

Albary Laibida Junior

# Teoria Cinética Veicular à la Enskog

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Marques Junior.

**Curitiba**

2009

VIVERE MILITARE EST.

Sêneca.

# Agradecimentos

À memória de minha mãe Maria Lúcia Ganzert Laibida que uma vida inteira dedicou ao magistério e ao hercúleo esforço de educar os filhos.

À minha querida irmã Letícia Adejani Laibida e ao meu pai Albary Laibida pelo apoio incondicional.

Ao Prof. Dr. Wilson Marques Junior minha sincera admiração pela orientação, incentivo, amizade e magnitude de seu caráter.

Ao Prof. Dr. Mauro Gomes Rodbard pelo seu fundamental papel na ajuda da escolha de minha carreira profissional.

Às minhas grandes amigas Ana Lucia Ferreira e Márcia de Windson Costa Caetano Greenshields pelas longas conversas e discussões que em muito me engrandeceram.

Aos meus grandes amigos Ednilson Rodrigo Pedroso, Flávio Benedito, Guilherme Bertoldo, Hélio Luiz Augusto Bueno Matos de Almeida, Rudinei Celso de Souza e Thiago Corrêa de Freitas pela grande e verdadeira amizade travada durante os anos de universidade e pelas longas horas de conversa que em muito transcenderam o trivial me ajudando a crescer como ser humano e como físico.

Aos meus grandes amigos da biblioteca Henry Jansen, Jean Michael, Mário Lucchin, Márcio Correia da Silva, Paulo Dã, Pedro Henrique Bueno Matos de Almeida e Thiago André Santos pelos ótimos momentos juntos.

A todos os trabalhadores brasileiros que indiretamente me custearam durante este período minha sincera gratidão.

## Resumo

É desenvolvido neste trabalho um modelo contínuo de segunda ordem para o fluxo veicular tendo como ponto de partida uma equação cinética para dois casos distintos, a saber: (i) aproximação de veículos pontuais e (ii) veículos extensos. Da equação cinética são derivadas equações de balanço para ambos os casos e via o método dos momentos de Grad e um método iterativo são computadas as respectivas relações de fechamento. Por fim faz-se a análise linear de estabilidade das soluções para os campos de tráfego densidade e velocidade veicular média, sendo ainda analisadas as velocidades características com que pequenas perturbações se propagam no fluxo veicular.

# Abstract

A second-order continuum model for traffic flow is developed in this work starting with a kinetic equation for two different cases, namely: *(i)* dimensionless vehicles and *(ii)* extensive vehicles. From the kinetic equation are derived balance equations for both cases and through Grad's moment method and an iteration procedure the respective closure relations are evaluated. Finally the linear stability analysis for the solutions of vehicular fields density and average velocity as well as the analysis of the characteristic speeds propagation of small disturbances in traffic flow is made.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>6</b>
2.1 Diagrama Fundamental . . . . .	6
2.2 Aspectos Básicos da Teoria Cinética dos Gases . . . . .	10
2.2.1 Espaço de Fase . . . . .	10
2.2.2 Momentos da Função de Distribuição . . . . .	10
2.2.3 A Equação de Boltzmann . . . . .	12
2.2.4 Equação de Enskog para Gases Monoatômicos Densos . . . . .	17
<b>3 Teoria Cinética para Veículos Pontuais</b>	<b>19</b>

3.1	Equação Cinética . . . . .	19
3.2	Determinação do Termo de Interação . . . . .	22
3.3	Aceleração Individual . . . . .	26
3.4	Modelo Contínuo de Segunda Ordem . . . . .	27
3.5	Método dos Momentos de Grad . . . . .	29
3.6	Função de Distribuição de Equilíbrio . . . . .	31
3.6.1	Fluxo Uniforme e Estacionário . . . . .	31
3.6.2	Entropia Informacional . . . . .	35
3.7	Polinômios de Velocidade e Função de Distribuição . . . . .	36
3.7.1	Polinômios de Velocidade . . . . .	36
3.7.2	Modelo Contínuo de Terceira Ordem . . . . .	38
3.8	Equações de Tráfego tipo Navier-Stokes . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Teoria Cinética para Veículos Extensos</b>	<b>43</b>
4.1	Equação Cinética tipo Enskog . . . . .	43
4.1.1	Equação de Transferência para o Tráfego Denso . . . . .	46
4.2	Modelo Contínuo de Terceira Ordem . . . . .	49

4.3	Modelo Contínuo de Segunda Ordem . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Análise Linear de Estabilidade</b>	<b>57</b>
5.1	Tráfego Diluído . . . . .	57
5.2	Tráfego Denso . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Fórmulas Matemáticas</b>	<b>71</b>
A.1	Função Gama . . . . .	71
A.2	Função Gama Incompleta . . . . .	72
A.3	Momentos e Gradientes da Função de Distribuição de Ordem Zero . . . . .	73
A.4	Funções Auxiliares $\psi_{(n)}$ . . . . .	74
A.5	Funções Auxiliares $\mathcal{J}[z]$ . . . . .	75
A.6	Prova da relação 5.14 . . . . .	77
	<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

2.1	Figura esquemática da relação fluxo-densidade com velocidade medida em km/h e a densidade em veh/km. . . . .	8
2.2	Figura esquemática do diagrama fundamental com fluxo medido em veh/h e densidade medida em veh/km. . . . .	9
2.3	Geometria de uma colisão binária entre esferas. . . . .	18
3.1	Representação do espaço de fase. . . . .	20
3.2	Ilustração da interação binária entre automóveis que destrói pontos no espaço de fase. . . . .	24
3.3	Ilustração da interação binária entre automóveis que cria pontos no espaço de fase. . . . .	25
3.4	Função de distribuição de equilíbrio para $\alpha = 125$ , $\rho_e = 20\text{veh/km}$ e $v_e = v_e(\rho)$ . . . . .	33
3.5	Parâmetro $w$ do modelo como função da densidade de equilíbrio para três valores do tempo de relaxação $\tau$ e $\alpha = 125$ . . . . .	34

4.1	Ilustração da interação binária entre automóveis que destrói pontos no espaço de fase. Note que a interação ocorre em $x + a/2$ . . . . .	44
4.2	Ilustração da interação binária entre automóveis que cria pontos no espaço de fase. Note que a interação ocorre em $x + a/2$ . . . . .	45
4.3	Razão $\mu/\mu_0$ como função de $\rho b$ . . . . .	55
5.1	$\gamma_+\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para vários valores do parâmetro $w$ . . .	60
5.2	$\gamma_-\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para vários valores do parâmetro $w$ . . .	61
5.3	$\gamma_+\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,01$ e três valores de $\rho b$ . . .	66
5.4	$\gamma_-\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,01$ e três valores de $\rho b$ . . .	66
5.5	$\gamma_+\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,05$ e três valores de $\rho b$ . . .	67
5.6	$\gamma_-\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,05$ e três valores de $\rho b$ . . .	67
5.7	$\gamma_+\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,10$ e três valores de $\rho b$ . . .	68
5.8	$\gamma_-\tau$ como função de $q = kc_0\tau$ para $w = 1,10$ e três valores de $\rho b$ . . .	68

# Capítulo 1

## Introdução

Desde a aurora da História da civilização, o homem arrosta problemas relacionados ao transporte dos mais variados objetos. Seja devido a grandes migrações, ou ao transbordo de cereais, tais problemas só vieram a aumentar à medida que as estruturas sociais tornaram-se mais e mais complexas com o surgimento dos grandes centros urbanos. Na antiga Roma, problemas inerentes ao tráfego de veículos são nitidamente identificados no *Corpus Inscriptionum Latinarum* que proibia a passagem de carruagens em determinados pontos da cidade em certos horários do dia. A preocupação com o tráfego de automóveis foi explorada no documentário produzido sob encomenda da empresa norte americana General Motors intitulado *To New Horizons*. Apresentado na *New York World's Fair* de 1939-1940, o documentário convidava os expectadores a fazer uma viagem vinte anos no futuro, admirando então uma concepção artística do mundo no agora nostálgico e distante ano de 1960. A maquete, sugestivamente chamada *Futurama* explorava, por motivos óbvios, questões relativas ao transporte humano e de riquezas através de automóveis por meio de rodovias. A preocupação com o rápido aumento das cidades e consequente aumento

das conexões entre elas é notória; e mais ainda, são as soluções imaginadas para os problemas de otimização e congestionamento do tráfego veicular. Soluções como a *super auto-estrada* na qual existiam sete pistas com velocidade permitida de 50, 75 e 100mph, interseções com rampas inclinadas em que o motorista não necessitava reduzir a velocidade ao fazer curvas e pontes com vias independentes que possibilitavam a aceleração dos automóveis que vinham com menor velocidade de pistas secundárias são exemplos. Tudo é claro, visando à máxima segurança. Apesar de algumas destas idéias serem atualmente fatos, ainda estão longe de resolverem por completo os problemas concernentes ao fluxo veicular. Por isso, tais questões ainda são realidades dignas de preocupação.

Não raro, grandes cidades literalmente param em detrimento de monstruosos congestionamentos. A emissão de poluentes também é um outro grande problema diretamente relacionado ao fluxo veicular. Em movimento, automóveis lentos tendem, em proporção, a consumir mais combustível que automóveis em marcha mais acelerada. Ainda, quanto mais denso o fluxo veicular se torna, mais lentos os automóveis se locomovem diminuindo assim a eficiência dos motores. Neste ponto é óbvio que a emissão de poluentes continua, mas com a diferença de que a distância média percorrida pelos veículos diminuir drasticamente. Não se tratando de um ou dois automóveis apenas, mais sim de, centenas ou milhares destes enfileirados em congestionamentos quilométricos, os poluentes podem atingir níveis críticos, danosos à saúde humana. Por motivos econômicos torna-se inviável remodelar o traçado das vias urbanas destes grandes centros. Mostra-se assim assaz vantajoso compreender os fenômenos tocantes ao fluxo veicular. Na tentativa de compreendê-los, vários modelos foram propostos. Antes de descrevê-los cabe fazer uma discussão das diferenças entre teorias de sistemas físicos e teorias de sistemas em que os constituintes são entes animados, tal como o fluxo veicular. Em sistemas físicos usuais existem algumas poucas leis que regem o comportamento destes, no entanto, quando os constituintes de um sistema tornam-se animados i.e., que podem escolher uma entre várias possibilidades de reação para uma mesma ação tal que o mecanismo de escolha não está

ligado às ações externas por meio de relações matemáticas simples, a codificação de tais leis se mostra extremamente complexa e inviável. E este é justamente o caso das teorias para o tráfego de veículos. Como a dinâmica do fluxo veicular é influenciada pelas relações entre motorista, automóvel, estrada, leis de trânsito, condições climáticas etc., as características individuais dos entes devem ser simplificadas a tal ponto que se possam identificar grandezas estatísticas e assim tornar o problema tratável. Vale frisar que a solução de problemas de tráfego através da segunda lei de Newton não é apropriada pois, além dos problemas expostos anteriormente, há um alto custo computacional envolvido devido aos muitos entes constituintes.

Existe uma imensa sorte de modelos que se prestam à descrição do fluxo veicular. Descrições teóricas são essencialmente baseadas em três pontos de vista: microscópico, mesoscópico e macroscópico. Na escala microscópica há o modelo conhecido como *cellular automata* que trata cada veículo separadamente sendo seus movimentos governados por leis derivadas de observações do tráfego. No domínio mesoscópico, existe uma abordagem análoga à teoria cinética dos gases em que se associa uma função de distribuição de velocidades ao “gás” de veículos. Na esfera macroscópica, o tráfego é modelado como um fluido contínuo com equações “emprestadas” da mecânica dos fluidos, sendo associados ao estado do tráfego os campos básicos densidade veicular e velocidade veicular média. Neste trabalho uma equação cinética, similar à equação de Boltzmann, é utilizada como ponto de partida para a derivação de uma equação de transferência para as variáveis macroscópicas escolhidas para a descrição do tráfego veicular.

Dedicamos o capítulo 2 deste trabalho à breve exposição de um conceito de suma importância na análise empírica do fluxo veicular denominado *diagrama fundamental*, sendo este usado para representar o fluxo veicular como função da densidade. Também são expostos alguns conceitos básicos da teoria cinética dos gases com a intenção de tornar mais palpável a aplicação de tais conceitos ao fluxo veicular.

O capítulo 3 desta dissertação é devotado à derivação da equação

cinética para a aproximação de veículos pontuais. Considerou-se uma pista simples, de mão única, sem entradas e nem saídas. Partindo da equação de transferência e se valendo do método dos momentos de Grad e um procedimento iterativo, um modelo macroscópico de segunda ordem para as variáveis de tráfego escolhidas é obtido.

O capítulo 4 objetiva corrigir a equação cinética ajustando-a para o caso de tráfego denso de veículos. No encaço do capítulo 3, todas as considerações e procedimentos são análogos.

No capítulo 5 é feita a análise linear de estabilidade das soluções para os campos básicos de tráfego densidade veicular  $\rho$  e velocidade veicular média  $v$  para o tráfego diluído e para o tráfego denso. Também são analisadas as velocidades de propagação de perturbações no fluxo de veículos. Por fim, no capítulo 6, concluímos o trabalho com as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Antes de começarmos a exposição de cunho estritamente teórica do trabalho é interessante definirmos uma das mais importantes relações empíricas do fluxo veicular conhecida na literatura como *diagrama fundamental*. Após esta breve exposição, partiremos para as definições e conceitos fundamentais em teoria cinética dos gases afim de tornar a leitura deste trabalho mais fluente e compreensiva, uma vez que utilizaremos amplamente estes conceitos no estudo do fluxo veicular.

### 2.1 Diagrama Fundamental

Para caracterizar o estado do fluxo veicular são necessárias uma série de variáveis as quais denominam-se *variáveis de tráfego*. Muitas dessas variáveis de tráfego dependem de um grande número de fatores tais como condições da pista, condições meteorológicas, personalidade dos motoristas etc. [1]. Aqui estaremos interessados em três delas que são a *densidade veicular*  $\rho$ , a *velocidade média dos veículos*  $v$  e o *fluxo veicular*  $J$  que é uma combinação das variáveis  $\rho$  e  $v$ . As três variáveis citadas são definidas como segue:

1. A densidade veicular  $\rho(x, t)$  é definida como o número  $N$  de veículos por unidade de comprimento  $\Delta x$  em uma rodovia. Desta forma escrevemos

$$\rho(x, t) = \frac{N}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Medidas de densidade consistem uma das mais árduas tarefas em fluxo veicular. Usualmente feitas por meio de dispositivos contadores postos em locais estratégicos de rodovias, as medidas de densidade veicular por este método estão sujeitas a grandes flutuações implicando em medidas pouco precisas. Medidas de grande precisão da densidade veicular por meio de câmeras de vídeo ou fotografias aéreas em certos intervalos de rodovia são soluções interessantes do problema mas, devido aos elevados custos, não são aplicadas. Por fim, neste trabalho, a "unidade" de medida de *número de veículos* é simbolizada por *veh* sendo oriunda da abreviação da palavra inglesa *vehicle*.

2. A velocidade veicular média  $v(x, t)$  denota a velocidade média com que os automóveis se locomovem em um dado instante de tempo  $t$  na posição  $x$  da rodovia, ou seja

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i(\Delta x) \quad (2.2)$$

onde  $v_i(\Delta x)$  denota a velocidade do  $i$ -ésimo veículo na região de controle  $\Delta x$  [2]. Note que aqui não empregamos velocidade em sua correta acepção, mas sim, para denotar o seu módulo. Ou seja, neste texto, por velocidade entendemos a *rapidez* com a qual os veículos se movem não importando possíveis variações na direção desta.

3. O fluxo veicular  $J$  representa o número  $N$  de automóveis que cruzam um determinado ponto  $x$  de uma rodovia por unidade de tempo  $t$ . Assim:

$$J = \frac{N}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Muito embora consista em um fenômeno de grande complexidade, o fluxo veicular apresenta algumas características gerais. Isto possibilita a análise de

relações empíricas de *velocidade-densidade* e *fluxo-densidade* que, por sua vez, estão ligadas às medidas das variáveis de tráfego definidas anteriormente em algum dado local de uma rodovia.

A relação empírica *velocidade-densidade* está ligada a uma observação muito simples e evidente do fluxo veicular que é o fato de que quanto *maior* for a densidade veicular  $\rho$ , *menor* será a velocidade média  $v$ . Isto faz bastante sentido pois, a medida em que  $\rho$  aumenta, a distância média entre os veículos diminui, acarretando uma redução nas velocidades dos automóveis. Tal como mostrado na figura 2.1, no limite de densidade máxima  $\rho = \rho_{max}$  os veículos não se movem, então  $v(\rho_{max}) = 0$ . Por outro lado, quando o tráfego é muito diluído, ou seja  $\rho \approx 0$ , quase não há interações entre os automóveis, logo estes devem se mover com velocidade máxima  $v_{max}$ .

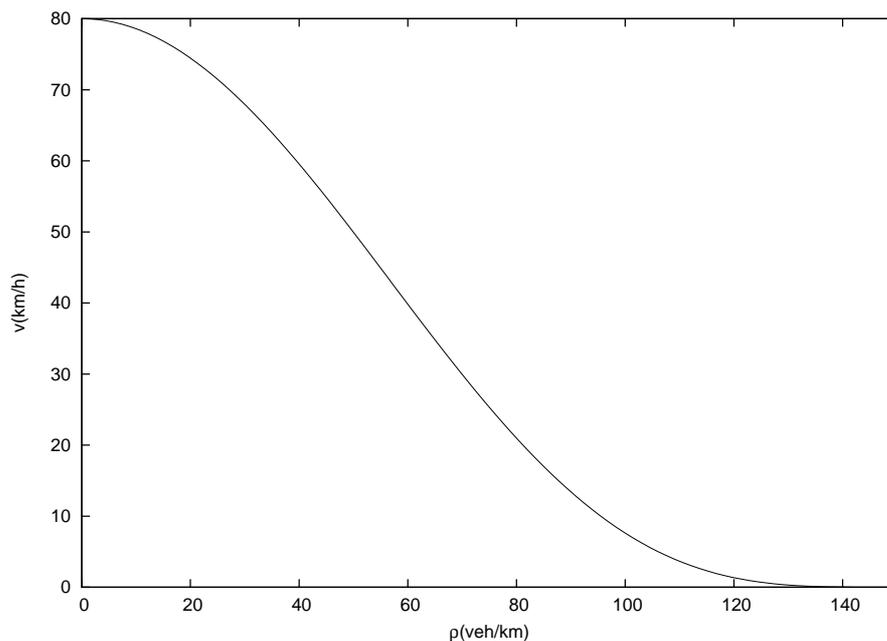


Figura 2.1: Figura esquemática da relação fluxo-densidade com velocidade medida em km/h e a densidade em veh/km. Note que quando  $\rho = 0$  a velocidade é máxima e quando  $\rho$  é máximo a velocidade vai a zero.

O fluxo veicular  $J$  se define como o produto da densidade veicular  $\rho$  com a velocidade veicular média  $v$

$$J = \rho v. \quad (2.4)$$

Quando se faz a representação gráfica de  $J$  em função da densidade  $\rho$  se obtém o que se conhece na literatura como *diagrama fundamental*. Uma característica do diagrama fundamental é que a curva obtida *sempre parte da origem* sendo o fluxo nulo quando a densidade é nula. Como pode ser visto na figura 2.2, a curva do diagrama fundamental se divide em duas regiões, a saber: uma com derivada positiva e outra com derivada negativa. Na região do diagrama fundamental com derivada positiva, diz-se que o tráfego é *livre* e na região onde a derivada é negativa, que o tráfego é *congestionado*. A curva do diagrama fundamental possui um máximo em um valor *crítico* da densidade que representa a transição do regime de tráfego livre para o regime de tráfego congestionado [1].

