UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALINE DA SILVA DIAS

DO CÉU DE PLATÃO AO MUNDO DAS FICÇÕES: PLATONISMO E ANTI-PLATONISMO NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

CURITIBA

2022

ALINE DA SILVA DIAS

DO CÉU DE PLATÃO AO MUNDO DAS FICÇÕES: PLATONISMO E ANTI-PLATONISMO NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Departamento de Filosofia, Setor de Ciências Humanas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Berlendis de Figueiredo

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS HUMANAS

Dias, Aline da Silva
Do céu de Platão ao mundo das ficções: platonismo e anti-platonismo na filosofia da matemática / Aline da Silva Dias. – Curitiba, 2022.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Berlendis de Figueiredo.

1. Platonismo. 2. Antiplatonismo. 3. Filosofia da matemática. I. Figueiredo, Vinícius Berlendis de. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

Bibliotecária: Romilda Aparecida dos Santos CRB-9/1214

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FILOSOFIA -
40001016039P7

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FILOSOFIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **ALINE DA SILVA DIAS** intitulada: **Do céu de Platão ao mundo das ficções: platonismo e anti-platonismo na filosofia da matemática**, sob orientação do Prof. Dr. VINICIUS BERLENDIS DE FIGUEIREDO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 10 de Agosto de 2022.

Assinatura Eletrônica
10/08/2022 17:58:31.0
VINICIUS BERLENDIS DE FIGUEIREDO
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
10/08/2022 18:39:49.0
VIVIANNE DE CASTILHO MOREIRA
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
12/08/2022 12:37:07.0
EMILIANO BOCCARDI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA)

Assinatura Eletrônica
11/08/2022 09:49:54.0
MARCO ANTÔNIO CARON RUFFINO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS)

Assinatura Eletrônica
10/08/2022 21:43:55.0
TIAGO FONSECA FALKENBACH
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Aos meus pais Arthur e Arvelina, in memoriam.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Alexandre Noronha Machado, pela orientação da maior parte deste trabalho e pela paciência ao longo de todo o tempo de realização dessa empreitada. Ao Professor Doutor Vinícius Berlendis de Figueiredo, por orientar na finalização e pelo apoio para o término da tese.

Agradeço aos professores do Departamento de Filosofia da UFPR, em especial àqueles que participaram da minha banca: à Professora Doutora Vivianne de Castilho Moreira, pelos ótimos apontamentos que auxiliaram na melhoria do texto e ao Professor Doutor Tiago Fonseca Falkenback, pela confiança em meu trabalho e pelo apoio em todos os momentos durante a execução deste. Fica também meu agradecimento aos professores externos que participaram da defesa: ao Professor Doutor Marco Ruffino (UNICAMP), pelas excelentes conversas e contribuições feitas ao longo do processo de escrita e ao Professor Doutor Emiliano Boccardi (UFBA), pelo incentivo constante e pela inspiração à pesquisa filosófica, que foram essenciais para a conclusão do trabalho.

Meu especial agradecimento aos amigos que estiveram presentes tanto nas discussões filosóficas quanto nos momentos de descontração (e algumas vezes de ansiedades), garantindo que o caminho fosse o mais agradável, produtivo e divertido possível. Aos queridos: Luiz Francisco Lavanholi, Felipe Miranda, Rafael Viana Leite, Max Costa, Rafael Ribeiro Silva, Renato Cani, Luana Oliveira e Daniel Tozzini.

Por fim, agradeço pela bolsa recebida da CAPES, pois me possibilitou a dedicação exclusiva a este trabalho.

RESUMO

O tema dessa tese é o debate entre realismo e anti-realismo na filosofia da matemática. Mais especificamente, procuraremos tratar da disputa entre platonismo e anti-platonismo matemático. O platonismo matemático é a concepção que afirma que existem objetos matemáticos abstratos, não espaço-temporais, não-causais e independentes de nossa existência. Atualmente, o principal argumento utilizado para dar suporte à concepção platonista na matemática é o chamado “argumento da indispensabilidade Quine-Putnam”. Em linhas gerais, esse argumento diz que: uma vez que as teorias matemáticas se comprometem com a existência de entidades matemáticas abstratas e que a matemática é indispensável para as melhores teorias da ciência natural, então devemos aceitar a existência das entidades matemáticas abstratas. Apesar de ser semântica e metafisicamente promissor, o platonismo enfrenta alguns sérios problemas, entre eles o de explicar como, e se, é possível conhecermos essas entidades matemáticas abstratas, já que aparentemente não temos qualquer tipo de acesso a elas. Tais problemas acabaram por motivar o desenvolvimento de concepções alternativas anti-platonistas que negam a existência de entidades matemáticas e conseguem, desse modo, evitar o problema epistemológico enfrentado pelo platonismo. No entanto, o anti-platonista precisa contornar o argumento da indispensabilidade e explicar a aplicabilidade da matemática. Diante desse cenário, com essa pesquisa procuraremos apresentar e avaliar as concepções platonista e a anti-platonista na matemática. Com isso pretendemos mostrar que o nominalismo deflacionário, que é uma concepção anti-platonista, parece ser a opção mais adequada ou, pelo menos, a que apresenta menos problemas quando lidamos com as questões fundamentais da filosofia da matemática.

Palavras-chave: platonismo matemático; anti-platonismo matemático; argumento da indispensabilidade.

ABSTRACT

The theme of this thesis is the debate between realism and anti-realism in the philosophy of mathematics. More specifically, we will try to deal with the dispute between Platonism and anti-Platonism in mathematics. Mathematical Platonism is the view that there are abstract mathematical objects, non-space-time, non-causal and independent of our existence. Currently, the main argument used to support the Platonist conception in mathematics is the so-called “Quine-Putnam indispensability argument”. Broadly speaking, this argument says that: since mathematical theories are committed to the existence of abstract mathematical entities and that mathematics is indispensable to the best theories of natural science, that is, such theories are only true if mathematics is true, we must accept the existence of abstract mathematical entities. Despite being semantically and metaphysically promising, Platonism faces some serious problems, including explaining how, and if, it is possible for us to know these abstract mathematical entities, since apparently we do not have any kind of access to them. Such problems ended up motivating the development of alternative anti-Platonist conceptions that deny the existence of mathematical entities and manage, in this way, to avoid the epistemological problem faced by Platonism. However, the anti-platonist needs to sidestep the indispensability argument and explain the applicability of mathematics. Given this scenario, with this research we will try to present and evaluate the Platonist and anti-Platonist conceptions in mathematics. With this we intend to show that deflationary nominalism, which is an anti-Platonist conception, seems to be the most adequate option or, at least, the one that presents the least problems when dealing with the fundamental questions of the philosophy of mathematics.

Key words: platonismo; anti-platonism; indispensability argument.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desta tese é apresentar o debate entre platonismo e anti-platonismo na filosofia da matemática. Esperamos com este trabalho esclarecer as implicações de se aceitar uma ou outra das posições em disputa para explicar tanto a ontologia quanto a epistemologia matemática e, diante dos resultados, verificar em que medida seremos melhor sucedidos ao explicar tais questões adotando uma postura anti-platonista conhecida como nominalismo deflacionista, subscrevendo-a com algumas modificações. Há mais a ser dito do que aquilo que se encontra nesta tese, visto a extensão do tema. Contudo, como é um debate bastante rico e ainda incipiente no Brasil, acreditamos que isso justifica a importância de oferecer ao menos uma introdução a ele.

Antes de entrarmos nas questões que formam o pano de fundo desta pesquisa, comecemos com uma breve incursão por algumas intuições básicas a respeito do tema. Comumente a matemática é vista como uma ciência que possui como características essenciais a objetividade, a universalidade, a necessidade e a aprioridade. A soma 2+2, por exemplo, vai ter necessariamente como resultado o número 4, independente do tempo, da cultura, das crenças e de qualquer outra influência do sujeito. Essa característica aparentemente é garantida pelo fato de ela ser justificada *a priori*, bem como por ela lidar com objetos que parecem ser independentes de nossa mente, da nossa linguagem e do mundo físico que nos cerca (e que pode ser destruído, fato que não ocorre com as entidades matemáticas). Descritos desse modo, esses objetos da matemática são o que ficou tradicionalmente conhecido nessa área como “objeto abstrato”. Os objetos matemáticos – tais como números, conjuntos, funções, objetos geométricos, etc. – seriam, portanto, objetos abstratos que existiriam fora espaço-tempo, que não possuiriam qualquer poder causal, seriam imutáveis e teriam uma existência independente da nossa, ou seja, seriam objetivos (embora não concretos/físicos). Isso porque, se destruirmos todas as coisas triangulares, ainda assim poderemos fazer ciência sobre o triângulo. Logo, tais objetos matemáticos possuem uma existência independente da nossa e dos objetos físicos que representam. Tal concepção é conhecida como realismo em ontologia. O realismo em ontologia vem acompanhado de – e é reforçado por – outro tipo de realismo, a saber, o semântico (ou sobre o valor de verdade). A ideia por trás do realismo semântico[1] é que os termos singulares da linguagem se referem a objetos, de modo que estes compõem os *truthmakers*[2] dos enunciados; e que cada sentença bem formada e significativa possui um valor de verdade já determinado, valor este que é também independe de nossa mente, linguagem e práticas. Ao aplicarmos essa teoria semântica aos enunciados matemáticos, temos que a referência a objetos é condição fundamental para que a linguagem matemática seja significativa e verdadeira. Conjugados esses dois tipos de realismo, poderia ser estabelecido que: (i) objetos matemáticos existem; (ii) estes objetos são abstratos; e (iii) o valor de verdade dos enunciados é garantido pela existência desses objetos.

Contudo, ainda que essa ideia disponha de uma força intuitiva, é válido perguntar se devemos de fato aceitá-la, uma vez que tais objetos não estariam no mundo físico, empírico e nem possuiriam qualquer interação causal com ele. Em teorias das ciências naturais é comum que seja aceita a existência de certas entidades que não são diretamente perceptíveis por nós, isto é, que não podem ser diretamente passíveis de verificação empírica. Em geral, filósofos realistas com relação à ciência defendem que a aceitação de sua existência postulada pelas teorias científicas serve para explicar muitos fenômenos que

[1] O realismo semântico tem por pano de fundo a teoria correspondentista da verdade. Essa teoria deriva da definição de Aristóteles de “dizer do que é que ele é, ou dizer do que não é que não é, é a verdade”. De acordo com isso, considerando um enunciado (ou proposição) X, se dizemos que “X é verdadeiro”, isso significa que X corresponde a um fato no mundo. Usando um exemplo clássico, se dizemos que “a neve é branca”, esse enunciado será verdadeiro se e somente se houver o fato de que a neve é branca; ou seja, há uma correspondência entre fatos e enunciados que torna estes verdadeiros.

[2] *Truthmaker*, ou literalmente “fazedor de verdade”, é aquilo que, uma vez existindo, torna os enunciados verdadeiros.

são diretamente verificáveis[3]. Na matemática, no entanto, talvez não possamos dizer tão rapidamente que o mesmo ocorre com relação aos objetos abstratos, dadas as suas características essenciais. Uma vez que na matemática se trabalharia com esses objetos que não possuem qualquer interação causal com o mundo físico, não podemos dizer que há quaisquer "fenômenos" observáveis causadas por entidades matemáticas e que sua existência fosse diretamente verificável.

Costuma-se afirmar que a aceitação da existência desses objetos se dá porque os encargos de explicar algumas coisas sobre esses objetos são menores do que explicar a natureza da matemática – e sua aplicação tanto na ciência quanto na vida prática – sem postular a existência deles (COLE, 2010). Isso porque ao explicarmos a natureza da matemática como o estudo de entidades reais e da descoberta das propriedades e relações entre essas entidades, conseguiríamos mais facilmente compreender porque ela é objetiva, necessária e universal. Não obstante, por mais que seja aparentemente considerado muito mais problemático negar a existência desses objetos, afirmar que eles existem nos conduz a uma série de questões que tampouco são de fácil resposta, pois, se a matemática realmente lida com objetos abstratos, como podemos adquirir conhecimento dessas entidades[4]? Como explicar que entidades que estão fora do espaço e do tempo, por conseguinte, não possuem quaisquer poderes causais, ainda assim sejam capazes de ter uma aplicação tão eficiente nas ciências? E mais, se tais entidades existem, como podemos saber quais enunciados descrevem verdadeiramente o reino desses objetos e quais não o fazem? Essas questões epistêmicas, conjuntamente com questões metafísicas e

[3] Mesmo na filosofia da ciência natural há um amplo debate a respeito de quais entidades devem ser aceitas e de que forma elas devem ser aceitas. Como o debate entre realismo e antirrealismo na ciência em geral não está no escopo de nosso trabalho, não entraremos nessa discussão. O ponto aqui é apenas ressaltar que alguns realistas afirmam que a justificativa para a postulação de entidades teóricas na ciência natural é o fato de que elas desempenham papéis explicativos causais relevantes, argumento que parece não poder ser aplicado com relação à matemática (ao menos não diretamente), porque suas entidades são causalmente inertes.

[4] Os termos "entidade" e "objeto" serão usados de modo intercambiável no texto.

semânticas, constituem as preocupações centrais do ramo atualmente conhecido como "filosofia da matemática"[5]. Elas, então, podem ser organizadas em três categorias ou áreas fundamentais que dizem respeito a: i) sua ontologia: sobre se existem e o que são as entidades estudadas pela matemática, se estas são abstratas ou não, etc.; ii) sua epistemologia: como podemos conhecer essas entidades, principalmente se estas forem de fato abstratas; e iii) sua semântica: como os enunciados matemáticos se tornam verdadeiros (ou falsos)? Seria por meio de uma referência a qualquer entidade ou de algum outro modo?[6]

Tais questões estão presentes em toda a história da filosofia[7], mas foi principalmente a partir do fim do século XIX que elas começaram a receber maior destaque, tornando-se a nova agenda da filosofia da matemática[8]. Isso porque, ao ser considerada do modo explicitado acima, a matemática foi por muito tempo vista por uma perspectiva predominantemente platonista, como por Frege. O platonismo em matemática é a corrente que sustenta os dois tipos de realismo descritos acima – o semântico e o ontológico –, ou seja, que objetos matemáticos existem, são abstratos e que os enunciados da matemática adquirem seu valor de verdade por descreverem propriedades e relações entre esses objetos. Mas, devido a uma série de problemas relacionados à explicação platonista sobre esses objetos, essa corrente acabou sendo mais e mais desafiada. Diante de problemas levantados por Paul Benacerraf em dois de seus artigos (1965; 1973) – que dizem respeito

---

[5] Cf. SHAPIRO (1997).

[6] Há uma crescente discussão a respeito da prática matemática, que está ganhando cada vez mais destaque nessa área da filosofia. Essa discussão não diz mais tanto respeito à existência de objetos matemáticos, mas se concentra mais na tentativa de "fornecer uma interpretação e explicação adequadas da teoria e da prática matemática" (BALAGUER, 1998, p. 3). Abordaremos esse novo debate na parte final da tese, onde discutimos a proposta nominalista de Jody Azzouni, dado seu apelo à prática matemática.

[7] Já encontramos uma discussão sobre a natureza e o modo de conhecimento da matemática em Platão e Aristóteles, além de toda a abordagem a respeito do tema em autores modernos como Newton, Descartes, os empiristas, Kant, Mill, entre outros.

[8] Frege, Hilbert, Brower, entre outros.

principalmente ao acesso às entidades abstratas e ao conhecimento das mesmas, as teorias platonistas tiveram seu alicerce abalado. No primeiro artigo, intitulado What Numbers Could Not Be (1965), Benacerraf apresenta o chamado "problema da identificação", relacionado à ontologia platonista. Desde o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, é bem aceito que a aritmética pode ser modelada ou reduzida a essa teoria. Em vez de inflar a matemática com vários tipos de objetos – números, pontos, funções, conjuntos, etc. – é bastante promissor apelar apenas a um tipo de entidade capaz de cumprir sozinha a função das demais. Sendo assim, se números naturais são objetos matemáticos, tal como sustentam os realistas, e se todos os objetos da matemática são conjuntos, então haveria apenas um único conjunto que corresponderia ao conjunto dos números naturais, pois, de acordo com o realista, as teorias matemáticas se referem a coleções únicas de objetos abstratos. Contudo, não há apenas uma redução da aritmética à teoria dos conjuntos. O exemplo explorado por Benacerraf é o das reduções oferecidas por Zermelo e por von Neumann. Tanto um quanto o outro identificam o 0 com o conjunto vazio. Mas, enquanto Zermelo procede identificando *n+1* com o *{n}*, para von Neumann, *n+1* é identificado com *n U {n}*. Temos, pois, duas sequências distintas que representariam a mesma sequência de números naturais, isto é, tanto a sequência de von Neumann quanto a de Zermelo se propõem a fazer referência à sequência dos números naturais. Contudo, o número 3, por exemplo, para von Neumann seria *o {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}*, enquanto que para Zermelo seria *{{{Ø}}}*.[9] Para von Neumann, o conjunto que representa o número 3 é uma união de outros conjuntos. Para Zermelo, o conjunto 3 é composto de apenas um elemento. A partir disso, Benacerraf pergunta: qual conjunto *é* o número 3? Qual sequência representa corretamente a sequência dos números naturais? Ele argumenta, então, que não há razões, a não ser arbitrárias, para escolhermos uma ou outra dessas sequências. De fato, há muitas

[9] Trataremos deste exemplo em mais detalhes no capítulo 1.

outras sequências que poderiam representar adequadamente a série dos números naturais, de modo que não há qualquer aspecto singular a uma dessas sequências que seja capaz de a distinguir como a sequência correta dos números naturais. Benacerraf conclui, a partir desse raciocínio, que números não podem ser objetos no sentido proposto pelo platonista[10].

Além desse, há ainda outro problema apresentado por Benacerraf em seu artigo intitulado Mathematical Truth (1973). Nesse artigo, ele discute questões referentes à epistemologia e à semântica matemática, que ficaram conhecidas como o "dilema de Benacerraf". Em linhas gerais, o dilema pode ser assim apresentado: as teorias da verdade matemática são tratadas de tal modo que ou oferecem uma boa explicação epistemológica sobre seu objeto, ou oferecem uma boa explicação semântica dele. Em nenhum caso, contudo, a teoria oferece uma boa explicação dos dois aspectos conjuntamente. Consideremos, primeiro, a questão semântica.

Segundo Benacerraf, uma boa teoria da verdade matemática deve estabelecer uma semântica uniforme para os enunciados da matemática e da linguagem ordinária (ou ao menos da linguagem científica). Isso significa que os enunciados matemáticos devem ter os mesmos tipos de condições de verdade dos enunciados que representam propriedades e relações, são verdadeiros quando as entidades apresentam tais relações comuns e devem também ser tomado pelo seu valor de face (*at face value*). Sendo assim, um enunciado do tipo "2 é um número primo" deve possuir o mesmo tipo de condições de verdade de enunciados do tipo "a grama é verde". Um pressuposto disso é que os matemáticos dão significado aos seus enunciados e os consideram verdadeiros ou falsos. Levando em conta que a linguagem matemática interage com a linguagem científica e ordinária, de modo que fazemos inferências nas ciências naturais e na vida diária utilizando

[10] Tanto este quanto os outros dois problemas de Benacerraf serão tratados com mais detalhes no capítulo 1.

enunciados matemáticos, não seria adequado possuir uma explicação semântica diferente para cada uma dessas linguagens. Contudo, o modelo de semântica comumente adotado, por exemplo por Gödel, é o chamado ‘modelo tarskiano’, que, de acordo com Benacerraf, possui fortes raízes realistas, no sentido em que os termos singulares se referem a objetos e que o valor de verdade das asserções é dado por conta dessa referência. Sendo assim, a semântica tarskiana está comprometida com a existência de objetos. Aplicada à linguagem da matemática, reforça a tese platonista. Mas, até esse ponto, essa é a vantagem do platonismo, pois ele oferece essa semântica uniforme para o discurso matemático e o não matemático.

Contudo, o resultado disso é a afirmação de que existem objetos matemáticos abstratos, que são objetos causalmente inertes, não espaço-temporais, etc. Uma vez que é preciso estabelecer a verdade de enunciados matemáticos por referência a esses objetos, fica-se com a tarefa de oferecer uma boa explicação epistemológica a respeito deles, tarefa que acaba sendo a mais complicada para o platonista. Isso porque há uma grande dificuldade por parte do platonista de explicar como é possível termos qualquer conhecimento matemático, uma vez que os objetos dos quais estaríamos tratando seriam abstratos e, portanto, causalmente inertes. Como podemos saber qualquer coisa a respeito desses objetos? Como podemos estabelecer a existência de objetos que são não-causais? Como falar disso? Como os matemáticos podem falar tão livremente sobre as relações entre esses objetos que estão fora do nosso campo epistêmico? Como podemos confiar no que eles dizem sobre essas entidades? Para responder a essas questões, seria preciso que houvesse algum tipo de acesso a esses objetos, mas como explicar tal acesso a um reino abstrato e causalmente inerte? Esse seria o problema fundamental para o platonista.

Benacerraf argumenta, então, que posturas antirrealistas – que negam a existência de entidades matemáticas abstratas – conseguem lidar de modo mais adequado com a questão epistemológica, visto que não apelam a qualquer entidade fora de nosso campo perceptivo. Porém, estas falham na parte semântica, por não conseguirem estabelecer uma explicação uniforme para os discursos matemáticos e os científicos e ordinários.

