ANA RUTH STAREPRAVO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DA 3.ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Lucia Faria Moro
Co-orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Tereza Carneiro Soares

CURITIBA
2001

ANA RUTH STAREPRAVO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DA 3.ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Lucia Faria Moro
Co-orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Tereza Carneiro Soares

CURITIBA
2001

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ · MEC · PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO · SETOR DE EDUCAÇÃO · MESTRADO DE EDUCAÇÃO

PARECER

Defesa de Dissertação de para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO.

Os abaixo-assinados, DRª MARIA LUCIA FARIA MORO; DR. CARLOS ROBERTO VIANNA; DRª NEUSA BERTONI PINTO argüiram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Dissertação: **"A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA POR CRIANÇAS DA TERCEIRA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL".**

Procedida a argüição, segundo o Protocolo, aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

Professores	Apreciação
DRª MARIA LUCIA FARIA MORO (Presidente)	M Lucia F. Moro - aprovada 20 (vinte) créditos
DR.CARLOS ROBERTO VIANNA (Membro Titular)	- aprovada (20) Vinte créditos
DRª NEUSA BERTONI PINTO (Membro Titular)	Neuza B Pinto - aprovada (20) vinte créditos

Curitiba, 27 de agosto de 2001

Prof. Dr. Carlos Eduardo Vieira
Coordenador do Programa de
Pós-Graduação em Educação

A todas as crianças, com as quais temos muito a aprender, e a todos os professores que acreditam que aprender é muito mais do que repetir...

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos a todas elas, em especial:

À professora Drª Maria Lucia Faria Moro e à professora Drª Maria Tereza Carneiro Soares, pela competência, dedicação e apoio constante na orientação deste trabalho.

À professora Drª Neuza Bertoni Pinto pelas valiosas contribuições no exame de qualificação e à professora Shiderlene Vieira de Almeida Lopes, cujas contribuições, no referido exame e durante a realização do trabalho, em muito enriqueceram-no.

À querida professora Drª. Léa das Graças Camargos Anastasiou pelas valiosas contribuições e incentivo, pela amizade e confiança no meu trabalho, desde os tempos da graduação.

Às crianças, sujeitos desta pesquisa, incluindo aquelas que participaram do estudo piloto, pela colaboração na realização desta pesquisa.

Às professoras Nara, Valéria e Irmã Luizinha, que abriram as portas de sua escola para a realização desta pesquisa e não pouparam esforços para oferecer excelentes condições de trabalho.

À minha querida sobrinha Lídia Beatriz, pelo tempo concedido e pela dedicação na fase de coleta de dados.

Aos colegas, professores e funcionários do Programa de Mestrado em Educação, pelas valiosas contribuições.

Aos meus pais, Brasílio e Emília, pelo incentivo, pela confiança e, acima de tudo, por me mostrarem que a vida é um eterno recomeçar...

Ao meu querido noivo Marcos André, que compartilhou dos momentos de alegria e de dificuldade durante a realização deste trabalho, que foi meu "ombro amigo" e que me ajudou a acreditar em mim mesma nos momentos mais difíceis.

A Capes, pelo apoio financeiro.

A Deus, por sempre iluminar o meu caminho.

RESUMO

Este trabalho é um estudo de caso para examinar o processo de compreensão que alunos do ensino fundamental apresentam a respeito das estruturas multiplicativas conforme a teoria dos campos conceituais de Vergnaud. São descritos procedimentos gráficos de solução das crianças diante de problemas de multiplicação/divisão, e sua interpretação destas notações. O estudo foi realizado com quatro sujeitos escolhidos aleatoriamente, todos estudantes da mesma classe de terceira série de uma escola particular que oferece educação gratuita para crianças de famílias de baixa renda de um bairro de Curitiba. Foram-lhes apresentados, oralmente, com apoio em encartes de ofertas comerciais, seis problemas, selecionados de acordo com a classificação dos diferentes subgrupos de problemas de estrutura multiplicativa. Todos implicam uma proporção direta entre duas medidas. Após solucionar cada problema, os sujeitos eram solicitados a explicar suas notações em entrevista do estilo clínico-crítico de Piaget. A análise qualitativa dos dados permitiu verificar que os procedimentos gráficos de solução, apresentados pelos sujeitos, foram, em sua maioria, diferentes dos procedimentos típicos ensinados na escola. Tanto nos problemas de multiplicação, quanto nos de divisão, as notações encontradas foram predominantemente de tipo aditivo, mas com sentidos diferenciados em cada tipo de problema. Ocorreram antecipações de solução, de variados tipos, usadas para controlar os resultados. As interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações, de conteúdo avaliativo, foram provocadas pela entrevistadora. Durante estas interpretações, os sujeitos perceberam inadequações de procedimentos gráficos e/ou incorreções de resultados, procedendo a novas tentativas de solução. A discussão sublinha o papel da resolução de problemas na construção de conceitos matemáticos e a importância da elaboração de procedimentos gráficos de solução destes problemas pelas crianças. Também aponta para a importância da interpretação dos procedimentos gráficos, pelas crianças, para a compreensão progressiva das estruturas focalizadas.

ABSTRACT

This case study aims to examine the comprehension process of the multiplicative structures, by Elemantary School children, according to Vergnaud's theory of conceptual fields. Notational procedures expressed by children during problem solving situation on multiplication and division are described. Their's interpretations about those notations are also analysed. Subjects are four third degree children from low income families leaving in a worker district in Curitiba. They were enrolled in a private school that offers free instruction. Six problems envolving multiplicative structures, ilustrated by commercial ads, were orally presented to them. These problems were selected according to the different subtypes of multiplicative structure problems, implying a simple direct proportion between two mesures. After each problem solution, subjects were asked to explain their notations. The clinical-critical Piaget's interviewing method was employed. Qualitative data analyses shows that problem solving notational procedures presented by the subjects were, most of them, different from typical procedures thougth at school. For the multiplicative and division problems the more frequent procedures were of the additive type, but employed in a different sense accordind to the problem. Various antecipation modes of the solutions used by children to control results were also observed. Subjects' interpretations to their notations revealed an evaluative content, generally caused by the interviewer's action. By this kind of interpratation, subjects noticed inadequate procedures and/or incorrect results, thus attempting new solutions. The discussion stresses the role of problem solving in Mathematics concepts construction and the importance of children's own problem solving procedures. It also points to children's interpretation of their problem solving notational procedures as important to the progressive comprehension of the targeted structures.

SUMÁRIO

I - O PROBLEMA E SUA JUSTIFICATIVA

O caráter ativo da aprendizagem tem sido fundamento de diversas pesquisas realizadas na área de educação nas últimas décadas. Tomando como referência as palavras de Piaget (1964) de que a aprendizagem só é possível quando há assimilação ativa, uma grande variedade de pesquisadores vêm buscando respostas para questões particulares apresentadas na perspectiva que coloca a criança como sujeito ativo da aprendizagem.

Grande parte dessas pesquisas (Ferreiro, 1985; Vergnaud, 1983; Nunes e Bryant, 1997, Kamii, 1995a; Sinclair e Sinclair, 1986) reflete a preocupação em compreender e explicar este caráter ativo da aprendizagem em relação a conteúdos de áreas específicas do conhecimento. Investigam assim, diferentemente de Piaget, a aprendizagem de conteúdos escolares.

Podemos verificar muitos pontos nos quais estas pesquisas, embora relacionadas a diferentes conteúdos escolares, concordam no que se refere ao papel ativo da criança na sua aprendizagem. Um destes pontos, que merece ser destacado, relaciona-se à concepção de aprendizagem como uma reelaboração pessoal de conhecimentos que, segundo Piaget (1983), não se caracteriza como puro registro de observações, mas que exige uma estruturação devida às atividades do sujeito. Piaget (1964) afirma que conhecer não é fazer uma cópia da realidade, e que não é possível conhecer um objeto sem agir sobre ele. Conforme Coll & Solé (1998), aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender.

Elaborar uma representação pessoal implica atribuir um sentido ao que se aprende. Em relação aos conteúdos escolares, a questão é muito bem colocada por Miras (1998), ao explicitar que aprender qualquer um dos conteúdos escolares pressupõe atribuir um sentido e construir os significados implicados em tal conteúdo.

Outro ponto fundamental, e de grande relevância para o presente trabalho, refere-se à importância atribuída aos conhecimentos prévios do aluno a respeito de qualquer objeto de aprendizagem. De acordo com Charnay (1996), o aluno jamais tem a cabeça vazia e não pode ser considerado como uma página em branco sobre a qual será suficiente imprimir os conhecimentos corretos e bem enunciados.

Ao lidar com o tópico da aprendizagem, Piaget (1964) critica o esquema estímulo - resposta classicamente utilizado para explicar a aprendizagem, justificando que, ao pensar neste esquema, geralmente se pensa que primeiro há um estímulo e que a resposta é provocada por este estímulo. De acordo com o autor, a resposta estava lá primeiro:

> Um estímulo é um estímulo somente na extensão de que ele é significativo, e ele se toma significativo somente na extensão em que haja uma estrutura que permita sua assimilação, uma estrutura que pode integrar este estímulo, mas que, ao mesmo tempo provoque a resposta. (Piaget, 1964, p.180)

Sem levar em conta os conhecimentos que os alunos trazem para a sala de aula, construídos a partir das experiências com os objetos do seu meio, a escola acaba impondo uma grande distância entre o conhecimento escolar e o conhecimento informal da criança, o elaborado em suas interações com o meio-ambiente em que vive.

Nosso interesse volta-se para estas questões em relação à aprendizagem da matemática. E, nesta área, esta distância entre o conhecimento escolar e o conhecimento construído pela criança fora da escola deve ser levada em conta na análise do fracasso escolar de crianças que, embora com baixo desempenho nos estudos, utilizam conhecimentos matemáticos em seu dia a dia, com competência para solucionar diversos problemas, sobretudo ligados às situações de trabalho, conforme Carraher, Carraher e Schliemann apontaram (1995).

O especial interesse em uma investigação nesta área é motivado pelo trabalho com professores das séries iniciais. Realizando cursos e oficinas de matemática com professores de diferentes partes do Brasil, foi possível perceber, no contato com estes profissionais, que o caráter ativo da aprendizagem não tem sido considerado em sua prática. Quando coordenadores ou professores procuram ou solicitam um trabalho na área de matemática, alegam, em geral, que possuem grande dificuldade para trabalhar com os conteúdos matemáticos em sala de aula. Muitas vezes afirmam que seus alunos não pensam, que não conseguem aprender as "contas" e não sabem interpretar problemas matemáticos para resolvê-los.

Muitos professores admitem que seus alunos possuem conhecimentos matemáticos porque conseguem dar respostas orais ou realizar cálculos mentalmente. Mas a grande preocupação é de que as crianças não conseguem "colocar isso no papel".

Grande parte destes professores tem demonstrado ainda guardar uma concepção de ensino relacionada ao que Kamii e Devries (1991) chamam de "despejar de conteúdos". Segundo as autoras, considerando seus alunos como copos vazios, em cada série o professor tenta preencher os copos até um certo nível, antes de passá-lo para o próximo professor.

Complementando, com as palavras das autoras:

> Este despejar de conhecimentos pressupõe que o professor seja como um funil gigante que armazenou toda sabedoria do passado e seleciona do seu repertório o que ensinar, de que modo e em que seqüência. (Kamii e Devries 1991, p. 341)

Professores com esta concepção, não têm oferecido espaço, nas aulas de matemática, para que os alunos façam uma reelaboração pessoal.

Fazendo uma reflexão sobre o trabalho apresentado pelos professores com os quais temos trabalhado, observamos que ele tem se caracterizado pela apresentação de regras e técnicas, as quais devem ser repetidas mecanicamente pelos alunos.

Existe uma grande preocupação em cumprir programas curriculares, satisfazendo os aspectos quantitativos e, desta forma, esses professores trabalham os conteúdos matemáticos como um fim em si mesmos.

De acordo com Gálvez (1996), os alunos só podem construir o sentido para as noções matemáticas, quando as desvendam, inicialmente, como ferramentas para resolver problemas. No entanto, o que se constata em sala de aula é um trabalho voltado para a repetição de modelos apresentados pelo professor.

Além disso, a experiência como professora nas séries iniciais também despertou o interesse por uma investigação científica nesta área. Trabalhando com alunos de 3ª série, foi possível constatar a grande dificuldade que as crianças apresentavam na resolução de problemas matemáticos.

Acompanhando a forma como as crianças trabalhavam com problemas, uma questão interessante foi observada: muitas vezes elas apenas retiravam os dados numéricos apresentados no enunciado e usavam estas quantias em adições, subtrações, multiplicações ou divisões. Muitas vezes a escolha da operação a ser realizada era aleatória, como se esta não representasse um passo fundamental para encontrar a resposta correta. Algumas crianças usavam em suas operações, até mesmo, dados numéricos que eram totalmente irrelevantes para o problema e cuja utilização comprometia sua resolução. O contexto e a significação do problema não eram levados em conta.

Tudo isso, entre outras dificuldades das crianças , como a realização de cálculos mentais e estimativas, por exemplo, levou a um questionamento sobre a organização do trabalho com a matemática: primeiro ensinava-se procedimentos canônicos de cálculo e, numa segunda etapa, é que eram apresentados problemas para que as crianças aplicassem tais procedimentos. Não estaria esta organização contribuindo para as dificuldades das crianças com a matemática?

Com esta questão em mente, e fundamentando-nos em estudos realizados por Kamii (1995a; 1995b; 1996), durante o ano de 1997 foi realizado um trabalho, também com uma 3ª série, no qual as crianças eram desafiadas a elaborar procedimentos pessoais de cálculo e de resolução de problemas. Assim, o ensino de procedimentos canônicos não antecedeu, como acontecia anteriormente, o trabalho com a adição, subtração, multiplicação e divisão.

As aulas eram desenvolvidas a partir da apresentação de problemas e as crianças eram desafiadas a elaborar procedimentos pessoais de solução. Incluímos nesse quadro, estratégias para resolver problemas envolvendo conceitos que não haviam sido ensinados anteriormente como, por exemplo, multiplicações envolvendo dezenas tanto no multiplicador quanto no multiplicando.

A simples proposição de um cálculo também era considerada como um problema, uma vez que as crianças não dispunham de um recurso *a priori* para realização do cálculo e discutiam diferentes possibilidades para sua realização (Kamii, 1995a).

Os resultados deste trabalho, embora constatados sem o controle e rigor de um trabalho de pesquisa, despertaram um grande interesse por um estudo mais profundo sobre a questão, pois as crianças passaram a apresentar atitudes diferenciadas diante dos problemas. Como não dispunham de um único recurso para resolver esses problemas (por não terem sido ensinadas através de um único procedimento), elas preocupavam-se muito mais com o contexto e a significação dos mesmos (Starepravo, 1997).

Embora não apresentassem formas canônicas de resolução, passaram a ter desempenho melhor nas aulas de matemática, criando procedimentos pessoais de solução. Estes procedimentos confirmaram a recomendação corrente, desde muitas décadas, de que as crianças aprendem resolvendo problemas. De acordo com Charnay (1996), só existe aprendizagem quando o aluno percebe que há um problema para ser resolvido, ou seja, quando esta aprendizagem surge como uma resposta a uma pergunta. Foi interessante observar, ainda, que as crianças não se recusavam a trabalhar com conceitos sobre os quais não haviam sido ensinadas formalmente.

Do trabalho realizado com os professores, os quais alegam encontrar as mesmas dificuldades de seus alunos na resolução de problemas, e da experiência relatada com as crianças da 3ª série, surgiu um interesse especial pelos procedimentos de solução apresentados pelas crianças. Elaborados por elas, esses procedimentos representaram um passo importante na melhora do desempenho das mesmas em relação à matemática.

O interesse especial pela aprendizagem da multiplicação/divisão procede do trabalho realizado com os professores, que têm denunciado uma dificuldade ainda maior de seus alunos no trabalho com estas operações aritméticas. Sabemos que estas dificuldades têm suas raízes também na forma como foi encaminhado o trabalho com a adição/subtração. Entretanto, consideramos fundamentais as especificidades da multiplicação/divisão, as quais, muitas vezes, são desconhecidas pelos próprios professores. Estes têm atribuído à memorização da tabuada quase que total responsabilidade pelo bom desempenho dos alunos com estas operações, desconhecendo a complexidade da construção dos conceitos de multiplicação e de divisão para as crianças.

Diante do exposto até aqui, podemos verificar que grande parte das dificuldades que as crianças apresentam na escola, em relação à matemática, provém da forma como o ensino é encaminhado. Vemos crianças diferentes, todas sendo ensinadas da mesma forma, sem se considerar o que já sabem sobre o tema a ser ensinado. Allardice & Ginsburg (1984) apontam para esta questão em estudos sobre dificuldades das crianças com a matemática escolar. Segundo os autores, além da rigidez no ensino para crianças com necessidades e conhecimentos diferentes, a escola freqüentemente desencoraja o pensamento independente dos alunos. Estes mesmos autores, em suas pesquisas, mostram que crianças com dificuldades na matemática escolar podem se sair muito bem em tarefas que exigem conhecimentos matemáticos, "inventando" procedimentos próprios de solução para os problemas apresentados.

Dos comentários feitos pelos autores em seus estudos, há um aspecto que mais nos preocupa: a questão de que as crianças com dificuldades em matemática, geralmente sabem que estão falhando e sentem-se muito mal sobre isto.

Muitas são as crianças que não estão tendo sucesso na matemática escolar, muitas são as que têm aceitado esta realidade como imutável e deixam a escola por acreditar que não são capazes de aprender. Nossa preocupação está em contribuir para a modificação deste quadro, alterando a forma como se trabalha a matemática na escola.

Para esta modificação é necessário que a escola atribua aos conhecimentos prévios do aluno um papel de destaque e que esteja consciente da importância da atividade do sujeito, da assimilação ativa, conforme explicada por Piaget (1964), para a aprendizagem. É necessário, enfim, considerar a significação da aprendizagem, conforme o que segue:

> Uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com sentido o aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem. (...) grande parte da atividade mental construtiva dos alunos deve consistir em mobilizar e atualizar seus conhecimentos anteriores para entender sua relação ou relações com o novo conteúdo. (Miras, 1998, p. 61)

Pela experiência no trabalho com as crianças da 3ª série e apoiando-nos na bibliografia revisada neste trabalho (ver, por exemplo, Carraher, Carraher e Schliemann, 1995) acreditamos que a elaboração de procedimentos pessoais de solução pelas crianças permite uma aprendizagem como reelaboração pessoal, tomando os conhecimentos prévios das crianças como ponto de partida dessa aprendizagem.

Consideramos fundamental compreender os processos pelos quais as crianças aprendem noções matemáticas e desenvolvem suas próprias idéias. A intenção desta pesquisa é justamente oferecer uma contribuição na busca desta compreensão. Conhecendo estes processos, os professores dispõem de elementos importantes de auxílio para melhor interferir no processo de aprendizagem de seus alunos, uma vez que, considerando o caráter ativo da aprendizagem, o papel do professor muda de características. Conforme Moro (1998), o professor pode passar ao papel de orientador, de provedor de desafios interessantes, para que seus alunos tenham uma aprendizagem significativa no sentido da compreensão, do domínio do conhecimento e do próprio processo de conhecer.

Assim, pretendemos oferecer algum subsídio aos professores das séries inicias, para que possam explorar a matemática em sala de aula de uma forma diferenciada, sem que a ênfase esteja no ensino de técnicas computacionais ou algoritmos convencionais. De acordo com Kamii (1995a), os professores devem oportunizar aos seus alunos que se expressem a partir de suas hipóteses, encorajando-os a trocar pontos de vista entre eles para avançar no processo.

Diante de todo o exposto, explicitamos então a questão de investigação deste trabalho:

Como se caracterizam as notações de crianças de terceira série como procedimentos de solução de problemas de multiplicação e de divisão, apresentados oralmente, a partir de encartes de ofertas veiculadas por jornais locais?

O objetivo desta pesquisa é o de descrever analiticamente os procedimentos gráficos de solução apresentados por crianças de terceira série, diante de situações – problema envolvendo multiplicação e divisão[1].

Para isso, levantamos algumas questões que serão foco de análise no presente trabalho:

[1] Consideramos como procedimentos, conforme Vergnaud (1991), os meios usados pelas crianças, os caminhos que seguem para resolver um problema ou alcançar o objetivo pedido em uma tarefa com a qual se defronta. Ainda de acordo com o referido autor, consideramos que a análise dos acertos e erros é parte integrante da análise geral dos procedimentos.

- quais as principais características das soluções gráficas apresentadas pelas crianças diante dos problemas propostos oralmente?
- as notações das crianças diante dos problemas apresentados oralmente se assemelham às soluções gráficas ensinadas nas escolas?
- adições e subtrações são usadas como procedimentos de solução para os problemas envolvendo multiplicação/divisão? Em quais situações são utilizadas?
- há diferenças entre os procedimentos gráficos de solução, conforme o tipo de problema?
- no caso dos problemas de divisão, são usados procedimentos gráficos diferenciados conforme seja uma divisão com resto ou sem resto?

Ao mesmo tempo em que estas questões são levantadas, apontamos para algumas hipóteses de trabalho. Elas fundamentam-se na experiência profissional na área e no conhecimento teórico sobre o tema , construído ao longo do trabalho de revisão de literatura (vide capítulo seguinte).

Desta forma, eis algumas de nossas suposições:

- diante dos problemas apresentados oralmente, as crianças tendem a utilizar procedimentos gráficos não canônicos, não optando pela realização de operações de multiplicação e divisão na forma escolar clássica, como procedimento de solução.
- as crianças recorrem ao uso da adição e da subtração para resolver problemas de multiplicação e divisão.
- as crianças apresentam diferentes soluções gráficas conforme o tipo de problema.
- as notações produzidas pelas crianças para os problemas de divisão são diferenciadas conforme seja a divisão com resto ou sem resto.

II - REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Delimitado o problema de investigação ao qual se propõe esta pesquisa, faz-se necessário explicitar a opção teórica relacionada aos aspectos fundamentais que compõem nosso problema: a multiplicação e divisão como conceitos interconectados em um campo conceitual e os sentidos de números novos para multiplicação/divisão.

Iniciamos este capítulo fazendo uma revisão de literatura sobre a matemática escolar e a resolução de problemas na escola, abordando, em seguida, a teoria que fundamenta os estudos desta pesquisa.

1. A educação matemática escolar

A matemática ensinada nas escolas é, para a maioria dos alunos, uma disciplina difícil. Há uma forte crença de que o bom desempenho nesta disciplina está reservado a alguns poucos alunos dotados de inteligência privilegiada.

A forma como a matemática é vista pelos estudantes tem seus reflexos nos altos índices de reprovação na disciplina. Mesmo alunos que utilizam a matemática em seu dia a dia, mobilizando conhecimentos construídos a partir de necessidades reais de uso da matemática, têm experimentado o fracasso frente à matemática escolar.

Poderíamos então dizer, concordando com Carraher, Carraher e Schliemann (1995), que a matemática escolar é apenas uma das formas de se fazer matemática e, muitas vezes, não tem dado conta de ensinar o suficiente para que os alunos possam resolver problemas de seu cotidiano.

Continuando com os autores citados, há uma grande crítica a ser feita sobre a forma como a escola vem educando matematicamente seus alunos, uma vez que não é possível atribuir o fracasso escolar de um aluno à sua capacidade cognitiva, quando este mesmo aluno utiliza a matemática, e com eficiência, na resolução de situações matemáticas de seu cotidiano.

A escola tem imposto um verdadeiro abismo entre o conhecimento formal, dos seus programas curriculares e o conhecimento informal trazido para a sala de aula por alunos que elaboram tais conhecimentos em suas relações sociais.

Carraher, Carraher e Schliemann apontam para esta questão:

O ensino da matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem. Apesar de todos reconhecermos que os alunos aprendem sem que o façam na sala de aula, tratamos nossos alunos como se nada soubessem sobre tópicos ainda não ensinados.(Carraher, Carraher e Schliemann, 1995, p.21).

Assim, nas aulas de matemática, os alunos aprendem a repetir o que é ensinado pelo professor. O trabalho deste, segundo Silva (1999), restringe-se à apresentação de uma definição, seguida de alguns exemplos e exercícios de fixação. Os alunos, por sua vez, respondem aos exercícios observando o exemplo dado, mesmo porque esse é o caminho para a boa memorização que lhe será exigida quando for avaliado.

Fica claro que, nesta dinâmica de ensino, não há espaço para uma reelaboração pessoal por parte dos alunos. Elaboração esta que, segundo Coll e Solé (1998), implica aproximar-se do objeto ou conteúdo com a finalidade de apreendê-lo. Esta aproximação, de acordo com os autores, não é vazia, a partir do nada, mas se dá a partir das experiências, interesses e conhecimentos prévios, que, presumivelmente, possam dar conta do novo.

Assim, aprender não é acumular conhecimentos passados pelo professor, mas, segundo os autores, modificar o que o aprendiz já possui e interpretar o novo, de forma peculiar, para poder integrá-lo e torná-lo seu.

Grande parte dos professores, conforme apontado por Silva (1999), tem se refugiado na segurança dos algoritmos[2] prontos, apresentando os conteúdos matemáticos de forma fracionada e em uma seqüência rígida de etapas pelas quais passa mecanicamente e que seria totalmente vazia de significado para os alunos.

Tais algoritmos, ensinados isoladamente, são exigidos, mais tarde, na resolução de problemas que surgem na escola, mais como pretexto para se aplicar algoritmos ensinados pelo professor do que como desafios genuínos.

Nunes e Bryant (1997), em pesquisas sobre o conhecimento a respeito de proporções demonstrado por crianças de rua, apontam para o uso que se faz de

[2] Usamos a noção de algoritmo, conforme a definição apresentada por Vergnaud (1991), como uma regra (ou um conjunto de regras) que permite, para todo problema de uma classe dada anteriormente, conduzir a uma solução, se existe uma, ou, se for o caso, mostrar que não há solução. Como regra, possui a propriedade de conduzir a uma solução em um número finito de etapas.

problemas no ensino deste conteúdo na escola. Segundo os autores, os problemas são usados apenas como uma desculpa para se usar a aritmética.

De acordo com Grossi Bergamaschi e Manzanares (1995), os alunos aprendem resolvendo problemas. Desta forma, segundo as autoras, os alunos não devem realizar tarefas escolares que apenas lhe forneçam informações, mas as atividades devem desafiar, ir ao encontro do que falta para cada um.

Assim, diferentemente do que vem se fazendo nas escolas, os problemas deveriam ser o ponto de partida para o trabalho com diferentes conteúdos. Segundo Koch (1995), se o professor, ao invés de colocar os problemas após o ensino, propuser situações – problema antes de ensinar, irá permitir a discussão sobre as possíveis soluções, questões matemáticas envolvidas, diferentes procedimentos. Neste caso, as crianças estariam elaborando suas ferramentas e argumentando sobre elas diante dos colegas.

Nas pesquisas sobre a notação numérica na criança, Sinclair (1990) aponta para o fato de que as crianças não se recusam a realizar tarefas às quais não estão habituadas (tomar nota ou escrever sem ter "aprendido"), e que elas já refletiram sobre o problema e constroem procedimentos não convencionais, mas coerentes. Tal observação reforça conclusões dos estudos realizados por Nunes e Bryant (1997), as quais consideram que para qualquer conceito matemático ensinado na escola primária, é possível verificar que as crianças têm alguma compreensão deste conceito antes que sejam formalmente ensinadas. E, embora reconhecendo que esta compreensão é freqüentemente fragmentária e limitada, os autores sugerem que seja ela vista como base para as crianças aprenderem mais sobre conceitos matemáticos. Isso é justificado pelo fato de a criança entender algo sobre as relações envolvidas no conceito e poder aplicar esta compreensão logicamente.

Conforme apontado por Saiz (1996),o algoritmo clássico não aparece na escola como o último passo de um processo de evolução de procedimentos. Para a autora, os alunos deveriam, inicialmente, criar procedimentos pessoais que permitiriam manter o significado do cálculo através de passos sucessivos e um determinado controle sobre a produção.

Schliemann, Santos e Costa (1995) denominam estes procedimentos pessoais de algoritmo construído espontaneamente, e sugerem que sua invenção e utilização pela criança constituam um passo intermediário para a aprendizagem do algoritmo aceito pela escola. Mas esta construção ocorreria de forma diferente da que vem tradicionalmente sendo utilizada. Os autores apontam para a compreensão da lógica que torna possível o uso de suas regras e convenções , criticando a aprendizagem como um procedimento mecânico destituído de significado.

Em estudos realizados por Kamii (1995a e 1995b), Carraher , Carraher e Schliemann (1995), Lerner e Sadovsky (1996), Allardice e Ginsburg (1984), entre outros, há a demonstração de que os procedimentos pessoais criados pelas crianças para solucionar problemas diferem muito dos algoritmos convencionais, nos quais os números são dispostos em colunas. As crianças geralmente fazem reagrupamentos usando o conhecimento que possuem a respeito do sistema de numeração decimal e do seu princípio posicional.

A literatura nesta área tem apresentado argumentos sobre a perda do significado das operações aritméticas que ocorre quando as crianças trabalham com algoritmos convencionais, vendo os algarismos em colunas e perdendo de vista a quantia com a qual se está trabalhando. As crianças acabam trabalhando com símbolos numéricos e não com quantias numéricas.

Essa maneira com a qual a escola tem trabalhado com a matemática envolve uma concepção diferente de aquisição dos conhecimentos, organizando-o em pequenas partes. Conforme análise de Gálvez :

> **Até agora, tem predominado uma concepção segundo a qual basta decompor um saber, em sua modalidade cultural, em pequenos pedacinhos isolados, e então organizar sua ingestão por parte dos alunos, em períodos breves e bem delimitados, segundo seqüências determinadas sobre a base da análise do próprio saber. Esta maneira de organizar o ensino não atribui importância ao contexto específico em que os conhecimentos são adquiridos, nem à sua significação e valor funcional, durante sua aquisição. (Gálvez, 1996, p. 31)**

Lerner e Sadovsky (1996), ao apresentarem as vantagens de se trabalhar com procedimentos criados pelas crianças, os "algoritmos alternativos", fazem um comentário interessante sobre esta compartimentalização do saber. Segundo as autoras, as crianças naturalmente iniciam uma soma ou subtração pela esquerda (pela ordem mais elevada do número), explicitando o valor representado pelos algarismos, o que permite controlar o resultado pelo cálculo aproximado.[3] Desta maneira os procedimentos das crianças fazem desaparecer a diferença entre contas "com dificuldade" e "sem dificuldade". Podemos incluir nesse quadro, por exemplo, os chamados cálculos graduados tradicionalmente usados para o ensino da divisão, em que gradualmente apresenta-se um cálculo de maior dificuldade, ou seja, do simples para o complexo.

Conforme já comentado, as crianças tendem a fazer modificações nos valores apresentados (reagrupando-os), de modo a tornar mais fácil a manipulação destes valores. Estes procedimentos fazem sentido para elas e, por isso mesmo, acabam obtendo melhor desempenho quando utilizam-nos.

Assim, a literatura sublinha a importância dos procedimentos de solução elaborados pelas crianças. Acreditamos que os professores devam propiciar a elaboração destes procedimentos, bem como promover discussões entre seus alunos sobre os diferentes procedimentos, para validá-los, julgando-os de acordo com critérios de eficiência e economia de cada um.

2. A resolução de problemas

Para Piaget (1970), o problema central da pedagogia está vinculado ao problema epistemológico fundamental da natureza dos conhecimentos, tidos como cópias da realidade ou como assimilações do real pelas estruturas de transformação. De acordo com a primeira concepção, o conhecimento – cópia, conforme denominado pelo autor, provém de respostas dos organismos aos estímulos exteriores. A relação fundamental envolvida no desenvolvimento e aprendizagem seria, assim, a de associação.

---

[3] Esta tendência de as crianças começarem seus cálculos da esquerda para a direita, ou seja, pela ordem mais elevada dos números, tem sido verificada por diferentes pesquisadores, como por exemplo Kamii (1995a; 1995b) e Carraher, Carraher e Schliemann (1995).

Já a segunda, defendida por Piaget (1964, 1970), tem a assimilação como relação fundamental. Nesta perspectiva, os conhecimentos derivam da ação. Assim, de acordo com Piaget (1970, p.30), "conhecer um objeto é agir sobre ele e transformá-lo, apreendendo os mecanismos dessa transformação vinculados com as ações transformadoras." Para o autor, conhecer é assimilar o real às estruturas em transformação e esta assimilação é essencialmente ativa.

Piaget (1964) diferencia aprendizagem de desenvolvimento: este é relacionado à totalidade das estruturas do conhecimento, mas a aprendizagem, que não é espontânea, é provocada pelas situações (como por exemplo, um experimento psicológico ou um professor em relação a algum tema didático). É um processo limitado a um único problema ou a uma única estrutura. Desta forma a aprendizagem é vista como inserida no processo do desenvolvimento cognitivo geral.

Para o referido autor, a operação é a essência do conhecimento, pois se constitui em uma ação interiorizada que modifica o objeto de conhecimento. A operação é o conjunto de ações que modifica o objeto e permite que o sujeito construa estruturas cognitivas, essas em constante transformação.

Assim, de acordo com Piaget (1983), não há conhecimento como puro registro de dados exteriores presentes nos objetos mas tampouco existem estruturas cognitivas *a priori* ou conhecimentos humanos pré-formados nas estruturas constituídas do sujeito.

Em relação à aprendizagem, Piaget (1983) distingue a experiência física que ocorre por abstração empírica da experiência lógico-matemática que ocorre mediante abstração reflexionante. Enquanto na abstração empírica abstraem-se apenas propriedades físicas dos objetos, a partir de observáveis, na abstração reflexionante, que procede das ações do indivíduo sobre os observáveis, abstrai-se o resultado das combinações das ações que o sujeito executa em relação àqueles observáveis.

Nesta concepção construtivista piagetiana é que fundamentamos a presente pesquisa, confrontando-a com a concepção de aprendizagem como cópia do conhecimento finalizado, pronto. Esta parece ser a adotada por grande parte dos professores com os quais temos trabalhado. Pode-se verificar nas escolas a utilização de um modelo de ensino baseado na apresentação de conceitos e definições, seguidos de exemplificação e numerosos exercícios de fixação.

A concepção construtivista de aprendizagem não se baseia em uma acumulação de conhecimentos e sim na "...integração, modificação, estabelecimento de relações e coordenação entre esquemas de conhecimento que já possuímos, dotados de uma certa organização que varia, em vínculo e relações, a cada aprendizagem nova que realizamos." (Coll e Solé, 1998, p.20).

Segundo Charnay (1996) os conceitos matemáticos tornam-se significativos na medida em que são desvendados inicialmente pelos alunos como ferramentas para solucionar problemas. Vemos os problemas como recursos importantes de aprendizagem. E, ao contrário do que acontece, em geral, nas escolas (onde são apresentados após as definições e conceitos, como exercícios de aplicação), eles assim podem ser o ponto de partida para a formação dos conceitos.

Charnay (1996) apresenta algumas características essenciais da relação entre a situação-problema e os alunos, delineando uma aprendizagem apoiada na resolução de problemas:

- a atividade deve propor um verdadeiro problema por resolver para o aluno. Todos devem compreender o problema, ou seja, prever que existe uma resposta possível.
- a atividade não deve deixar o aluno desarmado diante do problema, ou seja, deve permitir que o aluno use seus conhecimentos anteriores para encontrar a solução.
- deve oferecer resistência suficiente para que o aluno questione seus conhecimentos anteriores, elaborando novos conhecimentos para responder à situação.
- é preferível que a validação venha da própria situação e não do professor.

Assim, fica claro que um problema, para ser fonte de uma nova aprendizagem, deve apresentar alguma dificuldade para o aluno, de forma a que se constitua em um desafio. Entretanto, é necessário dosar este grau de dificuldade para que o aluno não desanime diante do problema; ou seja, ele deve poder conectar seus conhecimentos com a questão apresentada, aproximando-se da solução. Em outras palavras, os problemas devem apresentar questões que possam ser assimiladas pelos esquemas de conhecimento do sujeito e gerar uma modificação nestes esquemas.

Segundo Saiz (1996), o ensino tradicional não está centrado na resolução de problemas, mas na determinação da operação correspondente. Isso leva ao que a autora chama de "aplicação cega" de algoritmos que é acompanhada pela perda de sentido, pela incapacidade de imaginar diferentes opções de solução, ou mesmo, de controlar o resultado identificando respostas absurdas. A autora defende a idéia de que as crianças devem comprovar seus próprios procedimentos, suas próprias soluções antes de conhecer os algoritmos convencionais. Assim, as crianças devem ser incentivadas, diante de problemas a fazer registros pessoais, seja através de desenhos, esquemas, tabelas ou outro registro que lhes tenha sentido.

Freitas (1999) lembra que é possível identificar a existência de um problema na gênese da maioria das principais idéias matemáticas, apontando que o mesmo pode acontecer no âmbito educacional. Assim, de acordo com este autor "...o trabalho com a resolução de problemas deve se constituir no verdadeiro eixo condutor de toda a atividade educacional dessa disciplina." (Freitas, 1999, p. 72).

Segundo o autor, o papel primordial do professor consiste em encontrar problemas que possam mobilizar os conhecimentos dos alunos, promovendo a elaboração de novos conhecimentos matemáticos.

Outro ponto importante a ser abordado refere-se à definição de problema. Em geral, nas escolas, a concepção de problema está diretamente ligada a formulações escritas, com formatação muito específica, na qual a pergunta vem acompanhada de informações que podem ser usadas para a obtenção da resposta. É exemplo: *Maria comprou X bananas, cada banana custa Y. Quanto Maria gastou ao todo?*

Diante de um problema como este, a atitude mais comum das crianças é a de utilizar os números representados por X e Y em uma operação aritmética, recorrendo aos algoritmos ensinados pelo professor. A dificuldade, entretanto, consiste justamente em determinar qual das "operações aritméticas" é a mais adequada para solucionar a questão.

Em sua pesquisa sobre a compreensão das situações multiplicativas elementares, Franchi (1995) faz uma análise das ações dos alunos no processo de resolução de problemas. Como o seu interesse estava voltado para os procedimentos elaborados pelas crianças, a autora considerou fundamental dedicar especial atenção à estrutura textual dos enunciados apresentados, contornando a influência das marcas verbais indicativas de uma multiplicação ou divisão. De acordo com a autora, a utilização das expressões *cada um* e *ao todo,* é comum na escola, como dicas ou pistas das operações aritméticas utilizadas na resolução dos problemas.

Grande parte dos alunos busca estas marcas verbais indicativas para operar com os dados retirados dos enunciados, utilizando os algoritmos ensinados.

Zunino (1995) fez um estudo sobre a forma como crianças de terceira e quinta séries compreendem a estrutura lógica subjacente de problemas e as operações que consideravam necessárias realizar para resolvê-los. A autora verificou que grande parte de seus sujeitos manifestou um alto grau de compreensão das situações-problema enunciadas, mas que a maioria evidenciou alto grau de incompreensão dos procedimentos usados para fazer as "contas". Considera que, em alguns casos, esta incompreensão reflete-se em uma incorreta aplicação dos mecanismos aprendidos.

A autora aponta ainda para a utilização de "problemas-padrão", na escola, que podem fazer com que as crianças busquem certas "chaves" incluídas reiteradamente nos enunciados, desconsiderando a estrutura global dos problemas. No referido estudo, a autora verificou que alguns de seus sujeitos usavam um indicador exclusivo para determinar a operação que deveriam realizar: dicas verbais presentes na pergunta formulada no enunciado.

Em seu estudo, Zunino (1995) constatou também a dificuldade de algumas crianças para resolver problemas apresentados de forma parcialmente gráfica. Muitos de seus sujeitos precisaram ler várias vezes os problemas deste tipo, enquanto que com os problemas de enunciados exclusivamente verbais, isso não era necessário. A autora chama a atenção para a necessidade de se trabalhar com variados tipos de problemas na escola, lembrando que na vida real os problemas nem sempre se formulam por escrito: surgem, na maioria das vezes, em situações complexas, nas quais nem sequer são determinados os dados que são necessários levar em conta.

De acordo com Kamii (1995a), a simples proposição de um cálculo pode se constituir em um problema, quando as crianças não aprenderam os algoritmos convencionais, ou quando são desafiadas a elaborar procedimentos pessoais para solucioná-los. Desta forma, 13 X 24, por exemplo, pode constituir-se em um problema tanto quanto o enunciado anteriormente citado.

Segundo a autora, podem ser considerados problemas enunciados orais, elaborados pelo professor ou pelas próprias crianças, bem como situações que surgem em sala de aula, (como por exemplo, uma distribuição de materiais, discussões sobre o custo de uma excursão, preparação de uma festa ou montagem de um jogo).

Carraher, Carraher e Schliemann (1995) apontam para a grande diferença entre o desempenho das crianças diante de problemas orais (informais) e problemas formais, apresentados por escrito. Há, de acordo com os autores, diferenças nas estratégias cognitivas de resolução dos problemas, de acordo com o contexto no qual eles são apresentados. Quando trabalham com problemas orais, as crianças, em geral, fazem modificações nos valores apresentados, trabalhando com quantidades mais fáceis de ser manipuladas. Os autores verificaram que não há uma estratégia uniforme para resolver os problemas, como acontece, em geral, no trabalho com problemas na escola.

Dentre estudos sobre os procedimentos pessoais usados pelas crianças para solucionar problemas, apontando para o fato de que, na realização de operações matemáticas as crianças não dispõem os números em colunas e iniciam seus cálculos pelas ordens mais elevadas, temos os realizados por Carraher, Carraher e Schliemann (1995), que verificaram esta tendência das crianças para trabalhar com centenas, dezenas e, por último com as unidades.

Os autores investigaram as formas de organização de natureza lógico-matemática manifestas nas atividades das crianças em atividades cotidianas dentro e fora da escola. No caso do estudo, com situações de compra e venda em uma feira, o objetivo dos autores era identificar os conhecimentos lógico-matemáticos implícitos na organização das atividades das crianças.

Das observações dos autores sobre a resolução de problemas, outros aspectos merecem destaque:

- mesmo quando o resultado apresentado para o problema não era correto, este não era absurdo, pois a criança tinha maior controle do processo de resolução.
- trabalhando com o cálculo mental, as crianças tendem a utilizar quantias que , se escritas, terminariam em um ou mais zeros. Este procedimento, segundo os autores, diminui a quantidade de elementos a serem processados a cada momento.

A abordagem metodológica adotada, segundo os autores, é a mesma do método clínico-crítico piagetiano: é feita uma cuidadosa seleção de problemas que serão apresentados aos sujeitos de forma não-padronizada. Pelas justificativas apresentadas por eles e apresentação de novos problemas, o investigador segue sua tarefa de descoberta do raciocínio utilizado pelo sujeito. O roteiro da entrevista é flexível, permitindo o acompanhamento dessas elaborações na exploração das hipóteses a respeito.

Para Carraher, Carraher e Schliemann (1995, p.17), o foco de interesse está na "... relação entre a compreensão dos princípios e modelos lógico-matemáticos subjacentes à resolução de problemas em diferentes contextos culturais e sua representação nesses contextos...". Os autores têm a preocupação de explicitar seus objetivos de análise, diferentes dos relativos às tarefas piagetianas clássicas (conservação, inclusão de classes). Essa preocupação provém do interesse dos autores pelos princípios lógico-matemáticos estudados em seus contextos culturais.

Aplicados um teste informal, no qual as crianças eram abordadas sobre as atividades realizadas em seu contexto de trabalho e outro formal, contendo operações aritméticas desvinculadas de qualquer contexto e problemas aritméticos com organização tipicamente escolar, os autores observaram resultados que apontam para a grande diferença entre o desempenho das crianças nos dois testes: ele é nitidamente superior no teste informal.

Os autores questionam a forma como se organiza o trabalho de matemática na escola. No âmbito escolar é amplamente aceita e difundida a idéia de que se deve ensinar às crianças, primeiro as operações aritméticas isoladas de qualquer contexto, para depois trabalhar com estas operações no contexto de problemas.

Conforme já comentado, no ensino tradicional feito nas escolas, as crianças devem fazer uma "aplicação" dos algoritmos na resolução de problemas. De acordo com este modelo, Carraher, Carraher e Schliemann (1995) apontam para as habilidades requeridas para se resolver problemas. Elas seriam seqüenciais e independentes, seguindo os seguintes passos:

1) interpretação do problema
2) determinação da operação a ser realizada

3) efetuação da operação.

De acordo com este modelo as crianças acabam agindo da forma descrita por Saiz (1996, p.169) :

> A maior parte das crianças realiza a prova da divisão (prova dos 9), porém, ninguém faz a 'prova do problema', quer dizer, ninguém verifica se o resultado obtido é a solução do problema formulado.

Os alunos são, muitas vezes, incentivados pelos seus professores a realizar a chamada "prova real" das operações aritméticas, como se isto fosse suficiente para validar a resolução do problema. Entretanto a atenção volta-se somente para a técnica operatória e não para o significado da situação problema.

De acordo com Gálvez (1996, p. 38)

> O aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas.