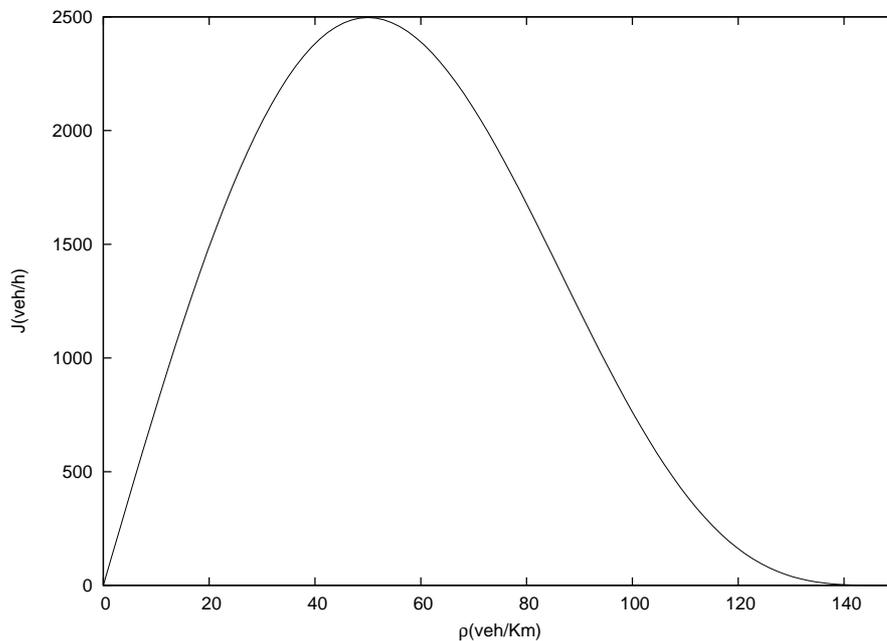


Figura 2.2: Figura esquemática do diagrama fundamental com fluxo medido em  $\text{veh}/h$  e densidade medida em  $\text{veh}/\text{km}$ . Note as regiões onde há diferentes sinais para a derivada e a existência de um máximo.

## 2.2 Aspectos Básicos da Teoria Cinética dos Gases

### 2.2.1 Espaço de Fase

Um gás consiste de um número muitíssimo grande de partículas interagentes cujo estado é determinado especificando as posições  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e velocidades  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  de cada partícula em um dado instante de tempo  $t$ . O microestado de um gás é dado por um conjunto completo  $(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  sendo que cada partícula pode ser descrita através de sua trajetória no espaço hexadimensional formado por  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{c}$  denominado *espaço de fase*  $\mu$  [1], [3]. Desta forma, para descrever o estado de um gás, há que se estabelecer as equações de movimento de cada partícula e então resolver da ordem de  $10^{23}$  equações de movimento acopladas. Obviamente tal tarefa constitui um problema intratável. Em teoria cinética dos gases a descrição do estado de um gás em nível microscópico faz-se por meio do espaço de fase e da *função de distribuição de velocidades*  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$  que se define de forma tal que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c} = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)dx_1dx_2dx_3dc_1dc_2dc_3, \quad (2.5)$$

fornece o número de partículas em  $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}]$  com velocidade no intervalo  $[\mathbf{c}, \mathbf{c} + d\mathbf{c}]$  no instante de tempo  $t$ .

### 2.2.2 Momentos da Função de Distribuição

A descrição do estado de um gás por meio da função de distribuição do espaço de fase nos dá detalhes que muitas vezes não nos interessam no estudo dos mesmos. Existem quantidades que podem ser derivadas da função de distribuição que estão muito mais próximas de nossa experiência e intuição as quais chamamos de *momentos da função de distribuição* [1]. Da definição (2.5) segue que o número

de partículas em um volume do espaço de fase é definido por

$$N = \int \int f d\mathbf{x} d\mathbf{c} \quad (2.6)$$

sendo os valores possíveis da posição restringidos ao volume  $V$  e os valores das três componentes da velocidade no intervalo  $[-\infty, +\infty]$ . Integrando somente sobre as velocidades do gás em um volume  $d\mathbf{x}$  se obtém a densidade numérica

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f d\mathbf{c}. \quad (2.7)$$

Dado que as partículas do gás têm massa  $m$ , se define a *densidade de massa o gás* por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = m \int f d\mathbf{c}. \quad (2.8)$$

A velocidade macroscópica do gás é definida como:

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n} \int c_i f d\mathbf{c}. \quad (2.9)$$

A densidade de momento é

$$\rho v_i = m \int c_i f d\mathbf{c}. \quad (2.10)$$

A velocidade de uma partícula medida em um referencial que se move com o gás a uma velocidade  $v_i$  é chamada de *velocidade peculiar* e escreve-se

$$C_i = c_i - v_i. \quad (2.11)$$

Segue de (2.10) que o primeiro momento da função de distribuição  $f$  com  $C_i$  é *nulo*, ou seja,

$$m \int C_i f d\mathbf{c} = 0. \quad (2.12)$$

A energia cinética de uma partícula é dada por  $mv^2/2$  de modo que a densidade de energia em um gás monoatômico diluído é

$$\rho\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2} \int c^2 f d\mathbf{c}, \quad (2.13)$$

e de (2.12)

$$\rho\varepsilon = \frac{m}{2} \int (C^2 + 2v_k C_k + v^2) f d\mathbf{c} = \rho u + \frac{\rho}{2} v^2 \quad (2.14)$$

em que

$$\rho u(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2} \int C^2 f d\mathbf{c} \quad (2.15)$$

é a *energia interna* do gás e  $\rho v^2/2$  é a densidade de energia cinética. Para gases isotrópicos a pressão se define

$$p = \frac{m}{3} \int C^2 f d\mathbf{c} = \frac{2}{3} \rho u. \quad (2.16)$$

A temperatura  $T$  de um gás ideal monoatômico é definida pela chamada *equação calórica de estado*

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T, \quad (2.17)$$

em que  $k$  é a *constante de Boltzmann*. Igualando (2.17) e (2.13) obtemos

$$T = \frac{m^2}{3\rho k} \int C^2 f d\mathbf{c}. \quad (2.18)$$

Outros momentos de importância são o *tensor pressão*

$$p_{ij} = m \int C_i C_j f d\mathbf{c} \quad (2.19)$$

e o *fluxo de calor*

$$q_i = \frac{m}{2} \int C^2 C_i f d\mathbf{c}. \quad (2.20)$$

Os momentos de ordem superiores definidos em relação à velocidade peculiar  $C$  são

$$m_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} = m \int C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_n} f d\mathbf{c}, \quad (2.21)$$

sendo conhecidos como *momentos centrais*.

### 2.2.3 A Equação de Boltzmann

Seja o número de partículas presentes no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}$  do espaço de fase  $\mu$  no instante  $t$  dado por

$$N(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{c} = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mu(t), \quad (2.22)$$

onde

$$d\mu(t) = d\mathbf{x}d\mathbf{c}. \quad (2.23)$$

Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  uma partícula do gás avança uma distância  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{c}\Delta t$  e sofre uma variação na velocidade  $\Delta\mathbf{c} = \mathbf{F}\Delta t$ .  $\mathbf{F}$  é a *força externa específica* ou a *aceleração*. No instante de tempo  $t' = t + \Delta t$  tem-se a posição  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  e a velocidade  $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ , que podem ser reescritas como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t \quad (2.24)$$

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{F}\Delta t. \quad (2.25)$$

Assim, o número de partículas no elemento de volume  $d\mu(t') = d\mu(t + \Delta t)$  é

$$N(t') = N(t + \Delta t) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}, t + \Delta t)d\mu(t + \Delta t)$$

ou

$$N(t') = N(t + \Delta t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, \mathbf{c} + \mathbf{F}\Delta t, t + \Delta t)|J|d\mu(t) \quad (2.26)$$

onde  $J$  é o *Jacobiano* da transformação de  $t'$  para  $t$ .

As colisões entre moléculas do gás ocasionam uma variação em suas velocidades e uma conseqüente mudança no número de pontos que encontram-se no elemento de volume do espaço de fase. A variação  $\Delta N(t + \Delta t)$  no número de moléculas é calculada tomando-se a diferença

$$\Delta N(t + \Delta t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, \mathbf{c} + \mathbf{F}\Delta t, t + \Delta t)|J|d\mu(t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mu(t). \quad (2.27)$$

Utilizando as equações (2.24) e (2.25) e expandindo o Jacobiano da transformação de  $t'$  para  $t$ , obtemos:

$$J = 1 + \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \Delta t + \dots \quad (2.28)$$

Expandindo em série de Taylor a função de distribuição  $f(\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, \mathbf{c} + \mathbf{F}\Delta t, t)$  até termos de primeira ordem em  $\Delta t$ , tem-se:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, \mathbf{c} + \mathbf{F}\Delta t, t + \Delta t) \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial c_i} \Delta c_i + \dots \quad (2.29)$$

Inserindo as equações (2.28) e (2.29) na equação (2.27) e desprezando termos em  $\Delta t$  com ordem maior ou igual a dois, acarreta:

$$\Delta N = \left[ f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial c_i} \Delta c_i \right] \left[ 1 + \left( \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \right) \Delta t \right] d\mu(t) - f(x, c, t) d\mu(t),$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial c_i} = \frac{\Delta N}{\Delta t d\mu(t)} \quad (2.30)$$

em que o termo

$$\frac{\Delta N}{\Delta t d\mu(t)} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int}$$

é o termo de *colisão*.

Para determinarmos o termo de interação nos valeremos das seguintes hipóteses:

1. Consideraremos somente colisões binárias entre as moléculas do gás.
2. A variação da função de distribuição durante a colisão é pequena, bem como sua a variação espacial durante a ação das forças interatômicas.
3. Não há correlação entre as velocidades  $\mathbf{c}$  e entre as posições  $\mathbf{x}$  das moléculas para qualquer instante de tempo  $t$  (suposição do caos molecular).
4. A ação de forças externas sobre as moléculas do gás é muito pequena se comparada às forças intermoleculares.

Consideremos a colisão entre um átomo com velocidade  $\mathbf{c}$  e outro com velocidade  $\mathbf{c}_1$ . Agora, suponhamos que o átomo com velocidade  $\mathbf{c}$  se encontra em repouso em um dado plano, enquanto o átomo com velocidade  $\mathbf{c}_1$  se aproxima do plano segundo um ângulo reto e com velocidade relativa  $\mathbf{g} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}$ . Para completar a descrição do movimento relativo inserimos o parâmetro de impacto  $b$  e o ângulo azimutal  $\varepsilon$ .

No intervalo de tempo  $\Delta t$  todas as partículas com velocidades  $\mathbf{c}_1$  que encontram-se no cilindro de colisão de volume  $gbdb\varepsilon\Delta t$  colidirão com uma partícula

de velocidade  $\mathbf{c}$  em um dado ponto  $O$ . O número de partículas com velocidade  $\mathbf{c}_1$  no cilindro de colisão é dado por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)gbdbd\varepsilon d\mathbf{c}_1\Delta t. \quad (2.31)$$

Sendo  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c}$  o número de partículas com velocidades  $\mathbf{c}$  no elemento de volume  $d\mathbf{x}$  tem-se que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)gbdbd\varepsilon d\mathbf{x}d\mathbf{c}d\mathbf{c}_1\Delta t, \quad (2.32)$$

representa o número total de colisões que se dão no elemento de volume  $d\mathbf{x}$  no íterim  $\Delta t$ .

Dividindo a equação acima por  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}\Delta t$  e integrando sobre todas as velocidades  $\mathbf{c}_1$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , sobre o ângulo azimutal  $\varepsilon$  de 0 a  $2\pi$  e sobre todos os valores do parâmetro de impacto  $b$  de 0 a  $+\infty$  obtém-se a densidade do número total de colisões por intervalo de tempo  $\Delta t$  que *destrói pontos no espaço de fase*  $\mu$  com velocidade  $\mathbf{c}$  em  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}$ . Escrevemos então:

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = d\mu \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)gbdbd\varepsilon d\mathbf{c}_1 \quad (2.33)$$

Existem colisões que ao invés de destruírem pontos no espaço de fase, os criam. A criação de pontos no espaço de fase advém de colisões entre átomos cujas velocidades iniciais são  $\mathbf{c}'$  e  $\mathbf{c}'_1$  e velocidades finais  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{c}_1$ , parâmetro de impacto  $b$  e ângulo azimutal  $\pi + \varepsilon$ . Este tipo de colisão é conhecido como *colisão de restituição* e a considerada anteriormente por *colisão direta*.

Pelo exposto acima concluímos que a densidade do número total de colisões em  $d\mathbf{x}$  no hiato  $\Delta t$  para colisões de restituição é

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t)g'bdbd\varepsilon d\mathbf{x}d\mathbf{c}'d\mathbf{c}'_1\Delta t. \quad (2.34)$$

As relações entre as velocidades finais e velocidades iniciais são:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{k}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{c}'_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}), \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{g} - \mathbf{g}'}{|\mathbf{g} - \mathbf{g}'|}, \quad (2.37)$$

é o vetor de colisão e especifica a direção, em uma colisão, da linha que une o centro de duas partículas colidentes. Pelo fato de o Jacobiano da transformação de velocidades ser unitário temos

$$d\mathbf{c}d\mathbf{c}_1 = d\mathbf{c}'d\mathbf{c}'_1. \quad (2.38)$$

Como a energia deve ser conservada,

$$g = g' \quad (2.39)$$

torna possível escrever (2.34) como

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t)g b d b d \varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{c} d\mathbf{c}_1 \Delta t. \quad (2.40)$$

Por fim, obtemos o número total de colisões que criam pontos no espaço de fase

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = d\mu \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t)g b d b d \varepsilon d\mathbf{c}_1. \quad (2.41)$$

Sendo

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ - \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- \quad (2.42)$$

e inserindo a relação acima em (2.30) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial c_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \varepsilon d\mathbf{c}_1 \quad (2.43)$$

onde introduzimos as seguintes abreviações:

$$f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \quad , \quad f' \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) \quad , \quad f_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) \quad , \quad f'_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t). \quad (2.44)$$

Se a força externa específica  $\mathbf{F}$  não depender das velocidades, temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \varepsilon d\mathbf{c}_1. \quad (2.45)$$

A equação (2.43) é uma equação íntegro-diferencial que governa a evolução espaço-temporal da função de distribuição  $f$  no espaço de fase sendo conhecida como *equação de Boltzmann* [3].

## 2.2.4 Equação de Enskog para Gases Monoatômicos Densos

Quando as dimensões das partículas de um gás são pequenas se comparadas ao livre caminho médio, caso de gás ideal, as transferências de propriedades atômicas se dão unicamente por colisões entre os constituintes do gás. Contudo, quando a distância média entre constituintes do gás se compara a dimensão destes, caso de gás denso, um novo mecanismo de transferência de momento linear e energia surge. No estudo deste novo mecanismo Enskog propôs um modelo de esferas rígidas em que as colisões são instantâneas e a probabilidade de múltiplas colisões é desprezada. O momento linear e energia são transferidos a uma distância igual à distância que separa os centros das partículas interagentes no instante da colisão. A seguir descreveremos, de forma simples, as considerações feitas por Enskog.

Seja  $a$  o diâmetro das partículas constituintes de um gás monoatômico. Tal como representado na figura 2.3, consideremos agora duas partículas deste gás com velocidades  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{c}_1$  e centros  $O$  e  $O_1$  no exato instante de uma colisão. O plano que contém a velocidade relativa  $\mathbf{g}'$  e o vetor de colisão  $\mathbf{k}$  forma um ângulo  $\varepsilon$  com o plano de referência que contém  $\mathbf{g}$ . Assim  $\theta$  e  $\varepsilon$  são coordenadas polares que definem a direção do vetor de colisão  $\mathbf{k}$ . Temos que

$$gdbd\varepsilon = ga^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varepsilon = a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.46)$$

Por se tratar de um gás denso é fácil ver que os centros de duas partículas que colidem não ocupam o mesmo lugar geométrico no espaço. Logo, no instante da colisão, o centro  $O$  está na posição  $\mathbf{x}$  e  $O_1$  em  $\mathbf{x} - a\mathbf{k}$  implicando que  $f_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)$  deve ser escrito como  $f_1 \equiv f(\mathbf{x} - a\mathbf{k}, \mathbf{c}_1, t)$ . Quando  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{c}_1$  são as velocidades pós-colisionais e  $-\mathbf{k}$  o vetor de colisão, ou seja, quando a colisão é inversa,  $O$  se encontra em  $\mathbf{x}$  e  $O_1$  na posição  $\mathbf{x} + a\mathbf{k}$  e  $f'_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t)$  é substituído por  $f_1 \equiv f(\mathbf{x} + a\mathbf{k}, \mathbf{c}'_1, t)$ .

Devido ao adensamento do gás, o volume que pode ser ocupado por uma partícula constituinte se reduz e a probabilidade de colisão aumenta. Para contabilizar este efeito multiplicamos as equações (2.32) e (2.40) por um fator de aumento de colisão  $\chi = \chi(x, t)$  que deve ser avaliado no ponto onde ocorre a colisão

entre os átomos. Desta maneira as equações (2.32) e (2.40) são reescritas como:

$$\chi\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) f(\mathbf{x} - a\mathbf{k}, \mathbf{c}_1, t) a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{c} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{x} dt, \quad (2.47)$$

$$\chi\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x} + a\mathbf{k}, \mathbf{c}'_1, t) a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{c} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{x} dt, \quad (2.48)$$

o que implica que os termos de interação são agora escritos como:

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = d\mu \int \chi\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) f(\mathbf{x} - a\mathbf{k}, \mathbf{c}_1, t) a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{c}_1, \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = d\mu \int \chi\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x} + a\mathbf{k}, \mathbf{c}'_1, t) a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{c}_1. \quad (2.50)$$

Assim, a equação que governa a evolução espaço-temporal da função de distribuição de uma partícula de um gás denso monoatômico é

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial c_i} = \int \left[ \chi\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x} + a\mathbf{k}, \mathbf{c}'_1, t) \right. \\ \left. - \chi\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\mathbf{k}, t\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) f(\mathbf{x} - a\mathbf{k}, \mathbf{c}_1, t) \right] a^2 (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\mathbf{k} d\mathbf{c}_1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

sendo conhecida como *equação de Enskog* [4].

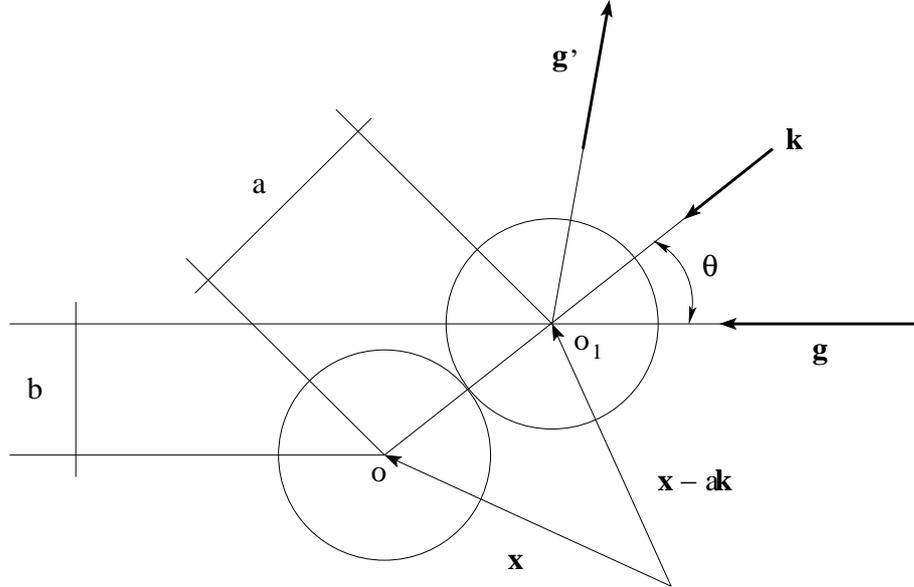


Figura 2.3: Geometria de uma colisão binária entre esferas.

# Capítulo 3

## Teoria Cinética para Veículos

### Pontuais

Levando em conta alguns aspectos da teoria cinética dos gases, iniciamos este capítulo apresentando o desenvolvimento de uma equação cinética para o fluxo veicular. Com base nesta equação cinética derivamos um conjunto de equações macroscópicas de balanço para as variáveis de tráfego escolhidas e suas respectivas relações de fechamento.

#### 3.1 Equação Cinética

Em analogia com a teoria cinética dos gases, o estado de um automóvel em uma rodovia é especificado instantaneamente através de sua posição  $x$  e sua velocidade  $c$  por meio de um ponto em um espaço bidimensional chamado de *espaço de fase*  $\mu$ . No espaço  $\mu$  o sistema constituído por  $N$  automóveis será representado por  $N$  pontos com coordenadas  $(x, c)$ .

