

DEMÉTRIUS DA SILVA VITAL

**ESTUDO PARAMÉTRICO DE GUIAS DE ONDA  
PARCIALMENTE PREENCHIDOS COM  
DIELÉTRICO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica, Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador:  
Prof. José Ricardo Descardec, Ph.D.

CURITIBA

2002



## RELATÓRIO DE DEFESA DE MESTRADO

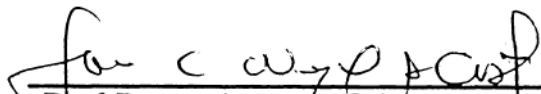
Aos quinze dias do mês de abril de 2002, na Sala PK-03 Depto. Engenharia Elétrica - Centro Politécnico-UFPR, foi instalada pelo Prof. David Alexander Mitchell, coordenador do PIPE – Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia, a Banca Examinadora para a vigésima nona Dissertação de Mestrado área de concentração: TELECOMUNICAÇÕES. Estiveram presentes no Ato, além do coordenador do Curso de Pós-Graduação, professores, alunos e visitantes.

A Banca Examinadora, atendendo determinação do Colegiado do Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia, ficou constituída pelos professores doutores **João Crisostomo Weyl Albuquerque** (UFPA), **Horácio Tertuliano Filho** (UFPR), **José Ricardo Descardec** (UFPR).

Às 14:00 horas, a banca iniciou os trabalhos, convidando o(a) candidato(a) **Demétrius da Silva Vital** a fazer a apresentação da dissertação intitulada "Estudo Paramétrico de Guias de Onda Parcialmente Preenchidos com Dielétricos". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, a banca atribuiu as seguintes notas: Prof. Dr. João Crisostomo Weyl Albuquerque Nota: 9.0, Prof. Dr. Horácio Tertuliano Filho, Nota: 9.0. Prof. Dr. José Ricardo Descardec Nota: 9.0. A média obtida: 9.0, resulta na APROVAÇÃO do candidato, (de acordo com a determinação dos Artigos 61,62,63,64 da Resolução 38/96 de 14.06.96), e corresponde ao conceito A/B/C/D.

Curitiba, 15 de abril de 2002.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Crisostomo Weyl  
Albuquerque

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Horácio Tertuliano Filho

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Ricardo Descardec

# **TERMO DE APROVAÇÃO**

**DEMETRIUS DA SILVA VITAL**

## **ESTUDO PARAMÉTRICO DE GUIAS DE ONDA PARCIALMENTE PREENCHIDOS COM DIELÉTRICO**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no curso de Pós-graduação em Telecomunicações do Programa Interdisciplinar de Pós-graduação em Engenharia – PIPE da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. José Ricardo Descardecí, Ph.D.  
Setor de Tecnologia, UFPR

Prof. João Crisóstomo Weyl A. Costa, Dr.  
Departamento de Eng. Elétrica, UFPA

Prof. Horácio Tertuliano Filho, Ph.D.  
Setor de Tecnologia, UFPR

Curitiba, 15 de abril de 2002

*Aos “papaxibés” Alda e Vitalícios*



## AGRADECIMENTOS

*A todos que, de alguma forma, envolveram-se em qualquer uma das diversas etapas deste trabalho.*

*A pessoa mais digna de agradecimento é José Ricardo Descardecí. O orientador, sempre atencioso e prestativo, paciência lhe sobra, vai o meu obrigado.*

*Ao professor Wilson Artuzi. Foram fundamentais as suas aulas e também as eventuais consultas.*

*Aos professores Málio, Horácio e João Crisóstomo (grande incentivador), avaliadores do trabalho, que contribuíram de sobremaneira na sua forma final. Em especial ao Horácio, que com sua admirável postura investigadora, intermináveis indagações e debates, colaborou para ratificação e solidificação dos resultados obtidos na pesquisa.*

*Agradeço igualmente aos amigos que me toleraram neste período: Lillian Portugal; Cláudia; César; Márcio; Ronni; Moacir; Harry; Iracema (aquariana por excelência); Juliane (junção de monja e Carmem); Cícero (síndrome de Fausto); Carlos (arquiteto dos bits); Fabrício (Mr. Magic); “Negle”.*

*Uma parte importante da pesquisa foi financiada pela Capes, pelo que sou grato.*

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS.</b> .....	vii
<b>LISTA DE FIGURAS.</b> .....	viii
<b>RESUMO</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xii
<b>1. APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO</b> .....	1
<b>2. GUIA DE ONDA RETANGULAR PARCIALMENTE PREENCHIDO ..</b>	<b>3</b>
2.1. MODOS TRANSVERSOS EM GUIAS DE ONDA RETANGULARES COM PREENCHIMENTO HOMOGÊNEO .....	3
2.1.1. Modos Transversos $TE^x$ e $TM^x$ .....	4
2.1.2. Modos Transversos $TE^y$ e $TM^y$ .....	11
2.2. MODOS HÍBRIDOS EM GUIAS DE ONDA RETANGULARES PARCIALMENTE PREENCHIDOS .....	13
2.2.1. Componentes de Campo e Equações Características para o Modo Longitudinal Elétrico (LSE).....	14
2.2.2. Componentes de Campo e Equações Características para o Modo Longitudinal Magnético (LSM).....	26
2.3. CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS RADIADOS NA REGIÃO DE CAMPO DISTANTE .....	32
2.3.1. Equações de Radiação para os Campos na Abertura do Guia .....	32
2.3.2. Aplicação do Princípio da Equivalência de Campos para o Caso do Guia Parcialmente Carregado.....	36
<b>3. CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA</b> .....	<b>41</b>
3.1. CORNETA PIRAMIDAL .....	42
3.2. ANÁLISE DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA .....	45
<b>4. RESULTADOS</b> .....	<b>47</b>
4.1. LEVANTAMENTO DAS CURVAS DE DISPERSÃO .....	47
4.2. ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA O GUIA RETANGULAR PARCIALMENTE PREENCHIDO.....	59

4.3. ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA CORNETA PIRAMIDAL	
PARCIALMENTE PREENCHIDA.....	65
<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>74</b>
DISCUSSÃO .....	74
SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	75
PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA ASSOCIADA À DISSERTAÇÃO.....	75
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXO – A Família de Modos <math>TE_{m0}</math> como Solução para o Guia de Onda</b>	
<b>Parcialmente Preenchido .....</b>	<b>82</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{A}$	- Potencial vetor magnético
$\vec{a}_x, \vec{a}_y$ e $\vec{a}_z$	- Vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente
$A_3, A_{mn}, B_{mn}, C_1, C_2, D_1$ e $D_2$	- Constantes
$\vec{E}$	- Vetor campo elétrico
$\vec{F}$	- Potencial vetor elétrico
$\vec{H}$	- Vetor campo magnético
$\vec{J}$	- Fonte de corrente elétrica
$k_0$	- Constante de propagação no vácuo
$\vec{M}$	- Fonte de corrente magnética
$\alpha$	- Coeficiente de perdas
$\beta$	- Parte imaginária da constante de propagação. Constante de fase
$\beta_x, \beta_y$ e $\beta_z$	- Componentes em x, y e z, respectivamente, da constante de fase
$\epsilon$	- Permissividade elétrica do meio
$\epsilon_0$	- Permissividade elétrica no vácuo
$\epsilon_r$	- Permissividade elétrica relativa
$\phi$	- Ângulo de azimute
$\gamma$	- Constante de propagação. $\gamma = \alpha + j\beta$
$\lambda$	- Comprimento de onda
$\mu$	- Permeabilidade magnética do meio
$\mu_0$	- Permeabilidade magnética no vácuo
$\vec{\Pi}_h$	- Potencial vetor de Hertz do tipo magnético
$\vec{\Pi}_e$	- Potencial vetor de Hertz do tipo elétrico
$\theta$	- Ângulo de elevação
$\omega$	- Frequência angular
$\vec{\Psi}_h(x, y)$	- Função genérica com dependência de x e y.
$\frac{\partial}{\partial r}$	- Derivada parcial em r
$\frac{df(r)}{\partial r}$	- Derivada local da função f(r) em r
$\int$	- Integrador
$\nabla$	- Operador nabla
$[\Phi]$ e $[B]$	- Matrizes

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	Guia de onda retangular .....	4
FIGURA 2	Guia retangular com interface dielétrica no plano YZ.....	14
FIGURA 3	Guia retangular com interface dielétrica no plano XZ.....	14
FIGURA 4	Ilustração do princípio da equivalência de campos .....	33
FIGURA 5	Sistema de coordenadas para análise de antenas de abertura.....	35
FIGURA 6	Aproximação para região de campo distante .....	35
FIGURA 7	Guia de onda parcialmente preenchido radiando no espaço livre a partir da sua terminação .....	37
FIGURA 8	Antena corneta piramidal .....	42
FIGURA 9	Detalhe da geometria da antena corneta piramidal.....	43
FIGURA 10	Antena corneta piramidal parcialmente preenchida.....	46
FIGURA 11	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.05a$ .....	50
FIGURA 12	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.2a$ .....	51
FIGURA 13	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.4a$ .....	52
FIGURA 14	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.6a$ .....	53
FIGURA 15	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.8a$ .....	54
FIGURA 16	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com camada dielétrica ( $\epsilon_r = 2.32$ ) de largura $s=0.95a$ .....	55
FIGURA 17	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular vazio.....	56
FIGURA 18	Curvas de dispersão para o guia de onda retangular carregado com dielétrico ( $\epsilon_r = 2.32$ ).....	57
FIGURA 19	Comparação entre as curvas de dispersão para o modo fundamental	

LSE10. Guia de onda retangular WR112 ( $a = 2.850$ cm e $b = 1.262$ cm), $\epsilon_r = 2.32$ .....	58
FIGURA 20 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.05a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	60
FIGURA 21 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.2a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	61
FIGURA 22 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.4a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	61
FIGURA 23 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.6a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	62
FIGURA 24 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.8a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	62
FIGURA 25 Diagramas de radiação para o guia WR112 carregado com camada dielétrica de largura $s=0.95a$ ( $\epsilon_r = 2.32$ ) e $f = 7$ GHz .....	63
FIGURA 26 Máxima polarização cruzada em função do preenchimento dielétrico, $s$ . Guia de onda retangular WR112 ( $a = 2.850$ cm e $b = 1.262$ cm). $\epsilon_r = 2.32$ . $f = 7$ GHz .....	63
FIGURA 27 Máxima polarização cruzada em função da frequência. $s=0.4a$ . Guia de onda retangular WR112 ( $a = 2.850$ cm e $b = 1.262$ cm). $\epsilon_r = 2.32$ .....	64
FIGURA 28 Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850$ cm, $b_1 = 1.262$ cm, $a = 17.100$ cm, $b = 7.572$ cm, $\epsilon_r = 2.32$ , $s/a = 0.05$ e $f = 7$ GHz. polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	67
FIGURA 29 Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850$ cm, $b_1 = 1.262$ cm, $a = 17.100$ cm, $b = 7.572$ cm, $\epsilon_r = 2.32$ , $s/a = 0.2$ e $f = 7$ GHz. polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	68
FIGURA 30 Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850$ cm, $b_1 = 1.262$ cm,	

	$a = 17.100 \text{ cm}, b = 7.572 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.32, s/a = 0.4$ e $f = 7\text{GHz}$ .	
	polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	69
FIGURA 31	Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850 \text{ cm}, b_1 = 1.262 \text{ cm},$ $a = 17.100 \text{ cm}, b = 7.572 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.32, s/a = 0.6$ e $f = 7\text{GHz}$ .	
	polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	70
FIGURA 32	Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850 \text{ cm}, b_1 = 1.262 \text{ cm},$ $a = 17.100 \text{ cm}, b = 7.572 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.32, s/a = 0.8$ e $f = 7\text{GHz}$ .	
	polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	71
FIGURA 33	Diagrama de radiação para a corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850 \text{ cm}, b_1 = 1.262 \text{ cm},$ $a = 17.100 \text{ cm}, b = 7.572 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.32, s/a = 0.95$ e $f = 7\text{GHz}$ .	
	polarização cruzada no plano $\phi=45^\circ$ .....	72
FIGURA 34	Máxima polarização cruzada em função do preenchimento dielétrico, s, no plano $\phi=45^\circ$ . Corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H , $a_1 = 2.850 \text{ cm}, b_1 = 1.262 \text{ cm}, a = 17.100 \text{ cm},$ $b = 7.572 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.32$ e $f = 7\text{GHz}$ .....	73
FIGURA 35	Máxima polarização cruzada versus frequência no plano $\phi=45^\circ$ . Corneta piramidal: <i>semi-flare angle</i> $12^\circ$ no plano E e $5.4^\circ$ no plano H, $a_1 = 2.850 \text{ cm}, b_1 = 1.262 \text{ cm}, a = 17.100 \text{ cm}, b = 7.572 \text{ cm},$ $\epsilon_r = 2.32, s/a = 0.4$ .....	73

## RESUMO

Neste trabalho, características de propagação de modos híbridos e de radiação eletromagnética no espaço livre em guias de onda de seções retangulares parcialmente preenchidos por dielétrico, são teoricamente analisadas. São apresentadas as equações modais da onda eletromagnética propagante no guia, com detalhamento de sua obtenção, destacando a adequação dos modos híbridos às condições de contorno da estrutura. Uma análise paramétrica envolvendo o nível de preenchimento e o comportamento da polarização cruzada em função da frequência é incluída nesta pesquisa. Os resultados obtidos demonstram um bom desempenho da máxima polarização cruzada sobre ampla faixa de frequência de operação monomodo do modo híbrido LSE<sub>10</sub>, dominante no guia de onda retangular parcialmente preenchido com camada dielétrica no plano E (*E-plane dielectric slab*). Uma antena corneta piramidal de modo híbrido específica também foi analisada, considerando-se o caso de cornetas com pequeno *flare angle* e utilizando-se a teoria de correção esférica de fase na abertura do elemento irradiador.

