

RUDINEI CELSO DE SOUZA JANTSCH

MODELOS COSMOLÓGICOS PELA SIMETRIA DE NOETHER

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros
Kremer

CURITIBA

2009

CURITIBA

2009

Resumo

Neste trabalho, estudamos modelos cosmológicos genéricos com campos fermiônicos e taquiônicos não-minimamente acoplados ao campo gravitacional. A partir da técnica da simetria de Noether, determinamos as possíveis formas do potencial e do acoplamento para a ação geral que descreve o modelo. Obtemos as soluções cosmológicas das equações de campo e analisamos quais cenários estas podem descrever. Quando os resultados indicam um comportamento quintessencial do campo, a viabilidade do modelo é verificada através do confronto das curvas teóricas com os dados da astronomia experimental.

Abstract

In this work, we study generic cosmological models with fermion and tachyon fields non-minimally coupled with the gravitational field. From the technique of the Noether symmetry, we determine the possible forms of the potential and of the coupling for the action that describes the model. We obtain the cosmological solutions of the field equations and analyse what scenarios they can describe. When the results indicate a quintessential behavior of the field, the viability of the model is verified through the confrontation of the theoretical curves with the data from the experimental astronomy.

Agradecimentos

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

O cientista não estuda a natureza por sua utilidade; ele a estuda por prazer, que advém do fato de a natureza ser bela. Se ela não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, se não valesse a pena conhecê-la, não valeria a pena viver.

HENRY POINCARÉ

Sumário

1	Introdução	1
2	Relatividade Geral	4
2.1	Princípio da Equivalência	4
2.2	Dinâmica da Partícula em Relatividade Geral	6
2.3	Tensor de Curvatura	8
2.4	Tensor Energia-Momento	10
2.5	Equações de Einstein da Gravitação	11
3	Cosmologia	14
3.1	Observações Astronômicas e Fundamentos da Cosmologia	15
3.2	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	17
3.3	Determinação do Tensor de Ricci e do Escalar de Curvatura	18
3.4	Forma do Tensor Energia-Momento	20
3.5	Equações do Modelo Padrão da Cosmologia	21
3.6	Parâmetros Observacionais	24
3.6.1	Distância de Luminosidade	25
3.7	Sucessos e Problemas do Modelo Padrão	27
3.8	Modelo do Universo Inflacionário	28
3.8.1	Acoplamento ao Campo Gravitacional	32
3.9	Expansão Acelerada e Energia Escura	33
3.9.1	Matéria Escura	35

4	Simetria de Noether	37
4.1	Teorema de Noether	37
4.2	Lagrangiana Pontual a partir da Densidade de Lagrangiana	39
4.3	Condição de Existência da Simetria de Noether	40
5	Campos Fermiônicos Não-minimamente Acoplados	45
5.1	Espinores em Espaço-Tempo Curvo	46
5.2	Lagrangiana Pontual e Equações de Campo	50
5.3	Existência da Simetria de Noether	51
5.3.1	Caso $F' = 0$	53
5.3.2	Caso $F' \neq 0$	54
5.4	Soluções das Equações de Campo	55
5.4.1	Caso $F' = 0$	56
5.4.2	Caso $F' \neq 0$	57
6	Campos Taquiônicos Não-minimamente Acoplados	59
6.1	Lagrangiana Pontual e Equações de Campo	60
6.2	Existência da Simetria de Noether	61
6.3	Período Inflacionário	63
6.4	Período de Transição Desacelerado-Acelerado	65
6.5	Observações	70
7	Férmions e Táquions com Potencial Constante	72
7.1	Férmions	72
7.1.1	Simetria de Noether	72
7.1.2	Soluções Cosmológicas	74
7.2	Táquions	76
7.2.1	Simetria de Noether	76
7.2.2	Soluções Cosmológicas	77

8	Conclusão	81
8.1	Férmions	81
8.2	Táquions	82
8.3	Potencial Constante	82
8.4	Trabalhos Futuros	83
	Bibliografia	84

Capítulo 1

Introdução

O modelo cosmológico conhecido popularmente como Big Bang, baseado na teoria da relatividade geral de Einstein, indubitavelmente teve êxito nas explicações de muitas observações. No entanto, existem alguns fatos experimentais que esse modelo, em sua forma original – chamado de *modelo padrão* –, não pode explicar. Naturalmente, isso exige uma reformulação das premissas envolvidas na construção de tal modelo, ou até mesmo correções na própria teoria da relatividade geral.

A *Cosmologia inflacionária* [1, 2, 3] foi proposta com o intuito de se resolver alguns dos primeiros problemas arrostados pelo modelo padrão, e deu conta de resolver, com algum sucesso, os problemas da *planaridade* do Universo e da homogeneidade da *radiação cósmica de fundo*. Nessa classe de modelo, um campo escalar é o responsável pela fugaz expansão acelerada do Universo primordial, que posteriormente ingressa num período dominado pelo campo de matéria, passando então para uma fase desacelerada.

As recentes observações astronômicas, baseadas em dados das supernovas do tipo Ia, mostram que após a fase desacelerada do Universo segue uma nova fase acelerada [4, 5], a qual o modelo padrão também malogrou em explicar. Os dados experimentais ainda indicam que o valor do *parâmetro de densidade* está muito próximo da unidade. Entretanto, verifica-se que os constituintes conhecidos do Uni-

verso não dão conta desse valor, o que nos incita a admitir a existência de um componente ainda desconhecido para a Cosmologia. Inevitavelmente, tal discrepância com as observações torna-se um grande enigma. Desse impasse, concebeu-se o tão famoso e enigmático ente chamado *energia escura*, o qual deve compor quase $3/4$ da densidade de energia do Universo para estar de acordo com o que é observado. Possivelmente, a energia escura é também o constituinte responsável pela expansão acelerada do Universo, o que conecta o problema da aceleração cósmica observada hoje com o problema do parâmetro de densidade. Seguindo-se o paradigma da relatividade geral, foram propostos vários candidatos à energia escura, sendo que, dentro desse escopo, a idéia mais difundida é a de um campo escalar representando a energia escura, conhecido como *quintessência*.

Tendo em vista as falhas do modelo padrão, a Cosmologia busca hoje por modelos que expliquem satisfatoriamente tanto a expansão acelerada atual como toda a evolução cosmológica, desde o período inflacionário até o presente, visando, assim, descrever por completo o quadro observado. Os modelos mais investigados pela comunidade científica são aqueles que valem-se de um campo escalar acoplado *mínima* ou *não-minimamente* ao campo gravitacional, apresentando-se como *inflaton* ou como energia escura [6, 7, 8]. Modelos com correções na ação de Einstein-Hilbert [9, 10, 11, 12] também são investigados com o objetivo de se encontrar explicações para as observações astronômicas. Além destes, existem os modelos que consideram o gás de Chaplygin e o de Van der Walls como os responsáveis pela expansão acelerada atual [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Nesta dissertação, analisaremos modelos cosmológicos genéricos que consideram campos fermiônicos e *taquiônicos* como fontes de campo gravitacional. Procuraremos determinar as formas das ações dos modelos a partir da existência de uma simetria de Noether para a Lagrangiana pontual derivada da ação geral. Alguns trabalhos na literatura utilizaram-se da simetria de Noether para estudar modelos com campos escalares [9, 10, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Com esse procedimento, as formas determinadas são tais que, naturalmente, eliminamos a violação

de quaisquer leis de conservação. O critério da existência de simetria funciona como um primeiro princípio para a determinação das formas de densidades de potencial de auto-interação e de acoplamentos não-mínimos com o campo gravitacional. Desse modo, evita-se a proposição de um modelo de maneira *ad hoc*, a qual não permite justificativas fundamentais para as escolhas das funções contidas na ação.

O presente estudo mostrará que um campo fermiônico acoplado ao campo gravitacional pode, de acordo com a simetria de Noether, descrever um período inflacionário e um período desacelerado, quando figura como matéria ordinária. No entanto, tal modelo não pode dar conta de explicar a aceleração atual, ou seja, não pode exibir um comportamento tal qual o da energia escura. Para os modelos com campos taquiônicos acoplados ao campo gravitacional, verificar-se-á que os táquions tanto descrevem a expansão acelerada concernente à época inflacionária quanto podem se comportar como energia escura. As curvas obtidas para esse modelo são confrontadas com os dados astronômicos atuais, mostrando-se, dessa forma, que o modelo consegue uma boa descrição do que é observado.

Por fim, analisa-se a existência de tipos de simetria de Noether que admitem densidades de potencial de auto-interação com valor constante para férmions e táquions. Esses tipos de densidade de potencial produzem "*constantes cosmológicas*" efetivas variáveis no tempo, o que pode ser algo interessante, haja vista que no modelo tradicional de constante cosmológica existem problemas relacionados ao próprio valor da constante cosmológica – de acordo com as estimativas baseadas nos dados observacionais, esta não deve apresentar um valor constante no tempo, o que contraria a essência do próprio modelo.

Capítulo 2

Relatividade Geral

Em 1915, Albert Einstein publicou sua *teoria da relatividade geral* [25], a qual estendeu a relatividade restrita para uma teoria que incorpora campos gravitacionais. Desta feita, surgiu uma nova teoria da gravitação, que interpretou o campo gravitacional como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria-energia.

O fundamento da relatividade geral está no *princípio da equivalência*, o qual se refere à equivalência entre um campo gravitacional e um referencial não inercial. As conseqüências de tal fundamento são desdobradas matematicamente através do *princípio da covariância geral*: a equação que descreve uma lei física deve ter a mesma forma em todos os referenciais – inerciais e não inerciais – ou, formalmente falando, deve ser escrita em forma covariante [26].

2.1 Princípio da Equivalência

É fato que os campos gravitacionais têm a propriedade de que todos os corpos se movem da mesma forma na presença destes (se as condições iniciais forem as mesmas), independente da massa ou da carga. Como exemplo, todos os corpos sujeitos ao campo gravitacional da Terra sofrem a mesma aceleração, independente de suas massas.

Graças a essa propriedade dos campos gravitacionais, podemos fazer uma analogia entre o movimento de corpos num campo gravitacional e o movimento de corpos num referencial não inercial. A propósito, sabemos que o movimento livre dos corpos num referencial inercial se processa retilínea e uniformemente por todo o tempo. Então, se observamos o movimento livre desses corpos a partir de um referencial não inercial, certamente os veremos moverem-se todos da mesma forma. Se observamos um corpo movendo-se livremente a partir de um referencial com aceleração constante, o veremos se mover com uma aceleração igual em módulo e em sentido oposto ao do próprio referencial. Isso simula, por exemplo, o campo gravitacional da Terra sobre pequenas regiões (o mesmo pode ser considerado constante em pequenas regiões). Disso, concluímos que as propriedades dos movimentos dos corpos num referencial não inercial são idênticas às dos movimentos dos corpos num campo gravitacional, e podemos dizer que um referencial não inercial é equivalente a um certo campo gravitacional. Este é o *princípio da equivalência*.

Por outro lado, em cada ponto do espaço sujeito a um campo gravitacional, podemos definir um *referencial localmente inercial*. Isso é possível porque os corpos se movem da mesma forma num campo gravitacional, pois essa propriedade nos permite estabelecer um referencial que se move solidariamente aos corpos em queda livre nesse campo (um referencial que está em queda livre no campo gravitacional da mesma maneira que os corpos), a partir do qual não percebemos qualquer aceleração dos corpos. Assim, nesse referencial localmente inercial, as leis da Física devem ser as mesmas que as em um referencial na ausência de campo gravitacional.

A partir do que foi exposto acima, escrevemos o princípio da covariância geral: uma equação é válida num dado campo gravitacional se for válida também na ausência deste. Em outras palavras, uma equação é válida num campo gravitacional se estiver de acordo com a relatividade restrita e preservar sua forma sob transformação geral de coordenadas.

2.2 Dinâmica da Partícula em Relatividade Geral

Consideremos uma partícula em queda livre num campo gravitacional, vista a partir de um sistema de coordenadas ξ^α solidário à mesma. Esse sistema é localmente inercial, do qual não se observa qualquer aceleração da partícula [26]. Portanto, conforme o princípio da equivalência, as leis da relatividade restrita são válidas nesse sistema. Então, a equação de movimento que descreve a dinâmica da partícula será

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde $d\tau^2 = ds^2/c^2$ é o tempo próprio medido no referencial localmente inercial.

Tomemos agora um sistema coordenado x^μ em repouso num campo gravitacional. Utilizando a regra da cadeia, podemos determinar a dinâmica da partícula vista a partir do referencial x^μ

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (2.2)$$

que após o desenvolvimento da derivada temporal, toma a forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.3)$$

Agora, multiplicando essa equação por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.4)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é chamado de *conexão afim* e definido como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.5)$$

Uma vez que as derivadas de primeira ordem comutam, da equação (2.5), segue que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.6)$$

Num referencial localmente inercial, valem as leis da relatividade restrita e não podemos perceber um campo gravitacional a partir deste. Mas, quando passamos para um referencial em repouso no campo gravitacional, percebemos que a

equação de movimento escrita a partir deste (2.4) apresenta um termo adicional $\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)$, quando comparada à equação de movimento escrita a partir do sistema localmente inercial (2.1). Isso justamente indica a presença de um campo gravitacional, e ao mesmo tempo nos diz que o espaço-tempo é curvo. Portanto, podemos descrever um campo gravitacional a partir da curvatura do espaço-tempo, ou falando de outra forma, através da geometria do espaço-tempo.

Num espaço-tempo curvo genérico, o elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o *tensor métrico* – o qual é simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) –, cujas componentes definem a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, a dinâmica num campo gravitacional.

O comprimento da curva descrita por uma partícula em movimento entre os pontos genéricos a e b , parametrizada por τ ($x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$), é então dado por

$$s = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau. \quad (2.8)$$

Agora, variando (2.8) com relação a $g_{\mu\nu}$ e extremizando

$$\delta \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = 0, \quad (2.9)$$

obtemos a equação (2.4) na forma

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0, \quad (2.10)$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right), \quad (2.11)$$

que expressa a conexão afim em termos do tensor métrico.

Sabemos que matéria-energia gera um campo gravitacional. Por outro lado, a partir do princípio da equivalência, vimos que a dinâmica de uma partícula num campo gravitacional pode ser determinada pela geometria do espaço-tempo, que é curvada quando na presença de fontes de campo gravitacional. Daí, concluímos que a presença de matéria-energia causa uma curvatura no espaço-tempo, a qual é sentida pela partícula como um campo de gravitação.

2.3 Tensor de Curvatura

Em qualquer ponto do espaço-tempo, o tensor métrico é uma matriz simétrica de números reais. De acordo com a álgebra das matrizes, existe uma transformação que diagonaliza tal matriz, com todas as componentes da diagonal assumindo valores $+1$ ou -1 . Mas, em geral, não é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual o tensor métrico reduz-se à forma diagonal, com as componentes tomando os valores $+1$ ou -1 em todo o espaço. A importância de saber se existe tal sistema de coordenadas reside no fato de que se a métrica pode ser escrita nessa forma, significa que o espaço em questão é plano (ou não curvo) – nesse caso a métrica é dita plana.

A questão é: de que maneira podemos garantir que existe um sistema de coordenadas no qual a matriz do tensor métrico assume tal forma em todo o espaço? Ou, equivalentemente: de que maneira podemos garantir que a métrica é plana? A resposta a essa pergunta está no seguinte teorema

A nulidade do tensor de curvatura é condição necessária e suficiente para uma métrica ser plana.

O tensor de curvatura é definido por

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}. \quad (2.12)$$

Essa necessidade provém do fato de que se existe um sistema coordenado no qual o tensor métrico apresenta as propriedades descritas anteriormente (correspondendo a um espaço plano), o mesmo será obrigatoriamente constante em todo o espaço e, então, suas derivadas serão nulas, o que também leva os $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e as suas derivadas a se anularem (ver equação (2.11)). Disso, segue que o tensor de curvatura será nulo. Dessa forma, a definição do tensor de curvatura é uma legítima definição de medida da curvatura do espaço.

A seguir estão listadas as propriedades fundamentais do tensor de curvatura

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Anti-simetria com relação à troca de índices do primeiro par de índices:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa}; \\ \\ \text{ii) Anti-simetria com relação à troca de índices do segundo par de índices:} \\ R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = -R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}; \\ \\ \text{iii) Simetria com relação à troca do primeiro par de índices com o segundo:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \end{array} \right.$$

Pela contração do tensor de curvatura com o tensor métrico, definimos um outro importante tensor, o *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (2.13)$$

Por sua vez, contraindo o tensor de Ricci com o tensor métrico, definimos o *escalar de curvatura* (ou *escalar de Ricci*)

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.14)$$

É importante notar aqui que $R/2$ é igual a conhecida curvatura de Gauss para uma superfície – o inverso do produto dos raios de curvatura principais.

Agora, a partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos construir um novo tensor simétrico

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.15)$$

chamado *tensor de Einstein*.

O tensor de Einstein satisfaz as chamadas *identidades contraídas de Bianchi*

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (2.16)$$

que, como veremos, desempenham um papel importante em relatividade geral, pois estão associadas a uma lei de conservação.

2.4 Tensor Energia-Momento

O *tensor energia-momento*, denotado por $T_{\mu\nu}$, representa o fluxo do quadrimomento p^{μ} através da hipersuperfície que encerra as fontes do campo. O tensor energia-momento é um tensor simétrico, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, cujas componentes levam consigo um significado físico, a saber

- i) T_{00} – Componente temporal:
Densidade de energia;
- ii) $T_{i0} = T_{0i}$ – Componentes espaço-temporais:
Densidade da i-ésima componente de momento;
- iii) T_{ii} – Componentes espaciais (índices de mesmo valor):
Fluxo da i-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção i (pressão);
- iv) T_{ij} ($i \neq j$) – Componentes espaciais (índices de valores diferentes):
Fluxo da i-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção k.

A lei de conservação do tensor energia-momento é satisfeita com a condição de nulidade da derivada covariante de $T^{\mu\nu}$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

onde a quantidade conservada concerne a todas as fontes do campo gravitacional considerado.

Um exemplo de tensor energia-momento muito importante é o de um fluido perfeito, com densidade de energia ρ , pressão p e quadrivelocidade $U^\mu = dx^\mu/d\tau$

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

2.5 Equações de Einstein da Gravitação

Na seção 2.2, vimos que um campo gravitacional pode ser interpretado como a curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria-energia. O problema fundamental é encontrar uma equação que relaciona a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia.

