

LARISSA AKEMI ROSA UTIYAMA DE FREITAS

**MODELAGEM CONSTITUTIVA DE SOLOS UTILIZANDO POTENCIAIS  
TERMODINÂMICOS GENERALIZADOS**

**Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Métodos  
Numéricos em Engenharia, Setor de  
Tecnologia, Universidade Federal do  
Paraná.**

**Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mildred Ballin  
Hecke**

CURITIBA  
2008

Ao meu marido Gustavo, com amor e carinho  
Aos meus pais e irmão, com amor e gratidão  
Aos amigos e a toda família, com ternura

## **AGRADECIMENTOS**

À Professora Doutora Mildred Ballin Hecke, pela oportunidade, pelo estímulo e pela orientação. Agradeço ainda pela amizade e compreensão.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, pela dedicação ao curso e pelo apoio.

À Maristela Bandil, pela dedicação, pelo entusiasmo e carinho.

Ao Centro de Estudos de Engenharia Civil Professor Inaldo Ayres Vieira, pela oportunidade e pela estrutura sempre à disposição.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, pelos momentos maravilhosos que me proporcionaram e pelo grande amor que têm por mim.

Ao meu irmão, por me mostrar que é possível enfrentar todas as situações com tranquilidade e humor.

A meu marido, pelas palavras de estímulo nos momentos difíceis, por acreditar que isso era possível e por contribuir todos os dias com seu amor.

A Deus, por estar sempre comigo, guiando meus passos.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	vi
<b>LISTA DE QUADROS</b> .....	viii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	ix
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	x
<b>RESUMO</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1. Objetivos.....	2
1.1.1. Objetivo geral.....	2
1.1.2. Objetivos específicos.....	3
1.2. Estrutura do trabalho.....	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	5
<b>3. TERMODINÂMICA E PLASTICIDADE</b> .....	11
3.1 Abordagem Clássica.....	11
3.1.1 Potencial Termodinâmico e Leis de Estado .....	11
3.1.2 Região admissível .....	14
3.1.3 Trabalho Plástico e Potencial de Dissipação.....	17
3.2 Plasticidade e análise convexa.....	22
3.2.1 Potencial Termodinâmico e Leis de Estado .....	22
3.2.2 Potencial de Dissipação .....	23
3.2.3 Equação Constitutiva Elasto-Plástica em Taxas.....	25
3.2.4 Equação Constitutiva Elasto-Plástica em Incrementos Finitos.....	29
3.2.5 Relação entre função de dissipação e função de escoamento.....	32
<b>4. ALGUNS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS EM SOLOS</b> .....	35
4.1 Drucker-Prager para um material elasto-idealmente- plástico.....	35
4.2 Modelo Cap.....	39
<b>5. FÓRMULAS VARIACIONAIS PARA O PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO</b> .....	45
5.1 Formulações variacionais em taxas .....	49
5.2 Formulação em incrementos finitos.....	52
<b>6. ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO</b> .....	55
6.1 Método dos Elementos Finitos .....	55
6.2 Algoritmos para a resolução do problema de equilíbrio.....	57
6.3 Algoritmos para a resolução da equação constitutiva .....	63
6.4 Aplicação do Algoritmo de Newton-Raphson para o Modelo de Drucker-Prager.....	69
6.5 Aplicação do Algoritmo de Lemke para o Modelo Cap.....	73
6.6 O programa desenvolvido .....	76
<b>7. EXEMPLOS</b> .....	79
7.1. Exemplo 1 .....	79
7.2. Exemplo 2 .....	92
<b>8. CONCLUSÕES</b> .....	98
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	102
<b>APÊNDICE A. DEDUÇÃO DA FORMA LOCAL DA DESIGUALDADE DE DISSIPACÃO</b> .....	106
<b>APÊNDICE B. ANÁLISE CONVEXA</b> .....	109
<b>APÊNDICE C. PARÂMETROS DO MODELO CAP</b> .....	117

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 PROJEÇÃO DA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO NO ESPAÇO DE TENSÕES. ....	15
FIGURA 2 REGIÃO ADMISSÍVEL PARA UM MODELO DE PLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO LINEAR. ....	16
FIGURA 3 REGIÃO ADMISSÍVEL PARA UM MODELO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO LINEAR. ....	16
FIGURA 4 CICLO DE TENSÕES. ....	18
FIGURA 5 CONVEXIDADE DA SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO. ....	20
FIGURA 6 CONE POLAR NEGATIVO DE $\partial Ind_p(T, c)$ ....	26
FIGURA 7 REGIÕES DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES PLASTICAMENTE ADMISSÍVEIS. ....	37
FIGURA 8 FUNÇÕES DE ESCOAMENTO ADOTADAS PARA O MODELO CAP. ....	41
FIGURA 9 FUNÇÕES DE ESCOAMENTO SUAVIZADAS. ....	41
FIGURA 10 FUNÇÃO BASE $(j_i)$ FORMADA A PARTIR DAS FUNÇÕES DE FORMA $(y_i)$ . ....	56
FIGURA 11 FORMA COMO O PROGRAMA DESENVOLVIDO ENCONTRA-SE ESTRUTURADO. ...	78
FIGURA 12 CONDIÇÕES DE CONTORNO E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS PARA O EXEMPLO 1. ....	81
FIGURA 13 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	82
FIGURA 14 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	82
FIGURA 15 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	83
FIGURA 16 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	83
FIGURA 17 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{xx}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	84
FIGURA 18 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{xx}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	84
FIGURA 19 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{yy}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	85
FIGURA 20 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{yy}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	85
FIGURA 21 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{xy}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	86
FIGURA 22 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{xy}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	86
FIGURA 23 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{zz}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	87
FIGURA 24 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $T_{zz}$ DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	87
FIGURA 25 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{xx}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	88
FIGURA 26 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{xx}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	88
FIGURA 27 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{yy}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	89
FIGURA 28 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{yy}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS. ....	89
FIGURA 29 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{xy}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO. ....	90

FIGURA 30 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{xy}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.....	90
FIGURA 31 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{zz}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.....	91
FIGURA 32 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $E_{zz}^p$ DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO ANSYS.....	91
FIGURA 33 CONDIÇÕES DE CONTORNO, CARREGAMENTO E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DO EXEMPLO 2.....	93
FIGURA 34 DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO OBTIDOS A PARTIR DO PROGRAMA DESENVOLVIDO.....	94
FIGURA 35 DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO OBTIDOS POR DESAI E SIRIWARDANE (1984).....	95
FIGURA 36 COMPARAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS SOFRIDOS POR DIFERENTES NÓS DA SUPERFÍCIE DO MACIÇO DE SOLO NA REGIÃO DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	96

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 RESUMO DAS EQUAÇÕES DA ELASTOPLASTICIDADE.....	21
QUADRO 2 FORMULAÇÕES EQUIVALENTES DA LEI DE FLUXO.....	24
QUADRO 3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTO-PLÁSTICAS EM TERMOS DE TAXAS. ....	29
QUADRO 4 MODELO DE DRUCKER-PRAGER PARA MATERIAIS ELASTO IDEALMENTE PLÁSTICOS.....	39
QUADRO 5 MODELO CAP COM SUPERFÍCIE MÓVEL PARABÓLICA. ....	44
QUADRO 6 ALGORITMO DO MÉTODO DE QUASE-NEWTON COM EQUAÇÃO DE ATUALIZAÇÃO BFGS.....	61
QUADRO 7 MÉTODO SECANTE UTILIZADO PARA DETERMINAR O TAMANHO DO PASSO $\alpha_k$ . ....	62
QUADRO 8 UM ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR. ....	65
QUADRO 9 ALGORITMO PARA A RESOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR ATRAVÉS DO MÉTODO DE LEMKE. ....	67
QUADRO 10 ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON EMPREGADO PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO MATERIAIS COM COMPORTAMENTO ELASTO-IDEALMENTE-PLÁSTICO E CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DEFINIDO POR UMA ÚNICA FUNÇÃO DE ESCOAMENTO.....	69

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 PROPRIEDADES MATERIAIS DOS SOLOS QUE CONSTITUEM O TALUDE DO EXEMPLO 1. ....	80
TABELA 2 COEFICIENTES DO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE DRUCKER-PRAGER. ....	80
TABELA 3 PROPRIEDADES MATERIAIS DO SOLO DO EXEMPLO 2. ....	92
TABELA 4 PARÂMETROS DA SUPERFÍCIE FIXA DO MODELO CAP.....	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A = (E^p, -\mathbf{a})$	Deformações plásticas generalizadas
$\dot{A}$	Taxas de deformações plásticas generalizadas
$A(\Delta I^k)$	Matriz adotada na aproximação da função de escoamento para o algoritmo de complementaridade não-linear
$B$	Superfície de escoamento
$B\{\dot{P}\}$	Superfície da região admissível das taxas de tensões generalizadas
$B^i$	Operador do Método dos Elementos Finitos
$B_k$	Matriz simétrica não singular do método de otimização na iteração $k$
$C$	Matriz elástica
$D$	Potencial de dissipação
$\mathbb{D}$	Operador linear de deformações
$dE$	Incremento infinitesimal de deformação
$dT$	Incremento infinitesimal de tensão
$dW$	Trabalho realizado durante um incremento infinitesimal de deformação
$D_P^*$	Indicatriz do conjunto $P$
$E$	Tensor de deformações
$E^e$	Tensor de deformações elásticas
$E^p$	Tensor de deformações plásticas
$\dot{E}$	Taxas de deformações
$\dot{E}^p$	Taxas de deformações plásticas
$\dot{E}^e$	Taxas de deformações elásticas
$\dot{E}_m^p$	Taxa de deformações plásticas volumétrica
$\dot{E}_D^p$	Taxa de deformações plásticas desviadora
$E_{t+\Delta t}$	Deformações totais no instante de tempo $t + \Delta t$
$E_t$	Deformações totais no instante de tempo $t$
$E_{t+\Delta t}^e$	Deformações elásticas no instante de tempo $t + \Delta t$
$E_t^e$	Deformações elásticas no instante de tempo $t$
$E_{t+\Delta t}^p$	Deformações plásticas no instante de tempo $t + \Delta t$
$E_t^p$	Deformações plásticas no instante de tempo $t$
$f$	Função de escoamento
$f_j$	Modo de escoamento
$F_{Int}$	Esforços internos
$F_{Ext}$	Esforços externos
$F_{Int}^i$	Esforços internos em um elemento da malha de elementos finitos
$F_{Ext}^i$	Esforços externos em um elemento da malha de elementos finitos
$G$	Vetor empregado para definir o primeiro invariante do tensor de tensões
$\bar{G}$	Vetor empregado para definir a forma quadrática da função de escoamento do Modelo de Drucker-Prager
$H$	Parâmetro do Modelo Cap

$H_k$	Aproximação do Hessiano na iteração $k$
$Ind_p$	Indicatriz do conjunto $P$
$J$	Matriz empregada para definir o quadrado do primeiro invariante do tensor de tensões
$J_1$	Primeiro invariante do tensor de tensões
$J_{2D}$	Segundo invariante do tensor de tensões desviador
$j_c^e(\dot{T})$	Potencial termodinâmico das taxas temporais de tensões
$j_c^h(\dot{c})$	Potencial termodinâmico das taxas temporais de forças termodinâmicas
$j^e(\dot{E}^e)$	Potencial termodinâmico das deformações elásticas
$j_c^p(\dot{T})$	Potencial termodinâmico de taxas temporais de tensões obtido a partir de $j_c^h(\dot{c})$
$j_c^{ep}(\dot{T})$	Potencial termodinâmico de taxas temporais de tensões obtido a partir de $j_c^e(\dot{T})$ e $j_c^h(\dot{c})$
$j^{ep}(\dot{E})$	Potencial termodinâmico conjugado a $j_c^{ep}(\dot{T})$
$\bar{j}_c^e(\Delta T)$	Potencial termodinâmico de incrementos de tensões
$\bar{j}_c^h(\Delta c)$	Potencial termodinâmico de incrementos de forças termodinâmicas
$\bar{j}_c^p(\Delta T)$	Potencial termodinâmico de incrementos de tensões obtido a partir de $\bar{j}_c^h(\Delta c)$
$\bar{j}_c^{ep}(\Delta T)$	Potencial termodinâmico dos incrementos de tensões obtido a partir de $\bar{j}_c^e(\Delta T)$ e $\bar{j}_c^h(\Delta c)$
$\bar{j}^{ep}(\Delta E)$	Potencial termodinâmico conjugado a $\bar{j}_c^{ep}(\Delta T)$
$K$	Parâmetro associado à inclinação da reta que descreve a superfície de plastificação em um modelo elastoplástico unidimensional com encruamento isotrópico
$k$	Parâmetro do modelo de Drucker-Prager relacionado à coesão do solo
$L$	Operador
$L_t$	Forças que podem atuar sobre um corpo em um instante $t$
$M$	Matriz utilizada para definir o segundo invariante do tensor de tensões desviador
$n$	Número de nós de um elemento $e$ do Método dos Elementos Finitos
$N$	Matriz empregada no Método de Lemke
$N^i$	Matriz de funções forma
$P$	Região de tensões e forças admissíveis generalizadas
$P_e$	Potência virtual externa
$P_i$	Potência virtual interna
$p_k$	Direção ao longo da qual se busca diminuir o valor de uma função do método de otimização na iteração $k$
$q$	Variável interna para um modelo elastoplástico unidimensional com encruamento cinemático
$Q$	Matriz empregada para definir a forma quadrática da função de escoamento do Modelo de Drucker-Prager

$R$	Parâmetro do Modelo Cap
$s$	Raiz quadrada do segundo invariante do tensor de tensões desviador
$s_k$	Diferença entre os valores dos deslocamentos na iteração $k + 1$ e na iteração $k$ no Método de Quase-Newton
$T$	Tensor de tensões
$T_D$	Tensão desviadora
$T^i$	Tensões em um elemento do Método de Elementos Finitos
$T_m$	Tensão hidrostática
$T_m^c$	Parâmetro de encruamento do Modelo Cap
$T_t$	Tensões no instante de tempo $t$
$T_Y$	Tensão de escoamento inicial
$\dot{T}$	Taxas de tensões
$T_{t+\Delta t}$	Tensões no instante de tempo $t + \Delta t$
$u$	Deslocamentos
$u_{t+\Delta t}$	Deslocamentos no instante de tempo $t + \Delta t$
$u_t$	Deslocamentos no instante de tempo $t$
$U$	Espaço vetorial dos campos de deslocamentos
$V$	Espaço vetorial dos campos de velocidade
$V^*$	Espaço vetorial das forças $f$
$W$	Espaço vetorial das deformações e das taxas de deformações
$w$	Aproximação da função de escoamento empregada no algoritmo de complementaridade não-linear
$W^*$	Espaço vetorial das tensões
$W(\dot{E}^p)$	Potência dissipada
$Y$	Módulo de Young
$y_k$	Diferença entre os valores dos resíduos na iteração $k + 1$ e na iteração $k$ no Método de Quase-Newton
$Z$	Parâmetro do Modelo Cap
$-\mathbf{a} = (-\mathbf{a}_i)_{i=1}^m$	Variáveis internas
$-\dot{\mathbf{a}}_i$	Taxas de variação das variáveis internas
$\mathbf{a}_{t+\Delta t}$	Variáveis internas no instante de tempo $t + \Delta t$
$\mathbf{a}_t$	Variáveis internas no instante de tempo $t$
$\mathbf{a}_k$	Passo do método de otimização na iteração $k$
	Parâmetro da função de escoamento fixa adotada por Desai e Siriwardane (1984)
$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i)_{i=1}^m$	Forças termodinâmicas
$\mathbf{c}_{t+\Delta t}$	Forças termodinâmicas no instante de tempo $t + \Delta t$
$\mathbf{c}_t$	Forças termodinâmicas no instante de tempo $t$
$\Delta \mathbf{a}$	Incremento de variáveis internas
$\Delta \mathbf{c}$	Incremento de forças termodinâmicas
$\Delta E$	Incremento de deformações totais
$\Delta E^e$	Incremento de deformações elásticas

$\Delta E^p$	Incremento de deformações plásticas
$\Delta F_{Int}$	Incremento de esforços internos
$\Delta F_{Ext}$	Incremento de esforços externos
$\Delta F_{Int}^i$	Incremento de esforços internos em um elemento da malha de elementos finitos
$\Delta F_{Ext}^i$	Incremento de esforços externos em um elemento da malha de elementos finitos
$\Delta \lambda$	Incremento do multiplicador plástico
$\Delta \lambda^k$	Incremento do multiplicador plástico na iteração $k$ do algoritmo de complementaridade não-linear
$\Delta T$	Incremento de tensões
$\Delta T^i$	Incremento de tensões em um elemento do Método de Elementos Finitos
$\Delta u$	Incrementos de deslocamentos
$\Delta \hat{U}^i$	Vetor com os componentes $x$ e $y$ dos deslocamentos nodais
$\Delta U_{k+1}$	Deslocamentos na iteração $k+1$ do Método de Quase-Newton
$\mathbf{e}\{\dot{p}\}$	Região elástica Interior da região admissível das taxas de tensões generalizadas
$\mathbf{G}$	Contorno de um corpo
$\Gamma_u$	Região do contorno de um corpo sujeita a restrições homogêneas do tipo bilateral
$\mathbf{j}(E, E^p, \mathbf{a}_i)$	Energia Livre de Helmholtz
$\mathbf{j}^e(E^e)$	Parcela elástica da Energia Livre de Helmholtz
$\mathbf{j}^h(\mathbf{a})$	Parcela plástica da Energia Livre de Helmholtz
$\mathbf{j}_c(T, \mathbf{c})$	Função convexa conjugada à Energia Livre de Helmholtz
$\mathbf{j}_c^e(T)$	Parcela elástica da função convexa conjugada à Energia Livre de Helmholtz
$\mathbf{j}_c^h(\mathbf{c})$	Parcela plástica da função convexa conjugada à Energia Livre de Helmholtz
$(\mathbf{j}_i)$	Função base do Método dos Elementos Finitos
	Multiplicador plástico
	Coefficiente de Poisson
	Parâmetro do modelo de Drucker-Prager relacionado ao ângulo de atrito interno do solo
$\Sigma = (T, \mathbf{c})$	Tensões generalizadas
$\dot{\Sigma} = (\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$	Taxas de tensões generalizadas
$\mathbf{t}_i$	Forças de superfície
$\tau$	Tensão hidrostática máxima para o Modelo Cap
$\mathbf{v}$	Termo empregado na atualização do Hessiano pelo método BFGS
$(\mathbf{y}_i)$	Função forma do Método dos Elementos Finitos

$\Omega_e$  Elemento da malha de elementos finitos  
 $\Psi(\Delta U)$  Resíduo da equação de equilíbrio

## **RESUMO**

Na teoria clássica da plasticidade, o comportamento elastoplástico de solos, argilas e outros geomateriais costuma ser descrito a partir da relação constitutiva elástica, da superfície de plastificação, da lei de fluxo e da lei de endurecimento. Recentemente, uma outra abordagem baseada na teoria da termodinâmica com variáveis internas tem sido aplicada à modelagem constitutiva dos geomateriais. Nessa abordagem, o comportamento constitutivo é descrito a partir de dois potenciais termodinâmicos: uma função de energia e uma função de dissipação. O objetivo do presente trabalho é desenvolver um modelo numérico-computacional que permita simular o comportamento elastoplástico de solos a partir da definição de dois potenciais termodinâmicos com o auxílio de técnicas da análise convexa. Um modelo elasto-idealmente-plástico com critério de escoamento de Drucker-Prager e um Modelo Cap foram formulados segundo o enfoque termodinâmico. A formulação da equação constitutiva a partir de potenciais termodinâmicos e de técnicas da análise convexa permitiu escrever o problema constitutivo sob a forma de um problema de programação matemática. A formulação variacional em incrementos finitos do problema de valor de contorno foi relacionada a um princípio de mínimo, no qual se reconheceu um problema de otimização. Dessa forma, o procedimento de solução adotado combinou o método Quase-Newton para a resolução do problema de equilíbrio global e um algoritmo de programação matemática para a resolução da equação constitutiva elastoplástica. A discretização espacial foi obtida aplicando o Método dos Elementos Finitos. Algumas simulações foram realizadas com o programa desenvolvido e os resultados obtidos mostraram-se condizentes com resultados numéricos e experimentais apresentados na literatura. A abordagem utilizada apresenta uma série de vantagens, entre as quais se destaca a obtenção de resultados que não violam as leis da termodinâmica. Além disso, a formulação adotada para a equação constitutiva permite determinar as taxas de deformação plástica em pontos singulares da função de escoamento sem o uso de ferramentas especiais. Por fim, não houve necessidade de utilizar alguma matriz tangente para a solução do problema.

## **PALAVRAS-CHAVE**

Potenciais termodinâmicos, Plasticidade, Modelos Constitutivos, Solos, Método dos Elementos Finitos.

## **ABSTRACT**

The standard procedure to construct elastic-plastic models for soils, clays and other geomaterials is to specify the elasticity law, yield condition, flow rule and hardening law all independently of each other. Recently, another approach based on the theory of thermomechanics with internal variables is being used in the constitutive modeling of geomaterials. In this approach, the whole of the constitutive structure is determined from just two thermodynamic potentials: an energy potential and a dissipation function. The purpose of this work is to present a formulation for the plasticity modeling of geotechnical materials in which the entire constitutive response is specified through two thermodynamic potentials with the help of convex analysis. The theory presented is applied to the Drucker-Prager model (without hardening) and to the Drucker-Prager Cap Model. The constitutive problem is written as a mathematical programming problem and solved through a non-linear mathematical programming algorithm. A finite dimensional optimization problem is identified in the minimum principle derived from the time-discretized version of the variational formulation of the initial boundary value problem. Therefore, a solution procedure combining mathematical programming algorithms with the Quasi-Newton Method is adopted. Spatial discretization is performed by means of the Finite Element Method. Examples are given to illustrate the proposed approach and the results of the numerical computations are compared with numerical and experimental results from literature. One of the advantages of the present approach is that the results obtained satisfy the fundamental laws of thermodynamics. In addition, once the constitutive model is cast in a convex analytic setting, plastic deformations can be determined in singular points of the yield function without the use of special techniques. Finally, there's no need to use a tangent matrix in the solution procedure.

## **KEY WORDS**

Thermodynamical potentials, Plasticity, Constitutive Models, Geomaterials, Finite Element Methods.

## 1. INTRODUÇÃO

Grande parte das obras de Engenharia se assenta sobre o terreno e inevitavelmente requer que o comportamento do solo seja devidamente considerado (Pinto, 2002). A crescente complexidade de obras como edifícios, barragens, túneis, dutos, poços e aterros sanitários tem exigido um conhecimento cada vez mais detalhado desse material caracterizado pela heterogeneidade, anisotropia e não linearidade. Acidentes envolvendo as estruturas citadas, além de gerar prejuízos devido à sua inutilização e à sua destruição, podem apresentar conseqüências sócio-ambientais como pessoas desabrigadas e contaminação do ambiente.

Segundo Costa (2006), inicialmente, a engenharia progrediu mais rapidamente na área de estruturas do que na área relacionada ao estudo dos terrenos das fundações, devido principalmente às facilidades geradas pela forma geométrica bem definida das estruturas e pelos materiais que as constituem (metais, por exemplo). Dessa forma, conforme salienta Ibanez (2003), durante décadas do século XX, o desenvolvimento de modelos constitutivos para solos foi apenas conseqüência de adaptações dos já conhecidos modelos para estudo de metais. No entanto, uma série de acidentes envolvendo obras de engenharia civil, no início do século XX, demonstrou não ser suficiente determinar em laboratório parâmetros de resistência e deformabilidade em amostras de solo e aplicá-los a modelos teóricos adequados aos metais. Assim na década de 50, começam a surgir os primeiros modelos desenvolvidos com base no comportamento apresentado pelos solos em ensaios laboratoriais.

A implementação de modelos que descrevem o comportamento elasto-plástico de materiais como os solos tem sido realizada por meio de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos. Esse método pode ser utilizado na análise da distribuição de tensões e deformações no solo, permitindo simular diferentes condições e seqüências de carregamento, bem como acompanhar o crescimento da zona inelástica com o tempo, ou seja, acompanhar a natureza progressiva da ruptura (Freitas, 2006).

A simulação da distribuição de tensões e deformações em maciços de solo tem se mostrado importante para o estudo e monitoramento de encostas atravessadas por dutos. Nessas encostas, os movimentos lentos do solo podem deformar gradativamente o duto até que esse chegue à ruptura. É importante destacar que a ruptura do duto pode ocorrer sem

que a encosta tenha rompido, razão pela qual se faz necessário utilizar métodos que permitam acompanhar as mudanças de tensões no solo e no duto ao longo da história de carregamento. Como exemplo de acidente dessa natureza, pode-se citar a ruptura do Oleoduto Araucária Paranaguá (OLAPA) no ano de 2001 no Estado do Paraná. O oleoduto foi flexionado pelos movimentos lentos da encosta de tal maneira que ao romper gerou uma abertura de cerca de 30 centímetros. O óleo bruto transportado pelo duto contaminou solos, rios e até mesmo a Baía de Paranaguá.

Recentemente, outros acidentes envolvendo a movimentação de massas de solo ocorreram no país. Em janeiro de 2005, após intensas chuvas, o talude de apoio da cabeceira da ponte da Rodovia Regis Bittencourt (BR-116) deslizou, ocasionando a queda da estrutura. O acidente gerou uma morte e transtornos devido à interdição de uma das pistas da rodovia. Em janeiro de 2007, um desabamento na obra do Metrô de São Paulo aumentou o diâmetro do espaço aberto para levar equipamentos ao subsolo. Depois do acidente, o solo continuou cedendo por ao menos cinco horas. Especialistas apontaram as chuvas e o tipo de solo da região como responsáveis pelo acidente.

A necessidade de evitar acidentes como os citados demonstra a importância do estudo e do desenvolvimento de modelos capazes de representar o comportamento elasto-plástico dos solos. No presente trabalho, propõe-se o estudo de modelos constitutivos para solos desenvolvidos segundo o enfoque termodinâmico. Nesses modelos, o comportamento do solo é descrito por meio de duas funções potenciais e faz-se uso de variáveis internas para descrever os processos dissipativos. Muitos trabalhos sobre a aplicação dos conceitos termodinâmicos na teoria da plasticidade já foram desenvolvidos, sendo que a maioria desses se concentrou no estudo de modelos apropriados para metais (Collins e Houlsby, 1997). No entanto, recentemente, diversos autores têm aplicado a teoria da termodinâmica com variáveis internas à modelagem constitutiva de materiais geotécnicos.

## **1.1. Objetivos**

### **1.1.1. Objetivo geral**

Desenvolver um modelo numérico-computacional que permita simular o comportamento elasto-plástico de solos a partir da definição de dois potenciais termodinâmicos com o auxílio de técnicas da análise convexa.

### **1.1.2. Objetivos específicos**

- a) Aplicar a teoria da termodinâmica com variáveis internas e técnicas da análise convexa à modelagem do comportamento mecânico dos solos;
- b) Apresentar a formulação de alguns modelos constitutivos clássicos para solos segundo o enfoque termodinâmico;
- c) Apresentar a formulação variacional do problema de valor de contorno;
- d) Implementar algoritmos adequados à resolução do problema constitutivo;
- e) Implementar um algoritmo adequado à resolução do problema de equilíbrio global;
- f) Aplicar o Método dos Elementos Finitos à discretização espacial do problema de valor de contorno;
- g) Realizar algumas simulações com o programa desenvolvido e comparar os resultados obtidos com aqueles apresentados na literatura.

### **1.2. Estrutura do trabalho**

A estrutura do presente trabalho compreende oito capítulos especificados a seguir.

No Capítulo 2, é apresentada uma breve revisão bibliográfica do desenvolvimento da teoria da plasticidade, enfatizando-se aspectos relativos aos trabalhos realizados na área da modelagem constitutiva de solos.

No Capítulo 3, a teoria da termodinâmica com variáveis internas é apresentada. Inicialmente, uma abordagem clássica da teoria é apresentada e, em seguida, uma abordagem utilizando conceitos da análise convexa é introduzida. Todo o restante do trabalho é desenvolvido segundo essa abordagem.

A forma dos potenciais termodinâmicos para um modelo elasto-idealmente-plástico com critério de escoamento de Drucker-Prager e para um Modelo Cap com superfície móvel parabólica é apresentada no Capítulo 4.

No Capítulo 5, a formulação variacional do problema de equilíbrio é apresentada em incrementos. Os princípios de mínimo relacionados à formulação variacional também são apresentados.

Os algoritmos implementados para a resolução do problema de equilíbrio e do problema constitutivo são descritos no Capítulo 6.

Algumas simulações utilizando o programa desenvolvido são apresentadas no Capítulo 7. Os resultados obtidos são, então, comparados com resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura ou gerados a partir de programas de uso comercial.

As conclusões obtidas a partir do desenvolvimento do presente trabalho são apresentadas no Capítulo 8.

Três Apêndices foram elaborados com o objetivo de apresentar conceitos utilizados ao longo do presente trabalho. O Apêndice A apresenta a dedução da Desigualdade de Dissipação a partir da Primeira e da Segunda Lei da Termodinâmica. No Apêndice B, são apresentados conceitos da análise convexa utilizados na formulação do problema constitutivo. Finalmente, o Apêndice C apresenta uma descrição detalhada dos parâmetros do Modelo Cap.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Desde os trabalhos de Coulomb - 1776 e Rankine – 1857, há uma importante história de aplicações da teoria da plasticidade na análise do comportamento de materiais geológicos (Ibanez, 2003). Os fundamentos da teoria da plasticidade foram introduzidos no fim do século XIX e no início do século XX com os trabalhos desenvolvidos por Tresca, Saint Venant, Lévy, Prandtl, Von Mises e Reuss. Segundo Desai e Siriwardane (1984), Saint Venant, Levy e Mises realizaram as primeiras tentativas de determinar uma relação entre tensões e deformações plásticas. Saint Venant propôs que os eixos principais dos incrementos de deformação plástica são coincidentes com os eixos principais de tensões na isotropia. Levy e Mises desenvolveram independentemente uma relação entre tensões e deformações plásticas em que os incrementos de deformação total foram considerados iguais aos incrementos de deformação plástica, isto é, a deformação elástica foi considerada desprezível. Prandtl e Reuss modificaram o modelo de Levy-Mises, fazendo distinção entre deformações reversíveis (elásticas) e deformações permanentes (plásticas), sendo a deformação total dada pela soma das duas parcelas citadas (Rajagopal e Srinivasa, 1998).

A partir de 1945, uma teoria unificada começou a ser desenvolvida (Desai e Siriwardane, 1984). As principais contribuições da época foram as de Drucker, Prager e Hill. O postulado da estabilidade proposto por Drucker, o Princípio da Potência Máxima de Hill e as condições de continuidade, unicidade, irreversibilidade e consistência introduzidas por Prager formaram a base necessária para a determinação da convexidade da região admissível e para a obtenção da Lei da Normalidade. A convexidade da região admissível e os assuntos relacionados a essa foram os temas centrais dessa fase de desenvolvimento da teoria da plasticidade (Han e Reddy, 1999).

No espaço tridimensional de tensões, a região admissível corresponde ao conjunto de estados de tensões plasticamente possíveis para o material. Critérios de plastificação definem a região admissível para um dado material a partir de funções escalares dos componentes do tensor de tensões, denominadas funções de escoamento. Tresca e Mises desenvolveram critérios de plastificação orientados para aplicação em metais. Os critérios foram desenvolvidos com base no comportamento experimental observado em ensaios de tração uniaxial. Segundo o critério de Tresca, o escoamento inicia quando a tensão de cisalhamento máxima atinge um valor crítico (máxima tensão cisalhante do ensaio de

tração uniaxial). Já pelo critério de Mises, o escoamento inicia quando a energia de distorção alcança um valor igual ao da energia de distorção no escoamento em tração uniaxial. Ambos os critérios assumem que o escoamento do metal independe da tensão hidrostática, conforme indicado por ensaios laboratoriais.

A consideração de que tensões hidrostáticas não causam escoamento não é válida para todos os materiais. O comportamento mecânico da maioria dos materiais geológicos difere do comportamento dos metais, sendo fundamentalmente controlado pela atuação das tensões hidrostáticas. Dessa forma, os modelos constitutivos para solos devem representar aspectos como a variação da resistência desse material com as tensões hidrostáticas. O critério de Drucker-Prager, por exemplo, é a generalização do critério de von Mises, incorporando a influência das tensões esféricas no comportamento do material (Ibanez, 2003). A função de escoamento, nesse critério, descreve um cone de eixo coincidente com o eixo hidrostático. A função de escoamento do critério de Mohr-Coulomb, por sua vez, define uma pirâmide hexagonal irregular no espaço de tensões, sendo capaz de representar aspectos como o aumento da resistência do solo com as tensões hidrostáticas e as diferenças de comportamento do material sob trajetórias de compressão e de tração. Modelos como o Cam Clay e os Modelos Cap incorporam, além da superfície fixa característica dos modelos clássicos (Drucker-Prager e Mohr-Coulomb), uma superfície de escoamento móvel que simula o endurecimento plástico do material. Esses modelos foram desenvolvidos com base em observações experimentais que revelaram que muitos materiais geológicos sofrem deformações plásticas contínuas até atingir a superfície de ruptura (Desai e Siriwardane, 1984).

Nas últimas décadas, outros modelos constitutivos para solos foram desenvolvidos, alguns dos quais assumem leis de fluxo não-associadas. A Lei da Normalidade estabelece que os incrementos de deformação plástica são perpendiculares a uma superfície no espaço de tensões definida a partir de uma função potencial plástico. É usual assumir na Teoria da Plasticidade Clássica que a função potencial possui a mesma forma da função de escoamento, isto é, fluxo associado costuma ser empregado. No entanto, essa consideração não é necessária e existem evidências de que a função de escoamento e o potencial plástico não são idênticos para materiais friccionais, ou seja, pode ocorrer fluxo não-associado (Kim e Lade, 1988). Entre os modelos que assumem fluxo não-associado pode se citar o Modelo

de Lade-Kim em que os autores propõem uma forma para a função potencial plástico com base em uma série de observações experimentais. Uma revisão detalhada dos modelos constitutivos para solos pode ser encontrada nos trabalhos de Desai e Siriwardane (1984) e Ibanez (2003).

De forma geral, na teoria clássica da plasticidade, o comportamento dos materiais é descrito a partir da definição da relação constitutiva elástica, da superfície de plastificação, da lei de fluxo e da lei de endurecimento. Na maioria dos casos, não há qualquer discussão sobre as restrições impostas pelas Leis da Termodinâmica, embora frequentemente se façam referências aos chamados “postulados de estabilidade” (Collins, 2003). Embora a maioria dos problemas geotécnicos seja efetivamente isotérmica, qualquer tipo de ruptura envolve grandes mudanças de entropia, de forma que as Leis da Termodinâmica não podem ser ignoradas (Collins, 2003). Dessa forma, outra abordagem baseada em princípios termodinâmicos tem sido adotada por diversos autores. Nessa abordagem, o comportamento dos materiais é descrito a partir de dois potenciais termodinâmicos: uma função de energia (energia livre de Helmholtz, energia livre de Gibbs, entalpia ou energia interna) e uma função de dissipação. A introdução de um potencial termodinâmico, como a energia livre de Helmholtz, conduz às leis de estado a partir das quais é possível relacionar variáveis de estado com suas variáveis associadas. A deformação total e um conjunto de variáveis internas associadas ao encruamento são adotadas para variáveis de estado. As variáveis associadas são as tensões e as forças termodinâmicas generalizadas. Toda a formulação baseia-se no uso de variáveis internas para representar o programa de cargas sofrido pelo material.

O potencial de dissipação introduzido fornece as leis de fluxo que permitem avaliar a evolução das variáveis internas. A definição de uma região de tensões e de forças termodinâmicas admissíveis completa o modelo.

A abordagem baseada em princípios termodinâmicos apresenta uma série de vantagens descritas no trabalho de Houlsby e Puzrin (2000), entre as quais se destaca a obtenção de resultados que seguramente não violam as Leis da Termodinâmica. Além disso, a partir dos potenciais termodinâmicos e de técnicas de análise convexa, princípios de mínimo equivalentes às formulações variacionais do problema são obtidos, conforme destacado por Houlsby e Puzrin (2000), Hecke (1991) e Han e Reddy (1999). Estes

princípios são úteis para a discussão da existência e da unicidade da solução do problema. Salienta-se que, com o auxílio de técnicas da análise convexa, a lei de fluxo pode ser definida sob duas formas equivalentes, obtendo-se duas formulações variacionais do problema de elasto-plasticidade. A formulação baseada na função de dissipação é dita formulação primal. Os deslocamentos, as deformações plásticas e as variáveis internas são as incógnitas do problema primal. A formulação baseada na função de escoamento é dita formulação dual e suas incógnitas são as tensões. A análise matemática das formulações primal e dual pode ser encontrada em Han e Reddy (1999). A aplicação de técnicas da análise convexa à modelagem termomecânica dos materiais é encontrada nos trabalhos de Hecke (1991), Han e Reddy (1999), Ncheuguin (2006), Houlsby (2002), Reddy e Martin (1991) e Hjiáj, Fortin e de Saxcé (2003). Uma apresentação detalhada dos conceitos da análise convexa pode ser encontrada em Rockafellar (1970) e Lemaréchal, Hiriart e Urruty (1991). Resultados da análise funcional são apresentados por Reddy (1986).

Estudos da influência da termodinâmica na teoria da plasticidade se concentraram, principalmente, em modelos apropriados para metais (Collins, Houlsby, 1997), não incorporando características de materiais geológicos como a ocorrência de fluxo não-associado. Os trabalhos de Houlsby (1981) e (1982) podem ser citados entre as primeiras aplicações da termomecânica à modelagem constitutiva de solos. Nesses trabalhos, o autor demonstra que a formulação termomecânica permite descrever o fluxo não-associado sem que princípios termodinâmicos sejam violados. No trabalho desenvolvido em 1981, o autor apresenta uma formulação termodinâmica para o modelo Cam Clay Modificado. A existência da superfície de escoamento surge como consequência da função de dissipação adotada, não tendo sido introduzida como hipótese. A lei de fluxo também surge como consequência da formulação adotada.

Houlsby (1982) demonstrou que o comportamento acoplado de alguns materiais geológicos também pode ser descrito a partir do uso de potenciais termodinâmicos. Materiais com comportamento acoplado têm suas propriedades elásticas alteradas durante o processo de deformação plástica, de forma que a decomposição do tensor de deformações infinitesimais em uma parcela elástica e uma parcela plástica nem sempre permanece válida. Um tratamento detalhado do assunto também pode ser encontrado em (Collins e Houlsby, 1997).

Uma série de trabalhos envolvendo a aplicação da termodinâmica à modelagem constitutiva de solos foi desenvolvida a partir de 1990. Entre esses, pode-se citar os trabalhos de Houlsby (1996) e Houlsby e Puzrin (2000) que trataram da formulação de relações incrementais entre tensões e deformações plásticas para modelos desenvolvidos a partir de potenciais termodinâmicos. A implementação de modelos constitutivos utilizando o Método dos Elementos Finitos exige que as relações tensão-deformação sejam formuladas de maneira incremental. Algoritmos para a implementação numérica de problemas de elastoplasticidade podem ser encontrados nos trabalhos de Han e Reddy (1999), Simo e Hughes (1998) e Hecke (1991).