Esses problemas levantados por Benacerraf tornaram mais intensos os debates em filosofia da matemática, motivando o desenvolvimento de teorias filosóficas que não estivessem comprometidas com teses platonistas, levando ao surgimento de várias correntes anti-platonistas em matemática. O anti-platonismo é a corrente que defende que objetos matemáticos não existem ou que, se existem, não são abstratos. Alguns exemplos de anti-platonismo são o fisicalismo, o psicologismo e o nominalismo[11], que se propõem a explicar a matemática sem recorrer a um reino de entidades abstratas. Tal fato forçou os platonistas a buscarem argumentos mais sólidos para sustentar sua posição. Nesse sentido, um dos argumentos mais importantes formulado a favor do platonismo é o da indispensabilidade da matemática, que vem desafiando os anti-platonistas desde sua ainda vaga formulação nos textos de Quine e Putnam. Em linhas gerais, o chamado “argumento da indispensabilidade de Quine-Putnam” enuncia que devemos nos comprometer ontologicamente com entidades matemáticas abstratas, pois estas são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas naturais (porque elas somente são verdadeiras se a matemática for verdadeira e a matemática tem compromisso ontológico com entidades abstratas). A fim de sustentar sua posição, os anti-platonistas precisam lidar com esse argumento refutando-o ou dissociando a indispensabilidade do comprometimento ontológico com entidades abstratas. Nesse segundo caso, o anti-platonista deve também levar em consideração o problema semântico levantado por Benacerraf.

Diante do panorama apresentado, esta tese busca reconstruir criticamente alguns dos pontos principais desse debate entre platonistas e anti-platonistas em matemática, com

[11] O fisicalismo sustenta que a matemática trata de entidades físicas e seria uma espécie de abstração destas; o psicologismo sustenta que entidades matemáticas são mentais e o nominalismo sustenta que entidades matemáticas não existem. Apesar de serem correntes anti-platonistas, o fisicalismo e o psicologismo podem, em certo sentido, ser consideradas posições realistas. Das três correntes, somente o nominalismo é visto como indiscutivelmente anti-realista. Cf. BALAGUER, 2009, para mais detalhes sobre essa distinção.

o objetivo de situar e defender uma versão do nominalismo deflacionista derivado dos escritos de Jody Azzouni (2004; 2010), a qual acreditamos ser a mais adequada para responder às principais questões da agenda da filosofia da matemática. Sendo assim, o trabalho será dividido da seguinte maneira: no primeiro capítulo abordaremos e discutiremos a concepção platonista. Na primeira parte do capítulo, começaremos oferecendo uma definição mais detalhada dessa concepção, bem como explicitando suas raízes históricas. Passaremos, então, na segunda parte, ao argumento fregeano em favor da existência de objetos matemáticos abstratos, argumento este que sustentou o platonismo por um longo tempo. Na parte 3, apresentaremos o problema ontológico e o dilema de Benacerraf (1965; 1973), que nortearam as discussões entre platonistas e anti-platonistas. Na parte 4, abordaremos e discutiremos as concepções platonistas que tentaram resolver os problemas de Benacerraf. Iremos nos concentrar nas posições que são consideradas as mais relevantes no debate. Estas são: (i) o platonismo de Gödel, que sustenta um conhecimento das entidades matemáticas abstratas sem um contato direto com elas, por meio de uma "intuição matemática"; (ii) o platonismo de Quine, que sustenta um conhecimento sem contato, que apela a um naturalismo e a um holismo confirmacional[12]; (iii) o platonismo naturalizado de Penelope Maddy, que sustenta um conhecimento por meio de certo contato com tais entidades, uma quase-percepção; (iv) o estruturalismo de Parsons, Resnik e Shapiro, que abandonam a ideia de objetos matemáticos, mas tentam explicar a matemática como uma ciência da estrutura[13]; e, por fim, (v) o platonismo pleno de Mark Balaguer. Nessa parte do trabalho discutiremos também o já citado "argumento da indispensabilidade Quine-Putnam", uma vez que este serve de

[12] Em linhas gerais, o holismo confirmacional é a ideia de que parte de uma teoria pode ser comprovada por meio da comprovação do todo da teoria.

[13] A ideia central do estruturalismo é que a matemática não lida com objetos, mas sim com a estrutura das relações entre esses objetos. Por exemplo, a aritmética não trataria de números naturais, mas sim da estrutura da sequência dos números naturais.

base para grande parte dessas posições platonistas. Procuraremos apresentar essas posições seguidas pelas críticas a cada uma delas, com o intuito de mostrar que nenhuma oferece uma resposta que dê conta tanto do problema ontológico, quanto dos problemas epistemológico e semântico. Acreditamos que é fundamental a uma boa postura em filosofia da matemática oferecer uma resposta satisfatória a esses três problemas conjuntamente.

No segundo capítulo, passamos para a apresentação das concepções anti-platonistas em matemática. Como já dito acima, o anti-platonista afirma que não existem objetos matemáticos abstratos. Mas, para sustentar essa visão, é preciso que ele dê conta de lidar com o argumento da indispensabilidade que, também já dito, é visto como o melhor argumento em favor do platonismo matemático. Em geral, os anti-platonistas lidam com esse argumento de duas maneiras. Alguns procuram refutar o argumento afirmando que a matemática não é indispensável às ciências empíricas, como é o caso do ficcionalismo matemático sustentado por Hartry Field e Mark Balaguer e do estruturalismo modal de Hellman. Para isso, eles procuram nominalizar teorias científicas para mostrar que é possível fazer ciência sem se comprometer com a existência de entidades matemáticas abstratas. Outros tentam lidar com o argumento de uma maneira mais amigável, afirmando que é possível aceitar a indispensabilidade da matemática sem que isso implique necessariamente um compromisso ontológico, como é o caso do nominalismo deflacionista de Jody Azzouni. Tendo tudo isso em vista, o capítulo dois é dividido da seguinte maneira: na primeira parte apresentamos as concepções anti-platonistas que seguiram o caminho mais difícil para o nominalismo e tentaram reformular o discurso matemático-científico a fim de evitar referência a entidades abstratas. São esses: o ficcionalismo de Field, o ficcionalismo de Balaguer e o estruturalismo modal de Hellman. Apresentamos também as objeções levantadas a cada uma delas. Na segunda parte abordamos a concepção que seguiu o chamado “caminho mais fácil” para o nominalismo e aceita a indispensabilidade, buscando apenas mostrar que ela não implica compromisso ontológico. Essa concepção é conhecida como “nominalismo deflacionista” e é defendida por Jody Azzouni. Ao final do capítulo, expomos as objeções feitas a ela.

Em seguida, retomaremos a concepção nominalista de Azzouni, com vistas a analisá-la com mais cuidado, uma vez que a consideramos como o melhor caminho para responder aos problemas em filosofia da matemática. Levando em conta as objeções suscitadas contra essa postura, tentaremos mostrar que, com algumas devidas alterações, não é apenas perfeitamente possível sustentar um nominalismo no sentido proposto por Azzouni, como esta é a postura mais aceitável (ou menos problemática) a ser defendida em filosofia da matemática.

2. PLATONISMO MATEMÁTICO: UMA INCURSÃO PELO CÉU PLATÔNICO

Neste capítulo apresentaremos e discutiremos as diversas posições platonistas em matemática. Começaremos com uma definição de platonismo, esboçando as origens dessa concepção. Em seguida, passaremos aos argumentos que a sustentaram e aos principais problemas levantados contra ela, a saber, o problema ontológico, semântico e o epistemológico. Por fim, apresentaremos algumas das mais influentes tentativas de resposta a esses problemas e as razões pelas quais acreditamos que nenhuma delas consegue efetivamente oferecer uma explicação que contemple de modo adequado a ontologia, a semântica e a epistemologia.

2.1. Platonismo Matemático:

O platonismo matemático, tal como é debatido atualmente, é uma concepção primariamente metafísica que sustenta três principais teses: (i) objetos matemáticos existem[14]; (ii) esses objetos são abstratos; (iii) esses objetos existem independentemente de nossa mente e linguagem. Assim, o número 2, por exemplo, existe objetivamente tal como árvores e pedras, mas sua existência ocorre fora do espaço-tempo, independente de nossas atividades mentais e físicas. O platonista é, portanto, um realista em ontologia.[15]

Além disso, o platonista geralmente também é um realista semântico, ou seja, de

---

[14] O que conta como objeto matemático depende da teoria matemática envolvida, mas em geral podemos considerar como objetos os números, conjuntos, funções, estruturas, etc.

[15] Apesar de o platonismo ser um realismo, nem todo realismo é um platonismo. O platonismo matemático é o realismo que afirma que há objetos matemáticos abstratos. Contudo, há outros tipos de realismo em matemática que não sustentam essa tese e atribuem outro tipo de natureza (que não a abstrata) aos objetos matemáticos. O fisicalismo pode, em certa medida, ser visto como um desses tipos de realismo não platonista, pois sustenta a existência de objetos matemáticos que são abstrações (ou generalizações) de objetos físicos, embora essa abstração não seja no sentido platonista.

acordo com defensores dessa concepção, os termos singulares da matemática se referem a objetos, e isso é que torna verdadeiros (ou falsos) nossos enunciados matemáticos. Sendo assim, as teorias matemáticas são descrições (verdadeiras) de um reino de entidades que realmente existem. Analogamente ao que acontece no discurso ordinário, ou mesmo em discursos científicos não matemáticos, nos quais são feitas afirmações sobre objetos – como em, por exemplo, "a grama é verde" - na matemática também são feitas afirmações sobre objetos – como em "2 é um número primo". Nos dois casos há uma referência a – uma descrição verdadeira de – um objeto, com a diferença residindo no fato de que no primeiro caso o objeto em questão é um objeto físico (a grama), enquanto que, no segundo caso, ele é abstrato (o número 2). A linguagem matemática, assim, refere-se diretamente a – ou quantifica[16] sobre – objetos matemáticos abstratos como números, conjuntos, funções, etc.; entendidos como entidades que não estão localizadas no espaço nem no tempo, não sendo possível verificarmos sua existência por meio de nossa percepção sensível (PARSONS, 2008, pgs. 1-2). Além disso, esses objetos quantificados no discurso matemático não possuem poderes causais, são eternos, imutáveis e necessariamente existentes, existiriam ainda que não existíssemos (COLE, 2010).

Essa concepção platonista pode ser encontrada em alguns dos trabalhos de Gottlob Frege, Kurt Gödel, Willard Quine, Hilary Putnam, entre outros. Existem algumas diferenças entre o tipo de platonismo adotado por Frege e Gödel, por exemplo, e aquele adotado por Quine e Putnam. Contudo, as linhas gerais da concepção, tal como enunciadas acima, podem, com poucas modificações, ser aceitas por todos eles. Veremos em seguida em mais detalhes cada uma dessas concepções. Mas comecemos com algumas considerações históricas.

---

[16] A ideia de quantificação é de extrema importância no estabelecimento da ontologia platonista, tal como expressa o famoso lema de Quine: "Ser é ser o valor de uma variável ligada" (QUINE, 1948).

2.1.1. Raízes históricas:

A concepção platonista em matemática, embora carregue esse nome de "platonismo", pouco nos remete à concepção histórica de Platão. Dificilmente encontraremos qualquer referência direta às obras desse filósofo no debate contemporâneo. Essa concepção recebe esse nome unicamente porque se inspira na teoria das formas eternas e abstratas de Platão, mas a discussão ganhou novos contornos na atualidade. Ela se tornou uma postura predominantemente metafísica, não tendo tanta carga epistemológica quanto o platonismo histórico. Platão propõe uma ontologia, porém se concentra mais no aspecto epistemológico. Ele se mostra mais interessado na justificação da verdade matemática[17], em como nós aprendemos teoremas geométricos, e se é diferente do modo como aprendemos verdades empíricas. Para ele, aprendemos sobre as verdades empíricas pelo uso dos nossos sentidos ao entrarmos em contato com o mundo físico, mas as verdades matemáticas parecem não depender desse contato. Não encontramos no mundo físico figuras geométricas perfeitas, linhas completamente retas, pontos, etc. Os objetos físicos que possuem essas formas são imperfeitos. Como os teoremas geométricos são objetivamente verdadeiros ou falsos, são universais e necessários, então esses teoremas não podem ser derivados a partir disso que é imperfeito. Logo, os objetos dos quais o geômetra trata fazem parte do mundo do Ser e não do mundo físico. Nesse sentido, eles são eternos e, portanto, imutáveis, uma vez que a mudança depende da passagem do tempo.

Sendo assim, para ele, a geometria "tem por objeto o conhecimento do que existe sempre, e não do que nasce e perece" (PLATÃO, A República, Livro VII), o que difere dos objetos físicos, que podem se corromper. A matemática visa, então, o imutável, eterno e

[17] Platão trata apenas da geometria. Então, quando falamos de "matemática" para Platão, esta diz respeito apenas a esse ramo da geometria.

abstrato reino das Ideias. Mas como obtemos o conhecimento desses objetos? A resposta de Platão é que o conhecimento matemático advém do contato prévio da alma com o reino das Ideias e a apreensão desse conhecimento se dá por meio da reminiscência desse contato[18]. Desse modo, Platão parte de uma ontologia para explicar a epistemologia. Já o platonista matemático contemporâneo estabelece a ontologia sem uma pretensão inicialmente epistêmica.

Na filosofia da matemática contemporânea, o primeiro a utilizar o termo "platonismo" para caracterizar a postura metafísica na matemática foi Paul Bernays em seu artigo On Platonism in Mathematics (1983). A discussão de Bernays nesse artigo diz respeito à "crise dos fundamentos" da matemática[19], debate no qual não entraremos. O que nos interessa é apenas o início do texto, no qual ele discorre sobre o modo de raciocínio dos filósofos contemporâneos da matemática quando tratam de seus temas (da teoria dos conjuntos, por exemplo). De acordo com ele, o filósofo da matemática parte de uma visão de que os objetos de sua teoria realmente existem como "elementos de uma totalidade" de modo que:

> Para cada propriedade que pode ser expressa usando as noções de uma teoria, é [um fato] objetivamente determinado se há ou não há um elemento da totalidade que possui essa propriedade. De modo semelhante: segue-se desse ponto de vista que ou todos os elementos de um conjunto possuem uma dada propriedade, ou há ao menos um elemento que não a possui. (BERNAYS, 1983, p. 258)

---

[18] Não entraremos aqui na discussão a respeito da filosofia de Platão, pois esta não faz parte do escopo deste trabalho.

[19] No fim do séc. XIX, principalmente com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, começam a aparecer alguns projetos fundacionistas em filosofia da matemática, em uma tentativa de oferecer as bases da matemática. Contudo, diante do surgimento de paradoxos como o de Burali-Forti, dirigido à teoria dos ordinais transfinitos de Cantor, e o paradoxo de Russell, que visava a teoria dos conjuntos de Frege, teve origem o que ficou conhecida como "crise nos fundamentos da matemática". Tal crise teve como resultado o desenvolvimento de três principais correntes fundacionistas em filosofia da matemática: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. Contudo, a discussão fundacionista perdeu forças quando o foco passou da questão do fundamento para a busca pela explicação da natureza do objeto de estudo da matemática. Para se estabelecer o fundamento, viu-se como necessário estabelecer primeiramente de quais tipos de objetos a matemática estava tratando. Sendo assim, a discussão passou do fundacionismo para questões de ontologia matemática e, posteriormente, também para as relacionadas à epistemologia matemática.

Bernays se vale de um exemplo para ilustrar seu ponto, que é a comparação entre a concepção de geometria de Euclides e o método axiomático de Hilbert. Podemos, segundo ele, notar que, enquanto Euclides concebe as figuras geométricas como o resultado de uma construção, Hilbert considera os sistemas de pontos, linhas e planos como já existentes desde sempre. A diferença está explícita na própria formulação dos autores, como escreve Bernays:

> Euclides postula: pode-se juntar dois pontos por meio de uma linha reta; Hilbert enuncia o axioma: dados dois pontos quaisquer, existe uma linha reta na qual ambos estão situados. “Existe” se refere aqui à existência no sistema de linhas retas. (BERNAYS, 1983, pgs. 258-9)

Na formulação de Hilbert já se pode conceber, de acordo com Bernays, o modo como os objetos matemáticos passaram a ser vistos na filosofia da matemática mais recente, isto é, como completamente independentes do sujeito – não sendo mais fruto de uma construção mental ou física. É esse ponto que Bernays vê como uma tendência inspirada na filosofia de Platão e, por isso, a chama de “platonista” (BERNAYS, 1983, p. 259).

Essa caracterização de Bernays, apesar de bastante incipiente, é útil para esclarecer a posição hoje conhecida como “platonismo matemático”, a saber: uma concepção de que objetos matemáticos existem de maneira abstrata e independente de nossa existência. Uma vez que o platonista concebe os objetos matemáticos desse modo, ele também passa a considerar a matemática como uma ciência da descoberta e não como uma ciência de conhecimentos construídos ou inventados com algum grau de arbitrariedade. A prática matemática consiste, então, em uma investigação das propriedades, relações ou estruturas existentes no reino matemático abstrato. Mas por que devemos aceitar a existência desses objetos que não fazem parte do meio físico nem mental do qual estamos participando?

2.1.2. O argumento de Frege:

Um dos mais importantes argumentos em favor da existência de objetos matemáticos abstratos é devido a Frege (1983). Esse argumento foi formulado no interior de seu projeto logicista[20], de modo que levou em consideração apenas aquilo – o domínio – que é descrito pela linguagem aritmética. Contudo, com as devidas alterações, esse argumento tem servido de suporte para o platonismo matemático mais amplo.

O argumento fregeano pode ser enunciado como se segue:

P1. Enunciados matemáticos verdadeiros são compostos, dentre outras coisas, por termos singulares que se referem a números naturais.

P2. Esses enunciados podem ser verdadeiros somente se os termos singulares que os compõem se referem a – ou quantificam sobre – objetos que existem.

P3. Os enunciados são verdadeiros (ou possuem valor de verdade).

C1. Assim, números naturais existem.

P4. Se eles existem, são objetos abstratos totalmente independentes de nossa existência, uma vez que eles não possuem certas propriedades nem de objetos físicos nem

[20] Projeto de Frege para a redução da aritmética à lógica.

de objetos mentais[21].

C2. Portanto, números naturais são objetos matemáticos abstratos que existem e que são totalmente independentes de objetos físicos, de nossa mente e linguagem.

Como é possível perceber, o argumento de Frege se vale da semântica clássica, segundo a qual um enunciado, para ter seu valor de verdade estabelecido, precisa que seus termos singulares se refiram a objetos e que seus quantificadores de primeira ordem quantifiquem sobre esses objetos. O valor de verdade dos enunciados depende, portanto, de um sucesso nessa referência e quantificação. E tais restrições são válidas para todos os âmbitos da linguagem, de modo que a linguagem da matemática, por ser uma parte da linguagem em geral, compartilha dessa mesma estrutura. Sendo assim, enunciados da forma "elefante é maior que a formiga" e "3 é maior que 2" possuem a mesma estrutura "x é maior que y" – que pode ser expressa por: $\exists x \exists y Rxy$ – e, por terem essa característica, também possuem os mesmos tipos de condições de verdade, que são dadas pela existência dos objetos aos quais eles se referem.

Embora o argumento de Frege seja considerado forte e, assim, amplamente utilizado pelos defensores do platonismo, este não se viu livre de objeções. As mais influentes delas são inspiradas por dois artigos de Paul Benacerraf (1965; 1973), os quais apresentaremos na sequência.

2.1.3. O problema da identificação:

Em seu artigo What Numbers Could Not Be (1965), Benacerraf apresenta o ficou

[21]Cf. FREGE, 1999.

conhecido como “problema da identificação” ou “problema da referência”. Nesse artigo, ele coloca em questão o fato de que há na abordagem platonista uma grande arbitrariedade no momento de identificar os diferentes tipos de objetos matemáticos. O exemplo tratado por ele é o da redução da sequência dos números naturais a diferentes sequências modeladas na teoria dos conjuntos, na qual há uma identificação, por parte do platonista, entre conjuntos e números. Para o platonista, as teorias matemáticas descrevem coleções únicas de objetos abstratos. Contudo, há uma diversidade de sequências na teoria dos conjuntos que pode corresponder (ou representar) aquela dos números naturais. De acordo com ele, então, é arbitrário escolher esta ou aquela sequência na teoria de conjuntos para identificar como *a* sequência que captura exatamente a sequência correta dos números naturais no reino abstrato. Mas vejamos mais detalhadamente como Benacerraf apresenta esse problema.