Utilizaremos o princípio da mínima ação [27, 28] para encontrar essa relação. Iniciamos de uma ação total S_T , que é a soma da ação do campo gravitacional S_G com a ação do campo de matéria S_m

$$S_T = S_G + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.19)$$

onde \mathcal{L}_m representa a densidade de Lagrangiana da matéria e g é o determinante da matriz que representa o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A forma $\sqrt{-g} d^4x$ é a generalização do volume diferencial num espaço plano para um hipervolume diferencial num espaço curvo.

Agora, aplicando o princípio da mínima ação a (2.19), devemos ter

$$\delta S_T = \delta S_G + \delta S_m = 0, \quad (2.20)$$

onde a variação é feita com relação a $g_{\mu\nu}$.

A variação da ação do campo gravitacional com respeito a $g_{\mu\nu}$ nos leva a

$$\delta S_G = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.21)$$

pois $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$ e a integral $\frac{c^3}{16\pi G} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x$ se anula na fronteira de integração.

Por sua vez, a variação da ação do campo de matéria com respeito a $g_{\mu\nu}$ nos fornece

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.22)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.23)$$

Por fim, a variação da ação total com relação a $g_{\mu\nu}$ será

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (2.24)$$

e como o termo $\delta g_{\mu\nu}$ é arbitrário, o princípio da mínima ação é satisfeito se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Estas são as *equações de Einstein da gravitação*. O lado direito descreve a distribuição de matéria-energia e o lado esquerdo a resposta da geometria do espaço-tempo a essa distribuição. Podemos ver, tendo em vista as equações (2.15) e (2.16), que o lado esquerdo das equações de Einstein satisfaz as identidades contraídas de Bianchi, o que implica na derivada covariante do lado direito também ser nula, ou seja, que as fontes do campo gravitacional obedecem às leis de conservação, conforme (2.17). Isso mostra a consistência física de tal teoria geométrica da gravitação.

Um fato interessante é que, se adicionamos à equação (2.25) um termo linear em $g_{\mu\nu}$, as identidades de Bianchi continuam satisfeitas e a equação da gravitação permanece fisicamente consistente. Daí, podemos dizer que a forma mais geral das equações de Einstein é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

onde Λ é a famosa *constante cosmológica*, introduzida inicialmente por Einstein com a finalidade de se obter soluções cosmológicas que descrevem um Universo estacionário.

Capítulo 3

Cosmologia

Com o advento da relatividade geral, pela primeira vez se teve em mãos uma teoria que possibilitava a descrição do Universo como um todo. Assim, a Cosmologia deixou de ser apenas uma especulação metafísica para tornar-se um ramo da Física. A relatividade geral permitia soluções de um Universo não estático e, em 1929, as observações astronômicas de Edwin Hubble mostraram que o Universo estava em expansão.

As observações astronômicas permitiram estabelecer fundamentos válidos para todo o Universo, de onde nasceu um importante pilar para o desenvolvimento da Cosmologia, o chamado *princípio cosmológico*, que estabelece ser o Universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Dessa forma, pôde-se construir modelos teóricos gerais que descrevem a evolução do *cosmos* como um todo. Na década de 40, Gamow, Alpher e Herman previram a existência de uma radiação que permeava todo o Universo – hoje chamada de *radiação cósmica de fundo* –, oriunda da época em que a radiação se desacoplou da matéria. Essa previsão foi confirmada na década de 60, consolidando a Cosmologia como Ciência.

3.1 Observações Astronômicas e Fundamentos da Cosmologia

A mais importante observação astronômica para a Cosmologia foi a que levou Hubble a concluir que o Universo está em expansão. Em 1929, a partir das suas observações de galáxias longínquas, Hubble determinou que todos os objetos distantes estão se afastando de nós, e quanto mais distantes estão, mais velozmente se afastam [29]. A velocidade de recessão desses objetos é proporcional às suas distâncias a nós, sendo expressa pela *lei de Hubble*

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

onde H_0 é a *constante de Hubble* avaliada hoje, tendo como o melhor valor observacional $72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [30].

Podemos, para simplificar nossa descrição, definir um sistema coordenado que acompanha a expansão, ou seja, fixo na galáxia da qual se observa a expansão cosmológica (ver Figura 3.1). Tal sistema é chamado de *sistema comóvel*, a partir do qual medimos a distância dos objetos a nós com o tempo por

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

onde r representa a distância real, x a distância comóvel (que tem valor constante no tempo) e $a(t)$ o *fator de escala*, que reescala a distância entre os objetos com o tempo, descrevendo a expansão do espaço.

Da equação (3.2), podemos expressar a constante de Hubble (definida por (3.1)) em termos do fator de escala

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.3)$$

onde o ponto denota derivada com relação ao tempo. Nessa expressão, a "constante" de Hubble é generalizada para qualquer tempo, uma vez que esta não terá sempre o mesmo valor H_0 em virtude de \dot{a} , que mede a taxa de expansão do Universo com o tempo, não ser constante. Por esse mesmo motivo, daqui em diante, chamaremos

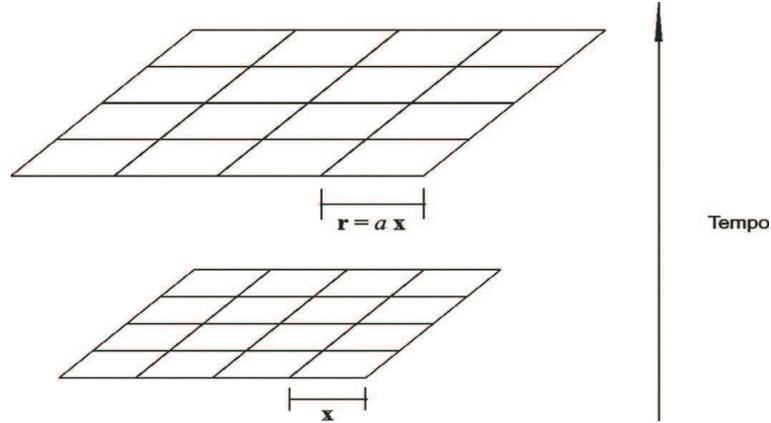


Figura 3.1: Distância r entre dois objetos distantes num Universo em expansão medida a partir de um referencial fixo num dos objetos.

H de *parâmetro de Hubble*, o que é mais adequado.

As velocidades de afastamento dos objetos distantes são medidas pelo *redshift* z (desvio para o vermelho) do espectro luminoso emitido pelos objetos. A partir do efeito Doppler para ondas luminosas, escrevemos

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \approx \frac{v}{c}, \quad (3.4)$$

onde λ_{em} é o comprimento de onda da luz emitida pelo objeto e λ_{obs} é o comprimento de onda da luz proveniente do objeto que observamos. Aqui, o efeito Doppler observado não é resultante de algum afastamento de origem cinemática, mas uma consequência da expansão do espaço. Então, quando uma onda eletromagnética se propaga num espaço em expansão, o seu comprimento de onda sofrerá um *esticamento*, o qual será proporcional ao valor do fator de escala. Daí, podemos determinar o fator de escala a partir da medida do *redshift* (através da equação (3.4))

$$\frac{1}{a(t_{em})} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = 1 + z \implies a(z) = \frac{1}{1 + z}, \quad (3.5)$$

onde $a(t_{obs}) = 1$ por convenção, o que é equivalente a reescalar as coordenadas comóveis pelo tamanho atual do Universo.

Das definições anteriores, vemos que não existe um ponto privilegiado de onde se fazem as observações, pois as coordenadas comóveis eliminam essa possibilidade. Aqui está implícito um princípio muito forte da Cosmologia, o qual foi baseado nas observações. Em larga escala o Universo pode ser considerado homogêneo e isotrópico, o que é equivalente a dizer que de qualquer ponto observamos o Universo sempre com as mesmas propriedades. Este é o princípio conhecido como *princípio cosmológico*.

3.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Tendo em vista o princípio cosmológico, consideremos um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Em tal espaço, o qual pode estar se expandindo ou se contraindo, a métrica mais geral que pode ser construída apresenta a seguinte forma em coordenadas esféricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.6)$$

que é conhecida como *métrica de Friedmann-Robertson-Walker* [26], onde k é a *constante de curvatura*.

A constante de curvatura está associada às três geometrias que satisfazem o princípio cosmológico, assumindo os seguintes valores correspondentes

$$\begin{cases} k = 0 & \text{geometria plana,} \\ k > 0 & \text{geometria esférica,} \\ k < 0 & \text{geometria hiperbólica.} \end{cases}$$

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker está escrita a partir de um sistema coordenado comóvel. Tal sistema está fixo nas partículas (galáxias) do fluido cosmológico, desse modo, acompanhando a expansão ou contração cosmológica, com suas coordenadas sendo reescaladas pelo fator de escala a cada instante. Assim, $x^i = (r, \theta, \phi)$ são as coordenadas espaciais medidas a partir do sistema coordenado fixo numa partícula qualquer desse fluido. Mede-se o tempo cosmológico

t a partir de um relógio também fixo nessa partícula (t denota o tempo próprio desse sistema).

Lembrando que a forma mais geral de um intervalo diferencial num espaço-tempo curvo é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.7)$$

podemos, por comparação com (3.6), determinar o tensor métrico, que em representação matricial se apresenta como

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Daqui em diante, por comodidade, faremos os índices gregos assumirem os valores (t, r, θ, ϕ) . De (3.8), vemos que somente as componentes da diagonal não são nulas, ou seja, as componentes g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ na notação que adotamos aqui.

3.3 Determinação do Tensor de Ricci e do Escalar de Curvatura

Para determinar o tensor de Ricci, devemos calcular todos os elementos da conexão afim. Uma vez que conhecemos a forma do tensor métrico (equação (3.8)), fazemos isso através da equação

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right). \quad (3.9)$$

Lembrando da propriedade $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, de (3.9), temos

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{a\dot{a}r^2}{c}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{c}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.13)$$

sendo os elementos restantes nulos.

Com os $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ em mãos, determinamos o tensor de curvatura a partir de sua definição

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}, \quad (3.14)$$

e lembrando da definição do tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}, \quad (3.15)$$

podemos calcular diretamente as componentes de $R_{\mu\nu}$ para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, obtendo

$$R_{tt} = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.16)$$

$$R_{rr} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)}, \quad (3.17)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2}{c^2}, \quad (3.18)$$

$$R_{\phi\phi} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2 \sin^2 \theta}{c^2}. \quad (3.19)$$

As outras componentes do tensor de Ricci são nulas em decorrência da forma diagonal do tensor métrico.

Agora, a partir da definição do escalar de curvatura (ou escalar de Ricci)

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (3.20)$$

como já conhecemos as componentes do tensor de Ricci, obtemos facilmente

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right], \quad (3.21)$$

que é o escalar de curvatura para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

3.4 Forma do Tensor Energia-Momento

Do lado direito das equações de Einstein, temos o tensor energia-momento, que ainda devemos especificar. Consideraremos as fontes de campo gravitacional do Universo como um fluido perfeito, então o tensor energia-momento que o representa, como já vimos, tem a forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Como adotamos um sistema comóvel para escrever a métrica, tal sistema move-se conjuntamente ao fluido, e a quadrivelocidade desse fluido será $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Então, da equação (3.22), determinamos

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p a(t)^2 / (1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

e temos o tensor energia-momento de um fluido perfeito escrito para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

3.5 Equações do Modelo Padrão da Cosmologia

Nesta seção, determinaremos as equações que descrevem a dinâmica do Universo. Para isso, tomamos a forma mais geral das equações de Einstein, equações (2.26), e utilizamos as componentes do tensor de Ricci, equações (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), do tensor métrico, equação (3.8), e do tensor energia-momento, equação (3.23), e o escalar de curvatura, equação (3.21).

Considerando primeiramente as componentes temporais dos tensores

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R + \Lambda g_{tt} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{tt}, \quad (3.24)$$

chegamos à seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.25)$$

conhecida como *equação de Friedmann*.

Tomando as componentes espaciais dos tensores

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R + \Lambda g_{ii} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ii}, \quad (3.26)$$

qualquer uma delas nos leva à equação diferencial (aqui não há soma com respeito aos índices repetidos ii)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2, \quad (3.27)$$

a qual, utilizando-se de (3.25), pode ser escrita na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.28)$$

que é conhecida como *equação da aceleração*.

Para resolver estas equações de campo, ainda precisamos saber como ρ e p evoluem com o tempo. Se aplicamos a condição que representa a conservação do tensor energia-momento ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$) ao tensor (3.22), obtemos

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (3.29)$$

que é chamada de *equação do fluido* e é o análogo da equação da continuidade. Esta equação não é independente, pois pode ser obtida pela combinação da equação (3.28) com a derivada temporal da equação (3.25).

A fim de resolver (3.29), necessitamos conhecer as equações de estado dos constituintes do Universo. Supomos que as equações de estado são barotrópicas

$$p = c^2 \omega \rho, \quad (3.30)$$

onde ω é uma constante, a qual especifica a natureza do constituinte. Os casos mais comuns são: $\omega = 1/3$, que representa a radiação; $\omega = 0$, que representa matéria diluída; e $\omega = -1$, que representa a *energia de vácuo*.

Considerando-se que os constituintes do Universo são não-interagentes, cada um deles obedece à equação (3.29) separadamente. Então, para a matéria diluída ($p_m = 0$), de (3.29), temos a solução

$$\rho_m \propto a^{-3}; \quad (3.31)$$

para a radiação, $p_r = c^2 \rho_r/3$, obtemos

$$\rho_r \propto a^{-4}; \quad (3.32)$$

e para a energia de vácuo, $p_v = -c^2 \rho_v$, temos

$$\rho_v = \text{constante}, \quad (3.33)$$

que pode ser relacionada à constante cosmológica. Pois, pelo fato de poder escrever a equação de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

temos a liberdade de interpretar a constante cosmológica como fonte de campo gravitacional, escrevendo $T_{\mu\nu}^\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}$, quando a equação de Einstein torna-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda). \quad (3.35)$$

Ao comparar $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ com o tensor energia-momento de um fluido perfeito, chegamos a $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda}/c^2 = c^2\Lambda/8\pi G = \text{constante}$.

Agora que conhecemos a evolução temporal de ρ , estamos aptos a determinar $a = a(t)$. Como foi dito anteriormente, Einstein introduziu a constante cosmológica para obter soluções de um Universo estático, mas como foi observado por Hubble que o Universo estava em expansão, tal idéia foi abandonada, não existindo mais razão alguma para manter a constante cosmológica nas equações. Isso sem contar o seu significado físico obscuro na época. Por esse motivo, no *modelo padrão da Cosmologia* faz-se $\Lambda = 0$. Assim, procuraremos soluções para um Universo composto somente por matéria e radiação. No início, quando $a(t)$ é pequeno, vemos, a partir de (3.25), que o termo com a constante de curvatura é desprezível frente ao termo que leva a densidade de energia dos constituintes, conforme as equações (3.31) e (3.32). Daí, a equação de Friedmann toma a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.36)$$

Resolvemos facilmente essa equação quando analisamos épocas em que a densidade de energia do campo de matéria domina sobre a densidade de energia do campo de radiação e vice-versa, ou seja, quando uma é desprezível frente a outra. Para a era dominada pela matéria, temos a solução

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (3.37)$$

e para a era dominada pela radiação

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (3.38)$$

Quando $t \rightarrow 0$, também $a \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $\rho \rightarrow \infty$. Então, temos uma *singularidade inicial*, esta popularmente conhecida como *Big Bang*. Conforme as soluções do modelo padrão, o Universo originou-se de um ponto com densidade e temperatura infinitas, resfriando-se à medida que se expandiu. Mas, por outro lado, a Física que conhecemos não pode mais funcionar próximo ao momento

do Big Bang, uma vez que estamos entrando no domínio de escalas inferiores à escala de Planck ($\approx 10^{-33}\text{cm}$) e efeitos quânticos não são mais desprezíveis. Tendo isso em vista, o Big Bang deve representar o limite de validade do modelo padrão da Cosmologia.

3.6 Parâmetros Observacionais

A *densidade crítica* ρ_c é definida como a densidade necessária para que a constante de curvatura se torne nula, $k = 0$, correspondendo a um Universo com geometria plana. De acordo com a equação de Friedmann, temos um valor de H correspondendo a cada valor de ρ_c , tal que podemos escrever para a densidade crítica

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (3.39)$$

Com o valor de H estimado hoje, a densidade crítica é da ordem de 10^{-26}kg m^{-3} . A partir do valor da densidade crítica medido experimentalmente, inferimos se o Universo é fechado ou aberto. Se $\rho > \rho_c$, sabemos que o Universo é fechado (geometria esférica), e se $\rho < \rho_c$, que o Universo é aberto (geometria hiperbólica).

A densidade crítica é usada para a parametrização das medidas de densidade dos constituintes do Universo. Define-se o *parâmetro de densidade* Ω_i por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.40)$$

onde i expressa a densidade correspondente a cada constituinte do Universo que está sendo considerado. A definição do parâmetro de densidade expressa uma comparação entre uma dada densidade relacionada a algum constituinte com a densidade crítica.

A partir das equações (3.25) e (3.40), podemos escrever

$$\Omega_{total} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.41)$$

onde Ω_{total} denota o parâmetro de densidade relacionado à densidade total do Universo (a soma das densidades de todos os constituintes). Constatamos da equação

(3.41), que se $k = 0$, $\Omega_{total} = 1$, e o mesmo permanece com esse valor por todo o tempo, uma vez que k é constante.

Uma outra grandeza importante é o *parâmetro de desaceleração*, relacionado à variação da taxa de expansão do Universo com o tempo. O parâmetro de desaceleração q é definido por

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (3.42)$$

Dessa definição, vemos que q tem um valor positivo para um Universo desacelerado e um valor negativo para um Universo acelerado. Além disso, o parâmetro de desaceleração depende da densidade ρ e da pressão p totais do Universo. A definição de q foi feita como o negativo da aceleração porque o modelo padrão prevê que o Universo se expande sempre desaceleradamente (consideramos que o Universo é composto somente de matéria comum – a qual é sempre atrativa), desse modo, uma definição com valor positivo para medir a desaceleração é mais prática, haja vista que ela sempre ocorre.