O estado do sistema no espaço de fase  $\mu$  caracteriza-se por uma função

de distribuição  $f(x, c, t)$  tal que,

$$N(t) = f(x, c, t)dxdc = f(x, c, t)d\mu(t), \quad (3.1)$$

fornece o número de automóveis no instante de tempo  $t$  que se encontram no elemento de área entre  $x$  e  $x + dx$  com velocidades entre  $c$  e  $c + dc$  onde o elemento de área do espaço de fase no instante  $t$  é representado por

$$d\mu(t) = dxdc. \quad (3.2)$$

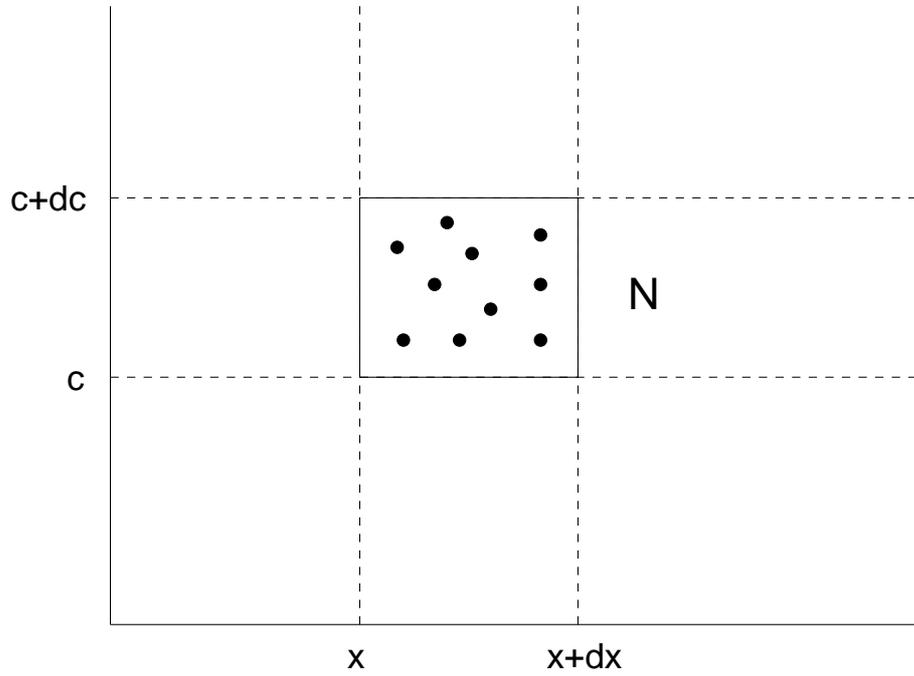


Figura 3.1: Representação do espaço de fase.

Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  um automóvel avança uma distância  $\Delta x = c\Delta t$  e sofre uma variação na velocidade  $\Delta c = F\Delta t$ , onde  $F$  é a *aceleração* do automóvel. No instante de tempo  $t' = t + \Delta t$  tem-se a posição  $x' = x + \Delta x$  e a velocidade  $c' = c + \Delta c$ , que podem ser reescritas como:

$$x' = x + c\Delta t, \quad (3.3)$$

$$c' = c + F\Delta t. \quad (3.4)$$

Assim, o número de automóveis no elemento de área  $d\mu(t') = d\mu(t + \Delta t)$  é

$$N(t') = N(t + \Delta t) = f(x + \Delta x, c + \Delta c, t + \Delta t)d\mu(t + \Delta t),$$

ou

$$N(t') = N(t + \Delta t) = f(x + c\Delta t, c + F\Delta t, t + \Delta t)|J|d\mu(t) \quad (3.5)$$

onde  $J$  é o *Jacobiano* da transformação de  $t'$  para  $t$ .

Interações entre automóveis ocasionam uma variação em suas velocidades e uma conseqüente mudança no número de pontos que encontram-se no elemento de área do espaço de fase. A variação  $\Delta N(t + \Delta t)$  no número de veículos é calculada tomando-se a diferença entre (3.5) e (3.1), ou seja

$$\Delta N(t + \Delta t) = f(x + c\Delta t, c + F\Delta t, t + \Delta t)|J|d\mu(t) - f(x, c, t)d\mu(t). \quad (3.6)$$

Utilizando as equações (3.3) e (3.4) e expandindo o Jacobiano da transformação de  $t'$  para  $t$ , obtemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial c} \\ \frac{\partial c'}{\partial x} & \frac{\partial c'}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta t \\ \frac{\partial F}{\partial x}\Delta t & 1 + \frac{\partial F}{\partial c}\Delta t \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial F}{\partial c}\Delta t - \frac{\partial F}{\partial x}(\Delta t)^2.$$

Tomando somente termos lineares em  $\Delta t$  segue que

$$J = 1 + \frac{\partial F}{\partial c}\Delta t. \quad (3.7)$$

Expandindo em série de Taylor a função de distribuição  $f(x, c, t)$  até termos de primeira ordem em  $\Delta t$ , tem-se:

$$f(x + c\Delta t, c + F\Delta t, t + \Delta t) \approx f(x, c, t) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c + \dots \quad (3.8)$$

Inserindo as equações (3.7) e (3.8) na equação (3.6) e desprezando termos em  $\Delta t$  com ordem maior ou igual a dois, acarreta:

$$\Delta N = \left[ f(x, c, t) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c \right] \left[ 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial c} \right) \Delta t \right] d\mu(t) - f(x, c, t)d\mu(t),$$

que resulta em

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( f \frac{dc}{dt} \right) = \frac{\Delta N}{\Delta t d\mu(t)}, \quad (3.9)$$

onde

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} = \frac{\Delta N}{\Delta t d\mu(t)}$$

é o termo de *interação* entre os veículos.

### 3.2 Determinação do Termo de Interação

Interações só existem quando não há a possibilidade de ultrapassagem e o automóvel é obrigado a reduzir sua velocidade ficando atrás do veículo que segue a sua frente. A determinação do termo de interação será feita com base nas seguintes hipóteses:

1. O processo de *desaceleração* ocorre com probabilidade  $(1 - \mathbf{p})$ , sendo  $\mathbf{p}$  ( $0 \leq \mathbf{p} \leq 1$ ) a probabilidade de *ultrapassagem*. Consideraremos neste trabalho a probabilidade de ultrapassagem  $\mathbf{p}$  como função da *densidade veicular*  $\rho$  dada por

$$\mathbf{p} = 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}. \quad (3.10)$$

2. A velocidade do veículo lento não é afetada pela interação ou pelo fato de ter sido ultrapassado.
3. Veículos serão considerados pontuais.
4. O processo de desaceleração é instantâneo.
5. Somente interações entre dois veículos são consideradas.
6. Para quaisquer  $x$  e  $t$  as velocidades de dois automóveis *não estão correlacionadas*. Tal hipótese é conhecida em teoria cinética dos gases como *caos*

*molecular* e aqui denominada *caos veicular* [5]. Considerando  $f_2(x', c'; x, c; t)$ , a função de distribuição que mede a probabilidade que dois automóveis em  $(x', c')$  e  $(x, c)$  têm de interagirem no instante de tempo  $t$ , segue da hipótese do *caos veicular* que  $f_2(x', c'; x, c; t)$  pode ser fatorada como o produto das funções de distribuição de um veículo  $f_1(x', c', t)$  e  $f_1(x, c, t)$ . Assim escreve-se

$$f_2(x', c'; x, c; t) = f_1(x', c', t)f_1(x, c, t). \quad (3.11)$$

A equação (3.11) significa que a interação binária entre veículos se trata de eventos estatisticamente independentes. Doravante, os índices  $1$  nas funções de distribuição  $f_1(x', c', t)$  e  $f_1(x, c, t)$  serão suprimidos, ficando subentendido que se tratam de funções de distribuição de *um* automóvel [1].

As interações entre os veículos se dividem em dois tipos, a saber: (i) interações que *destroem* pontos no espaço de fase

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^-$$

e (ii) interações que *criam* pontos no espaço de fase

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^+.$$

Para determinar a forma do termo de interação, vejamos como um automóvel em especial interage com os demais em uma rodovia hipotética. Como ilustrado na figura 3.2, tomemos um automóvel em uma rodovia na posição  $x$  cuja velocidade seja  $c'$ . Imagine agora um segundo veículo com velocidade  $c$  que se encontra atrás do veículo com velocidade  $c'$ , tal que  $c > c'$ . Obviamente  $c - c' > 0$  e  $c$  está contido no intervalo  $[c, c + dc]$ . Se o veículo com velocidade  $c$ , veículo mais veloz, não ultrapassar o veículo mais lento que vai a sua frente, o veículo mais veloz reduzirá a sua velocidade de  $c$  para  $c'$ . Para levar o fato de não ultrapassagem em conta devemos ter  $(1 - p)f_2(x', c'; x, c; t)$ , ou seja, a probabilidade de interação de dois automóveis deve ser multiplicada pela probabilidade de não ultrapassagem. Como

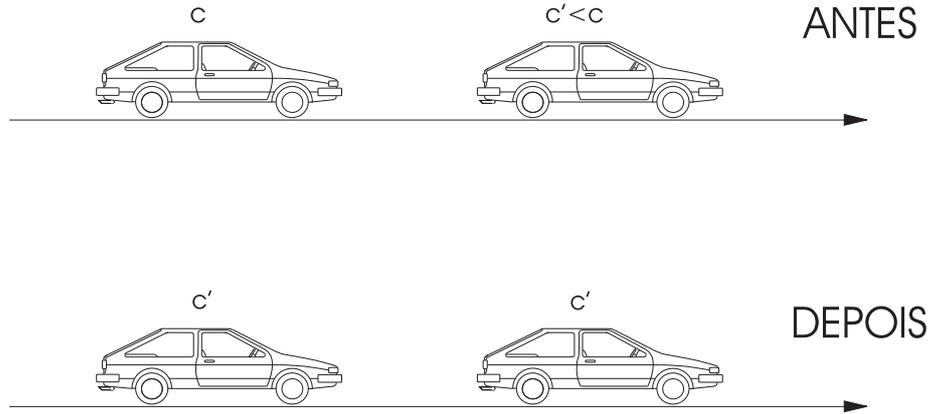


Figura 3.2: Ilustração da interação binária entre automóveis que destrói pontos no espaço de fase.

$c'$  não está contido no intervalo  $[c, c + dc]$ , o ponto no espaço de fase que representava o automóvel que antes viajava com velocidade  $c$  é destruído. Dizemos que esta interação *destrói* pontos no espaço de fase. Agora resta-nos a pergunta: a que taxa existe a destruição de pontos no espaço de fase? Para responder isto, consideremos o seguinte. O fluxo de veículos visto por um observador no referencial do automóvel mais lento, velocidade  $c'$ , na posição  $x$  é dado por  $(1 - \mathbf{p})(c - c')f_2(x', c'; x, c; t)$ . Assim, o fluxo de automóveis com velocidade  $c$  é obtido integrando a última relação sobre todas as velocidades  $c > c'$ . Logo

$$\int_0^c (1 - \mathbf{p})f_2(x', c'; x, c; t)(c - c')dc'. \quad (3.12)$$

Mas, da hipótese do caos veicular, segue que a função de distribuição de dois veículos pode ser fatorada segundo a relação (3.11), o que acarreta:

$$\int_0^c (1 - \mathbf{p})f(x, c, t)f(x, c', t)(c - c')dc'. \quad (3.13)$$

Assim, o termo de interação que destrói pontos nos espaço de fase é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^- = f(x, c, t) \int_0^c (1 - \mathbf{p})f(x, c', t)(c - c')dc'. \quad (3.14)$$

Para obtermos a expressão para as interações que criam pontos no espaço de fase procederemos de forma análoga ao caso interior. Como ilustrado na figura 3.3, considere um automóvel que se aproxima com velocidade  $c'$  a um veículo a sua frente com velocidade  $c$ , tal que  $c' > c$  e com  $c'$  fora do intervalo  $[c, c + dc]$ . Admitindo que não haja ultrapassagem por parte do veículo com velocidade  $c'$ , obtem-se [6]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^+ = f(x, c, t) \int_c^\infty (1 - \mathbf{p}) f(x, c', t) (c' - c) dc'. \quad (3.15)$$

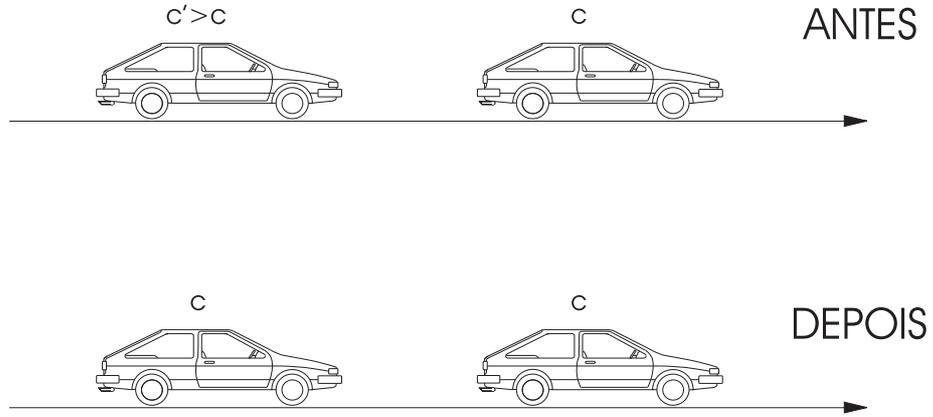


Figura 3.3: Ilustração da interação binária entre automóveis que cria pontos no espaço de fase.

Com isso o termo de interação fica

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} = \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}^- \right] \\ &= f(x, c, t) \int_c^\infty (1 - \mathbf{p}) f(x, c', t) (c' - c) dc' \\ &\quad - f(x, c, t) \int_0^c (1 - \mathbf{p}) f(x, c', t) (c - c') dc', \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou, combinando as integrais:

$$\mathcal{Q}(f, f) = f(x, c, t) \int_0^\infty (1 - \mathbf{p}) (c' - c) f(x, c', t) dc'. \quad (3.17)$$

Note que o termo de interação é nulo quando a probabilidade de ultrapassagem é máxima. Inserindo (3.17) em (3.9) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( f \frac{dc}{dt} \right) = f(x, c, t) \int_0^\infty (1 - \mathbf{p})(c' - c) f(x, c', t) dc'. \quad (3.18)$$

Esta equação governa a evolução espaço-temporal da função de distribuição de velocidades e é conhecida como equação cinética. Lembramos ainda que a equação acima só é válida para uma rodovia de mão única sem entradas e saídas onde os veículos são considerados pontuais. Deste modo, a equação acima é válida para regimes de baixa densidade veicular.

### 3.3 Aceleração Individual

A função de distribuição para uma rodovia de mão única sem entradas nem saídas satisfaz a equação (3.18). Nesta equação o termo

$$\frac{dc}{dt}$$

é a *aceleração individual* dos automóveis. Este termo pode ser modelado assumindo que os veículos que se movem com velocidade  $c$  aceleram exponencialmente até sua velocidade desejada  $c_0 = c_0(x, c, t)$  em um certo intervalo de tempo chamado *tempo de relaxação* denotado por  $\tau$ . Isto pode ser escrito como

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c_0 - c}{\tau}. \quad (3.19)$$

A velocidade desejada dos veículos depende de vários fatores tais como: leis de trânsito, condições meteorológicas, condição da estrada, personalidade dos motoristas entre outras. Dadas as condições, fica claro que  $c_0$  é uma função *fenomenológica*. Consideraremos neste trabalho a relação linear para a velocidade desejada

$$c_0 = wc, \quad (3.20)$$

em que  $w$  é uma constante positiva maior que a unidade. Esta característica indica que na média a velocidade desejada aumenta na medida que a velocidade aumenta. Tal característica é comum aos motoristas agressivos. Esta relação implica em velocidades desejadas que tendem ao infinito. Como no espaço de fase a função de distribuição de velocidades vai a zero a medida que a velocidade aumenta, o número de automóveis com velocidade tendendo ao infinito vai a zero, validando a suposição (3.20). Resumindo temos:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{w-1}{\tau}c \quad , \quad w > 1. \quad (3.21)$$

### 3.4 Modelo Contínuo de Segunda Ordem

A equação cinética (3.18) nos permite derivar equações de balanço para variáveis macroscópicas de tráfego como a densidade veicular

$$\rho(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, c, t)dc, \quad (3.22)$$

e a velocidade veicular média

$$v(x, t) = \int_0^{\infty} c \frac{f(x, c, t)}{\rho(x, t)} dc. \quad (3.23)$$

A integração da equação cinética (3.18) sobre todos os valores  $c$  da velocidade dos veículos fornece a chamada equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad (3.24)$$

enquanto que a equação do momento de tráfego

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + \varpi) = \rho \frac{w-1}{\tau} - \rho(1-p)\varpi, \quad (3.25)$$

segue da multiplicação da equação cinética por  $c$  e integração sobre todos os valores das velocidades dos automóveis. Na equação do momento de tráfego nós introduzimos a chamada pressão de tráfego

$$\varpi(x, t) = \int_0^{\infty} (c-v)^2 f dc. \quad (3.26)$$

A equação da continuidade (3.24) nos diz que o *número de veículos* no sistema é *conservado*. Esta equação está em perfeita consonância com as considerações iniciais uma vez que nem fontes tampouco sorvedouros de automóveis foram contabilizados. Com relação a equação de momento de tráfego (3.25) nota-se uma diferença substancial entre esta equação e sua análoga na mecânica dos fluidos. Esta diferença reside no fato de que a equação (3.25) contém dois termos adicionais, a saber: o primeiro termo do lado direito reflete o comportamento da aceleração dos automóveis, e por extensão, dos motoristas; como não há isotropia no fluxo veicular, pois os motoristas só são afetados pelos automóveis que os antecedem e não pelos que os sucedem, o segundo termo do lado direito, descreve a transferência de momento devido às interações anisotrópicas entre os veículos.

Introduzindo a derivada material

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x},$$

podemos reescrever as equações (3.24) e (3.25) da seguinte forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

e

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} - \rho \frac{w-1}{\tau} v = -\rho(1-\mathbf{p})\varpi. \quad (3.28)$$

Na dedução da equação (3.28) a derivada material da densidade foi eliminada com o auxílio da equação (3.27).

Com as equações da continuidade (3.24) e da velocidade (3.25) pode-se construir um modelo contínuo de segunda ordem especificando a pressão de tráfego em termos da densidade veicular, da velocidade média e seus respectivos gradientes espaciais. Existe uma infinidade de possíveis relações constitutivas para pressão que podem ser emprestadas da mecânica dos fluidos. No entanto, no presente trabalho, restringiremo-nos à derivação de uma relação constitutiva para a pressão de tráfego similar à relação de Navier-Stokes para fluidos viscosos. Esta assim chamada relação associa a pressão de tráfego aos campos básicos de densidade e velocidade média, bem

como aos gradientes espaciais de primeira ordem dos mesmos. Para tanto, pode-se aplicar um dos dois mais conhecidos métodos em teoria cinética dos gases: o método de Chapman-Enskog e o método dos momentos de Grad. No método de Chapman-Enskog as relações constitutivas são construídas através de sucessivas aproximações via expansão da função de distribuição em potências do livre caminho médio. Já no método dos momentos de Grad a equação cinética é transformada em um conjunto infinito de equações de balanço para os momentos da função de distribuição. O problema aqui se torna resolver este sistema de equações diferenciais parciais acopladas. Além de ser um sistema composto de infinitas equações, outro agravante é o fato do sistema não ser fechado, ou seja, possuir um número maior de funções incógnitas do que de equações. Para contornar esta dificuldade inerente ao método, escolhem-se quais são as variáveis relevantes à descrição do problema. Quanto maior a precisão da descrição, mais variáveis devem ser tomadas como campos básicos de tráfego. Escolhidas as variáveis relevantes ao problema resta tornar o sistema de equações fechado. Para tanto, no novo sistema, devemos expressar o momento de ordem mais alta em termos dos momentos de ordem mais baixa. Quando procedemos desta forma dizemos que calculamos as relações de fechamento do novo sistema. Por último, as relações de fechamento serão em sua maioria das vezes não-lineares. Neste trabalho, consideraremos relações de fechamento lineares.

### 3.5 Método dos Momentos de Grad

No método dos momentos de Grad a descrição macroscópica do fluxo veicular é baseada nas variáveis macroscópicas de tráfego tais como a densidade veicular, a velocidade média veicular e os *momentos centrais* da função de distribuição

$$m_k(x, t) = \int_0^{\infty} (c - v)^k f(x, c, t) dc \quad , \quad \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Com a finalidade de obtermos uma equação de balanço geral para os momentos centrais da função de distribuição vamos primeiramente derivar uma equação de

transferência a partir da equação cinética (3.18). Multiplicando a equação cinética (3.18) por uma função arbitrária  $\psi = \psi(x, c, t)$  e integrando sob todas as velocidades  $c$ , temos [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \psi f dc + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \psi c f dc - \int_0^\infty \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dc}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial c} \right) f dc = \Delta(\psi), \quad (3.30)$$

onde

$$\Delta(\psi) = \int_0^\infty \psi f(x, c, t) dc \int_0^\infty (1 - \mathbf{p})(c' - c) f(x, c', t) dc'. \quad (3.31)$$

Note que na derivação da equação de transferência (3.30) utilizamos as seguintes condições de contorno para a função de distribuição:

$$\lim_{c \rightarrow 0} f(x, c, t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} f(x, c, t) = 0, \quad (3.32)$$

que significam que não há automóveis com velocidade zero e nem automóveis com velocidade infinita na rodovia.

