem numérica com aderência perfeita.**

As simulações VigaPI e VigaPO apresentaram muita similaridade com a análise numérica de Obaidt et al. (2010). Até certo ponto do carregamento, os resultados numéricos apresentaram boa concordância com o experimental. Entretanto, pelo fato da consideração da união perfeita do reforço com o concreto, os modelos computacionais não são capazes de prever o descolamento da região de interface observado no ensaio experimental. Com isso, foi possível aumentar a carga na viga até que outro modo de ruptura ocorresse.

Com relação ao modelo de material para o CFRP, os resultados obtidos com a consideração de isotropia foram muito similares à condição de ortotropia. Entretanto, a carga última alcançada na viga com reforço ortotrópico foi menor que no modelo isotrópico, como pode ser visto na Figura 119. Isso se deve ao fato deste último ter uma maior rigidez na direção transversal ao eixo da viga, criando assim uma condição de maior confinamento.



**Figura 119 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço para a modelagem numérica com aderência perfeita.**

Apesar do modelo de reforço com aderência perfeita com o concreto representar bem o comportamento do sistema em carregamentos baixos, em cargas mais elevadas os resultados obtidos não são reais, como pode ser visto anteriormente. A consideração de uma região coesiva para representar o adesivo químico de união deve ser capaz de contornar estas dificuldades.

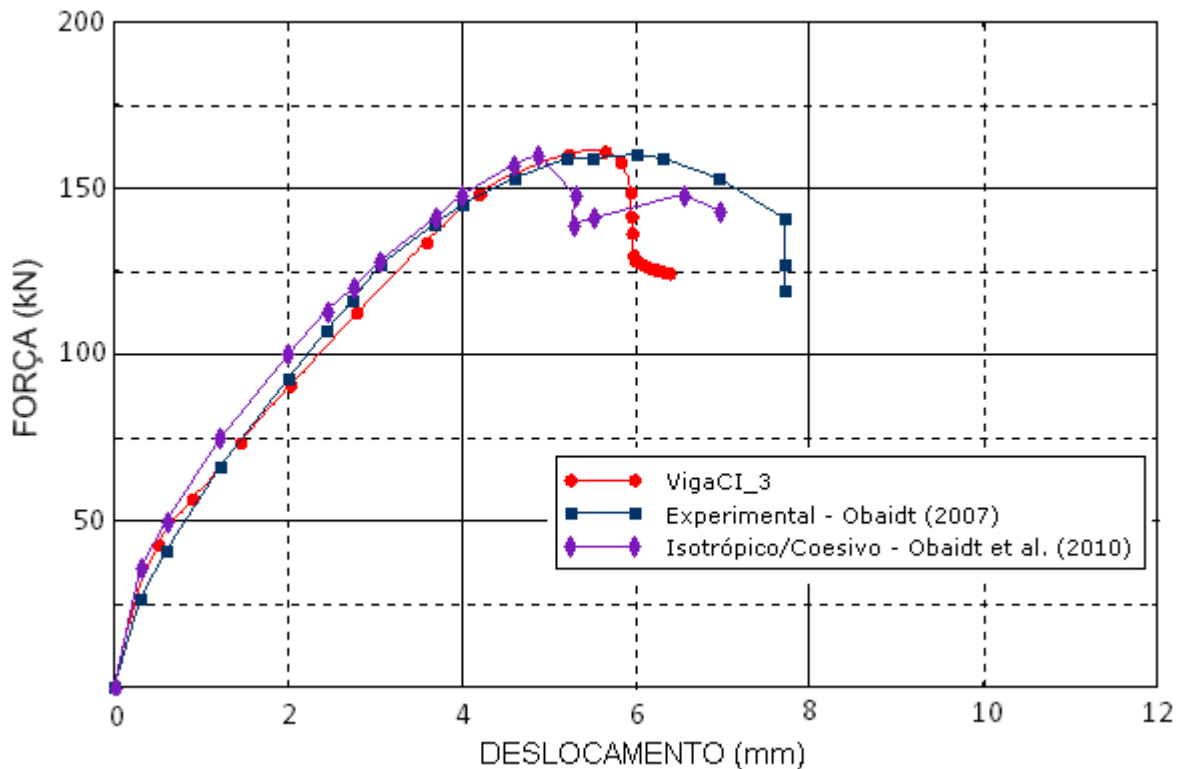
A Figura 120 apresenta os resultados obtidos do modelo numérico que considera a região coesiva entre CFRP/concreto, denominando-se este modelo de VigaCI\_3. Esta denominação para a análise se deve ao fato de se levar em conta a coesão e também pela consideração de propriedades isotrópicas para o CFRP. Também são apresentados, na Figura 120, os resultados do modelo numérico de Obaidt *et al.* (2010), com mesmas propriedades do modelo VigaCI\_3, e também os resultados experimentais de Obaidt (2007).

Percebe-se, pelas curvas carga-deslocamento da Figura 120, que os resultados apresentam grande similaridade. A carga máxima obtida na análise VigaCI\_3 foi de  $161,5\text{kN}$ , uma diferença percentual de  $0,63\%$  em relação a carga máxima do



ensaio experimental ( $160\text{kN}$ ). Ambas as deformação obtidas nas simulações numéricas se mostraram menos dúcteis que o ensaio experimental, expressa pelo menor deslocamento até a ruptura.

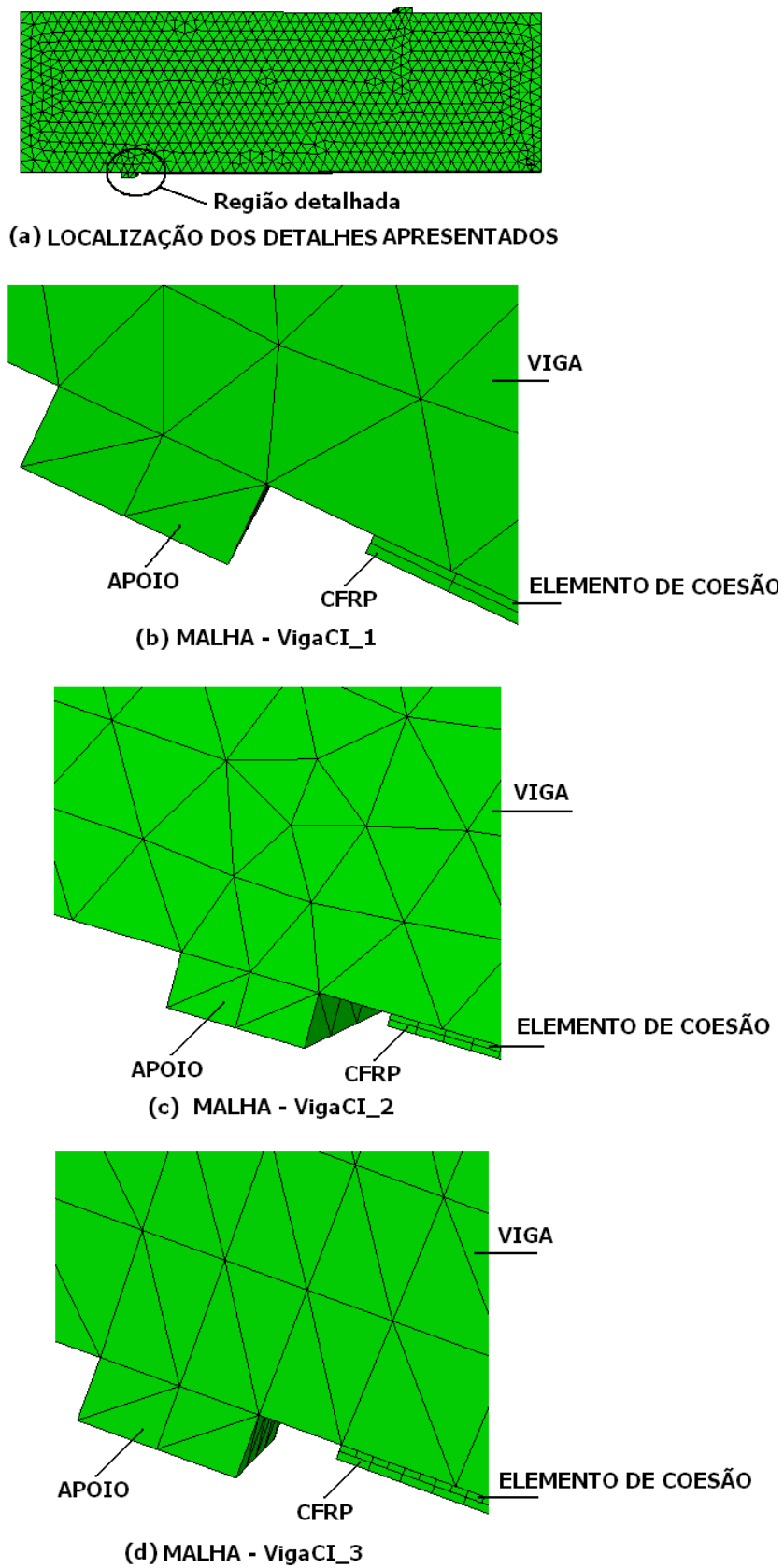
A análise numérica de Obaidt *et al.* (2010) apresentou carga máxima muito próxima do ensaio experimental (diferença de menos de  $1,0\%$ ), entretanto, a forma da curva da na sua porção final acabou revelando, provavelmente, dificuldades numéricas de convergência na simulação. Isso pelo fato da presença de variações abruptas de carga com diminuição do deslocamento da viga e posterior retomada do aumento de carga, um comportamento nada comum em vigas.