Um parâmetro observacional bastante usado pela astronomia experimental é a *diferença de magnitudes* μ_0 , que é definida como a diferença entre a magnitude bolométrica aparente m e a magnitude absoluta M de uma determinada fonte. A expressão para μ_0 é dada por

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log_{10} d_L, \quad (3.43)$$

onde d_L é a *distância de luminosidade*, definida por

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.44)$$

com $H(z)$ sendo o parâmetro de Hubble em função do *redshift*.

3.6.1 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade expressa a quantidade de luz recebida de um objeto distante, o que permite determinar indiretamente a que distância

se encontra o objeto – assumindo-se que a intensidade luminosa cai com o inverso do quadrado da distância ao objeto. Podemos definir a distância de luminosidade em termos de uma luminosidade absoluta L (potência total da fonte) e sua correspondente luminosidade aparente l (potência por unidade de área recebida pelo observador)

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.45)$$

Num espaço euclidiano, a luminosidade aparente seria dada por $l = L/4\pi d^2$, onde d é a distância do objeto ao observador. Mas, em escala cosmológica, temos que levar em conta o *redshift* relativístico e o efeito Doppler. Cada um desses efeitos leva consigo um fator de atenuação $1/a(t) = 1 + z$, então devemos escrever $l = L/4\pi d^2(1 + z)^2$.

Considerando-se um espaço plano ($k = 0$) e a propagação da luz radialmente ($d\theta = d\phi = 0$), para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, calculamos a distância d (distância espacial) a partir de (2.8), de onde obtemos $d = \int_0^r \sqrt{-g_{rr} dx^r dx^r} = a(t) \int_0^r dr = a(t)r$, onde r é a distância comóvel percorrida pela luz. Substituindo-se $d = a(t)r$ na expressão para l , escrevemos (3.45) para as medidas realizadas hoje ($r, a \implies r_0, a_0$)

$$d_L = a_0 r_0 (1 + z). \quad (3.46)$$

Para calcular r_0 , devemos impor $ds = 0$ (estamos calculando a distância comóvel percorrida pela luz), de onde obtemos $cdt/a(t) = dr$, que sob a integração $\int_0^{t_0} cdt/a(t) = \int_0^{r_0} dr$, após a mudança de variáveis $dt = \left(\frac{dt}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)dz = -\left[\frac{a(t)}{H}\right]dz$ (a distância de luminosidade é medida em função do *redshift*), toma a forma $r_0 = c \int_0^z dz/H(z)$. Agora podemos escrever (3.46) como a expressão final para a distância de luminosidade

$$d_L = c(1 + z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.47)$$

onde consideramos $a_0 = 1$.

3.7 Sucessos e Problemas do Modelo Padrão

Num passado distante, quando o fator de escala era muito menor e a densidade de matéria era muito alta, certamente que o livre caminho médio dos prótons, dos elétrons e da radiação (fótons) era muito menor do que hoje. A interação entre matéria e radiação, por ser abundante nessa época, faria com que todo o meio se encontrasse muito próximo do equilíbrio termodinâmico com os fótons. Como o Universo se expandiu, o gás de fótons se resfriou e a densidade de energia diminuiu, possibilitando que os prótons e os elétrons se combinassem. Assim, houve um desacoplamento do gás de fótons da matéria, o qual fluiu livremente, originando o fundo de fótons com baixa energia que permeia todo o Universo. Esse fundo de radiação é conhecido hoje como *radiação cósmica de fundo* e foi proposto por Gamow em 1948, que imaginou um possível resíduo da época quando a elevada temperatura e a alta densidade poderiam ter resultado na formação de uma parte dos elementos químicos.

Inicialmente, não se deu importância aos cálculos realizados por Gamow, o que resultou em nenhum esforço para detectar tal radiação. Mas, em 1964, por acaso, Penzias e Wilson descobriram essa radiação quando monitoravam antenas de comunicação. A temperatura medida dessa radiação estava muito próxima dos 3K previstos por Gamow. A previsão da existência da radiação cósmica de fundo e a sua confirmação certamente foi o mais notável sucesso do modelo padrão.

Apesar do êxito de suas previsões, o modelo padrão enfrenta alguns problemas, dos quais citamos os principais:

i) *Problema do Horizonte*: A radiação cósmica de fundo observada apresenta uma elevadíssima homogeneidade. Mas o fato é que as regiões distantes não teriam condições de estar em contato causal antes da época do desacoplamento radiação-matéria que deu origem à radiação que observamos hoje. O modelo padrão não pode prever essa homogeneização por mecanismo algum e, assim, permanece a questão natural de como explicar o fato de o Universo conseguir atingir tal grau de homo-

geneização.

ii) *Problema da Planaridade*: De acordo com os dados da astronomia experimental, o parâmetro de densidade tem um valor muito próximo a 1, mas não exatamente 1, que corresponde ao modelo crítico ($\Omega_{total} = 1$), o que significa que a geometria do Universo é praticamente plana e, conseqüentemente, a densidade de energia do Universo é quase igual a crítica. Como vimos na seção 3.6, essa é uma situação muito especial, pois se Ω fosse um pouco maior ou um pouco menor que a unidade no início do Universo, hoje o seu valor seria muito diferente de 1, uma vez que o mesmo é função do tempo. Isso implica num ajuste fínissimo do parâmetro de densidade no início do Universo para que o seu valor seja compatível com o que é observado hoje, o que realmente é algo bastante artificial em virtude desse caráter altamente instável de Ω .

Outros problemas do modelo padrão podem ser vistos com detalhes na referência [31].

3.8 Modelo do Universo Inflacionário

Desta seção em diante, usaremos as unidades naturais: $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Para corrigir alguns dos problemas do modelo padrão, Alan Guth propôs em 1981 o *modelo inflacionário* [1]. A idéia fundamental é que no início o Universo expandiu-se violentamente num período muito curto, caracterizado por um crescimento acelerado do fator de escala, o qual ficou conhecido como *inflação*. Esse período inicia-se logo após a era de Planck, quando $t > t_p \approx \hbar/m_p c^2$ (t_p é o tempo de Planck e m_p é a massa de Planck), e a relatividade geral passa a ser válida. De acordo com esse modelo, o período inflacionário tem duração de aproximadamente 10^{-34} s.

Mas qual seria a causa da inflação? A alternativa mais natural é atribuir à constante cosmológica a causa da aceleração do fator de escala. Da equação (3.28), vemos que isso é possível ($\ddot{a} > 0$) se $2\Lambda > \rho + 3p$. Nesse cenário, o fator de escala ganha um grande acréscimo com o tempo, então o termo k da equação (3.25) sofre grande diluição e pode ser desprezado. Ainda, admitindo-se que a densidade de energia da matéria era desprezível nessa época, de (3.25), temos a solução

$$a(t) = \exp \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0) \right], \quad (3.48)$$

que expressa o fato de que quando a constante cosmológica domina, a taxa de expansão do Universo é alta. Essa solução é conhecida como *solução de De Sitter*. Mas, certamente, a era inflacionária deve ter um fim e, para isso, especula-se que a energia da constante cosmológica tenha se convertido em matéria, a qual causaria um expansão desacelerada do Universo que, a partir de então, obedeceria ao modelo padrão.

Os modelos inflacionários correntes utilizam-se de campos escalares *acoplados* (ver subseção 3.8.1) ao campo gravitacional, com densidades de potencial de auto-interação adequados a fornecer o cenário mais correto. Nesses tipos de modelo, o campo escalar é o responsável pela inflação e é chamado de *inflaton*. A ação que representa um modelo típico de campo escalar acoplado ao campo gravitacional é a seguinte

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right\}, \quad (3.49)$$

e descreve um Universo dominado pelo campo escalar, aqui representado por ϕ . A ação acima é a soma da ação do campo gravitacional com a ação do campo escalar, proveniente da densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$, que descreve ϕ [32]. As formas mais comuns de potencial utilizadas são a forma exponencial, $V(\phi) = V_0 \exp[-\alpha\phi(t)]$, e a forma de potência, $V(\phi) = V_0\phi(t)^m$, com V_0 , α e m sendo constantes arbitrárias.

Da variação da ação (3.49) com respeito a $g_{\mu\nu}$, temos o tensor energia-momento para o campo

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_{\sigma}\phi\partial^{\sigma}\phi - V(\phi)\right), \quad (3.50)$$

que identificado ao tensor energia-momento para um fluido perfeito, leva-nos às expressões para a densidade de energia e para a pressão do campo, respectivamente

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.51)$$

$$p_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.52)$$

A condição de conservação do tensor energia-momento nos leva à equação de fluido para o campo escalar

$$\dot{\rho}_{\phi} + 3H(\rho_{\phi} + p_{\phi}) = 0, \quad (3.53)$$

e a variação da ação (3.49) com respeito a ϕ nos fornece a equação que governa a evolução temporal do campo escalar (equação de Klein-Gordon)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.54)$$

que não é uma equação independente, pois a mesma pode ser obtida a partir da substituição de (3.51) e (3.52) em (3.53). Lembre que, de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, o que nos levou a considerar o campo escalar como homogêneo nas equações acima, ou seja, somente como função do tempo, $\phi = \phi(t)$.

Para um Universo dominado pelo campo escalar, a equação de Friedmann e a equação da aceleração são

$$H^2 = \frac{\rho_{\phi}}{3}, \quad (3.55)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p_{\phi}. \quad (3.56)$$

Para que tenhamos expansão acelerada, devemos ter uma pressão negativa, o que é garantido pela condição $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, ou seja, quando o termo cinético

é desprezível frente ao potencial. Por outro lado, com essa condição, o potencial está para o seu valor máximo e, se temos um período de expansão acelerada, o potencial deve variar muito lentamente nesse período. Então, podemos escrever $V \approx \text{constante}$ ou $V' = \epsilon$, onde ϵ é um valor muito pequeno. Essa aproximação é conhecida como *aproximação slow-roll*, caracterizando uma expansão acelerada.

No regime *slow-roll*, $\dot{\phi} \approx \text{constante}$ e $\ddot{\phi} \approx 0$, tal que a equação (3.54) pode ser escrita como

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.57)$$

e pela consideração de que $V \approx \text{constante}$, a equação (3.55), através de (3.51), torna-se

$$H^2 \approx \frac{V_0}{3} = \text{constante}, \quad (3.58)$$

de onde temos a solução inflacionária exponencial

$$a(t) = a_0 \exp \sqrt{\frac{V_0}{3}} t. \quad (3.59)$$

Daí, concluímos que independente da forma do potencial, a aproximação *slow-roll* sempre fornecerá uma solução aproximadamente exponencial.

Das equações (3.51) e (3.52), podemos considerar que no período da inflação exponencial temos $p_\phi = -\rho_\phi = -V$ (similar ao que ocorre no modelo da constante cosmológica), e o inflaton evoluirá do estado de *falso vácuo* para o estado de *vácuo verdadeiro*, quando $dV/d\phi$ não for mais pequeno (término do regime inflacionário). No final dessa fase, o potencial chega ao seu mínimo e o termo cinético não é mais desprezível e, de acordo com a equação (3.54), o inflaton sofre oscilações amortecidas e perde energia, a qual reaquece o Universo. Aí temos o fim da inflação e o modelo padrão passa a ser a descrição correta da evolução do Universo.

Listamos aqui dois dos principais problemas do modelo padrão que o modelo inflacionário consegue resolver:

i) *Problema do Horizonte*: A luz percorre desde o início do Universo até um instante t uma distância dada por

$$d = a(t) \int_0^t \frac{dt^*}{a(t^*)}, \quad (3.60)$$

onde o espaço considerado é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, com $k = 0$. Tem-se $ds = 0$ para a luz, o que implica em $dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0$, e escrevemos (3.60) como $d = a(t) \int_0^r dr = a(t)r$. Daqui, podemos ver que as regiões que estavam em contato causal no início ultrapassaram seus horizontes em virtude de $a(t)$ crescer exponencialmente, o que hoje nos faz parecer que essas regiões nunca poderiam estar em contato causal.

ii) *Problema da Planaridade*: Da equação (3.41), temos

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (3.61)$$

Analisando essa equação, constatamos que se o fator de escala cresce exponencialmente, o seu lado direito tende a zero e, conseqüentemente, temos que Ω tende a 1, significando também que o Universo tende a ter uma geometria plana, e isso é o que observamos hoje.

Outros problemas que o modelo inflacionário pode resolver estão detalhados na referência [31].

3.8.1 Acoplamento ao Campo Gravitacional

O acoplamento de um campo qualquer ao campo gravitacional pode ser mínimo ou não-mínimo. Diz-se que o acoplamento é mínimo quando o campo não está acoplado ao escalar de curvatura, e não-mínimo quando este está acoplado ao escalar de curvatura.

Para fins de ilustração:

Acoplamento mínimo — $\mathcal{L} = \frac{1}{2}R + \mathcal{L}_\chi$,

Acoplamento não-mínimo — $\mathcal{L} = \frac{1}{2}F(\chi)R + \mathcal{L}_\chi$,

onde χ representa um campo qualquer e \mathcal{L}_χ a Lagrangiana que o descreve, enquanto $F(\chi)$ é uma função genérica que descreve o acoplamento não-mínimo deste com o campo gravitacional.

O acoplamento não-mínimo gera uma teoria de gravitação com a "constante" gravitacional variável no tempo. Podemos ver isso notando que

$$\frac{c^3}{16\pi G}F[\chi(t)] R \equiv \frac{c^3}{16\pi\bar{G}} R, \quad \text{com} \quad \bar{G} = \frac{G}{F[\chi(t)]} = \bar{G}(t). \quad (3.62)$$

Aqui voltamos às unidades SI para poder analisar o significado desse acoplamento.

Tendo isso em vista, obviamente que a ação com um acoplamento não-mínimo nos leva a uma *teoria da relatividade geral modificada*. Cabe frisar aqui que podemos considerar teorias da gravitação com acoplamentos não-mínimos como teorias que generalizam a relatividade geral. Pois, de acordo com (3.62), quando $F(\chi) = \text{constante} = 1$, recuperamos a teoria da relatividade geral como concebida por Einstein. Esse tipo de generalização teve sua gênese na tentativa de implementar o *princípio de Mach* na teoria da relatividade geral [33].

3.9 Expansão Acelerada e Energia Escura

A partir das medidas observacionais, verifica-se que $\Omega_{total}^0 \approx 1$, mas os constituintes conhecidos não são suficientes para que o parâmetro de densidade tenha esse valor. As medidas do satélite WMAP estabelecem que $\Omega_{total}^0 = 1,02 \pm 0,02$ [34]. A radiação e a matéria (incluindo-se a *matéria escura* – ver subseção 3.9.1) totalizam: $\Omega_r^0 + \Omega_m^0 + \Omega_{dm}^0 \approx 0,28$ [35]. Isso significa que deve existir mais um constituinte, ainda desconhecido pela Cosmologia, o qual, por esse motivo, acabou levando o nome de *energia escura*.

Um outro problema com o modelo padrão, que veio à tona a partir

de observações astronômicas recentes, é o *Problema da Expansão Acelerada*. A medida mais confiável do valor do parâmetro de desaceleração hoje q_0 foi realizada por grupos que estudam supernovas distantes do tipo Ia [36]. Os resultados das medições mostram que o Universo está em expansão acelerada hoje, ou seja, que $q_0 < 0$. Esse resultado certamente é inesperado, pois, como mencionamos na seção 3.6, o modelo padrão prevê um Universo sempre em expansão desacelerada. Claramente, as observações astronômicas mostram uma discrepância séria com as previsões do modelo padrão, o que inevitavelmente exige mais uma correção.

Em conexão com o problema do parâmetro de densidade, poderíamos também associar a aceleração cosmológica à energia escura. Isso parece algo natural, *a priori*, uma vez que temos dois problemas que aparentemente podem ser resolvidos pela mesma suposição. De acordo com os dados experimentais, o parâmetro de densidade associado à energia escura deve ter hoje o valor $\Omega_{de}^0 = 0,72 \pm 0,03$ [37].

Como no caso da inflação, a alternativa mais imediata é atribuir à constante cosmológica a natureza da energia escura. Desse modo, teríamos um Universo composto por radiação, matéria e constante cosmológica. Esse modelo é chamado de modelo Λ CDM, onde Λ está designando a constante cosmológica e a sigla CDM significa *Cold Dark Matter* (toda a matéria considerada compreende a matéria ordinária mais a matéria escura não relativística).

A curva da diferença de magnitudes μ_0 , calculada a partir desse modelo, ajusta-se muito bem à curva experimental. A concordância do modelo com as medidas de anisotropia da radiação cósmica de fundo também é excelente. Mas, apesar desse grande sucesso do modelo Λ CDM, existe um grave problema a ser enfrentado, relacionado à própria constante cosmológica. Vejamos:

De acordo com a teoria inflacionária, o valor da sua densidade de energia nos primórdios do Universo deveria ser $\rho_\Lambda \approx 10^{95} \text{kg/m}^3$. Por outro lado, o valor da sua densidade de energia hoje deve ser $\rho_\Lambda^0 \approx 0,72 \rho_c^0 = 10^{-26} \text{kg/m}^3$. Então, temos que $\rho_\Lambda/\rho_\Lambda^0 \approx 10^{121}$. Lembrando que a constante cosmológica está relacionada à sua densidade de energia por $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda/c^2$, vemos que o seu valor hoje difere

do seu valor na época da inflação em 121 ordens de grandeza! Ora, se Λ é uma constante, está claro que temos aqui uma grave contradição.

Um modelo alternativo ao Λ CDM, bastante estudado pela comunidade científica, considera a energia escura um campo escalar, que conforme a equação (3.28) (com $\Lambda = 0$) deve ter uma pressão negativa associada. Esse campo escalar, que promove a aceleração cosmológica atual, é chamado de *quintessência*. A ação que descreve um modelo típico de quintessência é a mesma que a que descreve a inflação, mais as ações da radiação e da matéria

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right\} + S_r + S_m. \quad (3.63)$$

Em geral, despreza-se S_r , haja vista que a densidade de energia da radiação em comparação às densidades de energia da matéria e da quintessência é desprezível na época atual, o que também pode ser dito de sua pressão em comparação à pressão da quintessência.

Embora o modelo de quintessência aparentemente não possua problemas graves como o modelo da constante cosmológica, é um tanto inconveniente pelo fato de depender de um potencial arbitrário $V(\phi)$, que deve ser finamente ajustado para poder descrever a transição de um regime desacelerado para um regime acelerado em acordo com as observações astronômicas.