Palavras-chave: Guia de onda retangular parcialmente preenchido; antena corneta piramidal; modos híbridos; polarização cruzada.



## ABSTRACT

The propagation characteristics of hybrid modes and the electromagnetic radiation in free space of rectangular sections guides loaded with dielectric slabs, are analyzed in this work. Are presented the modal equations of the electromagnetic wave traveling in the waveguide, by derivation detail of equation and boundary conditions adequate of structure. A parametric study involving the dielectric loading level and the behavior of the cross-polarization is also included. The obtained results shows a good performance for the maximum cross-polarization on a wide frequency band for the hybrid mode LSE<sub>10</sub>, dominant in the rectangular waveguide loaded by E-plane dielectric slab. A hybrid-mode pyramidal horn is also analyzed theoretically, considering the case of horn with small flare angle and using the theory of spherical correction of phase in the opening of the radiator element.

Key-words: Rectangular waveguide partially filled; pyramidal horn antenna; hybrid mode; cross polarization.

## 1 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Pretende-se, como propósito desta dissertação, executar um estudo preliminar sobre guias de onda de seções retangulares com preenchimento dielétrico híbrido, ou seja, carregados com dielétricos de diferente permissividade elétrica, visando observar a influência que esta camada dielétrica exerce sobre características de radiação do guia, tal qual, o nível de polarização cruzada máxima do diagrama de radiação, através de uma análise teórica acerca do comportamento dos modos híbridos presentes no interior do guia em questão e da derivação das equações para os campos radiados pela abertura deste guia, considerando-se a região de campo distante.

Com o intuito de atingir o objetivo exposto acima, o trabalho divide-se da seguinte forma:

No capítulo 2, apresenta-se um desenvolvimento teórico, de base para obtenção das equações modais da onda eletromagnética propagante no guia retangular e também a teoria envolvida no estudo de radiação eletromagnética em campo distante.

No capítulo 3 são abordadas características da corneta piramidal, onde na seção 3.1 é discutida a geometria do dispositivo sob o foco construtivo. Na seção 3.2, é apresentado um modo de obtenção das equações para os campos eletromagnéticos propagantes na corneta piramidal parcialmente preenchida com dielétrico, pelo uso da teoria de correção esférica de fase, bem como a derivação das equações radiação para o dispositivo, considerando-se a região de campo distante.

No capítulo 4, são apresentadas simulações que envolvem o comportamento dos modos híbridos, campos radiados e polarização cruzada em função do

preenchimento gradual com dielétrico de um guia retangular e corneta piramidal específicos. Na seção 4.1, é apresentada a família de curvas de dispersão para os modos híbridos propagantes no guia de onda retangular, tomando-se casos diversos de preenchimento por dielétrico. Nas seções 4.2 e 4.3, são apresentados diagramas de radiação no espaço livre para o guia retangular e a corneta piramidal, considerando-se casos discretos de preenchimento, realizando-se também uma análise paramétrica, com o intuito de evidenciar o comportamento da resposta do sistema devido ao preenchimento gradual do guia com material dielétrico, tomando a polarização cruzada e a frequência como parâmetros de referência.

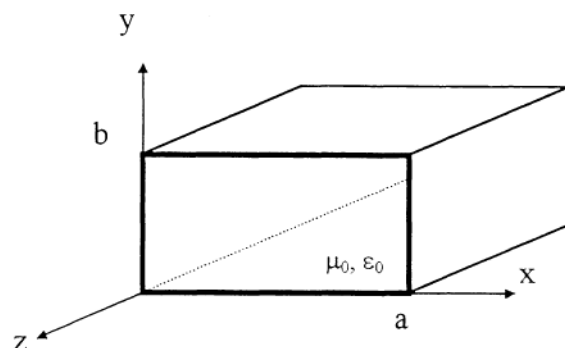
Por fim, desenvolve-se uma discussão acerca do trabalho como um todo, reservando maior atenção aos resultados obtidos nas simulações. Ainda, apresenta-se a bibliografia gerada pelo presente estudo e sugestões para trabalhos posteriores.

## 2 GUIA DE ONDA RETANGULAR PARCIALMENTE PREENCHIDO

### 2.1 MODOS TRANSVERSOS EM GUIAS DE ONDA RETANGULARES COM PREENCHIMENTO HOMOGÊNEO

Na construção de soluções para estruturas eletromagnéticas, muitas são as configurações de campo que satisfazem as Equações de Maxwell e as condições de contorno envolvidas no problema. Quando a estrutura em questão é o guia de onda retangular preenchido com apenas um material homogêneo, (veja a Figura 1), um conjunto clássico de modos usados como solução são os modos Transverso Magnético (TM) e o Transverso Elétrico (TE) [1]. Para o modo TE a componente de campo elétrico (E) na direção de propagação é nula e para configuração TM a componente de campo magnético (H) é nula na orientação de propagação da onda. Por convenção, neste trabalho será considerado que a onda propaga-se no sentido positivo da direção z do plano cartesiano, sendo que para os modos TE e TM quando não seguidos de indicação da direção de orientação subentender-se-á que essa direção é z. No entanto, o foco de interesse está no conjunto de modos no qual observam-se ambas as componentes E e H na direção z, chamados modos híbridos. Estes modos são resultantes da combinação linear de modos degenerados TE e TM [2] e são similares aos modos transversos TE e TM com orientação nas direções x e y. Nesta seção será apresentada a derivação dos campos eletromagnéticos para os pares de modos  $TE^x$ ,  $TM^x$  e  $TE^y$ ,  $TM^y$ , como estudo primário para análise dos modos híbridos que se seguirá em seções posteriores.

FIGURA 1 GUIA DE ONDA RETANGULAR



### 2.1.1 Modos Transversos $TE^x$ e $TM^x$

O conjunto de modos transversos com orientação na direção  $x$  é formado pelos modos  $TE^x$ , com componente  $E$  nula na direção  $x$ , e  $TM^x$  com componente de campo  $H$  nula na direção  $x$ . As expressões para os modos  $TE^x$  e  $TM^x$  podem ser obtidas a partir dos potenciais vetores, magnético ( $\vec{A}$ ) e elétrico ( $\vec{F}$ ).

$$\vec{A} = A_x(x, y, z).ax + A_y(x, y, z).ay + A_z(x, y, z).az \quad (2.1)$$

$$\vec{F} = F_x(x, y, z).ax + F_y(x, y, z).ay + F_z(x, y, z).az \quad (2.2)$$

Os potenciais expressos em (2.1) e (2.2) devem atender, respectivamente, às seguintes equações:

$$\nabla^2 A + \beta^2 A = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 F + \beta^2 F = 0 \quad (2.4)$$

Onde  $\beta$  é a parte imaginária da constante de propagação ( $\gamma$ ) do meio. Sendo  $\gamma = \alpha + j\beta$  e como o guia é considerado sem perdas,  $\alpha = 0$ ,  $\beta$  corresponde à própria constante de propagação.

Os campos E e H resultam da soma de componentes individuais  $E_A$ ,  $E_F$ ,  $H_A$  e  $H_F$ , que por sua vez são obtidas a partir dos potenciais vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{F}$  [1],[2] e [3].

$$E = E_A + E_F = -j\omega A - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot A) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times F \quad (2.5)$$

$$H = H_A + H_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times A - j\omega F - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot F) \quad (2.6)$$

No modo  $TM^x$  o potencial vetor  $\vec{F}$  deve ser nulo e  $\vec{A}$  possuir componente somente na direção x, para que se observe  $H_x = 0$ , característica necessária neste modo. Aplicando tais condições em (2.6) pode-se verificar sua validade. Portanto, o conjunto de campos E e H resultantes para o modo  $TM^x$  são:

$$E_{TM^x}(x, y, z) = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \right) Ax \cdot \vec{a}_x - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 Ax}{\partial x \partial y} \cdot \vec{a}_y - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 Ax}{\partial y \partial z} \cdot \vec{a}_z \quad (2.7)$$

$$H_{TM^x}(x, y, z) = 0 \vec{a}_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial Ax}{\partial z} \vec{a}_y - \frac{1}{\mu} \frac{\partial Ax}{\partial y} \vec{a}_z \quad (2.8)$$

Onde, de acordo com (2.1) e (2.3)  $Ax$  deve satisfazer a equação de onda escalar:

$$\nabla^2 Ax(x, y, z) + \beta^2 Ax(x, y, z) \quad (2.9)$$

Para encontrar a solução da equação diferencial parcial (2.9), será utilizado o método da separação de variáveis [4]. Tomando,

$$Ax(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.10)$$

e substituindo em (2.9), segue que:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) Ax = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

$$Y(y)Z(z) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \beta^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0 \quad (2.11)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.11) por  $X(x)Y(y)Z(z)$  resulta em,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \beta^2 = 0 \quad (2.12)$$

Analisando (2.12), conclui-se que a soma dos três primeiros termos deve resultar em um valor constante e igual a  $-\beta^2$ , em qualquer ponto  $(x, y, z)$ , para que a igualdade seja válida. Consequentemente, cada um dos três termos deve ser constante também. Baseando-se neste argumento,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\beta_x^2 \quad ; \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta_y^2 \quad ; \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\beta_z^2$$

ou alternativamente,

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta_x^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta_y^2 Y(y) = 0$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \beta_z^2 Z(z) = 0 \quad (2.13)$$

Onde  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  e  $\beta_z$  são constantes e relacionam-se com  $\beta$  na forma seguinte:

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \beta^2 \quad (2.14)$$

A solução para cada uma das equações diferenciais ordinárias em (2.13) é conhecida e facilmente encontrada na literatura matemática [4]. De posse das soluções  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$  basta que as substituamos em (2.10) para que se obtenha a solução para equação (2.9). A solução para (2.13) é dada por,

$$Ae^{-j\beta_\theta\theta} + Be^{j\beta_\theta\theta} \quad (2.15)$$

Ou na forma trigonométrica

$$C \cos(\beta_\theta\theta) + D \sin(\beta_\theta\theta) \quad (2.16)$$

onde  $\theta$  pode ser substituído por  $x$ ,  $y$  ou  $z$  nas soluções (2.15) e (2.16). Logo, obtém-se solução de (2.9)

$$Ax(x, y, z) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \quad (2.17)$$

No guia de onda retangular apresentado na da Figura 1 os campos elétricos tangenciais às paredes metálicas são nulos. Partindo desta premissa as seguintes relações de campo são válidas:

Campos tangenciais às paredes laterais do guia

$$Ez_{TM^x}(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = Ez_{TM^x}(x=a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (2.18)$$

$$Ey_{TM^x}(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = Ey_{TM^x}(x=a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (2.19)$$

Campos tangenciais ao topo e a base do guia

$$Ez_{TM^x}(0 \leq x \leq a, y=0, z) = Ez_{TM^x}(0 \leq x \leq a, y=b, z) = 0 \quad (2.20)$$

$$Ex_{TM^x}(0 \leq x \leq a, y=0, z) = Ex_{TM^x}(0 \leq x \leq a, y=b, z) = 0 \quad (2.21)$$



Devido a geometria do guia (veja Figura 1), faz-se necessário apenas que a solução atenda a um dos pares de condições (2.18) ou (2.19) e (2.20) ou (2.21) para que a solução seja válida em todo guia. Portanto, selecionando o par de relações [(2.18), (2.20)], obtém-se:

De (2.17) em (2.7)

$$Ez_{TM^z}(x, y, z) = -\frac{\beta_z \beta_x}{\omega \mu \varepsilon} [-C_1 \text{sen}(\beta_x x) + D_1 \text{cos}(\beta_x x)] [C_2 \text{cos}(\beta_y y) + D_2 \text{sen}(\beta_y y)] A e^{-j\beta_z z} \quad (2.22)$$

Aplicando (2.18) em (2.22)

$$\triangleright Ez_{TM^z}(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = 0$$

$$Ez_{TM^z}(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = -\frac{\beta_z \beta_x}{\omega \mu \varepsilon} [D_1] [C_2 \text{cos}(\beta_y y) + D_2 \text{sen}(\beta_y y)] A e^{-j\beta_z z} = 0$$

$$\text{Logo, } D_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$\triangleright Ez_{TM^z}(x=a, 0 \leq y \leq b, z) = 0$$

$$Ez_{TM^z}(x=a, 0 \leq y \leq b, z) = [-C_1 \text{sen}(\beta_x a)] [C_2 \text{cos}(\beta_y y) + D_2 \text{sen}(\beta_y y)] A e^{-j\beta_z z} = 0$$

Logo,

$$[-C_1 \text{sen}(\beta_x a)] = 0 \Rightarrow \text{sen}(\beta_x a) = 0 \Rightarrow \beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (2.24)$$

Aplicando (2.20) em (2.22)

$$\triangleright Ez_{TM^z}(0 \leq x \leq a, y=0, z) = 0$$

$$Ez_{TM^z}(0 \leq x \leq a, y=0, z) = [-C_1 \text{sen}(\beta_x x) + D_1 \text{cos}(\beta_x x)] [C_2] A e^{-j\beta_z z} = 0$$

$$\text{Logo, } C_2 = 0 \quad (2.25)$$

$$\triangleright Ez_{TM^z}(0 \leq x \leq a, y=b, z) = 0$$

$$Ez_{TM^x}(0 \leq x \leq a, y = b, z) = [-C_1 \text{sen}(\beta_x x)] [D_2 \text{sen}(\beta_y b)] A e^{-j\beta_z z} = 0$$

Logo,

$$[D_2 \text{sen}(\beta_y b)] = 0 \Rightarrow \text{sen}(\beta_y b) = 0 \Rightarrow \beta_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.26)$$

Embora  $n=0$  seja solução para  $\beta_y$  na sentença acima, não é valor válido em (2.7), pois anularia o potencial vetor na direção  $x$  e conseqüentemente a onda para o modo  $TM^x$ .