**Figura 120 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com elementos de coesão.**

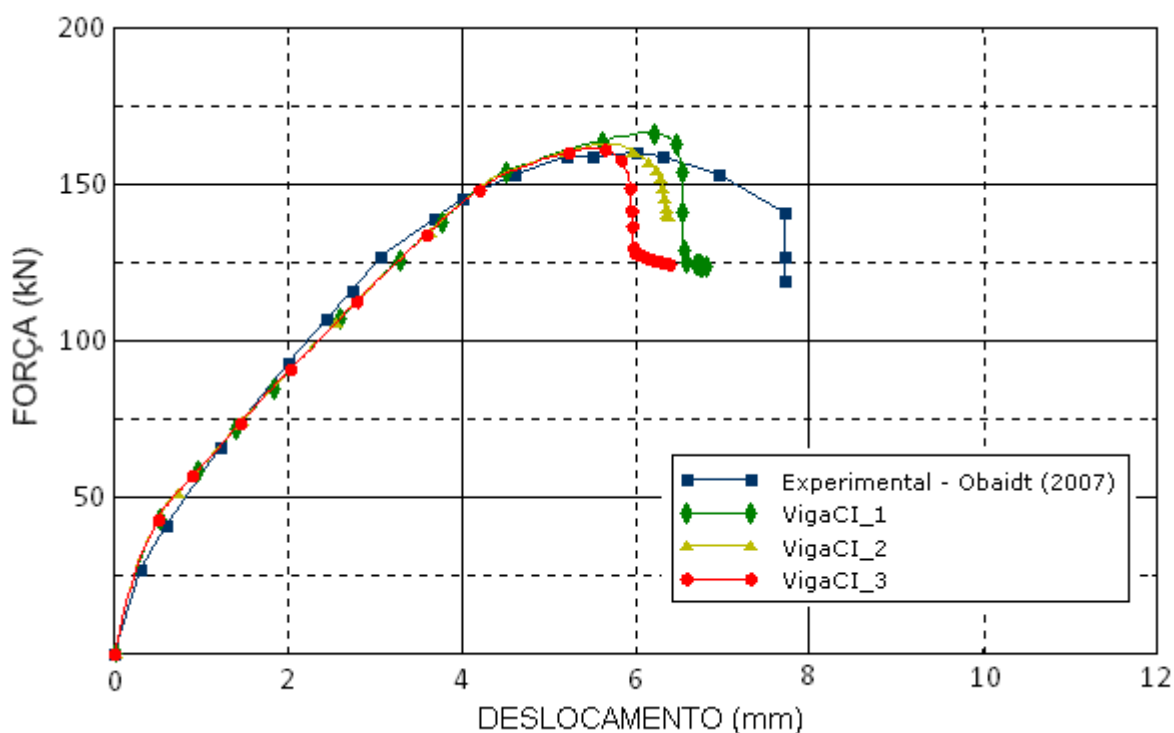
Na análise VigaCI\_3, além de prever uma carga quase idêntica, o formato da curva obtido se mostra condizente com a curva experimental. A análise é denominada VigaCI\_3 também pelo fato de terem sido realizadas simulações prévias, denominadas VigaCI\_1 e VigaCI\_2. Através destas simulações, notou-se que o resultado

obtido é influenciado pela malha do elemento coesivo. Na simulação VigaCI\_1, o elemento coesivo era representado por uma malha hexaedral de dimensões aproximadas de  $1,0mm$ , obtendo-se uma curva carga-deslocamento que previa uma carga última um pouco maior que o ensaio experimental e que a modelagem numérica de Obaidt *et al.* (2010). Com isso, refinaram-se as dimensões da malha de elementos coesivos em duas direções (a altura permaneceu a mesma) para que ela ficasse com a metade do tamanho (aproximadamente  $0,5 \times 0,5 \times 1,0mm$ ), denominando-se esta análise de VigaCI\_2. A curva, em termos de carga-deslocamento, apresentou uma sensível melhora de resultados, indicando que o tamanho da malha de elementos coesivos influencia nos resultados. O próximo refino de malha diminui o tamanho do elemento coesivo pela metade, também em duas direções (a altura permaneceu a mesma), obtendo-se dimensões de  $0,25 \times 0,25 \times 1,0mm$ , resultando na análise VigaCI\_3, já apresentada. A Figura 121 apresenta os detalhes das malhas utilizadas para o elemento coesivo.



**Figura 121 – Refinos sucessivos de malha para a simulação da viga com reforço de CFRP.**

As curvas carga-deslocamento para as análises de convergência de malha da mesma viga reforçada, citada anteriormente, estão apresentadas na Figura 122. Percebe-se a aproximação da curva numérica para a curva experimental com o refino de malha, indicando a sua influência nos resultados. Foram realizados novos refinamentos de malha, tanto do elemento coesivo, do reforço de CFRP como da viga de concreto, entretanto, os resultados não apresentaram diferenças significativas da análise VigaCI\_3.