Benacerraf discorre sobre esse ponto se utilizando de um experimento de pensamento no qual duas crianças, Ernie e Jhonny, filhos de logicistas militantes, aprendem a contar. As duas crianças, em vez de aprenderem aritmética do modo padrão, aprenderam-na por meio da lógica, mais especificamente, da teoria dos conjuntos. Para elas aprenderem a contar, então, bastava apenas traduzir seu vocabulário lógico para um vocabulário numérico. O que elas conheciam como conjuntos, as pessoas comuns chamavam de “números”. Esses “números”, por sua vez, mantinham uma relação de “menor que” que garantia sua ordenação. Além disso eles aprenderam que havia o 1, que era o menor número; que havia sucessores, dos quais cada número tinha apenas um; que havia operações de adição, multiplicação e outras feitas com os membros dessa sequência, etc. Após essa aprendizagem, as crianças estavam aptas a aplicar o que aprenderam e poderiam começar a contar (BENACERRAF, 1983a, pgs. 273-274). No entanto, assim que as duas crianças começaram a formular teoremas sobre os números e comparar suas anotações, perceberam que havia um problema. Enquanto que para Ernie 3 pertencia a 17, para Johnny isso não era assim. Isso porque, para Ernie, o sucessor de x seria “o conjunto constituído por x e por todos os membros de x” (BENACERRAF, 1983a, pg. 278). Além disso, para ele, “para quaisquer dois números, x e y, x é menor do que y se, e somente se, x pertence a y e x é um subconjunto próprio de y” (IDEM). Já para Johnny, a relação de sucessor era estabelecida assim: “o sucessor de x é simplesmente [x], o conjunto unitário de x – o conjunto cujo único membro é x”. Ademais, para ele, “dados dois números, x e y, x pertence a y se, e somente se, y é o sucessor de x” (IDEM). Sendo assim, os dois chegam a resultados diferentes quando tentam enunciar alguns teoremas da aritmética fundamentados na teoria de conjuntos adotada por eles. Cada uma das crianças representa as teorias de conjuntos oferecidas por Zermelo e por von Neumann. Tanto um quanto o outro identificam o 0 com o conjunto vazio. Mas, enquanto Zermelo (Johnny) procede identificando n+1 com o {n}, para von Neumann (Ernie), n+1 é identificado como a união de n U {n}. Com isso, afirma Benacerraf, temos a representação de duas sequências distintas que se propõem a representar a mesma sequência de números naturais:

ZERMELO	VON NEUMANN
0 = Ø	0 = Ø
1 = {Ø}	1 = {Ø}
2 = {{Ø}}	2 = {Ø, {Ø}}
3 = {{{Ø}}}, …	3 = {Ø, {Ø}, { Ø, { Ø}}}, …

Uma vez que os conjuntos representariam números naturais, cuja existência seria objetiva, então os conjuntos (assim como os numerais) seriam capazes de se referir com sucesso a esses números. Mas, pergunta Benacerraf, como seria possível que dois conjuntos distintos fossem a referência do mesmo número natural, se diferem? Qual conjunto pode ser identificado como o número 3? O {{{Ø}}} de Zermelo ou {Ø, {Ø}, { Ø, { Ø}}} de von Neumann?

Qual sequência representada é a sequência correta dos números naturais? Benacerraf, então, argumenta que não há razões, a não ser arbitrárias, para escolhermos uma ou outra dessas sequências para identificarmos com a sequência dos números naturais. E se não há nada que justifique a escolha entre uma sequência ou outra (ou mesmo entre qualquer outra possível sequência conjuntista), então não parece haver nada em qualquer uma dessas sequências que a torne a sequência única e correta de números naturais. Uma vez que o platonismo sugere que há uma sequência única de objetos abstratos que é a sequência dos números naturais, e que cada número é um objeto abstrato único, o platonista teria um problema para explicar.

2.1.4. O dilema de Benacerraf

Em outro artigo, intitulado Mathematical Truth (1973), Paul Benacerraf levanta outras questões ao platonismo. Nesse artigo, ele formula o que ficou conhecido como “o dilema de Benacerraf” e que se tornou um desafio não apenas ao platonismo, mas também a qualquer concepção em filosofia da matemática. De acordo com ele, uma boa teoria da verdade matemática possui dois desiderata: (1) oferecer uma semântica homogênea para o discurso matemático e o não matemático; e (2) oferecer uma boa explicação com relação à epistemologia da matemática. Em geral, segundo Benacerraf, nenhuma posição em filosofia da matemática conseguiu atingir esses dois desiderata conjuntamente.

A primeira condição, de oferecer uma semântica homogênea diz respeito ao modo como se estabelece o significado dos termos e o valor de verdade das sentenças da matemática e de outros discursos não matemáticos. Segundo Benacerraf, uma das virtudes do platonismo matemático é que ele justamente faz isso ao aplicar o modelo semântico de Tarski para a linguagem em geral. O modelo semântico de Tarski é o modelo da semântica clássica já apresentado acima. De acordo com esse modelo, um termo singular possui significado desde que faça referência a um objeto; e um enunciado apenas possui valor de verdade se ele descreve as relações entre esses objetos. Em suma, um enunciado possui valor de verdade apenas se ele possui termos singulares, termos que fazem referência a objetos. O exemplo abordado por Benacerraf é o seguinte, consideremos os enunciados:

1. Há ao menos três cidades grandes mais velhas do que Nova Iorque.

2. Há ao menos três números perfeitos maiores do que 17.

Consideremos, agora, que:

3. Há ao menos três *FG*'s que sustentam a relação *R* com *a*. (BENACERRAF, 1973, p. 663)

A pergunta de Benacerraf é, então, se a forma expressa em (3) corresponde aos enunciados (1) e (2). Elas possuem os mesmos tipos de condições de verdade? Quais seriam essas condições? Que (3) expressa a forma dos respectivos enunciados, a resposta é claramente, sim. Ao analisarmos a sentença (1) à luz do modelo tarskiano, temos que a quantificação expressa por "Há ao menos..." quantifica sobre objetos – as três cidades grandes –, objetos estes que sustentam a relação de "serem mais velhas que" com um quarto objeto, a saber, Nova Iorque. Tal enunciado será verdadeiro apenas se o quantificador for efetivo ao quantificar sobre os objetos, isto é, apenas caso de fato existam os quatro objetos em questão (as três cidades grandes e Nova Iorque) e caso estes objetos mantenham a relação explicitada[22]. Ou seja, a condição de verdade do enunciado (1) é, em parte, a existência dos objetos referidos por seus termos singulares e o sucesso da quantificação existencial (BENACERRAF, 1973, pp. 663-4).

Agora, e quanto ao enunciado (2), quais suas condições de verdade? De acordo com o platonista, as do mesmo tipo que as do enunciado (1), visto que as duas sentenças possuem a mesma forma. Então, novamente, para que seja estabelecido o valor de verdade da sentença “Há ao menos três números perfeitos maiores do que 17”, aplicamos o modelo tarskiano e temos que “três números perfeitos” precisam designar três objetos, que o “17” precisa designar outro objeto, que estes quatro objetos de fato existam e, para que a sentença seja verdadeira, que estes quatro objetos mantenham a relação de “maior que” uns com os outros. Assim como em (1), verdade da sentença em parte depende, portanto, da existência dos objetos referidos por ela.

Desse modo, o platonista tem a vantagem de oferecer uma explicação uniforme para o discurso matemático e o não matemático. Mas por que exatamente essa seria uma vantagem? De acordo com Benacerraf, o estabelecimento de uma semântica uniforme para todos os âmbitos do discurso seria necessário, pois a linguagem matemática não é uma linguagem diferente daquela utilizada cotidianamente. A linguagem matemática é uma parte menor de algo maior, que é a linguagem em geral. Uma vez que ela faz parte da linguagem como um todo, não seria adequado que ela possuísse uma semântica diversificada daquela da linguagem em geral. Nas palavras de Benacerraf:

---

[22] O enunciado pode ser falso, caso a relação não se sustente. Mas para ser falso, ainda é preciso que os objetos referidos pelos termos singulares existam. Ou seja, são condições para os enunciados possuírem valor de verdade.

> Uma teoria da verdade para a linguagem que falamos, argumentamos, teorizamos, matematizamos, etc., deveria pela mesma razão [token] fornecer condições de verdade semelhantes para sentenças semelhantes. As condições de verdade atribuídas às duas sentenças contendo quantificadores deveriam refletir de modo relevantemente similar à contribuição feita pelos quantificadores. Qualquer ponto de partida de uma teoria assim homogênea teria de ser fortemente motivada a ser válida de se considerar. (BENACERRAF, p. 662)[23]

No entanto, essa vantagem do platonismo traz consigo uma dificuldade considerável. Isso porque, assim como sustenta ser preciso uma uniformidade de explicação semântica, Benacerraf sustenta que também precisamos de uma uniformidade de explicação epistêmica. Como ele escreve: *Considero que seja óbvio que qualquer explicação filosoficamente satisfatória de verdade, referência, significado e conhecimento deve abordar todas e deve ser adequada para todas as proposições às quais esses conceitos se aplicam* (BENACERRAF, 1965, p. 662). Sendo assim, é preciso que o platonista apresente uma explicação sobre o conhecimento das entidades abstratas, das quais tratam as teorias da matemática, que esteja de acordo com a explicação do conhecimento de entidades físicas observáveis, tais como pedras e cavalos, ou mesmo entidades inobserváveis, como elétrons e bósons. Novamente, isso porque o conhecimento matemático não é um conhecimento completamente independente do resto de nossa rede de conhecimentos. Ele é utilizado em raciocínios científicos e ordinários, de modo que exige uma explicação em consonância com tais raciocínios.

[23] A theory of truth for the language we speak, argue in theorize in, mathematize in, etc., should be the same token provide similar truth conditions for similar sentences. The truth conditions assigned to two sentences containing quantifiers should reflect in relevantly similar ways the contribution made by the quantifiers. Any departure from a theory thus homogeneous would have to be Worth considering (BENACERRAR, 1973, p. 662).

> Uma explicação de conhecimento que *parece* funcionar para certas proposições empíricas sobre objetos físicos de tamanho médio, mas que falha ao explicar o conhecimento mais teórico, é insatisfatória – não apenas porque é incompleta, mas porque pode ser também incorreta mesmo como uma explicação das coisas que parece abranger muito adequadamente. Pensar de outro modo seria, entre outras coisas, ignorar a interdependência de nosso conhecimento em diferentes áreas. (BENACERRAF, 1973, p. 662)[24]

Além disso, para que possamos falar que temos conhecimento matemático, precisamos que as condições de verdade da matemática sejam passíveis de serem conhecidas[25]. Deve haver alguma relação entre as condições de verdade e nosso estado subjetivo de crença (BENACERRAF, 1973, p. 667). Quando o sujeito afirma que "sabe que 'a formiga é menor que o elefante'", é porque esse sujeito estabelece alguma relação entre as condições de verdade desse enunciado e suas crenças sobre ele. Assim, quando ele diz que "sabe que '2+2=4'", essa mesma relação deve ocorrer. De acordo com isso, na visão de Benacerraf, a semântica para a matemática deve se adequar à epistemologia da matemática (p. 667), elas devem caminhar juntas, já que é a semântica que vai estabelecer as condições de verdade disponíveis para o sujeito.

Contudo, Benacerraf procura mostrar que a semântica de Tarski para a matemática – que, como vimos acima, está comprometida com o platonismo – é incompatível com o que ele considera ser nossa melhor teoria epistemológica, a saber, a teoria causal do

[24] An account of knowledge that *seems* to work for certain empirical propositions about médium-sized physical objects but which fails to account for more theoretical knowledge is unsatisfactory – not only because it is incomplete, but because it may be incorrect as well, even as an account of the things it seems to cover adequately. To think otherwise would be, among other things, to ignore the interdependence of our knowledge in diferent areas (BENACERRAF, 1973, p. 662)

[25] Benacerraf esclarece que não precisamos conhecer todas as verdades matemáticas, mas precisamos que elas sejam cognoscíveis, uma vez que conhecemos algumas (BENACERRAF, 1973, p. 667)

conhecimento. De acordo com essa teoria, para dizermos que um sujeito S sabe que *p* é preciso que S esteja causalmente relacionado ao fato *p* de um modo apropriado. Para ser dito, por exemplo, que João sabe que “Maria tem um vestido florido” é preciso que um fato ocorra de modo a causar em João a crença de que Maria realmente possui um vestido florido. É preciso, ainda, que esse fato seja de um modo tal que cause em João uma crença inequívoca, ou seja, que esse fato ocorra de modo apropriado (ele a ver vestida com a peça, e/ou vê-la estendendo o vestido no varal, e/ou ver a peça guardada em seu guarda-roupa, etc.). Assim, para dizermos que João têm aquele conhecimento, é preciso estabelecer a ligação adequada entre João e o fato que o faça acreditar na proposição “Maria tem um vestido florido”.

Mas se aceitamos tal teoria – e, de acordo com Benacerraf, devemos aceitá-la por ser nossa melhor teoria do conhecimento – devemos abandonar a concepção platonista matemática. Isso porque, se aceitarmos a existência de objetos matemáticos abstratos, teremos que admitir que não possuímos conhecimento matemático, já que não é possível estabelecer qualquer relação causal entre os sujeitos (nós) e aqueles objetos. Mark Balaguer reorganiza o argumento como se segue[26]: os seres humanos existem no espaço-tempo; se existem quaisquer objetos matemáticos abstratos, então eles existem fora do espaço-tempo. Admitida a teoria causal do conhecimento, segue-se que: se existem quaisquer objetos matemáticos abstratos, então seres humanos não teriam como obter qualquer conhecimento deles. O que nos levaria a ter que admitir que: se o platonismo está correto, então seres humanos não poderiam ter qualquer conhecimento matemático. Mas parece inegável que os seres humanos possuem conhecimentos matemáticos. Logo, o platonismo matemático não pode ser correto (BALAGUER, 1998, p. 22).

Pode ser objetado que a teoria causal do conhecimento já deixou de ser vista como a

---

[26] O argumento é apenas inspirado naquele encontrado no texto de Benacerraf. Portanto, ele pode ser apresentado de diferentes modos. Sigo aqui a apresentação feita por Balaguer (1998).

melhor teoria do conhecimento, de modo que tal problema não mais se colocaria. Contudo, independente de se adotar a teoria causal ou não, o problema ainda permanece, uma vez que ele diz respeito ao acesso epistêmico a entidades que estão fora do espaço-tempo e que não possuem qualquer interação causal com os objetos que estão no espaço-tempo.

Em seu texto Science Without Number (1989), Hartry Field apresenta uma reformulação do problema que não depende mais da adoção da teoria causal. Field apresenta o problema em termos da "confiabilidade" que os matemáticos possuem em suas crenças matemáticas. Escreve ele: *o modo de entender o desafio de Benacerraf, penso, não é como um desafio a nossa habilidade de* justificar *nossas crenças matemáticas, mas como um desafio a nossa habilidade de* explicar a confiabilidade *dessas crenças* (FIELD, 1989, p. 25). E continua:

> Mas o desafio de Benacerraf – ou ao menos o desafio que seu artigo sugere para mim – é fornecer uma explicação dos mecanismos que explicam como nossas crenças sobre essas entidades remotas podem tão bem refletir fatos sobre elas. A ideia é que, *se parece em principio impossível explicar isso*, então isso tende a *minar* a crença em entidades matemáticas, *a despeito* de quaisquer razões que possamos ter para acreditar nelas. (FIELD, 1989, p. 26)

Ou seja, na interpretação de Field, o desafio se coloca no sentido de explicar a confiabilidade das crenças que os matemáticos têm ao afirmar que um determinado enunciado descreve corretamente um reino de entidades que estão para além de qualquer percepção possível. É explicar, segundo Field, o esquema: *Se os matemáticos aceitam* 'p'*, então* p *em todas as instâncias de quando* 'p' *é substituído por uma sentença matemática* (FIELD, 1989, 26). Mas de onde vem essa confiança dos matemáticos? É isso que, de acordo com ele, o platonista não consegue explicar. E para ser uma postura coerente, o platonista precisa fazer isso e não pode apelar para algo místico ou desconhecido que deixa nebulosa essa relação entre os estados de crença subjetivos e o reino das entidades matemáticas abstratas. Como afirma Field:

> O platonista pode legitimamente postular fatos brutos sobre as próprias entidades matemáticas, por exemplo, as leis básicas da teoria dos conjuntos; e mesmo certos tipos de fatos brutos sobre as relações entre entidades matemáticas e entidades físicas, por exemplo, que toda entidade física é membro de algum conjunto. Mas 'relações de confiabilidade' especiais entre o reino matemático e os estados de crenças dos matemáticos parecem muito difíceis de engolir. É, em vez disso, como se alguém afirmasse que seus estados de crença sobre acontecimentos diários em uma vila remota no Nepal fossem quase todas verdadeiras, a despeito da ausência de qualquer mecanismo para explicar a correlação entre aqueles estados de crença e os acontecimentos na vila. Certamente deveríamos aceitar isso apenas como um último recurso. (FIELD, 1989, pp. 26-27)

Em resumo, o problema epistemológico se coloca mesmo que não seja aceita a teoria causal do conhecimento. Esse problema diz respeito ao acesso às entidades matemáticas, uma vez que o platonismo atribui a elas uma natureza abstrata, explicitada no modelo semântico estabelecido por essa corrente realista. Portanto, apesar de o platonismo possuir a virtude de oferecer uma semântica homogênea para todos os âmbitos do discurso, ele falha ao dar conta de oferecer uma explicação epistemológica minimamente razoável para o campo da matemática.

Como dissemos no início dessa seção, no artigo Mathematical Truth, Benacerraf apresenta um dilema. É um dilema, pois Benacerraf afirma que todas as teorias da verdade matemática formuladas até então incorreram na mesma falha, que é ou atingir o desideratum (1), ou seja, oferecer uma semântica homogênea à linguagem em geral; ou atingir o desideratum (2), isto é, apresentar uma epistemologia razoável. Como vimos acima, o platonismo falha justamente ao satisfazer (1), mas não dar conta de (2). Contudo, uma posição anti-platonista também não fica fora da crítica de Benacerraf. Isso porque, segundo ele, os anti-platonistas resolvem perfeitamente (2), uma vez que não postulam a existência de objetos de natureza duvidosa, e explicam o conhecimento matemático por meio de provas e deduções. Porém, eles não conseguem dar conta de (1), e geralmente precisam estabelecer uma semântica diferente para o discurso matemático para que este não se comprometa ontologicamente com entidades indesejadas por eles. Sendo assim, as dificuldades apontadas por Benacerraf se mostram aplicáveis a todas as posturas filosóficas sobre a matemática, sejam essas platonistas ou não. Por isso essas dificuldades apontadas por Benacerraf ficaram conhecidas como “o dilema de Benacerraf” e se tornaram questões centrais da filosofia da matemática contemporânea. Veremos na próxima seção algumas abordagens platonistas que tentaram lidar com essas objeções de Benacerraf, e as razões pelas quais elas não foram bem-sucedidas. No próximo capítulo, nos debruçaremos sobre as abordagens anti-platonistas, para ver em que medida é possível lidar melhor com as objeções de Benacerraf, se partirmos de um ponto de vista que não postula a existência de entidades abstratas.

2.2. Respostas aos problemas de Benacerraf:

O principal desafio ao platonista, uma vez que este se mantém firme com relação a sua postura metafísica, de modo que não abre mão de sua ontologia e de sua semântica, é oferecer uma explicação epistemológica adequada para dar conta dessa rica ontologia. Dentro das diversas abordagens platonistas, podemos agrupá-las de acordo com basicamente três modos de tentar responder ao desafio epistemológico de Benacerraf-Field. São esses, sustentar que: i) há algum contato direto com o reino matemático abstrato; ii) há conhecimento das entidades matemáticas via percepção sensível (contato indireto); ou, ainda, iii) que há um conhecimento matemático sem que haja qualquer contato com os objetos abstratos matemáticos (BALAGUER, 1998, p. 24). Nesta seção, abordaremos algumas das mais influentes concepções platonistas, agrupando-as de acordo com essa divisão apresentada acima.

2.2.1. Conhecimento por contato direto: o platonismo de Gödel

O primeiro platonismo do qual trataremos é o adotado por Gödel (1944; 1967), que sustentou que podemos estabelecer uma analogia entre objetos físicos e objetos matemáticos abstratos. Para ele, de modo semelhante ao qual adquirimos conhecimento de objetos físicos por meio de nossa percepção, obtemos conhecimento de objetos matemáticos abstratos por meio de uma relação que é semelhante a essa percepção sensível. Segundo ele, isso ocorre porque possuímos uma “intuição matemática” que proporciona o contato necessário com os objetos abstratos para que possamos desenvolver teorias e provas matemáticas. Essa intuição é capaz de nos fornecer evidência interna de princípios matemáticos que servirão para que encontremos evidência externa desses princípios, que se dará pelo fato de estes se mostrarem frutíferos ou não para a investigação matemática. Se eles se mostram frutíferos, podemos considerá-los verdadeiros. Como ele escreve, “os axiomas se forçam sobre nós como sendo verdadeiros” (GÖDEL, 1967, reimpresso em 1983, pg. 484)

No entanto, esse caminho não parece totalmente satisfatório, pois ainda deixa um tanto misteriosa a relação entre essa intuição e os objetos abstratos. Para aceitá-lo, seria preciso estabelecer uma espécie de dualismo do tipo cartesiano, pois apenas assim seria talvez viável explicar o contato que a mente tem com essa realidade que se encontra para além da sensibilidade. Contudo, adotar tal postura realista levaria por um caminho ainda mais tortuoso, com muito mais elementos duvidosos a serem explicados. Dificilmente seria possível, ao aceitar essa postura gödeliana, responder ao desafio epistemológico. Isso porque estaria sempre em questão a ligação entre a mente e objetos que não possuem qualquer relação causal com ela.