Tomando o produto de constantes  $C_1$ ,  $D_2$ ,  $A_3$  igual a uma terceira constante  $B_{mn}$  e substituindo-a juntamente com (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) em (2.7), resulta na expressão:

$$A_x(x, y, z) = B_{mn} \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.27)$$

Com (2.27) em (2.7) separam-se os campos  $E$  e  $H$  para o caso  $TM^x$ :

Componentes de campo elétrico  $E_{TM^x}(x, y, z)$

$$Ex_{TM^x}(x, y, z) = -j \frac{B_{mn}}{\omega \mu \epsilon} (\beta^2 - \beta_x^2) \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.28)$$

$$Ey_{TM^x}(x, y, z) = j \frac{B_{mn}}{\omega \mu \epsilon} \beta_x \beta_y \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.29)$$

$$Ez_{TM^x}(x, y, z) = -\frac{B_{mn}}{\omega \mu \epsilon} \beta_y \beta_z \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.30)$$

Componentes de campo magnético  $H_{TM^x}(x, y, z)$

$$Hx_{TM^x}(x, y, z) = 0 \quad (2.31)$$

$$Hy_{TM^x}(x, y, z) = -j \frac{B_{mn}}{\mu} \beta_z \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.32)$$

$$Hz_{TM^x}(x, y, z) = -\frac{B_{mn}}{\mu} \beta_y \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.33)$$

As expressões de campo E e H para o caso TE<sup>x</sup> podem ser obtidas de maneira similar ao caso TM<sup>x</sup>, portanto, alguns passos serão omitidos. Considerando-se agora  $\vec{A} = 0$  e somente a componente na direção x de  $\vec{F}$ .

$$E_{TE^x}(x, y, z) = 0\vec{a}_x - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Fx}{\partial z} \vec{a}_y + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Fx}{\partial y} \vec{a}_z \quad (2.34)$$

$$H_{TE^x}(x, y, z) = -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \right) Fx \vec{a}_x - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 Fx}{\partial x \partial y} \vec{a}_y - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 Fx}{\partial y \partial z} \vec{a}_z \quad (2.35)$$

Onde Fx que satisfaz a equação de onda escalar

$$\nabla^2 Fx(x, y, z) + \beta^2 Fx(x, y, z) \quad (2.36)$$

é dado na forma de (2.17), como segue:

$$Fx(x, y, z) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \text{sen}(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \text{sen}(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em ambas equações (2.34) e (2.35) e aplicando as condições de contorno [(2.18),(2.20)] resulta no conjunto de campos E e H para o modo TE<sup>x</sup>, mostrado abaixo:

Componentes de campo elétrico  $E_{TE^x}(x, y, z)$

$$E_{x_{TE^x}}(x, y, z) = 0 \quad (2.38)$$

$$E_{y_{TE^x}}(x, y, z) = j \frac{A_{mn}}{\varepsilon} \beta_z \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.39)$$

$$E_{z_{TE^x}}(x, y, z) = -\frac{A_{mn}}{\varepsilon} \beta_y \text{sen}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.40)$$

Componentes de campo magnético  $H_{TE^x}(x, y, z)$

$$H_{x_{TE^x}}(x, y, z) = -j \frac{A_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} (\beta^2 - \beta_x^2) \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.41)$$

$$H_{y_{TE^x}}(x, y, z) = j \frac{A_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} \beta_x \beta_y \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.42)$$

$$H_{z_{TE^x}}(x, y, z) = \frac{A_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} \beta_y \beta_z \text{sen}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.43)$$

Onde

$$F_x(x, y, z) = A_{mn} \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.44)$$

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.45)$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.46)$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (2.47)$$

### 2.1.2 Modos Transversos $TE^y$ e $TM^y$

Os modos transversos  $TE^y$  e  $TM^y$  são análogos aos  $TE^x$  e  $TM^x$ , sendo que o  $TM^y$  possui componente  $H_y = 0$  e o  $TE^y$  componente  $E_y = 0$ . Devido a esta similaridade, o método para obtenção dos campos pouco difere do apresentado na seção 2.1.1. Portanto, para evitar que o trabalho torne-se repetitivo, os passos intermediários serão negligenciados e partir-se-á diretamente para a apresentação das relações finais.

Para o modo  $TM^y$  :

$$A_y(x, y, z) = B_{mn} \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.48)$$

Componentes de campo elétrico  $E_{TM^y}(x, y, z)$

$$Ex_{TM^y}(x, y, z) = j \frac{B_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} \beta_y \beta_x \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.49)$$

$$Ey_{TM^y}(x, y, z) = -j \frac{B_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} (\beta^2 - \beta_y^2) \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.50)$$

$$Ez_{TM^y}(x, y, z) = \frac{B_{mn}}{\omega \mu \varepsilon} \beta_y \beta_z \text{sen}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.51)$$

Componentes de campo magnético  $H_{TM^y}(x, y, z)$

$$Hx_{TM^y}(x, y, z) = j \frac{B_{mn}}{\mu} \beta_z \text{sen}(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.52)$$

$$Hy_{TM^y}(x, y, z) = 0 \quad (2.53)$$

$$Hz_{TM^y}(x, y, z) = -\frac{B_{mn}}{\mu} \beta_y \text{sen}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.54)$$

Onde

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.55)$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.56)$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (2.57)$$

Para o modo  $TE^y$  :

$$F_y(x, y, z) = A_{mn} \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.58)$$

Componentes de campo elétrico  $E_{TE^y}(x, y, z)$

$$Ex_{TE^y}(x, y, z) = -j \frac{A_{mn}}{\varepsilon} \beta_z \cos(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.59)$$

$$Ey_{TE^y}(x, y, z) = 0 \quad (2.60)$$

$$Ez_{TE^y}(x, y, z) = \frac{A_{mn}}{\varepsilon} \beta_x \text{sen}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.61)$$

Componentes de campo magnético  $H_{TE^y}(x, y, z)$

$$Hx_{TE^y}(x, y, z) = j \frac{A_{mn}}{\omega\mu\epsilon} \beta_x \beta_y \text{sen}(\beta_x x) \text{cos}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.62)$$

$$Hy_{TE^y}(x, y, z) = -j \frac{A_{mn}}{\omega\mu\epsilon} (\beta^2 - \beta_y^2) \text{cos}(\beta_x x) \text{sen}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.63)$$

$$Hz_{TE^y}(x, y, z) = -\frac{A_{mn}}{\omega\mu\epsilon} \beta_y \beta_z \text{cos}(\beta_x x) \text{cos}(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.64)$$

Onde

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m= 0, 1, 2 \quad (2.65)$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n= 1, 2, 3 \quad (2.66)$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (2.67)$$

## 2.2 MODOS HÍBRIDOS EM GUIAS DE ONDA RETANGULARES PARCIALMENTE PREENCHIDOS

Os guias selecionados para análise nesta seção são apresentados nas Figuras 2 e 3. São guias retangulares de paredes metálicas preenchidos com camadas de dois diferentes materiais dielétricos. Para tais estruturas eletromagnéticas as condições de contorno a serem atendidas na construção de soluções dos campos E e H, estão além da observação de campo tangencial nulo na parede do guia, também, as condições de continuidade de campos E e H tangenciais à interface dielétrica, de regiões distintas, no interior do guia, devem ser incluídas. Os modos TE e TM individualmente não podem suprir essas condições, exceto para a família de modos  $TE_{m0}$  [2] e [3], que atende às condições de contorno da estrutura apresentada da Figura 2 (vide anexo 1). Os modos apropriados para representação da onda guiada nesta estrutura, guardada a exceção citada, são os modos híbridos [2]. Em guias parcialmente preenchidos com 2

ou mais materiais dielétricos os modos híbridos recebem as denominações: 1) Seção Longitudinal Magnética (LSM), para o grupo de modos que possui suas componentes de campo magnético apenas ao longo da interface dielétrica e 2) Seção Longitudinal Elétrica (LSE), para os modos com componentes de campo elétrico normais a interface dielétrica, nulas. Para obtenção dos campos H e E nos modos LSE e LSM, geralmente são usados dois passos de integração, com o apoio de funções potenciais no passo intermediário entre a fonte e os campos, para diminuir a complexidade do processo. Funções potenciais de Hertz são usadas com maior frequência, não desprezando, contudo, a solução por meio dos potenciais  $\vec{A}$  e  $\vec{F}$ , que também é válida. Segue na próxima seção o método de extração dos campos para os modos LSE e LSM, partindo dos potenciais de Hertz.

FIGURA 2. GUIA RETANGULAR COM INTERFACE DIELÉTRICA NO PLANO YZ

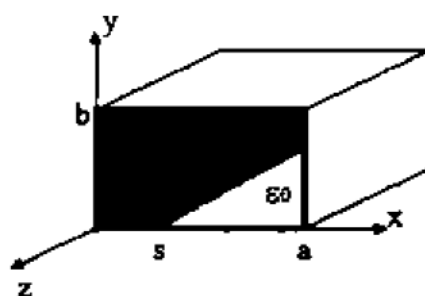
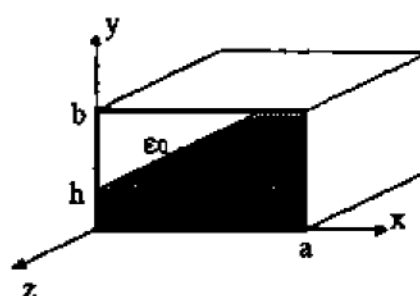


FIGURA 3. GUIA RETANGULAR COM INTERFACE DIELÉTRICA NO PLANO XZ



### 2.2.1 Componentes de Campo e Equações Características para o Modo Longitudinal Elétrico (LSE)

Para o modo LSE o potencial vetor de Hertz do tipo magnético ( $\vec{\Pi}_m$ ) é usado como função auxiliar na obtenção da solução dos campos eletromagnéticos. Considerando a geometria do guia da Figura 2, o vetor  $\vec{\Pi}_m$  adequado deverá possuir componente somente na direção x,

$$\bar{\Pi}_h = \bar{a}_x \psi_h(x, y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.68)$$

Fundamentando-se nas equações de Maxwell com a aplicação das condições de Lorentz [1], as equações de campo são expressas na forma:

$$\bar{E}_{LSE^x} = -j\omega\mu\nabla \times \bar{\Pi}_h \quad (2.69)$$

$$\bar{H}_{LSE^x} = \nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}_h \quad (2.70)$$

O índice x foi escolhido para designar os modos apropriados para o guia da Figura 2. Adicionalmente,  $\bar{\Pi}_h$  deve satisfazer a equação de onda,

$$\nabla^2 \bar{\Pi}_h + \varepsilon_r(x) \beta^2 \bar{\Pi}_h = 0 \quad (2.71)$$

onde  $\varepsilon_r(x)$  é a permissividade elétrica relativa do dielétrico e assume os seguintes valores no interior do guia da Figura 2:

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} \varepsilon_r, & 0 \leq x \leq s \\ 1, & s \leq x \leq a \end{cases} \quad (2.72)$$

Expandindo (2.71)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Pi}_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_h}{\partial z^2} + \varepsilon_r(x) \beta^2 \bar{\Pi}_h = 0 \quad (2.73)$$

A equação de onda (2.73) está na forma de uma equação diferencial parcial e pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis, como no caso da equação (2.9). Retorna como solução:

$$\bar{\Pi}_h = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \text{sen}(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \text{sen}(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \quad (2.74)$$



onde

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \varepsilon_r(x)\beta^2 \quad (2.75)$$

Por simplicidade, a solução para equação (2.74) será apresentada em duas partes, de acordo com a região dielétrica.

Na região S1 ( $0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq b, z$ ) com material  $\mu_d = \mu_0$  e  $\varepsilon_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$\bar{\Pi}_h^d = [C_1^d \cos(\beta_{xd}x) + D_1^d \text{sen}(\beta_{xd}x)] [C_2^d \cos(\beta_{yd}y) + D_2^d \text{sen}(\beta_{yd}y)] A_3^d e^{-j\beta_z z} \quad (2.76)$$

com

$$\beta_{xd}^2 + \beta_{yd}^2 + \beta_z^2 = \beta_d^2 = \omega^2 \mu_d \varepsilon_d \quad (2.77)$$

Na região S2 ( $s \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z$ ) com material  $\mu_0 \varepsilon_0$

$$\bar{\Pi}_h^0 = [C_1^0 \cos(\beta_{x0}(a-x)) + D_1^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-x))] [C_2^0 \cos(\beta_{y0}y) + D_2^0 \text{sen}(\beta_{y0}y)] A_3^0 e^{-j\beta_z z} \quad (2.78)$$

com

$$\beta_{x0}^2 + \beta_{y0}^2 + \beta_z^2 = \beta_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (2.79)$$

Onde  $\beta_d$  e  $\beta_0$  são as constantes de propagação nas respectivas regiões.