Citam-se ainda os trabalhos de Puzrin e Houlsby (2001), Houlsby e Puzrin (2002), Collins (2003), Collins (2005), Ncheuguim (2006). O desenvolvimento de modelos de estado crítico a partir de potenciais termodinâmicos foi abordado por Collins (2003) e Collins (2005). Ncheuguim (2006) apresenta a formulação primal de um Modelo Cap em que a superfície de plastificação de Drucker-Prager é associada a uma superfície móvel parabólica. Questões relacionadas à unicidade e à estabilidade da solução são exploradas pelo autor. Houlsby e Puzrin (2002) estendem a aplicação dos conceitos da termodinâmica com variáveis internas à modelagem do comportamento de materiais cuja deformação depende da velocidade com que o programa de cargas se realiza. Os autores afirmam que, para esse tipo de material, a função de dissipação não pode ser utilizada como potencial, utilizando-se em seu lugar dois potenciais cuja soma é igual à função de dissipação. Esses potenciais podem ser relacionados a partir de Transformadas de Legendre-Fenchel. No fim do artigo, os autores ilustram a teoria apresentada por meio de quatro exemplos de modelos viscoplásticos formulados a partir dos potenciais propostos. Por fim, Puzrin e Houlsby (2001) exploram o caso de materiais cujo comportamento é descrito através de mais de uma variável interna ou, até mesmo, através de infinitas variáveis internas. As funções termodinâmicas são substituídas por funcionais e surge a possibilidade de se modelar materiais anisotrópicos por meio do uso de múltiplas superfícies de escoamento.

Trabalhos na área de dano também têm sido desenvolvidos utilizando a abordagem termomecânica. Einav, Houlsby e Nguyen (2007) expressam o comportamento constitutivo de materiais sujeitos à perda de rigidez causada por dano ou por deformações plásticas através da definição de dois potenciais termodinâmicos e da introdução de uma variável

interna de dano. Os autores definem duas classes de modelos. A primeira é a dos modelos desacoplados, na qual a plasticidade e o dano são considerados como processos independentes, de forma que deformações plásticas podem ocorrer sem que haja dano e vice-versa. A segunda é a classe dos modelos acoplados, na qual o dano e a plasticidade ocorrem simultaneamente. Os autores apresentam uma nova formulação para o modelo acoplado dano-plasticidade de Von Mises e introduzem uma formulação baseada em potenciais termodinâmicos para o modelo acoplado dano-plasticidade de Cam Clay Modificado, demonstrando a possibilidade de aplicação dessa teoria a geomateriais.

Finalmente, trabalhos desenvolvidos recentemente têm tratado da formulação matemática das leis constitutivas não associadas. A proposta de descrever tais leis com o auxílio de funções bipotenciais têm sido explorada por diferentes autores, como Bodoville (1999), Bodoville (2001), Hjjaj, Fortin e de Saxcé (2003), Zouain, Pontes Filho, Borges e da Costa (2006) e Buliga, de Saxcé e Ballée (2007). No trabalho de Buliga, de Saxcé e Ballée (2007), os autores tratam da existência e da construção de bipotenciais para uma classe de leis constitutivas. Os autores salientam que o uso de bipotenciais é particularmente atrativo para simulações numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos.

A abordagem termomecânica da teoria da plasticidade é um método promissor para a descrição do comportamento dos solos (Houlsby, 1981). Com essa breve revisão bibliográfica, procurou-se formar um panorama geral do andamento das pesquisas nessa área.

### 3. TERMODINÂMICA E PLASTICIDADE

Neste capítulo, são apresentados os potenciais termodinâmicos utilizados para descrever o comportamento dos materiais elastoplásticos seguindo, inicialmente, uma abordagem clássica e, em seguida, uma abordagem utilizando conceitos da análise convexa. Na abordagem clássica, faz-se necessário assumir que todas as funções são suaves. Por sua vez, quando se faz uso de técnicas da análise convexa, essa consideração torna-se desnecessária. A dedução das equações da termodinâmica utilizadas ao longo do presente capítulo encontra-se no Apêndice A. Alguns conceitos e teoremas da análise convexa são apresentados, resumidamente, no Apêndice B.

Em toda a formulação apresentada, os efeitos térmicos foram desconsiderados. Além disso, admitiu-se que a deformação resultante de uma história de tensões não depende da velocidade com que o programa de carga se realiza. Os trabalhos utilizados como principais referências foram os de Han e Reddy (1999), de Hecke (1991) e de Rockafellar (1970).

#### 3.1 Abordagem Clássica

Nessa seção, são introduzidos os conceitos de potenciais termodinâmicos e de região admissível segundo uma abordagem clássica.

##### 3.1.1 Potencial Termodinâmico e Leis de Estado

Para descrever o comportamento de materiais elastoplásticos é necessário escolher apropriadamente as variáveis em termos das quais a teoria será formulada. Essas variáveis, denominadas variáveis de estado, devem ser adequadas à descrição dos processos sofridos pelo material. Em elastoplasticidade, adotam-se para variáveis de estado a deformação total e um conjunto de variáveis internas associadas aos processos dissipativos.

A deformação total pode ser decomposta aditivamente em uma parcela elástica e em uma parcela plástica, conforme apresentado na Equação (3.1). A dedução dessa decomposição a partir de considerações termodinâmicas é apresentada por Han e Reddy (1999).

$$E = E^e + E^p \quad (3.1)$$

As variáveis internas adotadas possuem natureza escalar ou tensorial e estão associadas aos mecanismos de dissipação característicos de processos plásticos. Estas variáveis são a deformação plástica,  $E^p$ , e um conjunto de variáveis  $\mathbf{a}_i$  associadas ao encruamento do material. A utilização de uma variável interna escalar permite avaliar a evolução do tamanho da superfície limite no espaço de tensões em um processo de encruamento isotrópico. Para um material com encruamento cinemático, por sua vez, a posição da superfície limite no espaço de tensões deve ser associada a uma variável interna tensorial.

As Equações Constitutivas utilizadas para descrever o comportamento de materiais elastoplásticos possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(E, E^p, \mathbf{a}_i) \quad (3.2)$$

$$T = T(E, E^p, \mathbf{a}_i) \quad (3.3)$$

A função  $\mathbf{j}$ , presente na Equação (3.2), é a energia livre de Helmholtz. Essa energia pode ser decomposta aditivamente em uma parcela elástica e em uma parcela plástica, conforme apresentado na Equação (3.4).

$$\mathbf{j}(E, \mathbf{a}) = \mathbf{j}^e(E^e) + \mathbf{j}^h(\mathbf{a}) \quad (3.4)$$

Substituindo a Equação (3.4) na forma local reduzida da Desigualdade de Dissipação, obtém-se:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial E^e} - T \right) \dot{E}^e + \frac{\partial \mathbf{j}^h}{\partial \mathbf{a}_i} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i - T \cdot \dot{E}^p \leq 0 \quad (3.5)$$

Dessa equação, derivam-se as expressões:

$$T = \frac{\partial \mathbf{j}^e(E^e)}{\partial E^e} \quad (3.6)$$

$$T \cdot \dot{E}^p - \frac{\partial \mathbf{j}^h}{\partial \mathbf{a}_i} \cdot \dot{\mathbf{a}}_i \geq 0 \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) representa uma nova forma da Desigualdade de Dissipação, podendo ser escrita de maneira concisa como:

$$\Sigma \cdot \dot{A} \geq 0 \quad (3.8)$$

Nessa equação,  $\Sigma = (T, \mathbf{c})$  representa as tensões generalizadas e  $A = (E^p, -\mathbf{a})$  representa as deformações plásticas generalizadas, de forma que  $\dot{A}$  são as taxas de

deformações plásticas generalizadas. Os símbolos  $\mathbf{c}$  e  $-\mathbf{a}$  tratam, respectivamente, do conjunto de forças termodinâmicas,  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i)_{i=1}^m$ , e do conjunto de variáveis internas,  $-\mathbf{a} = (-\mathbf{a}_i)_{i=1}^m$ . Assim como a tensão é uma quantidade conjugada da deformação, as forças termodinâmicas são conjugadas às variáveis internas, conforme apresentado na Equação (3.9). Essas forças são resultantes da reestruturação interna que ocorre nos materiais durante processos plásticos.

$$\mathbf{c}_i = \frac{\partial \mathbf{j}^h}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (3.9)$$

As Equações (3.6) e (3.9) são denominadas Leis de Estado e permitem definir as variáveis associadas  $T$  e  $\mathbf{c}$  a partir das variáveis de estado.

Observa-se que, na Equação (3.7), estão presentes as taxas de variação das variáveis internas. Para materiais elastoplásticos, nos quais as tensões e deformações atuais dependem da história de carregamento, as Equações Constitutivas apresentadas não são suficientes para descrever o comportamento do material. Fazem-se necessárias equações de evolução que determinem as taxas de variação de cada uma das variáveis internas. A Equação (3.10) apresenta uma forma geral dessas equações de evolução.

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{b}_i(E, \mathbf{a}_i) \quad (3.10)$$

Dessa forma, enquanto em modelos elásticos apenas um potencial termodinâmico é suficiente para descrever o comportamento constitutivo do material, em modelos elastoplásticos dois potenciais termodinâmicos são utilizados. Estes são a energia livre de Helmholtz, ou qualquer um dos potenciais termodinâmicos relacionados a essa por meio de Transformadas de Legendre-Fenchel, e um potencial de dissipação. A introdução de um potencial termodinâmico, como a energia livre de Helmholtz, conduz às leis de estado a partir das quais é possível relacionar variáveis de estado com suas variáveis associadas, conforme apresentado anteriormente. Já a introdução de um potencial de dissipação fornece as leis de fluxo que permitem avaliar a evolução das variáveis internas. A definição de uma região de tensões e forças termodinâmicas admissíveis completa o modelo.

### 3.1.2 Região admissível

A região admissível,  $P$ , é definida como o conjunto de estados de tensões generalizadas plasticamente possíveis para um dado material. Pode ser representada matematicamente através de uma função,  $f$ , denominada função de escoamento, conforme apresentado na Equação (3.11). A fronteira da região admissível,  $B$ , é definida pela expressão apresentada na Equação (3.12) e o seu interior,  $e$ , é definido conforme apresentado na Equação (3.13). Superfície de escoamento e região elástica são os termos utilizados para denominar a fronteira e o interior da região admissível respectivamente.

$$P = \{\Sigma / f(\Sigma) \leq 0\} \quad (3.11)$$

$$B = \{\Sigma / f(\Sigma) = 0\} \quad (3.12)$$

$$e = \{\Sigma / f(\Sigma) < 0\} \quad (3.13)$$

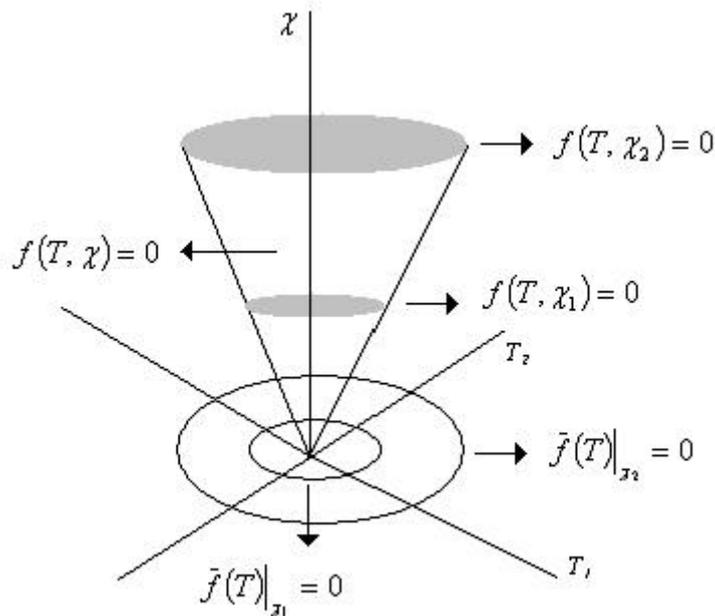
Pontos internos à região admissível representam estados de tensão a partir dos quais são iniciados processos elásticos. Tensões situadas na fronteira da região admissível são aquelas a partir das quais se iniciam processos puramente elásticos mediante descarregamento ou processos elastoplásticos mediante carga efetiva. Estados de tensão generalizada exteriores a essa região são inadmissíveis. As taxas de variação das deformações plásticas generalizadas para os processos descritos assumem os valores apresentados no conjunto de equações (3.14).

$$\dot{A} = \begin{cases} f(\Sigma) < 0 \\ f(\Sigma) = 0, \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$
$$\dot{A} \neq 0, f(\Sigma) = 0, \dot{f} = 0$$

A função de escoamento,  $f(\Sigma)$ , delimita uma região fixa no espaço de tensões generalizadas. No entanto, para cada conjunto de valores das forças termodinâmicas,  $\bar{c}$ , é possível definir uma região diferente no espaço de tensões. Essa região, delimitada por uma função  $\bar{f}(T) = f(T, \bar{c})$ , corresponde à projeção da superfície de escoamento no espaço de tensões para um dado valor  $\bar{c}$ . Como definido anteriormente, as forças termodinâmicas são variáveis associadas ao encruamento do material. Dessa forma, à medida que o processo de encruamento ocorre, as forças termodinâmicas são alteradas e a região admissível no espaço de tensões se modifica. A Figura 1 ilustra o processo descrito.

Observa-se, na Figura 1, que a região admissível no espaço de tensões generalizadas é fixa, enquanto a região admissível no espaço de tensões se modifica durante a história de carregamento. Ressalta-se, no entanto, que para materiais elastoplásticos ideais a região admissível se mantém inalterada ao longo da história de carregamento tanto no espaço de tensões quanto no espaço de tensões generalizadas. Isso se deve ao fato de a função de escoamento não ser dependente das forças termodinâmicas nesse tipo de material.

**FIGURA 1 PROJEÇÃO DA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO NO ESPAÇO DE TENSÕES.**



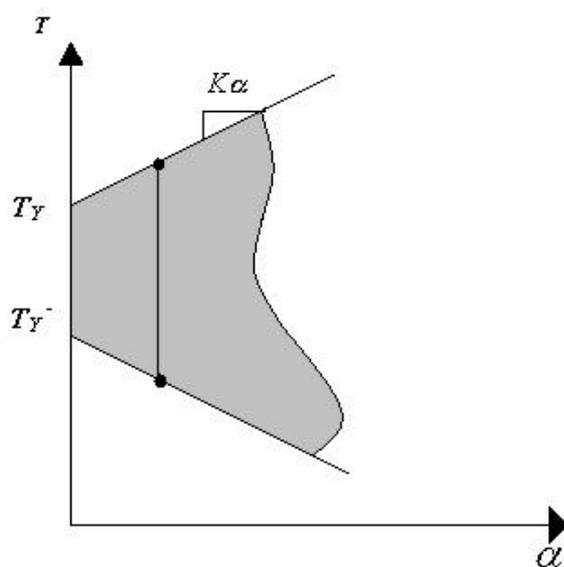
A título de exemplo, apresentam-se nas Equações (3.15) e (3.16) funções de escoamento para um modelo de plasticidade unidimensional com endurecimento isotrópico linear e cinemático linear, respectivamente. O endurecimento isotrópico caracteriza-se por uma expansão homogênea da projeção da superfície de plastificação no espaço de tensões. A expansão pode ser definida por uma única variável escalar, geralmente, relacionada à deformação plástica acumulada. O endurecimento cinemático, por sua vez, caracteriza-se por uma translação da projeção inicial da superfície de plastificação. Costuma ser descrito por uma única variável tensorial, em geral, o tensor de deformações plásticas,  $E^p$ .

$$f(T, \mathbf{a}) = |T| - [T_Y + K\mathbf{a}] \quad (3.15)$$

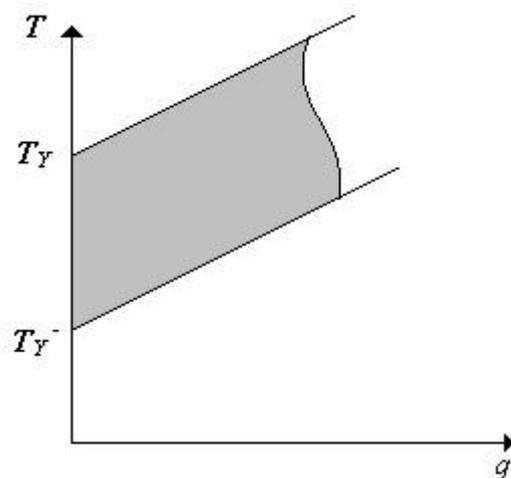
$$f(T, q) = |T - q| - T_Y \quad (3.16)$$

A Figura 2 apresenta a região admissível para o caso unidimensional de endurecimento isotrópico linear. Já, a Figura 3 apresenta a região admissível para o caso unidimensional de endurecimento cinemático linear. Os exemplos de endurecimento isotrópico e cinemático apresentados foram retirados do trabalho de Simo (1998).

**FIGURA 2 REGIÃO ADMISSÍVEL PARA UM MODELO DE PLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO LINEAR.**



**FIGURA 3 REGIÃO ADMISSÍVEL PARA UM MODELO UNIDIMENSIONAL COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO LINEAR.**



### 3.1.3 Trabalho Plástico e Potencial de Dissipação

Nesta seção, são introduzidos os últimos conceitos necessários à modelagem do comportamento constitutivo de materiais elastoplásticos. O postulado de Drucker e o Princípio da Potência Máxima de Hill são apresentados. As conseqüências do Princípio de Hill, isto é, Lei da Normalidade e convexidade da região admissível são discutidas. A forma como os conceitos e postulados são apresentados baseia-se, principalmente, em Pereira (1984).

Na teoria da plasticidade, as deformações dependem da completa história de tensões através da qual o estado atual foi alcançado. Isto é, corpos com o mesmo estado de tensões podem apresentar estados de deformações distintos caso tenham passado por diferentes histórias de carregamento.

A dependência entre as deformações e a história de tensões torna necessário o cálculo de incrementos de deformação plástica ao longo da história de tensões, obtendo-se as deformações totais por integração ou aproximando-as por somatórios (Ibanez, 2003). Durante um incremento de deformação, o trabalho realizado no corpo é dado pelo produto entre os incrementos de tensão e de deformação, conforme apresentado na Equação (3.17).

$$dW = dT \cdot dE \quad (3.17)$$

A observação do diagrama tensão-deformação de materiais estáveis que apresentam tensões e deformações em correspondência biunívoca no carregamento monotônico mostra que, nesses materiais, os incrementos de tensão produzem trabalho positivo, isto é,  $dT \cdot dE > 0$ . Esta condição, generalizada para o estado multiaxial, pode ser adotada como postulado adicional da teoria de comportamento elastoplástico, tendo sido formalizada por Drucker. O postulado de Drucker estabelece que, para materiais estáveis:

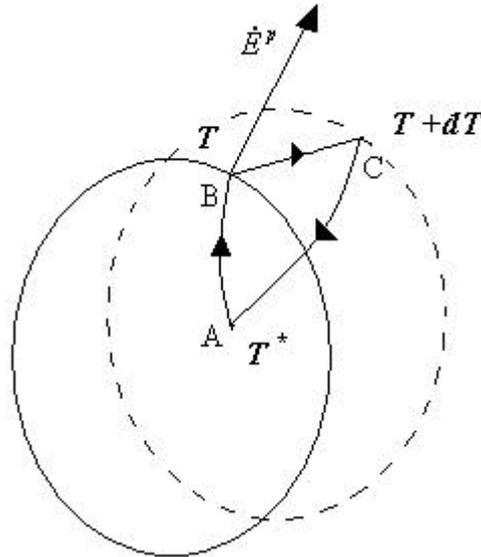
- i) Durante os processos de carga, os incrementos de tensão realizam trabalho positivo;
- ii) O trabalho realizado durante um ciclo de aplicação e remoção de incrementos de tensão é não-negativo.

A segunda parte do postulado de Drucker assegura que o trabalho realizado pelos incrementos de tensão  $(T - T^*)$ , em um ciclo como aquele apresentado na Figura 4, é positivo. O trabalho realizado no ciclo pode ser representado através da integral,

apresentada na Equação (3.18), na qual  $T^*$  representa qualquer estado de tensões interior à região elástica correspondente a um estado  $T$  para o qual começa a plastificação. É importante ressaltar que, para um material com endurecimento, o trabalho realizado seria nulo apenas se o processo fosse puramente elástico.

$$\oint (T - T^*) dE \geq 0 \quad (3.18)$$

**FIGURA 4 CICLO DE TENSÕES.**



Os incrementos de tensão realizam trabalho que pode ser decomposto em uma parcela plástica e outra elástica, conforme apresentado na Equação (3.19). A parcela elástica do trabalho realizado no ciclo de aplicação e remoção de carga é nula por seu integrando ser a diferencial exata da função complementar da energia de deformação da teoria da elasticidade, apresentada na Equação (3.20). Dessa forma, a Equação (3.19) reduz-se à Equação (3.21).

$$\oint (T - T^*) dE^e + \oint (T - T^*) dE^p \geq 0 \quad (3.19)$$

$$U_c(T) = \frac{1}{2} D^{-1} (T - T^*) (T - T^*) \quad (3.20)$$

$$\oint (T - T^*) dE^p \geq 0 \quad (3.21)$$

No ciclo apresentado na Figura 4, a deformação plástica ocorre apenas no trecho BC, de forma que a partir da Equação (3.21) obtém-se:

$$(T - T^*) \dot{E}^p \geq 0 \quad (3.22)$$

A desigualdade apresentada na Equação (3.22) é conhecida como Princípio da Potência Máxima de Hill. O princípio estabelece que, para uma determinada taxa de deformação plástica, a potência dissipada no processo real  $T \dot{E}^p$  é maior que toda potência virtual  $T^* \dot{E}^p$  determinada pela taxa de deformação plástica real e qualquer tensão virtual plasticamente segura. Uma forma alternativa de expressar esse postulado é:

$$W(\dot{E}^p) = \max \{ T^* \dot{E}^p / \bar{f}(T^*) \leq 0 \} \quad (3.23)$$

A seguir, apresenta-se a forma do Princípio da Potência Máxima de Hill adotada por Han e Reddy (1999). A forma adotada considera a dissipação devido às variáveis internas. Assume-se que a tensão generalizada  $\Sigma = 0$  sempre pertence à região admissível. Dessa forma, tem-se: dada uma tensão generalizada  $\Sigma \in P$  e uma taxa de deformação plástica associada  $\dot{A}$ , a desigualdade apresentada na Equação (3.24) é válida para qualquer tensão generalizada  $\Sigma^* \in P$ .

$$(\Sigma - \Sigma^*) \dot{A} \geq 0 \quad (3.24)$$

Observa-se que a forma do Princípio da Potência Máxima de Hill apresentada na Equação (3.24) está de acordo com a forma local da Desigualdade de Dissipação.

O Princípio da Potência Máxima de Hill possui uma interpretação geométrica que estabelece que o tensor  $(\Sigma - \Sigma^*)$  forma um ângulo agudo com  $\dot{A}$ , implicando que todos os pontos  $\Sigma^*$  devem estar localizados de um dos lados do plano perpendicular a  $\dot{A}$  no ponto  $\Sigma$ . Assim, a superfície de plastificação deve ser convexa, conforme ilustrado na Figura 5.

Se a superfície de plastificação for regular em  $\Sigma$ , uma maneira de assegurar que todo  $\Sigma^*$  esteja de um dos lados do plano perpendicular a  $\dot{A}$  no ponto  $\Sigma$  é que  $\dot{A}$  seja normal a superfície de plastificação em  $\Sigma$  e, portanto, paralelo ao gradiente da função de escoamento no ponto, conforme apresentado na Equação (3.25). Esse resultado é conhecido como Lei da Normalidade.

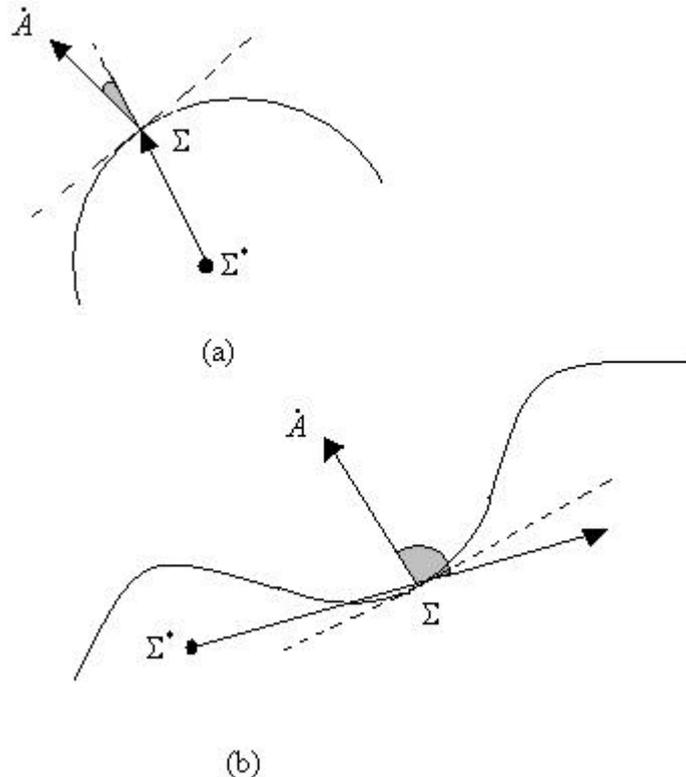
$$\dot{A} = I \nabla f(\Sigma) \quad (3.25)$$

O escalar  $I$  é denominado multiplicador plástico, possuindo valor não negativo. As restrições referentes ao escalar  $I$  são determinadas pela condição de complementariedade:

$$I \geq 0 \quad f(\Sigma) \leq 0 \quad I f(\Sigma) = 0 \quad (3.26)$$

A última condição implica que  $I$  possui valor positivo apenas quando a função de escoamento é nula, isto é, quando ocorre deformação plástica. Por sua vez, quando a função de escoamento assume valor negativo,  $I$  assume valor nulo, caso em que a taxa de deformação plástica é nula.

**FIGURA 5 CONVEXIDADE DA SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO**



(a) Superfície de plastificação convexa. (b) Superfície de plastificação não-convexa.

Finalmente, assumindo que em um dado instante de tempo  $t$ , a condição  $f(\Sigma(t)) = 0$  é satisfeita, como as tensões generalizadas admissíveis são tais que  $f \leq 0$  para qualquer instante de tempo, tem-se  $\dot{f}(\Sigma(t)) \leq 0$ . Se  $\dot{f} < 0$ , as tensões generalizadas movem-se em direção ao interior da região admissível, isto é, tem-se descarregamento elástico e  $I = 0$ . Logo, deformações plásticas, para as quais  $I > 0$ , ocorrem quando  $\dot{f} = 0$ . A condição de consistência adotada por Han e Reddy (1999) e apresentada na Equação (3.27) resume o que foi descrito.

$$\text{Quando } f = 0, I \geq 0, \dot{f} \leq 0, I \dot{f} = 0 \quad (3.27)$$

A seguir, o Quadro 1 reúne a formulação apresentada.

**QUADRO 1 RESUMO DAS EQUAÇÕES DA ELASTOPLASTICIDADE.**

<b>Variáveis cinemáticas</b>	
<i>deslocamento</i>	$U$
<i>deformação</i>	$E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$
<i>deformação plástica</i>	$E^p$
<i>deformação elástica</i>	$E^e = E - E^p$
<i>variáveis internas</i>	$-\mathbf{a} = (-\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2, \dots, -\mathbf{a}_n)$
<i>deformações plásticas generalizadas</i>	$A = (E^p, -\mathbf{a})$
<b>Variáveis dinâmicas</b>	
<i>tensões</i>	$T$
<i>forças termodinâmicas</i>	$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$
<i>tensões generalizadas</i>	$\Sigma = (T, \mathbf{c})$
<b>Funções escalares</b>	
<i>energia livre de Helmholtz</i>	$\mathbf{j}(E, E^p, \mathbf{a}) = \mathbf{j}^e(E^e) + \mathbf{j}^p(\mathbf{a})$
<i>função de escoamento</i>	$f(\Sigma)$
<b>Equação de equilíbrio</b>	$\text{div}T + b = 0$
<b>Equações constitutivas</b>	$T = \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial E^e}$
	$\mathbf{c}_i = \frac{\partial \mathbf{j}^p}{\partial \mathbf{a}_i}, 1 \leq i \leq m$
	$\dot{A} = \mathbf{I} \nabla f(\Sigma)$
	$\mathbf{I} \geq 0, f \leq 0, \mathbf{I} f = 0$
	<i>Quando</i> $f = 0, \mathbf{I} \geq 0, \dot{f} \leq 0, \mathbf{I} \dot{f} = 0$

## 3.2 Plasticidade e análise convexa

Nesta seção, a teoria apresentada anteriormente será descrita a partir de conceitos da análise convexa. A nova abordagem permitirá obter os mesmos resultados de uma maneira mais rigorosa, além de eliminar algumas restrições como, por exemplo, a necessidade de utilizar apenas funções suaves. Os conceitos, teoremas e definições da análise convexa utilizados são apresentados no Apêndice B. No início da seção, as Leis de Estado apresentadas anteriormente, Equações (3.6) e (3.9), são reescritas utilizando outra formulação e, em seguida, o potencial termodinâmico complementar da energia livre de Helmholtz é obtido. Por fim, resultados da análise convexa são apresentados e o potencial de dissipação, juntamente com as leis de evolução, são determinados a partir desses. As demonstrações dos resultados da análise convexa encontram-se nos trabalhos de Han e Reddy (1999) e Rockafellar (1970).

### 3.2.1 Potencial Termodinâmico e Leis de Estado

As Equações (3.6) e (3.9), apresentadas anteriormente, podem ser expressas de maneira equivalente através da formulação utilizada nas Equações (3.28) e (3.29).

$$T = \nabla \mathbf{j}^e(E^e) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{c} = \nabla \mathbf{j}^h(\mathbf{a}) \quad (3.29)$$

Assim como as variáveis associadas  $T$  e  $\mathbf{c}$  são definidas a partir das parcelas  $\mathbf{j}^e(E^e)$  e  $\mathbf{j}^h(\mathbf{a})$  do potencial termodinâmico  $\mathbf{j}(E^e, \mathbf{a})$ , as variáveis de estado  $E^e$  e  $\mathbf{a}$  podem ser definidas por meio das parcelas do potencial termodinâmico complementar,  $\mathbf{j}_c(E^e, \mathbf{a})$ . Esse potencial termodinâmico complementar é definido por meio da expressão apresentada na Equação (3.30). Nessa equação, faz-se uso da definição de funções convexas conjugadas apresentada no Apêndice B.

$$\mathbf{j}_c(T, \mathbf{c}) = \sup_{E^e, \mathbf{a}} \left[ (T, \mathbf{c}) \cdot (E^e, \mathbf{a}) - \mathbf{j}(E^e, \mathbf{a}) \right] \quad (3.30)$$

A Equação (3.30) pode ser reescrita utilizando a decomposição apresentada na Equação (3.4). As Equações (3.31) a (3.34) apresentam a maneira como essa decomposição é obtida e, por fim, a Equação (3.35) define o potencial termodinâmico complementar  $\mathbf{j}_c(E^e, \mathbf{a})$  a partir de uma parcela elástica e de uma parcela plástica.

$$\mathbf{j}_c(T, \mathbf{c}) = \sup_{E^e, \mathbf{a}} [T \cdot E^e - \mathbf{j}^e(E^e) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{j}^h(\mathbf{a})] \quad (3.31)$$

$$\mathbf{j}_c(T, \mathbf{c}) = \sup_{E^e} [T \cdot E^e - \mathbf{j}^e(E^e)] + \sup_{\mathbf{a}} [\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{j}^h(\mathbf{a})] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{j}_c^e(T) = \sup_{E^e} [T \cdot E^e - \mathbf{j}^e(E^e)] \quad (3.33)$$

$$\mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) = \sup_{\mathbf{a}} [\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{j}^h(\mathbf{a})] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{j}_c(T, \mathbf{c}) = \mathbf{j}_c^e(T) + \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) \quad (3.35)$$

Por hipótese, assume-se que a função energia livre de Helmholtz,  $\mathbf{j}(E^e, \mathbf{a})$ , é estritamente convexa e diferenciável. Já que  $\mathbf{j}(E^e, \mathbf{a})$  é estritamente convexa, o potencial conjugado,  $\mathbf{j}_c(E^e, \mathbf{a})$ , é diferenciável. Assim, as variáveis de estado  $E^e$  e  $\mathbf{a}$  são definidas a partir das funções convexas, próprias e diferenciáveis  $\mathbf{j}_c^e(T)$  e  $\mathbf{j}_c^h(\mathbf{c})$ , conforme apresentado nas Equações (3.36) e (3.37). Essas equações são equivalentes as Equações (3.28) e (3.29).

$$E^e = \nabla \mathbf{j}_c^e(T) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{a} = \nabla \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) \quad (3.37)$$

### 3.2.2 Potencial de Dissipação

A Lei da Normalidade e a convexidade da superfície de plastificação foram apresentadas, anteriormente, como conseqüências do Princípio da Potência Máxima de Hill. Nesta seção, esses resultados serão obtidos a partir da aplicação do teorema apresentado a seguir.

*Teorema:* Seja  $X$  um espaço reflexivo de Banach e seja  $g: X \rightarrow R$  uma função própria, convexa e fraca semi-contínua (*l.s.c*). Dados  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$ , então:

$$x^* \in \partial g(x) \Leftrightarrow x \in \partial g^*(x^*) = N_K(x^*)$$

As definições de funções próprias, funções convexas e funções fracas semi-contínuas (*l.s.c*) são apresentadas no Apêndice B.

Na aplicação do teorema apresentado, assume-se que o espaço vetorial  $X$  corresponde ao espaço das taxas de deformações plásticas generalizadas e o espaço vetorial  $X^*$  corresponde ao espaço das tensões generalizadas.

Define-se a função suporte da região convexa de tensões admissíveis  $P$  como:

$$D(\dot{A}) = \sup\{\Sigma^* \cdot \dot{A} / \Sigma^* \in P\} = \Sigma \cdot \dot{A} \quad (3.38)$$

onde  $\Sigma$  é o ponto no qual o supremo é atingido.

No contexto da plasticidade,  $D$  é a função de dissipação. Essa função é conjugada a função indicatriz da região admissível  $P$  e possui as seguintes propriedades: convexa, positiva homogênea, fraca semi-contínua (*l.s.c.*),  $D(\dot{A}) \geq 0$  e  $D(0) = 0$ . Portanto, do teorema apresentado no início dessa seção, tem-se:

$$\dot{A} \in \partial Ind_p \leftrightarrow \Sigma \in \partial D(\dot{A}) \quad (3.39)$$

A Equação (3.39) é uma generalização da Lei da Normalidade, admitindo o caso de funções de escoamento não suaves. A formulação apresentada, nessa seção, permite descrever a Lei da Normalidade de duas formas equivalentes, conforme apresentado no Quadro 2.

## QUADRO 2 FORMULAÇÕES EQUIVALENTES DA LEI DE FLUXO.

<i>Formulação I</i>	$D$ - função convexa, positiva homogênea $D(\dot{A}) \geq 0, D(0) = 0$ $\Sigma \in \partial D(\dot{A})$
<i>Formulação II</i>	$P$ - conjunto fechado, convexo, contendo o zero $D_p^* = Ind_p$ - função indicatriz de $P$ $\dot{A} \in \partial Ind_p(\Sigma) = N_p(\Sigma)$

Considerações práticas determinam qual das formulações é a mais apropriada para a resolução de um determinado problema (Han e Reddy, 1999). A *Formulação II* é comumente a mais utilizada, tendo sido adotada no presente trabalho. Segundo essa formulação, identificam-se três situações distintas:

1.  $\Sigma = (T, c) \notin P \Rightarrow \partial Ind_p(\Sigma) = \{\mathbf{f}\}$  e, portanto, essa região é inacessível;
2.  $\Sigma \in e \Rightarrow \partial Ind_p(\Sigma) = \{0\}$  e, por essa razão, o interior de  $P$  é conhecido como região elástica;
3.  $\Sigma \in B \Rightarrow \partial Ind_p(\Sigma) = \{\dot{A} / (\Sigma^* - \Sigma) \cdot \dot{A} \leq 0, \forall \Sigma^* \in P\}$  que é o cone das normais externas a  $P$  em  $\Sigma$ .

### 3.2.3 Equação Constitutiva Elasto-Plástica em Taxas

Nessa seção, as relações constitutivas são enunciadas em termos de taxas temporais de tensão e deformação. A formulação apresentada baseia-se, principalmente, no trabalho de Hecke (1991).

A fim de obter as Leis de Estado em taxas, as Equações (3.36) e (3.37) são derivadas em relação ao tempo. Como resultado, obtém-se as seguintes expressões:

$$\dot{E}^e = \nabla_{TK} \mathbf{j}_C^e(T) \dot{T} \quad (3.40)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \nabla_{c\mathbf{a}} \mathbf{j}_C^h(\mathbf{c}) \dot{\mathbf{c}} \quad (3.41)$$

Introduzindo os potenciais  $j_C^e(\dot{T})$  e  $j_C^h(\dot{\mathbf{c}})$ :

$$j_C^e(\dot{T}) = \frac{1}{2} \nabla_{TK} \mathbf{j}_C^e(T) \dot{T} \cdot \dot{T} \quad (3.42)$$

$$j_C^h(\dot{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2} \nabla_{c\mathbf{a}} \mathbf{j}_C^h(\mathbf{c}) \dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}} \quad (3.43)$$

pode-se reescrever as Leis de Estado como:

$$\dot{E}^e = \nabla j_C^e(\dot{T}) \quad (3.44)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \nabla j_C^h(\dot{\mathbf{c}}) \quad (3.45)$$

Os potenciais  $j_C^e(\dot{T})$  e  $j_C^h(\dot{\mathbf{c}})$  são funcionais quadráticos, estritamente convexos, diferenciáveis, coercivos e com mínimo em zero. Por definição, o funcional conjugado ao potencial  $j_C^e(\dot{T})$  é diferenciável e possui a forma:

$$j^e(\dot{E}^e) = \sup_{\dot{T}^*} [\dot{T}^* \cdot \dot{E}^e - j_C^e(\dot{T}^*)] \quad (3.46)$$

Assim como as taxas de deformações e de parâmetros de encruamento estão relacionadas aos potenciais introduzidos nas Equações (3.42) e (3.43), as taxas de tensões podem ser obtidas a partir do potencial  $j^e(\dot{E}^e)$ :

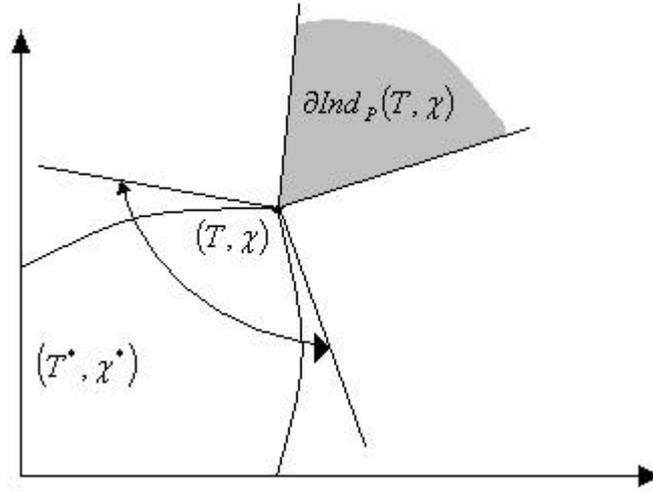
$$\dot{T} = \nabla j^e(\dot{E}^e) \quad (3.47)$$

Para exprimir a relação constitutiva em taxas é necessário, ainda, encontrar uma relação de consistência que vinculará taxas de tensão e de forças termodinâmicas com taxas de deformações plásticas e parâmetros de encruamento. Essa relação de consistência é apresentada na Equação (3.48):

$$\dot{T} \cdot \dot{E}^p - \dot{c} \cdot \dot{a} = 0 \quad (3.48)$$

Faz-se necessário, também, definir a região convexa das taxas de tensões e das taxas de forças termodinâmicas admissíveis. Adota-se, para essa região, o cone polar negativo de  $\partial Ind_p(T, c)$  definido em (3.49) e ilustrado na Figura 6.