2.2.2. Contato indireto (I): o estruturalismo não-eliminativista

Outra das alternativas para dar conta dos problemas apresentados por Benacerraf, da qual trataremos agora, é a concepção estruturalista, que tem por inspiração a própria proposta de Benacerraf no What Numbers Could Not Be. Ao argumentar contra a ideia de que números são objetos, Benacerraf oferece uma explicação na qual considera que os numerais não são termos singulares genuínos e que, desse modo, não fazem referência a objetos abstratos. A partir do exemplo apresentado acima[27], das sequências de Zermelo e von Neumann, Benacerraf argumenta que números não podem ser objetos, mas que há algo em comum entre esses modelos (de Zermelo e von Neumann) e outros que pode ser

---

[27] Na seção 1.1.3.

observado abstraindo as especificidades de cada sequência. Isso que há em comum entre esses e outros modelos é a “estrutura”, no caso, a dos números naturais. Sendo assim, a questão sobre qual é o número 2, se {{Ø}} ou {Ø, {Ø}}, pode ser respondida, de acordo com ele, com um “tanto faz”, já que o número 2 apenas seleciona certa posição na estrutura, de modo que o 2 pode ser instanciado tanto por um quanto por outro. Com isso, Benacerraf procura resolver o problema de explicar qual a natureza dos números naturais. Além disso, ele parece resolver o problema epistemológico sobre como obtemos conhecimento dos objetos matemáticos, uma vez que basta conhecermos essas estruturas.

Os estruturalistas foram motivados por essa aparente resolução dos problemas em filosofia da matemática, e refinaram a proposta de Benacerraf, de modo a adaptar suas concepções a essa proposta. Surgiu disso uma ramificação da concepção estruturalista entre platonista e nominalista. A ideia central da concepção estruturalista é compartilhada pelos dois ramos: (i) a matemática é a ciência da estrutura, isto é, o objeto de estudo da matemática são as estruturas; e (ii) os objetos matemáticos, como números, funções, etc, não são nada além de posições nessas estruturas e são determinados apenas por suas relações uns com os outros dentro dessas estruturas. Sendo assim, as teorias matemáticas não tratam das qualidades (ou propriedades) dos objetos – como as dos números naturais, por exemplo – mas sim descrevem as propriedades estruturais de seus respectivos domínios.

Contudo, encontramos na literatura uma diversidade nas abordagens estruturalistas. Desconsideradas algumas particularidades, podemos considerá-las como sendo de dois tipos principais: o estruturalismo não eliminativista (platonista), sustentado principalmente por Shapiro e Resnik; e o estruturalismo eliminativista (nominalista), sustentado por Hellman e Chihara. Os primeiros defendem que as estruturas matemáticas existem, são abstratas e seus lugares são objetos genuínos (abstratos também); enquanto os últimos defendem que as estruturas podem ser eliminadas e que a natureza dos objetos é ser um lugar nas estruturas matemáticas. Trataremos do estruturalismo eliminativista no próximo capítulo. Por enquanto, iremos nos deter na apresentação das concepções não-eliminativistas de Shapiro e de Resnik.

2.2.2.1. Estruturalismo *ante rem*[28]:

Para os defensores do estruturalismo ante rem, pode-se sustentar que os números são objetos, mesmo que os encaremos como posições em estruturas matemáticas abstratas. Ou seja, afirmar que asserções matemáticas dizem respeito a objetos abstratos é completamente compatível com a ideia de que tais asserções são sobre posições em estruturas numéricas abstratas.

Shapiro é um dos autores que propõem esse tipo de estruturalismo não-eliminativista, compreendido por ele como um estruturalismo *ante rem*. Segundo ele, seu projeto é um realismo em ontologia e em valor de verdade. Sendo assim, ele vai sustentar a existência de um reino matemático abstrato, e que nosso discurso descreve verdadeiramente tal reino. Contudo, diferentemente do platonismo tradicional, que considera cada objeto abstrato como independente um do outro – ou seja, a essência do número 2 é completamente independente da essência do número 4, por exemplo -, Shapiro considera que a essência dos números não é nada além da sua relação uns com os outros, i.e., de suas relações estruturais. Desse modo, o objeto da aritmética é a estrutura na qual os números são apenas lugares. Esta, por sua vez, é vista por Shapiro como abstrata, comum a qualquer coleção infinita de objetos e que tem uma relação de sucessor com um único objeto inicial e que satisfaz o princípio de indução, ou seja, a estrutura dos números naturais. Como escreve Shapiro:

---

[28] A razão para tal nome ficará clara mais adiante no texto.

> O número 2, por exemplo, não é mais nem menos do que a segunda posição na estrutura dos números naturais; 6 é a sexta posição. Nenhum deles tem qualquer independência da estrutura na qual eles são as posições, e como lugares nessa estrutura, nenhum número é independente um do outro. A essência de 2 é ser o sucessor do sucessor de 0, o predecessor de 3, o primeiro primo, e assim por diante. (1997, p. 72)

Shapiro define estrutura como a forma abstrata de um sistema[29] que destaca *as interrelações entre os objetos, e ignora quaisquer características deles que não afetem como eles se relacionam com outros objetos no sistema* (SHAPIRO, 1997, pgs. 73-74).

Os números são, para ele, lugares na estrutura, um padrão particular exemplificado por muitos diferentes sistemas. O número 2, por exemplo, é o segundo lugar naquele padrão dos números naturais. A analogia oferecida por Shapiro é que números naturais são como que cargos em uma organização. Por exemplo, nós temos o cargo de chefe de um departamento, que pode ser preenchido por qualquer pessoa. Do mesmo modo, nós temos o segundo lugar na estrutura dos números naturais, que pode ser preenchido por qualquer objeto. Além disso, nós conseguimos diferenciar o cargo e a pessoa que ocupa aquele cargo. De maneira similar, cada objeto matemático ocupa um lugar em uma estrutura particular. Há, assim, uma certa prioridade da estrutura no estatuto dos objetos matemáticos. A estrutura é primária aos objetos matemáticos que ela contém. Por isso, Shapiro chama seu estruturalismo de *ante rem*, i.e, porque as estruturas "vêm antes" dos objetos dos quais ela é estrutura. As estruturas contêm padrões *tokens* de *types* que podem ser quaisquer tipos de objetos, inclusive objetos do mundo físico. E são essas estruturas que são objetos de estudo da matemática. Esse campo investiga, portanto, as relações internas dos lugares dessa estrutura, as propriedades estruturais.

[29] "Sistema" é entendido por Shapiro como uma coleção de objetos com certas relações, como uma família, por exemplo.

O estruturalismo *ante rem* sustenta, portanto, que os objetos matemáticos são dependentes das estruturas às quais eles pertencem, pois a estrutura, enquanto abstração, possui uma prioridade existencial. Esses objetos, para o estruturalista realista, não possuem qualquer natureza além daquela determinada por suas propriedades e relações estruturais, ou seja, não há como falar de objetos matemáticos sem referência a uma estrutura da qual eles pertençam. Inclusive sua identidade é determinada por suas propriedades estruturais e por sua localização na estrutura. Logo, a própria ideia de objeto matemático não faz sentido completamente se não for por sua referência a uma estrutura prioritária a eles.

2.2.2.2. Estruturalismo de Resnik:

O estruturalismo de Michael Resnik se difere daquele de Shapiro, pois ele usa uma versão modificada do argumento da indispensabilidade[30] para justificar seu realismo. Em sua versão, os objetos que são postulados pelo argumento da indispensabilidade são posições em estruturas, não objetos abstratos individuais. Ele não se prende muito à questão ontológica, pois vê na questão epistemológica o maior obstáculo para o platonismo. Portanto, ele apela ao naturalismo como uma razão pela qual deveríamos evitar epistemologias baseadas em intuições a priori ou qualquer outra versão que apele a algo misterioso e difícil de explicar. Ele defende uma teoria da verdade e uma teoria da referência imanente, argumentando em favor de uma epistemologia postulacional e um holismo evidencial sobre matemática e ciência. A ideia aqui é que, embora pareça haver diferenças

[30] Trataremos do argumento da indispensabilidade mais adiante no texto.

metodológicas entre a matemática e as ciências naturais, não há nenhuma separação genuína a ser feita, nem ontologicamente nem epistemologicamente. A matemática é empírica, não a priori; e a dicotomia abstrato-concreto – da qual certas versões de apriorismo dependem – é argumentado como sendo não distintas. A evidência última para a matemática vem de seu papel na ciência.

Quanto a sua epistemologia, Resnik se considera um holista confirmacional, e seu argumento é que mesmo quando idealizações físicas são empregadas, a matemática envolvida deve ser considerada verdadeira.

Para explicar a possibilidade do conhecimento matemático, Resnik introduz a noção de um modelo [*template*], que é uma entidade concreta – que inclui modelos físicos, diagramas, etc – e está ligada a aspectos de nossa experiência com padrões [patterns] abstratos. A ideia é que há relações estruturais (tais como as relações isomórficas) entre modelos e padrões que nos permitem representar os padrões via modelos. São essas relações que permitem que os matemáticos usem provas, através da criação e manipulação de modelos concretos por meio de certas operações, para gerar informação sobre padrões abstratos. Portanto, apesar de os matemáticos não terem acesso às posições nesses padrões abstratos – ou seja, nenhum acesso direto aos objetos matemáticos – eles têm acesso aos modelos concretos, que é o suficiente para permitir o conhecimento matemático, não obstante a falta de acesso direto aos objetos abstratos.

Uma característica significante dos padrões, na concepção de Resnik, é o fato de que as posições em tais padrões são incompletas. Isso significa que não há nenhum fato que estabeleça que estas posições têm certas propriedades ou não. Consideremos, por exemplo, a segunda posição no padrão dos números naturais, a saber, “o número 2”. Não fica claro que há um fato que estabeleça se esta posição – o número 2 – é a mesma correspondente à posição no padrão de números reais. Em outras palavras, não é claro que haja um fato que estabeleça que o número 2 no padrão dos números naturais é o mesmo que o número 2 na estrutura dos números reais. Afinal, as propriedades que uma posição no padrão tem dependem do padrão ao qual elas pertencem. No padrão dos números naturais, o número 2 tem o número 3 como seu sucessor imediato. No padrão dos números reais, o sucessor natural imediato do número 2, que é também um número natural, é o número 3. Mas não é possível dizer que esta é a mesma propriedade que aquela do padrão dos números naturais, pois isso já seria assumir que os números correspondentes são os mesmos – contudo, este é o ponto em questão. Não fica claro na concepção de Resnik como se poderia responder a tal questionamento.

2.2.2.3. Problemas com o estruturalismo:

O estruturalismo não-eliminativista apresenta problemas fundamentais, de modo que não parece se sustentar como uma boa alternativa ao platonista. O principal problema levantado ao estruturalismo realista é o fato de que ele parece não se distinguir completamente do platonismo de objetos, i.e., do platonismo que sustenta a existência de objetos matemáticos abstratos. Com isso, assim como o platonismo de objetos, ele não soluciona os problemas apontados por Benacerraf. Isso porque, ao afirmar que estruturas são abstratas, o estruturalista parece ser obrigado a admitir que estas estruturas são um tipo de “objeto abstrato”, de modo que é preciso que ele ofereça uma boa explicação epistemológica para dar conta do problema do acesso. Como, afinal de contas, obtemos conhecimento dessas estruturas, uma vez que elas são abstratas (fora do espaço-tempo, acausais, independentes, etc.)?

Shapiro tenta dar conta desse problema afirmando que temos um modo de apreender uma estrutura particular através de um processo de reconhecimento de padrão. Segundo ele, quando alguém observa um sistema, ou vários sistemas, com a mesma estrutura e se concentra apenas na relação dos objetos desse sistema, sem levar em conta as características que não são relevantes para essas relações, este sujeito "percebe" ou reconhece a estrutura por trás desse sistema. Desse modo, o sujeito identifica o padrão que se apresenta a partir da organização de determinados sistemas "padronizados". Como afirma Shapiro: *o sujeito não vê ou ouve os padrões, naturalmente. Nós literalmente não vemos ou ouvimos entidades abstratas. Nosso sujeito vem a reconhecer um padrão por observar sistemas padronizados* (SHAPIRO, 1997, p.111).

Um segundo modo de conhecer uma estrutura, de acordo com Shapiro, é *através de uma descrição direta dela. Alguém pode também descrever uma estrutura como uma variação de uma estrutura entendida previamente* (SHAPIRO, 1997, pg. 74). No entanto, o caráter psicológico envolvido na explicação epistemológica de Shapiro permanece obscuro, como ele mesmo reconhece, de maneira que o estruturalismo realista fica, tal como o platonismo de objeto, à mercê da objeção de Benacerraf.

Além disso, ele apresenta dificuldades internas com relação a sua explicação sobre objetos matemáticos. A primeira delas diz respeito à afirmação de que os objetos matemáticos possuem apenas propriedades estruturais. Contudo, é possível apresentar contraexemplos a essa afirmação. Os objetos matemáticos parecem possuir outras propriedades que não aquelas apenas estruturais. Eles possuem propriedades intencionais, por exemplo, como a de "ser o número favorito de alguém"; propriedades de aplicação, como "ser o número de forças fundamentais"; e propriedades categóricas, como "ser abstrato" ou "ser acausal". E, ainda mais fundamental, ter a propriedade de "ter apenas propriedades estruturais" não seria uma propriedade estrutural (COLE, 2010, pg. 691). A segunda dificuldade está relacionada com a explicação da natureza dos objetos matemáticos. O estruturalista, como vimos acima, explica tal natureza como sendo aquela determinada apenas por propriedades estruturais. No entanto, "ser abstrato" ou "ser acausal" não são propriedades determinadas pelas relações ou pela estrutura da qual esse objeto faz parte (COLE, 2010, pg. 691).

Diante de tais problemas, dificilmente o estruturalismo não-eliminativista pode ser visto como uma melhor abordagem platonista em filosofia da matemática.

2.2.3. Contato mediato (II): o platonismo naturalizado de Maddy

Uma interessante alternativa foi desenvolvida por Penelope Maddy em seu Realism in Mathematics (1990). Ela é interessante porque propõe uma naturalização do platonismo e se apresenta como uma conjunção do platonismo de Gödel com o naturalismo de Quine e Putnam[31]. Ela discorda da concepção de Gödel, na medida em que não aceita que os objetos matemáticos sejam entidades que estão fora do espaço-tempo, mas propõe – como veremos mais adiante – que tais objetos são apreendidos por uma "capacidade" perceptual, de algum modo semelhante às intuições Gödelianas, mas compreendida de um modo muito mais direto do que aquele proposto por Gödel. Para ela, a evidência de alguns princípios muito básicos e a evidência teórica que justifica alguns axiomas são imediatas e verificamos isso a partir das consequências frutíferas de tais princípios e axiomas para as teorias matemáticas mais elevadas. Além disso, ela incorpora o argumento da indispensabilidade de Quine e Putnam para as entidades abstratas, ou seja, segundo ela, devemos aceitar a existência das entidades matemáticas, pois elas nos são como que exigidas pelas nossas melhores teorias científicas sobre o mundo. Por isso, sua concepção pode ser vista como comprometida com uma epistemologia naturalizada, segundo a qual as entidades matemáticas são trazidas para o mundo físico e, assim, somos capazes de adquirir conhecimento delas por meio de uma investigação empírica.

Contudo, ela difere da proposta de Quine e Putnam, uma vez que a matemática, para ela, vai além de uma ferramenta para a ciência empírica. Há, segundo ela, sérios

[31] Trataremos do naturalismo de Quine mais adiante, mas a ideia geral é que as ciências naturais têm uma prioridade com relação à filosofia, e são elas que ditam a ontologia e a epistemologia matemática. O naturalismo retira da filosofia a prioridade de explicação nessas áreas.

problemas com o argumento da indispensabilidade, pois este não esclarece a situação da matemática pura, que não possui nenhum uso na ciência empírica. Admitido o argumento da indispensabilidade, a matemática pura passa a ser vista apenas como, nas palavras de Quine, "mera recreação dos matemáticos". Além disso, algumas teorias da matemática pura acabam sendo utilizadas posteriormente nas ciências empíricas. Resta, então, ao platonista no estilo Quine-Putnam explicar a natureza das entidades dessa nova teoria: essas entidades passam a existir? Como elas existem no mundo? Portanto, adotar essa alternativa não é, para Maddy, o melhor caminho a ser seguido. Segundo ela, há toda uma ontologia por trás das teorias matemáticas e essa ontologia, de acordo com ela, nos é dada por meio de uma percepção dessas entidades matemáticas através de um aparato sensório análogo àquele com o qual percebemos os objetos físicos.

Segundo ela, as entidades mais básicas da matemática, a saber, os conjuntos – uma vez que a teoria dos conjuntos seria nossa melhor teoria dos fundamentos da matemática, ou seja, a teoria que nos fornece as entidades mais básicas da matemática – seriam tão perceptíveis para nós quanto uma cadeira que está em uma sala.

De acordo com essa proposta, os objetos matemáticos (que são redutíveis aos conjuntos) devem ser compreendidos de uma maneira naturalista, i.e., como estando localizados no espaço-tempo. Desse modo, seríamos capazes de obter conhecimento deles através de nossa percepção sensível. Assim, quando falamos sobre conjuntos (entidades básicas matemáticas), estamos falando sobre "coisas" que estão localizadas onde objetos físicos estão localizados - um conjunto de canetas está exatamente onde estão várias canetas juntas, por exemplo. Vemos o conjunto de canetas quando vemos as canetas. Sentimos esse conjunto quando sentimos essas canetas e assim por diante. Assim sendo, a teoria dos conjuntos seria um contínuo das teorias científicas, ou seja, seriam parte daquilo que constituiria as teorias científicas, de modo que passa a fazer parte de um esquema teórico que pode ser confirmado empiricamente.

Sendo assim, Maddy rejeita a caracterização tradicional platonista de objetos matemáticos abstratos, “trazendo-os” para o mundo físico, de modo que podemos entrar em contato com eles através de nosso aparato cognitivo natural, tal como o fazemos com objetos físicos. Com isso, ela pretende dissolver o problema do acesso apontado por Benacerraf, por rejeitar também a noção de objetos matemáticos como acausais, pois, uma vez que eles se encontram localizados no mesmo lugar onde os objetos físicos estão, eles nos causam (ou geram) crenças perceptuais acerca desse reino matemático abstrato.

Além disso, Maddy concebe os números como propriedades de conjuntos, de modo que – uma vez compreendido que esses conjuntos são entidades localizadas espaço-temporalmente – ela acredita romper com a barreira ontológica e epistemológica postas por Benacerraf, dado que sua teoria dos números possui uma relação com o mundo físico. Ela não identifica números com conjuntos nem com qualquer tipo de objeto. Eles são propriedades de conjuntos e estes, por sua vez, são entidades perceptíveis espaço-temporalmente que têm por característica ter um número. Nesse sentido, a relação entre o número e o conjunto passa a ser explicada por ela como análoga àquela existente entre um objeto e sua medida. No caso explorado por Benacerraf acerca das séries de Zermelo e de von Neumann, essas séries funcionariam como diferentes sistemas de “medidas” da mesma coisa. Daí há, para ela, uma superação do problema de Benacerraf, na medida em que há, portanto, uma explicação da relação entre números e conjuntos e, além disso, há uma explicação da relação causal entre esses números e o mundo físico, já que conjuntos estão presentes nesse mundo.

Nesse sentido, aceitar números está no mesmo nível de admitir quaisquer propriedades teóricas que podem ser encontradas em qualquer teoria física. Para fazer isso, Maddy apela a teorias neurofisiológicas, apontando para o fato de que ainda que acreditemos que a percepção sensível de objetos físicos é não problemática, esta é muito mais complexa do que imaginamos. Ela envolve uma habilidade que é resultado de um longo e complexo processo de desenvolvimento neurofisiológico, que envolve alterações neurais do cérebro e uma aquisição de um conjunto complexo de células que servem como um "detector de objetos". Somos capazes de perceber objetos porque desenvolvemos tal detector[32]. Isto é, quando vemos um objeto, uma luz atinge uma parte específica de nossa retina, isso causa uma estimulação de alguns conjuntos de células e estes, por sua vez, nos fornecem uma imagem que nos permite afirmar que o que temos em nossa frente é uma cadeira, por exemplo. Algo análogo ocorre com os conjuntos. Temos, de acordo com ela, um "detector de conjuntos", que nos permite perceber de modo adequado e adquirir crenças legitimas – ou causalmente apropriadas – a respeito dos objetos matemáticos (MADDY, 2003, p.58). Com isso, como foi dito anteriormente, ela pretende ter resolvido o problema do acesso colocado por Benacerraf. E ela pretende, também, ter resolvido o problema da identidade na redução da sequência dos números naturais à sequências de conjuntos, uma vez que tais conjuntos devem ser vistos como que diferentes sistemas de medida de um mesmo objeto. É um mesmo objeto, mas visto de modos diferentes (MADDY, 2003, p. 89).