Tomando  $\psi = (c - v)^k$  na equação de transferência (3.30), obtemos a assim chamada *equação de balanço geral* para o momento central de ordem  $k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (m_k v + m_{k+1}) + k m_k \frac{\partial v}{\partial x} - k \frac{m_{k-1}}{\rho} \frac{\partial \varpi}{\partial x} - k \frac{w - 1}{\tau} m_k = \\ - \rho (1 - \mathbf{p}) \left( m_{k+1} - k \frac{m_{k-1}}{\rho} \varpi \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nota-se que as equações (3.24), (3.25) e (3.33) não formam um sistema de equações fechado para os momentos  $\rho$ ,  $v$  e  $m_k$  pois a equação acima envolve os momentos  $m_{k+1}$ . A dependência do momento central  $m_{k+1}$  com os momentos  $\rho$ ,  $v$  e  $m_k$  é obtida se conhecermos a função de distribuição de velocidades em função de  $\rho$ ,  $v$  e  $m_k$ . No método dos momentos de Grad tal solução é obtida através da expansão da função de distribuição em torno da função de distribuição de equilíbrio local. Com efeito, temos então

$$f(x, c, t) = f^{(0)}(x, c, t) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, t) P_n(c), \quad (3.34)$$

onde  $f^{(0)}(x, c, t)$  é a função de distribuição de equilíbrio local,  $C_n(x, t)$  são coeficientes dependentes da posição e do tempo e  $P_n(c)$  são polinômios ortonormais na velocidade

dos automóveis. A função de distribuição de equilíbrio local pode ser obtida através da maximização da entropia informacional do sistema. Para aplicarmos este método, precisamos de uma “informação” prévia do sistema que é a função de distribuição do estado homogêneo e estacionário. Este é o assunto da próxima seção.

## 3.6 Função de Distribuição de Equilíbrio

O conhecimento da função de distribuição de equilíbrio local faz-se necessário para a aplicação do método dos momentos de Grad. Para tanto, vamos inicialmente encontrar a função de distribuição do estado homogêneo e estacionário do problema e posteriormente, via maximização da entropia informacional associada ao sistema, calcularemos a função de distribuição de equilíbrio local.

### 3.6.1 Fluxo Uniforme e Estacionário

No estado homogêneo e estacionário, independentemente do ponto  $x$  da rodovia e do instante de tempo  $t$  considerados, o fluxo observado é o mesmo. Nestas condições a função de distribuição do estado homogêneo e estacionário denotada por  $f_e(c)$ , deve depender somente da velocidade. Isto implica que se tomarmos  $f(x, c, t) = f_e(c)$  na equação cinética (3.18), todos os termos do lado esquerdo, exceto o termo de derivada parcial em  $c$ , se anulam. Sendo assim, obtemos a seguinte equação cinética para o estado homogêneo e estacionário:

$$\frac{d}{dc} \left( f_e \frac{c_o(c) - c}{\tau} \right) = \rho_e (1 - \mathbf{p})(v_e - c) f_e, \quad (3.35)$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem facilmente integrável. A densidade e a velocidade veicular média são definidas para o estado homogêneo e

estacionário como

$$\rho_e = \int_0^\infty f_e(c)dc \quad \text{e} \quad v_e = \int_0^\infty c \frac{f_e(c)}{\rho_e} dc. \quad (3.36)$$

A solução da equação (3.35) é dada por

$$f_e(c) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho_e}{v_e} \left( \frac{\alpha c}{v_e} \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha c}{v_e}\right), \quad (3.37)$$

onde

$$\alpha = \frac{\rho_e(1 - \mathbf{p})v_e\tau}{w - 1} \quad (3.38)$$

é um parâmetro adimensional característico do estado homogêneo e estacionário sendo função do tempo de relaxação  $\tau$ , da probabilidade de ultrapassagem  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\rho_e)$ , do parâmetro  $w$  do modelo e das propriedades de equilíbrio do sistema através da densidade  $\rho_e$  e da velocidade média  $v_e$ . Além disso,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$$

denota a *função gama*.

A expressão (3.37) para a função de distribuição indica que, em um regime de fluxo veicular espacialmente homogêneo e temporalmente estacionário, a velocidade dos veículos é *gama distribuída* com *parâmetro de forma*  $\alpha$  e *parâmetro de taxa*  $\beta = \alpha/v_e$ . Afim de entendermos melhor o significado do parâmetro de forma  $\alpha$ , calculemos a *variância da velocidade*

$$\Theta(x, t) = \int_0^\infty (c - v(x, t))^2 \frac{f(x, c, t)}{\rho(x, t)} dc, \quad (3.39)$$

em um fluxo homogêneo e estacionário. Desta maneira temos:

$$\Theta_e = \frac{\int_0^\infty (c - v_e)^2 f_e(c) dc}{\int_0^\infty f_e(c) dc} = \frac{v_e^2}{\alpha}. \quad (3.40)$$

Da expressão acima se verifica que a variância da velocidade depende quadraticamente da velocidade média. Este fato corrobora para que identifiquemos o parâmetro de forma  $\alpha$  como sendo o inverso do pré-fator da variância da velocidade  $A = \Theta_e/v_e^2$ .

Sob a condição de fluxo homogêneo e estacionário, dados experimentais de fluxo de tráfego reportados por Shvetsov e Helbing [7] demonstraram que o pré-fator da variância é quase constante para baixas densidades ( $A \approx 0.08$ ), caso contrário o pré-fator pode ser modelado como uma função da densidade veicular. Neste trabalho tomaremos o pré-fator da variância como sendo uma constante que satisfaz a condição  $\alpha \gg 1$ , portanto o domínio de validade da teoria aqui construída está restrito a baixas densidades.

Com o exposto acima podemos nos perguntar se a relação para a velocidade desejada dos motoristas (3.20) é consistente com os dados experimentais contidos na literatura. Para responder a esta pergunta comparamos na figura (3.4) as previsões teóricas derivadas da função de distribuição de equilíbrio (3.37) com as funções de distribuição de velocidade determinadas por Phillips [8] em uma auto-estrada. A curva teórica, linha contínua, foi obtida a partir da expressão (3.37)

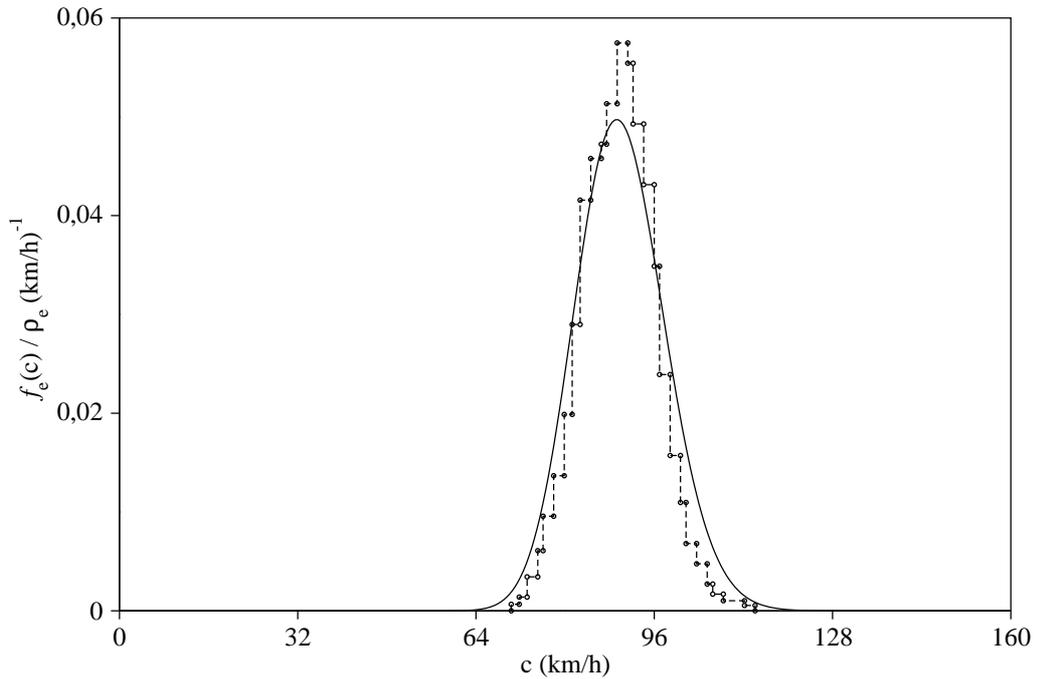


Figura 3.4: Função de distribuição de equilíbrio para  $\alpha = 125$ ,  $\rho_e = 20\text{veh/km}$  e  $v_e = v_e(\rho)$ .

com os parâmetros:  $\alpha = 125$ ,  $\rho_e = 20\text{veh/km}$  e  $v_e = v_e(\rho_e)$ , com a velocidade média

sendo função da densidade veicular de acordo com o diagrama fundamental. Para ser consistente com os dados experimentais obtidos por Phillips, utilizamos a seguinte relação funcional (diagrama fundamental) para a velocidade de equilíbrio:

$$v_e(\rho) = v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ 1 - \exp \left( r \left( \frac{\rho_{max}}{\rho} - 1 \right) \right) \right] \right\} \quad (3.41)$$

onde  $v_0 = 90\text{km/h}$  é a velocidade de fluxo livre,  $\rho_{max} = 150\text{veh/km}$  é a densidade máxima ou densidade de congestionamento e  $r = 0,53$  é um parâmetro de ajuste da curva. Verificamos por meio da comparação feita na figura 3.4 que a função de distribuição de velocidades descreve dados experimentais de maneira satisfatória. Isto reforça a validade da relação constitutiva (3.21) para a velocidade média desejada.

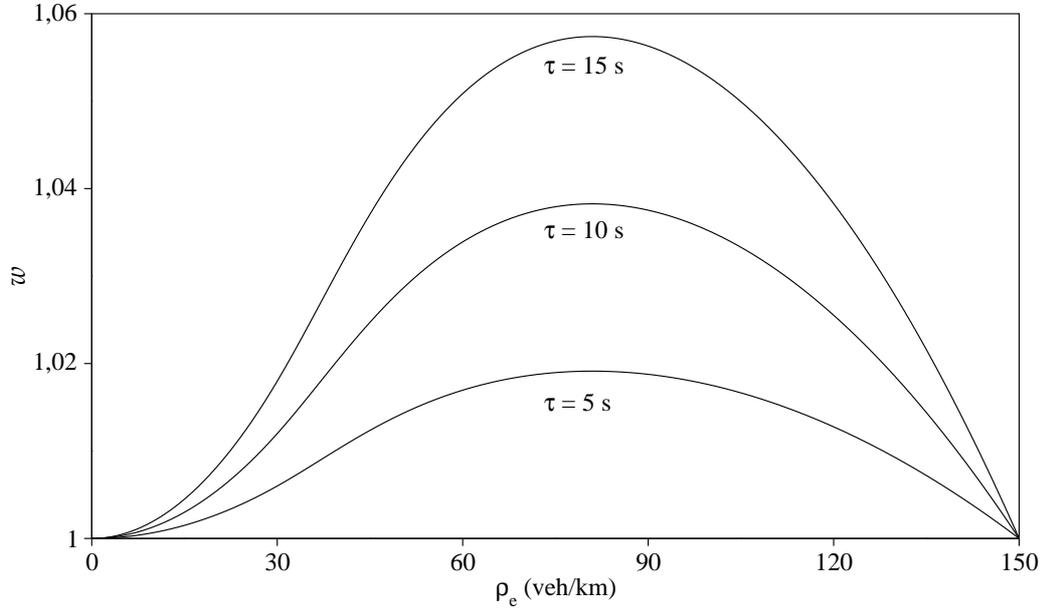


Figura 3.5: Parâmetro  $w$  do modelo como função da densidade de equilíbrio para três valores do tempo de relaxação  $\tau$  e  $\alpha = 125$ .

Podemos analisar ainda o comportamento do parâmetro  $w$  em função da densidade do estado homogêneo e estacionário por meio da relação

$$w = 1 + \frac{\rho_e(1 - \mathbf{p})v_e\tau}{\alpha}, \quad (3.42)$$

com  $v_e = v_e(\rho)$  dado pela expressão (3.41) e a probabilidade de ultrapassar  $\mathbf{p}$  dada por (3.10). Ao analisarmos as curvas da figura 3.5 vemos que  $w = 1$  para  $\rho_e = 0$  e

$\rho_e = \rho_{max}$ . Também se tem que  $w$  aumenta até um certo valor máximo  $w_{max}$  para um certo  $\rho_e$  crítico em torno de 85 veh/km para todos os valores de  $\tau$  apresentados. Uma vez que a teoria aqui desenvolvida é válida somente para baixas densidades, a curva representada na 3.5 para altos valores da densidade não é realista. Logo, a validade desta curva está restrita a pequenos valores de  $\rho$ .

### 3.6.2 Entropia Informacional

O conceito de entropia é de fundamental importância no desenvolvimento da física estatística e suas aplicações vão muito além da esfera da termodinâmica. Estamos interessados em aplicar este conceito para calcularmos a função de distribuição de equilíbrio local de nosso problema. Vamos utilizar o conceito de entropia informacional tal como definido por Shannon de forma similar a utilizada por Velasco e Marques Jr.[5] e Velasco e Méndez [9]. A *entropia informacional* do sistema é definida como

$$s(x, t) = - \int_0^{\infty} f^{(0)}(x, c, t) \ln \left( \frac{f^{(0)}(x, c, t)}{f_e(c)} \right) dc. \quad (3.43)$$

Tomando como vínculos as variáveis macroscópicas densidade  $\rho$  equação e velocidade média  $v$  equação, a aproximação de ordem zero para a função de distribuição de velocidades é obtida através da maximização da expressão (3.43). Note que  $\rho = \rho(x, t)$  e  $v = v(x, t)$ . Assim sendo, somos compelidos a montar o funcional da função de distribuição

$$\mathcal{F} = - \int_0^{\infty} (\ln f^{(0)}(x, c, t) - \ln f_e + \beta + \lambda c) f^{(0)}(x, c, t) dc, \quad (3.44)$$

em que  $\beta = \beta(x, t)$  e  $\lambda = \lambda(x, t)$  são os *multiplicadores de Lagrange*. Segue do procedimento de maximização que a função  $f^{(0)}$  deve satisfazer a condição

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f^{(0)}} = 0. \quad (3.45)$$

Tem-se, *ipso facto*

$$f^{(0)}(x, c, t) = f_e(c) \exp(-1 - \beta - \lambda c). \quad (3.46)$$

Os multiplicadores de Lagrange  $\beta$  e  $\lambda$  são determinados pela inserção da expressão (3.46) nos vínculos dados pelas equações (3.22) e (3.23). Logo

$$\lambda = \frac{\alpha}{v} \left( 1 - \frac{v}{v_e} \right) \quad \text{e} \quad \exp(1 + \beta) = \frac{\rho_e}{\rho} \left( \frac{v}{v_e} \right)^\alpha. \quad (3.47)$$

Com efeito, a função de distribuição de equilíbrio é

$$f^{(0)}(x, c, t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho}{v} \left( \frac{\alpha c}{v} \right)^{\alpha-1} \exp \left( - \frac{\alpha c}{v} \right). \quad (3.48)$$

## 3.7 Polinômios de Velocidade e Função de Distribuição

Como visto anteriormente, no método dos momentos de Grad, a função de distribuição de velocidades pode ser expandida em termos da função de distribuição de velocidades de ordem zero, de polinômios mutuamente ortogonais e seus respectivos coeficientes. Como a função de distribuição de equilíbrio local já foi determinada, resta agora determinar apenas os polinômios  $P_n(c)$  e os coeficientes  $C_n(x, t)$  para completar a determinação da função de distribuição  $f(x, c, t)$ .

### 3.7.1 Polinômios de Velocidade

Valendo-se do fato de que no equilíbrio local a velocidade é gama-distribuída, faz-se possível construir polinômios ortonormais na velocidade instantânea

$$P_n(s) = a_0^n + a_1^n s + a_2^n s^2 + \cdots + a_n^n s^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.49)$$

por meio da condição de ortonormalidade

$$\int_0^\infty \phi(s) P_n(s) P_m(s) ds = \delta_{nm}, \quad (3.50)$$

onde  $s = \alpha c/v$  é a *velocidade instantânea adimensional* e

$$\phi(s) = \frac{s^{\alpha-1}e^{-s}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.51)$$

é a *densidade de probabilidade da distribuição gama*. A substituição da expansão (3.49) na condição de ortonormalidade (3.50) nos permite determinar as constantes  $a_n^m$ :

$$a_0^0 = 1, \quad (3.52)$$

$$a_0^1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad (3.53)$$

$$a_0^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \quad (3.54)$$

$$a_0^3 = -\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \quad (3.55)$$

$$a_1^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad (3.56)$$

$$a_1^2 = -\frac{2(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \quad (3.57)$$

$$a_1^3 = \frac{3(\alpha+1)(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \quad (3.58)$$

$$a_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \quad (3.59)$$

$$a_2^3 = \frac{3(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \quad (3.60)$$

$$a_3^3 = \frac{1}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}. \quad (3.61)$$

Com base nas equações acima vemos que os primeiros polinômios são dados por

$$P_0(s) = 1, \quad (3.62)$$

$$P_1(s) = \frac{s - \alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad (3.63)$$

$$P_2(s) = \frac{s^2 - 2(\alpha+1)s + \alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \quad (3.64)$$

$$P_3(s) = \frac{s^3 - 3(\alpha+2)s^2 + 3(\alpha)(\alpha+2)s - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}. \quad (3.65)$$

Note que estes polinômios estão relacionados com os *polinômios associados de Laguerre*, e satisfazem a seguinte relação de recorrência [1], [10]

$$P_n(s) = \frac{(-1)^n}{s^{\alpha-1}e^{-s}} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{n!\Gamma(\alpha+n)}} \frac{d^n}{ds^n} (s^{n+\alpha-1}e^{-s}). \quad (3.66)$$

Utilizando a relação de ortonormalidade (3.50) podemos determinar agora os coeficientes  $C_n = C_n(x, t)$  da seguinte forma

$$\int_0^\infty P_n(c) f(x, c, t) dc = \rho \sum_{m=0}^\infty C_m \int_0^\infty \phi(s) P_n(s) P_m(s) ds = \rho C_n. \quad (3.67)$$

Frente à equação (3.67) coligimos que os coeficientes  $C_n$  estão diretamente relacionados aos momentos da função de distribuição. Os primeiros quatro coeficientes são

$$C_0 = 1, \quad (3.68)$$

$$C_1 = 0, \quad (3.69)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi_0}, \quad (3.70)$$

$$C_3 = \sqrt{\frac{2\alpha}{3(\alpha+1)(\alpha+2)}} \left( \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0} - 3 \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi_0} \right), \quad (3.71)$$

onde

$$\varpi_0(x, t) = \int_0^\infty (c-v)^2 f^{(0)}(x, c, t) dc = \frac{\rho v^2}{\alpha}, \quad (3.72)$$

$$\phi_0(x, t) = \int_0^\infty (c-v)^3 f^{(0)}(x, c, t) dc = 2 \frac{\rho v^3}{\alpha}. \quad (3.73)$$

### 3.7.2 Modelo Contínuo de Terceira Ordem

Com as informações da seção anterior em mãos segue que é possível escrever a função de distribuição (3.34) em termos dos polinômios  $P_n(c)$  e das variáveis macroscópicas de tráfego contidas nos coeficientes  $C_n(x, t)$ . Frisa-se o fato de que cada coeficiente acrescenta uma nova variável macroscópica de tráfego na expansão (3.34). Como a precisão da expansão depende do número de termos tomados

podemos, dependendo do grau de acurácia desejado, escolher quais são as variáveis macroscópicas relevantes à descrição do sistema. Com isto em mente, construiremos um modelo contínuo baseado nas três variáveis de tráfego escolhidas que são: a densidade veicular  $\rho$ , a velocidade veicular média  $v$  e a pressão de tráfego  $\varpi$ .