**FIGURA 6 CONE POLAR NEGATIVO DE  $\partial Ind_p(T, c)$**



Sejam os vetores  $\Sigma^* = (T^*, c^*)$  e  $\Sigma = (T, c)$ . Os vetores  $(\Sigma^* - \Sigma)$  encontram-se na região do cone polar negativo de  $\partial Ind_p(T, c)$ . Fazendo  $\Sigma^* = \Sigma_{t+\Delta t}$  e  $\Sigma = \Sigma_t$ , obtém-se  $\dot{\Sigma} = \lim_{\Delta t} \frac{\Sigma^* - \Sigma}{\Delta t}$ . Assim, as taxas de tensões e forças termodinâmicas admissíveis,  $\dot{\Sigma} = (\dot{T}, \dot{c})$ , também se encontram na região do cone polar negativo de  $\partial Ind_p(T, c)$ :

$$(\dot{T}^*, \dot{c}^*) \in \dot{P} = [\partial Ind_p(T, c)]^{-1} \Leftrightarrow \dot{E}^p \cdot \dot{T}^* - \dot{a} \cdot \dot{c}^* \leq 0 \quad (3.49)$$

Considerando que a região das taxas de tensões e de forças termodinâmicas admissíveis é o cone polar negativo de  $\partial Ind_p(T, c)$ , é possível demonstrar que dado  $(\dot{T}, \dot{c}) \in \dot{P}$ , então  $(\dot{E}^p, -\dot{a})$  é tal que:

(a)  $(\dot{E}^p, -\dot{a}) \in \partial Ind_p(T, c)$

(b)  $\dot{E}^p \cdot \dot{T} - \dot{a} \cdot \dot{c} = 0$ , se e somente se:

$$(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) \in \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}}).$$

É possível obter uma interpretação física para o fato de  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) \in \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$ , analisando as seguintes situações particulares:

- a)  $(T, \mathbf{c}) \in \mathbf{e}$ : nesse caso, não ocorre plastificação, pois  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) = (0, 0)$  e qualquer taxa de tensão e força termodinâmica é admissível;
- b)  $(T, \mathbf{c}) \in B$ : Nesse caso, identificam-se três situações:
  - b.1)  $(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}}) \in \mathbf{e}\{\dot{P}\}$ : Como o conjunto  $\partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$  tem somente o elemento nulo interpreta-se que não ocorre plastificação, isto é,  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) = (0, 0)$ . Este é o caso em que ocorre descarregamento elástico local;
  - b.2)  $(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}}) \in B\{\dot{P}\}$ : Nessa situação pode ocorrer plastificação ou ainda um processo neutro. Nesse caso,  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) \in \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$ .
  - b.3)  $(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}}) \notin \dot{P}$ , logo  $\partial \text{Ind}_{\dot{P}} = \{\mathbf{f}\}$ .

Por fim, para definir a evolução das variáveis internas  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}})$ , adota-se o funcional:

$$j_C^p(\dot{T}) = \inf_{\dot{\mathbf{c}}^*} \quad j_C^h(\dot{\mathbf{c}}^*) \quad (3.50)$$

$$| (\dot{T}, \dot{\mathbf{c}}^*) \in \dot{P}$$

É possível demonstrar que o funcional apresentado possui as seguintes propriedades:

- a) trata-se de um funcional convexo e próprio;
- b) por convenção, no caso de plasticidade ideal, tem-se:

$$j_C^p(\dot{T}) = \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}) \quad (3.51)$$

- c) as taxas de deformações plásticas  $\dot{E}^p$  são elementos do subdiferencial de  $j_C^p(\dot{T})$  em  $\dot{T}$ , isto é,  $\dot{E}^p \in \partial j_C^p(\dot{T})$ , se e somente se, para algum  $\dot{\mathbf{c}}^*$ ,  $(\dot{E}^p, -\dot{\mathbf{a}}) \in \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$ , onde  $\dot{\mathbf{a}} = \nabla j_C^h(\dot{\mathbf{c}})$ .

O item (c) está diretamente relacionado ao teorema apresentado por Rockafellar (1970) enunciado a seguir.

*Teorema:* Suponha que:

$$\mathbf{j}(u) = \inf_{x \in X} F(x, u), \quad \forall u \in U$$

onde  $F(x, u)$  é convexa em  $(x, u)$ . Seja  $\bar{u} \in U$  tal que o ínfimo é atingido em  $\mathbf{j}(\bar{u})$  e seja  $\bar{x}$  qualquer elemento em  $X$  para o qual esse é atingido. Então, o subgradiente da função convexa  $\mathbf{j}$  em  $\bar{u}$  é dado por:

$$\partial \mathbf{j}(\bar{u}) = \{y \in Y / (0, y) \in \partial F(\bar{x}, \bar{u})\}$$

Sendo:

$$j_C^p(\dot{T}) = \inf_{\dot{c}^*} [j_C^h(\dot{c}^*) + \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{c}^*)] \quad (3.52)$$

Pela aplicação do teorema apresentado, tem-se:

$$\partial j_C^p(\dot{T}) = \{\dot{E}^p / (0, \dot{E}^p) \in \partial [j_C^h(\dot{c}) + \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{c})]\} \quad (3.53)$$

O subdiferencial da soma de dois funcionais convexos coincide com a soma de ambos subdiferenciais, caso um dos funcionais seja diferenciável. Logo:

$$\partial j_C^p(\dot{T}) = \{\dot{E}^p / (0, \dot{E}^p) \in \nabla j_C^h(\dot{c}) + \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{c})\} \quad (3.54)$$

A relação:

$$(0, \dot{E}^p) \in \nabla j_C^h(\dot{c}) + \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{c}) \quad (3.55)$$

É equivalente a:

$$(\dot{E}^p, -\dot{a}) \in \partial \text{Ind}_{\dot{P}}(\dot{T}, \dot{c}) \quad (3.56)$$

Dessa forma, as parcelas elástica e plástica da taxa de deformação  $\dot{E}$  podem ser expressas conforme apresentado nas Equações (3.57) e (3.58).

$$\dot{E}^e = \nabla j_C^e(\dot{T}) \quad (3.57)$$

$$\dot{E}^p \in \partial j_C^p(\dot{T}) \quad (3.58)$$

Definindo o funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$ :

$$j_C^{ep}(\dot{T}) = j_C^e(\dot{T}) + j_C^p(\dot{T}) \quad (3.59)$$

chega-se a relação constitutiva:

$$j_C^{ep}(\dot{T}) = \inf_{\dot{c}^*} [j_C^e(\dot{T}) + j_C^h(\dot{c}^*)] \quad (3.60)$$

$$| (\dot{T}, \dot{c}^*) \in \dot{P}$$

$$\dot{E} \in \partial j_C^{ep}(\dot{T}) \quad (3.61)$$

O funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  é convexo, já que tanto a parte elástica quanto a parte plástica o são. Além disso, a parte elástica é estritamente convexa, logo  $j_C^{ep}(\dot{T})$  também o é. Dessa forma, o funcional conjugado  $j^{ep}(\dot{E})$  é diferenciável, obtendo-se:

$$j^{ep}(\dot{E}) = \sup_{\dot{T}^*} [\dot{T}^* \cdot \dot{E} - j_C^{ep}(\dot{T}^*)] = \sup_{(\dot{T}^*, \dot{c}^*) \in \dot{p}} [\dot{T}^* \cdot \dot{E} - j_C^e(\dot{T}^*) - j_C^h(\dot{c}^*)] \quad (3.62)$$

$$\dot{T} = \nabla j^{ep}(\dot{E}) \quad (3.63)$$

O Quadro 3 reúne as principais equações obtidas nessa seção.

### QUADRO 3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTO-PLÁSTICAS EM TERMOS DE TAXAS.

---


$$(\dot{E}^p, -\dot{a}) \in \partial \text{Ind}_p(\dot{T}, \dot{c})$$

$$\dot{E}^e = \nabla j_C^e(\dot{T})$$

$$\dot{E}^p \in \partial j_C^p(\dot{T})$$

$$\dot{E} \in \partial j_C^{ep}(\dot{T})$$

$$\dot{a} = \nabla j_C^h(\dot{c})$$

$$\dot{T} = \nabla j^{ep}(\dot{E})$$


---

#### 3.2.4 Equação Constitutiva Elasto-Plástica em Incrementos Finitos

Processos evolutivos podem ser aproximados através da descrição do comportamento do material em certos instantes obtidos em intervalos de tempo selecionados. O problema de evolução consiste em avaliar as variáveis no fim do intervalo de tempo a partir de seus valores no início do intervalo e dos valores dos incrementos sofridos pelas variáveis ao longo do intervalo (Hjiaj, Fortin e de Saxcé, 2003). Dessa forma, o estado do corpo no instante  $t + \Delta t$  é obtido a partir do estado do corpo em um instante  $t$ :

$$T_{t+\Delta t} = T_t + \Delta T \quad (3.64)$$

$$c_{t+\Delta t} = c_t + \Delta c \quad (3.65)$$

$$E_{t+\Delta t}^e = E_t^e + \Delta E^e \quad (3.66)$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \Delta \mathbf{a} \quad (3.67)$$

As Leis de Estado, dadas pelas Equações (3.36) e (3.37), são reescritas na forma incremental:

$$\Delta E^e = \nabla \mathbf{j}_c^e(T + \Delta T) - \nabla \mathbf{j}_c^e(T) \quad (3.68)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) - \nabla \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) \quad (3.69)$$

Introduzindo os potenciais  $\bar{j}_c^e(\Delta T)$  e  $\bar{j}_c^h(\Delta \mathbf{c})$ :

$$\bar{j}_c^e(\Delta T) = \mathbf{j}_c^e(T + \Delta T) - \Delta T \cdot \nabla \mathbf{j}_c^e(T) - \mathbf{j}_c^e(T) \quad (3.70)$$

$$\bar{j}_c^h(\Delta \mathbf{c}) = \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) - \Delta \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) - \mathbf{j}_c^h(\mathbf{c}) \quad (3.71)$$

é possível obter os incrementos de deformação elástica e os incrementos de parâmetros plásticos:

$$\Delta E^e = \nabla \bar{j}_c^e(\Delta T) \quad (3.72)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \bar{j}_c^h(\Delta \mathbf{c}) \quad (3.73)$$

Adotando para potencial de dissipação a função:

$$D(\Delta E^p, -\Delta \mathbf{a}) = \sup_{(T^*, \mathbf{c}^*) \in P} (\dot{T} \cdot \Delta E^p - \mathbf{c}^* \cdot \Delta \mathbf{a}) \quad (3.74)$$

e para potencial conjugado a função:

$$D_p^*(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) = \text{Ind}_p(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \quad (3.75)$$

obtém-se as expressões:

$$(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \in \partial D(\Delta E^p, -\Delta \mathbf{a}) \quad (3.76)$$

$$(\Delta E^p, -\Delta \mathbf{a}) \in \partial \text{Ind}_p(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \quad (3.77)$$

Por fim, introduz-se o funcional  $\bar{j}_c^p(\Delta T)$ :

$$\bar{j}_c^p(\Delta T) = \inf_{\Delta \mathbf{c}^*} \bar{j}_c^h(\Delta \mathbf{c}^*) \quad (3.78)$$

Esse funcional possui as seguintes propriedades:

- a)  $\bar{j}_c^p(\Delta T)$  é um funcional convexo, próprio e definido em:

$$\text{dom } \bar{j}_c^p = \{\Delta T / \exists \mathbf{c} \text{ tal que } (T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \in P\}$$

- b) Convencionou-se que no caso de plasticidade ideal:

$$\bar{j}_c^p(\Delta T) = \text{Ind}_p(T + \Delta T)$$

c) A parcela plástica do incremento de deformações  $\Delta E^p$  é um elemento do subdiferencial de  $\bar{j}_C^p(\Delta T)$  em  $\Delta T$ , isto é:

$$\Delta E^p \in \partial \bar{j}_C^p(\Delta T), \text{ se e somente se, para algum } \Delta \mathbf{c} :$$

$$(\Delta E^p, -\Delta \mathbf{a}) \in \partial \text{Ind}_P(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}), \text{ onde:}$$

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \bar{j}_C^h(\Delta \mathbf{c})$$

Salienta-se que o funcional  $\bar{j}_C^p(\Delta T)$  é análogo ao funcional  $j_C^p(\dot{T})$ , sendo que a diferença entre esses reside em dois pontos. Primeiramente, enquanto  $j_C^h(\dot{\mathbf{c}})$  é uma função quadrática das taxas das forças termodinâmicas,  $\bar{j}_C^h(\Delta \mathbf{c})$  é uma função convexa e diferenciável dependente apenas de  $\mathbf{j}_C^h(\Delta \mathbf{c})$ . Além disso, na formulação em taxas,  $(\dot{T}, \dot{\mathbf{c}})$  deve pertencer ao cone convexo das taxas admissíveis  $\dot{P}$ , enquanto no problema em incrementos finitos as tensões e forças termodinâmicas no final do passo  $(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c})$  devem ser admissíveis, isto é, contidas na região  $P$ .

Nas demonstrações das propriedades do funcional  $j_C^p(\dot{T})$ , não se utiliza o fato do funcional  $j_C^h(\dot{\mathbf{c}})$  ser quadrático, mas apenas a sua convexidade. Da mesma forma, não se utiliza a suposição do domínio de restrição ser um cone, mas apenas o fato de ser um conjunto convexo. Portanto, as considerações utilizadas para demonstrar as propriedades do funcional  $j_C^p(\dot{T})$  podem ser utilizadas para provar as propriedades do funcional  $\bar{j}_C^p(\Delta T)$ .

Considerando que:

$$\Delta E = \Delta E^e + \Delta E^p \quad (3.79)$$

$$\Delta E^p \in \partial \bar{j}_C^p(\Delta T) \quad (3.80)$$

$$\Delta E^e = \nabla \bar{j}_C^e(\Delta T) \quad (3.81)$$

Obtém-se:

$$\Delta E \in \partial \bar{j}_C^{ep}(\Delta T) \quad (3.82)$$

Onde:

$$\bar{j}_C^{ep}(\Delta T) = \bar{j}_C^e(\Delta T) + \bar{j}_C^p(\Delta T) = \inf_{\Delta \mathbf{c}^*} \left[ \bar{j}_C^e(\Delta T) + \bar{j}_C^h(\Delta \mathbf{c}^*) \right] \quad (3.83)$$

$$\left| (T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}^*) \in P \right.$$

O funcional  $\bar{j}_C^{ep}(\Delta T)$  é estritamente convexo, de forma que seu conjugado resulta diferenciável. A relação constitutiva inversa, Equação (3.85), é obtida a partir da Equação (3.84) e das propriedades de funcional conjugado.

$$\bar{j}^{ep}(\Delta E) = \sup_{\Delta T^*} [\Delta T^* \cdot \Delta E - \bar{j}_C^{ep}(\Delta T^*)] = \sup_{\Delta T^*, \Delta c^*} [\Delta T^* \cdot \Delta E - \bar{j}_C^e(\Delta T^*) - \bar{j}_C^h(\Delta c^*)] \quad (3.84)$$

$$|(T + \Delta T^*, c + \Delta c^*) \in P$$

$$\Delta T \in \nabla \bar{j}^{ep}(\Delta E) \Leftrightarrow \Delta E \in \partial \bar{j}_C^{ep}(\Delta T) \quad (3.85)$$

### 3.2.5 Relação entre função de dissipação e função de escoamento

Nessa seção, a relação entre as funções de dissipação e de escoamento é apresentada, utilizando-se para isso o conceito de funções polares. A formulação baseia-se nos trabalhos de Eve (1992), Houlsby (1997) e Han e Reddy (1999).

A função gauge ou função de Minkowski para um conjunto  $P$  é definida pela expressão apresentada na Equação (3.86). Conforme pode se observar, essa função assume o menor valor positivo pelo qual um conjunto  $P$  pode ser multiplicado, de forma que um determinado elemento  $\Sigma$  do conjunto continue a fazer parte do mesmo.

$$g_p(\Sigma) = \inf \{m > 0 / \Sigma \in mP\} \quad (3.86)$$

Em conjuntos que contém a origem, a função gauge assume valor 1 para elementos na fronteira do conjunto e valor menor do que 1 para elementos internos. Dessa forma, como a função de escoamento assume valor nulo para tensões na fronteira da região admissível e valor menor do que zero para tensões internas à região admissível, é possível definir a região admissível como:

$$P = \{\Sigma / g_p(\Sigma) \leq 1\} \quad (3.87)$$

Na Equação (3.87), a função  $g_p$  a partir da qual a região admissível foi definida é denominada, por alguns autores, de função de escoamento canônica.

A função  $g_p$  também pode ser definida conforme apresentado na Equação (3.88). Nessa equação, no contexto da plasticidade,  $D$  representa a função de dissipação, isto é, a função suporte da região admissível  $P$ .

$$g_p(\Sigma) = \inf \{m > 0 / \langle \dot{A}, \Sigma \rangle \leq mD(\dot{A})\} \quad (3.88)$$

Assumindo que  $D(\dot{A}) = 0$ , se e somente se,  $\dot{A} = 0$ , então a função gauge e a função de dissipação podem ser relacionadas pela expressão:

$$g_P(\Sigma) = \sup_{0 \neq \dot{\Sigma} \in \text{dom} D} \frac{\langle \dot{A}, \Sigma \rangle}{D(\dot{A})} \quad (3.89)$$

A Equação (3.89) estabelece que as funções gauge e a função de dissipação são funções conjugadas polares. O Lema apresentado a seguir permitirá obter a Lei da Normalidade a partir das definições apresentadas.

*Lema:* Seja  $g$  uma função convexa não-negativa, com  $g(0) = 0$  e seja  $\Sigma$  um ponto no interior do domínio de  $g$ , tal que  $g(\Sigma) > 0$ . Seja  $P = \{X / g(X) \leq g(\Sigma)\}$ . Então,  $\dot{A} \in N_P(\Sigma)$ , se e somente se, existir  $I \geq 0$ , tal que  $\dot{A} \in I \partial g(\Sigma)$ .

Para funções diferenciáveis, obtém-se a forma clássica da Lei da Normalidade a partir do Lema apresentado, isto é:

$$\dot{A} = I \nabla g(\Sigma) \quad (3.90)$$

Da definição de subdiferencial, determina-se o multiplicador  $I$ . Fazendo  $X = 0$  e depois  $X = 2\Sigma$ , na equação:

$$I g(X) - I g(\Sigma) \geq \dot{A} \cdot (X - \Sigma) \quad (3.91)$$

e usando as propriedades de  $g$ , obtém-se a relação:

$$I = D(\dot{A}) \quad (3.92)$$

Para uma função de escoamento  $f$  escrita sob uma forma qualquer, os vetores normais externos a  $P$ , em um ponto da superfície de escoamento, também são proporcionais ao vetor gradiente da função  $f$  nesse ponto, de forma que:

$$\dot{E}^p = I \nabla_T f(T, \mathbf{c}) \quad (3.93)$$

$$-\dot{\mathbf{a}} = I \nabla_c f(T, \mathbf{c}) \quad (3.94)$$

A condição de que somente pontos da superfície de escoamento podem apresentar plastificação efetiva, isto é,  $I \neq 0$ , é condensada na condição de complementariedade:

$$f(T, \mathbf{c}) I = 0 \quad f(T, \mathbf{c}) \leq 0 \quad I \geq 0 \quad (3.95)$$

Com o auxílio da condição de consistência apresentada na Equação (3.48) e da definição de cone polar negativo, a região das taxas de tensões e de forças termodinâmicas admissíveis pode ser definida por:

$$\dot{P} = \{(\dot{T}, \dot{c}) / \dot{T} \cdot \nabla_T f(T, \mathbf{c}) \mathbf{I} - \dot{c} \cdot \nabla_c f(T, \mathbf{c}) \mathbf{I} \leq 0, \quad \forall \mathbf{I} \geq 0\} \quad (3.96)$$

A relação de consistência e a região definida na Equação (3.96) permitem estabelecer as relações a seguir.

$$\begin{aligned} \text{se } f(T, \mathbf{c}) = 0 \\ \dot{f}(T, \mathbf{c}) \mathbf{I} = 0 \quad \dot{f}(T, \mathbf{c}) \leq 0 \quad \mathbf{I} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\text{onde } \dot{f} = \nabla_T^T f(T, \mathbf{c}) \dot{T} - \nabla_c^T f(T, \mathbf{c}) \dot{c} \quad (3.98)$$

Caso a função de escoamento não seja diferenciável, pode-se admitir que a região  $P$  é definida pela interseção de um número finito de regiões convexas, identificadas por funções  $f_j$ , suficientemente regulares, chamadas modos de escoamento. Convenciona-se, então, que  $f$  é um vetor cujo componente  $j$  é o valor da função  $f_j$  no ponto. Além disso, cada modo de escoamento possui um multiplicador plástico associado, ou seja,  $\mathbf{I}$  também é um vetor.

## 4. ALGUNS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS EM SOLOS

No presente capítulo, um modelo elasto-idealmente-plástico com critério de escoamento de Drucker-Prager e um Modelo Cap são formulados segundo o enfoque termodinâmico. A formulação apresentada baseia-se, principalmente, nos trabalhos de Ncheuguim (2006) e Hjiáj, Fortin e de Saxcé (2003). Salienta-se que outros modelos constitutivos para solos como, por exemplo, o Cam Clay Modificado e Modelos de Estado Crítico também vêm sendo formulados segundo o enfoque termodinâmico em trabalhos como os de Houlsby (1981) e Collins (2003), respectivamente.

### 4.1 *Drucker-Prager para um material elasto-idealmente-plástico*

Como o material não possui encruamento, convencionou-se que as variáveis internas vinculadas ao encruamento,  $\mathbf{a}$ , e as forças termodinâmicas associadas,  $\mathbf{c}$ , não existem.

Para energia livre, adota-se a função apresentada na Equação (4.1), na qual  $C$  é a matriz elástica apresentada na Equação (4.2) em termos do módulo de elasticidade ou módulo de Young,  $Y$ , e do coeficiente de Poisson,  $\nu$ . Na Equação (4.3), a matriz elástica é apresentada para o caso de estado plano de deformações.

$$\mathbf{j}^e(E^e) = \frac{1}{2} E^e \cdot C E^e \quad (4.1)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{Y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{Y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Y}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Y}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$C = \frac{Y(1-\mathbf{n})}{(1+\mathbf{n})(1-2\mathbf{n})} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 0 \\ \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\mathbf{n})}{2(1-\mathbf{n})} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

O potencial termodinâmico complementar possui a seguinte forma:

$$\mathbf{j}_c^e(T) = \frac{1}{2} T \cdot C^{-1} T \quad (4.4)$$

Segundo o critério de Drucker-Prager, a região das tensões plasticamente admissíveis pode ser definida como:

$$P = \left\{ (T_m, T_D) / \sqrt{\frac{1}{2}} |T_D| + \mathbf{q} T_m - k \leq 0 \right\} \quad (4.5)$$

Nessa equação,  $\mathbf{q}$  e  $k$  são constantes relacionadas ao ângulo de atrito interno e à coesão do material respectivamente. Por sua vez,  $T_m$  e  $T_D$  são a tensão hidrostática e a tensão desviadora, segundo as quais o tensor de tensões pode ser decomposto sob a seguinte forma:

$$T = T_m I + T_D \equiv (T_m, T_D) \quad (4.6)$$

Adotando  $s = \sqrt{\frac{1}{2}} |T_D|$ , obtém-se:

$$P = \left\{ (T_m, s) / s + \mathbf{q} T_m - k \leq 0 \right\} \quad (4.7)$$

A tensão hidrostática e a tensão desviadora relacionam-se com o segundo invariante do tensor de tensões,  $J_{2D}$ , e com o primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_1$ , da seguinte maneira:

$$J_{2D} = \frac{1}{2} T_D \cdot T_D \quad (4.8)$$

$$J_1 = \text{tr}(T) = 3T_m \quad (4.9)$$

Dessa forma, a região de tensões admissíveis também pode ser definida a partir dos invariantes  $J_{2D}$  e  $J_1$ , bastando para isso fazer as devidas substituições das Equações (4.8) e (4.9) na Equação (4.7).

Considerando que  $\dot{E}^p \in \partial \text{Ind}_{\dot{p}}(T) = N_p(T)$  e que, por definição, o cone normal é dado pela expressão:

$$N_p(T) = \left\{ \dot{E}^p / \langle T^* - T, \dot{E}^p \rangle \leq 0, \forall T^* \in P \right\} \quad (4.10)$$

Então a região de taxas de deformações plásticas admissíveis é dada por:

$$P_E = \left\{ (\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) / \dot{E}_m^p \geq \sqrt{2}q |\dot{E}_D^p| \right\} \quad (4.11)$$

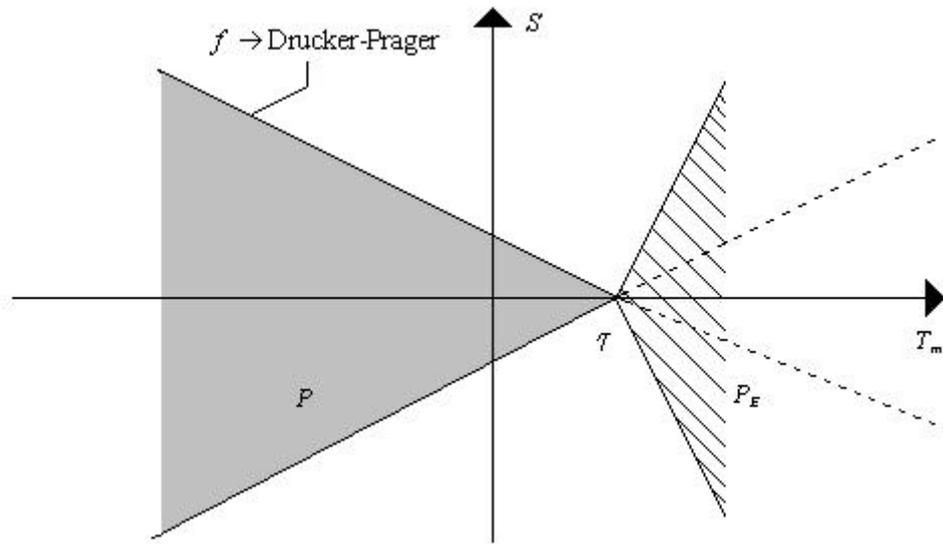
onde:

$$\dot{E}^p = \dot{E}_m^p I + \dot{E}_D^p \quad (4.12)$$

$$\dot{E}_m^p = \text{tr}(\dot{E}^p) \quad (4.13)$$

A Figura 7 ilustra as regiões de tensões admissíveis e de taxas de deformações plásticas admissíveis.

**FIGURA 7 REGIÕES DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES PLASTICAMENTE ADMISSÍVEIS.**



Finalmente, por definição, a função de dissipação é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} D(\dot{E}^p) &= \sup_{T \in P} [T \cdot \dot{E}^p] \\ &= \sup_{T \in P} [T_m \dot{E}_m^p + T_D \cdot \dot{E}_D^p] \\ &= \sup_{T \in P} [T_m \dot{E}_m^p + \sqrt{2}s |\dot{E}_D^p|] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definindo uma função  $\bar{f}(T_m, s)$ , conforme apresentado na Equação (4.15), obtém-se uma curva no espaço de tensões, sendo possível utilizar o método gráfico para encontrar o valor máximo de  $\bar{f}$  em  $P$  e, assim, deduzir a função de dissipação. Essa metodologia é adotada por Ncheuguim (2006).

$$\bar{f}(T_m, s) = T_m \dot{E}_m^p + \sqrt{2} s |\dot{E}_D^p| \quad (4.15)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| = 0$  e  $\dot{E}_m^p \neq 0$ , a função  $\bar{f}(T_m, s)$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $s = 0$  e  $T_m = \frac{k}{\mathbf{q}}$ . Nesse caso:

$$D = \frac{k}{\mathbf{q}} \dot{E}_m^p \quad (4.16)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p \neq 0$ , a função  $\bar{f}(T_m, s)$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $s = k - \mathbf{q}T_m$  e  $T_m = \frac{k}{\mathbf{q}}$ . Nesse caso, novamente, tem-se:

$$D = \frac{k}{\mathbf{q}} \dot{E}_m^p \quad (4.17)$$

Taxas de deformações plásticas volumétricas negativas não são admissíveis, conforme a definição da região de taxas de deformações plásticas admissíveis  $P_E$  apresentada na Equação (4.11). Logo, a função de dissipação pode ser definida como:

$$D(\dot{E}^p) = \begin{cases} \frac{k}{\mathbf{q}} \dot{E}_m^p & \dot{E}^p \in P_E \\ \infty & \dot{E}^p \notin P_E \end{cases} \quad (4.18)$$

Essa definição para o potencial de dissipação coincide com aquela apresentada por Hjiáj, Fortin e de Saxcé (2003).

O potencial termodinâmico complementar é apresentado na Equação (4.19).

$$D_C = \partial Ind_p(T) \quad (4.19)$$

O Quadro 4 reúne as principais equações apresentadas.

**QUADRO 4 MODELO DE DRUCKER-PRAGER PARA MATERIAIS ELASTO IDEALMENTE PLÁSTICOS.**

Energia livre	$\mathbf{j}^e(E^e) = \frac{1}{2} E^e . C E^e$ $\mathbf{j}_c^e(T) = \frac{1}{2} T . C^{-1} T$
Região admissível	$P = \{(T_m, T_D) / s + \mathbf{q}T_m - k \leq 0\}$ $P_E = \{(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) / \dot{E}_m^p \geq \sqrt{2}\mathbf{q} \dot{E}_D^p \}$
Função de dissipação	$D(\dot{E}^p) = \begin{cases} \frac{k}{\mathbf{q}} \dot{E}_m^p & \dot{E}^p \in P \\ \infty & \dot{E}^p \notin P \end{cases}$ $D_c = \partial Ind_p(T)$

## 4.2 Modelo Cap

Os Modelos Cap incorporam, além da superfície fixa característica dos modelos clássicos (Drucker-Prager e Mohr-Coulomb), uma superfície de escoamento móvel que simula o endurecimento plástico do material.

No presente trabalho, a superfície fixa adotada para o Modelo Cap é composta por uma superfície de escoamento de Drucker-Prager conectada a outra superfície de escoamento do mesmo critério, porém com valores diferentes para o ângulo de atrito interno e para a coesão, conforme representado na Figura 8. Os dois trechos da superfície fixa são denominados, nesse trabalho, de superfície de Drucker-Prager I e de superfície de Drucker-Prager II, conforme indicado na Figura 8. Dois modos de escoamento são empregados para descrever a superfície fixa, sendo um modo para a superfície de Drucker-Prager I e o outro modo para a superfície de Drucker-Prager II, conforme apresentado nas Equações (4.20) e (4.21).

$$f_1 = \mathbf{q}_1 T_m + s - k_1, \quad \text{para } T_m \geq \frac{k_1 - k_2}{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2} \quad (4.20)$$

$$f_2 = \mathbf{q}_2 T_m + s - k_2, \quad \text{para } T_m \leq \frac{k_1 - k_2}{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2} \quad (4.21)$$

Alguns autores, como Desai e Siriwardane (1984), adotam uma curva suave para conectar a superfície de Drucker-Prager I à superfície de Drucker-Prager II, conforme ilustrado na Figura 9. A função utilizada pelos autores para descrever a superfície fixa suavizada é apresentada na Equação (4.22):

$$f = s - k - \mathbf{q}T_m - \mathbf{g}e^{-bT_m} \quad (4.22)$$

A formulação adotada, no presente trabalho, torna desnecessário promover a suavização de pontos singulares a partir de recursos como aquele empregado por Desai e Siriwardane (1984).

Para superfície móvel, foi adotada a função de escoamento parabólica proposta por Ncheuguim (2006):

$$f_3 = -(T_m - T_m^c) + R^2 s^2 \quad (4.23)$$

onde  $T_m^c$  é o parâmetro de encruamento.

Finalmente, foi adotada uma superfície para limitar o valor das tensões hidrostáticas no eixo positivo do cone de Drucker-Prager, conforme proposto por Ncheuguim (2006):

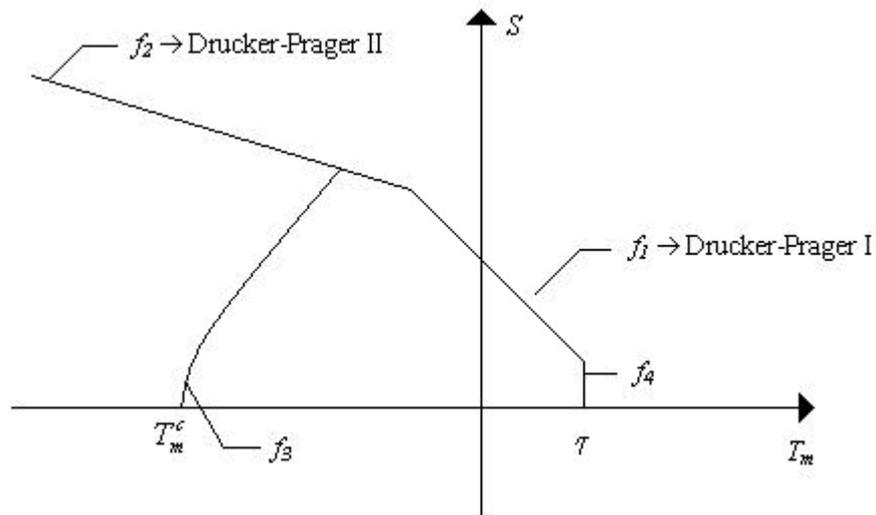
$$f_4 = T_m - t \quad (4.24)$$

Em resumo, a região admissível do Modelo Cap em estudo é delimitada pela superfície fixa proposta por Desai e Siriwardane (1984) sem a suavização do ponto singular, pela superfície móvel parabólica proposta por Ncheuguim (2006) e pela superfície no eixo positivo do cone de Drucker-Prager também proposta por Ncheuguim (2006). Essa última superfície também permanece fixa no espaço de tensões. Trata-se, portanto, de uma região admissível cuja superfície de escoamento é descrita por quatro modos de escoamento, sendo apenas um desses utilizado para descrever a superfície móvel característica dos Modelos Cap. Os parâmetros relacionados ao Modelo Cap, como  $T_m^c$  e  $R$  são descritos detalhadamente no Apêndice C.

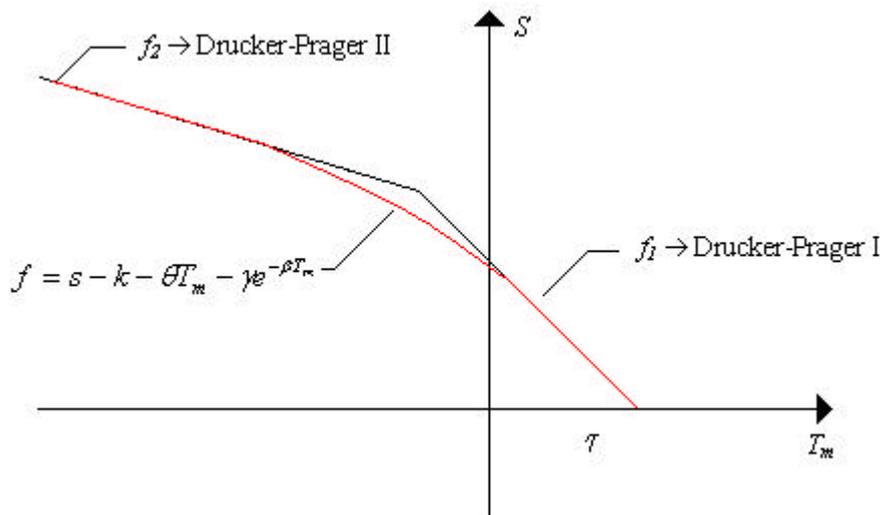
Para o modelo em estudo, a função adotada para descrever a energia livre é composta por uma parcela elástica e por uma parcela plástica, uma vez que processos de encruamento estão presentes. A parcela elástica é igual àquela adotada para o Modelo de Drucker-Prager:

$$\mathbf{j}^e(E^e) = \frac{1}{2} E^e \cdot C E^e \quad (4.25)$$

**FIGURA 8 FUNÇÕES DE ESCOAMENTO ADOTADAS PARA O MODELO CAP.**



**FIGURA 9 FUNÇÕES DE ESCOAMENTO SUAVIZADAS.**



Já a parcela plástica assume a forma:

$$\mathbf{j}^h(E_m^p) = \frac{W}{B} \left[ \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) - \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \right] + ZE_m^p \quad (4.26)$$

Assim, a função energia livre é dada por:

$$\mathbf{j}(E^e, E_m^p) = \frac{1}{2} E^e . CE^e + \frac{W}{B} \left[ \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) - \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \right] + ZE_m^p \quad (4.27)$$

A Equação (4.26) pode ser obtida a partir da expressão:

$$T_m^c = -\frac{1}{B} \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) + Z \quad (4.28)$$

Essa expressão relaciona as deformações plásticas volumétricas com o parâmetro de encruamento ( $T_m^c$ ), sendo comumente empregada na literatura para descrever o movimento de translação da superfície móvel ao longo do eixo de tensões hidrostáticas.

A região de tensões admissíveis, por sua vez, é definida a partir dos quatro modos de escoamento que compõem o modelo:

$$P = \left\{ (T_m, T_D, T_m^c) / f_i(T_m, T_D, T_m^c) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4, T_m^c \leq \mathbf{t} \right\} \quad (4.29)$$

Por definição, a função de dissipação é o suporte da região admissível  $P$ , sendo determinada por:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup \{ T_m \dot{E}_m^p + T_D \dot{E}_D^p + T_m^c \dot{E}_m^p, (T_m, T_D, T_m^c) \in P \} \quad (4.30)$$

Definindo, novamente, uma função  $\bar{f}(T_m, s)$ , conforme apresentado na Equação (4.31), obtém-se uma curva no espaço de tensões, sendo possível utilizar o método gráfico empregado por Ncheuguin (2006) para encontrar o valor máximo de  $\bar{f}$  em  $P$  e, assim, deduzir a função de dissipação.

$$\bar{f}(T_m, s) = T_m \dot{E}_m^p + \sqrt{2}s |\dot{E}_D^p| \quad (4.31)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| = 0$  e  $\dot{E}_m^p > 0$ , então a função  $\bar{f}$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $T_m = \mathbf{t}$  e  $s = 0$ . Nesse caso:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup_{T_m^c \leq \mathbf{t}} T_m \dot{E}_m^p + T_m^c \dot{E}_m^p = 2\mathbf{t} \dot{E}_m^p \quad (4.32)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p < 0$ , então a função  $\bar{f}$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $s = 0$ . Nesse caso:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup_{T_m^c \leq \mathbf{t}} T_m \dot{E}_m^p + T_m^c \dot{E}_m^p = \infty \quad (4.33)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p > 0$ , então a função  $\bar{f}$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $s = S_T$  e  $T_m = \mathbf{t}$ , onde:

$$S_T = \mathbf{q}_1 T_m - k_1 \quad (4.34)$$

Nesse caso:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup_{T_m^c \leq t} T_m \dot{E}_m^p + \sqrt{2}s |\dot{E}_D^p| + T_m^c \dot{E}_m^p = 2t\dot{E}_m^p + \sqrt{2}(k_1 - \mathbf{q}_1 \mathbf{t}) |\dot{E}_D^p| \quad (4.35)$$

Se  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p = 0$ , então a função  $\bar{f}$  atinge seu valor máximo em  $P$  quando  $s = h(T_m^c)$ , onde:

$$h(T_m^c) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mathbf{q}R^2(k - \mathbf{q}T_m^c)}}{2\mathbf{q}R^2} \quad (4.36)$$

A função  $h(T_m^c)$  fornece o valor de  $s$  na intersecção da superfície de Drucker-Prager com a parábola. O valor do parâmetro de encruamento,  $T_m^c$ , determina se a parábola interceptará a superfície de Drucker-Prager I ou a superfície de Drucker-Prager II. Independentemente de interceptar uma ou outra superfície, a forma da função  $h(T_m^c)$  permanece inalterada. A única modificação ocorre nos valores dos parâmetros  $\theta$  e  $k$ .