Alguns problemas podem ser levantados contra essa concepção de Maddy. Primeiro, é dificilmente aceitável que ela seja vista como platonista. Isso porque o que

[32] Maddy se vale aqui da teoria de Hebb, que explica o processo de aprendizagem por meio de uma adaptação neuronal do cérebro. Ela também se utiliza de alguns trabalhos de Piaget a respeito do desenvolvimento cognitivo.

define o platonismo é, de certa forma, a crença de que os objetos matemáticos abstratos são atemporais, não-espaciais e acausais, de modo que a mudança nessa caracterização de objetos matemáticos vai de encontro à crença básica platonista. Em segundo, sua teoria parece cair em algo muito próximo daquela de Mill, de acordo com a qual, conjuntos são abstraídos de objetos do mundo, concepção amplamente rejeitada.

Além disso, ela não consegue responder ao desafio epistemológico e tampouco supera o desafio da identificação. Isso porque essa concepção não explica totalmente como podemos apreender de modo completo os conjuntos, visto que, apesar de existirem no espaço-tempo, ainda assim eles possuem algo de abstrato em sua composição. Uma coisa são algumas canetas em cima de uma escrivaninha, outra é o conjunto que está naquele agrupamento de canetas, mas que é diferente e não se reduz a ser apenas aquelas canetas. Conjunto, como é entendido pelo platonismo naturalizado de Maddy, é algo abstrato, em um sentido não-padrão, que de alguma maneira compartilha o mesmo lugar no espaço-tempo que aquelas canetas em cima da escrivaninha. Porém, sendo assim, essa proposta não responde ao desafio de Benacerraf. Isso porque permanece a questão: como podemos de fato perceber aquilo que há de abstrato nos conjuntos, uma vez que tanto a parte física (as canetas) quanto a parte abstrata (o conjunto) causariam a mesma reação em nosso corpo? Ademais, se não conseguimos perceber aquilo que há de abstrato, não há como diferenciar e singularizar um conjunto como sendo *o* conjunto de canetas (BALAGUER, 2009, p. 54). Ou seja, não apenas o desafio epistemológico fica sem uma resposta satisfatória como tampouco o desafio referencial é respondido. Por isso, tal alternativa não parece ser uma alternativa viável ao platonismo.

2.2.4. Sem contato (I): Quine, Putnam e o argumento da indispensabilidade

Por fim, encontramos aqueles que optam por defender que temos conhecimentos de objetos abstratos, ainda que não tenhamos qualquer contato com eles. Eles se apoiam em um argumento inspirado por alguns dos escritos de Quine (2010; 2010b; 1981) e também alguns de Putnam (1971; 1985; 1995), que ficou conhecido como o “argumento da indispensabilidade Quine-Putnam”. Esse argumento possui vários tipos de apresentação, mas todas elas possuem um núcleo comum que pode ser exposto como se segue:

P1. Devemos nos comprometer ontologicamente com todas e apenas as entidades que são indispensáveis a nossas melhores teorias científicas.

P2. Entidades matemáticas são indispensáveis a nossas melhores teorias científicas.
Portanto:

C. Devemos nos comprometer ontologicamente com entidades matemáticas. (COLYVAN, 2001, p. 11)

Nos debates mais recentes em filosofia da matemática, ele é amplamente considerado como o melhor argumento em favor do platonismo. Esse argumento apela ao fato de que a matemática parece ser indispensável às ciências empíricas. A partir disso deveríamos acreditar na existência de entidades matemáticas do mesmo modo como acreditamos em outras entidades teóricas da ciência – como quarks, léptons e bósons –, uma vez que a evidência que confirma a existência destas últimas é a mesma evidência que confirma a teoria completa, ou seja, confirma também a existência das primeiras (COLYVAN, 2011).

Como é possível perceber pela apresentação do argumento, ele se fundamenta em duas doutrinas proeminentes nos trabalhos de Quine, a saber, o naturalismo e o holismo confirmacional[33]. O naturalismo é visto por Quine como uma doutrina que nega que haja uma "filosofia primeira", uma prioridade da filosofia com relação à ciência, e que exista um método melhor do que o método científico. Assim, na concepção naturalista de Quine, a filosofia é uma parte contínua da ciência, sendo que ambas partilham dos mesmos objetivos e do mesmo método (empírico), que é, de acordo com Quine, o melhor modo de descrever a realidade. Como afirma Colyvan:

> Essa doutrina surge de um profundo respeito pela metodologia científica e um reconhecimento do inegável sucesso dessa metodologia como um modo de responder a questões fundamentais sobre toda a natureza das coisas. (…) Para o metafísico, isso significa olhar para nossas melhores teorias científicas para determinar o que existe ou, talvez mais acuradamente, o que deveríamos acreditar que existe. Em resumo, o naturalismo exclui modos não científicos de determinar o que existe. (COLYVAN, 2001, p. 12-13)

Junto ao naturalismo encontramos também o holismo confirmacional como base que sustenta a premissa 1 do argumento da indispensabilidade. O holismo confirmacional é a concepção de que as teorias são confirmadas como um todo no "tribunal da experiência" (QUINE, 2010). Desse modo, se por meio do método científico são descobertas evidências empíricas que confirmam e justificam uma teoria, essas evidências confirmarão o todo dessa teoria, tanto sua parte empírica quanto sua parte não empírica (sua parte matemática, por exemplo). De acordo com isso, quando uma teoria física é admitida como a melhor na explicação de certos fenômenos físicos, se essa teoria é confirmada por experiências substantivas, então ela é confirmada como um todo. Isso significa que

[33] Mark Colyvan faz uma distinção entre holismo semântico e holismo confirmacional em Quine. Holismo confirmacional diz respeito à confirmação de teorias como um todo, enquanto que o holismo semântico refere-se à doutrina de que o significado não está em "uma única sentença, mas em um sistema de sentenças (e, em alguns casos extremos, no todo da linguagem) (COLYVAN, 2011). Para Colyvan, o holismo confirmacional é o único que interessa para o argumento da indispensabilidade.

inclusive a teoria matemática envolvida na teoria física será confirmada. Assim, se certos objetos são vistos como indispensáveis a essa teoria, então não há razões para não aceitar e acreditar na existência deles.

2.2.4.1. Críticas ao argumento da indispensabilidade:

Existem várias críticas ao argumento da indispensabilidade. Entre elas a de que ele não explica muito bem o que significa dizer que a matemática é indispensável às teorias científicas. Além disso, há muitas teorias matemáticas que não possuem qualquer aplicabilidade nas ciências naturais, como as que são estudadas na matemática pura. Logo, se seguimos o argumento da indispensabilidade, a matemática pura não passa de "recreação matemática, sem qualquer direito ontológico" (QUINE, 1986, pg. 400) , uma vez que trata de entidades que não fazem parte de qualquer conjunto de crenças empiricamente/cientificamente confirmadas. Nesse quadro, as entidades da matemática pura não podem ser admitidas como realmente existentes. Contudo, a matemática pura é vista como um importante ramo da matemática, não podendo, assim, ter sua importância reduzida a mera recreação dos matemáticos.

Outras críticas, desenvolvidas por Maddy (1992) e Sober (1993), apelam ao fato de que o argumento da indispensabilidade se vale de uma epistemologia naturalista, mas essa epistemologia não pode ser semelhante àquela da prática científica. Se este fosse o caso, seria preciso admitir que a matemática é contingente tal como qualquer outra ciência, pois ela dependeria de observações empíricas para confirmação de suas teorias. Outro ponto levantado contra o argumento da indispensabilidade por esses autores, e ligado a essa questão da confirmação empírica, é o de que as teorias matemáticas utilizadas em uma teoria científica precisam esperar pelo sucesso da teoria para que elas sejam admitidas como verdadeiras. Na prática, contudo, o cientista antecipadamente já toma como verdadeira a teoria matemática que ele utilizará em sua teoria científica. Ele não precisa confirmar a parte matemática por meio de uma comprovação da parte empírica de sua teoria. Por fim, podemos supor duas hipóteses científicas concorrentes M e M', tal que tanto uma quanto a outra se utilizam da mesma teoria científica. Diante disso, se a hipótese M se sobressai e é aceita como a melhor teoria, então temos que nos comprometer com a existência de seus objetos físicos e matemáticos. Uma vez que M' não foi confirmada como a melhor hipótese, então não precisamos nos comprometer com a existência de seus objetos. Contudo, dado que as duas hipóteses possuem a mesma teoria matemática de fundo, fica a questão: precisamos mesmo aceitar os objetos matemáticos postulados como de fato existentes? Novamente, se a resposta é sim devido a um apelo à confirmação empírica, então a matemática correria um grande risco de ser vista como contingente.

Visto isso, o argumento da indispensabilidade tal como formulado acima não parece dar conta dessas dificuldades. Contudo, tais críticas não abalaram aqueles que se utilizam do argumento da indispensabilidade, e este continua sendo visto como o mais influente na discussão atual sobre ontologia matemática. Isso porque, com algumas modificações, não fica claro que tais dificuldades não possam ser superadas. Como dito, ele continua sendo visto como o melhor argumento em favor do platonismo e, portanto, aqueles que sustentam uma posição contrária à platonista precisam dar conta de refutar ou, ao menos, contornar esse argumento. Caso contrário, a concepção platonista estará em vantagem em relação a outras posições na explicação da natureza, bem como da aplicabilidade da matemática nas ciências como um todo.

2.2.5. Sem contato (II): o platonismo pleno de Balaguer

Essa concepção é proposta por Mark Balaguer em alguns de seus trabalhos (1994; 1995; 1998; 2009). A ideia apresentada por ele é uma tentativa de oferecer uma resposta ao problema epistemológico de Benacerraf sem precisar explicar o acesso aos objetos matemáticos abstratos. De acordo com essa concepção, é possível sustentar um platonismo de objetos desde que se admita a existência de um reino matemático abstrato pleno, no qual todos os objetos matemáticos logicamente possíveis realmente existem. Se todos esses objetos de fato existem, então "todas as teorias matemáticas consistentes descrevem verdadeiramente alguma coleção de objetos matemáticos abstratos" (BALAGUER, 2009, pg. 59). Segundo Balaguer, tendo isso estabelecido, para explicar como chegamos a algum conhecimento matemático basta que saibamos se uma teoria puramente matemática é consistente ou não. Se ela for consistente, temos conhecimento matemático sem precisarmos estabelecer nenhum contato com o reino abstrato descrito por essa teoria. Tudo que precisamos, portanto, de acordo com Balaguer, é utilizar de nossa habilidade para de separar teorias consistentes das inconsistentes.

Assim, segundo Balaguer, o platonismo pleno [full blooded platonism] responde ao problema de Benacerraf, pois o contato com objetos abstratos não é relevante na formulação de teorias consistentes. Além do mais, o apelo à consistência é adequado também à reformulação do problema apresentado por Field (1989), pois ela seria um critério confiável para as crenças dos matemáticos com relação ao reino abstrato.

Seu argumento é que:

P1. O platonismo pleno pode explicar o fato de que seres humanos podem – sem ter contato com o reino matemático, formular teorias puramente matemáticas.

P2. Os seres humanos podem saber que muitas das teorias puramente matemáticas são consistentes.

P3. Se P2 é verdadeira, então o platonismo pleno pode explicar o fato de que, se matemáticos aceitam uma teoria puramente matemática T, então T é consistente.

Portanto,

C. O platonismo pleno pode explicar o fato que (como uma regra geral), se matemáticos aceitam uma teoria puramente matemática T, então T é consistente.

Levando em conta que,

P4. Se o platonismo pleno é verdadeiro, então toda teoria matemática puramente consistente verdadeiramente descreve parte do reino matemático, isto é, verdadeiramente descreve alguma coleção de objetos matemáticos.

Então,

C2. O platonismo pleno pode explicar o fato de que, se matemáticos aceitam uma teoria puramente matemática T, então T verdadeiramente descreve parte do reino matemático.

De acordo com Balaguer, o problema de Benacerraf-Field exige apenas uma resposta externalista. Para dar uma explicação externalista da confiabilidade das crenças de S, é preciso apenas explicar por que os métodos de S para adquirir crenças são, de fato, confiáveis. Usamos, segundo ele, nosso conhecimento da consistência das teorias puramente matemáticas para fixar nossas crenças puramente matemáticas, e qualquer método para fixar uma crença puramente matemática que seja limitado ao conhecimento da consistência é um método confiável.

Do mesmo modo como temos capacidade de obter conhecimento empírico acerca dos objetos físicos, do ponto de vista externalista podemos apelar para a percepção sensível para explicar nosso conhecimento. Nossa percepção nos fornece crenças confiáveis sobre os objetos físicos. Um internalista precisaria também explicar como S sabe que seus métodos de aquisição de crença são confiáveis, ou seja, apresentar uma explicação da confiabilidade das crenças de S pelas quais podemos também explicar como S pode confiavelmente acreditar que essa explicação é verdadeira. Mas o problema Benacerraf-Field não demanda tal explicação internalista.

Contudo, podemos elencar alguns problemas com o platonismo pleno de Balaguer. O primeiro deles é que o desafio de Benacerraf tem um componente semântico além do epistemológico. Para uma teoria puramente matemática ser bem sucedida ao descrever alguma parte do reino matemático, os termos daquela teoria devem com sucesso se referir a objetos no reino matemático. Mas não é claro como a linguagem humana poderia se referir a tais objetos abstratos. A epistemologia platonista de Balaguer depende crucialmente do sucesso da referência. Sem uma resposta adequada ao problema da referência para objetos abstratos, sua epistemologia não funciona.

Para responder ao problema da referência, Balaguer adota o que ele chama de 'platonismo da não-unicidade'. Não há apenas um objeto selecionado pelos termos matemáticos, vários objetos podem ser selecionados, dependendo da teoria adotada, pois essa teoria descreverá uma parte diferente do reino matemático. Tudo depende de uma concepção padrão compartilhada pelos matemáticos. Contudo, um objeto poderia, por exemplo, ocupar tanto a 'posição 3' quanto a 'posição 4' de diferentes sequências, mas apenas uma sequência poderia ser a sequência dos números naturais. Isso porque temos a concepção padrão de que um objeto que ocupa a 'posição 3' de uma sequência de números naturais deve ter a propriedade de ser 3 e qualquer objeto com essa propriedade não pode ter a propriedade de ser 4. Então, não é possível ignorar o problema da referência.

Além disso, se as propriedades e relações supostamente instanciadas pelos objetos no reino abstrato não desempenham nenhum papel na verdade dos enunciados matemáticos e nem nos teoremas de quaisquer teorias matemáticas consistentes, então para que adotar tal ontologia inflada do platonismo pleno?

Por fim, como apontado por Beall, em seu artigo From Full Blooded Platonism to Really Full Blooded Platonism, um platonismo realmente pleno – que aceitaria teorias consistentes e inconsistentes - seria mais adequado, pois há teorias inconsistentes na matemática:

> "tais teorias contém tanto A quanto ~A, para algum A na linguagem; esse é o lado inconsistente de tais teorias. A despeito disso, tais teorias não são

> triviais; isto é, há ao menos um B na linguagem tal que B não é um elemento da teoria. Tudo isso é capturado muito bem ao se notar que tais teorias são subscritas pelas assim chamadas lógicas paraconsistentes." (BEAL, 1999)

Segundo Beall, seria até possível defender essa teoria do platonismo pleno, mas se a consistência não é mais critério de conhecimento matemático, o problema epistemológico não é respondido. Além de que é preciso explicar melhor a tal "habilidade" que os matemáticos teriam para reconhecer teorias consistentes.

2.3. Conclusão:

Como podemos ver, o platonismo matemático, apesar de parecer ser mais intuitivo com relação à ontologia, ainda é muito mais problemático quando se trata da questão epistemológica, para a qual dificilmente consegue oferecer uma resposta clara e suficientemente satisfatória. Todas as versões apresentadas acima apresentam a mesma dificuldade quando consideramos a epistemologia envolvida. Apesar de o argumento da indispensabilidade da matemática ser bem aceito como uma perspectiva para o platonista, ele ainda assim deixa a desejar quando pensamos na tentativa de justificar a existência de objetos abstratos. Veremos que o anti-platonista pode jogar novamente para o platonista a questão de explicar a aplicabilidade da matemática diante do fato de que os objetos matemáticos não possuem qualquer relação causal com o mundo físico. Mas trataremos melhor desse assunto no próximo capítulo.

3. ENTRANDO NO MUNDO DAS FICÇÕES: O ANTI-PLATONISMO MATEMÁTICO

Neste capítulo discutiremos o anti-platonismo matemático, apresentando suas principais correntes e as objeções a cada uma delas. O anti-platonismo matemático pode ser entendido a partir de sua contraposição ao platonismo matemático. Uma vez que o platonista sustenta que existem entidades matemáticas abstratas, o anti-platonista sustenta ou que tais entidades não existem ou que existem, mas que não são abstratas. Com isso, os anti-platonistas pretendem evitar as dificuldades enfrentadas por aqueles que postulam a existência de entidades de natureza abstrata. Eles buscam responder ao problema ontológico, evitando se comprometer com um reino matemático abstrato e, ao negar essa natureza, também procuram evitar o problema epistemológico, uma vez que não há mistério em seu processo de obtenção de conhecimento matemático (que pode se dar por meio de provas, demonstrações, construções, etc.). Apesar dessas vantagens em comparação com o platonismo, ainda é bastante controverso se o anti-platonista consegue cumprir a exigência, apontada por Benacerraf em seu dilema, de oferecer uma semântica homogênea para a linguagem como um todo – ou apresentar uma boa explicação de que tal homogeneidade não é assim tão necessária. Veremos ao longo deste capítulo como cada corrente responde a essa questão e avaliaremos se alguma delas oferece de fato uma boa resposta.

3.1. O anti-platonismo matemático: realismo e anti-realismo

Ao longo da história da filosofia matemática surgiram várias versões de anti-platonismo. Como dissemos acima, algumas defenderam a não existência de entidades matemáticas e outras defenderam que estas existem, mas não são abstratas. Esta última versão de anti-platonismo pode ser lida como uma espécie de concepção realista em certo sentido. Isso porque, embora o realismo seja melhor definido como a crença na existência de uma realidade objetiva (independente do sujeito), ele pode também ser compreendido como a postura que afirma que as teorias matemáticas são descrições verdadeiras de certos objetos – no caso do platonista, objetos matemáticos abstratos, mas no caso do anti-platonista, de objetos concretos ou mentais. Um exemplo desse tipo de anti-platonista é o fisicalismo de Stuart Mill. Ele sustenta que a matemática trata de objetos físicos e é, portanto, uma ciência empírica como qualquer outra ciência. Para Mill, por exemplo, uma proposição do tipo “2+3=5” não se refere aos objetos abstratos 2, 3 e 5. Essa proposição apenas expressa algo como “se, em um campo, vemos 2 cabras e, então, aproximam-se mais 3 cabras, teremos no campo um total de 5 cabras”, cuja referência, para o fisicalista, é o grupo de cabras (objetos concretos/físicos) e não objetos matemáticos abstratos.

Temos entre tais concepções anti-platonistas também o psicologismo, como o de Husserl, para o qual a matemática versa sobre objetos ou construções mentais, ou seja, a proposição “2 é um número par” faz referência a ideia de 2 presente em nossa mente e a expressão “2+2=4” é uma construção mental a partir das ideias de 2 e 4.

Essas versões de anti-platonismo se propuseram a explicar a matemática sem envolver elementos platonistas. Contudo, nem todas conseguiram se desvencilhar de problemas, de modo a se sobrepor ao platonismo. O fisicalismo não deu conta de explicar: (i) a infinitude, pois não parece haver infinitos objetos na realidade, algo que as teorias matemáticas parecem exigir[34]; (ii) o fato de que há infinitos conjuntos que correspondem a cada objeto físico, de modo que se pode afirmar que há algo que, apesar de estar de algum modo relacionado com tais objetos, ainda assim não é da mesma natureza desses objetos (pode ser que seja de uma natureza abstrata); e, por fim, (iii) se a matemática é uma ciência empírica que trata apenas de entidades físicas, então ela pode ser contingente e passível

[34] Philip Kitcher desenvolve um tipo de empirismo ao estilo de Mill, mas procura superar essa dificuldade a respeito da finitude humana postulando um agente ideal que seria capaz de realizar cálculos infinitos.

de ser falseada (BALAGUER, 1998, pgs. 106-107).

Tampouco o psicologismo resiste às críticas, principalmente as de Frege (1884). Ele não consegue explicar: (i) a infinitude, novamente, porque a matemática exige o infinito, mas a mente é finita; (ii) o erro matemático, pois se alguém afirma que "2+2=5", pode ser que ele esteja dizendo que a ideia de 2 que ele tem em sua mente é compatível com tal cálculo. Uma vez que "ser uma ideia na mente" pode resultar em que cada um possua uma ideia diferente particular, então tal sujeito não estaria errado; (iii) ele incorre no fato de que a matemática seria contingente e seus objetos passíveis de serem destruídos, uma vez que ela lida com objetos que estão na mente humana, se a raça humana se extinguisse, a matemática se extinguiria com ela; e, por fim, (iv) o psicologismo não explica como a matemática é aplicada nas ciências naturais, pois não é possível estabelecer uma relação entre as ideias na mente e a realidade física (BALAGUER, 2009, pgs. 82-83). Diante dessas dificuldades, nem o fisicalismo nem o psicologismo se mostram alternativas válidas contra o platonismo. Ao longo desta tese iremos, portanto, nos dedicar mais a outra versão anti-platonista, a saber, a que afirma que definitivamente não existem objetos matemáticos.