As equações de balanço que governam a evolução espaço-temporal destas variáveis são a equação da continuidade (3.24), a equação da velocidade (3.25) e a equação da pressão de tráfego abaixo

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varpi v + \phi) + 2\varpi \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{w-1}{\tau} = -\rho(1-p)\phi, \quad (3.74)$$

em que

$$\phi(x, t) = m_3(x, t) = \int_0^\infty (c-v)^3 f(x, c, t) dc \quad (3.75)$$

é o *momento central de terceira ordem*. Note que o sistema constituído pelas equações (3.24), (3.25) e (3.74) não é fechado, pois além das três variáveis de tráfego escolhidas previamente, identifica-se uma quarta variável dada pela equação (3.75). Para tornar este sistema fechado deve-se então expressar o momento de terceira ordem em termos dos campos básicos  $\rho$ ,  $v$  e  $\varpi$ . Para tanto, a expansão da função de distribuição é tomada com  $C_n(x, t) = 0$  para  $n \geq 3$ . Sendo assim, segue que a função de distribuição de velocidades é dada por

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2(\alpha+1)s + \alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+1)} \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi_0} \right\}. \quad (3.76)$$

Inserindo a função de distribuição (3.76) na definição do momento de terceira ordem (3.75) e perfazendo a integração obtém-se a seguinte relação constitutiva para o momento central de terceira ordem

$$\phi = 3 \frac{\phi_0}{\varpi_0} \left( \varpi - \frac{2}{3} \varpi_0 \right). \quad (3.77)$$

Introduzindo a relação constitutiva (3.77) na equação para o balanço de pressão de tráfego (3.74) obtemos finalmente um sistema fechado de equações para os campos  $\rho$ ,  $v$  e  $\varpi$  ou, de forma equivalente, para  $\rho$ ,  $v$  e  $\hat{\varpi}$ , onde  $\hat{\varpi} = (\varpi - \varpi_0)/\varpi_0$  é o *deviante adimensional da pressão de tráfego*. Desconsiderando termos não lineares

em  $\hat{\omega}$ ,  $\partial\rho/\partial x$ ,  $\partial v/\partial x$  e seus gradientes espaciais, obtemos o seguinte sistema linear de equações de campo:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (3.78)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\varpi_0}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\varpi_0}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \varpi_0 \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} - \rho \frac{\gamma - 1}{\tau} v = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\rho v}{\tau_0} (1 + \hat{\omega}), \quad (3.79)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} + 2 \frac{\phi_0}{\varpi_0} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + 2 \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\hat{\omega}}{\tau_0}, \quad (3.80)$$

onde o *tempo médio de interação veicular*  $\tau_0$  é definido da seguinte forma

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{(1 - \mathbf{p})}{\rho} \int_0^\infty f(x, c, t) dc \int_0^c (c - c') f(x, c', t) dc' \quad (3.81)$$

$$\approx \frac{(1 - \mathbf{p})}{\rho} \int_0^\infty f^{(0)}(x, c, t) dc \int_0^c (c - c') f^{(0)}(x, c', t) dc' = \frac{\rho(1 - \mathbf{p})v}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}. \quad (3.82)$$

### 3.8 Equações de Tráfego tipo Navier-Stokes

Tal como em teoria cinética dos gases é possível converter a equação de balanço (3.80) em uma relação constitutiva para a pressão de tráfego  $\varpi$  por meio de um método iterativo. Na primeira iteração se insere, no lado esquerdo da equação (3.80), o valor de equilíbrio local  $\hat{\omega} = 0$  obtendo-se assim, no lado direito da equação em questão, o primeiro valor iterado para a pressão de tráfego. Levando a cabo o descrito, acarreta:

$$\hat{\omega} = -\tau_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.83)$$

ou

$$\varpi = \varpi_0 - \frac{\rho v^2 \tau_0}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.84)$$

Há que se chamar a atenção do leitor para o fato de a relação constitutiva (3.84) para a pressão de tráfego possuir uma forma similar à relação de Navier-Stokes para fluidos viscosos uma vez que, em estados fora do equilíbrio, ambas as relações dependem

do gradiente de velocidade. Baseado nesta similaridade, definimos o *coeficiente de viscosidade veicular*

$$\mu_0 = \frac{\rho v^2 \tau_0}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha + 1}{\alpha}}, \quad (3.85)$$

que depende da densidade veicular  $\rho$  e velocidade veicular média  $v$ . Uma relação similar à relação constitutiva para a pressão de tráfego acima foi derivada por Velasco e Marques Jr. [5] através de uma versão simplificada do método de Chapman-Enskog aplicado à equação de tráfego reduzida de Paveri-Fontana. No formalismo deles, o tempo de relaxação coletivo  $\tau_0$  aparece como um parâmetro livre, da ordem do tempo médio de interação veicular, tendo sido introduzido por meio de uma aproximação realizada no termo de interação.

A inserção da relação constitutiva (3.84) nas equações de balanço (3.24) e (3.25) conduz a um modelo viscoso de segunda ordem que pode ser escrito em forma matricial

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (3.86)$$

em que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{c_0^2}{\rho} & v + \frac{\mathcal{B}_0}{\rho} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_0 - v}{\tau} + \frac{(\mu_0 v_x)_x}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Aqui se introduziu, em analogia com a teoria cinética dos gases, a *velocidade "sonora" de tráfego*

$$c_0 = \sqrt{\frac{\partial \varpi_0}{\partial \rho}}, \quad (3.88)$$

a *função velocidade otimizada*

$$v_0 = wv - \tau(1 - \mathbf{p})\varpi_0 \quad (3.89)$$

e o *coeficiente de antecipação*

$$\mathcal{B}_0 = -\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) \frac{\partial \varpi_0}{\partial v} < 0. \quad (3.90)$$

Diferentemente de outros modelos de tráfego macroscópicos, vemos que a função de velocidade ótima não depende apenas da densidade veicular mas também da velocidade média. Esta dependência é explicitamente determinada pela velocidade média desejada dos veículos e é reduzida por um termo proveniente do processo de desaceleração devido à interação entre os automóveis. Outro ponto importante a ser explicitado é o fato de a viscosidade surgir naturalmente em nosso modelo. Decorrendo do procedimento iterativo, como consequência do formalismo por nós empregado e não inserida adrede, a viscosidade reflete a maneira pela qual motoristas antecipam situações de tráfego via mudanças nos gradientes espaciais de segunda ordem da velocidade média.

Encerrando esta seção lembramos o fato de os autovalores  $\lambda$  da matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  determinam como distúrbios no tráfego são transmitidos no fluxo veicular. Estes autovalores, também conhecidos como *velocidades características*, são determinados pela condição

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \quad (3.91)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Calculando o determinante e resolvendo a equação de segundo grau em  $\lambda$  obtemos duas velocidades características:

$$\lambda_1 = v + \frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} - \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho}\right)^2 + c_0^2} < v \quad \text{e} \quad \lambda_2 = v + \frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho}\right)^2 + c_0^2} > v. \quad (3.92)$$

Sendo  $\mathcal{B}_0 < 0$ , como mostrado na equação 3.90, segue dos cálculos acima que uma das soluções se propaga com velocidade *maior* que a velocidade média de fluxo de tráfego indicando que os distúrbios se propagam na direção oposta ao fluxo veicular. Este fato tem sido muito criticado por Daganzo [11] como uma grande incompatibilidade dos modelos macroscópicos de segunda ordem para o tráfego veicular. Contudo, como será mostrado no capítulo 5, a perturbação que se move mais depressa é rapidamente atenuada não sendo assim observada.

# Capítulo 4

## Teoria Cinética para Veículos Extensos

A fim de estender o domínio de validade da teoria desenvolvida, de veículos pontuais para veículos extensos, nos valeremos dos mesmos métodos utilizados no capítulo 3. Começaremos com a correção da equação cinética e culminaremos com as equações para os campos de tráfego, sendo que os passos intermediários vêm no encaixe do capítulo 3.

### 4.1 Equação Cinética tipo Enskog

Em regimes de moderada densidade de fluxo veicular os automóveis não podem ser tomados como objetos pontuais no sentido geométrico da palavra, mas como objetos espacialmente extensos com comprimento médio  $a = n/\rho_{max}$ , onde  $n$  denota o número de faixas de rodagem. Neste trabalho iremos considerar  $n = 1$ , ou seja, nossa rodovia apresenta apenas uma faixa de rodagem. Devido à extensão espacial dos veículos ser agora levada em consideração, duas modificações na equação

cinética (3.18) devem ser feitas [12], [13]. São elas:

1. Como o comprimento dos veículos é comparável à distância média entre eles, a posição do centro dos automóveis é reduzida e então a frequência de interação é aumentada por um fator  $\chi(x, t) = 1/(1 - \rho(x, t)a)$  dependente da densidade local;
2. A posição  $x$  de dois veículos interagentes no termo de colisão deve ser trocada pela posição real de seus centros, portanto a “seção de choque”  $\sigma = \chi(1 - \rho)$  deve ser avaliada na posição de interação  $x + a/2$ .

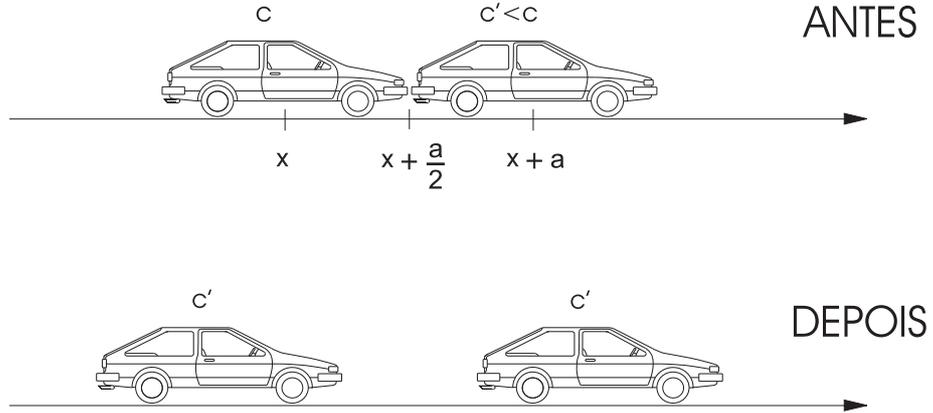


Figura 4.1: Ilustração da interação binária entre automóveis que destrói pontos no espaço de fase. Note que a interação ocorre em  $x + a/2$ .

Levando a cabo estas modificações, a equação cinética torna-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( f \frac{w-1}{\tau} c \right) = \mathcal{Q}(f, f), \quad (4.1)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, f) = & \int_c^\infty \sigma(x + a/2)(c' - c) f(x + a, c, t) f(x, c', t) dc' \\ & - \int_0^c \sigma(x + a/2)(c - c') f(x, c, t) f(x + a, c', t) dc'. \end{aligned} \quad (4.2)$$

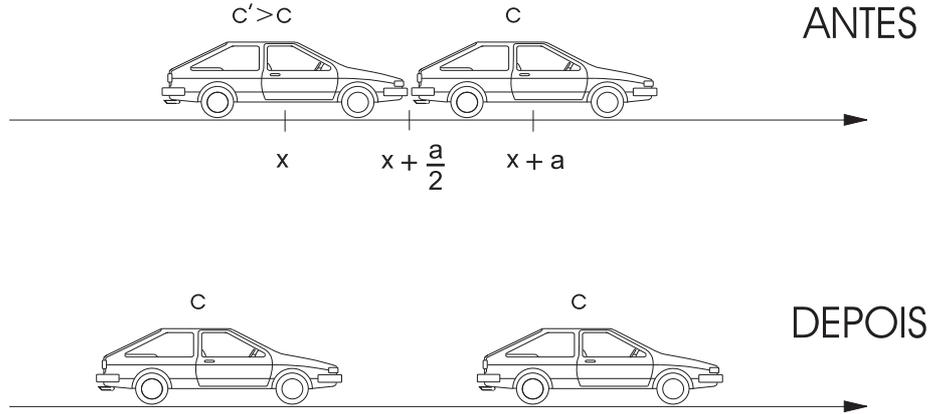


Figura 4.2: Ilustração da interação binária entre automóveis que cria pontos no espaço de fase. Note que a interação ocorre em  $x + a/2$ .

Para facilitar o tratamento matemático, o lado direito da equação cinética pode ser aproximado por meio de uma expansão em série de Taylor em torno da posição  $x$  da rodovia. Levando em conta somente termos até segunda ordem têm-se, para a função de distribuição e para a “seção de choque” as seguintes expressões:

$$f(x + a, c, t) \approx f(x, c, t) + a \frac{\partial f(x, c, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, c, t)}{\partial x^2} + \dots, \quad (4.3)$$

$$f(x + a, c', t) \approx f(x, c', t) + a \frac{\partial f(x, c', t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, c', t)}{\partial x^2} + \dots, \quad (4.4)$$

$$\sigma\left(x + \frac{a}{2}\right) \approx \sigma(x) + \frac{a}{2} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} + \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2 \sigma(x)}{\partial x^2} + \dots. \quad (4.5)$$

Inserindo as expressões (4.3), (4.4) e (4.5) na equação (4.2) obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{w-1}{\tau} c \right) = \mathcal{Q}^{(0)}(f, f) + \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) + \mathcal{Q}^{(2)}(f, f). \quad (4.6)$$

Em que

$$\mathcal{Q}^{(0)}(f,f) = \int_0^\infty \sigma(c' - c) f f' dc', \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(1)}(f,f) &= a \int_c^\infty \sigma(c' - c) f' f_x dc' - a \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \\ &\quad + \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma_x(c' - c) f f' dc', \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(2)}(f,f) &= \frac{a^2}{2} \int_c^\infty \sigma(c' - c) f' f_{xx} dc' - \frac{a^2}{2} \int_0^c \sigma(c - c') f f'_{xx} dc' \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \int_c^\infty \sigma_x(c' - c) f' f_x dc' - \frac{a^2}{2} \int_0^c \sigma_x(c - c') f f'_x dc' \\ &\quad + \frac{a^2}{8} \int_0^\infty \sigma_{xx}(c' - c) f f' dc', \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde os índices  $x$  e  $xx$  denotam as derivadas primeira e segunda respectivamente, e ainda

$$f \equiv f(x, c, t) \quad \text{e} \quad f' \equiv f(x, c', t). \quad (4.10)$$

Há que se notar que a função de distribuição e a “seção de choque” são avaliadas no ponto  $x$  e que  $\mathcal{Q}^{(0)}(f,f)$  com  $\chi = 1$  é o termo de interação da equação cinética para tráfego diluído. Logo, os termos  $\mathcal{Q}^{(1)}(f,f)$  e  $\mathcal{Q}^{(2)}(f,f)$ , dependentes do primeiro e do segundo gradiente respectivamente, representam correções na equação cinética em virtude do adensamento do “gás de veículos”. É óbvio que quão maior for o número de termos pegos nas expressões (4.3), (4.4) e (4.5) maior será a precisão da teoria. Contudo, o custo matemático também aumenta, visto que gradientes de ordem igual ou superior a 3 são contabilizados, tornando os cálculos mais laboriosos.

### 4.1.1 Equação de Transferência para o Tráfego Denso

Exatamente como exposto anteriormente, uma equação de transferência é obtida pela multiplicação da equação cinética (4.6) por uma função arbitrária  $\psi = \psi(x, c, t)$  e integração sobre todas as velocidades instantâneas dos automóveis. De fato, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \psi f dc + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \psi c f dc - \int_0^\infty \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dc}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial c} \right) f dc = \\ \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(0)}(f, f) dc + \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) dc + \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(2)}(f, f) dc. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para prosseguirmos nos cálculos, transformaremos os gradientes da “seção de choque” em gradientes de integrais. Primeiramente vamos considerar o termo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) dc = a \int_0^\infty \psi dc \int_c^\infty \sigma(c' - c) f f'_x dc' - a \int_0^\infty \psi dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \\ + \frac{a}{2} \int_0^\infty \psi dc \int_0^\infty \sigma_x(c' - c) f f' dc'. \end{aligned}$$

No primeiro termo do lado direito da equação acima, podemos trocar as variáveis de integração de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) dc = a \int_0^\infty \psi' dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' - a \int_0^\infty \psi dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \\ + \frac{a}{2} \int_0^\infty \psi dc \int_0^\infty \sigma_x(c' - c) f f' dc', \\ \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) dc = a \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' + \frac{a}{2} \int_0^\infty \psi dc \int_0^\infty \sigma_x(c' - c) f f' dc', \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\psi = \psi(x, c, t)$  e  $\psi' = \psi(x, c', t)$ . O termo:

$$\int_0^\infty \psi dc \int_0^\infty \sigma_x(c' - c) f f' dc', \quad (4.13)$$

pode ser reescrito como

$$\int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma_x(c - c') f f' dc'. \quad (4.14)$$

Substituindo a relação acima na equação (4.12) e eliminando o gradiente da “seção de choque”  $\sigma_x$  obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(1)}(f, f) dc = \frac{a}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f' dc' \right] \right. \\ \left. - \int_0^\infty (\psi'_x - \psi_x) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f' dc' - \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f_x f' dc' \right. \\ \left. + \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De forma inteiramente análoga, obtém-se [13]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi \mathcal{Q}^{(2)}(f, f) dc &= \frac{a^2}{8} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f' dc' \right] \right. \\
&+ \int_0^\infty (\psi'_{xx} - \psi_{xx}) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f' dc' + \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f_{xx} f' dc' \\
&+ \left. \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_{xx} dc' \right\} \\
&- \frac{a^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^\infty (\psi'_x - \psi_x) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f' dc' + \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f_x f' dc' \right. \\
&- \left. \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \right] \\
&- \frac{a^2}{4} \left[ \int_0^\infty (\psi' - \psi) dc \int_0^c \sigma(c - c') f_x f'_x dc' - \int_0^\infty (\psi'_x - \psi_x) dc \int_0^c \sigma(c - c') f_x f' dc' \right. \\
&+ \left. \int_0^\infty (\psi'_x - \psi_x) dc \int_0^c \sigma(c - c') f f'_x dc' \right]. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.15) e (4.16) em (4.11) e reagrupando os termos obtemos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}) - \mathcal{R} = \mathcal{P}^{(0)} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} \tag{4.17}$$

em que

$$\Psi = \int_0^\infty \psi f dc, \tag{4.18}$$

$$\Phi^{(0)} = \int_0^\infty c \psi f dc, \tag{4.19}$$

$$\Phi^{(1)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c (\psi - \psi')(c - c') f' dc', \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)} &= \frac{a^2}{4} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left[ (\psi' - \psi) \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) + (\psi'_x - \psi_x) \right] (c - c') f' dc' \\
&- \frac{a^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c (\psi' - \psi)(c' - c) f' dc', \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \frac{w - 1}{\tau} \int_0^\infty c \frac{\partial \psi}{\partial c} f dc, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{P}^{(0)} = \int_0^\infty \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f dc + \int_0^\infty \sigma \psi f dc \int_0^\infty (c' - c) f' dc', \tag{4.23}$$

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left[ (\psi - \psi') \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) + (\psi_x - \psi'_x) \right] (c - c') f' dc', \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)} = & \frac{a^2}{4} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left[ (\psi'_x - \psi_x) \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) - (\psi' - \psi) \frac{f_x f'_x}{f f'} \right] (c - c') f' dc' \\ & + \frac{a^2}{8} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left[ (\psi'_{xx} - \psi_{xx}) + (\psi' - \psi) \left( \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f'_{xx}}{f'} \right) \right] (c - c') f' dc'. \end{aligned} \quad (4.25)$$

## 4.2 Modelo Contínuo de Terceira Ordem

O modelo contínuo de terceira ordem para o tráfego veicular caracteriza-se por três variáveis, a saber: a densidade veicular  $\rho$ , a velocidade veicular média  $v$  e a pressão de tráfego  $\varpi$ . Em regimes de altas densidades a dinâmica destas variáveis é governada por equações de balanço derivadas da equação (4.17). Por último, como estamos interessados em relações constitutivas lineares e de primeira ordem em gradientes, termos não-lineares e termos de segunda ordem serão desprezados nesta seção.

Escolhendo  $\psi = 1$  em (4.17) obtemos novamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \quad (4.26)$$

a *equação da continuidade*. Mais uma vez vale lembrar que, como não foram contabilizados fontes tampouco sorvedouros de automóveis, a equação acima continua de acordo com as considerações feitas. Notemos também que não há menção da dimensão dos veículos nesta equação pois ela só reflete o fato de existir conservação do número de automóveis.

Escolhendo  $\psi = c$  em (4.17) obtemos a *equação para o balanço de velocidade* ou simplesmente *equação da velocidade*

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + \varpi + \varpi^{(i)}) - \rho \frac{w-1}{\tau} v = -\rho \sigma \varpi + \Lambda_i^{(i)}, \quad (4.27)$$

com

$$\varpi^{(i)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c (c - c')^2 f' dc', \quad (4.28)$$

$$\Lambda_i^{(i)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) (c - c')^2 f' dc'. \quad (4.29)$$

Note que as equações da velocidade para o fluxo veicular diluído (3.25) e para o fluxo denso de veículos (4.27) diferem pelas quantidades  $\varpi^{(i)}$  e  $\Lambda_i^{(i)}$ . Estas quantidades refletem o adensamento do fluxo de veículos por conterem o comprimento médio dos automóveis em suas respectivas expressões.

