

PAULO PANEQUE GALUZIO

# Início Intermitente da Turbulência



Curitiba

2012

PAULO PANEQUE GALUZIO

# Início Intermitente da Turbulência

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

**Curitiba**

2012

Galuzio, Paulo Paneque

Início intermitente da turbulência / Paulo Paneque Galuzio. - Curitiba, 2012.

64 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Sergio Roberto Lopes

1. Turbulência. 2. Equações diferenciais. 3. Lyapunov, Funções de. 4. Estabilidade. I. Lopes, Sergio Roberto. II. Título.

CDD 515.35

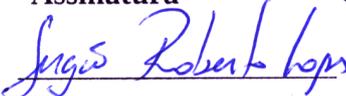
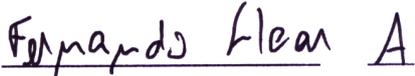
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

TÍTULO: “INÍCIO INTERMITENTE DA TURBULÊNCIA” .

**PAULO PANEQUE GALUZIO**

Em sessão pública iniciada às treze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição esta banca examinadora, decidiu atribuir ao candidato o conceito global A

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Prof. IBERÊ LUIZ CALDAS (IF-USP)		<u>A</u>
Prof. FERNANDO HAAS (UFPR)		<u>A</u>

Curitiba, 16 de fevereiro de 2012.

"Une cause très petite, et qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard."

Henri Poincaré

# RESUMO

O entendimento dos mecanismos dinâmicos que levam à formação de estados turbulentos em sistemas espacialmente estendidos constitui um problema de grande importância. É observado que em alguns sistemas essa transição acontece de maneira intermitente, ou seja, a dinâmica oscila de uma maneira aparentemente aleatória entre estados de caos temporal e estados turbulentos, e a energia de cada um destes estados reside em ramos diferentes e que não se sobrepõem. Neste trabalho, estão apresentados os resultados obtidos no estudo de uma transição de caos temporal para turbulência, que acontece de maneira intermitente, na equação de onda longa regular forçada e amortecida, um modelo que representa diferentes problemas físicos, entre eles a dinâmica de uma onda de deriva eletrostática em um plasma. As propriedades estatísticas da série temporal da energia da onda mostram que a transição acontece segundo um comportamento dinâmico conhecido que recebe o nome de intermitência *on-off* de dois estados. A análise posterior da distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito sugere que a perda de estabilidade transversal dos atratores do sistema no espaço de fase de Fourier é o mecanismo dinâmico por trás da intermitência e que, portanto, leva o sistema a um estado turbulento. No caso específico do modelo estudado, o aumento da intensidade do forçamento induz a perda de estabilidade transversal em um atrator de baixa energia, que leva ao surgimento da intermitência e portanto do caos espaço-temporal no sistema.

# ABSTRACT

The understanding of the dynamical mechanisms that lead to the formation of turbulent states in spatially extended systems constitutes a major problem. It is observed that in some systems this transition occurs intermittently, i.e., the dynamics fluctuates in a seemingly random way between states of temporal chaos and turbulent states, and the energy of each state lives in different branch that do not overlap. In this work, one presents the results obtained in the study of a transition from temporal chaos to turbulence which happens in an intermittent way, in the forced and damped regularized long wave equation, a model which represents different physical problems, among them the dynamics of an electrostatic drift wave in a plasma. The statistical properties of the time series of the wave energy show that the transition takes place accordingly with a known dynamical behavior named in the literature as two state on-off intermittency. The further analysis of the distribution of the finite time Lyapunov exponents suggests that the loss of transversal stability of the system attractors in the Fourier phase space is the dynamical mechanism behind the intermittency and, therefore, leads the system to a turbulent state. In the specific case of the studied model, the increase in intensity of the forcing induces the loss of transversal stability in a low-energy attractor, which leads to the emergence of intermittency and therefore spatiotemporal chaos in the system.

# AGRADECIMENTOS

- Ao professor Dr. Sergio Roberto Lopes, pela orientação;
- aos Professores Dr. Ricardo Luiz Viana e Dr. Fernando Haas, por me auxiliarem durante o desenvolvimento do trabalho;
- aos colegas de pós-graduação, pela colaboração e apoio;
- aos meus pais, pela educação e suporte;
- à minha namorada Debora, pela companhia, paciência e aconselhamento;
- ao professor Dr. Carlos de Carvalho, pelo suporte computacional;
- ao CNPq e à CAPES, pelo apoio financeiro.

---

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Sumário</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Introdução Teórica</b>	<b>4</b>
2.1 Sistemas Dinâmicos não-lineares . . . . .	5
2.1.1 Análise de Estabilidade . . . . .	6
2.1.2 Atratores Caóticos e Expoentes de Lyapunov . . . . .	8
2.1.3 Hiperbolicidade e variabilidade da dimensão instável . . . . .	11
2.2 Turbulência . . . . .	17
2.2.1 A teoria de Kolmogorov . . . . .	18
2.2.2 A hipótese de Taylor . . . . .	19
<b>3 A equação de onda longa regular forçada e amortecida</b>	<b>21</b>
3.1 Contextualização em física de plasmas . . . . .	22
3.2 Leis de conservação . . . . .	24
3.3 Solução numérica . . . . .	25
<b>4 Resultados</b>	<b>28</b>
4.1 Intermitência <i>on-off</i> de dois estados . . . . .	28
4.2 Variabilidade da dimensão instável . . . . .	35
<b>5 Conclusão</b>	<b>44</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>46</b>
<b>Apêndice</b>	<b>52</b>
Physical Review Letters . . . . .	52
Physical Review E . . . . .	56

---

# Lista de Figuras

2.1	Esquema dos expoentes de Lyapunov . . . . .	9
2.2	Esquema representando UDV . . . . .	13
2.3	<i>Toy-model</i> para intermitência <i>on-off</i> de dois estados . . . . .	16
4.1	$\phi(x, t)$ para $\epsilon = 0, 195$ , regime de caos puramente temporal . . . . .	29
4.2	$\phi(x, t)$ para $\epsilon = 0, 21$ , regime de turbulência . . . . .	29
4.3	Espectro médio de Fourier . . . . .	30
4.4	Espectro de Fourier da energia para o caso turbulento . . . . .	31
4.5	Energia do sistema para diferentes valores de $\epsilon$ . . . . .	32
4.6	Perfil espacial numa região de intermitência. . . . .	34
4.7	Histograma da distribuição dos estados laminares . . . . .	35
4.8	Esquema da transição mostrando os diferentes ramos de energia . . . . .	36
4.9	Convergência dos expoentes de Lyapunov . . . . .	37
4.10	Espectro de Lyapunov a tempo infinito . . . . .	38
4.11	Diagrama de bifurcação do onset da UDV . . . . .	39
4.12	Detalhes da dinâmica periódica. . . . .	39
4.13	Distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito . . . . .	41
4.14	Fração dos expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos . . . . .	42

---

---

## CAPÍTULO 1

---

# Introdução

"Turbulence is the most important unsolved problem of classical physics."

Richard Feynman

A turbulência é um fenômeno presente em várias situações físicas diferentes, que vão desde o movimento complicado de um fio de fumaça subindo da ponta de um cigarro, passando pela formação de padrões em nuvens e reações químicas, até a dinâmica de um plasma confinado em um *tokamak*. Podendo ser entendida, a grosso modo, como o comportamento complexo apresentado por fluxos espaciais, a turbulência é um fenômeno de extrema importância e ainda assim muito pouco compreendido. De fato, em 2005, foi publicado na revista *Science* um artigo listando várias questões científicas, consideradas de primeira importância, e que ainda permaneciam sem solução [1]. Entre elas estava a seguinte questão: “Nós podemos desenvolver uma teoria geral da dinâmica de fluxos turbulentos e do movimento de materiais granulares?”, que ilustra a ausência de um entendimento a respeito dos mecanismos dinâmicos que levam à turbulência.

Na tentativa de ampliar essa compreensão diferentes abordagens são utilizadas, muitas delas balizadas pela teoria de sistema dinâmicos não-lineares. Uma das primeiras importantes conexões entre esta teoria e o fenômeno da turbulência foi feita no trabalho seminal de Ruelle e Takens [2]. A ideia principal é que apesar de um sistema hidrodinâmico possuir muitos graus de liberdade (rigorosamente infinitos), apenas alguns poucos são excitados durante o começo da turbulência, mas estes são suficientes para iniciar uma dinâmica complexa e imprevisível [3], que possui grande semelhança com a dinâmica de *caos determinístico*.

As propriedades de sistemas caóticos de baixa dimensionalidade constituem hoje um campo de estudos já bem estabelecido, com um corpo extenso de trabalhos teóricos, e com uma grande quantidade de resultados numéricos e experimentais. No entanto, a

dinâmica de sistemas de alta dimensionalidade ainda apresenta grandes desafios e problemas sem solução. Dentre estes encontra-se o entendimento dos mecanismos que levam ao início da turbulência — ou caos espaço-temporal — em fluidos, plasmas ou outros sistemas espacialmente estendidos [4].

Existem várias opções de sistemas espacialmente estendidos à disposição. Desde os mais simples, onde tanto as variáveis temporais quanto espaciais são discretas (autômatos celulares ou rede de mapas acoplados) até os mais complexos, onde todas as variáveis são contínuas (equações diferenciais parciais). A escolha do sistema mais adequado envolve decidir entre o realismo físico dos sistemas complexos, ou a facilidade técnica dos mais simples.

Uma classe de modelos que concilia relativamente bem esses dois extremos corresponde às equações diferenciais parciais com apenas uma dimensão espacial. Dentre estas, uma boa escolha corresponde à equação de onda longa regular forçada e amortecida (EOLR) [5, 6]. Derivada em vários contextos físicos diferentes, ela possui uma gama de aplicações bastante grande, e no limite unidimensional é relativamente simples de ser tratada numericamente através do método pseudo-espectral [7], que além de ser eficiente numericamente, fornece uma análise em termos de modos de Fourier bastante adequada para o estudo da turbulência.

A equação de onda longa regular forçada e amortecida tem sido foco de pesquisas, com uma abordagem via sistemas dinâmicos, desde a década de 80 [6, 8]. Desde os primeiros trabalhos percebeu-se a grande variedade de comportamentos dinâmicos presentes neste modelo: soluções com estados estacionários (do tipo onda propagante), soluções periódicas, quasiperiódicas, ou caóticas [6]. Sendo que estas soluções caóticas no tempo podem ou não coexistir com soluções que são também caóticas no espaço (caos espaço-temporal) [8]. Também já se tinha percebido a existência de parâmetros para os quais a EOLR apresenta dois atratores distintos no espaço de fase, cada um correspondente a um ramo de energia diferente [8], característica que foi descrita como histerese, para todo valor de parâmetro em que este comportamento foi observado.

Transições de caos temporal para caos espaço-temporal sempre foram objeto de interesse nos estudos deste modelo. Em um trabalho publicado em 2000 [9], Kaifen He descreveu um fenômeno chamado “padrão de ressonância” que funcionaria como um gatilho de caos espaço-temporal no sistema. A ideia é relativamente simples: o sistema é excitado para um estado turbulento, sempre que o perfil espacial se aproxima de uma solução estacionária instável.

Vários trabalhos posteriores verificam a existência de um comportamento intermitente nesta equação para um conjunto de parâmetros adequadamente escolhidos [10–12]. Nestes trabalhos, observa-se que a intermitência está presente no início da turbulência neste sistema, de tal maneira que durante a transição o sistema alterna entre estados de caos temporal e estado turbulentos.

---

De forma geral, acreditava-se que este comportamento intermitente era gerado por uma crise interior, um mecanismo dinâmico bem compreendido e largamente descrito na literatura [13]. No entanto, intermitências do tipo caos-caos geradas por crise possuem uma característica peculiar: regiões do espaço de fase ocupadas pelo atrator pré-crise estão ainda disponíveis para trajetórias no atrator pós-crise. Logo, em qualquer análise dinâmica feita por uma quantidade escalar integrada (como, por exemplo, a energia da onda integrada sobre todo o domínio espacial), espera-se que haja alguma sobreposição entre os limites dos intervalos de variação desta grandeza escalar, antes e depois da transição.

No entanto, nos resultados obtidos para a equação de onda longa regular forçada e amortecida, esta característica não é observada. Portanto, deve existir algum outro mecanismo dinâmico responsável pelo comportamento intermitente observado. A investigação deste mecanismo corresponde ao principal objetivo deste trabalho, cujos resultados e conclusões subsequentes foram publicados nas referências [14–16].

Nos capítulos seguintes estão organizados os resultados obtidos no estudo de uma transição de caos temporal para turbulência, que acontece de maneira intermitente na equação de onda longa regular forçada e amortecida. No capítulo 2 estão descritos vários conceitos teóricos básicos, referentes à teoria de sistemas dinâmicos não-lineares e à teoria de turbulência. No capítulo 3 estão detalhes a respeito da derivação da equação de onda longa regular forçada e amortecida, assim como algumas de suas propriedades e a descrição do método de integração. Os detalhes técnicos a respeito da integração da equação também estão no capítulo 3.

Os resultados obtidos estão apresentados no capítulo 4, onde pode-se ver, em detalhes, como acontece a transição de caos temporal para turbulência, as propriedades estatísticas da transição, e a sua relação com um mecanismo de dinâmica não-linear chamado de variabilidade da dimensão instável. Finalmente, no capítulo 5 estão as conclusões finais do trabalho.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# Introdução Teórica

"Chaos is a friend of mine."

Bob Dylan

Em 1820, o matemático francês Pierre-Simon de Laplace escreveu em sua obra *Teoria analítica de probabilidade* o que viria a ser uma das mais famosas citações a respeito do sucesso do determinismo clássico:

Um intelecto que, em dado momento, conhecesse todas as forças que dirigem a natureza e todas as posições de todos os itens dos quais a natureza é composta, se este intelecto também fosse vasto o suficiente para analisar essas informações, compreenderia numa única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os do menor átomo; para tal intelecto nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, seria presente perante seus olhos.

Baseada fortemente no sucesso da mecânica Newtoniana, esta é uma visão de mundo onde a previsibilidade é consequência da possibilidade de se expressar leis físicas em termos de equações diferenciais. Um conjunto dessas equações descrevendo qualquer sistema físico, juntamente com um conjunto de condições iniciais, seria capaz de prever o futuro deste sistema mesmo em um instante de tempo infinitamente distante no futuro [17].

O que Laplace não poderia ter previsto no momento, é que este conceito de determinismo absoluto viria a ser destruído pelas teorias físicas futuras. De fato, a mecânica quântica substituiu este mundo extremamente previsível e ordenado por um outro onde probabilidades são tudo o que se pode saber a respeito de um sistema físico. No entanto, apesar da mecânica quântica ter acabado com o determinismo no campo da filosofia da ciência, o seu limite de aplicação é limitado ao mundo microscópico, de tal forma que no mundo macroscópico as leis de Newton ainda são válidas e, portanto, também o é o determinismo clássico e a sua previsibilidade.

O problema é que vários sistemas clássicos se mostraram extremamente difíceis de serem resolvidos, o melhor exemplo sendo o problema de três corpos [18], que apenas depois de décadas de esforço foi descoberto como um problema *impossível* de ser solucionado. Foi Poincaré, durante o século XIX, que introduziu um avanço no estudo destes sistemas. Tendo adotado uma abordagem mais qualitativa, ele propôs perguntas a respeito da estabilidade do sistema solar, por exemplo, ao invés de tentar obter uma fórmula analítica para a trajetória dos planetas. Além disso ele introduziu uma abordagem geométrica que viria a ser o início da dinâmica moderna. Mas, talvez, uma de suas contribuições mais importantes tenha sido o vislumbre da possibilidade de *caos*, onde um sistema dinâmico apresentaria um comportamento aperiódico e sensível às condições iniciais, prejudicando assim a previsibilidade dos sistemas a longo prazo [19].

A teoria introduzida por Poincaré ficou esquecida nos círculos de física até 1963, quando, graças ao advento dos computadores modernos, foi possível a Edward Lorenz, um meteorologista do MIT, simular um modelo simplificado da dinâmica atmosférica, composto de apenas três equações diferenciais ordinárias. O interessante é que as soluções numéricas destas equações nunca chegavam a uma condição assintótica de equilíbrio ou periodicidade. Além disso, quando realimentado com as mesmas condições iniciais, o computador gerava uma solução diferente da simulada anteriormente. O que Lorenz descobriu é que o seu sistema era *intrinsecamente* imprevisível [19]. Este comportamento dinâmico recebeu, nos anos 1970, o nome de *Caos* [20].

As aplicações da teoria desenvolvida depois do trabalho de Lorenz são das mais variadas. Uma das mais importantes encontra-se no entendimento do fenômeno da turbulência [3]. Para facilitar o entendimento do leitor, neste capítulo apresenta-se uma breve revisão dos conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares e da teoria de turbulência [4].

## 2.1 Sistemas Dinâmicos não-lineares

Um sistema dinâmico pode ser definido como uma prescrição matemática determinística para a evolução de um sistema no tempo [13], onde o tempo pode ser uma variável contínua ou discreta. Um exemplo de sistema dinâmico é representado por um sistema de  $N$  equações diferenciais de primeira ordem em  $N$  variáveis  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$  [21]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

uma solução de um sistema dinâmico é uma função vetorial  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  que satisfaz a equação  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ . O espaço  $N$ -dimensional definido por  $(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$  é chamado de *espaço de fase*, e a curva traçada neste espaço por  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  é a *trajetória* do sistema. É comum referir-se a um sistema dinâmico de tempo contínuo por *fluxo*.

No caso de sistemas a tempo discreto, também chamados de *mapas*, pode-se escrevê-los em uma notação vetorial da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}_n$  é um vetor  $N$ -dimensional,  $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$ . Dada uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$ , o estado em  $n = 1$  é obtido pela simples iteração da equação (2.2):  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$  e, neste caso, uma trajetória do sistema é dada pelo conjunto  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ .

### 2.1.1 Análise de Estabilidade

No caso específico de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser muito difícil encontrar a trajetória  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  analiticamente, na maioria esmagadora dos casos é de fato *impossível*. Apesar da solução numérica ser sempre acessível, uma outra maneira interessante de aumentar o entendimento a respeito da dinâmica de um sistema envolve estudar a estabilidade do seus pontos de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  [13], onde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = 0, \quad (2.3)$$

para tanto, estuda-se o comportamento de trajetórias próximas a  $\mathbf{x}^*$ . Considerando uma função do tempo  $\boldsymbol{\eta}(t)$  cuja magnitude assume-se ser pequena, tem-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^2), \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{Df}$  é a Jacobiana do sistema. Utilizando a equação (2.3), e negligenciando termos de ordem  $\boldsymbol{\eta}^2$ , obtém-se então a lei de evolução temporal de uma perturbação próxima a um ponto de equilíbrio:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}(t). \quad (2.5)$$

Supondo soluções do tipo  $\boldsymbol{\eta}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{e}$  (onde  $\mathbf{e}$  são os autovetores da matriz Jacobiana), então (2.5) se torna uma equação de autovalor:  $\mathbf{Df} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$  cuja solução pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^N A_k \mathbf{e}_k e^{\lambda_k t}, \quad (2.6)$$

onde  $A_k$  são coeficientes constantes, e tanto os autovetores  $\mathbf{e}_k$  quanto os autovalores correspondentes  $\lambda_k$  podem ser reais ou complexos. A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  é feita através do sinal da parte real dos autovalores. Se  $\Re[\lambda_k] < 0$  então  $\mathbf{x}^*$  é estável na direção definida por  $\mathbf{e}_k$ , e é instável se  $\Re[\lambda_k] > 0$ . No caso em que  $\Re[\lambda_k] = 0$ ,

o ponto  $x^*$  é indiferente na direção de  $e_k$ , i.e., não é estável ou instável. Por sua vez, a parte imaginária dos autovalores define a maneira como a trajetória se aproxima ou se afasta de  $x^*$ , monotonicamente se  $\Im[\lambda_k] = 0$ , espiralmente caso contrário.

Pode-se ainda definir o espaço *tangente*  $T^*$  ao ponto  $x^*$  como aquele cujos vetores de base estão na direção dos autovetores ( $e_k$ ) da Jacobiana calculada no ponto fixo ( $Df(x^*)$ ). Tal espaço pode ainda ser decomposto como o coproduto entre três subespaços:  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$ , tal que  $T^* = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . Definidos como:

**Subespaço estável:** é aquele gerado por  $n_s$  vetores  $v_i$  colineares a autovetores  $e_k$  cujos autovalores associados tem parte real negativa:

$$E^s = \text{span}[v_1, v_2, \dots, v_{n_s}]; \quad (2.7)$$

**Subespaço instável:** é aquele gerado por  $n_u$  vetores  $u_i$  colineares a autovetores  $e_k$  cujos autovalores associados tem parte real positiva:

$$E^u = \text{span}[u_1, u_2, \dots, u_{n_u}]; \quad (2.8)$$

**Subespaço central:** é aquele gerado por  $n_c$  vetores  $w_i$  colineares a autovetores  $e_k$  cujos autovalores associados tem parte real nula:

$$E^c = \text{span}[w_1, w_2, \dots, w_{n_c}]. \quad (2.9)$$

No caso particular em que não há um subespaço central  $E^c$ , a decomposição do espaço tangente é feita apenas em termos de  $E^u$  e  $E^s$ , i.e.,  $T^* = E^s \oplus E^u$ ; diz-se então que o ponto fixo  $x^*$  é um ponto *hiperbólico* [13].

Todas as análises acima foram feitas considerando-se a situação específica onde  $x^*$  é um ponto fixo do sistema contínuo (2.1). A generalização para mapas (como da equação (2.2)) é relativamente trivial e pode ser encontrada em [13].

No caso de interesse em que o estado de equilíbrio é uma órbita periódica  $x(t) = X^*(t) = X^*(t+\tau)$  (onde  $\tau$  é o período da órbita) a análise de estabilidade é feita através de Multiplicadores de Floquet [22]. Devido à dificuldade desta técnica uma abordagem muito mais simples é feita através da utilização de uma seção de Poincaré [19], que transforma um fluxo de dimensão  $N$  em um mapa de dimensão  $N - 1$ . Desta maneira, órbitas periódicas do fluxo transformam-se em pontos fixos cuja estabilidade é analisada da maneira descrita acima. Como a dimensão da superfície de Poincaré é menor que a dimensão do espaço de fase, fica faltando ainda calcular um autovalor e a sua autodireção correspondente, mas estes são obtidos facilmente, uma vez que a única direção possível é ao longo da órbita (perpendicular à superfície de Poincaré). Esta direção não é estável ou instável, pois trajetórias ao longo dela não são atraídas nem repelidas, apenas circulam ao redor

da órbita periódica, portanto, a única opção para o autovalor correspondente é zero [13]. Com todos os autovetores definidos, pode-se então identificar os subespaços estável ( $E^s$ ), instável ( $E^u$ ) e central ( $E^c$ ) de órbitas periódicas.

### Variedades estáveis e instáveis

Uma definição de extrema importância é aquela de variedades estáveis e instáveis de um estado de equilíbrio, seja ponto fixo ou órbita periódica. De maneira simples a *variedade estável* ( $\mathcal{W}^s$ ) de um estado de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  corresponde ao conjunto de todos os pontos  $\mathbf{x}$  tais que as órbitas que se iniciam em  $\mathbf{x}$  tendem a  $\mathbf{x}^*$  quando  $t$  cresce positivamente [13], i.e.,  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$  [23]. De maneira análoga, *variedade instável* ( $\mathcal{W}^u$ ) de um estado de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  corresponde ao conjunto de todos os pontos  $\mathbf{x}$  tais que as órbitas que se iniciam em  $\mathbf{x}$  tendem a  $\mathbf{x}^*$  quando evolui-se o sistema na direção de  $t$  negativo, i.e.,  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow -\infty$ .

Quanto à dimensionalidade das variedades,  $\mathcal{W}^s$  possui a mesma dimensão  $n_s$  que o subespaço estável de  $\mathbf{x}^*$ ,  $E^s$ ; assim como  $\mathcal{W}^u$  tem a mesma dimensão  $n_u$  de  $E^u$ . Além disso, o *Teorema da variedade estável* [23] diz que nas vizinhanças de  $\mathbf{x}^*$ , o espaço gerado pelos autovetores de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  associados a autovalores cuja parte real é negativa (positiva) é tangente à variedade estável (instável)  $\mathcal{W}^s$  ( $\mathcal{W}^u$ ).

No caso simples de sistemas lineares, as variedades são apenas retas colineares aos autovetores da matriz Jacobiana. Quando adicionamos não-linearidades isto é verdade apenas localmente, distante de  $\mathbf{x}^*$  as variedades se dobram e se retorcem, e duas variedades que não são do mesmo tipo – ambas instáveis ou estáveis – podem inclusive se cruzar. Estes cruzamentos são responsáveis pela complexidade da dinâmica de sistemas não lineares, e podem ser de dois tipos: *homoclínicos* quando há cruzamento entre as variedades estável e instável do mesmo ponto ou órbita  $\mathbf{x}^*$ ; *heteroclínicos* quando uma variedade estável de  $\mathbf{x}^*$  se cruza com uma variedade instável de outro estado de equilíbrio  $\mathbf{x}^{**}$ .

### 2.1.2 Atratores Caóticos e Expoentes de Lyapunov

Pode-se classificar sistemas dinâmicos em duas classes: (1) Os *conservativos* são aqueles cuja evolução temporal preserva volumes no espaço de fase, i.e., respeitam o teorema de Liouville [24]; (2) os *dissipativos* contraem volumes no espaço de fase, uma característica importante porque permite a existência de conjuntos atrativos imersos nesse espaço, chamados de *atratores* [13].

De maneira simplificada, atratores podem ser entendidos como subconjuntos limitados do espaço de fase para os quais regiões de condições iniciais de volume diferente de zero tendem assintoticamente quando o tempo cresce. Estes atratores podem ser pontos fixos, órbitas periódicas (também chamadas de ciclos limites) ou então atratores caóticos. Apesar de não haver um consenso a respeito de uma definição formal de atrator [19, 25],

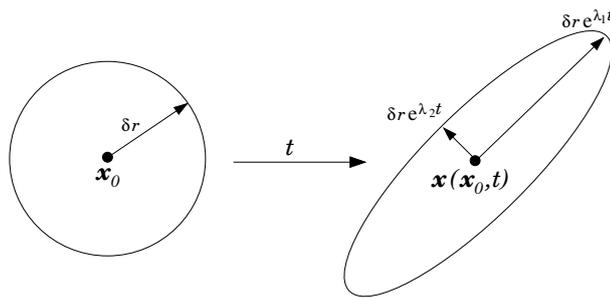
pode-se ainda assim defini-lo de uma maneira mais precisa como um conjunto fechado  $\mathcal{A}$  com as seguintes propriedades [19]:

1.  $\mathcal{A}$  é um conjunto invariante, i.e., qualquer trajetória  $\mathbf{x}(t)$  em  $\mathcal{A}$  permanece em  $\mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais, i.e., existe um conjunto aberto  $\mathcal{U}$  que contém  $\mathcal{A}$  tal que dado  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{U}$ , então a distância entre  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathcal{A}$  tende a zero para  $t \rightarrow \infty$ . O conjunto  $\mathcal{U}$  é chamado de *bacia de atração* de  $\mathcal{A}$ .
3.  $\mathcal{A}$  é mínimo, no sentido de que não há nenhum subconjunto de  $\mathcal{A}$  que satisfaça as condições 1 e 2.

Pode-se ainda definir a dinâmica *transiente* do sistema aquela em que  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{U}$  mas  $\mathbf{x}(t) \notin \mathcal{A}$ .

