Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Pós-Graduação em Matemática Aplicada

EQUAÇÕES DE ONDA DO TIPO KIRCHHOFF COM AMORTECIMENTO

Rosileide de Oliveira Lopes

CURITIBA-PR

2008

EQUAÇÕES DE ONDA DE KIRCHHOFF COM AMORTECIMENTO

Por

Rosileide de Oliveira Lopes

Orientação:

Prof. Higidio Portillo Oquendo

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA-PR

2008

Aos meus pais por me darem amor e dignidade, por serem amigos, perseverantes, batalhadores e exemplos de honestidade e humildade. Aos meus irmãos pela amizade e também como um sinal do amor e carinho que nos une.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida e por conceder-me força e coragem.

À minha família pelo apoio, compreensão e carinho.

Ao meu orientador Dr. Higidio Portillo Oquendo pela paciência, atenção e orientação precisa.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná e à Coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pela colaboração direta ou indireta neste trabalho.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e unicidade de soluções para as seguintes equações de onda não linear n-dimensional do tipo Kirchhoff:

Equação com dissipação friccional

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \delta u_t = 0.$$

Equação com amortecimento interno do tipo Kelvin-Voigt

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta \Delta u_t = 0.$$

Ambas com condições de fronteira de Dirichlet.

Estudamos também o decaimento exponencial de energia associado à esses problemas e mostramos explicitamente a taxa de decaimento.

Aqui $\delta > 0$, Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$, onde a função $M \in C^1[0, \infty[$ é tal que $M(s) \geq \alpha + \beta s$ para todo $s \geq 0$, com $\alpha, \beta > 0$.

Palavras-chave: Equação de onda do tipo Kirchoff; dissipação friccional; amortecimento do tipo Kelvin-Voigt; decaimento exponencial de energia.

Abstract

In this work we are going to study the existence and uniqueness of the solution governed by the n-dimensional nonlinear following wave of equation Kirchhoff type:

Equation with frictional dissipation

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \delta u_t = 0.$$

Equation with internal material damping of Kelvin-Voigt type

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta \Delta u_t = 0.$$

Both of them of Dirichlet boundary condition.

Besides also we study the exponential energy decay of the problem and we explicit forms for the decay.

Here $\delta > 0$, Ω is a bounded, connected set in $\mathbb{R}^n$, having a smooth boundary $\partial\Omega = \Gamma$, onde $M \in C^1[0, \infty[$ is such that $M(s) \geq \alpha + \beta s$ for all $s \geq 0$, with $\alpha, \beta > 0$.

Key words: wave of equation Kirchhoff type; frictional damping; Kelvin-Voigt damping type; Exponential decay of energy.

Introdução

Considere Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ denotada por Γ. Nosso objetivo aqui é estudar a existência e unicidade de solução global, para a equação de onda com amortecimento friccional $u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \delta u_t = 0$ e para a equação de onda com amortecimento interno do material do tipo Kelvin-Voigt $u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta\Delta u_t = 0$, onde o parâmetro $\delta > 0$ indica o coeficiente de dissipação friccional e o coeficiente de amortecimento interno do material do tipo Kelvin-Voigt, respectivamente. Além disso, vamos estabelecer o decaimento exponencial da energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\bigg(\|u_t\|_2^2 + \hat{M}(\|u\|_2^2)\bigg),$$

associada à equação, ou seja, veremos que a energia converge uniformente para zero, quanto $t \longrightarrow \infty$, com relação aos dados iniciais para os quais $E(0) < \infty$.

Suporemos que M é uma função contínua e com derivada contínua em $[0, \infty[$ tal que $M(s) \geq \alpha + \beta s$ para todo $s \geq 0$, onde α e β são constantes positivas. O sub-índice t representa a derivada em relação ao tempo, Δ o operador Laplaciano n-dimensional nas variáveis espaciais.

As equações integro-diferenciais acima, fisicamente, modelam as vibrações de membranas cuja estrutura elástica é não linear. Com $u(x,t)$ representamos o deslocamento transversal no instante t, em um ponto da membrana onde a abscissa é x na configuração de repouso. A velocidade em que o ponto x se desloca verticalmente é $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, que representamos por $u_t(x,t)$ e sendo a membrana fixa nos extremos, temos que $u(x,t) = 0$ em $\partial\Omega$. Para simplificar a notação estamos usando $u(x,t) = u$.

A classe mais comum para a supressão de vibrações de estruturas elásticas é a do tipo friccional, que absorve vibração de energia. Por outro lado, o mecanismo de amortecimento interno está sempre presente, porém pode ser muito pequeno, este é o caso do amortecimento interno de Kelvin-Voigt. As condições de fronteira consideradas aqui são condições do tipo Dirichlet.

O estudo analítico na área de estabilização de sistemas distribuidos geralmente está conectado com aplicações para o controle de vibrações de vários elementos estruturais.

O estudo do decaimento exponencial desses dois problemas, considerando $M(\|\nabla u\|_2^2) = \alpha + \beta\|\nabla u\|_2^2$, foi feito em [12], a existência, unicidade e o decaimento exponencial de energia para um problema não homogêneo com amortecimento interno, é estudado em [13]. Também, em [14] se estuda a unicidade, existência e estabilidade para a equação $u_{tt} + \delta u_t + M(A^{\frac{1}{2}}u)Au = 0$ onde A é um operador autoadjunto de $L^2(\Omega)$.

Nosso trabalho éstá baseado nos artigos [14], [13] e [12] e está organizado do seguinte modo: No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados como espaços L^p, teoria das distribuições, espaços de Sobolev, dentre outros, que serão utilizados nos próximos capítulos. No capítulo 2 mostraremos a existência, através do método de Faedo-Galerkin, a unicidade e decaimento exponencial de soluções para a equação com dissipação friccional. Já no capítulo 3, mostraremos a existência, também usando o método de Faedo-Galerkin, a unicidade, e o decaimento exponencial de soluções para a equação com amortecimento interno do material do tipo Kelvin-Voigt.

Capítulo 1

Fundamentos

Apresentaremos aqui alguns resultados já conhecidos de espaços L^p, espaços de Sobolev, e teoria das distribuições, os quais serão fundamentais para as demonstrações dos nossos resultados. Provaremos alguns destes resultados e apenas indicaremos onde se encontra a demonstração dos demais. Omitiremos alguns conceitos básicos de análise funcional, como espaços métricos, espaços normados, sequências de Cauchy, dentre outros.

1.1 Algumas desigualdades e espaços de Hilbert

A seguir, veremos algumas das desigualdades que serão usadas durante o trabalho e lembraremos um pouco sobre espaços de Hilbert.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young) *Sejam $p, p' \geq 1$ expoentes conjugados, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a e b, temos que:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

Prova: Se $a = 0$ ou $b = 0$, nada a provar. Suponhamos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então temos:

$$ab = e^{lna}e^{lnb} = e^{\frac{1}{p}lna^p}.e^{\frac{1}{p'}lnb^{p'}} = e^{\frac{1}{p}lna^p + \frac{1}{p'}lnb^{p'}}.$$

Por ser, a função $f(x) = e^x$, uma função convexa, temos que

$$ab \leq \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{p'}b^{p'}.$$

□

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja V um espaço com produto interno, e sejam $x, y \in V$. Então,*

$$|(x, y)| \leq \|x\|.\|y\|$$

Demonstração:

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(\alpha x + y, \alpha x + y) \quad \geq 0,$$

isto é,

$$\alpha^2(x, x) + 2\alpha(x, y) + (y, y) \quad \geq 0,$$

Considere o lado esquerdo como uma função quadrática em ordem de α, ele tem sinal sempre ≥ 0, então o discriminante Δ é sempre ≤ 0 e assim, obtemos que:

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

ou seja,

$$(x, y)^2 \quad \leq \quad (x, x)(y, y),$$

logo,

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|.$$

□

Lema 1 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam ω, α e f funções reais contínuas, tais que, para todo $t_0 \leq t$,*

$$f \geq 0 \quad \text{e} \quad \omega(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\omega(s)ds,$$

então

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{\int_s^t f(\tau)d\tau}ds,$$

em particular, se $\alpha(t) = C$, onde C é uma constante, temos que:

$$\omega(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right).$$

Demonstração:

Seja $g(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)\omega(s)ds$, então $\frac{d}{dt}(g(t)) = f(t)\omega(t)$ e, da hipótese de $f \geq 0$ e $\omega(t) \leq \alpha(t)$, temos

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = f(t)\omega(t) \leq f(t)\alpha(t) + f(t)g(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}[g(t)e^{-A(t)}] \leq f(t)\alpha(t)e^{-A(t)},$$

onde $\frac{d}{dt}(A(t)) = f(t)$. Então, integrando de 0 a t, temos:

$$g(t)e^{-A(t)} \leq \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{-A(s)}ds,$$

e da hipótese, segue que

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{-A(s)}ds\ ,$$

o que implica o resultado. No caso que $\alpha(t) = C$ constante, basta utilizar

$$f(s) \exp\left(\int_{s}^{t} f(\tau)d\tau\right) = -\frac{d}{ds} \exp\left(\int_{s}^{t} f(\tau)d\tau\right).$$

$\square$

Aqui lembramos a definição e algumas propriedades de um espaço de Hilbert.

Definição 1.1 (Espaços de Hilbert) *Um espaço de Hilbert, é um espaço vetorial H dotado de um produto escalar (u, v) e que é completo para a norma $\|u\|_H := (u, u)^{\frac{1}{2}}$.*

Um exemplo fundamental de espaço de Hilbert é o espaço L^2 que será definido no próximo capítulo com o produto escalar dado por:

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Como se pode ver em [2], todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana, ou seja, se H é um espaço de Hilbert separável, então existe uma sequência (e_n) de elementos de H, tais que: $\|e_n\|_H = 1$ para todo n, $(e_n, e_m) = 0$ para todo m, com $m \neq n$, sendo que o espaço vetorial gerado por (e_n) é denso em H.

Teorema 1 (Teorema de Representação de Riesz para espaços de Hilbert) *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\phi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que:*

$$< \phi, v >= (f, v) \quad \textit{para todo} \quad v \in H,$$

$$\textit{Além disso,} \quad \|f\|_H = \|\phi\|_{H'}.$$

Demonstração: Ver [2] página 81.

Teorema 2 (Desigualdade de Bessel) *Seja X um espaço com produto interno e $(e_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência ortonormal em X. Então para todo $x \in X$,*

$$\sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Esta desigualdade é chamada desigualdade de Bessel e os produtos internos (x, e_j) são chamados coeficientes de Fourier de x relativamente a $(e_j)_{j=1}^\infty$.

Prova: Considere $y_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j)e_j$, então, $\|y_n\|_H = \left(\sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que: $|(y_n, x)| \leq \|x\|.\|y_n\|$ e assim,

$$\sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|_X.(\sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Teorema 3 *Existe uma base Hilbertiana $(e_j)_{j\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ e existe uma sequência $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de números reais tal que*

$$e_j \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega),$$

$$-\Delta e_j = \lambda_j e_j \quad \text{em} \quad \Omega$$

Diz-se que os (λ_j) são os valores próprios de $-\Delta$ (com condição de Dirichlet) e que as (e_j) são funções próprias associadas.