Os aprimoramentos dos modelos já existentes, tanto quanto a procura por melhores modelos que descrevam a expansão acelerada atual, são indubitavelmente uma necessidade. Portanto, o problema da energia escura permanece em aberto.

3.9.1 Matéria Escura

Observações das curvas de rotação de galáxias espirais [38] mostram que, além da matéria luminosa, existe um outro tipo de matéria compondo o Universo. Essa conclusão se deve ao fato de que, apenas baseando-se na quantidade de matéria calculada a partir das fontes luminosas da galáxia, constata-se que a

matéria que conhecemos não dá conta de gerar a força gravitacional à qual as estrelas estão submetidas, medida a partir de suas velocidades de órbita em torno do centro galáctico. Assim, a velocidade orbital das estrelas em torno do centro das galáxias é maior do que a prevista com base na matéria luminosa que compõe cada galáxia. Isso implica na existência de algum outro tipo de matéria, não luminosa, a qual interage com a matéria ordinária apenas gravitacionalmente. Devido a essas características, tal matéria faltante leva o nome de matéria escura. Os dados astronômicos revelam que em torno de 9/10 de cada galáxia é composto de matéria escura.

Capítulo 4

Simetria de Noether

Nesta dissertação, determinaremos as densidades de potencial e os acoplamentos com o campo gravitacional a partir da *simetria de Noether*. Tal simetria funcionará como um primeiro princípio no lugar de se propor as funções da ação que descreve o modelo de uma maneira *ad hoc*. Desse modo, teremos uma justificativa para as formas das ações utilizadas nos modelos estudados.

4.1 Teorema de Noether

Tomemos a Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, \lambda)$, onde q_i representa as coordenadas generalizadas (parametrizadas por λ) e o ponto denota derivada com relação ao parâmetro λ . As quantidades físicas do sistema mecânico descrito por \mathcal{L} que não mudam seu valor durante a evolução do sistema são grandezas conservadas, chamadas de constantes de movimento.

Uma *constante de movimento* de um sistema mecânico é definida matematicamente como uma função f das coordenadas generalizadas q_i (possivelmente também do parâmetro λ), a qual permanece constante durante a evolução do sistema

$$f(q_i, \lambda) = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{d\lambda} = 0. \quad (4.1)$$

As constantes de movimento fornecem equações diferenciais de primeira ordem, as quais dão informações importantes sobre a evolução do sistema. Tais constantes de movimento ainda podem ajudar na procura de soluções analíticas para as equações de movimento. Portanto, condições gerais que garantem a existência de constantes de movimento são de grande relevância para os problemas de dinâmica.

Na dinâmica lagrangiana, existe uma relação geral entre simetria (invariância sob transformações de coordenadas) e quantidades conservadas – a existência de uma simetria implica numa quantidade conservada.

Considere a seguinte transformação pontual

$$q_i(\lambda) \longrightarrow q'_i(\lambda') = q_i(\lambda) + \epsilon \alpha_i(q(\lambda), \lambda), \quad (4.2)$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = \lambda + \epsilon \beta(q(\lambda), \lambda), \quad (4.3)$$

onde α_i e β são funções conhecidas de $(n + 1)$ variáveis – funções das n coordenadas generalizadas e do parâmetro λ – e ϵ é um parâmetro infinitesimal arbitrário.

A ação que descreve a dinâmica considerada é invariante sob a transformação (4.2)-(4.3) se

$$\Delta S = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \mathcal{L}\left(q'_i(\lambda'), \frac{dq'_i(\lambda')}{d\lambda'}, \lambda'\right) d\lambda' - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}\left(q_i(\lambda), \frac{dq_i(\lambda)}{d\lambda}, \lambda\right) d\lambda = 0. \quad (4.4)$$

Se a condição de invariância (4.4) é verificada sob a transformação (4.2)-(4.3), existe uma quantidade conservada associada a \mathcal{L} . Tal relação entre simetria e quantidade conservada é garantida pelo *Teorema de Noether* [39, 40]:

Para um sistema mecânico com n graus de liberdade, se a ação é invariante sob a transformação (4.2)-(4.3), a quantidade

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \beta - \alpha_i) - \mathcal{L} \beta \quad (4.5)$$

é uma constante de movimento.

Esse importante teorema é devido a Emmy Noether (1918) [41].

Se o sistema mecânico é descrito por uma Lagrangiana que não depende explicitamente de λ , ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, teremos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.6)$$

o que significa que a forma da Lagrangiana pode ser somente afetada sob transformações das coordenadas q_i , e isso é equivalente a $\beta = 0$ nas transformações (4.2)-(4.3).

Então, pelo teorema de Noether, a constante de movimento associada à dinâmica descrita por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ será

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.7)$$

onde os α_i 's são funções das n coordenadas generalizadas.

4.2 Lagrangiana Pontual a partir da Densidade de Lagrangiana

A condição de existência de alguma simetria de Noether, a ser desenvolvida na próxima seção, é aplicada a Lagrangianas pontuais. Devemos transcrever as densidades de Lagrangiana que representam os modelos cosmológicos para as formas de Lagrangianas pontuais, para então aplicar tal condição de simetria. O método geral para essa transcrição será desenvolvido a seguir.

Tomemos uma ação que descreve um acoplamento não-mínimo de um determinado campo à gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F(\chi) R + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi) \right\}. \quad (4.8)$$

Como podemos ver, a quantidade entre chaves na ação (4.8) representa uma densidade de Lagrangiana, o que significa que o modelo é descrito por um funcional com

infinitos graus de liberdade.

Transformaremos nosso problema em um problema com finitos graus de liberdade, isto através da especificação de uma métrica que representa um espaço homogêneo e isotrópico, o que será feito a seguir. Para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana, e considerando-se o campo homogêneo (exigência do princípio cosmológico), a ação (4.8) toma a forma

$$S = 2\pi^2 \int dt a^3 \left\{ 6F \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - V \right\}. \quad (4.9)$$

Agora, integrando (4.9) por partes, definimos uma nova ação

$$\bar{S} = -\frac{S}{2\pi^2} = \int dt \left\{ 6Fa\dot{a}^2 + 6a^2\dot{a} \frac{dF}{d\chi} \dot{\chi} - a^3 \left(\frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - V \right) \right\}. \quad (4.10)$$

Por fim, de (4.10) chegamos à nova Lagrangiana que descreve a dinâmica do modelo, a saber

$$\mathcal{L} = 6Fa\dot{a}^2 + 6a^2\dot{a} \frac{dF}{d\chi} \dot{\chi} - a^3 \left(\frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - V \right). \quad (4.11)$$

Perceba agora que a Lagrangiana (4.11) tem a forma $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, ou seja, é uma Lagrangiana pontual que não depende explicitamente do tempo. Nesse caso ilustrativo, as coordenadas generalizadas são $q_1 = a$, $q_2 = \chi$, onde $\dot{q}_1 = da/dt = \dot{a}$, $\dot{q}_2 = d\chi/dt = \dot{\chi}$ e, obviamente, o problema apresenta então dois graus de liberdade.

4.3 Condição de Existência da Simetria de Noether

Consideremos Lagrangianas da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ (as Lagrangianas pontuais correspondentes aos nossos problemas cosmológicos serão sempre dessa forma), às quais temos associada a *função energia* [42]

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (4.12)$$

onde há soma sobre os índices repetidos ii (todo o desenvolvimento a seguir respeitará essa convenção). A equação (4.12) representa a energia total, que em qualquer caso é uma constante de movimento – atente para o fato de isso sempre ser verdade para uma Lagrangiana que não depende explicitamente de λ .

Tendo em vista que nossos problemas cosmológicos possuem um número finito de graus de liberdade (após as ações serem reescritas mediante o método da seção anterior), consideraremos somente transformações pontuais – a condição de simetria a ser desenvolvida a seguir referir-se-á a *simetrias pontuais* [43, 44, 45].

Qualquer transformação inversível de coordenadas generalizadas $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ induz uma transformação de velocidades generalizadas, tal que

$$\dot{Q}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial Q^i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (4.13)$$

onde a matriz $J = \|\partial Q^i / \partial q_j\|$ é o jacobiano da transformação de coordenadas, o qual é suposto ser não nulo. Em geral, tal condição é somente satisfeita na vizinhança de um ponto, não podendo ser satisfeita em todo o espaço, ou em outras palavras, essa é uma transformação local. Ressaltamos aqui que a transformação pontual $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ pode depender de um ou mais parâmetros.

Como ponto de partida, assumiremos que a transformação pontual depende de um parâmetro ε , $Q^i = Q^i(\mathbf{q}, \varepsilon)$. Para valores infinitesimais de ε , a transformação é então gerada por um campo vetorial: podemos no momento considerar $\partial/\partial x$ como representando uma translação ao longo do eixo x e $x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ como uma rotação em torno do eixo z . A transformação induzida (4.13) é então representada pelo campo vetorial

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (4.14)$$

definido no espaço tangente ao ponto da transformação, o qual é chamado de *gerador infinitesimal de simetria*. Os α^i 's são os coeficientes do gerador de simetria, os quais são funções somente das coordenadas generalizadas.

Uma função $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é invariante sob a transformação \mathbf{X} se

$$L_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f = \alpha^i(\mathbf{q})\frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda}\alpha^i(\mathbf{q})\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (4.15)$$

onde $L_{\mathbf{X}}f$ é a derivada de Lie de f . Se $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, dizemos que \mathbf{X} é a *simetria* para a dinâmica descrita por \mathcal{L} .

Tomemos agora a Lagrangiana \mathcal{L} e as equações de Euler-Lagrange associadas a esta

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0, \quad (4.16)$$

e também o campo vetorial (4.14). Aplicando os α^i 's em (4.16), temos

$$\alpha^j \left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \right) = 0, \quad (4.17)$$

e sendo que

$$\alpha^j \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \left(\frac{d\alpha^j}{d\lambda} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}, \quad (4.18)$$

de (4.17) chegamos a

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = L_{\mathbf{X}}\mathcal{L}. \quad (4.19)$$

Como consequência, temos o *teorema de Noether*:

Se $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, então a função $\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$ é uma constante de movimento.

Notemos que uma constante de movimento pode se revelar muito útil por poder ajudar na integração das equações de campo dos modelos cosmológicos que serão investigados. Observe ainda que em nossos problemas cosmológicos o parâmetro λ será o tempo cosmológico, uma vez que a Lagrangiana pontual provém da imposição de um espaço homogêneo e isotrópico e, em consequência, os campos são funções somente do tempo cosmológico.

Um ponto interessante relacionado à vantagem da existência da simetria de Noether deve ser abordado aqui:

Considere o operador $i_{\mathbf{Y}}$, definido por

$$i_{\mathbf{Y}}\gamma = y^i\gamma_i, \quad (4.20)$$

onde \mathbf{Y} é o campo vetorial $\mathbf{Y} = y^i\partial/\partial x^i$ e γ é o um-forma $\gamma = \gamma_i dx^i$.

A constante associada à simetria de Noether $(\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i})$ pode ser expressa independentemente do sistema de coordenadas pela aplicação do operador (4.20) (para o campo vetorial \mathbf{X}) ao *um-forma de Cartan* associado a \mathcal{L} [43], definido por

$$\theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} dq^i, \quad (4.21)$$

ou seja,

$$i_{\mathbf{X}}\theta_{\mathcal{L}} = \alpha_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \Sigma_0. \quad (4.22)$$

Nos desenvolvimentos a seguir, o método consistirá na aplicação da condição $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$ a uma Lagrangiana pontual genérica. Haverá alguma simetria de Noether para a Lagrangiana genérica se existir um conjunto de α_i 's, em que pelo menos um α_i seja diferente de zero. Observe que não necessariamente haverá apenas um único conjunto de α_i 's, pois pelo fato de a Lagrangiana ser genérica (densidade de potencial e acoplamento genérico), podem existir vários conjuntos de formas para o potencial e para o acoplamento, correspondendo a vários conjuntos de α_i 's, o que significa que poderão existir várias simetrias para um único modelo genérico – a solução para a condição $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$ não é necessariamente única.

Respeitando essa condição de simetria, determinaremos as formas genéricas contidas na Lagrangiana, pois as densidades de potencial e os acoplamentos com o campo gravitacional, em conjunto com os correspondentes α_i 's, se existirem,

serão determinados pela satisfação de $L_{\mathbf{x}}\mathcal{L} = 0$. Daí, tal serão as formas possíveis da Lagrangiana que a simetria de Noether será satisfeita e, como resultado, teremos a garantia de quantidades conservadas, as quais, por sua vez, fornecerão constantes de movimento. Portanto, o critério da existência de alguma simetria de Noether poderá restringir drasticamente as formas possíveis para a Lagrangiana genérica, além de funcionar como um primeiro princípio para a seleção das funções que representam as densidades de potencial e os acoplamentos. Desse modo, teremos uma justificativa formal e ao mesmo tempo fundamental para as formas das ações utilizadas nos modelos.

Capítulo 5

Campos Fermiônicos

Não-minimamente Acoplados

O objetivo deste capítulo é estudar o modelo genérico de um campo fermiônico não-minimamente acoplado ao campo gravitacional. Procuramos determinar as formas da função acoplada ao escalar de curvatura e da densidade de potencial a partir da existência da Simetria de Noether para a Lagrangiana pontual derivada da ação geral. O modelo analisado descreve um Universo homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, constituído por um campo fermiônico. As equações de evolução do Universo seguem das equações de campo de Einstein e das equações de Dirac, que são resolvidas a partir das soluções obtidas para o acoplamento e para o potencial. As soluções cosmológicas encontradas são analisadas para uma verificação de quais cenários essa classe de modelo pode descrever.

Modelos que consideram campos fermiônicos como fonte de campo gravitacional foram investigados na literatura [46, 47, 48, 49, 50, 51], sendo que alguns autores recentemente analisaram a possibilidade de que os férmions poderiam ser os responsáveis por regimes acelerados, agindo como inflaton no Universo primordial e como energia escura no presente [52, 53, 54, 55].

5.1 Espinores em Espaço-Tempo Curvo

De acordo com a representação espinorial [32], quando da passagem de um referencial inercial a outro, os espinores se transformam conforme

$$\psi'(x') = \exp \left[\frac{1}{2} \lambda_{ab} \Sigma^{ab} \right] \psi(x), \quad (5.1)$$

onde os λ_{ab} representam os parâmetros da transformação de Lorentz e os Σ^{ab} são os geradores de representação espinorial, os quais são definidos por

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (5.2)$$

Nessa definição, os γ^a são matrizes quatro por quatro que satisfazem a *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} \equiv \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta_{ab}, \quad (5.3)$$

que na representação de Pauli se apresentam da seguinte forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

de onde temos para os γ^a a relação $\gamma^5 = -i\sqrt{-\eta}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Aqui, η representa o determinante da matriz de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ – que é uma representação especial do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para um espaço-tempo plano.

A Lagrangiana que descreve os espinores num espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski) – chamada de *Lagrangiana de Dirac* – é a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi] - m \bar{\psi} \psi - V, \quad (5.7)$$

onde ψ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ denotam o campo spinorial e seu adjunto, respectivamente (o *dagger* representa conjugação complexa), m é a massa do férmion e V é a densidade do potencial de auto-interação dos férmions. Essa é a descrição de um campo spinorial proveniente das teorias de campo, as quais foram construídas sobre os princípios da mecânica quântica e da relatividade restrita. Nessa classe de teoria, quando se realiza uma transformação de coordenadas de um referencial inercial para outro, os campos se transformam segundo o *grupo de Lorentz*

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (5.8)$$

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\gamma A^\gamma(x), \quad (5.9)$$

$$T'^{\mu\gamma}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\gamma_\beta T^{\alpha\beta}(x), \quad (5.10)$$

onde os Λ^μ_γ são os *boosts* de Lorentz. As equações (5.8), (5.9) e (5.10) representam as leis de transformação para campos escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente.

Vamos agora à generalização da Lagrangiana (5.7) para um espaço-tempo curvo. Primeiramente, devemos fazer três generalizações fundamentais, estas exigidas pelo princípio da covariância geral, a saber

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Generalizamos o grupo de Lorentz para o } \textit{grupo de transformação geral de} \\ \textit{coordenadas}, \text{ isto é: } \Lambda^\alpha_\mu \longrightarrow \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}, \\ \text{ii) Substituímos o tensor de Minkowski } \eta_{\mu\nu} \text{ pelo tensor métrico geral } g_{\mu\nu}, \\ \text{iii) Trocamos as derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes: } \partial_\mu \longrightarrow D_\mu. \end{array} \right.$$

A equação de Dirac, que governa a evolução espaço-temporal do espinor ψ , é derivada por meio das transformações dos espinores sob o grupo de Lorentz [32]. Mas não podemos aqui simplesmente aplicar a generalização i) para reescrever a equação de Dirac num espaço-tempo curvo, isso pelo fato de que o grupo de transformação geral de coordenadas não admite a representação espinorial – sob transformação geral de coordenadas, o spinor se transforma da mesma forma que um escalar.

Tendo em vista esse impasse, desenvolveu-se o *formalismo das tetradas*. Tal formalismo se fundamenta no princípio da equivalência (Capítulo 2): podemos associar a cada ponto do espaço-tempo um referencial localmente inercial, onde o tensor métrico passa a ser $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A conexão desses referenciais localmente inerciais com um referencial não inercial qualquer, onde teremos para o tensor métrico a forma geral $g_{\mu\nu}$, pode ser feita através da seguinte relação

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad \text{onde} \quad e_\mu^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}, \quad (5.11)$$

com e_μ^a sendo chamado de *tetrada* ou *vierbein* – o qual leva consigo a generalização i). Nas equações acima, os índices gregos se referem às componentes escritas num referencial não inercial e os índices latinos às componentes escritas num referencial localmente inercial.

As tetradas se transformam sob uma transformação de Lorentz por

$$e_\mu^a = \Lambda_b^a e_\mu^b, \quad (5.12)$$

e sob uma transformação geral de coordenadas por

$$e_\mu^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a, \quad (5.13)$$

isto é, se transformam como um vetor contravariante e covariante, respectivamente. Podemos contrair um quadrivetor com uma tetrada

$$A_a = e_a^\mu A_\mu, \quad (5.14)$$

obtendo uma grandeza que se transforma como um quadrivetor sob transformações de Lorentz e como uma coleção de quatro quantidades sob uma transformação geral

de coordenadas. As tetradas nos permitem transformar tensores gerais em tensores de Lorentz locais e, assim, a dependência espaço-temporal acaba por ser descrita pelas próprias tetradas. Dessa forma, escrevemos os espinores a partir de um referencial localmente inercial, e por meio das tetradas os reescrevemos num referencial não-inercial, ou equivalentemente, na presença de um campo gravitacional [56, 57].