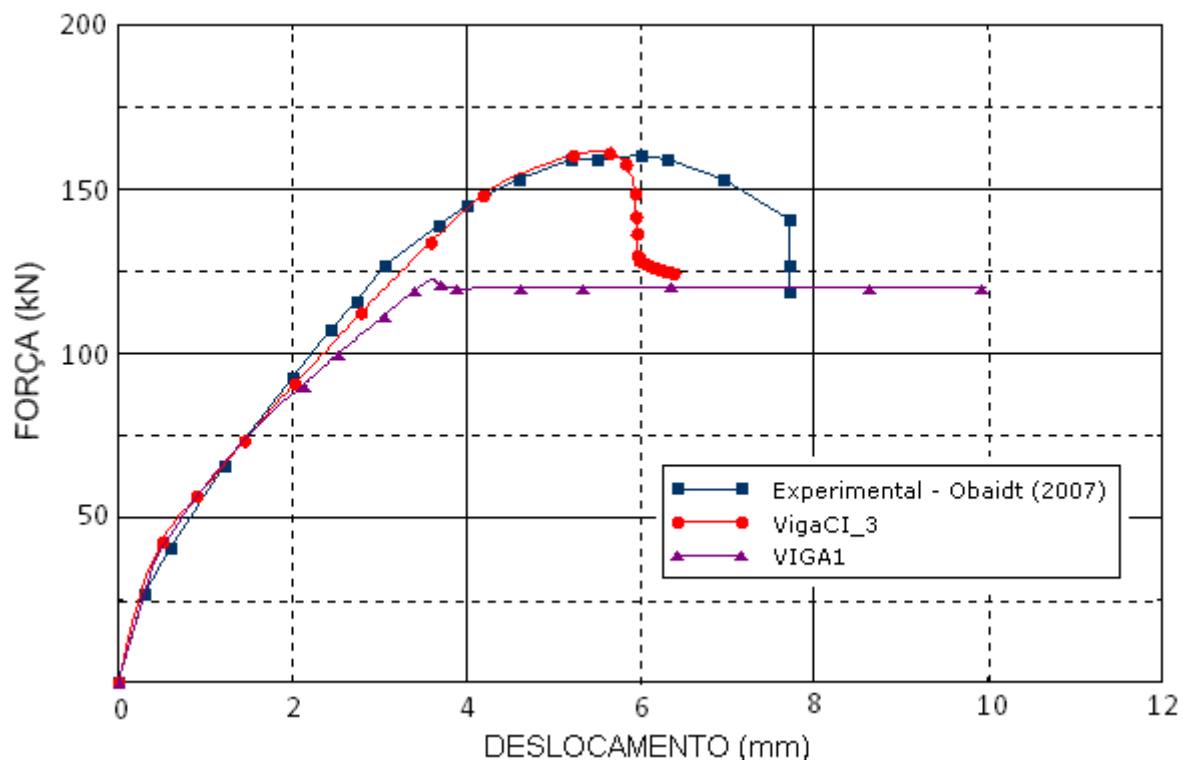
**Figura 122 – Curvas carga-deslocamento da viga com reforço isotrópico para a modelagem numérica com elementos de coesão com sucessivos refinamentos de malha.**

Um dos objetivos, quando se adiciona um reforço externo a um elemento estrutural, é avaliar o seu ganho de capacidade de carga resistente. A Figura 123 apresenta este estudo através da comparação das curvas carga-deslocamento já apresentadas anteriormente. Esta figura apresenta os resultados da viga reforçada obtidos do ensaio experimental e também da modelagem numérica VigaCI\_3, além da análise Viga1, que simulou a viga de concreto de referência (sem reforço). Percebe-se claramente o aumento de carga resistente do sistema, chegando a um aumento

de 34% do modelo VigaCI\_3 (161,5kN) em relação a Viga1 (120,5kN). Quando comparado este último com os resultados experimentais (160kN), a diferença é de cerca de 33% .

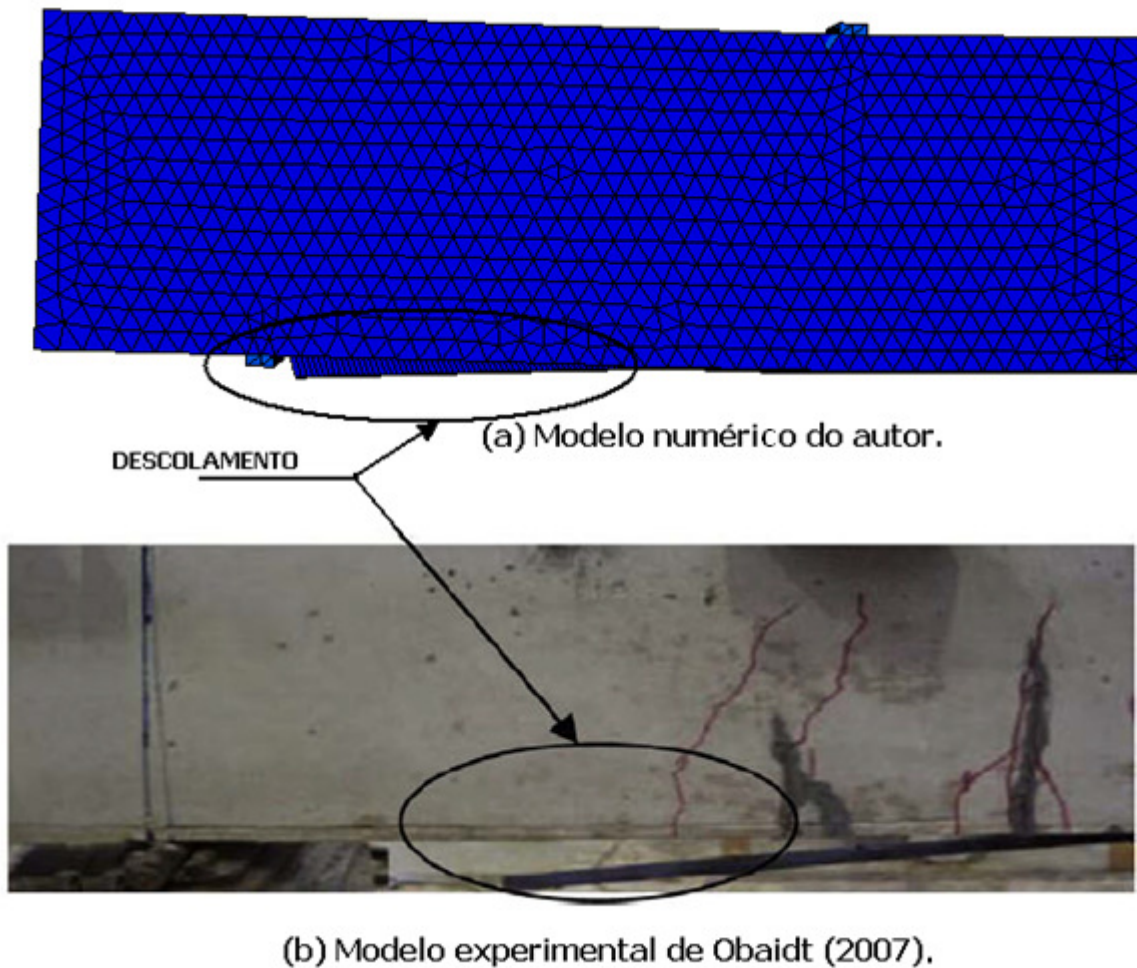
Foram realizadas também análise considerando-se as propriedades ortotrópicas do reforço de CFRP, não apresentando diferenças significativas em relação às simulações com a condição de isotropia.

Apesar do aumento da capacidade resistente das peças com a adição de reforços, observa-se uma mudança significativa do comportamento do sistema. Ocorre uma diminuição da capacidade de deformação da viga antes da sua ruptura, ou seja, um modo de ruptura mais frágil é observado. Após a falha ou delaminação do CFRP, níveis elevados de carga são introduzidos na viga de concreto armado já fissurada. Essa, por não suportar tal solicitação, acaba determinando o colapso do sistema resistente.