Tomando  $\psi = (c - v)^2$  na equação (4.27) chegamos na equação da *pressão de tráfego*

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varpi v + \phi + \phi^{(i)}) + 2(\varpi + \varpi^{(i)})\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{w-1}{\tau}\varpi = -\rho\sigma\phi + \Lambda_2^{(i)}, \quad (4.30)$$

com

$$\phi^{(i)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c (c + c' - 2v)(c - c')^2 f' dc', \quad (4.31)$$

$$\Lambda_2^{(i)} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) (c + c' - 2v)(c - c')^2 f' dc'. \quad (4.32)$$

Os termos  $\varpi^{(i)}$ ,  $\phi^{(i)}$ ,  $\Lambda_i^{(i)}$  e  $\Lambda_2^{(i)}$  são os termos constitutivos que precisam ser expressos em termos de  $\rho$ ,  $v$  e  $\varpi$  sendo que uma vez expressos desta forma, o sistema de equações torna-se fechado. Como ilustração, calculemos o termo  $\varpi^{(i)}$ . Inserindo (3.76) em (4.28) e negligenciando termos quadráticos em  $\hat{\varpi} = (\varpi - \varpi_0)/\varpi_0$  temos:

$$\begin{aligned} \varpi^{(i)} &= \frac{\rho b \sigma}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{\rho v^2}{\alpha} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds \times \\ &\times \int_0^s \left\{ 1 + \frac{\hat{\varpi}}{2(\alpha+1)} [s^2 + u^2 - 2(\alpha+1)(s+u) + 2\alpha(\alpha+1)] \right\} (s-u)^2 u^{\alpha-1} e^{-u} du. \end{aligned}$$

onde  $s = \alpha c/v$  e  $u = \alpha c'/v$ . Por meio das integrais definidas no apêndice A.5 escrevemos

$$\begin{aligned} \varpi^{(i)} &= \frac{\rho b \sigma}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{\rho v^2}{\alpha} \left\{ \mathcal{J}[1] + \frac{\hat{\varpi}}{2(\alpha+1)} [\mathcal{J}[s^2] + \mathcal{J}[u^2]] \right. \\ &\quad \left. - 2(\alpha+1)(\mathcal{J}[s] + \mathcal{J}[u]) + 2\alpha(\alpha+1)\mathcal{J}[1] \right\}. \end{aligned}$$

E finalmente obtemos:

$$\varpi^{(i)} = \rho b \sigma \varpi, \quad (4.33)$$

onde  $b = a/2$  denomina-se *comprimento de exclusão*, ou seja, o comprimento que *não pode* ser ocupado pelo centro de um veículo durante uma interação binária.

De maneira análoga calculam-se os demais termos. São eles:

$$\phi^{(i)} = 3 \frac{\phi_0}{\varpi_0} \rho b \sigma \left( \varpi - \frac{2}{3} \varpi_0 \right), \quad (4.34)$$

$$\Lambda_1^{(i)} = 2 \frac{\varpi_0}{v} \rho b \sigma (1 - u_1) \frac{\partial v}{\partial x} + \varpi_0 \rho b \sigma (1 - u_2) \frac{\partial \hat{\varpi}}{\partial x}, \quad (4.35)$$

$$\Lambda_2^{(i)} = 3 \frac{\phi_0}{v} \rho b \sigma (1 - u_1) \frac{\partial v}{\partial x} + \phi_0 \rho b \sigma (\alpha + 3) (1 - u_2) \frac{\partial \hat{\varpi}}{\partial x}, \quad (4.36)$$

em que

$$u_1 = 1 - \frac{(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1)} \quad \text{e} \quad u_2 = 1 - \frac{(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 2)}. \quad (4.37)$$

### 4.3 Modelo Contínuo de Segunda Ordem

Agora vamos construir um modelo contínuo de segunda ordem para o tráfego veicular que leva em conta a dimensão dos veículos e é também compatível com a aproximação de Navier-Stokes para fluidos ordinários. Neste caso, a pressão de tráfego não é mais uma variável e deve ser expressada em termos da densidade veicular e da velocidade veicular média por meio da equação de transferência geral (4.17). No entanto, para manter a consistência com a aproximação de Navier-Stokes, devemos considerar termos de segunda ordem na equação de transferência (4.17). Deste modo temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + \varpi + \varpi^{(i)} + \varpi^{(2)}) - \rho \frac{\gamma - 1}{\tau} v = -\rho \sigma \varpi + \Lambda_1^{(i)} + \Lambda_1^{(2)}, \quad (4.39)$$

em que

$$\varpi^{(2)} = -\frac{a^2}{4} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c \left( \frac{f_x}{f} - \frac{f'_x}{f'} \right) (c - c')^2 f' dc' + \frac{a^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^c (c - c')^2 f' dc' \quad (4.40)$$

e

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{a^2}{4} \int_0^\infty \sigma f_x dc \int_0^c (c - c')^2 f'_x dc' - \frac{a^2}{8} \int_0^\infty \sigma f dc \int_0^\infty \left( \frac{f_{xx}}{f} + \frac{f'_{xx}}{f'} \right) (c - c')^2 f' dc'. \quad (4.41)$$

Inspecionando as equações (4.38) e (4.39) vemos que, para tornar o sistema de equações fechado,  $\varpi$ ,  $\varpi^{(i)}$ ,  $\varpi^{(2)}$ ,  $\Lambda_i^{(i)}$  e  $\Lambda_i^{(2)}$  são as relações constitutivas de nosso modelo contínuo de segunda ordem para veículos extensos. Tendo em vista que nosso objetivo é a derivação de equações de tráfego macroscópicas, o cálculo das quantidades  $\varpi^{(2)}$  e  $\Lambda_i^{(2)}$  se dá pela inserção dos valores de equilíbrio local da função de distribuição (3.48) nas expressões (4.40) e (4.41). Após a integração (ver apêndices A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5) temos:

$$\varpi^{(2)} = -\frac{\varpi_0}{v} \rho b^2 \sigma (1 - 2u_i) \frac{\partial v}{\partial x} + \varpi_0 b^2 \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (4.42)$$

e

$$\Lambda_i^{(2)} = -\rho b^2 \sigma \left( \frac{\varpi_0}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\varpi_0}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \quad (4.43)$$

As expressões (4.33) e (4.35) mostram que as quantidades  $\varpi^{(i)}$  e  $\Lambda_i^{(i)}$  são funções conhecidas de  $\rho$ ,  $v$  e  $\varpi$  logo, precisamos apenas calcular  $\hat{\varpi}$  como função de  $\rho$  e  $v$ . Para tanto, primeiro utilizaremos as equações do modelo de terceira ordem para os campos de tráfego para derivar a seguinte equação linear para o deviante adimensional da pressão de tráfego

$$\frac{d\hat{\varpi}}{dt} + 2 \frac{\phi_0}{\varpi_0} \left( 1 + \rho b \sigma \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \frac{\partial \hat{\varpi}}{\partial x} + 2 \frac{\alpha + 1}{\alpha} (1 + \rho b \sigma u_2) \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{\chi}{\tau_0} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \hat{\varpi}. \quad (4.44)$$

Com a equação acima em mãos, vamos agora transformá-la em uma relação constitutiva de primeira ordem por meio de um método iterativo tal como visto na seção 3.8. Para a primeira iteração insere-se, no lado esquerdo da equação (4.44), o valor de equilíbrio  $\hat{\varpi} = 0$  e obtemos para o lado direito o primeiro valor iterado da pressão de tráfego. Assim temos

$$\varpi = \varpi_0 - (1 + \rho b \sigma u_2) \frac{\mu_0}{\chi} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.45)$$

Inserindo a relação constitutiva acima nas equações (4.33) e (4.35) temos

$$\varpi^{(i)} = \rho b \sigma \varpi = \rho b \sigma \varpi_0 - \rho b \sigma (1 + \rho b \sigma u_2) \frac{\mu_0}{\chi} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.46)$$

$$\Lambda_1^{(i)} = 2\rho b\sigma(1 - 2u_1)\frac{\varpi_0}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \rho b\sigma(1 - u_2)(1 + \rho b\sigma u_2)\frac{\mu_0}{\chi}\frac{\partial \hat{\varpi}}{\partial x}. \quad (4.47)$$

Com isso, obtemos o seguinte modelo macroscópico de segunda ordem para veículos extensos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(v + \frac{\mathcal{B}}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_0 - v}{\tau} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (4.49)$$

em que se nota o novo termo, em relação ao caso de veículos pontuais,  $\eta\partial_x^2\rho$ . Helbing [16] obteve equações semelhantes partindo de uma função de distribuição de equilíbrio tipo Maxwelliana e considerando que a interação entre os veículos se dá a uma distância chamada de distância de segurança  $s$ . Podemos obter as equações que Helbing obteve considerando  $\alpha \gg 1$  em nosso modelo e a distância de segurança  $s = 0$  no modelo por ele derivado. Esta consonância entre nosso modelo e o modelo de Helbing valida nosso procedimento para calcularmos a função de distribuição, uma vez que a forma da função de distribuição que Helbing utilizou difere da nossa.

Em forma matricial escrevemos o sistema

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (4.50)$$

em que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & v + \frac{\mathcal{B}}{\rho} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_0 - v}{\tau} + \frac{\mu v_{xx}}{\rho} - \eta \rho_{xx} \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Novamente, em analogia com a teoria cinética dos gases, temos a *velocidade “sonora” de tráfego*

$$c = \sqrt{\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}}, \quad (4.52)$$

a *função de velocidade ótima*

$$v_0 = wv - \sigma\tau\varpi_0, \quad (4.53)$$

o coeficiente de antecipação

$$\mathcal{B} = -\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) \frac{\partial \Pi}{\partial v} < 0, \quad (4.54)$$

a pressão total de tráfego de equilíbrio

$$\Pi = \varpi_0(1 + \rho b \sigma), \quad (4.55)$$

o coeficiente de viscosidade

$$\mu = \frac{\mu_0}{\chi} \left\{ 1 + 2\mathbf{u}_2 \rho b \sigma + \left[ \frac{2\alpha}{\alpha + 1} - (2 - \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \right] \rho^2 b^2 \sigma^2 \right\} \quad (4.56)$$

e

$$\eta = \frac{\mu_0}{\rho \chi} \frac{\phi_0}{\varpi_0} \left( 1 + \frac{\rho}{4} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \rho} \right) \rho^2 b^2 \sigma^2. \quad (4.57)$$

A fim de simplificar os cálculos, podemos reescrever a expressão da viscosidade 4.56 tomando  $\alpha \gg 1$  obtendo então

$$\mu = \frac{\mu_0}{\chi} \left( 1 + \frac{9}{5} \rho b \sigma + \rho^2 b^2 \sigma^2 \right). \quad (4.58)$$

Como esperado, note que quando  $b = 0$  tem-se  $\chi = 1$  e, portanto obtemos a expressão da viscosidade para o tráfego diluído.

Como no lado direito da equação (4.58) se vê o coeficiente de viscosidade para o tráfego diluído  $\mu_0$  multiplicado por correções devido ao adensamento dos veículos podemos, visando um melhor entendimento do efeito de adensamento, computar a razão  $\mu/\mu_0$ . Na figura 4.3 a curva mostra que quando  $\rho b$  é zero a razão  $\mu/\mu_0=1$  e a medida que o valor  $\rho b$  aumenta, a razão  $\mu/\mu_0$  aumenta. Isto nos dá uma idéia mais clara de como as correções na equação (4.58) influenciam na viscosidade.

Analogamente à seção 3.8, o que diferencia nosso modelo contínuo de segunda ordem de outros modelos macroscópicos para o fluxo veicular é o fato da função de velocidade ótima não depender apenas da densidade veicular, mas também da velocidade média. Esta é explicitamente determinada pela velocidade média desejada dos veículos e é reduzida por um termo proveniente do processo de

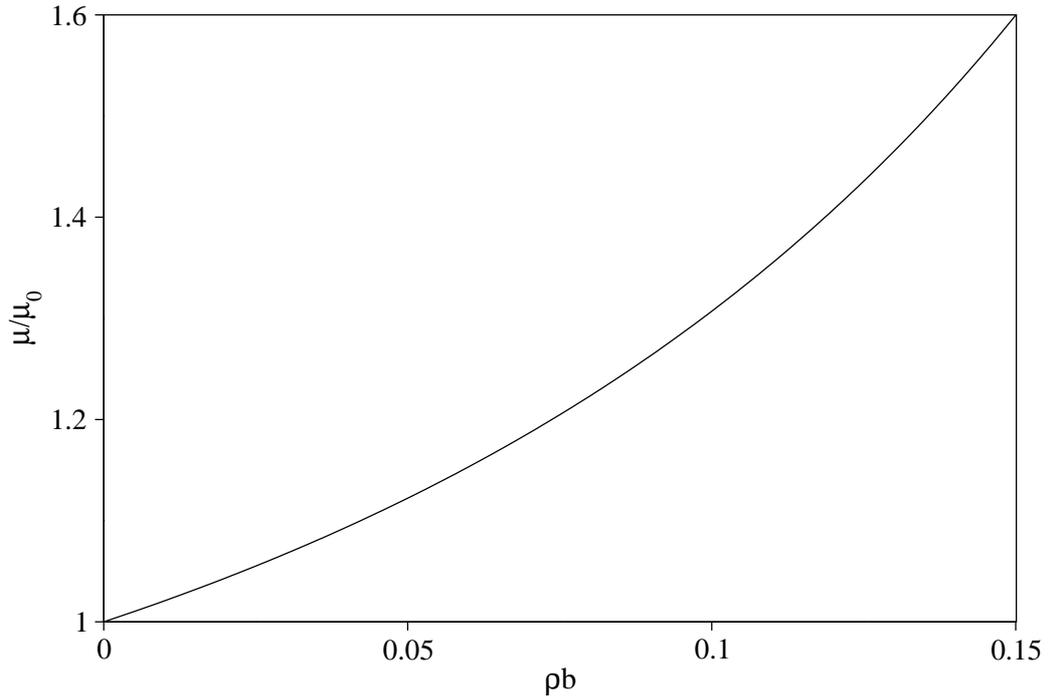


Figura 4.3: Razão  $\mu/\mu_0$  como função de  $\rho b$ . Devido ao adensamento dos veículos existe um aumento da viscosidade que é comprovado pelo fato de a curva sempre crescer.

desaceleração devido à interação entre os automóveis. Tal qual na seção 3.8, a viscosidade surge naturalmente em nosso modelo através do procedimento iterativo, como consequência do formalismo empregado e não inserida *ad hoc*.

Terminamos esta seção calculando os autovalores  $\lambda$  da matriz jacobiana  $\mathbf{A}$ , também conhecidos como *velocidades características*, que determinam como perturbações no fluxo veicular são transmitidas. Impondo a condição

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \quad (4.59)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Calculando o determinante e resolvendo a equação de segundo grau em  $\lambda$  obtemos duas velocidades características:

$$\lambda_1 = v + \frac{\mathcal{B}}{2\rho} - \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2\rho}\right)^2 + c^2} < v \quad \text{e} \quad \lambda_2 = v + \frac{\mathcal{B}}{2\rho} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2\rho}\right)^2 + c^2} > v. \quad (4.60)$$

Como na seção 3.8, segue que uma das soluções se propaga com velocidade *maior* que a velocidade média de fluxo de tráfego, indicando que os distúrbios se propagam na direção oposta ao fluxo veicular. Apesar de constituírem inconsistências teóricas, mostraremos no capítulo 5 que isto não é motivo para mais preocupações, pois a perturbação que se move mais depressa é rapidamente atenuada.

# Capítulo 5

## Análise Linear de Estabilidade

### 5.1 Tráfego Diluído

Para se ter uma maior compreensão da dinâmica do fluxo de tráfego, é interessante analisar quando e sob quais condições pequenas perturbações no fluxo veicular podem crescer dando origem, por exemplo, a congestionamentos. Com isto em mente, começamos introduzindo as pequenas perturbações [5], [14]

$$\bar{\rho} = \rho - \rho_e \quad \text{e} \quad \bar{v} = v - v_e \quad (5.1)$$

nas soluções homogêneas e estacionárias  $\rho_e$  e  $v_e$  com o par  $(\rho_e, v_e)$  consistente com o diagrama fundamental (2.4). Substituindo as perturbações (5.1) nas equações (3.87) obtemos, somente levando em conta termos de primeira ordem em  $\bar{\rho}$  e  $\bar{v}$ , o sistema de equações linearizado

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + v_e \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_e} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{\mathcal{B}_0}{\rho_e} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{\psi}{\tau} \bar{\rho} - \frac{\beta}{\tau} \bar{v} + \frac{\mu_0}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad (5.3)$$

onde

$$\psi = \left( \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right)_e \quad \text{e} \quad \beta = 1 - \left( \frac{\partial v_0}{\partial v} \right)_e, \quad (5.4)$$

em que  $v_0$  é dado por (3.89). Introduzindo o sistema de coordenadas comóvel  $(x - v_e t, t)$  podemos reescrever as equações (5.2) e (5.3) da seguinte forma

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\mathcal{B}_0}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{\psi}{\tau} \bar{\rho} - \frac{\beta}{\tau} \bar{v} + \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}, \quad (5.6)$$

em que o índice  $e$  foi suprimido ficando subentendido que, deste ponto em diante, as variáveis antes escritas com índice continuam avaliadas no equilíbrio. Notemos também que as equações (5.2) e (5.3) *não são invariantes* sob transformação de Galileu. Isto está de acordo, pois uma vez que se faz a mudança para o referencial dos automóveis a contribuição do termo  $v_e \partial_x$  some visto que  $v_e = 0$  no referencial comóvel. As equações (5.2) e (5.3) podem ser reescritas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \partial_t & \rho \partial_x \\ -\frac{\psi}{\tau} + \frac{c_0^2}{\rho} \partial_x & \partial_t + \frac{\mathcal{B}_0}{\rho} \partial_x + \frac{\beta}{\tau} - \frac{\mu_0}{\rho} \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

A estabilidade do modelo contínuo de segunda ordem pode ser determinada analisando pequenas perturbações da forma,

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta v \end{pmatrix} \exp(ikx - i\omega t) \exp(\gamma t) \quad (5.8)$$

com  $k$  é o *número de onda*,  $\omega$  é a *frequência de oscilação* e  $\gamma$  é o *parâmetro de crescimento*. Se o parâmetro de crescimento é menor que zero, então as perturbações serão amortecidas e as soluções de equilíbrio serão restabelecidas. Contrariamente, quando o parâmetro de crescimento é maior que zero, mesmo pequenas, perturbações podem eventualmente crescer dando origem a congestionamentos. Inserindo (5.8) em (5.7) obtemos a relação de dispersão

$$(\gamma - i\omega)^2 + (\gamma - i\omega) \left( ik \frac{\mathcal{B}_0}{\rho} + k^2 \frac{\mu_0}{\rho} + \frac{\beta}{\tau} \right) + ik\rho \left( \frac{\psi}{\tau} - ik \frac{c_0^2}{\rho} \right) = 0. \quad (5.9)$$

A relação de dispersão (5.9) tem duas soluções

$$\gamma_{\pm} - i\omega_{\pm} = -ik\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} - z \pm \sqrt{\Re \pm i|\Im|}, \quad (5.10)$$

em que

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\tau} + \frac{\mu_0}{\rho} k^2 \right), \quad (5.11)$$

$$\Re = z^2 - k^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} \right)^2 + c_0^2 \right], \quad (5.12)$$

$$\pm |\Im| = -k\frac{\rho}{\tau}\psi + k\frac{\mathcal{B}_0}{\rho}z. \quad (5.13)$$

A raiz quadrada contém um número complexo que dificulta a análise do parâmetro de crescimento, contudo, podemos reescrever a raiz por meio da relação

$$\sqrt{\Re \pm i|\Im|} = \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} - \Re}{2}}. \quad (5.14)$$

Utilizando (5.14) obtemos:

$$\gamma_{\pm} = -z \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}}, \quad (5.15)$$

$$\omega_{\pm} = k\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}}. \quad (5.16)$$

A transição de regime de tráfego estável para regime de tráfego instável ocorre quando  $\gamma_{\pm}$  troca de sinal, ou seja,

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}}. \quad (5.17)$$

Como  $z > 0$  segue que a transição de regime de tráfego ocorre somente para o parâmetro de crescimento  $\gamma_+$  sob a condição

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}}. \quad (5.18)$$

Elevando ao quadrado a relação acima temos

$$z^2 = \frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}. \quad (5.19)$$

Escrevendo a equação acima como

$$\left(z^2 - \frac{\Re}{4}\right)^2 = \frac{\Re^2 + \Im^2}{4} \quad (5.20)$$

e substituindo as expressões para a parte real e para a parte imaginária obtemos a condição para a transição de estabilidade:

$$\rho\psi = \left(\beta + \frac{\mu_0\tau k^2}{\rho}\right) \left(\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} \mp \sqrt{\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} + c_0^2}\right). \quad (5.21)$$

As figuras 5.1 e 5.2 representam  $\gamma_{+\tau}$  e  $\gamma_{-\tau}$  como função do vetor de onda adimensional  $q = kc_0\tau$  para diferentes valores do parâmetro  $w$  do modelo. Na figura 5.1 vemos que quanto maior for o valor de  $w$ , maior será a região onde  $\gamma_{+\tau} > 0$  e, conseqüentemente, maior será a região de instabilidade de tráfego. Como  $q = kc_0\tau$  e que  $k$  é o inverso do número de onda, ou seja  $k = 1/\lambda$ , segue que onde a região de instabilidade é pequena, correspondente a pequenos valores de  $q$ , o comprimento de onda das perturbações é grande. Contrariamente, onde a região de instabilidade é grande,  $q$  também deve ser grande, logo o comprimento de onda da perturbação associado a este caso deve ser pequeno. Na figura 5.2 se observa que  $\gamma_{-\tau}$  é sempre negativo e não possui raiz real.