Nesse caso em que  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p = 0$ , a função de dissipação assume o seguinte valor:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup_{T_m^c \leq 0} \sqrt{2}h(T_m^c) |\dot{E}_D^p| + T_m^c \dot{E}_m^p = \infty \quad (4.37)$$

Finalmente, se  $|\dot{E}_D^p| \neq 0$  e  $\dot{E}_m^p < 0$ , então a função  $\bar{f}$  atinge seu maior valor em  $P$  quando  $(T_m, T_D, T_m^c)$  estão sobre a parábola, isto é:

$$f_2(T_m, T_D, T_m^c) = 0 \quad (4.38)$$

Nesse caso, Ncheuguim (2006), demonstra que:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \sup \left\{ (T_m^c + R^2 S^2) \dot{E}_m^p + \sqrt{2}s |\dot{E}_D^p| + T_m^c \dot{E}_m^p, \quad 0 \leq s \leq h(T_m^c), \quad T_m^c \leq \mathbf{t} \right\} = \infty \quad (4.39)$$

Assim, a função de dissipação assume a seguinte forma:

$$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \begin{cases} 2t\dot{E}_m^p + \sqrt{2}(k_1 - \mathbf{q}_1 \mathbf{t}) |\dot{E}_D^p|, & \dot{E}_m^p > 0 \\ \infty, & \dot{E}_m^p \leq 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

O potencial termodinâmico complementar é apresentado na Equação (4.41).

$$D_C = \text{Ind}_P(T_m, T_D, T_m^c) \quad (4.41)$$

O Quadro 5 reúne as principais equações apresentadas.

**QUADRO 5 MODELO CAP COM SUPERFÍCIE MÓVEL PARABÓLICA.**

<i>Energia livre</i>	$\mathbf{j}^e(E^e) = \frac{1}{2} E^e \cdot CE^e$ $\mathbf{j}^h(E_m^p) = \frac{W}{B} \left[ \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) - \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \right] + ZE_m^p$
<i>Região admissível</i>	$P = \{ (T_m, T_D, T_m^c) / f_i(T_m, T_D, T_m^c) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4, T_m^c \leq \mathbf{t} \}$
<i>Função de dissipação</i>	$D(\dot{E}_m^p, \dot{E}_D^p) = \begin{cases} 2\mathbf{t}\dot{E}_m^p + \sqrt{2}(k_1 - \mathbf{q}_1\mathbf{t}) \dot{E}_D^p , & \dot{E}_m^p > 0 \\ \infty, & \dot{E}_m^p \leq 0 \end{cases}$ $D_C = \text{Ind}_P(T_m, T_D, T_m^c)$

## 5. FORMULAÇÕES VARIACIONAIS PARA O PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO

O uso de formulações variacionais permite reunir em uma única expressão integral todos os elementos que fazem parte do problema que se está analisando, isto é, equação de equilíbrio, equação constitutiva, condições de contorno, condições iniciais, entre outros (Feijóo e Taroco, 1983). Além disso, a formulação variacional apresenta vantagens como a possibilidade de escrever as leis que governam o comportamento mecânico dos materiais de forma independente do referencial, já que a expressão integral característica da formulação variacional conduz a um escalar. É possível, ainda, relacionar a forma variacional do problema a princípios de mínimo úteis para discutir a existência e a unicidade da solução. E, por fim, soluções aproximadas do problema podem ser obtidas a partir de métodos numéricos de simples implementação.

Nessa seção, são apresentadas as formulações variacionais correspondentes ao problema de valor de contorno da elastoplasticidade, as formulações variacionais do problema elastoplástico em taxas e os princípios de mínimo equivalentes a essas formulações em taxas. A teoria utilizada baseia-se nos trabalhos de Feijóo e Taroco (1983), Han e Reddy (1999), Reddy (1986), Atkinson e Han (2001) e Feijóo e Zouain (1988).

Na Mecânica do Contínuo, o espaço ocupado pelas partículas de um corpo  $B$  no espaço tridimensional é denominado de configuração  $B$ . O movimento sofrido pelo corpo  $B$  a partir de uma configuração  $B_i$  é caracterizado por uma família uniparamétrica de configurações  $B_t$ , na qual o parâmetro real  $t \in (t_i, t_f)$  representa o tempo ou, simplesmente, a ordem de precedência dessas configurações.

Assume-se que em  $t = 0$ , o corpo ocupa uma região  $B_i$  denominada configuração de referência  $e$ , que após um tempo  $t$ , o corpo ocupa uma nova região do espaço  $B_t$  denominada configuração atual. Sendo  $x$  a posição de uma partícula material no instante  $t = 0$  e  $y(x, t)$  a posição dessa partícula no instante  $t$ , então  $u(x, t) = y(x, t) - x$  é o campo de deslocamentos correspondente à configuração  $B_t$ . O conjunto de todos os campos de deslocamento possíveis constitui o espaço vetorial  $U$ .

Dada uma configuração  $B_t$  e o campo de deslocamentos correspondente a essa configuração, é possível definir o campo de deformações  $E$ . O tensor de deformações é definido conforme apresentado na Equação (5.1).

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T (\nabla u)] \quad (5.1)$$

No presente trabalho, assume-se que o corpo sofre deslocamentos infinitesimais, de forma que o gradiente  $\nabla u$  é suficientemente pequeno para que se negligencie o termo não linear da Equação (5.1). Assim, o tensor de deformações assume a forma apresentada na Equação (5.2). Além disso, ao se assumir a ocorrência de pequenos deslocamentos, mudanças na geometria do corpo podem ser negligenciadas e a análise pode ser realizada na configuração de referência  $B_i$ .

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] = (\nabla u)^S \quad (5.2)$$

A derivada em relação ao tempo de  $u(x, \mathbf{t}) \in U$ , calculada em um instante  $t$ , é denominada velocidade. O conjunto de todos os campos de velocidades possíveis constitui o espaço vetorial  $V$ . Dada uma configuração  $B_t$  e o campo de velocidades ao qual o corpo está submetido em  $B_t$ , é possível definir o campo de taxas de deformações  $\dot{E}$ . Para deslocamentos infinitesimais, este campo tensorial assume a forma apresentada na Equação (5.3).

$$\dot{E} = \frac{1}{2} [\nabla \dot{u} + (\nabla \dot{u})^T] = (\nabla \dot{u})^S \quad (5.3)$$

Introduz-se, nesse momento, o operador linear de deformações  $D$ , a partir do qual as deformações  $E$  e as taxas de deformações  $\dot{E}$  podem ser obtidas, conforme apresentado nas Equações (5.4) a (5.6). O espaço vetorial das deformações e das taxas de deformações é representado por  $W$ .

$$D = (\nabla)^S \quad (5.4)$$

$$E = D u \quad (5.5)$$

$$\dot{E} = D v \quad (5.6)$$

Os elementos  $u$ , para os quais  $Du = 0$ , constituem o subespaço de  $U$  chamado núcleo do operador  $D$ . Esse subespaço, aqui representado por  $N(D)$ , contém os campos  $u$  que produzem movimentos de corpo rígido.

$$N(D) = \{u(x, \mathbf{t}) \in U / Du = 0\} \quad (5.7)$$

Até esse momento, considerou-se que o corpo pode se movimentar livremente. No entanto, na maioria dos casos, os corpos estão sujeitos a restrições cinemáticas. No presente trabalho, considerou-se que o corpo está sujeito a restrições homogêneas do tipo bilateral na parte  $\Gamma_u$  do contorno  $\Gamma$  de  $B$ . Restrições bilaterais são aquelas em que, se o movimento está impedido em um sentido, também está impedido no sentido oposto. Dessa forma, o conjunto dos campos de deslocamento cinematicamente admissíveis foi definido como:

$$U = \{u(x) / u|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (5.8)$$

Outro conceito importante da Mecânica do Contínuo é o das forças ou do sistema de forças que atua sobre um corpo. Feijóo e Taraco (1983) afirmam que, no cotidiano, para avaliar as forças aplicadas em um corpo, costuma-se provocar um movimento virtual no corpo em contraposição ao seu movimento natural. Por exemplo, a fim de estimar o peso de um objeto, basta levantá-lo levemente, criando um movimento virtual que permite estimar seu peso a partir do trabalho realizado para erguê-lo.

Assim, as forças que atuam em um corpo podem ser definidas a partir da potência virtual que executam quando na presença de um campo de velocidades. Dessa forma, as forças  $L_t$  que podem atuar sobre um corpo em um instante  $t$  são representadas por funcionais lineares e contínuos que mapeiam elementos do espaço  $V$  no conjunto real, conforme apresentado na Equação (5.9). O número real,  $P_e$ , associado ao sistema de forças que opera sobre o campo de velocidades,  $v$ , é denominado potência virtual externa. Verifica-se que as forças  $L_t$  pertencem ao espaço dual topológico de  $V$  que se representa por  $V^*$ .

$$P_e = L_t(v) \quad (5.9)$$

O sistema de forças  $L_t$  está associado a dois tipos de cargas: as forças de corpo,  $b_t$ , e as forças de superfície,  $\mathbf{t}_t$ , atuantes em  $\Gamma_t = \Gamma - \Gamma_u$ . Assim, a potência virtual externa pode ser representada por:

$$P_e = L_t(v) = \int_B b_t \cdot v \, dB + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_t \cdot v \, d\Gamma \quad (5.10)$$

Finalmente, quando um corpo é submetido à ação de forças externas ocorrem deformações em sua estrutura. Como as partículas permanecem unidas, tem de existir uma

distribuição de esforços internos capaz de mantê-las dessa forma. Para estimar a distribuição de esforços internos existentes em um corpo é preciso submetê-lo a um movimento virtual que gere uma deformação. Por exemplo, para estimar a tensão que atua em uma correia é preciso deformá-la. Movimentos de corpo rígido não fornecem qualquer informação sobre as tensões a que essa está submetida.

Definem-se os esforços internos como funcionais lineares e contínuos que mapeiam os elementos do espaço vetorial  $W$  no conjunto real, conforme apresentado na Equação (5.11). O número real associado aos esforços internos correspondentes a um campo de taxas de deformações é denominado potência virtual interna e representado por  $P_i$ . Verifica-se que os esforços internos pertencem ao espaço dual topológico de  $W$  que se representa por  $W^*$ .

$$P_i = -\langle T, \dot{E} \rangle = -\int_{B_t} T \cdot \dot{E} dB_t \quad (5.11)$$

Uma distribuição de tensões  $T$  está em equilíbrio com as cargas aplicadas ao corpo se o Princípio das Potências Virtuais é verificado, isto é:

$$P_e + P_i = 0 \quad \forall v \in V \quad (5.12)$$

ou ainda:

$$\langle T, Dv \rangle = L_t(v) \quad \forall v \in V \quad (5.13)$$

A partir do Princípio das Potências Virtuais é possível obter a equação local de equilíbrio da Mecânica do Contínuo. Isto é, à forma variacional do problema de valor de contorno corresponde uma forma local do problema.

A potência virtual interna,  $P_i$ , pode ser definida conforme apresentado na Equação (5.14), devido à simetria do tensor de tensões. Aplicando a propriedade apresentada na Equação (5.15) à Equação (5.14), obtém-se o resultado apresentado na Equação (5.16).

$$P_i = -\int_{B_t} T \cdot D dB_t = -\int_{B_t} T \cdot (\nabla v)^S dB_t = -\int_{B_t} T \cdot \nabla v dB_t \quad (5.14)$$

$$\text{div}(Tv) = T \cdot \nabla v + \text{div}T \cdot v \quad (5.15)$$

$$P_i = -\int_{B_t} \text{div}(Tv) dB_t + \int_{B_t} \text{div}T \cdot v dB_t \quad (5.16)$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtém-se:

$$P_i = -\int_{\Gamma_t} Tn \cdot v d\Gamma_t + \int_{B_t} \text{div}T \cdot v dB_t \quad (5.17)$$

Substituindo as Equações (5.17) e (5.10) no Princípio das Potências Virtuais, obtém-se o resultado apresentado na Equação (5.18). A partir desse, as equações de equilíbrio locais da Mecânica do Contínuo são obtidas, conforme apresentado em (5.19) e (5.20).

$$\int_{B_t} (\text{div}T + b_t) \cdot v \, dB_t + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t}_t - Tn) \cdot v \, d\Gamma_t = 0 \quad (5.18)$$

$$\text{div}T + b_t = 0 \quad \text{em } B_t \quad (5.19)$$

$$Tn = \mathbf{t}_t \quad \text{em } \Gamma_t \quad (5.20)$$

Finalmente, passa-se ao problema dual do problema de equilíbrio conhecido como problema de compatibilidade. Dado um campo de deformações  $E \in W$ , diz-se que  $E$  é compatível se existe  $v \in V$ , tal que  $\dot{E} = Dv$ . A condição necessária e suficiente para que o campo de deformações seja compatível é equivalente ao seguinte enunciado variacional:

$$\langle T^*, \dot{E} \rangle = 0 \quad \forall T^* \in S^0 \quad (5.21)$$

Na Equação (5.21),  $S^0$  é o subespaço das tensões auto-equilibradas.

## 5.1 Formulações variacionais em taxas

A seguir são apresentadas as formulações variacionais em taxas para o problema de equilíbrio e para o problema de compatibilidade. Os princípios de mínimo associados aos dois problemas em taxas são apresentados. O desenvolvimento matemático dessa seção baseia-se no trabalho de Hecke (1991).

Na formulação variacional em taxas do problema de equilíbrio, também denominada de formulação cinemática ou primal, pretende-se encontrar velocidades cinematicamente admissíveis  $\dot{u} \in V$  que satisfaçam a igualdade apresentada na Equação (5.22).

$$\langle \dot{T}, D(v) \rangle = \dot{L}_t(v) \quad \forall v \in V \quad (5.22)$$

As taxas de tensões,  $\dot{T}$ , presentes na Equação (5.22), estão relacionadas às velocidades cinematicamente admissíveis,  $\dot{u}$ , por meio da relação constitutiva:

$$\dot{T} = \nabla j^{ep}(D \dot{u}) \quad (5.23)$$

Como o funcional  $j^{ep}$  é convexo, é possível reescrever a relação constitutiva a partir da definição de subdiferencial. Assim, a Equação (5.23) assume a forma:

$$j^{ep}(\dot{E}^*) - j^{ep}(\dot{E}) \geq \dot{T}(\dot{E}^* - \dot{E}) \quad \forall \dot{E}^* \quad (5.24)$$

Definindo  $J^{ep}(\dot{E})$  como:

$$J^{ep}(\dot{E}) = \int_B j^{ep}(\dot{E}) dB \quad (5.25)$$

Pode-se reescrever a Equação (5.24) da seguinte maneira:

$$J^{ep}(\dot{E}^*) - J^{ep}(\dot{E}) \geq \langle \dot{T}, \dot{E}^* - \dot{E} \rangle \quad (5.26)$$

Restringido a Equação (5.26) para taxas de deformações compatíveis  $\dot{E}$  e utilizando a Equação (5.22), obtém-se:

$$J^{ep}(Dv) - J^{ep}(D\dot{u}) \geq \dot{L}_t(v - \dot{u}) \quad \forall v \in V \quad (5.27)$$

O resultado apresentado na Equação (5.27) pode ser reescrito como:

$$J^{ep}(Dv) - \dot{L}_t(v) \geq J^{ep}(D\dot{u}) - \dot{L}_t(\dot{u}) \quad \forall v \in V \quad (5.28)$$

A partir da Equação (5.28), é possível identificar o seguinte princípio de mínimo:

$$\Pi(\dot{u}) = \inf_{v \in V} \Pi(v) \quad (5.29)$$

$$\Pi(v) = J^{ep}(Dv) - \dot{L}_t(v) \quad (5.30)$$

As condições de existência e unicidade da solução do problema formulado por meio da Equação (5.29) dependem das propriedades do funcional  $\Pi(v)$  (ou ainda de  $j^{ep}$ , pois  $\dot{L}_t$  é linear) e do domínio  $V$ . O funcional  $j^{ep}$  é convexo e diferenciável, sendo estritamente convexo nos casos em que ocorre encruamento. No caso em que há encruamento efetivo, a existência da solução do princípio de mínimo é garantida para qualquer taxa de carga em qualquer processo plástico, sendo que a solução não será única se movimentos de corpo rígido forem incluídos no conjunto de velocidades admissíveis.

Já a formulação variacional em taxas do problema de compatibilidade, também denominada formulação estática ou dual, consiste em determinar o campo de taxas de tensões,  $\dot{T}$ , equilibradas com as taxas de forças externas  $\dot{L}_t(v)$ , tal que a Equação (5.31) seja satisfeita.

$$\langle \dot{T}^* - \dot{T}, \dot{E} \rangle = 0 \quad \forall \dot{T}^* \in \dot{S}_t \quad (5.31)$$

$$\dot{S}_t = \left\{ \dot{T} \in W^* / \langle \dot{T}, D(v) \rangle = \dot{L}_t(v), \forall v \in V \right\} \quad (5.32)$$

As taxas de deformação,  $\dot{E}$ , estão relacionadas às taxas de tensões,  $\dot{T}$ , por meio da relação constitutiva apresentada na Equação (5.33).

$$\dot{E} \in \partial j_C^{ep}(\dot{T}) \quad (5.33)$$

Aplicando a definição de subdiferencial, é possível reescrever a Equação (5.33) como:

$$j_C^{ep}(\dot{T}^*) - j_C^{ep}(\dot{T}) \geq (\dot{T}^* - \dot{T}) \cdot \dot{E} \quad \forall \dot{T}^* \quad (5.34)$$

Definindo  $J_C^{ep}(\dot{T})$  como:

$$J_C^{ep}(\dot{T}) = \int_B j_C^{ep}(\dot{T}) dB \quad (5.35)$$

É possível reescrever a Equação (5.34) da seguinte forma:

$$J_C^{ep}(\dot{T}^*) - J_C^{ep}(\dot{T}) \geq \langle \dot{T}^* - \dot{T}, \dot{E} \rangle \quad \forall \dot{T}^* \in W^* \quad (5.36)$$

Segundo a Equação (5.31), se  $\dot{T} \in \dot{S}_t$ , o segundo membro da Equação (5.36) é nulo.

Assim, essa equação pode ser reescrita como:

$$J_C^{ep}(\dot{T}^*) - J_C^{ep}(\dot{T}) \geq 0 \quad \forall \dot{T}^* \in \dot{S}_t \quad (5.37)$$

$$J_C^{ep}(\dot{T}^*) \geq J_C^{ep}(\dot{T}) \quad \forall \dot{T}^* \in \dot{S}_t \quad (5.38)$$

A partir da desigualdade apresentada em (5.38), reconhece-se o problema de mínimo:

$$J_C^{ep}(\dot{T}) = \inf_{\dot{T}^* \in \dot{S}_t} J_C^{ep}(\dot{T}^*) \quad (5.39)$$

As condições de existência e unicidade do problema formulado na Equação (5.39) dependem das características do funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  e das características do subconjunto de  $W$  dado por  $\dot{S}_t \cap \text{dom} J_C^{ep}$ . O funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  é próprio, estritamente convexo e coercivo. Por ser um funcional próprio, existe um conjunto não vazio de taxas de tensões para os quais  $j_C^{ep}(\dot{T})$  toma um valor finito e, por consequência, isto vale para  $J_C^{ep}(\dot{T})$ . Este conjunto de tensões plasticamente admissíveis será denotado por  $\text{dom} J_C^{ep}(\dot{T})$ . O conjunto  $\dot{S}_t \cap \text{dom} J_C^{ep}$  corresponde às taxas de tensões plasticamente admissíveis que satisfazem o Princípio das Potências Virtuais. No caso em que esse conjunto é vazio, o funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  é identicamente infinito e, portanto, não há solução finita para o problema de minimização. No caso em que  $\dot{S}_t \cap \text{dom} J_C^{ep}$  é um subconjunto não-vazio de  $W^*$ , é possível aplicar o teorema enunciado a seguir.

*Teorema.* Seja  $X$  um espaço reflexivo de Banach,  $K$  um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de  $X$  e  $f$  um funcional próprio, convexo e *l.s.c.* em  $K$ . Assumindo que:

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \|x\|_X \rightarrow \infty, x \in K$$

Então, o problema de minimização:

$$\inf_{x \in K} f(x)$$

possui solução. Além disso, se  $f$  é estritamente convexo, a solução do problema de minimização é única.

Como o funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  é próprio, convexo, *l.s.c.* e coercivo, o problema de minimização formulado na Equação (5.39) possui solução. Além disso, o funcional  $j_C^{ep}(\dot{T})$  é estritamente convexo, de forma que a solução do problema de minimização formulado na Equação (5.39) é única.

## 5.2 Formulação em incrementos finitos

Nessa seção, são apresentadas formulações variacionais aproximadas para o problema elastoplástico em incrementos finitos de deslocamentos e de tensões.

Pretende-se determinar o estado do corpo em um instante de tempo  $t + \Delta t$ , a partir do estado do corpo no tempo  $t$  e dos valores dos incrementos  $\Delta u, \Delta E, \Delta T, \Delta c$ , conforme apresentado nas Equações (5.40) a (5.43).

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta u \quad (5.40)$$

$$E_{t+\Delta t} = E_t + \Delta E \quad (5.41)$$

$$T_{t+\Delta t} = T_t + \Delta T \quad (5.42)$$

$$c_{t+\Delta t} = c_t + \Delta c \quad (5.43)$$

A formulação cinemática para a análise elasto-plástica incremental consiste em encontrar incrementos de deslocamento cinematicamente admissíveis,  $\Delta u \in U$ , que satisfaçam:

$$\langle T + \Delta T, Dv \rangle = L_{t+\Delta t}(v), \quad \forall v \in V \quad (5.44)$$

Na Equação (5.44),  $\Delta T$  está relacionado com  $\Delta u$  pela equação constitutiva:

$$\Delta T = \nabla \bar{j}^{ep}(\Delta E) \quad (5.45)$$

A Equação (5.45) é equivalente a:

$$\bar{j}^{ep}(\Delta E^*) - \bar{j}^{ep}(\Delta E) \geq \Delta T \cdot (\Delta E^* - \Delta E), \quad \forall \Delta E^* \quad (5.46)$$

Define-se  $\bar{J}^{ep}(\Delta E)$  da mesma forma que se definiu  $J^{ep}(\dot{E})$ , isto é:

$$\bar{J}^{ep}(\Delta E) = \int_B \bar{j}^{ep}(\Delta E) dB \quad (5.47)$$

Assim, a desigualdade apresentada em (5.46) pode ser reescrita como:

$$\bar{J}^{ep}(\Delta E^*) - \bar{J}^{ep}(\Delta E) \geq \langle \Delta T, \Delta E^* - \Delta E \rangle, \quad \Delta E^* \in W \quad (5.48)$$

Restringindo-se a desigualdade apresentada em (5.48) para  $\Delta E^*$  compatíveis e utilizando a equação de equilíbrio apresentada em (5.44), a desigualdade (5.48) assume a forma apresentada em (5.51).

$$\bar{J}^{ep}(D \Delta u^*) - \bar{J}^{ep}(D \Delta u) \geq L_{t+\Delta t}(\Delta u^* - \Delta u) - L_t(\Delta u^* - \Delta u) \quad (5.49)$$

$$\bar{J}^{ep}(D \Delta u^*) - \bar{J}^{ep}(D \Delta u) \geq L_{t+\Delta t}(\Delta u^* - \Delta u) - \langle T, D(\Delta u^* - \Delta u) \rangle, \quad \forall \Delta u^* \in U \quad (5.50)$$

$$\bar{J}^{ep}(D \Delta u^*) - L_{t+\Delta t}(\Delta u^*) + \langle T, D(\Delta u^*) \rangle \geq \bar{J}^{ep}(D \Delta u) - L_{t+\Delta t}(\Delta u) + \langle T, D(\Delta u) \rangle \quad (5.51)$$

A desigualdade apresentada em (5.51) corresponde ao seguinte princípio de mínimo:

$$\bar{\Pi}(\Delta u) = \inf_{\Delta u^* \in U} \bar{\Pi}(\Delta u^*) \quad (5.52)$$

onde:

$$\bar{\Pi}(\Delta u) = \bar{J}^{ep}(D \Delta u) - L_{t+\Delta t}(\Delta u) + \langle T, D(\Delta u) \rangle \quad (5.53)$$

A formulação estática para a análise elasto-plástica incremental consistem em encontrar incrementos de tensões de forma que as tensões finais sejam equilibradas, isto é,  $T + \Delta T \in S_{t+\Delta t}$  e de forma que a Equação (5.54) seja satisfeita.

$$\langle T^* - (T + \Delta T), \Delta E \rangle = 0, \quad \forall T^* \in S_{t+\Delta t} \quad (5.54)$$

Na Equação (5.54),  $\Delta T$  está relacionado com  $\Delta E$  pela relação constitutiva apresentada na Equação (5.55).

$$\Delta E \in \partial \bar{j}_C^{ep}(\Delta T) \quad (5.55)$$

Aplicando a definição de subgradiente, pode-se reescrever a Equação (5.55) da seguinte forma:

$$\bar{j}_C^{ep}(\Delta T^*) - \bar{j}_C^{ep}(\Delta T) \geq (\Delta T^* - \Delta T) \Delta E, \quad \forall \Delta T^* \quad (5.56)$$

Definindo-se  $\bar{J}_C^{ep}(\Delta T)$  como:

$$\bar{J}_C^{ep}(\Delta T) = \int_B \bar{j}_C^{ep}(\Delta T) dB \quad (5.57)$$

Pode-se reescrever a desigualdade apresentada em (5.56) como:

$$\bar{J}_C^{ep}(\Delta T^*) - \bar{J}_C^{ep}(\Delta T) \geq 0 \quad (5.58)$$

A desigualdade apresentada em (5.58) corresponde ao seguinte princípio de mínimo:

$$\bar{J}_C^{ep}(\Delta T) = \inf_{\Delta T^*} \bar{J}_C^{ep}(\Delta T^*) \quad (5.59)$$

## 6. ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO

Neste capítulo, são apresentados os métodos numéricos e os algoritmos utilizados para resolver o problema elasto-plástico descrito anteriormente. O procedimento de solução combina um método Quase-Newton para a resolução do equilíbrio global e um algoritmo de programação matemática (complementaridade não-linear, Newton-Raphson, etc, conforme o material) para a resolução da equação constitutiva elasto-plástica. A discretização espacial é obtida aplicando o Método dos Elementos Finitos e a discretização temporal foi introduzida independentemente da espacial.

### 6.1 Método dos Elementos Finitos

A solução de um problema elasto-plástico plano é uma função que descreve os deslocamentos dos pontos do domínio. Essa função pertence a um espaço de dimensão infinita, podendo ser obtida a partir da combinação linear das infinitas funções que formam a base do espaço vetorial do qual faz parte.

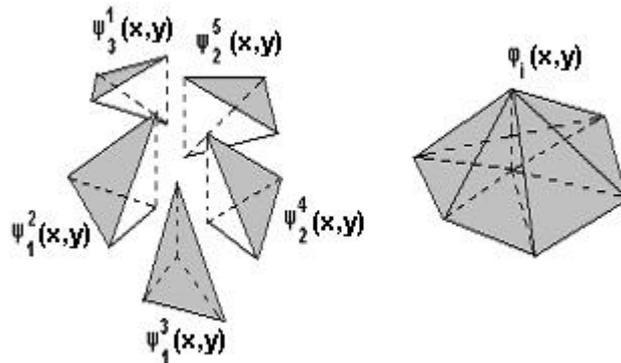
O Método de Galerkin propõe construir uma solução aproximada para o problema, tomando um número finito de funções que formam a base do espaço ao qual pertence a solução exata. Assim, a solução aproximada é formada a partir da combinação linear de um número finito de termos. Como se pode perceber, o Método de Galerkin torna-se uma ferramenta útil a partir do momento em que se dispõe de uma técnica sistemática para a construção das funções que formam a base do espaço vetorial, denominadas funções base (Oden, 1981).

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica que permite determinar as funções que formam a base do espaço vetorial aproximado. Segundo esse método, as funções base são construídas a partir de funções definidas em cada um dos elementos (subdomínios) no qual o domínio foi dividido. As funções definidas em cada elemento são denominadas funções de forma. A Figura 10 ilustra a maneira como as funções base são formadas a partir das funções de forma para um problema plano.

É possível definir um elemento máster com um sistema de coordenadas local com base no qual as funções de forma são definidas. Todos os cálculos do método são, então,

efetuados sobre esse elemento máster que se relaciona com os elementos da malha a partir de uma transformação (mudança de coordenadas). As contribuições de cada elemento da malha são, então, somadas a fim de se obter a solução aproximada do problema.

**FIGURA 10 FUNÇÃO BASE ( $\mathbf{j}_i$ ) FORMADA A PARTIR DAS FUNÇÕES DE FORMA ( $\mathbf{y}_i$ ).**



O problema elasto-plástico plano pode ser definido para um elemento da malha  $\Omega_e$  pela Equação (6.1).

$$\int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^i)^T (\mathbf{T}^i + \Delta \mathbf{T}^i) d\Omega = \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^i)^T (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^i)^T (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) d\Gamma \quad (6.1)$$

Na Equação (6.1),  $\Delta \mathbf{T}^i$  está relacionado com  $\Delta \hat{\mathbf{U}}^i$  pela relação constitutiva:

$$\Delta \mathbf{T}^i = \nabla \mathbf{j}^{ep} (\mathbf{B}^i \Delta \hat{\mathbf{U}}^i) \quad (6.2)$$

O vetor local de incrementos de deslocamento é formado a partir da combinação linear das funções de forma do elemento  $i$ , conforme descrito pelas Equações de (6.3) a (6.6). Nessas equações,  $\mathbf{y}$  representa as funções de forma,  $\mathbf{N}^i$  representa a matriz contendo as funções de forma,  $\Delta \hat{\mathbf{U}}^i$  representa o vetor contendo as componentes  $x$  e  $y$  dos deslocamentos nodais e  $n$  representa o número de nós do elemento  $i$ .

$$\Delta \mathbf{U}^i(x, y) = [\mathbf{N}^i(x, y)]^T \Delta \hat{\mathbf{U}}^i(x, y) \quad (6.3)$$

$$(\Delta \hat{\mathbf{U}}^i)^T = [U_{x1}^i \quad U_{y1}^i \quad U_{x2}^i \quad U_{y2}^i \quad \dots \quad U_{xn}^i \quad U_{yn}^i] \quad (6.4)$$

$$(N^i)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^i & 0 & \mathbf{y}_2^i & 0 & \dots & \mathbf{y}_n^i & 0 \\ 0 & \mathbf{y}_1^i & 0 & \mathbf{y}_2^i & \dots & 0 & \mathbf{y}_n^i \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\Delta U^i(x, y) = \begin{bmatrix} U_{x1}^i \mathbf{y}_1^i + U_{x2}^i \mathbf{y}_2^i + \dots + U_{xn}^i \mathbf{y}_n^i \\ U_{y1}^i \mathbf{y}_1^i + U_{y2}^i \mathbf{y}_2^i + \dots + U_{yn}^i \mathbf{y}_n^i \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

A matriz  $B^i$  para campos aproximados de deformação é dada por:

$$L\Delta U^i = L(N^i)^T \Delta \hat{U}^i = B^i \Delta \hat{U}^i \quad (6.7)$$

onde:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Finalmente, a equação de equilíbrio, fornecida pelo diferencial de  $\bar{\Pi}(\Delta u)$ , é dada pela Equação (6.9):

$$\Psi(\Delta U) = (F_{Int} + \Delta F_{Int}) - (F_{Ext} + \Delta F_{Ext}) \quad (6.9)$$

onde os termos  $F_{Int}$ ,  $\Delta F_{Int}$ ,  $F_{Ext}$  e  $\Delta F_{Ext}$  são obtidos a partir da soma das contribuições de todos os elementos:

$$F_{Ext}^i = \int_{\Omega^e} (N^i)^T b d\Omega + \int_{\Gamma^e} (N^i)^T t d\Gamma \quad (6.10)$$

$$\Delta F_{Ext}^i = \int_{\Omega^e} (N^i)^T \Delta b d\Omega + \int_{\Gamma^e} (N^i)^T \Delta t d\Gamma \quad (6.11)$$

$$F_{Int}^i = \int_{\Omega^e} (B^i)^T T^i d\Omega \quad (6.12)$$

$$\Delta F_{Int}^i = \int_{\Omega^e} (B^i)^T \Delta T^i d\Omega \quad (6.13)$$

## 6.2 Algoritmos para a resolução do problema de equilíbrio

Esta seção descreve os procedimentos adotados para a solução do problema de equilíbrio. A forma variacional cinemática do problema de equilíbrio consiste em encontrar

incrementos de deslocamentos cinematicamente admissíveis,  $\Delta u \in U$ , tais que a Equação (6.14) seja satisfeita.

$$\langle T + \Delta T, D(\Delta u^*) \rangle = L_{t+\Delta t}(\Delta u^*), \quad \forall \Delta u^* \in U \quad (6.14)$$

Na Equação (6.14),  $\Delta T$  está relacionado com  $\Delta u$  pela equação constitutiva:

$$\Delta T = \nabla \bar{j}^{ep}(D(\Delta u)) \quad (6.15)$$

Com o uso da propriedade de convexidade de  $\bar{j}^{ep}(\Delta E)$ , chegou-se ao seguinte princípio de mínimo equivalente à forma variacional apresentada:

$$\inf_{\Delta u^* \in U} \bar{J}^{ep}(D(\Delta u)) - L_{t+\Delta t}(\Delta u) + \langle T, D(\Delta u) \rangle \quad (6.16)$$

Reconhece-se no princípio de mínimo apresentado um problema de otimização. Nesse tipo de problema, pretende-se minimizar uma função objetivo  $f(x)$ , onde  $x \in R^n$ . Os algoritmos de otimização que permitem resolver o problema descrito geram, a partir de um ponto inicial  $x_0$ , uma seqüência de iterações  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  que termina quando não se pode fazer mais progresso ou quando se obteve um ponto suficientemente próximo da solução (Nocedal e Wright, 1999). Para gerar o próximo ponto da seqüência de iterações a partir de um ponto  $x_k$ , os algoritmos utilizam informações a respeito da função  $f$  em  $x_k$  e, possivelmente, informações das iterações anteriores  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ . Essas informações são utilizadas para encontrar um ponto  $x_{k+1}$ , no qual o valor da função  $f$  seja menor do que o valor de  $f$  em  $x_k$ .

Alguns métodos escolhem uma direção  $p_k$  e procuram ao longo dessa direção um novo ponto  $x_{k+1}$ , no qual o valor de  $f$  seja menor do que o valor de  $f$  em  $x_k$ . A iteração é dada por:

$$x_{k+1} = x_k + \mathbf{a}_k p_k \quad (6.17)$$

O sucesso do método depende de escolhas eficientes da direção  $p_k$  e do tamanho do passo  $\mathbf{a}_k$ .

A maioria dos métodos requer que  $p_k$  seja uma direção descendente, já que essa propriedade garante que o valor da função  $f$  diminua ao longo dessa direção. Assim, a direção  $p_k$  costuma ter a forma apresentada na Equação (6.18).

$$p_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla f_k \quad (6.18)$$

Na Equação (6.18),  $B_k$  é uma matriz simétrica não-singular. No Método de Newton,  $B_k$  é o Hessiano  $\nabla^2 f(x_k)$ . Nos métodos de Quase-Newton,  $B_k$  é uma aproximação do Hessiano atualizada a cada iteração.

Fazendo  $B_k^{-1} = H_k$ , obtém-se:

$$p_k = -H_k \nabla f_k \quad (6.19)$$

$$x_{k+1} = x_k - \mathbf{a}_k H_k \nabla f_k \quad (6.20)$$

Para o problema de equilíbrio em análise, a função objetivo  $f$  é dada por:

$$f = \bar{J}^{ep}(D(\Delta u)) - L_{t+\Delta t}(\Delta u) + \langle T, D(\Delta u) \rangle \quad (6.21)$$

No presente trabalho, a função objetivo será minimizada utilizando o Método de Quase-Newton. A aplicação desse método exige que se determine  $\nabla f_k$ . Em elasto-plasticidade incremental, o funcional a ser minimizado é apenas uma vez diferenciável e a anulação de seu diferencial fornece a equação de equilíbrio (Hecke, 1991). Por definição, um funcional  $f : U \rightarrow R$  é dito diferenciável em  $u \in U$ , se existe um operador  $Df$  definido por:

$$Df(u)(v) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{[f(u + \mathbf{q}v) - f(u)]}{q} \quad (6.22)$$

Se  $U \subset R^n$ , tem-se:

$$Df(u) \left( \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \nabla f v \quad (6.23)$$

Sendo a derivada de uma soma igual à soma das derivadas e aplicando as definições

(6.21), tem-se:

$$D\bar{J}^{ep}(D(\Delta u))(D(\Delta v)) = \nabla \bar{J}^{ep} \cdot D \mathbf{D}v = \int_B \nabla \bar{j}^{ep} \cdot D(\Delta v) dB = \langle \nabla \bar{j}^{ep}, D \mathbf{D}v \rangle = \langle \Delta T, D \mathbf{D}v \rangle \quad (6.24)$$

$$DL_{t+\Delta t}(\Delta u)(\Delta v) = \lim_{q \rightarrow 0} q^{-1} [L_{t+\Delta t}(\Delta u + \mathbf{q} \Delta v) - L_{t+\Delta t}(\Delta u)] = L_{t+\Delta t}(\Delta v) \quad (6.25)$$

$$D(\langle T, D(\Delta u) \rangle)(\mathbf{D}v) = \lim_{q \rightarrow 0} q^{-1} [\langle T, D(\Delta u + \mathbf{q} \Delta v) \rangle - \langle T, D(\Delta u) \rangle] = \langle T, D(\mathbf{D}v) \rangle \quad (6.26)$$

Dessa forma, a anulação do diferencial do funcional a ser minimizado fornece a equação de equilíbrio:

$$\langle \Delta T, D(\mathbf{D}v) \rangle + \langle T, D(\mathbf{D}v) \rangle - L_{t+\Delta t}(\Delta v) = 0 \quad (6.27)$$

$$\Psi = \langle T_{t+\Delta t}, D(\mathbf{D}v) \rangle - L_{t+\Delta t}(\Delta v) = 0 \quad (6.28)$$

$$\langle T_{t+\Delta t}, D(\mathbf{D}v) \rangle = L_{t+\Delta t}(\Delta v) \quad (6.29)$$

A função  $\Psi$ , dada pela diferença entre as forças internas e as forças externas, é denominada resíduo e corresponde ao diferencial do funcional que se pretende minimizar. Assim, para o problema em análise a Equação (6.20) assume a forma:

$$\Delta U_{k+1} = \Delta U_k - \mathbf{a}_k H_k \Psi(\Delta U_k) \quad (6.30)$$

Nesse trabalho, a atualização de  $H_k$  foi realizada a partir do método BFGS. A teoria envolvida na derivação do método pode ser encontrada em Nocedal e Wright (1999). A fórmula de atualização de  $H_k$  proposta pelo método é apresentada na Equação (6.31).

$$H_{k+1} = H_k + \frac{s_k \otimes s_k}{s_k \cdot y_k} - \frac{(H_k \cdot y_k) \otimes (H_k \cdot y_k)}{y_k \cdot H_k \cdot y_k} + (y_k \cdot H_k \cdot y_k) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (6.31)$$

onde:

$$y_k = \Psi(\Delta U_{k+1}) - \Psi(\Delta U_k) \quad (6.32)$$

$$s_k = \Delta U_{k+1} - \Delta U_k \quad (6.33)$$

$$\mathbf{v} = \frac{s_k}{s_k \cdot y_k} - \frac{H_k \cdot y_k}{y_k \cdot H_k \cdot y_k} \quad (6.34)$$

A adoção de uma aproximação da matriz inversa do Hessiano possui uma vantagem, além do fato de não ser necessário determinar as derivadas segundas da função objetivo. Sabe-se que o Hessiano deve ser uma matriz positivo-definida. Em geral, longe do mínimo, não há garantia de que o Hessiano seja positivo definido, de forma que incrementos de deslocamento na direção calculada pelo Método de Newton utilizando o Hessiano podem levar a pontos onde o valor da função está aumentando (Press et al, 1992). A estratégia do Método de Quase-Newton consiste em adotar uma matriz simétrica, positivo-definida como aproximação inicial do Hessiano e construir as demais aproximações  $H_k$  de forma que a matriz  $H_k$  permaneça simétrica e positivo-definida. Longe do mínimo, esse procedimento assegura que os incrementos de deslocamento ocorram ao longo da direção de decréscimo da função objetivo. Próximo ao mínimo, a fórmula de atualização de  $H_k$  aproxima-se do Hessiano, obtendo-se a convergência quadrática do Método de Newton.