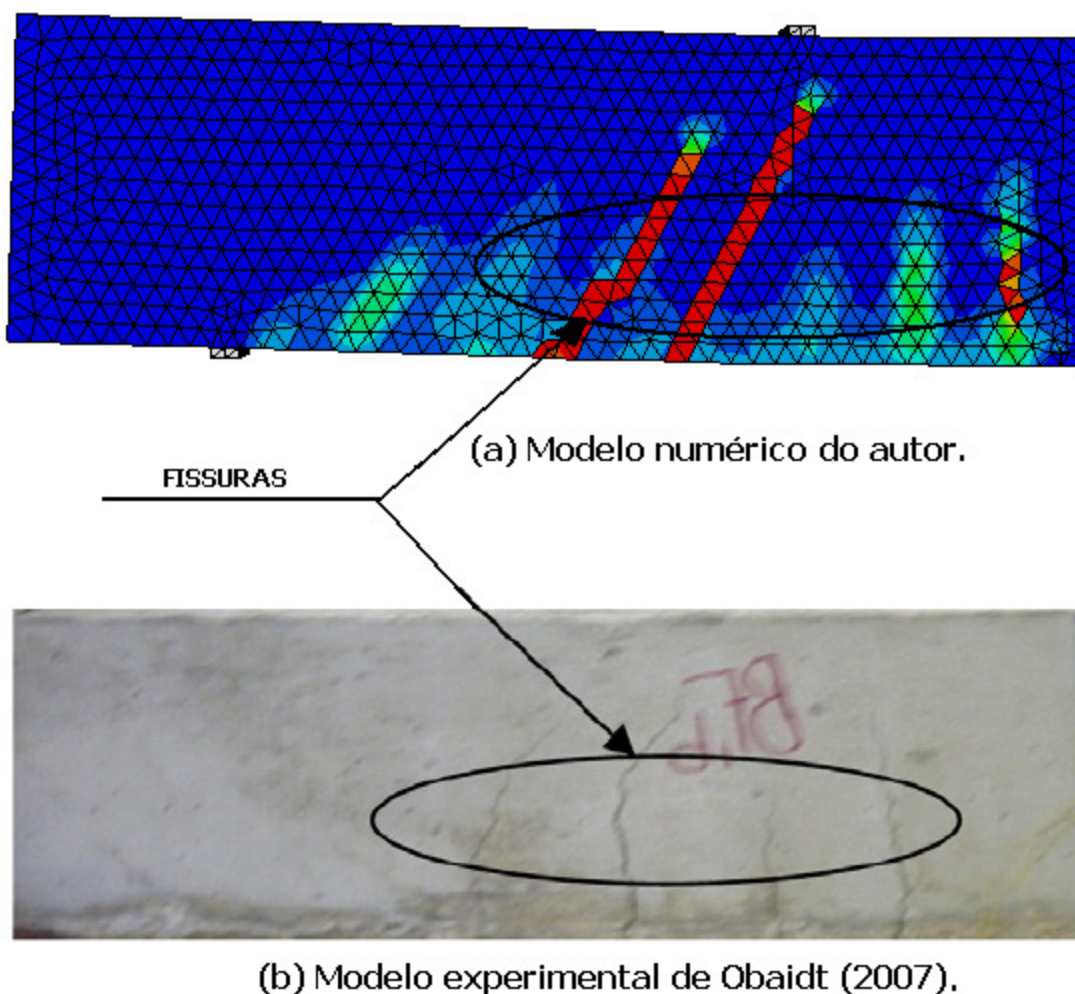
**Figura 123 – Avaliação do ganho de capacidade resistente da viga com reforço em relação à viga de concreto armado de referência.**

Além das curvas carga-deslocamento, outras informações disponibilizadas nos modelos numéricos são importantes. Uma das questões fundamentais é com relação ao comportamento da interface concreto/reforço. Observa-se, assim como nos ensaios experimentais, a perda da capacidade resistente do adesivo químico e consequente descolamento do CFRP. A Figura 124 apresenta a comparação do descolamento da interface obtido no presente trabalho com o ensaio experimental de Obaidt (2007). Percebe-se grande similaridade nos dois modelos, indicando que a simulação numérica utilizada representa bem as propriedades reais do adesivo químico e do sistema estrutural como um todo.



**Figura 124 – Comparação dos modos de falha na interface entre viga/reforço.**

Apesar do modelo constitutivo utilizado para o concreto (CDP) não apresentar o conceito de fissuras, pode-se ter uma visão geral deste processo através das variáveis de dano. A Figura 125 apresenta a comparação do padrão de fissuração da viga reforçada obtido no ensaio experimental com o modelo numérico desenvolvido neste trabalho. Há similaridade entre os dois modelos, destacando-se na simulação computacional as fissuras mais representativas observadas no ensaio experimental.



**Figura 125 – Comparação do padrão de fissuração da viga de concreto.**

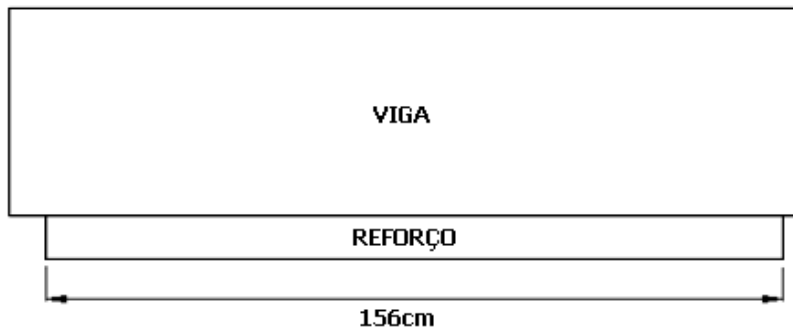
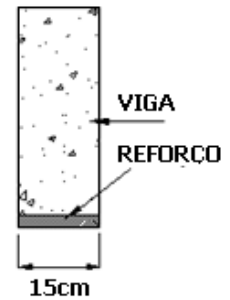
Com a comparação dos resultados numéricos obtidos neste trabalho com os disponíveis na literatura (numéricos e experimentais) indicando coerência, pode-se prosseguir com novas análises. Busca-se agora avaliar a influência das propriedades geométricas do reforço de CFRP na resistência da viga.

Foram estudados dois novos modelos. O primeiro corresponde à alteração da largura do reforço de CFRP. Na análise VigaCI\_3, o reforço apresentava largura de 5 cm com comprimento de 156 cm. Nesta nova análise, o CFRP foi estendido ao longo de toda largura da viga, ou seja, 15 cm, mantendo-se o seu comprimento original. Esta análise será denominada de VigaCI\_LARGURA e as propriedades geométricas do reforço podem ser vistas esquematicamente na Figura 126 (a).

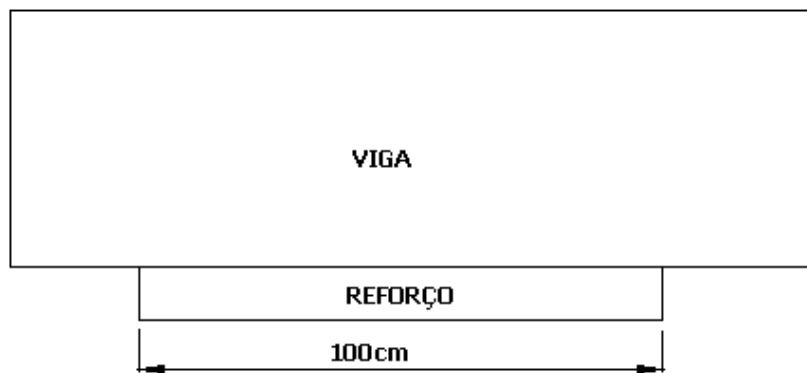
O segundo modelo buscou avaliar a influência do comprimento do compósito no comportamento do sistema. Assim, a largura adotada para o CFRP correspondem aos 5 cm originais do modelo VigaCI\_3 e o comprimento, que antes era de 156 cm, agora será considerado com o valor de 100 cm. Esta situação pode ser visualizada esquematicamente na Figura 126 (b), denominando-se esta análise de VigaCI\_COMPRIMENTO.

As duas novas análises utilizaram também elementos coesivos na interface com o reforço, sendo considerado o reforço como material isotrópico. As demais propriedades foram mantidas as mesmas dos modelos apresentados anteriormente (com exceção das dimensões do reforço).



ELEVAÇÃOSEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA

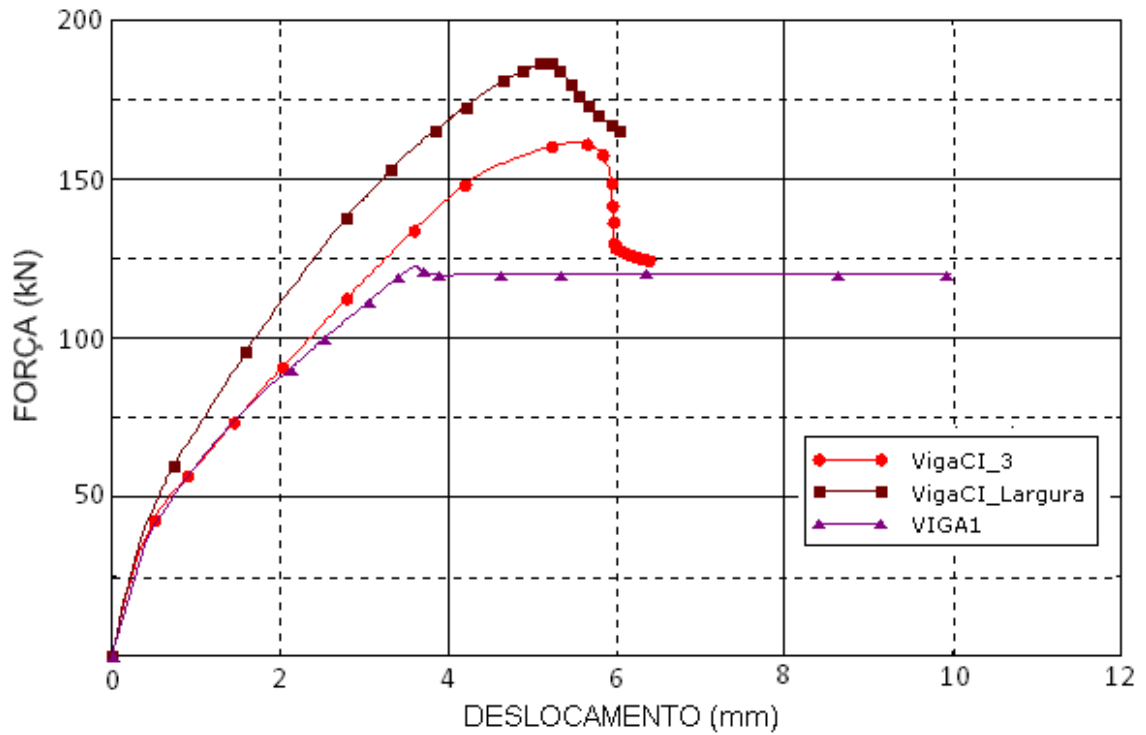
(a) Reforço com largura alterada (modelo VigaCI\_LARGURA).

ELEVAÇÃOSEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA

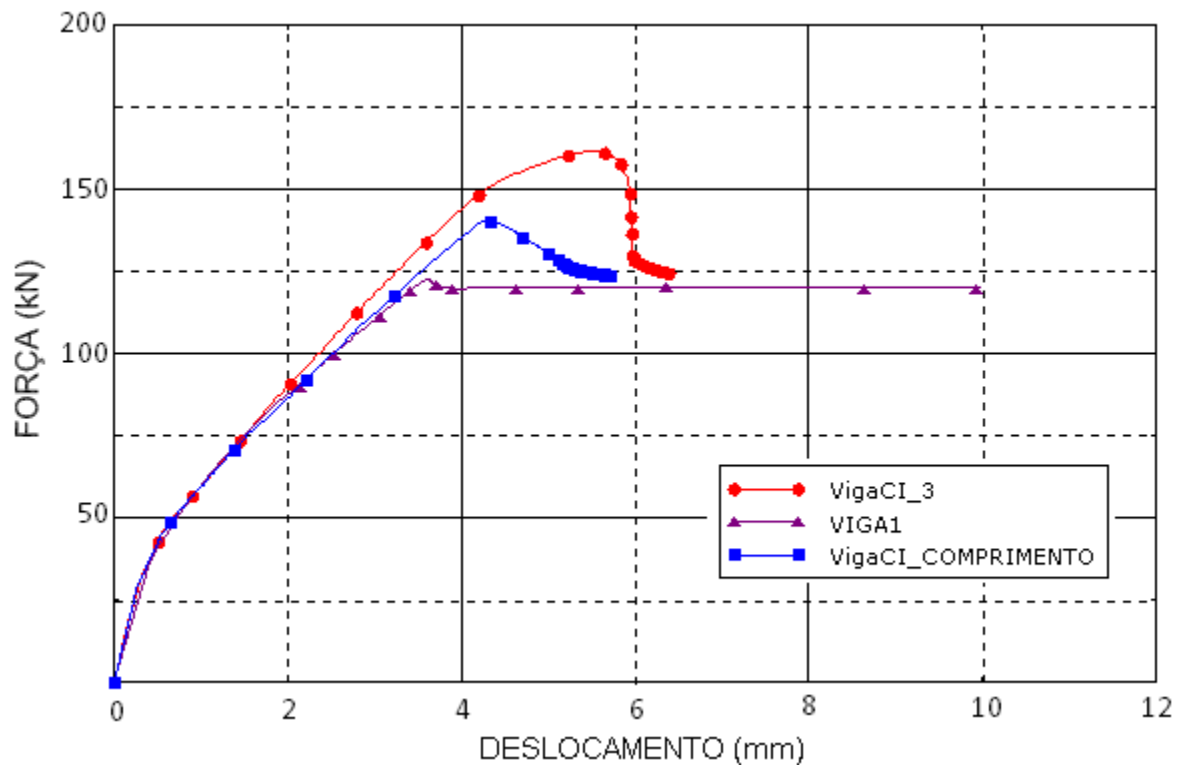
(b) Reforço com comprimento alterado (modelo VigaCI\_COMPRIMENTO).

**Figura 126 – Esquema com as mudanças das propriedades geométricas do reforço de CFRP.**

A Figura 127 e a Figura 128 apresentam os resultados do modelo VigaCI\_LARGURA e VigaCI\_COMPRIMENTO, respectivamente. Para efeitos comparativos, nestas figuras são apresentadas também as curvas obtidas nas análises da viga de concreto de referência (Viga1) e também do modelo com adição de reforço, com as propriedades geométricas inicialmente adotadas (VigaCI\_3). Percebe-se que, com o aumento da largura do reforço, a capacidade de carga é elevada a um patamar superior, como era esperado. Já com a diminuição do seu comprimento, o efeito é contrário, ou seja, a carga última resistente é menor, porém, ainda é maior que no caso da viga sem reforço.



**Figura 127 – Comparação dos resultados obtidos no modelo com alteração de largura do reforço de CFRP.**



**Figura 128 – Comparação dos resultados obtidos no modelo com alteração do comprimento do reforço de CFRP.**

Os resultados apresentados nos diversos modelos simulados, sejam em termos das curvas carga-deslocamento ou através da comparação do modo de delaminação/fissuração, mostraram-se coerentes com os disponíveis na literatura (numéricos e experimentais). Isso é um forte indicativo que os modelos constitutivos e procedimentos de modelagem utilizados representam o comportamento real do sistema. Um resumo das simulações apresentadas nesta seção é disponibilizado na Tabela 16.

Os procedimentos de modelagem de reforço externo aderidos, apresentados para vigas de concreto armado, podem ser estendidos para qualquer outro material, bastando-se para isso um modelo constitutivo que represente bem as suas características.