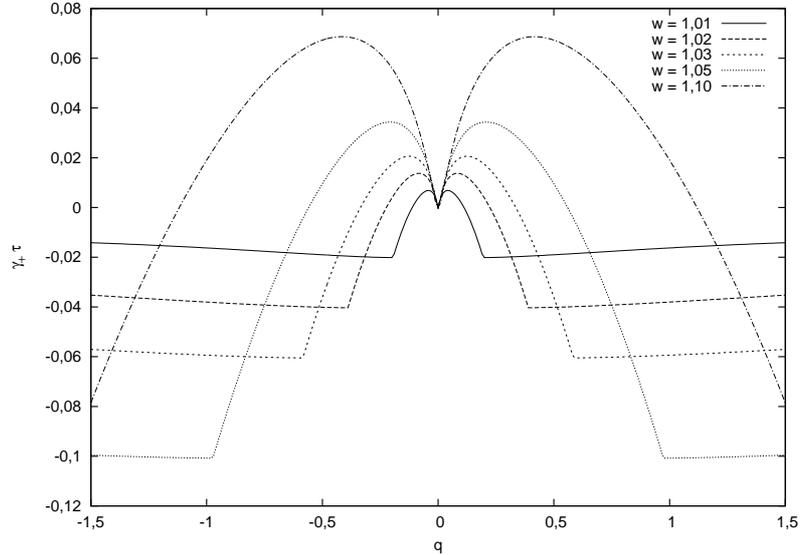


Figura 5.1:  $\gamma_{+\tau}$  como função de  $q = kc_0\tau$  para vários valores do parâmetro  $w$ .

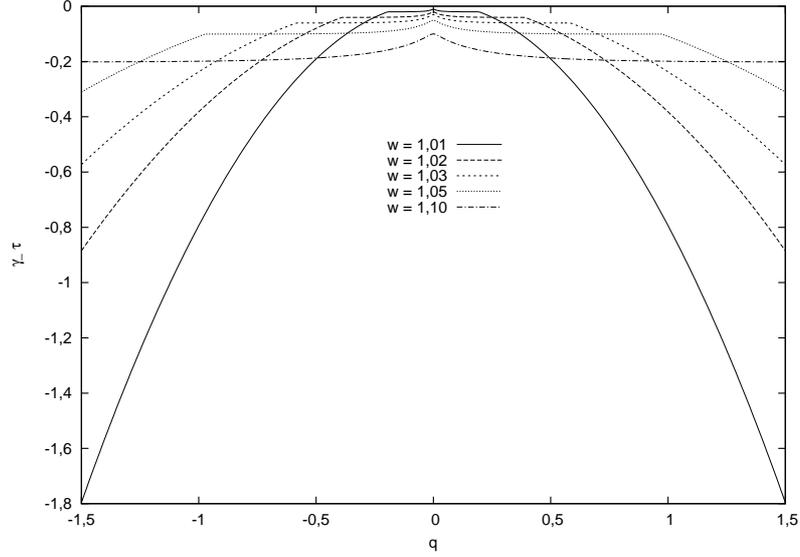


Figura 5.2:  $\gamma_{-}\tau$  como função de  $q = kc_0\tau$  para vários valores do parâmetro  $w$ . Note que a curva é sempre negativa.

Da expressão (5.21) vemos que a condição de instabilidade do nosso modelo é determinada pela forma da função de velocidade ótima  $v_o$ . Assumindo a probabilidade de ultrapassagem como  $\mathbf{p} = 1 - \rho/\rho_j$ , a condição (5.21) se reduz a

$$kc_0\tau = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}}(w - 1). \quad (5.22)$$

A velocidade de propagação de pequenas perturbações é dada pela velocidade de grupo  $v_g$  e é obtida pela diferenciação da frequência de oscilação em relação ao número de onda  $k$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.23)$$

Inserindo a relação (5.16) em (5.23) temos

$$v_g^{\pm} = \frac{\mathcal{B}_o}{2\rho} \mp \frac{d}{dk} \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} - \Re}{2}} = \frac{\mathcal{B}_o}{2\rho} \mp \frac{d}{dk} \sqrt{(\gamma_{\pm} + z)^2 - \Re}. \quad (5.24)$$

Quando o estado homogêneo e estacionário perde sua estabilidade temos que

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}} \quad (5.25)$$

o que implica em

$$\gamma_+ = 0 \quad (5.26)$$

e

$$\gamma_- = -2z. \quad (5.27)$$

Do exposto acima se verifica que o autovalor negativo,  $\gamma_- = -2z$ , decai mais rápido do que o autovalor positivo  $\gamma_+ = 0$ . Neste caso, a velocidade de grupo assume os valores

$$v_g^\pm = \frac{\mathcal{B}_0}{2\rho} \mp \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}_0}{2\rho}\right)^2 + c_0^2}. \quad (5.28)$$

Como o primeiro termo do lado direito da equação acima é sempre positivo e menor que o segundo termo segue que  $v_g^+$ , a velocidade de grupo associada ao automodo  $\gamma_+$ , é negativa, se propagando na direção oposta ao fluxo veicular e pode ser entendida como uma “onda” de congestionamento. Sendo  $v_g^-$ , a velocidade de grupo associada ao automodo  $\gamma_-$ , positiva, esta se propaga na direção do fluxo veicular mas, como  $\gamma_-$  decai velozmente, esta perturbação é atenuada rapidamente. Pelo exposto concluímos que velocidades características maiores que a velocidade média de fluxo veicular, apesar de representarem uma inconsistência teórica em nosso modelo [16], não são motivos para descrédito deste haja visto que os distúrbios que se propagam na direção do fluxo veicular são rapidamente atenuados, não sendo assim observados.

## 5.2 Tráfego Denso

Vamos agora analisar a estabilidade de nosso modelo de segunda ordem para o tráfego denso de veículos. Analogamente à seção anterior, inserimos as perturbações (5.1) nas equações (4.48) e (4.49) e obtemos, somente levando em conta termos de primeira ordem em  $\bar{\rho}$  e  $\bar{v}$ , o sistema de equações linearizado

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + v_e \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho_e} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{\mathcal{B}}{\rho_e} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{\psi}{\tau} \bar{\rho} - \frac{\beta}{\tau} \bar{v} + \frac{\mu}{\rho_e} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial x^2}, \quad (5.30)$$

onde

$$\psi = \left( \frac{\partial v_o}{\partial \rho} \right)_e \quad \text{e} \quad \beta = 1 - \left( \frac{\partial v_o}{\partial v} \right)_e, \quad (5.31)$$

com  $v_o$  dado por (4.53). Escrevendo o sistema de equações acima no sistema de coordenadas comóvel  $(x - v_e t, t)$ , temos para (5.29) e (5.30)

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\mathcal{B}}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{\psi}{\tau} \bar{\rho} - \frac{\beta}{\tau} \bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial x^2}, \quad (5.33)$$

e como anteriormente, o índice  $e$  foi suprimido, mas as variáveis continuam avaliadas no equilíbrio. As equações (5.29) e (5.30) podem ser reescritas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \partial_t & \rho \partial_x \\ -\frac{\psi}{\tau} + \frac{c^2}{\rho} \partial_x + \eta \partial_x^2 & \partial_t + \frac{\mathcal{B}}{\rho} \partial_x + \frac{\beta}{\tau} - \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Inserindo (5.8) em (5.34) obtemos a relação de dispersão

$$(\gamma - i\omega)^2 + (\gamma - i\omega) \left( ik \frac{\mathcal{B}}{\rho} + k^2 \frac{\mu}{\rho} + \frac{\beta}{\tau} \right) + ik\rho \left( \frac{\psi}{\tau} - ik \frac{c^2}{\rho} + \eta k^2 \right) = 0. \quad (5.35)$$

Como anteriormente, a relação de dispersão (5.35) tem duas soluções

$$\gamma_{\pm} - i\omega_{\pm} = -ik \frac{\mathcal{B}}{2\rho} - z \pm \sqrt{\Re \pm i|\Im|}, \quad (5.36)$$

onde

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\tau} + \frac{\mu}{\rho} k^2 \right), \quad (5.37)$$

$$\Re = z^2 - k^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \right)^2 + c^2 \right], \quad (5.38)$$

$$\pm |\Im| = -k \frac{\rho}{\tau} \psi + k \frac{\mathcal{B}}{\rho} z - \rho \eta \tau k^3. \quad (5.39)$$

Com exceção do módulo da parte imaginária, que contém um termo adicional devido ao adensamento dos veículos, todos os termos acima possuem a mesma forma que os termos obtidos na seção anterior para o tráfego diluído. Notemos que se fizermos  $b = 0$  em (4.53), (4.54), (4.56) e (4.57) obtemos os coeficientes para o tráfego diluído. Utilizando (5.14) em (5.36) e procedendo de maneira análoga a anterior, obtemos:

$$\gamma_{\pm} = -z \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}} \quad (5.40)$$

$$\omega_{\pm} = k \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}} \quad (5.41)$$

A transição de regime de tráfego estável para regime de tráfego instável ocorre somente para o parâmetro de crescimento  $\gamma_+$  sob a condição  $\gamma_+ = 0$  que é onde há a troca de sinal. Ou seja, quando

$$\rho \psi = -\rho \eta \tau k^2 + \left( \beta + \frac{\mu \tau k^2}{\rho} \right) \left( \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \mp \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\rho} + c^2} \right). \quad (5.42)$$

As figuras 5.3, 5.5, 5.7, 5.4, 5.6 e 5.8 representam  $\gamma_+ \tau$  e  $\gamma_- \tau$  como função do vetor de onda adimensional  $q = k c_0 \tau$  para diferentes valores do parâmetro  $w$  do modelo e diferentes valores de  $\rho b$ . Como anteriormente, vemos nas figuras 5.3, 5.5 e 5.7 que a região de instabilidade aumenta a medida que  $w$  aumenta. Contudo o adensamento dos veículos também influencia no aumento da região de instabilidade. Na figura 5.3 temos  $w = 1,01$  e notamos que a região de instabilidade para  $\rho b = 0$  é idêntica a obtida anteriormente mas, para  $\rho b = 0,05$ ,  $\rho b = 0,1$  e o mesmo valor de  $w$ , vemos

que a região de instabilidade aumenta. Este efeito é mais evidente nas figuras 5.5 e 5.7. Como pode ser visto nas figuras 5.4, 5.6 e 5.8, os valores de  $\gamma_{-}\tau$  continuam negativos e o efeito de adensamento dos veículos também se pronuncia pois notamos um alargamento das regiões compreendidas pelas curvas para diferentes valores de  $\rho b$ . Novamente segue que onde a região de instabilidade é pequena, correspondente a pequenos valores de  $q$ , o comprimento de onda das perturbações é grande e onde a região de instabilidade é grande, grandes valores de  $q$ , o comprimento de onda das perturbações é pequeno.

A velocidade de propagação de pequenas perturbações é dada pela velocidade de grupo  $v_g$  e é obtida por meio da relação (5.23)

$$v_g^{\pm} = \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \mp \frac{d}{dk} \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} - \Re}{2}} = \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \mp \frac{d}{dk} \sqrt{(\gamma_{\pm} + z)^2 - \Re} \quad (5.43)$$

Novamente, quando o estado homogêneo e estacionário perde sua estabilidade verifica-se que o autovalor negativo decai mais rápido do que o autovalor positivo, uma vez que os valores do parâmetro de crescimento associados a estes automodos são  $\gamma_{+} = 0$  e  $\gamma_{-} = -2z$ . Neste caso, a velocidade de grupo assume os valores

$$v_g^{\pm} = \frac{\mathcal{B}}{2\rho} \mp \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2\rho}\right)^2 + c^2} \quad (5.44)$$

Como na seção anterior, velocidades características maiores que a velocidade média de fluxo veicular *não* representam uma inconsistência teórica em nosso modelo [16] uma vez que os distúrbios que se propagam na direção do fluxo veicular são fortemente amortecidos.

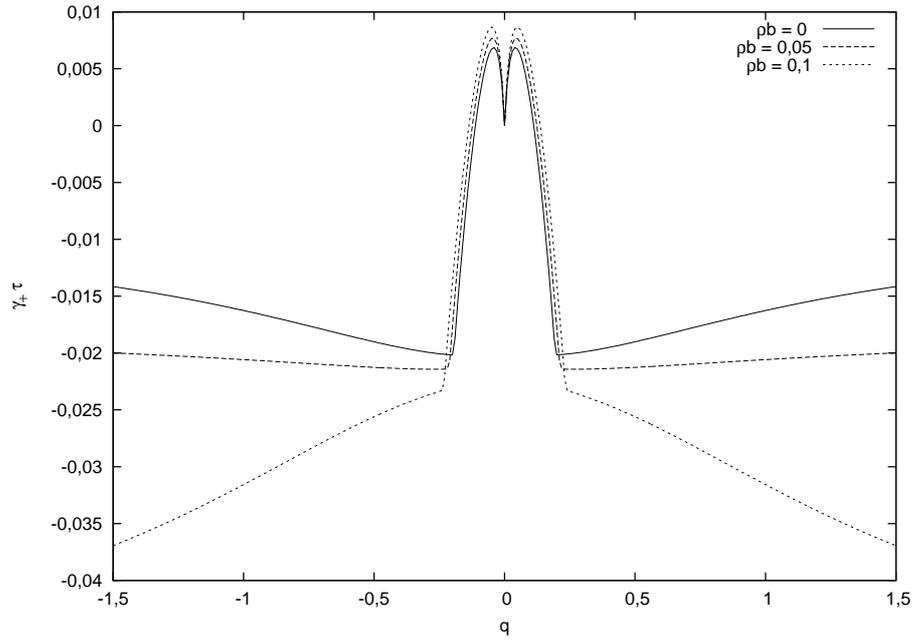


Figura 5.3:  $\gamma_+ \tau$  como função de  $q = kc_0 \tau$  para  $w = 1,01$  e três valores de  $\rho b$ .

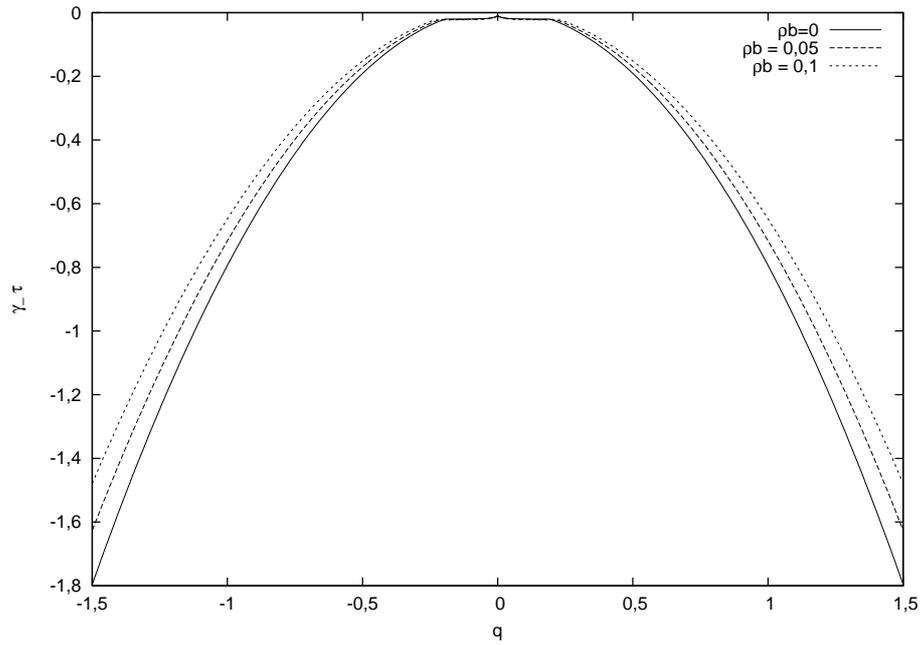


Figura 5.4:  $\gamma_- \tau$  como função de  $q = kc_0 \tau$  para  $w = 1,01$  e três valores de  $\rho b$ .

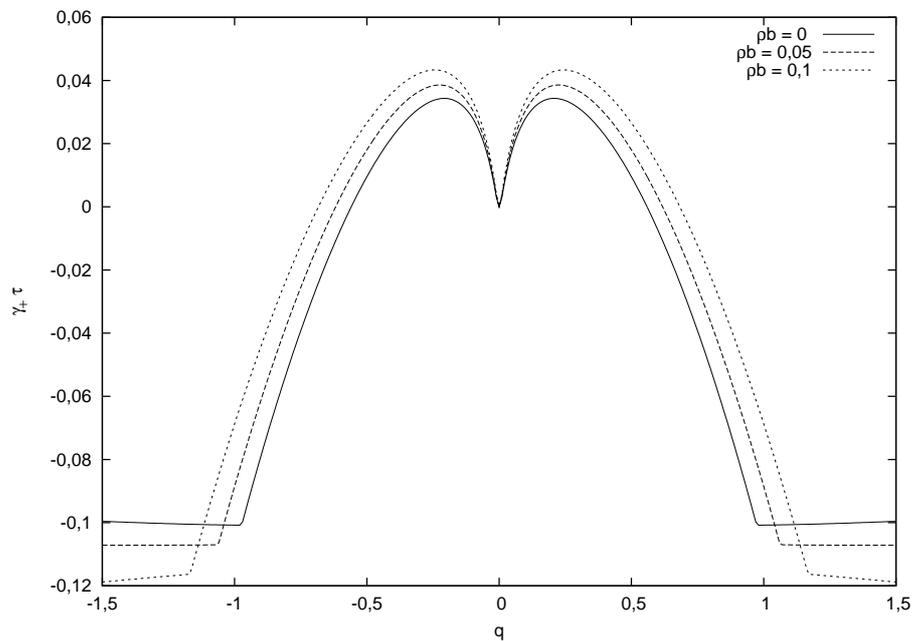


Figura 5.5:  $\gamma_+\tau$  como função de  $q = kc_0\tau$  para  $w = 1,05$  e três valores de  $\rho b$ .

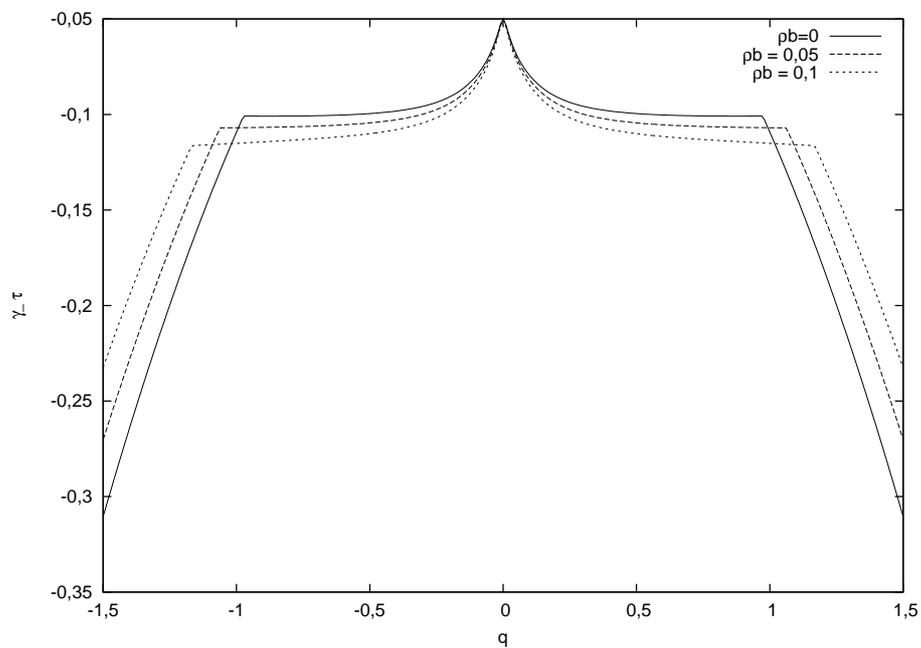


Figura 5.6:  $\gamma_-\tau$  como função de  $q = kc_0\tau$  para  $w = 1,05$  e três valores de  $\rho b$ .