Assim, o domínio de um procedimento geral não diz quando este procedimento é uma boa escolha para solucionar um problema (Nunes e Bryant, 1997). De acordo com os autores, não adianta aprender procedimentos se estes não forem transformados em ferramentas de pensamento.

De acordo com Brousseau (1996), o trabalho do professor consiste em uma recontextualização do saber. Deve-se trabalhar com situações que dêem sentido aos conhecimentos que serão ensinados. Quando trabalham com estas situações e estas cumprem seu papel de atribuição de sentido ao conhecimento, as crianças não são , *a priori*, capazes de generalizar a outras ocasiões este conhecimento construído.

Para que este conhecimento tenha um caráter universal, ou, usando as palavras do autor, seja um "conhecimento cultural reutilizável", é necessário que haja um trabalho de re-descontextualização do saber.

Em outras palavras, se um aluno é capaz de resolver um problema (porque este envolve uma situação do seu cotidiano, isto é, consiste em uma situação contextualizada), ele deverá construir um conhecimento que lhe permita trabalhar com os dados de situações similares mesmo quando estas não lhe sejam familiares. Assim o conhecimento envolvido na resolução de problema deve poder ser generalizado ou "re-descontextualizado".

Brousseau (1998) propôs uma teoria chamada Teoria das Situações, cujo foco principal de estudo está na caracterização e organização do ambiente sócio-cultural no qual o aluno está inserido, permitindo a aprendizagem de um determinado saber matemático. Assim , Brousseau define uma situação didática como

> Um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos , um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição. (Brousseau in Gálvez, 1996, p.28).

Brousseau (1996) aponta ainda para a situação a-didática , que faz parte da situação didática, mas constitui-se no momento em que o aluno interage com um problema sem a intervenção direta do professor. Assim, embora seja o professor quem irá apresentar a situação, o aluno elabora seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e os faz funcionar ou os modifica não em função das exigências do professor, mas como resposta às exigências do meio.

Na situação a-didática, o aluno reage frente a um problema sem a intervenção direta do professor. De acordo com o autor, nestas situações, a resolução de um problema é uma responsabilidade do aluno. Ele deve procurar obter um resultado, aceitando sua responsabilidade na resolução da situação que foi apresentada pelo professor.

Este processo é denominado pelo autor de "devolução", no qual o aluno aceita sua responsabilidade em uma situação de aprendizagem ou de um problema e o professor aceita as conseqüências dessa devolução.

Para Brousseau (1996) a aprendizagem é uma modificação do conhecimento que o aluno deve produzir por si mesmo e deve ser provocada pelo professor. Segundo o autor, para que a aprendizagem possa ser vista sob esta ótica é necessário que o professor busque uma situação apropriada. Ela será uma situação de aprendizagem quando a resposta inicial do aluno para a questão apresentada não for aquela que se pretende ensinar. Esta resposta inicial deve, juntamente com os conhecimentos anteriores, servir como estratégia de base para a busca da solução. Ao mostrar-se ineficiente para a solução, deve obrigar o aluno a realizar modificações em seu sistema de conhecimentos.

De acordo com o autor

> O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor. (Brousseau, 1996, p. 49).

Sobre a teoria das situações, Brousseau (1998) aponta ainda para a classificação das interações que o sujeito faz com o meio, que determinam as diferentes relações com o saber a ser ensinado:

- dialética da ação,
- dialética da formulação,
- dialética da validação,
- dialética da institucionalização.

Na dialética da ação, o sujeito age sobre a situação e esta lhe oferece informações sobre sua ação. Como a situação retroage às ações do aluno, este deve ajustar suas ações pela observação dos seus resultados, sem a intervenção de outro sujeito. O aluno reconhece que as suas decisões e as estratégias escolhidas determinam o resultado e estas estratégias podem ser modificadas.

Na dialética da formulação, existe a troca de informação entre diferentes sujeitos. Em uma sala de aula, é o momento da socialização das estratégias usadas na resolução dos problemas. Os alunos comunicam aos colegas as ferramentas usadas para encontrar a resposta de um problema e observam as ferramentas usadas pelos colegas.

Na dialética da validação, as estratégias ou ferramentas comunicadas na etapa anterior são colocadas em discussão. Neste momento questiona-se a eficiência das ferramentas e devem ser propostos argumentos em defesa destes para que possam ser validadas.

Finalmente, na dialética da institucionalização, um procedimento é reconhecido, convertendo-se em um recurso de referência (Brousseau, 1996). Uma vez institucionalizado, o conhecimento poderá ser reutilizado na resolução de problemas. Nesta etapa, o professor tem papel fundamental, uma vez que é ele que fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber (Canôas, 1997).

Brousseau (1996) chama atenção para o fato de que, na educação tradicional, o ensino se reduz à institucionalização dos conhecimentos , sem a preocupação do professor na criação de sentido para o conhecimento. O professor transmite o conhecimento que deseja que o aluno aprenda. Este o recebe passivamente e depois se verifica o que ele aprendeu. O que falta ao ensino tradicional é justamente as dialéticas da ação e da formulação.

Em conseqüência, na resolução de problemas, os alunos não se envolvem na busca de soluções que lhes sejam significativas. Nesse caso, de acordo com Silva (1999), o objetivo dos alunos passa a ser encontrar a resposta "certa" que já é conhecida pelo professor ao propor as questões aos seus alunos. Resolver problemas trata-se então de encontrar a "conta" que é esperada pelo professor, o qual, por sua vez, contribui com "dicas" através do uso de palavras-chave ou na própria estruturação dos textos que enunciam os problemas.

Os estudos sobre a resolução de problemas, bem como a análise sobre a forma como os problemas são, em geral, trabalhados na escola, são importantes para esta pesquisa, uma vez que investigamos os procedimentos notacionais de crianças de terceira série diante de problemas envolvendo multiplicação e divisão.

Nestes estudos buscamos fundamentar a construção da metodologia da pesquisa, sobretudo no que se refere à forma de apresentação dos problemas aos nossos sujeitos. Conforme os estudos revisados, nas escolas, em geral, as crianças só resolvem problemas com enunciados padrões, sempre apresentados por escrito. Nesta pesquisa usamos os encartes de oferta como recurso e apresentamos os problemas oralmente, em uma conversa, propondo situações de compra e venda que poderiam ser vivenciadas pelas próprias crianças.

Nossa investigação sobre a compreensão das estruturas multiplicativas é feita através da análise dos procedimentos notacionais de problemas por acreditarmos na significação que adquirem os conhecimentos matemáticos , na medida em que são usados pelos alunos para solucionar problemas.

Como nosso interesse não está em verificar se a criança escolhe a "conta adequada" para resolver o problema, focalizamos a interação dos sujeitos com os problemas e os meios usados por eles para resolvê-los. Neste sentido os estudos sobre a resolução de problemas revisados aqui, orientam também a análise que fazemos dos procedimentos notacionais de nossos sujeitos, bem como da interpretação que fazem de suas notações.

3. A Teoria dos Campos Conceituais

Entre os autores que apontam para a importância das situações que dão significado aos conceitos matemáticos, merece destaque o psicólogo francês Gerard Vegnaud. Este autor, de acordo com Campos e Nunes (1994), dá uma nova formulação à própria idéia de conceito matemático.

Vergnaud (1983) aponta para o fato de que a ciência e a tecnologia têm se desenvolvido com o propósito de resolver problemas, considerando como problema qualquer situação que pede uma solução, trazendo aos sujeitos a necessidade de descobrir relações e explorá-las , de elaborar hipóteses e verificá-las (no âmbito escolar e não escolar). Para o referido autor, uma das questões mais desafiadoras da educação consiste no uso de problemas significativos para que o conhecimento, tanto em seu aspecto teórico, quanto prático, possa ser visto pelos alunos como uma ajuda verdadeira e importante para a solução de problemas reais.

Vergnaud (1983) toma a teoria de Piaget como quadro de referência para seus estudos, apoiando-se na posição epistemológica sobre a relação sujeito-objeto, formulada por este autor. Contudo, ressalta que os estudos de Piaget centram-se na gênese do conhecimento pela análise do desenvolvimento das crianças em termos de categorias lógicas gerais. O interesse de Vergnaud está na formação de conceitos matemáticos, atribuindo à especificidade dos conteúdos um aspecto importante para a aprendizagem.

Vergnaud (1988) aponta para a importância das primeiras aquisições matemáticas das crianças. Segundo o autor, alguns conceitos matemáticos e procedimentos são aprendidos e desenvolvidos durante um longo período de tempo. Cita como exemplo, as estruturas aditivas ou multiplicativas, cuja aprendizagem pode requerer mais de dez anos.

Para o autor, existem diferentes e variados comportamentos matemáticos e estes comportamentos estão estreitamente relacionados a conceitos matemáticos. Entretanto, os alunos nem sempre estão totalmente conscientes da relação existente entre os conceitos que possuem e o seu comportamento diante das situações matemáticas. Assim, muitos conceitos matemáticos estão implícitos no comportamento dos estudantes.

Vergnaud (1988) analisa a contagem de um conjunto de objetos discretos por uma criança de 5 ou 6 anos de idade. Embora possa variar a forma de contar, por exemplo, uma pilha de pratos em uma mesa ou um grupo de ovelhas em movimento (sendo este último mais difícil), existe uma organização invariante que possibilita o funcionamento do esquema de enumeração destes conjuntos: coordenação entre o movimento dos olhos e gestos dos dedos apontando cada objeto enquanto se enuncia corretamente a seqüência numérica, a necessidade de repetir o último número da série ou de acentuá-lo (identificando o último elemento da série como o cardinal do conjunto). Assim, o esquema de enumeração não recorre somente aos procedimentos de contagem descritos, mas também a construções conceituais como as de correspondência biunívoca entre conjuntos de objetos e subconjuntos de números naturais e a de cardinal. São estes conceitos, embora implícitos e cuja explicitação dificilmente poderia ser feita por uma criança, que orientam suas ações. Eles são chamados de conceitos-em-ato.

Sintetizando as idéias do autor a respeito do comportamento matemático, podemos ressaltar os seguintes pontos;

- o comportamento matemático baseia-se em algum conceito matemático, este nem sempre explicitável;
- o comportamento matemático se apóia em organizações invariantes, que se expressam em esquemas.

O autor usa o conceito de esquema, apoiado em Piaget, como uma organização invariante do comportamento, sendo que para uma determinada classe de situações a organização do comportamento é variante, e não o próprio comportamento.

Sobre os esquemas o autor ressalta que os algoritmos são esquemas, mas nem todos os esquemas matemáticos são algoritmos. Mesmo quando os alunos aprendem algoritmos na escola, nem sempre seguem suas regras, substituindo-os por esquemas mais significativos ou procedimentos mais breves ou "econômicos".

Segundo Vergnaud (1988), os esquemas são compostos de regras, metas e expectativas, inferências e invariantes operatórios. Assim os esquemas comportam conceitos-em-ato e teoremas-em-ação, permitindo ao sujeito que reconheça elementos pertinentes da situação, apreendendo suas informações. É usado pelo autor, o exemplo da enumeração, apontando dois invariantes necessários para seu funcionamento: a correspondência biunívoca e a cardinalidade (considerar o último numeral falado como representando a grandeza do conjunto).

Vergnaud (1988) ressalta a importância do papel da linguagem verbal e de outros modos de representação simbólica como instrumento de organização de experiências e de conceitualização do real. Contudo é importante ressaltar que os conceitos envolvem conjuntos de representações simbólicas em inter-relação, mas com estes não podem ser confundidos para que os símbolos e as operações sobre os símbolos não sejam tidos como a essência do conhecimento matemático.

Um conceito matemático, para o autor, é constituído de três conjuntos, definindo-se com apoio neste tripé:

- o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência);
- o conjunto de invariantes operatórios (propriedades, relações, teoremas-em-ação) que são progressivamente dominados pelos estudantes (significado);
- o conjunto de formas simbólicas ou lingüísticas que permitem as representações dos invariantes (e que são usadas para comunicá-los, permitindo discussões sobre eles) e também a representação de situações e procedimentos (significante).

Vergnaud (1988), apoiado em Piaget, mostra que um esquema é associado com uma classe de situações e há diferentes esquemas porque existem muitas e variadas situações. Assim, uma situação não pode ser analisada pela via de um único esquema.

Os estudos de Vergnaud, conforme já comentado, mostram um interesse especial pelos conteúdos específicos do conhecimento, sendo que a aprendizagem depende da especificidade dos conteúdos. Para Vergnaud (1991), a formação do professor deve conduzi-lo a um melhor conhecimento da criança, que não se restringe ao conhecimento de sua inteligência e comportamento. Implica em um conhecimento profundo do conteúdo que se vai ser ensinado e as relações entre esse conteúdo e as possíveis ações das crianças. A necessidade de compreender melhor a aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos em relação a situações - problema, levou autor à formulação da idéia de *campos conceituais*.

> Um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações cujo tratamento se faz necessário através de conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes mas estritamente interligados. (Vergnaud, 1983, p.127).

Vergnaud (1983) justifica a necessidade da teoria dos campos conceituais, baseando-se nas seguintes argumentações:

- é difícil e algumas vezes até mesmo absurdo, estudar isoladamente a aquisição de conceitos interconectados. Como exemplo, o autor cita o estudo da multiplicação, divisão, razão, números racionais, funções lineares e não- lineares, análise dimensional e vetor espacial, que não são conceitos independentes uns dos outros. Eles aparecem simultaneamente logo nos primeiros problemas encontrados pelas crianças na escola.
- é mais proveitoso, dentro de uma abordagem psicogenética para a aquisição de idéias específicas, abranger um domínio mais amplo do conhecimento, abordando uma diversidade maior de situações.
- existem diferentes conceitos e procedimentos envolvidos na habilidade das crianças de solucionar uma mesma classe de problemas. Ainda que estes conceitos ou representações possam parecer frágeis ou estar parcialmente errados, são importantes para a resolução de problemas mais simples e se constituem em fator importante para a construção de conceitos e procedimentos próximos daqueles socialmente estabelecidos.

Gerard Vergnaud dispensou atenção especial ao estudo de dois campos conceituais: o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. A matemática considera, segundo Vergnaud (1991), a adição e a subtração como operações matemáticas estreitamente ligadas. Para o autor, existem diversos tipos de relações aditivas e, conseqüentemente, diversos tipos de adições e subtrações. As estruturas aditivas são as estruturas ou relações em jogo que só estão formadas de adições e subtrações em diferentes níveis. Já as estruturas multiplicativas consistem do conjunto de situações que envolvem a multiplicação ou a divisão de dois números, ou a combinação de tais operações em diferentes níveis (abrangendo os conceitos de função linear, razão, fração, números racionais entre outros). (Vergnaud, 1983).

O autor ressalta que as estruturas aditivas constituem um campo conceitual e as estruturas multiplicativas constituem outro campo conceitual.

Essa concepção está presente também nos estudos feitos por Nunes e Bryant (1997), quando questionam o ensino da multiplicação e divisão na escola. Segundo os autores, elas são vistas como simples operações aritméticas que devem ser ensinadas aos alunos depois que já tenham aprendido adição e subtração, sem a necessidade de haver transformação maior no raciocínio das crianças para que saibam como e quando utilizar estas novas ferramentas.

Nenhum dos autores (Vergnaud, 1983 ; Nunes e Bryant, 1997) nega a possibilidade de se efetuar uma multiplicação por adições sucessivas ou a divisão através de subtrações sucessivas. Embora reconheçam que alguns aspectos da adição e da subtração possam formar a base da multiplicação e da divisão, Nunes e Bryant (1997), que, até onde entendemos, apóiam seus estudos na teoria de Vergnaud, ressaltam que as crianças devem aprender todo um conjunto totalmente novo de sentido dos números e um conjunto novo de invariáveis que estão relacionados à divisão e multiplicação, mas não à adição e subtração.

Para Vergnaud (1983), olhando-se as estruturas multiplicativas como um conjunto de problemas, é possível identificar três subgrupos diferentes de problemas aritméticos de multiplicação e de divisão, conforme envolvam eles : a) isomorfismo de medidas , b) produto de medidas e, c) proporção múltipla.

Faremos uma breve análise do primeiro grupo, de situações multiplicativas mais elementares, em função do interesse desta pesquisa centrar-se nos procedimentos gráficos de solução elaborados pelas crianças diante de problemas deste tipo.

Tais problemas consistem de relações de proporcionalidade simples, envolvendo duas variáveis em diferentes espaços de medida. Segundo Vergnaud (1991), esta primeira grande forma de relação multiplicativa (isomorfismo de medidas) é uma relação quaternária, entre quatro quantidades, sendo duas das quantidades medidas de um certo tipo e as outras duas são medidas de outro tipo. Para o autor esta relação não pode ser bem representada através da escrita habitual da multiplicação: $a \times b = c$, pois esta escrita não comporta mais que três termos; portanto, não representa a relação quaternária.

De acordo com Vergnaud (1983), este tipo de relação (isomorfismo de medidas) descreve um grande número de situações corriqueiras da vida, bem como de ordem técnica e nela podem ser identificadas quatro classes de problemas: multiplicação, divisão 1 (divisão partição), divisão 2 (divisão por quota) e problemas de regra de três.

Nos problemas de multiplicação existem, de acordo com Vergnaud (1988), dois tipos de relações : relações escalares (entre magnitudes do mesmo tipo) e relações funcionais (entre magnitudes de diferentes tipos). O autor exemplifica com um problema no qual deve-se calcular o preço de 4 miniaturas de carros sabendo-se que uma miniatura custa 5 francos[4].

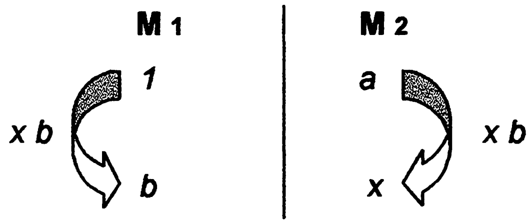
O problema pode ser compreendido pela relação escalar quando para se determinar o valor de 4 carros pensa-se na relação: 4 carros custam 4 vezes o valor de 1 carro. Assim, pode-se entender 4 x 5 como a interação de pagar 5 reais, 4 vezes, sendo o resultado obtido pela adição repetida.

Assim temos:

4 vezes 5 reais $\rightleftarrows$ 5 reais + 5 reais + 5 reais + 5 reais

O esquema proposto pelo autor ilustra o isomorfismo de medidas para a multiplicação. No esquema a seguir, vemos o uso da relação escalar $a \xrightarrow{x\, b} x$ que consiste em transportar em M_2, de a para x, o operador que liga 1 a b em M_1.

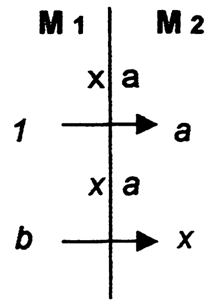
[4] Usamos francos franceses por se tratar do exemplo usado pelo autor. Na seqüência, explorando o exemplo, referimo-nos ao valor das miniaturas usando nosso dinheiro: o real.



a = 5 b = 4 M_1 = número de miniaturas M_2 = custo

Neste esquema, *x b* é um operador escalar porque não tem dimensão, sendo a razão de duas magnitudes do mesmo tipo; *b* miniaturas são *b* vezes o custo de 1 miniatura.

Já uma relação funcional refere-se a duas variáveis diferentes, sendo o quociente de duas magnitudes, no exemplo, reais por carro. Assim o produto de 5 x 4 não é significativo como a iteração de pagar 5 parcelas de 4 reais, mas só pode ser interpretada como uma relação funcional entre o número de carros e o seu preço. Esta relação pode ser ilustrada neste outro esquema proposto por Vergnaud (1983):

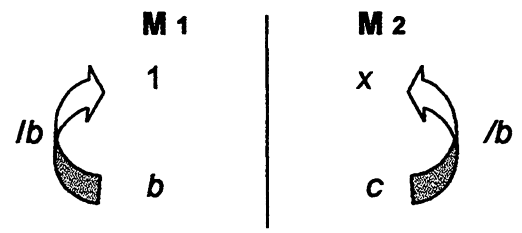


No esquema, *xa* é um operador funcional porque é representado pelo coeficiente de uma função linear de M_1 para M_2.

Os problemas de divisão 1, ou divisão por partição consistem em encontrar o valor de uma parte. Usando o exemplo das miniaturas teríamos: 4 miniaturas custam 20 reais, qual o preço de uma miniatura?

Este problema pode ser pensado em termos de 20 divididos (repartido) igualmente em 4 partes.

Essa classe de problemas pode ser resolvida pela aplicação de um operador escalar */b* para a magnitude *c*. O esquema abaixo, ilustra esta relação:



$b = 4$ $c = 20$ M_1 = número de miniaturas M_2 = custo

De acordo com Vergnaud (1983), as crianças têm dificuldade de estabelecer a inversão da relação *xb* para */b* e por isso preferem tentar encontrar *x* de forma que *x* x *b* = *c*, muitas vezes por tentativa e erro. Este procedimento também é usado por adultos quando *b* e *c* estão presentes na tábua da multiplicação. Mas, conforme comentado pelo autor, enquanto estes podem recorrer aos procedimentos canônicos de *c/b* quando necessário, as crianças geralmente não conseguem.

Os problemas de divisão 2, ou divisão por quota, envolvem a idéia apresentada no seguinte exemplo de problema: com 20 reais quantas miniaturas de 5 reais é possível comprar? Um problema deste tipo poderia ser lido em linguagem técnica como: *vinte reais, quantos cinco reais têm?*

De acordo com Vergnaud (1983), problemas desta classe geralmente podem ser resolvidos pela inversão do operador funcional, conforme o esquema:

$$
\begin{array}{r|l}
M_1 & M_2 \\
1 \xleftarrow{/a} & a \\
x \xleftarrow{/a} & b
\end{array}
$$

a = 5 b = 20 M_1 = número de carros M_2 = custo

O autor considera este procedimento difícil para as crianças, não somente pela inversão, mas também porque o operador inverso tem uma dimensão que é incomum e difícil de conceber (no exemplo, miniatura por reais). É mais comum que as crianças tentem descobrir quantas vezes *a* cabe em *b* (especialmente quando se trata de números inteiros pequenos), usando o operador escalar e transpondo esta relação em M_1.

As crianças costumam também utilizar procedimentos aditivos $a + a + a$,... até obter *b*, contando então o número de vezes que *a* foi adicionado para obtenção de *b*.

A última classe de problemas pode ser ilustrada pelo seguinte problema: 3 miniaturas custam 15 reais, quanto custam 5 miniaturas? No esquema, temos:

$$
\begin{array}{c|c}
M_1 & M_2 \\
a & b \\
c & x
\end{array}
$$

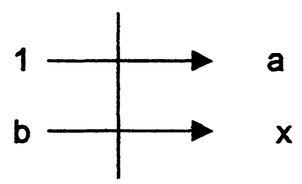
a = 3 b = 15 c = 5 M_1 = miniaturas M_2 = custo

Para Vergnaud (1983), essa classe de problemas pode ser resolvida por diferentes procedimentos usando diferentes propriedades da relação de quatro termos. Segundo pesquisa realizada por Franchi (1995), problemas deste tipo têm sido considerados, no ideário pedagógico dos professores, como os mais difíceis dentre os que envolvem duas operações.[5]

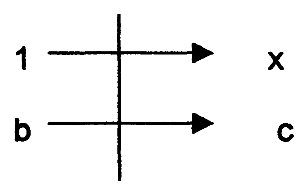
Segundo Vergnaud (1991), podem ser extraídas numerosas classes de problemas de acordo com a forma da relação multiplicativa, o caráter discreto ou contínuo das quantidades que intervém, as propriedades dos números utilizados.

Nos problemas que envolvem isomorfismo de medidas, há uma relação entre quatro quantidades, mas nos problemas mais simples, sabe-se que uma destas quantidades é sempre igual a um. Neste caso há três grandes classes de problemas nos quais a incógnita pode ser uma das outras três quantidades (conforme já descritos):

Multiplicação



Divisão: busca do valor de uma parte(partição)



[5] Problemas desta classe não estão incluídos nesta pesquisa. Serão trabalhados apenas problemas das três primeiras classes apresentadas.

Divisão: busca da quantidade de unidades (quota)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & a \\ x & \longrightarrow & c \end{array}$$

De acordo com o autor, cada classe pode se dividir em numerosas subclasses. Como exemplo Vergnaud (1991) toma o caso da multiplicação, com exemplos que evidenciam dificuldades muito diferentes:

Números inteiros pequenos

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Números inteiros grandes

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 42 \\ 183 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Valor unitário decimal

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2,75 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Números decimais

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 6,08 \\ 5,74 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Valor de uma parte inferior a 1

1 → 0,25

7 → x

Número de unidades
Inferior a 1

1 → 6,08

0,42 → x

Segundo o autor, problemas das três últimas subclasses são, em geral, as mais difíceis para as crianças ao final das séries iniciais do ensino fundamental.

Em relação aos problemas de divisão, pode-se distinguir classes análogas a estas e cada uma merece atenção particular. O autor destaca a importância de se trabalhar com uma mesma subclasse com exemplos tomados de diferentes domínios.

Nunes e Bryant (1997), conforme Vergnaud, também identificam subgrupos para os problemas mais elementares de multiplicação. De acordo com os autores, há novos sentidos de números e novos tipos de situação com as quais as crianças se deparam quando começam a aprender sobre multiplicação. As situações que exigem pensamento multiplicativo, são diferentes daquelas nas quais pode-se aplicar o pensamento aditivo porque não envolvem as ações de unir e separar. Assim, o raciocino aditivo se refere a situações nas quais objetos (ou conjuntos de objetos) são reunidos ou separados. Seguem os autores explicitando os sentidos de números envolvidos no raciocínio aditivo:

> **O número, como medida de conjuntos, envolve colocar objetos em um conjunto no qual o ponto de partida é zero; o número como uma medida das transformações relaciona-se ao conjunto que é unido ou separado de um outro conjunto; o número como uma medida de uma relação estática (em problemas de comparação) relaciona-se ao conjunto que teria que ser unido/separado de um outro a fim de formar dois conjuntos iguais em número. (Nunes e Bryant, 1997, p. 143)**

Apontando para a diferença entre estas situações e aquelas que dão lugar a raciocínio multiplicativo, os autores organizam seus estudos em torno de três tipos diferentes de situação multiplicativa: a) situações de correspondência um-para-muitos;

b) situações que envolvem relações entre variáveis, ou seja, co-variação; e c) situações que envolvem distribuições e cortes sucessivos.

As situações de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos podem ser verificadas em exemplos cotidianos: um carro tem quatro rodas; uma pessoa tem dois pés. Segundo os autores, estas se constituem no tipo mais simples de situação manipulativa e podem ser comparadas à classe de problemas multiplicativos do subgrupo explorado anteriormente (isomorfismo de medidas), proposto por Vergnaud (1983).

Os autores lembram os exemplos cotidianos de correspondência um-para-muitos: "um carro tem quatro rodas" (1-para-4), "uma criança tem dois pés" (1-para-2), apontando para a continuidade entre estas situações multiplicativas e as situações aditivas. Para eles a continuidade mais evidente é a de que alguns sentidos de números nestas situações também são conectados a conjuntos : "um carro", "quatro rodas", "uma pessoa, dois pés", também se referem a um tamanho de conjunto.

Entretanto, o foco de estudo dos autores centra-se nas diferenças entre estas situações multiplicativas e as situações aditivas.

A primeira diferença refere-se à relação constante de correspondência um- para-muitos entre dois conjuntos, presente nas situações multiplicativas. Esta correspondência é constante e não varia, constituindo um tipo de invariável que não está presente no raciocínio aditivo e, ainda, é base de um novo conceito matemático : o conceito de *proporção*.

Em uma adição, para se manter constante a diferença entre dois conjuntos, é necessário somar o mesmo número de objetos a cada um deles. No caso da correspondência um-para-muitos, a diferença é mantida constante quando são acrescentadas quantias diferentes de objetos a cada conjunto. No exemplo do carro, a cada vez que se acrescenta um elemento ao conjunto de carros, acrescenta-se quatro elementos ao conjunto de rodas.

De acordo com os autores, é justamente este raciocínio que leva à segunda diferença. Conforme já comentado, as situações multiplicativas não envolvem as ações de unir e separar, mas uma ação de natureza diferente: *replicação* e seu inverso.

Na replicação não é possível simplesmente unir, somando qualquer quantidade a um conjunto. É preciso somar a quantidade necessária a cada conjunto para manter invariável a correspondência um-para-muitos. No seu inverso, a replicação implica em tirar as quantias correspondentes de cada conjunto para que a proporção seja mantida. No exemplo do carro, se um elemento for retirado do conjunto de carros, quatro elementos deverão ser retirados do conjunto de rodas.

Quando a replicação é efetuada e o número de elementos de cada conjunto é modificado, a proporção permanece constante. Assim, considerando-se as duas situações "um carro – quatro rodas" e "quatro carros – dezesseis rodas", a proporção é a mesma. Isso acontece porque a proporção não representa o número de objetos em qualquer dos conjuntos, mas a relação entre os dois conjuntos.

Apoiados em Vergnaud (1983), os autores identificam também o operador escalar, denominando-o *fator escalar* que representa o número de vezes que uma replicação é efetuada. Para que a proporção permaneça constante é necessário que o mesmo fator escalar seja aplicado a cada conjunto.

O operador funcional apontado por Vergnaud (1983), para a resolução de problemas multiplicativos, é usado por Nunes e Bryant (1997) no segundo tipo de situações, as situações que envolvem relações entre variáveis, ou seja, co-variação.

Os autores apontam para este novo sentido de números no raciocínio multiplicativo, em situações nas quais duas (ou mais) variáveis co-variam como uma conseqüência de convenção ou de causa. A convenção trata-se de um acordo que pode ser alterado. É o caso, por exemplo, do preço de produtos vendidos por peso. Se um quilo de açúcar custa R$ 1, 10, meio quilo irá custar R$ 0,55.

Já a causa refere-se ao impacto de uma variável sobre a outra e, neste caso, não pode ser modificada por acordo. Assim, o preço por quilo do açúcar pode modificar e conseqüentemente mudará o preço de meio quilo deste mesmo produto. Entretanto o preço de meio quilo continuará sendo a metade do preço de um quilo.

A partir desta consideração, podemos concluir que as operações de replicação e seu inverso, e o fator escalar, usados nas situações multiplicativas de correspondência um-para-muitos, são importantes também neste segundo tipo de situações. Conforme o exemplo usado pelos autores, "se você compra 20 vezes tanto de açúcar, você deveria pagar 20 vezes tanto dinheiro: a relação entre as duas variáveis não é mudada pelo número de replicações." (Nunes e Bryant, 1997, p. 146).

Mas, se por um lado os autores apontam para as semelhanças entre os dois tipos de situações, por outro, demonstram diferenças significativas. No segundo tipo de situações os números não se referem a conjuntos e sim a valores sobre variáveis. Os conjuntos são feitos de elementos descontínuos (elementos mensurados pelo peso, comprimento) e as variáveis é que são contínuas (quilograma, metro,etc.). Assim, valores fracionados emergem naturalmente neste contexto de variáveis, pois é perfeitamente sensato dizer: "meio quilo de açúcar custa R$ 0,55". Entretanto, para os autores, quando trabalhamos com quantidades discretas ficamos confinados ao uso de números inteiros. A questão é exemplificada: dizer que "meio carro tem duas rodas" seria absurdo.

O modo como as relações invariáveis são expressas nas situações de co-variação também é diferente da forma como é feita nas situações de correspondência um-para-muitos. Enquanto neste tipo de situações a relação é expressa por uma proporção, "...na situação referente a variáveis diferentes, freqüentemente é sensato falar de *um fator, uma função ou uma terceira variável conectando as duas variáveis*". (Nunes e Bryant, 1997, p.146).

Usando novamente o exemplo do preço do açúcar, é possível falar no *preço por quilo*, que não se refere nem ao custo real nem ao peso real, mas é uma relação entre os dois. Assim, o preço por quilo pode ser considerado como uma terceira variável, conectando as duas primeiras. Se o peso aumentar, o preço também deve aumentar, mas a relação "preço por quilo" deve permanecer constante.

A complexidade desta questão consiste no fato de que esta terceira variável, que conecta as duas variáveis, refere-se à relação entre peso e preço e não às *quantidades de açúcar e dinheiro.*

Em relação a este segundo tipo de situações, Nunes e Bryant (1997) centram sua atenção naquelas em que apenas duas variáveis estão envolvidas e, conseqüentemente, há uma terceira variável que se relaciona às duas iniciais. Entretanto, apontam para os estudos de Vergnaud (1983), nos quais são exploradas situações em que mais do que duas variáveis são consideradas desde o início: são os problemas de proporções múltiplas, claramente mais complexos, para aqueles dois autores.

O terceiro tipo de situações que envolvem raciocínio multiplicativo é apresentado pelos autores nas situações que envolvem a atividade de distribuir. Esta atividade envolve a distribuição eqüitativa de um conjunto (por exemplo, de doces, para um número x de receptores, crianças). A diferença, apontada pelos autores, entre a distribuição e a adição e subtração consiste na relação multiplicativa que a distribuição estabelece entre dois ou mais conjuntos.

A relação parte-todo das situações distributivas é comparada, pelos autores, com esta mesma relação nas situações aditivas e são apontadas as diferenças fundamentais entre os dois tipos de situações:

- nas situações aditivas o tamanho do todo é igual à soma das partes, que não precisam ser iguais (havendo assim apenas uma relação a ser considerada)
- nas situações de distribuição e divisão, há três elementos que precisam ser considerados: o tamanho do todo, o número das partes e o tamanho das partes, que deve, necessariamente, ser o mesmo para todas as partes.

Estes três elementos da situação distributiva podem ser visualizados no exemplo usados pelos autores: "se há 20 doces (o todo) e 4 crianças para partilhá-los (4 partes), há 5 doces por crianças (o tamanho das partes ou quota)".

Os autores comparam, ainda, as situações de distribuição com situações de correspondência um para muitos, diferenciando-as pela posição que a ação da distribuição ocupa em ambas situações. A primeira é o ponto de partida da partição, enquanto que a segunda representa uma ação que está no passado (já é dada), como no exemplo de 1 carro $\rightarrow$ 4 rodas.

Outra diferença importante consiste na utilização que as crianças irão fazer dos três elementos já apontados na relação parte-todo de uma situação distributiva. Esta questão é bem explicitada pelos autores:

> Se você mantém o número de crianças igual e aumenta o número de doces, haverá mais doces por criança, mas se você mantém o número de doces igual e aumenta o número de crianças, haverá menos doces por criança. Há uma relação direta entre o número total de doces e doces por criança, porém uma relação inversa entre o número de crianças e doces por criança. (Nunes e Bryant, 1997, p. 148).

Segundo os autores, estas relações são novas, pois não estão presentes nas situações de correspondência um-para-muitos, nas quais a proporção é fixa desde o início. A compreensão desta relação inversa é necessária para que a criança avance na atividade de simples distribuição para a compreensão da divisão.

Outra característica que difere situações de divisão por distribuição das situações de correspondência um-para-muitos está no aparecimento de frações, que é natural nas atividades de divisão.

Finalmente, os autores mostram que há uma taxa constante nas situações de correspondência um-para-muitos e uma função (ou fator) constante nas situações de co-variação. Nas situações de divisão isso não acontece, pois "...quando a divisão é desempenhada sucessivamente em um conjunto ou objeto, *estas divisões sucessivas provocam uma transformação na relação entre o todo e as partes."* (Nunes e Bryant, 1997, p. 149).

Os autores também apontam, apoiados em Vergnaud (1983), dois tipos de situações de divisão: a dos problemas partitivos (os quais, de acordo com os autores, são mais comumente encontrados pelas crianças em situações de divisão da vida cotidiana) e a dos problemas de divisão por quota. Os problemas do primeiro tipo são considerados mais simples por envolver uma distribuição que pode ser feita na forma de correspondência termo – a – termo, enquanto que os problemas do segundo tipo exigiriam a compreensão da relação inversa entre quociente e divisor, o que é bastante difícil para as crianças.

Até onde compreendemos, estudos de Nunes e Bryant (1997), estão apoiados em Vergnaud, especialmente no que se refere ao enfoque dos campos conceituais, uma vez que fundamentam seus estudos em diferentes tipos de situações que envolvem multiplicação e divisão. Ainda que os tipos de situações apresentadas pelos autores, não sejam organizadas da mesma forma, é possível perceber este apoio em Vergnaud.

Convém ainda, fazer uma referência à classificação de problemas de estrutura multiplicativa proposta por Schwartz (1988), que assume uma abordagem dimensional cujo foco está nos referentes dos valores numéricos do problema. De acordo com o autor, o tipo de referente em questão pode ser uma quantidade intensiva (I) ou uma quantidade extensiva (E). A distinção entre "quantidade extensiva" (E) e "quantidade intensiva" (I) é também baseada em uma análise dimensional. No caso da quantidade extensiva, o referente é uma entidade simples, de uma dimensão, enquanto que a quantidade intensiva envolve, como referente, duas entidades (duas dimensões). Por exemplo: quando nos referimos a 5 carros, estamos nos referindo a uma quantidade extensiva, pois o referente (carro) é uma entidade simples, ou seja, de apenas uma dimensão. Entretanto, se nos referirmos a 60 quilômetros por hora, trata-se de uma quantidade intensiva, pois neste caso, os referentes são duas entidades: quilômetros e horas (duas dimensões).

Na base desta distinção, Schwartz (1988) define três categorias de problemas multiplicativos: Multiplicação de I x E; multiplicação de E x E; multiplicação de I x I. Em função do tipo de problemas selecionados para esta pesquisa, nosso interesse volta-se para os problemas da primeira categoria, os quais, de acordo com Nesher (1988), são os problemas mais comuns. Muitos deles podem ser apresentados também como adição repetida quando, pelo menos, um dos números, a quantidade extensiva, é um número inteiro. Estes problemas também correspondem aos problemas do tipo isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983), quando a quantidade intensiva corresponde à relação funcional. Vejamos um exemplo:

Comprei 4 miniaturas a R$ 5,00 cada miniatura. Quanto gastei?

4 miniaturas representa uma quantidade extensiva (referente: miniaturas)

R$ 5,00 representa uma quantidade intensiva (referente: reais/miniatura).

O problema pede a determinação do preço total (R$ 20,00) que representa uma quantidade extensiva e cujo referente é uma das entidades incluídas na quantidade intensiva.

Franchi (1995) nos lembra, apoiada em Schwartz, que a uma multiplicação podem-se associar duas divisões:

- Divisão E x E : é pedida a determinação de uma quantidade intensiva, ou seja, preço por miniatura. Por exemplo: *gastei R$ 20,00 para comprar 4 miniaturas. Qual o preço de cada uma?* Esta classe equivale à divisão por partição.

- Divisão E x I : é pedida a determinação de uma quantidade extensiva. Por exemplo: *gastei R$ 20,00 para comprar miniaturas. Cada miniatura custaR$ 5,00. Quantas miniaturas comprei?* Esta classe equivale à divisão por quota.

O presente estudo pretende oferecer uma contribuição na compreensão da multiplicação e divisão pelas crianças, utilizando como apoio as idéias de Vergnaud (1991; 1983; 1988) para analisar essa compreensão quando a criança trabalha com situações que envolvem a idéia de compra e venda.

Os estudos do referido autor contribuíram ainda para a seleção dos problemas propostos aos sujeitos desta pesquisa. Tais problemas foram selecionados tomando-se como referência os problemas do tipo isomorfismo de medidas que envolvem multiplicação, divisão por partição e por quota. São tipos de problemas com os quais as crianças se defrontam logo nos primeiros anos de escolaridade.

Por se tratar de situações de compra e venda, nos problemas formulados a partir de encartes de ofertas, podem aparecer números racionais (centavos), os quais são usados pelas crianças no seu dia a dia. Portanto, foi levada em consideração, ainda, a análise dimensional de Schwartz (1988), que permite estender uma mesma classe de problemas aos números naturais e números racionais positivos.

III - MÉTODO

O presente trabalho consiste em uma pesquisa de natureza qualitativa, um estudo de caso em que, como expresso anteriormente, são descritos e analisados os procedimentos notacionais de solução de problemas envolvendo a multiplicação/divisão. Assim sendo, seus aspectos metodológicos são como seguem:

1. Sujeitos:

Foram estudados quatro sujeitos, alunos da terceira série da uma escola particular que oferece gratuitamente educação infantil e ensino fundamental, de 1ª a 4ª série atendendo as famílias de baixa renda do Bairro Alto, em Curitiba.

Os sujeitos foram sorteados, aleatoriamente, entre as crianças de uma das três terceiras séries. Dois deles, selecionados entre do conjunto de alunos que, segundo a professora, apresentavam dificuldades de aprendizagem. Os outros dois, do conjunto dos alunos que não apresentavam dificuldades de aprendizagem. Considerando que as turmas daquela escola possuíam alunos com idade acima da adequada à série e que estes representavam uma parcela considerável do total de alunos, um sujeito de cada conjunto foi sorteado entre os alunos com mais de 10 anos.

Para tanto a professora da turma foi solicitada a fazer uma listagem de alunos organizando-a em dois grupos distintos: alunos com dificuldade de aprendizagem em matemática e alunos sem dificuldade, indicando em cada grupo, quais os alunos com mais de 10 anos.

Nossos sujeitos são designados a seguir, com alguns dados de sua história escolar. As idades, indicadas em anos e meses, são as que eles tinham no início da coleta de dados (2º semestre letivo de 2 000):

BAR (9;4): do sexo feminino, foi matriculada naquela escola em 1997, para cursar a pré-escola (educação infantil). Não foi repetente em nenhuma série, e, segundo a professora, não apresentava dificuldades de aprendizagem em matemática.

CLE (9;8):do sexo masculino, foi matriculado na escola em 1998 para cursar a primeira série. Não foi repetente em nenhuma série e, segundo a professora, apresentava dificuldades de aprendizagem em matemática.

ALD (10;6): do sexo feminino, foi matriculada na escola em 1998 para cursar a segunda série, a qual repetiu em 1999. Segundo a professora, não apresentava dificuldade de aprendizagem em matemática.

ANTO (13;6): do sexo masculino, foi matriculado naquela escola em 1999 para cursar a terceira série. Saiu no início do ano, por motivo de mudança de cidade e ficou sem estudar naquele ano. Retornou para a escola em 2000, matriculando-se novamente na terceira série. Cursou a primeira série em 1994, fora de Curitiba, ficando sem estudar de 1995 a 1997. Voltou a estudar em 1998, em outra escola de Curitiba, na segunda série. Segundo a professora, é um aluno que apresenta dificuldade de aprendizagem em matemática.

2. Procedimentos de coleta de dados:

Para a coleta de dados, foram realizadas duas sessões com cada sujeito individualmente. Eles eram solicitados a resolver seis situações problema de compra, tendo como recurso encartes de ofertas, propostos oralmente pela entrevistadora.

Os problemas foram elaborados e selecionados de acordo com a classificação dos diferentes subgrupos de problemas de estrutura multiplicativa apresentada por Vergnaud (1983). Todos apresentam uma estrutura que consiste de uma proporção direta entre duas medidas[6].

Para cada sujeito, os problemas foram apresentados oralmente, um a um (os três primeiros na primeira sessão e o restante na segunda sessão), com a utilização dos encartes: um de mercado (com fotografias dos produtos e seus preços) e o outro de uma loja de departamentos (com fotografias de peças do vestuário e os respectivos preços, conforme anexo 1). A cada problema apresentado, os sujeitos recebiam uma nova cartolina (½ folha) e canetinhas coloridas para realizar, livremente, o registro

[6] A elaboração dos problemas apresentados, além de fundamentada na referida teoria, foi feita também a partir da análise do estudo piloto realizado no 1° semestre letivo de 2 000 (ver anexo 2).

gráfico de seus procedimentos de solução. Um dos sujeitos preferiu registrar esses procedimentos de todos os problemas na mesma folha.

A solicitação para que o sujeito registrasse suas notações neste tipo de material, já usada em outras pesquisas (ver, por exemplo, Moro, 1998), teve como objetivo deixar os sujeitos mais livres para usar procedimentos notacionais diferentes daqueles feitos na escola. Na sala de aula, em geral, os alunos usam apenas lápis grafite em folhas de caderno ou em folhas de atividades com espaços bem delimitados para os procedimentos de solução.

Quando a criança finalizava as notações referentes à solução de cada problema era solicitada a dar explicações sobre os procedimentos de solução usados e sobre as notações feitas. A entrevistadora, usando o estilo de entrevista clínico-crítica (Piaget,1975), pedia explicações sobre as soluções apresentadas pelos sujeitos e propunha novas questões que se faziam necessárias para melhor compreensão do pensamento da criança.

A primeira sessão sempre iniciou a partir de uma conversa de "familiarização" com o instrumento utilizado. Cada sujeito era indagado sobre o significado dos encartes de ofertas apresentados: o que são, para que servem, onde podem ser encontrados; quem utiliza estes encartes com maior freqüência, e se podem ser úteis para ela mesma em alguma situação.