A partir desse formalismo, definimos um novo gama

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a, \quad (5.15)$$

o qual satisfaz, como consequência, uma álgebra de Clifford generalizada

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (5.16)$$

uma necessidade devida à generalização ii).

Segue da generalização iii), a substituição das derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes, definidas como

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + \Omega_\mu) \psi, \quad (5.17)$$

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu, \quad (5.18)$$

onde Ω_μ é a conexão de spin definida por

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\sigma\nu} [\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\nu (\partial_\mu e_\lambda^b)] \Gamma^\sigma \Gamma^\lambda. \quad (5.19)$$

Podemos agora generalizar a Lagrangiana (5.7) para um campo espinorial na presença de um campo gravitacional, isto é, num espaço tempo-curvo

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V. \quad (5.20)$$

Para o princípio da covariância ser satisfeito, V é função somente do bilinear escalar $\Psi = \bar{\psi} \psi$ e do pseudo-escalar $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ – *teorema de Pauli-Fierz* [58]. A partir de (5.20), podemos escrever a ação que representa um campo espinorial num espaço-tempo curvo

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V \right\}. \quad (5.21)$$

Variando a ação (5.21) com respeito ao tensor métrico, temos o tensor momento-energia do campo

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\psi} \Gamma_\nu D_\mu \psi + \bar{\psi} \Gamma_\mu D_\nu \psi - \bar{D}_\mu \bar{\psi} \Gamma_\nu \psi - \bar{D}_\nu \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.22)$$

Pela variação de (5.21) com relação a $\bar{\psi}$ e a ψ , as equações de Euler-Lagrange nos levam a

$$i \Gamma^\mu D_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad (5.23)$$

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + m \bar{\psi} - \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (5.24)$$

que são a equação de Dirac e a sua adjunta na presença de um campo gravitacional, respectivamente.

5.2 Lagrangiana Pontual e Equações de Campo

A partir do que foi exposto na seção 5.1, determinamos que a ação para um modelo com campo fermiônico acoplado não-minimamente ao campo gravitacional é da forma

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ F(\Psi) R + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - V(\Psi) \right\}, \quad (5.25)$$

onde $F(\Psi)$ é uma função genérica que descreve o acoplamento. Supomos aqui, por simplicidade, que F e V são somente funções do escalar bilinear $\Psi = \bar{\psi} \psi$. Observe que não admitimos um férmion massivo *a priori*, pois o termo de massa $m\Psi$ pode emergir naturalmente da simetria de Noether, como veremos a seguir.

Para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana, obtemos da ação (5.25), após uma integração por partes, a Lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2 \dot{a} \dot{\Psi} F' + \frac{i}{2} a^3 (\dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi}) + a^3 V. \quad (5.26)$$

Na expressão acima, a linha denota derivada com relação a Ψ . Note que, ao satisfazer o princípio cosmológico, tomamos o campo espinorial como homogêneo, ou seja, $\psi = \psi(t)$ e $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$.

Das equações de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$ e ψ , aplicadas à Lagrangiana (5.26), temos as equações de Dirac para o campo espinorial e seu adjunto acopladas ao campo gravitacional

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + \imath\gamma^0\psi V' - \imath 6(\dot{H} + 2H^2)\gamma^0\psi F' = 0, \quad (5.27)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - \imath\bar{\psi}\gamma^0V' + \imath 6(\dot{H} + 2H^2)\bar{\psi}\gamma^0F' = 0. \quad (5.28)$$

Da equação de Euler-Lagrange para o fator de escala, aplicada a (5.26), obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho_f + 3p_f}{12F}, \quad (5.29)$$

e impondo que a *função energia* associada à Lagrangiana (5.26) seja igual a zero

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\dot{a} + \frac{\dot{\bar{\psi}}\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} - \mathcal{L} = 0, \quad (5.30)$$

temos a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{\rho_f}{6F}. \quad (5.31)$$

Nas equações (5.29) e (5.31), as expressões para a densidade de energia ρ_f e para a pressão p_f dos férmions são dadas por

$$\rho_f = V - 6HF'\dot{\Psi}, \quad (5.32)$$

$$p_f = [V' - 6(\dot{H} + 2H^2)F']\Psi - V + 2(F'\ddot{\Psi} + 2HF'\dot{\Psi} + F''\dot{\Psi}^2). \quad (5.33)$$

5.3 Existência da Simetria de Noether

Em termos das componentes dos espinores, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ e seu adjunto $\bar{\psi} = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger, -\psi_4^\dagger)$, a Lagrangiana (5.26) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2F + 6a^2\dot{a}F' \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \left(\dot{\psi}_i^\dagger\psi_i + \psi_i^\dagger\dot{\psi}_i \right) + \frac{\imath}{2}a^3 \sum_{i=1}^4 \left(\dot{\psi}_i^\dagger\psi_i - \psi_i^\dagger\dot{\psi}_i \right) + a^3V, \quad (5.34)$$

que é função somente de $(a, \psi_l^\dagger, \psi_l, \dot{a}, \dot{\psi}_l^\dagger, \dot{\psi}_l)$.

A simetria de Noether é satisfeita com a condição

$$L_{\mathbf{x}}\mathcal{L} = 0, \quad (5.35)$$

onde \mathbf{X} é o gerador infinitesimal de simetria definido por

$$\mathbf{X} = C_0 \frac{\partial}{\partial a} + \dot{C}_0 \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \sum_{l=1}^4 \left(C_l \frac{\partial}{\partial \psi_l^\dagger} + D_l \frac{\partial}{\partial \psi_l} + \dot{C}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l^\dagger} + \dot{D}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l} \right), \quad (5.36)$$

e $L_{\mathbf{X}}$ é a derivada de Lie de \mathcal{L} com relação ao vetor \mathbf{X} , definido no espaço tangente, e C_0 , C_l e D_l são funções de $(a, \psi_l^\dagger, \psi_l)$.

Aplicando a condição (5.35) à Lagrangiana (5.34), temos um polinômio em \dot{a}^2 , $\dot{a}\dot{\psi}_l^\dagger$, $\dot{a}\dot{\psi}_l$, $\dot{\psi}_l^\dagger\dot{\psi}_n^\dagger$, $\dot{\psi}_l^\dagger\dot{\psi}_n$, $\dot{\psi}_l\dot{\psi}_n$, \dot{a} , $\dot{\psi}_l^\dagger$ e $\dot{\psi}_l$, que deve se anular. Para se verificar tal nulidade, cada coeficiente do polinômio deve se anular separadamente. Da nulidade de cada termo que envolve derivadas temporais, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$\begin{aligned} C_0 F + 2a \frac{\partial C_0}{\partial a} F + a^2 F' \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j + \frac{\partial D_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) \\ + a F' \sum_{j=1}^4 (C_j \epsilon_j \psi_j + D_j \epsilon_j \psi_j^\dagger) = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} F' \epsilon_j \psi_j \left(2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a} \right) + a F'' \epsilon_j \psi_j \sum_{i=1}^4 (C_i \psi_i + D_i \psi_i^\dagger) \epsilon_i + a F' D_j \epsilon_j \\ + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} + a F' \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i^\dagger \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} F' \epsilon_j \psi_j^\dagger \left(2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a} \right) + a F'' \epsilon_j \psi_j^\dagger \sum_{i=1}^4 (C_i \psi_i + D_i \psi_i^\dagger) \epsilon_i + a F' C_j \epsilon_j \\ + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} + a F' \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i^\dagger \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i^\dagger} \epsilon_j \psi_j \right) = 0, \quad F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i^\dagger + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad (5.40)$$

$$F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i^\dagger} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial a} \psi_j - \frac{\partial D_j}{\partial a} \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad (5.41)$$

$$3C_0 \psi_j + a D_j + a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j^\dagger} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j^\dagger} \psi_i^\dagger \right) = 0, \quad (5.42)$$

$$3C_0 \psi_j^\dagger + a C_j - a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j} \psi_i^\dagger \right) = 0, \quad (5.43)$$

e dos termos remanescentes, obtemos uma equação diferencial que está relacionada à densidade de potencial

$$3C_0V + aV' \sum_{j=1}^4 \left(C_j \epsilon_j \psi_j + D_j \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 0. \quad (5.44)$$

Nas equações (5.37)-(5.44), foi introduzido o símbolo

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1, 2 ; \\ -1 & \text{para } i = 3, 4 . \end{cases}$$

O sistema com 55 equações diferenciais parciais acopladas (5.37)-(5.44) será analisado a seguir. Primeiramente, das equações (5.40) e (5.41)₁, inferimos que existem duas possibilidades para o acoplamento, $F' = 0$ e $F' \neq 0$. Esses dois casos serão analisados separadamente.

5.3.1 Caso $F' = 0$

Quando $F' = 0$, temos que $F = \text{constante}$, e as equações (5.40) e (5.41)₁ são satisfeitas automaticamente. Por outro lado, das equações (5.38) e (5.39), determinamos que C_0 é função apenas de a . Da equação (5.37), tendo isso em vista, podemos determinar $C_0 = C_0(a)$, tal que obtemos

$$C_0 = \frac{k}{a^{1/2}}, \quad (5.45)$$

onde k é uma constante.

A partir das equações (5.41)₂ e (5.42) (ou de (5.41)₂ e (5.43)), determinamos C_j e D_j , de onde temos

$$C_j = -\frac{3}{2}k \frac{\psi_j^\dagger}{a^{3/2}} + \beta \epsilon_j \psi_j^\dagger, \quad D_j = -\frac{3}{2}k \frac{\psi_j}{a^{3/2}} - \beta \epsilon_j \psi_j, \quad (5.46)$$

com β sendo uma constante.

Por fim, da equação (5.44), obtemos a forma da densidade de potencial, a saber

$$V = \lambda\Psi, \quad (5.47)$$

onde λ é uma constante.

Assim, concluímos que para $F' = 0$, existe uma simetria de Noether, tal que

$$\begin{cases} C_j = -\frac{3}{2}k\frac{\psi_j^\dagger}{a^{3/2}} + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, & D_j = -\frac{3}{2}k\frac{\psi_j}{a^{3/2}} - \beta\epsilon_j\psi_j, \\ C_0 = \frac{k}{a^{1/2}}, & F = \text{constante}, \quad V = \lambda\Psi. \end{cases} \quad (5 - I)$$

5.3.2 Caso $F' \neq 0$

Da equação (5.44), podemos escrever

$$\sum_{j=1}^4 \left(C_j \epsilon_j \psi_j + D_j \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = -3 \frac{C_0}{a} \frac{V}{V'}, \quad (5.48)$$

que derivada com respeito a a fornece

$$\sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j + \frac{\partial D_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 3 \left(\frac{C_0}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial C_0}{\partial a} \right) \frac{V}{V'}. \quad (5.49)$$

Agora, substituindo (5.48) e (5.49) na equação (5.37), e lembrando que F e V são funções somente de Ψ , obtemos

$$\frac{a}{C_0} \frac{\partial C_0}{\partial a} = \frac{V'F}{3VF' - 2V'F} = s, \quad (5.50)$$

onde s é uma constante.

Para $F' \neq 0$, as equações (5.40) e (5.41)₁ nos levam a $C_0 = C_0(a)$ e, assim, determinamos C_0 diretamente da equação (5.50)

$$C_0 = ka^s, \quad (5.51)$$

com k sendo uma constante.

Novamente, das equações (5.41)₂ e (5.42) (ou de (5.41)₂ e (5.43)), obtemos C_j e D_j

$$C_j = -\frac{3}{2}k\psi_j^\dagger a^{s-1} + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, \quad D_j = -\frac{3}{2}k\psi_j a^{s-1} - \beta\epsilon_j\psi_j. \quad (5.52)$$

Da equação (5.44), determinamos que a densidade de potencial é uma função linear de Ψ , ou seja, nesse caso também é dada pela forma (5.47). A partir das equações (5.47) e (5.50), chegamos à lei de potência $F = \alpha\Psi^p$, onde α é uma constante e $p = \frac{1+2s}{3s}$ para a equação (5.37). Mas as equações (5.38) e (5.39) devem ser satisfeitas simultaneamente pela forma $F = \alpha\Psi^p$ e, obviamente, p não precisa ter a mesma forma que aquela para a equação (5.37). Portanto, obtemos a partir das equações restantes, (5.38) e (5.39), que $p = \frac{2+s}{3}$. Conseqüentemente, temos duas relações para os expoentes s e p , a partir dos quais podemos determinar s e p , tais que satisfaçam todas as equações do sistema, a saber

$$\begin{cases} 3sp = 1 + 2s, \\ 3p = 2 + s, \end{cases}$$

que implicam em

$$(s, p) = \begin{cases} (1, 1), \\ (-1, 1/3). \end{cases}$$

(5 - II)

Portanto, de (5 - II), determinamos que quando $F' \neq 0$, existem duas simetrias de Noether, tais que

$$a) \begin{cases} C_j = -\frac{3}{2}k\psi_j^\dagger + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, & D_j = -\frac{3}{2}k\psi_j - \beta\epsilon_j\psi_j, \\ C_0 = ka, & F = \alpha\Psi, & V = \lambda\Psi. \end{cases} \quad (5 - III)$$

$$b) \begin{cases} C_j = -\frac{3}{2}k\frac{\psi_j^\dagger}{a^2} + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, & D_j = -\frac{3}{2}k\frac{\psi_j}{a^2} - \beta\epsilon_j\psi_j, \\ C_0 = \frac{k}{a}, & F = \alpha\Psi^{1/3}, & V = \lambda\Psi. \end{cases} \quad (5 - IV)$$

5.4 Soluções das Equações de Campo

Note que não podemos distinguir fisicamente V dado por (5.47) de um termo de massa para a ação (5.25), uma vez que V é linear em Ψ . Então, podemos considerar $V = \lambda\Psi \equiv m\Psi$, onde m é a massa do férmion. Tendo isso em

vista, simplesmente denotaremos o coeficiente do "potencial" por m daqui em diante. Isso significa que a simetria de Noether – para a ação de um modelo fermiônico como o abordado aqui – não admite um termo de potencial, mas somente um termo de massa.

Das equações (5.27) e (5.28), obtemos a seguinte equação diferencial para Ψ

$$\dot{\Psi} + 3H\Psi = 0, \quad (5.53)$$

que é facilmente resolvida, tendo como solução

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^3}, \quad (5.54)$$

com Ψ_0 sendo uma constante. A partir do resultado acima, podemos resolver a equação de Friedmann (equação (5.31)) diretamente, já que a mesma depende somente de Ψ , que por sua vez é uma função apenas de a .

5.4.1 Caso $F' = 0$

Se fizermos $F = \text{constante} = 1/2$ (que representa um acoplamento mínimo do campo fermiônico com o campo gravitacional e segue da normalização da ação (5.25) e da escolha das unidades naturais), utilizando a forma de V dada por (5.47) e levando em conta a solução (5.54) para Ψ , ao substituir-se (5.32) em (5.31), segue que a equação de Friedmann nos leva à seguinte solução para a evolução temporal do fator de escala

$$a(t) = [K(t - t_0)]^{2/3}, \quad \text{com} \quad K = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m\Psi_0}{3}}. \quad (5.55)$$

Essa é a solução de um Universo dominado por um campo de matéria (expansão desacelerada), como no modelo padrão. Assim, concluímos que um modelo com campo fermiônico minimamente acoplamento não pode produzir uma expansão acelerada, se quisermos que a simetria de Noether seja satisfeita.

A densidade de energia e a pressão do campo fermiônico seguem de

(5.32) e (5.33), fornecendo

$$\rho_f = \frac{m\Psi_0}{a^3}, \quad p_f = 0. \quad (5.56)$$

Portanto, o campo fermiônico pode se comportar como um campo de matéria sem pressão, ou seja, como um campo de matéria ordinária.

5.4.2 Caso $F' \neq 0$

Para as formas de V e de F da simetria a) (5 - III), ao substituir (5.32) em (5.31), obtemos a seguinte equação diferencial para o fator de escala

$$\frac{da}{a} = \sqrt{-\frac{m}{12\alpha}} dt, \quad (5.57)$$

que tem como solução uma forma exponencial, dando-nos a descrição de um cenário inflacionário. Assim, o campo fermiônico pode ser identificado como inflaton e a evolução temporal do fator de escala é dada por

$$a(t) = \exp[\mathcal{K}(t - t_0)], \quad \text{com} \quad \mathcal{K} = \sqrt{-\frac{m}{12\alpha}}. \quad (5.58)$$

A partir das equações (5.32) e (5.33), temos para a densidade de energia e pressão do campo fermiônico

$$\rho_f = -\frac{m\Psi_0}{2a^3}, \quad p_f = -\rho_f. \quad (5.59)$$

Evocando a condição fraca de energia, a qual diz que a densidade de energia é uma quantidade não negativa, $\rho_f \geq 0$, inferimos da equação (5.59)₁ que devemos ter $\Psi_0 < 0$. Por sua vez, essa última condição impõe que $\alpha < 0$, haja vista que o acoplamento $F = \alpha\Psi$ deve ser uma quantidade positiva. Notemos também que a condição $\alpha < 0$ implica em $\mathcal{K} > 0$. Além do mais, da equação (5.59)₂, concluimos que a pressão do campo fermiônico é sempre negativa e proporcional à densidade de energia.

Nesse cenário, de (5.54), temos para a evolução temporal de Ψ

$$\Psi(t) = \Psi_0 \exp[-3\mathcal{K}(t - t_0)]. \quad (5.60)$$

Isso nos mostra que Ψ se aproxima de zero rapidamente à medida que o Universo se expande.