Dentro dessa versão, encontramos várias correntes. Entre elas o convencionalismo, para o qual as proposições matemáticas são analiticamente verdadeiras, i.e., são verdadeiras em virtude apenas do significado das palavras que as compõem; o formalismo, que sustenta que a matemática é um jogo de manipulação de símbolos ou de sistemas formais; o dedutivismo, que vê as verdades matemáticas como dependentes de deduções no interior de um sistema (BALAGUER, 2009, pp. 81-3). Por fim, e mais importante para esse trabalho, temos o nominalismo, que afirma que objetos matemáticos não existem.

O convencionalismo, o formalismo e o dedutivismo não se mostram alternativas viáveis, pois não conseguem explicar a aplicabilidade da matemática, uma vez que a consideram apenas de um ponto de vista formal. Além disso, relembrando que o melhor argumento em favor do platonismo é o "argumento da indispensabilidade", para que alguma concepção anti-platonista seja bem-sucedida ela precisa contornar ou refutar esse argumento. No entanto, nenhuma daquelas versões de anti-platonismo consegue realizar essa tarefa. A única versão que, atualmente, é vista como a melhor ao tentar dar conta de tal argumento é o nominalismo matemático. Como veremos mais adiante, ele apresenta argumentos específicos para lidar com a aplicabilidade e com a indispensabilidade da matemática. Por isso é que nos dedicaremos mais detalhadamente a essa corrente nesta tese.

3.2. Nominalismo matemático:

O nominalismo matemático é uma concepção que nega a existência de objetos matemáticos. Contudo, ela aceita que o argumento da indispensabilidade é um dos mais fortes argumentos a serem superados para que o anti-platonismo obtenha sucesso. Sendo assim, ela reconhece que é preciso lidar com esse argumento, de forma a oferecer uma postura sólida em filosofia da matemática.

As teorias nominalistas em geral seguem dois caminhos para lidar com o argumento da indispensabilidade: elas sustentam que (i) a matemática não é indispensável às ciências; ou que (ii) apesar de indispensável, é possível explicar essa indispensabilidade sem se comprometer ontologicamente com qualquer entidade. O primeiro caminho é seguido por Hartry Field ao propor seu ficcionalismo e por Geoffrey Hellman com seu estruturalismo modal, e foi chamado por alguns autores de "difícil estrada para o nominalismo"[35], pois implica em uma reformulação do discurso matemático em uma linguagem nominalizada para evitar comprometimento ontológico. O segundo modo é escolhido por Balaguer ao expor seu tipo de ficcionalismo e por Azzouni ao propor um nominalismo deflacionário,

[35] Cf. AZZOUNI (2012); COLYVAN (2010) e BUENO (2012).

posições que não pressupõem uma reformulação do discurso matemático. Tal caminho foi chamado de a “estrada fácil para o nominalismo”[36]. Apresentaremos, na sequência, cada uma dessas versões, explorando suas vantagens e desvantagens.

3.2.1 “A difícil estrada para o nominalismo”:

3.2.1.1. O ficcionalismo matemático:

O ficcionalismo matemático é uma concepção nominalista que sustenta que: como o platonismo sugere, as proposições e teorias matemáticas se referem a objetos matemáticos abstratos. Contudo, não há objetos matemáticos abstratos. Logo, as proposições e teorias matemáticas são falsas (BALAGUER, 2010). De acordo com essa ideia, enunciados como “2 é um número primo” são, assim como enunciados do tipo “Harry Potter é um bruxo”, falsos. Da mesma forma que o enunciado “Harry Potter é um bruxo” é falso por Harry Potter não existir, enunciados matemáticos são falsos porque não existem entidades matemáticas às quais eles fazem referência. Os únicos enunciados considerados verdadeiros pelos ficcionalistas são aqueles negativos, mas apenas porque eles são vacuamente verdadeiros. Por exemplo, “não há o maior número primo” é vacuamente verdadeiro, pois, uma vez que não existem entidades matemáticas, então de fato não há o maior número primo. Contudo, ainda existe um sentido no qual os ficcionalistas admitem que os enunciados matemáticos são verdadeiros, a saber, quando estes são tomados no interior da estória da matemática. Do mesmo modo pelo qual podemos considerar que Harry Potter existe no interior do universo das estórias de J.K. Rowling – e, portanto, em algum sentido pode ser dito que “Harry Potter é um bruxo” é verdadeiro – os enunciados da matemática podem ser ditos

[36] IDEM.

verdadeiros quando são considerados como parte da estória da matemática. Outro ponto importante a ser ressaltado é que, ainda que o ficcionalista considere os objetos matemáticos como ficcionais, isso não significa que para ele qualquer coisa é válida no discurso matemático. A introdução de novos personagens (objetos matemáticos) deve ser feita apenas se esta respeitar a coerência da estória feita até então.

Apesar de ser uma visão bastante contra intuitiva, por afirmar que as proposições e teorias matemáticas são falsas, o ficcionalismo apresenta algumas virtudes. Em primeiro lugar, ele oferece uma semântica uniforme para os enunciados matemáticos e não matemáticos. Ambos os enunciados são considerados pelo seu valor de face (at face value). Como vimos no exemplo acima, o mesmo padrão de condições de verdade é adotado para ambos, em virtude de eles possuírem a mesma estrutura. Isto é, proposições do tipo (i) “O elefante é maior que a formiga” e (ii) “3 é maior que 2” são vistas como possuindo a mesma estrutura, de modo que terão condições de verdade semelhantes, sendo que (i) é verdadeiro e (ii) falso, em virtude de existirem formigas e elefantes, mas não existirem o número 3 nem o 2.

Em segundo lugar, essa concepção não precisa enfrentar o problema ontológico, que é o problema de “especificar a natureza dos objetos com os quais uma concepção filosófica da matemática está ontologicamente comprometida” (BUENO, 2013), visto que não se compromete ontologicamente com qualquer entidade. Além disso, o ficcionalismo também resolve o problema epistemológico, de saber como obtemos conhecimento dos objetos matemáticos. Isso porque o ficcionalista afirma que não há nada para saber além da estória que é feita em matemática. Sabemos que “2 é um número par”, porque o 2 é considerado como que uma personagem na estória da aritmética e basta conhecermos as partes relevantes dessa estória para sabermos que esse enunciado é verdadeiro. Para o ficcionalista, não é preciso apelar para mais nada além disso (COLYVAN).

Essa concepção foi introduzida por Hartry Field em seu livro Science Without Number

(1980), no qual ele empreende um projeto de nominalização da ciência, tentando mostrar que a matemática não é indispensável às ciências, como afirmam os platonistas que se valem do argumento da indispensabilidade[37], mas que mesmo assim ela é perfeitamente aplicável às ciências. O projeto de Field possui, então, dois momentos. O primeiro é mostrar que a matemática é dispensável às teorias científicas, que é possível fazer ciência sem qualquer referência a objetos matemáticos abstratos. Para isso, Field procura nominalizar a teoria da gravitação de Newton. Ele procede adotando uma postura substantivista sobre o espaço-tempo e, então, explicando a gravitação sem falar de números, funções, etc., falando diretamente sobre relações de pontos (ou regiões) no espaço-tempo, comparando-os conforme seu potencial gravitacional. Para isso ele também se serve de uma sugestão de Hilbert para a axiomatização da geometria, que "dispensa conceitos métricos e, portanto, não inclui qualquer quantificação sobre números reais" e atua por meio de uma abordagem relacional, utilizando-se de conceitos como 'ponto', 'estar entre' e 'congruência' (BUENO, 2013).

O segundo momento é mostrar que mesmo ao adotar tal postura, sustentando um estatuto ficcional da matemática, ainda assim é possível aplicar a matemática na ciência. Isso é possível, segundo Field, porque a matemática possui um caráter conservativo, i.e., as premissas nominalistas (ficcionais) da matemática não "infectam" o resultado da teoria científica na qual ela é aplicada. Ela não acrescenta nem extrai nada da ciência que a utiliza. Sua aplicabilidade nas ciências apenas facilita o trabalho científico.

Embora seja reconhecido como um passo importante para o nominalismo, o projeto de Field sofreu sérias objeções[38]: ele aparentemente não pode ser aplicado à mecânica quântica, ele depende de uma aceitação não muito justificada do substantivismo do espaço-tempo, entre outras. Com isso, outros ficcionalistas procuram reformular sua teoria, a fim

---

[37]Contudo, é preciso ter em mente o que Colyvan aponta: "Field não advoga fazer ciência sem matemática; ele advoga simplesmente que a ciência *pode* ser feita sem matemática" (COLYVAN, 2011, p. 6).

[38] Cf. MALAMENT (1982).

de tentar evitar tais objeções. Um deles, como veremos mais adiante, foi Mark Balaguer (1996), que tentou mostrar que é possível nominalizar a mecânica quântica e lidar com as dificuldades levantadas contra o projeto de Field. Mas como a proposta de Balaguer é um tanto diferente dessa de Field, trataremos dela na seção em que abordaremos o segundo modo de lidar com o argumento da indispensabilidade.

Por agora, vejamos outra proposta que nega a indispensabilidade da matemática e propõe uma revisão do discurso matemático.

3.2.1.2. O estruturalismo eliminativista:

Como já dito antes, na seção 1.2.3, o estruturalismo concebe a matemática como a ciência da estrutura, de modo que ela não lidaria com objetos, mas sim com estruturas e propriedades estruturais, descrevendo suas relações em determinados domínios (como a estrutura da sequência dos números naturais estudadas na aritmética). O estruturalismo se divide em eliminativista (nominalista) e não eliminativista (platonista). Tratamos deste último também na seção 1.2.3, em sua abordagem feita por Shapiro e Resnik. Nesta seção, trataremos da versão eliminativista do estruturalismo, que sustenta que as estruturas não são abstratas. Abordaremos o estruturalismo modal de Geoffrey Hellman e o construtivismo modal de Charles Chihara.

3.2.1.2.1. Estruturalismo modal:

O estruturalismo modal, tal como proposto por Geoffrey Hellman, sustenta que: (i) o objeto de estudo da matemática são as estruturas; (ii) não há referência a objetos matemáticos, pois a matemática deve ser interpretada em termos de estruturas *possíveis* – sem comprometimento ontológico; (iii) enunciados matemáticos possuem condições de verdade genuínas e não vácuas, que se sustentam independentemente da mente do matemático (em certo sentido não platonista, como veremos mais adiante).

A ideia geral do estruturalismo modal é afirmar que a matemática é o estudo de estruturas. Mas, diferentemente de outros tipos de estruturalismo, essas estruturas não são consideradas efetivas, atuais, e sim apenas possíveis. Desse modo, a interpretação modal não se compromete nem com objetos, nem com estrutura-objetos, nem com objetos que possam vir a constituir essas estruturas, como o fazem os estruturalistas não-eliminativistas.

Para evitar de se comprometer ontologicamente com qualquer tipo de entidade indesejada, a interpretação estrutural modal procura reformular o discurso matemático em linguagem modal de segunda ordem baseada no sistema S5 – uma vez que esse sistema possui o axioma da euclidianidade, que pode ser expresso como $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$, ou seja, se é possível que A, então é necessariamente possível que A –, porém sem a fórmula de Barcan ($\Diamond \exists x Fx \rightarrow \exists x \Diamond Fx$). Além disso, Hellman adota os operadores modais da necessidade e da possibilidade como primitivos, para evitar a necessidade de uma caracterização mais detalhada de tais operadores em termos de modelos e mundos possíveis, comprometendo-se ontologicamente com esses objetos.

A estratégia do autor é, então, colocada em prática através de dois passos. O primeiro deles é apresentar uma tradução das afirmações matemáticas comuns em enunciados hipotéticos da forma:

Se houvesse qualquer sequência ordinária, S se sustentaria nessa sequência.

A tradução sugerida por Hellman seria, então, em linguagem modal:

$$\Box \forall X \, (X \text{ é } uma\ sequência\ \omega \ \rightarrow S\ se\ sustenta\ em\ X)$$

Ou seja, se houvesse uma sequência apropriada para um enunciado matemático S, S se sustentaria nessa sequência. Hellman chama esse elemento de "componente hipotético" da interpretação estruturalista modal (HELLMAN, 1989, p. 16). Contudo, essa tradução enfrenta o problema da vacuidade, pois caso não haja qualquer sequência ω, o enunciado permanece verdadeiro, mas apenas vacuamente verdadeiro, o que não é interessante para ele.

O estruturalista modal não quer se comprometer com objetos matemáticos abstratos, pois estes apresentam o problema do acesso. Mas os objetos concretos podem ser finitos, de modo que o universo pode não conter objetos físicos o suficiente para todos os ramos da matemática. Se não há objetos o suficiente, então o antecedente do componente hipotético será falso. Contudo, isso não falseia o condicional todo, mas o torna vacuamente verdadeiro. Para evitar tal resultado, Hellman adiciona um segundo elemento, que é o que ele chama de "componente categórico" (HELLMAN, 1989, p.27), que afirma que tais estruturas são logicamente possíveis ou:

$$\lozenge\ \exists X\ (X\ \text{é}\ uma\ sequência\ \omega)$$

Que afirma que é logicamente possível que exista uma sequência apropriada. Conjuntamente com o componente hipotético, temos que:

1. Se houvesse uma sequência ω, S (o enunciado matemático) se sustentaria.
2. Possivelmente há uma sequência ω.
3. Logo, S se sustenta em ω.

Com isso, as traduções matemáticas da interpretação estruturalista modal preservam sua verdade sem o custo ontológico de se comprometer com entidades indesejadas, uma vez que pressupõem apenas a possibilidade da existência das estruturas matemáticas em questão.

Como dito acima, ambos os componentes são expressos em linguagem de segunda ordem no sistema modal S5, mas sem a fórmula de Barcan:

$$\Diamond \exists X F X \rightarrow \exists X \Diamond F X$$

Pois, com a fórmula de Barcan, o componente categórico implicaria em:

$\exists X \Diamond (X \text{ é } uma\ sequência\ \omega)$

Que Hellman obviamente não quer, pois isso implicaria dizer que existe uma possível sequência ω, e ele não quer que sua formulação envolva a afirmação sobre a existência de qualquer tipo de estrutura.

Com esses dois elementos, Hellman pretende dar conta de oferecer uma interpretação da matemática que evita o comprometimento com entidades abstratas – uma vez que não assume as estruturas como realmente existentes -, que resolve o problema epistêmico – uma vez que o que é conhecido são as estruturas -, e que, além disso, encara a matemática literalmente e como verdadeira. Com isso ele pretende ter respondido todos os problemas levantados por Benacerraf.

O estruturalismo modal parece possuir, então, a vantagem de eliminar o comprometimento ontológico. Contudo, se olharmos cuidadosamente, ele ainda parece não ter sido tão bem-sucedido ao responder a todas as questões apresentadas por Benacerraf. Primeiro, ele parece não conseguir oferecer uma semântica uniforme, pois as teorias matemáticas exigirão a utilização de operadores modais, coisa que as teorias científicas não exigem. Segundo, ele não encara o discurso matemático literalmente, uma vez que este pode estar comprometido com objetos e estruturas abstratas os quais Hellman quer evitar. Ele acaba por criar um discurso ‘paralelo’, dado que a prática matemática comumente não invoca os operadores modais introduzidos pelo estruturalista. Por fim, quanto à epistemologia, a interpretação modal resolve em parte o problema sobre o conhecimento matemático. Contudo, ele gera um outro problema, uma espécie de regresso, pois precisa explicar o conhecimento da possibilidade de estruturas relevantes, e esse conhecimento pode exigir o conhecimento de partes mais substanciais da matemática. Para conhecer, por exemplo, se uma determinada estrutura matemática de uma teoria é possível, temos que saber se a teoria em si é consistente. No entanto, a consistência dessa teoria pode ser estabelecida apenas em outra teoria, cuja consistência, por sua vez, precisa ser estabelecida, e assim por diante. Isso não significa que o estruturalista não tem uma epistemologia razoável para a matemática, significa apenas que é preciso de alguns desenvolvimentos e refinamentos dessa epistemologia para que ele enfrente de modo mais contundente o problema epistêmico da matemática.

Recapitulando. Diante da resposta da questão acerca da existência de objetos matemáticos, Benacerraf apresenta alguns problemas das abordagens da filosofia da matemática: o problema epistêmico e o semântico ou referencial. Vários autores apresentaram teorias em resposta a esses problemas e uma delas é a abordagem estruturalista que se divide em não-eliminativista (ou platonista) e eliminativista (ou nominalista). A não-eliminativista sustenta que a matemática é o estudo de estruturas que realmente existem, são abstratas e seus lugares são objetos genuínos (abstratos também). A verdade dos enunciados matemáticos fica assim garantida por referência a essas entidades abstratas. Contudo, essa abordagem ainda apresenta dificuldades em responder o problema epistemológico do platonismo tradicional, pois não explica de forma clara como obtemos conhecimento dessas entidades, a saber, as estruturas abstratas. Uma opção a essa concepção é a abordagem estruturalista modal (que é eliminativista), proposta por Geoffrey Hellman. Segundo ele, a matemática não lida com objetos, mas sim com estruturas logicamente possíveis. Sendo assim, os enunciados matemáticos preservariam seu valor de verdade, independentemente da mente dos matemáticos e da existência de quaisquer objetos que preencham tais estruturas. Para estabelecer esse resultado, Hellman propõe entender as sentenças matemáticas como sentenças elípticas que podem ser traduzidas em sentenças mais longas em linguagem de segunda ordem S5 (sem a fórmula de Barcan). Essa tradução possui um componente hipotético – que estabelece que se existisse uma sequência, certo enunciado se sustentaria nessa sequência –, e um componente categórico – que afirma a possibilidade da sequência – que evita a vacuidade.

Contudo, apesar de a interpretação estruturalista modal apresentar algumas vantagens com relação às abordagens platonistas, alguns problemas ainda permanecem não respondidos de maneira suficiente, de modo que é preciso analisar com mais cuidado para ver se essa interpretação realmente é promissora.

3.2.1.2.2. Construtivismo modal:

O construtivismo modal é uma proposta de Charles Chihara, apresentada em suas principais obras Constructibility and Mathematical Existence (1990) e A Structural Account of Mathematics (2004). De acordo com sua proposta, a principal característica de qualquer afirmação matemática é seu conteúdo estrutural. Mas, ao contrário dos estruturalistas realistas e indo ao encontro da postura eliminativista, Chihara quer evitar a postulação de estruturas abstratas. Ou seja, ele procura conciliar estruturalismo e nominalismo através de uma ideia de uma teoria da construtibilidade [*constructibility theory*]. De acordo com Chihara, essa teoria é poderosa o bastante para capturar o conteúdo estrutural de toda a matemática que é aplicada na ciência, o que poderia acomodar o argumento da indispensabilidade perfeitamente.

Em linhas gerais, a teoria da construtibilidade é uma redução da matemática à teoria dos tipos. Cada afirmação de existência, por exemplo, a de que existe um conjunto de objetos com propriedade F, é substituído pela afirmação de que é possível construir uma sentença aberta correspondente, a saber, ‘Fx’. Estas sentenças abertas que podem ser construídas pela teoria da construtibilidade, são sentenças símbolos [*tokens*] que são preenchidas não por objetos atuais, mas por objetos possíveis (aqui entendidos como logicamente possíveis), evitando, assim, a referência a quaisquer entidades abstratas.

O objetivo de Chihara é estender essa ideia de uma interpretação nominalista para uma teoria simples dos tipos com infinitude. Consideremos uma teoria T sobre conjuntos. Sua linguagem $\mathcal{L}$ é constituída de variáveis x, y, z, ..., relacionadas a indivíduos, outras variáveis diferentes X, Y, Z, ..., relacionadas a conjuntos de indivíduos, e ainda outros tipos adicionais de variáveis cobrindo conjuntos de conjuntos de indivíduos, e assim por diante, com símbolos para cada elemento. Como um primeiro passo, podemos reinterpretar T em uma teoria T* de sentenças abertas. Sua linguagem $\mathcal{L}$ * tem variáveis x, y, z, ..., relacionada a indivíduos, outras variáveis α, β, γ, ..., relacionadas a sentenças abertas. A noção de um objeto x sendo um elemento de um conjunto X é substituída pela noção de um objeto x satisfazendo uma sentença aberta α, e do mesmo modo podemos aplicar em níveis mais altos. Contudo, não há axiomas da extensionalidade, dado que, enquanto conjuntos distintos não podem ter exatamente os mesmos indivíduos como elementos, sentenças abertas distintas podem ter exatamente os mesmos indivíduos as satisfazendo. Tais sentenças abertas são ditas como sendo coextensivas. Por causa da ausência do axioma da extensionalidade, não podemos obter uma interpretação de T em T* simplesmente substituindo X, Y, Z, ... pelas variáveis $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ e símbolos para os elementos por símbolos de satisfação. É preciso também substituir asserções de identidade X=Y por asserções de coextensividade $\alpha \equiv \beta$; e isso deve ser feito para todos os níveis mais altos. Mas, segundo

Chihara, isso pode ser feito, e no final se pode obter uma interpretação de T em T*.