Quando não se está suficientemente próximo do mínimo, acrescentar ao deslocamento inicial todo o incremento calculado,  $-H_k \nabla f_k$ , pode não levar a um decréscimo da função objetivo, mesmo que a aproximação do Hessiano seja uma matriz

positivo-definida (Press et al, 1992). O único aspecto que se pode garantir é que inicialmente a função objetivo decresce na direção do incremento calculado, no entanto, após um decréscimo inicial, a função pode passar a crescer. Por essa razão, adotam-se métodos como, por exemplo, o método secante para determinar o tamanho do passo a ser dado na direção determinada. Descrições do Método Secante podem ser encontradas em Press et al (1992) e Akay (1994).

Nos Quadros 6 e 7, são apresentados os algoritmos utilizados para resolver o problema de equilíbrio. Os algoritmos apresentados podem ser encontrados em (Press et al, 1992).

#### QUADRO 6 ALGORITMO DO MÉTODO DE QUASE-NEWTON COM EQUAÇÃO DE ATUALIZAÇÃO BFGS.

<p>Determinar <math>U_1</math></p> <p>Determinar <math>H_1</math> (em geral, <math>H_1 = I</math>)</p> <p>Determinar <math>\nabla f_1 = \Psi(\Delta U_1)</math></p> <p>Determinar <math>p_1 = -\Psi(\Delta U_1)</math></p> <p>Fazer para <math>k=1</math>, ITMAX (onde ITMAX é o número máximo de iterações admitido)</p> <p style="padding-left: 2em;">Determinar <math>\mathbf{a}_k</math>, tal que <math>p_k [\Psi(\Delta U_k + \mathbf{a}_k p_k)] \leq TOL \{p_k [\Psi(\Delta U_k)]\}</math>, onde:</p> <p style="padding-left: 2em;">TOL é um valor de tolerância.</p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer <math>\Delta U_{k+1} = \Delta U_k + \mathbf{a}_k p_k</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer <math>s_k = \Delta U_{k+1} - \Delta U_k</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Calcular <math>\Psi(\Delta U_{k+1})</math></p> <p style="padding-left: 2em;">TEST = 0.0</p> <p style="padding-left: 2em;">TEMP = 0.0</p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer TEST = <math>(\Delta U_k) \cdot \Psi(\Delta U_k)</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer TEMP = <math>(\Delta U_{k+1}) \cdot \Psi(\Delta U_{k+1})</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Se <math> TEMP  \leq GTOL  TEST </math>, finalizar a rotina (critério de convergência satisfeito)</p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer <math>y_k = \Psi(\Delta U_{k+1}) - \Psi(\Delta U_k)</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer <math>hy_k = H_k \cdot y_k</math></p> <p style="padding-left: 2em;">Fazer <math>fac = y_k \cdot s_k</math></p>
---

Fazer  $fae = y_k \cdot hy_k$

Fazer  $sumy = y_k \cdot y_k$

Fazer  $sums = s_k \cdot s_k$

Se  $fac$  menor que  $\sqrt{EPS \cdot sumy \cdot sums}$ , fazer

$$fac = \frac{1.0}{fac}$$

$$fad = \frac{1.0}{fae}$$

$$y_k = fac \cdot s_k - fad \cdot hy_k$$

$$H_{k+1} = fac \cdot s_k \cdot s_k - fad \cdot hy_k \cdot hy_k + fae \cdot y_k \cdot y_k$$

Fim

Fazer  $p_{k+1} = -H_{k+1} \cdot \Psi(\Delta U_{k+1})$

Fim

#### QUADRO 7 MÉTODO SECANTE UTILIZADO PARA DETERMINAR O TAMANHO DO PASSO $\alpha_k$ .

Fazer  $\mathbf{a}_1 = 0$

Fazer  $\mathbf{a}_2 = 1$

Fazer  $\mathbf{a}_k = 1$

Fazer MAXIT = número máximo de iterações permitido

Fazer TOLX = tolerância

Fazer  $C_1 = p_k \Psi(\Delta U_k)$

Fazer TOL=C1

Fazer  $\Delta U_{k+1} = \Delta U_k + \mathbf{a}_k p_k$

Calcular  $\Psi(\Delta U_{k+1})$

Fazer  $C_2 = p_k \Psi(\Delta U_{k+1})$

Se  $|C_1| < |C_2|$ , fazer

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_2$$

$$SWAP = C1$$

$$C1 = C2$$

$$C2 = SWAP$$

Se não

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_2$$

Fim

Fazer j = 1, MAXIT

$$d\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}_L - \mathbf{a}_k) \cdot C_2}{(C_2 - C_1)}$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_k$$

$$C_1 = C_2$$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k + d\mathbf{a}$$

$$\Delta U_{k+1} = \Delta U_k + \mathbf{a}_k p_k$$

Calcular  $\Psi(\Delta U_{k+1})$

$$C_2 = p_k \cdot \Psi(\Delta U_{k+1})$$

Se  $|d\mathbf{a}| < TOLX$  ou  $|C_2| < |TOL|$ , finalizar a rotina (critério de convergência satisfeito).

Fim

### 6.3 Algoritmos para a resolução da equação constitutiva

Nessa seção, são apresentados algoritmos que podem ser utilizados para resolver a equação constitutiva do problema elasto-plástico. Por meio da equação constitutiva,  $\Delta T$  está relacionado com  $\Delta u$ , conforme apresentado na Equação (6.35).

$$\Delta T = \nabla \bar{j}^{ep}(D(\Delta u)) \quad (6.35)$$

onde:

$$\bar{j}^{ep} ( D (\Delta u)) = \sup_{\Delta T^*, \Delta \mathbf{c}^*} \left[ \Delta T^* \cdot \Delta E - \bar{j}_c^e (\Delta T^*) - \bar{j}_c^h (\Delta \mathbf{c}^*) \right] \quad (6.36)$$

$$\left| (T + \Delta T^*, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}^*) \right.$$

Conforme pode se observar nas Equações (6.35) e (6.36), pretende-se encontrar os incrementos de tensões e de forças termodinâmicas  $(\Delta T, \Delta \mathbf{c})$  relacionados com o incremento de deformações total  $\Delta E = D \Delta u$ .

A condição necessária e suficiente para que o vetor  $(\Delta T, \Delta \mathbf{c})$  seja solução do problema proposto nas Equações (6.35) e (6.36) é:

$$\left( \Delta E - \nabla_{j_c^e} (\Delta T), -\nabla_{j_c^h} (\Delta \mathbf{c}) \right) \in \partial \text{Ind}_P (T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \quad (6.37)$$

Para o caso em que  $P$  é a região identificada por meio de  $m$  funções convexas, a condição apresentada na Equação (6.37) é determinada pelo seguinte sistema:

$$\Delta E - \nabla_{j_c^e} (\Delta T) = \nabla_T f(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \Delta \mathbf{I} \quad (6.38)$$

$$-\nabla_{j_c^h} (\Delta \mathbf{c}) = \nabla_{\mathbf{c}} f(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \Delta \mathbf{I} \quad (6.39)$$

$$f(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \leq 0 \quad (6.40)$$

$$\Delta \mathbf{I} \geq 0 \quad (6.41)$$

$$f(T + \Delta T, \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) \Delta \mathbf{I} = 0 \quad (6.42)$$

Caso existam relações entre as tensões, as forças termodinâmicas e os parâmetros de escoamento  $\Delta \mathbf{I}$  da forma:

$$T + \Delta T = \bar{T}(\Delta \mathbf{I}) \quad (6.43)$$

$$\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}(\Delta \mathbf{I}) \quad (6.44)$$

É possível simplificar o sistema de Equações (6.38) a (6.42) sob a seguinte forma:

$$f(\Delta \mathbf{I}) \leq 0 \text{ ou } F(\Delta \mathbf{I}) \geq 0, \text{ onde } F = -f \quad (6.45)$$

$$\Delta \mathbf{I} \geq 0 \quad (6.46)$$

$$f(\Delta \mathbf{I}) \Delta \mathbf{I} = 0 \quad (6.47)$$

O problema apresentado nas Equações (6.45) a (6.47) é denominado problema de complementaridade não linear. Um dos enfoques utilizados para resolver esse tipo de problema consiste em resolver uma seqüência de subproblemas de complementaridade linear. Isto é, dado  $\Delta \mathbf{I}^k$ , obtém-se  $\Delta \mathbf{I}^{k+1}$  a partir da resolução do subproblema de complementaridade linear:

$$\Delta \mathbf{I} \geq 0 \quad (6.48)$$

$$w = F(\Delta \mathbf{I}^k) + A(\Delta \mathbf{I}^k)(\Delta \mathbf{I} - \Delta \mathbf{I}^k) \geq 0 \quad (6.49)$$

$$\Delta \mathbf{I}^T . w = 0 \quad (6.50)$$

Diferentes métodos podem ser empregados para resolver o problema de complementaridade não linear segundo o enfoque apresentado. A diferença entre esses métodos encontra-se na maneira como a matriz  $A(\Delta \mathbf{I}^k)$  é definida e atualizada a cada iteração. No Método de Newton, por exemplo, a matriz  $A(\Delta \mathbf{I}^k)$  é a matriz Jacobiana  $\nabla F(\Delta \mathbf{I}^k)$ . Já no método de Quase-Newton, a matriz Jacobiana é substituída por uma aproximação atualizada a cada iteração por meio, por exemplo, da fórmula BFGS. O Quadro 8 apresenta um algoritmo para resolver o problema de complementaridade não linear.

**QUADRO 8 UM ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR.**

1. Inicializar  $\Delta \mathbf{I}^k$
2. Calcular  $\nabla F(\Delta \mathbf{I}^{k+1})$
3. Enquanto  $\|(\Delta \mathbf{I}^k)\| - \|(\Delta \mathbf{I}^{k-1})\| > \epsilon$  :
  - Obter  $\Delta \mathbf{I}^{k+1}$  a partir da resolução do subproblema de complementaridade linear:  
 $\Delta \mathbf{I} \geq 0, w = F(\Delta \mathbf{I}^k) + A(\Delta \mathbf{I}^k)(\Delta \mathbf{I} - \Delta \mathbf{I}^k) \geq 0, \Delta \mathbf{I}^T . w = 0$
  - Calcular  $\bar{T}(\Delta \mathbf{I}^{k+1})$
  - Calcular  $F(\Delta \mathbf{I}^{k+1})$
  - Calcular  $\nabla F(\Delta \mathbf{I}^{k+1})$
  - Atualizar  $k$ , isto é,  $k = k + 1$

Fim

O subproblema de complementaridade linear pode ser resolvido através de métodos que, a partir de um número finito de iterações, conduzem a uma solução exata do problema, como, por exemplo, o Método de Lemke. Esse método baseia-se numa estratégia de pivoteamento. Resumidamente, o problema de complementaridade linear é reescrito da seguinte forma:

$$Iw - Mz - z_0 I = q \quad (6.51)$$

$$z \geq 0, w \geq 0 \quad (6.52)$$

$$z^T w = 0 \quad (6.53)$$

onde:

$$M = A(\Delta I^k), q = F(\Delta I^k), z = (\Delta I - \Delta I^k) \quad (6.54)$$

$$z_0 = \min_i \{-q_i, i = 1, \dots, n\} \quad (6.55)$$

A variável não negativa  $z_0$  é uma variável artificial introduzida na Equação (6.51). Essa equação corresponde ao sistema apresentado em (6.56), ao qual pode se associar a matriz apresentada em (6.57).

$$\begin{aligned} w_1 - m_{11}z_1 - \dots - m_{1r}z_r - \dots - m_{1n}z_n - z_0 &= q_1 \\ w_2 - m_{21}z_1 - \dots - m_{2r}z_r - \dots - m_{2n}z_n - z_0 &= q_2 \\ \dots & \\ w_n - m_{n1}z_1 - \dots - m_{nr}z_r - \dots - m_{nn}z_n - z_0 &= q_n \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_r & \dots & w_n & z_1 & \dots & z_r & \dots & z_n & z_0 & \\ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -m_{11} & \dots & -m_{1r} & \dots & -m_{1n} & -1 & q_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & -m_{21} & \dots & -m_{2r} & \dots & -m_{2n} & -1 & q_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & -m_{r1} & \dots & -m_{rr} & \dots & -m_{rn} & -1 & q_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -m_{n1} & \dots & -m_{nr} & \dots & -m_{nn} & -1 & q_n \end{array} \right]_{n \times 2(n+1)} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Na matriz  $N$ , as colunas  $w_i$  estão associadas inicialmente a variáveis denominadas variáveis básicas. Já as colunas  $z_i$  estão associadas a variáveis denominadas variáveis não básicas. Um processo de pivoteamento realizado na matriz  $N$  conduz à solução exata do problema. Ao longo desse processo, a cada operação de pivoteamento, uma variável básica sai da base, sendo denominada variável básica que sai, e uma variável não básica entra na

base, sendo denominada variável básica que entra. Logo, a cada operação de pivoteamento, a base é alterada, obtendo-se uma solução denominada solução quase complementar. O processo conduz, portanto, a uma seqüência de soluções quase complementares, chegando-se a uma solução complementar quando  $z_0$  se transforma em uma variável não básica ou em um vetor coluna nulo. Uma descrição detalhada do método pode ser encontrada em (Panik, 1996). No Quadro 9, encontra-se um algoritmo para resolução do subproblema de complementaridade linear baseado no método de Lemke.

**QUADRO 9 ALGORITMO PARA A RESOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR ATRAVÉS DO MÉTODO DE LEMKE.**

1. Montar a matriz  $N$
2. Fazer  $r = i$ , tal que  $q_r = \min_i \{q_i\}$
3. Fazer  $t = 2n+1$
4. Fazer  $pivo = n_{rt}$
5. Multiplicar a linha  $r$  da matriz  $N$  por  $\frac{1}{pivo}$ , isto é:  $n_{rj} = \frac{n_{rj}}{pivo}$
6. Para todas as outras linhas da matriz  $N$ , fazer:  $n_{ij} = n_{ij} + (-1).n_{it}.n_{rj}$
7. Identificar a variável básica que sai e a coluna da matriz  $N$  a qual essa variável está associada, fazendo  $t = n +$  (coluna de  $N$  associada à variável básica que sai).
8. Na coluna  $t$  da matriz  $N$ , identificar o novo pivô, utilizando a regra:
 
$$r = \arg \min_i \left\{ \frac{q_i}{n_{it}}; \quad i = 1, \dots, n; \quad n_{it} > 0 \right\}$$
9. Fazer  $pivô = n_{rt}$
10. Repetir os passos (5) a (8) até que a coluna da matriz  $N$  associada à  $z_0$  se torne nula ou não básica.

Outro enfoque utilizado para resolver o problema de complementaridade não linear consiste em utilizar métodos iterativos que geram soluções aproximadas para os subproblemas de complementaridade linear. Entre esses métodos podem-se citar os Métodos de Newton Inexatos discutidos por Pang (1986). O autor apresenta teoremas que tratam da convergência da seqüência de soluções aproximadas geradas pelo método.

Alguns autores têm estudado e utilizado métodos que se baseiam na reformulação do problema de complementaridade não linear sob a forma de um sistema de equações não lineares. A reformulação baseia-se em funções não lineares com a seguinte propriedade:

$$j(a,b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0, a \geq 0, b \geq 0 \quad (6.58)$$

A partir da reformulação, o problema de complementaridade não-linear passa a ser um problema de resolução de um sistema de equações não lineares. Descrições de alguns métodos utilizados para resolver esses sistemas obtidos a partir de problemas de complementaridade não linear podem ser encontradas em Kanzow e Pieper (1997) e Torres e Quintana (2002).

No presente trabalho, optou-se por resolver o problema de complementaridade não linear como uma seqüência de subproblemas de complementaridade linear resolvidos a partir do Método de Lemke. Segundo Pang (1986), esse tipo de solução torna-se desvantajosa quando a determinação da matriz  $A$  apresenta elevado custo computacional ou quando os subproblemas de complementaridade linear são de grande dimensão. No presente trabalho, o número de modos de escoamento utilizados para determinar a região de tensões admissíveis foi menor ou igual a quatro, obtendo-se problemas de complementaridade linear de pequena dimensão. As características das funções de escoamento utilizadas permitiram determinar a matriz  $A$  de maneira simples.

É importante ressaltar que, quando a região  $P$  das tensões e forças termodinâmicas admissíveis é definida através de uma única função de escoamento, o problema de programação matemática obtido pode ser resolvido de forma mais simples. Sendo conhecido o estado atual de tensões e forças termodinâmicas admissíveis  $(T, c)$  e um dado incremento  $E$ , se:

$$f(T + C\Delta E) \leq 0 \quad (6.59)$$

não ocorre plastificação e

$$= 0 \quad (6.60)$$

Logo:

$$T = C E \quad (6.61)$$

$$\Delta c = 0 \quad (6.62)$$

A situação em que ocorre plastificação, identificada através de:

$$f(T + C\Delta E) > 0 \quad (6.63)$$

recai em um problema de encontrar a menor raiz positiva da equação não linear:

$$f(\Delta I) = 0 \quad (6.64)$$

O Método de Newton-Raphson pode ser utilizado para resolver o problema. No Quadro 10, apresenta-se o algoritmo de Newton-Raphson empregado na solução de problemas envolvendo materiais com comportamento elasto-idealmente-plástico e critério de escoamento definido por uma única função.

A função de escoamento  $f(\Delta I)$ , presente no Quadro 10, é definida com o auxílio das funções apresentadas nas Equações (6.65) e (6.66).

$$T + \Delta T = \bar{T}(\Delta I) \quad (6.65)$$

$$c + \Delta c = \bar{c}(\Delta I) \quad (6.66)$$

**QUADRO 10 ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON EMPREGADO PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO MATERIAIS COM COMPORTAMENTO ELASTO-IDEALMENTE-PLÁSTICO E CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DEFINIDO POR UMA ÚNICA FUNÇÃO DE ESCOAMENTO.**

1. Calcular  $T^e = T + C\Delta E$ ,  $f(T^e)$ ,  $\nabla f(T^e)$

2. Se  $f(T + C\Delta E) \geq 0$

$k = 0$ ,  $k=0$

Enquanto  $\frac{f(\Delta I^k)}{\nabla f(\Delta I^k)} > \epsilon$

$\Delta I^{k+1} = \Delta I^k - \frac{f(\Delta I^k)}{\nabla f(\Delta I^k)}$

$k = k + 1$

Calcular  $\bar{T}(\Delta I^k)$

Calcular  $f(\Delta I^k)$

Calcular  $\nabla f(\Delta I^k)$

Fim

Fim

Fim

**6.4 Aplicação do Algoritmo de Newton-Raphson para o Modelo de Drucker-Prager**

Nessa seção, a função de escoamento do modelo de Drucker-Prager é reescrita como uma função quadrática, a fim de facilitar a obtenção de uma relação entre tensões e multiplicadores plásticos da forma apresentada na Equação (6.65). A equação para a

determinação do gradiente da função de escoamento também é apresentada sob a forma especificada no algoritmo de programação matemática (Newton-Raphson) apresentado anteriormente.

A função de escoamento para o modelo de Drucker-Prager é dada pela equação:

$$\sqrt{J_{2D}} + \frac{q}{3} J_1 - k = 0 \quad (6.67)$$

onde,  $J_{2D}$  é o segundo invariante do tensor de tensões desviador e  $J_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões:

$$J_{2D} = \frac{1}{3}(T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{33}^2) - \frac{1}{3}(T_{11}T_{22} + T_{11}T_{33} + T_{22}T_{33}) - (T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2) \quad (6.68)$$

$$J_1 = tr(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (6.69)$$

No espaço  $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ , a Equação (6.67) representa a reta:

$$\sqrt{J_{2D}} = -\frac{q}{3} J_1 + k \quad (6.70)$$

que pode ser reescrita como:

$$J_{2D} = k^2 - \frac{2qk}{3} J_1 + \frac{q^2}{9} (J_1)^2 \quad (6.71)$$

Os invariantes do tensor de tensões ( $J_1$ ) e do tensor de tensões desviador ( $J_{2D}$ ) podem ser reescritos sob as seguintes formas:

$$J_{2D} = \frac{1}{2} M T T \quad (6.72)$$

$$J_1 = G T \quad (6.73)$$

onde:

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$G = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (6.75)$$

Por sua vez, o quadrado do primeiro invariante do tensor de tensões pode ser reescrito como:

$$(J_1)^2 = JTT \quad (6.76)$$

onde:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

Assim, a função de escoamento assume a forma:

$$\frac{1}{2}MT.T - \frac{\mathbf{q}^2}{9}JTT + \frac{2\mathbf{q}k}{3}G.T - k^2 = 0 \quad (6.78)$$

ou ainda, agrupando alguns termos:

$$\frac{1}{2} \left( M - \frac{2\mathbf{q}^2}{9}J \right) T.T + \frac{2\mathbf{q}k}{3}G.T - k^2 = 0 \quad (6.79)$$

E, finalmente, denominando a matriz  $\left( M - \frac{2\mathbf{q}^2}{9}J \right)$  de matriz  $Q$  e o termo  $\frac{2\mathbf{q}k}{3}G$  de

$\bar{G}$ , obtém-se:

$$f(\Delta\lambda) = \frac{1}{2}QT.T + \bar{G}.T - k^2 = 0 \quad (6.80)$$

Dessa forma, a região admissível passa a ser representada por:

$$P = \left\{ T / \frac{1}{2}QT.T + \bar{G}.T - k^2 \leq 0 \right\} \quad (6.81)$$

As tensões no regime plástico podem ser obtidas a partir da equação:

$$\Delta E - \bar{\nabla}j_C^e = \nabla_T f(T + \Delta T).\Delta I \quad (6.82)$$

onde:

$$\bar{\nabla}j_C^e = C^{-1}\Delta T \quad (6.83)$$

Na Equação (6.83), para problemas de estado plano de deformações, a matriz  $C$  é definida como:

$$C = \frac{Y(1-n)}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{(1-n)} & 0 \\ \frac{n}{(1-n)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2n)}{2(1-n)} \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

Substituindo a Equação (6.83) na Equação (6.82) e determinando o gradiente da função de escoamento, obtém-se:

$$\Delta E = C^{-1}\Delta T + Q(T + \Delta T)\Delta I + \frac{2qk}{3}G\Delta I \quad (6.85)$$

E, após alguma manipulação matemática, é possível obter uma transformação como aquela introduzida na Equação (6.65) da Seção 6.3:

$$T + \Delta T = \bar{T}(\Delta I) = \Omega(\Delta I) \left( C\Delta E + T - \frac{2qk}{3}CG\Delta I \right) \quad (6.86)$$

onde:

$$\Omega(\Delta I) = (I + CQ\Delta I)^{-1} \quad (6.87)$$

Utilizando a Equação (6.86), a função de escoamento passa a ser definida por:

$$f(\Delta\lambda) = \frac{1}{2}Q\bar{T} \cdot \bar{T} + G \cdot \bar{T} - k^2 = 0 \quad (6.88)$$

Nos casos em que ocorre plastificação, isto é, nos casos em que:

$$f(T + C\Delta E) > 0 \quad (6.89)$$

o problema consiste em encontrar a menor raiz positiva da equação:

$$f(\Delta\lambda) = 0 \quad (6.90)$$

A determinação da menor raiz positiva da Equação (6.90) pode ser realizada utilizando o Método de Newon-Raphson, conforme descrito anteriormente. O algoritmo desse método envolve o cálculo de  $\nabla f$ , o qual pode ser efetuado utilizando a expressão:

$$\nabla_{\lambda} [\beta(\lambda)]^{-1} = - [\beta(\lambda)]^{-1} [\nabla_{\lambda} \beta(\lambda)] [\beta(\lambda)]^{-1} \quad (6.91)$$

Com o auxílio da Equação (6.91) e da Equação (6.86), obtém-se  $\nabla_{\lambda} f$ :

$$\nabla_I f(\Delta I) = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q\bar{T}(\Delta I) + \frac{2qk}{3}G \right] \cdot \left[ Q\bar{T}(\Delta I) + \frac{2qk}{3}G \right] \quad (6.92)$$

As Equações (6.86), (6.88) e (6.92) são aplicadas diretamente no algoritmo utilizado, nesse trabalho, para simular o comportamento de materiais elasto lineares,

idealmente plásticos, com critério de escoamento definido por uma única função quadrática.

## 6.5 Aplicação do Algoritmo de Lemke para o Modelo Cap

Conforme descrito anteriormente, Modelos Cap simulam o comportamento constitutivo dos solos a partir de uma superfície de escoamento fixa e de uma superfície de escoamento móvel. No presente trabalho, a superfície de escoamento fixa é constituída por duas superfícies de Drucker-Prager conectadas, conforme ilustrado na Figura 8 apresentada no Capítulo 4. Seguindo o mesmo procedimento empregado para o modelo elasto-idealmente-plástico com critério de escoamento de Drucker-Prager, adotou-se uma forma quadrática para descrever as superfícies de Drucker-Prager I e Drucker-Prager II, isto é:

$$f_1(\Delta\lambda_1) = \frac{1}{2}Q_1\bar{T}\cdot\bar{T} + \bar{G}_1\bar{T} - k_1^2 = 0 \quad (6.93)$$

$$f_2(\Delta\lambda_2) = \frac{1}{2}Q_2\bar{T}\cdot\bar{T} + \bar{G}_2\bar{T} - k_2^2 = 0 \quad (6.94)$$

A superfície móvel parabólica proposta por Nchequim (2006) foi reescrita como:

$$f_3(\Delta\lambda_3) = T_m^c - \frac{1}{3}G\bar{T} + \frac{R^2}{2}M\bar{T}\cdot\bar{T} \quad (6.95)$$

Finalmente, a superfície adotada para limitar o valor das tensões hidrostáticas no eixo positivo do cone de Drucker-Prager foi reescrita sob a forma:

$$f_4(\Delta\lambda_4) = \frac{1}{3}G\bar{T} - t \quad (6.96)$$

Para modelos constitutivos compostos por vários modos de escoamento, as taxas de deformações plásticas são definidas por uma combinação linear das normais externas aos modos  $f_j$  ativos em um ponto  $(T, c)$ :

$$\Delta E^p = \nabla_T f_j \cdot \Delta I_j \quad (6.97)$$

Apenas modos de escoamento nulos, também denominados ativos, podem contribuir para a determinação das taxas de deformações plásticas, pois se:

$$f_j = 0 \rightarrow \Delta\lambda_j \text{ pode ser não nulo} \quad (6.98)$$

Observa-se que, em pontos regulares de qualquer um dos quatro modos de escoamento do modelo proposto, as taxas de deformações plásticas são proporcionais à normal externa à região  $P$ , isto é, são proporcionais ao gradiente do componente  $f_j$  nulo ou ativo nesse ponto. Já em um ponto anguloso (na intersecção de dois modos de escoamento, por exemplo), estas taxas são dadas pela combinação linear das normais externas dos componentes  $f_j$  ativos neste ponto, ou seja, estão contidas no cone positivo formado pelas normais adjacentes ao ponto singular.

Novamente, as tensões no regime plástico podem ser obtidas a partir da Equação (6.96), a qual pode ser reescrita como:

$$\Delta E - C^{-1} \Delta T = \Delta I_1 \left[ Q(T + \Delta T) + \frac{2qk_1}{3} G \right] + \Delta I_2 \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2qk_2}{3} G \right] + \Delta I_3 \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] + \Delta I_4 \left[ \frac{1}{3} \right] G \quad (6.99)$$

Efetuada as mesmas manipulações realizadas anteriormente para o Modelo de Drucker-Prager, obtém-se a expressão que determina as tensões no regime plástico para o Modelo Cap utilizado nesse trabalho:

$$T + \Delta T = \Omega(\Delta I) \left( C \Delta E + T - \Delta I_1 \frac{2qk_1}{3} CG - \Delta I_2 \frac{2qk_2}{3} CG + \frac{1}{3} \Delta I_3 CG - \frac{1}{3} \Delta I_4 CG \right) \quad (6.100)$$

onde:

$$\Omega(\Delta I) = \left( I + \Delta I_1 C Q_1 + \Delta I_2 C Q_2 + \Delta I_3 R^2 C M \right)^{-1} \quad (6.101)$$

A partir das equações apresentadas, pretende-se determinar os incrementos de tensões e forças termodinâmicas  $(\Delta T, \Delta T_m^c)$  correspondentes ao incremento de deformações  $\Delta E = D \Delta u$ . Para isso, utiliza-se o sistema:

$$\Delta E^p = \Delta I_1 \left[ Q(T + \Delta T) + \frac{2qk_1}{3} G \right] + \Delta I_2 \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2qk_2}{3} G \right] + \Delta I_3 \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] + \Delta I_4 \left[ \frac{1}{3} \right] G \quad (6.102)$$

$$T_m^c + \Delta T_m^c = \frac{1}{B} \ln \left( 1 - \frac{E_m^p + \Delta E_m^p}{W} \right) + Z \quad (6.103)$$

$$F(T + \Delta T, T_m^c + \Delta T_m^c) \leq 0 \quad (6.104)$$

$$\Delta I \geq 0 \quad (6.105)$$

$$F(T + \Delta T, T_m^c + \Delta T_m^c) \Delta I = 0 \quad (6.106)$$

O sistema acima pode ser colocado sob a forma apresentada nas Equações (6.45) a (6.47) da Seção 6.3, recaindo-se num problema de complementaridade não linear que pode

ser resolvido através do algoritmo apresentado anteriormente (Método de Newton associado ao Método de Lemke). Esse algoritmo exige a determinação da Matriz Jacobiana associada às funções de escoamento,  $A(\Delta I^k) = \nabla F(\Delta I^k)$ . Os componentes dessa matriz são dados por:

$$a_{ij} = \nabla_j f_i \quad (6.108)$$

Para o modelo em questão, os componentes da Matriz Jacobiana são:

$$a_{11} = \nabla_{I_1} f_1 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \quad (6.109)$$

$$a_{12} = \nabla_{I_2} f_1 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \quad (6.110)$$

$$a_{13} = \nabla_{I_3} f_1 = -\Omega(\Delta I) C \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \quad (6.111)$$

$$a_{14} = \nabla_{I_4} f_1 = -\Omega(\Delta I) C \left[ \frac{1}{3} G \right] \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \quad (6.112)$$

$$a_{21} = \nabla_{I_1} f_2 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \quad (6.113)$$

$$a_{22} = \nabla_{I_2} f_2 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \quad (6.114)$$

$$a_{23} = \nabla_{I_3} f_2 = -\Omega(\Delta I) C \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \quad (6.115)$$

$$a_{24} = \nabla_{I_4} f_2 = -\Omega(\Delta I) C \left[ \frac{1}{3} G \right] \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \quad (6.116)$$

$$a_{31} = \nabla_{I_1} f_3 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \quad (6.117)$$

$$a_{32} = \nabla_{I_2} f_3 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \quad (6.118)$$

$$a_{33} = \nabla_{I_3} f_3 = -\Omega(\Delta I) C \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \quad (6.119)$$

$$a_{34} = \nabla_{I_4} f_3 = -\Omega(\Delta I) C \left[ \frac{1}{3} G \right] \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \quad (6.120)$$

$$a_{41} = \nabla_{I_1} f_4 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_1(T + \Delta T) + \frac{2q_1 k_1}{3} G \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} G \right] \quad (6.121)$$

$$a_{42} = \nabla_{I_2} f_4 = -\Omega(\Delta I) C \left[ Q_2(T + \Delta T) + \frac{2q_2 k_2}{3} G \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} G \right] \quad (6.122)$$

$$a_{43} = \nabla_{I_3} f_4 = -\Omega(\Delta I) C \left[ R^2 M(T + \Delta T) - \frac{1}{3} G \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} G \right] \quad (6.123)$$

$$a_{44} = \nabla_{I_4} f_4 = -\Omega(\Delta I) C \left[ \frac{1}{3} G \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} G \right] \quad (6.124)$$

## 6.6 O programa desenvolvido

No presente trabalho, desenvolveu-se um programa numérico-computacional para simular o comportamento elasto-plástico de solos. O programa foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 90, utilizando o MICROSOFT DEVELOPER STUDIO, Copyright<sup>©</sup>1994-95, Microsoft Corporation.

Com o programa é possível realizar análises de problemas elasto-elastamente-plásticos com critério de escoamento de Drucker-Prager e análises de problemas elasto-plásticos com critério de escoamento definido a partir de um Modelo Cap caracterizado por uma superfície fixa de Drucker-Prager e uma superfície móvel parabólica.

O programa aceita como condições de contorno a imposição de cargas distribuídas, cargas concentradas e deslocamentos prescritos em determinados nós da malha de elementos finitos.

Considera-se que o material em análise é isotrópico, não havendo, no entanto, restrição quanto ao número de materiais que podem compor a estrutura analisada (maciço de solo, encosta, talude, entre outros).

O procedimento de solução para os dois modelos constitutivos implementados combina um método Quase-Newton para a resolução do equilíbrio global e um algoritmo de programação matemática (complementaridade não-linear ou Newton-Raphson) para a resolução da equação constitutiva elasto-plástica. A discretização espacial é obtida aplicando o Método dos Elementos Finitos e a discretização temporal foi introduzida independentemente da espacial. Inicialmente, o Método dos Elementos Finitos foi

implementado para a resolução de problemas em estado plano. A extensão para análises tridimensionais poderá se dar com a implementação de elementos adequados para tal.

O programa está estruturado em módulos. O módulo denominado CODE contém o programa principal que realiza a chamada das subrotinas alocadas em outros módulos. Os incrementos de carga são realizados pelo módulo CODE. Em cada incremento, esse módulo faz a chamada das rotinas do módulo EQUILÍBRIO, no qual estão alocadas todas as rotinas que permitem resolver o problema de equilíbrio global gerado em cada passo de carga. Isto é, no módulo EQUILÍBRIO, encontram-se as subrotinas referentes à aplicação do Método Quase-Newton.

O módulo EQUILÍBRIO realiza a chamada das subrotinas alocadas no módulo FORMKF. Esse módulo é responsável pela montagem da equação de equilíbrio. As forças internas presentes nessa equação são calculadas a partir das subrotinas alocadas no módulo ELEM. Essas subrotinas permitem resolver a equação constitutiva elasto-plástica. Em resumo, em cada incremento de carga, existe um problema de equilíbrio a ser resolvido, no qual se pretende balancear as forças externas e as forças internas, calculadas ponto a ponto, seguindo a discretização espacial do Método dos Elementos Finitos. A determinação das forças internas (tensões) é efetuada a partir da resolução da equação constitutiva, em cada Ponto de Gauss. A Figura 11 ilustra a forma como o programa desenvolvido foi estruturado com base nos algoritmos descritos nos capítulos anteriores.

As rotinas de apoio ao programa (rotinas de integração numérica, rotinas de leitura de dados, formação de matrizes e vetores, aplicação de condições de contorno, entre outras) encontram-se nos módulos PREPROC, ROTINAS PREPROC e SETINT.

O programa desenvolvido baseou-se no Sistema de Desenvolvimento de Programa – SDP (Feijóo e Gouvea, 1985). Todos os algoritmos de otimização implementados foram apresentados ao longo do presente capítulo. Os algoritmos implementados para o Método de Quase-Newton e para o Método Secante baseiam-se naqueles apresentados por Press et al (1992). O algoritmo implementado para o Método de Lemke baseia-se naquele apresentado por Panik (1996).

A resolução de alguns exemplos com o programa desenvolvido permitiu observar que o tempo de duração de uma aplicação varia de poucos segundos a vários minutos, dependendo da dimensão do problema. Sugere-se implementar a forma vetorial do Método

de Quase-Newton a fim de reduzir o tempo de processamento para problemas de grande dimensão.

**FIGURA 11 FORMA COMO O PROGRAMA DESENVOLVIDO ENCONTRA-SE ESTRUTURADO.**



## 7. EXEMPLOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados de simulações da distribuição de tensões e deformações em maciços de solo submetidos a determinadas condições de carregamento. Nas simulações, os efeitos térmicos foram desprezados, a hipótese de pequenas deformações foi adotada e admitiu-se que a deformação resultante de uma história de tensões não depende da velocidade com que o programa de carga se realiza.

Os maciços de solo são analisados numericamente empregando-se o Método dos Elementos Finitos. No primeiro exemplo, o comportamento constitutivo do solo é simulado através do Modelo de Drucker-Prager, de forma que o procedimento de solução combina o Método de Quase-Newton para a resolução do problema de equilíbrio global com o algoritmo de Newton-Raphson para a resolução da equação constitutiva. No segundo exemplo, o comportamento elastoplástico do solo é simulado através do Modelo Cap, descrito nos capítulos anteriores. Nesse exemplo, o procedimento de solução combina o Método de Quase-Newton com o algoritmo de complementaridade não-linear descrito anteriormente.

As simulações foram realizadas utilizando o programa desenvolvido no presente trabalho. No Exemplo 1, os resultados gerados pelo programa desenvolvido foram comparados com os resultados gerados pelo programa comercial ANSYS<sup>®</sup> versão 8.0. No Exemplo 2, os resultados gerados pelo programa desenvolvido foram comparados com os resultados numéricos e experimentais apresentados por Desai e Siriwardane (1984).

### 7.1. *Exemplo 1*

Analisou-se um problema em estado plano de deformações, em que uma seção representativa de um talude, constituído por três tipos de solos distintos, é submetida a um carregamento vertical distribuído em seu topo. O comportamento constitutivo do solo foi simulado através do Modelo de Drucker-Prager. Considerou-se que o material não sofre encruamento, isto é, possui comportamento elasto-idealmente-plástico. As propriedades materiais dos solos que constituem o talude são apresentadas na Tabela 1.

O ângulo de atrito e a coesão do solo estão relacionados, respectivamente, com os coeficientes angular e linear da função de escoamento do Modelo de Drucker-Prager. Esses

coeficientes ( $\theta$ ,  $k$ ) podem ser calculados a partir das seguintes expressões para um problema de estado plano de deformações:

$$q = \frac{\tan f}{(9 + 12 \tan^2 f)^{1/2}} \quad (7.1)$$

$$k = \frac{3c}{(9 + 12 \tan^2 f)^{1/2}} \quad (7.2)$$

Essas expressões são apresentadas por Desai e Siriwardane (1984).