Demonstração: Ver [2] página 192.

1.2 Espaços L^p

Nesta seção, Ω denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue. Usaremos termos da teoria da medida, como função integrável, função mensurável, igualdade e desigualdade em quase todo ponto e conjuntos de medida nula.

Definição 1.2 *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$; definimos*
$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; u é mensurável e $\int_\Omega |u(x)|^p < \infty\}$, com a norma dada por

$$\|.\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, para $p = \infty$, definimos $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo ponto em $\Omega\}$, com a norma dada por $\|u\|_\infty =$ inf $\{C; |u(x)| \leq C$ $q.t.p.$ em $\Omega\}$, ou seja,

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf\{C; |u(x)| \leq C \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \Omega\}.$$

Teorema 4 *Os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach.*

Demonstração: Veja [2] página 57.

Observação: Dizemos que duas funções em $L^1(\Omega)$ são idênticas, se elas são iguais em quase todo ponto.

Teorema 5 (Teorema de Fubini) *Suponhamos que $u \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, então para quase todo $x \in \Omega_1$, temos que: $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ e $\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$ e, para quase todo $y \in \Omega_2$, temos que: $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2)$. Além disso, verifica-se que:*

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right)dx = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx\right)dy = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy$$

Demonstração: Ver [4], página 308.

Teorema 6 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{1.1}$$

Demonstração:

Se $p = 1$, temos que $p' = \infty$, então basta observar que

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|v\|_\infty \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

Para $p > 1$, da desigualdade de Young temos que

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^{p'}}{p'}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0,$$

logo supondo que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_{p'} \neq 0$ e tomando $\alpha = \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$ e $\beta = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{p'}}$ na desigualdade de Young, chegamos à

$$\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_p\|v\|_{p'}} \leq \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v(x)|^{p'}}{p'\|v\|_{p'}^{p'}}$$

integrando em Ω, temos

$$\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_{p'}} \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Segue que uv é integrável e vale (1.1). $\square$

Teorema 7 (Teorema de Representação de Riesz para espaços L^p) *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in L^p$. *Então, existe* $u \in L^{p'}$ *único tal que*

$$< \phi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso se verifica

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|u\|_{(L^p)'}$$

Demonstração: Ver [2], página 61.

1.3 Distribuições

Imersão

Sejam V e H espaços de Hilbert com normas $\|.\|_V$ e $\|.\|_H$ respectivamente. Suponha que $V \subset H$. Seja ainda, $\tau : V \longrightarrow H$ a injeção canônica de V em H, que a cada vetor $v \in V$ faz corresponder τv como um elemento de H. Diz-se que o operador linear τ é o operador de imersão τ de V em H.

Diz-se que a imersão $\tau : V \longrightarrow H$ e´contínua, quando existe um $K > 0$ tal que:

$$\|v\|_H \leq K\|v\|_V.$$

Diz-se que a imersão $\tau : V \longrightarrow H$ é compacta, quando a imagem dos conjuntos limitados de V, por τ, são conjuntos relativamente compactos de H, isto é, conjuntos cujo o fecho é compacto em H.

Espaço de funções testes

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotemos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \ , \quad \text{onde} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

o operador de derivação de ordem α.

Se u é uma função mensurável sobre Ω e $(\omega_i)_{i\in I}$ é a familia de todos subconjuntos abertos de Ω, tal que $u = 0$ q.t.p em cada ω_i, temos que $u = 0$ q.t.p. em $\omega = \bigcup_{i\in I}\omega_i$, e o suporte de u (supp$u$) é definido como o subconjunto fechado

$$\text{supp}u = \Omega \setminus \omega.$$

Se u for uma função contínua, então:

$$\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega; \quad u(x) \neq 0\}}.$$

Dizemos que uma função u tem suporte compacto em Ω, se existir $K \subset \Omega$ compacto tal que

$$\text{supp}u \subset K.$$

Representa-se por $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, com suporte compacto e derivadas parciais de todas as ordens. Em $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ considera-se a seguinte noção de convergência:
Uma seqüência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ quando:

(i) Todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;

(ii) A seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

Seja $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ se $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero como definido acima. Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência. Chamamos $\mathcal{D}(\Omega)$ de espaço das funções testes.

Exemplo 1.1 *A função $\rho : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ definida por:*

$$\rho(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & se \quad \|x\| < 1 \\ 0 & se \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, e supp $\quad u = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \ \|x\| \leq 1\}$.

Teorema 8 *O espaço $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Veja [2] página 71.

Definição 1.3 (Distribuição) *Uma distribuição sobre Ω, é uma forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função*

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$.

Representamos por $\langle T, \varphi \rangle$ a distribuição T em φ, e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições sobre Ω. Dizemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a seqüência $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
A notação $L^p_{loc}(\Omega)$ será usada para designar o espaço vetorial

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \in L^p(K) \quad \forall K \quad \text{compacto} \quad K \subset \Omega\}.$$

Pode-se comprovar sem dificuldades que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $p \geq 1$.

Exemplo 1.2 *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição.

Prova: Como cada φ possui suporte compacto em Ω, esta integral existe, logo T_u está bem definida. Além disso, T_u é univocamente determinada por u. Como T é dada por uma integral, é linear, logo para provar que é uma distribuição basta demonstrar que é contínua.

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|\,dx \leq (\max_{x\in K} |\varphi(x)|) \int_K |u(x)|dx,$$

isto é,

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C(\max_{x\in K} |\varphi(x)|). \tag{1.2}$$

Logo se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, para todo $\delta > 0$ existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{se} \quad n > n_0 \Longrightarrow \max_{x\in K} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$, da relação (1.2) temos que dado $\varepsilon > 0$, se $n > n_0$

$$\left|\langle T_u, \varphi\rangle - \langle T_u, \varphi_n\rangle\right| \leq C(\max_{x\in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|) < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

□

Lema 2 (Du Bois Raymond) *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$, se e somente se $u = 0$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração: Veja [9] página 10.

Exemplo 1.3 *Seja $x_0 \in \Omega$, então a forma linear δ_{x_0} definida por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é chamada de distribuição de Dirac concentrada em x_0.

A distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, suponha que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

logo se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que $\widetilde{\varphi}(x) = \|x - x_0\|^2\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega u(x)\|x - x_0\|^2\varphi(x)\, dx \Longrightarrow \int_\Omega u(x)\widetilde{\varphi}(x)\, dx = \widetilde{\varphi}(x_0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

e pelo Lema de Du Bois Raymond, $u(x)\|x - x_0\|^2 = 0$ q.t.p. em Ω, o que implica que $u(x) = 0$ q.t.p. em Ω, isto é, $\delta_{x_0} = 0$, contradição.

Definição 1.4 (Derivada de uma Distribuição) *Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de T de ordem α é a distribuição representada por $D^\alpha T$, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 1.4 (Função Heaviside) *A função definida da seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x < 0$, é chamada de função Heaviside. Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mas sua derivada no sentito das distribuições é*

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

logo $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Este fato motiva a definição dos espaços de Sobolev, uma classe de espaços de Banach muito importante no estudo que segue deste trabalho.

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduzimos os espaços de Sobolev, e algumas propriedades que serão usadas posteriormente. Como visto na seção anterior, se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então u possui derivada de todas as ordens no sentido das ditribuições, porém sua derivada também chamada de derivada fraca, não é em geral uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$.

Definição 1.5 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por:*

$$\begin{gathered} W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \exists\, v_1, v_2, ..., v_n \in L^p(\Omega); \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., n\}. \end{gathered}$$

Notação: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

ou da norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, temos que

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = max\left\{\|u\|_\infty, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_\infty, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_\infty, \ldots, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_\infty\right\}.$$

ou,

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_\infty.$$

Proposição 1.3 *O espaço $W^{1,p}$, para $1 \leq p \leq \infty$ com as normas acima definidas é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja [2] página 121.

No caso em que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ e

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Denotamos com $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_2.$$

Definição 1.6 (O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$) *Seja $1 \leq p < \infty$; definimos*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)} \quad \textit{em} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Denotamos com $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 9 *Suponha Ω de classe C^1, tal que*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad \textit{com} \quad 1 \leq p < \infty,$$

então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Os elementos de $W^{1,p}(\Omega)$, são as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam na fronteira de Ω.

Demonstração: Veja [2] página 172.

Teorema 10 *Seja Ω de classe C^1. Se $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) Existe uma constante $C \geq 0$, tal que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{p'} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, ..., n \ ;$$

(iii) A função $\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$, pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e neste caso $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Demonstração: Veja [2] página 153.

Como conseqüência deste teorema, temos um resultado muito importante, que será utilizado com freqüência neste trabalho.

Corolário 1.1 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo somente de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Prova: Ver [2], página 134.

A expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}}$. Em $H_0^1(\Omega)$, definimos o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente à norma $\|u\|_{H^1}$.

Traço de funções de $W^{1,p}(\Omega)$

Uma função típica u em $W^{1,p}(\Omega)$ em geral, não é contínua, e além disso, está definida somente em Ω e por isso, é necessário fazer uma definição precisa do que se entende por restrição de u à fronteira de Ω. Visto que a fronteira de Ω tem medida de Lebesgue n-dimensional nula, não existe um método direto para que possamos dar uma expressão da "restrição de u à fronteira de Ω". Este problema é resolvido pela noção de operador traço.

Teorema 11 (Teorema do traço) *Sejam Ω um conjunto limitado $\partial\Omega$ de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então, existe um operador linear limitado $T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ tal que*

$$Tu = u|_{\partial\Omega}, \quad \text{se} \quad W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad e$$

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com a constante C dependendo somente de p e de Ω.

Demonstração: Ver [3], página 258.

Teorema 12 (Fórmula de Green) *Se $u \in H^2(\Omega)$ e $w \in H^1(\Omega)$ Então,*

$$-\int_\Omega w\Delta u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla w dx - \int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

Ver [9], página 105.

Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Seja $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por recorrência os espaços de Sobolev

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &= \big\{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., n\big\} \\ &= \big\{u \in L^p(\Omega); \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m, \quad \exists\, v_\alpha \in L^p(\Omega), \quad \text{tal que} \\ &\qquad \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\big\}. \end{aligned}$$

Denotamos por $v_\alpha = D^\alpha u$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{ou}$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{se} \quad p = \infty$$

é um espaço de Banach. Quando $p = 2$ temos o espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$.

Imersões de Sobolev.

Estamos interessados aqui na imersão dos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Temos três casos a considerar, $mp < n$, $mp > n$, e $mp = n$. Verifica-se então que $W^{m,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{q^*}(\Omega)$, para um q^* especial, visto a seguir.

Teorema 13 *Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Verifica-se:*

- *Se $mp < n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ para $p \leq q \leq q^*$ onde $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;*
- *Se $mp = n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q^*}(\mathbb{R}^n) \quad \forall q^* \in [p, \infty[$;*
- *Se $mp > n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

com imersões contínuas.

Demonstração: Ver [2].