As condições de contorno requerem que os campos elétricos tangenciais às paredes metálicas do guia reduzam-se a zero, supondo paredes com condutividade perfeita, e que os campos elétricos e magnéticos tangenciais na interface dielétrica sejam contínuos. Isto posto, as condições de contorno apropriadas para o guia da Figura 2 são:

Região S1, nas paredes do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^d}^d(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \\ Ez_{LSE^d}^d(0 \leq x \leq s, y=0, z) = Ez_{LSE^d}^d(0 \leq x \leq s, y=b, z) = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Região S2, nas paredes do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^0}^0(x=a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \\ Ez_{LSE^0}^0(s \leq x \leq a, y=0, z) = Ez_{LSE^0}^0(s \leq x \leq a, y=b, z) = 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

Continuidade na interface dielétrica do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^d}^d(x=s, 0 \leq y \leq b, z) = Ez_{LSE^0}^0(x=s, 0 \leq y \leq b, z) \\ Hz_{LSE^d}^d(x=s, 0 \leq y \leq b, z) = Hz_{LSE^0}^0(x=s, 0 \leq y \leq b, z) \end{cases} \quad (2.82)$$

De modo geral, sem considerar as regiões S1 e S2, expandindo as expressões de campo em (2.69) e (2.70), obtém-se:

Por definição,

$$\nabla \times \vec{\Pi} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Pi_x & \Pi_y & \Pi_z \end{bmatrix} = \vec{a}_x \left( \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \right) + \vec{a}_y \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \right) + \vec{a}_z \left( \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \right) \quad (2.83)$$

Onde de (2.68),

$$\nabla \times \vec{\Pi}_h = \left( \frac{\partial \Pi_h}{\partial z} \vec{a}_y - \frac{\partial \Pi_h}{\partial y} \vec{a}_z \right) \quad (2.84)$$

Substituindo em (2.84) a solução (2.74), obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_h}{\partial y} &= \beta_y [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [-C_2 \sin(\beta_y y) + D_2 \cos(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \\ \frac{\partial \Pi_h}{\partial z} &= -j\beta_z [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \\ \nabla \times \vec{\Pi}_h &= -[C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] A_3 e^{-j\beta_z z} \begin{pmatrix} j\beta_z [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] \vec{a}_y + \\ \beta_y [-C_2 \sin(\beta_y y) + D_2 \cos(\beta_y y)] \vec{a}_z \end{pmatrix} \quad (2.85)\end{aligned}$$

Logo, as componentes de campo elétrico podem ser escritas na forma:

$$\vec{E}_{LSE^x} = 0 \quad (2.86)$$

$$\vec{E}_{LSE^y} = -\omega\mu A_3 \beta_z [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] e^{-j\beta_z z} \vec{a}_y \quad (2.87)$$

$$\vec{E}_{LSE^z} = j\omega\mu A_3 \beta_y [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [-C_2 \sin(\beta_y y) + D_2 \cos(\beta_y y)] e^{-j\beta_z z} \vec{a}_z \quad (2.88)$$

Aplicando o rotacional em (2.84) obtém-se a expressão para o campo magnético.

$$\vec{H}_{LSE^x} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial \Pi_h}{\partial z} & -\frac{\partial \Pi_h}{\partial y} \end{bmatrix} = -\vec{a}_x \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial z^2} \right) + \vec{a}_y \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial x \partial y} \right) + \vec{a}_z \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.89)$$

Expandindo (2.89), resulta:

$$\vec{H}_{LSE^x} = (\beta_y^2 + \beta_z^2) A_3 [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] e^{-j\beta_z z} \vec{a}_x \quad (2.90)$$

$$\vec{H}_{LSE^y} = \beta_x \beta_y A_3 [-C_1 \sin(\beta_x x) + D_1 \cos(\beta_x x)] [-C_2 \sin(\beta_y y) + D_2 \cos(\beta_y y)] e^{-j\beta_z z} \vec{a}_y \quad (2.91)$$

$$\vec{H}_{LSE^z} = -j\beta_x \beta_z A_3 [-C_1 \sin(\beta_x x) + D_1 \cos(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] e^{-j\beta_z z} \vec{a}_z \quad (2.92)$$

Os campos em (2.86), (2.87), (2.88), (2.90), (2.91) e (2.92) foram obtidos para o caso genérico LSE<sup>x</sup>. No entanto, considerando as regiões S1 e S2 no guia, as expressões de campo E e H podem ser reescritas, seguindo a simbologia adotada em (2.76) e (2.78), como segue:

➤ Região S1:

$$\bar{E}x_{d_{LSE^x}} = 0 \quad (2.93)$$

$$\bar{E}y_{d_{LSE^x}} = -\omega\mu A_s^d \beta_z \left[ C_1^d \cos(\beta_{xd}x) + D_1^d \sin(\beta_{xd}x) \right] \left[ C_2^d \cos(\beta_{yd}y) + D_2^d \sin(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.94)$$

$$\bar{E}z_{d_{LSE^x}} = j\omega\mu A_3^d \beta_{yd} \left[ C_1^d \cos(\beta_{xd}x) + D_1^d \sin(\beta_{xd}x) \right] \left[ -C_2^d \sin(\beta_{yd}y) + D_2^d \cos(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.95)$$

$$\bar{H}x_{d_{LSE^x}} = (\beta_{yd}^2 + \beta_z^2) A_3^d \left[ C_1^d \cos(\beta_{xd}x) + D_1^d \sin(\beta_{xd}x) \right] \left[ C_2^d \cos(\beta_{yd}y) + D_2^d \sin(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.96)$$

$$\bar{H}y_{d_{LSE^x}} = \beta_{xd} \beta_{yd} A_3^d \left[ -C_1^d \sin(\beta_{xd}x) + D_1^d \cos(\beta_{xd}x) \right] \left[ -C_2^d \sin(\beta_{yd}y) + D_2^d \cos(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.97)$$

$$\bar{H}z_{d_{LSE^x}} = -j\beta_{xd} \beta_z A_3^d \left[ -C_1^d \sin(\beta_{xd}x) + D_1^d \cos(\beta_{xd}x) \right] \left[ C_2^d \cos(\beta_{yd}y) + D_2^d \sin(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.98)$$

➤ Região S2:

$$\bar{E}x_{0_{LSE^x}} = 0 \quad (2.99)$$

$$\bar{E}y_{0_{LSE^x}} = -\omega\mu A_s^0 \beta_z \left[ C_1^0 \cos(\beta_{x0}(a-x)) + D_1^0 \sin(\beta_{x0}(a-x)) \right] \left[ C_2^0 \cos(\beta_{y0}y) + D_2^0 \sin(\beta_{y0}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.100)$$

$$\bar{E}z_{0_{LSE^x}} = j\omega\mu A_3^0 \beta_{y0} \left[ C_1^0 \cos(\beta_{x0}(a-x)) + D_1^0 \sin(\beta_{x0}(a-x)) \right] \left[ -C_2^0 \sin(\beta_{y0}y) + D_2^0 \cos(\beta_{y0}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}x_{0_{LSE^3}} = & (\beta_{y_0}^2 + \beta_z^2) A_3^0 \left[ C_1^0 \cos(\beta_{x_0}(a-x)) + D_1^0 \text{sen}(\beta_{x_0}(a-x)) \right] \\ & \left[ C_2^0 \cos(\beta_{y_0}y) + D_2^0 \text{sen}(\beta_{y_0}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}y_{0_{LSE^3}} = & -\beta_{x_0} \beta_{y_0} A_3^0 \left[ -C_1^0 \text{sen}(\beta_{x_0}(a-x)) + D_1^0 \cos(\beta_{x_0}(a-x)) \right] \\ & \left[ -C_2^0 \text{sen}(\beta_{y_0}y) + D_2^0 \cos(\beta_{y_0}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}z_{0_{LSE^3}} = & j\beta_{x_0} \beta_z A_3^0 \left[ -C_1^0 \text{sen}(\beta_{x_0}(a-x)) + D_1^0 \cos(\beta_{x_0}(a-x)) \right] \\ & \left[ C_2^0 \cos(\beta_{y_0}y) + D_2^0 \text{sen}(\beta_{y_0}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \end{aligned} \quad (2.104)$$

Aplicando-se agora o conjunto de condições de contorno (2.80) a (2.82) nas equações (2.99) a (2.104), obtém-se as expressões de campo válidas na estrutura.

De (2.80) em (2.95):

$$Ez_{LSE^d}^d(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = j\omega\mu A_3^d \beta_{yd} \left[ C_1^d \right] \left[ -C_2^d \text{sen}(\beta_{yd}y) + D_2^d \cos(\beta_{yd}y) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z = 0$$

$$\text{Conclui-se que } C_1^d = 0 \quad (2.105)$$

Da condição,

$$Ez_{LSE^d}^d(0 \leq x \leq s, y=0, z) = j\omega\mu A_3^d \beta_{yd} \left[ D_1^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \right] \left[ D_2^d \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z = 0$$

$$\text{Conclui-se que } D_2^d = 0 \quad (2.106)$$

$$Ez_{LSE^d}^d(0 \leq x \leq s, y=b, z) = j\omega\mu A_3^d \beta_{yd} \left[ D_1^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \right] \left[ -C_2^d \text{sen}(\beta_{yd}b) \right] e^{-j\beta_z z} \bar{a}z = 0$$

$$\text{retorna, } C_2^d \text{sen}(\beta_{yd}b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{yd} = \frac{n\pi}{b} \quad \text{com } n = 0, 1, 2 \quad (2.107)$$

De modo similar aos passos anteriores, as condições (2.81) substituídas em (2.101) retornam,

$$C_1^0 = 0 \quad ; \quad D_2^0 = 0 \quad ; \quad \beta_{y0} = \beta_{yd} = \frac{n\pi}{b} \quad \text{com } n = 0, 1, 2 \quad (2.108)$$

Pode-se tornar a escrever os potenciais de Hertz (2.76) e (2.78), substituindo nestes os resultados (2.105), (2.106) e (2.108).

$$\bar{\Pi}_h^d = B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \text{cos}(\beta_{yd}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.109)$$

$$\bar{\Pi}_h^0 = B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \text{cos}(\beta_{y0}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.110)$$

Onde  $B_{mn}^0$  e  $B_{mn}^d$  são constantes e representam o produto de constantes,

$$B_{mn}^d = A_3^d C_2^d D_1^d \quad \text{e} \quad B_{mn}^0 = A_3^0 C_2^0 D_1^0 \quad (2.111)$$

Nota-se que as constantes  $\beta_{y0}$  e  $\beta_{yd}$  são iguais bem como a constante  $\beta_z$ , que inclusive foi grafada de forma indiscriminada, nas duas regiões do guia. De fato um resultado coerente, uma vez que é consequência direta da condição de contorno que impõe a continuidade dos campos tangenciais na interface dielétrica, isto é, na Figura 2 os campos devem possuir constantes de propagação iguais nas direções y e z ao longo de toda a estrutura. As componentes em x das constantes de propagação nos dois meios não possuem solução direta. Entretanto, partindo das condições de continuidade de campos na interface dielétrica (2.82), obtém-se as relações:

$$B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}s) = B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-s)) \quad (2.112)$$

e

$$-\beta_{xd} B_{mn}^d \text{cos}(\beta_{xd}s) = \beta_{x0} B_{mn}^0 \text{cos}(\beta_{x0}(a-s)) \quad (2.113)$$

Montando um sistema com as equações (2.112) e (2.113),

$$\begin{cases} B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}s) - B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \\ \beta_{xd} B_{mn}^d \cos(\beta_{xd}s) + \beta_{x0} B_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

Ou na forma matricial  $[B][\Lambda] = [0]$ ,

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta_{xd}s) & -\text{sen}(\beta_{x0}(a-s)) \\ \beta_{xd} \cos(\beta_{xd}s) & +\beta_{x0} \cos(\beta_{x0}(a-s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{mn}^d \\ B_{mn}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Para que a solução seja não trivial, o determinante da matriz B deve ser nulo. Resolvendo (2.115) obtém-se a equação característica para o modo LSE<sup>x</sup>, como segue:

$$\beta_{xd} \cot(\beta_{xd}s) + \beta_{x0} \cot(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \quad (2.116)$$

onde,

$$\beta_{xd} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \quad \beta_{x0} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \quad (2.117)$$

A análise de campo para a estrutura da Figura 3 é feita de forma similar a anterior sendo que o modo adequado agora é o denominado LSE<sup>y</sup>. O potencial de Hertz também é do tipo magnético  $\bar{\Pi}_h$ , no entanto, possui apenas componente em y.

$$\bar{\Pi}_h = \bar{a}_y \psi_h(x, y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.118)$$

O potencial  $\bar{\Pi}_h$  deve satisfazer a equação de onda (2.71), sendo que:

$$\varepsilon_r(y) = \begin{cases} \varepsilon_r, & 0 \leq y \leq h \\ 1, & h \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.119)$$

Os campos derivam das equações de Maxwell ,

$$\vec{E}_{LSE^y} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{\Pi}_h \quad (2.120)$$

$$\vec{H}_{LSE^y} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h \quad (2.121)$$

onde,

$$\nabla \times \vec{\Pi}_h = \left( -\frac{\partial \Pi_h}{\partial z} \vec{a}_x + \frac{\partial \Pi_h}{\partial x} \vec{a}_z \right) \quad (2.122)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial \Pi_h}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \Pi_h}{\partial x} \end{bmatrix} = \vec{a}_x \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial x \partial y} \right) + \vec{a}_y \left( -\frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial z^2} \right) + \vec{a}_z \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial y \partial z} \right) \quad (2.123)$$

Aplicando as condições de contorno,

Região S1, nas paredes do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^y}^d(x=0, 0 \leq y \leq h, z) = Ez_{LSE^y}^d(x=a, 0 \leq y \leq h, z) = 0 \\ Ez_{LSE^y}^d(0 \leq x \leq a, y=0, z) = 0 \end{cases} \quad (2.124)$$

Região S2, nas paredes do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^y}^0(0 \leq x \leq a, y=b, z) = 0 \\ Ez_{LSE^y}^0(x=0, h \leq y \leq b, z) = Ez_{LSE^y}^0(x=a, h \leq y \leq b, z) = 0 \end{cases} \quad (2.125)$$



Continuidade na interface dielétrica do guia:

$$\begin{cases} Ez_{LSE^y}^d (0 \leq x \leq a, y = h, z) = Ez_{LSE^y}^0 (0 \leq x \leq a, y = h, z) \\ Hz_{LSE^y}^d (0 \leq x \leq a, y = h, z) = Hz_{LSE^y}^0 (0 \leq x \leq a, y = h, z) \end{cases} \quad (2.126)$$

Obtém-se os campos e a equação característica para o modo LSE<sup>y</sup>.