Dentro do escopo deste trabalho, é suficiente definir um atrator  $\mathcal{A}$  como *caótico* se uma trajetória em  $\mathcal{A}$  apresenta dependência sensível às condições iniciais [13], i.e., dadas duas condições iniciais  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta}$ , onde  $\boldsymbol{\eta}$  é pequeno, em um tempo  $t$  posterior tem-se que:  $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}'_0, t)\| \sim e^{\lambda t}$ .

A quantificação da taxa de divergência local entre condições iniciais próximas é feita através do computo do espectro de *expoentes de Lyapunov*, que de maneira intuitiva podem ser entendidos da seguinte forma: dada uma  $N$ -esfera de condições iniciais centrada em  $\mathbf{x}_0$  com raio  $\delta r$ , após um tempo  $t$ , ela se transforma em um  $N$ -elipsóide centrado em  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  cujos eixos principais são dados por  $\delta r e^{\lambda_1 t}$ ,  $\delta r e^{\lambda_2 t}$ ,  $\dots$ ,  $\delta r e^{\lambda_N t}$ , onde os números  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  correspondem aos expoentes de Lyapunov [17], como representado na figura 2.1.



**Figura 2.1:** Desenho esquemático representando a ideia intuitiva por trás dos expoentes de Lyapunov, onde uma  $N$ -esfera de condições iniciais evolui no tempo para um  $N$ -elipsóide cujos comprimentos dos eixos principais fornecem os expoentes de Lyapunov.

De maneira formal, considera-se um deslocamento infinitesimal de  $\mathbf{x}_0$  na direção de um vetor tangente  $\mathbf{y}_0$ , cuja evolução temporal, no caso de sistemas contínuos, é dada por:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{y}(t), \quad (2.10)$$

o expoente máximo de Lyapunov na direção  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$ , é então definido como:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\mathbf{y}(t)|}{|\mathbf{y}_0|} \right), \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{y}(t)/|\mathbf{y}(t)|$  é a direção de um deslocamento infinitesimal da órbita em  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ ; e  $|\mathbf{y}(t)|/|\mathbf{y}_0|$  é o fator de expansão ( $|\mathbf{y}(t)| > |\mathbf{y}_0|$ ) ou contração ( $|\mathbf{y}(t)| < |\mathbf{y}_0|$ ) [13]. É possível escrever  $\mathbf{y}(t)$  em função de  $\mathbf{y}_0$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{y}_0, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0, t)$  é a chamada matriz de *monodromia* ou fundamental do sistema, cuja equação de evolução temporal é dada por:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{M}, \quad (2.13)$$

com condição inicial  $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{I}$ . De tal forma que, utilizando as equações (2.12) e (2.11), tem-se então:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{M}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{u}_0|, \quad (2.14)$$

é importante ressaltar que, apesar da dependência com  $\mathbf{x}_0$ , os expoentes de Lyapunov são os mesmos para todos os pontos  $\mathbf{x}_0$  dentro da bacia de atração do atrator, exceto para um conjunto de medida de Lebesgue nula, de tal forma que pode-se simplificar a notação omitindo  $\mathbf{x}_0$  em (2.14), assim denota-se apenas por  $\lambda_i$  os  $N$  diferentes expoentes de Lyapunov do sistema, ordenados de tal forma que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ . Além disso, se a base do espaço tangente  $\mathbf{y}$  for escolhida de forma aleatória, então o valor de  $\lambda(\mathbf{u}_0)$  tende ao maior valor possível, ou seja,  $\lambda_1$  [26].

Do ponto de vista computacional, o cálculo dos expoentes de Lyapunov não pode ser feito desta maneira, pois como a equação (2.12) é linear em  $\mathbf{y}(t)$ , a magnitude destes vetores divergem exponencialmente. Uma solução para este problema foi desenvolvida independentemente por Bennetin *et al.* [27] e por Shimada e Nagashima [26]. O procedimento consiste em ortonormalizar a matriz  $\mathbf{M}$  a cada intervalo de tempo  $\tau$  através do processo de reortonormalização de *Gram-Schmidt* (RGS).

Os vetores de base do espaço tangente ( $\mathbf{e}_k(t)$ ), depois de submetidos à RGS originam uma nova base ortonormal ( $\mathbf{e}'_k$ ). Todos os  $\mathbf{e}_k(t)$ , depois de um tempo  $\tau$ , tendem a apontar para a direção do espaço tangente que está crescendo mais rapidamente, de tal forma que a escolha da ordem em que será feita a ortonormalização é arbitrária [28]. O procedimento de Gram-Shimdt nunca afeta a direção do primeiro vetor calculado, de tal forma que  $\mathbf{e}'_1$  ainda aponta na direção de maior crescimento, logo define-se  $\alpha_1^{(\ell)}[\mathbf{x}(\ell\tau)] = \mathbf{e}_1(\tau)$  como o fator de expansão (ou contração) na direção de  $\mathbf{e}'_1$  no passo  $\ell$ . A respeito de  $\mathbf{e}'_2$ ,

a única coisa que se pode dizer é que, juntamente com  $\mathbf{e}'_1$ , ele define o plano de maior crescimento do fluxo, assim  $\alpha_2^{(\ell)}[\mathbf{x}(\ell\tau)] = \mathbf{e}_2(\tau) \cdot \mathbf{e}'_2$  é a taxa de crescimento do fluxo na direção  $\mathbf{e}'_2$  no passo  $\ell$  [28]. De forma geral  $\alpha_k^{(\ell)}[\mathbf{x}(\ell\tau)] = \mathbf{e}_k(\tau) \cdot \mathbf{e}'_k$  corresponde ao fator de expansão ou contração do fluxo na direção  $\mathbf{e}'_k$  no  $\ell$ -ésimo passo. Este procedimento é então repetido por todos os  $N$  vetores  $\mathbf{e}_k(\tau)$ , por  $l$  passos distintos, de tal forma que os expoentes de Lyapunov a tempo *infinito* calculados numericamente são dados por:

$$\lambda_i \approx \frac{1}{l\tau} \sum_{\ell=1}^l \ln(\alpha_i^{(\ell)}[\mathbf{x}(\ell\tau)]). \quad (2.15)$$

Pode-se ainda definir os expoentes de Lyapunov a tempo *finito*<sup>1</sup> ( $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{x}_0, \tau)$ ) que quantificam apenas a taxa *local* de divergência logarítmica do fluxo:

$$\tilde{\lambda}_i(\mathbf{x}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln(\alpha_i[\mathbf{x}_0]), \quad (2.16)$$

onde, neste caso, é importante ressaltar que existe uma dependência com a condição inicial escolhida  $\mathbf{x}_0$ , expressa na dependência da taxa de compressão  $\alpha_i$ .

### 2.1.3 Hiperbolicidade e variabilidade da dimensão instável

Um conceito muito importante na teoria de sistema dinâmicos é o de hiperbolicidade. Apresentado na seção 2.1.1 para o caso específico de pontos fixos, ele pode ser estendido para qualquer conjunto invariante do sistema, como por exemplo um atrator caótico [13]. Diz-se que o conjunto invariante  $\Sigma$  é hiperbólico se o espaço tangente  $T_x$  associado com qualquer ponto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  pode ser decomposto como um coproduto  $T_x = E^s \oplus E^u$ , onde  $E^s$  e  $E^u$  são os subespaços estáveis e instáveis, respectivamente [29, 30] – com dimensão  $n_s$  e  $n_u$ . As seguintes propriedades precisam ainda ser satisfeitas:

1. A decomposição  $E^s \oplus E^u$  varia *continuamente* com  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , e é invariante no sentido que  $Df(E_{\mathbf{x}}^{s,u}) = E_{f(\mathbf{x})}^{s,u}$ , i.e., é possível encontrar em  $\Sigma$  bases para  $E_{\mathbf{x}}^s$  e  $E_{\mathbf{x}}^u$  que variam de forma contínua com  $\mathbf{x}$ .
2. Existe uma constante  $0 < \rho < 1$  tal que, se  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{x}}^s$  então  $|Df(\mathbf{x})\mathbf{y}| < \rho|\mathbf{y}|$ ; e se  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{x}}^u$  então  $|Df^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{y}| < \rho|\mathbf{y}|$  [31].

Os conjuntos hiperbólicos são importantes porque muitas de suas propriedades podem ser obtidas matematicamente de forma rigorosa [13, 30], e.g.: (i) variedades estáveis e instáveis podem ser definidas para todo  $\mathbf{x} \in \Sigma$ ; (ii) o conjunto  $\Sigma$  e a sua dinâmica são estruturalmente estáveis, i.e., suas estruturas topológicas não mudam quando se adiciona um pequeno ruído à função  $\mathbf{f}$ ; (iii) se uma pequena quantidade de ruído é adicionada a

---

<sup>1</sup>Abreviados pela sigla ELTF

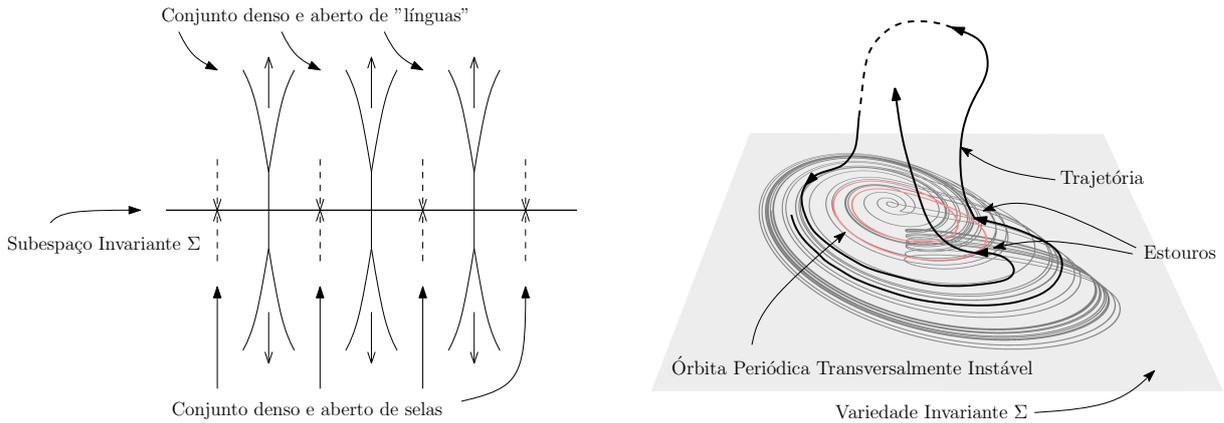
um sistema hiperbólico com um atrator caótico, então a trajetória ruidosa é *sombreada* por uma trajetória real do processo sem ruído [32], i.e., ambas permanecem próximas por um longo período de tempo (um tempo infinito no caso de sistemas hiperbólicos). Esta última propriedade é particularmente importante porque garante que trajetórias simuladas em um computador de fato representem a dinâmica do sistema. No entanto, a grande maioria dos problemas de interesse físico são não-hiperbólicos [29].

Uma das maneiras pelas quais um sistema falha em ser hiperbólico é através do mecanismo chamado *Variabilidade da dimensão instável* (UDV, do inglês: *Unstable Dimension Variability*), neste caso a decomposição do espaço tangente em  $E^u \oplus E^s$  não varia de forma contínua ao longo do conjunto invariante, devido à dimensão do subespaço instável  $n_u$  assumir diferentes valores em diferentes pontos do conjunto. Um exemplo simples consiste de um sistema cuja dinâmica dependa de um parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ , dado por  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x})$ ; se para algum valor de  $\mu = \mu_0$  existe um conjunto caótico invariante  $\Sigma$ , e imersos em  $\Sigma$  existem pontos de equilíbrio, (pontos fixos ou órbitas periódicas, representados por  $\mathbf{x}^*$ ). Diz-se então, sem perda de generalidade, que o sistema apresenta UDV se existirem pelo menos dois pontos distintos  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$  em  $\Sigma$ , tais que  $n_{u1} = \dim E^u(\mathbf{x}_1^*) \neq n_{u2} = \dim E^u(\mathbf{x}_2^*)$ . Uma vez que as infinitas imagens e pré-imagens de ambos os pontos possuem dimensão instável igual à de  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$ , então existem dois conjuntos de pontos em  $\Sigma$  com dimensão instável diferente, caracterizando a UDV.

A existência de UDV em um sistema dinâmico não requer a existência de uma variedade invariante  $\Sigma$ . Basta que exista um conjunto caótico  $\mathcal{C}$ , no qual existe um conjunto denso de órbitas periódicas longitudinalmente instáveis, responsáveis pela dinâmica caótica em  $\mathcal{C}$ . Se algumas dessa órbitas forem transversalmente estáveis, e outras transversalmente instáveis, então o sistema apresenta UDV.

Na figura 2.2(a) está uma representação esquemática de UDV em uma mapa bidimensional. Neste caso, o subespaço invariante  $\Sigma$  está representado por uma linha horizontal. Imerso neste subespaço está um conjunto denso aberto de pontos de sela, que correspondem aos pontos que são instáveis na direção longitudinal (horizontal na figura), mas estáveis na direção transversal (vertical na figura). Entrelaçado aos pontos de sela existe um conjunto aberto denso de pontos fixos instáveis em ambas as direções. Ancorados a estes pontos existem estruturas em formato de “línguas” [33], formadas pela instabilidade transversal dos pontos fixos imersos em  $\Sigma$ , estas estruturas oferecem para trajetórias que estão nas vizinhanças da variedade uma região de escape. Apesar de ser bastante simples, esta representação feita para um mapa bidimensional pode ser facilmente extrapolada para sistemas mais complexos. Basta lembrar que para todo fluxo de dimensão  $N$  pode-se associar um mapa de dimensão  $N - 1$  através de um seção de Poincaré.

É importante notar que essa estrutura não-hiperbólica produz uma intensa perda de sombreamento, i.e., não se pode mais assegurar que as trajetórias com ruído (como



(a) Se o subespaço  $\Sigma$  apresenta UDV, então estão imersos nele pontos que são transversalmente estáveis (pontos de sela) e instáveis (“línguas”), os pontos com instabilidade transversal oferecem uma região de escape para trajetórias próximas da variedade.

(b) Uma trajetória nas vizinhanças de  $\Sigma$  possui uma dinâmica semelhante à da variedade, ao se aproximar de uma órbita periódica transversalmente instável ela experimenta um estouro, e é mandada então para regiões mais distantes do espaço de fase.

**Figura 2.2:** Desenhos esquemáticos representado UDV e a sua conexão com a intermitência *on-off*

são as geradas por computador) de fato acompanhem uma trajetória real do sistema [32, 33]. A sombreabilidade é prejudicada principalmente quando a UDV é máxima, neste caso o tempo de sombreabilidade tende a desaparecer [33], ou seja, não se pode assegurar que uma trajetória com ruído (como são todas as simuladas em computador) esteja próxima de uma trajetória real do sistema, comprometendo assim a confiabilidade de simulação numéricas. De fato até mesmo quantidades estatísticas podem ser alteradas pela amplificação do ruído inerente de simulações computacionais [34].

Uma das maneiras pela qual a UDV leva à perda de sombreabilidade em um sistema dinâmico é através do mecanismo de intermitência *on-off*. Neste caso a dinâmica apresenta dois comportamentos bastante distintos: um comportamento desligado (*off*), no qual a dinâmica do sistema é semelhante à de uma variedade  $\Sigma$  imersa no espaço de fase; e um comportamento ligado (*on*), onde acontece um *estouro* que afasta a trajetória da variedade [35, 36]. Os estados desligados são também chamados de estados laminares ou platôs, a duração ( $\tau$ ) desses estados é aleatória, sendo determinada pela dinâmica caótica inserida na variedade, no entanto a função distribuição de probabilidade  $P(\tau)$  é bem determinada, e pode ser utilizada para caracterizar o mecanismo de intermitência. A função  $P(\tau)$  fornece a probabilidade de encontrar estados laminares de duração  $\tau$  e  $\tau + d\tau$ , e possui forma analítica dada por [36]:

$$P(\tau) \sim \begin{cases} \tau^\nu & \text{para } \tau \text{ pequeno;} \\ e^{\gamma\tau} & \text{para } \tau \text{ grande.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Para uma classe de sistemas de baixa dimensionalidade foi demonstrado que  $\nu = -\frac{3}{2}$  [36]. No entanto para sistemas mais gerais de alta dimensionalidade não se pode prever ao certo qual valor que os expoentes devem assumir.

É preciso ainda determinar qual a relação entre a UDV, que trata da evolução linear de perturbações infinitesimais no espaço tangente; e a intermitência *on-off*, que lida com a evolução não-linear de perturbações que leva o sistema a diferentes comportamentos. Tal conexão é feita através das estruturas em forma de “língua” representadas na figura 2.2(a), para entender melhor esta relação, pode-se acompanhar a evolução no tempo de uma trajetória arbitrária que se aproxima de uma variedade  $\Sigma$ . Quando a trajetória está nas vizinhanças de  $\Sigma$ , ela apresenta uma dinâmica semelhante a do conjunto caótico imerso na variedade. No entanto, ao se aproximar de uma órbita periódica transversalmente instável ela eventualmente visita uma dessas “línguas” e é então repelida da variedade, fenômeno chamado de *estouro* [33]. Este mecanismo está representado esquematicamente na figura 2.2(b).

O retorno da trajetória para as vizinhanças da variedade é determinado pela quantidade de órbitas periódicas transversalmente estáveis, i.e., se estas representam menos de 50% (no sentido de medida) das órbitas periódicas imersas em  $\Sigma$ , então a variedade é globalmente estável e as trajetórias são atraídas de volta para as vizinhanças de  $\Sigma$  e todo o processo se repete.

A quantificação da UDV é feita através da função distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito (2.16). Uma vez que estes representam a taxa local de divergência logarítmica do fluxo, então localmente as direções associadas a cada expoente de Lyapunov positivo expandem o subespaço instável  $E^u$ , e as associadas a expoentes negativos expandem o subespaço estável  $E^s$ . Logo, se houver algum expoente  $\tilde{\lambda}_i(t)$ <sup>2</sup> que assuma valores positivos e negativos em diferentes pontos da trajetória, então o sistema apresenta UDV [29, 30, 33].

De maneira geral, a função de distribuição do expoente de Lyapunov a tempo finito  $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{x}, t)$  possui a forma [30]:

$$P(\tilde{\lambda}_i(t)) \sim \sqrt{\frac{tG''(\lambda_i)}{2\pi}} e^{-tG(\tilde{\lambda}_i)}, \quad (2.18)$$

onde  $\lambda_i$  é o expoente de Lyapunov a tempo infinito, e a função  $G(\lambda_i)$  possui as seguintes propriedades:  $G(\lambda_i) = G'(\lambda_i) = 0$  e  $G''(\lambda_i) > 0$ . Logo, expandindo  $G(\tilde{\lambda}_i)$  no argumento da exponencial em (2.18) ao redor de  $\lambda_i$ , o primeiro termo diferente de zero resulta em um função gaussiana:

$$P(\tilde{\lambda}_i, t) \sim \sqrt{\frac{tG''(\lambda_i)}{2\pi}} e^{-\frac{tG''(\lambda_i)}{2}(\tilde{\lambda}_i - \lambda_i)^2}, \quad (2.19)$$

---

<sup>2</sup>Por simplicidade de notação, a dependência de  $\tilde{\lambda}_i(t)$  com a condição inicial  $\mathbf{x}_0$  será omitida daqui em diante, no entanto deve ser sempre subentendida.

e o expoente de Lyapunov a tempo infinito é dado por:

$$\lambda_i = \langle \tilde{\lambda}_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_i P(\tilde{\lambda}_i, t) d\tilde{\lambda}_i. \quad (2.20)$$

Logo, para que o sistema apresente UDV, basta que a função (2.19) esteja ao redor de zero, de tal forma que  $\tilde{\lambda}_i$  apresente valores positivos e negativos. Já a quantificação da *intensidade* da UDV é feita através da fração de expoentes positivos [37]:

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} P(\tilde{\lambda}_i(t)) d\tilde{\lambda}_i, \quad (2.21)$$

onde  $\Phi(t)$  fornece a razão de todos os expoentes de Lyapunov a tempo finito  $t$  que assumem valores positivos. Se  $0 < \Phi(t) < 0,5$  então o sistema apresenta UDV, mas a variedade ainda é globalmente estável. Se  $\Phi(t) > 0,5$  então a variedade possui mais órbitas periódicas transversalmente instáveis do que estáveis, portanto ela é globalmente instável, mas ainda possui UDV. O ponto de bifurcação no espaço de parâmetros em que  $\Phi(t) = 0,5$  é chamado ponto de bifurcação de ruptura.

### Intermitência *On-Off* de dois estados

Um caso particular do mecanismo de intermitência acontece quando existem, não apenas uma, mas duas variedades invariantes  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ , cada uma ocupando uma região diferente do espaço de fase. Neste caso, uma trajetória que se aproxime de  $\Sigma$  permanecerá em sua vizinhança por um intervalo de tempo, até se aproximar de uma órbita periódica transversalmente instável, para então ser repelida para longe da variedade. No entanto, ao invés de simplesmente permanecer distante de  $\Sigma$  para retornar posteriormente e o processo se repetir, como no caso da intermitência *on-off* (fig. 2.2(b)), agora a trajetória é acolhida por  $\Sigma'$ , onde acontece exatamente o mesmo mecanismo. O resultado final é que a trajetória fica alternando de maneira intermitente entre as regiões do espaço de fase delimitadas pelas duas variedades, fenômeno chamado de intermitência *on-off* de dois estados [14, 38].

Um sistema relativamente simples pode ser utilizado para exemplificar este mecanismo. Para tanto, considere um mapa com duas variedades invariantes diferentes, ambas apresentando UDV. O mapa em questão é obtido através da seguinte equação (construída a partir do modelo estudado em [39]):

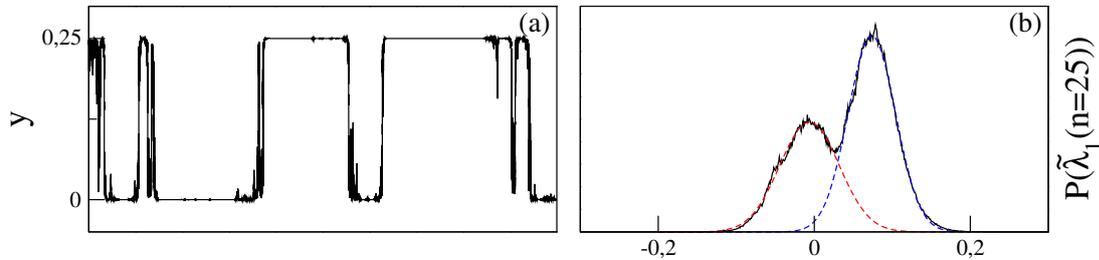
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (2.22a)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} px_n \sin(2\pi y_n) & \text{se } y_n \leq \frac{y_c}{2} \\ \frac{1}{2\pi} px_n \sin[2\pi(y_n - y_c)] + y_c & \text{se } y_n > \frac{y_c}{2} \end{cases}. \quad (2.22b)$$

As duas variedades invariantes são:  $\Sigma$  correspondente à reta  $y = 0$ , e  $\Sigma'$  correspondente a  $y = y_c$ . Inserido em cada uma delas existe um atrator caótico, gerado graças à dinâmica da variável  $x$ . Este atrator é responsável pela criação dos pontos de equilíbrio transversalmente estáveis ou instáveis, que vão determinar a dimensão do subespaço instável do espaço tangente, neste caso  $n_u = 1$  ou  $n_u = 0$ , ou seja, ou existe um ponto instável inserido na variedade ou um ponto de sela.

A identificação das direções longitudinal e transversal neste caso é bastante simples, pois cada variedade se trata de uma reta paralela ao eixo  $x$ , portanto toda a dinâmica transversal está concentrada na direção  $y$ . Logo, para estudar as propriedades de intermitência *on-off* de dois estados, basta então analisar as propriedades da variável  $y$ .

A dinâmica transversal pode então ser observada através da série temporal de  $y$ , representada na figura 2.3(a) para os parâmetros:  $a = 3,8$ ,  $y_c = 0,25$  e  $p = 1,73$ . A existência de intermitência *on-off* de dois estados é claramente observada, percebe-se que a trajetória permanece longos períodos de tempo nas vizinhanças de uma das variedades ( $y = 0$  ou  $y = y_c = 0,25$ ), até ser ejetada para longe dessa variedade e posteriormente acolhida pela outra, dando continuidade ao processo.



**Figura 2.3:** (a) Série temporal do mapa (2.22), com 500000 pontos. (b) Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, as linhas pontilhadas vermelha e azul correspondem a ajustes não-lineares de curvas Gaussianas no formato de (2.19).

A verificação de que este comportamento intermitente é de fato gerado por variabilidade da dimensão instável é feita através do computo da função distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. O sistema (2.22) possui dois expoentes de Lyapunov:  $\tilde{\lambda}_0(n)$  e  $\tilde{\lambda}_1(n)$ . No entanto, é preciso observar o comportamento de  $\tilde{\lambda}_1(n)$  apenas, pois este é o único expoente relacionado com a dinâmica transversal. De fato, o expoente a tempo infinito  $\lambda_0$  depende apenas da dinâmica de  $x$ , pois coincide com o expoente esperado do mapa logístico, e é independente dos parâmetros  $p$  e  $y_c$ .

A distribuição do expoentes de Lyapunov a tempo finito, para  $n = 25$ , está representada na figura 2.3(b) por uma linha cheia preta. É evidente o fato de que existem tanto

expoentes positivos quanto negativos, logo, existe UDV. Além disso, a distribuição possui uma característica bimodal, composta por duas gaussianas dadas por (2.19), o que pode ser verificado pelos ajustes não-lineares representados pelas linhas pontilhadas vermelha e azul. Este comportamento é esperado, pois cada uma dessas distribuições gaussianas é característica da dinâmica transversal de uma das variedades. De fato, cada um dos máximos locais dessa distribuição corresponde ao expoente de Lyapunov a tempo infinito característico da dinâmica de cada variedade.

## 2.2 Turbulência

Turbulência é um termo científico usado para descrever um tipo específico de movimento de fluidos bastante complexo e imprevisível [40]. É extremamente presente na nossa vida cotidiana e possui uma gama de aplicações extensa, que vão desde o movimento de um fio de fumaça, até o movimento do fluxo sanguíneo dentro das nossas artérias, ou então o complicado comportamento de um plasma de fusão dentro de um Tokamak.

Uma generalização da definição de turbulência expande a sua aplicação para além do ambiente da física dos fluidos. De fato, uma possível nova definição seria chamar de turbulento todo fluxo caótico de sistemas espacialmente estendidos [3], onde caótico é utilizado no sentido convencional, ou seja, um fluxo cuja dinâmica apresente dependência sensível às condições iniciais — ou expoente de Lyapunov a tempo infinito positivo. E espacialmente estendido possui uma definição um pouco mais vaga, mas pode ser entendido como um sistema que possua alguma forma de dependência espacial, e que características qualitativas da dinâmica não sejam fortemente influenciadas pelo tamanho do sistema [3].

Do ponto de vista de uma análise de Fourier, um fluxo é turbulento quando a energia do sistema, inicialmente concentrada em alguns poucos modos de Fourier com grandes comprimentos de onda, é redistribuída através de mecanismos não-lineares para modos com comprimento de onda menores. Este processo é bastante conhecido e recebe o nome de cascata de energia.

Devido à complexidade intrínseca ao fenômeno de turbulência, não existe de fato uma definição última do que é um fluxo turbulento. Por isso, no decorrer deste trabalho será adotada uma definição intermediária às duas descritas acima. Um fluxo turbulento será todo aquele que apresenta uma dinâmica caótica no tempo e um perfil espacial altamente irregular. Caso o perfil espacial não seja irregular, e o sistema apresentar caos, então diz-se que o sistema apresenta apenas caos puramente temporal. Os termos turbulência e caos espaço-temporal, no decorrer deste trabalho, serão usados sem distinção de significado.