No caso em que Ω é um aberto de classe C^1, com fronteira $\partial\Omega$ limitada tem-se:

Corolário 1.2 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então*

- *Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $p \leq q \leq q^*$ onde $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*
- *Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega) \quad \forall q^* \in [p, \infty)$;*
- *Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

com imersões contínuas.

Demonstração: Ver [2].

Observação: Usaremos a notação $Y \hookrightarrow X$ para designar que o espaço Y está imerso continuamente em X.

A seguir teremos outros espaços de Sobolev consistindo de aplicações contínuas sobre espaços de Banach.

Definição 1.7 *Seja X um espaço de Banach real com norma* $\|.\|_X$*. O espaço* $L^p(0,T;X)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, consiste de todas as funções mensuráveis* $u : [0,T] \longrightarrow X$*, com a norma dada por*

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|\omega(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$ *e*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \textit{ess} \|u(t)\|_X < \infty$$

para $p = \infty$*.*

Em ambos os casos, $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, com o produto escalar:

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(s),v(s))_X ds$$

Definição 1.8 *Denotamos por* $C([0,T];X)$ *o espaço das funções contínuas* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *com a norma:*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty$$

Definição 1.9 (Distribuição Vetorial) *Uma distribuição vetorial sobre* $(0,T)$*, com valores em* X*, é uma aplicação linear contínua sobre* $\mathcal{D}(0,T)$ *com valores em* X*. Denotamos o espaço das distribuições vetoriais com* $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$*.*

Exemplo 1.5 *Semelhante ao Exemplo 1.2, dada* $v \in L^p(0,T;X)$*, a aplicação definida por*

$$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)\, ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

é uma distribução vetorial.

Analogamente a Definição 1.4, dada $S \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$ definimos sua derivada de orden n por

$$\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

sendo $\dfrac{d^nS}{dt^n}$ também uma distribuição vetorial. Dizemos que $S_i \longrightarrow S$ em $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$ quando:

$$\big\langle S_i, \varphi \big\rangle \longrightarrow \big\langle S, \varphi \big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Definição 1.10 *Seja $\omega \in L^p(0,T,X)$. Se existe $\psi \in L^p(0,T,X)$ tal que*

$$\int_0^T \omega(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T \psi(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Então temos a derivada fraca $\omega' = \psi$ (derivada no sentido das distribuições vetoriais) e definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(0,T,X)$, das funções $\omega \in L^p(0,T,X)$ tal que $\omega' \in L^p(0,T,X)$, munido da seguinte norma

$$\|\omega\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\omega(t)\|_X^p + \|\omega'(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{se} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\omega\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} := \sup_{1 \leq t \leq T} \textit{ess}(\|\omega(t)\|_X + \|\omega'(t)\|_X) \quad \textit{se} \quad p = \infty.$$

Teorema 14 *Seja $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Então*

- $u \in C([0,T];X)$,
- $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \leq C\|u(t)\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$ *onde a constante C depende somente de T.*

Demonstração: Veja [3] página 286.

Capítulo 2

Equação de Kirchhoff com Dissipação Friccional

O objetivo deste capítulo é mostrar que existe uma única função $u = u(x,t)$, que seja solução do problema de equação de onda não linear do tipo Kirchhoff com amortecimento, governada pela equação:

$$u_{tt}(x,t) - M(\|\nabla u(x,t)\|_2^2)\Delta u(x,t) + \delta u_t(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty[; \tag{2.1}$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times [0,\infty[; \tag{2.2}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.3}$$

em um domínio Ω, subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega$ denotada por Γ, δ um número real positivo e $M(s)$ é uma função contínua em $[0,\infty[$, tal que $M(s) \geq \alpha + \beta s$ com $\alpha, \beta > 0$, para todo $s \geq 0$, Δ denota o operador de Laplace dado por $\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, t é a variável de tempo, u_0 e u_1 são funções dadas.

Além da existência e unicidade, estudaremos também a estabilização exponencial do problema (2.1)-(2.3). Em outras palavras, explicitaremos formas do decaimento exponencial de energia da solução deste problema, por um método direto.

Quando não houver confusão usaremos a notação $u(t)$, ou simplesmente u no lugar de $u(x,t)$. Para simplificar a leitura do texto, algumas vezes denotaremos com o mesmo símbolo C significando em momentos diferentes, constantes diferentes as quais não dependem da solução da equação. E denotaremos com C_δ constantes diferentes em momentos diferentes, porém dependendo do parâmetro δ.

2.1 Existência e Unicidade

Nesta seção, estudamos a existência e unicidade de solução para o problema $(2.1)-(2.3)$ e iniciaremos nosso estudo provando a existência.

Para introduzir formalmente o conceito de solução "fraca"do problema $(2.1)-(2.3)$, multiplicamos a equação (2.1) por $w \in H_0^1(\Omega)$ e integramos em Ω para obtermos

$$(u_{tt}, w) - M(\|\nabla u\|_2^2)(\Delta u, w) + \delta(u_t, w) = 0,$$

onde (,) indica o produto interno em $L^2(\Omega)$. Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, obtemos:

$$(u_{tt}, w) + M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u, \nabla w) + \delta(u_t, w) = 0. \tag{2.4}$$

Esta formulação variacional nos permite definir uma solução fraca para o problema $(2.1)-(2.3)$.

Definição 2.1 (Soluções fracas) *Dadas $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, uma solução fraca para o problema $(2.1)-(2.3)$, é uma função $u : \Omega \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, nos espaços*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)); \tag{2.5}$$

satisfazendo a equação

$$\tfrac{d}{dt}(u_t, w) + M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u, \nabla w) + \delta(u_t^m, w) = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$; e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \textit{em} \quad \Omega. \tag{2.7}$$

Definição 2.2 (Soluções fortes) *Dadas* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right] < 2\delta,$$

então uma solução forte para o problema $(2.1)-(2.3)$, *é uma função* $u : \Omega \times [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *nos espaços*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)); u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)); u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)); \quad (2.8)$$

satisfazendo a equação

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \delta u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty[; \tag{2.9}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.10}$$

A seguir enunciaremos um teorema que garante a existência de solução do sistema $(2.1) - (2.3)$.

Teorema 15 *Se* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, *então existe uma função* $u = u(x,t)$, *solução fraca para o problema* $(2.1) - (2.3)$. *Além disso, se* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right] < 2\delta, \tag{2.11}$$

então esta solução é forte. Aqui B *é definido por* (2.14)

Demonstração:

Na demonstração será usado o método de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o problema do teorema 15 por problemas análogos em dimensão finita.

Para fixar idéias, introduziremos algumas notações que serão usadas durante a prova do teorema.

Denotemos por $\hat{M}(\sigma)$ uma primitiva de $M(\sigma)$ dada por:

$$\hat{M}(\sigma) = \int_0^\sigma M(s)ds \tag{2.12}$$

Definimos a energia associada ao sistema $(2.1) - (2.3)$ por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\bigg(\|u_t\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)\bigg), \tag{2.13}$$

e sejam

$$B = max\{|M'(s)|; 0 \leq s \leq s_0\} \tag{2.14}$$

e

$$B_1 = max\{M(s); 0 \leq s \leq s_0\}, \quad \text{onde} \quad s_0 = \frac{2E(0)}{\alpha}. \tag{2.15}$$

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, logo, ele possui uma base de Hilbert enumerável, ou seja, existe uma seqüencia de funções (w_j), $w_j \in H_0^1(\Omega)$ para todo j, satisfazendo:

- Para cada m, o conjunto de vetores $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é linearmente independente;
- As combinações lineares finitas dos w_j são densas em $H_0^1(\Omega)$.

Em particular, consideraremos o conjunto de autofunções $\{w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots\}$ do operador $-\Delta$, pois, sabe-se que este conjunto forma uma base do espaço $H_0^1(\Omega)$ nas condições acima descritas.

Problema Aproximado

Seja $\mathbb{V}_m$ o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas primeiras m autofunções $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ do operador $-\Delta$ com autovalores associados (λ_j) para o autovetor (w_j). O problema aproximado consiste em encontrar uma função

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \in \mathbb{V}_m,$$

para $t \in [0, T_m[$, satisfazendo:

$$(u_{tt}^m, w) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla w) + \delta(u_t^m, w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_m; \tag{2.16}$$

$$u^m(x,0) = u_0^m(x), \quad \text{onde} \quad u_0^m(x) = \textstyle\sum_{j=1}^m \frac{(\nabla u_0, \nabla w_j)}{\|\nabla w_j\|_2^2} w_j(x); \tag{2.17}$$

$$u_t^m(x,0) = u_1^m(x), \quad \text{onde} \quad u_1^m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(u_1, w_j)}{\|w_j\|_2^2} w_j(x). \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18), obtemos que $u_0^m(x) \longrightarrow u_0(x)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_1^m(x) \longrightarrow u_1(x)$ em $L^2(\Omega)$.

A existência de solução para o sistema aproximado $(2.16) - (2.18)$, que é na verdade um sistema de equações diferenciais ordinárias, pode ser encontrada em [8], onde se garante além da existência, a unicidade de solução num intervalo maximal $[0, T_m[$.

A seguir, obteremos estimativas a priori para as soluções aproximadas $u^m(x,t)$, que nos permitirão extender estas soluções para todo $t \geq 0$ e obteremos subseqüências cujo limite é candidato a ser solução do sistema $(2.1) - (2.3)$.

Primeira Estimativa

Como o problema aproximado $(2.16) - (2.18)$ é válido para todo $w \in \mathbb{V}_m$, tomamos $w = u_t^m$, pois, $u_t^m = \displaystyle\sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_j \in \mathbb{V}_m$. Temos:

$$(u_{tt}^m, u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla u_t^m) + \delta(u_t^m, u_t^m) = 0.$$

Como $(u_{tt}^m, u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m\|_2^2$ e $(\nabla u^m, \nabla u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u^m\|_2^2)$, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m\|_2^2 + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u^m\|_2^2) + \delta\|u_t^m\|_2^2 = 0.$$

Lembrando que $\hat{M}$ é uma primitiva de M, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2) + \delta\|u_t^m\|_2^2 = 0.$$

Dessa forma chegamos às seguintes condições

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\big(\|u_t^m\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2)\big)\right] + \delta\|u_t^m\|_2^2 = 0.$$

Seja

$$E^m(t) = \frac{1}{2}\big(\|u_t^m\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2)\big),$$

substituindo na equação anterior, temos:

$$\frac{d}{dt}E^m(t) + \delta\|u_t^m\|_2^2 = 0.$$

Integrando de 0 a t em ambos os lados, onde $t \in [0, T_m[$, temos:

$$E^m(t) + \delta\int_0^t \|u_t^m\|_2^2 ds \leq E^m(0).$$

Pela desigualdade de Bessel, $E^m(0) \leq E(0)$, logo

$$E^m(t) + \delta\int_0^t \|u_t^m\|_2^2 ds \leq E^m(0) \leq E(0) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T_m[.$$

Esta limitação nos permite concluir que $T_m = \infty$. Para isso, usamos a teoria do "Potencial" introduzida por Sattinger e Payne em [10] e [11], onde a $E^m(t)$ satisfaz uma das duas propriedades:

$$T_m = +\infty \quad \text{ou} \quad T_m < \infty \text{ e } \lim_{t\uparrow T_m}\|E^m(t)\|_2^2 = +\infty.$$

A notação $t \uparrow T_m$ significa, quando t tende a T_m pela esquerda.