Este tipo de intervenção tem relação com o teste informal aplicado por Carraher, Carraher e Schliemann (1995), já descrito na revisão de literatura deste trabalho. Entretanto, nossos sujeitos não foram abordados a respeito de situações de trabalho, fora da escola, como na investigação dos autores citados. Os sujeitos da presente pesquisa foram abordados dentro da escola, mas fora da sala de aula, quando foram propostas as situações de forma diferente daquela tradicionalmente feita na escola (que, em geral, são propostas a partir de enunciados verbais por escrito).

São descritos, a seguir, os problemas que foram propostos às crianças nas sessões de entrevista.

Os três primeiros problemas foram apresentados usando-se uma folha de encarte de mercado, com a figura, entre outras, de uma embalagem com 4 copos de leite fermentado e com o respectivo preço: R$ 2,10 (ver anexo 1a).

1. Esta embalagem, de leite fermentado, custa R$ 2,10. Se você fosse até o mercado e quisesse comprar 6 embalagens iguais a estas, quanto de dinheiro gastaria?

2. Se você for ao mercado com R$ 21,00 e quiser gastar esse dinheiro comprando embalagens de leite fermentado iguais a esta. Quantas embalagens você poderá comprar?

3. E se você levasse apenas R$ 10,00 para comprar embalagens como estas, quantas delas você poderia comprar?

Para a apresentação dos problemas 4 e 5 foi usado o segundo encarte, com a fotografia de duas blusas, sendo que para uma delas era indicado o respectivo preço: R$ 19,00 (ver anexo 1b).

4. Esta blusa custa R$ 19,00. Se você quiser comprar 5 blusas iguais a esta, quanto irá gastar?

5. Uma pessoa comprou 5 blusas iguais a esta outra e gastou R$ 60,00. Qual era o preço de cada blusa?

O último problema, ainda envolvendo a idéia de compra, foi apresentado a partir de um encarte com a fotografia de duas camisetas, sem indicação do respectivo preço (ver anexo 1c).

6. Uma pessoa comprou 4 blusas iguais e pagou R$ 42,00. Qual era o preço de cada blusa?

Como os problemas foram propostos oralmente, ocorreram algumas variações na linguagem usada em seu enunciado. Contudo, não houve qualquer modificação que alterasse o sentido dos mesmos.

Conforme já mencionado, todos os problemas possuem uma estrutura que consiste de uma proporção direta entre duas medidas, ou seja, pertencem ao subgrupo dos problemas de estrutura multiplicativa, denominado por Vergnaud (1983) como *isomorfismo de medidas*.

Os problemas 1 e 4 são problemas de multiplicação. Os problemas 2, 3, 5 e 6 são problemas de divisão, de dois tipos: divisão por partição (5 e 6) e divisão por quota (2 e 3).

No problema 1 a embalagem de leite fermentado contém 4 copos (é uma unidade composta) e o seu valor unitário é representado por um número de magnitude pequena (R$ 2,10). O problema pode ser representado pela fórmula:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2{,}10 \\ 6 \longrightarrow x \end{array}$$

Já no problema 4, trata-se de um único elemento (1 blusa), cujo valor unitário (R$ 19,00) é um número de magnitude maior que o valor unitário apresentado no problema 1. O problema pode ser representado pela fórmula:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 19{,}00 \\ 5 \longrightarrow x \end{array}$$

O problema 2 envolve divisão por quota e trata-se de uma divisão exata. Este problema pode ser representado pela fórmula:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2{,}10 \\ x \longrightarrow 21{,}00 \end{array}$$

O problema 3 também envolve uma divisão por quota , mas trata-se de uma divisão inexata, ou seja, com resto. Pode ser representado pela fórmula:

$1 \longrightarrow 2{,}10$
$x \longrightarrow 10{,}00$

O problema 5 envolve uma divisão por partição, sem resto. É representado pela fórmula:

$5 \longrightarrow 60{,}00$
$1 \longrightarrow x$

Finalmente, o problema 6 também envolve uma divisão por partição, cujo quociente é uma fração decimal. Pode ser representado pela fórmula:

$4 \longrightarrow 42{,}00$
$1 \longrightarrow x$

3. Procedimentos de registro de dados:

As sessões foram filmadas, em vídeo, na íntegra e os dados (ações, verbalizações, produção de registros gráficos) transcritos em protocolos de entrevista (um para cada sujeito). Nestes protocolos, foram registrados os comportamentos dos sujeitos o mais objetivamente possível, compondo a seqüência de dados brutos para análise. Nesta transcrição consta, na íntegra, as falas do entrevistador e dos entrevistados, bem como gestos e movimentos dos sujeitos durante a entrevista (o leitor pode encontrar um exemplo deste tipo de protocolo no anexo 2). Após essa transcrição, as gravações das duas sessões realizadas com cada um dos sujeitos foram novamente assistidas, para revisão dos dados registrados em cada protocolo.

Trata-se de uma descrição minuciosa que pretende conseguir melhor precisão dos dados registrados (Gillieron, 1980).

Os protocolos das entrevistas, juntamente com as notações das crianças nas cartolinas, constituíram o material de análise desta pesquisa.

4. <u>Procedimentos de análise dos dados:</u>

Neste estudo, foi realizada uma análise qualitativa para caracterizar os procedimentos notacionais de solução expressos pelos sujeitos para cada problema. Para esta caracterização foram analisados dados relativos às seguintes etapas:

a) ocorrência ou não de algum tipo de antecipação da solução do problema (antes da produção da notação).

b) processo de produção da notação e seu resultado (notação final)

c) interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações.

No exame inicial dos dados brutos (protocolos e notações), primeiro foram feitas descrições parafraseadas dos dados coletados em cada sessão, por sujeito, considerando todo o processo de solução mas sem uma organização desta descrição de acordo com os diferentes momentos da solução já descritos acima. Foi a primeira etapa de análise.

Numa segunda etapa, com referência à primeira descrição, foi feita uma descrição interpretativa dos procedimentos notacionais de solução dos sujeitos. O foco ainda estava nos processos de solução, por sujeito, mas esta descrição já apontava para uma caracterização dos tipos de procedimento de solução expressos nas notações, e para as interpretações que os sujeitos faziam destas notações. Nesta etapa também foi possível perceber a regularidade da ocorrência de antecipações de solução apresentadas pelos sujeitos, (ao iniciar-se a produção da notação). Já foi possível, então, esboçar uma categorização a partir dos três diferentes momentos do processo: antecipação da solução, produção da notação e interpretação das notações. Mas esta categorização era provisória, sem estarem ainda organizados e claramente descritos os tipos de antecipação, notação ou interpretação.

Na terceira etapa de análise, foi feita uma descrição interpretativa dos procedimentos de solução por problema e não mais por sujeito. Estas descrições foram organizadas, então, de acordo com os três momentos da solução. A necessidade de categorização foi levantada a partir da descrição realizada na etapa anterior. Assim, fizemos uma análise por categorias, descrevendo os diferentes tipos encontrados de antecipação, notação e interpretação para cada problema. Os tipos descritos em cada categoria, nos permitiram fazer algumas comparações, no que foi a quarta etapa da análise:

a) entre os procedimentos usados na solução dos diferentes tipos de problemas para investigar se há predominância de algum tipo de procedimento de solução.

b) entre os diferentes procedimentos usados na solução dos diferentes tipos de problemas para encontrar possíveis diferenças devido à estrutura do problema: multiplicação, divisão por partição e divisão por quota.

b) entre os procedimentos usados na solução de dois problemas de um mesmo tipo, para investigar a interferência de variáveis como:

- a magnitude dos valores em questão (como nos dois problemas de multiplicação);
- a ocorrência ou não de resto (no caso dos problemas de divisão por quota);
- a necessidade de utilização de fração decimal para designar um quociente (no caso dos problemas de divisão por partição).

c) entre os procedimentos de solução usados pelas crianças mais novas e pelas crianças mais velhas, identificando semelhanças e diferenças entre estes procedimentos.

IV - ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos dados é apresentada, neste capítulo, por problemas. Para cada problema é feita uma análise por categorias, com a descrição dos diferentes tipos encontrados para: a) antecipação da solução; b) produção da notação e c) interpretação da notação.

Problema 1.

Relembrando, este problema consiste em determinar o valor de 6 embalagens de leite fermentado, conhecendo o valor unitário (R$ 2,10).

1. Antecipação da solução:

Na solução deste problema os quatro sujeitos apresentaram algum tipo de antecipação, conforme descritas a seguir:

a. *Antecipação da possibilidade de se resolver o problema através de uma "conta":* Neste tipo de antecipação o sujeito declara a necessidade de fazer uma conta, ou a possibilidade de se resolver o problema através dela, sem, contudo explicitar o tipo de conta que irá usar.

Como exemplo, temos a fala de CLE (9;8):

E: **e se você quisesse ir lá no mercado e fosse diferente. Você não queria levar só um desse** (aponta o leite fermentado) **se você quisesse levar 6 desse aqui. Aí dava para descobrir quanto que você ia pagar?**
CLE: (olha para o encarte enquanto E fala, olha para E) **só fazendo conta.**

b. *Antecipação do tipo de procedimento a ser usado , mas não do resultado*: neste tipo de antecipação o sujeito verbaliza o tipo de "conta" que irá utilizar, sem, contudo, antecipar o resultado.

Como exemplo, temos a fala de ANTO (13;6):

E: **mas agora vamos fazer uma coisa diferente. Nós vamos imaginar que você está indo lá no mercado e você precisa comprar 6 caixinhas desta** (aponta).
ANTO: (olha para o encarte) **seis?**
E: **isso. Você já podia saber quanto de dinheiro tem que levar, ou não?**
ANTO: (olha para a esquerda, sorri) **ahã.**
E: **como é que você podia descobrir?**
ANTO: (olhando para E) **fazendo a conta.**
E: **e que conta você faria? Como?**
ANTO: (olha para cima) **é...** (olha para baixo) **deixa eu ver...** (olha para o encarte) **seis vezes dois e...** (olha para E) **é seis né?**
E: **são 6 caixinhas.**
ANTO: **então 6 vezes 2 e 10** (coloca o dedo na boca).
E: **você faria isso?**
ANTO: **ahã.**
E: **então daí você consegue descobrir o valor?**
ANTO: **ah... não sei.**

No exemplo, o sujeito também declara que o problema pode ser resolvido através de uma "conta", mas, provocado pela entrevistadora, verbaliza o tipo de conta que irá utilizar.

No caso de ANTO, embora ocorra antecipação do tipo de procedimento que será usado para encontrar o valor das 6 embalagens, ele mostra ainda precisar de uma verificação empírica da validade do procedimento.

c. *Antecipação do resultado por cálculo mental:* neste tipo de antecipação o sujeito estima já um resultado. Há também uma explicitação do procedimento usado para obtenção do resultado anunciado. Tal explicação é provocada pela entrevistadora.

Como exemplo, temos a fala de BAR (9;4):

E: **se você quisesse levar 6, você já podia saber em casa, quanto de dinheiro você tinha que levar?**
BAR: (olhando para E) **onze reais.**
E: **e como é que você sabe que são onze reais?**
BAR: **porque...** (olha para cima, depois olha para a mesa, onde coloca a mão direita, movendo os dedos sobre ela como se estivesse escrevendo o que fala com os dedos) **2 e 10, daí, vezes 6. Seis vezes dez é igual a 10... 10 não, 60. Daí 6 vezes o dois é igual a 12. Coloco o 12 aqui, é igual a 12.**

Nesse exemplo, ao explicar à entrevistadora como descobriu o resultado, o sujeito corrige sua estimativa. Verbaliza o valor unitário e indica que ele deveria ser multiplicado por 6, usando mímica para representar o cálculo que está fazendo, como se estivesse escrevendo sobre a mesa com o dedo.

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos neste problema são todas numéricas. Podemos classificar estas notações em dois tipos: aditivos e multiplicativos.

a. A*ditivos em "contas" no formato escolar*: consistem na marcação do multiplicando ou valor unitário (R$ 2,10) em número de parcelas referente ao multiplicador ou número de embalagens (6). Estes valores são dispostos em colunas e acompanhados do sinal de mais, conforme o algoritmo canônico da adição. Enquanto o sujeito anota os valores unitários mantém a preocupação com o multiplicador, contando mais de uma vez o número de parcelas registradas, antes e depois de completar as seis parcelas.

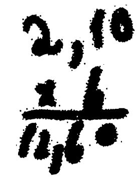
Como exemplo, temos a notação de ALD (10;6)

2.10
2.10
2.10
2.10
2.10
+2.10
12.60

Neste tipo de notação, o sujeito usa a relação escalar, ao trabalhar com a idéia de que 6 embalagens custam 6 vezes o valor de uma embalagem, expressando esta relação como a iteração de pagar R$ 2,10 (preço de uma embalagem) seis vezes, sendo o resultado obtido pela adição repetida.

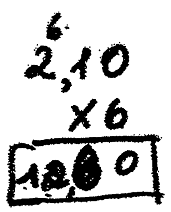
b. *Multiplicativos em "contas" no formato escolar*: consistem na marcação do multiplicando ou valor unitário (R$ 2,10) e do multiplicador (número de embalagens) acompanhado do sinal de vezes, no formato convencional (das "contas" escolares). O resultado marcado é obtido pela multiplicação.

Como exemplo, temos a notação de ANTO (13;6).



No exemplo mostrado, o sujeito afirma que o resultado obtido é o preço das seis embalagens. Embora não tenha demonstrado segurança quanto à validade deste procedimento quando o antecipou verbalmente, agora ele atribui ao resultado da multiplicação efetuada a resposta do problema.

BAR (9;4) também faz uma notação deste tipo e, embora tenha estimado corretamente o valor das 6 embalagens, não obtém o mesmo resultado quando produz sua notação.



Multiplica 6 por 10 (centavos) e, obtendo 60 como resultado usa indevidamente a regra do "vai um", registrando o zero abaixo do traço e o 6 acima do 2. Com isso, ao multiplicar os reais, ela obtém 18 como resultado (6x2=12 e 12+6=18). Registra então 1, sobre o qual coloca, depois, o 2 do 12) e registra o 8 mais à direita (sobre o qual depois ela registra o 6). O sujeito percebe que há uma incorreção em seu resultado, pois ele não é compatível com a estimativa que havia feito anteriormente. Verbaliza isso quando termina de anotar o resultado: **"tem alguma coisa errada"**.

Depois, quando interpreta sua notação, com a intervenção da entrevistadora é que corrige seu resultado, registrando R$ 12,60.

3. Interpretação da notação produzida:

As interpretações que os sujeitos fizeram das suas notações possuem conteúdo explicativo sobre os procedimentos usados para solucionar o problema, e também conteúdo avaliativo através do qual os sujeitos julgam a adequação de um procedimento ou notação e corrigem os resultados obtidos, durante a interpretação

Os dois sujeitos que produziram notações do tipo aditivo, interpretam sua notação como uma conta feita para descobrir o resultado. É exemplo a fala de ALD (10;6):

E: **tá, então agora me explica isso que você descobriu. O que você fez, como você pensou, que você fez esse 2,10** (aponta) **outro 2,10... o que é isso?**
ALD: (olha para a folha, tampa a canetinha e fica mexendo nela com as duas mãos enquanto E fala. Fica olhando para frente, murmura) **hã... prá mim é uma conta, é... prá vê... prá adivinha quanto que é mais ou menos as coisas** (enquanto fala fica girando a canetinha nas mãos).

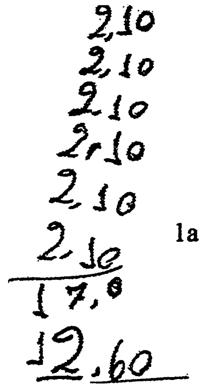
Com a intervenção da entrevistadora, os dois sujeitos explicam o significado dos números envolvidos na "conta" que fizeram, distinguindo o multiplicando (valor unitário) do multiplicador (número de embalagens). Podemos ilustrar isso na continuação da fala de ALD:

E: **ahã, mas e esse 2,10, o que é?** (aponta para o primeiro 2,10 registrado).
ALD: (olha para seu registro, olha para frente) **é o preço do leite fermentado.**
E: **isso, se você quer levar uma embalagem você paga isso** (aponta para o encarte e novamente para os registros) **e quantos têm aqui?**
ALD: (olha para E) **tem doze... doze reais e sessenta centavos.**
E: **ahã, e por que tem 2,10** (aponta), **outro 2,10** (aponta), **outro 2,10** (aponta)?
ALD: **ah, prá eu descobrir quanto que é.**
E: **ahã, e quantos têm aí? Quantos 2,10 você colocou?**
ALD: (olha para E) **seis.**
E: **ahã, por que 6?**
ALD: (olha para frente) **porque era 6 embalagem.**

As interpretações deste tipo (bem como as próprias notações) sugerem a compreensão que estes sujeitos têm da multiplicação, como adição reiterada de parcelas iguais.

Ao explicarem como efetuaram o cálculo para obter o resultado presente na notação, dois sujeitos verbalizam seus procedimentos em uma ordem diferente daquela usada na produção da notação (no modo convencional). Enquanto naquele momento iniciaram o cálculo pelos centavos para depois operar com os reais, na verbalização indicaram ter iniciado pelos reais para então efetuar o cálculo com os centavos.

CLE (9;8) faz isso e, usando este procedimento verbalizado por ele, refaz o cálculo por sugestão da entrevistadora e corrige seu resultado. Abaixo do primeiro resultado, ele anota a soma dos reais e em seguida a soma dos centavos.

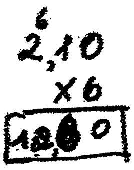


1a

1b

Para este sujeito, este tipo de interpretação avaliativa tem como conseqüência a produção de uma nova notação (1b).

Além do exemplo mostrado, BAR (9;4) também usa esta ordem diferente de efetuar o cálculo (iniciando pelos reais para depois multiplicar os centavos) para corrigir o resultado que ela mesma considerou incorreto. Temos, em suas interpretações um exemplo de conteúdo avaliativo.



BAR: **tem alguma coisa errada.**
E: **o que será? Vamos pensar, o que você fez aqui?** (aponta o multiplicador e o 0 do 10).
BAR: (aponta estes registros com a canetinha) **aqui deu 6** (aponta para o 6 que registrou acima do 2) **tá. Daí aqui...** (aponta para o 2 e para o multiplicador) **12 mais...** (coloca a canetinha abaixo de seus registros) **... eu acho que tá errado** (leva a canetinha novamente até a boca).

Num primeiro momento, o sujeito procura explicar o seu registro com base nas próprias regras do algoritmo convencional que tentou seguir, o que confirmou o resultado registrado.

Em seguida, usa um procedimento pessoal de cálculo, obtendo o resultado que lhe faz sentido. Percebemos isso em sua fala enquanto explica (parece ser mais uma explicação para ela mesma do que para a entrevistadora) o que fez para obter aquele resultado (R$ 18,00):

E: **aqui você fez primeiro o que para dar esse zero aqui?** (aponta o 0 registrado por BAR).
BAR: (leva a canetinha até o 8) **aqui é seis** (registra 6 sobre o 8) **e aqui é um...** (registra 1 à esquerda do 1 já registrado anteriormente, olha para este registro) **um não! Aqui é dois.** (registra 2 em cima do 1 do 18 que já havia registrado anteriormente. Coloca uma vírgula entre o 12 e o 60. Olha para E) **doze e sessenta?**
E: **como que você fez isso aí agora? Explique para mim.**
BAR: (aponta seus registros com a canetinha) **porque duas vezes o seis é doze e seis vezes o dez é igual a sessenta** (à medida que fala, aponta em seu registro cada número citado).

Os dois sujeitos que produziram notações de tipo multiplicativo, parecem ver a multiplicação também como uma forma "abreviada" de adição. Afirmaram que poderiam também resolver o problema de outra forma, mas optam pelo procedimento que consideravam mais fácil. A fala de ANTO (13;6) ilustra isso:

E: **isso. Dava prá fazer de outro jeito também ou só desse? O que você acha?**

ANTO: (olha para seu registro, sorri) **dava prá fazer de outro jeito** (balança a cabeça para frente).
E: **que outro jeito poderia ser? Não precisa fazer, vamos só pensar se tem outro jeito!**
ANTO: (olha para o papel, olha para o encarte) **hum...** (olha para o papel) **deixa eu ver** (olha para o encarte) **podia ser 6 vezes o mesmo...** (aponta o 2,10 no encarte) **número** (olha para E).
E: **podia por 6 vezes o mesmo número, ahã. Tá, e aqui** (aponta o registro) **por que você fez 6 vezes o 2,10?**
ANTO: (olha para seu registro, sorri) **ah, porque é mais fácil.**

Para BAR (9;4) a multiplicação e a adição podem ser a mesma coisa, quando se trata de uma adição repetida:

E: **por que você fez desse jeito, assim, com uma continha de vezes?** (aponta a conta).
BAR: (pega a canetinha do estojo) **dava pra fazer de mais também** (abre a canetinha) **só que é mais "compricado".**

Depois que produz a notação de tipo aditivo e obtém o mesmo resultado, explica:

E: **dá a mesma coisa?**
BAR: **ahã** (tampa a canetinha e levanta o tronco)
E: **por que dá a mesma coisa esse** (aponta a notação de tipo multiplicativo) **e esse?** (aponta a notação de tipo aditivo).
BAR (olhando para a folha) **porque vezes** (aponta a 1ª notação) **e mais...** (coloca um sinal + na 2ª notação) **é igual** (tampa novamente a canetinha).

Problema 2

Relembrando, este problema consiste em determinar o número de embalagens de leite fermentado (cujo valor unitário é R$ 2,10) que é possível comprar com R$ 21,00. É, portanto, um problema de divisão por quota.

1. Antecipação da solução:

Nem todos os sujeitos apresentaram algum tipo de antecipação de solução anterior à produção da notação. Descrevemos a seguir a ocorrência ou não de antecipação para este problema e os tipos de antecipação de solução encontrados.

a. *Não ocorrência de antecipação de resultado ou do tipo de procedimento a ser usado:* o sujeito inicia sua notação sem nenhum tipo de antecipação anterior ao início da produção da notação.

b. *Antecipação da dificuldade para responder ao problema:* neste tipo de antecipação o sujeito diz não saber como resolver o problema. Mostra que o considera como um problema "difícil".

ANTO (13;6) faz este tipo de antecipação . Vemos em sua fala que ele não consegue antecipar um procedimento para solucionar o problema.

E: **quantas caixinhas destas será que você ia conseguir comprar?**
ANTO: (fica olhando para seu registro).
E: **pode usar este lado aqui agora** (vira a cartolina, deixando-a com o lado em branco voltado para cima). **Você tem o lado inteirinho agora. Se quiser desenhar... se quiser fazer daquele jeito como você... você é que escolhe. Só que eu quero saber quantas caixinhas que você ia conseguir com vinte e um reais.**
ANTO: (ajeita a folha com a mão direita, leva a mão até a boca, tira, olha para frente, sorri, abaixa a cabeça) **"ish"...** (abaixa a cabeça sobre as mãos).
E: **pode fazer do jeito que você quiser. Essa folha aí é inteira tua.**
ANTO: (fica com a cabeça sobre as mãos que estão encostadas na mesa. Olha para a folha, pega a canetinha) **vinte e um reais. Tá bom** (destampa a canetinha, olha para o encarte à sua esquerda, olha para a canetinha que segura com as duas mãos, tampando e destampando-a olha para a câmera, sorri, olha para E, abaixa a cabeça, encosta a canetinha na boca) **21** (olha para a canetinha, que afasta da boca, sorri) **eu não sei** (olha para o encarte).

c. *Antecipação por estimativa de conteúdo qualitativo (sem utilização de "números"):* neste tipo de antecipação o sujeito estima que, com a quantia em questão (R$ 21,00) poderia levar mais embalagens que no problema anterior sem, contudo, fazer uma estimativa quantitativa (o número de embalagens). O resultado do problema anterior é usado como referência para esta estimativa.

É exemplo a fala de ALD (10;6):

E: **ia dar prá comprar várias caixinhas, poucas caixinhas... quantas você acha que daria prá comprar?**
ALD: (olha par E, olha para a folha, franze a testa, leva a mão direita até o queixo com o cotovelo apoiado na mesa. Olha para E) **bastante.**
E: **bastante? Por que você acha que é bastante?**
ALD: (olha para a folha) **porque...** (aponta para a notação produzida no problema anterior) **essas caixinhas...** (leva a mão até a testa) **caixinhas... deu 12,60** (aponta com a mão direita seus registros e

pega a canetinha que está sobre a folha e movimenta-a no ar enquanto fala) **e com vinte reais dá prá comprar mais** (olha para E).

No exemplo, ao explicar sua estimativa, o sujeito usa um valor aproximado, falando em R$ 20,00 e não em R$ 21,00, que era a quantia exata. Este valor (R$ 20,00) é comparado com o resultado obtido no problema anterior (R$ 12,60) e, sendo maior que este último, possibilita a compra de um número maior de embalagens.

d. *Antecipação do resultado por estimativa de conteúdo quantitativo:* neste tipo de antecipação o sujeito estima um resultado a partir de uma análise do resultado obtido no problema anterior.

É exemplo a fala de CLE (9;8):

E: **daria bastante caixas, você acha... poucas, quantas caixinhas mais ou menos você acha que daria para comprar?**
CLE: (apóia os dois cotovelos sobre a mesa e fica com os dedos das duas mãos encostados nas laterais da testa. Fica olhando durante algum tempo para os registros que fez, abaixa o braço direito sobre a mesa, olha para E) **umas 18.**
E: **será que tudo isso? Por que? Como é que você descobriu que dá umas 18 caixas?**
CLE: **ah, porque...** (olha para seu registro) **eu acho que dá 18 porque...** (aponta os registros do problema 1 com a canetinha e leva a mão até a cabeça, apoiando-a) **tipo assim ó... dá... tem 6 dá 12... 6 dá... 12,60** (enquanto fala, olha e aponta para o registro de 12,60 feito para o primeiro problema).
E: **então você acha que é mais do que 6 caixas, né?**
CLE: (olha para E) **é.**

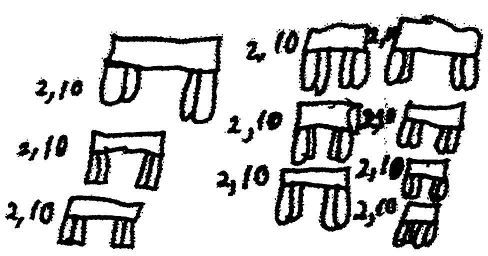
Neste exemplo, a quantidade de embalagens é estimada também pela comparação do valor disponível para a compra neste problema (R$ 21,00) com o valor usado (no problema anterior) para comprar 6 embalagens. Como R$ 21,00 é maior que R$ 12,60 a criança conclui que será possível comprar também um número maior de embalagens.

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos neste problema podem ser classificadas nos seguintes tipos:

a. *Aditivo com desenhos tendo algarismos como etiquetas:* neste tipo de notação a criança desenha as embalagens acompanhadas de algarismos que representam o valor da embalagem (R$ 2,10). O desenho da embalagem, acompanhado da "etiqueta" é feito repetidas vezes.

É exemplo a notação produzida por ANTO (13;6).



No exemplo, o sujeito já vai somando os valores unitários a medida em que são registrados (um a um acompanhados dos desenhos). Isso pode ser verificado quando inicia o registro do quarto valor unitário, pois ele aponta cada um já feito e verbaliza a soma dos três valores unitários.

Ele ainda aponta cada registro mais duas vezes enquanto faz sua notação. Quando chega ao último registro de embalagem, acompanhada do valor unitário, aponta novamente os primeiros registros e depois verbaliza a contagem dos reais, finalizando com o valor do dividendo: R$ 21,00.

ANTO: (olha para frente e volta a apontar cada registro com a canetinha. Olha para os registros e repete este movimento murmurando) **2, 4, 6, 8, 10, 12... 16... 21** (olha para E).

O sujeito conta, um a um, os valores, em reais, das 6 primeiras caixinhas. Depois agrupa estes valores dois a dois nas quatro últimas caixas e inclui a somatória dos centavos no último resultado.

Sua notação, bem como as verbalizações que faz enquanto produz a notação, sugerem que o tipo de procedimento de solução usado por ele consiste em adicionar o valor unitário até obter o dividendo (valor total gasto), descobrindo a resposta pelo número de vezes que este valor unitário foi adicionado. Isso sugere ainda, que a solução ocorre mediante a identificação do número de partes iguais contidas no total.

b. A*ditivo em expressões de adição no formato escolar:* consiste na marcação do valor unitário repetidas vezes, lado a lado, separadas pelo sinal de mais (+), até obtenção do dividendo (R$ 21,00), pela adição destes valores unitários.

É exemplo a notação produzida por ALD (10;6).

2b 2.10+2.10+2.10+2.10+2.10+2.10 = 12.60
2c 2.10 +2.10 +2.10 +2.10.1. = 8.40

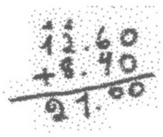
2c.1

Sua notação é feita em duas expressões distintas: a primeira contendo 6 parcelas e o respectivo resultado (R$ 12,60, notação 2a) e a segunda contendo mais quatro parcelas (notação 2c, inicialmente sem o resultado, que é colocado mais tarde, por intervenção da entrevistadora: notação 2c.1). Na primeira expressão é registrada uma adição de 6 embalagens, cujo total o sujeito já havia calculado no primeiro problema. Na segunda expressão é registrada uma adição de 4 parcelas, cujo total, adicionado ao total da primeira expressão, completa o valor do dividendo.

Esta notação sugere um procedimento de solução que consiste em adicionar o valor unitário até obtenção do dividendo. A resposta do problema é obtida pela contagem do número de vezes que o valor unitário foi adicionado.

c. *Notação de tipo aditivo em "contas" no formato escolar:* consistem em adições no formato do algoritmo convencional, com os valores registrados um abaixo do outro, organizados em colunas (dezenas e unidades).

Como exemplo, temos as notações produzidas por ALD:

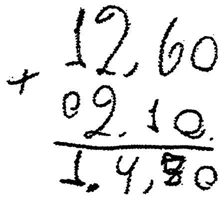
2d   2e

Quando ALD julga ter marcado o valor unitário em número de vezes suficiente para obtenção do dividendo (ver notação mostrada na tipologia anterior, 2b e 2c), produz a notação 2d como uma verificação. Adiciona, então, o resultado da adição de seis partes (R$ 12,60) com o valor total ou dividendo.

Verificamos que o sujeito possui uma compreensão parcial da relação parte todo envolvida nesta divisão, segundo a qual somando o valor total das partes (6 partes e 4 partes) deveria obter o valor total gasto ou dividendo. Em sua tentativa de verificação, o sujeito efetua corretamente o algoritmo, mas percebe que o resultado obtido não tem sentido em relação ao problema.

Com a intervenção da entrevistadora, marca o valor total da segunda expressão de adição (4 partes de R$ 2,10: notação 2c.1) e adiciona então a soma das partes (notação 2e – o valor de 6 embalagens e o valor de 4 embalagens), obtendo como resultado o dividendo (R$ 21,00). Para responder o problema, o sujeito conta o número de partes registradas nas expressões numéricas (cada valor unitário).

Outro exemplo é a primeira notação produzida por CLE (9;8) na resolução deste problema. O sujeito parte do valor de 6 embalagens (descoberto no problema 1) e adiciona o valor unitário (R$12,60). A adição é feita por cálculo mental e a notação abaixo, produzida a pedido da entrevistadora, refere-se a esta primeira adição feita, para a qual, no cálculo mental ele obteve R$ 14,80 como resultado.



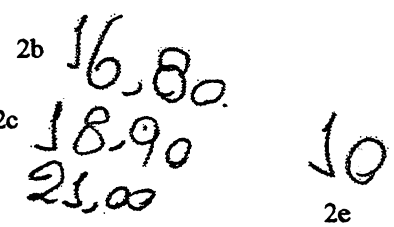
2a

O sujeito registra uma adição de R$ 12,60 (valor das 6 embalagens) com R$ 2,10 (valor de uma embalagem). Mas ao efetuar esta adição parece não compreender a relação entre este seu registro e o cálculo feito mentalmente, pois, em vez de adicionar os centavos, ele os subtrai. Apesar disso, ele parece usar o resultado obtido mentalmente como referência de análise do resultado registrado para esta adição: inicialmente coloca a vírgula entre o 1 e o 4, ficando com um resultado que equivaleria a R$ 1,450. Este valor que é corrigido por ele mesmo, deslocando a vírgula para a direita do 4 (assim embora não estivesse compreendendo a relação entre o cálculo feito e sua representação escrita, ele tentou atribuir um significado ao resultado encontrado).

d. *Aditivo com escrita numérica dos resultados de adições efetuadas mentalmente:* consiste no registro de números como resultados de adições cumulativas feitas mentalmente.

As notações que CLE produz depois daquela já citada, são exemplos deste tipo de notação.

2b 2c 2d



2e

No exemplo, as notações se referem ao valor de 8 (R$ 16,80), 9 (R$ 18,90) e 10 embalagens (R$ 21,00), os quais são calculados mentalmente.

Enquanto adiciona o valor unitário ao valor total das partes já adicionadas, CLE controla o número de embalagens a que se refere cada novo total encontrado. Isso é feito com a intervenção da entrevistadora, sendo que a produção destas notações é intercalada com interpretações por parte do sujeito.

Podemos dizer que as notações até aqui descritas, em uma categorização mais ampla, são todas notações aditivas. Entretanto, considerando suas especificidades de expressão gráfica, apresentamos uma tipologia própria, separando-as em subtipos de notações aditivas.

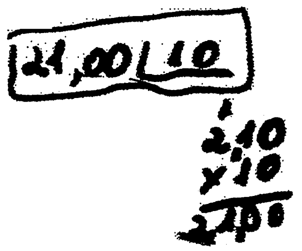
e. *Notação numérica de resultado do problema proposto:* consiste no registro de um número que indica a resposta do problema.

É exemplo a última notação feita por CLE (ver notação 2e na página anterior), que representa o número de caixas que é possível comprar com o valor total de dinheiro (R$21,00).

e. *Divisão incompleta no formato escolar:* consiste no registro do valor total como dividendo, acompanhado da chave da divisão, sem o registro do divisor ou com um divisor não correto. O cálculo da divisão não é efetuado usando-se esse registro.

É exemplo a notação produzida por BAR (9;4)

2a



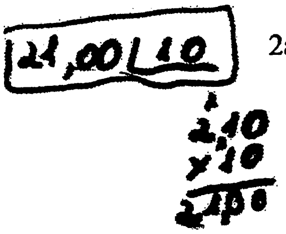
2b

Neste exemplo o valor total disponível para compra (R$ 21,00) é registrado corretamente como dividendo acompanhado da chave da divisão (usada no algoritmo convencional), mas o valor unitário não é usado como divisor (ver em 2a). O número que BAR registra como divisor é o resultado do problema.

Embora reconheça este problema como sendo de divisão, o sujeito não representa os termos da divisão no formato convencional. Para resolvê-lo, estima uma quota (número de embalagens), registrando-a como divisor. O cálculo desta quota é feito mentalmente.

f. M*ultiplicativo em "contas" no formato escolar*: consiste na marcação do valor unitário como multiplicando e do multiplicador (neste caso estimado mentalmente) acompanhado do sinal de vezes, no formato escolar (algoritmo convencional).

É exemplo a notação 2b produzida por BAR.



2a

2b

Neste exemplo, a multiplicação feita por BAR consiste em uma verificação da quota estimada mentalmente. A criança registra o valor unitário (R$ 2,10) como multiplicando e o número de embalagens estimado mentalmente (10) como multiplicador. O resultado obtido na multiplicação (R$ 21,00) é a confirmação da quota estimada.

Suas notações sugerem uma solução por tentativa e erro, na qual ela tenta descobrir quantas vezes o valor unitário (R$ 2,10) cabe em R$ 21,00. Ela faz uma estimativa desta quota e usa a multiplicação como verificação.

3. Interpretação da notação produzida:

As interpretações que os sujeitos fazem das notações produzidas são explicações sobre os procedimentos usados para solucionar o problema.

Identificamos ainda um conteúdo avaliativo nas interpretações que os sujeitos fazem de suas notações, ocorrendo identificação de incorreções, que são corrigidas pelas próprias crianças.

Para alguns sujeitos, neste momento de interpretação (provocado pela entrevistadora), ocorre o avanço na solução do problema, sendo que as interpretações, nestes casos estão intercaladas com a produção da notação e apresentam, como conseqüência, a realização de novas tentativas de solução por parte dos sujeitos.

Descrevemos a seguir, os tipos de interpretação das crianças relativas ao seu conteúdo e conseqüência.

A. *Conteúdo das interpretações das notações.*

Os conteúdos das interpretações das notações feitas pelos sujeitos para este problema são de dois tipos: explicativo e avaliativo, os quais são descritos e exemplificados a seguir.

A.1. *Conteúdo explicativo das notações*: as interpretações que o sujeito faz são explicações sobre a notação produzida. Essas explicações podem ser evocações do tipo de notação ou uma evocação, passo a passo, dos procedimentos usados nas notações produzidas.

A.1.a - As interpretações que o sujeito faz como evocações sobre o tipo de notação produzida.

Como exemplo, temos a fala de ANTO (13;6) que explica, inicialmente, ter descoberto que poderia comprar 10 embalagens através dos desenhos que fez, depois diz que descobriu através dos números:

E: **Como é que você descobriu? Explica prá mim.**
ANTO: **desenhando.**
E: **isso, você desenhou, daí eu vi que você ficou contando, daí você quase ia desenhar mais uma** (aponta o espaço à direita dos registros) **daí você desistiu. Por que?**
ANTO: (abaixa a cabeça e sorri) **ah, é por causa que já tinha dado... certo.**
E: **e como é que você descobriu?**
ANTO: **por causa que eu fiz com os números** (aponta os registros de 2,10 com a canetinha).
E: **isso, contando todos esses 2,10 dá quanto?**
ANTO: (olha para cima, depois abaixa a cabeça) **dá... vinte e um reais.**

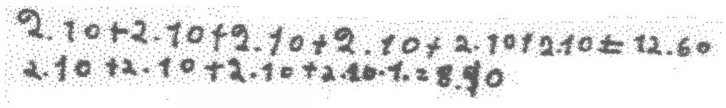
Sua explicação sugere que ele usou um procedimento no qual ele vai adicionando o valor unitário até atingir o dividendo ou valor total gasto (R$ 21,00). À medida que registra estes valores unitários ele já vai adicionando-os e pára quando pensa já ter atingido R$ 21,00. Neste momento ele faz uma nova contagem, adicionando todos os valores unitários registrados, confirmando o total obtido (R$ 21,00).

A.1.b - As interpretações que o sujeito faz das notações produzidas são evocações, passo a passo, da produção da notação.

Como exemplo, temos a fala de ALD em dois momentos distintos de interpretação das notações. No primeiro ela interpreta as notações 2b e 2c.

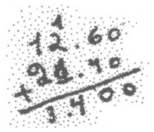
2b

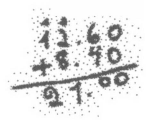
2c



2c.1

2d





2e

E: **o que você fez?** (aponta para a primeira linha de registros, em 2b) **2,10... 2,10... 2,10...**
ALD: **ah, eu fiz aqui prá vê seis, né** (aponta a primeira linha de registros, notação 2b, com a canetinha) **aí eu fiz mais esses aqui prá vê quanto que ia dá** (aponta para a segunda linha, em 2c) **dava vinte e um reais todas juntas.**

No segundo momento, depois de ter registrado o valor total das quatro embalagens, cujos valores unitários foram registrados na expressão numérica de adição da segunda linha (notação 2c), e feito uma adição (no formato das "contas" escolares) dos preços de seis e de quatro embalagens (notação 2e), ALD diz que seria possível comprar 11 embalagens. Ao explicar como descobriu que poderia levar onze embalagens ela verbaliza novamente, passo a passo, as notações que produziu.

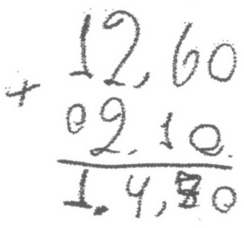
E: **onze? Como é que você descobriu essas onze? Me mostre.**
ALD: **eu fiz esse aqui de cima** (aponta a primeira linha, 2b) **aí eu fui vendo quanto que ia dar** (aponta a conta que fez para somar 12,60 com 21,40, 2d) **deu errado, daí eu depois fui e contei só essas** (aponta para a segunda linha – notação 2c) **e achei esse aqui de cima** (aponta o 8.40 – notação 2c.1) **e depois eu fiz isso daqui** (aponta a conta, 2e).
E: **isso, mas como que você sabe que aqui têm 11 caixinhas?**
ALD: (olha para E) **contei.**
E: **tá, aqui têm quantas?** (aponta a primeira linha, 2b).
ALD: **aqui têm 6.**
E: **aqui têm 6. E aqui?** (aponta a segunda linha, 2c)
ALD: **aqui têm 4.**

Neste exemplo, mesmo indicando o número correto de embalagens representadas em cada linha, o sujeito não encontrou o valor adequado de embalagens que poderia comprar com R$ 21,00 porque não usou estas quantidades (6 na primeira linha e 4 na segunda), como referência para calcular o total de embalagens. O que fez foi uma contagem unitária do número de embalagens registradas em cada linha, por seus valores unitários, apontando cada um. Esta contagem, realizada de forma mecânica, considerou a soma da segunda linha (R$ 8,40) como sendo um valor unitário, obtendo então, como resultado, 11 embalagens em vez de 10.

A.2. *Conteúdo avaliativo das interpretações das notações:* em suas interpretações os sujeitos avaliam a adequação dos procedimentos das notações.

Um exemplo do conteúdo avaliativo das interpretações feitas pelos sujeitos é a interpretação que CLE (9;8) faz de sua notação. Com a intervenção da entrevistadora, CLE percebe a inadequação de seu procedimento, usado na produção da notação, com o cálculo feito mentalmente.

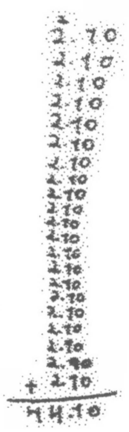
Inicialmente ele verbaliza a subtração feita, mas percebe que a soma dos centavos resultaria em R$ 0,70 e não em R$ 0,50, como havia feito.



E: **tá, então vamos ver se... o que você fez aqui** (aponta o registro de 14,50) **o que você fez que descobriu esse 14. Como é que você descobriu o 14? O que você fez?**
CLE: (aponta o seu registro com a canetinha) **eu fiz a conta aqui... aqui...** (aponta o 2 do 2,10 e o 1 do 12) **dois prá um, dá 1** (aponta o 1 do 14) **daí fiz a conta aqui** (aponta o 2 do 2,10 e o 2 do 12,60).
E: **tá, descobriu. Você fez o que... juntou 12** (aponta) **com... dois** (aponta).
CLE: (olha para o registro apontado e fala junto com E) **dois.**
E: **e aqui, prá dar 50** (aponta) **o que você fez?**
CLE: (aponta a coluna de zeros) **eu fiz zero, zero... zero prá zero vai dá zero. Aí aqui...** (aponta o 6 e olha para o 12. Pára, leva a canetinha até a testa) **ué...**(fica olhando para o registro e batendo a canetinha na testa, leva a mão com a canetinha até a folha e registra 7 sobre o 5 do 50, fala enquanto escreve) **aqui no 5... era 7** (olha para E).
E: **isso, por que... o que você tinha feito antes que deu 5** (aponta).
CLE: **é que eu não tinha feito conta de mais.**
E: **isso, e agora? Era conta de mais ou de menos que você tinha que ter feito?**
CLE: **de mais.**

Outro exemplo é a interpretação que ALD faz de sua primeira tentativa de solução do problema na qual considera o dividendo (R$ 21,00) como multiplicador, adicionando o valor unitário 21 vezes. Esta tentativa pode ser vista na notação a seguir:

2a



Com a intervenção da entrevistadora, que usa o problema anterior como referência, ALD percebe a inadequação de seu procedimento.

E: **o que você descobriu aí?**
ALD: (olha para seus registros e gira a tampa da canetinha) **se eu levá 21, dá...** (olha para seus registros) **quarenta e quatro reais e dez centavos** (olha para E).
E: **tá, mas 21 aí** (aponta os registros) **é o dinheiro ou 21 caixas?**
ALD: (olha para frente) **21 caixas.**
E: **isso, aqui você sabe o preço de 21 caixas** (aponta os registros) **só que eu te perguntei, foi diferente. Tudo bem, você descobriu aqui, né** (aponta para o 44,00). **O que eu te perguntei foi assim: se você tem vinte e um reais, quantas caixas será que você consegue comprar?**
ALD: (apóia a cabeça na mão esquerda e segura, com a mão direita, a canetinha tampada sobre seus registros, fica olhando para E).
E: **entende? Você leva vinte e um reais para o mercado. Quantas caixinhas que você consegue comprar? Lembra que você falou prá mim aqui, ó...** (vira a folha de registro, deixando ALD ver os registros que fez para o problema anterior) **você tinha me dito aqui, ó** (aponta os registros) **que se você levasse R$ 12,60 você comprava quantas caixas?**
ALD: (olha para seus registros) **seis.**
E: **seis. Então se você tiver vinte e um reais, quantas caixinhas será que você consegue comprar?**
ALD: (olha para frente, ajeita a mão esquerda sobre o queixo).
E: **você acha que dá mais que 6 caixinhas ou menos?**
ALD: (ainda olhando para frente, balança a cabeça afirmativamente) **dá mais** (leva a mão esquerda até a orelha, tosse, protege a boca com a mão esquerda e depois volta a mexer na orelha).
E: **será que dá tudo isso de caixa?** (vira novamente a folha de registros, deixando ALD ver os últimos registros feitos) **será que daria 21 caixas** (aponta os registros de 2.10) **igual você pensou aqui, ou não?**
ALD: (sorri, segura a canetinha com as duas mãos, balança a cabeça negativamente) **não.**

A interpretação que ALD faz da notação usada em sua primeira tentativa mostra que ela "ouve" o problema como "quanto custam 21 embalagens" e não como realmente é apresentado: "quantas embalagens podem ser compradas com R$ 21,00". Quando a entrevistadora pergunta o que descobriu, o sujeito se dá conta de que o procedimento usado não era adequado ao problema proposto.