➤ Região S1:

$$\bar{E}x_{LSE^y}^d = \omega\mu A_{mn}^d \beta_z \cos(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.127)$$

$$\bar{E}y_{LSE^y}^d = 0 \quad (2.128)$$

$$\bar{E}z_{LSE^y}^d = j\omega\mu A_{mn}^d \beta_{xd} \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.129)$$

$$\bar{H}x_{LSE^y}^d = -A_{mn}^d \beta_{xd} \beta_{yd} [\text{sen}(\beta_{xd}x)] [\cos(\beta_{yd}y)] e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.130)$$

$$\bar{H}y_{LSE^y}^d = (\beta_{xd}^2 + \beta_z^2) A_{mn}^d [\cos(\beta_{xd}x)] [\text{sen}(\beta_{yd}y)] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.131)$$

$$\bar{H}z_{LSE^y}^d = -j\beta_{yd} \beta_z A_{mn}^d \cos(\beta_{xd}x) \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.132)$$

Onde

$$\bar{\Pi}_h^d = A_{mn}^d \cos(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.133)$$

$$A_{mn}^d = A_3^d C_1^d D_2^d \quad (2.134)$$

➤ Região S2:

$$\bar{E}x_{LSE^y}^0 = \omega\mu A_{mn}^0 \beta_z \cos(\beta_{x0}x) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.135)$$

$$\bar{E}y_{LSE^y}^0 = 0 \quad (2.136)$$

$$\bar{E}z_{LSE^y}^0 = j\omega\mu A_{mn}^0 \beta_{x0} \text{sen}(\beta_{x0}x) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.137)$$

$$\bar{H}x_{LSE^y}^0 = A_{mn}^0 \beta_{x0} \beta_{y0} [\text{sen}(\beta_{x0}x)] [\cos(\beta_{y0}(b-y))] e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.138)$$

$$\bar{H}y_{LSE^y}^0 = (\beta_{x0}^2 + \beta_z^2) A_{mn}^0 [\cos(\beta_{x0}x)] [\text{sen}(\beta_{y0}(b-y))] e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.139)$$

$$\bar{H}z_{LSE^y}^0 = j\beta_{y0} \beta_z A_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}x) \cos(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.140)$$

Onde

$$A_{mn}^0 = A_3^0 C_1^0 D_2^0 \quad (2.141)$$

$$\bar{\Pi}_h^0 = A_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}x) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}(b-y)) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.142)$$

$$\beta_{x0} = \beta_{xd} = \frac{m\pi}{a} \quad \text{com } m = 0, 1, 2 \quad (2.143)$$

De (2.126) forma-se o sistema,

$$\begin{cases} A_{mn}^d \text{sen}(\beta_{yd}h) - A_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \\ \beta_{yd} A_{mn}^d \cos(\beta_{yd}h) + \beta_{y0} A_{mn}^0 \cos(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \end{cases} \quad (2.144)$$

Na forma matricial  $[\Phi][\Lambda] = [0]$ ,

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta_{yd}h) & -\text{sen}(\beta_{y0}(b-h)) \\ \beta_{yd} \cos(\beta_{yd}h) & \beta_{y0} \cos(\beta_{y0}(b-h)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^d \\ A_{mn}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

Para que a solução de (2.145) não seja trivial, deve-se igualar o determinante de  $\Phi$  a zero. Obtendo-se assim a equação característica para o modo LSE<sup>y</sup>.

$$\beta_{yd} \cot(\beta_{yd}h) + \beta_{y0} \cot(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \quad (2.146)$$

onde,

$$\beta_{yd} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \quad \beta_{y0} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \quad (2.147)$$

### 2.2.2 Componentes de Campo e Equações Características para o Modo Longitudinal Magnético (LSM)

O modo LSM, presente em guias de onda parcialmente preenchidos com dielétricos, é caracterizado por apresentar componentes de campo magnético apenas ao longo da seção que divide as regiões dielétricas do guia. Utilizam-se os potenciais de Hertz do tipo elétrico ( $\vec{\Pi}_e$ ) para obtenção dos campos E e H, partindo das equações de Maxwell na forma diferencial [1].

$$\vec{H}_{LSM} = j\omega\varepsilon\nabla \times \vec{\Pi}_e \quad (2.148)$$

$$\vec{E}_{LSM} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e \quad (2.149)$$

onde  $\varepsilon$  é a permissividade do meio dentro do guia. Dependendo do plano no qual está a interface dielétrica  $\varepsilon$  e  $\vec{\Pi}_e$  assumem as seguintes formas:

Para a estrutura da Figura 2 o modo adequado é o LSM<sup>x</sup>, que apresenta:

$$\vec{\Pi}_e = \bar{a}x\psi_h(x,y)e^{-j\beta_z z} \quad (2.150)$$

$$\text{onde } \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r(x), \text{ com } \varepsilon_r(x) = \begin{cases} \varepsilon_r, & 0 \leq x \leq s \\ 1, & s \leq x \leq a \end{cases} \quad (2.151)$$

Para a estrutura da Figura 3, na qual o modo é representado pela sigla LSM<sup>y</sup>,

$$\vec{\Pi}_e = \bar{a}y\psi_h(x,y)e^{-j\beta_z z} \quad (2.152)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r(y) \quad \text{com} \quad \varepsilon_r(y) = \begin{cases} \varepsilon_r, & 0 \leq y \leq h \\ 1, & h \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.153)$$

Os potenciais em (2.150) e (2.152) devem satisfazer a equação de onda:

$$\nabla^2 \bar{\Pi}_e + \varepsilon \beta^2 \bar{\Pi}_e = 0 \quad (2.154)$$

onde  $\beta$  é a constante de propagação no espaço livre. O método para resolver uma equação diferencial parcial aos moldes da equação (2.154) foi apresentado na seção 2.1.1. Portanto, a solução para (2.154) é na forma:

$$\bar{\Pi}_e = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \quad (2.155)$$

Para apresentar o processo de obtenção dos campos e equação característica do modo LSM de forma mais didática será considerado inicialmente caso LSM<sup>x</sup>. Para o modo LSM<sup>y</sup> serão apresentados os resultados de forma sucinta, com apenas alguns passos intermediários relevantes, evitando assim repetições desnecessárias, haja vista que os processos são similares. Expandindo as equações (2.148) e (2.149) obtém-se para o modo LSM<sup>x</sup>:

$$\bar{E}_{LSM^x} = -\bar{a}_x \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial z^2} \right) + \bar{a}_y \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial x \partial y} \right) + \bar{a}_z \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.156)$$

$$\bar{H}_{LSM^x} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \left( \frac{\partial \bar{\Pi}_e}{\partial z} \bar{a}_y - \frac{\partial \bar{\Pi}_e}{\partial y} \bar{a}_z \right) \quad (2.157)$$

onde,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}_e = -\bar{a}_x \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial z^2} \right) + \bar{a}_y \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial x \partial y} \right) + \bar{a}_z \left( \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_e}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.158)$$

$$\nabla \times \bar{\Pi}_e = \left( \frac{\partial \bar{\Pi}_e}{\partial z} \bar{a}_y - \frac{\partial \bar{\Pi}_e}{\partial y} \bar{a}_z \right) \quad (2.159)$$

Aplicando as condições de contorno (2.124) a (2.126) em (2.156) e (2.157), respeitando-se as características das regiões dielétricas internas ao guia, obtém-se as expressões de campo e a equação característica para o modo.

➤ Região S1:

$$\bar{E}x_d_{LSM^s} = (\beta_{xd}^2 + \beta_z^2) A_{mn}^d \cos(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.160)$$

$$\bar{E}y_d_{LSM^s} = -A_{mn}^d \beta_{xd} \beta_{yd} \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.161)$$

$$\bar{E}z_d_{LSM^s} = j\beta_{xd} \beta_z A_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.162)$$

$$\bar{H}x_d_{LSM^s} = 0 \quad (2.163)$$

$$\bar{H}y_d_{LSM^s} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r A_{mn}^d \beta_z \cos(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.164)$$

$$\bar{H}z_0_{LSM^s} = -j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r A_{mn}^d \beta_{yd} \cos(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.165)$$

Onde

$$\bar{\Pi}_h^d = A_{mn}^d \cos(\beta_{xd}x) \cdot \text{sen}(\beta_{yd}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.166)$$

$$A_{mn}^d = A_3^d C_1^d D_2^d \quad (2.167)$$

➤ Região S2:

$$\bar{E}x_0_{LSM^s} = (\beta_{x0}^2 + \beta_z^2) A_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.168)$$

$$\bar{E}y_0_{LSM^s} = A_{mn}^0 \beta_{x0} \beta_{y0} \text{sen}(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \cos(\beta_{y0}y) e^{-j\beta_z z} \quad (2.169)$$

$$\bar{E}z_0_{LSM^s} = -j\beta_{x0} \beta_z A_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-x)) \text{sen}(\beta_{y0}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.170)$$

$$\bar{H}x_d_{LSM^s} = 0 \quad (2.171)$$

$$\bar{H}y_0_{LSM^s} = \omega \varepsilon_0 A_{mn}^0 \beta_z \cos(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.172)$$

$$\bar{H}z_0_{LSM^s} = -j\omega \varepsilon_0 A_{mn}^0 \beta_{y0} \cos(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \cos(\beta_{y0}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.173)$$

Onde

$$\bar{\Pi}_e^0 = A_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}(a-x)) \cdot \text{sen}(\beta_{y0}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.174)$$

$$A_{mn}^0 = A_3^0 C_1^0 D_2^0 \quad (2.175)$$

$$\beta_{y0} = \beta_{yd} = \frac{n\pi}{b} \quad \text{com } n = 1, 2, 3 \quad (2.176)$$

Das condições que solicitam continuidade dos campos na interface dielétrica (2.126) forma-se o sistema,

$$\begin{cases} A_{mn}^d \varepsilon_r \cos(\beta_{xd}s) - A_{mn}^0 \cos(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \\ \beta_{xd} A_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}s) + \beta_{x0} A_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \end{cases} \quad (2.176)$$

Na forma matricial  $[\Phi][\Lambda] = [0]$ ,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \cos(\beta_{xd}s) & -\cos(\beta_{x0}(a-s)) \\ \beta_{xd} \text{sen}(\beta_{xd}s) & \beta_{x0} \text{sen}(\beta_{x0}(a-s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^d \\ A_{mn}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

Para que a solução de (2.177) não seja trivial, deve-se igualar o determinante de  $\Phi$  a zero. Obtendo-se assim a equação característica para o modo LSM<sup>x</sup>.

$$\beta_{xd} \tan(\beta_{xd}s) + \beta_{x0} \varepsilon_r \tan(\beta_{x0}(a-s)) = 0 \quad (2.178)$$

onde,

$$\beta_{xd} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \quad \beta_{x0} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \quad (2.179)$$

Considerando agora o modo LSM<sup>y</sup>, os campos devem ser obtidos a partir do potencial de Hertz do tipo elétrico somente com componentes na direção y,

considerando o caso do guia parcialmente carregado da Figura 3. As equações que determinam os campos são:

$$\vec{E}_{LSM^y} = \bar{a}x \left( \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial y} \right) + \bar{a}y \left( -\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} \right) + \bar{a}z \left( \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \right) \quad (2.180)$$

$$\vec{H}_{LSM^y} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(y) \left( -\frac{\partial \Pi_e}{\partial z} \bar{a}x + \frac{\partial \Pi_e}{\partial x} \bar{a}z \right) \quad (2.181)$$

onde,

$$\nabla \times \vec{\Pi}_e = \left( -\frac{\partial \Pi_e}{\partial z} \bar{a}x + \frac{\partial \Pi_e}{\partial x} \bar{a}z \right) \quad (2.182)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e = \begin{bmatrix} \bar{a}x & \bar{a}y & \bar{a}z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial \Pi_e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \Pi_e}{\partial x} \end{bmatrix} = \bar{a}x \left( \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x \partial y} \right) + \bar{a}y \left( -\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} \right) + \bar{a}z \left( \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial y \partial z} \right) \quad (2.183)$$

A solução apropriada para  $\vec{\Pi}_e$  em cada região do guia, tal que os campos elétricos tangenciais às bordas anulem-se, são:

$$\vec{\Pi}_e^0 = B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}x) \cdot \cos(\beta_{y0}(b-y)) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.184)$$

$$\vec{\Pi}_e^d = B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (2.185)$$

com  $B_{mn}^0 = A_3^0 C_2^0 D_1^0$  e  $B_{mn}^d = A_3^d C_2^d D_1^d$ .