**TABELA 1 PROPRIEDADES MATERIAIS DOS SOLOS QUE CONSTITUEM O TALUDE DO EXEMPLO 1.**

<b>Material</b>	<b><math>\gamma</math> peso específico (kN/m<sup>3</sup>)</b>	<b><math>c</math> coesão (kPa)</b>	<b><math>\phi</math> ângulo de atrito</b>	<b><math>E</math> módulo de elasticidade (kPa)</b>	<b>coeficiente de Poisson</b>
Colúvio 1	17,0	5	25	15000	0,4
Colúvio 2	18,0	5	30	15000	0,4
Solo Residual	19,5	10	32	30000	0,4

Substituindo os valores da coesão e do ângulo de atrito nas Equações (7.1) e (7.2), obtêm-se os seguintes coeficientes para o Modelo de Drucker-Prager:

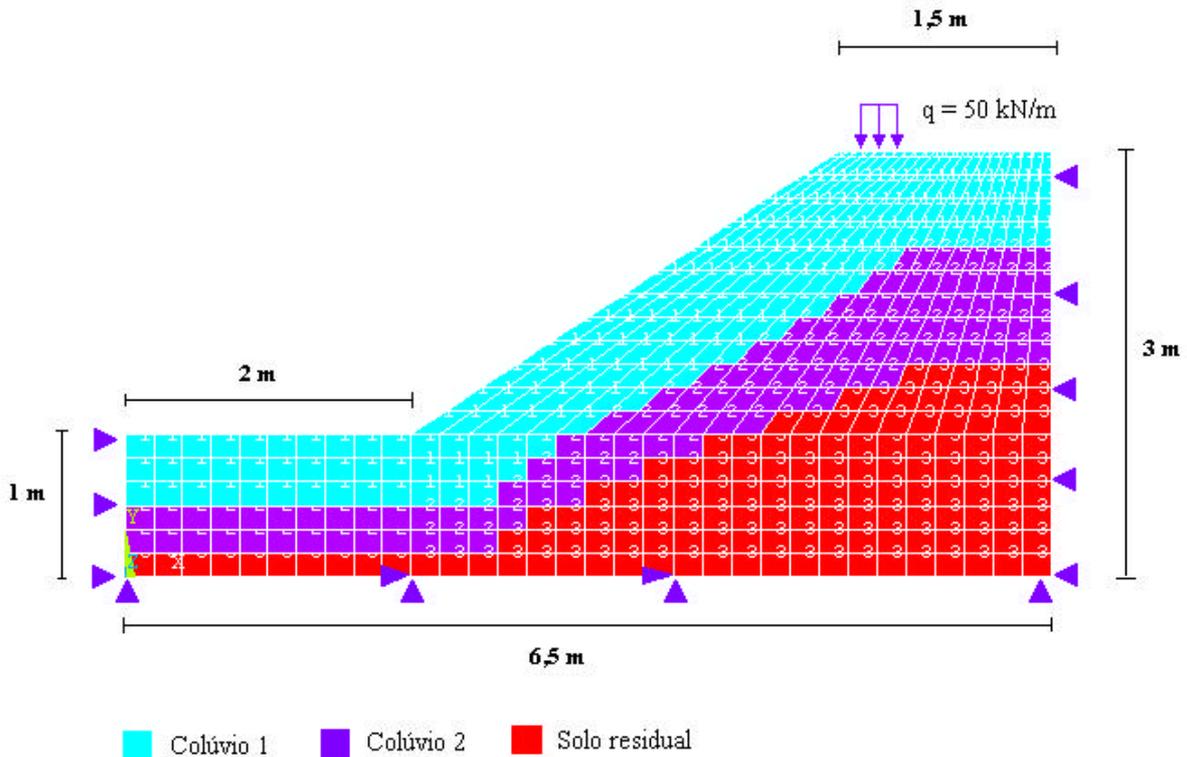
**TABELA 2 COEFICIENTES DO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE DRUCKER-PRAGER.**

<b>Material</b>	<b><math>q</math></b>	<b><math>k</math> (kN)</b>
Colúvio 1	0,1368577	4,402385
Colúvio 2	0,1601281	4,160252
Solo Residual	0,1689111	8,109429

No programa ANSYS® e no programa desenvolvido, o talude foi discretizado utilizando um elemento isoparamétrico de oito nós. O elemento utilizado da biblioteca do ANSYS® foi o PLANE 82. Esse elemento é definido por oito nós, cada qual com dois graus de liberdade: translação nas direções nodais  $x$  e  $y$ . O elemento pode ser utilizado como um elemento plano ou axissimétrico. O carregamento imposto no topo do talude, as condições

de contorno do problema e a discretização espacial em elementos finitos são apresentados na Figura 12.

**FIGURA 12 CONDIÇÕES DE CONTORNO E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS PARA O EXEMPLO 1.**



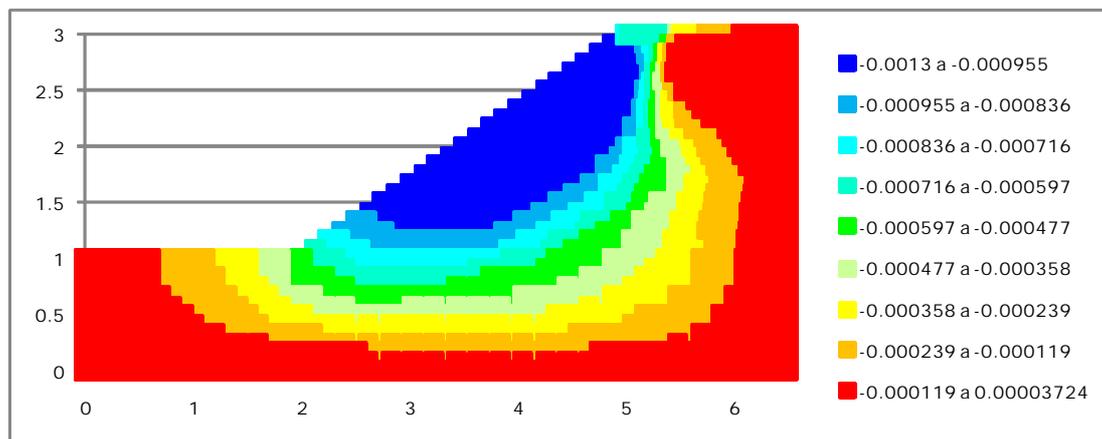
O carregamento foi imposto em 100 incrementos de carga iguais. Adotou-se a mesma malha de elementos finitos para a simulação realizada com o programa ANSYS® e para a simulação realizada com o programa desenvolvido no presente trabalho.

Os resultados obtidos com o programa desenvolvido nesse trabalho para as distribuições de deslocamentos, tensões e deformações são apresentados nas Figuras 13 a 32, juntamente com os resultados gerados pelo programa ANSYS®. Para esse exemplo, foram adotadas unidades do Sistema Internacional (deslocamentos em metros e tensões em Pascal).

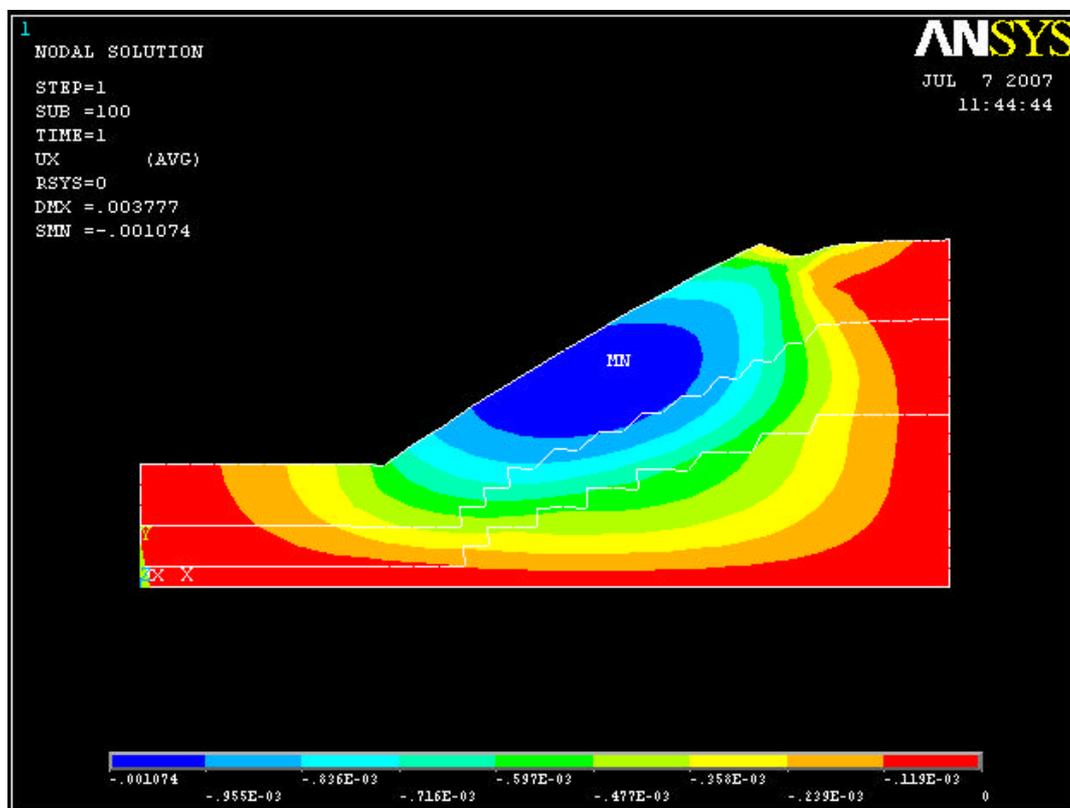
Salienta-se que para problemas em estado plano de deformações a componente  $E_{zz}$  do tensor de deformações totais é nula. No entanto, as deformações plásticas  $E_{zz}^p$  e as deformações elásticas  $E_{zz}^e$  ao longo da direção  $z$  não são necessariamente nulas, aplicando-

se a restrição  $E_{zz} = E_{zz}^p + E_{zz}^e = 0$ . Entre os resultados apresentados a seguir encontra-se a distribuição de deformações plásticas  $E_{zz}^p$ .

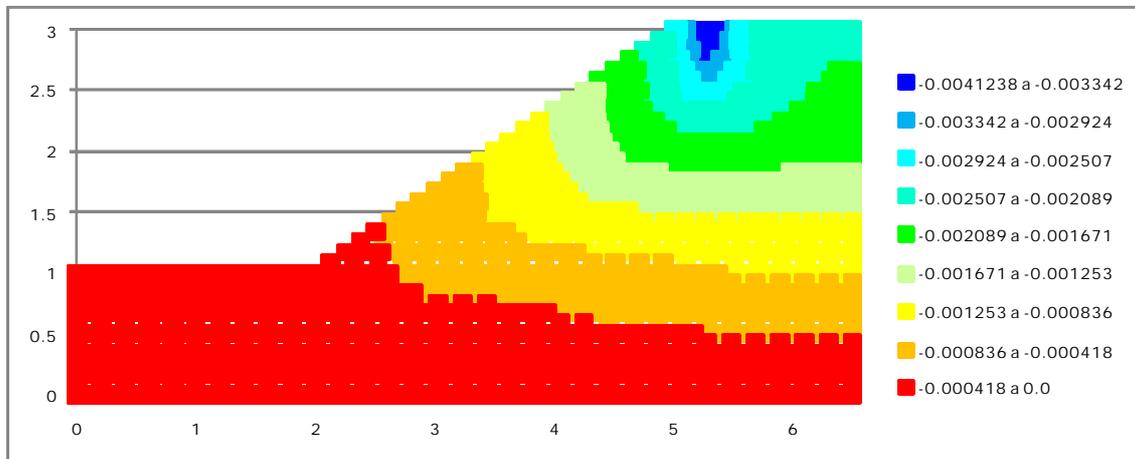
**FIGURA 13 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



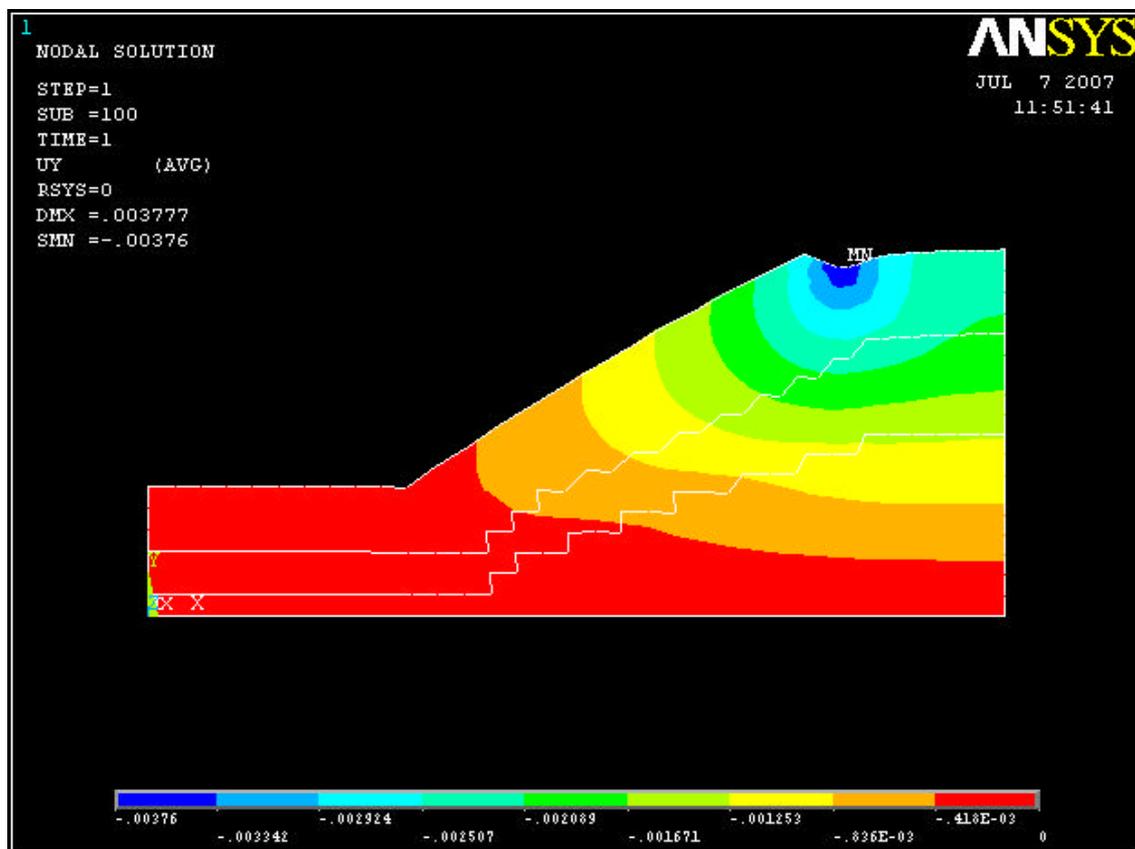
**FIGURA 14 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**



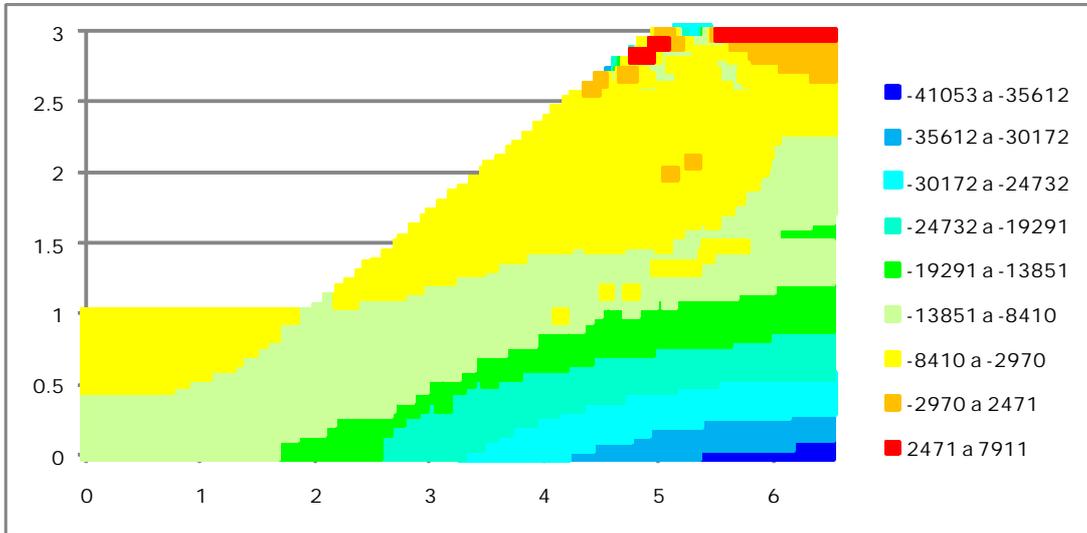
**FIGURA 15 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



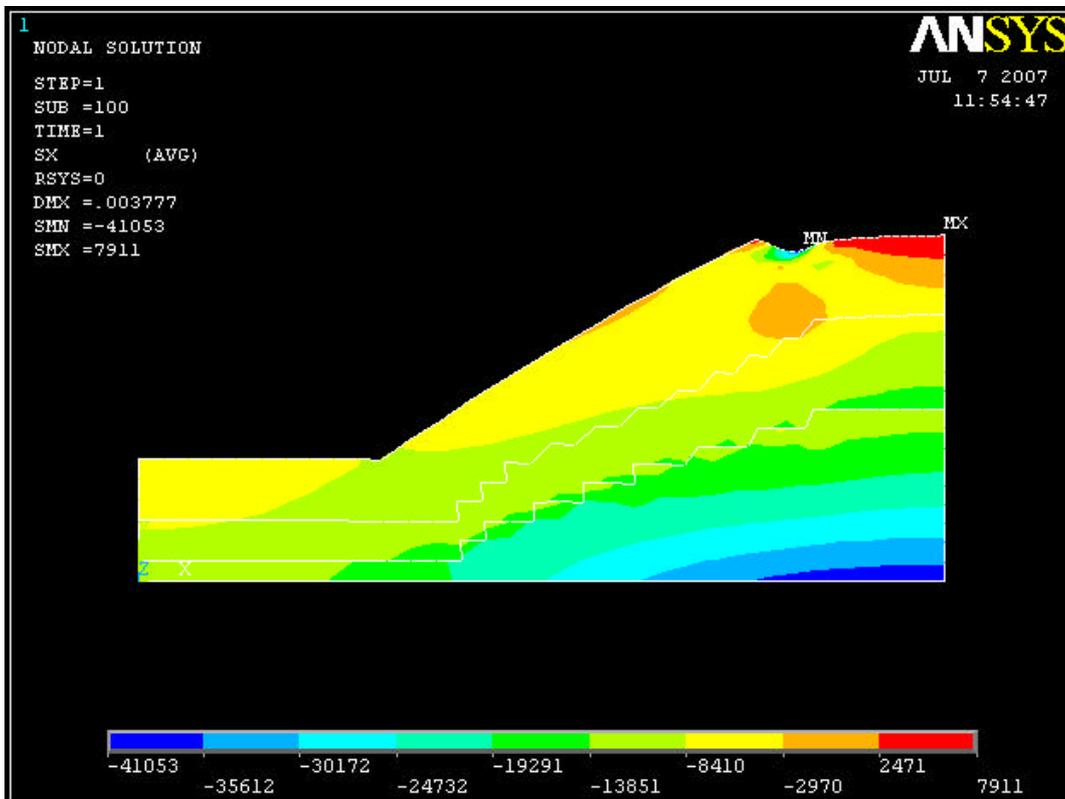
**FIGURA 16 DISTRIBUIÇÃO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**



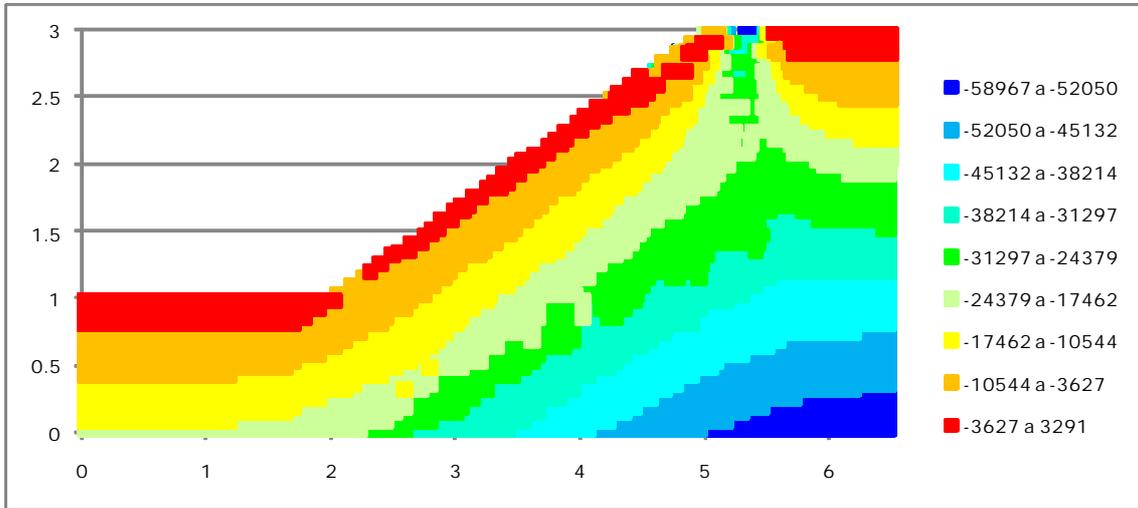
**FIGURA 17 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{xx}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



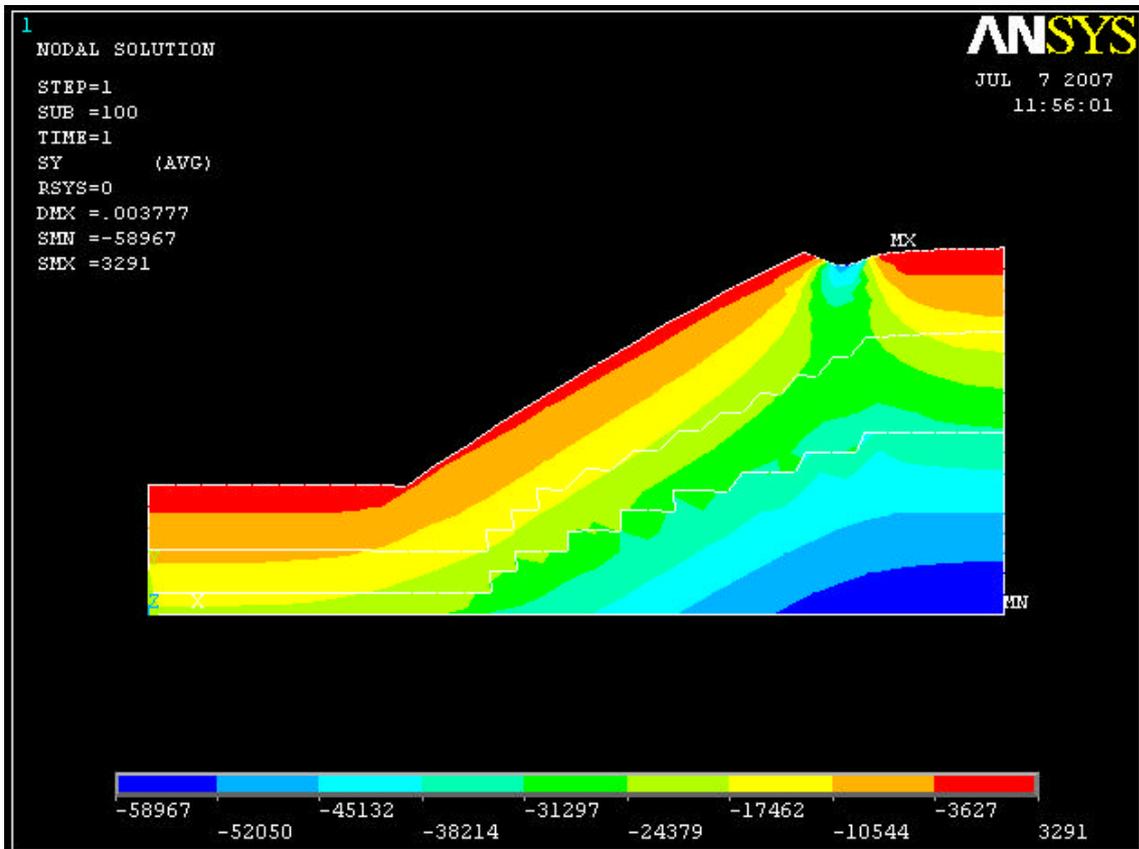
**FIGURA 18 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{xx}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**



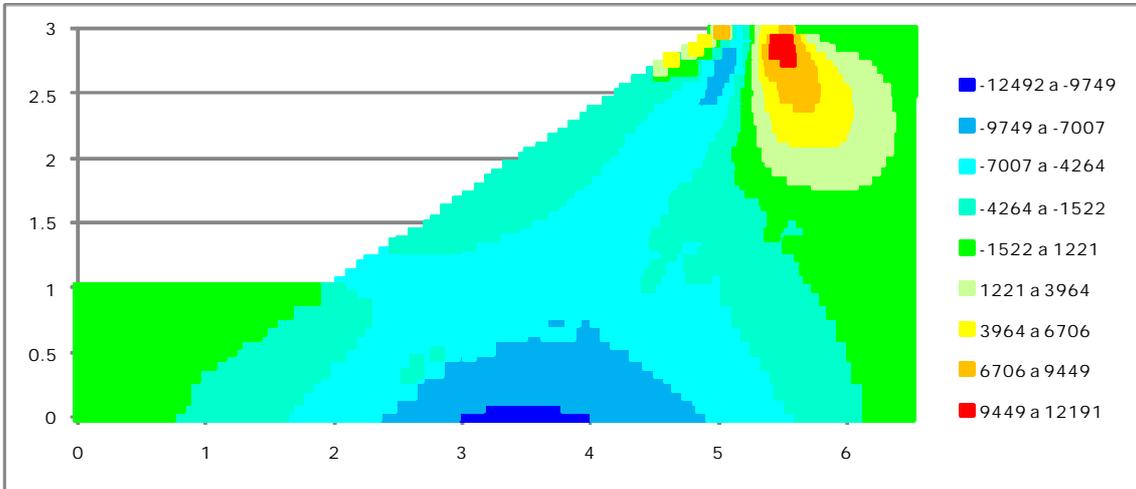
**FIGURA 19 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{yy}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



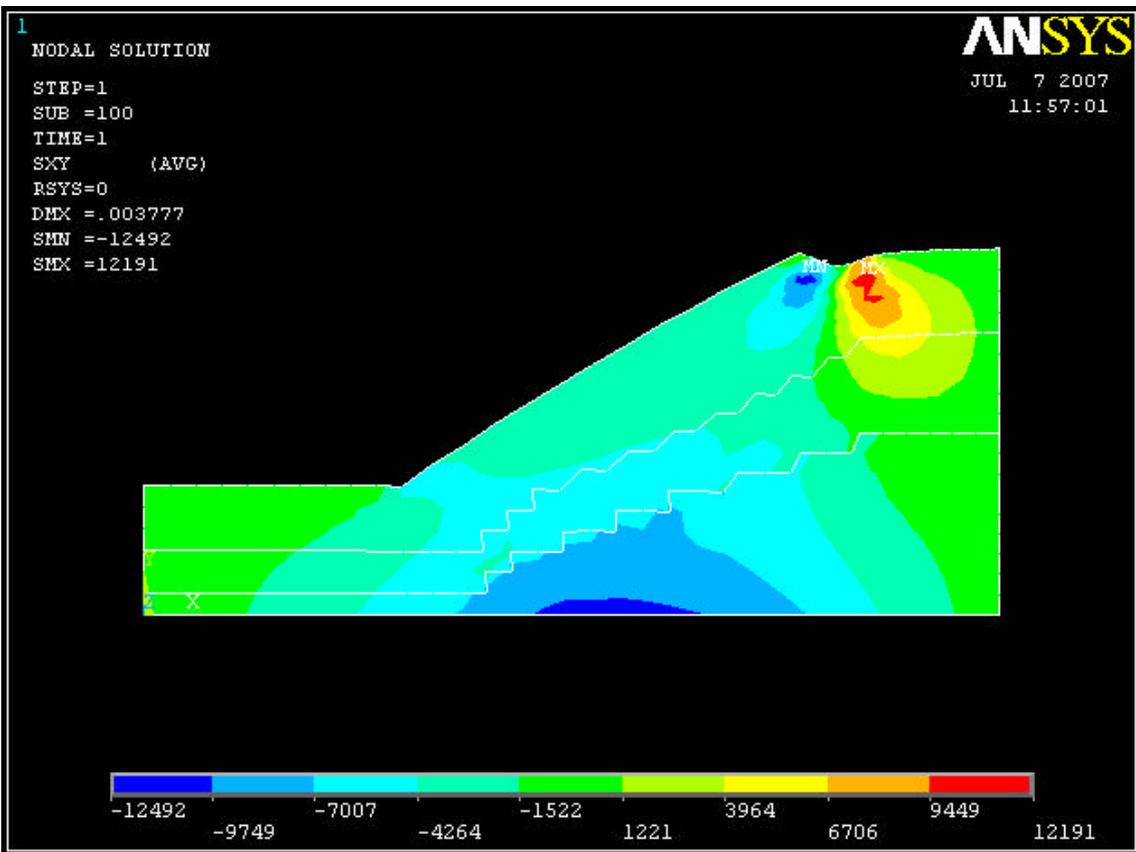
**FIGURA 20 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{yy}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**



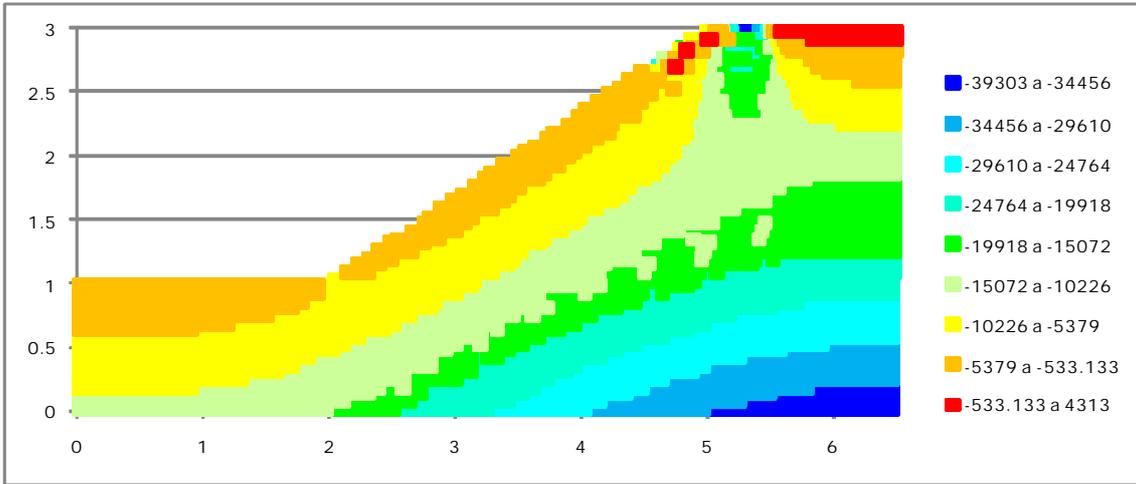
**FIGURA 21 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{XY}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



**FIGURA 22 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{XY}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**



**FIGURA 23 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{zz}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**



**FIGURA 24 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $T_{zz}$  DO TENSOR DE TENSÕES GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.**

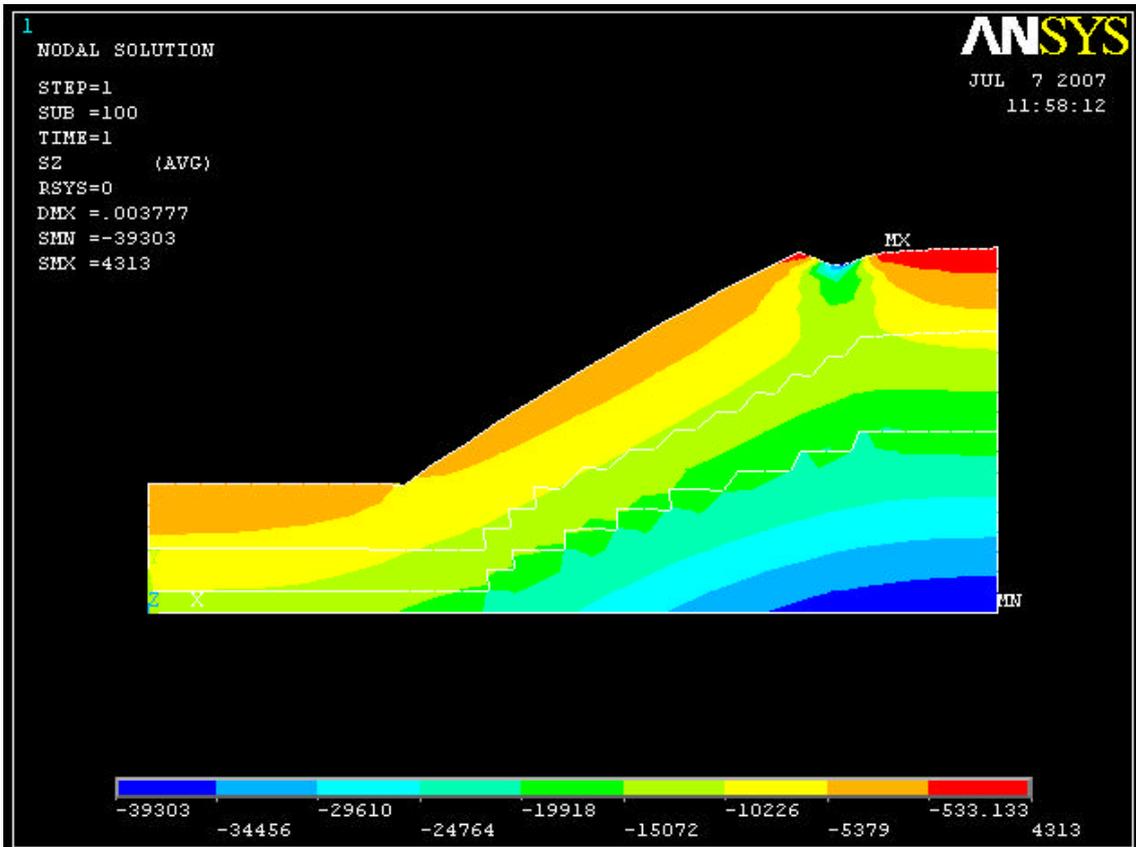


FIGURA 25 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{xx}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.

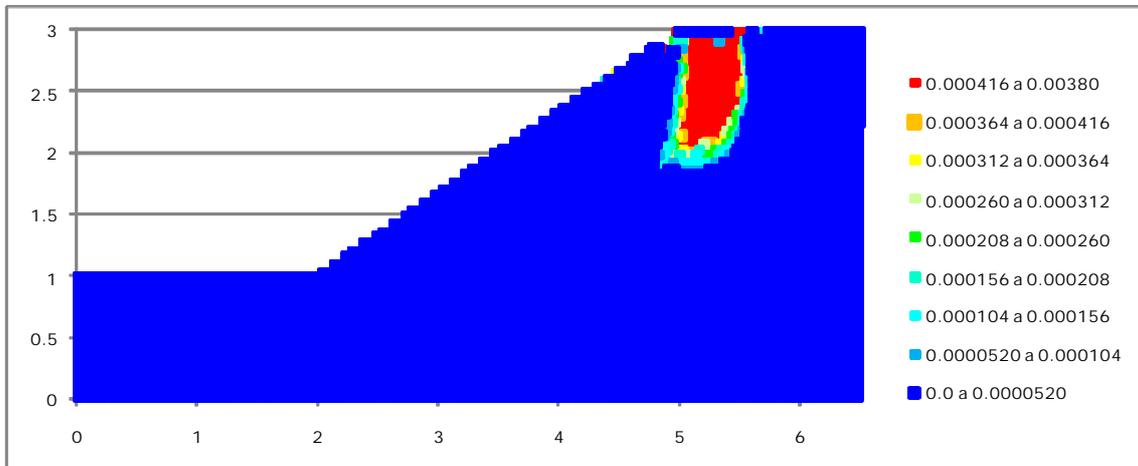


FIGURA 26 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{xx}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.

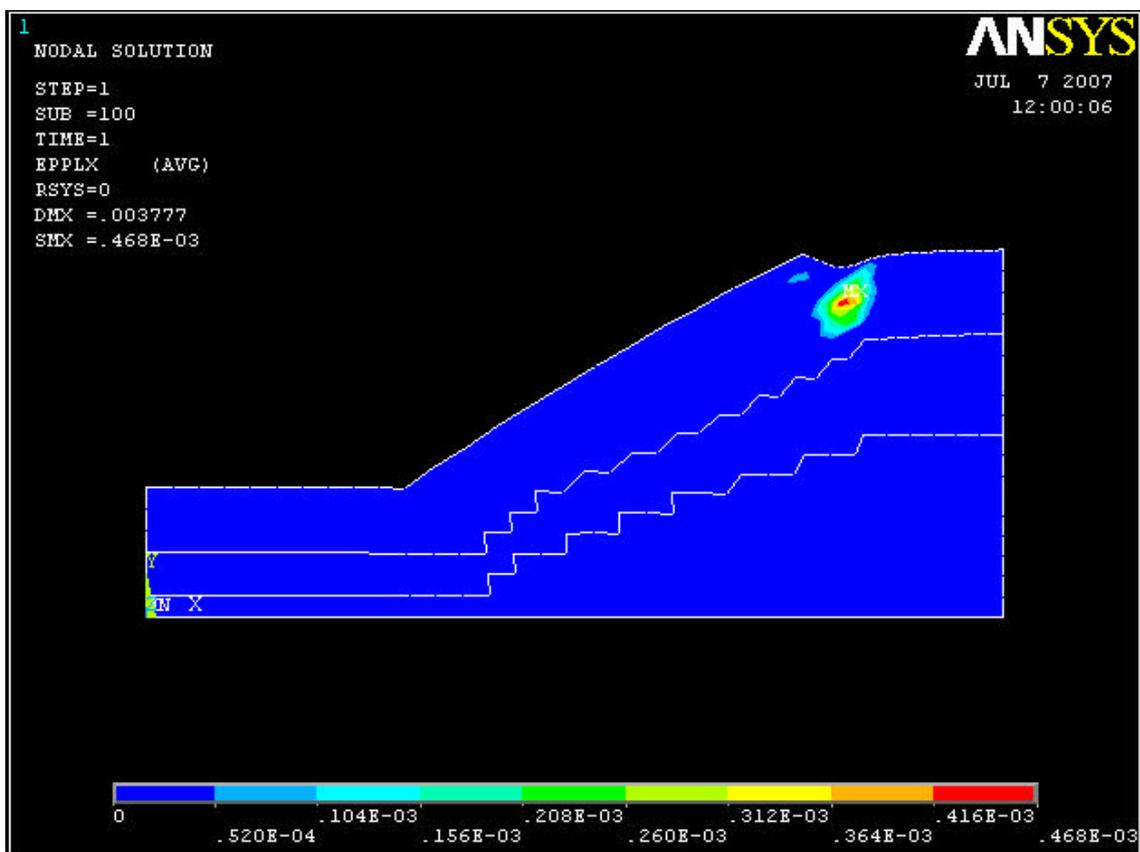


FIGURA 27 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{yy}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.