Obtemos então, a primeira estimativa a priori

$$E^m(t) + \delta\|u_t^m\|_2^2 \leq E(0) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T], T \geq 0. \tag{2.19}$$

Segunda Estimativa

Esta estimativa será feita para provar a existência de solução forte do problema $(2.1) - (2.3)$. Aqui suporemos que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$)e

$$\frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right] < 2\delta. \tag{2.20}$$

Temos que $-\Delta u_t^m = \sum_{j=1}^n g_{jm}(t)(-\Delta w_j) = \sum_{j=1}^n g_{jm}(t)(\lambda_j w_j) \in \mathbb{V}_m$, onde λ_j é o autovalor do operador $-\Delta$ associado a w_j. Então, na equação aproximada (2.16), tomamos $w = -\Delta u_t^m$ e temos que:

$$(u_{tt}^m, -\Delta u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla(-\Delta u_t^m)) + \delta(u_t^m, -\Delta u_t^m) = 0.$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, temos

$$(\nabla u_{tt}^m, \nabla u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\Delta u^m, \Delta u_t^m) + \delta(\nabla u_t^m, \nabla u_t^m) = 0.$$

Como $(\nabla u_{tt}^m, \nabla u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_t^m\|_2^2)$ e $(\Delta u^m, \Delta u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u^m\|_2^2)$, segue que

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla u_t^m\|_2^2 + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\Delta u^m\|_2^2 + \delta\|\nabla u_t^m\|_2^2 = 0$$

e, por outro lado,

$$\frac{d}{dt}\left[M(\|\nabla u^m\|_2^2)\|\Delta u^m\|_2^2\right] = \frac{1}{2}\|\Delta u^m\|_2^2\frac{d}{dt}M(\|\nabla u^m\|_2^2) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}\|\Delta u^m\|_2^2,$$

substituindo na equação anterior, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u_t^m\|_2^2 + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\|\Delta u^m\|_2^2\right] + \delta\|\nabla u_t^m\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\Delta u^m\|_2^2\frac{d}{dt}M(\|\nabla u^m\|_2^2).$$

Definamos

$$z^m(t) = \frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \|\Delta u^m\|_2^2. \tag{2.21}$$

Logo, na equação anterior, temos:

$$\frac{d}{dt}\Big(M(\|\nabla u^m\|_2^2)(z^m(t))\Big) + 2\delta\|\nabla u_t^m\|_2^2 = \|\Delta u^m\|_2^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))$$

Agora, derivando $M(\|\nabla u^m\|_2^2)(z^m(t))$ em relação a t, temos:

$$\frac{d}{dt}\Big(M(\|\nabla u^m\|_2^2)z^m(t)\Big) = M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) + z^m(t)\frac{d}{dt}M(\|\nabla u^m\|_2^2).$$

Assim, das duas equações anteriores, temos a igualdade

$$\begin{aligned} M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) + z^m(t)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) = +\|\Delta u^m\|_2^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) \\ -2\delta\|\nabla u_t^m\|_2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) = -z^m(t)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) + \|\Delta u^m\|_2^2\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) \\ -2\delta\|\nabla u_t^m\|_2^2. \end{aligned}$$

Pela definição (2.21), obtemos

$$M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(z^m(t)) = -2\delta\|\nabla u_t^m\|_2^2 - \left(\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}\right)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Seja

$$\gamma^m(t) = \frac{|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))|}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}. \tag{2.22}$$

Então, na equação anterior, temos

$$\frac{d}{dt}(z^m(t)) \leq (-2\delta + \gamma^m(t))\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}. \tag{2.23}$$

A seguir faremos uma estimativa para $\gamma^m(t)$. Antes, obsevamos que

$$(\|\nabla u^m\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{\alpha + \beta\|\nabla u^m\|_2}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

Agora, derivando $M(\|\nabla u^m\|_2^2)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) = M'(\|\nabla u^m\|_2^2)2(\nabla u^m, \nabla u_t^m).$$

Logo, por (2.14) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))\right| \leq 2B((\|\nabla u^m\|_2^2)^{\frac{1}{2}}(\|\nabla u_t^m\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Usando (2.24), temos

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))\right| \leq 2B\left[\frac{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}(\|\nabla u_t^m\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela definição (2.21), temos

$$|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))| \leq 2B\left[\frac{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}(z^m(t)M(\|\nabla u^m\|_2^2))^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando por $\frac{1}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}$ obtemos que

$$\gamma^m(t) \leq 2B\left[\frac{z^m(t)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.25}$$

Agora vamos provar que

$$-2\delta + \gamma^m(t) < 0 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{2.26}$$

De fato, para $t = 0$, de (2.21), por (2.17) e (2.18) temos que

$$2B\left[\frac{z^m(0)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} = 2B\left[\frac{\frac{\|\nabla u_t^m(0)\|_2^2}{M(\|\nabla u^m(0)\|_2^2)} + \|\Delta u^m(0)\|_2^2}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1^m\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0^m\|_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Pela desigualdade de Bessel e por (2.20), temos que:

$$2B\left[\frac{z^m(0)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right]^{\frac{1}{2}} < 2\delta \tag{2.27}$$

Logo, de (2.25), segue que:

$$\gamma^m(0) \leq 2B\left[\frac{z^m(0)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} < 2\delta. \tag{2.28}$$

Suponhamos que (2.26) não é válida para todo $t \geq 0$. Então, de (2.28) e da continuidade de $\gamma^m(t)$, temos que existe $t^* > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} &\gamma^m(t) \leq 2\delta \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t < t^*, \\ &\gamma^m(t^*) = 2\delta. \end{aligned} \tag{2.29}$$

De (2.23) e (2.29) , resulta que:

$$z^m(t^*) - z^m(0) = \int_0^{t^*} \frac{d}{dt}(z^m(s))ds \leq 0. \tag{2.30}$$

De (2.25) e (2.28), obtemos que:

$$\gamma^m(t^*) \leq 2B\left[\frac{z^m(0)}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} < 2\delta,$$

o que é uma contradição com (2.29) e, portanto, (2.26) é verdadeira.

Então, de (2.23), (2.26) e (2.27), temos que

$$z^m(t) \leq z^m(0) \leq \beta\left(\frac{\delta}{B}\right)^2,$$

Ou seja,

$$\frac{\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2}{M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)} + \|\Delta u^m(t)\|_2^2) \leq \beta\left(\frac{\delta}{B}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Da estimativa (2.19) e da desigualdade de Bessel, temos que $\|\nabla u^m(t)\|_2^2 < \frac{2E(0)}{\alpha}$. Logo, por (2.15), $M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) \leq B_1$. Então, multiplicando (2.31) por $M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)$ obtemos a segunda estimativa a priori:

$$\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq C, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, \infty[. \tag{2.32}$$

A seguir, usaremos as estimativas a priori (2.19) e (2.32) para provar a existência de solução para o problema $(2.1) - (2.3)$.

De (2.19), segue que para todo $T \geq 0$, u^m é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e u_t^m é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Portanto, pela compacidade fraca, existem subseqüências de (u^m) e (u_t^m) que denotaremos com o mesmo índice m, tais que

$$u^m \longrightarrow u \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega)), \tag{2.33}$$

e também,

$$u_t^m \longrightarrow v \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty((0, T); L^2(\Omega)). \tag{2.34}$$

Agora vejamos que $v = u_t$. De fato, de (2.33) e tendo em conta o Teorema de Representação de Riesz, temos que

$$\int_0^T (\nabla u^m, \nabla \varphi) dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla \varphi) dt$$

para toda $\varphi \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Como $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, temos também que

$$\int_0^T (u^m, \varphi) dt \longrightarrow \int_0^T (u, \varphi) dt. \tag{2.35}$$

para toda $\varphi \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$. Então, tomando $\varphi = w\phi_t(t)$ em (2.35), com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(0, T)$ temos

$$\int_0^T (u^m(t), w\phi_t(t)) dt = \int_0^T (u^m(t), w)\phi_t(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w)\phi_t(t) dt. \tag{2.36}$$

Por outro lado, de (2.34), temos também que

$$\int_0^T (u_t^m(t), \varphi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (v(t), \varphi(t))dt.$$

para toda $\varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Consideremos $\varphi = w\phi(t)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(0, T)$ temos que $\varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Então,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w)\phi(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v(t), w)\phi(t)dt. \tag{2.37}$$

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$ e de (2.36) e (2.37), concluímos que

$$\int_0^T (u(t), w)\phi_t(t)dt = -\int_0^T (v(t), w)\phi(t)dt.$$

Isto é,

$$\int_0^T (u(t)\phi_t(t), w)dt = -\int_0^T (v(t)\phi(t), w))dt$$

Pelo teorema de Fubini, temos

$$\left(\int_0^T (u(t)\varphi_t(t)dt, w\right) = \left(-\int_0^T (v(t)\varphi(t)dt, w\right),$$

para toda $\phi \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega))$. Então, como $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, temos que

$$\int_0^T (u(t)\varphi_t(t)dt = -\int_0^T (v(t)\varphi(t)dt.$$

para toda $\phi \in L^1(0, \infty; H_0^1(\Omega))$. Portanto, $v = u_t$ e podemos concluir que $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

A seguir, provaremos que u é uma solução fraca para o problema $(2.1) - (2.3)$ e começaremos provando que u é solução da equação variacional (2.6).