Substituindo (2.184) e (2.185) em (2.180) e (2.181) resulta nas expressões de campo para o modo LSM<sup>y</sup>.

➤ Região S1:

$$\vec{E}_{LSM^y}^{x_d} = -B_{mn}^d \beta_{xd} \beta_{yd} \cos(\beta_{xd}x) \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.186)$$

$$\bar{E}y_{d_{LSM}^y} = (\beta_{xd}^2 + \beta_z^2) B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.187)$$

$$\bar{E}z_{d_{LSM}^y} = j\beta_{yd} \beta_z B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{xd}x) \text{sen}(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.188)$$

$$\bar{H}x_{d_{LSM}^y} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r B_{mn}^d \beta_z \text{sen}(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.189)$$

$$\bar{H}y_{d_{LSM}^y} = 0 \quad (2.190)$$

$$\bar{H}z_{d_{LSM}^y} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r B_{mn}^d \beta_{xd} \cos(\beta_{xd}x) \cdot \cos(\beta_{yd}y) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.191)$$

➤ Região S2:

$$\bar{E}x_0_{LSM^y} = B_{mn}^0 \beta_{x0} \beta_{y0} \cos(\beta_{x0}x) \text{sen}(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.192)$$

$$\bar{E}y_0_{LSM^y} = (\beta_{x0}^2 + \beta_z^2) B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}x) \cdot \cos(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}y \quad (2.193)$$

$$\bar{E}z_0_{LSM^y} = -j\beta_{y0} \beta_z B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{x0}x) \text{sen}(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.194)$$

$$\bar{H}x_0_{LSM^y} = -\omega \varepsilon_0 B_{mn}^0 \beta_z \text{sen}(\beta_{x0}x) \cdot \cos(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}x \quad (2.195)$$

$$\bar{H}y_0_{LSM^y} = 0 \quad (2.196)$$

$$\bar{H}z_0_{LSM^y} = j\omega \varepsilon_0 B_{mn}^0 \beta_{x0} \cos(\beta_{x0}x) \cdot \cos(\beta_{y0}(b-y)) e^{-j\beta_z z} \bar{a}z \quad (2.197)$$

Onde

$$\beta_{x0} = \beta_{xd} = \frac{m\pi}{a} \quad \text{com } m = 1, 2, 3 \quad (2.198)$$

Das condições de continuidade dos campos tangenciais na interface dielétrica resulta o sistema:

$$\begin{cases} B_{mn}^d \varepsilon_r \cos(\beta_{yd}h) - B_{mn}^0 \cos(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \\ \beta_{yd} B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{yd}h) + \beta_{y0} B_{mn}^0 \text{sen}(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \end{cases} \quad (2.199)$$



Ou na forma matricial  $[\Phi][B]=[0]$ ,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \cos(\beta_{yd}h) & -\cos(\beta_{y0}(b-h)) \\ \beta_{yd} \operatorname{sen}(\beta_{yd}h) & \beta_{y0} \operatorname{sen}(\beta_{y0}(b-h)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{mn}^d \\ B_{mn}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.200)$$

Para que a solução de (2.200) não seja trivial, deve-se igualar o determinante de  $\Phi$  a zero. Obtendo-se assim a equação característica para o modo LSM<sup>y</sup>.

$$\beta_{yd} \tan(\beta_{yd}h) + \beta_{y0} \varepsilon_r \tan(\beta_{y0}(b-h)) = 0 \quad (2.201)$$

onde,

$$\beta_{yd} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \quad \beta_{y0} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \quad (2.202)$$

### 2.3 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS RADIADOS NA REGIÃO DE CAMPO DISTANTE

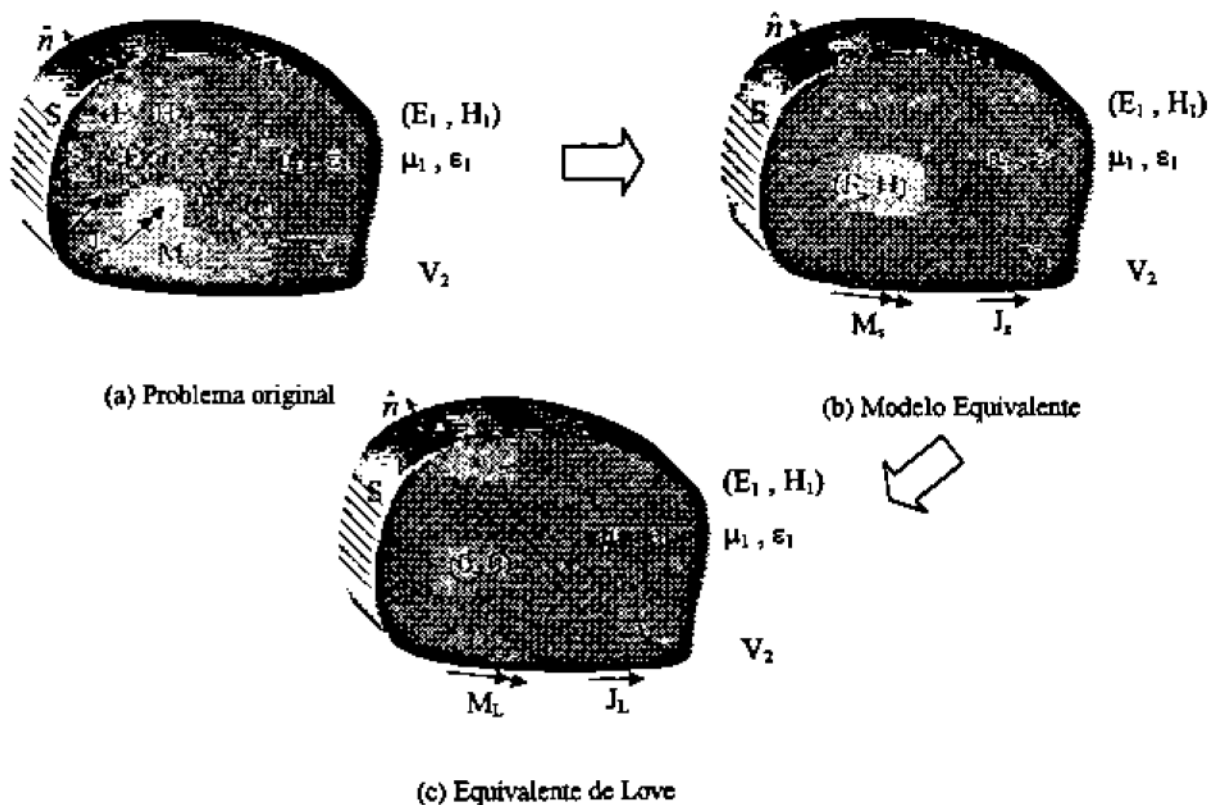
Antenas de abertura constituem uma grande classe de antenas que emitem ondas eletromagnéticas através de uma abertura radiante. Antenas do tipo refletoras e cornetas são exemplos de antenas de abertura usadas em sistemas de radiofrequências e microondas. O guia de onda retangular radiando a partir da abertura na sua terminação ou através de *slots* montados ao longo de sua superfície metálica também exemplifica esta classe de antenas. Nesta seção serão investigadas as características de radiação na região de campo distante para o guia retangular parcialmente carregado, considerando a abertura de sua terminação radiando no espaço livre, em especial para o guia WR 112 [5] carregado com material dielétrico de permissividade  $\varepsilon_r=2,32$  para o modo dominante LSE<sub>10</sub>. Inicialmente será apresentado o processo de obtenção dos campos eletromagnéticos na região de campo distante gerados a partir dos campos

tangenciais à abertura do guia, usando potenciais vetores auxiliares, com base na teoria da equivalência de campos [1],[2] e [3].

### 2.3.1 Equações de Radiação para os Campos na Abertura do Guia

O *Princípio da Equivalência de Campos* é freqüentemente utilizado na solução de problemas de radiação eletromagnética. Consiste basicamente na criação de um problema matemático equivalente ao problema eletromagnético original de modo que sua solução seja encontrada de forma mais simples. Este princípio é bastante abrangente e possui algumas implementações clássicas [2] e [3] dentre as quais deve-se destacar o *Teorema da Equivalência de Campos* proposto por Love [3]. Inicialmente, considere uma superfície fechada imaginária  $S$  que separa um meio isotrópico em duas regiões  $V_1$  e  $V_2$  como na Figura 4. Supõe-se que todas as fontes estão localizadas na região  $V_1$  e que ambas  $S$  e  $V_2$  estão livre de fontes.

FIGURA 4 ILUSTRAÇÃO DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE CAMPOS



O teorema indica que os campos  $E_1, H_1$  em  $V_2$  produzidos pelas fontes  $J_1, M_1$  em  $V_1$  (problema original) são iguais aos que produzidos por um sistema de fontes virtuais  $J_s, M_s$  na superfície  $S$ . Supondo que os campos no interior da superfície  $S$  para o modelo equivalente são  $E$  e  $H$ , as fontes virtuais em  $S$  serão densidades superficiais de corrente elétricas e magnéticas induzidas pelos campos eletromagnéticos tangenciais à superfície (Figura 4(b)), que observando-se as condições de contorno podem ser escritas por,

$$J_s = n \times [H_1 - H] \quad , \quad M_s = -n \times [E_1 - E]. \quad (2.203)$$

Pelo *Teorema da Unicidade* [6], que é base para o princípio da equivalência de campos, sabe-se que apenas os campos tangenciais  $E$  ou  $H$  sobre a superfície são necessários para a determinação da solução do problema, ou seja, conhecendo a distribuição de corrente elétrica e magnética em  $S$  é possível encontrar a solução para o problema equivalente. Em adição, este, assegura que a solução para os dois sistemas é única. Então, como consequência do teorema da unicidade, arbitra-se que os campos  $E$  e  $H$  no interior de  $S$  são nulos (Figura 4 (c)). As fontes virtuais são portanto reescritas na forma,

$$J_L = n \times H_1 \quad , \quad M_L = -n \times E_1. \quad (2.204)$$

Encontrada a formulação para as fontes equivalentes é possível calcular partindo delas os campos radiados na região de campo distante através das equações integrais para o espaço livre [6] aplicadas sobre a abertura, supondo previamente que não há obstáculos entre a fonte e o ponto de observação. As integrais de radiação podem ser resolvidas com o auxílio de potenciais vetores  $\vec{A}$  (resultante de  $\vec{J}_L$ ) e  $\vec{F}$  (resultante de  $\vec{M}_L$ ) usando as seguintes relações [6]:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S J_L \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (2.205)$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_S M_L \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (2.206)$$

FIGURA 5 SISTEMA DE COORDENADAS PARA ANÁLISE DE ANTENAS DE ABERTURA

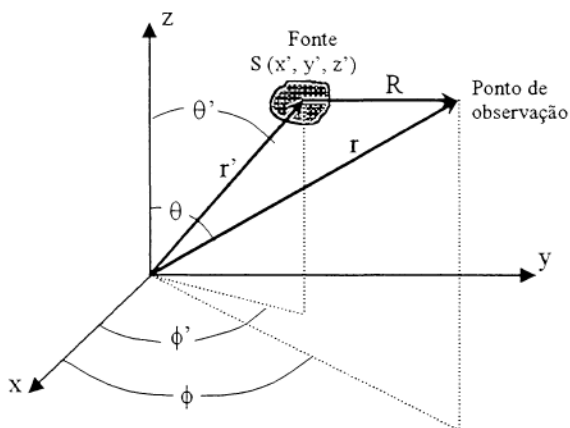
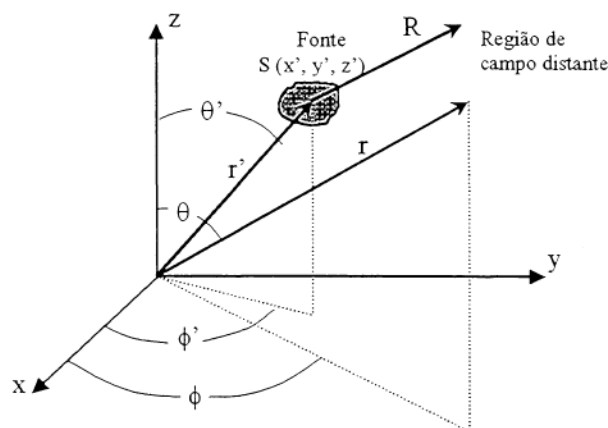


FIGURA 6 APROXIMAÇÃO PARA REGIÃO DE CAMPO DISTANTE



Onde  $R$  é a distância entre a fonte e o ponto de observação. Para o caso do ponto de observação localizado na região de campo distante o parâmetro  $R$  pode ser aproximado por  $R \approx r$  para variações de amplitude e  $R \approx r - r' \cos \varphi$  para variações de fase. As Figuras 5 e 6 ilustram a geometria do problema. Como a onda radiada observada em  $P$  é do tipo esférica, é interessante trabalhar em coordenadas esféricas. Ainda, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são perpendiculares entre si e ambos são perpendiculares em relação a direção  $\hat{r}$ , caracterizando assim um campo transversal elétrico e magnético (TEM) em relação a  $\hat{r}$  que é a direção de propagação da onda. Portanto, os campos na direção  $\hat{r}$  embora existam podem ser desprezados quando comparados com as componentes nas direções  $\theta$  e  $\phi$ . A relação entre os potenciais vetores e os campos eletromagnéticos pode ser escrita por :

$$\vec{E}_A = -j\omega(A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \quad (2.207)$$

$$\vec{H}_F = -j\omega(F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi}) \quad (2.208)$$

onde

$$\vec{E}_F = \eta \vec{H}_F \times \hat{r} \quad (2.209)$$

O campo elétrico total na região de campo distante é obtido da soma de (2.207) e (2.209),