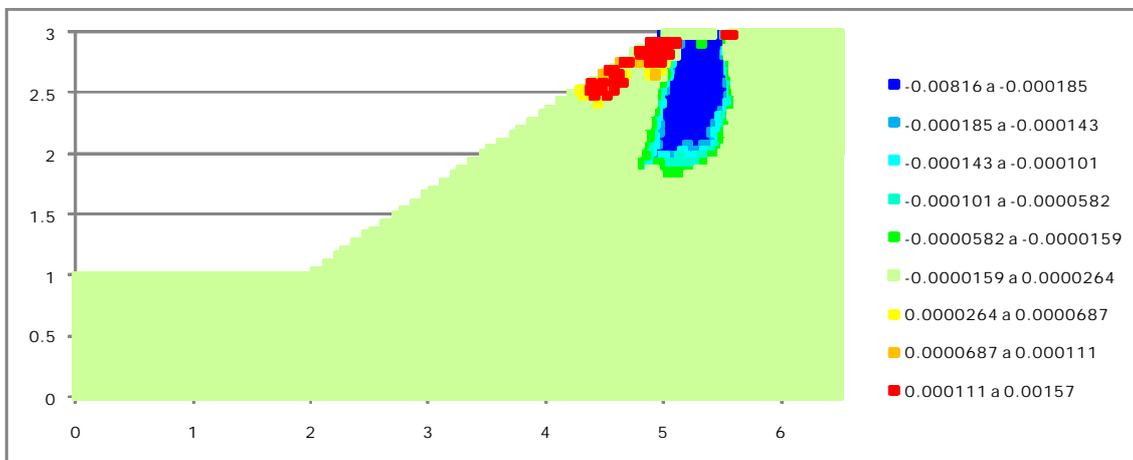


FIGURA 28 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{yy}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.

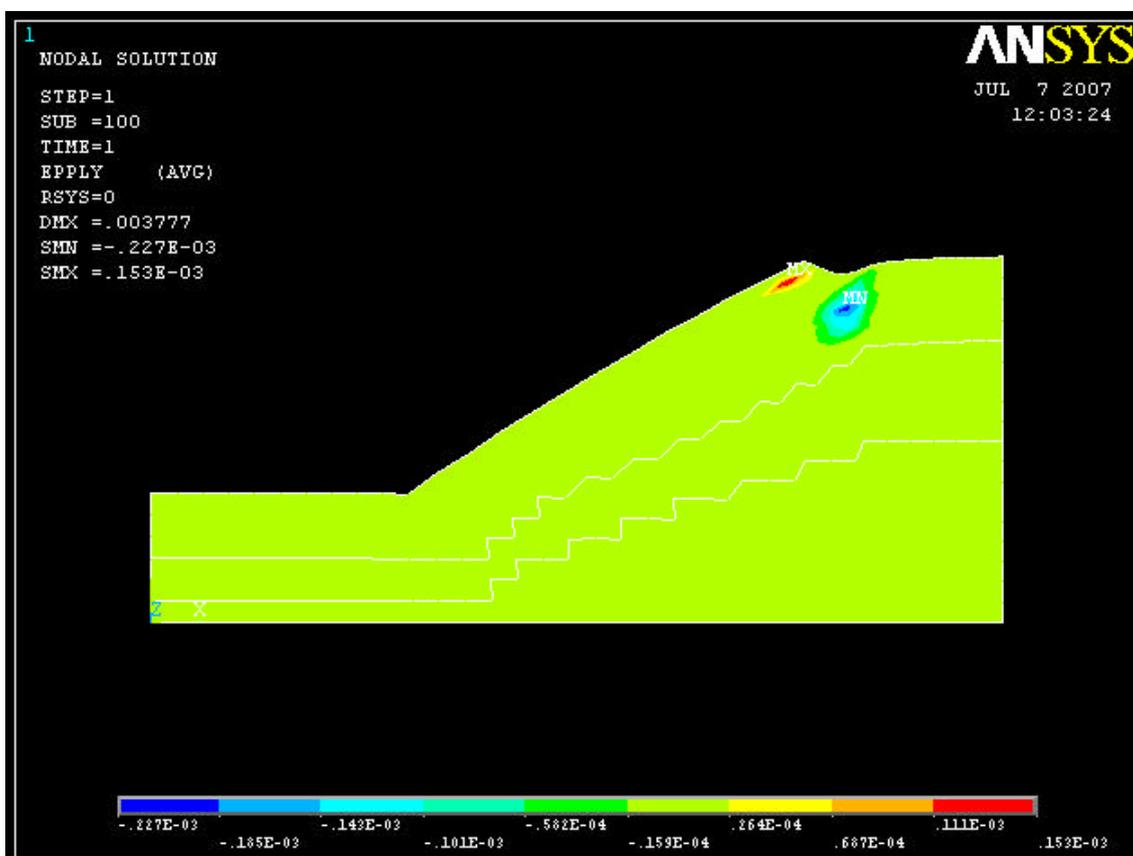


FIGURA 29 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{xy}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.

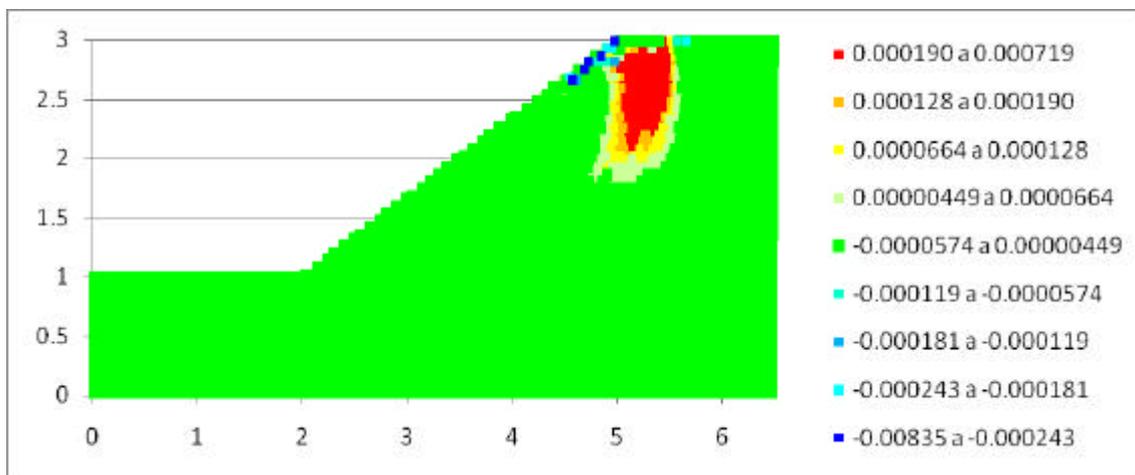


FIGURA 30 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{xy}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA ANSYS.



FIGURA 31 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{ZZ}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO PROGRAMA DESENVOLVIDO.

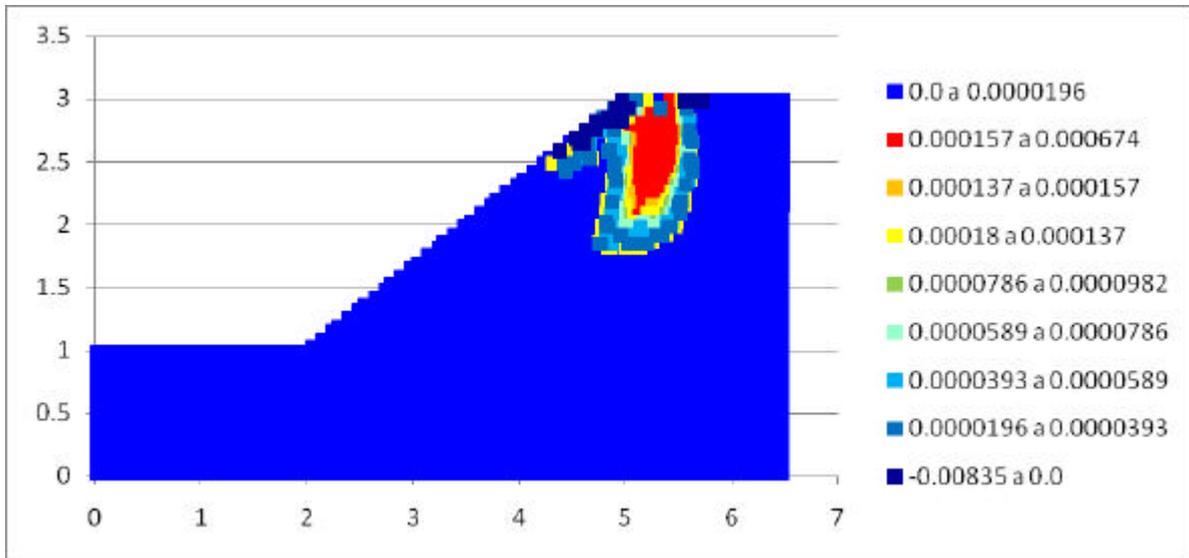
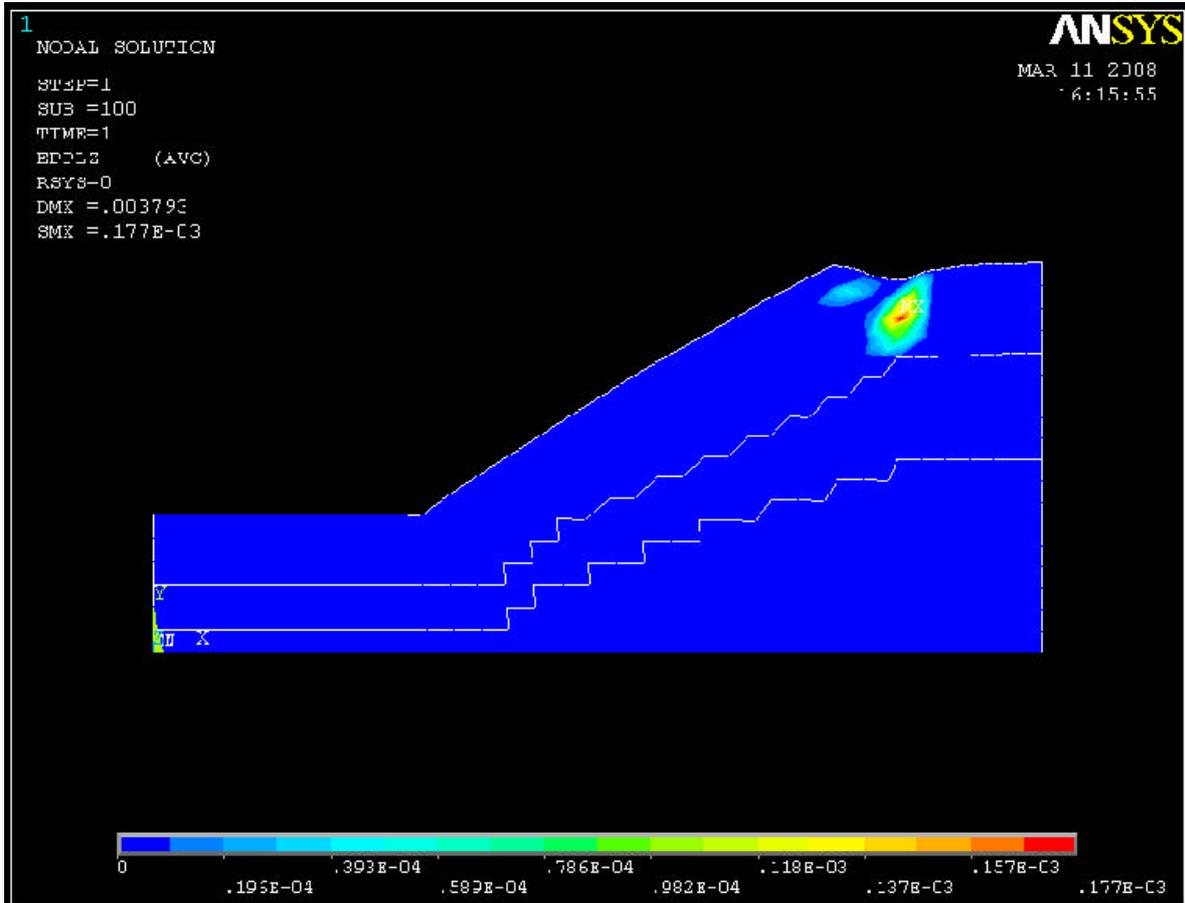


FIGURA 32 DISTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE  $E_{ZZ}^p$  DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS GERADA PELO ANSYS.



Observa-se nos gráficos apresentados que os resultados gerados pelo programa desenvolvido foram condizentes com aqueles gerados pelo programa ANSYS®. A diferença mais significativa entre as análises encontra-se no tamanho das regiões de concentração de deformações plástica mais intensas. Em ambas as análises, os maiores valores em módulo de todos os componentes do tensor de deformações plásticas ( $E_{xx}^p, E_{xy}^p, E_{yy}^p, E_{zz}^p$ ) encontram-se predominantemente na zona do talude constituída pelo Colúvio 1, mais especificamente, sob a região de aplicação do carregamento. No entanto, apesar de situadas aproximadamente na mesma zona do talude, essas regiões de plastificação são mais extensas para a análise realizada com o programa desenvolvido. Diferenças dessa natureza poderiam ser atribuídas ao fato de a região de tensões admissíveis ser definida no ANSYS® por uma função diferente daquela empregada no programa desenvolvido neste trabalho. O programa ANSYS® não adota a função quadrática apresentada no Capítulo 6, mas sim a função de escoamento de Drucker-Prager em sua forma linear. Apesar de representarem a mesma região, uma vez que a função quadrática adotada nesse trabalho é o traço da superfície de um cone no plano, as expressões obtidas para os incrementos de deformações plásticas são distintas, o que pode gerar diferenças nos módulos dos diferentes componentes das deformações plásticas.

## 7.2. Exemplo 2

Analizou-se um problema em estado plano de deformações, em que um maciço de solo é submetido a um carregamento vertical na região central de sua superfície. O comportamento constitutivo do solo foi simulado através do Modelo Cap apresentado anteriormente. O carregamento foi imposto em 200 incrementos e as propriedades materiais adotadas para o solo são apresentadas na Tabela 3.

**TABELA 3 PROPRIEDADES MATERIAIS DO SOLO DO EXEMPLO 2.**

Peso Específico (kN/m <sup>3</sup> )	Coesão (kPa)		Ângulo de atrito		Módulo de Elasticidade (kPa)	Coeficiente de Poisson	Parâmetros da superfície móvel			
	$c_1$	$c_2$	$i$	$2$			$R$	$W$	$Z$	$B$ (kPa) <sup>-1</sup>
19,5	0	41,685	33°	19,5°	27560	0.35	2	0,18	0	0,00725

A partir dos dados apresentados na Tabela 3 e das Equações 7.1 e 7.2, obtiveram-se os coeficientes  $\theta$  e  $k$  das funções de escoamento de Drucker-Prager que compõem a superfície fixa do Modelo Cap:

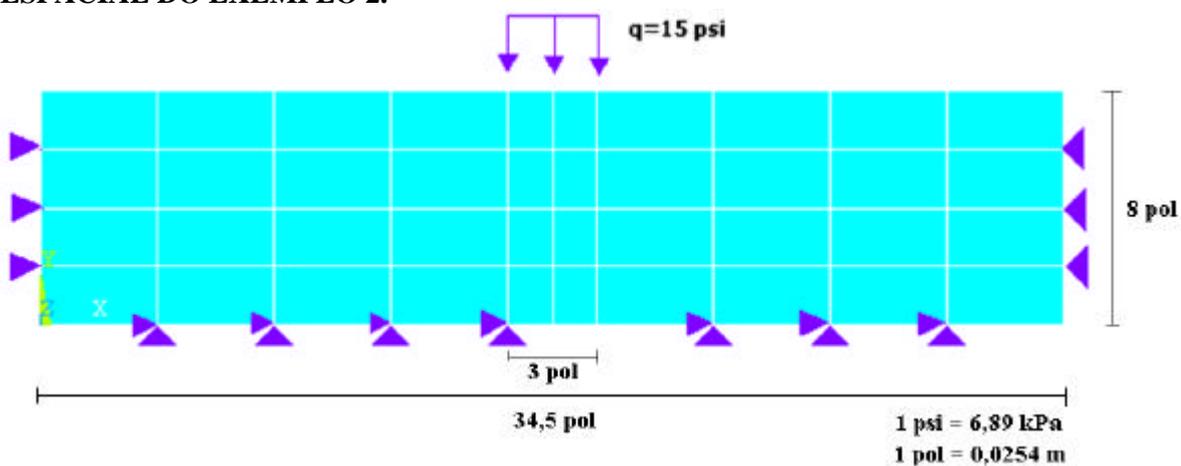
**TABELA 4 PARÂMETROS DA SUPERFÍCIE FIXA DO MODELO CAP.**

$q_1 =$	0,173186
$\theta_2 =$	0,11
$k_1 =$	0,0
$k_2 =$	38,584

No Apêndice C, apresenta-se uma descrição detalhada dos parâmetros relacionados à superfície móvel do Modelo Cap ( $R$ ,  $W$ ,  $Z$ ,  $B$ ).

As condições de contorno, a discretização espacial adotada e o carregamento aplicado são apresentados esquematicamente na Figura 33. O elemento utilizado no programa desenvolvido foi um elemento isoparamétrico de oito nós.

**FIGURA 33 CONDIÇÕES DE CONTORNO, CARREGAMENTO E DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DO EXEMPLO 2.**



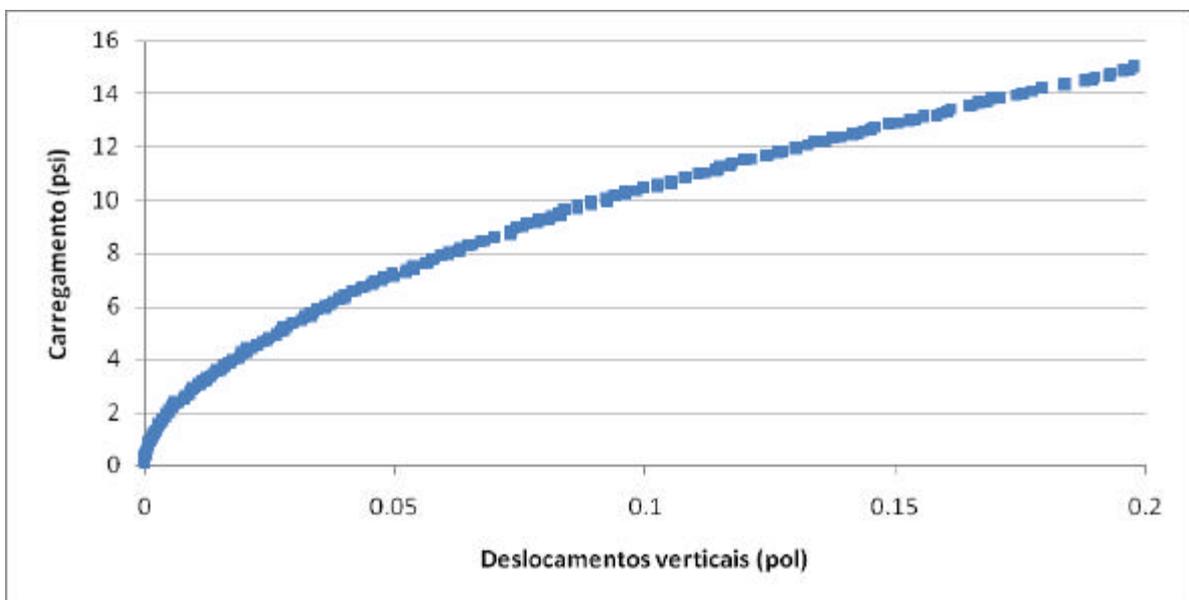
O problema em análise foi estudado por Desai e Siriwardane (1984). Os autores submeteram, em laboratório, um maciço de solo a um carregamento vertical distribuído em sua região central. O carregamento foi aplicado sobre uma fundação corrida rígida de 3 polegadas de comprimento assentada sobre a região central do maciço. No presente

trabalho, o carregamento foi aplicado diretamente sobre o solo, conforme ilustrado na Figura 33.

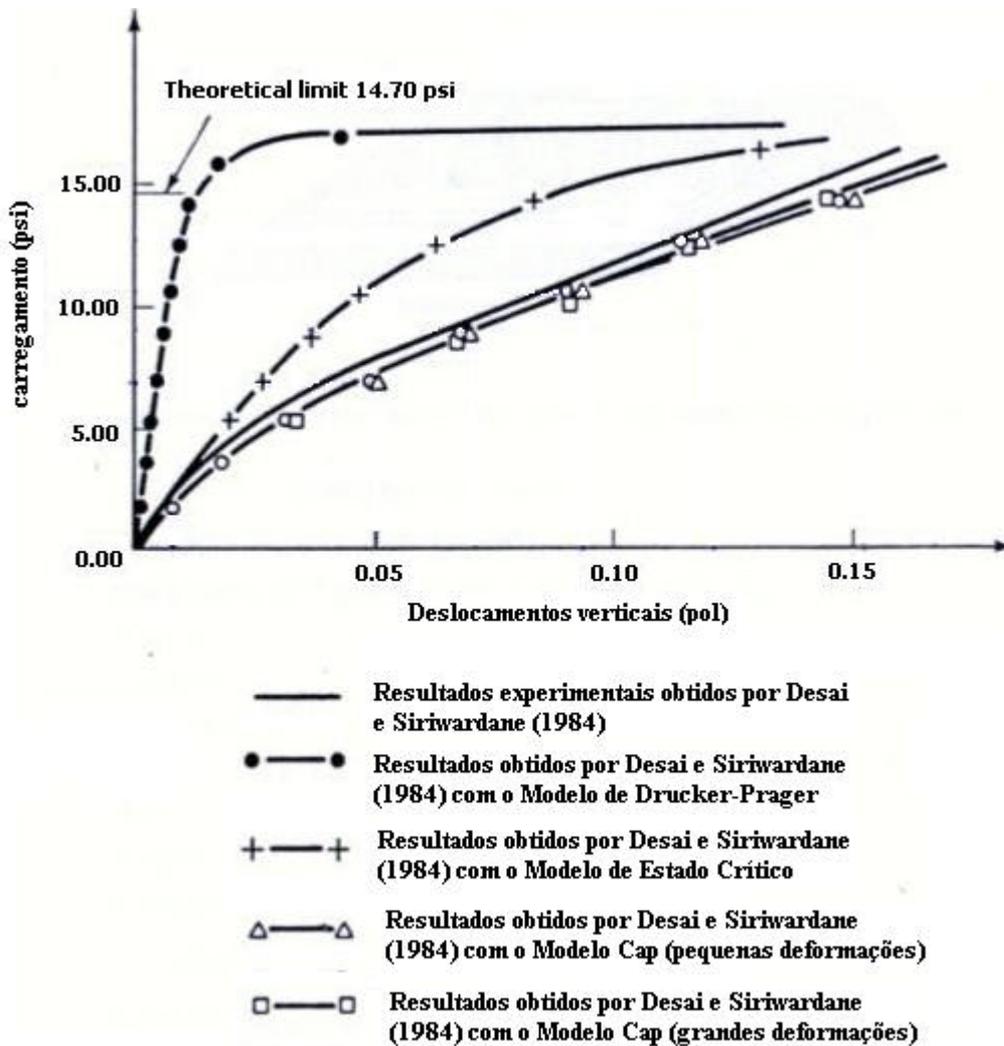
O solo empregado no ensaio laboratorial realizado por Desai e Siriwardane (1984) possui as características já apresentadas na Tabela 3. Além de estudar o exemplo em laboratório, os autores realizaram diversas simulações numéricas com diferentes modelos elastoplásticos a fim de identificar o modelo capaz de melhor simular o comportamento constitutivo do solo em análise. Entre os modelos estudados, os autores verificaram que o Modelo Cap gerava resultados mais condizentes com as observações experimentais.

Na Figura 34, apresenta-se o gráfico de deslocamentos verticais em função da história de carregamento gerado a partir dos resultados obtidos com o programa desenvolvido no presente trabalho. Esse gráfico refere-se aos deslocamentos verticais sofridos pelo nó situado na superfície do talude no ponto central de aplicação do carregamento distribuído. A Figura 35 apresenta os resultados numéricos e experimentais obtidos por Desai e Siriwardane (1984).

**FIGURA 34 DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO OBTIDOS A PARTIR DO PROGRAMA DESENVOLVIDO.**

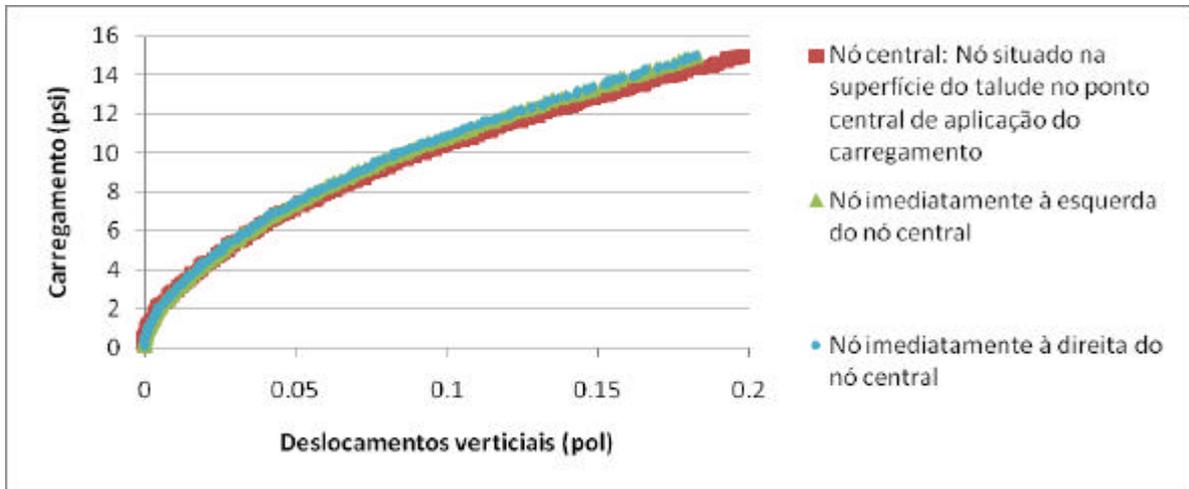


**FIGURA 35 DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM FUNÇÃO DO CARREGAMENTO OBTIDOS POR DESAI E SIRIWARDANE (1984).**



No trabalho desenvolvido por Desai e Siriwardane (1984), o carregamento foi aplicado sobre uma fundação rígida corrida, de forma que todos os nós da superfície do maciço situados sob essa fundação sofrem os mesmos deslocamentos em cada passo de carga. No presente trabalho, como o carregamento foi aplicado diretamente sobre o solo, observaram-se pequenas diferenças entre os deslocamentos sofridos pelos nós da superfície do maciço sob a região de aplicação do carregamento, conforme pode se observar no gráfico apresentado na Figura 36.

**FIGURA 36 COMPARAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS SOFRIDOS POR DIFERENTES NÓS DA SUPERFÍCIE DO MACIÇO DE SOLO NA REGIÃO DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.**



Observa-se que os resultados numéricos gerados pelo programa desenvolvido são condizentes com os resultados experimentais obtidos por Desai e Siriwardane (1984). Da mesma forma, a formulação proposta para o Modelo Cap no presente trabalho gerou resultados semelhantes àqueles obtidos numericamente por Desai e Siriwardane (1984).

É necessário salientar que o Modelo Cap adotado por Desai e Siriwardane (1984) possui algumas diferenças em relação àquele apresentado anteriormente no presente trabalho. Uma dessas diferenças encontra-se na superfície fixa adotada. Os autores suavizaram o ponto anguloso resultante da intersecção da superfície de Drucker-Prager I com a superfície de Drucker-Prager II, utilizando a função apresentada na Equação (7.3) para descrever a superfície fixa suavizada:

$$f = s - k - qT_m - ge^{-bt_m} \quad (7.3)$$

A formulação envolvendo técnicas da análise convexa permite determinar as deformações plásticas em pontos singulares da região admissível, tornando desnecessário adotar uma superfície de escoamento diferenciável. Ao eliminar a necessidade de adotar uma superfície de escoamento suave, a formulação adotada evitou o surgimento de parâmetros adicionais, como os parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  presentes na superfície de escoamento fixa suavizada adotada por Desai e Siriwardane (1984). O ângulo de atrito e a coesão foram as únicas propriedades do solo empregadas na formulação proposta nesse trabalho.

Por questões de simplicidade, adotou-se uma função de escoamento móvel parabólica, conforme proposto por Ncheuguim (2006). Desai e Siriwardane (1984) adotaram uma função de escoamento móvel elíptica. Segundo Ncheuguim (2006), a principal dificuldade envolvida na adoção de uma função elíptica consiste em determinar o potencial de dissipação. No entanto, a adoção de uma superfície móvel parabólica não garante que a interseção entre a superfície fixa e a superfície móvel ocorra em pontos nos quais a tangente à superfície móvel seja paralela ao eixo de tensões hidrostáticas. Como resultado, a superfície parabólica não assegura que, com plasticidade associada, o vetor incremento de deformações plásticas na interseção com a superfície fixa seja paralelo ao eixo  $s$ . Isto é, a adoção de uma superfície móvel parabólica não garante que o material atinja volume constante quando a superfície fixa é alcançada. Dessa forma, sugere-se que na continuidade do presente trabalho a superfície móvel parabólica seja substituída por uma superfície móvel elíptica a fim de garantir que o material atinja volume constante quando alcançar a superfície fixa.

## 8. CONCLUSÕES

A partir da pesquisa bibliográfica desenvolvida, da formulação apresentada para a equação constitutiva e para o problema de equilíbrio, dos algoritmos implementados e dos resultados obtidos, pode-se concluir que:

01. A aplicação da teoria da termodinâmica com variáveis internas à modelagem do comportamento mecânico dos solos permitiu definir a resposta constitutiva desses materiais a partir de dois potenciais termodinâmicos. Os potenciais adotados permitiram obter as leis de estado, que relacionam variáveis de estado com variáveis associadas, e a lei de fluxo que governa o problema na fase plástica.

02. A aplicação de conceitos da análise convexa como, por exemplo, os conceitos de funções convexas conjugadas e de função suporte de uma região convexa, permitiu obter a forma dos potenciais termodinâmicos para modelos constitutivos clássicos de solos (Drucker-Prager e Modelo Cap) a partir de métodos simples como, por exemplo, o método gráfico utilizado no Capítulo 4. Além disso, técnicas da análise convexa conduziram a uma lei de fluxo que estabelece que as taxas de deformações plásticas e de variáveis internas pertencem ao subdiferencial da indicatriz da região de tensões e de forças termodinâmicas admissíveis. Como consequência, foi possível determinar as deformações plásticas em pontos singulares da região admissível sem o uso de ferramentas especiais.

03. A formulação da equação constitutiva a partir de potenciais termodinâmicos e de técnicas da análise convexa permitiu obter duas formas equivalentes da lei de fluxo, ambas baseadas no conceito de subdiferencial. Conseqüentemente, o problema de valor de contorno foi escrito sob duas formas variacionais distintas, dependendo da lei de fluxo adotada. As formulações variacionais em taxas do problema de valor de contorno foram relacionadas a princípios de mínimo úteis para discutir a existência e unicidade da solução. Os princípios de mínimo obtidos foram apresentados sob a forma incremental, tendo se reconhecido na forma obtida um problema de otimização, cuja solução pôde ser obtida através da aplicação do Método de Quase-Newton.

04. O Método de Quase-Newton permitiu resolver o problema de equilíbrio sem o uso de uma matriz tangente. A utilização de uma aproximação da matriz inversa do Hessiano, atualizada segundo o método BFGS, eliminou a necessidade de determinar as derivadas segundas da função objetivo. Sugere-se, para a continuidade do presente trabalho,

a implementação da forma vetorial do método BFGS para que a cada iteração proceda-se o armazenamento de dois vetores no lugar da matriz Hessiana. Esse procedimento mostra-se vantajoso para problemas de grande dimensão.

05. A teoria adotada permitiu reescrever o problema constitutivo sob a forma de um problema de programação matemática. Para o Modelo Cap, o problema constitutivo foi reescrito como um problema de complementaridade não-linear. O problema foi aproximado por uma seqüência de subproblemas de complementaridade linear, tendo se aplicado o Método de Newton associado ao Método de Lemke para a sua solução. O Método de Lemke foi adotado para resolver os subproblemas de complementaridade linear por fornecer a solução exata para cada subproblema e por ser eficiente para análises envolvendo matrizes de pequena dimensão. No presente trabalho, as regiões de tensões e forças termodinâmicas admissíveis foram definidas por, no máximo, quatro modos de escoamento, fazendo com que as matrizes envolvidas no Método de Lemke possuíssem pequena dimensão, viabilizando a sua aplicação. Estratégias de solução baseadas em algoritmos dessa natureza não são comumente empregadas na modelagem do comportamento de solos, tendo se obtido, no presente trabalho, bons resultados a partir da sua aplicação.

06. A aplicação do Método dos Elementos Finitos à discretização espacial do problema elastoplástico permitiu acompanhar a evolução das tensões e deformações ao longo da história de carregamento, isto é, permitiu obter estágios de tensões e deformações intermediários, além das linhas de ruptura tradicionalmente fornecidas por outros métodos. Informações dessa natureza têm se mostrado importantes, uma vez que acidentes envolvendo massas de solo ocorrem, por vezes, sem que tenha ocorrido a ruptura do maciço de solo. Como exemplo, pode-se citar a ruptura do oleoduto Araucária-Paranaguá (OLAPA) no litoral paranaense no ano de 2001. O oleoduto rompeu sem que a encosta houvesse rompido.

07. A simulação realizada com o programa desenvolvido, no Exemplo 1 do Capítulo 7, gerou resultados condizentes com àqueles gerados pelo programa comercial ANSYS® versão 8.0. As distribuições de tensões, deformações e deslocamentos obtidas nas análises realizadas com os dois programas apresentaram o mesmo padrão. Em ambas as análises, os maiores valores em módulo de todos os componentes do tensor de deformações plásticas

$(E_{xx}^p, E_{xy}^p, E_{yy}^p, E_{zz}^p)$  concentraram-se predominantemente na zona do talude constituída pelo Colúvio 1, mais especificamente, sob a região de aplicação do carregamento.

A simulação realizada com o programa desenvolvido, no Exemplo 2 do Capítulo 7, gerou resultados condizentes com os resultados numéricos e experimentais apresentados por Desai e Siriwardane (1984). Conforme verificado anteriormente pelos autores, o Modelo Cap mostrou-se adequado à modelagem constitutiva do comportamento do solo em estudo, tendo gerado resultados condizentes com os dados experimentais coletados pelos autores. A formulação adotada para a equação constitutiva permite determinar as deformações plásticas em pontos singulares da região admissível, tornando desnecessário adotar uma superfície de escoamento diferenciável. Ao eliminar a necessidade de adotar uma superfície de escoamento suave, a formulação adotada evitou o surgimento de parâmetros adicionais, como os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  presentes na função de escoamento suavizada adotada por Desai e Siriwardane (1984). O ângulo de atrito e a coesão foram as únicas propriedades do solo empregadas na formulação proposta nesse trabalho. Por fim, a substituição da superfície móvel elíptica adotada por Desai e Siriwardane (1984) por uma superfície móvel parabólica não gerou diferença significativa entre os deslocamentos verticais gerados pelo programa desenvolvido e pelo programa utilizado pelos autores. A opção pela superfície móvel parabólica deu-se em função da simplicidade na obtenção do potencial de dissipação do modelo. No entanto, sugere-se que na continuidade do presente trabalho a superfície móvel parabólica seja substituída por uma superfície móvel elíptica a fim de garantir que não ocorra variação de volume do solo quando a superfície fixa do Modelo Cap for atingida.

Os modelos constitutivos apresentados nesse trabalho seguem leis de fluxo associadas. A continuidade do presente trabalho poderia se dar com o desenvolvimento de uma formulação constitutiva para modelos não-associados baseada na teoria da termodinâmica com variáveis internas associada a técnicas da análise convexa. Trabalhos já vêm sendo desenvolvidos nessa linha para os geomateriais. Diferentes autores têm adotado funções bipotenciais para descrever modelos dessa natureza. Bipotenciais são funções de duas variáveis, convexas em relação a uma de suas variáveis quando a outra é mantida constante e vice-versa. Poucos trabalhos desenvolvidos nessa linha de pesquisa, até o momento, envolvem a utilização de algoritmos de programação matemática. Dessa forma, a

apresentação de uma formulação baseada em bipotenciais para diferentes modelos constitutivos de solos, bem como a implementação de algoritmos de programação matemática para a solução de problemas elasto-plásticos não associados contribuiria significativamente para o conhecimento e simulação de solos submetidos a diferentes histórias de carregamento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAI, T.J. **Applied Numerical Methods for Engineers**. USA: John Wiley & Sons, Inc. 1994.

BODOVILLÉ, G. Sur léndommagement et le matériaux standard implicates. **C. R. Acad. Sci. Paris**. v. 327, p. 715 – 720, 1999.

BODOVILLÉ, G. On Generalised and Implicit Normality Hypotheses. **Meccanica**. v. 36, p. 273 – 290, 2001.

BULIGA, M.; DE SACXÉ, G.; BALLÉE, C. Existence and Construction of bipotentials for graphs of multivalued laws (2007).

COLLINS, I. F.; HOULSBY, G. T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. **Proc. R. Soc. Lond.** Grã-Bretanha, v. 453, p. 1975-2001, 1997.

COLLINS, I.F. A systematic procedure for constructing critical state models in three dimensions. **International Journal of Solids and Structures**. v. 40, p. 4379 – 4397, 2003.

COLLINS, I.F. Elastic/plastic models for soils and sands. **International Journal of Mechanical Sciences**. v. 47, p. 493 – 508, 2005.

COSTA, C.N. **Introdução à Geotecnia**. Lisboa, 2006. Material didático da Disciplina de Fundamentos da Geotecnia do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

DESAI, C.S.; SIRIWARDANE, H.J. **Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials**. New Jersey : Prentice Hall ,1984.

EINAV, I.; HOULSBY, G.T.; NGUYEN, G.D. Coupled Damage and Plasticity Models Derived from Energy and Dissipation Potentials. **Internal Journal of Solids and Structures**. v.44, p.2487 – 2508, 2007.

EVE, R.A. **Theoretical and Numerical Aspects of Problems in Finite-Strain Plasticity**. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Cape Town, 1992.

FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E. Principios Variacionales y El Metodo de los Elementos Finitos en la Teoria de Placas y Cascaras. In: **Curso de Mecânica Teórica e Aplicada – teoria das cascas e suas aplicações na engenharia**, Rio de Janeiro: LCC/CNPq Laboratório de Computação Científica, 1983. p. 3 – 116.

FEIJÓO, R.; GOUVEA, J. El Sistema SDP – MEF. **I Congresso Ibero Americano de Métodos Computacionales em Ingeniería**, Madrid, Espanha, 1985.

FEIJÓO, R. A.; ZOUAIN, N. Formulations in Rates and Increments for Elastic-Plastic Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 2031 – 2048, 1988.

FREITAS, G.S. **Modelagem da Dinâmica do Talude Usando o Método dos Elementos Finitos**. Curitiba, 2005. Trabalho de Graduação (Engenharia Ambiental) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

HAN, W.; REDDY, B.D. **Plasticity - Mathematical Theory and Numerical Analysis**. USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1999.

HECKE, M.B. **Potenciais Generalizados e Otimização na Análise Elasto-Plástica**. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1991.

HJIAJ, M.; FORTIN, J.; DE SACXÉ, G. A complete stress update algorithm for the non-associated Drucker-Prager modeling including treatment of the apex. **International Journal of Engineering Science**. v. 41, p. 1109 – 1140, 2003.