**Tabela 16 – Resumo dos modelos analisados.**

MODELO	Viga1	VigaPI	VigaPO	VigaCI_1	VigaCI_2	VigaCI_3	VigaCI_ _LARGURA	VigaCI_ _COMPRIMENTO
Características do modelo	Viga sem reforço	Reforço aderido perfeitamente e CFRP isotrópico	Reforço aderido perfeitamente e CFRP ortotrópico	Reforço colado e CFRP isotrópico	Reforço colado e CFRP isotrópico	Reforço colado e CFRP isotrópico	Reforço colado e CFRP isotrópico	Reforço colado e CFRP isotrópico
Propriedades geométricos do CFRP (l= comprimento; w= largura)	–	$l = 156cm$ $w = 5cm$	$l = 156cm$ $w = 5cm$	$l = 156cm$ $w = 5cm$	$l = 156cm$ $w = 5cm$	$l = 156cm$ $w = 5cm$	$l = 156cm$ $w = 15cm$	$l = 100cm$ $w = 5cm$
Elemento Coesivo	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
Malha Elementos Finitos Coesivo	–	–	–	$1 \times 1 \times 1mm$	$0,5 \times 0,5 \times 1mm$	$0,25 \times 0,25 \times 1mm$	$0,25 \times 0,25 \times 1mm$	$0,25 \times 0,25 \times 1mm$
Carga última (kN)	120,5	196	180	166	162	161	187	140
Diferença (%) em relação ao respectivo ensaio experimental	-0,41%	22,5%	12,5%	3,75%	1,25%	0,63%	–	–

## 7 CONCLUSÃO

O sistema de reforço de estruturas com CFRP ou chapas de aço aderidos externamente é uma técnica relativamente simples que permite o aumento da capacidade resistente dos componentes de uma estrutura. Cuidados especiais devem ser tomados na sua execução, com especial atenção para a preparação das superfícies que receberão o reforço, devendo-se sempre seguir as recomendações dos fabricantes para se ter um bom desempenho do sistema.

Neste trabalho, as modelagens numéricas abordaram os reforços estruturais de aço/CFRP com enfoque em um elemento específico de uma estrutura civil, as vigas de concreto armado. Para isso, foi utilizado o Método dos Elementos Finitos através do *software* comercial ABAQUS<sup>®</sup>. Por ser um problema abrangente, diversos assuntos tiveram que ser abordados, como Mecânica do Dano, modelos constitutivos, juntas adesivadas, interação concreto-armadura, Teoria da Plasticidade, entre outros.

Para calibração do modelo constitutivo utilizado para o concreto (modelo CDP), os ensaios numéricos de compressão uniaxial se mostraram de grande valia. Como a curva uniaxial de compressão para determinado concreto é um dado que deve ser previamente conhecido para realização de simulações como as apresentadas neste trabalho, compararam-se as curvas tensão-deformação obtidas numericamente com as curvas teóricas, chegando-se a resultados muito próximos, indicando que o modelo utilizado representa bem o comportamento do concreto.

Um dos pontos fundamentais em uma modelagem numérica de estruturas de concreto armado é a consideração da interface entre a armadura e o concreto. No presente trabalho, foi considerada a união perfeita entre estes dois materiais, uma idealização que não provocou distorções significativas nos resultados. Isso pode ser comprovado através dos resultados obtidos de uma viga de concreto armado, sem reforço externo, simulada numericamente pelo autor (Viga1). Os resultados obtidos em termos da curva carga-deslocamento para este modelo, comparando-se com os ensaios experimentais de Obaidt (2007) e também com o modelo numérico de Obaidt *et al.* (2010), são de grande similaridade.

A consideração correta da região de interface em um modelo numérico é determinante na qualidade dos resultados obtidos em uma simulação com componentes colados. Os resultados numéricos indicaram que a consideração da união perfeita do reforço com a viga sobreestima a capacidade de carga do elemento estrutural. O descolamento da lâmina de CFRP, evidenciado nas análises experimentais de Obaidt (2007), não é detectado com esta consideração, e conseqüentemente, é possível aumentar-se o carregamento até que outro modo de falha diferente do real ocorra. Entretanto, em carregamentos mais baixos, o comportamento dos modelos de união perfeita e de adesivo químico foi similar.

Apesar das lâminas de CFRP terem propriedades mecânicas essencialmente ortotrópicas, a consideração de um material isotrópico para o reforço teve pouca influência nos resultados finais. Com o modelo isotrópico, a viga obteve uma capacidade de carregamento ligeiramente maior do que no modelo ortotrópico. Isso muito provavelmente se deve à alta rigidez do material isotrópico na direção transversal ao eixo da viga, fato que só é real no caso dos reforços com chapas de aço.

O ganho de resistência na flexão com a adição do reforço de CFRP, tal como empregado no presente estudo, foi da ordem de 34% em relação à capacidade resistente da viga de concreto armado analisada isoladamente. Apesar da capacidade de suporte de carga da viga aumentar com os reforços, o seu modo de ruptura é diferente. Sem reforço externo, a viga apresenta, antes da ruptura, deformações maiores. No momento em que ocorre a delaminação ou ruptura do reforço, a viga perde a sua capacidade de carga e ocorre uma falha abrupta.

Apesar dos resultados numéricos estarem coerentes e próximos dos experimentais, as diferenças observadas podem ser atribuídas a vários motivos. Um deles pode estar relacionado à consideração da perfeita adesão entre o concreto e a armadura de aço, proporcionando uma resistência um pouco mais elevada que a real. Outra questão pode estar relacionada à interface concreto/reforço. Apesar dos bons resultados obtidos com o Modelo de Zona de Coesão, representar o comportamento real da cola é algo muito difícil. Por ser um modelo de elementos finitos, a malha utilizada tem influência nos resultados. Elementos com geometria não proporcional em termos dimensionais podem causar distorções nos resultados finais.

O comprimento do reforço ao longo do eixo longitudinal da viga tem influência na resistência final da peça, podendo-se perceber isso através das curvas carga-deslocamento, obtendo-se carga de ruptura maior com o aumento do tamanho do reforço. Com relação à largura, pode-se chegar à mesma conclusão.

Comparando-se o padrão de fissuração (avaliado através das variáveis de dano) obtido no ensaio numérico com o experimental, percebe-se uma grande similaridade entre os dois, indicando que o modelo pode capturar os mecanismos de fratura na viga, seja ela com ou sem reforço.

Mesmo que se consiga simular através de um modelo numérico o comportamento de uma estrutura ou parte dela, as análises numéricas deverão sempre estar calibradas e comparadas com resultados experimentais. Estes últimos são fundamentais não só para fins de validação do modelo, mas também para fornecer dados essenciais para a simulação numérica. Neste trabalho, por exemplo, podem-se citar diversos parâmetros que são obtidos através de ensaios laboratoriais, tanto do modelo constitutivo do concreto como do adesivo químico utilizado em regiões de interface, sendo que sem eles não seria possível a realização da modelagem numérica.

Com base nos resultados obtidos, a utilização do MEF, através do *software* comercial ABAQUS<sup>®</sup>, mostrou-se apropriada para problemas que envolvem simulações de concreto armado, juntas adesivadas ou outros onde a simultaneidade destas duas situações é necessária, como por exemplo, nas vigas reforçadas com CFRP/aço. Com isso, tem-se uma ferramenta bastante versátil e útil para projetos ou estudos semelhantes aos apresentados neste trabalho, como por exemplo, nas pesquisas desenvolvidas por Lee *et al.* (2008). Nesse, a capacidade resistente ao cisalhamento de vigas de ligação das torres do Edifício Burj Dubai (atualmente o mais alto do mundo) foi avaliada por modelos numéricos muito similares aos apresentados no presente trabalho, obtendo-se resultados que possibilitaram o projeto estrutural desta edificação.

## 7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O conceito de juntas adesivadas, abordado através do Modelo de Zona de Coesão, é assunto que pode resultar em diversos estudos específicos. Comparar os resultados do MZC com outros modelos de interface, como aqueles onde molas são utilizadas, pode ser muito produtivo. Qualquer problema que apresente união de componentes através de adesivo químico, sejam relacionados a componentes de máquinas ou até mesmo materiais utilizados na indústria química ou eletrônica, podem se utilizar dos conceitos apresentados no Capítulo 5.

Com relação à modelagem de vigas, estudou-se basicamente o reforço a esforços de flexão. Pode-se estender os conceitos para situações onde se necessita reforçar o elemento a outros tipos de esforços, como os de cisalhamento. A metodologia para isso é bastante similar à apresentada nos capítulos anteriores.