Esta definição é ao mesmo tempo restrita o suficiente para distinguir dois fenômenos distintos: o caos temporal e a turbulência; e é também ampla o suficiente para incorporar sob o termo turbulência uma variedade de fenômenos físicos diferentes. Por

exemplo, a dinâmica de um fluido com alto número de Reynolds; a formação de padrões em algumas reações químicas; o comportamento irregular de uma chama [3]; ou ainda a dinâmica de um conjunto de três ondas dispersivas monocromáticas acopladas [41].

Do ponto de vista teórico, o estudo de turbulência é bastante difícil, a despeito das equações básicas serem conhecidas. No caso da turbulência de fluidos, deve-se entender as propriedades da equação de Navier-Stokes, e a de suas soluções. No entanto, a equação de NS é tão complicada que uma abordagem estatística é normalmente utilizada [4]. Por isso, a utilização de simulações computacionais constitui hoje uma das mais importantes ferramentas para o estudo da turbulência. Desde 1949 von Neumann já havia previsto que fluxos turbulentos poderiam ser simulados em um computador digital, no entanto, isso só foi possível após o advento dos supercomputadores (aproximadamente 20 anos após a previsão de von Neumann), e do desenvolvimento do método pseudo-espectral [42].

### 2.2.1 A teoria de Kolmogorov

Apesar de não haver uma teoria definitiva para turbulência, em 1941 Kolmogorov desenvolveu um quadro conceitual, conhecido hoje como teoria K41, que se aplica a turbulência *isotrópica e homogênea*, i.e., turbulência que seja estatisticamente invariante sob translações e rotações, é também chamada de turbulência plenamente desenvolvida, e é obtida normalmente para fluxos com número de Reynolds muito alto [40].

Problemas deste tipo possuem infinitos graus de liberdade, cada um associado a uma escala de distância do problema. Dentre estes graus de liberdade, existe um intervalo de dissipação que inclui as escalas de distância que dissipam energia. Além disso, para que a dinâmica do sistema seja mantida, é necessária injetar energia no problema através de alguma fonte externa, tipicamente em escalas de distâncias grandes, para problemas de hidrodinâmica. Entre as escalas de distância onde a energia é tipicamente injetada no sistema, e aquelas em que a energia é dissipada, existe o chamado *intervalo inercial*, uma série de escalas nas quais o sistema é conservativo [43].

Uma questão relevante em problemas de turbulência é a forma como a energia é distribuída entre os infinitos graus de liberdade do problema. Mais especificamente, entre as grandes escalas de distância, que recebem energia de uma fonte externa, e as escalas menores, que dissipam energia. No cenário mais comum, a energia é transferida localmente através do intervalo inercial, de forma que apenas escalas de magnitude similar interagem de forma efetiva.

Foi A. N. Kolmogorov quem primeiramente propôs este mecanismo de transporte de energia, para a turbulência hidrodinâmica. Utilizando apenas as hipóteses de localidade, e de que o processo físico no intervalo inercial é governado por apenas um parâmetro — a taxa de dissipação de energia por unidade de massa  $\epsilon$  — Kolmogorov foi capaz de obter o espectro de energia de um fluxo turbulento em função do número de onda  $\kappa$ , através de

análise dimensional, e mostrar que:

$$E(\kappa) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.23)$$

Esta expressão é chamada de *espectro de Kolmogorov* [43]. O resultado obtido na equação (2.23) está intimamente relacionado com uma importante característica de um fluxo turbulento: a auto-similaridade em escalas pequenas [4], e de forma simplificada apenas diz que a energia do sistema, originalmente concentrada em poucos modos espaciais, se redistribui para modos com número de onda maior através de um mecanismo de cascata de energia. É importante ressaltar que este resultado é válido apenas para o chamado intervalo inercial de números de onda, que corresponde aos números de onda relacionados a escalas de tamanho menores do que  $L$ , a escala típica que corresponde ao tamanho do sistema; e maiores do que  $\ell$ , escala de distância onde a energia começa a ser dissipada por viscosidade.

### 2.2.2 A hipótese de Taylor

Existe uma dificuldade experimental em se obter o espectro de energia no espaço de números de onda, o que exigiria uma quantidade muito grande de sensores em diferentes posições espaciais. Por outro lado, o espectro de energia como função da frequência é muito mais simples de ser obtido, de fato, exige apenas que se monitore um único sensor em diferentes instantes de tempo.

A hipótese de Taylor, largamente utilizada por experimentalistas, permite que se expresse características estatísticas espaciais obtidas para um único instante de tempo em termos de uma série temporal medida em um único ponto do espaço [44]. Taylor argumentou que se a intensidade da turbulência é pequena comparado com a velocidade média do fluxo  $U$ , então uma variação no tempo em um ponto fixo no espaço, pode ser entendida como o resultado de um padrão espacial que não se modificou ao passar uniformemente por este ponto [45].

De maneira simples, determina-se uma correspondência entre incrementos espaciais  $\ell$ , e incrementos temporais  $\tau$ , da seguinte maneira:  $\ell = U\tau$  [4], o que permite escrever:  $U = \nu/\kappa$ . Portanto, pode-se reescrever a lei de  $-5/3$  de Kolmogorov da seguinte maneira:

$$E(\nu) = \mathcal{F}\{E(t)\} \propto \nu^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  representa uma transformada de Fourier.

A hipótese de Taylor não possui uma derivação rigorosa que permita confirmar a sua validade, porém há um grande número de resultados experimentais que indicam que ela é adequada para análise de fluxos turbulentos. No entanto, trabalhos recentes

sugerem que talvez esta hipótese não seja válida sempre e deva então ser usada com cuidado [45]. Mas, é importante ressaltar que, mesmo que a hipótese de Taylor não seja correta, ela é ainda extremamente importante, pois através dela pode-se inferir, de uma maneira bastante simples, que um dado fluxo possui características de turbulência.

# A equação de onda longa regular forçada e amortecida

“You get ideas from daydreaming. You get ideas from being bored. You get ideas all the time.”

Neil Gaiman

Existem na literatura vários modelos utilizados no estudo da turbulência, de tal maneira que a própria escolha de um modelo adequado já não é uma tarefa simples. De fato, a gama de opções é muito extensa e variada, indo desde a relativa simplicidade de uma rede de mapas acoplados até a própria equação de Navier-Stokes da hidrodinâmica.

A escolha do modelo adequado deve avaliar pelo menos duas características: a primeira diz respeito à sua realidade física, i.e., o quanto este modelo de fato representa um problema físico real (ou em alguns casos vários problemas físicos diferentes), e nesse caso é preciso saber quais aproximações estão envolvidas em sua obtenção e quais são os seus limites de validade; a segunda característica é puramente técnica e diz respeito à dificuldade de se resolver o modelo. De fato, uma escolha muito fiel em geral é muito difícil de se tratar analítica e/ou numericamente de tal forma que se consegue extrair poucas informações. Um bom exemplo é a própria equação de Navier-Stokes, teoricamente ela traz todas as informações necessárias para se entender a turbulência em fluidos, no entanto ela é tão complicada que até hoje a turbulência permanece um problema em aberto.

Uma classe de modelos que concilia bem estas duas características são aqueles representados por equações diferenciais parciais com apenas uma dimensão espacial. Obtidos em vários contextos diferentes da física, a lista de escolhas ainda é extensa, e inclui: a equação de Ginzburg-Landau unidimensional, a equação de Schrödinger não-linear unidimensional, a equação KdV [3]. E inclui ainda o modelo escolhido para este estudo: a

*equação de onda longa regular forçada e amortecida.*

A equação de onda longa regular (abreviada por EOLR) surge em física de plasmas, representando ondas de deriva de baixa frequência em um plasma magnetizado com gradientes de temperatura e densidade [46, 47]; em hidrodinâmica, descrevendo ondas com longos comprimentos de onda em águas rasas (uma alternativa para a equação de KdV) [47, 48]; em geofísica, onde descreve ondas de Rossby em fluxos geostróficos rotativos [5].

Nas seções seguintes, as propriedades e características da EOLR são apresentados em detalhes. Na seção 3.1 é feita uma demonstração bastante superficial da equação no contexto de física de plasmas; na seção 3.2 algumas leis de conservação são derivadas; e finalmente na seção 3.3 o método utilizado na integração da equação é discutido em detalhes.

### 3.1 Contextualização em física de plasmas

Esta seção contém uma demonstração bastante superficial de como a equação de onda longa regular pode ser obtida em física de plasmas. É importante ressaltar que o objetivo desta demonstração não é, de forma alguma, ser rigorosa e completa, mas apenas meramente ilustrativa.

Para a derivação da equação de onda longa regular [5, 46, 47], deve-se considerar um plasma com um campo magnético na direção  $\hat{z}$  dado por:  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , além de gradientes de densidade com  $L_n^{-1} = -\partial_x n_0(x)/n_0(x)$  e temperatura eletrônica com  $L_T^{-1} = -\partial_x T_e(x)/T_e(x)$  ao longo da direção  $x$ . Utilizando a equação de continuidade para os íons:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

onde  $n_i$  é a densidade iônica. No decorrer desta breve demonstração os subíndices  $e$  e  $i$  serão utilizados sempre para referenciar propriedades dos elétrons e dos íons, respectivamente.

Utilizando o critério de quasi-neutralidade e assumindo densidade eletrônica adiabática [47], podemos assumir um distribuição de Boltzmann<sup>1</sup> para os elétrons:

$$n_e(\mathbf{r}, t) \cong n_0(x) \exp \left[ \frac{e\Phi(\mathbf{r}, t)}{T_e(x)} \right], \quad (3.2)$$

onde a temperatura dos elétrons  $T_e$  depende de  $x$  apenas. No regime de baixa frequência ( $\omega \ll \Omega_i = \frac{eB}{m_i c}$  onde  $\Omega_i$  é a frequência de ciclotron), têm-se em primeira aproximação que:

<sup>1</sup>Por simplicidade, definimos a constante de Boltzmann igual a 1 ( $K_B = 1$ )

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (3.3)$$

ou seja, pode-se considerar apenas a componente eletrostática do campo elétrico. Além disso, a velocidade é dada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_P, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{v}_E$  corresponde à velocidade de deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , e  $\mathbf{v}_P$  à velocidade de deriva de polarização, respectivamente, dadas por:

$$\mathbf{v}_E = \frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{c\hat{e}_z \times \nabla\Phi}{B}; \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v}_P = \frac{-1}{B\Omega_i} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}, \quad (3.6)$$

onde o subíndice  $\perp$  faz referência à componente do vetor perpendicular ao campo magnético  $\mathbf{B}$ . A derivação das equações (3.5) e (3.6) pode ser encontrada em livros de física de plasmas, como por exemplo a referência [49].

Após substituir as equações (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.1), calcula-se explicitamente os produtos externos e considera-se apenas a componente perpendicular ao campo magnético, o que leva a:

$$-\frac{c^2 m_i T_e}{e^2 B^2} \frac{d\nabla_\perp^2 \Phi}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{cT_e}{eBL_n} \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{c}{BL_T} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

Reescrevendo a equação acima para um potencial adimensional  $\phi = e\Phi/T_e$ , e renomeando as constantes:  $\rho_s = c_s/\Omega_i$ , onde  $c_s^2 = T_e/m_i$  e  $\Omega_i = \frac{eB}{m_i c}$  [6], obtêm-se:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho_s^2 \frac{\partial\nabla_\perp^2 \phi}{\partial t} + \frac{c_s \rho_s}{L_n} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{c_s \rho_s}{L_T} \phi \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0. \quad (3.8)$$

O último passo inclui tomar o limite unidimensional da equação (por conveniência faz-se também  $y \rightarrow x$ ), e introduzir *ad hoc* um termo de forçamento periódico de amplitude  $\epsilon$ , frequência  $\Omega$  e número de onda  $K$ ; e um termo de amortecimento linear [6, 14]. Além disso, por simplicidade, adota-se as seguintes constantes:  $a = -\rho_s^2$ ,  $c = c_s \rho_s L_n^{-1}$  e  $f = -c_s \rho_s L_T^{-1}$ . Desta forma, obtêm-se finalmente a *equação de onda longa regular forçada e amortecida*:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a \frac{\partial^3 \phi}{\partial t \partial x^2} + c \frac{\partial\phi}{\partial x} + f \phi \frac{\partial\phi}{\partial x} + \gamma\phi + \epsilon \text{sen}(Kx - \Omega t) = 0. \quad (3.9)$$

Onde a introdução do termo de forçamento tenta representar a interação da onda de deriva com outros possíveis modos relevantes do plasma, e o termo de amortecimento para garantir que a solução da equação seja limitada [14].

## 3.2 Leis de conservação

Uma vez com a equação em mãos, o próximo passo é tentar resolvê-la, no entanto é sabido que a equação (3.9) é não integrável e possui apenas um número finito de integrais de movimento no regime conservativo ( $\epsilon = \gamma = 0$ ) [48]. Logo, a alternativa é uma abordagem numérica, e neste cenário o conhecimento das leis de conservação é de grande utilidade, pois elas envolvem grandezas escalares dependentes apenas do tempo, o que facilita enormemente a análise da dinâmica da função  $\phi(x, t)$ .

Além de facilitar a análise, grandezas escalares são de grande valor no estudo de sistemas de alta dimensionalidade pois são livres de *erros de projeção*. Esses erros surgem quando se tenta analisar a dinâmica de um sistema com muitas dimensões através de projeções do espaço de fase no plano, pontos distantes em um espaço  $N$ -dimensional podem parecer próximos quando projetados no plano bidimensional. No entanto, as grandezas escalares integram todos os graus de liberdade do espaço de fase, por isso pode-se afirmar com certeza que se uma integral de movimento assume dois valores distintos, para dois estados diferentes do sistema dinâmico, então estes dois estados compreendem duas regiões diferentes do espaço de fase.

Uma maneira de obter tais integrais de movimento é através do conhecimento de uma densidade Lagrangiana que, após a aplicação das equações de Euler-Lagrange, leve à equação (3.9) conservativa (i.e.,  $\epsilon = \gamma = 0$ ). A construção desta densidade Lagrangiana é feita por inspeção e é dada por [48]:

$$\mathcal{L}(\psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, \psi_{xt}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} f \psi_x^3 + c \psi_x^2 + \psi_x \psi_t - a \psi_{xx} \psi_{xt} \right), \quad (3.10)$$

onde  $\phi = \psi_x$ . A aplicação direta do teorema de Noether na equação (3.10) [50] permite obter as leis de conservação a partir das simetrias da densidade Lagrangeana.

Como  $\mathcal{L}$  é invariante quanto a translações temporais  $t = t + \tau$ , obtém-se:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} \int_L \left[ \frac{1}{3} \phi^3(x, t) + c \phi^2(x, t) \right] dx, \quad (3.11)$$

onde  $L$  representa o domínio espacial da função  $\phi(x, t)$ . Analogamente, uma invariância em relação a translações espaciais  $x = x + \eta$  leva a:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_L [\phi^2(x, t) - a \phi_x^2(x, t)] dx, \quad (3.12)$$

e finalmente, uma invariância em relação à própria função  $\psi$ , i.e.,  $\psi = \psi + \xi$  permite a obtenção da seguinte lei de conservação:

$$\mathcal{M}(t) = \frac{1}{2} \int_L \phi(x, t) dx. \quad (3.13)$$

Neste caso, como a densidade Lagrangeana obtida é puramente matemática, i.e., não foi derivada de princípios físicos mas sim construída para fornecer a forma correta da EOLR, então não é possível atribuir um significado físico a cada uma das leis de conservação acima, baseado apenas na simetria a partir da qual foi derivada. De fato, a integral (3.12) foi obtida a partir da simetria em relação a translações espaciais, portanto a identificação correta seria com o momentum linear associado à onda de deriva. No entanto, no contexto de física de plasma  $E(t)$  corresponde à energia da onda<sup>2</sup> [46], por este motivo (3.12) é a lei de conservação que será utilizada para analisar a dinâmica de  $\phi(x, t)$  neste trabalho.

### 3.3 Solução numérica

Um aspecto de primeira importância no estudo numérico de uma equação parcial corresponde ao método de integração utilizado. De maneira geral os métodos envolvem alguma forma de discretização da direção espacial e de suas derivadas, de tal forma que se possa construir um conjunto de  $N$  equações diferenciais ordinárias integráveis numericamente através de uma rotina tradicional de integração, como o Runge-Kutta.

Nesse sentido, existem pelo menos dois métodos largamente utilizados: diferenças finitas (DF) e pseudo-espectral (PS). No que diz respeito à implementação, o método DF é bem mais simples, pois consiste apenas na discretização direta do domínio de integração em  $N$  pontos separados por uma distância definida  $\Delta x$ . As derivadas então são calculadas por algum método numérico entre os disponíveis na literatura [51]. Neste caso as condições de contorno podem ser quaisquer e são facilmente definidas.

No entanto, o custo computacional de uma integração pelo método DF é razoavelmente grande quando há a necessidade de uma grande precisão. Por outro lado, existe o método PS, mais complicado de implementar, limitado a condições de contorno periódicas, mas com um tempo de computação bastante reduzido e que garante uma precisão numérica dentro dos limites desejados [52]. Uma outra vantagem do método PS reside no fato que este fornece uma representação da solução em termos de modos de Fourier bastante adequada para o estudo de turbulência [42].

O princípio básico por trás do método Pseudo-Espectral é relativamente simples, consiste em escrever a função  $\phi(x, t)$  em termos de uma expansão de Fourier, e então

---

<sup>2</sup>Não se deve confundir a energia da onda  $E(t)$  com o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , daqui por diante *todas* as ocorrências da notação  $E$  fazem referência a integral da equação (3.12)

truncar a série em um número finito de modos  $N$  [7]. Para tanto é preciso que a função seja *regular por partes*, i.e., ela pode ter apenas um número finito de descontinuidades finitas e apenas um número finito de valores extremos, máximos e mínimos no intervalo de  $x$  considerado [53]. Estas condições sendo atendidas, pode-se escrever:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \varphi_n(t) e^{i\kappa_n x}, \quad (3.14)$$

onde  $\varphi_n(t)$  é o coeficiente de Fourier dependente do tempo,  $i = \sqrt{-1}$  e  $\kappa_n$  é o número de onda correspondente, dado por:

$$\kappa_n \equiv \frac{2\pi n}{L}, \quad n = -N/2 + 1, \dots, -1, 0, +1, \dots, N/2 \quad (3.15)$$

onde  $L$  é o tamanho da caixa de integração, neste caso foi escolhido  $L = 2\pi$ . A expansão (3.14) já está truncada em um valor de  $N$  arbitrário que, por razões técnicas, precisa ser uma potência de 2. A questão agora é qual o valor de  $N$  adequado para truncar a série, se  $N$  for muito grande o custo computacional é muito grande, entretanto se muito pequeno modos relevantes podem ser descartados. Em simulações numéricas foi possível determinar que, no caso da EOLR,  $N = 128$  é um número de modos de tamanho adequado, e foi utilizado em todas as simulações apresentadas neste trabalho.

A substituição da expansão (3.14) na equação (3.9) resulta num conjunto de  $N$  equações diferenciais ordinárias acopladas para o coeficiente dependente do tempo  $\varphi_n(t)$ , a saber:

$$\dot{\varphi}_n(t) = \frac{1}{a\kappa_n^2 - 1} \left( \gamma\varphi_n(t) + f \mathcal{F} \left\{ \phi(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right\}_n + i\kappa_n c \varphi_n(t) - \delta_{K,|n|} \frac{\epsilon}{2} [\text{sen}(\Omega t) + \text{sgn}(n) i \cos(\Omega t)] \right) \quad (3.16)$$

onde  $\text{sgn}(\cdot)$  é função sinal, que retorna  $+1$  se o argumento é positivo e  $-1$  se negativo; o operador  $\mathcal{F}$  representa uma convolução do produto entre  $\phi$  e sua derivada. Entretanto o cálculo numérico de convoluções é muito custoso no sentido computacional, o que tornaria o código muito lento. Uma alternativa muito mais eficiente é utilizar transformadas rápidas de Fourier inversas ( $FFT^{-1}$ ) para calcular o produto no espaço real e então fazer o caminho oposto ( $FFT$ ) para o espaço de Fourier, para calcular  $\dot{\varphi}_n$ . É por causa dessa manobra computacional que o método é chamado *pseudo-espectral*. O pseudo-código a seguir exemplifica o procedimento utilizado para o cálculo do termo não-linear ( $TNL$ ), a cada passo de integração.

$$\begin{aligned} \phi &\leftarrow FFT^{-1}(\varphi) \\ \phi_x &\leftarrow FFT^{-1}(-i\kappa\varphi) \end{aligned}$$

$$TNL \leftarrow \phi \cdot \phi_x$$

$$TNL \leftarrow FFT(TNL)$$

O uso de *FFT*'s no entanto introduz um erro já bastante conhecido, a intensidade de ruído nos modos de  $\kappa_n$  maiores é amplificada, um processo conhecido como *alias*. Por isso, em cada passo de integração 1/6 dos modos com os maiores  $\kappa$  positivos são zerados, o mesmo foi feito com os modos de  $\kappa$  negativo [42].

A integração numérica das equações (3.16) foi feita utilizando uma rotina de integração baseada no método de Adams de 12<sup>a</sup> ordem preditor-corretor de passo variável, obtida no pacote LSODE [54] (*Livermore solver for ordinary differential equations*). O conjunto de condições iniciais utilizadas é dado por:

$$\varphi_1(0) = \sigma_1 R(0, 1) \tag{3.17}$$

$$\varphi_2(0) = \sigma_2 R(0, 1) \tag{3.18}$$

$$\varphi_n(0) = \sigma_3 \quad (n = 0, 3, 4, \dots), \tag{3.19}$$

onde  $\sigma_1 = 0, 1$ ,  $\sigma_2 = 0, 01$ ,  $\sigma_3 = 1, 0 \times 10^{-5}$ , e  $R(0, 1)$  é um número pseudo-aleatório com distribuição de probabilidade uniforme entre 0 e 1. Os valores dos parâmetros utilizados foram:  $a = -0, 28711$ ,  $c = 1, 0$ ,  $f = -6, 0$ ,  $\gamma = 0, 1$ ,  $K = 1, 0$  e  $\Omega = 0, 65$ , de tal forma que  $\epsilon$  é o parâmetro de controle.

# Resultados

“Once you eliminate the impossible, whatever remains, no matter how improbable, must be the truth.”

Arthur Conan Doyle

O início da turbulência em sistemas dinâmicos espacialmente estendidos é um problema de grande importância. No entanto, apesar de ser largamente estudado, ainda permanece sem uma solução definitiva [4]. Do ponto de vista de uma análise de Fourier (como a feita na seção 3.3), entende-se que o início da turbulência ocorre quando a variação de um parâmetro permite que a energia do sistema, inicialmente concentrada em alguns poucos modos, seja então distribuída entre muitos modos espaciais.

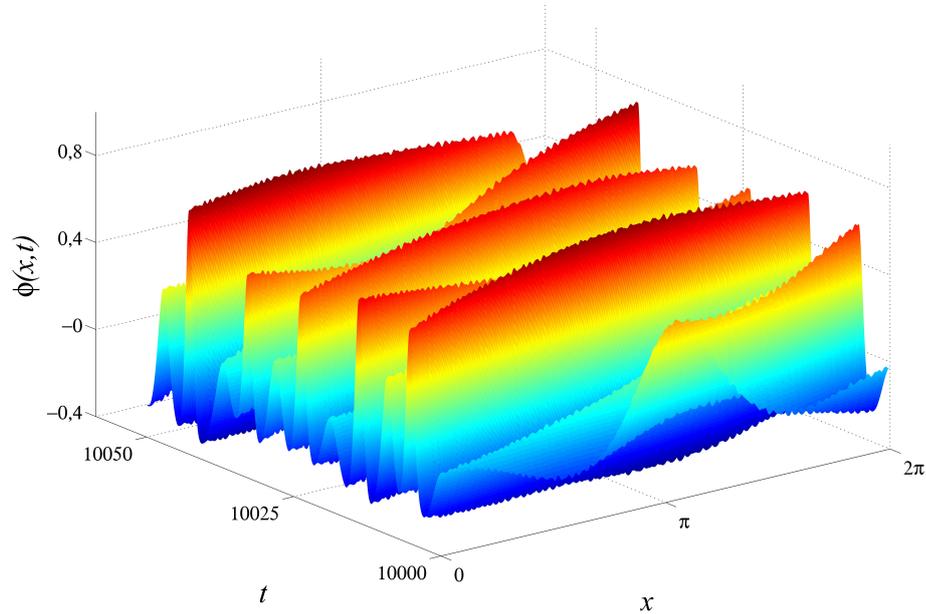
Por esse motivo, a utilização do método pseudo-espectral é muito adequada para o estudo de turbulência em equações diferenciais parciais, pois fornece de maneira natural uma representação da solução em termos dos coeficientes da expansão de Fourier. Assim, um estado turbulento é facilmente identificado quando há excitação de modos de ordem superior.

Neste capítulo estão expostos os resultados obtidos no estudo de uma transição de caos temporal para turbulência que acontece na equação (3.9). Na seção 4.1 a transição é descrita de maneira relativamente qualitativa, dando ênfase ao seu caráter intermitente. Na seção 4.2 a relação entre o comportamento intermitente da solução e a existência de variabilidade da dimensão instável é apresentada.

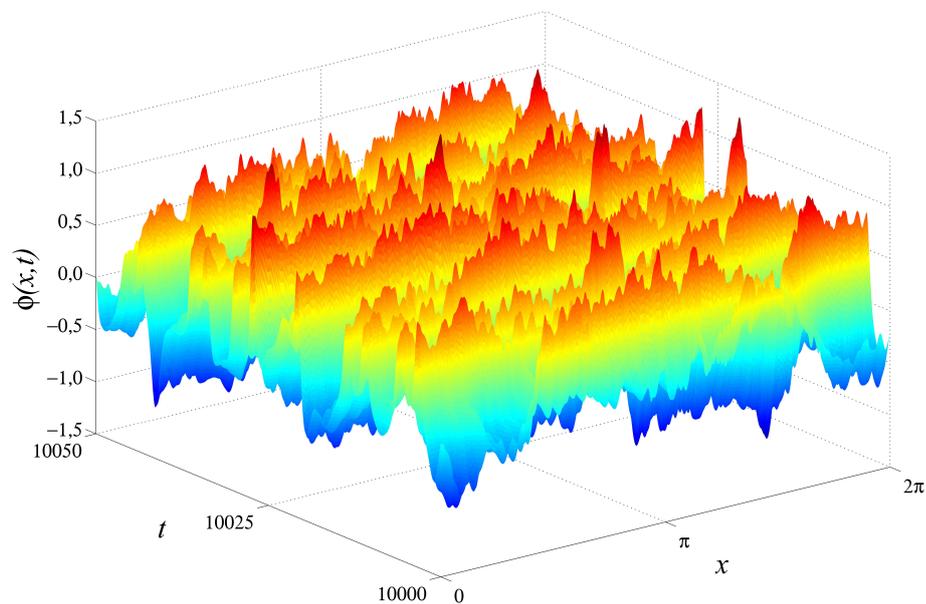
## 4.1 Intermitência *on-off* de dois estados

A equação de onda longa regular, dada por (3.9), apresenta uma transição de um estado de caos puramente temporal para caos espaço-temporal ou turbulência. Para

tanto, basta variar o valor do parâmetro  $\epsilon$  (os outros parâmetros são mantidos fixos nos valores apresentados na página 27). O comportamento dinâmico da função  $\phi(x, t)$  está apresentado nas figuras 4.1 e 4.2, para valores de  $\epsilon$  iguais a  $\epsilon = 0,195$  e  $\epsilon = 0,210$ .