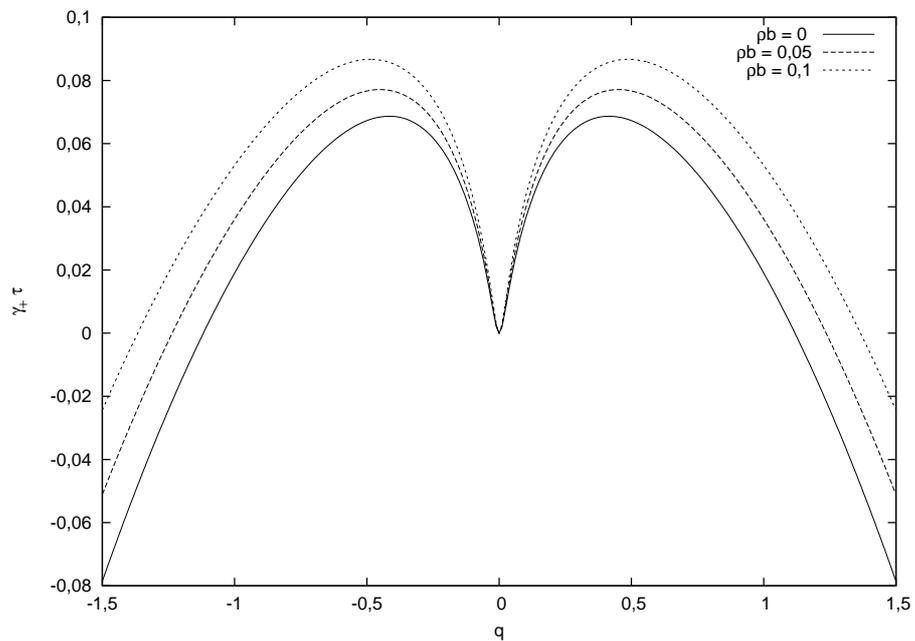


Figura 5.7:  $\gamma_+\tau$  como função de  $q = kc_0\tau$  para  $w = 1, 10$  e três valores de  $\rho b$ .

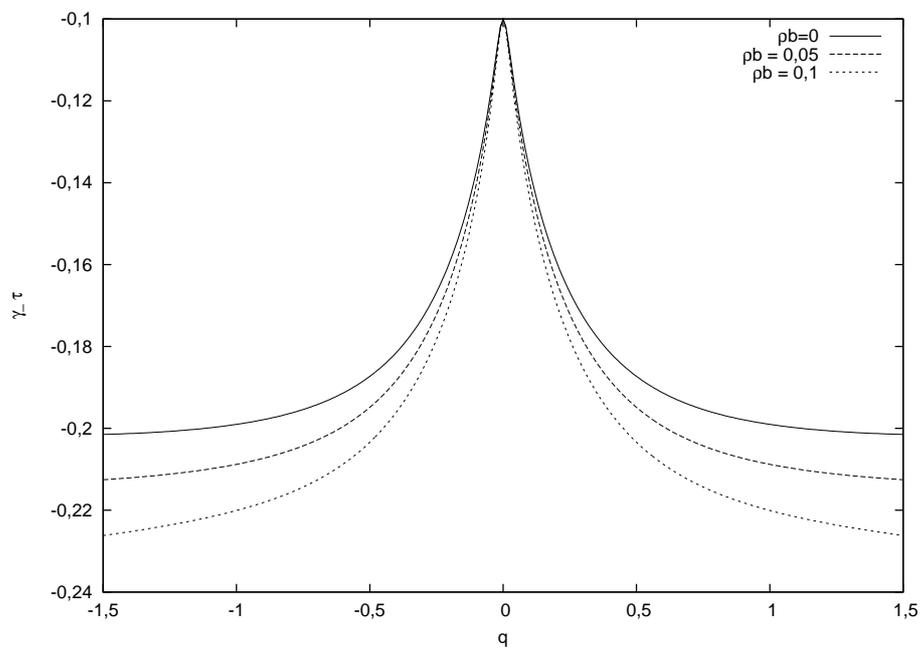


Figura 5.8:  $\gamma_-\tau$  como função de  $q = kc_0\tau$  para  $w = 1, 10$  e três valores de  $\rho b$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Em analogia com a teoria cinética dos gases, apresentamos neste trabalho uma formulação para o fluxo veicular tendo como ponto de partida uma equação cinética que se utilizou para derivarmos um modelo macroscópico para as variáveis de tráfego. Primeiramente partimos de uma aproximação limitada a baixas densidades veiculares que consistia em considerarmos os veículos pontuais. Posteriormente passamos a tratar os automóveis como corpos extensos, corrigindo a equação cinética anteriormente obtida e aumentando assim o domínio de validade da teoria de baixas densidades, para densidades moderadas.

Na determinação da função de distribuição de velocidades, primeiramente calculamos a função de distribuição associada ao estado homogêneo e estacionário. No início do trabalho tomamos como verdadeira a relação fenomenológica (3.20) para a velocidade dos motoristas. Por meio da figura 3.4 vimos que devido ao fato de a função de distribuição de equilíbrio descrever satisfatoriamente dados experimentais, a relação para a velocidade desejada deve obrigatoriamente ser válida.

Posteriormente derivamos uma equação de balanço para ambos os casos que gera um sistema não fechado de equações diferenciais parciais acopladas. Utilizamos o conceito de entropia informacional para calcular a função de distribuição

do estado de equilíbrio e via o método dos momentos de Grad, expressamos a função de distribuição em termos dos campos básicos de tráfego. Por meio da expressão para a função de distribuição e uma teoria com três campos de tráfego via um procedimento iterativo, calculamos as relações de fechamento do sistema constituído pelos campos básicos  $\rho$  e  $v$ . Com isso obtivemos um modelo contínuo de segunda ordem que, ao contrário de outros modelos macroscópicos, a viscosidade veicular aparece como consequência do formalismo aqui adotado e não inserida adrede.

Por meio da análise linear de estabilidade, mostramos que perturbações que se propagam no sentido contrário do fluxo veicular, apesar de inconsistentes em nossos modelos, são rapidamente atenuadas não sendo assim observadas. Também analisamos como variações na densidade e na velocidade média influenciam na estabilidade de tráfego, distinguindo sob quais condições existe amplificação, que ocasionalmente pode gerar congestionamentos, e atenuação de perturbações.

Como intenção de trabalhos futuros podemos citar: *(i)* a resolução numérica das equações dos modelos contínuos de segunda ordem, *(ii)* considerar termos de fonte na dedução da equação cinética, *(iii)* considerar veículos diferentes *e.g.* carros e caminhões e *(iv)* mais de faixas de rodagem. Estas considerações ampliariam consideravelmente o realismo e a aplicabilidade da abordagem cinética aos fenômenos que se referem ao fluxo veicular.

# Apêndice A

## Fórmulas Matemáticas

### A.1 Função Gama

Define-se a função gama como [10], [17]

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds. \quad (\text{A.1})$$

A relação de recorrência para a função gama é:

$$\Gamma(\alpha + n) = \prod_{m=1}^n (\alpha + n - m) \Gamma(\alpha). \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a relação anterior obtém-se, por exemplo, para  $n = 6$

$$\Gamma(\alpha + 6) = (\alpha + 5)(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha\Gamma(\alpha). \quad (\text{A.3})$$

A fórmula de duplicação para a função gama é dada por

$$\Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Função Gama Incompleta

A função gama incompleta é definida por [10], [17]:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x s^{\alpha-1} e^{-s} ds. \quad (\text{A.5})$$

De forma análoga à função gama, pode-se escrever uma relação de recorrência para a função gama incompleta. Desta forma escreve-se

$$\gamma(\alpha + n, s) = (\alpha)_n \gamma(\alpha, s) - \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha)_n}{(\alpha)_k} s^{\alpha+k-1} e^{-s},$$

onde

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$$

é o símbolo de Pochhammer.

Para consultas rápidas, a tabela abaixo mostra-se muito mais conveniente do que a relação de recorrência geral.

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha + 6, s) &= (\alpha + 5)(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha\gamma(\alpha, s) \\ &- (\alpha + 5)(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1)s^\alpha e^{-s} \\ &- (\alpha + 5)(\alpha + 4)(\alpha + 3)(\alpha + 2)s^{\alpha+1} e^{-s} \\ &- (\alpha + 5)(\alpha + 4)(\alpha + 3)s^{\alpha+2} e^{-s} \\ &- (\alpha + 5)(\alpha + 4)s^{\alpha+3} e^{-s} \\ &- (\alpha + 5)s^{\alpha+4} e^{-s} \\ &- s^{\alpha+5} e^{-s}. \end{aligned}$$

Para saber a decomposição de  $\gamma(\alpha + 3, s)$  em termos de  $\gamma(\alpha, s)$  basta proceder da seguinte forma: tomam-se os termos da coluna  $\alpha+n-1$ , neste caso  $\alpha+2$ , e os à direita dela com os respectivos sinais, ignorando-se os coeficientes restantes à esquerda desta coluna. Assim temos:

$$\gamma(\alpha + 3, s) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\gamma(\alpha, s) - (\alpha + 1)(\alpha + 2)s^\alpha e^{-s} - (\alpha + 2)s^{\alpha+1} e^{-s} - s^{\alpha+2} e^{-s}.$$

### A.3 Momentos e Gradientes da Função de Distribuição de Ordem Zero

Os momentos de ordem  $n$  da função de distribuição de ordem zero

$$f^{(0)}(x, c, t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho}{v} \left( \frac{\alpha c}{v} \right)^{\alpha-1} \exp \left( - \frac{\alpha c}{v} \right), \quad (\text{A.6})$$

são dados por

$$\begin{aligned} \int_0^\infty c^n f^{(0)} dc &= \rho \frac{v^n}{\alpha^n} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, \\ \int_0^\infty (c - v)^n f^{(0)} dc &= \rho \frac{v^n}{\alpha^n} \sum_k^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k \frac{\Gamma(\alpha + n - k)}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

é o coeficiente binomial.

Os gradientes e derivadas da função de distribuição de ordem zero são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} &= \frac{\rho_x}{\rho} f^{(0)} + (s - \alpha) \frac{v_x}{v} f^{(0)}, \\ \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial x^2} &= \left( \frac{\rho_{xx}}{\rho} - \alpha \frac{v_{xx}}{v} \right) f^{(0)} + \frac{v_{xx}}{v} s f^{(0)}, \\ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial c} &= \frac{\alpha}{v} \left[ \frac{(\alpha - 1) - s}{s} \right] f^{(0)}, \\ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} &= \frac{\rho_t}{\rho} f^{(0)} + (s - \alpha) \frac{v_t}{v} f^{(0)}. \end{aligned}$$

Termos não lineares foram desprezados na expressão do segundo gradiente da função de distribuição.

## A.4 Funções Auxiliares $\psi_{(n)}$

Definimos a função auxiliar:

$$\psi_{(n)} = \frac{\Gamma(2\alpha + n)}{\alpha} {}_2F_1(\alpha, 2\alpha + n, \alpha + 1, -1) \quad (\text{A.7})$$

em que

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \quad \text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0, |z| < 1 \quad (\text{A.8})$$

é a função *hipergeométrica* [17]. Seguem abaixo, os valores de  $\psi_{(n)}$  que utilizamos no trabalho.

$$\begin{aligned} \psi_{(0)} &= \frac{\Gamma(\alpha)^2}{2}, \\ \psi_{(1)} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{2} + \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha}}, \\ \psi_{(2)} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{2} + \frac{(1+2\alpha)}{2^{2\alpha}}\Gamma(2\alpha), \\ \psi_{(3)} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+3)}{2} + \frac{(4+3\alpha)}{2^{2\alpha+3}} \frac{\Gamma(2\alpha+3)}{\alpha(\alpha+1)}, \\ \psi_{(4)} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+4)}{2} + \frac{(2+\alpha)}{2^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(2\alpha+4)}{\alpha(\alpha+1)}, \\ \psi_{(5)} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+5)}{2} + \frac{[32+5\alpha(5+\alpha)]}{2^{2\alpha+4}} \frac{\Gamma(2\alpha+4)}{\alpha(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

## A.5 Funções Auxiliares $\mathcal{J}[z]$

Ao longo do trabalho aparecem repetidas vezes integrais do tipo

$$\mathcal{J}[z] = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds \int_0^s z(s-u)^2 u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

em que  $z = 1, s, u, us, s^2, u^2 \dots$ . Por sua vez a integral acima se relaciona com as funções  $\psi_{(n)}$  definidas no apêndice A.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[1] &= \psi_{(2)} - 2\alpha\psi_{(1)} + (\alpha)_2\psi_{(0)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [s^{\alpha+1} e^{-s} - (\alpha+1)s^\alpha e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[s] &= \psi_{(3)} - 2\alpha\psi_{(2)} + (\alpha)_2\psi_{(1)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [s^{\alpha+2} e^{-s} - (\alpha+1)s^{\alpha+1} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[s^2] &= \psi_{(4)} - 2\alpha\psi_{(3)} + (\alpha)_2\psi_{(2)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [s^{\alpha+3} e^{-s} - (\alpha+1)s^{\alpha+2} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[s^3] &= \psi_{(5)} - 2\alpha\psi_{(4)} + (\alpha)_2\psi_{(3)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [s^{\alpha+4} e^{-s} - (\alpha+1)s^{\alpha+3} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[u] &= \alpha\psi_{(2)} - 2(\alpha)_1\psi_{(1)} + (\alpha)_2\psi_{(0)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [\alpha s^{\alpha+1} e^{-s} - (\alpha+1)(\alpha+2)s^\alpha e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[u^2] &= (\alpha)_2\psi_{(2)} - 2(\alpha)_3\psi_{(1)} + (\alpha)_4\psi_{(0)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [(\alpha-1)(\alpha+2)s^{\alpha+1} e^{-s} \\ &\quad - (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)s^\alpha e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[u^3] &= (\alpha)_3\psi_{(2)} - 2(\alpha)_4\psi_{(1)} + (\alpha)_5\psi_{(0)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+3)s^{\alpha+1} e^{-s} \\ &\quad - (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)s^\alpha e^{-s} - 2s^{\alpha+2} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[su] &= \alpha\psi_{(3)} - 2(\alpha)_2\psi_{(2)} + (\alpha)_3\psi_{(1)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [\alpha s^{\alpha+2} e^{-s} - (\alpha+1)(\alpha+2)s^{\alpha+1} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[s^2u] &= \alpha\psi_{(4)} - 2(\alpha)_2\psi_{(3)} + (\alpha)_3\psi_{(2)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [\alpha s^{\alpha+3} e^{-s} - (\alpha+1)(\alpha+2)s^{\alpha+2} e^{-s}] ds, \\ \mathcal{J}[su^2] &= (\alpha)_2\psi_{(3)} - 2(\alpha)_3\psi_{(2)} + (\alpha)_4\psi_{(1)} + \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} [(\alpha-1)(\alpha+2)s^{\alpha+2} e^{-s} \\ &\quad - (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)s^{\alpha+1} e^{-s}] ds. \end{aligned}$$

Calculando as integrais acima, obtemos:

$$\mathcal{J}[1] = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1),$$

$$\mathcal{J}[s] = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2) + (2\alpha + 1)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}},$$

$$\mathcal{J}[u] = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2) - (2\alpha + 1)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}},$$

$$\mathcal{J}[s^2] = (\alpha + 3)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2) + (2\alpha + 1)(2\alpha + 3)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}},$$

$$\mathcal{J}[u^2] = (\alpha + 3)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2) - (2\alpha + 1)(2\alpha + 3)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}},$$

$$\mathcal{J}[s^3] = (\alpha + 6)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 3) + (2\alpha + 3)(3\alpha + 8)\frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\alpha 2^{2\alpha+1}},$$

$$\mathcal{J}[u^3] = (\alpha + 6)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 3) - (2\alpha + 3)(3\alpha + 8)\frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\alpha 2^{2\alpha+1}},$$

$$\mathcal{J}[su] = \alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2),$$

$$\mathcal{J}[us^2] = \alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 3) + \alpha(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha}},$$

$$\mathcal{J}[su^2] = \alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 3) - \alpha(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)\frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha}}.$$

## A.6 Prova da relação 5.14

Um número complexo pode ser escrito das seguintes maneiras

$$z = \Re + i\Im, \quad (\text{A.9})$$

$$z = re^{\pm i\theta}. \quad (\text{A.10})$$

Onde

$$\Re = \text{Re}(z) = r\cos\theta, \quad (\text{A.11})$$

$$\Im = \text{Im}(z) = r\text{sen}\theta \quad (\text{A.12})$$

e

$$r = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}. \quad (\text{A.13})$$

Queremos separar as partes real e imaginária de

$$\sqrt{z} = \sqrt{\Re \pm i|\Im|}. \quad (\text{A.14})$$

Para tanto, escrevemos a relação acima como

$$\sqrt{z} = \sqrt{\Re \pm i|\Im|} = \sqrt{re^{\pm i\theta}} = \sqrt{r}e^{\pm i\theta/2} = \sqrt{r}[\cos(\theta/2) \pm i\text{sen}(\theta/2)]. \quad (\text{A.15})$$

Apesar de separadas as partes real e imaginária na relação acima, esta pode ser escrita na forma cartesiana se atentarmos para as identidades

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \cos(\theta)]}, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{sen}(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \cos(\theta)]}, \quad (\text{A.17})$$

que se inseridas na última igualdade de A.15, acarretam

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2}[r + r\cos(\theta)]} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}[r - r\cos(\theta)]}. \quad (\text{A.18})$$

Agora, se inserirmos as igualdades A.11, A.12 e A.13 na igualdade acima, obtemos

$$\sqrt{\Re \pm i|\Im|} = \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} + \Re}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2} - \Re}{2}}. \quad (\text{A.19})$$

□

# Bibliografia

- [1] MÉNDEZ, A. R. Tese de Doutorado: Estudio Cinético-Macroscópico de Flujo Vehicular, Universidad Autonoma Metropolitana, México, 2008.
- [2] Maerivoet, S.; De Moor, B. Traffic Flow Theory. **SISTA Internal Report**, 05-154, 2005.
- [3] KREMER, G. M. **Uma Introdução à Equação de Boltzmann**, Edusp, 2005. cap. 2.
- [4] MARQUES JR., W. Dissertação de Mestrado: As Equações Linearizadas de Burnett para um Gás Monoatômico Denso, Universidade Federal do Paraná, 1989.
- [5] VELASCO, R. M.; MARQUES. Navier-Stokes-like Equations for Traffic Flow Model. **Physical Review E.**, 72, 5, 2005, p. 046102-1-046102-9.
- [6] PRIGOGINE, I; HERMAN, R. **Kinetic Theory of Vehicular Traffic**, American Elsevier, 1971. caps. 1, 2 e 3.
- [7] SHVETSOV, C.; HELBING, D. Macroscopic Dynamics of Multilane Traffic. **Physical Review E.**, 59, 1999, p. 6328.
- [8] PHILLIPS, W, F. Kinetic Model for Traffic Flow. **National Technical Report.**, 59, 1977, p. 6328.

- [9] Velasco, R. M.; Méndez A. R. Informational Entropy in Traffic Flow. **Statistical Physics and Beyond**. American Institute of Physics, 2004. p. 200-206.
- [10] ARFKEN, G. **Mathematical Methods for Physicists**, Academic Press, Inc., 1985. cap. 15.
- [11] Daganzo, C. F. Requiem for Second- Order Approximations of Traffic Flow. **Transportation Research.**, B 29, 1995, p. 277-286.
- [12] WAGNER, C.; HOFFMANN, C.; SOLLACHER, R.; WAGENHUBER, J.; SCHÜRMAN, B. Second-order Continuum Traffic Flow Model. **Physical Review E.**, 54, 5, 1996, p. 5073-5085.
- [13] KREMER, G. M; ROSA JR, E. On Enskog's Dense Gas Theory. I. The Method of Moments for Monoatomic Gases. **Journal of Chemical Physics**, 89, 1988, p. 3240-3247.
- [14] KERNER, B. S; KONHÄUSER, P. Cluster Effect in Initially Homogeneous Traffic Flow. **Physical Review E.**, 48, 1993, p. 2335-2338.
- [15] MÉNDEZ, A. R. Alternative Model in Traffic Flow Equations. **Transportation Research part B-Methodological.**, 42, 2008, p. 782-811.
- [16] HELBING, D. Characteristic Speeds Faster than the Average Vehicle Speed Do Not Constitute a Theoretical Inconsistency of Macroscopic Traffic Models. <http://arxiv.org/abs/0805.3402>.
- [17] ABRAMOWITZ, M; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**, Dover Publications, 1970. cap. 15.