HOULSBY, G.T. **A Study of Plasticity Theories and Their Applicability to Soils**. Tese de Pós-Doutorado - St John's College, Universidade de Cambridge, 1981.

HOULSBY, G.T. A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermomechanics. **Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM)**. Conference on Deformation and Flow of Granular Materials, Delft, Holland, p 109-118, 1982.

HOULSBY, G.T. Derivation of Incremental Stress-Strain Response for Plasticity Models Based on Thermodynamic Functions, **Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM)**. Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials, Cambridge, p. 161-172, 1996.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials. **International Journal of Plasticity**. v. 16, p. 1017 – 1047, 2000.

HOULSBY, G.T. Some Mathematics for the Constitutive Modelling of Soils. **Proc. Conference on Mathematical Methods in Geomechanics**. Horton, Greece, p. 35-53, 2002.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. Rate-dependent plasticity models derived from potentials functions. **Journal of Reology**. v. 46, n. 1, p. 113 – 126, 2002.

IBANEZ, R.P. **Modelagem constitutiva para solos com ênfase em solos não saturados**. Rio de Janeiro, 2003. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) - Área de Concentração: geotecnia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

KANZOW, C.; PIEPER, H. Jacobian smoothing methods for general nonlinear complementarity problems. **Technical report, Institute of Applied Mathematics, University of Hamburg**. Alemanha, 1997.

KIM, M.K.; LADE, P.V. Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials I. Plastic Potential Function. **Computers and Geotechnics**. Grã-Bretanha, v. 5, p.307-324, 1998.

LEMARÉCHAL, C.; HIRIART - URRUTY, J.B. **Convex Analysis and Minimization Algorithms I**. USA: Springer-Verlag, 1991.

NCHEUGUIM, E. K. **Theoretical Aspects of Classical and Drucker-Prager Capmodels of Elastoplasticity**. AIMS Essay. Department of Mathematics and Applied Mathematics - University of Cape Town, Cape Town, 2006.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical Optimization**. New York: Springer-Verlag, 1999.

ODEN, J.T.; CAREY, G.F.; BECKER, E.B. **Finite Elements – An Introduction**. EUA: Printice Hall International, 1981, v.1.

PANG, J. Inexact Newton Methods for the Nonlinear Complementarity Problem. **Mathematical Programming**. Holanda, v. 36, p. 54 – 71, 1986.

PANIK, M. **Linear Programming: Mathematics, Theory and Algorithms**. Holanda: Kluwer Academics Publisher, 1996.

PEREIRA, N. Z. **Plasticidade - Notas de Aula** - PUC-RJ/COPPE/UFRJ, 1984.

PINTO, C.S. **Curso Básico de Mecânica dos Solos em 16 aulas**. 2ª ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2002.

PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing**. 2ª edição. Cambridge University Press, 1992.

PUZRIN, A.M.; HOUSLBY, G.T. A thermomechanical framework for rate-independent dissipative materials with internal functions. **International Journal of Plasticity**. v. 17, p. 1147 – 1165, 2001.

RAJAGOPAL, K.R.; SRINIVASA, A.R. Mechanics of the inelastic behaviour of materials – Part 1, Theoretical Underpinnings. **International Journal of Plasticity**. Grã-Bretanha, v. 14, n. 10-11, p. 945-967, 1998.

REDDY, B. D. **Functional Analysis and Boundary-value Problems: an Introductory Treatment**. Inglaterra: Longman Scientific & Technical, 1986.

REDDY, B.D.; MARTIN, J. B. Algorithms for the solution of internal variable problems in plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 93, p. 253 – 273, 1991.

ROCKAFELLAR, R.T. **Convex Analysis**. USA: Princenton University Press, 1970.

SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. **Computacional Inelasticity**. New York: Springer-Verlag New York, Inc, 1998.

TORRES, G.; QUINTANA, V. A Jacobian smoothing nonlinear complementarity method for solving nonlinear optimal power flows. **14<sup>th</sup> PSCC, Sevilla, 24-28 June 2002**.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method – Volume II: Solid Mechanics**. 5<sup>a</sup> edição, Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000.

ZOUAIN, N; PONTES FILHO, I.; BORGES, L.; DA COSTA, L. M. Plastic collapse in non-associated hardening materials with application to Cal-Clay. **International Journal of Solids and Structures**, 2006, doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.11.026.

## APÊNDICE A. DEDUÇÃO DA FORMA LOCAL DA DESIGUALDADE DE DISSIPACÃO

Considera-se, inicialmente, a Primeira Lei da Termodinâmica apresentada na Equação (A.1).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{r} |\vec{u}|^2 \right) dV = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} dV + \int_{\Gamma} \vec{s} \cdot \vec{u} dV + \int_{\Omega} r dV - \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{A.1})$$

$e$ : energia interna por unidade de volume;

$\vec{u}$ : vetor velocidade;

$\Gamma = \partial\Omega$ ;

$\vec{b}$ : força de corpo;

$\vec{s}$ : força de superfície;

$r$ : fonte interna de calor por unidade de volume;

$\vec{q}$ : fluxo de calor por unidade de área;

$\vec{n}$ : vetor normal a uma superfície.

O segundo termo à direita do sinal de igualdade da Equação (A.1) pode ser reescrito sob a forma apresentada na Equação (A.2), substituindo-se o vetor correspondente às forças de superfície, ( $\vec{s}$ ), pelo Tensor de Tensões aplicado ao vetor normal à superfície,  $\mathbf{s} \vec{n}$ ,

$$\int_{\Gamma} \vec{s} \cdot \vec{u} ds = \int_{\Gamma} \mathbf{s} \vec{n} \cdot \vec{u} ds \quad (\text{A.2})$$

Mas:

$$\mathbf{s} \vec{n} \cdot \vec{u} = \mathbf{s} (n_i \vec{e}_i) \cdot \vec{u} = n_i \mathbf{s} \vec{e}_i \cdot \vec{u} = n_i \dot{u}_k \mathbf{s}_{ji} \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = n_i \dot{u}_k \mathbf{s}_{ji} \mathbf{d}_{ik} = \mathbf{s}_{ji} n_i \dot{u}_j \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{s} \vec{u} \cdot \vec{n} = \mathbf{s} (\dot{u}_j \vec{e}_j) \cdot \vec{n} = \dot{u}_j \mathbf{s} \vec{e}_j \cdot \vec{n} = \dot{u}_j n_k \mathbf{s}_{ij} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \dot{u}_j n_k \mathbf{s}_{ij} \mathbf{d}_{ik} = \mathbf{s}_{ij} n_i \dot{u}_j \quad (\text{A.4})$$

Considerando a simetria do tensor de tensões, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{s} \vec{n} \cdot \vec{u} ds = \int_{\Gamma} \mathbf{s} \vec{u} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.5})$$

Aplicando o Teorema da Divergência à Equação (A.5), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{s} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{s} \vec{u}) dV \quad (\text{A.6})$$

Mas:

$$\operatorname{div}(\mathbf{s} \vec{u}) = \frac{\partial(\mathbf{s}_{ji} \vec{u}_i)}{\partial x_j} = \mathbf{s}_{ji} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \dot{u}_i \frac{\partial \mathbf{s}_{ji}}{\partial x_j} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \vec{u} = \mathbf{s}_{ij} (\nabla \vec{u})_{ij} = \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{s} \cdot \vec{u} = \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i \cdot \dot{u}_k \vec{e}_k = \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j} \dot{u}_k \mathbf{d}_{ik} = \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j} \dot{u}_i \quad (\text{A.9})$$

Considerando a simetria do tensor de tensões, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{s} \vec{u}) dV = \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \nabla \vec{u} dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{s} \cdot \vec{u} dV \quad (\text{A.10})$$

Finalmente:

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s} \cdot \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] = \mathbf{s}_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mathbf{s} \cdot \nabla \vec{u} \quad (\text{A.11})$$

De forma que:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{s} \vec{u}) dV = \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{s} \cdot \vec{u} dV \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a Equação (A.12) na Equação (A.1), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{r} |\vec{u}|^2 \right) dV = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{s} + \vec{b}) \cdot \vec{u} dV + \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} dV + \int_{\Omega} r dV - \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{\Omega} \dot{e} dV + \int_{\Omega} \mathbf{r} \ddot{u} \cdot \vec{u} dV = \int_{\Omega} \mathbf{r} \ddot{u} \cdot \vec{u} dV + \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} dV + \int_{\Omega} r dV - \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.14})$$

Aplicando novamente o Teorema de Gauss, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\dot{e} - \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} - r + \operatorname{div} \vec{q}) dV = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{e} = \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} + r - \operatorname{div} \vec{q} \quad (\text{A.16})$$

Passa-se, agora, à Segunda Lei da Termodinâmica, apresentada na Equação (A.17).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} h dV \geq \int_{\Omega} \mathbf{q}^{-1} r dV - \int_{\Gamma} \mathbf{q}^{-1} \vec{q} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.17})$$

**h**: entropia por unidade de volume;

**q**: temperatura absoluta.

Aplicando, novamente, o Teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} h dV \geq \int_{\Omega} \mathbf{q}^{-1} r dV - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}^{-1} \vec{q}) dV \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{h} \geq \mathbf{q}^{-1}r - \text{div}(\mathbf{q}^{-1}\vec{q}) \quad (\text{A.19})$$

Sendo a energia livre de Helmholtz:

$$\mathbf{j} = e - \mathbf{h}\mathbf{q} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{j} = \dot{e} - \mathbf{h}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}\mathbf{q} \quad (\text{A.21})$$

Substituindo a Equação (A.16) na Equação (A.20), obtém-se:

$$\mathbf{j} = \mathbf{s} \cdot \dot{e} + r - \text{div}\vec{q} - \mathbf{h}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}\mathbf{q} \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{s} \cdot \dot{e} + r - \text{div}\vec{q} - \mathbf{h}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo a Equação (A.23) na Equação (A.19), tem-se:

$$\mathbf{j} + \mathbf{h}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s} \cdot \dot{e} - \mathbf{q}\text{div}(\mathbf{q}^{-1}\vec{q}) + \text{div}\vec{q} \leq 0 \quad (\text{A.24})$$

Mas:

$$-\mathbf{q}\text{div}(\mathbf{q}^{-1}\vec{q}) + \text{div}\vec{q} = -\mathbf{q}q_j \frac{\partial \mathbf{q}^{-1}}{\partial x_j} = -\mathbf{q}q_j (-\mathbf{q}^2) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_j} = \mathbf{q}^{-1}q_j \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_j} = \mathbf{q}^{-1}\vec{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \quad (\text{A.25})$$

Logo:

$$\mathbf{j} + \mathbf{h}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s} \cdot \dot{e} + \mathbf{q}^{-1}\vec{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \leq 0 \quad (\text{A.26})$$

## APÊNDICE B. ANÁLISE CONVEXA

Um breve resumo dos conceitos básicos da análise convexa encontra-se a seguir. Os conceitos apresentados baseiam-se, predominantemente, nos trabalhos de Rockafellar (1970), Lemaréchal (1993) e Houlsby (2002). O objetivo dessa seção não é apresentar os conceitos com formalismo e rigor matemático, mas sim introduzir definições e conceitos da análise convexa que se mostram úteis na formulação dos modelos de plasticidade.

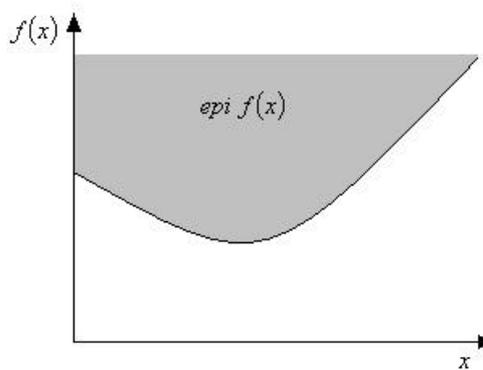
Ao longo dessa seção,  $C$  representa um subconjunto em um espaço vetorial  $V$ , usualmente com dimensão de  $R^n$ . A notação  $\langle , \rangle$  é utilizada para indicar um produto interno.

### Funções Convexas

Seja  $f$  uma função cujos valores são reais ou  $\pm\infty$  e cujo domínio é um subconjunto  $S$  de  $R^n$ . O conjunto definido pela Equação (B.1) é denominado de epigráfico de  $f$  e representado por  $\text{epi } f$ . A Figura B.1 ilustra o epigráfico de uma função  $f(x)$  de uma única variável.

$$\{(x, \mathbf{m}) / x \in S, \mathbf{m} \in R, \mathbf{m} \geq f(x)\} \quad (\text{B.1})$$

**FIGURA B.1**  $\text{Epi } f(x)$ , SENDO  $f(x)$  FUNÇÃO DE UMA ÚNICA VARIÁVEL.



Diz-se que a função  $f$  é convexa se  $\text{epi } f$  é um subconjunto convexo de  $R^{n+1}$ . Isto é,  $f$  é convexa se o segmento de reta que passa pelo par de pontos  $(x, \mathbf{m})$  e  $(y, \mathbf{u})$  pertencentes a  $\text{epi } f$  também estiver contido em  $\text{epi } f$ . A Equação (B.2) apresenta o segmento de reta citado.

$$(1 - \lambda)(x, \mathbf{m}) + \lambda(y, \mathbf{u}) = ((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)\mathbf{m} + \lambda \mathbf{u}) \quad (\text{B.2})$$

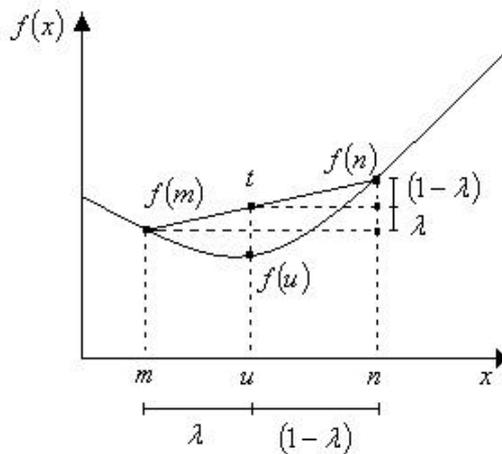
Para que o ponto  $((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)\mathbf{m} + \lambda \mathbf{u})$  do segmento de reta parametrizado através da Equação (B.2) pertença a  $\text{epi } f$ , a função  $f$  calculada em  $(1 - \lambda)x + \lambda y$  deve ser

sempre menor ou igual a  $(1 - I)m + Iu$ . A Equação (B.3) e a Equação (B.4) representam matematicamente a definição de função convexa de duas formas diferentes e a Figura B.2 ilustra o conceito.

$$f((1 - I)x + Iy) \leq (1 - I)m + Iu, \quad f(x) \leq m, f(y) \leq u, 0 \leq I \leq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$f((1 - I)x + Iy) \leq (1 - I)f(x) + If(y), \quad 0 \leq I \leq 1 \quad (\text{B.4})$$

**FIGURA B.2 FUNÇÃO CONVEXA DE UMA ÚNICA VARIÁVEL.**



Considerando:

$$f(m) = \mu$$

$$f(n) = \nu$$

Calculam-se:

$$u = m + \lambda(n - m)$$

$$v = (1 - \lambda)\mu + \lambda\nu$$

$$v = \mu + \lambda(\nu - \mu)$$

$$v = (1 - \lambda)\mu + \lambda\nu$$

Obtendo-se:

$$t = (u, v)$$

$$t = ((1 - \lambda)m + \lambda n, (1 - \lambda)\mu + \lambda\nu)$$

Verifica-se que:

$$f(u) \leq t, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

### **Funções Convexas Conjugadas**

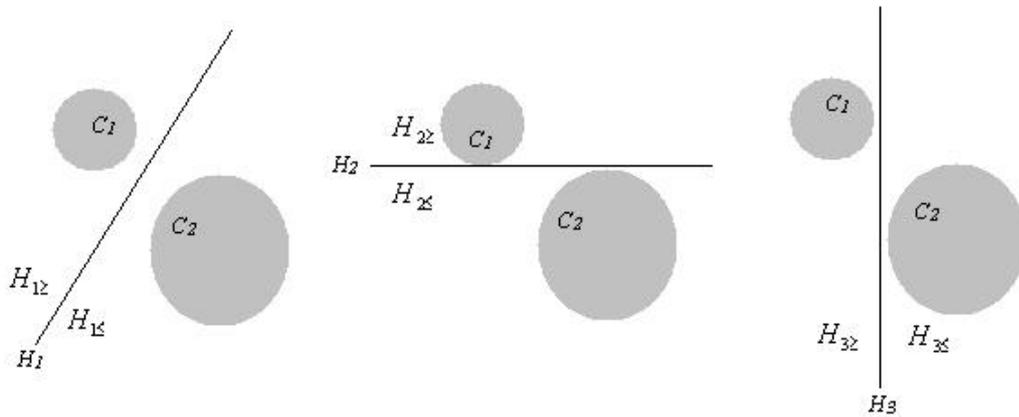
A definição de funções conjugadas surge, naturalmente, do fato que o epigráfico de uma função convexa própria (*epi f*) em  $R^n$  é a interseção dos semi-espacos fechados que o contém. Por definição o epigráfico de uma função convexa própria é um conjunto convexo fechado, de forma que o Teorema 1, apresentado a seguir, pode ser aplicado.

*Teorema 1.* Um conjunto convexo fechado  $C$  é a interseção dos semi-espacos fechados que o contém.

Sejam  $\emptyset \neq C \neq R^n$ ,  $a \notin C$ ,  $C_1 = \{a\}$  e  $C_2 = C$ . Existe um hiperplano separando  $C_1$  e  $C_2$  tal que um dos semi-espacos associado a esse hiperplano contém  $C$ , mas não contém  $a$ . O mesmo ocorre para os semi-espacos associados a outros hiperplanos que dividem o

espaço em semi-espaços. Portanto, a interseção dos semi-espaços fechados que contém  $C$ , não contém outros pontos além daqueles pertencentes a  $C$ . A Figura B.3 ilustra o conceito.

**FIGURA B.3. SEMI-ESPAÇOS FECHADOS QUE CONTÊM  $C_2$ .**



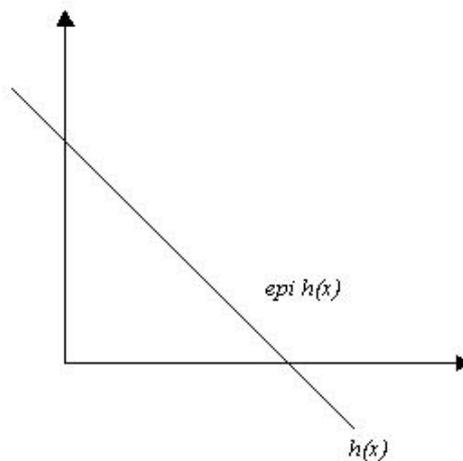
$$H_{1\leq} \cap H_{2\leq} \cap H_{3\leq} \cap \dots \cap H_{n\leq} = C_2$$

Hiperplanos em  $R^{n+1}$  podem ser representados por funções lineares da forma apresentada na Equação (B.5).

$$h(x) = \langle x, x^* \rangle - m^*, \quad x^* \in R^n, m^* \in R \quad (B.5)$$

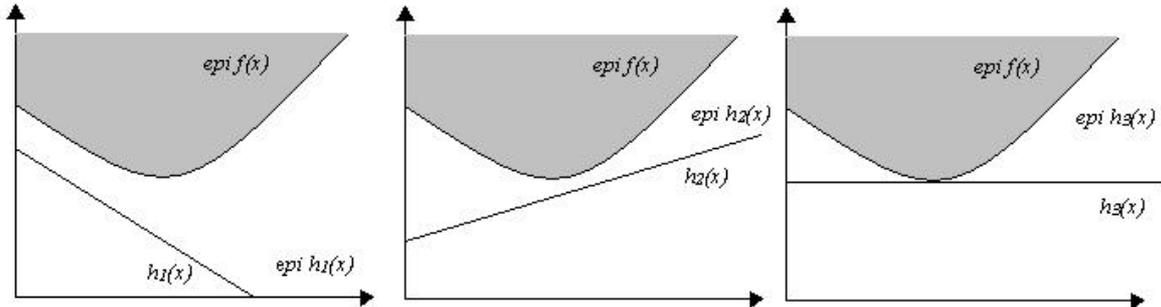
Em  $R^2$ , as funções  $h(x)$  apresentadas na Equação (B.5) são retas que dividem o espaço bidimensional em semi-espaços. Dessa forma, o epigráfico de  $h(x)$  (*epi h*) é um semi-espaço, conforme apresentado na Figura B.4.

**FIGURA B.4 EPI  $H(X)$  EM  $R^2$ .**



Sejam funções  $h(x)$  da forma apresentada na Equação (B.5) e seja  $f(x)$  uma função convexa, tal que  $h(x) \leq f(x)$ . Os epigráficos das funções  $h(x)$ , apresentados na Equação (B.6), são semi-espacos fechados que contêm o epigráfico de  $f(x)$ , conforme ilustrado na Figura B.5.

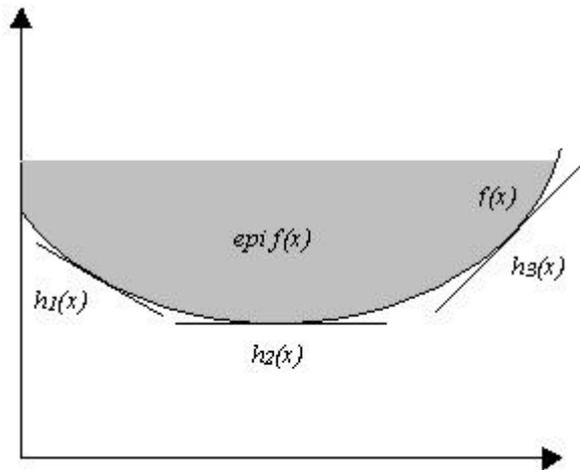
**FIGURA B.5. SEMI-ESPACOS FECHADOS QUE CONTÊM EPI  $F(X)$ .**



$$\text{epi } h = \{(x, \mathbf{b}) / \mathbf{b} \geq x, x^* > -\mathbf{m}^*\} \quad (\text{B.6})$$

Pelo *Teorema 1*, o epigráfico de  $f(x)$  é a interseção dos semi-espacos fechados que o contêm, isto é, dos epigráficos de  $h(x)$ , conforme ilustrado na Figura B.6. Observa-se, nessa figura, que em cada ponto  $x$  existe um hiperplano tangente à função  $f(x)$ . Dessa forma,  $f(x)$  assume, em cada ponto  $x$ , o valor da função  $h(x)$  associada ao hiperplano tangente a  $f(x)$  no ponto. Como  $h(x) \leq f(x)$ , a função  $f(x)$  assume o maior valor entre aqueles assumidos pelas funções  $h(x)$  no ponto. O *Teorema 2* enuncia o exposto.

**FIGURA B.6. EPI  $F(X)$  E HIPERPLANOS TANGENTES A  $F(X)$ .**



*Teorema 2.* Uma função convexa fechada  $f(x)$  é, ponto a ponto, o máximo da coleção de todas as funções  $h(x)$ , tais que  $h(x) \leq f(x)$ .

Matematicamente, o *Teorema 2* pode ser descrito através da Equação (B.7).

$$f(x) = \sup\{h_i(x) / i \in I\} = \sup\{\langle x, x^* \rangle - \mathbf{m}^*\} \quad (\text{B.7})$$

Finalmente, o epigráfico de  $f(x)$  é dado pela Equação (B.8).

$$\text{epi } f = \{(x, \mathbf{b}) / \mathbf{b} \geq \sup\{h_i(x)\}\} \quad (\text{B.8})$$

A partir das Equações (B.6), (B.7) e (B.8) pode-se chegar à definição de função conjugada. Segundo a Equação (B.6), para que os pontos  $(x, \mathbf{b})$  pertençam a  $\text{epi } h$ , é necessário que  $\langle x, x^* \rangle - \mathbf{m}^* - \mathbf{b} \leq 0$ . No entanto, considerando que  $\text{epi } f \subset \text{epi } h$  e tendo em vista que  $\mathbf{b} \geq f(x)$  em  $\text{epi } f$ , então  $\langle x, x^* \rangle - \mathbf{m}^* - f(x) \leq 0$  também se aplica. Como essa desigualdade deve ser satisfeita para todo e qualquer  $x \in C$ , então  $\sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle - \mathbf{m}^* - f(x)\} \leq 0$ . Essa condição pode ser reescrita conforme apresentado na Equação (B.9).

$$\mathbf{m}^* \geq \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) / x \in R^n\} \quad (\text{B.9})$$

A Equação (B.9) representa o epigráfico de uma função  $f^*$  definida conforme apresentado na Equação (B.10). A função  $f^*$  é a função conjugada de  $f$ , também denominada de Transformada de Legendre-Fenchel da função  $f$ . Ponto a ponto, a função  $f^*$  corresponde ao máximo de todas as funções  $g(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \mathbf{m}$ , tais que os pontos  $(x, \mathbf{m})$  pertencem ao epigráfico de  $f$ .

$$f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} \quad (\text{B.10})$$

Da mesma forma, a função  $f(x)$  pode ser obtida a partir da Equação (B.11).

$$f(x) = \sup_{x^*} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} \quad (\text{B.11})$$

### ***Funções positivas-homogêneas, funções próprias e funções fracas semi-contínuas (l.s.c.)***

Uma função  $f$  é dita positiva-homogênea se:

$$f(\mathbf{a}x) = \mathbf{a}f(x) \quad \forall x \in X, \forall \mathbf{a} > 0 \quad (\text{B.12})$$

Uma função  $f$  é dita própria se:

$$f(x) < +\infty \text{ para pelo menos um } x \in X \text{ e } f(x) > -\infty \forall x \in X \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, uma função  $f$  é dita fraca semi-contínua (*l.s.c*) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f(x_n) \geq f(x) \quad (\text{B.14})$$

para qualquer seqüência  $\{x_n\}$  convergindo para  $x$ .

### **Subgradiente e subdiferencial**

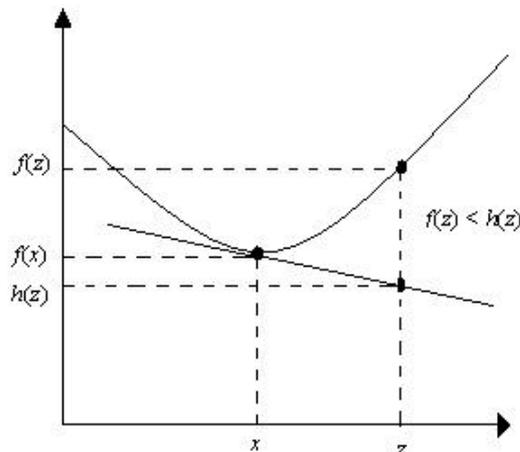
Um vetor  $x^*$  é o subgradiente de uma função convexa  $f$  em um ponto  $x$  se a desigualdade apresentada na Equação (B.15) for satisfeita.

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \quad \forall z \quad (\text{B.15})$$

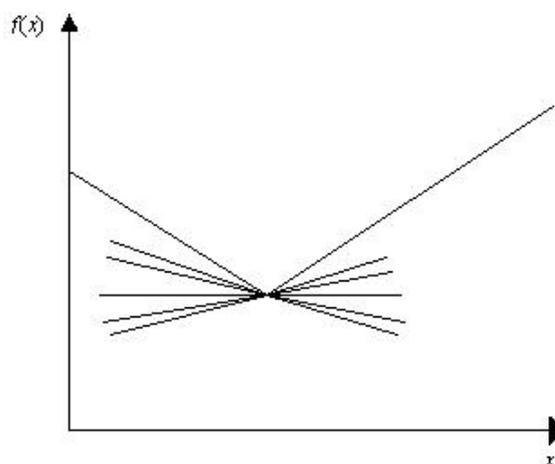
Essa desigualdade possui um significado geométrico simples quando  $f$  é finita em  $x$ . Significa que o gráfico de uma função  $h(z) = f(x) + \langle x^*, z - x \rangle$  é um hiperplano suporte não vertical de  $\text{epi } f$  no ponto  $(x, f(x))$ . Uma vez que  $h(z)$  é um hiperplano suporte de  $\text{epi } f$  em  $(x, f(x))$ , a função  $h(z)$  possui o mesmo valor que a função  $f(z)$  nesse ponto. No entanto, para todos os outros pontos  $h(z) < f(z)$ . A Figura B.7 ilustra esse conceito.

O conjunto de todos os subgradientes de  $f$  em  $x$  é chamado de subdiferencial de  $f$  em  $x$  e é representado pelo símbolo  $\partial f(x)$ . A Figura B.8 ilustra o conceito de subdiferencial.

**FIGURA B.7 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DESIGUALDADE DO SUBGRADIENTE.**



**FIGURA B.8. SUBDIFERENCIAL.**



### ***Funções definidas para subconjuntos convexos***

Existe uma série de correspondências úteis entre subconjuntos convexos e funções convexas. A mais simples associa a cada subconjunto  $C$  em  $R^n$  uma função Indicatriz definida conforme apresentado na Equação (B.16).

$$I_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Outra função importante é a função *gauge* definida conforme apresentado na Equação (B.17). Nessa equação  $\inf\{x\}$  representa o menor valor de um subconjunto.

$$g_C(x) = \inf \{m \geq 0 / x \in mC\} \quad (\text{B.17})$$

Em outras palavras, a função *gauge* representa o menor fator positivo pelo qual um subconjunto pode ser multiplicado de forma que  $x$  continue a pertencer ao subconjunto após a multiplicação. O sentido dessa função pode ser melhor compreendido para subconjuntos contendo a origem. Nesses casos, a função *gauge* assume valor 1 para qualquer ponto pertencente a fronteira do subconjunto, assume valores menores do que a unidade para

pontos internos do subconjunto e maior do que a unidade para valores que estão fora do subconjunto.

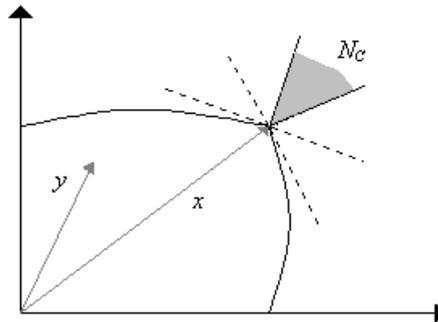
Outra função amplamente utilizada na análise convexa é a função suporte de um conjunto convexo  $C$ . A Equação (B.18) define matematicamente a função suporte.

$$d^*(x^*/C) = \sup\{\langle x, x^* \rangle / x \in C\} \quad (\text{B.18})$$

Por definição, a função suporte de um conjunto convexo  $C$  descreve todos os semi-espacos fechados que o contêm. De fato, tem-se que  $C \subset \{x / \langle x, x^* \rangle \leq b\}$  se e somente se  $b \geq d^*(x^*/C)$ .

Finalmente, o cone normal de um conjunto convexo  $C$  é dado pela expressão apresentada na Equação (B.19). A Figura B.9 ilustra o conceito.

**FIGURA B.9. CONE NORMAL DE UM CONJUNTO CONVEXO C.**



$$N_C(x) = \{\langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\} \quad (\text{B.19})$$

É interessante ressaltar que o subdiferencial de uma função indicatriz de qualquer conjunto convexo  $C$  é o cone normal desse conjunto, conforme apresentado nas Equações (B.20), (B.21) e (B.22).

$$\partial I_C(x) = \{I_C(z) - I_C(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle\} \quad (\text{B.20})$$

$$\partial I_C(x) = \{0 \geq \langle x^*, z - x \rangle\} \quad (\text{B.21})$$

$$\partial I_C(x) = N_C(x) \quad (\text{B.22})$$

## APÊNDICE C. PARÂMETROS DO MODELO CAP

A seguir, apresenta-se o método de determinação dos parâmetros  $B$ ,  $W$ ,  $Z$  e  $R$  do Modelo Cap. O método apresentado baseia-se no trabalho de Desai e Siriwardane (1984).

Os valores dos parâmetros  $B$ ,  $W$  e  $Z$  do Modelo Cap são calculados através da Equação (4.28) reproduzida a seguir:

$$T_m^c = -\frac{1}{B} \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) + Z \quad (C.1)$$

O valor do parâmetro  $Z$  é nulo quando não há uma superfície de escoamento móvel inicial significativa. Para o solo do Exemplo 7.2,  $Z = 0$ . Substituindo  $Z = 0$  na Equação C.1, obtém-se:

$$T_m^c = -\frac{1}{B} \ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \quad (C.2)$$

O valor de  $T_m^c$  pode ser escrito em função da tensão hidrostática como:

$$T_m^c = 3T_m \quad (C.3)$$

Substituindo a Equação (C.3) em (C.2), obtém-se:

$$3T_m B = -\ln \left( 1 - \frac{E_m^p}{W} \right) \quad (C.4)$$

Rearranjando os termos da Equação (C.4), tem-se:

$$E_m^p = W \left( 1 - e^{-3T_m B} \right) \quad (C.5)$$

Uma vez que as deformações plásticas volumétricas podem ser expressas em termos das deformações elásticas volumétricas e das deformações totais volumétricas como:

$$E_m^p = E_m - E_m^e \quad (C.6)$$

E já que as deformações elásticas volumétricas podem ser calculadas quando o valor do módulo de deformações volumétricas,  $K$ , é conhecido, obtém-se:

$$E_m = W \left( 1 - e^{-3T_m B} \right) + \frac{T_m}{K} \quad (C.7)$$

Os valores de  $W$  e  $B$  podem ser determinados a partir dos resultados do ensaio de compressão hidrostática e da Equação (C.7). A título de exemplo, apresentam-se na Tabela C.1 os resultados de um ensaio de compressão hidrostática e detalha-se, a seguir, a determinação dos parâmetros  $W$  e  $B$ .

**TABELA C.1 RESULTADOS DO ENSAIO DE COMPRESSÃO HIDROSTÁTICA.**

$T_m$ (psi)	$E_m$
0	0.0
2	0,0139
4	0,0239
6	0,0471
8	0,0664
10	0,0742
12	0,0894
14	0,1117
16	0,1138
18	0,1170
20	0,1277

Selecionando os pontos para os quais as tensões hidrostáticas são iguais a 10 *psi* e 16 *psi* e substituindo na Equação (C.7), obtém-se:

$$0,0742 - \frac{10}{9000} = W(1 - e^{-3T_m B}) \quad (C.8)$$

$$0,1138 - \frac{16}{9000} = W(1 - e^{-3T_m B}) \quad (C.9)$$

As Equações (C.8) e (C.9) podem ser reescritas como:

$$0,0731 = W(1 - e^{-30B}) \quad (C.10)$$

$$0,1120 = W(1 - e^{-48B}) \quad (C.11)$$

Dividindo a Equação (C.10) pela Equação (C.11), obtém-se:

$$\frac{1 - e^{-30B}}{1 - e^{-48B}} = 0,6524 \quad (C.12)$$

Procura-se determinar o valor de  $B$  que satisfaça a Equação (C.12). Um procedimento de tentativa e erro é adotado. A tentativa inicial pode ser obtida a partir de:

$$\ln(0,6524) = (30 - 48)B \quad (C.13)$$

A solução dessa equação fornece:

$$B = 0,08 \quad (C.14)$$

O valor de  $B$  pode ser, então, alterado em incrementos de 0,01 até que a Equação (C.12) seja aproximadamente satisfeita. Esse procedimento pode ser realizado através de cálculos manuais ou por meio de métodos gráficos. Para o exemplo em análise, o valor aproximado obtido para o parâmetro  $B$  é de 0,0033.

O valor de  $W$  pode ser calculado a partir da Equação (C.8) ou da Equação (C.9). Nesse exemplo, obteve-se o valor de 0,695 para  $W$ .

Utilizando os valores de  $B$  e  $W$  obtidos, pode-se calcular as deformações volumétricas para determinados valores de tensões hidrostáticas. Uma comparação entre as deformações volumétricas obtidas no ensaio de compressão hidrostática e as deformações volumétricas calculadas a partir da Equação (C.7) é apresentada na Tabela C.2. Verifica-se que os valores de  $B$  e  $W$  calculados anteriormente permitem reproduzir aproximadamente os resultados do ensaio de compressão hidrostática. No entanto, a fim de melhorar a aproximação, pode-se buscar um valor de  $B$  que satisfaça a Equação (C.12) com maior acurácia.

Numa segunda tentativa, o valor aproximado obtido para o parâmetro  $B$  foi de 0,00133. Os valores encontrados para  $W$  a partir das Equações (C.10) e (C.11) foram:

$$W_1 = 1,7914 \quad (C.15)$$

$$W_2 = 1,6944 \quad (C.16)$$

O valor médio para  $W$  é:

$$W = 1,7429 \quad (C.17)$$

Dessa forma, na segunda tentativa os valores adotados para  $B$  e  $W$  foram 0,00133 e 1,7429 respectivamente. Novamente, a partir dos valores obtidos para  $B$  e  $W$ , bem como a partir da Equação (C.7), é possível determinar os valores de deformações volumétricas para determinados valores de tensões hidrostáticas. Na Tabela (C.2), apresentam-se os valores de deformações volumétricas obtidos quando  $B = 0,00133$  e  $W = 1,7429$  na Equação (C.7).

Por fim, em uma terceira tentativa, adotou-se o valor de 0,0005 para o parâmetro  $B$ . O valor do parâmetro  $W$  correspondente a esse valor de  $B$  é 4,4. Esse valor foi obtido a partir do mesmo procedimento adotado na primeira e na segunda tentativa. As deformações volumétricas obtidas quando  $B = 0,0005$  e  $W = 4,4$  na Equação (C.7) também são apresentadas na Tabela (C.2). Verifica-se que os valores de  $B$  e  $W$  obtidos na terceira

tentativa geram a melhor correlação entre valores de deformações volumétricas calculados e deformações volumétricas obtidas experimentalmente (Desai e Siriwardane, 1984).

**TABELA C.2 COMPARAÇÃO ENTRE DEFORMAÇÕES VOLUMÉTRICAS OBTIDAS EXPERIMENTALMENTE E NUMERICAMENTE.**

$T_m$ (psi)	$E_m$			
	Experimental	1ª Tentativa	2ª Tentativa	3ª Tentativa
0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0139	0.0143	0.0142	0.0134
4	0.0239	0.0288	0.0286	0.0268
6	0.0471	0.0436	0.0430	0.0404
8	0.0664	0.0588	0.0576	0.0540
10	0.0742	0.0742	0.0722	0.0676
12	0.0894	0.0898	0.0870	0.0813
14	0.1117	0.1060	0.1019	0.0948
16	0.1138	0.1224	0.1170	0.1087
18	0.1170	0.1391	0.1321	0.1224
20	0.1277	0.1561	0.1474	0.1362

Finalmente, o parâmetro  $R$  corresponde a um parâmetro geométrico da parábola. Sabe-se que uma parábola é o local geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de uma reta  $d$  pertencente ao plano e de um ponto  $F$  pertencente ao plano e não pertencente a  $d$ . A reta  $d$  é chamada de diretriz da parábola e o ponto  $F$  é denominado foco da parábola. Considerando a equação da superfície móvel parabólica do Modelo Cap adotada no presente trabalho:

$$R^2 S^2 - T_m + T_m^c = 0 \quad (\text{C.18})$$

E rearranjando os termos dessa equação:

$$S^2 = \frac{1}{R^2} (T_m - T_m^c) \quad (\text{C.19})$$

É possível concluir que se trata de uma parábola com eixo paralelo ao eixo das tensões hidrostáticas e com vértice no ponto  $(T_m^c, 0)$ . O foco da parábola, por sua vez, situa-

se no ponto  $\left( T_m^c + \frac{1}{4R^2}, 0 \right)$ .