**Figura 4.1:** Perfil espacial da onda  $\phi(x, t)$ , para  $\epsilon = 0,195$ , neste caso vê-se a propagação de uma onda onde poucos modos espaciais são excitados, mas o perfil temporal é caótico.



**Figura 4.2:** Perfil espacial da onda  $\phi(x, t)$ , para  $\epsilon = 0,21$ , neste caso o perfil espacial já é bastante irregular devido ao fato de que vários modos de Fourier estão sendo excitados, caracterizando um estado de caos espaço-temporal ou turbulência

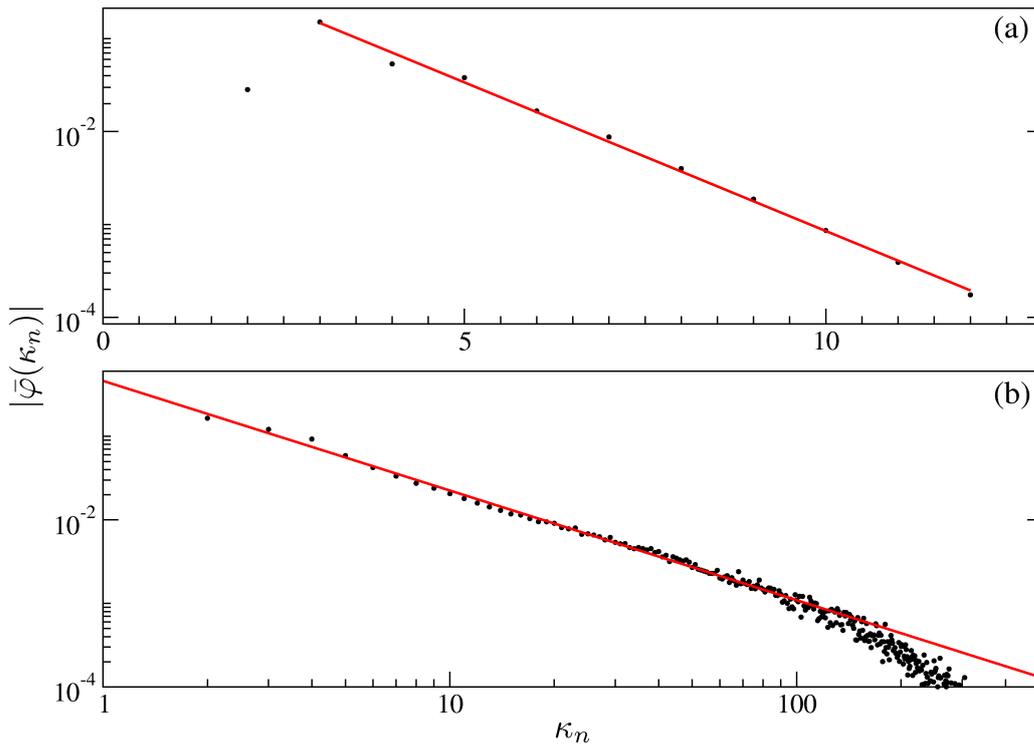
No caso de caos puramente temporal (figura 4.1), a função  $\phi(x, t)$  apresenta uma onda propagante com um perfil espacial relativamente ordenado, o que significa que apenas alguns poucos modos espaciais foram excitados, no entanto o perfil temporal da onda é

caótico, o que pode ser observado pela irregularidade dos máximos no eixo temporal. Quando o valor de  $\epsilon$  é aumentado o perfil espacial da onda torna-se bastante irregular (figura 4.2), pois vários modos de Fourier são excitados, o que caracteriza um estado de caos espaço-temporal ou turbulência.

Esta distinção em termos da quantidade de modos de Fourier excitados é mais evidente quando se analisa o espectro de Fourier médio  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)|$  da onda  $\phi(x, t)$ , calculado da seguinte maneira:

$$|\bar{\varphi}(\kappa_n)| = \frac{1}{t_{max}} \sum_{t=0}^{t_{max}} |\varphi_n(t)|, \quad (4.1)$$

onde  $\varphi_n(t)$  é o coeficiente da expansão de Fourier (3.14) correspondente ao número de onda  $\kappa_n$ , e  $t_{max}$  é o tempo de integração utilizado para o cálculo de (4.1), que é arbitrário, contanto que seja grande o suficiente para garantir que o valor calculado para  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)|$  seja representativo de toda a dinâmica do sistema, nestas simulações foi utilizado  $t_{max} \sim 10^6$ .



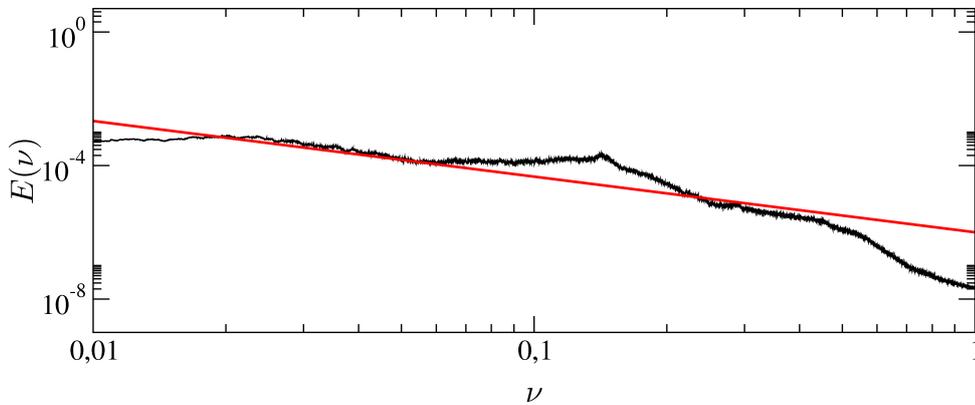
**Figura 4.3:** Espectro médio de Fourier (4.1) para (a)  $\epsilon = 0,1990$ , onde a solução da equação (3.9) apresenta apenas caos temporal, percebe-se a dependência dos espectro com os números de onda é exponencial (linha reta numa escala logarítmica); (b)  $\epsilon = 0,2100$ , a solução é turbulenta, o que se verifica pela dependência tipo lei de potência do espectro de Fourier (linha reta num gráfico log-log)

Os espectros médios respectivos aos regimes de caos temporal e turbulência estão representados nas figuras 4.3 (a) e (b). Para melhor visualização do espectro, os cálculos foram feitos com  $N = 1024$  modos de Fourier. Para o regime dinâmico de caos puramente

temporal o espectro decai exponencialmente para números de onda maiores do que  $\kappa_n = 3$ , ou seja, pode-se ajustar aos pontos simulados uma curva do tipo  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)| \sim e^{-\sigma\kappa_n}$ , onde  $\sigma = 0,727 \pm 0,014$ . Os pontos simulados e o respectivo ajuste estão desenhados na figura 4.3(a) em escala logarítmica no eixo das ordenadas.

Nos casos em que a onda apresenta um comportamento turbulento (valores de  $\epsilon$  maiores), espera-se que o decaimento de  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)|$  com os números de onda seja muito mais lento do que uma exponencial, pois isto confirma a hipótese de que muito mais modos de Fourier estão de fato envolvidos na dinâmica. O que se verifica é que a dependência do espectro médio de Fourier com os números de onda segue uma lei de potência, dada por  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)| \sim \kappa_n^{-\varpi}$ , com  $\varpi = 1,558 \pm 0,019$ . Na figura 4.3(b) os pontos simulados e a curva ajustada estão representados em uma gráfico log-log.

No caso turbulento, a energia se redistribui dos modos de Fourier com  $\kappa$  pequenos para modos com  $\kappa$  grande, através de um mecanismo de cascata de energia. Para verificar que a equação (3.9), para alguns valores de  $\epsilon$ , de fato apresenta soluções turbulentas no sentido de Kolmogorov (com cascata de energia), é preciso analisar o espectro de Energia em função do número de onda, i.e.,  $E(\kappa)$ . No entanto, uma análise semelhante é feita de maneira muito mais simples computando a transformada de Fourier da energia (3.12) na variável temporal  $E(\nu) = \mathcal{F}\{E(t)\}$ , e então utilizar a hipótese de Taylor (seção 2.2.2). Este resultado está representado na figura 4.4 para  $\epsilon = 0,2100$ .

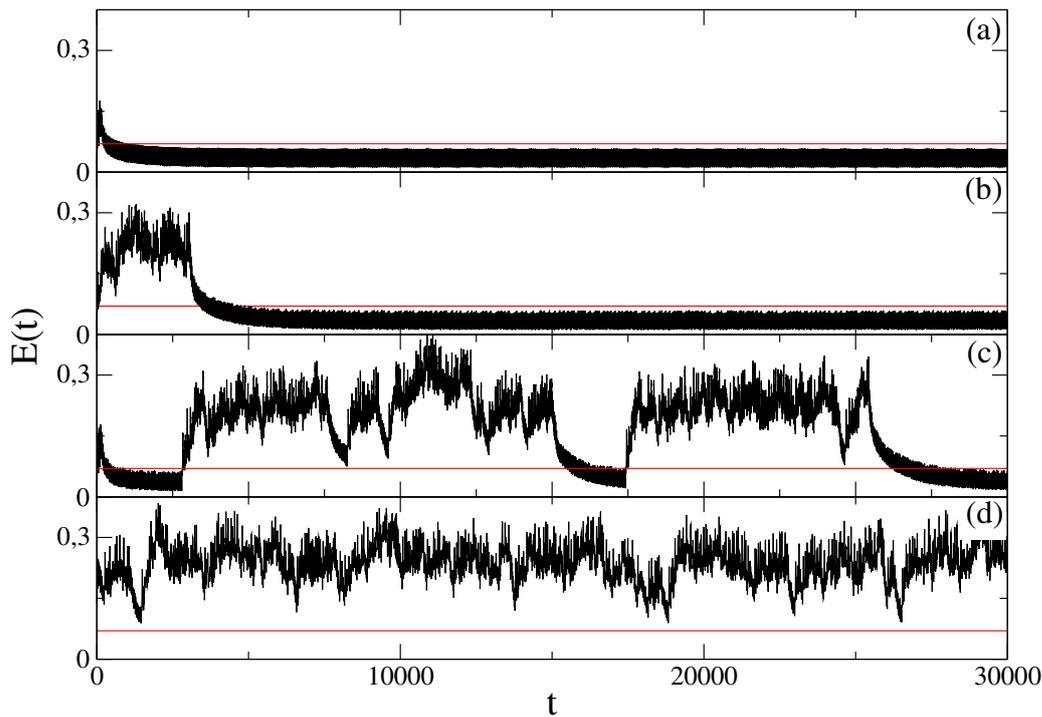


**Figura 4.4:** Espectro de Fourier da energia (eq. (3.12))  $E(\nu)$  em função da frequência  $\nu$ , para  $\epsilon = 0,2100$ . A curva vermelha representa um espectro de Kolmogorov  $E(\nu) \sim \nu^{-5/3}$ . Durante um intervalo considerável de  $\nu$  a semelhança entre as duas curvas é considerável, exceto por um pico ao redor de  $\nu \approx 0,1$  que está relacionado com a frequência do termo indutor, dada por  $\Omega/2\pi \approx 0,1034$

O espectro de Fourier da energia  $E(\nu)$  (figura 4.4) apresenta pelo menos três comportamentos distintos: para valores de  $\nu$  bastante pequenos há um comportamento semelhante ao ruído do tipo  $1/f$  [55]; para valores de  $\nu$  bastante grandes o espectro apresenta um decaimento exponencial (*heavy tail*); para valores intermediários de  $\nu$  há uma grande semelhança com o espectro  $-5/3$  de Kolmogorov. De fato, superposta à curva de  $E(\nu)$  está

representada uma curva  $E(\nu) \sim \nu^{-5/3}$  para guiar os olhos<sup>1</sup>. A semelhança entre as duas curvas é bastante grande, exceto por um pico próximo de  $\nu \approx 0,1$ , que está relacionado com a frequência do termo indutor da equação (3.9), que é igual a  $\Omega/2\pi \approx 0,1034$ .

Portanto, a equação (3.9) apresenta soluções com caos puramente temporal ( $\epsilon$  pequeno) e soluções turbulentas ( $\epsilon$  grande). No entanto ainda resta responder qual o mecanismo dinâmico responsável por essa mudança de comportamento quando se aumenta o valor de  $\epsilon$ . Para tanto, a análise do comportamento dinâmico da energia do sistema (equação (3.12)) para diferentes valores de  $\epsilon$  é bastante adequada, pois ela é sensível ao comportamento global do sistema. Na figura 4.5 a energia em função do tempo está representada para diferentes valores de  $\epsilon$ : (a) para  $\epsilon = 0,1920$ , logo antes do surgimento do atrator caótico, a dinâmica do sistema é periódica; (b) para  $\epsilon = 0,1950$ , o sistema já apresenta uma dinâmica de caos temporal; (c) para  $\epsilon = 0,2003$ , o sistema encontra-se em um estado de intermitência, onde ele fica alternando entre estados de caos temporal e estados turbulentos; (d) para  $\epsilon = 0,2030$  o sistema já apresenta apenas caos espaço-temporal ou turbulência.



**Figura 4.5:** Evolução temporal da energia do sistema para diferentes valores de  $\epsilon$ . (a)  $\epsilon = 0,1920 < \epsilon_t$  o sistema apresenta uma dinâmica periódica; (b)  $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_\ell$ , a dinâmica é temporalmente caótica; (c)  $\epsilon_\ell < \epsilon < \epsilon_h$ , intermitência entre estados de caos temporal e turbulência; (d)  $\epsilon = 0,2030 > \epsilon_h$ , a dinâmica do sistema é turbulenta. A linha vermelha marca o limite de variação das flutuações da energia no ramo inferior, dado por  $\mathcal{E} = 0,07$ .

Define-se o valor crítico  $\epsilon_t = 0,19250 \pm 0,00001$  como o valor de  $\epsilon$  para o qual o

<sup>1</sup>É bastante importante ressaltar que esta curva não se trata de um ajuste mas apenas uma curva teórica sobreposta ao espectro calculado numericamente.

sistema deixa de ser periódico e passa a ser temporalmente caótico. Os mecanismos através dos quais essa bifurcação ocorre serão discutidos na seção seguinte. Neste momento, o interesse reside em como o estado de caos puramente temporal perde estabilidade e o sistema se torna turbulento. Por isso, deve-se olhar com mais cuidado as figuras 4.5(b), (c) e (d).

Para valores de  $\epsilon$  maiores do que  $\epsilon_t = 0,19250$ , porém menores do que um segundo valor crítico  $\epsilon_\ell = 0,20020 \pm 0,00025$ , a dinâmica é caótica no tempo (figura 4.5(b)). Além disso, a energia do sistema oscila ao redor de um valor médio  $\sim 0,05$  e é limitada a valores menores do que  $\mathcal{E} = 0,07$  (linha vermelha <sup>2</sup> na figura 4.5). No formalismo do espaço de fase de Fourier do sistema (espaço onde as variáveis dependentes correspondem aos modos de Fourier da expansão (3.14)) isso significa que a dinâmica reside em uma região finita do espaço de fase que permite valores de energia nesse intervalo. Para  $\epsilon$  maior do que  $\epsilon_h \approx 0,20100 \pm 0,00050$ , a dinâmica é turbulenta, e a energia da onda oscila ao redor de um valor médio  $\sim 0,25$ , e é sempre maior do que  $\mathcal{E}$ .

Logo, existem dois ramos de energia bastante distintos para as soluções desta equação. Um ramo de baixa energia, limitado a valores de  $E$  sempre menores do que  $\mathcal{E}$ , correspondente à dinâmica de caos temporal; e um ramo de alta energia, com valores sempre maiores do que  $\mathcal{E}$ , correspondente à dinâmica de caos espaço-temporal. Como a energia é um escalar, integrado em todas as variáveis do espaço de fase, ela não possui erros de projeção. Logo, como não há nenhuma sobreposição entre estes dois ramos de energia, pode-se afirmar que as trajetórias do sistema em cada um destes estados dinâmicos moram em conjuntos que ocupam regiões *distintas* do espaço de fase.

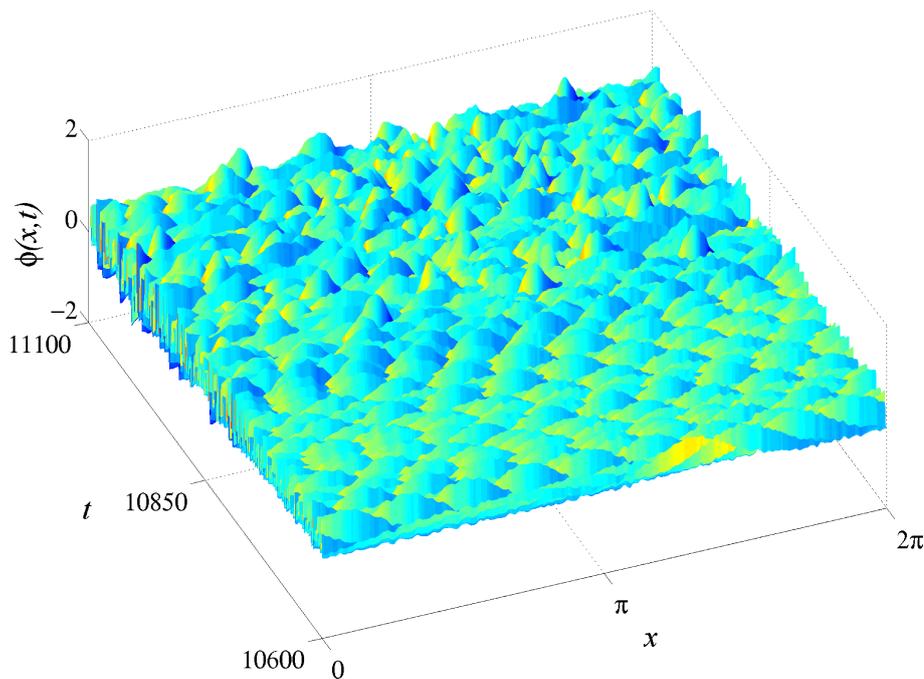
Portanto, associado à dinâmica de caos temporal ( $\epsilon < \epsilon_\ell$ ) existe um atrator caótico de baixa dimensionalidade **A**. Da mesma forma, associada à dinâmica de caos espaço-temporal ( $\epsilon > \epsilon_h$ ), existe um segundo atrator, de maior dimensionalidade, **B**. Estes atratores estão inseridos em duas variedades diferentes imersas no espaço de fase, sendo que cada uma ocupa uma região distinta deste espaço. Esta é a única maneira de garantir que trajetórias em **A** possuam energias em um determinado ramo, e trajetórias em **B** energias em outro ramo distinto, sem que haja sobreposição entre eles.

Para valores de  $\epsilon$  entre  $\epsilon_\ell$  e  $\epsilon_h$ , a energia do sistema fica alternando de maneira intermitente entre esses dois ramos 4.5(c). O que significa que a dinâmica do sistema alterna entre períodos de caos-temporal e caos espaço-temporal. Este comportamento é muito semelhante àquele gerado pelo mecanismo de intermitência *on-off* de dois estados descrito na seção 2.1.3, onde, neste caso, o sistema pode se encontrar em dois estados *desligados*, um próximo ao atrator temporalmente caótico **A**, e outro próximo ao atrator de caos espaço-temporal **B**. Os estados ligados correspondem aos estados intermediários, quando a trajetória visita regiões do espaço de fase distantes tanto de **A** quanto de **B**.

<sup>2</sup>o valor de  $\mathcal{E}$  foi escolhido de forma arbitrária apenas para evidenciar a diferença entre os dois ramos de energia

Imaginando uma trajetória hipotética neste espaço, suponha que ela esteja próxima do atrator  $A$ . Ela permanecerá nessa região por um período arbitrário de tempo, durante o qual a dinâmica do sistema será semelhante à dinâmica de  $A$ , i.e., o sistema apresentará caos puramente temporal. Passado um tempo  $\tau$ , ocorrerá um *estouro*, e a trajetória então será ejetada para longe do atrator, período correspondente a um estado *ligado*. Posteriormente o sistema pode ou voltar para as vizinhanças de  $A$ , ou ainda se aproximar do atrator  $B$ , e neste caso, a trajetória irá permanecer sob a influência da dinâmica de caos espaço-temporal que existe em  $B$ , até que outro *estouro* ocorra e o processo se repita.

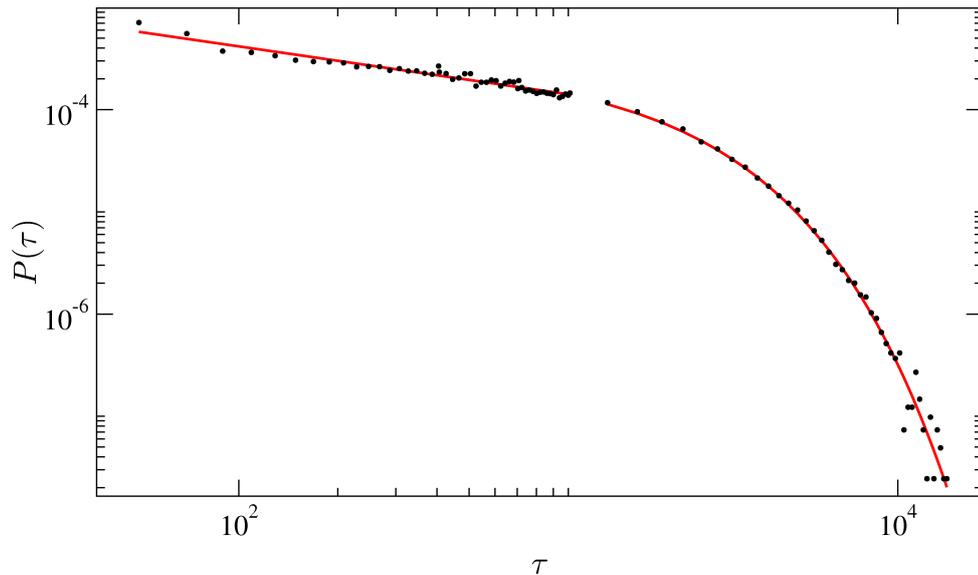
Toda esta análise em termos de atratores é feita no espaço de Fourier da função. No espaço real, interessa apenas o comportamento da solução  $\phi(x, t)$ . Na figura 4.6 observa-se o perfil espacial de  $\phi(x, t)$  durante um curto intervalo de tempo ao redor da ocorrência de um estouro, pode-se ver que o perfil espacial da onda começa relativamente ordenado (região de caos temporal), no entanto, após o estouro vários modos de Fourier são excitados, e o perfil torna-se turbulento.



**Figura 4.6:** Perfil espacial da onda, com detalhe para um momento de *burst*,  $\epsilon = 0, 2005$ . Neste caso a escala de tempo é bastante diferente dos outros gráficos.

A caracterização da intermitência é feita através do cálculo do histograma da distribuição do tempo  $\tau$  de um estado laminar, i.e., o tempo que uma trajetória típica permanece nas vizinhanças de um dos dois estados. Na figura 4.7 pode-se ver a distribuição dos tempos  $\tau$  que a trajetória permanece próxima do estado de baixa energia, isto é, do atrator  $A$  no espaço de Fourier.

Percebe-se que a função  $P(\tau)$  apresenta duas regiões bem definidas: uma região de lei de potência, para valores baixos de  $\tau$ ; e uma região de decaimento exponencial (tipo cauda pesada), para valores grandes de  $\tau$ . Este comportamento é condizente com



**Figura 4.7:** Histograma mostrando a distribuição dos estados laminares  $\tau$ , calculado como sendo o tempo em que uma trajetória típica permanece próxima do estado de baixa energia.

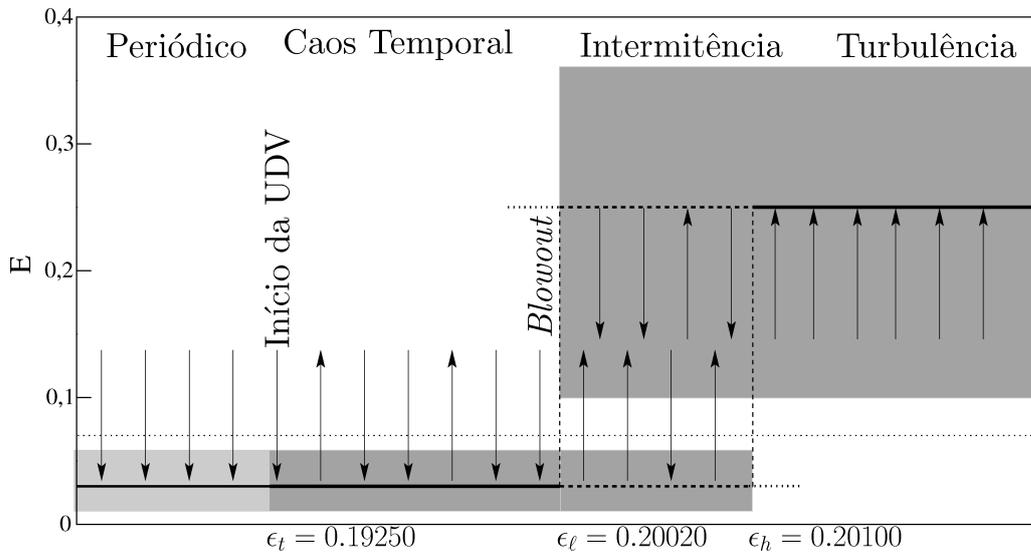
o esperado no caso de intermitência *on-off* de dois estados, pois está de acordo com a equação (2.17). O ajuste dos pontos simulados fornece os valores  $\nu = -0,469 \pm 0,016$  e  $\gamma = -0,00067 \pm 0,00001$ , para os expoentes dos ramos de lei de potência e exponencial, respectivamente. É importante ressaltar que este tipo de distribuição corresponde a uma assinatura da intermitência *on-off*, e que pode ser obtida apenas da análise da série temporal de um sistema dinâmico.

## 4.2 Variabilidade da dimensão instável

Na seção anterior, foi descrita a transição de caos temporal para caos espaço-temporal que acontece de maneira intermitente na equação de onda longa regular forçada e amortecida, quando se varia o valor do parâmetro de forçamento  $\epsilon$ . Nesta seção, será argumentado que o mecanismo dinâmico gerador da intermitência é a perda de estabilidade transversal de algumas das infinitas órbitas periódicas longitudinalmente instáveis imersas nos atratores caóticos A e B. Este mecanismo foi discutido na seção 2.1.3 e recebe o nome de *variabilidade da dimensão instável* (UDV).

Esta transição está esquematizada na figura 4.8, em termos do comportamento assintótico da energia e da estabilidade transversal do atrator correspondente. Neste esquema, a média das flutuações da energia está representada por uma linha preta cheia (pontilhada se o atrator for transversalmente instável), e as flutuações estão representadas como uma faixa cinza ao redor da média. As setas verticais indicam a estabilidade transversal das órbitas periódicas imersas nos atratores, se apontam em direção ao atrator representam órbitas estáveis. A linha pontilhada representa o limite de variação da

energia no ramo inferior e é igual a  $\mathcal{E} = 0,07$ .



**Figura 4.8:** Desenho esquemático da transição, mostrando a existência de dois ramos de energia e a estabilidade transversal correspondente. As regiões cinzas correspondem ao limite de variação das flutuações da energia em cada estado, e as linhas pretas às respectivas médias.