Determinamos, a partir das equações (5.32) e (5.33), a evolução temporal da densidade de energia e da pressão dos férmions para a época da inflação, respectivamente

$$\rho_f(t) = 6\alpha\Psi_0\mathcal{K}^2 \exp[-3\mathcal{K}(t - t_0)], \quad (5.61)$$

$$p_f(t) = -6\alpha\Psi_0\mathcal{K}^2 \exp[-3\mathcal{K}(t - t_0)] = -\rho_f(t). \quad (5.62)$$

As equações (5.61) e (5.62) determinam que durante a inflação a densidade de energia e a pressão dos férmions decaem rapidamente com a expansão, tendendo a zero nesse período. De (5.62), podemos ver que os férmions têm uma equação barotrópica idêntica à da constante cosmológica, pois, em cada instante da era inflacionária, a pressão dos férmions é o negativo de sua densidade de energia. Cabe notar aqui que, mesmo que a solução (5.58) preveja uma expansão eternamente acelerada, sabemos, a partir das observações, que a inflação teve ter um fim. Isso implica que a solução (5.58) só pode valer até um certo momento, e a partir deste devemos ter um outro regime.

Para a simetria b) (5 - IV), onde $F = \alpha\Psi^{1/3}$, a equação de Friedmann não apresenta solução.

Capítulo 6

Campos Taquiônicos

Não-minimamente Acoplados

Dentro do contexto de campos escalares, os modelos com campos taquiônicos acoplados ao campo gravitacional receberam uma notável atenção dos cosmólogos. O campo taquiônico teve sua origem na teoria de cordas, mas pode ser introduzido de uma forma simples da seguinte maneira. O campo taquiônico pode ser interpretado como a generalização da Lagrangiana para uma partícula relativística: $\mathcal{L} = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2} \rightarrow \mathcal{L}_{tach} = -V(\varphi)\sqrt{1 - \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi}$. Da mesma forma que o bem popular campo da chamada quintessência pode ser interpretado como a generalização natural da Lagrangiana para uma partícula não relativística: $\mathcal{L} = (1/2)\dot{q}^2 - V(q) \rightarrow \mathcal{L}_{quin} = (1/2)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)$.

Nas referências [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66], o período inflacionário do Universo foi investigado considerando-se como fonte de campo gravitacional um campo taquiônico acoplado minimamente ao campo gravitacional para diferentes densidades de potencial de auto-interação, na forma de lei de potências, exponenciais e funções hiperbólicas. Campos taquiônicos com tais classes de densidades de potencial também foram estudados para descrever o período acelerado atual do Universo nas referências [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74], onde o campo taquiônico se comporta como energia escura. No trabalho [75], estudou-se um campo taquiônico

com uma densidade de potencial exponencial que pode fazer o papel de inflaton e de energia escura. Apesar de a maioria dos artigos considerar um acoplamento mínimo, na referência [76], um acoplamento não-mínimo foi investigado para um campo taquiônico com densidades de potencial e acoplamentos dados por funções com leis de potência.

6.1 Lagrangiana Pontual e Equações de Campo

Representemos por φ um campo taquiônico da teoria de cordas, o qual é descrito pela densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_\varphi = -V(\varphi)\sqrt{1 - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}$, onde $V(\varphi)$ é a densidade de potencial de auto-interação do campo. A ação genérica para um modelo com campo taquiônico acoplado não-minimamente ao campo gravitacional é então escrita como

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ F(\varphi)R - V(\varphi)\sqrt{1 - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi} \right\} + S_m, \quad (6.1)$$

onde lembramos que S_m representa a ação de um campo de matéria sem pressão. $F(\varphi)$ é uma função arbitrária do campo taquiônico, a qual descreve o acoplamento do campo taquiônico com o campo gravitacional.

Admitindo-se novamente um Universo com uma geometria descrita pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, a Lagrangiana pontual que segue da ação (6.1), após uma integração por partes, é a seguinte

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2\dot{a}\dot{\varphi}\frac{dF}{d\varphi} + a^3V\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + \rho_m^0. \quad (6.2)$$

Na expressão acima, ρ_m^0 denota o valor da densidade de energia do campo de matéria medida num certo instante inicial.

A equação de Klein-Gordon para o campo taquiônico acoplado ao campo gravitacional é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange para φ , aplicada à Lagrangiana (6.2), da qual obtemos

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + \frac{1}{V} \left[\frac{dV}{d\varphi} - 6(\dot{H} + 2H^2)\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}\frac{dF}{d\varphi} \right] = 0. \quad (6.3)$$

Como no capítulo anterior, da equação de Euler-Lagrange para o fator de escala, aplicada a (6.2), obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{12F}, \quad (6.4)$$

onde $\rho = \rho_\varphi + \rho_m$ e $p = p_\varphi$ – a matéria é considerada sem pressão, $p_m = 0$ – são a densidade de energia e a pressão das fontes do campo gravitacional, com a densidade de energia e a pressão do campo taquiônico dadas por

$$\rho_\varphi = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} - 6H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (6.5)$$

$$p_\varphi = -V \sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + 2 \left(\frac{dF}{d\varphi} \ddot{\varphi} + 2H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d^2F}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 \right), \quad (6.6)$$

respectivamente.

Novamente, obtemos a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{\rho}{6F}, \quad (6.7)$$

pela imposição de que a função energia associada a (6.2) seja nula, isto é

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \equiv 0. \quad (6.8)$$

6.2 Existência da Simetria de Noether

Seja \mathbf{X} , para o presente modelo, o seguinte gerador infinitesimal de simetria

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (6.9)$$

com α e β sendo funções somente de (a, φ) .

Lembrando que a simetria de Noether é satisfeita pela condição $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0$, com \mathbf{X} definido no espaço tangente, a simetria de Noether existe para a Lagrangiana (6.2) se

$$\begin{aligned}
& \alpha \left(6\dot{a}^2 F + 12a\dot{a}\dot{\varphi} \frac{dF}{d\varphi} + 3a^2 V \sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} \right) \\
& + \beta \left(6a\dot{a}^2 \frac{dF}{d\varphi} + 6a^2 \dot{a}\dot{\varphi} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + a^3 \frac{dV}{d\varphi} \sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} \right) \\
& + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \left(12a\dot{a} F + 6a^2 \dot{\varphi} \frac{dF}{d\varphi} \right) \\
& + \left(\frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \left(6a^2 \dot{a} \frac{dF}{d\varphi} - \frac{a^3 \dot{\varphi} V}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} \right) = 0. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

A equação (6.10) depende explicitamente de \dot{a} , $\dot{\varphi}$ e suas potências. Então, a fim de verificar a sua nulidade, devemos anular cada um dos seus coeficientes, de onde obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$\left(\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) F + \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) a \frac{dF}{d\varphi} = 0, \tag{6.11}$$

$$2F \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right) \frac{dF}{d\varphi} + a\beta \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0, \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{dF}{d\varphi} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = 0, \tag{6.13}$$

$$3\alpha V + a\beta \frac{dV}{d\varphi} = 0. \tag{6.14}$$

Analisemos o sistema (6.11)-(6.14). Em primeiro lugar, das equações (6.13)₂ e (6.13)₃, concluímos que $\beta \equiv \beta_0$ deve ser uma constante. Da equação (6.13)₁, temos dois casos a considerar, $dF/d\varphi = 0$ e $dF/d\varphi \neq 0$. A análise dar-se-á para cada caso separadamente.

(a) *Primeiro caso:* $dF/d\varphi = 0$

Da equação (6.12), temos que α não pode depender de φ e, a partir de (6.11), determinamos facilmente que a sua forma é proporcional a $1/\sqrt{a}$. A partir disso, concluímos que (6.14) é satisfeita somente se $V = 0$. Essa solução deve ser descartada, pois $V = 0$ faz com que a densidade de energia e a pressão do campo taquiónico se anulem.

(b) *Segundo caso: $dF/d\varphi \neq 0$*

Para $dF/d\varphi \neq 0$, vem de (6.13)₁ que α é função somente de a , e a única maneira de se satisfazer a equação (6.14), é com α da forma

$$\alpha = \alpha_0 a \quad \text{que nos leva a} \quad V = \lambda \exp(-\xi\varphi), \quad (6.15)$$

onde α_0 , λ e $\xi = 3\alpha_0/\beta_0$ são constantes. Finalmente, a partir das equações (6.11) e (6.12), chegamos à forma do acoplamento, a saber

$$F = \gamma \exp(-\xi\varphi), \quad (6.16)$$

onde γ é também uma constante.

Da análise realizada aqui, concluímos que existe uma simetria de Noether, tal que

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 a, & \beta = \beta_0, \\ F = \gamma \exp(-\xi\varphi), & V = \lambda \exp(-\xi\varphi). \end{cases} \quad (6 - I)$$

6.3 Período Inflacionário

No período inflacionário, a densidade de energia da matéria é desprezível, de tal forma que podemos fazer $\rho_m^0 = 0$. A fim de determinar a dinâmica desse período, devemos resolver as equações diferenciais acopladas (6.3) e (6.7), que para as formas de V e de F da simetria (6 - I), através de (6.5), tornam-se

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\xi}{\kappa}(\dot{H} + 2H^2)\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} - \xi = 0, \quad (6.17)$$

$$H^2 - \xi H\dot{\varphi} - \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} = 0. \quad (6.18)$$

Definimos aqui a constante $\kappa = \lambda/6\gamma$.

Com o objetivo de encontrar uma solução analítica para o sistema de equações (6.17)-(6.18), utilizaremos a constante de movimento associada à simetria

de Noether, que pode ser obtida a partir de (4.22), apresentando-se para esse caso como

$$\Sigma_0 = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (6.19)$$

fornecendo-nos

$$\frac{\Sigma_0}{6\gamma\beta_0} = - \left[\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} + \frac{\xi^2}{3} \right) \dot{\varphi} + \frac{\xi}{3} H \right] a^3 \exp(-\xi\varphi). \quad (6.20)$$

Agora, pela diferenciação de (6.20) com respeito a φ , obtemos uma equação diferencial ordinária em φ , a qual pode ser escrita na seguinte forma

$$\left(\frac{3\kappa}{\xi^2 \sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} + \frac{3}{2} \right) \dot{\varphi} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\xi^2 \sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} + \frac{\dot{\varphi}^2}{4} \right)} = 0, \quad (6.21)$$

devida à (6.18) e ao fato de que $\partial H / \partial \varphi = 0$.

Fazendo-se $\xi = -\imath\xi_0$, com ξ_0 sendo uma constante real, temos como solução para a equação diferencial (6.21)

$$\varphi(t) = \imath(k_1 t + k_2), \quad (6.22)$$

onde k_1 e k_2 são constantes reais. Tal solução implica na seguinte relação entre as constantes envolvidas no problema

$$\kappa = \frac{\lambda}{6\gamma} = \frac{1}{18} \left(\frac{\xi_0}{k_1} \right)^2 \sqrt{1+k_1^2} \left(1 + \sqrt{1+18k_1^2+9k_1^4+9k_1^2} \right). \quad (6.23)$$

É importante observar aqui que, se não admitimos um valor complexo para ξ e para $\varphi(t)$, a relação entre λ e γ (que vem de (6.21)) torna-se imaginária, o que não tem significado físico.

Substituindo-se a solução (6.22) encontrada para o campo taquiônico na expressão da densidade de potencial, equação (6.15)₂, e na expressão do acoplamento, equação (6.16), temos

$$V(t) = \lambda \exp[-\xi_0(k_1 t + k_2)], \quad F(t) = \gamma \exp[-\xi_0(k_1 t + k_2)], \quad (6.24)$$

que dão a evolução temporal da densidade de potencial e do acoplamento para o período inflacionário, respectivamente. Requerendo que a densidade de potencial

possua decaimento com o tempo, temos da equação (6.24)₁ que $\xi_0 k_1 > 0$.

Por fim, temos da equação (6.7), após integração do fator de escala no tempo

$$a(t) = \exp[K(t - t_0)], \quad \text{com} \quad K = \sqrt{\frac{\kappa}{\sqrt{(1 + k_1^2)}} + \frac{\xi_0^2 k_1^2}{4}} + \frac{\xi_0 k_1}{2}. \quad (6.25)$$

Essa solução obviamente descreve um cenário inflacionário, o que deveria ser, uma vez que a nossa consideração inicial era de que $\rho_m = 0$ na equação de Friedmann. Observe novamente que tal solução só é válida até certo instante, quando a inflação chega ao fim e inicia-se um novo regime.

Observemos ainda, que a solução complexa (6.22) para $\varphi(t)$ não gera inconsistência física alguma concernente às formas finais das soluções encontradas, haja vista que, com essa solução, V e F escritos em função do tempo tornam-se quantidades reais, da mesma forma que o fator de escala, como esperávamos que deveria ser.

A evolução temporal da densidade de energia e da pressão do campo taquiônico é determinada a partir de (6.5), (6.6), (6.22) e (6.24), fornecendo

$$\rho_\varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + k_1^2}} + 6\xi_0\gamma k_1 K \right) \exp[-\xi_0(k_1 t + k_2)], \quad (6.26)$$

$$p_\varphi(t) = -\frac{\lambda\sqrt{1 + k_1^2} + 2\xi_0\gamma k_1(2K - \xi_0 k_1)}{\frac{\lambda}{\sqrt{1 + k_1^2}} + 6\xi_0\gamma k_1 K} \rho_\varphi(t). \quad (6.27)$$

Das equações acima, concluímos que a pressão é uma quantidade negativa e proporcional à densidade de energia, sendo que a pressão e a densidade de energia do campo decaem rapidamente com a expansão.

6.4 Período de Transição Desacelerado-Acelerado

A fim de encontrar uma solução para o caso em que $\rho_m \neq 0$, escreveremos as equações a serem resolvidas em termos do *redshift*, ou seja, no lugar de usar o tempo como variável, usaremos o *redshift*. Fazemos isso a partir das seguintes

relações

$$z = \frac{1}{a} - 1, \quad \frac{d}{dt} = -H(1+z) \frac{d}{dz}. \quad (6.28)$$

Em termos do *redshift*, as equações de Klein-Gordon (6.3) e da aceleração (6.4) tornam-se

$$H^2(1+z)^2 \varphi'' + [H + H'(1+z)] H(1+z) \varphi' = [1 - H^2(1+z)^2 \varphi'^2] \times \left\{ 3H^2(1+z) \varphi' + \frac{\xi}{\kappa} H [H'(1+z) - 2H] \sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \varphi'^2} + \xi \right\}, \quad (6.29)$$

$$4\gamma H H' \exp(-\xi\varphi)(1+z) = \rho_m + \rho_\varphi + p_\varphi, \quad (6.30)$$

onde a densidade de energia da matéria e a densidade de energia e a pressão do campo taquiônico passam a ser dadas por

$$\rho_m(z) = \rho_m^0(1+z)^3, \quad (6.31)$$

$$\rho_\varphi(z) = \exp(-\xi\varphi) \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \varphi'^2}} - 6\xi\gamma H^2(1+z) \varphi' \right\}, \quad (6.32)$$

$$p_\varphi(z) = -\exp(-\xi\varphi) \left\{ \lambda \sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \varphi'^2} + 2\xi\gamma [H^2(1+z)^2 \varphi'' + (H'(1+z) - H) H(1+z) \varphi' - \xi H^2(1+z)^2 \varphi'^2] \right\}, \quad (6.33)$$

respectivamente. Nas equações acima, a linha denota derivada com relação ao *redshift* z .

Vislumbrar alguma solução analítica para o sistema de equações diferenciais (6.29)-(6.30) é uma tarefa difícil, por isso optaremos pela procura de uma solução numérica. A fim de determinar alguma solução numérica para o sistema (6.29)-(6.30), devemos especificar condições iniciais para $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ e $H(z)$ no tempo atual, ou seja, em $z = 0$. Empregaremos no lugar das densidades de energia os seus respectivos parâmetros de densidade $\Omega_\varphi(z) = \rho_\varphi(z)/\rho(z)$ e $\Omega_m(z) = \rho_m(z)/\rho(z)$, com $\rho(z) = \rho_\varphi(z) + \rho_m(z)$ sendo a densidade de energia total das fontes de campo gravitacional. A fim de facilitar a análise numérica, introduzimos as quantidades adimensionais $H_*(z) = H(z)/\sqrt{\rho(0)}$, $\varphi_*(z) = \sqrt{\rho(0)}\varphi(z)$, $\xi_* = \xi/\sqrt{\rho(0)}$ e $\lambda_* = \lambda/\rho(0)$. Aqui, adotamos para os valores atuais dos parâmetros de densidade $\Omega_\varphi(0) = 0.72$ e

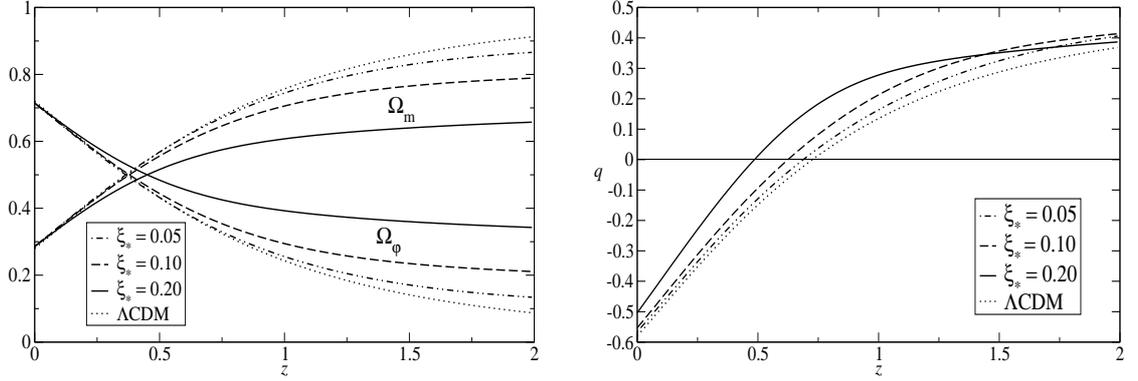


Figura 6.1: Esquerda: parâmetros de densidade do campo de matéria e do campo taquiônico em função do *redshift*. Direita: parâmetro de desaceleração em função do *redshift*.

$\Omega_m(0) = 0.28$ (ver referências [35] e [37]).

O valor presente do acoplamento deve ser $F = c^3/16\pi G$ ou $F = 1/2$, em unidades naturais. Com isso em vista, segue de (6.16) que $\varphi_*(0) = \ln(2\gamma)^{1/\xi_*}$. Por outro lado, considerando-se que para garantir um período com aceleração de expansão positiva, a condição $\dot{\varphi}^2(0) \ll 1$ deve ser satisfeita, segue da equação (6.5) que $\rho_\varphi(0) \approx V(0)$, de tal forma que temos $\varphi_*(0) = \ln(\lambda_*/0.72)^{1/\xi_*}$. Essa relação, juntamente com a expressão anterior, fornece-nos a relação $\gamma = \lambda_*/1.44$.