B. *Conseqüência da interpretação das notações.*

As interpretações de conteúdo explicativo e, sobretudo de conteúdo avaliativo, em geral apresentam como conseqüência uma nova tentativa realizada pelo sujeito. Exemplificamos, a seguir, algumas interpretações que encaminham os sujeitos para novas tentativas.

No caso de CLE, que faz adições cumulativas por cálculo mental, as interpretações dos resultados registrados (feitas com a intervenção da entrevistadora), servem como indicadores da necessidade de se efetuar novas adições ou não.

E: **você que sabe... ou você acha que com vinte e um reais dá prá levar só 7 caixinhas?**
CLE: **mais.**
E: **então vai tentando até a gente descobrir.**
CLE: (fica olhando para frente em silêncio, mexendo com a mão direita na extremidade da mesa. Olha para E) **oito caixinha dá...** (fecha o olho e encosta a canetinha) **dá...** (olha para baixo e volta a apoiar a cabeça na mão esquerda) **é...** (olha para a mão direita aberta, fecha-a olha para E) **dá 16 e oi... oitenta.**
E: **quer anotar então? Pra você não esquecer?**
CLE: (olha para a folha e olha novamente para E)
E: **pode anotar... se você quiser anotar só os 16,80 pode anotar.**
CLE: (destampa a canetinha e mais para baixo, à direita do registro anterior, escreve 16,80).
E: **tá, isso são quantas caixinhas?**
CLE: (apóia novamente a cabeça na mão esquerda, olha para E) **oito.**
E: **oito, então o que você acha: dá 8 com vinte e um reais ou dá mais ainda?**
CLE: **mais.**
E: **quer tentar? Então tenta mais.**
CLE: (fica olhando para seu registro, movimenta a mão direita sobre a mesa, move os dedos, fecha a mão e fica olhando para os registros. Leva a mão esquerda com a canetinha até o papel e escreve 18,90 abaixo do 16, 80. Olha para seu registro com a mão esquerda na testa).
E: **e aí é o que?**
CLE: (olha para E) **aí deu 9 caixinhas.**
E: **9 caixinhas você gasta quanto de dinheiro?**
CLE: (aponta o registro) **18,90.**
E: **e aí, dá mais caixinhas ou não?**
CLE: **dá** (olha para os registros, move os dedos da mão direita sobre a mesa, olha para E) **dá... 10 caixinhas.**

Assim, ao calcular o preço de 8 embalagens (R$ 16,80) CLE conclui que pode ainda levar mais uma embalagem e adiciona, mentalmente, a esse valor (R$ 16,80) o valor de mais uma embalagem (R$ 2,10), descobrindo então que para comprar 9 embalagens precisa de R$ 18, 90. Da mesma forma, conclui que é possível então comprar ainda mais uma embalagem, afirmando que poderia levar 10 embalagens. Pelas sucessivas adições que realiza, mantendo em vista o dividendo (representado pelo valor total de dinheiro disponível) e o multiplicador (número de caixas, cujo valor é calculado em cada adição) ele consegue, ao final das adições realizadas, determinar o número de caixinhas que seria possível comprar com R$ 21,00.

No caso de ALD, a partir da interpretação (de conteúdo avaliativo) que fez de sua primeira notação, com a intervenção da entrevistadora, o sujeito faz uma segunda tentativa, desta vez usando um procedimento aditivo que consiste em adicionar o valor unitário até encontrar o valor total gasto em uma notação de tipo aditivo em expressões numéricas aditivas.

2b
2c

2c.1

Conforme já descrito em sua interpretação de conteúdo explicativo, ao contar o número de parcelas registradas nas duas expressões de adição, ALD apresenta 11 como resultado, explicando que contou o número de embalagens (representado pelos seus valores unitários). Com a intervenção da entrevistadora, ela faz novamente a contagem, desta vez obtendo 10 como resultado.

E: **e essas 6 caixas com essas 4 caixas** (aponta as duas linhas) **dão 11 caixas? quer contar de novo prá ter certeza?**
ALD: (balança a cabeça afirmativamente, aponta cada 2,10 das duas linhas , move os lábios e quando chega no último pára, franze a testa) **dez.**
E: **e agora, 11 ou 10? O que você acha?**
ALD: **10.**
E: **tem certeza que são 10?**
ALD: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **por que?**
ALD: **porque eu contei o resultado junto.**
E: **ah, você antes tinha contado o resultado. Então se você levar vinte e um reais, quantas caixinhas você consegue comprar, dessas daqui?**
ALD: **10.**

Em sua fala, vemos que o próprio sujeito percebeu o erro cometido ao obter 11 embalagens como resultado. Ao fazer uma re-interpretação percebe que, em sua contagem unitária dos valores de cada embalagem, considerou o resultado da segunda linha (notação 2c.1) como um valor unitário de embalagem.

Assim encontrou o quociente, conforme o número de embalagens que poderia comprar, via progressão, um a um do valor do multiplicador.

Problema 3

Relembrando, este problema consiste em determinar o número de embalagens de leite fermentado (cujo valor unitário é R$ 2,10) que é possível comprar com R$ 10,00. Ele difere do problema anterior por se tratar de uma divisão inexata.

1. Antecipação

Para este problema, assim como para o anterior, nem todos os sujeitos apresentaram algum tipo de antecipação de solução anterior à produção da notação. Descrevemos a seguir a ocorrência ou não de antecipação para este problema e os tipos de antecipação de solução encontrados.

a. *Não ocorrência de antecipação de resultado ou do procedimento a ser usado:* o sujeito inicia sua notação sem nenhum tipo de antecipação antes do início da produção da notação.

b. *Antecipação (provocada pela entrevistadora) por estimativa de conteúdo qualitativo, sem utilização de "números" :* o sujeito faz uma antecipação qualitativa depois que a entrevistadora usa o problema anterior como referência para comparação.

Como exemplo, temos a fala de ANTO (13;6):

E: **tá, então o último agora que eu vou te perguntar. É o seguinte, assim... você já descobriu que com vinte e um reais você compra 10 caixas, mas se você não levasse 21, você levasse só dez reais, daí quantas caixinhas você acha que dava prá comprar, será?**
ANTO: (sorri, leva a canetinha até a boca, tira, abaixa a cabeça sobre a mão).
E: **você acha que dava mais caixas ou menos caixas?**
ANTO: (olha para E) **menos caixas** (abaixa a cabeça sobre as mãos).

c. *Antecipação (provocada pela entrevistadora) por estimativa de conteúdo quantitativo:* o sujeito faz uma antecipação quantitativa depois que a entrevistadora usa o problema anterior como referência. Embora não antecipe o resultado, sua estimativa já é feita em termos de quantidade, mediante emprego de valor numérico.

Como exemplo temos a fala de ALD (10;6):

E: **você acha que dava menos que essas 10, ou dava mais que as 10? Se você levasse só dez reais, quantas caixinhas será que daria para comprar?**
ALD: (olha para frente, franze a testa, olha para E) **mais que 3.**

d. *Antecipação espontânea do resultado:* o sujeito estima um possível resultado, usando um valor numérico, assim que o problema é apresentado.

Como exemplo temos a fala de CLE (9;8):

E: **e agora eu vou fazer outra: se você levasse só dez reais no mercado. Daí quantas caixinhas será que dava para comprar? Deixa eu pegar um outro papel** (pega uma folha à esquerda de CLE e coloca-a sobre a outra). **Se quiser pensar primeiro, depois escrever, você que sabe. Se quiser escrever... Se você levasse só 10 reais... vamos deixar isso aqui, se você precisar olhar aqui** (coloca o encarte à esquerda de CLE). **E aí, você acha que dava para comprar quantas caixinhas mais ou menos?**
CLE: (fica com a mão direita sobre a mesa e a esquerda, segurando a canetinha, fica encostada na nuca. Fica olhando para frente, olha para E) **nove?**

Neste exemplo, o sujeito fez sua antecipação em forma de pergunta e muda esta estimativa com a intervenção da entrevistadora, que usa o primeiro problema como referência. Ele considera incorretas suas estimativas, mas não sabe explicar porque.

E: **será que dava 9 mesmo?**
CLE: **umas 7.**
E: **isso, prá levar 6, quanto você já gastou?**
CLE: **levar 6?**
E: **ahã.**
CLE: (abaixa a cabeça e murmura) **levar 6...**
E: **quanto que você já gastou para levar 6 caixinhas. Você já calculou lá?**
CLE: (olha para E, com a tampa da canetinha na mão direita encostada na boca) **12 e ... 60.**
E: **isso, então se você tem dez reais, você consegue comprar 7 será?... 7 caixas?**
CLE: (olha para a esquerda, tira a tampa da canetinha da boca, levanta o ombro direito) **não** (balança a cabeça negativamente, olha para E).
E: **por que?**
CLE: (olha para a direita, em direção ao encarte, olha para E) **ah, não sei.**

e. *Antecipação do resultado provocada pela entrevistadora:* o sujeito antecipa o resultado, usando um valor numérico e corrige-o a partir das questões propostas pela entrevistadora. Diferentes estimativas são feitas a cada provocação da entrevistadora.

É exemplo o tipo de antecipação que ANTO faz depois daquela por estimativa qualitativa (tipo b):

E: **menos caixas? Quer descobrir quantas?**
ANTO: (levanta a cabeça) **aí vai dá...** (aponta cada registro de 2,10 que fez no problema anterior, começando pelo último. Olha para E) **deu 5 caixas.**
E: **você acha que deu 5? Então vamos ver** (coloca uma cartolina branca sobre a cartolina já usada) **quanto que você gasta para comprar 5?**
ANTO: **hum...** (levanta a cartolina e olha rapidamente o registro de baixo, cobre novamente) **comprá 5...** (leva a canetinha até a boca).
E: (afasta um pouco a cartolina branca, deixando o registro anterior à vista) **se quiser fazer ou quiser olhar lá, você que sabe.**
ANTO: (sorri, abaixa a mão direita, colocando-a embaixo da mesa. Aponta com a canetinha os 5 primeiros registros de 2,10 do problema anterior. Olha para E) **dez reais e cinqüenta centavos** (larga a canetinha sobre o papel).
E: **então dá prá comprar 5 caixas?**
ANTO: (olhando para o registro) **não.**
E: **você só tem dez reais. Daí dá prá comprar quantas?**
ANTO: (olhando para os registros e girando a canetinha com a mão esquerda) **só três** (olha para E).
E: **quanto você gasta para comprar 3?**
ANTO: (olha para cima) **é...** (olha para a folha) **compra 3...** (aponta os três primeiros registros de 2,10 da folha) **6 reais e 30 centavos** (olha para E).
E: **então será que levando 10, só dá prá comprar 3 caixas?**
ANTO: (olha para a folha, sorri) **hum...**
E: **daí vai sobrar dinheiro ou não?**
ANTO: (olha para E) **vai.**
E: **sobra quanto daí?**
ANTO: **sobra...** (olha para cima, depois para frente) **deixa eu ver...** (leva a mão esquerda à boca) **6 e 30...** (fica olhando para frente, com a mão à frente da boca). **2,60** (olha para E).
E: **e com esse dinheiro que sobra não dá prá comprar mais uma caixa?**
ANTO: (olha para a folha e balança a cabeça afirmativamente enquanto fala sorrindo) **dá prá comprar mais uma.**
E: **então quantas que dá prá comprar?**
ANTO: (olha para baixo) **dá prá comprar 7 caixas.**
E: **sete?**
ANTO: (olhando para os registros, balança a cabeça afirmativamente) **sete... não!** (sorri e balança a cabeça negativamente) **é... quatro.**
E: **tá, prá comprar 4 quanto que você gasta?**
ANTO: (aponta os quatro primeiros registros de 2,10, olha para frente, leva a mão esquerda à boca, abaixa a cabeça) **oito reais e quarenta centavos** (olha para E).

Neste exemplo, as antecipações são feitas por ANTO usando os registros que ele fez no problema anterior (desenho das embalagens acompanhados do valor unitário). Com provocação da entrevistadora, ANTO corrige suas estimativas, sempre usando o referido registro.

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos neste problema são todas numéricas. Elas podem ser classificadas nos seguintes tipos:

a. *Notação numérica do resultado de adições efetuada mentalmente:* o sujeito registra um número que representa a soma de parcelas iguais.

É exemplo a notação de ANTO (13;6):

8,40

No exemplo o sujeito registra o resultado da adição de 4 parcelas de R$ 2,10, a qual foi feita usando as notações produzidas para resolver o problema anterior (desenho das embalagens acompanhadas do valor unitário).

b. A*ditivos em "contas" no formato escolar:* consistem na marcação do valor unitário acompanhado do sinal de mais no formato convencional escolar até obtenção do dividendo (R$ 10,00), pela adição.

Como exemplo, temos as notações de ALD (10;6):

3a	2.10 2.10 2.10 2.10 +2.10 10.50	2.10 2.10 +2.10 6.30	3b
		+2.10 8.40	3c
		+2.10 10.50	3d

No exemplo, o sujeito estima uma quota e registra o valor unitário em número de vezes equivalente a quota estimada.

Suas notações são registradas em diferentes tentativas. Na primeira (notação 3a) ela marca o valor unitário em 5 parcelas na tentativa de descobrir quantas vezes R$

2,10 cabe em R$ 10,00, usando para isso um procedimento aditivo. Mas o total obtido na adição não corresponde ao total buscado ou dividendo (R$ 10,00).

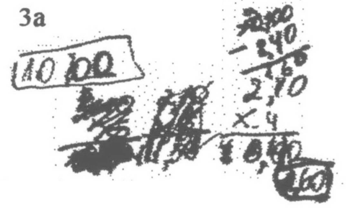
Na segunda tentativa (notação 3b), feita depois que ALD interpreta sua notação, com a intervenção da entrevistadora, ela faz uma adição com um número menor de parcelas. Registra 3 parcelas de R$ 2,10 e obtém R$ 6,30 como resultado. Após a interpretação deste resultado, com a intervenção da entrevistadora, adiciona mais uma vez o valor unitário, descobrindo o valor de 4 embalagens (R$ 8,40). O sujeito afirma que ainda é possível levar mais uma, sem antecipar que, neste caso estaria comprando 5 embalagens, cujo valor total já havia sido calculado e era maior do que R$ 10,00. Adiciona então mais uma vez o valor unitário da embalagem (R$ 2,10), desta vez ao valor de 4 embalagens, obtendo novamente R$ 10,50 como resultado (ver notação 3d).

As notações de ALD sugerem um procedimento de solução por aproximação, na qual o sujeito não consegue chegar ao dividendo através das adições por se tratar de uma divisão inexata.

c. D*ivisão incompleta no formato escolar:* consiste no registro do valor total como dividendo, acompanhado da chave da divisão, sem o registro do divisor ou com um divisor não correto. O cálculo da divisão não é efetuado usando-se esse registro.

É exemplo a notação produzida por BAR (9;4)

3a



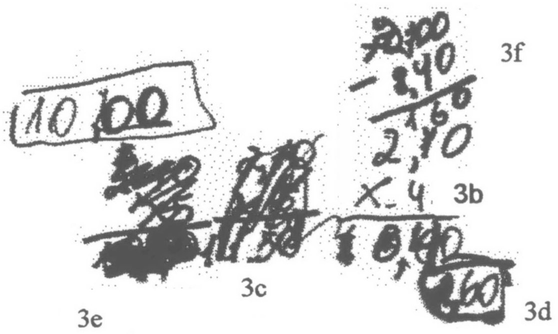
No exemplo (notação 3a), o sujeito marca o valor total gasto ou dividendo (R$ 10,00) seguido da chave da divisão. Inicialmente ela marca apenas 10, os dois zeros dentro da chave foram registrados mais tarde (enquanto produz as outras notações).

Esta notação sugere que o sujeito reconhece o problema como sendo de divisão. Mas, assim como havia feito no problema 2, não registra o valor unitário como divisor.

Desta vez, esta notação é abandonada e outras notações são usadas para a solução do problema.

d. *Notação de tipo multiplicativo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação do valor unitário como multiplicando e do multiplicador (neste caso estimado mentalmente) acompanhado do sinal de vezes, no formato escolar (algoritmo convencional).

São exemplos as notações 3b, 3c e 3e, produzidas por BAR.



A verificação que BAR faz da adequação da quota estimada é feita em diferentes tentativas.

Na notação 3b, faz a primeira tentativa, que é produzida da seguinte forma: inicialmente ela registra o sinal de vezes e o traço horizontal, em seguida é registrado o multiplicando (R$ 2,10 - que representa o divisor neste problema) e, abaixo do traço, o produto (R$ 10,00 – que representa o dividendo). O que o sujeito procura é um multiplicador para o R$ 2,10, que tenha como produto R$ 10,00. Este multiplicador, uma vez encontrado seria a resposta do problema (quociente). Ela registra 4 como multiplicador e corrige o produto, efetuando a multiplicação de 4 por R$ 2,10 (cujo produto é R$ 8,40).

As notações 3c e 3e consistem na verificação de uma nova quota estimada: 5 embalagens. Elas são riscadas quando BAR percebe que o preço para esta quota é maior que o valor total disponível para compra (dividendo).

Estas notações sugerem a busca de uma quota por ensaio e erro, via multiplicação. O sujeito procura um multiplicador, ou seja, um valor que, multiplicado pelo valor unitário resulte no valor total (dividendo).

e. *Notação subtrativa no formato das "contas" escolares:* consiste na subtração do valor calculado para uma determinada quota do valor total disponível para a compra.

É exemplo a notação de ANTO (13;6):

8,40

3a

$$\begin{array}{r} 010,00 \\ -\ 8,40 \\ \hline 01,60 \end{array}$$

3b

ANTO estima uma quota possível de 4 embalagens e, usando os registros do problema anterior verifica o valor desta quota : R$ 8,40, o qual é registrado por ele (notação 3a). Para esta verificação o sujeito adiciona os valores dos quatro primeiros valores unitários registrados no problema anterior. Isso é possível porque ele compreende que, tendo R$ 10,00 ele poderia comprar uma quantidade menor de embalagens e que, portanto, elas estavam incluídas entre as 10 embalagens que já havia desenhado (notação feita no problema anterior).

Com o valor obtido para a quota estimada (R$ 8,40 para 4 embalagens) a entrevistadora lhe pergunta sobre o troco e a possibilidade de se levar mais uma embalagem. Ele tem dificuldade para calcular mentalmente o troco, por se tratar de uma fração decimal e, por sugestão da entrevistadora, registra o cálculo que tentou efetuar mentalmente.

O sujeito registra o valor total de dinheiro (R$10,00), registra o sinal de menos e anota a quantia gasta para levar as 4 embalagens (R$ 8,40). Efetuando a subtração, conforme o algoritmo escolar, ele obtém o valor do troco recebido para a compra de 4 embalagens (R$1,60).

Ele compreende que, para calcular o troco, deve subtrair o valor das 4 embalagens do total de dinheiro. A subtração que fez (notação 3b) é usada por ele para justificar por que não é possível levar mais uma caixa. Embora tenha tido dificuldade em fazer este cálculo mentalmente, conseguiu efetuá-lo no papel, podendo assim justificar sua afirmação de que seria possível levar apenas 4 embalagens.

3. Interpretação da notação produzida:

Assim como no problema anterior, as interpretações que os sujeitos fizeram das notações produzidas são explicações sobre os procedimentos usados para solucionar o problema.

Identificamos também o conteúdo avaliativo nestas interpretações com a identificação de incorreções, que são revisadas pelos próprios sujeitos.

Para alguns sujeitos, neste momento de interpretação (provocado pela entrevistadora), ocorre o avanço na solução do problema, sendo que as interpretações, nestes casos estão intercaladas com a produção da notação e apresentam, como conseqüência, a realização de novas tentativas de solução por parte dos sujeitos.

Descrevemos, a seguir, os tipos de interpretação feitos pelos sujeitos, relativos ao seu conteúdo e conseqüência.

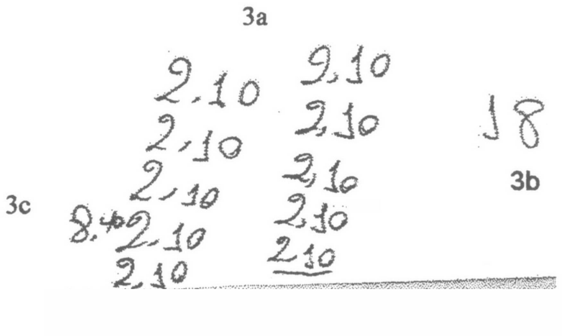
A. *Conteúdo das interpretações das notações.*

Os conteúdos das interpretações das notações feitas pelos sujeitos para este problema são de dois tipos: explicativo e avaliativo, os quais são descritos e exemplificados a seguir.

A.1. *Conteúdo explicativo das notações*: as interpretações que o sujeito faz são explicações sobre a notação produzida. As explicações usadas pelos sujeitos neste problema podem ser uma evocação, passo a passo, das marcas produzidas ou uma tentativa de validação do resultado encontrado.

A.1.a - As interpretações que o sujeito faz como evocações, passo a passo, da produção da notação para justificativa do resultado.

Como exemplo temos a interpretação que CLE faz da notação produzida na segunda tentativa de solução deste problema (notação 3c).



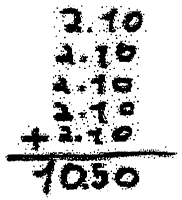
CLE calcula mentalmente o valor de 4 embalagens e registra o resultado (R$ 8,40). Explica que este resultado refere-se ao preço de quatro caixinhas e verbaliza a adição feita mentalmente para chegar até este resultado.

E: **e o que é esse 8,40?**
CLE: **vai dá... prá comprá...** (olha para a mão direita que segura a tampa da canetinha) **as 4 caixinhas.**
E: **tá, 4 caixinhas custam 8,40. Como é que você descobriu isso?**
CLE: **é que... ah, eu fiz a conta.**
E: **mas você ficou olhando ali** (aponta os registros de 2,10), **esses números te ajudaram alguma coisa ou não?**
CLE: (fica olhando para os registros apontados).
E: **por que você ficou olhando...**
CLE: (interrompe) **um pouco** (olha para E).
E: **o que você fez com esses números?**
CLE: (aponta os registros de 2,10) **é que eu fiz assim, ó... eu fiz assim, ó... 2 mais 2, quatro** (aponta os dois primeiros registros de 2,10) **daí... mais 5... daí 6** (aponta o terceiro registro de 2,10) **7, 8** (aponta o quarto registro de 2,10).
E: **isso, daí você pegou 4 caixinhas aqui, né?**
CLE: (olhando para o registro) **ahã, foi. Aí 10, 20, 30, 40** (aponta os quatro primeiros 10 dos registros de 2,10).
E: **tá, então se você disse assim, que se eu levar no mercado dez reais eu só compro... 4 caixinhas.**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**

A.1.b - As interpretações que o sujeito faz como tentativa de validação de um resultado encontrado.

Como exemplo temos as interpretações que ALD faz de sua primeira tentativa, na qual usou um procedimento aditivo tentando se aproximar do dividendo (notação 3a).

3a



ALD: **deu 10,50.**
E: **o que?**
ALD: (aponta apara seus registros) **as caixinhas.**
E: **quantas?**
ALD: **5** (olha para E)
E: **isso, só que quanto que eu falei que você levou de dinheiro no mercado?**
ALD: **dez reais.**
E: **então se você levar dez reais, você consegue comprar essas 5 caixinhas?**
ALD: (fica olhando para frente, girando a tampa da canetinha co a mão direita) **vai faltar cinqüenta centavos.**
E: **isso, então dá prá levar 5 caixas?**
ALD: (balança a cabeça negativamente) **não** (olha para E).
E: **isso, então quantas que você pode levar?**
ALD: (fica olhando para frente, destampa a canetinha) **tirando os centavos dá prá mim comprar.**
E: **isso, se tirar, mas será que eles vão fazer esse desconto prá você?**
ALD: (sorri, balança a cabeça) **não sei.**

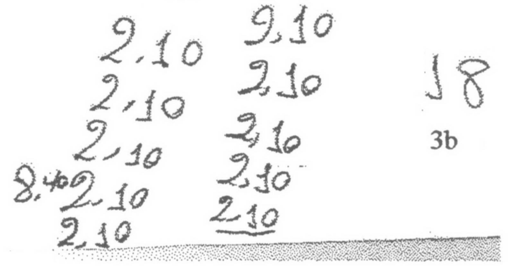
Em sua primeira tentativa (com uma quota de 5 embalagens) o sujeito sugere que sejam tirados os centavos para que possa comprar as 5 embalagens, sem considerar que, uma vez que o valor de 5 embalagens ultrapassou o dinheiro que possuía (R$ 10,00), o número de embalagens que poderiam ser compradas deveria ser menor.

Este tipo de interpretação revela que o sujeito está centrado não na quota (quociente da divisão), mas no total correspondente a esta quota. Em vez de pensar em modificar a quota proposta (5 embalagens), procura um meio de validar o resultado encontrado.

A.2. *Conteúdo avaliativo das interpretações das notações:* em suas interpretações os sujeitos avaliam a adequação dos procedimentos e das notações.

Como exemplo temos as interpretações de CLE sobre sua primeira tentativa de solução, na qual registra 10 parcelas de R$ 2,10 e anota 18 ao lado destas parcelas (notações 3a e 3b).

3a



3b

3c

E: **quantas caixas têm aí?**
CLE: **aqui tem...** (olha para E, inclina a cabeça para a esquerda e olha novamente para a folha movimentando os lábios) **dez.**
E: **dez. Você já não descobriu quanto que você gastava para comprar dez?**
CLE: (está com o queixo apoiado na mão direita, balança a cabeça negativamente e fica olhando para seus registros, com os dedos indicador e médio da mão direita sobre a mesa).
E: **você já não descobriu o preço de 10 caixinhas antes?**
CLE: (continua olhando para seus registros. À direita deles escreve 18. Olha para E).
E: **o que é esse 18?**
CLE: (olha para o registro) **o que vai dá** (olha para E).
E: **as 10 caixinhas?**
CLE: **ahã.**
E: **você já não tinha feito 10 caixinhas antes?**
CLE: (olha para o registro, aponta) **eu sei... eu fiz... eu fiz... daí eu fiz a conta... prá... prá... vê quanto que eu ia levá.**
E: **ah tá, mas eu não quero saber quanto que você gasta prá trazer 10 caixas. Eu quero saber se você levar 10 reais no mercado, quantas caixas você consegue comprar? Você só tem dez reais. Você podia comprar todas estas caixas com dez reais?** (aponta os registros de 2,10).
CLE: (olha para a folha com o dedo indicador da mão direita na boca enquanto E fala. Olha para ela, balança a cabeça negativamente) **não.**
E: **e por que não?**
CLE: **por que não daria.**
E: **falta dinheiro, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).

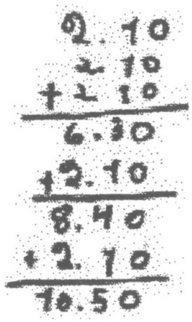
Com a intervenção da entrevistadora, que repete o problema, explicando o que foi pedido, CLE percebe a inadequação de seu procedimento expresso na notação.

Sua interpretação revela que o sujeito "ouviu" o problema como sendo para calcular o preço de 10 embalagens e não a quantidade de embalagens que é possível comprar com R$ 10,00. Isso também ocorreu com ALD na sua primeira tentativa de solução do problema 2 conforme descrito anteriormente.

B. *Conseqüência da interpretação das notações.*

As interpretações de conteúdo explicativo e, sobretudo de conteúdo avaliativo, em geral apresentam como conseqüência uma nova tentativa de solução do sujeito.

Como exemplo temos as interpretações que ALD faz das notações produzidas depois da primeira tentativa de solução (notações 3b, 3c e 3d).



3b

3c

3d

E: **você acha que dá prá levar mais que 3 ou não?**
ALD: (coçando a nuca, balança a cabeça afirmativamente) **dá.**
E: **e quantas podiam, será, levar?**
ALD: (Inclina o corpo para frente e anota 2.10 abaixo do 6.30. Põe o sinal + à esquerda do 2.10 e um traço horizontal abaixo. Aponta o 10 e o 30 com a canetinha, inclina o corpo para trás, mexe os dedos da mão direita e registra 8 abaixo do 2. Põe um ponto e registra 40 ao lado. Ajeita-se na cadeira) **dá 8 reais e 40.**
E: **prá levar quantas caixinhas?**
ALD: (olha para sua folha) **hã... dá... 4 caixas.**
E: **isso, então você pode levar quantas caixas se você tiver dez reais?**
ALD: **dá prá levar mais uma.**
E: **mais uma ainda?**
ALD: (se inclina sobre a folha e registra mais um 2.10 abaixo do 8,40. Coloca um sinal + à esquerda do 2.10 e um traço horizontal abaixo. Aponta o 10 e o 40 e anota 1 abaixo do 8 e do 2, deixa um espaço à direita e anota 50, abaixo do 10 e do 40. Abre a mão direita, levanta 3 dedos, olha para eles, anota 0 entre o 1 e o 50, põe um ponto para separá-los) **eu fiz a conta errada.**

A partir da interpretação que faz do resultado obtido na notação 3b, provocada pela entrevistadora, o sujeito faz uma nova tentativa, calculando o preço de 4 embalagens. A interpretação que faz do valor total de 4 caixas também o encaminha para uma nova tentativa, desta vez com 5 embalagens, cujo resultado considera errado por conter 50 centavos a mais que o dividendo (R$ 10,00), que era o valor buscado.

Problema 4

Relembrando, este problema consiste em determinar o valor de 5 blusas, conhecendo o valor unitário (R$ 19,00). Conforme classificação usada (Vergnaud, 1983), é um problema de multiplicação.

1. Antecipação da solução

Para este problema, os quatro sujeitos apresentaram algum tipo de antecipação, conforme descritas a seguir:

a. *Antecipação de conteúdo qualitativo (sem expressão de valores em números):* neste tipo de antecipação, a criança não antecipa uma quantidade, mas expressa sua antecipação em termos de "muito" ou "pouco".

É exemplo a antecipação feita por ALD (11;6):

E: **tá, e agora se você quisesse comprar 5 blusas iguais a esta? Se quiser dar de presente... uma prá tua mãe, outra prá sua tia... você tem irmã?**
ALD: (sorri e balança a cabeça afirmativamente)
E: **outra prá tua irmã... se você levasse 5 blusas iguais a esta, daí quanto de dinheiro você teria que levar?**
ALD: (olhando para baixo, com um sorriso) **ah, um monte!**

No exemplo, a criança antecipa que precisará de bastante dinheiro, considerando que o valor unitário é um número de magnitude alta (especialmente se comparado com o valor unitário explorado nos problemas anteriores).

b. *Antecipação da possibilidade de se resolver o problema através de uma "conta" (sem explicitar o tipo de conta):* conforme já descrito, neste tipo de antecipação a criança declara a necessidade de fazer uma conta, ou a possibilidade de se resolver o problema através dela sem, contudo, explicitar o tipo de conta que irá usar.

Como exemplo, temos a fala de CLE (9;8):

E: **tá, mas vamos supor que a tua mãe vai lá na loja, mas ela não quer comprar só uma. Ela quer comprar 5 porque daí vai dar de presente para as tias... prá alguém... e ela tem que comprar 5. Aí, se ela tiver que comprar 5 blusas iguais a essa dali, ela pode saber quanto de dinheiro ela tem que levar?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **como que ela pode saber?**
CLE: **fazendo conta.**

c. *Antecipação do tipo de procedimento a ser usado , mas não do resultado*: neste tipo de antecipação a criança explicita o tipo de "conta" que irá utilizar, sem, contudo, antecipar o resultado.

Como exemplo, temos a fala de ANTO (13;6):

E: **daí quanto que ela precisaria levar? Dá prá saber?**
ANTO: (sorri, coça a orelha, olha para a câmera, apóia o cotovelo direito na mesa e esfrega os olhos com a mão direita).
E: **se você quiser fazer aqui** (aponta uma cartolina)
ANTO: (olha para esquerda) **dezenove...** (olha para a mão direita aberta sobre a mesa) **5 blusas...** (leva a mão direita à boca, fica olhando para baixo) **não dá...** (tira a mão da boca).
E: **quer fazer?** (oferece uma folha de cartolina em branco).
ANTO: (sorri e pega uma canetinha verde, ajeitando com as mãos a cartolina que E lhe entregou) **calma aí...** (levanta a cartolina e olha o encarte que ficou embaixo) **5 vezes... 19** (destampa a canetinha e fica segurando a tampa com a mão direita. Começa escrever na extremidade inferior direita da folha. Registra 19, olha para frente e coloca uma vírgula seguida de dois zeros à direita do 19. Abaixo registra o sinal x e, à direita deste o número 5. Olha para esquerda, passa um traço horizontal abaixo de tudo, aponta com a canetinha o 5 e o 9 e anota 5 embaixo do 5 e 4 acima do 1 do 10. Aponta o 5 e o 1, depois o 4, morde a canetinha e registra 9 à esquerda do último 5 registrado. Afasta a canetinha, levanta a cabeça) **noventa e cinco reais.**

No exemplo, vemos que o sujeito declara não ser possível antecipar o resultado, entretanto, quando a entrevistadora sugere que use o papel para descobrir, ele antecipa o tipo de procedimento que irá usar, verbalizando a multiplicação que irá fazer.

Inicialmente ANTO repete o valor de cada blusa e a quantidade de blusas a serem compradas, então declara a impossibilidade de saber a quantia de dinheiro necessária para comprá-las. Mesmo verbalizando o tipo de procedimento a ser usado, ANTO não antecipa o resultado, provavelmente porque o multiplicando é uma quantia de magnitude alta (R$ 19,00), daí a necessidade da utilização da "conta".

d. *Antecipação do resultado por cálculo mental:* neste tipo de antecipação o sujeito estima já um resultado. Há também uma explicitação sobre o procedimento usado para obtenção do resultado anunciado. Tal explicação é provocada pela entrevistadora.

Como exemplo, temos a fala de BAR (9;4):

E: **mas se você, por exemplo, tem que dar presentes para algumas pessoas e quer comprar 5 blusas iguais a estas. Daí como que você descobre quanto que você tem que levar de dinheiro?**
BAR: (enquanto E fala, mexe no estojo de canetinha que está à esquerda dos encartes. Depois da pergunta, olha para E, abre a mão direita mostrando a palma da mão com os dedos para cima e fala baixinho) **quero ver...** (olha para o encarte com a mão esquerda ainda mexendo no estojo de canetinhas e a mão direita fechada sobre a mesa. Depois de mais ou menos 6 segundos, olha para E dizendo) **noventa e cinco reais?**
E: **como é que você descobriu?** (pega uma cartolina).
BAR: (olha para o encarte) **porque aqui...** (pára e olha para os papéis que E está pegando)
E: **eu vou te dar um papel e você vai me mostrar como é que você pensou** (coloca uma cartolina em branco à frente de BAR)
BAR: (coloca o estojo de canetinha à sua direita) **ah, me dá aquele mesmo** (olha para a cartolina na qual fez seus registros na sessão anterior).
E: **você quer fazer no mesmo ainda?** (pega a cartolina com os registros e entrega-a a BAR)
BAR: **pode ser** (ajeita a cartolina com a mão direita e olha para seus registros. Tira uma canetinha marrom do estojo, puxa a cartolina mais para a esquerda e destampa a canetinha) **só que eu faço assim... pra melhorar a conta** (olha para o encarte que está à sua direita)
E: **hã...**
BAR: (olha para o espaço em branco da folha e novamente para o encarte) **como que é 19,** (ajeita o cabelo) **eu ponho com 20. Cinco vezes o 20...** (aponta o encarte com a canetinha) **dá 100** (olha para E)
E: **ahã.**
BAR: (olha para E) **daí eu tenho que tirar menos 5... que daí dá 95** (enquanto fala olha para o encarte que aponta com a canetinha e para E)
E: **tá, por que você tira 5?**
BAR: (olha para E., olha para o encarte) **porque eu coloquei 5 a mais pra dar o 100, daí eu tiro menos 5 depois, no resultado.**

No exemplo, o sujeito resolve o problema por cálculo mental. Inicialmente, apresenta a solução em forma de pergunta, mas ao explicar como descobriu a resposta, parece obter a confirmação sobre a adequação do resultado encontrado.

De acordo com sua explicação, o sujeito arredonda o multiplicando para R$ 20,00, o que torna a multiplicação mais fácil. Neste caso, tem uma multiplicação de 5 por R$ 20,00, cujo resultado é R$ 100,00. Deste resultado retira R$ 5,00, compreendendo que, ao arredondar R$ 19,00 para R$ 20,00, teria R$ 5,00 a mais no resultado (R$ 1,00 a mais para cada R$ 20,00 adicionado, de acordo com o multiplicador).

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos neste problema podem ser classificadas nos seguintes tipos:

a. *Aditivo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação do multiplicando ou valor unitário (R$ 19,00) em número de parcelas referente ao multiplicador ou número de blusas (5), em uma adição no formato convencional.

Como exemplo, temos a notação de CLE (9;8):

$$\begin{array}{r} + \; 19 \\ 19 \\ 19 \\ 19 \\ 19 \\ \hline 53 \end{array}$$

No exemplo, enquanto o sujeito anota os valores unitários ele mantém a preocupação com o multiplicador, contando mais de uma vez o número de parcelas registradas, antes e depois de completar as cinco parcelas.

b. *Aditivo em expressões de adição no formato escolar:* consiste na marcação do valor unitário, lado a lado, separados pelo sinal de mais (+), em número de vezes correspondente ao multiplicador.

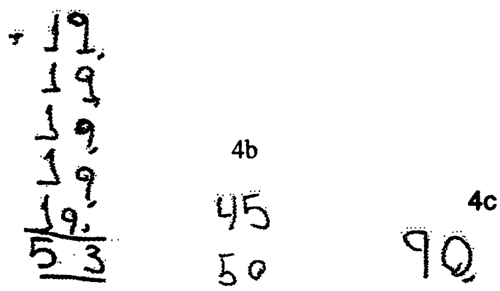
Como exemplo, temos a notação produzida por ALD (10;6) na segunda tentativa para a solução deste problema (o qual é solucionado em três tentativas):

$$19 + 19 + 19 + 19 + 19 = 45.$$

Este tipo de notação, sugere que o sujeito usa a relação escalar, ao trabalhar com a idéia de que 5 blusas custam 5 vezes o valor de uma blusa, expressando esta relação como a iteração de pagar R$ 19,00 (preço de uma blusa) cinco vezes, sendo o resultado obtido pela adição repetida.

b. *Aditivo com escrita numérica dos resultados de adições efetuada mentalmente:* neste tipo de notação o sujeito registra, usando números , os resultados de adições efetuadas mentalmente.

São exemplos as notações que CLE produz depois que interpreta sua notação de tipo aditivo em "contas" no formato escolar (já mostrada no tipo a).



4a 4b 4c

Nas notações 4b e 4c, CLE registra os resultados das adições que efetua mentalmente, com a intervenção da entrevistadora.

c. *Multiplicativo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação do multiplicando ou valor unitário (R$19,00) e do multiplicador (número de blusas) acompanhado do sinal de vezes, no formato convencional (das "contas" escolares). O resultado marcado é obtido pela multiplicação.

Como exemplo, temos a notação de ANTO (13;6).

$$\begin{array}{r} {}^{4}\\ 19,00 \\ \times 5 \\ \hline 95 \end{array}$$

No exemplo, o sujeito registra o multiplicando em sua representação monetária, com a indicação dos centavos, os quais não são considerados para obtenção do resultado. Ao efetuar a multiplicação, ele não faz a multiplicação dos centavos.

d. *Combinação de diferentes expressões numéricas:* consiste na marcação de expressões numéricas de diferentes tipos que, juntas, representam o procedimento usado para obtenção do resultado.

Como exemplo, temos a notação de BAR (9;4)

4a 19,00 + 1,00 = 20,00

4b 20 x 5 = 100,00

4c 100 − 5 = 95,00

No exemplo, a notação é a representação do cálculo realizado mentalmente, o qual foi verbalizado pelo sujeito quando da antecipação da solução do problema. Sua notação sugere que o procedimento usado é de tipo multiplicativo, no qual há uma modificação no multiplicador para facilitar o cálculo mental. Esta modificação, feita através da adição de R$ 1,00 é mostrada na notação 4a (notação aditiva em uma expressão numérica). A compensação desta modificação é representada na notação 4c (notação subtrativa em uma expressão numérica), na qual R$ 5,00 são retirados do resultado obtido na multiplicação (representada na notação 4b, de tipo multiplicativo em uma expressão numérica).

Esta notação feita por BAR, sugere sua compreensão da multiplicação, como a iteração de pagar o valor unitário (R$ 19,00) cinco vezes (de acordo com o multiplicador ou número de blusas), sendo que o resultado é obtido pela multiplicação.

3. Interpretação da notação produzida:

As interpretações que os sujeitos fizeram das notações produzidas são explicações sobre os procedimentos usados para solucionar o problema.

Identificamos também o conteúdo avaliativo nestas interpretações, com a identificação de incorreções.

Para alguns sujeitos, neste momento de interpretação (provocado pela entrevistadora), ocorre o avanço na solução do problema, sendo que as interpretações, nestes casos estão intercaladas com a produção da notação e apresentam, como conseqüência, a realização de novas tentativas de solução por parte dos sujeitos.

Descrevemos a seguir, os tipos de interpretação das crianças relativas ao seu conteúdo e conseqüência.

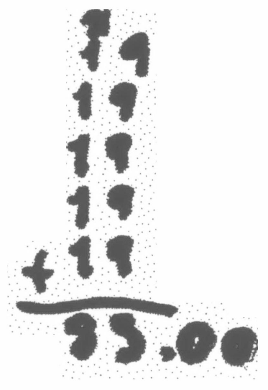
A. *Conteúdo das interpretações das notações.*

Os conteúdos das interpretações das notações feitas pelos sujeitos para este problema são de dois tipos: explicativo e avaliativo, os quais são descritos e exemplificados a seguir.

A.1. *Conteúdo explicativo das notações*: as interpretações que o sujeito faz são explicações sobre a notação produzida. As explicações usadas pelos sujeitos neste problema são uma rememoração do procedimento usado (com referência ao tipo de "conta" usada); uma evocação, passo a passo, das notações produzidas ou verbalizações explicativas feitas durante a produção da notação.

A.1.a - As interpretações como rememoração do procedimento usado (evocação do tipo de "conta").

Como exemplo temos a interpretação que ALD faz de sua notação.

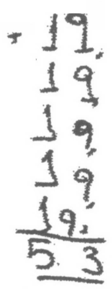


E: **tá, como é que você descobriu?**
ALD: (olhando para seus registros) **eu fiz a conta.**
E: **o que você fez aqui?** (aponta para os registros)
ALD: (olhando para os registros) **eu fiz 5 números. Cinco números de 19.**

Embora o sujeito faça uma evocação da "conta", rememorando o procedimento usado, ele não evoca os passos usados para efetuar a adição.

A.1.b - As interpretações que o sujeito faz como evocações, passo a passo, da produção da notação.

Como exemplo temos a interpretação de CLE sobre a notação feita na primeira tentativa de solução do problema.



CLE: **tinha que levar 55.**
E: **como é que você descobriu?**
CLE: **é que eu contei aqui primeiro** (aponta a coluna de 9) **e depois aqui** (aponta a coluna de 1).
E: **e o que você contou aqui?** (aponta a coluna de 9).
CLE: **eu contei aqui 9** (aponta o primeiro 9), **daí mais 9, mais 9, mais 9, mais 9** (aponta cada 9 à medida que fala).

No exemplo, o sujeito evoca, passo a passo os procedimentos usados para obtenção do resultado anunciado, indicando que contou os números da coluna das unidades e depois da coluna das dezenas.

A.1.c - As interpretações como verbalizações explicativas a respeito dos procedimentos usados, feitas durante a produção da notação.