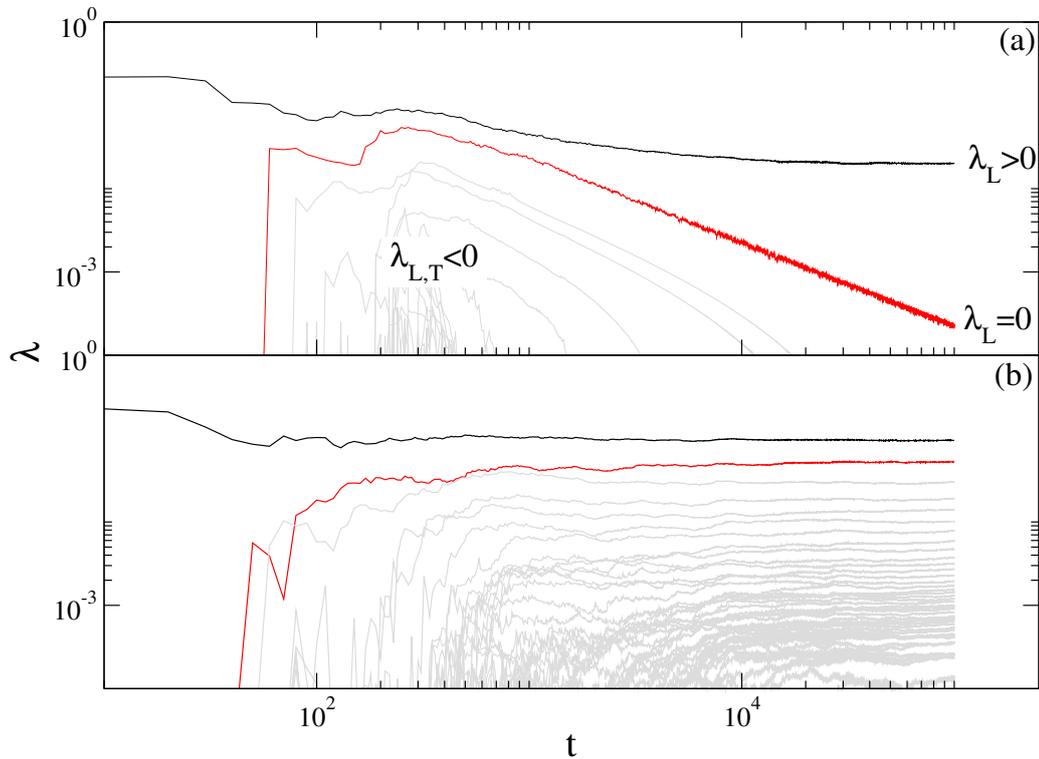
Vê-se então que para  $\epsilon < \epsilon_t$  o sistema apresenta um atrator periódico transversalmente estável, cuja dinâmica pode ser observada em 4.5(a). Para  $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_l$ , o sistema apresenta uma dinâmica caótica de baixa energia (figura 4.5(b)). Como a maioria das órbitas periódicas imersas em A ainda são transversalmente estáveis<sup>3</sup>, o atrator como um todo é globalmente estável, de tal forma que as trajetórias dentro da bacia de atração de A tendem assintoticamente para o atrator. No entanto, algumas poucas órbitas periódicas são transversalmente instáveis, de forma que a dinâmica transiente pode ser intermitente, possibilitando ao sistema fazer algumas excursões no ramo de alta energia antes de cair definitivamente no atrator A. Este comportamento de fato é observado na figura 4.5(b) para tempos pequenos.

Para  $\epsilon > \epsilon_h$ , o estado de alta energia é globalmente estável, e o de baixa energia instável. Isso é o mesmo que dizer que a maioria das órbitas periódicas longitudinalmente instáveis imersas em B são transversalmente estáveis. O que significa que assintoticamente a energia do sistema tende ao ramo superior (figura 4.5(d)). No entanto, para  $\epsilon_l < \epsilon < \epsilon_h$ , ambos os atratores A e B são transversalmente instáveis, ou seja, mais da metade das órbitas periódica imersas em A e B são instáveis na direção transversal aos atratores. Logo, trajetórias do sistema permanecem em um comportamento intermitente perene, alternando entre as vizinhanças de A e B, portanto, a energia do sistema fica alternando

<sup>3</sup>A quantificação de órbitas periódicas estáveis ou instáveis imersas em um atrator deve sempre ser entendida de acordo com a teoria da medida, onde órbitas com maior medida tem maior influência na dinâmica do que órbitas com medida menor. Logo, quando se diz, por exemplo, que 50% das órbitas são estáveis a referência não é ao número absoluto de órbitas estáveis, mas à influência das órbitas de acordo com a sua medida.

de forma intermitente entre os ramos de baixa e de alta energia. Este comportamento é claramente observado na figura 4.5(c).

Para que a UDV seja a causa da intermitência observada no sistema, é necessário que os conjuntos **A** e **B** sejam de fato atratores caóticos no espaço de Fourier. A determinação definitiva da existência de caos nesses conjuntos só pode ser feita através do computo dos expoentes de Lyapunov a tempo infinito do sistema, calculados utilizando o procedimento descrito na seção 2.1.2, aplicado às equações de evolução temporal dos modos de Fourier (equação (3.16)). Na figura 4.9 pode-se observar a convergência dos expoentes calculados através da equação (2.15).

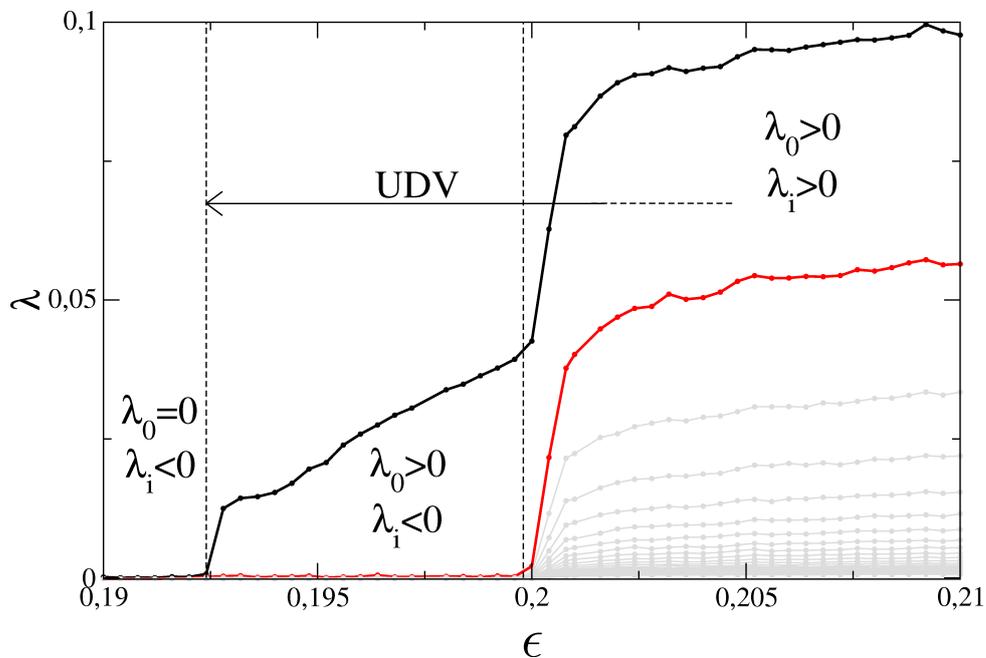


**Figura 4.9:** Os 30 maiores expoentes de Lyapunov do sistema, (a) para um caso de caos temporal  $\epsilon = 0,195$ , e (b) para um caso de caos espaço-temporal  $\epsilon = 0,205$ .

Os expoentes de Lyapunov do sistema para  $\epsilon_t < \epsilon = 0,195 < \epsilon_\ell$  podem ser vistos na figura 4.9(a). Neste caso, existe um expoente que tende a um valor positivo (linha preta), relacionado à dinâmica caótica do atrator **A** na direção longitudinal. O expoente que decai como uma lei de potência (linha vermelha) pode ser considerado zero para  $t \rightarrow \infty$ . Todos os outros que decaem mais rápido do que uma lei de potência (linhas cinzas) são negativos. Pode-se identificar que, a tempo infinito, os primeiros expoentes estão relacionados à dinâmica longitudinal do atrator (por isso a representação  $\lambda_L$ ), e alguns expoentes negativos representam a dinâmica transversal ( $\lambda_T$ ). É importante lembrar que para  $\epsilon < \epsilon_\ell$  o atrator caótico **A** ainda é globalmente estável, por isso os expoentes de Lyapunov relacionados à dinâmica transversal devem ser negativos, a despeito de algumas órbitas periódicas serem transversalmente instáveis.

No caso turbulento, especificamente para  $\epsilon = 0,205 > \epsilon_h$ , os expoentes de Lyapunov estão representados na figura 4.9(b), onde pode-se ver claramente a existência de vários expoentes positivos. Este comportamento é de fato esperado, pois quando há turbulência vários modos espaciais são excitados. Numa análise no espaço de fase de Fourier isso significa que há divergência local de trajetórias na direção puramente temporal e em várias direções espaciais diferentes.

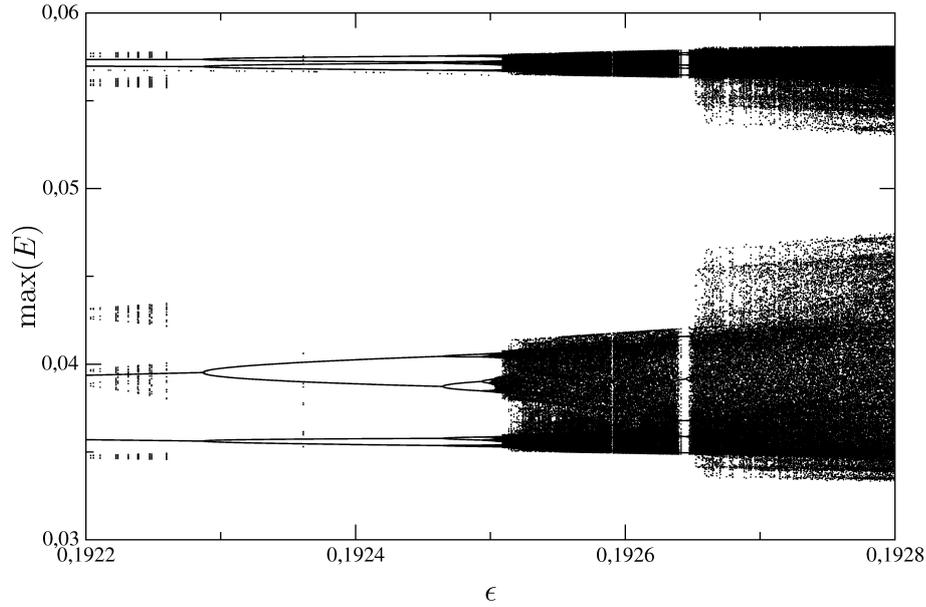
Na figura 4.10 está representado o espectro de expoentes de Lyapunov a tempo infinito ( $\lambda_i$ ) como função do parâmetro  $\epsilon$ . Para  $\epsilon < \epsilon_t$  o sistema possui o maior expoente nulo  $\lambda_0 = 0$  e todos os outros negativos ( $\lambda_i < 0$ ), logo a dinâmica é periódica. Para  $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_\ell$ , tem-se  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_i < 0$ , logo o sistema apresenta apenas caos temporal. Para  $\epsilon > \epsilon_h$  tem-se  $\lambda_0 > 0$  e  $\lambda_i > 0$ , logo o sistema apresenta caos espaço-temporal ou turbulência.



**Figura 4.10:** Espectro de Lyapunov como função do parâmetro  $\epsilon$ . Os expoentes  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$  estão representados por uma linha preta, vermelha e cinza, respectivamente.

Uma questão que surge naturalmente neste cenário de intermitência gerada por UDV, é como o atrator A perde estabilidade transversal. Na verdade, ele já nasce com variabilidade da dimensão instável. Isso pode acontecer se o atrator surgir de uma crise interior, ou seja, da colisão de um atrator caótico com uma órbita periódica instável. Este cenário é chamado de *UDV induzida por crise* e não requer a existência de um conjunto invariante dentro do qual o atrator deve existir, mas apenas que o atrator possua órbitas periódicas cujas dimensões do subespaço instável sejam diferentes [37].

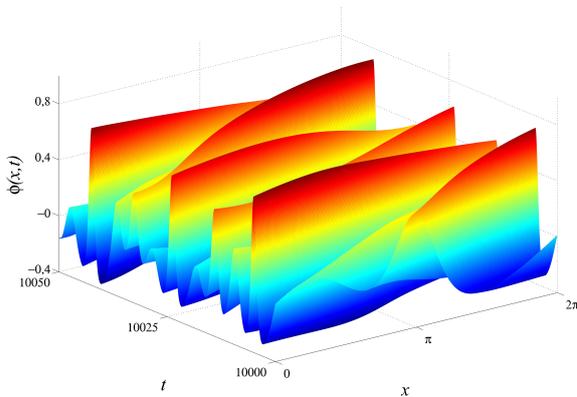
Este cenário de UDV induzida por crise pode ser verificado através da análise de um diagrama de bifurcação (figura 4.11), que consiste de um gráfico do estado assintótico



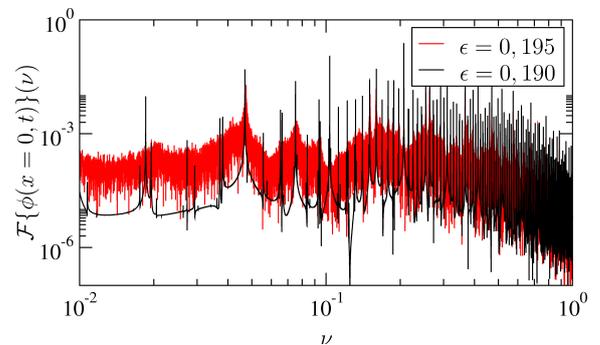
**Figura 4.11:** Diagrama de bifurcação para os valores de máximo da energia contra o parâmetro de controle  $\epsilon$ . Pode-se ver o surgimento repentino de um atrator caótico, a partir de uma órbita periódica, para  $\epsilon = \epsilon_t$ .

do sistema como função do parâmetro  $\epsilon$ . Neste caso, o diagrama foi construído com os valores máximos da energia da onda, obtidos para um tempo de integração longo o bastante para que o sistema não se encontre mais em um estado transiente.

Verifica-se então que nas redondezas de  $\epsilon = \epsilon_t = 0,19250$ , há o surgimento repentino de um atrator caótico, a partir de uma órbita periódica que existia para  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$  e perdeu estabilidade transversal. No sentido contrário, o atrator caótico que existe para  $\epsilon \gtrsim \epsilon_t$  desaparece devido a uma crise interior: ele se choca com uma órbita periódica instável, dando origem a uma órbita periódica estável que existe apenas para  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$ .



(a) Perfil espacial da onda  $\phi(x, t)$  para  $\epsilon = 0,190$ , neste caso há uma onda propagante, mas o perfil temporal é periódico.



(b) Espectro de Fourier mostrando a diferença entre o perfil temporal para  $x = 0,0$  dado por  $\phi(x = 0, t)$ , no caso periódico e temporalmente caótico.

**Figura 4.12:** Detalhes da dinâmica periódica para  $\epsilon = 0,190$ , antes do surgimento do atrator caótico.

O perfil espacial da função  $\phi(x, t)$  para um regime periódico ( $\epsilon = 0,190 < \epsilon_t$ ) está representado na figura 4.12(a), apenas para complementar o entendimento geral da dinâmica. Devido à semelhança do perfil com o da figura 4.1, a transformada de Fourier no tempo de um ponto específico no espaço — dada por  $\mathcal{F}\{\phi(x = 0, t)\}(\nu)$  — foi calculada para os valores de  $\epsilon$  iguais a  $\epsilon = 0,190$  e  $\epsilon = 0,195$ , e está representada na figura 4.12(b). Percebe-se então que, a despeito da semelhança, o perfil espacial para  $\epsilon = 0,190$  é diferente qualitativamente do perfil para  $\epsilon = 0,195$ , sendo o primeiro periódico (ou no máximo quasiperiódico) e o segundo caótico.

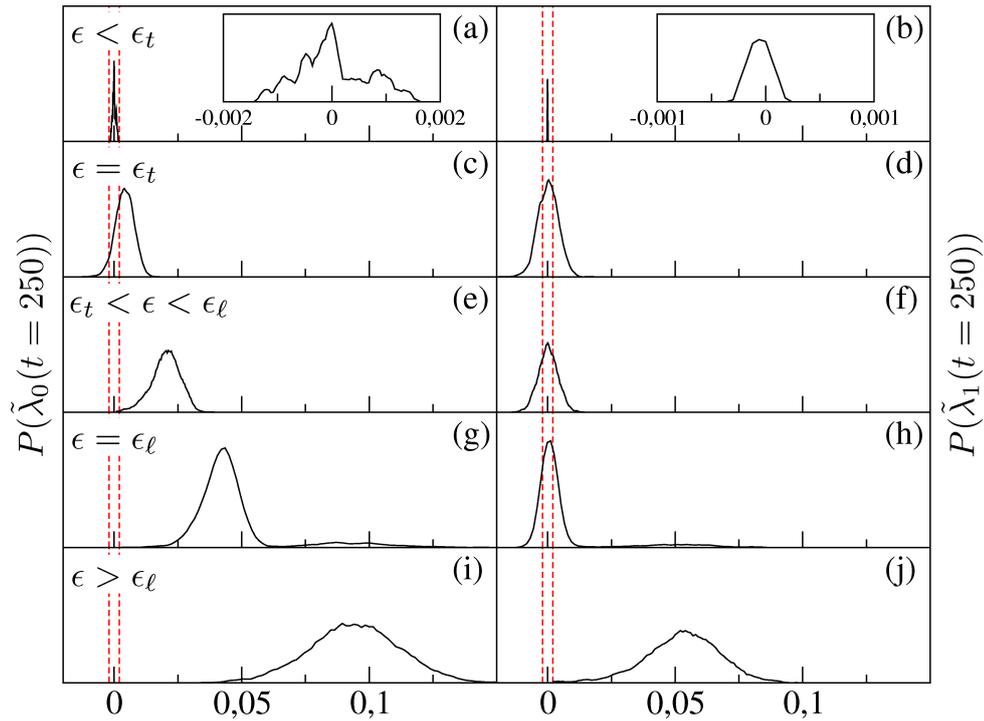
Em uma simulação numérica de um sistema de alta dimensionalidade, como é o caso da equação de onda longa regular, o argumento mais conclusivo que se pode obter da existência de UDV é a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito (ELTF). De fato, como argumentado na seção 2.1.3, espera-se que os ELTF apresentem uma distribuição gaussiana, como descrito na equação (2.19). Se na análise das distribuições verificar-se a existência de uma parcela positiva de ELTF, então pode-se afirmar que o sistema apresenta UDV.

Na figura 4.13 estão representadas as distribuições dos dois maiores expoentes de Lyapunov a tempo finito, para vários valores diferentes de  $\epsilon$ . Os expoentes foram calculados a partir de uma única longa trajetória, com condição inicial no atrator de baixa energia (A), dividida em intervalos de tempo iguais a  $t = 250$ . Na figura 4.13 a primeira coluna apresenta as distribuições do maior ELTF ( $\tilde{\lambda}_0(t = 250)$ ), correspondente à dinâmica longitudinal; e na segunda coluna pode-se observar as distribuições do segundo maior ELTF ( $\tilde{\lambda}_1(t = 250)$ ), referente à dinâmica transversal. As linhas vermelhas tracejadas representam o erro inerente ao método, tal que os valores de expoente dentro deste intervalo é considerado zero.

A situação anterior ao início da UDV está representada nos painéis (a) e (b) da figura 4.13, para  $\epsilon = 0,192 < \epsilon_t$ . Para este valor de parâmetro, a dinâmica é periódica, logo o maior expoente de Lyapunov a tempo infinito deve ser zero, e nenhum expoente pode ser positivo. De fato, ambas as distribuições estão restritas à região dentro do qual os expoentes são considerados nulos, como está claro nas magnificações inseridas na figura. As flutuações positivas que podem ser vistas são na verdade um artefato numérico.

Quando aumenta-se o valor de  $\epsilon$  para  $\epsilon = \epsilon_t = 0,19250$  o sistema se torna caótico, o que é verificado pelo máximo da distribuição do maior expoente de Lyapunov a tempo finito ( $P(\tilde{\lambda}_0(t = 250))$ ) tornar-se positivo<sup>4</sup>, como pode ser visto na figura 4.13(c). Simultaneamente, a distribuição do segundo maior ELTF passa a ter valores positivos (figura 4.13(d)), o que significa que existem regiões ao longo do atrator que são instáveis transversalmente, confirmando a afirmação de que o atrator caótico já nasce com UDV.

<sup>4</sup>Como a distribuição é gaussiana então o máximo é igual à média, e a média dos expoentes de Lyapunov a tempo finito corresponde ao expoente de Lyapunov a tempo infinito, que no caso caótico é positivo



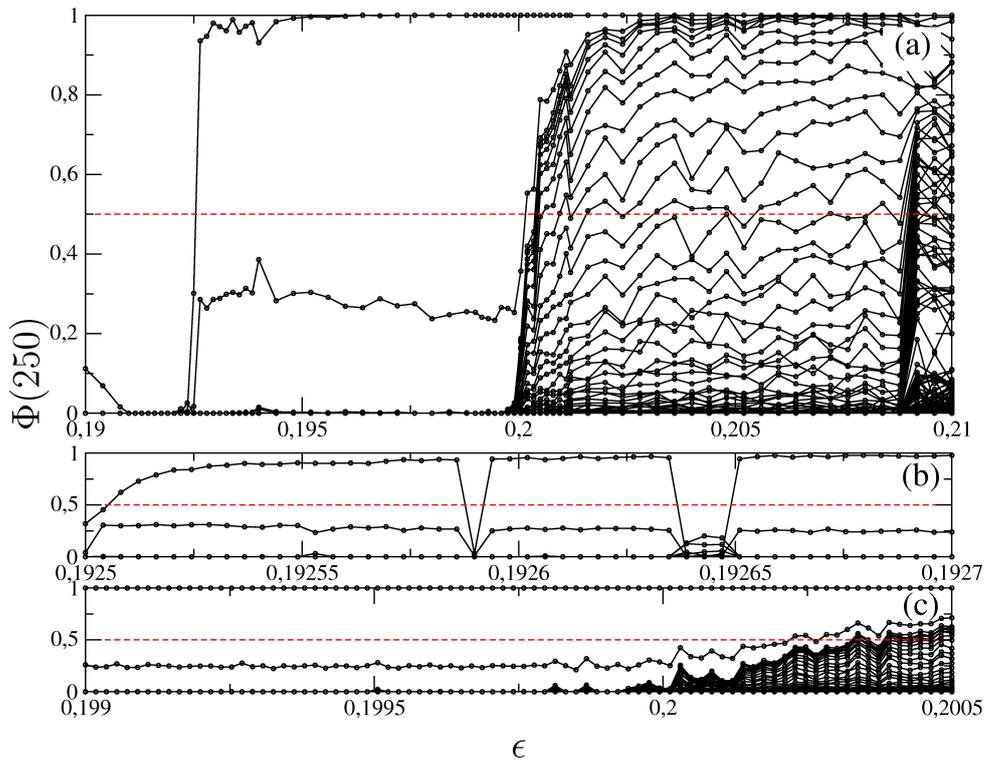
**Figura 4.13:** Função distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ( $P(\tilde{\lambda}_i(t = 250))$ ). Os expoentes longitudinais ( $i = 0$ ) estão representados em: (a)  $\epsilon = 0,192$ ; (c)  $\epsilon = 0,19250$ ; (e)  $\epsilon = 0,195$ ; (g)  $\epsilon = 0,20020$ ; (h)  $\epsilon = 0,205$ . As distribuições dos expoentes transversais ( $i = 1$ ) respectivas estão representadas em (b), (d), (f), (h) e (j).

Este comportamento se mantém para valores maiores de  $\epsilon$ , contanto que a condição  $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_\ell$  seja satisfeita, i.e., o atrator puramente caótico **A** possui UDV durante todo o intervalo de parâmetros em que ele é globalmente estável. Nos painéis (e) e (f) da figura 4.13 estão as distribuições para  $\epsilon = 0,195$ . A única diferença notável que existe entre estas distribuições e aquelas dispostas nos painéis (c) e (d) ( $\epsilon = \epsilon_t$  parâmetro em que o atrator caótico surge), é que a média da distribuição do maior ELTF (painel (e)) se deslocou para a direita, ou seja, o maior expoente de Lyapunov a tempo infinito se tornou mais positivo.

A ruptura da UDV acontece quando pelo menos 50% dos ELTF relacionados à dinâmica transversal são positivos. Esta situação, que acontece para  $\epsilon = \epsilon_\ell = 0,2002$ , está representada nos painéis (g) e (h) da figura 4.13. O máximo da distribuição  $P(\tilde{\lambda}_1(t = 250))$  se movimenta em direção ao zero, aumentando a proporção de ELTF positivos. Além disso, como a UDV se torna mais intensa, as visitas da trajetória ao atrator **B** se tornam perenes (comportamento intermitente), de tal forma que começa a surgir na distribuição dos expoentes de Lyapunov um segundo máximo, referente aos expoentes característicos da dinâmica no ramo de energia superior. Para valores de  $\epsilon$  muito próximos de  $\epsilon_\ell$  este segundo máximo na distribuição dos ELTF ainda é pouco pronunciado, porque logo após a ruptura, a despeito da intermitência ser perene, a frequência com que o sistema visita o estado de alta energia ainda é pequena.

Finalmente, nos painéis (i) e (j) da figura 4.13 estão as distribuições para  $\epsilon = 0,205 > \epsilon_h > \epsilon_\ell$ , onde o atrator  $\mathbf{B}$ , referente ao estado de alta energia, já é globalmente estável. Como não há mais intermitência para este valor do parâmetro, a distribuição perde a sua característica bimodal, sendo novamente bem representada pela equação (2.19). Logo, os máximos das distribuições correspondem ao valor do expoente de Lyapunov a tempo infinito, e são ambos positivos consistentemente com o que está apresentado nas figuras 4.9 e 4.10.

De acordo com o argumentado na seção 2.1.3, a caracterização da intensidade da UDV é feita através do cálculo da fração dos ELTF positivos  $\Phi(t = 250)$ , dada pela equação (2.21). O resultado deste cálculo pode ser visto na figura 4.14. A curva que possui o maior valor de  $\Phi(t = 250)$  corresponde à fração referente ao expoente de Lyapunov longitudinal  $\tilde{\lambda}_0(t = 250)$ . Todas as outras correspondem aos expoentes transversais  $\tilde{\lambda}_i(t = 250)$ , para  $i = 1, 2, \dots$ . A linha tracejada vermelha marca o valor  $\Phi = 0,5$ .



**Figura 4.14:** (a) Fração dos expoentes de Lyapunov a tempo finito do sistema como função do parâmetro  $\epsilon$ . (b) Aumento da região ao redor de  $\epsilon = \epsilon_t$ , parâmetro que marca o início da UDV no sistema. (c) Aumento do intervalo ao redor de  $\epsilon = \epsilon_\ell$ , ponto da bifurcação de ruptura. A linha pontilhada marca o ponto de 50% de Lyapunovs positivos.

Para  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$ , o sistema é periódico, logo a fração de expoentes positivos é igual a zero, para qualquer expoente  $\tilde{\lambda}_i$ . Assim que o sistema se torna caótico, em  $\epsilon = \epsilon_t = 0,19250$ , a fração positiva  $\Phi$  relativa ao expoente longitudinal  $\tilde{\lambda}_0$  cresce muito rapidamente para valores próximos de 1, i.e., a maior parte dos expoentes a tempo finito longitudinais tornam-se positivos, o que significa que a média é positiva, logo o expoente a tempo

infinito é positivo, portanto o sistema é caótico.