Os reforços de CFRP/aço podem ser aplicados em diversos componentes de uma estrutura civil, sendo que estudos similares aos apresentados com vigas podem ser desenvolvidos para pilares, lajes, consoles de elementos pré-moldados, blocos de concreto e outros. Ainda, pode-se aplicar estes estudos em estruturas civis de materiais diferentes do concreto, como as de aço e de madeira.

Por ter sido utilizado no trabalho um modelo constitutivo para o concreto onde as fissuras não são caracterizadas de forma precisa (como na Mecânica da Fratura), outros modelos clássicos disponíveis na literatura, onde essa e outras questões referentes ao concreto podem ser mais bem abordadas, são assuntos que podem ser explorados.



## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

< <http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/84/artigo286279-2.aspx>> Acesso em 28 de Janeiro de 2014.

***Abaqus Benchmarks Manual 6.10.*** Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ***Building code requirements for structural concrete (ACI 318).*** Farmington Hills, 2008.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ***Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures (ACI 440.2R).*** Farmington Hills, 2008.

Alves Filho, A. ***Elementos finitos – a base da tecnologia CAE: análise não linear.*** Editora Érica. São Paulo, 2012.

Babu, R. R., Benipal, G. S. & Singh, A. K. ***Constitutive modeling of concrete: an overview.*** Asian Journal of Civil Engineering, 6(4), p. 211–246, 2005.

Balaguru, P., Nanni, A. & Giancaspro, J. ***FPR Composites for reinforced and prestressed concrete structures.*** Taylor & Francis, 2009.

Balzani, C. & Wagner, W. ***An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates.*** Engineering Fracture Mechanics, 75(9), p. 2597–2615, 2008.

Barenblatt, G. I. ***The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypothesis. Axial-symmetric cracks.*** Prkladnaya Matematika i Mechanics, 23, p. 434–444, 1959.

Beber, A. J. **Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono.** Tese (doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

Beer, F. P. & Johnston Jr., E. R. **Resistência dos materiais.** Makron Books. São Paulo, 2008.

Benzeggagh, M. L. & Kenane, M. ***Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus.*** Composites Science and Technology, 56, p. 439–449, 1996.

Besson, J. *et al.* ***Non-Linear Mechanics of Materials.*** Solid Mechanics and its Applications, 167, 2010.

Botta, A. S. **Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando-se a Mecânica do Dano para a modelagem do concreto armado.** Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo, 1998.

Callister Jr., W. D. **Ciência e engenharia dos materiais: uma introdução,** Livros Técnicos e Científicos. São Paulo, 2008.

Camanho, P. P. & Davila, C. G. ***Mixed-Mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials.*** NASA Technical Paper, Report No. TM-2002-211737, 2002.

Canevarolo Jr., S. V. **Ciências dos polímeros: um texto básico para tecnólogos e engenheiros**. Artliber. São Paulo, 2006.

Chandra, N. *et al.* **Some issues in the application of cohesive zone models for metal–ceramic interfaces**. International Journal of Solids and Structures, 39(10), p. 2827–2855, 2002.

Chen, W. F. & Han, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. J. Ross Publishing. 2007.

Coronado, A. & Lopez, M. M. **Sensitivity analysis of reinforced concrete beams strengthened with FRP laminates**. Cement & Concrete Composites, 28, p. 102–114, 2006.

Cui, W., Wisnom, M. R. & Jones, M., **A comparison of failure criteria to predict delamination of unidirectional glass/epoxy specimens waisted through the thickness**. Composites, 23(3), p. 153–66, 1992.

Custódio, M. de S. V. & Ripper, T. **Patologia, Recuperação e Reforço de Estruturas de Concreto**. PINI. São Paulo, 1998.

Davies, J. **Observation of the fracture path development in mortar beam specimens**. Advanced Cement Based Materials, 3(1), p. 31–36, 1996.

Fédération Internationale du Béton (FIB). **Externally bonded FRP reinforcement for RC structures**. Lausanne, Bulletin 14, 2001.

Gallardo, S. **Reforço à flexão de vigas de concreto utilizando polímeros reforçados com fibra de carbono**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, 2002.

Goodman, R. E., Taylor, R. L. & Brekke, T. **A model for the mechanics of jointed rocks**. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 94, p. 637–659, 1968.

Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P. E. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**. Cement and Concrete Research, 6, p. 773–782, 1976.

Jankowiak, T. & Lodygowski, T. **Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model**. Foundation of Civil and Environmental Engineering, 6, p. 53–69, 2006.

Johannsson, B. & Reitzel, P. **Numerical analysis of a reinforced concrete beam in Abaqus 6.10**. Dissertação (Mestrado). Aalborg University, 2011.

Juvandes, L. **Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando compósitos de CFRP**. Tese (Doutorado). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999.

Kachanov, L. **Introduction to Continuum Damage Mechanics**. Kluwer Academic Publishers. Brookline, 1986.

Kmiecik, P. & Kaminski, M. **Modeling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration**. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 11 (3), 2011.

Kossa, A. ***Exact stress integration schemes for elastoplasticity***. Tese (Doutorado). Budaspest University of Technology and Economics, 2011.

Kwak, H. & Filippou, F. ***Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads***, Structural Engineering Mechanics and Materials. Report No. UCB/SEMM-90/14, 1990.

Lázaro, F.P. ***Análise não-linear da interação solo-duto em encostas empregando elementos de interface***. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2004.

Lee, J. & Fenves, G. L. ***Numerical implementation of plastic-damage model for concrete under cyclic loading: application to concrete dams***. Structural Engineering, Mechanics, and Materials, Department of Civil Engineering, University of California. Report No. UCB/SEMM, 1994.

Lee, J. & Fenves, G.L., ***Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures***. Journal of Engineering Mechanics, 124(8), p. 892–900, 1998.

Lee, J. H. *et al.* ***Design and analysis of heavily loaded reinforced concrete link beam for Burj Dubai***. ACI Structural Journal, 105(4), 2008.

Lemaître, J. ***A course on damage mechanics***, Springer. New York, 1996.

Lubliner, J. *et al.* ***A plastic-damage model for concrete***. International Journal of Solids and Structures, 25(3), 1988.

Mehta, P. K. & Monteiro, P. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. Ibracon. São Paulo, 2008.

Mendonça, P. **Materiais compostos e estruturas-sanduiche: projeto e análise**, Manole. Barueri, 2005.

Meneghetti, L. C. **Análise do comportamento à fadiga de vigas de concreto armado reforçadas com PRF de vidro, carbono e aramida**. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

Ngo, D. & Scordelis, C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams**. Journal American Concrete Institute, 64, p. 152–163, 1967.

Norton, R. L. **Projeto de Máquinas: uma Abordagem**. Bookman. São Paulo, 2004.

Obaidt, Y. **Retrofitting of reinforced concrete beams using composites laminates**. Tese (Doutorado). Jordan University of Science and Technology, 2007.

Obaidt, Y., Heyden, S. & Dahlblom, O. **The effect of CFRP on CFRP/concrete interface models when modeling retrofitted RC beams with FEM**. Composite Structures, 92, p. 1391–1398, 2010.

Penna, S. S. **Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

Perelles, D. H. **Estudo analítico do comportamento de uma viga biapoiada de concreto armado reforçada com um compósito de fibra de carbono**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, 2013.

Petersson, P. ***Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials***. Lund Institute of Technology. Report No. TVBM-1006, 1981.

Proença, S. **Introdução à Mecânica do Dano e Fraturamento - Elementos de Mecânica do Dano em Meios Contínuos**. Texto nº 4, 2000.

Quinino, U. C. **Uso do método das interfaces coesivas na análise da simulação do comportamento de fratura em materiais frágeis**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

Reddy, J. N. ***Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis***. CRC Press. Boca Raton, USA, 1997.