Contudo, para ele, esse é apenas o início para uma interpretação nominalista de T. Isso porque, se 'sentenças abertas' são consideradas como sendo tipos abstratos, então elas são presumivelmente inaceitáveis aos nominalistas, uma vez que se elas são consideradas como *tokens* concretos, então o axioma da infinitude é inaceitável, dado que certamente não há tantos tokens concretos como o axioma afirma. Assim, como afirma Chihara, um segundo passo é necessário. Nesse passo, os quantificadores de $\mathcal{L}$*, a saber, 'existe um indivíduo x', 'existe uma sentença aberta α', e assim por diante, precisam ser substituídos por quantificadores modalizados, equivalentes a 'poderia existir um indivíduo x', 'poderia existir uma sentença aberta α', e assim por diante, para obter uma nova linguagem $\mathcal{L}$**. O axioma de que existem infinitamente muitos indivíduos pode ser substituído pelo axioma de que poderiam existir infinitamente muitos indivíduos. Ao invés de axiomas sobre a existência atual de sentenças abertas que são satisfeitas por vários indivíduos, temos a substituição por axiomas sobre a existência *possível* de sentenças abertas que, se existissem, seriam satisfeitas por vários indivíduos que existem ou que poderiam ter existido. Desse modo, os axiomas de T* podem ser substituídos pelos axiomas da nova teoria T**. E o que resulta disso é uma interpretação da teoria T em uma teoria T** que não afirma a existência atual de nada, ou seja, como era a pretendido, uma teoria que não possui nenhum comprometimento ontológico.

Apesar de promissora ao evitar alguns problemas da filosofia da matemática, a proposta construtivista, assim como a proposta estruturalista em geral, ainda carece de uma melhor perspectiva com relação ao fato de que demanda uma tradução de toda a linguagem matemática existencial para uma linguagem modal. Sendo assim, perde-se a uniformidade semântica com o resto do discurso científico e ordinário, o que cria um caminho bem mais complicado para o nominalista.

3.2.2. “O caminho fácil para o nominalismo”

Outro modo adotado por alguns nominalistas (Azzouni, 2004; Balaguer, 2009) é seguir o segundo dos caminhos indicados anteriormente. Ou seja, eles defendem que a matemática é indispensável, mas que isso não implica a existência de qualquer entidade. Para eles não há qualquer compromisso ontológico ao se admitir a indispensabilidade da matemática. Portanto, não é preciso revisar o discurso matemático para adequá-lo a uma linguagem sem compromisso ontológico. O que muda na visão de cada um é o modo de explicar isso, como veremos nas próximas seções.

3.2.2.1. O ficcionalismo de Balaguer:

Mark Balaguer advoga um tipo de ficcionalismo no qual tenta reabilitar aquele de Field, com algumas ressalvas. De acordo com ele, o ficcionalismo seria a melhor opção anti-platonista ao tentar resolver os problemas colocados pela literatura em filosofia da matemática.[39] O que seria necessário ao ficcionalismo é mudar o foco daquilo ao qual ele foi proposto. Quando Field propõe seu tipo de ficcionalismo, ele o faz tendo em vista a tentativa de mostrar que é possível nominalizar as teorias físicas, recusando a premissa do argumento quineano de que a matemática seria indispensável às ciências empíricas. Field procura colocar em prática tal ideia, porém esta se mostra ineficaz quando aplicada à

[39] Ainda que, em seu livro Platonism and Anti-Platonism in Mathematics (1999), Balaquer sustente que não há nenhum fato que possa estabelecer se existem ou não objetos matemáticos abstratos, de modo que não é possível colocar um fim decisivo na discussão entre platonistas e anti-platonistas. A única coisa possível, segundo ele, é estabelecer qual seria a melhor explicação platonista e qual a melhor anti-platonista que, em sua concepção são, respectivamente, o platonismo pleno e o ficcionalismo.

Mecânica Quântica, e isso se mostra um problema crucial para seu projeto nominalista.[40] Contudo, Balaguer afirma que mostrar que a matemática é indispensável às ciências empíricas não é a principal tarefa a ser feita. O que deveria fundamentalmente ser feito é explicar a *aplicabilidade* da matemática, independentemente dessa aplicabilidade ser indispensável ou não. Não é, segundo ele, que a indispensabilidade não deva ser explicada. Seu ponto é que a explicação da aplicabilidade é mais importante nesse contexto do que a explicação da indispensabilidade (BALAGUER, 1999, p.129).

A importância fundamental de focar na aplicabilidade se dá porque, de acordo com Balaguer, o argumento da indispensabilidade é utilizado como um desafio ao anti-platonista, pois este teria dificuldades em explicar como uma ficção, algo não verdadeiro, seria aplicável às teorias sobre o mundo físico. Em suas palavras: *a ideia é que se a matemática fosse realmente fictícia, não deveríamos esperar que ela fosse mais aplicável à física do que* Oliver Twist *é* (BALAGUER, 1996, p.291). O que estaria por trás de tal argumento é que os platonistas seriam capazes de explicar a aplicabilidade da matemática pela mera afirmação de que ela é verdadeira. Contudo, segundo Balaguer, é preciso mais do que isso para oferecer uma explicação aceitável da aplicabilidade. É preciso explicar a *relevância* da aplicação das teorias matemáticas às teorias físicas, explicitar qual a relação entre objetos matemáticos e teorias físicas. Isto porque os platonistas sustentam o que ele chama de *princípio do isolamento causal* (PCI), que afirma que não há interações causais entre objetos matemáticos e objetos físicos, uma vez que objetos matemáticos existem fora do espaço-tempo. Com isso ele questiona como teorias matemáticas seriam relevantes para teorias físicas, uma vez que não há fatos matemáticos que sejam causalmente relevantes aos fatos físicos.

Um exemplo utilizado por ele é o de considerarmos um sistema físico S a 40ºC. Quando

[40] Balaguer tenta mostrar que é possível nominalizar a Mecânica Quântica ao estilo proposto por Field, mas que isso não seria essencial para um projeto ficcionalista pelas razões que trataremos a seguir.

expressamos esse fato, não estamos expressando nem um fato puramente matemático nem um fato puramente físico, mas sim um fato misto (físico-matemático) no qual o sistema S mantem uma certa relação com o número 40. Sendo um fato misto, é preciso explicar o que essa relação C(S,40) tem a ver com o fato puramente físico da temperatura de S. Se o platonista afirma que a relação é de representação, ou seja, que o número em si não é causalmente relevante para os sistemas físicos de temperatura, mas que ele ajuda a expressar um fato puramente físico sobre a temperatura – uma vez que foi admitido o PCI –, então poderia ser argumentado que o uso dos números ali são dispensáveis, já que poderíamos nominalizar tais asserções afirmando que elas não possuem relações com números, mas sim com outros objetos que são mais quentes ou mais frios. Poderiam ser estabelecidos, assim, predicados nominalistas como "mais quente que" ou "mais frio que" que dariam conta perfeitamente de definir estruturas empíricas. Sendo assim, a matemática poderia não ser totalmente indispensável às teorias físicas. Portanto, a indispensabilidade não pode ser colocada como o principal problema do ficcionalista. Mas a explicação da aplicabilidade pode ser colocada como uma questão ao platonista.

Para dar conta da explicação da aplicabilidade de um ponto de vista ficcionalista, Balaguer advoga em favor de um tipo de *realismo científico nominalista*, que é a visão de que o conteúdo nominalista da ciência empírica é – em sua maior parte – verdadeiro, enquanto que o conteúdo platonista é falso. Ele defende: *"(NC) a ciência empírica tem um conteúdo puramente nominalista que captura sua "figura completa" do mundo físico*" (1999, p.131). Seu argumento para NC está baseado no princípio do isolamento causal, já enunciado acima. Ele afirma que tanto platonistas quanto anti-platonistas aceitam o PCI. Assim, ambos deveriam concordar que ciência empírica não estabelece qualquer papel causal aos objetos matemáticos. Uma vez aceito isso, é preciso aceitar também que aquilo que ciência empírica diz e prediz sobre o mundo físico poderia ser verdadeiro mesmo que não existisse nenhum objeto matemático.

Para isso fazer sentido, eles deveriam ser capazes de admitir contrafactuais que comecem com ‘Se não houvesse nenhum objeto matemático...’. Porém, a maior parte dos platonistas pensa que os enunciados matemáticos são necessariamente verdadeiros, de modo que um platonista rejeitaria de início tais contrafactuais. Contudo, Balaguer afirma que enunciados de existência matemática (e.g. ‘o conjunto vario existe’) não são nem conceitualmente nem logicamente necessários. Ele dispensa necessidade metafísica nos fundamentos de que “*nós não temos qualquer explicação bem motivada sobre em que consiste a suposta necessidade metafísica”* (1999, p. 154). Sem tal explicação, nós não temos nenhuma razão para pensar que enunciados de existência matemática são metafisicamente necessários e, daí, contrafactuais envolvendo sua negação deveriam ser admissíveis.

A dispensa de Balaguer da necessidade metafísica não é tão superficial. Contudo, em favor do argumento, consideremos sua suposição de que enunciados de existência matemática são contingentes. Podemos, então, dar sentido para a afirmação de que o que a ciência empírica diz sobre o mundo físico seria verdadeiro mesmo se não houvesse quaisquer objetos matemáticos. Assim, tanto platonistas quanto anti-platonistas precisam explicar a aplicabilidade da matemática. Para platonistas, a questão diz respeito a razão pela qual a matemática é relevante para a teoria física, dado que nenhum fato matemático é causalmente relevante para os fatos físicos. Já para os anti-platonistas, a questão é por que uma teoria ficcional é tão útil nas ciências empíricas. Balaguer afirma que tanto platonistas quanto anti-platonisas podem usar a mesma explicação para a aplicabilidade: a explicação representacional, tal como apresentada acima para o platonismo.

Usamos fatos sobre números (reais ou ficcionais) para *representar* fatos físicos. Consideremos novamente o exemplo acima sobre o sistema físico de 40ºC. Dado PCI, mesmo que o número 40 exista, ele não é causalmente relevante para a temperatura do sistema físico. Assim, se o enunciado é verdadeiro, é verdadeiro por causa dos fatos sobre o 40 e fatos sobre aquele sistema físico, mas esses fatos são completamente independentes um do outro. Isso, ele afirma, suporta NC. Balaguer continua:

> "Deveria estar claro que este argumento pode ser aplicado a tudo da ciência empírica. Pois dado que nenhum objeto abstrato é causalmente relevante ao mundo físico [...] se a ciência empírica é verdadeira, então sua verdade sobrevém dos conjuntos de fatos completamente independentes, a saber, um conjunto de fatos puramente físicos [...] e um conjunto de fatos puramente platonistas." (BALAGUER, 1999, p. 134)

De acordo com Balaguer, anti-platonistas podem aceitar a explicação representacional da aplicabilidade enquanto negam que o componente platonista é verdadeiro. A matemática é simplesmente um 'aparato teórico' ou 'estrutura descritiva' para a construção de teorias sobre o mundo físico. Assim, a verdade da ciência empírica não implica a verdade da matemática platonista e o ficcionalismo é defensável.

3.2.2.2. Nominalismo deflacionista: um caminho por meio da prática matemática

Por fim, temos a concepção anti-platonista de Jody Azzouni, que também segue o que foi chamado "caminho fácil para o nominalismo". Isso porque, para ele, não é preciso reescrever as teorias matemáticas de um modo não-padrão para evitarmos um comprometimento ontológico. Azzouni pretende oferecer uma possibilidade de aceitar o chamado argumento da indispensabilidade de Quine-Putnam sem, contudo, precisarmos nos comprometer com o realismo matemático.

O argumento da indispensabilidade, como visto acima, é um importante argumento utilizado em favor do platonismo matemático – concepção que defende a existência de objetos matemáticos abstratos. De acordo com esse argumento, devemos nos comprometer ontologicamente com todas e apenas as entidades sobre as quais indispensavelmente quantificamos em nossas melhores teorias científicas. Tendo em vista que as entidades matemáticas são indispensáveis a nossas melhores teorias científicas, segue-se que devemos nos comprometer com sua existência (tese ôntica de Quine). Ou seja, se temos uma teoria T – expressa em linguagem de primeira ordem e sem ser passível de paráfrase – sobre algum fenômeno F, se T é nossa melhor teoria científica disponível sobre F e, além disso, se T faz uso indispensável de uma certa quantidade de matemática, isto é, não temos nenhuma alternativa livre de matemática para a teoria T, então as entidades postuladas por T existem (AZZOUNI, 1997, p. 193). Como se pode ver, esse argumento tem por pano de fundo o holismo confirmacional de Quine, segundo o qual as teorias são confirmadas como um todo na experiência. Desse modo, se através do método científico são descobertas evidências empíricas que confirmam e justificam uma teoria, essas evidências confirmarão o todo dessa teoria, tanto sua parte empírica quanto não empírica (sua parte matemática, por exemplo). Sendo assim, quando uma teoria T a respeito de um fenômeno F é confirmada pela experiência, então ela é confirmada como um todo. Isso significa que inclusive a teoria matemática envolvida na teoria empírica será confirmada. Assim, se certos objetos são vistos como indispensáveis a essa teoria e se esta é admitida como a melhor teoria, então não há razões para não aceitar e acreditar na existência desses objetos. A ideia geral do argumento da indispensabilidade é que as teorias que aceitamos nos comprometem ontologicamente e que este compromisso se expressa nas quantificações existenciais dessas teorias. Além disso, diante do fato de que, ao termos uma confirmação empírica de uma teoria científica também temos uma confirmação sobre a matemática envolvida nessa teoria, então quando obtemos conhecimento científico consequentemente obtemos também conhecimento matemático. O apelo ao argumento da indispensabilidade por parte platonista pretende, então, realizar duas tarefas: (i) sustentar a existência de objetos matemáticos abstratos; e (ii) explicar como conhecemos esses objetos.

Diante disso, como também foi dito anteriormente, parte fundamental da tarefa daqueles que propõem uma abordagem nominalista da matemática consiste em evitar a consequência realista (platonista) desse argumento. Em geral, os nominalistas seguem dois caminhos para lidar com o argumento da indispensabilidade: ou (i) sustentam que a matemática não é indispensável às ciências, reformulando as teorias e o discurso matemático (*"hard road" to nominalism*); ou (ii) sustentam que, apesar de indispensável, é possível explicar essa indispensabilidade sem se comprometer ontologicamente com qualquer entidade, não sendo preciso revisar o discurso matemático (*"easy road" to nominalism*).

Vimos acima duas concepções que seguem o primeiro caminho e propõem uma reformulação do discurso matemático em termos nominalistas para evitar o comprometimento com qualquer tipo de entidade indesejada e de difícil explicação. Nenhuma dessas concepções, contudo, se mostrou completamente efetiva. O ficcionalismo de Field se mostrou inviável para uma parte importante da ciência – a mecânica quântica, além de não conseguir dar conta da exigência de oferecer uma explicação semântica uniforme do discurso matemático e não matemático. O estruturalismo modal também carece desta última exigência, pois propõe uma reformulação do discurso matemático em termos modais, que acaba por afastá-lo do discurso científico ou do ordinário.

Com isso, temos a alternativa desenvolvida por Jody Azzouni (2004, 2010) para superar esses problemas. A estratégia deste é: (i) aceitar a indispensabilidade da matemática, de modo que não é mais preciso reescrever as teorias a fim de evitar a referência a entidades matemáticas abstratas e (ii) negar a consequência realista do argumento da indispensabilidade, ou seja, não assumir que há um comprometimento ontológico ao se aceitar a indispensabilidade. Com isso ele pretende fornecer um caminho mais fácil para o nominalismo.

Sua concepção difere daquela dos ficcionalistas na medida em que ele aceita que as teorias matemáticas são realmente indispensáveis para as ciências, ou seja, dificilmente seria possível fazer ciência sem utilizar alguma teoria matemática e que, além disso, as teorias matemáticas são verdadeiras, de modo que podemos considerá-las por seu valor de face (at face value). Contudo, daí sua postura nominalista, objetos matemáticos abstratos não existem, de modo que não são esses objetos que garantem a verdade dos enunciados matemáticos.

Para ele, apesar de ser indispensável às teorias científicas quantificar sobre objetos matemáticos, não precisamos necessariamente acreditar e aceitar a existência de entidades sobre as quais essas teorias quantificam. Ele recusa, assim, o critério ontológico de Quine, para o qual, em casos de postulações indispensáveis às melhores teorias científicas – de sentenças regimentadas por quantificação de primeira ordem que não podem ser eliminadas por meio de paráfrase – devemos nos comprometer ontologicamente com os objetos postulados. Para Quine, o uso do quantificador existencial implica comprometimento ontológico; para Azzouni, esse não precisa ser o caso. Isso porque, na visão do autor, é preciso distinguir algo que Quine vê como sendo a mesma coisa, a saber, *quantificação existencial* e *compromisso ontológico*. Azzouni chama isso de “tese da separação” entre verdade existencial e ontologia (AZZOUNI, 2004, p. 5).

Para ele, é preciso distinguir duas coisas: o *comprometimento do quantificador* e o *comprometimento ontológico*. O quantificador existencial presente nas teorias científicas até pode quantificar sobre objetos abstratos (comprometimento do quantificador), mas disso não se segue que haja um comprometimento ontológico, ou seja, que o próprio discurso matemático-científico esteja comprometido com esses objetos abstratos. O comprometimento do quantificador ocorre quando as teorias implicam enunciados quantificados existencialmente, i.e, ele é um comprometimento de cunho apenas lógico. Contudo, Azzouni afirma que é comum quantificarmos sobre objetos em cuja existência não necessariamente temos quaisquer razões para acreditar como, por exemplo, as entidades ficcionais. É comum também, segundo ele, cientistas postularem a existência de certas entidades – mesmo matemáticas – porém, apenas como um artifício instrumental que posteriormente é abandonado. Ou seja, na prática científica é frequente a quantificação sobre entidades que não necessariamente existem. O ponto crucial a ser percebido, segundo Azzouni, é que objetos matemáticos não desempenham um papel relevante na prática científica e matemática, e muito menos contribuem para a verdade destas. Matemáticos, afirma ele, ainda têm uma tendência mais platonista com relação aos objetos matemáticos. Contudo, não aceitam todos como realmente existentes. Cientistas, por sua vez, dificilmente consideram crucial para suas teorias que existam tais objetos abstratos. Muita da atividade científica é feita considerando o papel indispensável da matemática, mas utilizando-a apenas como uma ferramenta para formulação mais adequada das teorias científicas. O trabalho do cientista tende a distinguir entre o que pode ser dito “causalmente eficaz” e o que é meramente matemático, que eles não atribuem nenhum peso ontológico ao quantificador existencial.

Em última análise, na perspectiva adotada por Azzouni, é completamente possível, então, um uso indispensável da matemática nas ciências empíricas sem que isso implique comprometimento com a existência efetiva de objetos matemáticos abstratos. A fim de garantir esse comprometimento com a existência desses objetos (comprometimento ontológico), é preciso que, além do critério para reconhecer aquilo com o que nosso discurso está comprometido, seja estabelecido um critério adicional, a saber, um critério de *existência* para aqueles objetos. Portanto, para estabelecer quais entidades de fato existem e que podemos reconhecê-las em nosso discurso, são necessários dois critérios distintos:

um critério para reconhecer com o que os discursos nos comprometem e um critério de existência.

O problema, segundo Azzouni, é que podem ser elencados vários candidatos para critérios de existência: ser observável, causalmente eficaz (AZZOUNI, 2007), estar no espaço e tempo e ser ontologicamente independente de processos psicológicos ou linguísticos (AZZOUNI, 2004, p. 82). Adotar qualquer um deles pode alterar o compromisso ontológico, mas ser tão legítimo quanto o proposto por Quine (dado pela quantificação existencial de primeira ordem), pois não parece haver qualquer fundamento racional para decidir entre critérios diferentes. Aceito um determinado conceito de existência, qualquer critério pode ser igualmente bom para atribuição de compromissos ontológicos. Por exemplo, se o critério de existência adotado for o de "ser observável", então será esse predicado que terá a responsabilidade de atribuir compromisso ontológico aos valores das variáveis. Ou seja, aquilo que existe não mais será aquilo que é expresso pelo quantificador existencial, mas sim aquilo que é expresso pelo predicado "ser observável". Sendo assim, o critério de compromisso ontológico passa a ser o critério de existência e não o critério de reconhecimento expresso pelo quantificador existencial.

Dentre os critérios possíveis para estabelecer a existência de entidades, aquele que Azzouni afirma ser o mais amplamente aceito é o de independência ontológica, isto é, o que existe é aquilo que é *totalmente independente* de nossas práticas linguísticas e de nossos processos psicológicos (AZZOUNI, 2004, p.99). Se algo é fruto de uma construção mental ou linguística, então não precisamos nos comprometer ontologicamente com sua existência – embora possamos quantificar sobre esse algo. Precisamos nos comprometer somente com a existência daqueles objetos que são ontologicamente independentes de nós. A escolha desse critério se apresenta mais adequada, pois ele é de fato um critério metafísico e não um critério epistêmico como os outros. Por exemplo, aquele que propõe como critério existencial o "ser observável", de fato não está propondo que só existe aquilo que é observável, pois isso seria muito estranho. O que ele está propondo é que "qualquer coisa sobre a qual possamos estar em uma posição de saber algo deve ser algo que possamos observar". O que se mostra uma afirmação epistêmica e não ontológica. O mesmo vale para outros critérios como: estar no espaço e tempo ou ser causalmente eficaz (AZZOUNI, 2004, pgs.91-92). Já com o critério de independência ontológica isso não parece ser assim (ainda que ele envolva uma afirmação epistemológica também). Com ele pretende-se estabelecer condições necessárias e suficientes para a existência de algo.