Das considerações acima, acabamos por ficar com três parâmetros livres ξ_* , λ_* e γ , sendo que desses somente dois são linearmente independentes. Para a computação numérica realizada, escolhemos $\lambda_* = 1$ e três valores para os parâmetros que estão relacionados com a duração do acoplamento, os quais são $\xi_* = 0.05, 0.10, 0.20$. As condições em $z = 0$, lembrando que devemos ter $\dot{\varphi}^2(0) \ll 1$, são

$$H_*(0) = \sqrt{1/3}, \quad \varphi_*(0) = -\ln(0.72)^{1/\xi_*}, \quad \varphi_*'(0) = 10^{-3}. \quad (6.34)$$

Na esquerda da Figura 6.1, os parâmetros de densidade da matéria e do campo taquiônico estão representados em função do *redshift*, no intervalo $0 \leq z \leq 2$. Notemos que o parâmetro do acoplamento ξ_* tem importante influência sobre o decaimento do parâmetro de densidade do campo taquiônico e no

	$\xi_* = 0.20$	$\xi_* = 0.10$	$\xi_* = 0.05$	Λ CDM	valores experimentais
$q(0)$	-0.50	-0.55	-0.57	-0.58	-0.74 ± 0.18 (de [77])
z_t	0.49	0.62	0.69	0.73	0.46 ± 0.13 (de [78])

Tabela 6.1: Valores do parâmetro de desaceleração $q(0)$ e do *redshift* de transição z_t para diferentes valores do parâmetro de acoplamento ξ_* .

correspondente crescimento do campo de matéria, sendo que tal influência cresce à medida que os valores de ξ_* decrescem. Isso pode ser entendido observando-se que o crescimento do parâmetro do acoplamento ξ_* implica no crescimento da transferência de energia do campo taquiônico para o campo gravitacional (ver seção 6.5). Além disso, podemos notar que no caso limite, quando $\xi_* \rightarrow 0$, o comportamento do modelo taquiônico tende ao comportamento do modelo Λ CDM.

Na direita da Figura 6.1, o parâmetro de desaceleração $q = 1/2 + 3p/2\rho$ está representado em função do *redshift*, no intervalo $0 \leq z \leq 2$. Na Tabela 6.1, temos a comparação dos valores calculados com os valores medidos experimentalmente para o valor atual do parâmetro de desaceleração $q(0)$ e para o valor do *redshift* z_t de transição de um regime desacelerado para um regime acelerado. Da Tabela 6.1, vemos que os valores calculados em geral estão em bom acordo com os valores medidos. Pode ser observado ainda que, à medida que o valor do acoplamento aumenta, o *redshift* de transição z_t decresce enquanto o parâmetro de desaceleração $q(0)$ cresce. Note que a importância do acoplamento desaparece para grandes valores de *redshift*, haja vista que, para diferentes valores do parâmetro ξ_* , o parâmetro de desaceleração converge para um único valor.

Também é interessante analisar a evolução do acoplamento F com o *redshift* para diferentes valores de ξ_* . A representação de F em função de z está na esquerda da Figura 6.2, de onde constatamos que o parâmetro ξ_* tem forte influência no comportamento de F . Como já era esperado, de acordo com a equação (6.16), a variação do acoplamento é menos pronunciada para pequenos valores da constante ξ_* . Outro ponto a ser notado é que, para cada valor de ξ_* , o acoplamento tende

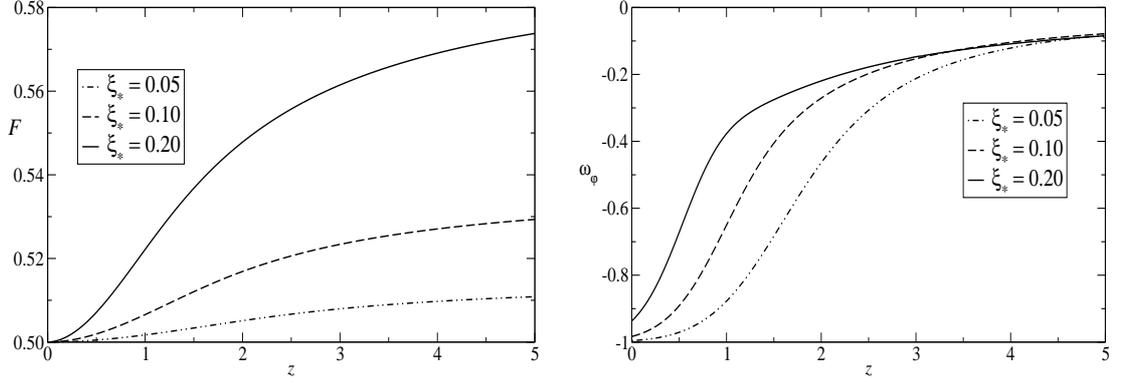


Figura 6.2: Esquerda: acoplamento F em função do *redshift* z . Direita: razão entre a pressão e a densidade de energia do campo taquiônico ω_φ em função do *redshift* z .

a um valor constante à medida que o *redshift* aumenta. Pelo fato de a densidade de potencial possuir a mesma dependência exponencial em φ que a de F , o seu comportamento em função do *redshift* é muito similar ao de F .

Na direita da Figura 6.2, está representada a razão entre a pressão e a densidade de energia do campo taquiônico $\omega_\varphi = p_\varphi/\rho_\varphi$ em função do *redshift* z . Observemos, dessa figura, que $\omega_\varphi \rightarrow -1$ quando $z \rightarrow 0$, para pequenos valores do parâmetro ξ_* . Isso significa que, para pequenos valores de ξ_* , o modelo taquiônico se aproxima do modelo Λ CDM. Para grandes valores de *redshift*, $\omega_\varphi \rightarrow 0$, ou seja, o campo taquiônico tende a assumir um comportamento como o de um campo de matéria sem pressão.

Lembrando da definição de diferença entre magnitude aparente e absoluta de uma fonte

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log \left[(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (6.35)$$

podemos fazer uma comparação do valor de μ_0 previsto pelo modelo com o valor de μ_0 experimental.

Na Figura 6.3, os círculos representam os dados observacionais das supernovas do tipo Ia (ver referência [36]). Está representada somente uma curva para o modelo acoplado, com $\xi_* = 0.2$, uma vez que as diferenças com relação ao

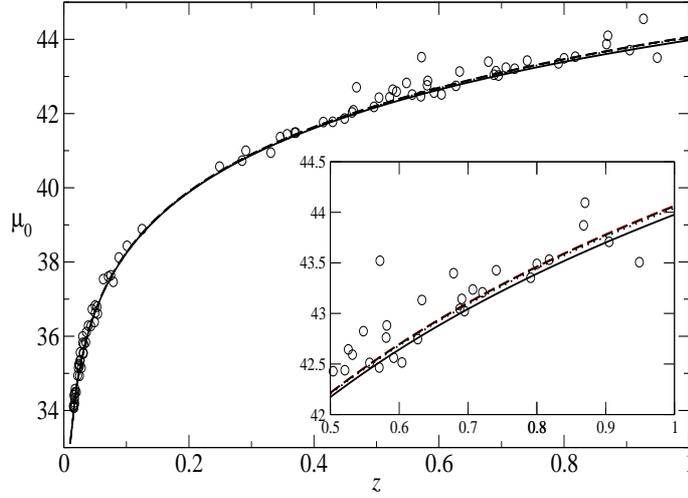


Figura 6.3: μ_0 em função do *redshift* z . A linha cheia representa o modelo taquiônico com campo de matéria para $\xi_* = 0.2$, a linha pontilhada representa o modelo Λ CDM e os círculos são os dados observacionais das supernovas do tipo Ia.

modelo Λ CDM são muito pequenas quando $\xi_* \rightarrow 0$. Dessa figura, concluímos que os valores de μ_0 para o modelo acoplado não diferem dos valores do modelo Λ CDM para pequenos valores de *redshift*, existindo apenas uma pequena diferença entre as curvas dos dois modelos para valores de *redshift* crescentes.

6.5 Observações

Derivando a equação de Friedmann (6.7) com relação ao tempo, e levando-se em conta a equação da aceleração (6.4) e a forma de F (6.16), segue a equação de evolução temporal da densidade de energia total das fontes de campo gravitacional

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\xi\dot{\phi}\rho. \quad (6.36)$$

Considerando-se que os campos taquiônico e de matéria são não-interagentes, e lembrando que inicialmente consideramos que a matéria é não-relativística ($p_m = 0$), a evolução temporal da densidade de energia do campo de matéria

obedece a seguinte equação

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (6.37)$$

e utilizando-se das relações $\rho = \rho_m + \rho_\varphi$ e $p = p_\varphi$, segue de (6.36) e (6.37) a equação para a evolução temporal da densidade de energia do campo taquiônico

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + p_\varphi) = -\xi\dot{\varphi}\rho. \quad (6.38)$$

De (6.38), entendemos claramente como o valor de ξ influi no decaimento do campo taquiônico e no correspondente crescimento do campo de matéria, pois o mesmo está diretamente relacionado à taxa de transferência de energia do campo taquiônico para o campo gravitacional.

Capítulo 7

Férmions e Táquions com Potencial Constante

7.1 Férmions

7.1.1 Simetria de Noether

Consideremos a ação para um campo fermiônico acoplado não-minimamente ao campo gravitacional e um campo de matéria

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ F(\Psi)R + \frac{\imath}{2} [\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - (\bar{D}_\mu\bar{\psi})\Gamma^\mu\psi] - V(\Psi) \right\} + S_m. \quad (7.1)$$

Usaremos, daqui por diante, o mesmo procedimento empregado no Capítulo 5. A partir da ação (7.1), escrevemos a seguinte Lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2\dot{a}\dot{\Psi}F' + \frac{\imath}{2}a^3(\dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi - \bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi}) + a^3V + \rho_m^0. \quad (7.2)$$

Agora, tomando o gerador infinitesimal de simetria

$$\mathbf{X} = C_0 \frac{\partial}{\partial a} + \dot{C}_0 \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \sum_{l=1}^4 \left(C_l \frac{\partial}{\partial \psi_l^\dagger} + D_l \frac{\partial}{\partial \psi_l} + \dot{C}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l^\dagger} + \dot{D}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l} \right), \quad (7.3)$$

e a condição para que a simetria de Noether seja satisfeita, $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, aplicada à Lagrangiana (7.2), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

acopladas

$$C_0 F + 2a \frac{\partial C_0}{\partial a} F + a^2 F' \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j + \frac{\partial D_j}{\partial a} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) + a F' \sum_{j=1}^4 (C_j \epsilon_j \psi_j + D_j \epsilon_j \psi_j^\dagger) = 0, \quad (7.4)$$

$$F' \epsilon_j \psi_j \left(2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a} \right) + a F'' \epsilon_j \psi_j \sum_{i=1}^4 (C_i \psi_i + D_i \psi_i^\dagger) \epsilon_i + a F' D_j \epsilon_j + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} + a F' \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i^\dagger \right) = 0, \quad (7.5)$$

$$F' \epsilon_j \psi_j^\dagger \left(2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a} \right) + a F'' \epsilon_j \psi_j^\dagger \sum_{i=1}^4 (C_i \psi_i + D_i \psi_i^\dagger) \epsilon_i + a F' C_j \epsilon_j + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} + a F' \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i^\dagger \right) = 0, \quad (7.6)$$

$$F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i^\dagger} \epsilon_j \psi_j \right) = 0, \quad F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i^\dagger + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad (7.7)$$

$$F' \left(\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} \epsilon_i \psi_i + \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i^\dagger} \epsilon_j \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial a} \psi_j - \frac{\partial D_j}{\partial a} \psi_j^\dagger \right) = 0, \quad (7.8)$$

$$3C_0 \psi_j + a D_j + a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j^\dagger} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j^\dagger} \psi_i^\dagger \right) = 0, \quad (7.9)$$

$$3C_0 \psi_j^\dagger + a C_j - a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j} \psi_i^\dagger \right) = 0 \quad (7.10)$$

$$3C_0 V + a V' \sum_{j=1}^4 (C_j \epsilon_j \psi_j + D_j \epsilon_j \psi_j^\dagger) = 0. \quad (7.11)$$

que é o mesmo sistema (5.13)-(5.30), já que a ação da matéria S_m não contribui para a determinação do sistema de equações diferenciais resultantes da condição de simetria. Isso pelo fato de o termo relacionado à matéria aparecer como uma constante na Lagrangiana (7.2), isto é, ρ_m^0 .

No Capítulo 5, procuramos por potenciais de auto-interação do tipo $V = V(\Psi)$, tais que não violassem a simetria de Noether, e encontramos uma solução da forma $V = \lambda \Psi$, a qual introduzia naturalmente um termo de massa na ação (5.1). Neste capítulo, estudaremos uma situação especial permitida pela simetria de

Noether, em que podemos ter $V = \text{constante}$. Analisemos tal situação a seguir.

A equação (7.11) é satisfeita por um potencial constante se $C_0 = 0$. Sendo assim, das equações (7.8)₂, (7.9) e (7.10), obtemos

$$C_j = f(a)\psi_j^\dagger + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, \quad D_j = -f(a)\psi_j - \beta\epsilon_j\psi_j, \quad (7.12)$$

onde β é uma constante e $f(a)$ é uma função arbitrária de a a ser determinada.

De (7.4), podemos imediatamente determinar $f(a)$, encontrando

$$f(a) = \frac{k}{a}, \quad (7.13)$$

onde k é uma constante.

Quanto a F , das equações (7.7) e (7.8)₁, temos $F' = 0$ ou $F' \neq 0$. Para $F' = 0$, que corresponde ao acoplamento mínimo, $F = \text{constante} = 1/2$, as equações (7.5) e (7.6) são automaticamente satisfeitas. Para $F' \neq 0$, a partir de (7.5) e (7.6), determinamos que

$$F = F(\Psi), \quad (7.14)$$

pois, para qualquer F , as equações (7.5) e (7.6) são satisfeitas em virtude das formas de C_j e D_j .

Daí, podemos afirmar que existe uma simetria de Noether, tal que

$$\begin{cases} C_j = \frac{k}{a}\psi_j^\dagger + \beta\epsilon_j\psi_j^\dagger, & D_j = -\frac{k}{a}\psi_j - \beta\epsilon_j\psi_j, \\ C_0 = 0, & F = F(\Psi), \quad V = \text{constante.} \end{cases} \quad (7 - I)$$

7.1.2 Soluções Cosmológicas

Da Lagrangiana (7.2), obtemos as equações de campo para o modelo

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + i\gamma^0\psi V' - i6(\dot{H} + 2H^2)\gamma^0\psi F' = 0, \quad (7.15)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^0V' + i6(\dot{H} + 2H^2)\bar{\psi}\gamma^0F' = 0, \quad (7.16)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{p}{2F}, \quad H^2 = \frac{\rho}{6F}, \quad (7.17)$$

com $\rho = \rho_m + \rho_f$ e $p = p_f$, onde ρ_f e p_f são dados por

$$\rho_f = V - 6HF'\dot{\Psi}, \quad (7.18)$$

$$p_f = [V' - 6(\dot{H} + 2H^2)F']\Psi - V + 2(F'\ddot{\Psi} + 2HF'\dot{\Psi} + F''\dot{\Psi}^2). \quad (7.19)$$

Vamos analisar agora o caso $F = \text{constante} = 1/2$ para a simetria aqui encontrada (7 - I). Um potencial constante pode ser interpretado como um potencial que faz o papel de constante cosmológica e, de agora em diante, escreveremos $V = \Lambda$. A equação (7.17)₂, através de (7.18), levando em conta que de (7.15) e (7.16) obtemos $\Psi = \Psi_0/a^3$, leva-nos à seguinte equação diferencial para a

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_m^0}{a^3} + \Lambda, \quad (7.20)$$

cuja solução nos fornece

$$a(t) = \left(\frac{\rho_m^0}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\sinh\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}t\right) \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (7.21)$$

e quando ρ_m^0 é desprezível

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right). \quad (7.22)$$

Esse modelo é idêntico ao modelo Λ CDM, mas com a interpretação de que Λ não é uma constante cosmológica no sentido tradicional, relacionada à energia de vácuo, mas sim um potencial de auto-interação constante de um campo fermiônico acoplado ao campo gravitacional. É importante notar que por ser idêntico ao modelo Λ CDM, este modelo apresentará o mesmo problema que aquele com relação ao valor de Λ .

Para o caso $F = F(\Psi) \neq \text{constante}$, mesmo para as formas mais simples, como as leis de potência, não conseguimos encontrar a partir da equação de Friedmann uma forma explícita para $a(t)$. Não parece ser de grande valia procurar uma solução numérica para esse caso ou alguma solução analítica para formas diferentes das leis de potência, pois a situação se agrava pelo fato de que existem infinitas possibilidades, o que torna a inspeção de alguma solução com significado físico algo impraticável.

7.2 Táquions

7.2.1 Simetria de Noether

Relembremos a ação genérica que descreve um campo taquiônico acoplado não-minimamente ao campo gravitacional

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ F(\varphi)R - V(\varphi)\sqrt{1 - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi} \right\} + S_m, \quad (7.23)$$

cuja Lagrangiana pontual associada é

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2\dot{a}\dot{\varphi}F' + a^3V\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + \rho_m^0. \quad (7.24)$$

Reescrevamos aqui o sistema de equações diferenciais resultante da condição de existência de alguma simetria de Noether, $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, aplicada à Lagrangiana (7.24)

$$\left(\alpha + 2a\frac{\partial\alpha}{\partial a} \right) F + \left(\beta + a\frac{\partial\beta}{\partial a} \right) aF' = 0, \quad (7.25)$$

$$2aF\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + \left(2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + a\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \right) aF' + \beta a^2 F'' = 0, \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} F' = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0, \quad (7.27)$$

$$3\alpha V + a\beta V' = 0. \quad (7.28)$$

No Capítulo 6, estudamos campos taquiônicos com potenciais da forma $V = V(\varphi)$, satisfazendo a simetria de Noether. Procuraremos aqui por um potencial constante que satisfaça tal simetria.