Como exemplo temos as interpretações de BAR:

19,00 + 1,00 = 20,00

20 x5 = 100,00
100 – 5 = 95,00

BAR: (ajeita o cabelo com a mão direita que segura a canetinha e depois a leva até a cartolina Inclina-se sobre a folha) **assim... aqui** (puxa a cartolina mais para a direita) **dezenove** (registra 19,00)
E: **ahã**
BAR : **daí eu coloquei mais um real** (registra: + 1,00) **só pra dar igual a vinte** (registra: = 20,00)
E: **tá.**
BAR: (levanta um pouco o corpo) **daí vinte...** (abaixo do registro que acabou de fazer, registra 20) **vezes cinco.... igual... cem** (enquanto fala registra: x 5 = 100,00. Ergue mais um pouco o corpo, coloca a tampa da canetinha sobre a mesa. Olha para os registros feitos, aponta para a 1ª linha) **daí, como eu coloquei aqui 6, eu coloquei mais um, vezes cinco...** (aponta o registro x5 da linha de baixo) **dá cinco. Daí aqui como eu coloquei mais cinco deu esse resultado** (aponta o 100,00) **daí depois eu tenho que tirar de novo** (escreve agora embaixo da 2ª linha)
E: **ah, tirando aquilo que você pôs, né?**
BAR: é (registra 100 – 5 = 95, olha para E)

No exemplo, o sujeito interpreta suas notações à medida que as produz, explicando para a entrevistadora o significado de cada parte da notação.

Este tipo de interpretação revela que o sujeito utiliza um procedimento multiplicativo. O resultado é obtido por cálculo mental, com modificação do multiplicando (por arredondamento).

O sujeito verbaliza que acrescentou um real aos dezenove reais e que este um real, vezes cinco, resultaria em cinco reais que deveriam ser retirados do valor total obtido na multiplicação. Isso revela, ainda, a compreensão da multiplicação em sua relação escalar como a iteração de pagar o valor unitário (R$ 19,00) cinco vezes. Como a cada valor unitário foi acrescentado um real, ao todo (de acordo com o multiplicando) foram acrescentados 5 reais que deveriam então ser retirados.

A.2. *Conteúdo avaliativo das interpretações das notações:* em suas interpretações os sujeitos avaliam a adequação dos procedimentos e das notações.

Como exemplo temos as interpretações feitas por CLE, depois que ele, por sugestão da entrevistadora, refaz a soma dos números que ele registrou na coluna das unidades, anunciando 45 como o novo total obtido.

E: **45? E daí você acha que está certo como você fez ou não?**
CLE: (olha para a primeira notação produzida, olha para E, balança a cabeça negativamente).
E: **e daí?**
CLE: (balança a cabeça negativamente) **tá errado.**

A partir do novo resultado obtido, o sujeito julga incorreto o resultado marcado em sua primeira notação (53).

B. *Conseqüência da interpretação das notações.*

A partir da interpretação de conteúdo avaliativo o sujeito faz uma nova tentativa de solução do problema.

Como exemplo temos as interpretações de CLE, provocadas pela entrevistadora, que lhe sugere que faça outras notações.

+ 19
19
19
19
19
53

45
50

E: **quer anotar esse 45 prá você lembrar?**
CLE: (anota 45 à direita do registro anterior).
E: **tá, então só contando os 9** (aponta), **você já conseguiu quanto?**
CLE: (inclina a cabeça sobre a mão esquerda, olha para E) **45.**
E: **e agora, o que mais que está faltando?**
CLE: (olha para o registro, coça o pescoço, move os lábios, abaixa a mão esquerda sobre a mesa, continua olhando para seus registros e movendo os lábios. Registra 50 abaixo do 45). **Vai ter que levar 50 reais.**
E: **isso, por que 50?**
CLE: **porque aqui deu 45** (aponta o 45) **46** (aponta o 1 do primeiro 19), **47, 48, 49, 50** (enquanto fala, aponta cada 1 dos 19).

A partir das interpretações que faz, provocado pela entrevistadora, CLE faz outros registros.

As interpretações de CLE revelam a não compreensão do valor posicional dos algarismos nos números. Essa não compreensão do princípio posicional de nosso sistema de numeração foi revelada também nas interpretações de outro sujeito.

<u>Problema 5</u>

Relembrando, este problema consiste em determinar o valor unitário das blusas conhecendo o valor de 5 delas (R$ 60,00). Trata-se, portanto, de um problema de divisão por partição.

1. Antecipação da solução

Para este problema, descrevemos a seguir a ocorrência ou não de antecipação e os tipos de antecipação de solução encontrados.

a. *Não ocorrência de antecipação de resultado ou do tipo de procedimento a ser usado:* conforme já descrito, o sujeito inicia sua notação sem nenhum tipo de antecipação anterior ao início da produção da notação.

b. *Antecipação da dificuldade para responder ao problema:* neste tipo de antecipação a criança diz não saber como resolver o problema. Mostra que o considera como um problema "difícil".

Como exemplo temos a fala de CLE (9;8):

E: **agora essa outra aqui** (aponta a blusa branca) **uma pessoa foi lá na loja e comprou 5 blusas desta. Tá? 5 iguais... uma prá irmã, uma prá prima... e foi dar de presente 5 blusas desta. Ao todo ela gastou sessenta reais, tá? Quanto será que pode ter custado cada blusa? Todas as 5 blusas, juntas, ela gastou 60. Quanto será que pode ter custado cada uma sozinha?**
CLE: (olha para o encarte, olha para E, sorri) **ah, eu não sei.**

c. *Antecipação do resultado por cálculo mental:* neste tipo de antecipação a criança estima já um resultado, por cálculo mental.

Como exemplo temos a antecipação feita por ALD (11;6):

E: **agora uma pessoa só gastou 60, não gastou 95, não gastou tudo isso. Quanto que pode ter custado cada uma? Vamos ver se a gente consegue descobrir?** (pega uma folha nova e coloca-a sobre a folha de registros).
ALD: (olha para o encarte, inclina o corpo levemente sobre a mesa) **não... repete de novo?**
E: **ó, uma pessoa comprou 5 blusinhas iguais a essa aqui, tá?** (aponta o encarte).
ALD: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **a gente não sabe quanto custou cada uma, mas a pessoa levou 5 blusas e gastou sessenta reais prá comprar as 5. A gente quer saber quanto custou cada uma.**
ALD: (olha para o encarte, aponta, olha para E) **dez reais cada.**

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos para este problema podem ser classificadas nos seguintes tipos:

a. *Notação com desenho tendo algarismos como etiqueta:* neste tipo de notação o sujeito desenha uma blusa (mercadoria a ser comprada) acompanhada de algarismos que representam o valor unitário estimado por cálculo mental.

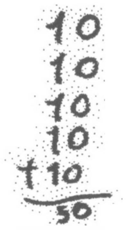
Como exemplo temos a notação de CLE (9;8):

No exemplo, CLE produz esta notação depois que a entrevistadora sugere que ele tente resolver o problema estimando um valor possível para as blusas, para depois testar se este valor é correto ou não. Ele desenha uma parte da blusa, coloca o valor unitário estimado, anuncia este valor e só então completa o desenho.

Este tipo de notação sugere uma solução por tentativa e erro, no qual é estimado um valor unitário (o qual é verificado nas próximas notações que faz).

b. A*ditivo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação de um valor unitário, estimado mentalmente, em número de parcelas correspondentes (ou não) ao divisor (número de blusas compradas) conforme o algoritmo convencional da adição.

Como exemplo temos a notação de ALD (10;6):



Neste exemplo, o sujeito usa a adição como verificação de um valor unitário estimado mentalmente (quociente), mantendo o controle sobre o número de blusas a ser adicionado (no caso do problema em questão, o divisor).

Este tipo de notação sugere um procedimento de solução no qual a criança busca um valor que multiplicado pelo divisor (5) resulte no dividendo (R$ 60,00). Entretanto o resultado não é obtido por meio de um procedimento multiplicativo e sim pela adição reiterada de parcelas iguais.

Para as notações deste tipo aparecem outras duas variações. Na primeira o sujeito não conserva o multiplicador, ou seja, não mantém o controle sobre o número de blusas a ser adicionado (que neste problema é o divisor). Isso é verificado nas notações de três sujeitos.

Como exemplo, temos a segunda notação produzida por ALD para resolução deste problema.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ +12 \\ \hline 72 \end{array}$$

Na segunda variação o sujeito registra os valores unitários (conservando o divisor) conforme o formato escolar do algoritmo convencional, mas de forma incompleta, abandonando seu registro, após efetuar a soma das unidades. Esse tipo de notação é feito por dois sujeitos.

Como exemplo temos as notações produzidas por ANTO (13;6) na quarta e quinta tentativas de solução.

5d

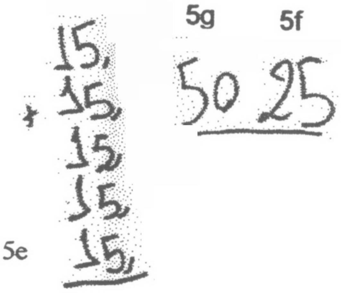
5e

Nestes exemplos, o sujeito produz uma nova notação sem completar a anterior (com a soma).

c. A*ditivo com escrita numérica dos resultados de adições efetuada mentalmente:* neste tipo de notação o sujeito registra, usando números, os resultados de adições efetuadas mentalmente.

São exemplos deste tipo, as notações 5f e 5g feitas por CLE (9;8) em uma de suas tentativas de verificação do valor unitário estimado:

5g 5f



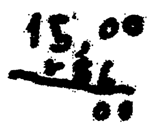
5e

No exemplo, a notação 5f (feita antes da notação 5g), refere-se à soma das unidades dos valores unitários (presentes na notação 5e) e a notação 5g refere-se à soma das dezenas dos valores unitários.

Este tipo de notação, já apresentado por este sujeito, no problema 4, mostra uma progressiva compreensão da multiplicação como adição repetida e do valor posicional dos algarismos nos números.

d. M*ultiplicativo em "contas" incompletas no formato escolar:* consiste na marcação de um valor unitário (neste caso estimado mentalmente) e do multiplicador (correspondente ou não ao número de blusas compradas) acompanhado do sinal de vezes, no formato escolar (algoritmo canônico). O sujeito desiste da notação antes de completar o resultado.

Como exemplo temos as notações produzidas por ANTO (13;6) na primeira e na segunda tentativa de solução.

5b   5a

A notação 5a é um exemplo no qual o multiplicador é correspondente ao número de blusas compradas e a notação 5b mostra a não conservação do número de blusas (o divisor do problema em questão).

As notações sugerem um tipo de procedimento de solução no qual o sujeito busca um valor que, multiplicado pelo divisor resulte no dividendo (por tentativa e erro).

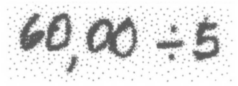
e. M*ultiplicativo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação do valor unitário (neste caso estimado mentalmente) como multiplicando e do multiplicador (número de blusas ou divisor no problema) acompanhado do sinal de vezes, no formato escolar (algoritmo canônico).

Como exemplo temos a notação de BAR (9;4):

No exemplo, o sujeito faz esta multiplicação como uma verificação do valor unitário estimado em um procedimento de divisão. Sugere que o procedimento usado por este sujeito também consiste na tentativa de encontrar um valor que multiplicado pelo divisor, resulte no dividendo.

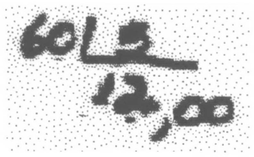
f. D*ivisão em uma expressão numérica no formato escolar:* consiste na marcação do valor total gasto como dividendo e do número de blusas compradas como divisor, separados pelo sinal da divisão, usado em expressões numéricas.

Como exemplo, temos a primeira notação produzida por BAR (9;4):



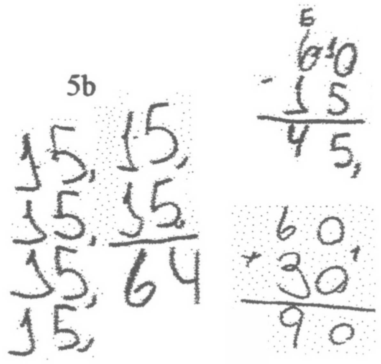
g. D*ivisão no formato escolar das "contas" :* consiste na marcação do valor total gasto como dividendo e do divisor (número de blusas compradas) em uma chave da divisão, tendo abaixo dela o resultado da divisão conforme o formato escolar das "contas" de divisão.

É exemplo a segunda notação produzida por BAR para a solução deste problema.



h. *Subtração no formato escolar das "contas"*: consiste em uma notação subtrativa, na qual minuendo e subtraendo são registrados em colunas, tendo abaixo o resultado, obtido pelo algoritmo canônico.

Como exemplo temos a notação 5d, produzida por CLE (9;8):



5b 5d 5c

No exemplo, a notação 5d é feita depois da intervenção da entrevistadora que questiona CLE sobre o número de parcelas da adição que efetuou a partir da notação 5b (na qual ele não conserva o divisor). A subtração é uma tentativa de "tirar" uma das parcelas a mais registrada naquela notação. Só que, em vez de retirar o valor de uma blusa (que estava a mais) do total obtido naquela adição, que era de R$ 90,00 (notação 5c), ele retira este valor unitário do valor total ou dividendo.

3. Interpretação da notação produzida:

Conforme já descrito, para os problemas anteriores, as interpretações que os sujeitos fizeram das notações produzidas são explicações sobre os procedimentos usados para solucionar o problema.

Nestas explicações identificamos também um conteúdo avaliativo com a identificação de incorreções, que são corrigidas pelos próprios sujeitos.

Para alguns sujeitos, neste momento de interpretação (provocado pela entrevistadora), ocorre o avanço na solução do problema, sendo que as interpretações, nestes casos, estão intercaladas com a produção da notação e apresentam, como conseqüência, a realização de novas tentativas de solução por parte dos sujeitos.

Descrevemos, a seguir, os tipos de interpretação feitos pelos sujeitos, relativas ao seu conteúdo e conseqüência.

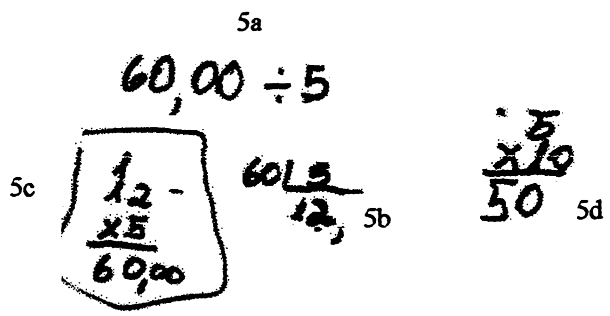
A. *Conteúdo das interpretações das notações.*

Os conteúdos das interpretações das notações feitas pelos sujeitos para este problema são de dois tipos: explicativo e avaliativo, os quais são descritos e exemplificados a seguir.

A.1. *Conteúdo explicativo das notações*: as interpretações que o sujeito faz são explicações sobre a notação produzida. As explicações usadas pelos sujeitos neste problema podem conter uma evocação, passo a passo, dos procedimentos usados e notações produzidas ou podem consistir de uma tentativa de validação do resultado encontrado.

A.1.a - As interpretações que o sujeito faz como evocações, passo a passo, dos procedimentos usados e das notações produzidas.

Como exemplo, temos as interpretações que BAR faz de suas notações:



E: **tá, então me explica como é que você pensou. Por que você fez assim, 60 divididos por 5** (aponta notação 5b) **o que você pensou?**
BAR: **porque eu pensei... ela levou sessenta reais** (aponta o 60) **e ela comprou 5 "brusas" iguais** (aponta o 5) **daí eu pensei que esse 60... deu igual a 12** (aponta o 12,00).
E: **ahã. Como é que você sabia que 60 dividido por 5 era igual a 12?**
BAR: **porque eu fiz a conta** (reforça o traçado do 2 do 12, passando a canetinha 2 vezes sobre ele).
E: **mas como que você descobriu...** (aponta o registro de 12,00) **porque depois que você fez esse daqui para conferir** (aponta a notação 5c) **primeiro você tentou... pensou e achou que era 12** (aponta para o registro de 12,00 na notação 5b).
BAR: **ah, é por causa que 50** (registra 50 à direita do registro de 12,00 – notação 5d) **é o resumo de vezes 10, o 5** (enquanto fala, faz um traço horizontal, acima do 50, colocando x10 e o 5 acima do 10).
E: **ahã**
BAR: **então...** (aspira o ar fortemente) **como tem 60, dá pra colocar mais duas vezes** (mostra dois dedos) **e daí é igual a 12** (aponta o registro de 12,00 – notação 5b).
E: **ah, daí você já descobriu que era 12 e daí você conferiu aqui, né?** (aponta o registro de 5 x 12 – notação 5c)
BAR: (olha para este registro) **ahã.**
E: **então tá. Realmente levou 60 e comprou 5, então saiu 12 cada uma.**
BAR: (faz um contorno parecido com um retângulo ao redor do registro de 5 x 12) **ahã.**

Junto com suas notações, a interpretação de BAR sugere que o procedimento usado para solucionar o problema consistia na busca de um valor que multiplicado pelo divisor (5) resultasse no dividendo (R$ 60,00).

Em sua explicação percebemos que o sujeito faz uma decomposição do dividendo numa soma de parcelas. Pensa em R$ 60,00 como R$ 50,00 mais R$ 10,00 (60=50+10). Busca então, separadamente, os valores que multiplicados pelo divisor (5) resultem em cada uma das partes do dividendo. Como já sabe que para a maior parte (50) o valor é 10 (pois 5x10=50), resta buscar o valor que multiplicado por 5 resulte em 10 (no caso o 2).

Sabendo que se o valor unitário fosse R$ 10,00, pagaria apenas R$ 50,00 (faltando R$ 10,00), acrescenta mais R$ 2,00 ao valor unitário (totalizando R$ 12,00) e obtendo assim o dividendo pela multiplicação deste valor unitário pelo divisor (5x12=60).

A.1.b - As interpretações que o sujeito faz como tentativa de validação de uma solução.

Como exemplo temos a interpretação de ALD sobre a notação produzida em sua primeira tentativa, quando fez uma adição de 5 parcelas de R$ 10,00.

ALD: **ela levou 5, só que sobrou dez reais.**
E: **mas só que não sobra nada, ela gastou tudo.**

ALD: (fica olhando para frente, mexendo no cabelo com a mão esquerda).
E: **então será que pode ter custado dez reais cada uma?**
ALD: (olha seu registro, franze a testa) **ah, não.**

A interpretação que ALD faz, sugere que o procedimento usado consiste em estimar mentalmente um valor unitário e verificá-lo através da adição, cujo resultado deve ser igual ao dividendo (R$ 60,00). É uma resolução por aproximação (tentativa e erro).

Como o resultado encontrado não foi igual ao dividendo, o sujeito apresenta a possibilidade do troco como uma tentativa de validação da solução apresentada.

Conforme o exemplo, na continuidade da conversa entre ALD e a entrevistadora, mesmo afirmando que o valor unitário não poderia ser de R$ 10,00, faz uma nova tentativa de validação desta estimativa, propondo desta vez uma divisão em partes desiguais.

E: **ela não gastou só 50, ela gastou 60.**
ALD: (fica olhando para o registro que fez).
E: **se cada blusa custasse 10, quanto ela ia gastar de dinheiro? Como você fez aí?**
ALD: (olha para E) **50.**
E: **isso, mas ela não gastou 50, ela gastou 60. Ela gastou mais dinheiro.**
ALD: (olha para o lado esquerdo com a cabeça apoiada na mão esquerda, olha para E) **então o preço de uma... de uma das blusas** (aponta com a caneta para o encarte) **é vinta reais.**

Ao apresentar esta possibilidade, não pensou em termos de 60 divididos (repartido) igualmente em 5 partes, que é a idéia presente neste problema. Para validar a estimativa de R$ 10,00 , como valor atribuído a cada blusa, o sujeito desconsidera que a divisão é feita em partes iguais (todas as blusas tinham o mesmo preço). Nestas verbalizações que faz, percebemos a não compreensão, da divisão em partes iguais.

A.2 - *Conteúdo avaliativo das interpretações:* em suas interpretações os sujeitos avaliam a adequação dos procedimentos e das notações.

Como exemplo temos a interpretação que ANTO faz, provocado pela entrevistadora, sobre a notação produzida em sua terceira tentativa de solução do problema. Esta tentativa (expressa na notação abaixo) é uma verificação, por meio da adição repetida, de um valor unitário que ele estima inicialmente em R$ 15,00.

E: **dá certo, ou não?**
ANTO: (olha para a folha) **dá.**
E: **por que? De onde você tirou esse 30 aqui?** (aponta o 30)
ANTO: **hum... por causa que ela já tinha comprado duas daí...**
E: **duas já dá 30. E aqui?** (aponta o 15 embaixo do 30)
ANTO: **daí mais duas, mais 30 dá 60** (olha para esquerda)
E: **daí dá 60, mas quantas blusas têm aqui?** (aponta o registro de 30 e os dois 15)
ANTO: (esfrega a mão direita no nariz, coloca-a sobre a mesa e olha para o registro apontado por E) **tem... deixa eu ver... 3!**
E: **três? Aqui é o preço de quantas?** (aponta o 30)
ANTO: (aponta com o indicador o 30 e os dois 15) **de... 4.**
E: **isso, mas então 4 blusas aqui dá 60** (aponta o registro) **e quantas que ela levou prá dar 60?**
ANTO: (olha para baixo, move-se na cadeira).
E: **eu falei que ela levou quantas?**
ANTO: **cinco.**
E: **cinco. Então pode custar 15, cada uma?**
ANTO: (esfrega a palma da mão direita no nariz) **não.**
E: **se custar 15 cada uma ela tem que levar só 4 para dar 60, né?**
ANTO: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então agora você acha que custa mais de 15 ou menos de 15 cada blusa?**
ANTO: **menos.**

No exemplo ANTO afirma que deu certo, que o preço de cada blusa poderia realmente ser de R$ 15,00. Ele justifica sua afirmativa explicando a adição que fez, cujo total foi igual ao dividendo (R$ 60,00). Isso revela que o sujeito centra-se no dividendo, não conservando o divisor.

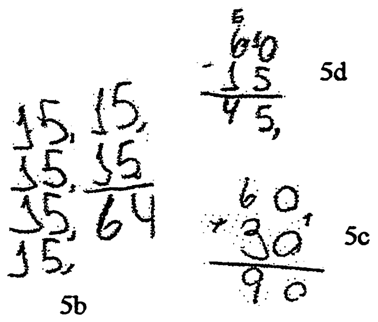
Quando a entrevistadora pergunta o preço de quantas blusas ANTO calculou, inicialmente ele diz ser de três blusas, provavelmente porque conta três parcelas na adição que fez. Depois afirma que são quatro blusas, considerando que a primeira parcela já contém o preço de 2 blusas.

Com a intervenção da entrevistadora ele volta novamente a considerar o divisor (número de blusas) que já é dado no problema e conclui que cada blusa não poderia custar R$ 15,00.

B. *Conseqüência da interpretação das notações.*

As interpretações de conteúdo explicativo e, sobretudo de conteúdo avaliativo, em geral apresentam como conseqüência uma outra forma de solução, uma nova tentativa realizada pelo sujeito.

Como exemplo temos as interpretações que CLE faz da segunda tentativa de solução do problema.



CLE: **sessenta e quatro reais.**
E: **como é que você fez isso?**
CLE: **é que aqui, né?** (aponta o 1 do primeiro 15) **você falou que aqui o valor de um real era dez reais. Então eu contei 10, 20, 30, 40, 50, 60.** (aponta cada 1 da coluna das dezenas) **seis e quatro** (aponta o 6 e o 4 do resultado).
E: **mas de onde este 4?**
CLE: (fica olhando seu registro)
E: **o 60 só dos 10, né?** (aponta a coluna de 1)
CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**
E: **tá, mas e o 4 de onde você tirou?**
CLE: (aponta os 5 dos dois primeiros 15, torna a apontá-los) **é que eu fiz a conta daqui daí.**
E: **você contou dois 5? E quanto dá todos esses 5 juntos?** (aponta)
CLE: (está com a canetinha na boca, leva-a até o papel e usa para apontar cada 5 da coluna das unidades. Aponta o 4 que registrou abaixo desta coluna, olha para E) **aqui ia dar um número... aqui eu contei errado** (aponta a coluna de 5) **daí aqui dá 30.**
E: **ah, dava 30. E daí?**
CLE: (fica com a cabeça apoiada na mão esquerda olhando para a folha).
E: **só os 5 já dava 30. Quer anotar para você não esquecer?**
CLE: (anota 30 à direita do registro anterior).
E: **e os 10, deu quanto?**
CLE: **os 10 deu 60.**
E: **então, tudo junto dá quanto?**
CLE: (olha na direita do registro de 30 e acima dele registra 60. Faz um sinal de + à esquerda do 30 e passa um traço horizontal abaixo de tudo. Aponta os dois zeros e abaixo deles registra 0. Olha para os dedos da mão direita, que movimenta e anota 9 à esquerda do zero. Olha para E) **90**

Na interpretação que CLE faz da sua notação, ele verbaliza os cálculos feitos, em uma ordem diferente daquela usada na produção da notação, quando começou adicionando as unidades.

Sua interpretação é de conteúdo explicativo e avaliativo, pois ele percebe que o resultado registrado não é correto. Como conseqüência destas interpretações, ele produz uma outra notação (5b) como uma nova tentativa de solução (busca do resultado da adição).

Na continuidade da intervenção, a entrevistadora chama a atenção de CLE para o número de parcelas que ele registrou naquela adição.

E: **isso e por que tem todos esses... quantos 15 tem aqui?** (aponta os 15).
CLE: (olha para os registros com a cabeça apoiada na mão esquerda e move os lábios e a cabeça para frente) **seis, que ela ia levar 6 blusas** (olha para E).
E: **eram 6?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **eram 5.**
CLE: (faz um bico com os lábios, afasta a cabeça da mão, sorri).
E: **lembra, eu falei que ela levou 5 blusas iguais, tanto que quando você fez com 10** (aponta o registro de 10 abaixo do desenho) **daí deu 50. Você fez 10, mais 10, mais 10, mais 10, mais 10** (mostra os dedos da mão, um a um) **5 blusas. Então o que aconteceu aqui nesta conta?**
CLE: (olha para a conta) **eu fiz a conta errada.**
E: **mas o que tem a mais aí?**
CLE: **um 15.**
E: **um quinze a mais, né? Então é só tirar um 15. Será que daí vai dar 60 ou ainda vai ficar muito? Se você tirar 15 aí, vai dar 60 ou ainda vai dar muito?**

A partir desta interpretação, de que há um valor unitário a mais e da sugestão de que ele seja retirado, CLE produz outra notação, desta vez de tipo subtrativo (notação 5d).

<u>Problema 6</u>

Relembrando, este problema consiste em determinar o valor unitário das blusas conhecendo o valor de 4 blusas (R$ 42,00). Trata-se de um problema de divisão, cujo quociente é uma fração decimal.

1. Antecipação da solução

Para este problema, descrevemos a seguir a ocorrência ou não de antecipação da solução e os tipos de antecipação de solução encontrados.

a. *Não ocorrência de antecipação de resultado ou do tipo de procedimento a ser usado:* conforme já descrito, o sujeito inicia sua notação sem nenhum tipo de antecipação anterior ao início da produção da notação.

b. *Antecipação do resultado por cálculo mental:* neste tipo de antecipação o sujeito estima já um resultado (expresso em valor), por cálculo mental.

Como exemplo temos a antecipação feita por CLE (9;8):

E: **Então agora mais um. Só o último agora, tá? Esse último é dessa blusa aqui, ó** (entrega a foto a CLE) **tá vendo? Essa camiseta aqui... essas duas, né, que são iguais... só a cor é diferente. Uma pessoa foi lá e comprou 4 que ela ia dar para os sobrinhos dela. Ela tinha 4 sobrinhos, comprou 4 blusas, tá? Ela gastou quarenta e dois reais. Quanto custou cada blusa será? Ela comprou 4 agora, não foram 5** (pega uma cartolina em branco e coloca sobre a cartolina usada. Deixa a foto sobre esta cartolina em branco) **foram 4 blusas e ao todo de dinheiro que ela gastou foram quarenta e dois reais. Quanto será que pode ter custado cada uma?**
CLE: (fica olhando a foto com a mão direita encostada na testa e a esquerda mexe no queixo. Olha para E) **dez.**

No exemplo, assim que o problema é apresentado a criança já estima o resultado.

c. *Antecipação do valor unitário, sugerida pela entrevistadora:* neste tipo de antecipação, a entrevistadora é que sugere uma estimativa de valor unitário e a criança julga sua adequação.

Como exemplo temos o que ocorreu com ALD (11;6) antes que ela iniciasse suas notações:

E: **quanto mais ou menos você acha... aí você pode tentar igual você fez da outra vez, ó** (indica as notações feitas no problema anterior) **primeiro você tentou um valor, depois tentou com outro.Tenta com um... depois vai ficar mais fácil.**
ALD: (olha para E, olha para a esquerda com a mão direita na frente da boca, abaixa a cabeça e volta a olhar para a folha. Dirige os olhos para a direita, apóia a cabeça nas costas da mão, olha novamente para a direita, tira a mão com a canetinha da folha, ajeita a folha com a mão direita, abaixa o cotovelo

esquerdo até a perna e abaixa a cabeça, apoiando o queixo na mão. A mão direita fica sobre a extremidade inferior direita da folha).
E: **quer dar uma olhada naquilo que você fez antes?** (indica novamente as notações do problema anterior) **está aqui, primeiro você tentou com quanto?**
ALD: (ajeita a folha e olha para os registros feitos anteriormente) **primeiro com... com 5 blusas.**
E: **ah, 5 porque eram 5 blusas, né? Mas qual foi o valor que você achou que tinha cada blusa primeiro?**
ALD: (olha para os registros) **dez reais.**
E: **isso, 10. Daí dez reais cada blusa, 5 blusas dava quanto?** (aponta o registro)
ALD: **dava cinqüenta reais.**
E: **isso, e se fosse dez reais agora, com 4 blusas** (vira novamente a folha) **vai dar quanto?**
ALD: (ajuda a virar a folha) **vai ficar...** (olha para esquerda) **aí vai ficar faltando dinheiro.**
E: **falta por que? Vai dar quanto?**
ALD: (fica olhando para esquerda em silêncio)
E: **se cada uma destas blusas custasse dez reais** (aponta a foto) **quanto essa pessoa ia gastar para comprar as 4?**
ALD: (olha para foto) **quarenta reais.**

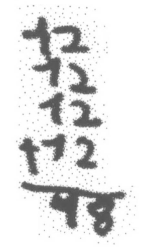
No exemplo, a antecipação de um valor unitário foi feita pela entrevistadora, que usa como referência as notações e os procedimentos de solução usados pelo sujeito no problema anterior. O sujeito antecipa a incorreção do valor unitário sugerido pela entrevistadora para este problema, justificando que, neste caso, faltaria dinheiro. Se cada blusa realmente custasse R$ 10,00 o valor gasto para comprá-las não completaria o valor que é apontado pelo problema como total gasto (dividendo).

2. Produção da notação:

As notações produzidas pelos sujeitos neste problema são todas numéricas. Elas podem ser classificadas nos seguintes tipos:

a. A*ditivo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação de um valor unitário, estimado mentalmente, em número de parcelas correspondentes (ou não) ao divisor (número de blusas compradas). Estas parcelas são acompanhadas do sinal de mais e dispostas em colunas conforme o algoritmo convencional.

Como exemplo deste tipo de notações temos a notação de ALD (11;6):



Neste exemplo, ALD usa a adição como verificação de um valor unitário estimado mentalmente (quociente), mantendo o controle sobre o número de blusas a ser adicionado (no caso do problema em questão, o divisor).

Este tipo de notação sugere um procedimento de solução no qual o sujeito busca um valor que multiplicado pelo divisor (4) resulte no dividendo (R$ 42,00). Entretanto o resultado não é obtido por meio de um procedimento multiplicativo e sim pela adição reiterada de parcelas iguais.

Para as notações deste tipo aparece uma variação: o sujeito não conserva o multiplicador, ou seja, não mantém o controle sobre o número de blusas a ser adicionado (que neste problema é o divisor). Isso é verificado nas notações de dois sujeitos.

Como exemplo, temos uma das notações produzidas por ANTO para resolução deste problema.

No exemplo, além da não conservação do divisor, o sujeito faz uma notação aditiva incompleta, na qual o resultado não é registrado. Neste caso, o resultado não é registrado por que o sujeito percebe a inadequação do procedimento pela não conservação do divisor (provocado pela entrevistadora).

Este tipo de notação de tipo aditivo (com a "conta" incompleta) também é produzido por outro sujeito, que não completa com o resultado por antecipar que este não será equivalente ao dividendo.

b. *Notação numérica de resultado de adição efetuada mentalmente:* consiste no registro de um valor numérico como resultado de adições feitas mentalmente.

É exemplo a notação produzida por ALD após a estimativa sugerida pela entrevistadora:

40

No exemplo esta notação se refere à soma de 4 parcelas de R$ 10,00. Ela é produzida por sugestão da entrevistadora, depois que ALD explica que cada blusa não poderia custar R$ 10,00 porque, neste caso, seriam gastos apenas R$ 40,00, faltando então R$ 2,00 para completar o valor do dividendo (R$ 42,00).

c. *Notação de tipo divisão incompleta no formato escolar:* consiste na marcação do valor total gasto como dividendo e da quota, correspondente ao número de blusas compradas, como divisor dentro da chave da divisão. O registro é incompleto por não conter o resultado da divisão.

Como exemplo temos a primeira notação produzida por BAR (9;4) para a solução deste problema.

42,00 |4

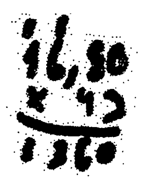
Esta notação sugere que o sujeito compreende a divisão como uma repartição em partes iguais, reconhecendo então este problema como sendo de divisão.

d. *Multiplicativo em "contas" no formato escolar:* consiste na marcação de um multiplicando e um multiplicador acompanhado do sinal de vezes na forma das "contas" escolares.

Neste problema o multiplicando e o multiplicador variam nas notações de diferentes sujeitos, sendo que encontramos as seguintes variações:

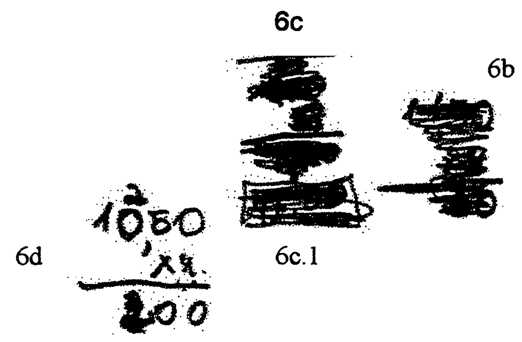
d.1. O dividendo (valor total) usado como multiplicando e o divisor usado como multiplicador. É exemplo a primeira notação produzida por ANTO (13;6).

d.2. O dividendo sendo usado como multiplicador. Como exemplo temos a segunda notação produzida por ANTO.



No exemplo, o sujeito marca o resultado registrado em sua notação anterior como multiplicando e o dividendo como multiplicador.

d.3. Registro de um valor unitário estimado por cálculo mental como multiplicando e do divisor como multiplicador. Como exemplo, temos algumas das notações produzidas por BAR (9;4)



Nos exemplos, temos a “conta” incompleta, como na notação 6b, a qual foi riscada posteriormente por BAR. Nesta notação ela registrou um valor estimado mentalmente (R$ 11,50) como multiplicando e o divisor (4) como multiplicador. Efetuou a multiplicação e registrou 20 como resultado, desistindo desta notação e perguntando em seguida se o preço de cada blusa era de R$ 11,50.

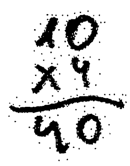
A notação 6c, produzida quando a entrevistadora lhe pergunta como o sujeito descobriu o valor unitário também é incompleta. Novamente registra multiplicando e multiplicador (os mesmos valores usados na notação anterior) e 20 como resultado, desistindo da notação, confirmando o valor unitário. Somente mais tarde, depois que já riscou o 20 registrado no resultado é que efetua a multiplicação e registra o resultado mais abaixo, de R$ 46,00 (notação 6c.1, a qual também é riscada quando conclui que o valor unitário não pode ser de R$ 11,50).

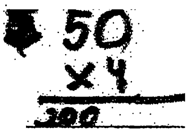
Finalmente, a notação 6d, também é uma “conta” incompleta. Desta vez o multiplicando é modificado, em função do resultado obtido na tentativa anterior . O multiplicando é o novo valor estimado por cálculo mental (R$ 10,50). A notação é abandonada porque BAR não consegue obter o multiplicando como resultado.

As notações ilustradas sugerem que o procedimento de solução usado por este sujeito consiste em encontrar um valor que, multiplicado pelo divisor (4) resulte no dividendo (R$ 60,00), sugerem ainda que ela já antecipou que este valor unitário não é um número inteiro.

d.4. Decomposição do valor do multiplicando (ainda o valor unitário estimado por cálculo mental) em reais e centavos. O resultado é obtido em duas multiplicações separadas.

Como exemplo temos as notações feitas por BAR (9;4)

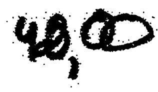

6e


6f

No exemplo, na notação 5e o sujeito faz a multiplicação dos reais e na notação 5f faz a multiplicação dos centavos. Os resultados (R$ 40,00 e 200 centavos) são posteriormente agregados em outra notação.

e. R*egistro de resultados obtidos em diferentes multiplicações:* consiste no registro dos resultados obtidos na multiplicação de um valor unitário decomposto em reais e centavos para multiplicação. Neste registro os resultados obtidos em separado são agregados.

É exemplo a notação de BAR:



Nesta notação, o sujeito registra inicialmente R$ 40,00 como resultado da multiplicação de 4 por 10 (centavos). Depois de efetuar a multiplicação de 4 por 50 (centavos) e obter como resultado 200, registra um 2 sobre o zero do 40.

Esta notação sugere a compreensão da relação entre o real e os centavos (o centavo como a centésima parte do real) e ainda a compreensão do valor posicional dos algarismos em um número, pois o 2 (enquanto unidade) é registrado na ordem das unidades.

3. Interpretação da notação produzida:

Assim como nos problemas anteriores, as interpretações que os sujeitos fizeram das notações produzidas são explicações sobre os procedimentos usados para solucionar o problema.

Nestas explicações identificamos também um conteúdo avaliativo com a identificação de incorreções, que são corrigidas pelos próprios sujeitos.

Para alguns sujeitos, neste momento de interpretação (provocado pela entrevistadora) ocorre o avanço na solução do problema. As interpretações, nestes casos, estão intercaladas com a produção da notação e apresentam, como conseqüência, a realização de novas tentativas de solução por parte dos sujeitos.

Descrevemos, a seguir, os tipos de interpretação feitos pelos sujeitos, relativas ao seu conteúdo e conseqüência.

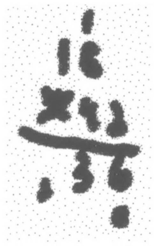
A. *Conteúdo das interpretações das notações.*

Os conteúdos das interpretações das notações feitas pelos sujeitos para este problema são de dois tipos: explicativo e avaliativo, os quais são descritos e exemplificados a seguir.

A.1. *Conteúdo explicativo das notações*: as interpretações que o sujeito faz são explicações sobre a notação produzida. As explicações usadas pelos sujeitos neste problema são uma rememoração do procedimento usado (com referência ao tipo de "conta" usada) ou uma evocação, passo a passo, das notações produzidas e são, ainda explicações que justificam um resultado.

A.1.a – Interpretações como evocações da "conta" usada ou dos procedimentos usados, passo a passo, na produção da notação.

Como exemplo temos a interpretação que ANTO faz da notação feita em sua terceira tentativa de solução, que mostra um caso em que o sujeito faz referência à "conta" usada.



E: **o que você fez aqui?** (aponta a notação)
ANTO: (levanta a cabeça, olha o registro) **fiz 12 vezes o 42.**
E: **por que 12 vezes 42?**
ANTO: **ué...** (olha para o registro) **porque eu achei o resultado.**
E: **quantas blusas ela comprou?**
ANTO: **42**

Em sua verbalização ele muda o multiplicando de 18 para 12 (na notação, o multiplicador registrado é 18) e não faz nenhuma relação entre estes números e o problema em questão. Depois, com a intervenção da entrevistadora mostra que o dividendo do problema (R$ 42,00) é considerado por ele como o número de blusas compradas (divisor). Vemos que ele não havia compreendido o problema.

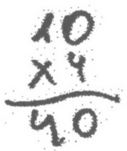
Em outro exemplo, da interpretação feita por BAR, vemos a evocação, passo a passo do procedimento usado na produção da notação.

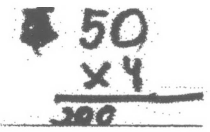
BAR: **é 11 e 50?**
E: **não sei, vamos ver como você pensou.**
BAR: (olha para seu registro, aponta com a canetinha) **eu peguei 42 divididos por 4, daí eu coloquei zero, zero, daí eu tive que emprestar do 2, daí depois 1... vírgula... um, um** (olha para E).

A interpretação sugere que o sujeito antecipa que o quociente seria uma fração decimal porque restariam 2 nesta divisão. Quando ela fala que colocou “zero, zero” está se referindo aos centavos que registrou ao lado do 42, somente depois que aponta algumas vezes o dividendo (até então registrado apenas como 42) e o divisor. Ela já menciona o uso da vírgula e parece ter registrado os dois zeros por acreditar que necessitaria deles ao efetuar a divisão.

A.1.b – Interpretação como justificativa para um resultado apresentado.

Como exemplo temos a explicação de BAR sobre a estimativa de uma fração decimal para o valor unitário.



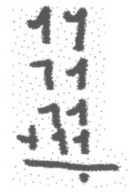


E: **isso, então quanto custa cada blusa?**
BAR: (olha para o registro de 10 x 4) **dez...** (olha para o registro de 50 x 4) **dez? Dez e cinqüenta** (olha para E).
E: **dez e cinqüenta. Logo de começo você já pôs os centavos. Você já sabia que ia dar centavos? Por que você sabia que ia dar centavos?**
BAR: (aponta para o registro de 42,00) **porque... o dois reais ia sobrar** (olha para E).

Sua explicação sugere que ela já havia efetuado mentalmente uma multiplicação na qual o fator desconhecido era R$ 10,00 e percebeu que neste caso restariam R$ 2,00. Ela também sabia que estes R$ 2,00, divididos por 4 blusas, não poderiam resultar em um valor inteiro, portanto ela logo levantou a possibilidade de usar um valor decimal para o valor unitário.

A.2 - *Conteúdo avaliativo das interpretações:* em suas interpretações os sujeitos avaliam a adequação dos procedimentos e das notações.

Como exemplos, temos a interpretação que ALD faz de suas notações, com a intervenção da entrevistadora:



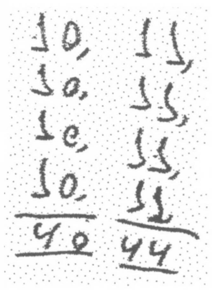
E: **o que você acha? Tem que ser mais que 10 ou menos que 10 cada blusa?**
ALD: **mais que 10.**
E: **pois é, mas daí você tentou com 11, o que aconteceu?**
ALD: **deu quarenta e quatro reais e... é... faltou dinheiro.**

Neste exemplo, o sujeito faz uma avaliação do resultado obtido em uma de suas tentativas, julgando a inadequação do valor unitário estimado (R$ 11,00), embora em sua notação não tenha registrado o resultado.

b. *Conseqüência da interpretação das notações.*

As interpretações de conteúdo avaliativo podem encaminhar o sujeito para uma nova tentativa de solução do problema.

Como exemplo, temos a interpretação de CLE, que, com a intervenção da entrevistadora, avalia os resultados obtidos em suas tentativas de solução.

6a


6b

E: **isso, se cada uma custar 10, dá 40. Mas ela não gastou 40, ela gastou 42.**
CLE: (olha para E enquanto ela fala. Depois olha para o encarte) **mas não dá!** (olha novamente para E).
E: **por que não dá?**
CLE: **porque... 40** (olha para a folha) **deixa eu ver... ela paga** (olha para E) **40 cada uma... paga 10** (aponta cada 10 registrado com a tampa da canetinha que segura na mão direita – notação 6a).
E: **isso, se cada uma custar 10, vai gastar só quanto de dinheiro?**
CLE: **40.**
E: **mas só que ela gastou 42. Então será que a blusa custava mesmo 10?**
CLE: (com a canetinha na boca, olhando para frente) **deixa eu ver com 11.**

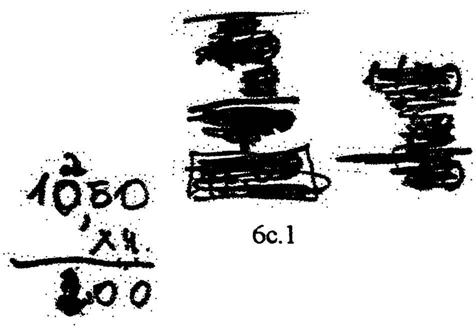
E: **o que acontece se for 11?**
CLE: (olha seu registro – notação 6b, balança a cabeça negativamente) **não dá!** (olha para E) .
E: **o que acontece daí?**
CLE: (olha para a câmera, sorri, olha para baixo) **vai faltá.... faltava dinheiro.**
E: **se for 10 é pouco, se for 11 é muito, e daí?**
CLE: (olha para E, olha para baixo).
E: **tem algum valor que fique entre o 10 e 0 11, ou não?**
CLE: (olha para E) **tem o 9.**

O sujeito explica porque não pode ser R$ 10,00 o valor de cada blusa e faz uma nova tentativa com um valor maior. Ao perceber que este valor também não pode ser a solução, ele sugere outro valor, menor que os R$ 10,00 estimados inicialmente.