Como u^m é limitada em $L^\infty(o, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ e u_t^m é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, então da imersão compacta $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, temos que $u^m \longrightarrow u$ em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, logo,

$$\|\nabla u^m(t)\|_2^2 \longrightarrow \|\nabla u(t)\|_2^2 \quad \text{em} \quad C([0, T]),$$

e por ser M uma função de classe $C^1([0, \infty); \mathbb{R})$, obtemos que

$$M(\|\nabla u^m\|_2^2) \longrightarrow M(\|\nabla u\|_2^2) \quad \text{em} \quad C([0, T]).$$

Logo, podemos passar o limite no termo não linear e obtemos:

$$\int_0^T M(\|\nabla u^m\|)(\nabla u^m, \nabla w)dt \longrightarrow \int_0^T M(\|\nabla u\|)(\nabla u, \nabla w)dt. \tag{2.38}$$

E ainda, a convergência (2.34) nos diz que

$$\delta\int_0^T (u_t^m, w)dt \longrightarrow \delta\int_0^T (u_t, w)dt \tag{2.39}$$

Agora, para provar que u satisfaz a equação (2.6), lembremos que

$$(u_{tt}^m(t), w) + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla w) + \delta(u_t^m(t), w) = 0,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando por $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^T (u_{tt}^m(t), w)\phi(t)dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla w)\phi(t)dt \\ +\delta\textstyle\int_0^T (u_t^m(t), w)\phi(t)dt = 0,\end{aligned}$$

$\forall w \in \mathbb{V}_m$ e $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$. Integrando por partes a primeira integral, temos que

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t^m(t), w)\phi_t(t)dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla w)\phi(t)dt \\ +\delta\int_0^T (u_t^m(s), w)\phi(s)dt = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t^m(t), w)\phi_t(t)dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla w)\phi(s)dt = \\ -\delta\int_0^T (u_t^m(t), w)\phi(t)dt.\end{aligned}$$

$\forall w \in \mathbb{V}_m$ e $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$. De (2.38) e (2.39), podemos tomar o limite quando m tende para o infinito, para obtermos

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t(t), w))\phi_t(t)dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(t), \nabla w)\phi(t)dt = \\ +\delta\int_0^T (u_t(t), w)\phi(t)dt.\end{aligned} \tag{2.40}$$

$\forall w \in \mathbb{V}_m$ e $\phi \in D(0,T)$. Sendo $t \mapsto (u_t(t), w)$ uma função de $L^\infty(0,T)$, ela define uma distribuição sobre $(]0,T[)$ e

$$-\int_0^T (u_t(t), w(t))\phi_t(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t, w)\phi dt,$$

logo, da equação (2.40), temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t, w)\phi dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(t), \nabla w)\phi(t)dt = -\delta \int_0^T (u_t(t), w)\phi(t)dt,$$

$\forall w \in \mathbb{V}_{m_0}$ e $\phi \in D(0,T)$. Então,

$$\int_0^T \left[\frac{d}{dt}(u_t, w) + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(t), \nabla w(t))\right]\phi(t)dt = -\delta \int_0^T (u_t(t), w(t))\phi(t)dt,$$

$\forall w \in \mathbb{V}_m$ e $\phi \in D(0,T)$. Sendo $\bigcup_{m\geq 0} \mathbb{V}_m$ densos em $H_0^1(\Omega)$, conclui-se que a equação anterior é válida para toda $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O que prova a equação (2.6), ou seja, u satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u_t, w) + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(t), \nabla w(t)) + \delta(u_t(t), w(t)) = 0.$$

Do fato de u^m convergir fraco estrela para u em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ concluímos que $u \in L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))$ e também, como u_t^m converge fraco estrela para u_t em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $u_t \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)$. O próximo passo é provar que $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Sabemos que

$$\frac{d}{dt}(u_t, w) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u, \nabla w) + \delta(u_t, w) = 0.$$

Multiplicando por $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t, w)\phi dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u, \nabla w)\phi dt + \delta \int_0^T (u_t, w)\phi dt = 0,$$

ou seja,

$$-\int_0^T (u_t\phi_t, w)dt - \int_0^T M(\|\nabla u)\|_2^2)(\Delta u\phi, \nabla w)dt + \delta \int_0^T (u_t, w)\phi dt = 0,$$

logo,

$$(-\int_0^T u_t\phi_t dt, w) = \Big(\int_0^T (M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u\phi - \delta u_t)\phi dt, w\Big).$$

Daí,

$$(u_{tt}, w) = \Big(M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t, w\Big).$$

Daí, obtemos que

$$u_{tt} = M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t. \tag{2.41}$$

Como $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, então $\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)$, portanto $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. A seguir, vamos verificar que a função u satisfaz as condições iniciais. Começamos mostrando que $u(x,0) = u_0(x)$.

Seja $\phi \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ com $\phi(T) = 0$ e $\phi(0) = 1$, e $w \in L^2(\Omega)$ Como $u_t^m \longrightarrow u_t$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T (u_t^m, \phi w)dt \longrightarrow \int_0^T (u_t, \phi w)dt.$$

Integrando por partes, temos

$$(u^m, \phi w)|_0^{\mathrm{T}} - \int_0^T (u^m, \phi_t w)dt \longrightarrow (u, \phi w)|_0^{\mathrm{T}} - \int_0^T (u, \phi_t w)dt.$$

Agora, como $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, o teorema (14) garante que $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, portanto, chegamos a

$$-(u^m(0), w) - \int_0^T (u^m, \phi_t w)dt \longrightarrow -(u(0), w) - \int_0^T (u, \phi_t w)dt. \tag{2.42}$$

De (2.46), temos que $(u^m(0)) \longrightarrow u$ forte em $H_0^1(\Omega)$, logo $u^m(0) \longrightarrow u$ forte em $L^2(\Omega))$ e consequentemente, $u^m(0) \longrightarrow u$ fraco em $L^2(\Omega))$. Além disso, como $(u^m) \longrightarrow u$ fraco estrela em $L^\infty([0,T];H_0^1(\Omega))$, temos que

$$-(u^m(0), w) - \int_0^T (u^m, \phi_t w)dt \longrightarrow -(u_0, w) - \int_0^T (u, \phi_t w)dt \tag{2.43}$$

Da unicidades dos limites (2.42) e (2.43), obtemos que: $(u(0), w) = (u_0, w)$ e como $w \in L^2(\Omega)$ foi arbitrário, temos

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Como queríamos. Agora, resta provar que $u_t(x, 0) = u_1(x)$. Seja $\phi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ com $\phi(0) = 1$ e $\phi(T) = 0$.

Multiplicando a equação aproximada (2.16) por ϕ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T (u_{tt}^m, w)\phi dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla w)\phi dt + \delta \int_0^T (u_t^m, w)\phi dt = 0.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} -(u_t^m(0), w) + \textstyle\int_0^T (u_t^m, \phi_t w)dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla w)\phi dt \\ +\delta \textstyle\int_0^T (u_t^m, w)\phi dt = 0 \end{aligned}$$

Tomando-se o limite quando $m \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$-(u_1, w) + \int_0^T (u_t, \phi_t w)dt + \int_0^T M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u, \nabla w)\phi dt + \delta \int_0^T (u_t, w)\phi dt = 0. \quad (2.44)$$

Por outro lado, pela equação (2.41), temos:

$$\int_0^T (\frac{d}{dt}(u_t, \phi w)dt + \int_0^T (M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u, \phi w)dt + \delta \int_0^T (u_t, \phi w) = 0,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.Integrando por partes, temos:

$$(u_t, \phi w)|_0^T - \int_0^T (u_t, \phi_t w)dt + \int_0^T (M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u, \phi w)dt + \delta \int_0^T (u_t, \phi w) = 0,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. Daí,

$$(u_t(0), w) - \int_0^T (u_t, \phi_t w)dt + \int_0^T (M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u, \phi w)dt + \delta \int_0^T (u_t, \phi w) = 0, \quad (2.45)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. Comparando as equações (2.44) e (2.45), temos que:

$$(u_t(0), w) = (u_1, w), \quad \text{para todo} \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

de onde concluimos que

$$u_t(0) = u_1.$$

Portanto u satisfaz as condições iniciais.

Agora, veremos que, se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right] < 2\delta,$$

então u é uma solução forte do problema $(2.1) - (2.3)$.

Da segunda estimativa, equação (2.32), temos que, para todo $T \geq 0$: u^m é limitada em $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e u_t^m é limitada em $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Portanto, pela compacidade fraca, existem subseqüências de (u^m) e (u_t^m) que denotaremos com o mesmo índice m, tais que:

$$u^m \longrightarrow u \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.46}$$

e também,

$$u_t^m \longrightarrow u_t \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega)). \tag{2.47}$$

Observe que anteriormente, já vimos que u é uma solução fraca do problema, e agora, estamos em um caso particular das soluções fracas e tudo que foi feito para essas soluções, continua válido, e segue que: u satisfaz a equação (2.9), além disso, u satisfaz as condições iniciais. Resta agora, verificarmos que $u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)$.
Sabemos que u satisfaz a equação variacional

$$\frac{d}{dt}(u_t, w) + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(t), \nabla w) + \delta(u_t(t), w) = 0.$$

Multiplicando por $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T (u_{tt}, w)\phi dt - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u, \nabla w)\phi dt + \delta \int_0^T (u_t, w)\phi dt = 0.$$

logo,

$$\int_0^T (u_t\phi_t, w)dt + M(\|\nabla u)\|_2^2)(\Delta u\phi, \nabla w)dt + \delta \int_0^T (u_t, w)\phi dt = 0.$$

Ou seja,

$$\left(\int_0^T u_t\phi_t dt, w\right) = \left(\int_0^T M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u\phi - \delta u_t\phi, w\right)dt.$$

Daí,

$$(u_{tt}, w) = \left(\int_0^T \left(M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t \phi, \right) dt. \right.$$

Logo, obtemos que

$$u_{tt} = M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t \quad \in L^\infty(o, T; L^2(\Omega)), \quad T \geq 0. \tag{2.48}$$

$u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. E, portanto, u é uma solução forte para a equação. $\square$

A unicidade de solução é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 16 *Se* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\frac{2B}{\beta}\left[\frac{\|\nabla u_1\|_2^2}{\alpha} + \|\Delta u_0\|_2^2\right] < 2\delta,$$

então o problema $(2.1) - (2.3)$ *tem uma única solução forte.*

Demonstração:

Suponhamos que u^1 e u^2 sejam duas soluções do problema $(2.1) - (2.3)$. Consideremos $w(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$. Desde que u^1 e u^2 tenham os mesmos dados iniciais, segue que $w_0(x) = 0$ e $w_1(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Então, temos que u^1 e u^2 satisfazem respectivamente as seguintes equações:

$$u_{tt}^1 - (M(\|\nabla u^1\|_2^2)\Delta u^1 + \delta u_t^1 = 0.$$
$$u_{tt}^2 - (M(\|\nabla u^2\|_2^2)\Delta u^2 + \delta u_t^2 = 0.$$

Subtraindo a segunda da primeira equação, temos

$$u_{tt}^1 - u_{tt}^2 - M(\|\nabla u^1\|_2^2)(\Delta u^1 - \Delta u^2) - (M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2)\Delta u^2$$
$$+\delta(u_t^1 - u_t^2) = 0.$$

Substituindo $w = u^1 - u^2$, temos

$$w_{tt} - M(\|\nabla u^1\|_2^2)\Delta w + \delta w_t = \left(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2)\right)\Delta u^2.$$

Multiplicando por w_t e integrando em Ω, temos

$$(w_{tt}, w_t) - M(\|\nabla u^1\|_2^2)(\Delta w, w_t) + \delta(w_t, w_t) = \Big(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2) \Big)(\Delta u^2, w_t).$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, temos que:

$$\begin{aligned}(w_{tt}, w_t) + M(\|\nabla u^1\|_2^2)(\nabla w, \nabla w_t) &+ \delta(w_t, w_t) = \\ & \Big(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2) \Big)(\nabla u^2, \nabla w_t).\end{aligned}$$

Como $(w_{tt}, w_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w_t\|_2^2)$ e $(\nabla w, \nabla w_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|_2^2)$, segue que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w_t\|_2^2) + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|_2^2) &+ \delta\|w_t\|_2^2 \\ &= \Big(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2) \Big)(\Delta u^2, w_t).\end{aligned}$$