Adotando, então, o critério de independência ontológica, Azzouni acredita que para estarmos comprometidos com a existência de qualquer tipo de entidade sobre a qual quantificamos, essas entidades têm que ser ontologicamente independentes de nós. Se esse fosse o caso da matemática – i.e., se seus objetos fossem de fato independentes de nossas práticas linguísticas e processos psicológicos –, então estaríamos de fato comprometidos ontologicamente com os objetos matemáticos abstratos aos quais nossas melhores teorias sobre o mundo fazem referência. Mas se as entidades matemáticas fossem ontologicamente independentes de nós, então, uma vez que não teríamos acesso a elas, não estaríamos justificados em considerar verdadeiras nossas afirmações sobre esses objetos. Uma vez que a prática científica e matemática está comprometida com a verdade dessas afirmações, então não existem entidades matemáticas. Caso não fosse possível justificar nossa consideração sobre a verdade das afirmações matemáticas, haveria uma dificuldade em explicar a confiabilidade dos matemáticos e dos cientistas sobre a matemática – problema esboçado por Field (1989).

Logo, de acordo com Azzouni, esse não é o caso da matemática. Para ele, os objetos matemáticos são *ontologicamente dependentes* de nossas práticas linguísticas e de nossos processos psicológicos. Portanto, ainda que matemática seja indispensável às teorias científicas, isso não implica que estejamos comprometidos ontologicamente com seus objetos. Isso porque a mera postulação de certos princípios é o suficiente para a prática matemática, eles podem ser “criados ex nihilo pela simples anotação de um conjunto de axiomas” (Azzouni, 2004, p. 127), com a única exigência de que essa postulação resulte em um fazer matemático frutífero e interessante. Por tudo isso, a concepção de Azzouni é um nominalismo, pois não aceita a existência de objetos matemáticos.

A parte deflacionista da teoria é garantida por outro movimento de Azzouni análogo à distinção entre o comprometimento ontológico e o comprometimento do quantificador. Para ele, o critério de Quine pressupõe o que ele chama de “tese da trivialidade”, segundo a qual as expressões “há” ou “existe” expressam compromisso ontológico (AZZOUNI, 2004, p. 49). Segundo ele, não há nada de trivial nessa afirmação, pois há exemplos no uso ordinário da linguagem (e mesmo no contexto da matemática aplicada) nos quais essas expressões claramente não carregam nenhuma carga ontológica.

O exemplo trabalhado por Azzouni é:

1. Há ratos ficcionais que falam. (2004, p. 62)

Ele aponta que quando um falante ordinário profere tal sentença, este não se pretende estar atribuindo existência a uma entidade ficcional. Tampouco o falante acredita que o que torna verdadeira a sentença é uma referência a essa entidade ficcional. É preciso distinguir a existência de Fs da afirmação da *verdade* do enunciado “há Fs”. Mas o que, então, garante a *verdade* dos enunciados sobre entidades não existentes?

Segundo Azzouni, devemos considerar tais enunciados como verdadeiros em virtude dos bicondicional de Tarski, i.e., ver que há uma equivalência entre enunciados e atribuições de verdade desses enunciados, o que nos permite substituir as atribuições do predicado verdade pelos próprios enunciados aos quais a verdade é atribuída (AZZOUNI, 2004, p. 16). Com isso, se estamos comprometidos em acreditar na verdade de um enunciado, segue-se que temos que considerá-lo verdadeiro, ainda que as entidades postuladas não existam (AZZOUNI, 2004, p.194). Isso porque o bicondicional de Tarski deve ser lido como ontologicamente neutro.

Por isso, novamente, embora as teorias matemáticas usadas na ciência sejam consideradas verdadeiras, isso não implica na existência das entidades sobre as quais essas teorias se referem. Pode bem ser verdadeiro que “há números primos”, mas, para que estejamos comprometidos ontologicamente com “números primos”, é preciso que o critério de independência ontológica seja levando em conta, o que não é satisfeito no caso da matemática.

Recapitulando, a ideia de Azzouni é oferecer um nominalismo que defende três pontos principais: (i) que a matemática é indispensável às teorias científicas; (ii) que os enunciados matemáticos são verdadeiros; e (iii) que entidades matemáticas não existem. Ele faz isso distinguindo entre um campo lógico e um ontológico, ou seja, distinguindo entre o compromisso do quantificador existencial pressuposto pelo argumento da indispensabilidade – que é ontologicamente neutro – e o compromisso ontológico, que é dado pelo estabelecimento de um critério existencial. Segundo ele, teorias científicas indispensavelmente quantificam sobre entidades matemáticas, fazendo com que o discurso esteja comprometido com essas entidades, mas essas entidades não satisfazem o critério existencial de serem ontologicamente independentes. Sendo assim, tais entidades não existem. Entretanto, isso não implica que os enunciados matemáticos sejam falsos, pois a verdade é estabelecida de modo deflacionista.

As vantagens desse nominalismo com relação aos problemas em filosofia da matemática são claras. Ele resolve o problema ontológico (ou da referência), pois não postula a existência de qualquer entidade ao qual precisaríamos fazer referência ao falar de números, funções, conjuntos, etc. Ele dissolve o problema epistêmico, uma vez que o conhecimento matemático é obtido daquilo que consequentemente se segue de princípios matemáticos e estabelecidos via demonstrações. E, além disso, por não procurar reformular as teorias matemáticas, esse tipo de nominalismo oferece a vantagem de não exigir a introdução de nenhum tipo de operador ficcional no discurso matemático.

Contudo, ele enfrenta alguns problemas que o enfraquecem. Sua semântica, como aponta Otávio Bueno, apesar de pretensamente uniforme, não parece ser assim. Parece ser preciso que, para ter seu projeto bem-sucedido, Azzouni estabeleça uma distinção entre usos ontologicamente comprometedores e não comprometedores dos quantificadores universal e existencial, de modo que seria preciso, então, uma semântica distinta para a linguagem matemática.

Além dessa leitura incomum dos quantificadores, o nominalismo de Azzouni exige o estabelecimento de uma leitura diferenciada de termos como "existir" e, principalmente, "referir" para dar conta de afirmações como "a se refere a b, mas b não existe", uma vez que estes termos não mais estão relacionados a uma entidade real existente.

Outra dificuldade, apontada por Colyvan (2011), é que ao afirmar que entidades matemáticas não possuem nenhum papel relevante para as teorias científicas, Azzouni abre espaço para a acusação de que a matemática não seria, assim, indispensável às ciências o que, de certo modo, exigiria o estabelecimento de um projeto como o do ficcionalismo de Field.

Essas são apenas algumas das dificuldades enfrentadas pelo nominalismo deflacionista. Contudo, não é muito claro que estes problemas não possam ser solucionados pelo nominalista. Se for de fato possível, essa se mostrará uma boa concepção alternativa em filosofia da matemática, uma vez que evita o comprometimento com entidades indesejadas em qualquer teoria.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A filosofia da matemática possui dois principais problemas, que foram levantados por Benacerraf e, posteriormente reformulados por Field, que dizem respeito à sua ontologia e à sua epistemologia. De acordo com eles, uma boa teoria sobre a verdade matemática deveria dar conta de explicar a natureza dos objetos matemáticos e o modo como seria possível conhecê-los (ou como poderíamos explicar a confiabilidade que os matemáticos têm na verdade de seus enunciados, tal como reformulado por Field). Dentre as diversas teorias, temos os realistas, que dizem que os objetos matemáticos existem e explicam sua natureza como algo abstrato existindo independentemente de nós, mas que deixam a desejar quando se trata de explicar como conhecemos tais objetos, uma vez que eles não possuem quaisquer interações causais com nosso mundo físico; e temos os anti-realistas que conseguem evitar esse problema, pois não atribuem qualquer existência aos objetos matemáticos, mas que precisam fazer um malabarismo para dispensar tal existência, precisando estabelecer uma nova semântica para os enunciados matemáticos, de modo que tornam a linguagem matemática tão diversa da linguagem das ciências ordinárias, com uma semântica tão mais complexa, que acabam criando um novo problema quando pensamos na uniformidade presumida entre as linguagens em geral.

Diante dos problemas levantados por Benacerraf, pudemos verificar que existiram diversas tentativas de lidar com eles tanto da parte dos platonistas quanto da parte dos anti-platonistas. Da parte dos platonistas, consideramos os que afirmam a possível existência de um contato com as entidades matemáticas abstratas, como é o caso de Gödel; os que consideravam um contato indireto com essas entidades, como é o caso do platonismo de Maddy; e, por fim, os que consideraram um conhecimento possível mesmo sem termos nenhum contato com os objetos abstratos, como é o caso dos que advogaram em favor do argumento da indispensabilidade de Quine-Putnam. Este último caso se tornou bastante influente, pois o argumento da indispensabilidade se apresentou como uma forte arma contra o anti-platonismo. Isto porque esse argumento apela a uma indispensabilidade da matemática às ciências empíricas, de modo que se torna difícil argumentar contra tal indispensabilidade.

Contudo, os platonistas ainda permanecem com o problema de explicar como objetos matemáticos abstratos causalmente inertes poderiam ter alguma relevância quando tratamos da verdade das ciências empíricas. Dificilmente o platonista consegue, sem algum tipo de artifício, explicar como é possível que tais entidades abstratas se relacionam com os sistemas físicos, ou como as teorias físicas verdadeiras garantem de fato a verdade sobre a existência de objetos matemáticos abstratos, mesmo a matemática sendo considerada indispensável para as ciências.

Da parte dos anti-platonistas temos um avanço quando tratamos dos problemas levantados por Benacerraf. Analisamos algumas versões anti-platonistas que ainda apresentam dificuldades com relação a estes problemas, principalmente diante do argumento da indispensabilidade, como é o caso do ficcionalismo de Field. Este tenta nominalizar a ciência de modo a dispensar qualquer referência a objetos abstratos e é bem sucedido até certo ponto. Mas seu projeto apresenta falhas quando tenta nominalizar uma parte importante da ciência, que é o caso da Mecânica Quântica. Vimos, então, a versão estruturalista eliminativista de Hellman, que faz o apelo às estruturas, porém considerando estas apenas como entidades possíveis sem fazer referência a objetos atuais. Para isso, Hellman, assim como Field, advoga em favor de uma reescrita da linguagem matemática em termos de uma linguagem lógica modal, na qual considera as noções modais como primitivas e sem compromisso ontológico. A proposta parece bastante interessante, porém, com a introdução de operadores modais e a necessidade de tradução da linguagem matemática em termos desses operadores, fica a indigesta falta de uniformidade semântica entre a linguagem matemática e a científica. Inclusive, para evitar o compromisso ontológico, o estruturalista modal acaba oferecendo um discurso matemático paralelo à prática matemática real, uma vez que a prática matemática em geral não faz uso dos operadores introduzidos pelos estruturalistas modais. A prática matemática tipicamente faz uso de um discurso que parece sugerir a existência de objetos matemáticos, embora não seja conclusivo que esta prática de fato aceite ou acredite na existência daqueles. Mas já que a ideia estruturalista modal é fazer uma tradução, novamente enfrentará a mesma dificuldade dos ficcionalistas, pois demandará um projeto dificilmente realizável.

Outra posição que apresenta os mesmos problemas que acabamos de citar é o construtivismo modal, que procura estabelecer a ideia de que é possível traduzir a linguagem matemática em termos de sentenças abertas satisfeitas por variáveis, porém entendidas de modo meramente possível. Reescrever o discurso matemático em termos da lógica modal enfrentará as mesmas questões levantadas aos estruturalistas modais. Apesar de resolver o problema ontológico ao renunciar a existência de quaisquer tipos de abstração platonista e de resolver o problema epistemológico por não pressupor tal existência, ainda resiste a questão sobre a necessidade de um projeto de tradução que não convém quando pensamos numa uniformização das linguagens em geral. Persiste, então, a tarefa de encontrar um tipo de anti-platonismo que dispense qualquer espécie de tradução do discurso matemático e que, ainda assim, seja bem sucedido em lidar com os problemas propostos.

Encontramos na literatura mais duas outras possibilidades que vão nessa direção. A primeira delas, foi o ficcionalismo de Balaguer. De acordo com este, não é preciso necessariamente fazer uma tradução do discurso matemático em termos relacionais que dispensem a referência a objetos abstratos. É preciso apenas compreender que estes objetos não existem e que isso não invalida a verdade da matemática. Segundo Balaguer, embora o discurso matemático tenha uma parte que pareça fazer referência a objetos matemáticos abstratos para garantir sua verdade, não precisamos aceitar a existência desses objetos. Isso porque ele se vale de uma explicação representacional, segundo a qual os números representam fatos físicos, quer eles existam ou não. Uma vez que os enunciados científicos são mistos, ou seja, possuem uma parte puramente matemática e uma parte puramente física, não precisamos admitir que objetos matemáticos existem. Basta admitir a matemática simplesmente como um instrumento para a construção de teorias sobre o mundo físico. Desse modo, ela é aplicável, mas não exige a postulação de entidades abstratas para garantir sua verdade. Essa proposta parece promissora, porém não fica claro como não cairemos em dificuldades semelhantes às dos instrumentalistas tradicionais.

A última proposta que apresentamos foi o nominalismo deflacionista de Azzouni. Nessa proposta, Azzouni sugere que as teorias matemáticas são indispensáveis às ciências, que estas teorias matemáticas são verdadeiras, mas que isso não implica na existência de objetos matemáticos abstratos. Para ele, é possível que admitamos isso ao adotarmos uma concepção deflacionista da verdade. Sendo assim, pode-se formular teorias matemáticas diretamente sem qualquer necessidade de tradução e reescrita.

Dentre as propostas apresentadas, o nominalismo de Azzouni parece ser a que melhor oferece um caminho satisfatório para resolver os problemas em filosofia da matemática, pois apresenta a possibilidade de encararmos o discurso matemático literalmente sem a necessidade de uma versão paralela com a inserção de nenhum tipo de operador de qualquer espécie (nem ficcionais nem modais). Temos a vantagem de não nos comprometermos ontologicamente com nenhum tipo de entidade e, portanto, evitarmos o problema ontológico, bem como evitarmos o problema epistemológico, pois quando falamos de conhecimento matemático, estamos falando dos resultados matemáticos relevantes estabelecidos através de demonstrações e provas matemáticas. E, além disso, o nominalista deflacionista pode explicar a aplicabilidade da matemática examinando os aspectos centrais dos diferentes modelos de sua aplicação. É analisando a prática matemática e científica que ele pode estabelecer que existe um sucesso na aplicação que independe da existência de objetos abstratos causalmente inertes.

Diante dessa exposição, tendemos a aderir à proposta de Azzouni, acreditando que esta é a que melhor oferece uma perspectiva satisfatória quando tentamos lidar com os problemas em filosofia da matemática. Sua proposta ainda deixa alguns detalhes em aberto, mas nada essencialmente relevante que a desestabilize ou que a torne facilmente recusável. Tendo em vista a dificuldade presente no debate entre platonismo e anti-platonismo, pois parece impossível encontrar um fato que estabeleça a existência ou não de entidades abstratas, podemos considerar que admitir uma postura nominalista nos parece mais adequada. Nos parece assim porque aceitar uma proposta que nos compromete com menos entidades possíveis é muito mais promissor do que sustentar a existência de objetos que não podem ser acessados de nenhuma maneira possível.

5. REFERÊNCIAS:

AZZOUNI, J. **Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis**. In: *Philosophia Mathematica*, 5 (3): 193-209, 1997.

__________. **Deflating existential consequence: A case for nominalism**. NY: Oxford University Press, 2004.

__________. **Metaphysical Myths, Mathematical Practice: The Ontology and Epistemology of the Exact Sciences.** UK: Cambridge University Press, 1944.

__________. **Talking about Nothing: Numbers, Hallucinations and Fictions.** NY: OUP, 2010.

__________. **Taking the Easy Road Out of Dodge**. In: *Mind*, vol. 121, 484, Out. 2012, pgs. 951-965.

BALAGUER, M. **Platonism and Anti-Platonism in Mathematics.** N.Y.: OUP, 1998.

______________. **Realism and Anti-realism in Mathematics**. In: IRVINE, A.; GABBAY, D.; THAGARD, P.; WOODS, J. (eds). *Handbook of the Philosophy of Science: Philosophy of Mathematics.* USA: North Holland, 2009.

______________. **A Platonist Epistemology.** In: *Synthese*, 103: 303-325, 1995.

______________. **Platonismo Pleno.** In: Analisis Filosofico XIV (1994) n. 2.

______________. **Fictionalism, Mathematical Facts and Logical/Modal Facts**. In: WOODS, J. (ed). Fictions and Models: New Essays. Munich: Philosophia Verlag, 2010.

______________. **Fictionalism in the Philosophy of Mathematics**. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/fictionalism-mathematics/>

______________. **A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics.** In: *Philosophical Studies* 83: 291-314, 1996.

______________. **Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics**. In*: Philosophia Mathematica* (III) 17 (2009), 131-162.

______________. **Towards a Nominalization of Quantum Mechanics**. In: *Mind*, vol. 105, 418, abril 1996, pgs. 209-226.

BENACERRAF, P. **What Numbers Could Not Be (1965)**. In: BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

____________. **Mathematical Truth (1973)**. Reimpresso em Benacerraf & Putnam (1983b).

BUENO, O. **Mathematical Fictionalism**. In: BUENO, O. & LINNEBO, O. *New Waves in*

Philosophy of Mathematics. UK: Palgrave Macmillan, 2009.

_________. **Nominalism in the Philosophy of Mathematics**. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2013. URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/nominalism-mathematics/>.

_________. **An Easy Road to Nominalism**. In: *Mind*, vol. 121, 484, Out. 2012, pgs. 967-982.

COLYVAN, M. **The Indispensability of Mathematics**. NY: Oxford University Press, 2001.

__________. **Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics**. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2011.

__________. **In Defense of Indispensability**. In: *Philosophia Mathematica*, 6 (1): 39-62, 1998.

__________. **There is No Easy Road to Nominalism.** In: *Mind*, 119 (474): 285-306, 2010.

DALY, C. & LANGFORD, S. **Mathematical Explanation and Indispensability Arguments.** In: *The Philosophical Quarterly,* vol. 59, n. 237, outubro/2009.

FIELD, H. **Science Without Number: A Defense of Nominalism.** N. J.: Princeton University Press, 1980.

________. **Realism, Mathematics and Modality.** UK: Basil Blackwell, 1989

FREGE, G. **Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número.** Trad.: Luís Henrique dos Santos. In: Coleção “Os Pensadores”. São Paulo: Editora Abril, 1983.

GÖDEL, K. **Russell's mathematical logic.** (1944). Reimpresso em: Benacerraf & Putnam (1983a).

_________. **What is Cantor's continuum problem?** (1947) Reimpresso em: Benacerraf & Putnam (1983b).

HELLMAN, G. **Mathematics Without Numbers**. Oxford. OUP, 1989.

HORSTEN, L. **Philosophy of Mathematics**. In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2012. Edward N. Zalta (ed.) URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/>.

LENG, M. **Revolucionary Fictionalism: A Call to Arms.** In: *Philosophia Mathematica*, 13: 277-93, 2005.

_______. **What’s Wrong with Indispensability? (Or, The Case for Recreational Mathematics).** In: *Synthese*, 131 (3): 395-417, 2002.

_______. **Mathematics and Reality**. NY: OUP, 2010.

LINNEBO, Ø. **Platonism in the Philosophy of Mathematics**. In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011. Edward N. Zalta (ed.) URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/>.

MADDY, P. **Realism in Mathematics.** OX: Clarendon Press, 1990.

_________. **Mathematical Existence**. In: *The Bulletin of Symbolic Logic.* Vol. 11, n. 3, Setembro/2005.

_________. **Indispensability and Practice**. In: *The Journal of Philosophy,* vol. 89. N. 6 (Jun., 1992), pgs. 275-289.

MALAMENT, D. **Review – Science Without Numbers: A Defense of Nominalism by Hartry H. Field.** In: The Journal of Philosophy, vol. 79, n. 9 (Set., 1982), pgs. 523-534.

PUTNAM, H. **What is Mathematical Truth.** In: TYMOCZKO, T. (ed.). *New Directions in the Philosophy of Mathematics: an anthology*. Boston: Birkhäuser, 1985.

_________. **Philosophy of Mathematics: Why Nothing Works.** In: *Words and Life.* USA: Harvard University Press, 1995.

__________. **Philosophy of Logic**. In: *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers* (Vol. 1). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 323-57, 1971.

QUINE, W.V. **From a Logical Point of View**. USA: Harvard University Press, 1953.

Tradução “*De um Ponto de Vista Lógico*”, de Antonio Ianni Segatto. SP: Editora UNESP, 2010.

__________. **Word and Object.** Cambridge, MA: MIT Press, 1960. Tradução “*Palavra e Objeto*”, de Sofia Inês Albornoz Stein e Desidério Murcho. Petrópolis: Editora Vozes, 2010.

__________. **Success and Limits of Mathematization**. In: *Theories and Things*. USA: Harvard University Press, 1981.

SHAPIRO, S. **Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.** NY: OUP, 1997.

SOBER, E. **Mathematics and Indispensability**. In: *Philosophical Review*, 102: 35-58, 1993.