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = -j\omega \left[ (A_\theta - \eta F_\phi) \hat{\theta} + (A_\phi + \eta F_\theta) \hat{\phi} \right] \quad (2.210)$$

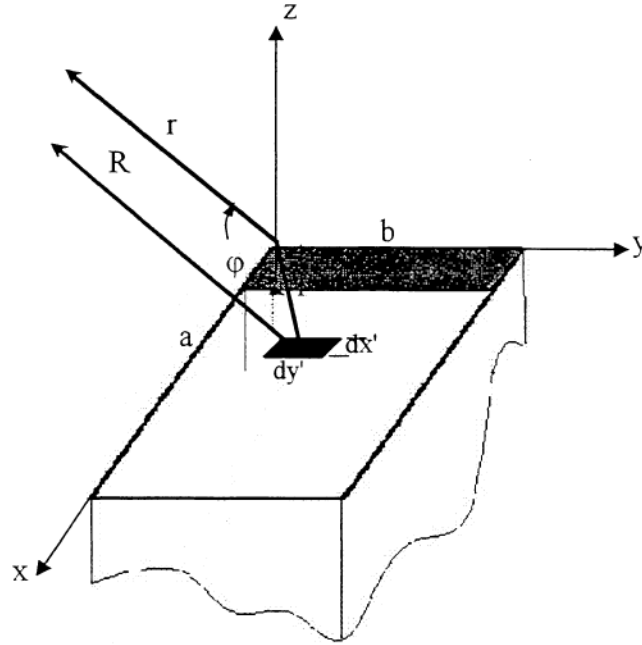
A equação (2.210) envolve ambos os potenciais vetores, ou seja, é resultante dos dois tipos de densidade de corrente. Por dualidade, de (2.210) obtém-se a equação para  $\vec{H}$ ,

$$\vec{H} = -j\omega \left[ \left( F_\theta - \frac{A_\phi}{\eta} \right) \hat{\theta} + \left( F_\phi + \frac{A_\theta}{\eta} \right) \hat{\phi} \right] \quad (2.211)$$

### 2.3.2 Aplicação do Princípio da Equivalência de Campos para o Caso do Guia Parcialmente Carregado

Considere o guia da Figura 7, radiando no espaço livre a partir da sua extremidade. O problema enquadra-se no conhecido problema de radiação por aberturas retangulares, amplamente abordado por diversos autores [39]-[42]. O princípio da equivalência de campos, apresentado na seção 2.3.1, pode ser aplicado na análise da antena de abertura em questão. Para tal, o cálculo dos campos na região de campo distante, parte do pressuposto conhecimento da exata distribuição de campos sobre a abertura. No entanto, esta premissa é sabidamente impraticável. Para contornar este entrave, algumas aproximações devem ser utilizadas, entre elas, usar a física ótica ao invés da geométrica. Para simplificar a análise, consideremos que a distribuição de campo na abertura é conhecida e resultante somente do modo dominante LSE<sub>10</sub>. Logo, substituindo  $n = 0$  e  $z = 0$  (observe a localização da origem do sistema cartesiano na Figura 7, onde a abertura está montada sobre o plano  $z = 0$ )

FIGURA 7 GUIA DE ONDA PARCIALMENTE PREENCHIDO RADIANDO NO ESPAÇO LIVRE A PARTIR DA SUA TERMINAÇÃO



nas equações (2.194) a (2.205) obtém-se os campos tangenciais à abertura:

$$\vec{E}_t = \begin{cases} -B\omega\mu\beta_z \text{sen}(\beta_{xd}x) \hat{a}_y & \text{para } 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq b \\ -\omega\mu\beta_z \text{sen}[\beta_{x0}(a-x)] \hat{a}_y & \text{para } s \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.212)$$

$$\vec{H}_t = \begin{cases} B\beta_z^2 \text{sen}(\beta_{xd}x) \hat{a}_x & \text{para } 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq b \\ \beta_z^2 \text{sen}[\beta_{x0}(a-x)] \hat{a}_x & \text{para } s \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.213)$$

Substituindo (2.212) e (2.213) em (2.204) as fontes equivalentes na abertura são obtidas,

$$\vec{J} = \begin{cases} \hat{n} \times (B\beta_z^2 \text{sen}(\beta_{xd}x) \hat{a}_x) & \text{para } 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq b \\ \hat{n} \times (\beta_z^2 \text{sen}[\beta_{x0}(a-x)] \hat{a}_x) & \text{para } s \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.214)$$

$$\vec{M} = \begin{cases} -\hat{n} \times (-B\omega\mu\beta_z \text{sen}(\beta_{x_d}x) \hat{\alpha}y) & \text{para } 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq b \\ -\hat{n} \times (-\omega\mu\beta_z \text{sen}[\beta_{x_0}(a-x)] \hat{\alpha}y) & \text{para } s \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad (2.215)$$

Onde a constante B é dada pela razão  $\frac{B^d}{B_{mn}^0}$ , que de (2.113) pode ser obtida e expressa por:

$$B = \frac{\text{sen}[\beta_{x_0}(a-x)]}{\text{sen}(\beta_{x_d}x)} \quad (2.216)$$

Usando (2.204) em (2.205) e (2.206) e as aproximações para R, produz:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi r} \hat{n} \times \iint_S \vec{H}_t e^{-jk(r-r'\cos\varphi)} ds' \quad (2.217)$$

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon}{4\pi r} \hat{n} \times \iint_S \vec{E}_t e^{-jk(r-r'\cos\varphi)} ds' \quad (2.218)$$

As integrais de radiação em (2.217) e (2.218) podem ser denotadas por:

$$\vec{I}^H = \iint_S \vec{H}_t e^{jkr'\cos\varphi} ds' = \iint_S Hx_t(x', y') e^{jk(x'\text{sen}\theta \cos\phi + y'\text{sen}\theta \text{sen}\phi)} dx' dy' \quad (2.219)$$

$$\vec{I}^E = \iint_S \vec{E}_t e^{jkr'\cos\varphi} ds' = \iint_S Ey_t(x', y') e^{jk(x'\text{sen}\theta \cos\phi + y'\text{sen}\theta \text{sen}\phi)} dx' dy' \quad (2.220)$$

Onde, da Figura 7, o elemento diferencial de área  $ds' = dy' dz'$  e  $r'\cos(\varphi) = x'\text{sen}\theta \cos\phi + y'\text{sen}\theta \text{sen}\phi$ . Note que as integrais (2.219) e (2.220) são transformadas inversas de Fourier (duplas) dos campos tangenciais à abertura. No caso específico aqui estudado, de acordo com (2.212) e (2.213), as integrais só possuirão componentes nas direções:

$$\vec{I}^H = I_x^H \hat{\alpha}x \text{ e } \vec{I}^E = I_y^E \hat{\alpha}y \quad (2.221)$$

Conseqüentemente,

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{z} \times (\mathbf{I}_x^H \hat{\alpha}x) = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{I}_x^H \hat{\alpha}y \quad (2.222)$$

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\alpha}z \times (\mathbf{I}_y^E \hat{\alpha}y) = \frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{I}_y^E \hat{\alpha}x \quad (2.223)$$

Aplicando a transformação de coordenadas retangulares para esféricas [4], as expressões para os potenciais vetores em (2.222) e (2.223) podem ser reescritas por:

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ (\mathbf{I}_\theta^H) \hat{\theta} + (\mathbf{I}_\phi^H) \hat{\phi} \right] \quad (2.224)$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ (\mathbf{I}_\theta^E) \hat{\theta} + (\mathbf{I}_\phi^E) \hat{\phi} \right] \quad (2.225)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\theta^H &= \mathbf{I}_x^H \cos\theta \sin\phi \\ \mathbf{I}_\phi^H &= \mathbf{I}_x^H \cos\phi \\ \mathbf{I}_\theta^E &= \mathbf{I}_y^E \cos\theta \cos\phi \\ \mathbf{I}_\phi^E &= -\mathbf{I}_y^E \sin\phi \end{aligned} \quad (2.226)$$

Substituindo (2.224) e (2.225) em (2.210) obtém-se as componentes de  $\vec{E}$  na região de campo distante na forma compacta, radiados a partir da abertura na terminação do guia parcialmente carregado para o modo LSE<sub>10</sub>,

$$E_\theta = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \mathbf{I}_\phi^E + \eta \mathbf{I}_\theta^H \right] \quad (2.227)$$

$$E_\phi = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \mathbf{I}_\theta^E - \eta \mathbf{I}_\phi^H \right] \quad (2.228)$$



Expandindo as expressões para as componentes em (2.227) e (2.228),

$$E_{\theta} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (\omega\mu\beta_z + \eta \cos\theta\beta_z^2) \sin\phi \left( \int_0^b \int_0^s B \sin(\beta_{xd} x) e^{jk(x'\sin\theta \cos\phi + y'\sin\theta \sin\phi)} dx' dy' + \int_0^b \int_0^a \sin[\beta_{x0}(a-x)] e^{jk(x'\sin\theta \cos\phi + y'\sin\theta \sin\phi)} dx' dy' \right) \quad (2.229)$$

$$E_{\phi} = -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (\omega\mu\beta_z \cos\theta + \eta\beta_z^2) \cos\phi \left( \int_0^b \int_0^s B \sin(\beta_{xd} x) e^{jk(x'\sin\theta \cos\phi + y'\sin\theta \sin\phi)} dx' dy' + \int_0^b \int_0^a \sin[\beta_{x0}(a-x)] e^{jk(x'\sin\theta \cos\phi + y'\sin\theta \sin\phi)} dx' dy' \right) \quad (2.230)$$

As integrais em (2.29) e (2.30) podem ser resolvidas utilizando-se ferramentas computacionais disponíveis.

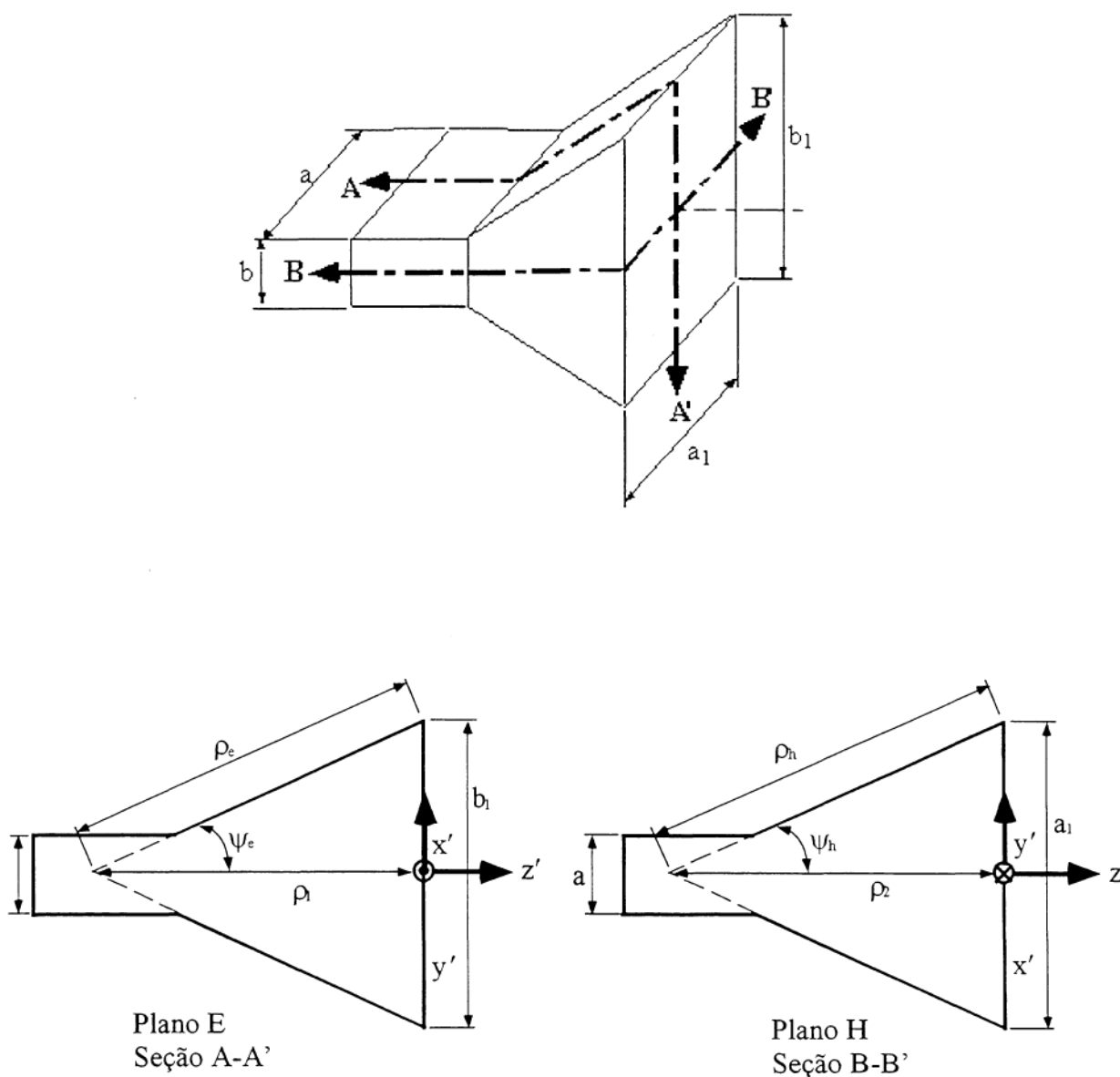
### 3 CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA

Antenas do tipo corneta são extremamente populares em sistemas de comunicações na faixa de microondas. Este dispositivo é usado em conjunto com o guia de onda para proporcionar uma transição suave para onda que propaga-se do guia para o espaço livre. Possui características de baixo VSWR, alto ganho e largura de banda relativamente ampla. A corneta piramidal é um exemplo clássico e muito usado de corneta de seção retangular. Dentre as diversas formas de implementação, esta enquadra-se ao uso com guias retangulares. Tendo em vista tais propriedades, neste capítulo, características da corneta piramidal serão abordadas. Inicialmente na seção 3.1, sob o foco construtivo, onde a geometria do dispositivo será explorada. Em seguida, na seção 3.2, será apresentada uma discussão acerca dos campos eletromagnéticos propagantes na corneta piramidal parcialmente preenchida com dielétrico e também a derivação das equações de radiação para o dispositivo considerando-se a região de campo distante.