Na equação anterior, substituindo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2 \Big) &= M'(\|\nabla u^1\|_2^2)(\nabla u^1, \nabla u_t^1)(\|\nabla w\|_2^2) \\ &\quad + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|_2^2),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_t\|_2^2 + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2 \Big) &+ \delta\|w_t\|_2^2 \\ &= \Big(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2) \Big)(\Delta u^2, w_t) \\ &\quad + M'(\|\nabla u^1\|_2^2)(\nabla u^1, \nabla u_t^1)\|\nabla w\|_2^2.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Sachwarz, temos que $(\nabla u^1, \nabla u_t^1) \leq \|\nabla u^1\|_2^2\|\nabla u_t^1\|_2^2$ e também que $(\Delta u^2, w_t) \leq \|\Delta u^2\|_2^2\|w_t\|_2^2$. Logo, da equação anterior, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_t\|_2^2) + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2 \Big) &+ \delta\|w_t\|_2^2 \leq \\ & \Big(M(\|\nabla u^2\|_2^2) - M(\|\nabla u^1\|_2^2) \Big)\|\Delta u^2\|_2^2\|w_t\|_2^2 \\ & + M'(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla u^1\|_2^2\|\nabla u_t^1\|_2^2\|\nabla w\|_2^2.\end{aligned}$$

Por serem u^1 e u^2 soluções fortes do problema $(2.1) - (2.3)$, segue da segunda estimativa, equação (2.32) que $u^1, u^2 \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ e $u_t^1, u_t^2 \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ para todo $T \geq 0$. Além disso, pelo fato de M ser uma função de classe $C^1([0,\infty[)$, temos que $M(\|\nabla u^2\|_2^2)$, $M(\|\nabla u^1\|_2^2)$ e $M'(\|\nabla u^1\|_2^2)$ são limitadas, logo, temos que

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\bigg(\|w_t\|_2^2) + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2\bigg) \leq C(\|w_t\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2).$$

Como por hipótese $M(s) \geq \alpha + \beta s$, temos que $\frac{M(\nabla u^1\|_2^2)}{\alpha} \geq 1$, logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg(\|w_t\|_2^2) + M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2\bigg) + \delta\|w_t\|_2^2 \leq C(\|w_t\|_2^2 + \frac{1}{\alpha}\|M(\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2),$$

daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg(\|w_t\|_2^2) + (M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2\bigg) + \delta\|w_t\|_2^2 \leq C_1\bigg(\|w_t\|_2^2\| + M(\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2\bigg).$$

Denotando por $I(t) = \frac{d}{dt}\bigg(\|w_t\|_2^2) + (M(\|\nabla u^1\|_2^2)\|\nabla w\|_2^2\bigg)$, pela desigualdade de Gronwal, segue que:

$$I(t) \leq I(0)e^{C_0 t}.$$

Como $I(0) = 0$, concluímos que $w = 0$, ou seja, $u^1 = u^2$. Portanto, a solução do problema $(2.1) - (2.3)$ é única. $\square$

2.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção, obtemos informações sobre o comportamento da energia associada ao sistema $(2.1) - (2.3)$. Onde a energia do sistema é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\bigg(\|u_t\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)\bigg). \tag{2.49}$$

Diferenciando $E(t)$ com relação a t, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = (u_t, u_{tt}) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2),$$

substituindo u_{tt} dada por (2.1), obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = (u_t, M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E(t) = M(\|\nabla u\|_2^2)(u_t, \Delta u) - (u_t, \delta u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u_t, \nabla u) - \delta(u_t, u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Substituindo $(\nabla u_t, \nabla u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2)$, segue que:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2) - \delta\| \ u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = -\delta\|u_t\|_2^2 \tag{2.50}$$

A relação acima mostra que a energia $E(t)$ do sistema $(2.1) - (2.3)$ é uma função que decresce com o tempo, devido à dissipação friccional δu_t e assim,

$$E(t) \leq E(0) \tag{2.51}$$

para todo $t \in [0, \infty[$, onde

$$E(0) = \frac{1}{2}\bigg(\|u_1\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u_0\|_2^2)\bigg)$$

O teorema a seguir nos garante o decaimento exponencial de energia de $E(t)$.

Teorema 17 *Seja* $u = u(x,t)$ *uma solução forte do sistema* $(2.1) - (2.3)$. *Então, a energia* $E(t)$ *dada por* (2.49), *satisfaz:*

$$E(t) \leq NE(0)e^{-\mu t}, \tag{2.52}$$

onde N e μ *são constantes positivas, dependendo somente do parâmetro* δ.

Demonstração:

Para provar este teorema, usaremos o seguinte lema.

Lema 3 *Para toda solução $u = u(x,t)$ do sistema $(2.1) - (2.3)$, definindo o funcional de energia R(t) por:*

$$R(t) = (u, u_t) + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2, \tag{2.53}$$

temos

(i) $\frac{d}{dt}(R(t)) \leq \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$,
onde $K_1 = min\{M(s); s \in [0, K]\}$ *e* $K_2 = max\{M(s); s \in [0, K]\}$, *e além disso,* $R(t)$ *satisfaz:*

(ii) $|R(t)| \leq C_0 E(t) \quad \forall t \geq 0$, *para alguma constante positiva C.*

Prova do lema

Diferenciando $R(t)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}R(t) = (u, u_{tt}) + (u_t, u_t) + \delta(u, u_t).$$

Substituindo u_{tt} dada por (2.1), segue que

$$\frac{d}{dt}R(t) = (u, M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t) + (u_t, u_t) + \delta(u, u_t).$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, obtemos que

$$\frac{d}{dt}R(t) = -M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u, \nabla u) - \delta(u, u_t) + (u_t, u_t) + \delta(u, u_t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}R(t) = -M(\|\nabla u\|_2^2)(\|\nabla u\|_2^2) + \|u_t\|_2^2.$$

Por outro lado, observe que: De (2.51), segue que $\|\nabla u\|_2^2 \leq K$ para todo $t \geq 0$ e alguma constante K positiva e, como $\hat{M} = \int_0^s M(\sigma)d\sigma$, resulta que: $\hat{M}(s) \leq \frac{K_2}{K_1}M(s)s$ para todo $s \in [0, K]$. Portanto, temos que

$$\frac{d}{dt}R(t) \leq \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Temos também que,

$$|R(t)| = \Big|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2\Big|,$$

e pela desigualdade triangular, chegamos a

$$|R(t)| \leq \left|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx\right| + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2.$$

Usando a desigualdade de Holder, obtemos:

$$|R(t)| \leq \left(\int_\Omega (u(t))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (u_t(t))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2.$$

Pela desigualdade de Young, temos que

$$|R(t)| \leq \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}|\|u_t\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2 = \left(\frac{1+\delta}{2}\right)|\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2,$$

ou seja,

$$|R(t)| \leq C_\delta\big(|\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\big).$$

Por outro lado, da desigualdade de Poincaré, segue que

$$|R(t)| \leq C_\delta\big(k_0|\|\nabla u\|_2^2 + |\|u_t\|_2^2\big).$$

Como $\hat{M}(|\|\nabla u\|_2^2) \geq \alpha\|\nabla u\|_2^2$, então

$$|R(t)| \leq C_\delta\big(\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2) + \|u_t\|_2^2\big) \leq C_0 E(t).$$

E, portanto, o lema está provado.

Agora, usando o lema anterior, vamos provar o teorema (17).

Definimos o funcional de energia de Lyapunov $L(t)$ por

$$L(t) = E(t) + \varepsilon R(t)$$

para ε pequeno. Então, $L(t)$ satisfaz

$$\frac{1}{2}E(t) \leq L(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \tag{2.54}$$

e

$$\frac{d}{dt}(L(t)) \leq -C_0 L(t) \tag{2.55}$$

Com efeito, usando o lema anterior, temos

$$-C_0 E(t) \leq R(t) \leq C_0 E(t)$$

multiplicando por ε, vem

$$-C_0 \varepsilon E(t) \leq \varepsilon R(t) \leq C_0 \varepsilon E(t).$$

somando $E(t)$ em ambos os lados, temos que

$$E(t) - C_0 \varepsilon E(t) \leq \varepsilon R(t) + E(t) \leq C_0 \varepsilon E(t) + E(t),$$

ou seja,

$$(1 - C_0 \varepsilon) E(t) \leq L(t) \leq (1 + C_0 \varepsilon) E(t).$$

Observe que, se fixarmos $\varepsilon \leq \frac{1}{2C_0}$, então

$$\frac{1}{2} E(t) \leq L(t) \leq \frac{3}{2} E(t) \tag{2.56}$$

e (2.54) está provada.

Por outro lado, derivando $L(t)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt} L(t) = \frac{d}{dt}(E(t)) + \frac{d}{dt}(\varepsilon R(t)).$$

De (2.50) e do lema anterior, resulta que

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -\delta \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2} \varepsilon \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -(\delta - \varepsilon) \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \frac{K_1}{K_2} \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Então, para $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\frac{\delta}{2}\|u_t\|_2^2 - \frac{\delta K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$$

então, seja $\varepsilon = min\{\frac{1}{2C}, \frac{\delta}{2}\}$, obtemos que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -C_1 E(t)$$

e também, vale (2.56). Daí,

$$\frac{d}{dt}L(t) + C_1 E(t) \leq 0$$

Assim, usando novamente (2.56), temos que

$$\frac{d}{dt}L(t) + 2C_1 L(t) \leq 0.$$

Seja $\mu = 2C_1$. Então,

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t}L(t)) \leq 0$$

e obtemos que

$$L(t) \leq L(0)e^{-\mu t}.$$

Usando novamente (**??**), temos que

$$E(t) \leq 2L(t) \leq L(0)e^{\mu t} \leq 3E(0)e^{-\mu t}.$$

De onde obtemos que

$$E(t) \leq NE(0)e^{-\mu t}$$

onde $N = 3$ e $\mu = 2C_1$. □

Conclusão: Se o termo de amortecimento δu_t é introduzido, e, se as condições inicias são suficientemente pequenas e suficientemente suaves, então existe uma solução forte global e a energia de primeira ordem desta solução decai exponencialmente com o tempo.

Capítulo 3

Equação de Kirchhoff com Dissipação Interna do Tipo Kelvin-Voigt

Nesta seção, analisamos a existência e unicidade de solução para o seguinte o problema governado pela equação:

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta\Delta u_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times [0,\infty[; \tag{3.1}$$

com as condições de fronteira

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \quad \times [0,\infty[; \tag{3.2}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x) \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.3}$$

Em um domínio Ω, subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$, $\delta > 0$, onde $M(s)$ é uma função contínua em $[0,\infty[$, tal que $M(s) \geq \alpha + \beta s$ com $\alpha, \beta > 0$, $M'(s) \geq 0$ para todo s, Δ denota o operador de Laplace dado por $\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, t é a variável de tempo e u_0 e u_1 são funções dadas.

Além da existência e unicidade, estudaremos também a estabilização exponencial do problema (3.1)-(3.3). Em outras palavras, explicitaremos formas do decaimento exponencial de energia da solução deste problema, por um método direto.