Esta interpretação revela que CLE não consegue pensar em termos de fração decimal. Embora a entrevistadora pergunte se há algum um valor entre 10 e 11 que possa ser o preço de cada blusa, ele não consegue usar a fração decimal.

Outro exemplo em que o conteúdo avaliativo das interpretações encaminha o sujeito para novas tentativas de solução, pode ser verificado nas interpretações que BAR faz de uma notação multiplicativa em uma "conta" escolar (6d).

6c



6b

6d

6c.1

Esta já era a quarta tentativa de solução, feita depois que julgou o valor unitário estimado inicialmente (R$ 11,50) como inadequado, pois, ao multiplicá-lo por 4, obteve R$ 46,00 como resultado (notações 6c e 6c.1).

No exemplo abaixo, a interpretação que BAR faz é da notação 6d:

BAR: (após registrar um 6 como resultado da multiplicação de 4 pelo zero do 10) **ué, deu 6 de novo.**
E: **o que acontece que deu 6?**
BAR: (aponta o 4 e o zero do 10) **quatro vezes o zero é igual a 4, daí dois dá 6.**
E: **ah é? Quatro vezes zero é igual a quatro? Se você pusesse separado, assim** (aponta o 10,50) **primeiro o 4 x 10. Quanto é 4 vezes o 10?**
BAR: (afasta a canetinha do seu registro mais para a direita, onde registra um 6, olha para o registro apontado por E) **4 vezes o 10 é 40.**
E: **quanto é 4 vezes cinqüenta centavos?**
BAR: **é... tá certo** (faz um 2 sobre o 6 que havia registrado à esquerda dos dois zeros) **dá dois reais.**
E: **por que será que é 2 e não 6?**
BAR: **porque agora... entendi** (olha para o registro de 42,00 divididos por 4, aponta para o registro de 10,50 x 4) **é 40, né?**

Mesmo sem terminar sua notação (colocando o resultado) BAR já faz uma interpretação de conteúdo avaliativo, julgando o resultado inadequado, uma vez que obteve novamente 6 na ordem das unidades. Assim o resultado não seria igual ao dividendo (R$42,00).

Com a intervenção da entrevistadora, o sujeito é encaminhado para uma nova tentativa, na qual decompõe o multiplicando em reais e centavos:

40,00

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ \times 4 \\ \hline 200 \end{array}$$

BAR: (leva a canetinha mais para baixo à direita e, abaixo dos registros de 11,50 x 4 já riscados, escreve 2. Sobre este 2 escreve 5, reforçando o traçado deste último número. Risca o 5 e leva a mão com a canetinha mais para a direita onde registra 50) **cinqüenta** (olha seu registro, arruma o cabelo com as duas mãos) **vezes 4** (registra x 4 embaixo do 50 e faz um traço horizontal abaixo de tudo) **dá 200** (anota 200 abaixo do traço) **duzentos?** (olha para o registro, aponta o 50 e o 4) **é, duzentos!** (reforça os algarismos do 200, passando a canetinha sobre eles) **Só que como é centavos dá dois reais.**
E: **ahã, tá.**

BAR: (olha para o registro de 10 x 4, olha para o registro de 50 x 4) **tá, tá certo** (leva a canetinha até o registro de 40) **então aqui vai o 2** (escreve 2 sobre o 0 do 40 e coloca uma vírgula seguida de dois zeros à direita deste 2).
E: **isso, então quanto custa cada blusa?**
BAR: (olha para o registro de 10 x 4) **dez...** (olha para o registro de 50 x 4) **dez? Dez e cinqüenta** (olha para E).

Para explicar como descobriu que o correto era registrar um 2 onde antes havia registrado um 6, o sujeito refaz, agora em notações, o cálculo de 4 x R$ 10,50 já verbalizado, separando os centavos e os reais.

Quando registra 50 (valor dos centavos) e multiplica por 4, obtendo 200 como resultado, parece achar este resultado incompatível com sua expectativa, mas em seguida justifica para si mesma que os 200 registrados valem R$ 2,00. Ela confirma então o resultado (R$ 42,00)

Mediante a análise feita, por problemas, apontamos para algumas comparações entre os diferentes tipos de antecipação de solução e de notações apresentadas por nossos sujeitos, de acordo com o tipo de problema, conforme sejam eles de multiplicação ou de divisão.

Em relação à antecipação de solução, percebemos que determinados tipos de antecipações não ocorreram com a mesma freqüência nos diferentes problemas.

Nos dois problemas de multiplicação encontramos os seguintes tipos de antecipações: da possibilidade ou necessidade de se resolver o problema fazendo uma "conta" (sem explicitação sobre o tipo de conta); do tipo de procedimento a ser usado (com explicitação do tipo de "conta"); do resultado por cálculo mental. No problema 4, cujo valor unitário era um número de magnitude maior que do problema 1, encontramos também uma antecipação por estimativa de conteúdo qualitativo expressa em termos de "muito".

Nos problemas de divisão por quota, encontramos os seguintes tipos de antecipações: da dificuldade de se resolver o problema (somente no primeiro problema deste tipo, o problema 2); por estimativa de conteúdo qualitativo; por estimativa de conteúdo quantitativo; do resultado por cálculo mental (somente no segundo problema deste tipo, o problema 3). Nos dois problemas, as antecipações por estimativa de conteúdo qualitativo ou quantitativo foram provocadas pela entrevistadora que utilizou o resultado do problema anterior como comparação (a partir de termos relativos como "mais que"; "menos que"), ou sem a comparação com o problema anterior, somente usando termos relativos como "bastante" ou "pouco".

Nos problemas de divisão por partição, encontramos os seguintes tipos de antecipações: da dificuldade para se resolver o problema (somente no primeiro problema deste tipo, o problema 5); do resultado por cálculo mental. No problema 6, verificamos a ocorrência de uma antecipação, feita pela entrevistadora, para provocar uma análise, por parte do sujeito, sobre a adequação do valor unitário sugerido.

Somente nos problemas de multiplicação todos os sujeitos fizeram algum tipo de antecipação, sendo que nos demais (todos os problemas de divisão), verificamos a não ocorrência de antecipação por parte de, pelo menos, um dos sujeitos.

Antecipações da possibilidade ou necessidade de se resolver o problema através de uma conta ou do tipo de procedimento a ser usado, ocorreram somente nos problemas de multiplicação, não sendo encontradas em nenhum problema de divisão. Enquanto que antecipações da dificuldade de se resolver o problema foram encontradas somente nos problemas de divisão, tanto de partição como de quota (ambos no primeiro problema de cada tipo).

Em relação à produção da notação, encontramos também variações nos tipos de notações de acordo com o tipo de problema, mas também encontramos um mesmo tipo de notação usada com um sentido diferente em problemas de multiplicação e de divisão.

Em nossa análise foram encontrados os seguintes tipos de notação:

a) aditivo: este tipo de notação aparece em todos os problemas mas com diferentes expressões gráficas, a saber:

a.1. *em "contas" no formato escolar*: nos problemas de multiplicação, aparecem como registro de um valor unitário, repetidas vezes, de acordo com o multiplicador.

Nos problemas de divisão por quota, aparecem como registro do valor unitário até a obtenção do dividendo, ou na adição de um valor unitário a uma soma (de valores unitários), obtida anteriormente. Também aparecem, (uma no problema 2 e outra no problema 3), como registro do valor unitário em número de vezes correspondente ao dividendo.

Nos problemas de divisão por partição aparecem na verificação de um valor unitário que é estimado mentalmente e marcado repetidas vezes, de acordo com o divisor, ocorrendo, eventualmente, a centração exclusiva no dividendo.

a.2. *em expressões numéricas no formato escolar*: encontrado no primeiro problema de divisão por quota (problema 2) como registro repetido do valor unitário até obtenção do dividendo, sendo que as parcelas são registradas em duas expressões separadas.

Aparece também em um problema de multiplicação (problema 4) como marcação do valor unitário em número de vezes correspondente ao multiplicador.

a.3. *com desenhos tendo algarismos como etiqueta:* encontrado no primeiro problema de divisão por quota (problema 2) e no primeiro problema de divisão por partição.

a.4. *com escrita numérica dos resultados de adições efetuada mentalmente*: Aparece tanto nos problemas de divisão (quota e partição) como nos problemas de multiplicação.

b) multiplicativo em "contas" no formato escolar: nos problemas de multiplicação aparece como registro do valor unitário e do multiplicador. O resultado marcado é obtido pela multiplicação.

Nos problemas de divisão por quota é usado na verificação de uma quota estimada mentalmente, registrada como multiplicador.

Nos problemas de divisão por partição é usado na verificação de um valor unitário estimado previamente e pode aparecer em diferentes tentativas de solução de um problema por um mesmo sujeito (solução por tentativa e erro). O divisor do problema é registrado como multiplicador nestas notações. Foram encontradas algumas variações para este tipo de notação, no problema de divisão por partição cujo quociente é uma fração decimal.

c) de divisão: este tipo de notação foi encontrado nos quatro problemas de divisão, com diferentes expressões gráficas e variações devido à peculiaridade dos problemas, a saber:

c.1. *em "contas" no formato escolar,* aparece de forma completa e incompleta. Nos diversos problemas de divisão as variações foram: notação completa (problema 5) notações incompletas, sem o registro do divisor (problemas 3 e 6) ; notação com registro do resultado como divisor (problema 2).

c.2. *em expressão numérica no formato escolar:* encontrada no problema 5 (divisão por partição), antecedendo um registro da divisão em "conta".

d) Combinação de diferentes expressões numéricas: encontrada somente no segundo problema de multiplicação usada por um dos sujeitos para explicar o resultado do problema que foi obtido por cálculo mental.

e) Subtrativo no formato escolar das "contas": encontrado no problema 3 (divisão por quota), usado por dois sujeitos para calcular o valor do troco.

De acordo com a análise feita e considerando os diferentes tipos de problemas, podemos apontar, em síntese, para os seguintes resultados:

1. Em relação à antecipação de solução

Ela aparece para todos os problemas e, pelo menos, dois sujeitos apresentaram algum tipo de antecipação de solução. Na análise feita, foram encontrados os seguintes tipos de antecipação:

a) da possibilidade ou necessidade de se resolver o problema fazendo uma "conta" (sem explicitação sobre o tipo de conta);

b) do tipo de procedimento a ser usado (com explicitação sobre o tipo de "conta" a ser usada);

c) da dificuldade para se resolver o problema;

d) por estimativa de conteúdo qualitativo e de conteúdo quantitativo;

e) do resultado por cálculo mental.

Manifestações desses tipos de antecipações ocorreram em todos e em alguns tipos de problemas, a saber:

- antecipação de resultado por cálculo mental, nos três tipos de problemas;

- antecipação do procedimento a ser usado (com ou sem explicitação do tipo de "conta" a ser usada), somente nos problemas de multiplicação;
- antecipação da dificuldade de se resolver o problema, somente nos problemas de divisão (partição e quota);
- antecipação por estimativa de conteúdo qualitativo, freqüente nos problemas de divisão por quota, foi também encontrada em um problema de multiplicação;
- antecipação por estimativa de conteúdo quantitativo, somente nos problemas de divisão (partição e quota).

2. Em relação à produção da notação

As notações produzidas pelos sujeitos na resolução dos problemas foram predominantemente numéricas. Mesmo nos casos em que desenhos foram usados como expressão gráfica da solução, estes eram acompanhados de números, que foram usados pelos sujeitos na solução do problema. As notações aditivas foram usadas em todos os problemas, porém com sentido diferente nos problemas de multiplicação e de divisão.

Foram encontrados, em síntese, os seguintes tipos de notações:

a) aditivo - em "contas" no formato escolar; em expressões numéricas no formato escolar; com desenhos tendo algarismos como etiqueta; com escrita numérica dos resultados de adições efetuada mentalmente.

b) multiplicativo - em "contas" no formato escolar.

c) de divisão - em "contas" no formato escolar; em expressão numérica no formato escolar.

d) Combinação de diferentes expressões numéricas

e) Subtrativo - em formato escolar das "contas"

Assim, com maior freqüência, foram encontrados determinados tipos de notações, a saber:

- aditivo, em todos os tipos de problemas;
- multiplicativo, em todos os tipos de problemas;
- de divisão, somente nos problemas de divisão.

Com menor freqüência, foram encontrados os tipos:

- o de combinação de diferentes expressões numéricas, presente somente no segundo problema de multiplicação;
- o subtrativo, somente no problema de divisão por quota com resto;
- o de desenho tendo algarismos como etiqueta, somente nos problemas de divisão.

3. Em relação às interpretações das notações:

As interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações foram, em geral, provocadas pela entrevistadora. Em todos os problemas encontramos interpretações de conteúdo explicativo e de conteúdo avaliativo.

Nas interpretações de conteúdo avaliativo, os sujeitos percebiam a inadequação de um procedimento de solução ou de um resultado de cálculo. Esta avaliação encaminhava os sujeitos para novas tentativas de solução, sendo estas, conseqüências das interpretações de conteúdo avaliativo.

Assim o conteúdo das interpretações foi do mesmo tipo, independentemente do tipo de problema, trazendo ainda o mesmo tipo de conseqüência (novas tentativas).

V - DISCUSSÃO

Nesta pesquisa fizemos uma descrição analítica dos procedimentos notacionais de solução de problemas envolvendo multiplicação e divisão, expressos por crianças de terceira série do ensino fundamental.

Visando responder ao problema proposto, algumas questões norteadoras foram levantadas, para as quais, apresentamos algumas respostas provisórias, ainda no início do estudo: nossas suposições. Estas foram fundamentadas na experiência profissional na área e no conhecimento teórico sobre o tema. Assim, a discussão dos resultados será orientada pelas suposições postas a cada questão.

Contudo, antes de iniciar a discussão dos resultados em relação às questões apresentadas, faz-se necessário mencionar a ocorrência das antecipações de solução por parte dos sujeitos, para as quais não apresentamos nenhuma suposição, uma vez que não consideramos, anteriormente, a possibilidade desta ocorrência. As antecipações de solução, embora não tenham sido previstas, contribuem para a caracterização dos procedimentos notacionais de solução apresentados por nossos sujeitos, revelando alguns dados sobre a compreensão das estruturas focalizadas, por parte destes sujeitos.

Estas antecipações de procedimentos, de acordo com o conceito de esquema de Piaget (1983), podem ser entendidas como aplicações de esquemas construídos pelo sujeito para resolver os problemas e expressos em termos de metas e intenções. Assim os esquemas, como antecipatórios, servem de guia da atividade (antecipação de um procedimento antes de utilizá-lo) (Steffe, 1994).

Os diferentes tipos de antecipações encontrados mostram diferentes níveis de compreensão dos conceitos para aplicação destes esquemas de caráter antecipatórios. Eles variaram desde a simples manifestação da necessidade de se utilizar uma "conta" até o resultado do problema. No primeiro tipo, os sujeitos apenas mostravam compreender que o problema poderia ser resolvido através de uma "conta", enquanto no último, o resultado do problema já era apresentado, por cálculo mental, mesmo sem a utilização da notação.

Também verificamos, nos problemas de multiplicação, a antecipação do tipo de procedimento a ser usado, com referência à "conta" que poderia ser efetuada, mas sem a antecipação do resultado. Vemos que, nestes casos, não ocorre apenas a antecipação da possibilidade de se resolver o problema através de uma "conta", mas já é feita uma explicitação do tipo de conta a ser usada. Isso revela compreensão do problema apresentado e do sentido da operação escolhida, através da escolha de uma estratégia de solução adequada.

Nos problemas de divisão, as antecipações por estimativa de conteúdo qualitativo e de conteúdo quantitativo foram, em geral, provocadas pela entrevistadora, que usava os resultados obtidos em problemas anteriores, como referência para propor questões relativas ao problema em questão. Nestes tipos de antecipações observamos uma progressiva compreensão dos problemas por parte dos sujeitos, quando comparavam com os problemas resolvidos anteriormente.

Verificamos a ocorrência de antecipações de resultado por cálculo mental, independentemente do tipo de problema (ocorrendo tanto nos problemas de multiplicação quanto nos problemas de divisão). Parece significativo que as crianças façam este tipo de antecipações nos diferentes tipos de problemas, mesmo quando não antecipam um resultado correto, pois de alguma forma, se aproximam deste. Esta ocorrência pode estar ligada à significação que os conceitos matemáticos adquirem, para as crianças, quando explorados através de problemas, especialmente deste tipo, de compra e venda, que fazem parte do seu cotidiano.

Entretanto, encontramos também algumas diferenças importantes nas antecipações feitas para problemas de multiplicação e de divisão. No caso dos problemas de divisão por quota, as antecipações se caracterizaram, em sua maioria por estimativas de conteúdo qualitativo e foram, em geral, provocadas pela entrevistadora. Nos problemas de divisão por partição, além da antecipação da dificuldade de se resolver o problema, a única antecipação encontrada foi de resultado, por aproximação, isto é, a antecipação de um valor unitário que era verificado por meio de adições ou multiplicações (tentativa e erro).

Nos problemas de multiplicação encontramos antecipações do tipo de procedimento a ser usado, isto é, alguns sujeitos anteciparam a utilização da multiplicação, mas o mesmo não ocorreu nos problemas de divisão. Foram nestes problemas que encontramos antecipações da dificuldade de se resolver o problema, ou seja, para os sujeitos desta pesquisa, estes últimos pareceram ser mais difíceis do que os primeiros. Parece-nos que os sujeitos desta pesquisa possuem mais esquemas antecipatórios para multiplicação do que para divisão.

A explicação para estes resultados pode estar na natureza dos problemas. Parece que os problemas de divisão constituem um tipo de tarefa para a qual a representação simbólica é um passo importante para a sua solução. Na literatura, podemos encontrar apoio para esta explicação em Vergnaud (1979). De acordo com o autor, nas séries iniciais, a maioria das crianças resolve o problema primeiro e faz as notações (representação do problema) depois. Percebemos, em nossa análise, que os problemas de multiplicação parecem permitir uma solução anterior à utilização da notação, enquanto isso não ocorre para os problemas de divisão. A notação, então, neste tipo de problema, pode ser mais necessária, pois ajuda a criança a resolver o problema.

Podemos atribuir isso ao fato de que na multiplicação, a relação com a adição é bastante forte para a criança e a ação da repetição é mais facilmente representada mentalmente.

Neste sentido podemos também pensar que, ainda que na escola as crianças sejam ensinadas sobre a multiplicação através de algoritmos, o sentido desta operação é mais facilmente compreendido por elas em sua relação com a adição. A divisão, que também é, em geral, ensinada através do algoritmo convencional, parece apresentar uma dupla dificuldade para as crianças: não mantém a mesma relação direta com a adição e, além disso exige uma inversão no raciocínio multiplicativo.

Isso é apontado, na literatura, por Nunes e Bryant (1997). Os autores lembram que as crianças têm maior facilidade de trabalhar com problemas nos quais a relação entre raciocínio aditivo e multiplicativo é mais forte. Nossos sujeitos usaram esta relação nos problemas de multiplicação, seja resolvendo-os pela adição reiterada ou, no caso daqueles que usaram a multiplicação, reconhecendo que os problemas poderiam ser resolvidos também pela adição. Embora a adição tenha sido usada também nos problemas de divisão, não foi com o sentido de repetição, e nesse sentido, a relação entre a divisão e a adição não fica tão clara. Nestes problemas a adição foi usada na busca de uma quota ou de um valor unitário, por tentativa e erro, não havendo antecipações sobre estes procedimentos.

Embora o repartir, redistribuindo, possa ser uma atividade relativamente fácil para a criança, sendo realizada por crianças bastante novas (ver por exemplo Kamii, 1996), a divisão pode ir além da ação de distribuição. De acordo com Nunes e Bryant (1997), ela envolve a realização da relação inversa entre o número de receptores e o tamanho de sua quota. As relações parte-todo na divisão são, segundo os autores, bastante diferentes das relações parte-todo envolvidas em situações aditivas. Assim, a compreensão da divisão envolve uma nova visão das relações parte-todo. Esta relação é explicada pelos autores (Nunes e Bryant, 1997, p. 151):

> Na distribuição há três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a quota (ou o tamanho da distribuição). A quota e o número de receptores estão em relação inversa um com o outro: enquanto um cresce o outro diminui. A distribuição também envolve um tipo novo de número, as frações.

O fato de as operações clássicas da aritmética, em geral, serem ensinadas de forma "isolada" nas escolas, isto é, partindo do seu próprio algoritmo convencional, pode contribuir para a dificuldade que as crianças têm mostrado em atribuir sentido à divisão. Além das dificuldades conceituais próprias desta operação, quando trabalhadas de forma desvinculada de um contexto significativo, podem apresentar ainda mais dificuldades para as crianças. Vergnaud (1991) nos lembra que os conhecimentos se tornam significativos pelos problemas que permitem resolver. Neste sentido, vemos a importância do processo progressivo de construção da divisão pelo repartir/distribuir em situações significativas, nas quais os esquemas antecipatórios podem ser desenvolvidos, tendo um papel importante na construção do conceito da divisão. Quando confrontam os resultados obtidos e os objetivos da tarefa, as crianças podem fazer ajustamentos, podem questionar os procedimentos usados, usando novas estratégias pela avaliação da sua ação. Os procedimentos adequados podem ser antecipados em outras tarefas do mesmo tipo.

As antecipações de solução encontradas apontam, ainda, para o uso da estimativa, na resolução de problemas. Quando os sujeitos fizeram antecipações, por estimativas de conteúdo qualitativo (sem a utilização de valores numéricos) ou de conteúdo quantitativo (com a utilização de valores numéricos), provocadas ou não pela entrevistadora, em geral, estas antecipações serviam de controle para o resultado.

Essa observação corrobora com os resultados encontrados por Zunino (1995) em um estudo sobre a resolução de problemas por crianças de terceira e quinta séries. É ali apontada a importância da antecipação de resultados por parte das crianças. Segundo a autora, além de ser imprescindível na vida cotidiana, é através destas antecipações e julgamento de resultados que as crianças estão em condições de avaliar a correção ou incorreção das contas que realizam. De acordo com a autora:

> Quando não se trabalha deste modo, as crianças aceitam como corretos, resultados que não são lógicos, porque confiam mais nos procedimentos adquiridos mecanicamente do que em seu próprio raciocínio. (Zunino, 1995, p.89)

De acordo com as questões norteadoras deste estudo, podemos apontar para as principais características das notações apresentadas por nossos sujeitos, abordando, inicialmente, o aspecto seguinte: as notações produzidas diante dos problemas apresentados oralmente, se assemelham às soluções gráficas ensinadas nas escolas?

Nossa suposição inicial, a qual foi confirmada, era de que as crianças apresentariam procedimentos gráficos diferenciados. Os resultados revelam que, diante dos problemas apresentados oralmente, os procedimentos gráficos de solução encontrados, em sua maioria, são diferentes dos procedimentos típicos ensinados na escola.

Nesta pesquisa, embora nossos sujeitos estivessem na terceira série, e já lhes tivessem sido ensinados os algoritmos convencionais, vimos que estes não foram utilizados na solução propriamente dita dos problemas. É provável que os algoritmos fossem mais utilizados se os problemas fossem apresentados por escrito, no formato tipicamente escolar. O fato de serem apresentados oralmente pode ter deixado nossos sujeitos mais à vontade para fazer representações simbólicas significativas para eles, ao invés de reproduzir as representações aritméticas convencionais, ensinadas na escola.

Outra de nossas suposições, parcialmente confirmada neste estudo, refere-se à terceira questão norteadora: adições e subtrações são usadas como procedimentos de solução para os problemas envolvendo multiplicação/divisão? Em quais situações são utilizadas?

Nossa suposição inicial apontava para uma utilização mais freqüente da adição nos problemas de multiplicação e da subtração nos problemas de divisão. Tal suposição foi baseada no fato de que as multiplicações envolvidas nos problemas poderiam ser resolvidas por sucessivas adições e as divisões por sucessivas subtrações. Também acreditávamos que, da mesma forma que as crianças compreendem a multiplicação como uma adição reiterada de parcelas iguais, poderiam ver a divisão, como operação inversa da multiplicação, como sucessivas subtrações de uma mesma quantidade.

No entanto, verificamos a predominância de notações de tipo aditivo, usadas tanto em problemas de multiplicação como de divisão, com especificidades devidas à estrutura dos problemas, conforme já comentado.

Nos problemas de divisão, inclusive, encontramos uma variedade maior das notações de tipo aditivo.

Nos problemas de multiplicação, estas notações não variaram, aparecendo somente como a repetição do valor unitário de acordo com o multiplicador no formato escolar das "contas" ou de expressões numéricas. Nas interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações produzidas na resolução dos problemas de multiplicação, mostraram a compreensão da multiplicação como adição reiterada de parcelas iguais. Mesmo os sujeitos que usaram procedimentos multiplicativos, explicaram suas notações com base na adição e indicaram, ainda, que poderiam ter resolvido o problema através da adição. Esses sujeitos mostraram ver a multiplicação como uma "abreviação" da adição reiterada.

Esta maior variedade de notações aditivas, usadas nos problemas de divisão, pode estar ligada ao fato de que nos problemas de multiplicação as notações deste tipo apareceram, em geral, como registro de procedimentos de solução já antecipados. Já nos problemas de divisão, estes procedimentos de solução parecem se construir à medida que são produzidos. Verificamos, conforme já comentado que, nos problemas de divisão, o uso da adição não foi antecipado.

Nos problemas de divisão por partição, ela foi usada em procedimentos de tentativa e erro, nos quais um valor unitário era estimado mentalmente e a adição usada como verificação. A explicação para a utilização deste tipo de procedimento pode ser encontrada em Vergnaud (1983). Para o autor este é um procedimento de busca do fator desconhecido, usado preferencialmente pelas crianças, pela dificuldade de fazer a inversão mental da multiplicação. As crianças preferem se centrar nos aspectos positivos da ação, sendo que a inversão é difícil para elas. Isso pode ser verificado também em relação à subtração.

O uso de notações aditivas ou multiplicativas no lugar das de divisão foi significativo entre os nossos resultados. Mesmo quando usada uma notação de divisão, esta aparecia apenas como uma representação do problema, sendo que o resultado era buscado, nestes casos, pela multiplicação. Assim, ao contrário do suposto inicialmente, não foram encontradas notações de tipo subtrativo nestes problemas, sendo verificada uma preferência, por parte das crianças, pela utilização de procedimentos aditivos.

Estes resultados corroboram com aqueles encontrados por Kamii (1995a). A autora aponta, em estudos sobre a resolução de problemas de divisão com crianças de terceira série, para a preferência das crianças em usar estratégias aditivas.

Mesmo que uma divisão possa também ser resolvida por sucessivas subtrações, nossos sujeitos não recorreram a este tipo de estratégia. Há indícios, em nossos resultados, de que os sujeitos desta pesquisa ainda não compreendam, de fato, a inversão multiplicação/divisão e, portanto, não possam ainda compreender que se uma multiplicação pode ser efetuada por sucessivas adições, a divisão também poderia ser efetuada por sucessivas subtrações.

Da mesma forma, nos problemas de divisão por quota, os procedimentos aditivos foram os mais usados. Consistiram em adicionar o valor unitário até obtenção do dividendo, com a contagem, posterior, do número de vezes que este valor foi adicionado. As notações de divisão apareceram somente de forma incorreta ou incompleta e não foram usadas para a resolução, propriamente dita, dos problemas. Estes, nestes casos, foram resolvidos pela multiplicação.

A utilização de notações aditivas com diferentes sentidos nos dois tipos de problemas de divisão aponta para a diferença conceitual entre problemas de divisão por partição e por quota, conforme identificada por Vergnaud (1983). Embora ambos possam ser representados por uma expressão numérica de divisão, não possuem o mesmo sentido para a criança. Enquanto nos problemas de divisão por partição, dividindo dinheiro por blusas o resultado era dado em dinheiro, nos problemas de divisão por quota, dividindo-se dinheiro por dinheiro, o resultado era dado em número de embalagens, não em dinheiro.

Isso nos remete à quarta questão norteadora: há diferenças entre os procedimentos gráficos de solução, conforme o tipo de problema?

Nossa suposição inicial era de que seriam encontrados procedimentos gráficos diferenciados para os diferentes tipos de problemas de divisão. Embora os resultados mostrem a predominância de procedimentos aditivos e multiplicativos nos dois tipos de problemas, é importante ressaltar que a adição e a multiplicação são usadas com sentidos diferenciados em cada um. Lembrando, nos problemas de divisão por quota o valor unitário era adicionado *n* vezes até obtenção do dividendo (com a posterior contagem do número de vezes que foi adicionado). Nos problemas de divisão por partição era feita uma estimativa de valor unitário e este valor era adicionado repetidas vezes (de acordo com o divisor) para obtenção do dividendo (sendo a adição usada para verificação do valor unitário estimado mentalmente).

Se as crianças usam procedimentos aditivos com sentidos diferenciados em cada tipo de problema, é compreensível que não lhes pareça óbvio que ambos possam ser resolvidos pela mesma operação (da divisão). Conforme nos lembra Zunino (1995, p. 115):

> ...problemas que parecem equivalentes aos olhos dos adultos, porque envolvem a mesma operação, podem não ser vistos assim, pelas crianças. A não equivalência entre estes problemas reflete-se na utilização de estratégias diferentes para resolvê-los e, em alguns casos, na dificuldade para representar os procedimento efetivamente colocados em prática através das contas convencionais.

As notações usadas nos problemas de divisão, conforme também apontado pela literatura revisada, sugerem que a passagem dos procedimentos das crianças para os algoritmos convencionais não é tão simples. Para a utilização do algoritmo da divisão é necessário que a criança faça uma inversão mental, a qual, conforme já comentado, é difícil para elas. Estas também preferem usar procedimentos que lhes sejam mais significativos e parece que passam por diferentes níveis de compreensão da multiplicação e de suas formas de representação, conseqüentemente, para poder compreender o algoritmo convencional da divisão.

Entendemos ter sido evidente, dos procedimentos gráficos usados nos problemas de divisão, uma compreensão ainda parcial do conceito de divisão, manifestada pela centração exclusiva no dividendo em detrimento do divisor (no caso de procedimentos aditivos e multiplicativos) e pela desconsideração da divisão em partes iguais. Nossos sujeitos, por vezes centrados no dividendo a ser obtido pela adição reiterada de um valor unitário, desconsideravam o divisor (nos problemas de divisão por partição) ou ainda propunham divisões em partes desiguais para validar um resultado inadequado obtido.

Neste estudo encontramos diferentes tipos de procedimentos gráficos para a solução de um mesmo problema de divisão. Nos problemas de divisão por partição, por exemplo, encontramos desde os procedimentos aditivos na busca do fator desconhecido, por ensaio e erro, feito em várias tentativas até procedimentos mais elaborados como "produtos associados à partição",[7] conforme denominado por Correa (1995). A autora encontrou este tipo de procedimento em pesquisa sobre soluções apresentadas por crianças em problemas de divisão por partição e quota. Nessa categoria de procedimento, o valor do dividendo é decomposto numa soma de parcelas, sendo que algumas vezes o valor de cada parcela é representado por um produto. A utilização desse último tipo de procedimento, requer um domínio maior do conceito da multiplicação e da sua relação com a divisão.

Também devemos levar em conta a forma como os problemas foram apresentados. O fato de terem sido apresentados oralmente, em uma situação diferenciada daquelas nas quais as crianças resolvem problemas na escola, pode

[7] Este tipo de procedimento foi usado por um de nossos sujeitos (BAR) no problema 5.

propiciar o uso e a combinação de diferentes conhecimentos matemáticos por parte das crianças.

Assim, conforme comentado, esse modo de apresentação pode ter favorecido a elaboração de procedimentos pessoais de solução. Nossos sujeitos pareciam mais envolvidos na solução do problema, relacionando as situações propostas com situações que poderiam ser vivenciadas por eles.

A última questão norteadora referia-se à presença do resto nos problemas de divisão: no caso dos problemas de divisão, são usados procedimentos gráficos diferenciados conforme seja uma divisão com resto ou sem resto?

Nossa suposição apontava para a possível utilização de procedimentos gráficos diferenciados nos problemas de divisão que tivessem ou não resto, mas verificamos que isso não ocorreu. Contudo, nos problemas envolvendo divisão com resto, encontramos outros tipos de notações, usadas depois que os sujeitos percebiam a presença do resto. Vimos que este causava uma inquietação em nossos sujeitos, pois impedia que o procedimento de solução do qual lançavam mão, os levasse à solução do problema

Nos problemas de divisão por quota foram usados os mesmos procedimentos gráficos para a solução dos dois tipos de problema. Quando os sujeitos percebiam que não poderiam adicionar o valor unitário *n* vezes até obter o dividendo, mostravam uma perturbação em relação ao resto, tentando resolver a questão como um problema à parte. Nestas tentativas, encontramos notações subtrativas, através das quais o problema era solucionado pelo cálculo do troco.

Tais notações parecem indicar que o resto é realmente tratado como um problema à parte pelas crianças. A esta observação corroboram os resultados encontrados por Selva (1997), em estudo sobre o resto da divisão. A autora verificou o tratamento do resto da divisão como um problema independente. Os sujeitos do referido estudo primeiro resolviam os problemas e depois raciocinavam sobre o que fazer com o resto.

No caso do problema de divisão por partição, cujo quociente era um número decimal, os procedimentos gráficos de solução também foram do mesmo tipo usados no problema anterior. Entretanto, verificamos a ocorrência de antecipação de que o resultado seria uma fração decimal. Neste caso, parece que o contexto do problema (por tratar de valor monetário) propiciou esta solução, embora este não seja um "conteúdo" ainda explorado na terceira série.

Assim, conforme apontado por Vergnaud (1983), vemos que, ainda que os problemas deste estudo sejam de multiplicação e de divisão de proporção simples, as variações na estrutura dos problemas (como a magnitude dos valores numéricos, a utilização de números inteiros ou decimais e o domínio da experiência a que se referem os problemas, por exemplo) podem apresentar dificuldades específicas à sua solução.

Como último ponto a ser discutido, porém não menos importante que os demais, levantamos a questão das interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações.

Embora estivesse prevista, na metodologia desta pesquisa, o uso da entrevista clínico-crítica, não tínhamos, *a priori*, nenhuma suposição sobre os tipos de interpretações que poderiam ocorrer. Inicialmente, tais interpretações foram vistas apenas como um instrumento que poderia auxiliar a caracterização das notações produzidas pelos sujeitos, revelando-nos mais dados sobre a compreensão das estruturas multiplicativas.

Podemos afirmar que, neste sentido, as interpretações que os sujeitos fizeram sobre suas notações, atingiram seu objetivo. E foram além deste âmbito: elas também corroboraram com outros trabalhos, que apontam para a importância das interpretações que os sujeitos fazem de suas notações para a compreensão dos conceitos matemáticos. Para Vergnaud (1979), o conjunto de formas simbólicas ou lingüísticas que permitem a representação de um conceito matemático (significante) é um dos elementos do tripé sobre o qual o autor se apóia na proposição da teoria dos campos conceituais.

A partir do conteúdo avaliativo presente nas interpretações de nossos sujeitos sobre suas notações, verificamos que, repetidas vezes, os sujeitos se deram conta de procedimentos inadequados e/ou resultados incorretos em suas notações, sem que estas incorreções fossem apontadas pela entrevistadora. Ao expressar um novo tipo de representação da solução do problema, desta vez de forma verbal, parece que as crianças têm uma nova oportunidade de "pensar" sobre o seu significado.

Ao explicar os procedimentos gráficos produzidos, alguns de nossos sujeitos verbalizaram os procedimentos de cálculo em uma ordem diferente daquela usada na produção da notação. Enquanto em suas notações, iniciavam os cálculos da direita para a esquerda (ou seja, pela ordem menos elevada), em suas explicações iniciavam pelos algarismos de ordem mais elevada. Parece-nos que, na representação gráfica, há uma influência maior da "instrução" escolar, enquanto que na representação verbal a criança expressa melhor seu próprio pensamento e procura fazer esta representação de forma que lhe seja mais significativa.

Nesta pesquisa, as interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações, repetidas vezes encaminharam-nos para novas tentativas de solução. Embora nosso estudo não estivesse voltado para a verificação de avanços por parte dos sujeitos na compreensão das estruturas multiplicativas, pudemos perceber que eles ocorreram, por parte de alguns sujeitos. E acreditamos que tais avanços podem ter sido causados pelas interpretações que fizeram de suas notações, estas provocadas pela entrevistadora.

Os resultados encontrados no presente estudo, em relação às interpretações das notações, mostram que as representações verbais são importantes tanto para que o professor compreenda melhor o pensamento do aluno e, conseqüentemente, sua compreensão dos "conteúdos" estudados, como para o próprio aluno. Este tem a oportunidade de pensar sobre uma representação gráfica produzida, atribuindo-lhe sentido e fazendo possíveis correções que lhe sejam significativas e não simplesmente impostas pelo professor.

Entretanto, é muito comum, nas escolas, que a validação de um procedimento venha do professor. Dificilmente as crianças têm a oportunidade de argumentar sobre suas próprias idéias ou trocar pontos de vista com os colegas. Freqüentemente o professor fala pelo aluno, explica o que deveria ser explicado por ele. Isso está arraigado em nossa prática docente e precisa ser superado. Nesta pesquisa mesmo, verificamos que a entrevistadora perdeu algumas oportunidades de conhecer mais sobre a compreensão que os sujeitos tinham das estruturas multiplicativas, por deixar de investigar mais a fundo o que a criança estava pensando ou por responder, ela mesmo, aquilo que deveria ser respondido pela criança.

Em suma, a análise de nossos resultados confirmou nossa suposição de que, diante de problemas apresentados oralmente, as crianças tendem a utilizar procedimentos gráficos de solução diferenciados daqueles procedimentos típicos, ensinados nas escolas. Verificamos, neste estudo, a predominância na utilização de notações de tipo aditivo, com sentidos diferenciados para cada tipo de problema.

Foi significativa a ocorrência de antecipações de solução de diferentes tipos, usadas posteriormente, pelos sujeitos, para controle do resultado obtido. Verificamos uma maior ocorrência de antecipações de solução para os problemas de multiplicação do que para os problemas de divisão, sendo que nestes últimos, foi verificada, inclusive, a antecipação da dificuldade para se resolver o problema.

Os resultados apontam, ainda, para o conteúdo avaliativo das interpretações que os sujeitos fizeram de suas notações, as quais foram, em geral, provocadas pela entrevistadora. Durante estas interpretações os sujeitos percebiam inadequações de procedimentos e/ou de resultados obtidos e procediam a novas tentativas de solução.

VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a discussão feita no capítulo anterior, destacamos aqui, alguns pontos, os quais são considerados de suma importância para professores e pesquisadores da área: o papel da resolução de problemas na compreensão das estruturas multiplicativas; a importância da elaboração de procedimentos próprios pelas crianças nesta compreensão; o papel das interpretações dos procedimentos gráficos de solução por parte dos alunos e a necessidade de novas pesquisas na área.

Em relação ao papel dos problemas na aprendizagem das estruturas multiplicativas, consideramos que este estudo enfatiza a necessidade de se usar os problemas como recursos de aprendizagem, isto é, que eles devem ser usados como recursos fundamentais no ensino e, assim, devem ser apresentados antes que sejam ensinadas as técnicas de como resolvê-los.

Em geral, nas escolas, os alunos aprendem inicialmente os algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão e só depois é que lhe são apresentados os problemas de estrutura multiplicativa para que "apliquem" os algoritmos na sua resolução. De acordo com Chamay (1996), este é um modelo de ensino "normativo", centrado no conteúdo. Ensinar, neste modelo, é transmitir, comunicar um saber aos alunos. Os problemas são usados em situações de avaliação da aprendizagem. Servem, portanto, para verificar o domínio que os alunos possuem dos algoritmos ensinados. O autor, baseado nos estudos de Piaget, afirma que só existe uma aprendizagem quando o aluno percebe que existe um problema por resolver. De acordo com Vergnaud (1979), o que dá sentido aos conceitos ou teorias são os problemas que eles permitem resolver.

Conforme apontado pela literatura (Vergnaud, 1988; Nunes e Bryant, 1997; Kamii 1995a e 1995b, entre outros), as crianças, mesmo conhecendo os algoritmos convencionais, quando se deparam com problemas do cotidiano, usam predominantemente procedimentos pessoais de solução, que lhes sejam significativos por permitirem representar as relações presentes nos problemas, da forma como são compreendidas por elas. Segundo Vergnaud (1979, 1988, 1991), os conceitos matemáticos são construídos em estreita relação com as situações que dão sentido ao conceito. Assim os problemas oferecem um contexto de significação para os conceitos e por isso a resolução de problemas deve ser "fonte, local e critério da elaboração do saber". (Charnay, 1996, p. 42).

Quando a ênfase do ensino está sobre os algoritmos convencionais, os alunos dominam apenas técnicas de cálculo, que, em geral não têm sentido para eles. Dificilmente conseguem compreender a relação entre estas técnicas e os problemas nos quais podem aplicá-las.

É importante destacar, ainda, a recomendação feita por Vergnaud (1979, 1991) de que os professores explorem variados tipos de problemas na escola. As crianças não devem trabalhar, em sala de aula, apenas com "problemas-padrão", que em geral trazem "dicas" verbais sobre as operações correspondentes. Os problemas devem sempre gerar novos desafios para os alunos e, se por um lado devem permitir que usem seus conhecimentos construídos até então, por outro, também devem propiciar que conhecimentos construídos anteriormente sejam questionados e re-elaborados.

Segundo Vergnaud (1979), é possível aprender muito mais sobre o significado que um conceito matemático tem para uma criança se for estudada a forma como a criança lida com problemas que necessitem da utilização deste conceito, do que estudando-se apenas o uso que ela faz de palavras e símbolos referentes a este conceito.

É de fundamental importância que o professor priorize, em sala de aula, o trabalho com a resolução de problemas, levando em conta os três princípios psicopedagógicos apresentados por Piaget (1989, p.7-8), os quais são fundamentais para que as crianças possam fazer uma aprendizagem realmente significativa dos conceitos matemáticos:

> 1) a compreensão real de uma noção ou de uma teoria implica em sua reinvenção pelo sujeito;
> 2) em todos os níveis, o aluno é capaz de 'fazer' e de compreender emoções 'antes' que ele possa exprimi-los verbalmente, sendo os processos de tomada de consciência posteriores;
> 3) partir das representações ou modelos correspondentes à lógica 'natural' do nível considerado dos alunos, e reservar a formalização para mais tarde, a título de coroamento e de sistematização das noções já adquiridas.

Consoante com estes princípios está o segundo ponto destacado: a importância da elaboração de procedimentos próprios pelas crianças na compreensão das estruturas multiplicativas.

Se a compreensão de uma noção ou teoria, conforme Piaget (1989), implica na sua reinvenção, por parte dos sujeitos, é preciso que as crianças tenham espaço para criar procedimentos de solução para os problemas. Enquanto ficam apenas repetindo técnicas ou algoritmos ensinados pelo professor, que oportunidades têm de compreender os conceitos matemáticos?

Neste estudo, com apenas quatro sujeitos, encontramos uma riqueza muito grande de procedimentos usados pelas crianças. Elas revelaram, assim, um pouco mais sobre sua compreensão da multiplicação e da divisão. Em sala de aula, com uma turma de alunos, muitos outros procedimentos podem ser encontrados e certamente serão de grande valia para que o professor conheça o nível psicogenético de seus alunos em relação aos conceitos matemáticos e promova avanços a partir deste nível.

Os professores precisam estar "abertos" para conhecer o pensamento infantil e o significado que seus alunos atribuem às tarefas que lhe são propostas na escola. Ensinar não pode mais ser visto como sinônimo de dar respostas prontas. Ensinar também não se reduz a mostrar caminhos únicos, que podem levar a solução dos problemas, mas que, em geral, fogem da compreensão das crianças. Segundo Vergnaud (1979, p. 266):

> **Para uma mesma tarefa, mesmo problema ou mesma situação, as crianças podem apresentar uma variedade de procedimentos. Não há um único caminho para se obter a resposta correta, não há somente uma resposta errada e não há somente um caminho para se obter a mesma resposta errada. Estes diferentes procedimentos, corretos ou incorretos, não são equivalentes do ponto de vista cognitivo.**

Conhecer o nível de compreensão que as crianças possuem dos conceitos matemáticos, através dos procedimentos usados por elas, é fundamental para a tarefa do professor. É necessário que as crianças elaborem representações próprias, que lhes sejam significativas. As representações simbólicas convencionais devem ser construídas pelas crianças a partir de suas próprias representações e não impostas pelo professor.

De acordo com Saiz (1996), temos que permitir que as crianças comprovem seus próprios procedimentos, suas próprias soluções, antes de conhecer os algoritmos convencionais. De acordo com a autora, embora estes procedimentos sejam vagarosos, menos econômicos ou menos "elegantes", eles permitem manter o significado do cálculo através dos passos sucessivos e um certo controle sobre a produção.