Ao mesmo tempo, a fração referente ao segundo maior expoente  $\tilde{\lambda}_1$ , que está relacionado à dinâmica transversal, passa a ter valores próximos a  $\sim 0,3$ . Portanto, o atrator caótico surge para o mesmo valor de parâmetro em que o sistema começa a apresentar UDV. Um *zoom* desta região pode ser visto na figura 4.14(b).

Para valores de  $\epsilon$  menores do que  $\epsilon_\ell$ , a fração referente ao ELTF transversal apresenta valores diferentes de zero, mas menores do que  $1/2$ . Isso significa que existem regiões no atrator **A** que são transversalmente instáveis, mas a direção transversal é *globalmente* estável. No entanto, para  $\epsilon = \epsilon_\ell$  essa fração passa a ser maior do que  $1/2$ , ou seja, existem imersas no atrator mais órbitas periódicas transversalmente instáveis do que órbitas transversalmente estáveis. Esse ponto corresponde ao ponto de bifurcação de ruptura, a partir do qual o estado de baixa energia deixa de ser transversalmente estável, e o comportamento intermitente passa a ser perene no sistema. Na figura 4.14(c) esta região ao redor de  $\epsilon_\ell$  está disposta com uma resolução maior. Pode-se então determinar o valor de  $\epsilon_\ell$  com bastante precisão, corresponde ao valor de  $\epsilon$  para o qual a fração de ELTF positiva referente ao expoente transversal  $\tilde{\lambda}_1$  passa a ser maior do que  $1/2$ .

## Conclusão

“As coisas valem pelas idéias que nos sugerem.”

Machado de Assis

A partir dos resultados apresentados neste trabalho, conclui-se que a equação de onda longa regular forçada e amortecida apresenta uma transição de caos temporal para turbulência, que acontece de forma intermitente devido a um mecanismo conhecido como variabilidade da dimensão instável.

A determinação do comportamento assintótico das soluções foi feita através da análise da energia do sistema, que constitui uma variável escalar integrada sobre todos os modos de Fourier, portanto livre de erros de projeção. Foi verificado que, para diferentes valores do parâmetro de forçamento, a solução reside em estados de energia completamente distintos, o que permite afirmar que as duas soluções ocupam regiões diferentes do espaço de fase. Quando o forçamento é relativamente pequeno, o sistema se encontra em um estado de baixa energia, correspondente a uma solução de caos puramente temporal. Ao aumentar-se a amplitude do termo indutor, o sistema se torna turbulento — o que é evidenciado pela análise do espectro de Fourier da energia que apresenta características próprias de um fluxo turbulento — e a energia reside em um ramo superior.

Para um pequeno intervalo do parâmetro de forçamento, observou-se que o sistema apresenta um comportamento intermitente entre os estados de caos puramente temporal e turbulência, característica evidenciada pelo comportamento da energia do sistema, que alterna entre os dois ramos de energia associados a cada um destes estados. Um análise mais cuidadosa da estatística da série temporal da energia — especificamente, da distribuição dos tempos dos estados de caos puramente temporal — permite afirmar que o sistema apresenta um tipo específico de intermitência chamada intermitência *on-off* entre dois estados.

---

A determinação das características dinâmicas deste comportamento intermitente foi levada adiante através da análise da estabilidade transversal dos atratores do sistema no espaço de Fourier. Constatou-se então que o mecanismo gerador da intermitência é a perda de estabilidade transversal de algumas órbitas periódicas instáveis imersas nos atratores caóticos do espaço de fase de Fourier. Mecanismo conhecido na literatura como variabilidade da dimensão instável.

Uma característica da UDV em sistemas dinâmicos é a existência de uma parcela positiva na distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. Através da análise da distribuição dos expoentes associados à dinâmica transversal foi possível determinar o início e a intensidade da UDV no sistema. Além disso, quando a fração positiva do expoente transversal ultrapassa 50%, o sistema experimenta uma bifurcação de ruptura, e a partir de então a intermitência no sistema é perene.

É importante ressaltar que a quebra de hiperbolicidade causada pela UDV gera uma grande perda de sombreabilidade, o que significa que não há nenhuma garantia de que as trajetória simuladas de fato correspondem a trajetórias reais do sistema. Isso constitui um grande problema, uma vez que, devido à complexidade do sistema, a maioria das informações que se pode obter a respeito da dinâmica vem da análise de trajetórias geradas por computador.

Devido ao fato do modelo utilizado possui características bastante gerais, pode-se esperar que o comportamento observado aqui seja também observado em sistemas que possuam uma descrição matemática semelhante. Sob essa perspectiva, existem vários trabalhos experimentais que apresentam séries temporais com características de intermitência *on-off* [56, 57].

---

## Referências Bibliográficas

- [1] So much more to know... *Science* 309, 5731 (2005), 78–102.
- [2] RUELLE, D., TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics* 23 (1971), 343–344.
- [3] BOHR, T., JENSEN, M. H., PALADIN, G., VULPIANI, A. *Dynamical systems approach to turbulence*. Cambridge nonlinear science series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [4] FRISCH, U., KOLMOGOROV, A. *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] HORTON, W., ICHIKAWA, Y. *Chaos and structures in nonlinear plasmas*. Allied Publishers, 1996.
- [6] KAIFEN, H., SALAT, A. Hysteresis and onset of chaos in periodically driven nonlinear drift waves. *Plasma Physics and Controlled Fusion* 31 (1989), 123–141.
- [7] FORNBERG, B. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [8] SALAT, A., HE, K. *Spatio-temporal bifurcations in the driven nonlinear drift wave equation*. Max-Planck-Inst. für Plasmaphysik, 1989.
- [9] HE, K. Saddle pattern resonance and onset of crisis to spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. Lett.* 84 (Apr 2000), 3290–3293.
- [10] REMPEL, E. L., CHIAN, A. C.-L. Origin of transient and intermittent dynamics in spatiotemporal chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 98 (Jan 2007), 014101.

- [11] REMPEL, E. L., MIRANDA, R. A., CHIAN, A. C.-L. Spatiotemporal intermittency and chaotic saddles in the regularized long-wave equation. *Physics of Fluids* 21, 7 (2009), 074105.
- [12] CHIAN, A. C.-L., MIRANDA, R. A., REMPEL, E. L., SAIKI, Y., YAMADA, M. Amplitude-phase synchronization at the onset of permanent spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. Lett.* 104 (Jun 2010), 254102.
- [13] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University press, 1993.
- [14] GALUZIO, P. P., LOPES, S. R., VIANA, R. L. Two-state on-off intermittency and the onset of turbulence in a spatiotemporally chaotic system. *Physical Review Letters* 105 (Jul 2010), 055001.
- [15] GALUZIO, P. P., LOPES, S. R., VIANA, R. L. Two-state on-off intermittency caused by unstable dimension variability in periodically forced drift waves. *Phys. Rev. E* 84 (Nov 2011), 056211.
- [16] VIANA, R., LOPES, S., CALDAS, I., SZEZECH, J., GUIMARÃES-FILHO, Z., DOS SANTOS LIMA, G., GALUZIO, P., BATISTA, A., KUZNETSOV, Y., NASCIMENTO, I. Dynamical analysis of turbulence in fusion plasmas and nonlinear waves. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 0 (2011), –.
- [17] SOMMERER, J. C. The end of classical determinism. *Johns Hopkins APL technical digest* 16 (1995).
- [18] CHENCINER, A. Three body problem. *Scholarpedia* 2, 10 (2007), 2111.
- [19] STROGATZ, S. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Addison-Wesley Pub., 1994.
- [20] LI, T.-Y., JAMES A, Y. Period three implies chaos. *The american mathematical monthly* 82 (1975), 985–992.
- [21] DE ALMEIDA, A. M. O. *Sistemas Hamiltonianos: Caos e quantização*, 3<sup>a</sup> ed. Editora da Unicamp, 1995.
- [22] GLENDINNING, P., STARK, J. Computing and experiments and introduction to computational dynamics. In *Computing and experiments and Introduction to computational dynamics* (August/September 1988), Lectures of Summer school on dynamical systems of the International Centre for Theoretical Physics.
- [23] ALLIGOOD, K., SAUER, T., YORKE, J. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Textbooks in mathematical sciences. Springer, 1996.

- [24] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J. *Classical mechanics*. Addison Wesley, 2002.
- [25] ECKMANN, J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of Modern Physics* 53 (1983).
- [26] SHIMADA, I., NAGASHIMA, T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of theoretical Physics* 61 (1979), 1605–1616.
- [27] BENNETIN, G., GALGANI, L., GIORGILLI, A., STRELCYN, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica* 15 (1980), 9.
- [28] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D* 16 (1985), 285–317.
- [29] VIANA, R. L., BARBOSA, J. R., GREBOGI, C. Unstable dimension variability and codimension-one bifurcations of two-dimensional maps. *Physics Letters A* 321, 4 (2004), 244 – 251.
- [30] KOSTELICH, E. J., KAN, I., GREBOGI, C., OTT, E., YORKE, J. A. Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 109, 1-2 (1997), 81 – 90.
- [31] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Texts in applied mathematics. Springer, 2003.
- [32] GREBOGI, C., HAMMEL, S. M., YORKE, J. A., SAUER, T. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement. *Physical Review Letters* 65, 13 (1990), 1527–1533.
- [33] VIANA, R. L., DE S. PINTO, S. E., GREBOGI, C. Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability. *Physical Review E* 66 (2002), 046213.
- [34] SAUER, T. D. Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems. *Physical Review E* 65 (Feb 2002), 036220.
- [35] PLATT, N., SPIEGEL, E. A., TRESSER, C. On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Physical Review Letters* 70 (1993), 279–282.
- [36] HEAGY, J. H., PLATT, N., HAMMEL, S. M. Characterization of on-off intermittency. *Physical Review E* 49 (1994), 1140–1150.
- [37] KUBO, G. T., VIANA, R. L., LOPES, S. R., GREBOGI, C. Crisis-induced unstable dimension variability in a dynamical system. *Physics Letters A* 372 (2008), 5569–5574.

- [38] LAI, Y.-C., GREBOGI, C. Intermingled basins and two-state on-off intermittency. *Physical Review E* 52, 4 (1995), R3313–R3316.
- [39] LAI, Y. Symmetry-breaking bifurcation with on-off intermittency in chaotic dynamical systems. *Physical Review E* 53, 5 (1996), 4267–4270.
- [40] BENZI, R., FRISCH, U. Turbulence. *Scholarpedia* 4, 12 (2009), 3439.
- [41] SZEZECH, J. D., LOPES, S. R., VIANA, R. L., CALDAS, I. L. Bubbling transitions to spatial mode excitation in an extended dynamical system. *Physica D* 238 (2009), 516–525.
- [42] ORSZAG, S. A. Numerical methods for the simulation of turbulence. *Physics of Fluids* 12, 12 (1969), II–250–II–257.
- [43] FITZMAURICE, N. *Nonlinear waves and weak turbulence with applications in oceanography and condensed matter physics*. Progress in nonlinear differential equations and their applications. Birkhäuser, 1993.
- [44] GLEDZER, E. On the Taylor hypothesis corrections for measured energy spectra of turbulence. *Physica D* 104 (1997), 163–183.
- [45] MOIN, P. Revisiting Taylor’s hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics* 640 (2009), 1–4.
- [46] TASSO, H., HORTON, W. Statistical properties of the drift wave fluctuations. *Plasma Physics Reports* 22 (september 1996), 701–713.
- [47] KAIFEN, H. Embedded moving saddle point and its relation to turbulence in fluids and plasmas. *International Journal of Modern Physics B* 18 (2004), 1805–1843.
- [48] MORRISON, P. J., MEISS, J. D., CARY, J. R. Scattering of regularized-long-wave solitary waves. *Physica D* 11 (1984), 324–336.
- [49] CHEN, F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion: Plasma physics*. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Plenum Press, 1984.
- [50] SARLET, W. Comment on ‘conservation laws of higher order nonlinear pdes and the variational conservation laws in the class with mixed derivatives’. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43, 45 (2010), 458001.
- [51] DORN, W., MCCRACKEN, D. *Cálculo numérico com estudos de casos*. Campus, 1981.
- [52] FORNBERG, B., MERRILL, D. Comparison of finite difference and pseudospectral methods for convective flow over a sphere. *Geophys. Res. Lett.* 24 (1997), 3245–3248.

- 
- [53] ARFKEN, G., WEBER, H. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier, 2005.
- [54] RADHAKRISHNAN, K., HINDMARSH, A. *Description and use of LSODE, the Livermore solver for ordinary differential equations*. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management, Scientific and Technical Information Program, 1993.
- [55] WARD, L. M., GREENWOOD, P. E. 1/f noise. *Scholarpedia* 2, 10 (2007), 1537.
- [56] ANTONI, V., CARBONE, V., MARTINES, E., REGNOLI, G., SERIANNI, G., VIANELLO, N., VELTRI, P. Electrostatic turbulence intermittency and mhd relaxation phenomena in a rfp plasma. *EPL (Europhysics Letters)* 54, 1 (2001), 51.
- [57] SANDBERG, I., BENKADDA, S., GARBET, X., ROPOKIS, G., HIZANIDIS, K., DEL CASTILLO-NEGRETE, D. Universal probability distribution function for bursty transport in plasma turbulence. *Phys. Rev. Lett.* 103 (Oct 2009), 165001.

# Apêndice

## Two-State On-Off Intermittency and the Onset of Turbulence in a Spatiotemporally Chaotic System

P. P. Galuzio, S. R. Lopes, and R. L. Viana

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, PR, Brazil*

(Received 4 March 2010; published 27 July 2010)

We show the existence of two-state on-off intermittent behavior in spatially extended dynamical systems, using as an example the damped and forced drift wave equation. The two states are stationary solutions corresponding to different wave energies. In the language of (Fourier-mode) phase space these states are embedded in two invariant manifolds that become transversely unstable in the regime where two-state on-off intermittency sets in. The distribution of laminar duration sizes is compatible with the similar phenomenon occurring in time only in the presence of noise. In an extended system the noisy effect is provided by the spatial modes excited by the perturbation. We show that this intermittency is a precursor of the onset of strong turbulence in the system.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.055001

PACS numbers: 52.35.Mw, 05.45.Jn

The onset of turbulence in spatiotemporal systems is a long-standing problem of paramount importance, which has been studied intensively [1]. If we consider a Fourier-mode description of the transition to turbulence in a spatially extended dynamical system, the onset of turbulence occurs when the system energy, originally concentrated in the temporal degree of freedom, is distributed among the spatial modes. Moreover, the temporal dynamics must present a chaotic attractor acting as a stochastic pump, by feeding energy to the spatial modes to be excited in order to yield irregular spatial behavior [2,3]. In a previous paper, we described this process in a system of three waves nonlinearly coupled through interactions of a wave triplet subjected to a resonance condition [4]. The temporal dynamics, exhibiting chaotic behavior but a periodic spatial profile, can be viewed geometrically as a low-dimensional manifold embedded in the phase space consisting of the Fourier modes retained in the procedure to solve the system. The onset of turbulence occurs when this manifold loses transversal stability and trajectories explore more spatial degrees of freedom, imparting energy to the corresponding spatial modes [5].

In this Letter we consider a situation where there are two manifolds instead of only one, in each of which lie stationary solutions of a periodically forced nonlinear wave equation corresponding to different wave energies. These manifolds lose transversal stability through the same process as before, but there are novel features in this case. The most important is that both manifolds may be transversely unstable. In this case the trajectories wander through the available phase space volume approaching the vicinity of both manifolds in an erratic way. This behavior, also known as two-state on-off intermittency, has been described in low-dimensional dynamical systems [6] as well as in spatially extended systems [7]. In this kind of intermittency there is an alternating behavior between two different stationary states. Because of the chaotic behavior

in each state, these alternations occur for different and irregularly spaced time intervals. Two-state intermittency differs from on-off intermittency [8] because the system state, after departing from a given state, goes to the vicinity of another state, the transient behavior between them being governed by a chaotic saddle [9]. In spatially extended systems the dynamics at either state lies on a manifold embedded in the phase space.

As a representative example of a spatially extended dynamical system with two solution branches, we consider the damped and forced drift wave equation [10,11]

$$\phi_t + a\phi_{txx} + c\phi_x + f\phi\phi_x + \gamma\phi = -\epsilon\sin(Kx - \Omega t). \quad (1)$$

For magnetically confined fusion plasmas  $\phi(x, t)$  is the nondimensional electric potential of a drift wave propagating along the poloidal direction of a toroidal plasma, where the constants  $a$ ,  $c$ , and  $f$  stand for plasma and wave parameters, and we introduced a linear damping term with coefficient  $\gamma$  [12]. The effect of other possibly relevant modes is represented by a time-periodic driving with amplitude  $\epsilon$ , wave number  $K$ , and frequency  $\Omega$ , representing the inductor wave.

Equation (1), for certain parameter values, displays a transition from pure temporal chaos without spatial mode excitation to spatiotemporal chaos. We found that the solutions wander in an intermittent fashion between two nonoverlapping states of distinct wave energies, hence an example of two-state on-off intermittency in a higher-dimensional system of physical interest. In previous works [10,13,14] such a transition was also reported to be due to an interior crisis, resulting from a collision between a chaotic attractor and an unstable periodic orbit. We believe that both scenarios can arise due to different initial conditions, since this high-dimensional dynamical system must possess an involved basin of attraction structure, with many coexisting different scenarios.

Provided the  $x$ -coordinate is a bounded variable, we suppose a Fourier expansion  $\phi(x, t) = \sum_{n=0}^N \varphi_n(t) \times \exp(i\kappa_n x)$ , where  $\varphi_n(t)$  are time-dependent amplitudes and  $\kappa_n \equiv 2\pi n/L$  in a box of length  $L = 2\pi$  and periodic boundary conditions. Notice that the mode  $\kappa_0 = 0$  is purely temporal, whereas  $\kappa_\alpha = \alpha = 1, 2, 3, \dots$  stand for the spatial modes. One obtains a system of  $N$  coupled ordinary differential equations, solved using a predictor-corrector scheme. In the numerical simulations we used  $N = 128$  modes, unless stated otherwise, and we kept fixed the following parameters [12]:  $a = -0.28711$ ,  $c = 1.0$ ,  $f = -6.0$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $K = 1.0$ , and  $\Omega = 0.65$ , such that  $\epsilon$  will be our control parameter. The initial conditions for the system of  $N$  coupled mode equations are  $\varphi(0) = 0.01$ ,  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \sigma_1 R(0, 1)$ ,  $\varphi_n(0) = \sigma_2 R(0, 1)$ , for  $n \geq 3$ , where  $\sigma_1 = 0.001$ ,  $\sigma_2 = 10^{-5}$ , and  $R(0, 1)$  is a pseudorandom number chosen within the interval  $[0, 1]$  with uniform probability. We stress that these initial conditions are different from those used in Ref. [12], where a solitary-wave solution of the unperturbed case ( $\epsilon = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) was chosen.

The solutions of the initial and boundary value problem defined by Eq. (1) can be characterized by the wave energy, defined as

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\phi^2(x, t) - a\phi_x^2(x, t)] dx, \quad (2)$$

which turns out to be an integral of motion for the unperturbed case. Since  $E$  is a scalar measure, its time evolution cannot be thought to be a projection of some higher-dimensional variable of the system. For the parameter values explored in this work the wave dynamics is chaotic, but even so the energy difference is bounded [13,14].

In Fig. 1 we exhibit the time evolution of the energy difference  $\Delta E = E(t) - E(0)$  for selected values of the control parameter  $\epsilon$ . As the latter is increased from zero, we have a steady state energy with a few peaks, and asymptoting to a value of about 0.05 [Fig. 1(a)], until a first bifurcation value  $\epsilon_\ell = 0.19955$  is achieved. For  $\epsilon_\ell < \epsilon < \epsilon_h = 0.20100$ , we have alternation of energy values between two values, the former  $\sim 0.05$  lower branch and a  $\sim 0.25$  higher branch [Fig. 1(b)]. Finally, for  $\epsilon > \epsilon_h$  the energy fluctuates about the higher branch value, never to return to the lower branch [Fig. 1(c)]. Our main point in this Letter is that the lower and upper branches of the wave energy are two energy states for which, when  $\epsilon_\ell < \epsilon < \epsilon_h$ , there is intermittent behavior. These two states can be represented, in the Fourier-mode space, by different energy hypersurfaces we call A and B. For  $\epsilon < \epsilon_\ell$  the state A is stable with respect to transversal displacements from the energy hypersurface, whereas B is transversely unstable and not reached by typical initial conditions [Fig. 1(a)].

Figure 1(d) shows a scheme of the situation, in which the states A and B have average energies of 0.05 and 0.25, respectively. The shaded regions represent the maximum fluctuations of the energy about these states, in order to

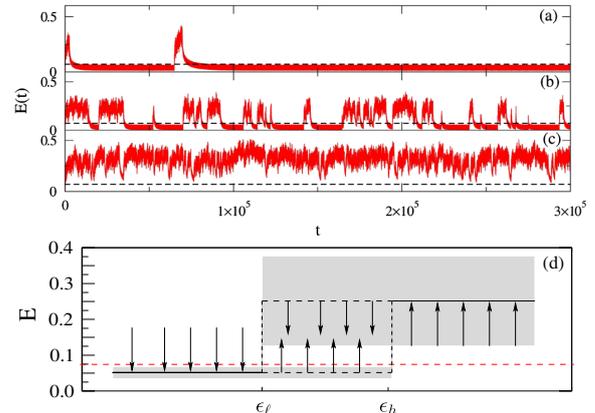


FIG. 1 (color online). Time evolution of the energy difference for (a)  $\epsilon = 0.199553 \approx \epsilon_\ell$ , (b)  $\epsilon_\ell < \epsilon = 0.20025 < \epsilon_h$ , (c)  $\epsilon = 0.20175 \approx \epsilon_h$ . The dashed line is the limit of bounded variation for the fluctuations of the lower energy state. (d) Schematic figure showing the two energy states and their corresponding transversal stability. The shaded regions represent the intervals of bounded variation of energy fluctuations about their average values (shown as solid lines and dashed lines for transversely stable and unstable cases, respectively).

emphasize that there is no overlapping between them. The state A loses transversal stability at  $\epsilon = \epsilon_\ell$  and B becomes transversely stable at  $\epsilon = \epsilon_h$ . The existence of these two bifurcation points has long been known and has been related to hysteretical behavior when increasing and/or decreasing  $\epsilon$  through these critical values [12]. For the set of initial conditions used here, however, since the energy excursions are bounded and nonoverlapping, there cannot be such hysteretical behavior, since none of these states are transversely stable. Another observable consequence of the transversal stability properties of the states A and B is that, for  $\epsilon_\ell < \epsilon < \epsilon_h$ , both manifolds are transversely unstable, and the wave energy makes intermittent transitions between these two states [Fig. 1(b)]. Finally, for  $\epsilon > \epsilon_h$  only the state B is transversely stable and two-state intermittency ceases [as in Fig. 1(c)].

Since a few temporal modes are excited in the state A, it corresponds to temporal chaos combined with regular spatial patterns. This is illustrated by the space-time plot depicted in Fig. 2(a), obtained for  $\epsilon < \epsilon_\ell$ , which displays a chaotic time evolution with regular spatial behavior akin to a traveling wave solution. However, as the state B becomes transversely stable, a large number of spatial modes are excited. An extreme example, considering  $\epsilon > \epsilon_h$ , is shown in Fig. 2(b), for which we see aperiodic behavior in both spatial and temporal scales (spatiotemporal chaos). For a small interval of time (*circa* 25 pseudoperiods), some traveling waves, which appear due to the inductor term, are continuously created and destroyed.

In order to provide a quantitative characterization of the dynamics in space and time, we can resort to Lyapunov

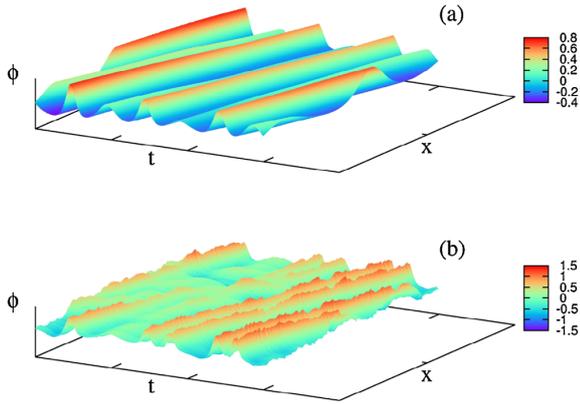


FIG. 2 (color online). Space-time plots for the wave amplitude for (a)  $\epsilon = 0.1990 < \epsilon_\ell$  and (b)  $\epsilon = 0.2100 > \epsilon_h$ .

exponent computation in Fourier space. In this case, each Fourier mode in the discrete transform can be considered a degree of freedom, and the corresponding Lyapunov exponent is computed from the set of  $N$  ordinary differential equations for the wave amplitudes  $\varphi_n(t)$ , with  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . The exponent related to  $n = 0$  corresponds to the temporal dynamics, whereas the  $n \geq 1$  case stands for spatial degrees of freedom and can be used to detect spatial mode excitation [4].

Accordingly, in Fig. 3 we plot the time evolution of the 30 first Lyapunov exponents out of  $N = 128$ . The symbols  $\lambda_L$  and  $\lambda_T$  stand for longitudinal and transversal exponents, respectively. We assume the Lyapunov exponents to be zero if their average decay is a power law and negative if they decay faster than a power law. In the case of  $\epsilon = 0.195 < \epsilon_\ell$ , only the Lyapunov exponent related to the time ( $n = 0$ ) asymptotes to a nonzero value [Fig. 3(a)], confirming our claim that only temporal chaos is observed. The exponents corresponding to spatial modes are shown

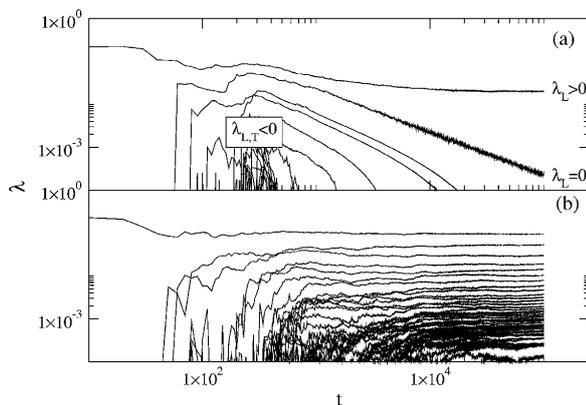


FIG. 3. The 30 largest Lyapunov exponents corresponding to modes in Fourier space for (a)  $\epsilon = 0.195$  and (b)  $\epsilon = 0.205$ .

to decay in a roughly power law ( $n = 1$ ) and even faster rates (for  $n \geq 2$ ). Hence those spatial modes, if excited at all, can have at most periodic behavior (and a possible quasiperiodic one). By way of contrast, for  $\epsilon > \epsilon_h$  a large number of the exponents for  $n \neq 0$  do not vanish, hence many spatial modes become chaotic [Fig. 3(b)]. This spatial mode excitation involving so many Fourier modes suggests the existence of a strongly turbulent state.

The existence of strong turbulence can actually be tested by computing the Fourier spectrum of the waves  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)| = (1/t_{\max}) \sum_{t=0}^{t_{\max}} |\varphi_n(t)|$ , where  $\kappa_n = n$ . When there is temporal chaos only [i.e., for  $\epsilon < \epsilon_\ell$ , cf. Fig. 4(a)], we have an energy spectrum that decays faster than a power law, starting from a maximum value at  $\kappa_n = 3$ . A least-squares fit gives an exponential scaling  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)| \sim e^{-\sigma \kappa_n}$ , with  $\sigma = 0.737 \pm 0.014$ . However, in the upper energy branch B, where we believe that a strong turbulent state sets in, the computed Fourier spectrum can be fitted by a power law of the form  $|\bar{\varphi}(\kappa_n)| \sim \kappa_n^{-\varpi}$ , where  $\varpi = 1.558 \pm 0.019$  [Fig. 4(b)]. In Fig. 4(b) we have used  $N = 1024$  modes. It has been necessary to increase the number of modes in this case since, in such a fully turbulent scenario, there is a strong interaction among different spatial scales, leading to a fast redistribution of the wave energy to the lowest wavelengths.