Reeder, J. R. & Crews, J. H. ***Mixed-mode bending apparatus for delamination testing***. AIAA Journal, 28, p. 1270–1276, 1990.

Ribeiro, F. L. **Análise numérica de tensões de junta compósita adesiva do tipo sobreposta simples**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

Samways, M. C. **Análise Numérica de juntas adesivadas pelo Método dos Elementos Finitos considerando o início e a evolução do dano**. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2013.

TEST METHOD D3039/D. **Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials.** West Conshohocken, PA, USA. American Society for Testing and Materials, 2000.

TEST METHOD D2344-84. **Standard test method for apparent interlaminar shear strength of parallel fiber composites by short-beam method.** West Conshohocken, PA, USA. American Society for Testing and Materials, 1995.

TEST METHOD D5528-01. **Standard test method for Mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites.** West Conshohocken, PA, USA. American Society for Testing and Materials, 2002.

TEST METHOD D6671-01. **Standard test method for Mixed Mode I – Mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber reinforced polymer matrix composites.** West Conshohocken, PA, USA. American Society for Testing and Materials, 2002.

TEST METHOD JIS 7086. **Testing methods for interlaminar fracture toughness of carbon fiber reinforced plastics.** Tokyo, Japan. Japan Industrial Standards, Japanese Standards Association, 1993.

Turon, A. *et al.* **An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models.** Engineering Fracture Mechanics, 74(10), p. 1665–1682, 2007.

Zhang, J., Zhang, Z. & Chen, C. **Yield Criterion in Plastic-Damage Models for Concrete.** Acta Mechanica Solida Sinica, 23(3), p. 220–230, 2010.



## ANEXO A – OBTENÇÃO DO PARÂMETRO EXPERIMENTAL $\eta$

O parâmetro  $\eta$  utilizado no critério “B-K” é obtido através do ensaio MMB, conforme definido no Capítulo 5, em diferentes razões do Modo Misto, ou seja, para razões de  $\frac{G_2}{G_T}$  variando entre  $0 \leq \frac{G_2}{G_T} \leq 1$ . Isso significa que caso a razão de Modo Misto seja  $\frac{G_2}{G_T} = 0$ , apenas o Modo I de delaminação ocorrerá. Já quando  $\frac{G_2}{G_T} = 1$ , há apenas o Modo II de delaminação ocorrendo, sendo que em valores intermediário os dois modos ocorrem simultaneamente.

Para obtenção do parâmetro  $\eta$ , Camanho & Davila (2002) propõem o ajuste de dados obtidos do ensaio MMB através de uma curva obtida através do Método dos Mínimos Quadrados. Neste método, uma curva que melhor se adapte à dados discretos é obtida minimizando-se a soma dos quadrados das distâncias entre pontos considerados paralelos entre si, ou verticais com relação à linha média. Resumindo, neste método se encontram a soma dos quadrados dos desvios verticais  $r$  em um número  $n$  de pontos.

Para utilização do Método dos Mínimos Quadrados, Camanho & Davila (2002) se valeram do auxílio do seguinte polinômio:

$$p\left(\frac{G_2}{G_T}\right) = G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left(\frac{G_2}{G_T}\right)^\eta \quad (\text{A.1})$$

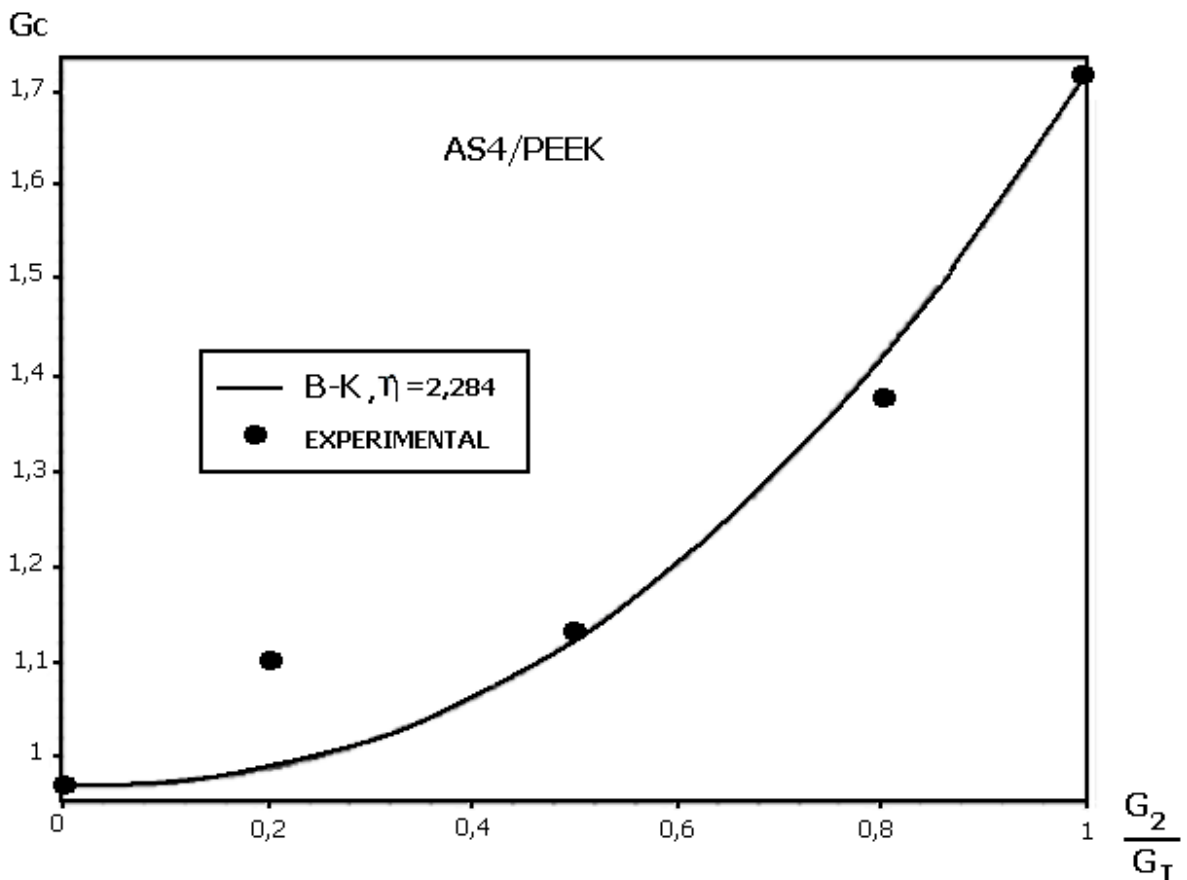
Assim, o encaixe pelo mínimo quadrado pode ser obtido da seguinte forma:

$$r = \sum_{i=1}^n \left[ (G_T)_i - G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left( \frac{G_2}{G_T} \right)_i^\eta \right]^2; \frac{dr}{d\eta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ (G_T)_i - G_{1C} + (G_{2C} - G_{1C}) \left( \frac{G_2}{G_T} \right)_i^\eta \right] \left( \frac{G_2}{G_T} \right)_i^\eta \ln \left( \frac{G_2}{G_T} \right)_i = 0 \quad (\text{A.2})$$

Resolvendo-se a equação (A.2), obtém-se o valor de  $\eta$ .

Para uma resina termoplástica denominada AS4/PEEK, Camanho & Davila (2002) obtiveram o valor de  $\eta = 2,284$ , sendo que a curva de interpolação, juntamente com os dados experimentais, pode ser visto na Figura 129. Nesta, tem-se o modo misto variando ao longo de todo o seu intervalo, ou seja, de 0 a 1. Os valores que mais se afastaram da curva correspondem a  $\frac{G_2}{G_T} = 0,2$ .



**Figura 129 – Previsão dos valores de B-K.**  
 FONTE: Camanho & Davila (2002).