O trabalho do professor consiste, então, não apenas em favorecer a elaboração de procedimentos pessoais de solução, mas de provocar evoluções. De acordo com Broitmain (2000), o professor deve organizar a comunicação de procedimentos. Os alunos devem explicar aos colegas como resolveram os problemas e devem comparar os diferentes procedimentos que foram usados em sala para validá-los.

Vemos aí a importância do terceiro ponto destacado: o papel das interpretações dos procedimentos gráficos de solução por parte dos alunos. De acordo com a autora, também é papel do professor orientar uma análise coletiva dos erros, de forma que os alunos possam analisar a inadequação de determinadas estratégias a determinados problemas. Segundo Kamii (1995a), as crianças devem ser encorajadas a concordar e discordar entre si nas discussões sobre os procedimentos de solução apresentados, em sala, para um mesmo problema.

Em geral , na escola, as crianças não têm oportunidades de interpretar suas notações. Nem mesmo têm chance de elaborar procedimentos pessoais de solução. É comum, nas aulas de matemática, que todos os alunos resolvam os problemas usando um mesmo tipo de procedimento (ensinado anteriormente pelo professor) e que a correção seja feita no quadro sem maiores discussões sobre os procedimentos usados. É comum encontrar o seguinte: as crianças que não fizeram o mesmo que foi registrado no quadro, apagam suas notações e simplesmente copiam o que está ali.

De acordo com Brousseau (1996), estas situações de ensino são situações de institucionalização, sem a preocupação com a atribuição de sentido ao conhecimento: o professor diz o que deseja que os alunos saibam, explica e, em seguida, verifica o que eles aprenderam.

Segundo o referido autor, para que os alunos possam atribuir sentido ao que aprendem, a institucionalização deve ser a última etapa no processo de "ensino" em sala de aula. Depois que o aluno age sozinho sobre a situação (na etapa denominada pelo autor de dialética da ação), ele deve trocar informações com seus colegas e o professor. Para o autor esta é uma etapa fundamental na aprendizagem de conceitos matemáticos (dialética da formulação), por ser o momento de socialização de estratégias que permite validá-las ou não. Na etapa seguinte (dialética da validação), estas estratégias são questionadas em relação à sua eficiência e as validações devem vir dos próprios alunos, que, à medida que argumentam sobre suas estratégias, lhes atribuem significação ou se dão conta de sua inadequação. Assim, quando na dialética da institucionalização, um procedimento é reconhecido, tornando-se um recurso de referência, este é compreendido pelo aluno, e não simplesmente imposto pelo professor.

Assim, as interpretações que as crianças fazem sobre suas notações ou sobre as notações de seus colegas são de fundamental importância para a construção dos conceitos matemáticos. Elas constituem o momento de reflexão, ou seja, o momento de pensar sobre o próprio pensamento (as relações que fazem). Neste momento, se concluem que estavam erradas, elas modificam o próprio raciocínio, avançando no processo de compreensão (Kamii, 1995a).

Desta forma, podemos concluir que, se a elaboração de procedimentos pessoais de solução para os problemas é fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos, não é menos importante a socialização das estratégias em sala. As crianças devem interpretá-los e argumentar sobre sua validade até que estejam convencidas a respeito. Caso contrário, serão meros repetidores, que apenas reproduzem conhecimentos transmitidos pelos professores, sem compreendê-los.

Finalmente, destacamos a importância da realização de novas pesquisas na área. Sabemos das limitações deste estudo, sobretudo pelo número reduzido de sujeitos estudados.

Além disso, as investigações realizadas aqui podem ser aprofundadas, especialmente no que se refere ao papel do adulto nas aprendizagens realizadas pelas crianças. Se as interpretações que as crianças fazem de seus procedimentos notacionais de solução têm um papel importante na compreensão dos conceitos matemáticos, que tipo de intervenções provocativas podem ser promovidas pelo adulto para que haja avanço, por parte das crianças, em relação aos conceitos estudados?

Somente conhecendo os esquemas conceituais que as crianças constroem sobre conceitos matemáticos é que podemos intervir de forma adequada em sua aprendizagem.

Os resultados do presente estudo podem ser utilizados na sala de aula. Nesta circunstância, as diversas modalidades de interação ocorrentes podem revelar novos elementos importantes na investigação da aprendizagem significativa de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLARDICE, B. S. e GINSBURG, H. P. Children's difficulties with school mathematics. In: LAVE, J. e ROGOFF, B. *Every day cognition.* Harvard University Press, 1984. p. 194-219.

BROITMAN, C. El tratamiento didáctico de problemas multiplicativos desde el inicio de la escolaridad básica. *Projeto Revista de Educação.* Porto Alegre: Projeto, v.2, n. 3, 2000. p. 38-43.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.) *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 48-72.

_______. *Theorie des situations didactiques.* Paris: Lapensée Sauvage, édicions 1998.

CAMPOS, T. M. e NUNES, T. Tendências atuais do ensino e aprendizagem da matemática. *Em aberto.* Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994. p. 3-7.

CANÔAS, S. S. *O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série)* . Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1997.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. e SCHLIEMANN, A. *Na vida dez, na escola zero.*10 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.) *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 36-47.

COLL, C. e SOLÉ, I. Os professores e a concepção construtivista. In: COLL, C. et al. *Construtivismo na sala de aula.* 5 ed. São Paulo: Ática, 1998. p. 9-28.

CORREA, J. *Young children's understanding of the division concept.* Tese de Doutorado. Universidade de Oxford. Oxford, UK, 1995.

FERREIRO, E. *A psicogênese da língua escrita.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares.* Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1995.

_________. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: FRANCHI, A. et al. *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo: Educ, 1999. p. 155-96.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In: FRANCHI, A. et al. *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo, Educ, 1999. p. 65-87.

GÁLVEZ ,G. Didática da matemática. In: PARRA, C. e SAIZ, I.(Org.) *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 26-35

GILLIERON, C. El psicopedagogo como observador: por qué y como. In: *Infancia e aprendizaje.* Madrid, 1980, nº 9: p. 7 – 21.

GROSSI, E.; BERGAMASCHI, M.A. e MANZANARES, V. Do alfabético ao ortográfico. In: GROSSI, E. P. e BORDIN, J. (Org.) *Construtivismo pós – piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem.* 5 ed. Petrópolis: Vozes, 1995. p. 185-99.

GUIMARÃES, K. P. *Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação, via jogo de regras: em busca de relações.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 1998.

KAMII, C. *Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget.* 3 ed. Campinas: Papirus, 1995a.

_______. *Aritmética: novas perspectivas: implicações da teoria de Piaget.* 4 ed. Campinas: Papirus, 1995b.

_______. *A criança e o número.* 22 ed. Campinas: Papirus, 1996.

KAMII, C. e DEVRIES, R. *Jogos em Grupos na Educação Infantil.* São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KOCH, M. C. O contrato didático numa proposta pós – piagetiana para a construção do número. In: GROSSI, E. P. e BORDIN, J. (Org.) *Construtivismo pós – piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem.* 5 ed. Petrópolis: Vozes, 1995. p. 65-81.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

LOURENÇO FILHO, M. B. *Introdução ao estudo da Escola Nova.* 13 ed. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

MAURI, T. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares? In: COLL, C. et al. *O Construtivismo na sala de aula.* 5 ed. São Paulo: Ática, 1998. p. 79-122.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. et al. *O Construtivismo na Sala de Aula*. 5 ed. São Paulo: Ática, 1998. p. 57-77.

MORO, M. L. F. *Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais: o percurso de três parceiros*. Tese de professor titular em Psicologia da Educação da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1998.

NUNES, T. e BRYANT, P. *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NESHER, P. Multiplicative school word problems: theorical approches and empirical findings. In: BEHR, M. and HIEBERT, J. (Eds.) *Number concepts and operations in the midlle grades*. Reston: Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1988. 19-40.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

PIAGET, J. Devlopment and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, XI, nº 3 (1964) 176 – 186.

_______. *Psicologia e Pedagogia*. Rio de Janeiro: Forense, 1970.

_______. Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico. In: MÁSSIMO, P. P. (Org.) *Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. O debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky*. São Paulo: Coltrix/Edusp., 1983. p. 39-49.

_______. Notas sobre o ensino da matemática. In: MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (Org.). *VI Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*, Águas de Lindóia (texto mimeografado), 1989.

PIAJET, J. e SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. 2 ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C. e SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 156-85.

SCHLIEMANN, A. D.; SANTOS, C. M. dos. e COSTA, S. C. Da compreensão do sistema decimal à compreensão de algoritmos. In: ALENCAR, E. S. de. (Org.) *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem*. 3 ed. São Paulo: Cortez, 1995. p. 99-117.

SCHWARTZ, J. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: BEHR, M. and HIEBERT, J. (Eds.) *Number concepts and operations in the midlle grades.* Reston: Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 41-52.

SELVA, A. C. V. Resto na divisão: uma análise das estratégias. *Trabalho apresentado no XXVI Congresso Interamericano de Psicologia do Desenvolvimento.* São Paulo (jul/1997).

SILVA, B. A. Contrato didático. In. FRANCHI, A. et al. *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo: Educ, 1999. p. 43-64.

SINCLAIR, H. e SINCLAIR, A. Children's mastery of numerals and the construction of basic number concepts. In: HIERBET, j. (Ed.) *Conceptual and procedural knowlodge: the case of mathematics.* London/Hillsdale: Lawrence Erlbaum. Ass. Press,1986. p.113-133.

SINCLAIR, A. A Notação numérica na criança. In: SINCLAIR, H. (Org.) *A produção de notações na criança: linguagem, número, ritmo e melodias.* São Paulo: Cortez, 1990. p. 71-96.

STAREPRAVO, A. R. *Matemática em tempo de transformação.* Curitiba: Renascer, 1997.

STEFFE, L. Children's multiplying schemes. In: HAREL, G. e CONFREY, J. (Eds). *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.*1994. 3-40.

VERGNAUD, G. The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics* 10 (1979), p. 263-274. D. Reidel Publishing Co. Dordrecht, Holland and Boston, U.S.A.

_________. Multiplicative Structures. In: RESH, R. e LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York, Academic Press, 1983. p. 127-74.

_________. *Theoretical frameworks and empirical facts in the psychoplogy of mathematics education.* ICME VI, Budapest, 1988. p. 2-21.

_________. *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas,1991.

ZUNINO, Délia Lerner. *A matemática na escola: aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXOS

ANEXO 1

Encartes de ofertas (ofertas exploradas)

Anexo1a: Leite fermentado (problemas 1, 2 e 3)

Anexo1b: blusas (problemas 4 e 5)

Blusa
19,00

Anexo1c: camisetas (problema 6)

ANEXO 2

Relatório do estudo piloto

O estudo piloto foi feito em março de 2 000, com dois sujeitos, aos quais foram apresentados 5 problemas, cuja estrutura consistia de relações de proporcionalidade simples, envolvendo multiplicação, divisão e regra de três (Vergnaud, 1983).

Os dois primeiros problemas eram referentes ao anúncio de uma caixa de filés de frango , sendo que o primeiro tratava-se de multiplicação e o segundo de divisão inexata. O terceiro problema era referente a um pacote de queijo (com 48 fatias), tratando-se também de uma multiplicação. Os dois últimos problemas eram referentes a peças do vestuário (pijamas e camisetas), sendo que o quarto problema tratava-se de uma divisão exata e o último de regra de três (ver enunciados no final do texto)

O encarte no qual apareciam os produtos alimentícios tratava-se de uma revista de 40 páginas de um hipermercado de Curitiba, nas quais apareciam fotografias de produtos variados e seus respectivos preços. O outro encarte, de apenas uma página era de uma loja de departamentos.

A entrevista iniciou com uma conversa de familiarização com os instrumentos usados (encartes) na qual os sujeitos foram abordados sobre o significado, a função e utilização dos encartes. Para isso as crianças folhearam o encarte do hipermercado, denominando alguns dos produtos que constavam ali. Depois disso, foram apresentados os problemas oralmente (um a um), na continuidade da conversa já iniciada. As crianças podiam fazer, inicialmente, cálculos mentais ou fazer diretamente notações na folha. Se a criança tentava fazer os cálculos mentais era solicitada a fazer os registros para que pudéssemos conversar sobre eles. Uma das crianças disse que precisava do papel para calcular e fez diretamente os registros.

Depois que terminaram seus registros, foram questionadas sobre os procedimentos usados para resolver os problemas. Assim interpretaram e explicaram suas notações, mediantes questões propostas pela entrevistadora.

A partir desta primeira sessão de entrevistas foi feita uma avaliação da metodologia usada, resultando em modificações importantes.

Os problemas apresentados foram modificados em função do tipo de mercadorias às quais se referiam e em função da estrutura dos problemas.

Os três primeiros problemas referiam-se a uma unidade composta (caixa com filés de frango e pacote com fatias de queijo), isto poderia interferir na resolução de um problema de divisão inexata, pois ao comprar um determinado número de caixas e pacotes, havendo sobra de dinheiro, pode-se pensar em abrir uma das embalagens e tirar algumas unidades dali, que possam ser pagas com o dinheiro restante (troco).

Considerando esta situação como uma variável importante a ser observada, optamos por escolher uma mercadoria, cuja visualização desta unidade composta fosse mais clara. É o que acontece com a embalagem contendo 4 copos de leite fermentado, a qual passou então a ser explorada nos 3 primeiros problemas.

Em relação à estrutura dos problemas, verificamos que os dois problemas de divisão tratavam-se de divisão por quota (ver problemas anexados no final deste relatório). Assim, optamos por incluir um problema de divisão por partição, ficando com dois problemas de divisão por quota (uma divisão exata e outra inexata) e um problema de divisão por partição (divisão exata)[8].

O procedimento escolhido para registro dos dados nos fez questionar o número de problemas a ser apresentado às crianças. Concluímos que não seria viável trabalhar com mais do que 6 problemas. Retiramos então o problema que envolvia a regra de três, optando por ficar somente com os problemas que abordavam multiplicação e divisão (partição e quota).

Escolhidos as mercadorias às quais iriam se referir os problemas, optamos por apresentar às crianças somente a página do encarte na qual estavam anunciados, pois ao apresentar a revista inteira, as crianças gastaram um tempo muito grande na identificação dos diferentes produtos sem relevância para a presente pesquisa.

Também percebemos que trabalhar com os 5 problemas em uma mesma sessão de entrevista, tomou muito tempo e as crianças demonstraram cansaço nos últimos problemas. Resolvemos então dividir a entrevista em duas sessões. Na primeira trabalhamos com os 3 primeiros problemas (uma vez que se referiam ao anúncio de um mesmo produto) e na segunda com os dois problemas restantes. Desta forma, foi possível constatar um envolvimento maior das crianças no trabalho, sendo que no

[8] Na qualificação do projeto, foi sugerida a apresentação de dois problemas de divisão por partição. Optamos então em apresentar um problema cujo quociente fosse um número fracionário (problema 6).

segundo encontro também demonstraram estar mais à vontade, por não se tratar mais do primeiro contato com a entrevistadora.

Procedimentos técnicos:

Os procedimentos técnicos de coleta de dados também foram submetidos a uma avaliação e concluímos que alguns deles precisavam ser alterados, conforme descrição a seguir.

Em uma das sessões a fita da filmadora acabou, precisando ser trocada durante a entrevista. Desta forma, a entrevista teve que ser interrompida. É necessário que o tempo de duração da fita seja bem programado para não acontecer isso, pois a interrupção pode fazer com que alguns dados sejam perdidos e também desvia a atenção das crianças da atividade proposta.

Outra questão a ser considerada refere-se à luminosidade da sala. Alguns sujeitos foram filmados contra a luz vinda da janela, assim o rosto ficou escuro, sendo difícil identificar as expressões faciais. Deve-se, ainda, voltar atenção especial ao enquadramento da filmadora que deve registrar as notações das crianças à medida que são feitas e, ao mesmo tempo, registrar o rosto da criança para verificar suas expressões.

Em relação à escolha dos sujeitos, a entrevistadora solicitou à professora da classe uma criança, na porta da sala de aula. Isso causou um certo tumulto entre as crianças enquanto a professora pensava em quem iria escolher. As crianças ficavam pedindo para ser escolhidas. Nesta confusão a professora acabou escolhendo uma criança que não possuía as características pedidas (a entrevistadora pediu que ela escolhesse uma criança com dificuldade de aprendizagem e idade inferior a 10 anos. A professora considerou o primeiro item, mas não o último). Para o estudo principal optamos por pedir uma listagem à professora contendo o nome dos alunos já separados em grupos, de acordo com as características de idade e dificuldade ou não de aprendizagem. Desta listagem, será sorteado aleatoriamente um aluno de cada grupo, os quais serão chamados pela entrevistadora na sala.

Problemas propostos na primeira sessão de entrevistas do estudo piloto mediante as figuras dos produtos e seus respectivos preços:

1 – Esta caixa de filés de frango congelado custa R$ 4,50. Se você comprar 6 caixas destes filés, quanto você irá gastar?

2 – Se você for ao mercado com R$ 20,00 e quiser gastar este dinheiro comprando caixas de filés de frango como esta, quantas caixas você poderá comprar?

3 – Neste mesmo mercado, um pacote de queijo custa R$ 9,00. Se eu quiser comprar 7 pacotes deste queijo, quanto irei gastar?

4 – Uma pessoa foi até esta loja e gastou 60 reais para comprar pijamas. O preço de cada pijama era R$ 15,00. Quantos pijamas ela conseguiu comprar?

5 – Nessa mesma loja, eu gastei R$ 12,00 para comprar 3 camisetas. Se você quiser comprar 5 destas camisetas, quanto irá gastar?

ANEXO 3

Protocolo de entrevista.
Sujeito: CLE (9;8)

1ª sessão.

CLE e E estão sentados na sala da coordenação tendo à frente deles uma mesa com algumas cartolinas, canetinhas e 2 encartes de ofertas.
E: **nós vamos conversar sobre estes materiais** (mostra as folhas de encarte). **Eu queria saber se você já viu alguma vez esse tipo de papel assim** (coloca os encartes à frente de CLE).
CLE: (olha para E, sorri e balança a cabeça afirmativamente).
E: **já? Onde?**
CLE: (está encostado no encosto da cadeira, com a mão direita no ombro esquerdo e a mão direita embaixo do braço direito. Olha para E, balança o corpo para frente) **ah, em supermercado.**
E: **isso, no mercado...**
CLE: **lojas.**
E: **por que será que fazem isso daqui** (mostra os encartes) **nos mercados e nas lojas?**
CLE: (olha para os encartes, olha para sua direita) **ah, pras pessoas ver os preços... pros comerciais.**
E: **isso, exatamente, né? Que daí as pessoas vão olhar aqui** (aponta um encarte) **e já sabem o preço daquilo que querem comprar. Vamos começar por este aqui** (aponta o encarte do mercado e afasta o outro). **O que tem nesse aqui?**
CLE: (olha para o encarte) **tem... quatro de... dieté... dieté...** (aponta para as balas em lata, sorri) **esse negócio.**
E: **e o que será que é esse negócio?**
CLE: **isso é uma lata dieté... dietética**
E: **isso, é uma balinha dietética. Sabe o que é uma bala dietética?**
CLE: (balança a cabeça negativamente olhando para o encarte).
E: **nunca ouviu falar em produtos dietéticos?**
CLE: (ainda olhando para o encarte, balança a cabeça negativamente).
E: **é quando a pessoa está querendo emagrecer, que ela faz dieta . Ela não pode comer açúcar, então têm produtos especiais para estas pessoas. Olha, tem todos estes tipos de produtos** (aponta). **Isso aqui, o que é?** (aponta para o adoçante)
CLE: (olha para o local apontado) **adoçante.**
E: **isso. esse você já viu?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **você usa?**
CLE: (balança a cabeça negativamente e sorri).
E: **e você conhece alguém que usa?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **quem usa?**
CLE: **minha vó.**
E: (aponta para a embalagem de leite fermentado no encarte) **e esse daqui, o que será que é?**
CLE: (olha para o local apontado) **leite fermentado** (olha para E).
E: **você já tomou alguma vez leite fermentado?**
CLE: (olha para o encarte, balança a cabeça afirmativamente) **já.**

E: **qual?**
CLE: **um...**
E: (aponta o leite fermentado do encarte) **desse tipo aqui?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **tem o Yakult também, já tomou o Yakult?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **só que este daqui é de outra marca, né?**
CLE: (olhando para o encarte balança a cabeça afirmativamente) **é.**
E: **e esse daqui** (aponta para a embalagem do encarte) **você falou que as pessoas olham isso aqui** (aponta o encarte todo) **para poder ir ao mercado comprar, né? Se você olhasse isso daqui e quisesse comprar esse** (aponta a embalagem do leite fermentado) **você já podia saber quanto de dinheiro ia ter que levar, ou não?**
CLE: (olha para E, sorri) **já.**
E: **e quanto de dinheiro você ia ter que levar?**
CLE: (olha para o lado direito, olha para E, sorri) **ah, não sei.**
E: **olhe aqui** (aponta o encarte) **já não diz aqui quanto que você tem que levar?**
CLE: (olha para o encarte)
E: **tem o preço dos produtos, ou não?**
CLE: **tem.**
E: **e quanto custa esse?** (aponta o leite fermentado)
CLE: (aponta o leite fermentado com a mão direita) **esse daqui custa 2 e 10.**
E: **isso, então custa 2 reais e 10 centavos, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **se você for no mercado e quiser comprar este, você leva teu dinheiro já.**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**
E: **e se você quisesse ir lá no mercado e fosse diferente. Você não queria levar só um desse** (aponta o leite fermentado) **se você quisesse levar 6 desse aqui. Aí dava para descobrir quanto que você ia pagar?**
CLE: (olha para o encarte enquanto E fala, olha para E) **só fazendo conta.**
E: **só fazendo conta? Então tá, então eu vou te dar um papel** (pega uma cartolina). **Nesse papel , se você quiser fazer a conta você faz, se quiser fazer desenho você faz, mas você vai descobrir quanto que você gasta se você quiser comprar 6 caixas dessas aqui, tá?** (a cartolina é deixada à frente de CLE e o encarte colocado sobre a extremidade superior da cartolina). **Pode usar caneta grossa, tem caneta fina, qual você quiser. Esse espaço é todo teu** (aponta a cartolina) **pode usar como você quiser, aí vamos tentar descobrir quanto que você ia gastar se você quisesse levar 6 iguais a essa** (coloca o encarte à esquerda de CLE).
CLE: (aponta para o leite fermentado do encarte) **essa aqui?**
E: **ahã, 6 dessas daí. Quanto que você iria gastar de dinheiro?**
CLE: (pega uma canetinha vermelha fina, destampa-a e segura sobre a cartolina com a mão esquerda em posição para escrever. Olha para o encarte e registra 2, olha para o encarte, leva a mão com a canetinha até a testa, leva novamente a canetinha até o papel e registra uma vírgula à direita do 2 e 10 à direita desta vírgula. À esquerda deste 2,10, registra o sinal + e abaixo registra mais duas vezes o 2,10 – um abaixo do outro. Aponta com a canetinha os registros já feitos e registra mais um 2,10 abaixo dos demais. Aponta novamente cada registro com a canetinha e registra mais um 2,10. Leva a canetinha até o primeiro 2,10 registrado, aponta-o e em seguida aponta cada um. Registra mais um 2,10 abaixo dos demais e faz um traço horizontal abaixo deste último. Aponta com a canetinha a coluna de zeros e anota 0 abaixo desta coluna. Aponta novamente esta coluna e escreve novamente 0 sobre aquele já registrado. Encosta o cotovelo esquerdo na mesa e apóia a cabeça na mão esquerda, vira a mão direita, fechada, sobre a mesa com a palma para cima e movimenta os dedos. Vira novamente a mão fechada para baixo e fica olhando para os registros. Torna a virar a mão

direita deixando a palma para cima e movimenta novamente os dedos desta mão, olhando para eles. Fica olhando demoradamente para os registro já feito, leva a mão esquerda com a canetinha até o local onde colocou o traço, leva-a novamente à testa, volta a colocá-la no papel e registra 17 à esquerda do 0. Afasta um pouco a canetinha para a esquerda, olha seu registro e faz uma vírgula entre o 17 e o 0, olha para E. Tampa a canetinha que passa para a mão direita).

E: **o que você descobriu/**

CLE: **que tinha que levar...** (abaixa a cabeça, apoiando-na sobre a mão esquerda e olha par o registro) **17 reais** (olha para E, com a cabeça inclinada para esquerda apoiada sobre a mão).

E: **como é que você pensou isso? O que é isso que você colocou aqui: 2,10; outro 2,10, outro 2,10** (aponta para o registro de CLE).

CLE: **é uma conta de mais.**

E: **isso, mas por que você colocou um 2,10; outro 2,10** (aponta) **o que é esse... o que são esses 2,10?**

CLE: (aponta para o primeiro 2,10 e para o encarte) **é o preço que vai faze a conta.**

E: **isso, e por que tem 6 aqui?** (aponta os 2,10 feitos por CLE)

CLE: **ah, é que eu fiz... você falou que era prá mim faze...** (aponta o encarte, olha para E) **de seis.**

E: **seis embalagens, né?**

CLE: **então eu fiz de 6... a conta eu fiz de 6 embalagem... que dava aqui** (aponta para o 17,00).

E: **tá, e como é que você descobriu que esses 2,10 todos juntos aqui,** (aponta) **dava 17 reais. Como que você fez?**

CLE: **eu fiz ...**(leva a mão direita com a canetinha até os registros, derruba e pega-a novamente) **fui fazendo a conta.**

E: **como que você fez essa conta?**

CLE: (aponta o segundo 2,10) **contei aqui... não, comecei contá aqui** (aponta o primeiro 2,10) **contei aqui** (aponta o segundo 2,10) **contei aqui** (aponta o terceiro e quarto 2,10) **contei aqui** (aponta o quinto 2,10).

E: **e dá 17 mesmo?**

CLE: (olhando para E) **dá.**

E: **você começou por onde? Pelos 2 reais ou pelos 10 centavos?** (aponta a coluna de 2 e depois a coluna de 10).

CLE: (leva a canetinha até a boca) **comecei pelos 2** (aponta a coluna de 2 com a canetinha e olha para E).

E: **pelos 2, então vamos conferir se dá realmente 17 esses 2 aqui? Vamos lá, vamos ver como você pensou.**

CLE: (suspira, se mexe na cadeira, solta e pega a canetinha com a cabeça inclinada para a esquerda apoiada sobre a mão. Aponta cada 2 até o quinto, volta ao primeiro e aponta cada um novamente, olha para E) **é, dá 17.**

E: **é, dá? Como é que você está fazendo... assim... você contou esse e esse** (aponta para o primeiro e o segundo 2,10 registrados), **o que você fez com esses 2 aqui?**

CLE: **eu... eu contei** (aponta-os com a canetinha).

E: **isso, e quanto é que dá esses dois juntos?**

CLE: **quatro.**

E: **tá, e daí mais esse** (aponta o terceiro 2,10).

CLE: (aponta o terceiro 2, fica olhando para ele) **seis.**

E: **e daí esse** (aponta o quarto 2,10).

CLE: (também aponta com a canetinha) **oito.**

E: (aponta o quinto 2,10).

CLE: (aponta com a canetinha) **dez.**

E: (aponta o último 2,10)
CLE: (bate com a canetinha na folha, à direita deste 2,10) **doze.**
E: **daí, então é 17 reais ou 12 reais?**
CLE: (olha para E, olha para a folha novamente)
E: **o que você acha?**
CLE: (fica olhando para seu registro)
E: **você acha que é 17 ou é 12?**
CLE: (olha para E) **doze.**
E: **doze? Quer anotar em outro lugar, ali do lado para você lembrar?**
CLE: (olha para E, sorri) **não sei.**
E: **então anota prá você lembrar. Por que você acha que... você está achando agora que esse aqui** (aponta o 17) **que está certo ou você está achando que é o 12 que você falou agora que está certo?**
CLE: **é o 12.**
E: **então anota o 12.**
CLE: (aponta o espaço abaixo do 17) **aqui?**
E: **pode ser aí ou pode ser do lado. Aonde você quiser.**
CLE: (destampa a canetinha e registra 12 abaixo do 17)
E: **tá, isso é só o que você contou o que? Esse 12 é do que?**
CLE: **que eu contei aqui** (aponta os registros de 2,10) **deu 12.**
E: **tá, tudo isso?** (aponta os registros de 2,10) **ou só dos reais?**
CLE: (aponta a coluna de 2) **só dos 2 reais** (olha para E).
E: **isso, e agora o que falta então?**
CLE: (aponta a coluna de 10) **falta os 10 centavos.**
E: **isso, quanto que dá todos esses 10 centavos juntos?**
CLE: (enquanto E faz a pergunta, já aponta um a um os 10 centavos e antes de chegar ao último, olha para E) **sessenta.**
E: **dá sessenta?**
CLE: (anota uma vírgula à direita do 12 e registra 60)
E: **tá, então quanto que você acha que gasta para levar as 6 embalagens?**
CLE: (olha para seu último registro) **doze e sessenta.**
E: **tá, e está igual ao que você fez por primeiro?** (aponta o 17,00)
CLE: (balança a cabeça negativamente)
E: **e por que será, você acha que ali não deu certo?**
CLE: (aponta os registros de 2,10) **porque eu fiz a conta errada.**
E: **ah, você contou errado. E agora, você acha que está certo?** (aponta o 12,60).
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **tem certeza?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então tá. Então se você quisesse levar 6 caixas, quanto que você ia ter que levar lá no mercado, de dinheiro?**
CLE: **doze e sessenta.**
E: **12,60 daí você comprava, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então agora nós vamos fazer outro diferente, tá?** (puxa o encarte e coloca-o sobre a folha de registros à frente de CLE) **Se você fosse lá no mercado e você já levasse na... na tua carteira, no teu bolso, 21 reais, tá?**
CLE: (olha para o encarte, olha para E, balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**
E: **quantas caixinhas destas** (aponta no encarte) **será que você ia poder comprar?**
CLE: (leva a mão esquerda até o rosto, olha para o encarte, mexe nele com a mão direita)

E: **daria bastante caixas, você acha... poucas, quantas caixinhas mais ou menos você acha que daria para comprar?**
CLE: (apóia os dois cotovelos sobre a mesa e fica com os dedos das duas mãos encostados nas laterais da testa. Fica olhando durante algum tempo para os registros que fez, abaixa o braço direito sobre a mesa, olha para E) **umas 18.**
E: **será que tudo isso? Por que? Como é que você descobriu que dá umas 18 caixas?**
CLE: **ah, porque...** (olha para seu registro) **eu acho que dá 18 porque...** (aponta os registros do problema 1 com a canetinha e leva a mão até a cabeça, apoiando-a) **tipo assim ó... dá... tem 6 dá 12... 6 dá... 12,60** (enquanto fala, olha e aponta para o registro de 12,60).
E: **então você acha que é mais do que 6 caixas, né?**
CLE: (olha para E) **é.**
E: **e como é que você vai descobrir agora se dá 18 mesmo?**
CLE: (olha para o encarte, olha para E, sorri) **ah, não sei.**
E: **vamos tentar então. Olha, você vai fazer aqui** (estica o braço para pegar uma cartolina que está à esquerda de CLE) **vou te dar... não. Vamos virar essa cartolina, você vai fazer aqui** (vira a cartolina que está à frente de CLE). **Como você quiser, se você quiser desenhar as caixinhas, se você quiser fazer os preços das caixinhas prá você saber quantas caixinhas você precisa levar para dar 21 reais... você tem 21 reais levando lá na loja, né? Quantas caixinhas será que você consegue comprar?**
CLE: (tem a mão direita sobre o papel. O cotovelo esquerdo está apoiado na mesa e a cabeça apoiada na mão esquerda, que segura a canetinha. Fica olhando na direção do encarte, move os lábios e os dedos da mão direita, desencosta a cabeça da mão esquerda, olha para E) **21 reais?**
E: **você tem 21 reais na mão, ahã. Quantas caixinhas você compra com esse dinheiro, será?**
CLE: (volta a apoiar a cabeça na mão esquerda e fica olhando para frente movendo os lábios)
E: **você falou que achava que era 18. Se você quiser ver se dá 18 mesmo... quiser fazer... você que descobre aí quanto será que você... quantas caixinhas que você compra com este dinheiro.**
CLE: (fica olhando para frente durante alguns segundos, move os lábios e a mão direita. Olha para E) **ah, não sei.**
E: **vamos tentar fazer, então? Prá comprar 6 caixinhas destas, quanto que você já gastou de dinheiro?**
CLE: (encosta a canetinha na nuca e, olhando para E, sorri) **12,60.**
E: **e se você fosse levar 7 caixinhas?**
CLE: (inclina mais a cabeça para a esquerda, olha para cima, move os lábios) **14 e...** (encosta a canetinha no olho) **80** (sorri).
E: **tá, quer anotar aqui** (aponta a cartolina) **como é que você pensou? O que você fez para descobrir que era 14,80?**
CLE: **ah, eu fiz a conta.**
E: **então faz aí prá gente ver, que daí já fica anotado e você não esquece mais.**
CLE: (destampa a canetinha e registra 12,60. Leva a mão esquerda com a canetinha até a cabeça, olha para o registro, torna a colocar a canetinha sobre o papel)
E: **aí já são quantas?**
CLE: (levanta um pouco a canetinha, olha para E) **12... é... 6 caixinhas.**
E: **ahã.**
CLE: (à esquerda do 12,60, faz o sinal +) **mais** (leva a mão esquerda novamente à cabeça, olha para o registro, abaixa a mão sobre a folha, olha para E) **mais...**
E: **eu falei se você levasse mais uma caixinha. Daí o que você fez aí?**

CLE: (olha para seu registro) **fiz mais...** (registra 02 abaixo do 12, olha par E) **dois... dois...** (olha para seu registro, aponta o 2 com a canetinha) **é... dois... dois... reais** (olha para baixo, coloca uma vírgula à direita do 02) **e 10** (registra 10 à direita da vírgula).
E: **10, né? Que é o preço de uma caixinha.**
CLE: (leva a canetinha te a altura da cabeça) **daí eu...** (faz um traço horizontal abaixo do 02,10) **conto...** (aponta os dois zeros da coluna mais à direita) **zero... zero** (registra 0 abaixo desta coluna. Apóia a cabeça na mão esquerda e fica olhando para o registro) **6 menos 1** (move a mão direita sobre a folha) **5** (registra 5 embaixo do 1. Olha para E, aponta o 5) **deu 50 centavos.**
E: **ahã.**
CLE: **daí...** (aponta a coluna de 2) **aqui deu...** (leva a mão à cabeça, abaixa-a novamente apontando a coluna de 2) **é... 4** (registra 4 abaixo desta coluna. Aponta 0 1 do 12) **é...** (leva a mão esquerda à cabeça e fica olhando o registro) **é...** (aponta o 1 novamente e leva a mão esquerda à cabeça. Fica com o indicador da mão direita, estendido sobre a folha apontando o registro, de longe. Sem mover a cabeça, olha para E, olha novamente para o registro, leva a mão com a canetinha até a folha e registra 1 à esquerda do 4. Coloca uma vírgula entre o 1 e o 4. Olha seu registro, balança a cabeça negativamente) **não** (risca esta vírgula e registra uma vírgula à direita do 4).
E: **você lembra quanto que você tinha falado antes que dava?**
CLE: (olha para E, com a canetinha encostada na testa) **14...** (olha para baixo).
E: **você falou 14 e...**
CLE: (olha novamente para E) **14 e...** (olha para a direita, olha para baixo).
E: **não lembra?**
CLE: (olha para E, balança a cabeça negativamente).
E: **tá, então vamos ver se... o que você fez aqui** (aponta o registro de 14,50) **o que você fez que descobriu esse 14. Como é que você descobriu o 14? O que você fez?**
CLE: (aponta o seu registro com a canetinha) **eu fiz a conta aqui... aqui...** (aponta o 2 do 2,10 e o 1 do 12) **dois prá um, dá 1** (aponta o 1 do 14) **daí fiz a conta aqui** (aponta o 2 do 2,10 e o 2 do 12,60).
E: **tá, descobriu. Você fez o que... juntou 12** (aponta) **com... dois** (aponta).
CLE: (olha para o registro apontado e fala junto com E) **dois.**
E: **e aqui, prá dar 50** (aponta) **o que você fez?**
CLE: (aponta a coluna de zeros) **eu fiz zero, zero... zero prá zero vai dá zero. Aí aqui...** (aponta o 6 e olha para o 12. pára, leva a canetinha até a testa) **ué...**(fica olhando para o registro e batendo a canetinha na testa, leva a mão com a canetinha até a folha e registra 7 sobre o 5 do 50, fala enquanto escreve) **aqui no 5... era 7** (olha para E).
E: **isso, por que... o que você tinha feito antes que deu 5** (aponta).
CLE: **é que eu não tinha feito conta de mais.**
E: **isso, e agora? Era conta de mais ou de menos que você tinha que ter feito?**
CLE: **de mais.**
E: **isso, porque você está juntando. Tá, catorze e setenta. 14,70 é o preço de quantas caixas?**
CLE: **sete.**
E: **isso, se você tem 21 reais você acha que dá prá levar só 7?**
CLE: **mais.**
E: **quer tentar mais prá ver?**
CLE: (olha para frente com a cabeça apoiada na mão esquerda, ergue o ombro direito) **não sei.**
E: **você acha que com 21 reais dá prá levar só 7 caixinhas ou dá prá levar mais caixinhas?**
CLE: (olha para baixo, fica em silêncio).
E: **você viu que 6 é pouco, porque 6 só gasta quanto?** (aponta o registro de 12,60)

CLE: **6 ainda é pouco.**
E: **mas você gasta quanto para levar 6 caixinhas?**
CLE: **12 e...** (coloca a mão à frente do olho) **12,60.**
E: **mas você tem mais do que isso, né? Você tem 21, daí você tentou 7. Sete ainda é pouco?**
CLE: **é.**
E: **então quer tentar mais? Vamos ver...**
CLE: (olha para o registro, olha para a câmera, olha para frente com a cabeça apoiada na mão esquerda)
E: **você que sabe... ou você acha que com 21 reais dá prá levar só 7 caixinhas?**
CLE: **mais.**
E: **então vai tentando até a gente descobrir.**
CLE: (fica olhando para frente em silêncio, mexendo com a mão direita na extremidade da mesa. Olha para E) **oito caixinha dá...** (fecha o olho e encosta a canetinha) **dá...** (olha para baixo e volta a apoiar a cabeça na mão esquerda) **é...** (olha para a mão direita aberta, fecha-a olha para E) **dá 16 e oi... oitenta.**
E; **quer anotar então? Pra você não esquecer?**
CLE: (olha para a folha e olha novamente para E)
E: **pode anotar... se você quiser anotar só os 16,80 pode anotar.**
CLE: (destampa a canetinha e mais para baixo, à direita do registro anterior, escreve 16,80).
E: **tá, isso são quantas caixinhas?**
CLE: (apóia novamente a cabeça na mão esquerda, olha para E) **oito.**
E: **oito, então o que você acha: dá 8 com 21 reais ou dá mais ainda?**
CLE: **mais.**
E: **quer tentar? Então tenta mais.**
CLE: (fica olhando para seu registro, movimenta a mão direita sobre a mesa, move os dedos, fecha a mão e fica olhando para os registros. Leva a mão esquerda com a canetinha até o papel e escreve 18,90 abaixo do 16, 80. Olha para seu registro com a mão esquerda na testa).
E: **e aí é o que?**
CLE: (olha para E) **aí deu 9 caixinhas.**
E: **9 caixinhas você gasta quanto de dinheiro?**
CLE: (aponta o registro) **18,90.**
E: **e aí, dá mais caixinhas ou não?**
CLE: **dá** (olha para os registros, move os dedos da mão direita sobre a mesa, olha para E) **dá... 10 caixinhas.**
E: **10 caixinhas? Como é que você descobriu que vai dar 10 caixinhas?**
CLE: **ah, é porque daí ia sobra é... sobra 1 real, daí não dava prá comprar.**
E: **é? Mas o que você fez prá descobrir. Se você colocar mais uma caixinha aqui** (aponta o registro de 18,90) **quanto que vai gastar mais?**
CLE: **colocar mais uma caixinha?**
E: **ahã**
CLE: (olhando para o registro) **eu gasto...22 reais** (olha para E).
E: **será que dá 22? Quanto custa uma caixinha?**
CLE: **dois e... 2 e 10.**
E: **2 e 10. Então se você já está gastando 18,90 prá comprar 9 caixinhas, você gasta mais 2,10, quanto que dá?**
CLE: **mais 2,10?**
E: **ahã. Quer fazer prá ver como é que faz... como é que fica?**

CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã** (olha para o registro e coloca o indicador da mão direita na extremidade inferior da cartolina, leva a canetinha até a folha) **vai dá...** (registra 21,00 abaixo do 18,90)
E: **hum, vai dar quanto?**
CLE: **vai dar 21 reais.**
E: **bem certinho?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **então com 21 reais, quantas caixinhas que você consegue comprar?**
CLE: **10.**
E: **quer anotar que dá 10 caixinhas, então?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente e, à direita de 21,00 registra 10, olha para E)
E: **10 caixinhas com... bem certinho, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)

E: **não sobra dinheiro?**
CLE: (balança a cabeça negativamente)
E: **e como é que você descobriu que 18,90** (aponta) **mais 2,10 vai dar esse 21?** (aponta)
CLE: **porque daí... tipo assim, ó... 18 daí 19... 20** (mexe os dedos da mão direita).
E: **ahã.**
CLE: **aqui 90 mais 10** (aponta) **aí zero, aí dá 21.**
E: **ah e quanto dá 90 centavos mais 10 centavos?**
CLE: **90 centavos... 1 real.**
E: **1 real, daí você juntou um real com que?**
CLE: **com o 90.**
E: **você juntou 90 com 10, deu 1 real. Daí você já tinha visto que aqui, 18 mais 2 dava 20** (aponta o 18,90) **então você ficou com 20 reais e com 1 real.**
CLE: **ahã.**
E: **daí, o que você fez?**
CLE: **daí eu ajuntei.**
E: **isso, daí dá 21 bem certinho, né? Então tá, então agora o último. Só mais um hoje, daí os outros a gente faz outro dia. Agora é diferente: primeiro você calculou 6 caixinhas. Quanto que você gastava para levar 6 caixas** (aponta o encarte).
CLE: **6 caixinhas, doze e... 12,60.**
E: **isso, você calculou** (aponta a folha de registros). **Depois eu perguntei diferente: se você levasse no mercado 21 reais, você descobriu que dava para levar quantas caixas?**
CLE: (olha para E, olha para a folha de registros) **dez.**
E: **e agora eu vou fazer outra: se você levasse só 10 reais no mercado. Daí quantas caixinhas será que dava para comprar? Deixa eu pegar um outro papel** (pega uma folha à esquerda de CLE e coloca-a sobre a outra). **Se quiser pensar primeiro, depois escrever, você que sabe. Se quiser escrever... Se você levasse só 10 reais... vamos deixar isso aqui, se você precisar olhar aqui** (coloca o encarte à esquerda de CLE). **E aí, você acha que dava para comprar quantas caixinhas mais ou menos?**
CLE: (fica com a mão direita sobre a mesa e a esquerda, segurando a canetinha, fica encostada na nuca. Fica olhando para frente, olha para E) **nove?**
E: **será que dava 9 mesmo?**
CLE: **umas 7.**
E: **isso, prá levar 6, quanto você já gastou?**
CLE: **levar 6?**
E: **ahã.**
CLE: (abaixa a cabeça e murmura) **levar 6...**
E: **quanto que você já gastou para levar 6 caixinhas. Você já calculou lá?**

CLE: (olha para E, com a tampa da canetinha na mão direita encostada na boca) **12 e ... 60.**
E: **isso, então se você tem 10 reais, você consegue comprar 7 será?... 7 caixas?**
CLE: (olha para a esquerda, tira a tampa da canetinha da boca, levanta o ombro direito) **não** (balança a cabeça negativamente, olha para E).
E: **por que?**
CLE: (olha para a direita, em direção ao encarte, olha para E) **ah, não sei.**
E: **quer tentar? Então veja, você que descobre quantas caixas você compra com 10 reais.**
CLE: (fica olhando para E com o cotovelo esquerdo sobre a mesa e a mão esquerda na nuca. Olha para frente, morde os lábios, fica olhando para frente em silêncio, olha para E, olha para frente, move os lábios, olha para a mão direita que está embaixo da mesa, olha novamente para frente, fica mais algum tempo em silêncio e leva a mão esquerda com a canetinha até o papel. Coloca a mão direita sobre a folha e começa escrever. Registra 2,10, outro 2,10 embaixo e mais um 2,10 embaixo deste. Aponta cada um e registra mais um 2,10. Leva a mão esquerda à cabeça, olha para o registro, leva a mão esquerda novamente ao papel e registra outro 2,10. Aponta cada um e à direita destes registros escreve mais um 2,10 e outro 2,10 abaixo dele. Aponta cada 2,10 já registrado e anota mais dois 2,10, um abaixo do outro. Aponta mais uma vez todos os registros já feitos, enquanto move os lábios. Escreve mais um 2,10 abaixo do último registrado e faz um traço horizontal abaixo dele. Leva a mão direita à boca).
E: **quantas caixas têm aí?**
CLE: **aqui tem...** (olha para E, inclina a cabeça para a esquerda e olha novamente para a folha movimentando os lábios) **dez.**
E: **dez. Você já não descobriu quanto que você gastava para comprar 10?**
CLE: (está com o queixo apoiado na mão direita, balança a cabeça negativamente e fica olhando para seus registros, com os dedos indicador e médio da mão direita sobre a mesa).
E: **você já não descobriu o preço de 10 caixinhas antes?**
CLE: (continua olhando para seus registros. À direita deles escreve 18. olha para E).
E: **o que é esse 18?**
CLE: (olha para o registro) **o que vai dá** (olha para E).
E: **as 10 caixinhas?**
CLE: **ahã.**
E: **você já não tinha feito 10 caixinhas antes?**
CLE: (olha para o registro, aponta) **eu sei... eu fiz... eu fiz... daí eu fiz a conta... prá... prá... vê quanto que eu ia levá.**
E: **ah tá, mas eu não quero saber quanto que você gasta prá trazer 10 caixas. Eu quero saber se você levar 10 reais no mercado, quantas caixas você consegue comprar? Você só tem 10 reais. Você podia comprar todas estas caixas com 10 reais?** (aponta os registros de 2,10).
CLE: (olha para a folha com o dedo indicador da mão direita na boca enquanto E fala. Olha para ela, balança a cabeça negativamente) **não.**
E: **e por que não?**
CLE: **por que não daria.**
E: **falta dinheiro, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então eu queria saber quantas caixinhas só dá prá comprar com 10 reais.**
CLE: (fica olhando para a frente com a cabeça apoiada na mão esquerda. Depois de um tempo em silêncio, olha para E, balança a cabeça negativamente) **ah, não sei.**
E: **vamos tentar descobrir então? Ó aqui** (pega a folha de registros do segundo problema) **com 12 reais e 60 centavos, quantas caixas você conseguiu comprar?**
CLE: (olha para a folha, olha para E) **12 e 60.**
E: **12,60 é o preço.**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).