Our numerical evidences of strong turbulent behavior in the upper energy branch B are based on the Taylor hypothesis; namely, we can relate the spatial statistics corresponding to a fixed time to the statistics of a time series measured at a *single* point of space [15]. Hence we may characterize the turbulent behavior by the energy spectrum as a function of the frequency rather than the wave number. The energy spectrum  $E(\nu)$  corresponding to the Fourier spectra we considered above is depicted in Fig. 4(c), where

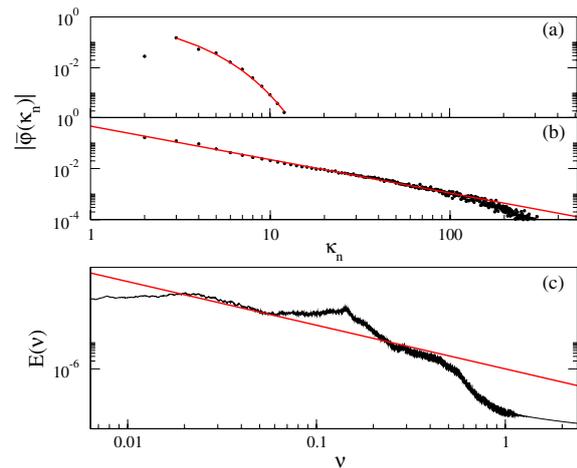


FIG. 4 (color online). Fourier spectra for (a)  $\epsilon = 0.1990$  and (b)  $\epsilon = 0.2100$ . (c) Wave energy spectrum for  $\epsilon = 0.2100$ . The solid line is the Kolmogorov  $5/3$  scaling law.

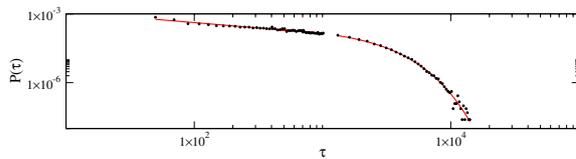


FIG. 5 (color online). Histogram showing the distribution of the plateau sizes for the laminar region A and  $\epsilon = 0.20075$ .

we superimposed a straight line corresponding to the Kolmogorov scaling  $E(\nu) \sim \nu^{-5/3}$  to guide the eye. We see three frequency intervals with respect to the Kolmogorov scaling: (i) for small frequencies we have the familiar  $1/f$ -noise behavior; (ii) an interval  $0.02 \approx \nu \approx 0.5$  which obeys the  $5/3$  scaling except for a peak near 0.1, which is related to the inductor wave with frequency  $\Omega/2\pi \approx 0.1034$ ; (iii) for large frequencies the scaling is exponential (heavy tail).

Two-state on-off intermittency occurs in the case  $\epsilon_\ell < \epsilon < \epsilon_h$  and is characterized by the irregular alternations between the two energy branches A and B, which are transversely unstable in the Fourier-mode phase space of the system. If the trajectory starts at a point close (off but very near) to A, the system stays for some time at the lower energy branch, until it approaches a transversely unstable periodic orbit embedded in the invariant manifold A and is ejected away from A towards B, essentially the same behavior occurring there. By adopting a small tolerance in the vicinity of each invariant manifold, we can define “laminar” states—or plateaus—as those in which the dynamics is very near either of the invariant manifolds. The duration of these plateaus is rather arbitrary since the dynamics is temporally chaotic and the system ergodically approaches every accessible transversely unstable orbit in both manifolds. Hence, a statistical characterization of the two-state on-off intermittency can be given by the probability distribution function of the plateau sizes (or laminar durations)  $\tau_i$  in the intermittent regime. A numerical approximation of this probability distribution function is provided in Fig. 5, where we plot a histogram of the plateau sizes. We have two scaling regimes: (i) a power law  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$ , with  $\beta = -0.469 \pm 0.016$ , valid for small plateaus, and (ii) an exponential (or heavy) tail  $P(\tau) \sim e^{\gamma\tau}$ , with  $\gamma = -0.00067 \pm 0.00001$  for large plateaus. The existence of these two scalings is a characteristic feature of on-off intermittency with noise, the existent crossover between them being related to the noise level. In a spatially extended system the noisy effect is provided by the irregu-

lar forcing of the spatial modes excited in the Fourier space.

In summary, we proposed a new scenario for the onset of intermittent behavior in complex systems having two non-overlapping and bounded energy states. The underlying mechanism of the transition is an extension of the two-state on-off intermittency to spatially extended systems, and it is complementary to other scenarios whereby this transition may occur via a crisis. The basic difference between these scenarios is that, in the latter one, the energy states present overlapping excursions. Both scenarios may appear as a result of different initial conditions since the basin structure of spatially extended systems is highly involved. Our results can be a theoretical basis for explaining intermittent structures in turbulent signals from fusion plasma experiments [16].

This work has partial financial support of CNPq, CAPES, Fundação Araucária, and RNF-CNEN (Brazilian Fusion Network).

- 
- [1] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
  - [2] G. Corso and A. J. Lichtenberg, *Phys. Rev. E* **59**, 6652 (1999).
  - [3] S.R. Lopes and F.B. Rizzato, *Phys. Rev. E* **60**, 5375 (1999).
  - [4] J.D. Szezech, Jr., S.R. Lopes, and R.L. Viana, *Phys. Rev. E* **75**, 067202 (2007).
  - [5] J.D. Szezech, Jr., S.R. Lopes, R.L. Viana, and I.L. Caldas, *Physica (Amsterdam)* **238D**, 516 (2009).
  - [6] Y. Lai and C. Grebogi, *Phys. Rev. E* **52**, R3313 (1995).
  - [7] E. Covas, P. Ashwin, and R. Tavakol, *Phys. Rev. E* **56**, 6451 (1997).
  - [8] J.F. Heagy, N. Platt, and S.M. Hammel, *Phys. Rev. E* **49**, 1140 (1994).
  - [9] E.L. Rempel, A.C.-L. Chian, E.E.N. Macau, and R. Rosa, *Chaos* **14**, 545 (2004).
  - [10] E.L. Rempel and A.C.-L. Chian, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 014101 (2007).
  - [11] W. Horton, *Phys. Rep.* **192**, 1 (1990).
  - [12] K. He and A. Salat, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **31**, 123 (1989).
  - [13] K. He, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 034101 (2005).
  - [14] K. He and A.C.-L. Chian, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 034102 (2003).
  - [15] E. Gledzer, *Physica (Amsterdam)* **104D**, 163 (1997).
  - [16] V. Antoni, V. Carbone, E. Martines, G. Regnoli, G. Serianni, N. Vianello, and P. Veltri, *Europhys. Lett.* **54**, 51 (2001).

## Two-state on-off intermittency caused by unstable dimension variability in periodically forced drift waves

P. P. Galuzio, S. R. Lopes, and R. L. Viana\*

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 19044, 81531-990 Curitiba, Paraná, Brazil*

(Received 19 July 2011; revised manuscript received 21 September 2011; published 14 November 2011)

Certain high-dimensional dynamical systems present two or more attractors characterized by different energy branches. For some parameter values the dynamics oscillates between these two branches in a seemingly random fashion, a phenomenon called two-state on-off intermittency. In this work we show that the dynamical mechanism underlying this intermittency involves the severe breakdown of hyperbolicity of the attractors through a mechanism known as unstable dimension variability. We characterize the parametric evolution of this variability using statistical properties of the finite-time Lyapunov exponents. As a model system that exhibits this behavior we consider periodically forced and damped drift waves. In this spatiotemporal example there is a low-dimensional chaotic attractor that is created by an interior crisis, already presenting unstable dimension variability.

DOI: [10.1103/PhysRevE.84.056211](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.056211)

PACS number(s): 05.45.Jn, 52.35.Kt

### I. INTRODUCTION

While the chaotic dynamics of low-dimensional systems is by now a well-established subject with an impressive body of theoretical, numerical, and experimental results, the spatiotemporal dynamics of high-dimensional systems still has unsolved problems and big challenges [1]. Probably the hardest problem of all is the understanding of the dynamical mechanisms leading to turbulence, or spatiotemporal chaos, in fluids, plasmas, and other spatially extended systems [2].

One of the promising approaches to this problem is a description of the onset of turbulence as when the system energy, originally concentrated in the temporal degree of freedom and a few spatial modes (a traveling wave), starts to be distributed among the remaining spatial degrees of freedom. Such a description is particularly suited for being described by Fourier mode expansions, where each mode is a degree of freedom. In order to accomplish this transition the temporal dynamics must present a chaotic attractor acting as a stochastic pump, by feeding energy to the spatial modes to be excited so as to result in irregular spatial behavior [3,4].

A geometrical view of this phenomenon is possible in the Fourier phase space (i.e., the space whose variables are the Fourier modes), if we regard the temporal dynamics as occurring in a low-dimensional attractor embedded in the phase space. There are just a few spatial degrees of freedom excited therein, and we can think of the system as displaying a spatially ordered pattern. In the following, all the other spatial modes that are not excited will be called transversal with respect to the chaotic attractor. The onset of spatiotemporal chaos occurs when the temporally chaotic attractor loses transversal stability such that the trajectories are allowed to explore more spatial degrees of freedom, imparting energy to the corresponding spatial modes [5].

A further development of the previous analysis consists on considering two different states with the above-mentioned properties instead of only one. This case is physically interesting because many spatiotemporal systems display two (or

more) solution branches, each of them with the characteristics of a chaotic attractor [6]. One outstanding example is the damped and periodically forced nonlinear drift-wave equation, which occurs, e.g., in magnetized plasmas with temperature or density gradients [7] and in the atmospheric vortex flows (with the name Rossby waves) with Coriolis force gradients [8].

The damped and periodically forced drift-wave equation has been found to present two stationary solutions (depending on the driving amplitude) with different wave energies that lie on different branches of the Fourier phase space [9], which we identify with the two chaotic attractors. We have recently found that the onset of turbulence in this system follows the breakdown of transversal stability of these attractors [10]. Moreover, it may well happen that both attractors are simultaneously unstable in the transversal directions to them. In this case the trajectories wander through the available phase-space volume approaching the vicinity of the both attractors in an erratic way.

This latter situation leads to the so-called two-state on-off intermittency, for there is an alternating behavior between two different stationary states [11,12]. In spatially extended systems the dynamics at either state lies near an attractor embedded in the phase space. Starting from an initial condition very close to either attractor, the ensuing trajectory goes to the vicinity of another state, the transient behavior in between these states being governed by a chaotic saddle [13]. Due to the chaotic behavior governing the dynamics in each state, these alternations occur for different and irregularly spaced time intervals.

In this paper we pursue a complementary, yet novel, description of the occurrence and evolution of two-state on-off intermittency, which is its relation with a severe breakdown of hyperbolicity in the chaotic attractors involved in the process. This breakdown occurs whenever there are periodic orbits embedded in either attractor with different numbers of unstable directions, a phenomenon called *unstable dimension variability* (UDV) [14].

The absence of shadowing trajectories long enough to warrant numerical computations using chaotic pseudotrajectories is one of the consequences of UDV in a chaotic dynamical system [15]. One may argue that this does not seem to be

\*viana@fisica.ufpr.br

an essential difficulty, since the interesting quantities to be computed from nonshadowable chaotic trajectories are of statistical nature, like averages and variances [16]. However, if there is UDV, even statistical quantities may be plagued with an uncontrollable amplification of the noise inherent to computer-generated trajectories [17].

The connection between UDV and on-off intermittency has been pursued by us in earlier papers [18]. Since the onset of UDV involves the loss of transversal stability of periodic orbits embedded in chaotic attractors, if there is more than one attractor it may happen that the trajectory is repeatedly repelled from both attractors, which is two-state on-off intermittency. Actually we have this scenario only after both attractors lose transversal stability as a whole (the critical condition being called a blowout bifurcation). The main result of the present paper is that two-state on-off intermittency implies the existence of UDV in both attractors.

In order to characterize the parametric evolution of UDV we used the well-known fact that, when there is UDV, the finite-time Lyapunov exponent nearest to zero fluctuates about zero. This is ultimately due to visits of the trajectory to regions of the attractor with a varying number of stable and unstable directions [19].

This paper is organized as follows: In Sec. II we describe the periodically forced and damped drift-wave equations, which is a theoretical model for which the existence of two-state on-off intermittency has been shown to occur for certain parameter ranges. Section III deals with the connection between the intermittent behavior and the loss of transversal stability of the coexisting solutions of the forced drift-wave equation. Section IV considers the Lyapunov spectrum of the system. Section V brings about numerical results on the onset and the parametric evolution of UDV in a simple example and the forced and damped drift-wave equation, using the statistical properties of the finite-time Lyapunov exponents. Our conclusions are left to the final section.

## II. PERIODICALLY FORCED DRIFT WAVES

Drift waves appear in two distinct but closely related physical settings. In magnetically confined fusion plasmas with temperatures or density gradients, low-frequency drift waves are found to be either unstable or exponentially damped, depending on the wave vector and the plasma properties [7,20]. In geophysical fluid flows the corresponding Rossby waves appear in geostrophic rotating flows, the Coriolis force playing the same role as the Lorentz force in the plasma drift waves [8].

Both problems are quasi-two-dimensional, for the main velocity components lie in a plane. For plasma drift waves this plane is perpendicular to the magnetic field, and the electric potential  $\phi(x,t)$  (in the one-dimensional case) satisfies the drift-wave equation

$$\phi_t + a\phi_{txx} + c\phi_x + f\phi\phi_x = 0. \quad (1)$$

For magnetically confined fusion plasmas  $\phi(x,t)$  is the nondimensional electric potential of a drift wave propagating along the poloidal direction of a toroidal plasma. The parameters  $a$ ,  $c$ , and  $f$  are related to the ion gyrofrequency, the density gradient and the ion acoustic speed of the plasma [21]. In Rossby waves  $\phi$  would stand for the variable part of the

fluid depth, and the parameters above are related to the gravity wave speed, the Coriolis parameter, and the Rossby radius [8].

The unforced drift wave has three constants of motion:

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x,t) dx, \quad (2)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\phi^2(x,t) - a\phi_x^2(x,t)] dx, \quad (3)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ c\phi^2(x,t) + \frac{1}{3}f\phi^3(x,t) \right] dx, \quad (4)$$

corresponding, respectively, to “mass,” momentum, and Hamiltonian. In plasma physics we usually refer to  $E_2$  as the “wave energy” and denote it simply by  $E$ . In spite of the existence of these constants, however, the unforced drift-wave equation is a nonintegrable system, which allows the existence of complex dynamics.

In plasma experiments there has been found that the electric potential fluctuation spectrum is broadly distributed around the drift-wave frequency, what suggests the existence of strong mode interactions [22]. We can model such interactions with other modes by adding to the drift-wave equation a time-periodic driving with amplitude  $\epsilon$ , wave number  $K$ , and frequency  $\Omega$ . Moreover, to have bounded solutions of the forced equation it is necessary also to introduce a phenomenological linear damping term with coefficient  $\gamma$  [9]. The resulting equation is

$$\phi_t + a\phi_{txx} + c\phi_x + f\phi\phi_x + \gamma\phi = -\epsilon \sin(Kx - \Omega t). \quad (5)$$

Since the  $x$  coordinate is a bounded variable, we suppose a Fourier mode expansion

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} \phi_n(t) e^{i\kappa_n x}, \quad (6)$$

where  $\phi_n(t)$  are the corresponding mode amplitudes, and the corresponding wave number is related to the box length  $L = 2\pi$  (we adopt periodic boundary conditions) by

$$\kappa_n \equiv \frac{2\pi n}{L}. \quad (7)$$

In the  $N$ -dimensional Fourier phase space the variables are the mode amplitudes  $\phi_n$ , whose time evolution is governed by a vector field obtained by substituting (6) into (5). The mode amplitude  $\phi_0$ , for which  $\kappa_0 = 0$ , is purely temporal, whereas  $\phi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), for which  $\kappa_\alpha = \alpha$ , are spatial modes.

We used  $N = 128$  modes for numerically solving Eq. (5), and the following parameters [9]:  $a = -0.28711$ ,  $c = 1.0$ ,  $f = -6.0$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $K = 1.0$ , and  $\Omega = 0.65$ , such that the forcing amplitude  $\epsilon$  will be our control parameter. The initial conditions for the system of  $N$  coupled mode equations are

$$\phi_1(0) = \sigma_1 R(0,1), \quad \phi_2(0) = \sigma_2 R(0,1), \quad (8)$$

$$\phi_n(0) = \sigma_3, \quad (n = 0, 34 \dots), \quad (9)$$

where  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.01$ ,  $\sigma_3 = 10^{-5}$ , and  $R(0,1)$  is a pseudorandom number chosen within the interval  $[0,1]$  with uniform probability.

Since we are working in the Fourier phase space, a useful quantity to characterize the dissipative system is the wave

momentum (3). According to the customary usage we shall call it “wave energy”  $E(t)$ . Even though, for certain parameter values, the wave dynamics may be chaotic, nevertheless the energy difference is always bounded [21,23,24]. In fact, we have found two energy states, each of them being characterized by a chaotic attractor, which we may regard as belonging to a manifold embedded in the Fourier phase space.

One of such manifolds is low dimensional (in the Fourier phase space) since its dynamics is chaotic in time and just a few spatial modes are excited, corresponding to stationary state, which is a steady wave propagating in space whose amplitude is evolving chaotically. On the other hand, the other manifold presents a spatiotemporal chaotic state, which we may identify as a weak form of turbulence, which requires the excitation of a large number of spatial modes. Hence the manifold corresponding to this second state has a larger dimension than the first state, although both are low-dimensional compared with the simulated Fourier phase-space dimension.

### III. LOSS OF TRANSVERSAL STABILITY

The time evolution of the wave energy  $E(t)$  versus the forcing amplitude  $\epsilon$  is depicted in Fig. 1 and illustrates this coexistence of distinct energy branches. For  $\epsilon = 0.192$  [Fig. 1(a)] the system is in one of these branches (the upper limit of which is indicated by a red line), undergoing periodic motion (as confirmed by Lyapunov exponents, as we shall see later).

We geometrically interpret this result as a consequence of the dynamics being restricted to a lower energy state characterized by energy fluctuations about  $E_0 \approx 0.03$  with amplitude not larger than  $E_{\text{thres}} = 0.07$  (this threshold has been indicated as a red line in Fig. 1). In Fig. 2 we indicate this average as a black thick line (dashed if the manifold is transversely unstable) and the corresponding fluctuations by a gray strip, bounded from above by a dotted line that stands for the threshold of the lower energy state.

A slight increase in the value of  $\epsilon$  leads to bursts of chaotic behavior followed by a slow return to the lower-energy branch, where the evolution is now temporally chaotic [Fig. 1(b)]. This change is due to a transition occurring at  $\epsilon_t = 0.19250 \pm 0.00001$ , whereby some unstable periodic orbits embedded in the attractor lying on the lower-energy manifold lose transversal stability (in terms of the transversal directions of the Fourier phase space related to the spatial degrees of freedom). The error bars refer to the finite time of the numerical simulations performed (for the sake of simplicity we shall omit the error bars whenever possible).

Let us consider this transition in some more detail. The loss of transversal stability of a chaotic attractor, as a given tunable parameter is varied through a critical value, has been described by three mechanisms. The first of them, known as *bubbling transition* or *riddling bifurcation*, describes the loss of transversal stability when a low-period periodic orbit embedded in the chaotic set loses transversal stability [25]. The second mechanism, closely related to the first one, involves an unstable periodic orbit whose period goes to infinity as we approach the point where there is loss of transversal stability [26]. It is important to emphasize that these two mechanisms require the existence of invariant manifolds where the chaotic attractors lie, a requirement that cannot be demonstrated in the drift-wave equations considered in this work.

On the other hand, the third mechanism for the loss of transversal stability, described by some of the authors in a previous work [27], does not require the existence of an invariant subspace with a chaotic attractor in the phase space. The loss of transversal stability is triggered by an interior crisis, or a collision between a chaotic attractor and an unstable periodic orbit [28]. This *crisis-induced scenario* has been exemplified by the kicked double rotor map [27]. The chaotic attractor is already born with orbits possessing different numbers of transversely unstable directions. In other words, as soon as the attractor is created, some periodic orbits

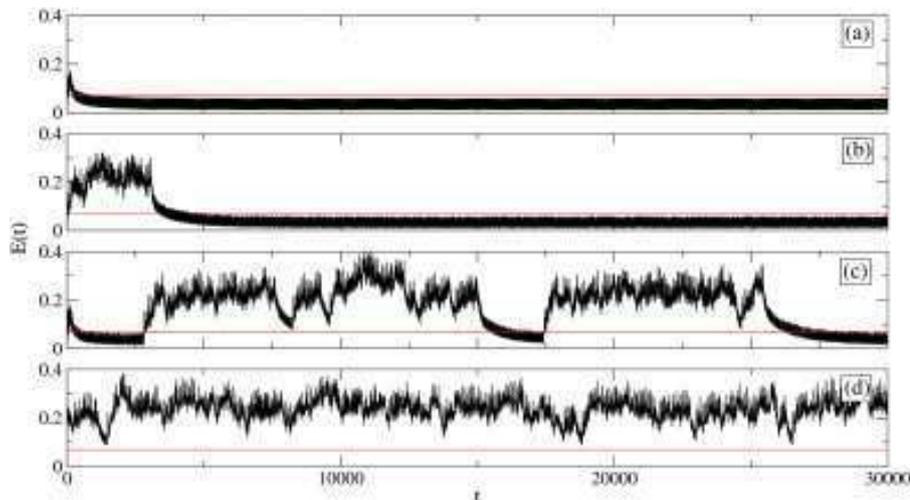


FIG. 1. (Color online) Time evolution of the energy difference for  $\epsilon =$  (a)  $0.1920 < \epsilon_t$ ; (b)  $\epsilon_t < 0.1950 < \epsilon_l$ ; (c)  $\epsilon_l < 0.2003 < \epsilon_h$ ; (d)  $0.2030 > \epsilon_h$ . The red line marks the limit of bounded variation for the fluctuations in the lower-energy branch.

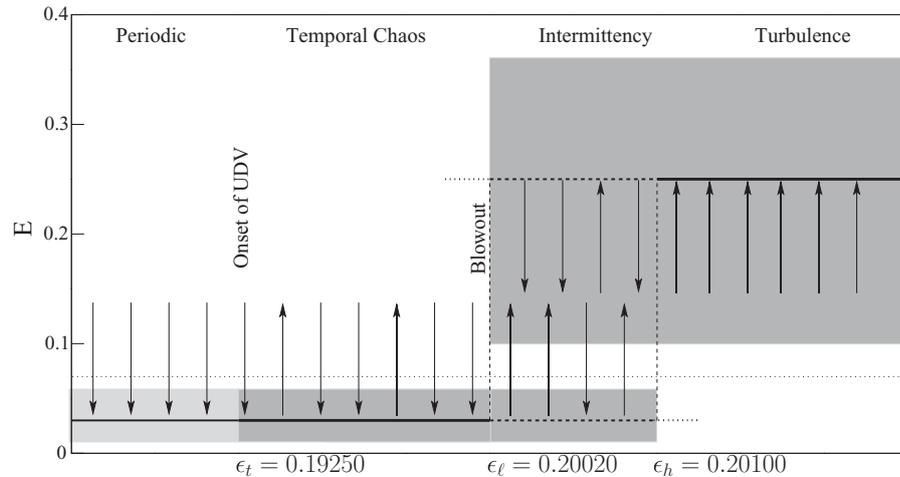


FIG. 2. Schematic figure showing the two energy states and their corresponding transversal stability. The shaded regions represent the intervals of bounded variation of energy fluctuations about their average values (shown as solid and dashed lines for transversely stable and unstable cases, respectively).

embedded in it have different unstable dimensions. We shall quantitatively characterize this property in the next section.

The other reason, illustrated by the bifurcation diagram displayed in Fig. 3, is that, at the point where some periodic orbit embedded in the lower energy manifold loses transversal stability—namely, at  $\epsilon_t = 0.19250$ —there is a sudden appearance of a chaotic attractor out of a low-period stable orbit that exists for  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$ . Viewed from the opposite direction, the chaotic attractor that exists for  $\epsilon \gtrsim \epsilon_t$  suddenly disappears due to an interior crisis: its collision with a low-period unstable orbit, yielding only a low-period stable orbit for  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$ . We remark that most of the periodic orbits embedded in the lower energy manifold remain transversely stable as long as  $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_\ell$ .

Now we return to the parametric evolution of the manifolds just after the point  $\epsilon = \epsilon_t$ , where some low-period unstable

orbit embedded in lower energy state loses transversal stability due to an interior crisis. Because “most” (in the measure-theoretical sense) of the unstable periodic orbits in the lower energy manifold remain transversely stable, however, these off-manifold chaotic bursts eventually decay back to the manifold. The ensuing behavior is practically indistinguishable to that before the transition has occurred, except for its transient nature. In terms of the scheme depicted in Fig. 2 we identify the upper limit of the lower energy state (in which some, but not all, periodic orbits have become transversely unstable) as a dotted line.

A further increase of  $\epsilon$  will generate bursts of activity during which the system makes frequent excursions to the upper energy branch and also visits to the vicinity of the lower energy manifold [Fig. 1(c)]. These excursions bring the system to a higher energy state characterized by energy

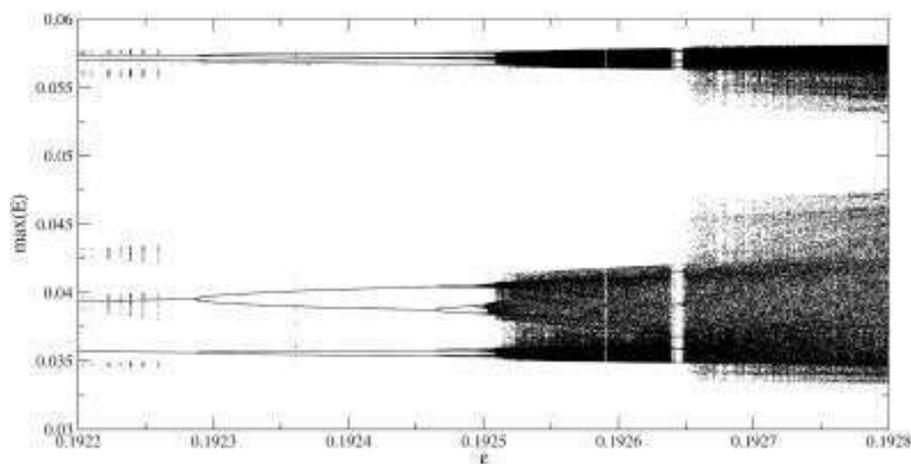


FIG. 3. Bifurcation diagram for the maximum energy value *versus* the control parameter  $\epsilon$  (the strength of the forcing term). The remaining parameters are the same as used in Fig. 1.

fluctuations about  $E_1 \approx 0.25$  with larger amplitudes belonging to the interval  $[0.1, 0.35]$ . In Fig. 2 we indicate this average as a thick line (dashed if the manifold is transversely unstable) and the corresponding fluctuations by a gray strip, bounded from below by the same dotted line used for the threshold of lower energy state. It is of paramount importance that the fluctuation intervals do not overlap, so as to characterize the existence of two distinct energy branches.