Uma solução possível, tal que não tenhamos $V = 0$, existe quando $\alpha = 0$, a qual nos leva a $V = \text{constante}$, como podemos verificar a partir da equação (7.28). Nessa situação, a equação (7.27)₁ é automaticamente satisfeita. Das equações (7.27)₂ e (7.27)₃, devemos ter $\beta = \beta_0$, sendo $\beta_0 = \text{constante}$ e, determinamos, a partir das equações (7.25) e (7.26), que $F = \text{constante} = 1/2$, correspondendo ao acoplamento mínimo.

Em vista disso, existe uma simetria de Noether para esse tipo de

modelo, tal que $V = \text{constante}$, a saber

$$\begin{cases} \alpha = 0, & \beta = \beta_0 \\ F = 1/2, & V = \text{constante.} \end{cases} \quad (7 - \text{II})$$

7.2.2 Soluções Cosmológicas

Escrevamos agora as equações de campo resultantes da Lagrangiana (7.24)

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + \frac{V'}{V} - 6(\dot{H} + 2H^2)\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}\frac{F'}{V} = 0, \quad (7.29)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{p}{2F}, \quad H^2 = \frac{\rho}{6F}, \quad (7.30)$$

com $\rho = \rho_\varphi + \rho_m$ e $p = p_\varphi$, onde ρ_φ e p_φ são dados por

$$\rho_\varphi = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} - 6HF'\dot{\varphi}, \quad (7.31)$$

$$p_\varphi = -V\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + 2(F'\ddot{\varphi} + 2HF'\dot{\varphi} + F''\dot{\varphi}^2). \quad (7.32)$$

A partir da simetria de Noether aqui encontrada (7 - II), também interpretando um potencial de auto-interação constante como sendo uma constante cosmológica, $V = \Lambda$ (devida ao campo taquiônico e não à energia de vácuo), essas equações de campo tomam as formas

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} = 0, \quad (7.33)$$

$$2\dot{H}^2 + 3H^2 = \Lambda\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}, \quad (7.34)$$

$$H^2 = \frac{\Lambda}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} + \frac{\rho_m^0}{a^3}, \quad (7.35)$$

e ainda temos mais uma equação, relacionada à constante de movimento, a qual está associada a essa simetria de Noether

$$\Sigma_0 = -\beta_0 \frac{\Lambda a^3 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}}. \quad (7.36)$$

Da equação (7.35), podemos definir $\bar{\Lambda} = \Lambda/\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} = \bar{\Lambda}(t)$, que é o equivalente a uma "constante cosmológica" que depende do tempo.

A fim de descrever a era inflacionária, podemos nos utilizar da aproximação $1 - \dot{\varphi}^2 \approx 1$, a qual leva em conta que, para termos uma expansão acelerada, devemos ter a garantia de que o módulo da pressão negativa do campo é suficiente para superar o valor da densidade de energia do campo. Lembremos ainda que podemos considerar $\rho_m^0 = 0$ para essa época.

Dessa forma, a partir de (7.35), determinamos que o fator de escala evolui com o tempo conforme

$$a(t) = \exp \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0) \right], \quad (7.37)$$

de acordo com o que era esperado.

A partir da equação (7.33), determinamos que

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp[-\sqrt{3\Lambda}(t - t_0)] + \varphi_1, \quad (7.38)$$

com φ_0 e φ_1 sendo constantes. Da constante de movimento (7.36), segue que $\varphi_0 = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{3\beta_0\Lambda^{3/2}}}$. Essa solução mostra que $\varphi(t)$ tende a um valor constante num intervalo de tempo suficiente (quando ocorre o efeito inflacionário), o que está de acordo com a nossa aproximação inicial $\dot{\varphi}^2 \approx 0$.

Podemos ainda verificar a consistência dessas soluções resolvendo a equação (7.34), a qual nos leva à solução (7.37) novamente. De (7.31) e (7.32), vemos facilmente que nessa situação $p_\varphi = -\rho_\varphi = -\Lambda$.

Como consideramos inicialmente uma constante cosmológica efetiva, $\bar{\Lambda} = \Lambda/\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} = \bar{\Lambda}(t)$, podemos ver que em instantes anteriores ao caso limite ($\dot{\varphi}^2 \approx 0$), $\bar{\Lambda}$ apresentava um valor maior, mostrando que há uma diminuição do valor dessa constante cosmológica efetiva à medida que a inflação se processa, o que obviamente não apresenta o problema da mudança do valor de uma "constante".

Encontrar alguma solução analítica para o caso em que $\rho_m \neq 0$, mesmo que as equações a serem resolvidas agora são aparentemente mais simples que as do Capítulo 6, continua sendo uma tarefa árdua. Então, escreveremos as equações a serem resolvidas aqui também em termos do *redshift*, usando o mesmo

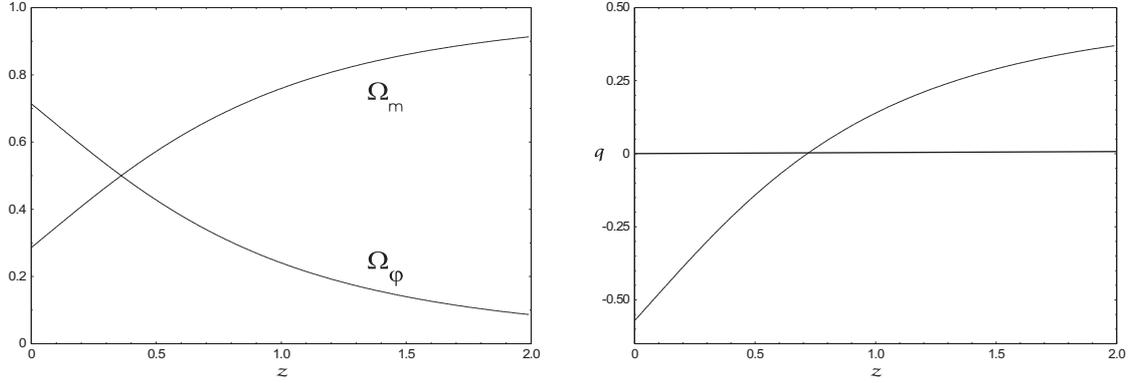


Figura 7.1: Esquerda: parâmetros de densidade do campo de matéria e do campo taquiônico em função do *redshift*. Direita: parâmetro de desaceleração em função do *redshift*.

procedimento do Capítulo 6 e, a partir destas, procuraremos uma solução numérica. Lembrando que $z = \frac{1}{a} - 1$ e $\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}$, as equações (7.33) e (7.34) tornam-se

$$\begin{aligned} H^2(1+z)^2\varphi'' + [H + H'(1+z)]H(1+z)\varphi' &= \\ = 3H^2 [1 - H^2(1+z)^2\varphi'^2] (1+z)\varphi', & \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$2HH'(1+z) = \rho_m + \rho_\varphi + p_\varphi, \quad (7.40)$$

onde a densidade de energia da matéria e a densidade de energia e a pressão do campo taquiônico passam a ser dadas por

$$\rho_m(z) = \rho_m^0(1+z)^3, \quad (7.41)$$

$$\rho_\varphi(z) = \frac{\Lambda}{\sqrt{1 - H^2(1+z)^2\varphi'^2}}, \quad (7.42)$$

$$p_\varphi(z) = -\Lambda\sqrt{1 - H^2(1+z)^2\varphi'^2}, \quad (7.43)$$

respectivamente.

Devemos usar as mesmas condições iniciais que as usadas no Capítulo 6, pois estamos descrevendo o período atual de evolução do Universo. Apenas devemos lembrar que agora $\lambda_* = \Lambda_* = 0.72$, $\gamma = 1/2$ e $\xi_* = 0$.

Da esquerda da Figura 7.1, vemos que os parâmetros de densidade

da matéria e do campo taquiônico evoluem praticamente da mesma forma que os do modelo Λ CDM. Ainda, da direita dessa figura, constatamos que o *redshift* de transição z_t é maior que os previstos pelas soluções que obtivemos no Capítulo 6, sendo também a curva de q praticamente idêntica à do modelo Λ CDM. Esses resultados podem ser entendidos observando-se que, para valores de *redshift* pequenos, a constante cosmológica efetiva $\bar{\Lambda}$ deve variar tão pouco que podemos considerá-la constante – o que nos diz que o campo taquiônico apresenta uma variação muito lenta atualmente, garantindo um período de expansão acelerada. Pelo fato da alta proximidade das curvas desse modelo taquiônico com as do modelo Λ CDM, inferimos que a curva da diferença de magnitudes μ_0 será quase idêntica àquela da Figura (6.3), para o modelo Λ CDM, pois a distância de luminosidade depende da evolução dos parâmetros de densidade (esquerda da Figura (7.1)).

Capítulo 8

Conclusão

8.1 Férmions

Em trabalhos recentes da literatura, onde abordou-se modelos com campos fermiônicos, foram investigadas muitas possíveis formas para densidades de potencial e acoplamentos, as quais possibilitavam a descrição de épocas aceleradas e desaceleradas da expansão cosmológica. Os resultados aqui obtidos mostram que, se a simetria de Noether deve ser satisfeita, temos formas bastante restritas para o acoplamento, mais precisamente duas, enquanto que para a densidade de potencial apenas uma forma é possível.

O presente trabalho também nos mostrou que, satisfazendo a simetria de Noether, quando temos um acoplamento mínimo do campo fermiônico com o campo gravitacional, chegamos somente a previsões iguais ao do modelo padrão, ou seja, desaceleração da expansão cosmológica – nesse caso, os férmions apenas contribuem com a densidade total de energia, comportando-se como matéria ordinária. Por outro lado, com um acoplamento não-mínimo, podemos somente descrever a época inflacionária, o que significa que o campo fermiônico pode fazer o papel de inflaton, mas não o de energia escura [79].

8.2 Táquions

Em muitos trabalhos, nos quais investigou-se modelos com campos taquiônicos minimamente acoplados ao campo gravitacional, foram propostas várias possíveis formas para as densidades dos potenciais de auto-interação. Esses modelos poderiam descrever períodos acelerados e desacelerados da expansão cosmológica. Com esse trabalho, vimos que, se a simetria de Noether for satisfeita, não podemos ter acoplamento mínimo para um campo taquiônico. Por outro lado, um acoplamento mínimo é uma boa aproximação para a descrição de um regime desacelerado-acelerado, isso em virtude de o acoplamento com o campo gravitacional ter variação desprezível para valores de *redshift* menores que um.

Os resultados encontrados nos mostram que um campo taquiônico pode descrever a época inflacionária, fazendo o papel de inflaton, e a transição do Universo de um período desacelerado para um período acelerado, apresentando-se como energia escura [80].

8.3 Potencial Constante

As soluções cosmológicas obtidas para o caso das densidades de potencial constantes mostraram-se interessantes. Para o caso do campo fermiônico, as dificuldades relacionadas a F ter uma infinidade de formas possíveis não nos permitiram a análise de uma constante cosmológica efetiva variável com o tempo. Assim, ficamos somente com uma solução idêntica à do modelo Λ CDM, o qual apresenta problemas. Para o caso do campo taquiônico, em virtude de termos a existência de uma simetria de Noether que restringiu a uma só forma o acoplamento e a densidade de potencial, as soluções mostraram-se úteis na descrição do que é constatado observacionalmente, podendo descrever a inflação e o período acelerado atual.

A existência dessas simetrias permitiu uma interpretação de que pode existir para esses modelos uma "constante cosmológica" efetiva dependente do tempo, tal que a sua natureza é devida ao potencial de auto-interação constante

do campo, e não à energia de vácuo, que a rigor deve ter uma densidade de energia fixa, a qual cai em problemas quando confrontada às estimativas do seu valor – estas dizem que o seu valor atual deve ser muito diferente do seu valor no período inflacionário, o que inevitavelmente gera uma inconsistência.

8.4 Trabalhos Futuros

Como um prosseguimento ao trabalho iniciado nessa dissertação, a análise de modelos com campos bosônicos e fermiônicos interagentes (interação bóson-bóson e férmion-bóson) é um caminho natural à busca de modelos mais completos, a partir dos quais poderemos descrever uma interação entre a matéria escura e a energia escura.

Bibliografia

- [1] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [2] A. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [3] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [4] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [5] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [6] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [7] M. Szydlowski, A. Kurek, A. Krawieck, *Phys. Lett. B* **642**, 171 (2006).
- [8] J. B. Binder, G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 857 (2006).
- [9] S. Capozziello, G. Lambiase, *Gen. Relativ. Grav.* **32**, 295 (2000).
- [10] J. C. C. de Souza, V. Faraoni, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3637 (2007).
- [11] B. Vakili, *Phys. Lett. B* **664**, 16 (2008).
- [12] S. Capozziello, A. De Felice, arXiv: 0804.2163v1, (2008).
- [13] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001)
- [14] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves, P. E. de Souza, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 53 (2002).
- [15] M. C. Bento, O. Bertolami, A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).

- [16] A. Dev, J. S. Alcaniz, D. Jain, *Phys. Rev. D* **67**, 023515 (2003).
- [17] G. M. Kremer, *Gen. Relativ. Gravit.* **35**, 1459 (2003).
- [18] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavón, *Phys. Rev. D* **67**, 087302 (2003).
- [19] R. De Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **42**, 1091 (1990).
- [20] R. De Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **44**, 3136 (1991).
- [21] S. Capozziello, R. Ritis, *Class. Quantum Grav.* **11**, 107 (1994).
- [22] S. Capozziello, G. Lambiase G, *Grav. Cosmol.* **6**, 174 (2000).
- [23] M. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano, C. Tortora, *Astron. and Astrophys.* **454**, 55 (2006).
- [24] S. Capozziello, P. K. S. Dunsby, E. Piedipalumbo, C. Rubano, *Astron. and Astrophys.* **472**, 51 (2007).
- [25] A. Einstein, *Analen der Physik* **49**, (1916).
- [26] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [27] R. A. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1997.
- [28] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Teoria do Campo*. Editora Mir, 1980.
- [29] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley and Sons, 2003.
- [30] W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.* **533**, 47 (2001).
- [31] A. Linde, *Particle Physics as Inflationary Cosmology*. Harwood Academic Publisher, 1993.

- [32] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2^a ed., 1996.
- [33] C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [34] c. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* **148**, 1 (2003).
- [35] M. Fukugita, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **616**, 643 (2004).
- [36] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **659**, 98 (2007).
- [37] M. Fukugita, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **616**, 643 (2004).
- [38] M. Persic, P. Salucci, F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281**, 27 (1996).
- [39] L. N. Hand , J. D. Finch, *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [40] G. J. Sussman, J. Wisdom, M. E. Mayer, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. The MIT Press, 2000.
- [41] E. Noether, *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-Phys. Klasse*, 235 (1918).
- [42] H. Goldstein, C. Poole, Safko J, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3^a ed., 2000.
- [43] R. Abraham, J. Marsdem, *Foundation of Mechanics*. Benjamin, 1978.
- [44] G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical Systems. A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction*. Wiley, 1985.
- [45] G. Morandi, C. Ferrario, G. L. Vecchio, G. Marmo, C. Rubano, *Physics Rep.* **188**, 149 (1990).
- [46] Y. N. Obukhov, *Phys. Lett. A* **182**, 14 (1993).
- [47] B. Saha, G. N. Shikin, *Gen. Relativ. Gravit.* **29**, 1099 (1997).

- [48] B. Saha, *Phys. Rev. D* **64**, 123501 (2001).
- [49] C. Armendáriz-Picón, P. B. Greene, *Gen. Relativ. Gravit.* **35**, 1637 (2003).
- [50] B. Saha, T. Boyadjiev, *Phys. Rev. D* **69**, 124010 (2004).
- [51] B. Saha, *Phys. Rev. D* **69**, 124006 (2004).
- [52] M. O. Ribas, F. P. Devecchi, G. M. Kremer, *Phys. Rev. D* **72**, 123502 (2005).
- [53] B. Saha, *Phys. Rev. D* **74**, 124030 (2006).
- [54] M. O. Ribas, F. P. Devecchi, G. M. Kremer, *Europhys. Lett.* **81**, 19001 (2008).
Chimento L P
- [55] L. P. Chimento, F. P. Devecchi, M. Forte, G. M. Kremer, *Class. Quantum Grav.* **25**, 085007 (2008).
- [56] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [57] R. Balian, J. Zinn, *Methods in Field Theory*. North-Holland Publishing Company & World Scientific Publishing, 1981.
- [58] V. B. Berestetski, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics*. Nauka, Moscow, 1989.
- [59] L. R. W. Abramo, F. Finelli, *Phys. Lett. B* **575**, 165 (2003).
- [60] D. Liu, X. Li, *Phys. Rev. D* **70**, 123504 (2004).
- [61] G. M. Kremer, D. S. M. Alves, *Gen. Relativ. Grav.* **36**, 2039 (2004).
- [62] D. A. Steer, F. Vernizzi, *Phys. Rev. D* **70**, 043527 (2004).
- [63] C. Campuzano, S. Del Campo, *Phys. Lett. B* **633**, 149 (2006).
- [64] R. Herrera, S. Del Campo, C. Campuzano, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **610**, 009 (2006).

- [65] H. Xiong, J. Zhu, *Phys. Rev. D* **75**, 084023 (2007).
- [66] L. Balart, S. Del Campo, R. Herrera, P. Labraña, J. Saavedra, *Phys. Lett. B* **647**, 313 (2007).
- [67] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **66**, 021301 (2002).
- [68] J. Hao, X. Li, *Phys. Rev. D* **66**, 087301 (2002).
- [69] J. S. Bagla, H. K. Jassal, T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **67**, 063504 (2003).
- [70] H. K. Jassal, *Pramana* **62**, 757 (2004).
- [71] S. Del Campo, R. Herrera, D. Pavón, *Phys. Rev. D* **71**, 123529 (2005).
- [72] A. Das, S. Gupta, T. D. Saini, S. Kar, *Phys. Rev. D* **72**, 043528 (2005).
- [73] G. Panotopoulos, arXiv: 0606249v2, (2006).
- [74] J. Ren, X. Meng, arXiv: 0610266v2, (2008).
- [75] V. H. Cárdenas, *Phys. Rev. D* **73**, 103512 (2006).
- [76] S. K. Srivastava, arXiv: 0409074v4, (2005).
- [77] J. M. Virey *et al.*, *Phys. Rev. D* **72**, 061302 (2005).
- [78] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [79] R. C. De Souza, G. M. Kremer, *Class. Quantum Grav.* **25**, 225006 (2008).
- [80] R. C. De Souza, G. M. Kremer, arXiv:0809.2331v2, (2008).