E: **quantas caixas que você compra?**
CLE: **seis.**
E: **seis. Então com 10 reais você acha que dá prá comprar 6 também? Dá prá comprar menos que 6 ou mais que 6?**
CLE: **menos.**
E: **menos, porque 10 reais é menos dinheiro, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **vamos tentar ver quanto. Você já sabe que é menos que 6. Com quanto você quer tentar?**
CLE: **cinco.**
E: **quer tentar 5? Então descobre 5. Quanto custam...**
CLE: (interrompe E) **quatro... quatro.**
E: **quatro? Então descobre quanto custam 4 caixinhas.**
CLE: (fica com a cabeça inclinada, apoiada na mão esquerda, batendo embaixo da mesa com a mão direita).
E: **tanto faz, pode fazer no papel, pode fazer de cabeça... pode fazer no papel também.**
CLE: (enquanto E fala, olha para ela e leva a canetinha até a direita do registro de 18. Levanta novamente a mão esquerda, encostando-a novamente na cabeça. Quando E pára de falar, olha para seus registros, olha para frente movimentando os lábios, olha para os registros e anota 8 à esquerda deles. Volta a apoiar a cabeça na mão esquerda e olha para os registros movimentando os lábios. Olha para frente, olha para E, para a folha, para frente novamente, para a folha e registra uma vírgula à direita do 8 e à direita desta registra 40).
E: **descobriu quanto que...**
CLE: (interrompe) **8 e 40** (olha para E).
E: **e o que é esse 8,40?**
CLE: **vai dá... prá comprá...** (olha para a mão direita que segura a tampa da canetinha) **as 4 caixinhas.**
E: **tá, 4 caixinhas custam 8,40. Como é que você descobriu isso?**
CLE: **é que... ah, eu fiz a conta.**
E: **mas você ficou olhando ali** (aponta os registros de 2,10), **esses números te ajudaram alguma coisa ou não?**
CLE: (fica olhando para os registros apontados).
E: **por que você ficou olhando...**
CLE: (interrompe) **um pouco** (olha para E).
E: **o que você fez com esses números?**
CLE: (aponta os registros de 2,10) **é que eu fiz assim, ó... eu fiz assim, ó... 2 mais 2, quatro** (aponta os dois primeiros registros de 2,10) **daí... mais 5... daí 6** (aponta o terceiro registro de 2,10) **7, 8** (aponta o quarto registro de 2,10).
E: **isso, daí você pegou 4 caixinhas aqui, né?**
CLE: (olhando para o registro) **ahã, foi. Aí 10, 20, 30, 40** (aponta os quatro primeiros 10 dos registros de 2,10).
E: **tá, então se você disse assim, que se eu levar no mercado 10 reais eu só compro... 4 caixinhas.**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**
E: **mas daí não sobra dinheiro?**
C: **sobra.**
E: **e com esse dinheiro que sobra será que não dá prá levar mais uma?**
CLE: (olha para frente, olha para cima, olha para E) **sób... dá, mas sobra 10 centavos.**
E: **ainda sobra 10 centavos?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então dá prá levar 4 caixinhas ou 5 caixinhas, o que você acha?**

CLE: (olha para frente e balança a cabeça afirmativamente) **quatro.**
E: **por que não dá prá levar 5?**
CLE: **por que tá faltando dinheiro.**
E: **é? Quanto que custam 5 caixinhas?**
CLE: **cinco caixinhas?** (olha para frente, olha para E, novamente para frente e novamente para E) **10... 10... 10 e 10.**
E: **dez e dez? Por que 10 e 10?**
CLE: **porque é... se... 4 caixinhas deu... 8** (aponta o 8 do 8,40) **8 mais 2 ... dá 10** (olha para E).
E: **10, ahã.**
CLE: **aí com...** (olha para o registro, olha para E) **falta mais 10 prá intera.**
E: **falta mais 10 prá interar? Mas aqui...** (aponta o 8 do 8,40) **8 mais 2 dava 10, você falou. E os 40 centavos?** (aponta o 40 do 8,40) **Você soma com quê? Junta com quê?**
CLE: **vai sobrar 2 reais... daí falta mais 2 prá interar com isso.**
E: **ah, você acha que está faltando. Então não dá prá levar 5 caixas?**
CLE: (balança a cabeça negativamente).
E: **dá prá levar quantas só?**
CLE: quatro.
E: **então está bom. Muito bem.**

2ª sessão.

CLE e E estão no salão da escola, tendo à frente deles uma mesa com algumas cartolinas, encartes de ofertas e canetinhas.
E: **hoje nós vamos trabalhar com outra oferta. Lembra desta aqui?** (coloca à frente de CLE o encarte de ofertas de roupas e calçados) **O que é esse daqui?**
CLE: (tem a cabeça apoiada sobre a mão direita e segura o encarte com a mão direita. Olha para a esquerda) **hum...** (sorri).
E: **o que tem aí nessa?**
CLE: (vira o encarte, desvira, olha para E) **tem mercadorias de... lojas.**
E: **isso, e...**
CLE: (interrompe) **produtos.**
E: **e essa é diferente daquela. Aquela era de comida e essa é de quê?**
CLE: (olha para o encarte) **roupa.**
E: **isso, aí tem roupa. Então nós vamos trabalhar com essa blusa aqui, ó** (aponta a blusa listrada) **tá vendo essa blusa? Essa blusa aqui tem o preço. Onde está o preço dela será?**
CLE: (aponta o preço de um "twin set" e de uma calça) **aqui.**
E: **será que é essa? Está escrito blusa aí?**
CLE: (olha para os preços que apontou, olha para as fotografias de baixo e aponta o preço) **aqui.**
E; **isso. Quanto que está custando esta blusa?**
CLE: **19 reais.**
E: **tá, então se você quisesse, tua mãe quisesse comprar uma blusa como essa, por exemplo, ela tinha que levar quanto lá?**
CLE: (olha para E) **19 reais.**
E: **tá, mas vamos supor que a tua mãe vai lá na loja, mas ela não quer comprar só uma. Ela quer comprar 5 porque daí vai dar de presente para as tias, prá alguém e ela tem que comprar 5. Aí, se ela tiver que comprar 5 blusas iguais a essa dali, ela pode saber quanto de dinheiro ela tem que levar?**

CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **como que ela pode saber?**
CLE: **fazendo conta.**
E: **fazendo? Então vamos fazer assim: você vai fazer e descobrir quanto de dinheiro ela ia ter que levar se ela quisesse comprar 5 blusas iguais aquela dali** (coloca uma cartolina em branco à frente de CLE e pega o estojo de canetinhas finas) **tem essa canetinha, tem a outra** (aponta o estojo de canetinhas grossas). **Você escolhe qual quer usar.**
CLE: (pega uma canetinha vermelha, olha para o encarte, olha para o papel e escreve 19 mais ou menos no meio da folha. Coloca uma vírgula à direita do 19 e um sinal + à esquerda do 19. Escreve outro 19 seguido de vírgula abaixo do 1°, outro abaixo do 2° e outro abaixo do 3°, sempre seguidos de vírgula. Aponta com a canetinha cada registro e registra 1, uma vírgula à direita dele e um 9 entre o 1 e a vírgula. Faz um traço horizontal abaixo do último 19 e leva a mão com a canetinha até a esquerda do primeiro 19. Com a mão direita encostada na boca, fica olhando para seus registros e movendo os lábios. Desliza um pouco a mão esquerda para baixo sobre a folha e continua movendo os lábios. Leva a canetinha até a boca, tira, aponta com ela para o terceiro 9, move os lábios e move os dedos das mãos direita e esquerda. Leva a canetinha até o traço horizontal e registra 3 abaixo da coluna de 9. Aponta a coluna de 1 com a canetinha e leva-a novamente até o registro de 3. Leva a canetinha até a boca, move levemente a cabeça para frente repetidas vezes e registra 5 embaixo da coluna de 1. Faz um traço horizontal abaixo deste 53 e olha para E) **tinha que levar 55** (coça o ombro direito com a mão esquerda).
E: **como é que você descobriu?**
CLE: **é que eu contei aqui primeiro** (aponta a coluna de 9) **e depois aqui** (aponta a coluna de 1).
E: **e o que você contou aqui?** (aponta a coluna de 9).
CLE: **eu contei aqui 9** (aponta o primeiro 9), **daí mais 9, mais 9, mais 9, mais 9** (aponta cada 9 à medida que fala).
E: **ahã, então vamos conferir prá ver se está certo mesmo?**
CLE: (olha para E, balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**
E: **quanto que dá esse mais esse?** (aponta os dois primeiros 9).
CLE: **esse mais esse...** (olha para os dedos da mão direita sobre a mesa e move-os enquanto move os lábios. Desencosta a cabeça da mão esquerda e olha para os dedos desta mão, movendo-os enquanto continua movimentando os lábios. Olha para baixo) **18.**
E: **tá, 18. Depois...** (aponta para o terceiro 9).
CLE: (com a cabeça apoiada na mão esquerda, olha para a mão direita, move os dedos, mexe os lábios, desencosta a cabeça da mão esquerda e move os dedos desta mão ainda movendo os lábios) **27** (olha para o registro).
E: **27. E depois...** (aponta o quarto 9).
CLE: (olha para o registro e move os lábios e os dedos da mão direita, olha para E) **35.**
E: **35? E depois mais esse daqui?** (aponta o último 9).
CLE: (abaixa a cabeça e olha para o registro, move os lábios e os dedos da mão direita e da mão esquerda sem desencostar a cabeça desta mão. Olha para E) **45** (sorri).
E: **45? E daí você acha que está certo como você fez ou não?**
CLE: (olha para o registro, olha para E, balança a cabeça negativamente).

E: **e daí?**
CLE: (balança a cabeça negativamente) **tá errado.**
E: **quer anotar esse 45 prá você lembrar?**
CLE: (anota 45 à direita do registro anterior).
E: **tá, então só contando os 9** (aponta), **você já conseguiu quanto?**
CLE: (inclina a cabeça sobre a mão esquerda, olha para E) **45.**

E: **e agora, o que mais que está faltando?**
CLE: (olha para o registro, coça o pescoço, move os lábios, abaixa a mão esquerda sobre a mesa, continua olhando para seus registros e movendo os lábios. Registra 50 abaixo do 45). **Vai ter que levar 50 reais.**
E: **isso, por que 50?**
CLE: **porque aqui deu 45** (aponta o 45) **46** (aponta o 1 do primeiro 19), **47, 48, 49, 50** (enquanto fala, aponta cada 1 dos 19).
E: **mas esse aqui é um?** (aponta o 1 do primeiro 19).
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **esse é um também?** (aponta o 1 do segundo 19)
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **que número é esse aqui?** (movimenta seu dedo em volta do primeiro 19)
CLE: **19.**
E: **isso é 1 e isso é 9?** (aponta cada algarismo do 19)
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **daí 1 mais 9 dá 19?**
CLE: (olha para E, sorri e balança a cabeça negativamente)
E: **quanto que dá isso aqui?**
CLE: (olha para o registro) **dá 10.**
E: **ah, se 1 mais 9 dá 10, então será que esse número aqui é 1 mesmo?**
CLE: (fica olhando para o registro com a cabeça apoiada na mão esquerda. Olha para E, sorri, ergue os dois ombros e faz um bico com os lábios)
E: **se ele for 1 e você conta assim: 1 mais 1, mais 1, mais 1, mais 1** (aponta cada 1) **dá 5, mas ele não é 1 porque você falou que se fosse 1 mais 9 dava 10. Quanto será que dá esse número aqui...** (circula com o dedo ao redor do 9). **Esse** (aponta o 1) **mais 9 dá 19. Quanto será que vale esse aqui?** (aponta o 1).
CLE: (olha para o registro, olha para frente, olha para E, sorri, balança a cabeça negativamente) **não sei.**
E: **e se você tivesse que fazer esse dinheiro usando é... usando cédula de dinheiro. Que cédulas que você usaria?**
CLE: **1 real.**
E: **de 1 real? Tudo de 1 real?**
CLE: **de 5** (sorri).
E; **de 5? Se fosse de 5, quantas cédulas você precisaria?**
CLE: (coça o pescoço, olha para frente) **2 de 5 e...**
E: (interrompe) **prá que as duas de 5? O que você ia fazer com as duas de 5?**
CLE: **eu ia juntar com as de 9** (aponta um 9 do registro).
E: **ah, então quanto que dava aqui** (aponta um 1) **as duas de 5 já dava quanto?**
CLE: **10.**
E: **e de onde esse 10?**
CLE: (olha para E, olha para frente).
E: **tem 10 no 19?**
CLE: **tem**
E: **onde está? Olhando aqui no número dá prá ver onde que está o 10?** (aponta o 19)
CLE: **não.**
E: **não dá?**
CLE: (olhando para E, balança a cabeça negativamente).
E: **e daí, o que você acha então?**
CLE: (olha para a folha, olha para E, ergue os dois ombros e faz um bico com os lábios).
E: **você ia usar, você falou... se você fosse fazer com duas de 5 só, daí já dava 19 ou não?**

CLE: **não. Daí tinha que junta mais...** (fica olhando para a folha com a mão esquerda, que segura a canetinha, encostada na testa) **mais três de 5...** (abaixa a canetinha e levanta-a novamente, encostando-a na boca) **e quatro de 1 real.**
E: **isso, daí dava 19, né?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **tá, então será que aqui** (aponta o 1 do 19) **que número será... quanto será que vale esse unzinho aqui será, esse...**
CLE: (interrompe) **1 real.**
E: **um real aqui? E aqui 9 reais?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **mas daí 1 real com 9 reais vai dar os 19?**
CLE: (balança a cabeça negativamente, olha para a folha e aponta) **é que esse 1 tá valendo 10.**
E: **ah, e se esse vale 10, então será que juntando tudo dá 5?**
CLE: (olhando para a folha balança a cabeça negativamente).
E; **e dá quanto?**
CLE: **50.**
E: **isso, então você juntou todos esses** (aponta a coluna de 1) **deu 50 e todos esses** (aponta a coluna de 9) **deu quanto?**
CLE: (olha para o registro de 45) **deu 45.**
E: **e agora o resultado tudo junto, quanto que é?**
CLE: (olha para a esquerda, olha para afolha em direção aos registros de 45 e 50, move os lábios, olha para E) **90.**
E: **então você acha que se você for levar as 5 blusas vai gastar quanto?**
CLE: **90 reais.**
E: **quer anotar então?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente e registra 90 seguido de uma vírgula à direita dos registros de 45 e 50. olha para E).
E: **é 90 mesmo?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente)
E: **o que você juntou para dar 90?**
CLE: **eu juntei aqui** (aponta a coluna de 1) **daí aqui deu 10, 20, 30, 40, 50** (aponta cada registro de 1 enquanto fala) **mais o 45** (aponta o registro de 45) **deixa eu ver...** (olha para a coluna de 9) **com esse aqui** (aponta o local onde estão os registros de 45 e 50).
E: **e daí dá 90 reais?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **então está jóia. Vamos fazer mais um com essa blusa... com essa oferta aqui ó** (tira a folha de registros e puxa o encarte, deixando-o à frente de CLE). **Essa blusa** (aponta a blusa listrada) **eu falei que custava 19, tava aqui, né?** (aponta o preço).
CLE: (balança a cabeça afirmativamente).
E: **agora essa outra aqui** (aponta a blusa branca) **uma pessoa foi lá na loja e comprou 5 blusas desta. Tá? 5 iguais... uma prá irmã, uma prá prima... e foi dar de presente 5 blusas desta. Ao todo ela gastou 60 reais, tá? Quanto será que pode ter custado cada blusa? Todas as 5 blusas, juntas, ela gastou 60. quanto será que pode ter custado cada uma sozinha?**
CLE: (olha para o encarte, olha para E, sorri) **ah, eu não sei.**
E: **vamos tentar descobrir, vamos lá. A gente vai tentar descobrir... quanto será que pode ter custado? Ela também levou 5, igual essa** (aponta o registro do problema anterior). **Só que aqui custava quanto cada blusa?**
CLE: (olha para afolha) **19.**
E: **e aí ela gastou quanto no total?**

CLE: (olha para esquerda, olha para a folha) **ela gastou... 90.**

E: **isso, essa outra pessoa aqui que levou 5, ela só gastou 60** (aponta a blusa) **e também levou 5. será que as blusas eram mais caras que 19 ou mais baratas?**

CLE: (olha para o encarte) **mais baratas** (olha para E)

E: **mais baratas, então você vai ter que tentar descobrir quanto... você vai tentar descobrir quanto... aqui... aquela... cada uma custou 19** (aponta a blusa listrada no encarte, vira a folha de registro do problema anterior e deixa a cartolina com a parte em branco voltada para cima, à frente de CLE). **Agora você vai tentar descobrir quanto será que pode custar. Se você quiser fazer desenho das camisas, se você quiser fazer conta... o que você quiser, você pode fazer até descobrir quanto custa cada uma destas** (aponta a camisa no encarte) **são 5 blusas.**

CLE: (fica com a cabeça apoiada na mão esquerda e com o cotovelo esquerdo apoiado na mesa. Fica olhando para o encarte, depois olha para E) **ah, não sei** (sorri).

E: **quer tentar? Mas vamos tentar, você vai tentar do seu jeito. Você pode fazer as blusas aqui... se cada uma custar, por exemplo... você põe um valor. Quanto você acha que podia custar? Daí a gente vê se dá certo ou não.**

CLE: (fica com a canetinha na boca olhando para E).

E: **pode inventar um valor, daí a gente vê se é mais, se é menos.**

CLE: (leva a canetinha até o papel)

E: **um valor que você ache mais fácil fazer.**

CLE: (começa fazer o desenho de uma blusa mais ou menos no meio da folha. Desenha a parte de baixo e a manga direita e coloca um 10 seguido de uma vírgula embaixo do desenho) **eu acho que vai dar 10 reais** (olha para E).

CLE: (interrompe) **ela levou quantas blusas?**

E: **levou 5.**

CLE: (olha para a folha e completa o desenho da blusa, apóia a cabeça na mão esquerda, olhando papa E) **eu acho que ela levou... cada uma custava 10 reais.**

E: **daí se ela levar então... cada uma custa 10 e ela levar 5 rea... é... desculpa... 5 blusas. Quanto ela gasta?**

CLE: (olha para a folha, olha para E) **é... 50 reais.**

E: **ah, só que ela não gastou 50, ela gastou 60. será que então custa só 10? Custa mais que 10 ou menos que 10?**

CLE: (olha para esquerda) **custa vin...** (olha para direita) **vinte reais** (balança cabeça afirmativamente, olha para esquerda)

E: **mas daí, 20 reais, vamos pensar. Antes ela já não comprou 5 de 19?** (vira a folha de registros e aponta os registros do problema anterior)

CLE: (olhando para os registros balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**

E: **e daí quanto que gastou de dinheiro?**

CLE: **90.**

E: **então se cada uma custasse 20, ela ia gastar mais que 90 ou menos que 90?**

CLE: (olha para a folha, olha para E) **mais.**

E: **então será que pode custar 20 cada blusa?**

CLE: (balança a cabeça negativamente).

E: **a gente sabe que é mais que 10, mas é menos que 19, né?** (vira novamente a folha de registros).

CLE: (fica olhando a folha de registros, olha para E) **quinze!**

E: **quer tentar com 15? Então veja o que acontece se cada uma custar 15.**

CLE: (ajeita-se na cadeira, olha para a folha com a canetinha encostada na bochecha, leva a canetinha até o papel e registra 15. Olha para seu registro com a mão esquerda encostada na bochecha. Leva a canetinha novamente ao papel e registra mais dois 15, um abaixo do outro.

Coloca uma vírgula à direita do terceiro 15, depois à direita do segundo e do primeiro. Faz outro 15 seguido de vírgula abaixo do terceiro. Aponta cada 15 já registrado e, à direita do primeiro, faz mais um 15 e outro embaixo dele. Passa um traço horizontal abaixo de tudo. Leva a mão esquerda até a lateral da testa, com o cotovelo esquerdo apoiado na mesa. Fica olhando para os registros, aponta os três primeiros cincos da coluna das unidades e leva a canetinha até a altura do rosto. Aponta os demais 5 e abaixo do traço escreve 4 e move a canetinha sobre o papel à esquerda do 4, sem riscar. Aponta cada 1 da coluna das dezenas e, à esquerda do 4, registra 6. Olha para E) **sessenta e quatro reais.**

E: **como é que você fez isso?**

CLE: **é que aqui, né?** (aponta o 1 do primeiro 15) **você falou que aqui o valor de 1 real era 10 reais. Então eu contei 10, 20, 30, 40, 50, 60.** (aponta cada 1 da coluna das dezenas) **seis e quatro** (aponta o 6 e o 4).

E: **mas de onde este 4?**

CLE: (fica olhando seu registro)

E: **o 60 só dos 10, né?** (aponta a coluna de 1)

CLE: (balança a cabeça afirmativamente) **ahã.**

E: **tá, mas e o 4 de onde você tirou?**

CLE: (aponta os 5 dos dois primeiros 15, torna a aponta-los) **é que eu fiz a conta daqui daí.**

E: **você contou dois 5? E quanto dá todos esses 5 juntos?** (aponta)

CLE: (está com a canetinha na boca, leva-a até o papel e usa para apontar cada 5 da coluna das unidades. Aponta o 4 que registrou abaixo desta coluna, olha para E) **aqui ia dar um número... aqui eu contei errado** (aponta a coluna de 5) **daí aqui dá 30.**

E: **ah, dava 30. E daí?**

CLE: (fica com a cabeça apoiada na mão esquerda olhando para a folha).

E: **só os 5 já dava 30. Quer anotar para você não esquecer?**

CLE: (anota 30 à direita do registro anterior).

E: **e os 10, deu quanto?**

CLE: **os 10 deu 60.**

E: **então, tudo junto dá quanto?**

CLE: (olha na direita do registro de 30 e acima dele registra 60. Faz um sinal de + à esquerda do 30 e passa um traço horizontal abaixo de tudo. Aponta os dois zeros e abaixo deles registra 0. Olha para os dedos da mão direita, que movimenta e anota 9 à esquerda do zero. Olha para E) **90!**

E: **isso e por que tem todos esses... quantos 15 tem aqui?** (aponta os 15).

CLE: (olha para os registros com a cabeça apoiada na mão esquerda e move os lábios e a cabeça para frente) **seis, que ela ia levar 6 blusas** (olha para E).

E: **eram 6?**

CLE: (balança a cabeça afirmativamente).

E: **eram 5.**

CLE: (faz um bico com os lábios, afasta a cabeça da mão, sorri).

E: **lembra, eu falei que ela levou 5 blusas iguais, tanto que quando você fez com 10** (aponta o registro de 10 abaixo do desenho) **daí deu 50. Você fez 10, mais 10, mais 10, mais 10, mais 10** (mostra os dedos da mão, um a um) **5 blusas. Então o que aconteceu aqui nesta conta?**

CLE: (olha para a conta) **eu fiz a conta errada.**

E: **mas o que tem a mais aí?**

CLE: **um 15.**

E: **um quinze a mais, né? Então é só tirar um 15. Será que daí vai dar 60 ou ainda vai ficar muito? Se você tirar 15 aí, vai dar 60 ou ainda vai dar muito?**

CLE: (acima do último registro feito, registra 60 e abaixo coloca 15. Faz um sinal de menos à esquerda do 15 e fica olhando o registro. Faz um risco diagonal no 6 do 60, leva a canetinha até a testa, fica olhando seu registro, leva a canetinha novamente até o papel e registra 5 acima do 6 e 1 entre o 6 e o 0. Leva novamente a canetinha até a testa, abaixa-a até o papel e faz um traço horizontal abaixo do 15. Aponta o 5 e o 1 da coluna das dezenas e abaixo desta coluna registra 4. Leva a canetinha até a boca e fica olhando seu registro. Embaixo da coluna das unidades registra 5. Olha para E) **deu 45 reais** (leva a canetinha novamente à folha e registra uma vírgula à direita do 45).

E: **isso, mas de onde você tirou o 15?**

CLE: **eu tirei daqui, ó** (aponta o zero do 60) **são 5 dá prá tirar 1, vai dar 5, eu emprestei 1, daí ficou 5.**

E: **ahã, mas por que você fez aqui 60 e tirou 15** (aponta o 60 e o 15).

CLE: (olha para a esquerda, olha para o registro, inclina a cabeça para esquerda, olha para E, sorri) **sabe que eu não sei?**

E: (sorri) **então vamos pensar de novo aqui, ó.** (aponta o registro de 15 + 15 + 15....) **você fez 15 mais 15, mais 15... prá calcular o preço do que? Se cada blusa fosse 15. Mas quantas blusas tem aqui?**

CLE: (Olhando para a folha) **seis.**

E: **mas só que não são 6, são quantas?**

CLE: **cinco.**

E: **cinco, então o que você pode fazer agora para descobrir o preço de 5, não de 6?**

CLE: (olha para a folha, olha para E) **fazendo a conta de novo.**

E: **de novo? Daí quantos que você vai por?**

CLE: (olha para a folha) **quinze.**

E: **quer fazer então?**

CLE: (leva a caneta até o papel).

E: **mas quantos 15?**

CLE: (olha para E) **cinco.**

E: **só 5, né? Então vamos lá.**

CLE: (registra quatro 15, um abaixo do outro, aponta-os e registra mais um 15 e faz um traço horizontal abaixo de tudo).

E: **a gente vê se a blusa custou 15 ou não custou 15.**

CLE: (à esquerda do segundo 15, coloca o sinal + e aponta cada 5 da coluna das unidades enquanto move os lábios. Leva a canetinha até o final da coluna, abaixo do traço, em posição para escrever. Aponta a coluna de 5) **esse aqui vai dar 25.**

E: **tá, quer anotar em algum lugar para você não esquecer?**

CLE: (à direita destes registros, anota 25. Apóia a cabeça sobre a mão esquerda, olha seu registro, aponta a coluna de 5 e murmura) **25** (desencosta a cabeça da mão direita, apoiando-a na direita. Aponta cada um da coluna das unidades e leva a canetinha ao final desta coluna em posição para escrever, leva a canetinha à boca e fica olhando o papel) **aí aqui vai dar... 50...** (aponta a coluna de 1 e olha para E) **você falou que ... hã... cada 1 valia 10, então é 50.**

E: **e você concorda comigo, ou não?**

CLE: (balança a cabeça afirmativamente).

E: **você está falando só porque eu falei, ou você também acha que vale 10?**

CLE: (inclina a cabeça, apoiandO-a na mão direita, olha para a folha e balança a cabeça afirmativamente)

E: **e daí dá quanto tudo?**

CLE: (aponta a coluna de 1 e balança a cabeça negativamente) **num dá** (olha para E).

E: **vai passar ou vai ser pouco?**

CLE: **vai passar.**

E: **vai dar quanto?**

CLE: **vai dar...** (olha para a folha, aponta a coluna de 1 com a canetinha, aponta o registro de 25 e, à esquerda dele, escreve 50. faz um traço horizontal abaixo dos dois números).

E: **ahã, e o que acontece juntando 50 com 25?**

CLE: (leva a canetinha até a boca, coloca-a sobre o papel à direita do 25, leva-a novamente à boca, olha para E) **dá 75 reais.**

E: **daí então pode custar 15 ou não?**

CLE: (olha para E) **pode.**

E: **pode custar 15? Ela levou 5 blusas e gastou só 60. Você disse que 5 blusas daí de 15, vai dar 75. É mais do que ela gastou.**

CLE: (com os dois cotovelos apoiados na mesa tem as duas mãos encostadas nas bochechas, fica olhando para a folha de registros).

E: **o que você acha? A blusa custa mais que 15 ou menos que 15?**

CLE: **menos.**

E: **menos então. Mas é mais que 10. Então você já sabe que é mais que 10 e menos que 15. Agora você tem que tentar outro preço.**

CLE: (fica olhando para a folha com o queixo apoiado na mão esquerda. À esquerda do desenho da blusa, faz 4 traços verticais separados por tracinhos paralelos horizontais. Apóia a cabeça na mão esquerda e puxa a folha um pouco para direita. Olha para a folha) **vou tentar com...treze.**

E: **então tenta, vamos ver.**

CLE: (registra cinco 13 seguidos de vírgula, um abaixo do outro e abaixo faz um traço horizontal. Aponta cada 3 da coluna das unidades e leva a canetinha até o local abaixo desta coluna em posição para escrever. Olha para a coluna acima, aponta) **aqui vai dar 12** (à direita do último 13, registra 12).

E: **12? Tá, como é que você descobriu que são 12?**

CLE: **é que eu contei 6** (aponta os 3 dos dois primeiros 13) **é... mais 6... 12** (aponta os 3 dos dois próximos 13). **Aqui vai dar 14** (faz um traço horizontal abaixo dos 12, risca e registra 14).

E: **por que 14?**

CLE: **porque agora que eu vi... 6 mais 6... 12** (aponta os dois primeiros 3) **daí os outros 3** (olha para E) **vai dar 14.**

E: **12 com 3 dá 14?**

CLE: (olha para seu registro, afasta o corpo para trás, move os lábios, aponta os dois últimos 3, olha para E) **quinze.**

E: **quinze?**

CLE: (anota 15 embaixo do 14 e faz um X sobre o 14, inclina a cabeça para a esquerda, apoiando-a na mão esquerda. Leva a canetinha até o registro e aponta o primeiro 1 da coluna das dezenas e olha para o 15) **eu acho que vai dar 12, dá 12 mesmo.**

E: **12, você acha que é 12?**

CLE: **12 reais.**

E: **então vamos ver se é 12. Por que você acha que é 12? 13, você acha que... o que aconteceu com 13?**

CLE: **deu mais, quer ver?** (aponta cada 1 da coluna das dezenas, aponta o 15, balança a cabeça negativamente, olha para E) **vai dar mais.**

E: **vai passar? Então tenta 12, vamos ver.**

CLE: (registra 11 acima e mais à direita do registro anterior) **vou tentar com 11** (registra mais três 11, um abaixo do outro, aponta todos e registra mais um 11 abaixo do quarto. Aponta cada um, põe o sinal + à esquerda do terceiro 11 e um traço horizontal abaixo de tudo. Aponta cada 1 da coluna das dezenas e abaixo dela registra 5. Leva a canetinha até o primeiro 1 da coluna das unidades, fica com a canetinha sobre ele um tempo, depois aponta cada 1 desta coluna e abaixo dela registra 5. Olha o registro, leva a canetinha até a boca).

E: **é 11?**
CLE: (olha para E, olha para o registro e novamente para E. Tira a canetinha da boca) **é onze** (sorri).
E: **por que? Mas quanto que ela gastou de dinheiro prá...**
CLE: (interrompe) **sessenta.**
E: **então, mas aí ela gasta 60?** (aponta o último registro feito por CLE)
CLE: (olha para a folha).
E: **ou ainda está faltando dinheiro?**
CLE: (olha para E) **tá faltando.**
E: **então será que pode custar 11?**
CLE: (sorri) **acho que é 12!**
E: **será? Vamos ver se 12 vai dar certo.**
CLE: (leva a canetinha até a extremidade direita da folha e registra 12. abaixo dele faz mais 3 registros iguais, aponta cada um e faz mais um 12 abaixo do quarto. Leva a canetinha até a boca, faz um traço horizontal abaixo de tudo e aponta cada 1 da coluna das dezenas. Aponta mais uma vez e outra, movimentando os lábios. Registra 5 abaixo desta coluna. Leva a canetinha até a coluna de 2 e aponta o primeiro 2 da coluna. Em seguida aponta cada 2 desta coluna, movendo os lábios, com o indicador da mão direita na boca. Abaixo desta coluna registra 0. Olha para E).
E: **como é que você fez isso?**
CLE: **contei aqui 2 mais 2, 4** (aponta os dois primeiros 2 da coluna) **aqui vai dar 8** (aponta os próximos dois registros de 2) **nove, dez** (aponta o último 2)
E: **isso, e cadê o 10?**
CLE: (olha para a folha com o indicador da mão direita sobre o zero, leva a canetinha até o 50, risca com um tracinho horizontal e abaixo dele escreve 5. aponta o 50 riscado e, à direita do último 5 registrado, escreve 60. Faz um pequeno traço horizontal abaixo do zero deste 60. olha para E) **vai dar 60.**
E: **ah, e como você descobriu que ia dar 60?**
CLE: (apóia a cabeça na mão esquerda, olhando para a folha) **porque eu fiz agora... vamos ver aqui daí... daí eu ia fazê com... com... 50** (registra 50 na extremidade inferior direita da folha) **mais...** (registra o sinal + à esquerda do 50) **dez** (registra 10 abaixo do 50 e um traço horizontal abaixo dele. Aponta os dois zeros e registra 0 abaixo da coluna das unidades) **daí dá...** (aponta o 5 e o 1 da coluna das dezenas duas vezes e registra 6 abaixo desta coluna) **sessenta** (olha para E com a cabeça apoiada na mão esquerda).
E: **tá, dá sessenta. Deu prá descobrir o preço da blusa já, ou ainda não?**
CLE: (balança a cabeça afirmativamente, olha para a folha, olha para E) **doze.**
E: **como é que você sabe que é 12?**
CLE: **porque eu fiz a conta** (aponta o registro de 12 + 12...)
E:**daí deu certinho?**
CLE: (olha para a folha, balança a cabeça afirmativamente, olha para E) **ahã.**
E: **me diz uma coisa. Quantas vezes você repetiu o 12 aqui?** (aponta).
CLE: (olha para a folha, aponta o primeiro 5, olha para E)
E: **dava prá você fazer uma outra continha que não fosse de mais?**
CLE: (olha para a folha, olha para E, balança a cabeça negativamente, sorri) **não sei!**
E: **não? A tabuada te ajuda alguma coisa aqui pra contar esse 2, 2, 2... será, ou não?** (aponta os 2 dos 12).
CLE: (olha para a folha, move os lábios, olha para E, sorri e balança a cabeça negativamente) **não sei.**
E: **acha que não?**
CLE: (olha para a mão direita, abaixa a cabeça) **acho que não.**

E: **não sabe? Então tá. Então agora mais um. Só o último agora, tá? Esse último é dessa blusa aqui, ó** (entrega a foto a CLE) **tá vendo? Essa camiseta aqui... essas duas, né, que são iguais... só a cor é diferente. Uma pessoa foi lá e comprou 4 que ela ia dar para os sobrinhos dela. Ela tinha 4 sobrinhos, comprou 4 blusas, tá? Ela gastou 42 reais. Quanto custou cada blusa será? Ela comprou 4 agora, não foram 5** (pega uma cartolina em branco e coloca sobre a cartolina usada. Deixa a foto sobre esta cartolina em branco) **foram 4 blusas e ao todo de dinheiro que ela gastou foram 42 reais. Quanto será que pode ter custado cada uma?**

CLE: (fica olhando a foto com a mão direita encostada na testa e a esquerda mexe no queixo. Olha para E) **dez.**

E: **dez? daí o que acontece se dá dez? Quanto que ela gasta se for 10 cada uma?**

CLE: (registra 10 e embaixo outro 10) **quanto que ela comprou?** (continua escrevendo. Registra mais dois 10, um embaixo do outro)

E: **ela comprou 4 blusas e gastou 42 reais.**

CLE: (passa um traço horizontal abaixo do último 10, aponta com a canetinha a coluna de zero - unidades - e abaixo dela registra 0. Leva a canetinha à boca e fica olhando seu registro. Aponta cada 1 da coluna das dezenas, move os lábios e abaixo dela registra 4. Faz um traço horizontal abaixo do 40, olha para E) **dá 40** (coloca a canetinha à frente da boca).

E: **isso, se cada uma custar 10, dá 40. Mas ela não gastou 40, ela gastou 42.**

CLE: (olha para E enquanto ela fala. Depois olha para o encarte) **mas não dá!** (olha novamente para E).

E: **por que não dá?**

CLE: **porque... 40** (olha para a folha) **deixa eu ver... ela paga** (olha para E) **40 cada uma... paga 10** (aponta cada 10 registrado com a tampa da canetinha que segura na mão direita).

E: **isso, se cada uma estivar 10, vai gastar só quanto de dinheiro?**

CLE: **40.**

E: **mas só que ela gastou 42. Então será que a blusa custava mesmo 10?**

CLE: (com a canetinha na boca, olhando para frente) **deixa eu ver com 11** (leva a canetinha até o papel e, à direita do registro anterior, escreve quatro 11, um abaixo do outro e faz um traço horizontal abaixo do último. Aponta cada 1 da coluna das dezenas e escreve 4 abaixo dela. Aponta cada 1 da coluna das unidades, começando do primeiro até o último e repete começando do último até o primeiro. Abaixo desta coluna registra 4. Faz um traço horizontal abaixo do 44 e olha para E).

E: **o que acontece se for 11?**

CLE: (olha seu registro, balança a cabeça negativamente) **não dá!** (olha para E).

E: **o que acontece daí?**

CLE: (olha para a câmera, sorri, olha para baixo) **vai faltá.... faltava dinheiro.**

E: **se for 10 é pouco, se for 11 é muito, e daí?**

CLE: (olha para E, olha para baixo).

E: **tem algum valor que fique entre o 10 e 0 11, ou não?**

CLE: (olha para E) **tem o 9.**

E: **mas o 9 está entre os dois?** (aponta o 10 e o 11 do registro) **Está antes ou está depois?**

CLE: (fica olhando para a folha com os dois cotovelos apoiados sobre a mesa e as duas mãos encostadas nas bochechas. Olha para E, abre as mãos ao lado das bochechas) **tá antes.**

E: **tá antes. E daí, se for 9, o que vai acontecer?**

CLE: (levanta os dois ombros e sorri).

E: **vai ficar 42 será, ou vai ficar menos que 40?**

CLE: (olha par o papel, olha para E) **não sei.**

E: **o que você acha? Ó, se eu juntei quatro 10, deu 40, certo?**

CLE: (balança a cabeça afirmativamente olhando para os registros).

E: **se eu juntar quatro 9, vai dar mais que 40 ou menos que 40, você acha?**

CLE: (olhando para E com a cabeça apoiada na mão esquerda) **não sei** (sorri).
E: **quer tentar?**
CLE: (escreve 09 seguido de vírgula e repete outras duas vezes este registro abaixo do primeiro. Quando vai fazer o quarto registro, escreve 9 no lugar do zero, então faz um zero à esquerda, risca este zero e escreve 0 sobre o 9 feito anteriormente. Registra 9 à direita deste 0 e faz um traço horizontal abaixo de tudo. Aponta a coluna de 0 e registra 0 abaixo dela. Aponta o primeiro 9, move os lábios e leva a canetinha à boca. Fica olhando seu registro e escreve 8 abaixo da coluna de 9. Passa um traço horizontal abaixo do 08) **não vai dar** (olha para E e coloca a mão esquerda no queixo).
E: **por que não dá?**
CLE: **deixa eu ver...** (leva a canetinha até seu registro e aponta o primeiro 9 e olha para os dedos da mão direita novamente. Abaixa um pouco a canetinha e olha novamente para os dedos que movimenta na mão direita. Move os lábios, olha para o registro e desliza a mão mais para baixo na cartolina. Olha novamente para os dedos que movimenta na mão direita, move os lábios, inclina a cabeça para direita, olha seus registros e balança a cabeça negativamente) **não dá.** (olha para E).
E: **por que não?**
CLE: **porque eu contei...** (aponta o primeiro 09) **9 mais 9... vai dá** (coça o queixo com a mão direita, olha para E) **16, deixa eu ver... não!** (olha para os dedos da mão direita que move ao mesmo tempo em que movimenta os lábios. Olha para os dedos da mão esquerda, olha para E) **dezoito.**
E: **dezoito.**
CLE: (olha para o papel) **daí, 18 mais 9...** (olha para a mão direita enquanto movimenta os dedos e os lábios, olha para a mão esquerda) **26** (olha para E)
E: **26?**
CLE: (olha para a folha) **daí mais... aí mais um** (aponta o último 9, olha para os dedos da mão direita e depois para os dedos da mão esquerda, olha para E) **dá 34.**
E : **e daí é pouco dinheiro ou muito?**
CLE: (balança a cabeça para frente) **pouco.**
E: **então, e agora? Quanto será que custaram essas blusas? Quanto você acha que custou?**
CLE: (olha para os registros, balança a cabeça negativamente, olha para E) **não sei!**
E: **9, 10 ou 11?**
CLE: (olha para sua folha).

E: **qual ficou mais perto do dinheiro que ela gastou?**
CLE: (leva a canetinha até a boca, olha para os registros) .
E: **ela gastou 42 para comprar.**
CLE: (aponta o 40, olha para E) **quarenta.**
E: **mas daí, se ela gastou 42 e você viu que cada uma custando 10 ela só gasta 40, o que acontece?**
CLE: (abaixa um pouco a cabeça).
E: **ela levou 42 e pagou 42. O que acontece se daí só deu 40?**
CLE: (com a cabeça apoiada na mão esquerda olhando para E, balança a cabeça negativamente) **não sei!**
E: **faltou dinheiro ou sobrou dinheiro?**
CLE: (balança a cabeça negativamente, sorri) **não sei.**
E: **ela levou 42. Quanto custaram as 4 blusas juntas?**
CLE: (olha para a folha de registros, olha para E) **40.**
E: **então, faltou dinheiro para ela pagar esses 40 ou sobrou?**
CLE: **sobrou.**

E: **sobrou quanto?**
CLE: **sobrou 2 reais.**
E: **e será que esses 2 reais não dá prá... prá... o que você podia fazer com esses 2 reais?**
CLE: (olha para a folha, olha para E, sorri) **guarda de troco.**
E: **guarda de troco?**
CLE: (sorrindo) **é.**
E: **não dá para esta blusa custar mais que 10 então?**
CLE: (balança a cabeça negativamente) **não dá!**
E: **tem certeza?**
CLE: **tenho** (balança a cabeça afirmativamente)
E: então tá, CLE. Jóia, muito obrigada

ANEXO 4

Procedimentos de solução expressos nas notações de CLE (9;8)

Problema 1

\+ 2,10
2,10
2,10
2,10
2,10
2,10 2a

17,0
12,60 2a.1

Problema 2

$$
\begin{array}{r}
+\ 12,60 \\
02,10 \\
\hline
14,80
\end{array}
$$

2a

2b 16,80

2c 18,90

2d 21,00

10

2d

Problema 3

2a

2,10 9,10
2,10 2,10
2,10 2,10
2b 8,40 2,10 2,10
2,10 2,10

18

2a.1.

Problema 4

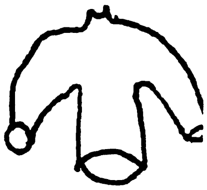
+ 19,
19
19,
19
4a 19, 45
4b
4a.1. 5.3 50 90,
4d
4c

Problema 5

11,
11
+ 11,
11,
11,
55

13,
13,
13,
13,
13,

$\cancel{12}$
$\cancel{14}$
15



10,

15,
+ 15,
15,
15,
15,

50 25

12,
12,
12,
12,
12,
50

15, 15,
15, 15,
15, 64
15,

5
6 10
- 15
45,

5 60

60 50
+ 30 + 10
90 60

Problema 6