The qualitatively different behavior shown in Fig. 1(c) suggests that another transition has occurred. Since the excursions off the lower energy state do not die off the manifold itself has become transversely unstable. In other words, the periodic orbits embedded in the lower energy manifold become transversely unstable at  $\epsilon_\ell = 0.20020 \pm 0.00025$ . This is known as a *blowout bifurcation* [29]. On the other hand, since the higher energy manifold is also transversely unstable by itself, the bursting excursions to and from both manifolds are not a transient effect. To this regime we call *two-state on-off intermittency*.

The intermittent regime existing for  $\epsilon \gtrsim \epsilon_\ell$  disappears, however, for higher values of  $\epsilon$ , namely, after another transition occurs at  $\epsilon_h = 0.20100 \pm 0.00050$ . After this transition the higher energy manifold becomes transversely stable, since the energy fluctuations about the higher energy average  $E_1$  do not cross the energy threshold  $E_{\text{thres}}$ , as illustrated by Fig. 1(d). Hence the chaotic attractor embedded in the higher energy manifold is expected to have mostly (and perhaps all) periodic orbits that are transversely stable.

#### IV. LYAPUNOV SPECTRUM

The Lyapunov spectrum analysis in Fourier space is based on the idea that each Fourier mode in the discrete transform (6) can be considered a degree of freedom, and the corresponding Lyapunov exponent is computed from the algorithm proposed by Benettin *et al.* [30], with the dynamics given by the set of  $N$  ordinary differential equations for the wave amplitudes  $\phi_n(t)$ , with  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

The interpretation of the Lyapunov exponents in terms of the Fourier modes is usually difficult since the vector associated with each Lyapunov exponent is a mixture of many Fourier modes, in general. However, for small values of  $\epsilon$  ( $\epsilon < \epsilon_\ell$ , to be more precise), the asymptotic dynamics is restricted to the lower energy state, hence the Lyapunov exponent related to  $i = 0$  corresponds to the temporal dynamics, whereas the  $i \geq 1$  case stands for spatial degrees of freedom and can be used to detect spatial mode excitation [31].

Accordingly in Fig. 4 we plot the asymptotic value of the 30 first Lyapunov exponents out of  $N = 128$  modes corresponding to the wave amplitudes in Eq. (6). In the latter case, since the exponents are generated with a built-in ordering, it suffices to consider the  $i = 1$  transversal exponent  $\lambda_1$ . The exponents  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ , and  $\lambda_i$  ( $i = 2, 3, \dots, 30$ ) are represented in Fig. 4 as black, red, and gray lines, respectively, as a function of the tunable parameter  $\epsilon$ . In Fig. 4 we represent only non-negative or vanishing values of the exponents.

Before the loss of transversal stability at  $\epsilon_\ell = 0.19250$  all exponents asymptote to nonpositive or vanishing values, indicating that the attractor in the lower energy branch is both periodic (since  $\lambda_0 < 0$ ) and transversely stable (since  $\lambda_1 < 0$ ).

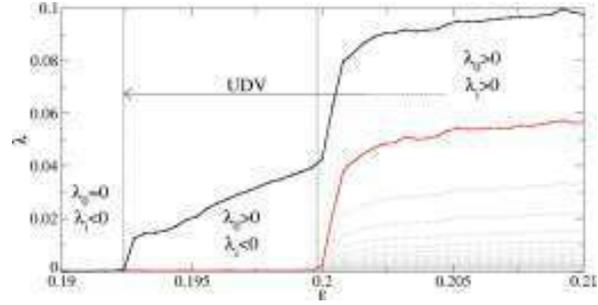


FIG. 4. (Color online) The 30 largest Lyapunov exponents corresponding to modes in Fourier space as a function of  $\epsilon$ .  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ , and  $\lambda_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, 30$ , are represented as black, red, and gray curves, respectively (from top to bottom).

At the point where the lower energy attractor loses transversal stability  $\lambda_0$  becomes positive, indicating that the attractor has become temporally chaotic and, at the same time, some periodic orbits embedded in it have lost transversal stability, as will become clearer further on.

Since “most” periodic orbits, however, remain transversely stable, the attractor as a whole is also stable, which is confirmed by  $\lambda_1 < 0$  (the fluctuations near the baseline about zero are a numerical artifact). Incidentally, this confirms our claim that the loss of transversal stability of the lower energy attractor occurs through an interior-crisis scenario, since before the transition the attractor is a low-period stable orbit, whereas just after the transition it is a chaotic attractor.

The loss of transversal stability of the lower energy attractor, which happens at  $\epsilon_\ell = 0.20020$ , can be traced out in the Lyapunov diagram of Fig. 4 by the point where  $\lambda_1$  becomes nonzero, caused by a blowout bifurcation. For  $\epsilon > \epsilon_\ell$  “most” transversal exponents become positive, as they should be, since the lower energy attractor stays transversely unstable for all further values of  $\epsilon$ .

#### V. UNSTABLE DIMENSION VARIABILITY

Unstable dimension variability in a given chaotic invariant set, like a chaotic attractor, occurs whenever there are embedded periodic orbits with a different number of unstable directions. The relative abundance of periodic orbits with a different number of unstable directions can be evaluated by calculating the corresponding finite-time Lyapunov exponents (FTLE). The FTLEs are computed in the same way as shown in the previous section, but using a finite time span  $n$ .

##### A. A simple example

A characteristic feature of UDV in dynamical systems is the fluctuating behavior (around zero) of the time- $n$  exponent closest to zero. To understand why this is so, let us consider, as a simple example, a two-dimensional map  $x \mapsto f(x)$ ,  $y \mapsto g(x, y)$ , where  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  is a strongly chaotic map (such as the tent, or Bernoulli map), and  $g(x, y)$  is a nonlinear function with the symmetry  $g(x, -y) = -g(x, y)$ . The latter property implies that  $y = 0$  is an invariant manifold in which lies the chaotic invariant set (note, however, that, in

what follows, it is not necessary that the manifold be invariant), such that  $y$  is the corresponding transversal direction.

The periodic orbits embedded in the chaotic set at  $y = 0$  are saddles (with one unstable direction), provided they are transversely stable. On the other hand, let us suppose that some periodic orbit became transversely unstable (as a result of a bifurcation, for example). In this case it will turn into a repeller (two unstable directions), as well as all its infinite pre-images. In this case, the orbit at  $y = 0$  is no longer attracting, but it is still a chaotic invariant set due to the skew symmetry of the map. This set displays UDV for it contains an infinite number of both saddles and repellers, densely intertwined.

This occurrence of UDV can be quantitatively assessed through computing the transversal time- $n$  Lyapunov exponent of the map. If we start with an initial condition off but very close to the invariant subspace at  $y = 0$ , the resulting trajectory visits  $\epsilon$ -neighborhoods of saddles and repellers of the invariant set for any  $\epsilon$ , no matter how small, if we iterate the map a large enough number of times. Dividing this long trajectory into nonoverlapping pieces of the same duration  $n$ , it turns out that there are time- $n$  segments for which the trajectory is transversely attracting (in average) and others for which it is transversely repelling (also in average).

On computing the time- $n$  Lyapunov exponents along the transversal  $y$  direction, the corresponding value of the FTLE along  $y$  will be positive (negative) if the trajectory is transversely repelling (attracting) in average. The infinite time limit of the FTLE is the usual transversal Lyapunov exponent. Although the time- $n$  exponent generally takes on a different value, depending on the initial condition we choose, the infinite time limit takes on the same value for almost all initial conditions with respect to the natural ergodic measure of the chaotic invariant set.

The relation between the infinite-time Lyapunov exponent and the FTLEs along the transversal direction  $y$  depends on the relative weight of the contribution of both saddles and repellers for the natural measure of the chaotic orbit in the invariant set. Strictly speaking, the onset of UDV occurs when repellers start to appear (after a bifurcation of a former saddle). However, “most” of the periodic orbits (in the measure-theoretical sense) are still saddles. In this situation, the infinite-time Lyapunov exponent along  $y$ , which can be regarded as a weighted average of these contributions, is negative. Hence the chaotic set is transversely stable, in spite that some of the orbits (namely, the repellers) are transversely unstable.

As some bifurcation parameter is varied, though, the relative contribution of repellers increases at the same proportion that the contribution of saddles decrease. A quantitative characterization of UDV is provided by the contribution of repellers with respect to that of the saddles. Following this reasoning the UDV is most pronounced when the contributions of saddles and repellers are exactly the same: there will be as many negative as positive values of time- $n$  exponent. Accordingly, the infinite-time exponent along  $y$  will be zero at this point, characterizing a blowout bifurcation, and the chaotic set becomes transversely unstable as a whole (this time in spite that some of the orbits—the saddles—are transversely stable).

Varying further the control parameter the contribution of repellers overcomes that of saddles. Though we still have UDV, its intensity is less than in the blowout bifurcation point, and the

infinite-time transversal exponent is positive. More values of FTLE along  $y$  will be positive than negative. On following this parametric evolution, the end of UDV corresponds to the situation where all periodic orbits in the chaotic set are repellers, such that no time- $n$  exponent will be negative.

### B. Drift-wave equation

After describing the parametric evolution of UDV in a simple example, such that the key concepts can be described in the simpler possible way, we now move to the periodically forced and damped drift-wave equation. We have identified two energy branches as distinct manifolds (not necessarily invariant) of the Fourier-mode phase space of the system. The parametric evolution of these manifolds was already described, in the previous two sections, in terms of the loss of transversal stability of these manifolds. Given the concepts related to UDV, however, it is possible to translate that discussion to the framework of UDV, with many conceptual and numerical advantages.

In the same way as we proceeded earlier, we compute, for the temporal low-dimensional chaotic attractor, the FTLE  $\tilde{\lambda}_0(n)$  standing for the longitudinal direction (i.e., the direction corresponding to the dynamics in the lower energy state), whereas  $\tilde{\lambda}_i(n)$ , ( $i = 1, 2$ ), refer to the corresponding transversal exponents. For the sake of notational simplicity we did not indicate explicitly the dependence on the initial condition in the Fourier space, which must, however, always be understood. We focus on both the longitudinal FTLE  $\tilde{\lambda}_0(n)$  and the  $i = 1$  transversal FTLE  $\tilde{\lambda}_1(n)$ . Their infinite-time limits are the Lyapunov exponent  $\lambda_0$  and  $\lambda_1$ , depicted with black and red curves, respectively, in Fig. 4.

Following the same reasoning of the previous example we identify UDV in this system when the time- $n$  Lyapunov exponent in the transversal direction  $\tilde{\lambda}_1(n)$  will erratically fluctuate about zero. This suggests the use of a probability density  $P(\tilde{\lambda}_1(n))$  for them, so that  $P(\tilde{\lambda}_1(n))d\tilde{\lambda}_1$  is the probability that the time- $n$  exponent takes on a value between  $\tilde{\lambda}_1$  and  $\tilde{\lambda}_1 + d\tilde{\lambda}_1$  for a given  $n$  [32].

From this probability distribution we can obtain moments of functions of the time- $n$  exponent, as averages

$$\langle F[\tilde{\lambda}_1(n)] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F[\tilde{\lambda}_1(n)] P[\tilde{\lambda}_1(n)] d\tilde{\lambda}_1, \quad (10)$$

assuming proper normalization for  $P(\tilde{\lambda}_1(n))$ . For  $n$  large enough the form of this distribution can be written in the following form:

$$P[\tilde{\lambda}_1(n)] \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_1)}{2\pi}} e^{-nG[\tilde{\lambda}_1(n)]}, \quad (11)$$

where the function  $G(\lambda_1)$  has the following convexity properties:

$$G(\lambda_1) = G'(\lambda_1) = 0, \quad G''(\lambda_1) > 0. \quad (12)$$

Expanding  $G$  in the vicinity of  $\lambda_1$ , the first nonvanishing term is the quadratic one, and the probability distribution function

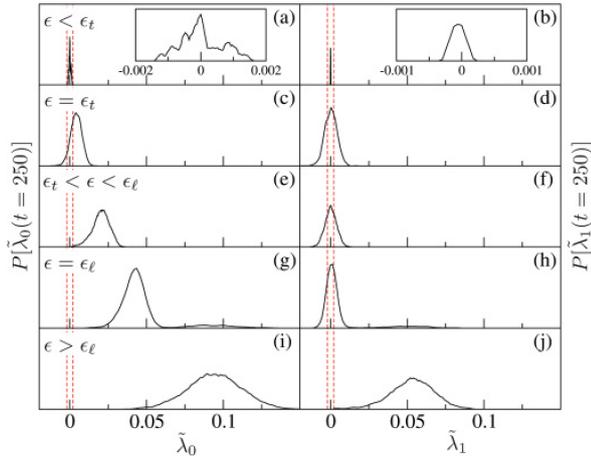


FIG. 5. (Color online) Probability distributions  $P(\tilde{\lambda}_i(n))$  for finite-time Lyapunov exponents. Longitudinal exponent  $i = 0$ : (a)  $\epsilon = 0.192$ ; (c) 0.1925; (e) 0.195; (g) 0.2002; (i) 0.205. Panels (b), (d), (f), (h), and (j) are the corresponding distribution for the  $i = 1$  transversal exponent. The dotted red lines indicate the tolerance limits for zero exponents in all cases shown. We depict out of 500 exponent values for each distribution.

has a Gaussian shape

$$P(\tilde{\lambda}_1(n)) \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_1)}{2\pi}} \exp\left[-\frac{nG''(\lambda_1)}{2}(\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1)^2\right], \quad (n \gg 1). \quad (13)$$

Accordingly, the infinite-time limit of the corresponding FTLE is given by  $\lambda_1 = \langle \tilde{\lambda}_1(n) \rangle$

We obtained numerical approximations for the probability distribution of both  $\tilde{\lambda}_0(n)$  and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  by considering a large number of trajectories of length  $n$  from initial conditions randomly chosen in the chaotic attractor corresponding to the lower energy branch. We actually used a very long trajectory and divide it into small segments to compute the finite-time Lyapunov exponents.

Figures 5(a)–5(j) show some distributions of time-250 exponents of  $\tilde{\lambda}_0(n)$  [left panels] and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  [right panels], obtained for different values of the tunable parameter  $\epsilon$ . The dashed vertical lines bound the error of the numerical procedure, such that values belonging to the interval within these lines are taken to be zero.

The situation before the onset of UDV is exemplified by Figs. 5(a) and 5(b) since, for this value of  $\epsilon = 0.192 < \epsilon_t$ , the infinite-time values of both  $\tilde{\lambda}_0(n)$  and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  are nonpositive. As a matter of fact, both distributions are restricted to the interval wherein we consider the exponents equal to zero, as revealed by the magnifications shown as insets in Figs. 5(a) and 5(b). The positive fluctuations shown in these insets are a numerical artifact rather than a dynamical feature, though.

Just after the onset of UDV ( $\epsilon = \epsilon_t = 0.19250$ ) two features appear: (1) the lower energy state becomes chaotic, since the maximum of the distribution function for the longitudinal mode  $P[\tilde{\lambda}_0(n)]$  becomes positive [Fig. 5(c)]; (2) the distribution function for the spatial mode  $P[\tilde{\lambda}_1(n)]$  starts developing

a positive tail [Fig. 5(d)]. The existence of an appreciable number of positive fluctuations of  $\tilde{\lambda}_1(n)$  is a fingerprint of UDV in the system. Hence, as soon as the attractor becomes chaotic, it also begins to exhibit UDV.

This is a curious feature of this model in particular since, in most dynamical systems hitherto analyzed the attractor becomes chaotic prior to its becoming hyperchaotic, or exhibiting UDV. The reason for this unusual behavior may be the fact that the chaotic attractor is born, at the point  $\epsilon_t$ , due to an interior crisis. We have already shown, for a different dynamical system (the kicked double rotor), that UDV can also be created by crises [27].

Figures 5(e) and 5(f) are for the case  $\epsilon_t < \epsilon = 0.195 < \epsilon_l$  (i.e., long after the onset of UDV), for which the infinite-time values of both  $\tilde{\lambda}_0(n)$  and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  are, respectively, positive and (slightly) negative. The shape of both distributions are Gaussian-like, as expected for  $n$  values reasonably large (but not too large so that the distribution reduces to a delta peak, as it should be in the infinite-time limit).

The blowout of the attractor for the lower energy state (at  $\epsilon = \epsilon_l$ ) occurs when the maximum of  $P[\tilde{\lambda}_1(n)]$  crosses zero [Fig. 5(h)], whereas the other distribution  $P[\tilde{\lambda}_0(n)]$  continues to drift toward positive values [Fig. 5(g)]. Even though the former feature cannot be seen directly from Fig. 5(h), it has been found through careful numerical evaluation of the fraction of positive exponents of the corresponding distribution [see Fig. 6(c)].

The blowout bifurcation, as it stands here, is characterized by the fact that just before the blowout bifurcation point the intermittent switchings between the vicinity of the two energy states is a transient phenomenon, followed by an exponential decay to the lower energy state. On the other hand, just after the blowout bifurcation point the intermittent switchings between the vicinity of the two energy states are permanent. It turns out that, at the blowout bifurcation point, half of the finite-time transversal Lyapunov exponents are positive. As a consequence, the lower energy state as a whole loses transversal stability at this point.

Another important feature of the blowout bifurcation is the emergence of a second maximum of the distributions for both  $\tilde{\lambda}_0(n)$  and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  [Figs. 5(g) and 5(h), respectively]. This can be understood by the permanent two-state on-off intermittency existing between the upper and lower energy states. The continuous excursions of the trajectory between such manifolds are reflected in a smaller secondary maximum characterizing the dynamical state in the upper energy state. Finally, after the blowout bifurcation ( $\epsilon = 0.205 > \epsilon_l$ ) we have mostly positive fluctuations of both  $\tilde{\lambda}_0(n)$  [Fig. 5(i)] and  $\tilde{\lambda}_1(n)$  [Fig. 5(j)].

As we have seen in the previous simple example, a quantitative characterization of the UDV may be obtained by computing the relative abundance of saddles and repellers in the chaotic set. This can be accomplished by obtaining the fraction of positive  $i = 1$  transversal time- $n$  exponents within a given probability distribution function, or

$$\Phi(n) = \int_0^\infty P[\tilde{\lambda}_1(n)] d\tilde{\lambda}_1(n) \quad (14)$$

shown in Fig. 6(a) as a function of the tunable parameter  $\epsilon$  as the second uppermost curve. The uppermost curve

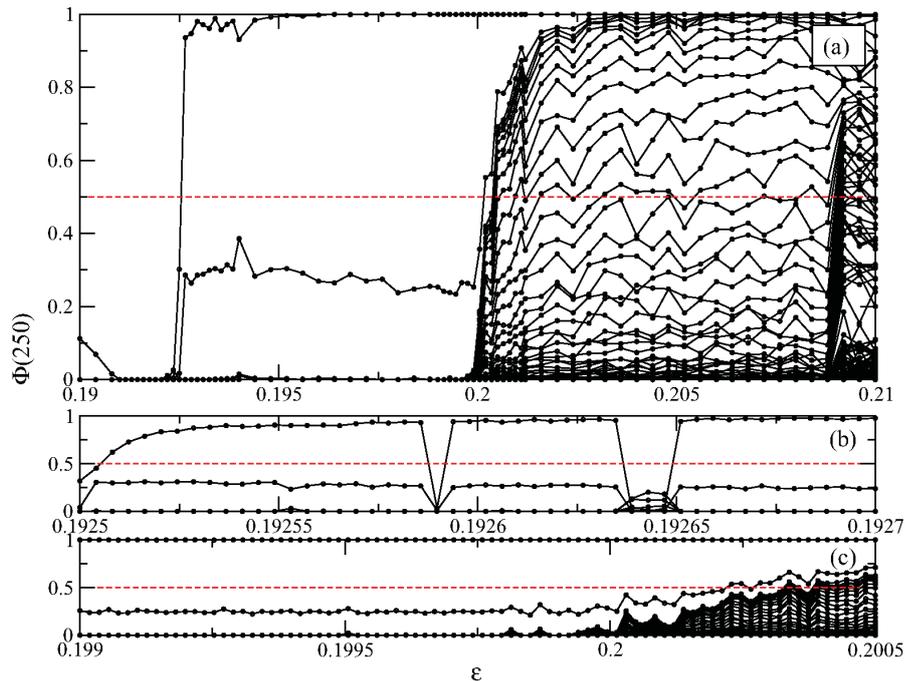


FIG. 6. (Color online) (a) Positive fraction of 30 time-250 Lyapunov exponents as a function of the tunable parameter  $\epsilon$ . (b) Magnification of the interval surrounding the point marking the onset of UDV in the system. (c) Magnification of the interval surrounding the blowout bifurcation point. The dashed red lines indicate a 50% of positive finite-time exponents.

is the corresponding fraction for the longitudinal exponent  $\tilde{\lambda}_0(n)$ , and the remaining curves refer to the other transversal Lyapunov exponents,  $\tilde{\lambda}_i(n)$ , with  $i = 2, 3, 4, \dots$

For  $\epsilon \lesssim \epsilon_t$  this positive fraction of  $\tilde{\lambda}_1(n)$  is indeed zero, and the point where it becomes nonzero can be a numerical indicator of the onset of UDV. The sensitivity of this indicator is demonstrated by Fig. 6(b), in which the vicinity of the point  $\epsilon_t$  is zoomed out. The blowout bifurcation is characterized by this fraction being 1/2, for exactly half of the time- $n$  exponents are positive at this point. Again, the corresponding value of  $\epsilon_t$  can be reliably determined from this numerical test [Fig. 6(c)].

## VI. CONCLUSIONS

The existence of different energy states (with chaotic dynamics) for a periodically forced and damped drift-wave equation has long been known. It is, in fact, a typical feature of complex systems, since it represents multistable behavior in a high-dimensional phase space, in which two or more chaotic attractors coexist with a generally complicated basin boundary structure. The Fourier-mode phase space offers a convenient geometrical description for this framework since the low-dimensional chaotic attractors can be viewed as belonging to manifolds embedded in the high-dimensional phase space. From this point of view, multistable behavior is affected by the dynamics along the directions transversal to those manifolds.

One observable manifestation of the loss of transversal stability of the multistable chaotic attractors is the existence of

intermittent transitions between the coexisting energy states. We have identified this behavior as an instance of the well-known two-state on-off intermittency [10]. The alternations between the vicinities of both energy states have a striking similarity with the previously described hysteretical behavior of trajectories entering this multistable regime. The main difference is that a hysteretical behavior is composed by two transversely *stable* states, while here the behavior is governed by two transversely *unstable* states.

In this work we pushed forward this Fourier phase-space description, by considering the loss of hyperbolicity that occurs in both attractors through a mechanism called unstable dimension variability (UDV). The characteristic feature of UDV is the coexistence of unstable periodic orbits, in a given chaotic set, with different numbers of unstable directions. One of the serious consequences of UDV, whenever it occurs in a given dynamical system, is that computer-generated pseudotrajectories may not (and do not, in fact) shadow true chaotic trajectories of the dynamical system. The loss of shadowability may jeopardize even predictions of a statistical nature.

The occurrence of UDV is thought to be fairly typical in high-dimensional dynamical systems, specially spatiotemporal continuous systems like fluids, plasmas, and waves. The appearance of UDV in the periodically driven and damped drift-wave equation is thus already expected. In this sense, the two-state on-off intermittency becomes an example of chaotic bursting following the occurrence of UDV in a given system.

The intermittent switching between the upper and lower energy states is a nonlinear feature induced by changes of transversal (linear) stability that characterize UDV in the lower energy state. In order to have the two-state on-off intermittency, besides UDV there must be additional nonlinear features, which are the existence of an upper energy state and a chaotic saddle connecting it with the lower energy state undergoing UDV.

We characterized the parametric evolution of UDV through computation of statistical properties of the finite-time Lyapunov exponents in Fourier phase space, which is an important resource when treating high-dimensional systems, for which direct application of bifurcation theory may be utterly impractical. With help of the finite-time Lyapunov exponents we have been able to track three key points in the parametric evolution of UDV, as the driving amplitude is varied (the other parameters being held fixed): its onset, its end, and the point where it is the most intense. At the latter point, also called a blowout

bifurcation, the lower energy chaotic state loses transversal stability.

The fact that UDV is the most intense at the blowout point have practical implications, namely, that trajectories are likely to be nonshadowable for an appreciable time interval. Therefore our analysis could find parameter intervals for which the numerical trajectories of the driven and damped drift-wave equation are more or less acceptable, from the shadowing point of view. This is particularly important, inasmuch as most information that can be drawn from such high-dimensional chaotic systems is from numerically generated trajectories.

#### ACKNOWLEDGMENT

This work was made possible by partial financial support of CNPq, CAPES, Fundação Araucária, and RNF-CNEN (Brazilian Fusion Network).

- 
- [1] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Dynamical Systems Approach to Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
  - [2] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
  - [3] G. Corso and A. J. Lichtenberg, *Phys. Rev. E* **59**, 6652 (1999).
  - [4] S. R. Lopes and F. B. Rizzato, *Phys. Rev. E* **60**, 5375 (1999).
  - [5] J. D. Szezech Jr., S. R. Lopes, R. L. Viana, and I. L. Caldas, *Physica D* **238**, 516 (2009).
  - [6] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
  - [7] W. Horton, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 735 (1999).
  - [8] W. Horton and Y. H. Ichikawa, *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (World Scientific, Singapore, 1996).
  - [9] K. He and A. Salat, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **31**, 123 (1989).
  - [10] P. P. Galuzio, S. R. Lopes, and R. L. Viana, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 055001 (2010).
  - [11] Y. C. Lai and C. Grebogi, *Phys. Rev. E* **52**, R3313 (1995).
  - [12] E. Covas, P. Ashwin, and R. Tavakol, *Phys. Rev. E* **56**, 6451 (1997).
  - [13] E. L. Rempel, A. C.-L. Chian, E. E. N. Macau, and R. Rosa, *Chaos* **14**, 545 (2004).
  - [14] R. Abraham and S. Smale, *Proc. Symp. Pure Math. (AMS)* **14**, 5 (1970).
  - [15] T. Sauer, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 59 (1997).
  - [16] Y.-C. Lai, C. Grebogi, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **59**, 2907 (1999).
  - [17] T. D. Sauer, *Phys. Rev. E* **65**, 036220 (2002).
  - [18] R. L. Viana, S. E. de S. Pinto, and C. Grebogi, *Phys. Rev. E* **66**, 046213 (2002).
  - [19] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1927 (1994).
  - [20] W. Horton, *Phys. Rep.* **192**, 1 (1990).
  - [21] K. He, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 034101 (2005).
  - [22] G. Z. dos Santos Lima, Z. O. Guimarães-Filho, I. L. Caldas, I. C. Nascimento, Yu. K. Kuznetsov, A. M. Batista, S. R. Lopes, and R. L. Viana, *Phys. Plasmas* **19**, 042508 (2009).
  - [23] K. He and A. C.-L. Chian, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 034102 (2003).
  - [24] E. L. Rempel and A. C.-L. Chian, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 014101 (2007).
  - [25] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **68**, 067204 (2003).
  - [26] R. F. Pereira, S. E. de S. Pinto, R. L. Viana, S. R. Lopes, and C. Grebogi, *Chaos* **17**, 023131 (2007).
  - [27] G. T. Kubo, R. L. Viana, S. R. Lopes, and C. Grebogi, *Phys. Lett. A* **372**, 5569 (2008).
  - [28] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica D* **7**, 181 (1983).
  - [29] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, and J. Kurths, *Physica D* **206**, 94 (2005).
  - [30] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. M. Strelcyn, *Meccanica* **15**, 21 (1980); I. Shimada and T. Nagashima, *Prog. Theor. Phys.* **61**, 1605 (1979); A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, *Physica D* **16**, 285 (1985).
  - [31] J. D. Szezech Jr., S. R. Lopes, and R. L. Viana, *Phys. Rev. E* **75**, 067202 (2007).
  - [32] E. J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica D* **109**, 81 (1997).