Quando não houver confusão usaremos a notação $u(t)$, ou simplesmente u no lugar de $u(x,t)$. Para simplificar a leitura do texto, algumas vezes denotaremos com o mesmo símbolo C significando em momentos diferentes, constantes diferentes as quais não dependem da solução da equação. E denotaremos com C_δ constantes diferentes em momentos diferentes, porém dependendo do parâmetro δ.

3.1 Existência e Unicidade

A próxima etapa consiste em provar a existência de solução. Começamos, com algumas definições.

Definição 3.1 (Soluções fracas) *Se* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, *então, uma solução fraca para o problema* $(3.1)-(3.3)$ *é uma função* $u : \Omega \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *nos espaços*

$$\begin{aligned} u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)); \end{aligned} \tag{3.4}$$

satisfazendo a equação

$$\tfrac{d}{dt}(u_t,w) + M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u,\nabla w) + \delta(\nabla u_t^m,\nabla w) = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$; *e as condições iniciais*

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \textit{em} \quad \Omega. \tag{3.6}$$

Definição 3.2 (Soluções fortes) *Se* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, *então, uma solução forte para o problema* $(3.1)-(3.3)$ *é uma função* $u : \Omega \times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *nos espaços*

$$\begin{aligned} u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)); u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \end{aligned} \tag{3.7}$$

satisfazendo a equação

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta\Delta u_t^m = 0, \quad \textit{em} \quad \Omega\times]0,\infty[; \tag{3.8}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x) \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \textit{em} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

A seguir enunciaremos um teorema que nos garante a existência de solução do problema $(3.1) - (3.3)$.

Teorema 18 *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, então, existe uma solução fraca u para o problema $(3.1) - (3.3)$, e além disso, se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ a solução u será forte.*

Observação: A diferença do capítulo anterior, é que aqui não precisamos que os dados iniciais sejam pequenos.

Demonstração: A demonstração será análoga ao caso da demonstração do teorema 15 do capítulo anterior, usaremos também o método de aproximação de Galerkin.

Durante a demonstração, usaremos as seguintes notações: Denotemos por $\hat{M}(\sigma)$ uma primitiva de $M(\sigma)$ dada por:

$$\hat{M}(\sigma) = \int_0^\sigma M(s)ds \tag{3.10}$$

Definimos a energia associada ao sistema por:

$$E(t) = \frac{1}{2}[\|u_t\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)], \tag{3.11}$$

e sejam

$$B = max\{M'(s); 0 \leq s \leq s_0\} \tag{3.12}$$

e

$$B_1 = max\{M(s); 0 \leq s \leq s_0\}, \quad \text{onde} \quad s_0 = \frac{2E(0)}{\alpha}. \tag{3.13}$$

Problema Aproximado

Seja $\mathbb{V}_m$ o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas primeiras m autofunções $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ do operador $-\Delta$ com autovalores associados (λ_j) para o autovetor (w_j). O problema aproximado consiste em determinar $u^m = \sum_{j=1}^m g_{jm} w_j \in \mathbb{V}_m$ tal que:

$$(u_{tt}^m, w) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla w) + \delta(\nabla u_t^m, \nabla w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_m; \tag{3.14}$$

$$u^m(x,0) = u_0^m(x) \quad \text{em} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \quad \text{Onde} \quad u_0^m(x) = \textstyle\sum_{j=1}^m \frac{(\nabla u_0, \nabla w_j)}{\|\nabla w_j\|_2^2} w_j(x); \tag{3.15}$$

$$u_t^m(x,0) = u_1^m(x) \quad \text{em} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \quad \text{Onde} \quad u_1^m(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(u_1, w_j)}{\|w_j\|_2^2} w_j(x). \tag{3.16}$$

Sabemos que $u_0^m(x) \longrightarrow u_0(x)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_1^m(x) \longrightarrow u_1(x)$ em $L^2(\Omega)$.

A solução do sistema aproximado $(3.14) - (3.16)$ que é um sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser encontrada em [8] onde se garante além da existência, a unicidade de solução num intervalo maximal $[0, T_m[$.

Agora obteremos as estimativas a priori que nos permitirão extender a solução do problema aproximado $(3.1) - (3.3)$ para todo $t \geq 0$ e obteremos subsequências cujo limite é o canditado a ser solução do sistema $(3.1) - (3.3)$.

Primeira Estimativa

A equação (3.14) é válida para todo $w \in \mathbb{V}_m$, e temos que $u_t^m \in \mathbb{V}_m$, pois, $u_t^m = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_j$. Então, no problema aproximado, fazendo $w = u_t^m$, temos:

$$(u_{tt}^m, u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla u_t^m) + \delta(\nabla u_t^m, \nabla u_t^m) = 0$$

Como $(u_{tt}^m, u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_t^m\|_2^2)$ e $(\nabla u^m, \nabla u_t^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u^m\|_2^2)$, temos:

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(\|u_t^m\|_2^2) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(\|\nabla u^m\|_2^2) + \delta(\nabla u_t^m, \nabla u_t^m) = 0.$$

Pela definição de $\hat{M}$, $M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u^m\|_2^2) = \frac{d}{dt}\hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2)$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left[\|u^m\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2)\right]\right] + \delta(\|\nabla u_t^m\|_2^2) = 0.$$

Seja $E^m(t) = \|u^m\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u^m\|_2^2)$, então, temos:

$$\frac{d}{dt}E^m(t) + \delta\|\nabla u_t^m\|_2^2) = 0$$

Tomando $t \in (0, \infty)$ e integrando de 0 a t em ambos os lados, temos:

$$E^m(t) + \delta\int_0^T (\|\nabla u_t^m(s)\|_2^2)ds = E^m(0),$$

Pela desigualdade de Bessel, segue que:

$$E^m(t) + \delta\int_0^T (\|\nabla u_t^m(s)\|_2^2)ds = E^m(0) \leq E(0) \quad \forall t \in [0, T_m[.$$

Desta limitação concluímos que $T_m = \infty$, usando a teoria do "Potencial" introduzida por Sattinger e Payne em [10] e [11], onde a $E^m(t)$ satisfaz uma das duas propriedades:

$$T_m = +\infty \quad \text{ou} \quad T_m < \infty \text{ e } \lim_{t\uparrow T_m} \|E^m(t)\|_2^2 = +\infty.$$

Onde $t \uparrow T_m$ significa que t tende a T_m pela esquerda.

Logo, obtemos que:

$$E^m(t) + \delta\int_0^T (\|\nabla u_t^m(s)\|_2^2)ds = E^m(0) \leq E(0) \quad \forall t \in [0, T], T \geq 0. \tag{3.17}$$

Segunda Estimativa

Aqui, estamos supondo que $u_0 \in L^\infty(0, T; H_0^1(\omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e vamos obter uma estimativa a priori que nos permite concluir a existência de solução forte para o problema $(3.1) - (3.3)$.

Temos que $-\Delta u_t^m = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)(-\Delta w_j) = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\lambda_j w_j \in \mathbb{V}_m$. Então, em (3.14), fazendo $w = -\Delta u_t^m$, temos

$$(u_{tt}^m, -\Delta u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\nabla u^m, \nabla(-\Delta u_t^m)) - \delta(\nabla u_t^m, \nabla(-\Delta u_t^m)) = 0.$$

Pela fórmula de Green e as condições de fronteira, temos

$$(\nabla_{tt}^m, \nabla u_t^m) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)(\Delta u^m, \Delta u_t^m)) + \delta(\Delta u_t^m, \Delta u_t^m) = 0,$$

ou seja,

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(\|\nabla u_t^m\|_2^2) + \tfrac{1}{2}M(\|\nabla u^m\|_2^2)\tfrac{d}{dt}\|\Delta u^m\|_2^2 + \delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 = 0$$

como
$\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)\|\Delta u^m\|_2^2) = (\|\Delta u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\Delta u^m\|_2^2)),$
substituindo na equação anterior, temos

$$\tfrac{d}{dt}\left[\|\nabla u_t^m\|_2^2 + M(\|\nabla u^m\|_2^2)\|\Delta u^m\|_2^2\right] + 2\delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 = (\|\Delta u^m\|_2^2)\tfrac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Seja

$$z^m(t) = \frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \|\Delta u^m\|_2^2 \tag{3.18}$$

assim, a equação anterior fica sendo

$$\tfrac{d}{dt}[z^m(t)M(\|\nabla u^m\|_2^2)] + 2\delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 = (\|\Delta u^m\|_2^2)\tfrac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Agora, derivando $M(\|\nabla u^m\|_2^2)(z^m(t))$em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))z^m(t)) = M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(z^m(t)) + z^m(t)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Pelas duas equaões anteriores, temos a igualdade

$$M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) + z^m(t)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)) = (\|\Delta u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla$$
$$-2\delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 u^m\|_2^2)).$$

Daí, temos que

$$M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) = -2\delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 + (\|\Delta u^m\|_2^2 - z^m(t))\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Então, pela definição (3.18), temos

$$M(\|\nabla u^m\|_2^2)\frac{d}{dt}z^m(t) = -2\delta\|\Delta u_t^m\|_2^2 - \left(\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}\right)\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2)).$$

Multiplicando por $\frac{1}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}$, segue que

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq -2\delta\frac{\|\Delta u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \frac{|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_t^m\|_2^2))|}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}\left(\frac{\|\nabla u_t^m}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}\right).$$

Consideremos

$$\gamma^m(t) = \frac{|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_t^m\|_2^2))|}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}. \tag{3.19}$$

substituindo na equação anterior, temos que

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq -2\delta\frac{\|\Delta u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \gamma^m(t)\frac{|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u_t^m\|_2^2))|}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq \gamma^m(t)\left(\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)}\right).$$

Somando $\gamma^m(t)(\|\Delta u_t^m\|_2^2)$ no lado direito da equação, obtemos

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq \gamma^m(t)\left(\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \|\Delta u_t^m\|_2^2\right).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}z^m(t) \leq \gamma^m(t)z^m(t).$$

Integrando de 0 a t em ambos os lados, temos

$$z^m(t) - z^m(0) \leq \int_0^t \gamma^m(s)z^m(s)ds$$

Pela desigualdade de Gronnwall, temos

$$z^m(t) \leq z^m(0)\exp\int_0^t \gamma^m(s)ds. \tag{3.20}$$

Por outro lado, derivando $M(\|\nabla u^m\|_2^2)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}M(\|\nabla u^m\|_2^2) = 2M'(\|\nabla u^m\|_2^2)2(\nabla u^m, \nabla u_t^m).$$

Por (3.12), temos

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))\right| \leq |2B(\nabla u^m, \nabla u_t^m)|.$$

Usando a desigualdade Cauchy-Schwarz

$$\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))\right| \leq 2B\|\nabla u^m\|_2\|\nabla u_t^m\|_2.$$

Pela primeira estimativa, $\|\nabla u^m\|_2 < C$. Logo,

$$|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))| \leq C\|\nabla u_t^m\|_2.$$

Agora, da hipótese $M(\|\nabla u^m\|_2^2) \geq \alpha$, temos que $\frac{1}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} \leq \frac{1}{\alpha}$, portanto,

$$\frac{\left|\frac{d}{dt}(M(\|\nabla u^m\|_2^2))\right|}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} \leq C\|\nabla u_t^m\|_2,$$

ou seja,

$$(\gamma^m(t)) \leq C\|\nabla u_t^m\|_2.$$

Substituindo em (3.20), temos

$$z^m(t) \leq z^m(0)\exp\left(C\int_0^t \|\nabla u_t^m(s)\|_2 ds\right).$$

Usando a desigualdade de Holder, temos

$$z^m(t) \leq z^m(0)\exp\left(C(\int_0^t \|\nabla u_t^m(s)\|_2^2 ds)^{\frac{1}{2}} t\right).$$

Como pela primeira estimativa, $\int_0^t \|\nabla u_t^m(s)\|_2^2 ds) \leq C$, segue que:

$$z^m(t) \leq z^m(0)e^{Ct}$$

Ou seja,

$$\frac{\|\nabla u_t^m\|_2^2}{M(\|\nabla u^m\|_2^2)} + \|\Delta u^m\|_2^2 \leq C.$$

Pela estimativa (2.21), temos que $(\|\nabla u^m\|_2^2) \leq \frac{2E(0)}{\alpha}$, e por (3.13), temos que $M(\|\nabla u^m\|_2^2) \leq B_1$ e assim, segue a segunda estimativa a priori

$$\|\nabla u_t^m\|_2^2 + \|\Delta u^m\|_2^2 \leq C. \tag{3.21}$$

Como no caso do primeiro problema, com essas estimativa a priori obtidas, podemos concluir que existe uma função $u = u(x,t)$ solução do teorema (18).

Agora vamos enunciar um teorema que nos garante a unicidade de solução forte para o sistema $(3.1) - (3.3)$.

Teorema 19 *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, então o problema $(3.1) - (3.3)$ tem uma única solução forte.*

Demonstração: A demonstração deste teorema é feita de uma forma similar à demonstração do teorema 16 e não será feita aqui.

A seguir, vamos provar que a solução do problema $(3.1) - (3.3)$ decai exponencialmente quando o tempo cresce.

3.2 Comportamento Assintótico

Neste capítulo obtemos informações sobre o comportamento da energia associada ao sistema $(3.1) - (3.3)$ Em outras palavras, vamos estabelecer o decaimento exponencial de energia para o para o amortecimento interno do material do tipo Kelvin-Voigt sendo a energia definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\bigg(\|u_t\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)\bigg). \tag{3.22}$$

Diferenciando $E(t)$ com relação a t, temos:

$$\frac{d}{dt}E(t) = (u_t, u_{tt}) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2),$$

substituindo u_{tt} dada pela equação (2.1), temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = (u_t, M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta\Delta u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}E(t) = M(\|\nabla u\|_2^2)(u_t, \Delta u) - (\nabla u_t, \delta \nabla u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u_t, \nabla u) - \delta(\nabla u_t, \nabla u_t) + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Como $(\nabla u_t, \nabla u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2)$, temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2) - \delta\| \ \nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Logo, obtemos que:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\delta\|\nabla u_t\|_2^2.$$

A relação acima mostra que a energia $E(t)$ do sistema (1) é uma função que decresce com o tempo, ou seja, é uma energia dissipativa com o tempo para o amortecimento interno do material do tipo Kelvin-Voigt e assim,

$$E(t) < E(0) \tag{3.23}$$

para todo $t \in [0, \infty[$, onde

$$E(0) = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_2^2 + \hat{M}(\|\nabla u_0\|_2^2)\right).$$

O teorema a seguir nos garante o decaimento exponencial de energia da solução forte u do sistema $(3.1) - (3.3)$.

Teorema 20 *Seja $u = u(x,t)$ uma solução regular do problema* $(3.1) - (3.3)$. *Então, a energia $E(t)$ dada por* (3.22), *satisfaz:*

$$E(t) < \hat{N}e^{-\kappa t}E(0)$$

Onde $\hat{N} > 1$ e $\kappa > 0$ são constantes dependendo somente do parâmetro δ.

Demonstração: Para provar este teorema, provaremos primeiro o seguinte lema.

Lema 4 *Para toda solução $u = u(x,t)$ do sistema $(3.1) - (3.3)$, definindo o funcional de energia G(t) por*

$$G(t) = (u, u_t) + \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2,$$

temos

(i) $\frac{d}{dt}(G(t)) \leq \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$,
onde $K_1 = min\{M(s); s \in [0, K]\}$ *e* $K_2 = max\{M(s); s \in [0, K]\}$. *Além disso, temos:*

(ii) $|G(t)| \leq C_0 E(t). \quad \forall t \geq 0$

Prova:

Derivando $G(t)$ em relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}G(t) = (u, u_{tt}) + (u_t, u_t) + \delta(\nabla u, \nabla u_t).$$

Substituindo u_{tt} dada por (2.1), temos

$$\frac{d}{dt}(G(t)) = (u, M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - \delta u_t) + (u_t, u_t) + \delta(\nabla u, \nabla u_t).$$

Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) &= -M(\|\nabla u\|_2^2)(\nabla u, \nabla u) - \delta(\nabla u, \nabla u_t) + (u_t, u_t) + \delta(\nabla u, \nabla u_t) \\ &= -M(\|\nabla u\|_2^2)(\|\nabla u\|_2^2) + \|u_t\|_2^2\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}G(t) = -M(\|\nabla u\|_2^2)(\|\nabla u\|_2^2) + \|u_t\|_2^2.$$

Observe que, de (3.23), temos que: $|\nabla u| \leq K$ para todo $t \geq 0$. Portanto, obtemos que: $\hat{M}(s) \leq \frac{K_2}{K_1}M(s)s$ para todo $s \geq 0$.

Então, temos

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$$

Então,

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{k_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$$

Além disso,

$$|G(t)| = \Big|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2\Big|$$

Da desigualdade triangular,

$$|G(t)| \leq \Big|\int_\Omega u(t)u_t(t)dx\Big| + \frac{\delta}{2}|\|\nabla u\|_2^2|$$

Da desigualdade de Holder, temos

$$|G(t)| \leq \Big(\int_\Omega (u(t))^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega (u_t(t))^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{2}\|u\|_2^2$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$|G(t)| \leq \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}|\|u_t\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2$$

E pela desigualdade de Poincaré, segue que:

$$|G(t)| \leq \frac{1}{2}k_0\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}|\|u_t\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2.$$

Logo,

$$|G(t)| \leq \frac{k_0+\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}|\|u_t\|_2^2.$$

Como $\hat{M}(|\|\nabla u\|_2^2) \geq \alpha\|\nabla u\|_2^2$, então

$$|G(t)| \leq C_\delta\big(\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2) + \|u_t\|_2^2\big) \leq C_0E(t).$$

□

Agora, provaremos o teorema (20). Para isso, definimos o funcional de energia de Lyapunov $V(t)$ por:

$$V(t) = E(t) + \eta G(t).$$

Para η suficientemente pequeno, temos que $V(t)$ satisfaz

$$\frac{1}{2}E(t) \leq V(t) \leq \frac{3}{2}E(t). \tag{3.24}$$

e

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_1 L(t). \tag{3.25}$$

Com efeito, usando o lema anterior, temos

$$-C_0 E(t) \leq G(t) \leq C_0 E(t).$$

Multiplicando por η, temos

$$-C_0 \eta E(t) \leq \eta G(t) \leq C_0 \eta E(t).$$

Somando $E(t)$, vem

$$E(t) - C_0 \eta E(t) \leq \eta G(t) + E(t) \leq C_0 \eta E(t) + E(t).$$

Pela definição de $V(t)$

$$(1 - C_0 \eta) E(t) \leq V(t) \leq (1 + C_0 \eta) E(t).$$

Observe que, para $\eta \leq \frac{1}{2C_0}$, temos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq V(t) \leq \frac{3}{2}E(t),$$

ficando provado (3.24). Por outro lado, derivando $V(t)$ em relação a t, temos:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}(\eta G(t))$$

Pelo lema anterior, temos

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\delta \|u_t\|_2^2 + \eta \|u_t\|_2^2 - \frac{K_1}{K_2}\eta \hat{M}(\|\nabla u\|_2^2,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -(\delta - \varepsilon)\|u_t\|_2^2 - \eta \frac{1}{k}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2)$$

Então, para $0 < \eta \leq \frac{\delta}{2}$, temos:

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\frac{\delta}{2}\|u_t\|_2^2 - \eta\frac{K_1}{K_2}\hat{M}(\|\nabla u\|_2^2).$$

Logo, fixando $0 < \eta = min\{\frac{1}{2C_0}, \frac{\delta}{2}\}$, resulta que:

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_0 E(t).$$

e vale também (3.24). Então, temos:

$$\frac{d}{dt}V(t) + C_1 E(t) \leq 0.$$

Daí por (3.24), temos:

$$\frac{d}{dt}V(t) + 2C_1 L(t) \leq 0,$$

multiplicando por $e^{\kappa t}$, onde $\kappa = 2C_1$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\kappa t}V(t)\right] \leq 0.$$

Integrando de 0 a t em ambos os lados, obtemos

$$V(t) \leq V(0)e^{-\kappa}$$

Usando novamente (3.24), segue que:

$$E(t) \leq 2V(t) \leq 2V(0)e^{\kappa t} \leq 3E(0)e^{-\kappa t},$$

Ou seja,

$$E(t) \leq \hat{N}E(0)e^{-\kappa t}, \tag{3.26}$$

onde $\kappa = 2C_1$ e $\hat{N} = 3$. $\square$

Conclusão: Se o termo de amortecimento $-\delta\Delta u_t$ é introduzido, para condições inicias suficientemente suaves, existe uma solução forte global e esta solução decai exponencialmente com o tempo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Classics Library Edition Published. John Wiley & Sons, 1995.

[2] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*. París: Masson, 1983.

[3] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.

[4] Royden, H. L. *Real Analysis*. Stanford University, 1995.

[5] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons. 1978.

[6] Linz, P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Philadelphia: SIAM,1985.

[7] Medeiros, L.A. & Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ,1993.

[8] Linz, P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Philadelphia: SIAM, 1985.

[9] Medeiros, L.A. & Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*. IM-UFRJ, 2000.

[10] Payne, L. & Sattinger, D.H. *Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations*. Israel Journal Mathematics 22 (1975),273-303.

[11] Sattinger, D.H. *On a global solution of nonlinear hyperbolic equations*. Archieve Rational Mech. Analysis 30 (1968), 148-172.

[12] Gorain, G. C. *Exponential energy decay estimates for the solutions of n-dimensional Kirchhoff type wqve equation*. Applied Mathematics and Computation 177 (2006), 235-242.

[13] Cavalcanti, M. & M. V. N. Domingos Cavalcanti & Prates Filho, J. S. *Existence and Exponential Decay for a Kirchhoff-Carrier Model with Viscosity*. Jornal of Mathematical Analusis and Apllications 226 (1998), 40-60.

[14] Brito, E. H. *The Damped Elastic Streched String Equation Generalized: Existence, Uniqueness, Regularity and Stability*. Apllicable Analysis 13 (1982), 219-233.