### 3.1 CORNETA PIRAMIDAL

A corneta piramidal nada mais é que um guia retangular com aberturas angulares em suas paredes. Na Figura 8 encontram-se alguns detalhes acerca da geometria da corneta.

FIGURA 8 ANTENA CORNETA PIRAMIDAL



Da análise da geometria da antena apresentada na Figura 8 um conjunto de relações pode ser obtido. Inicialmente, tomando o plano E (Figura 8),  $\rho_1$  pode ser obtido usando as medidas  $b_1$  e  $\rho_e$  pela relação:

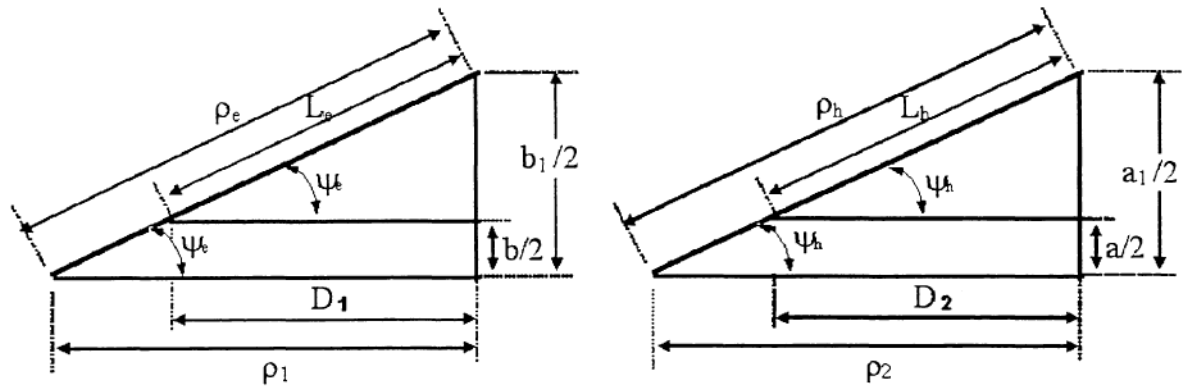
De acordo com o Teorema de Pitágoras,

$$\rho_e^2 = \rho_1^2 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad \rho_1 = \sqrt{\rho_e^2 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} \quad \therefore \quad \rho_1 = \sqrt{\rho_e^2 - \frac{b_1^2}{4}}$$

$$\rho_1 = b_1 \sqrt{\frac{\rho_e^2}{b_1^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.1)$$

Da Figura 8, encontra-se a relação entre triângulos apresentada na Figura 9.

FIGURA 9 DETALHE DA GEOMETRIA DA ANTENA CORNETA PIRAMIDAL



Por semelhança de triângulos, da Figura 9, obtém-se:

$$\frac{D_1}{\left(\frac{b_1}{2} - \frac{b}{2}\right)} = \frac{\rho_1}{\frac{b_1}{2}} \quad \therefore \quad D_1 = \frac{(b_1 - b)\rho_1}{b_1} \quad \text{que pela substituição de (3.1) torna-se:}$$

$$D_1 = (b_1 - b) \sqrt{\frac{\rho_e^2}{b_1^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.2)$$

Reescrevendo (3.2),

$$\rho_e = b_1 \sqrt{\left(\frac{D_1}{b_1 - b}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (3.3)$$

De forma análoga, para o plano H (Figura 9) as seguintes relações são válidas:

$$\rho_2 = a_1 \sqrt{\frac{\rho_h^2}{a_1^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.4)$$

$$D_2 = (a_1 - a) \sqrt{\frac{\rho_h^2}{a_1^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.5)$$

$$\rho_h = a_1 \sqrt{\left(\frac{D_2}{a_1 - a}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (3.6)$$

Ainda, deve-se observar que a cometa só será realizável se as medidas  $D_1$  e  $D_2$  forem iguais. Logo, a relação resultante de (3.2) e (3.5) deve ser atendida.

$$\left(\frac{a_1 - a}{a_1}\right)^2 \left(\rho_h^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{b_1 - b}{b_1}\right)^2 \left(\rho_e^2 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2\right) \quad (3.7)$$

Ou alternativamente:

$$\cos(\psi_e) = \frac{D_1}{L_e}$$

$$\cos(\psi_h) = \frac{D_2}{L_h}$$

$$L_e \cos(\psi_e) = L_h \cos(\psi_h) \quad (3.8)$$

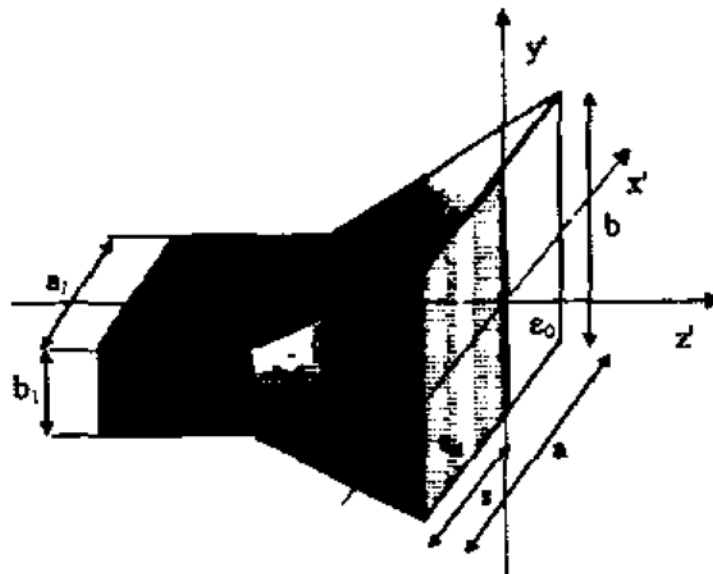
### 3.2 ANÁLISE DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA

A corneta piramidal pode ser tratada como um guia de onda radial derivado da deflexão angular das paredes de um guia retangular. O sistema de coordenadas cilíndrico é apropriado para representação das componentes de campo eletromagnético da onda que propaga-se no interior corneta. Este modo de obtenção dos campos envolve funções de Hankel, por tratarem-se de ondas TE e TM em coordenadas cilíndricas. O mesmo método pode ser estendido à análise de campos na corneta piramidal parcialmente preenchida. Uma vez tomado o guia retangular parcialmente preenchido como elemento alimentador da corneta em questão, os modos excitados serão modos híbridos LSE e LSM tal qual no guia retangular parcialmente preenchido, com a adição de um termo de retificação de fase nas componentes de campo. Esta aproximação é válida desde que tomemos cornetas com pequenos ângulos de abertura, caso contrário deve-se aplicar métodos perturbacionais. Na seção 2.2 foram derivadas as expressão para os campos eletromagnéticos propagantes no guia retangular parcialmente preenchido. Das relações obtidas para a família de modos LSE na seção 2.2.1, pode-se verificar que o modo LSE10 é o modo dominante na estrutura da Figura 2 (ver figura na pg. 14). Sendo que um guia retangular de características físicas e elétricas similares ao guia apresentado na Figura 2 é usado como alimentador da corneta da Figura 10, arbitra-se, neste estudo, que a corneta estará excitada unicamente pelo modo LSE10. Se a corneta possuir dimensões tais que seu comprimento axial seja muito maior que as dimensões da abertura, é válida a seguinte aproximação para os campos, dos modos de baixa ordem, tangentes à abertura da corneta :

$$\vec{E}_t = \begin{cases} E_d \cos \left[ \beta_{xd} \left( \frac{\pi x'}{a_1} \right) \right] \cdot CF \cdot \hat{y}' & \text{para } -\frac{a_1}{2} \leq x' \leq s - \frac{a_1}{2}, -\frac{b_1}{2} \leq y' \leq \frac{b_1}{2} \\ E_0 \cos \left[ \beta_{x0} \pi \left( 1 - \frac{x'}{a_1} \right) \right] \cdot CF \cdot \hat{y}' & \text{para } s - \frac{a_1}{2} \leq x' \leq \frac{a_1}{2}, -\frac{b_1}{2} \leq y' \leq \frac{b_1}{2} \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $CF = e^{-j\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{z^2}{\rho_2}\right)}$  é o termo de compensação de fase nos planos E e H (ver detalhe da Figura 8). Este termo quádrico é introduzido para corrigir a defasagem que a onda guiada experimenta no interior da corneta.

FIGURA 10 ANTENA CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA



## 4 RESULTADOS

### 4.1 LEVANTAMENTO DAS CURVAS DE DISPERSÃO

As equações características para os modos LSE e LSM são equações transcendentais, sem soluções diretas. Métodos numéricos para localização de raízes com apoio de algoritmos recursivos podem ser usados para extração das raízes destas equações .

Nesta análise convencionou-se que a onda propaga-se na direção  $z$  no sentido positivo. Portanto, é interessante que as equações características dos modos híbridos sejam reescritas como funções de  $\beta_z$ , bastando para tal substituir as relações de  $\beta_x$ 's e  $\beta_y$ 's nas equações características dos respectivos modos. Ou seja:

Substituindo (2.117) em (2.116) obtém-se para o modo LSE<sup>x</sup>,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \cdot \cot \left( \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \cdot s \right) \\ & + \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \cot \left( \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta_z^2} \cdot (a-s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

De (2.147) em (2.146) reduz a equação característica para o modo LSE<sup>y</sup> apresentada a seguir,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \cot \left( \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \cdot h \right) \\ & + \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \cot \left( \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \beta_z^2} \cdot (b-h) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$



De (2.179) em (2.178) para o modo LSM<sup>x</sup>, como segue,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} - \beta_z^2 \tan\left(\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot s\right) \\ & + \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot \varepsilon_r \tan\left(\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot (a-s)\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

E de (127) em (126) tem-se para o modo LSM<sup>y</sup> a equação característica,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} - \beta_z^2 \tan\left(\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \cdot h\right) \\ & + \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \cdot \varepsilon_r \tan\left(\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \cdot (b-h)\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os fatores  $m$  e  $n$  assumem valores inteiros, de acordo com (2.108), (2.143), (2.176) e (2.198), indicando a possibilidade de uma infinidade de modos propagantes no guia. No entanto, nem todos os modos estarão presentes no guia, dependendo isto da frequência de operação utilizada. Cada modo possui uma frequência mínima a partir da qual começa a propagar-se. Neste ponto limítrofe entre a propagação e a latência do modo, a frequência é chamada de *frequência de corte*. No corte a constante de propagação é nula. Portanto, basta substituir  $\beta_z=0$  nas equações (4.1) a (4.4) para que se obtenham as frequências de corte de cada modo no guia. Para ilustração, tomando-se a equação (4.1) no corte, fixando-se o parâmetro  $n$  e fazendo variar a frequência angular  $\omega$ , será observado a ocorrência de um número  $m$  de raízes para a equação. Cada raiz encontrada será portanto a frequência de corte do modo  $m$ ,  $n$  específico, constituindo-se assim uma família de modos. Uma forma de representação das famílias de modos LSE e LSM, propagantes no guia, é através de curvas de dispersão. Neste caso, o termo dispersão denota a diferença que ocorre entre a velocidade de propagação da onda no meio e a velocidade de grupo que varia com a

freqüência  $\omega$ . Nas Figuras 11 a 16 apresentam-se as curvas de dispersão para o guia WR112[5] ( $a = 28,50\text{mm}$  e  $b = 12,62\text{mm}$ ) com paredes metálicas perfeitamente condutoras (PEC) preenchido parcialmente com camada de material dielétrico isotrópico de permissividade elétrica relativa igual a 2,32 (PTFE-Politetrafluoretileno) no plano YZ. As perdas no dielétrico foram negligenciadas por serem ínfimas. Os gráficos exibem o comportamento da constante de propagação  $\beta_z$  em função da freqüência para os primeiros modos propagantes. Ainda, para melhor visualização dos resultados, a constante de propagação apresentada nos gráficos está normalizada pela constante de propagação no vácuo. Este estudo paramétrico simula o preenchimento gradual do guia com material dielétrico, tomando camadas de larguras diferenciadas que variam desde o guia praticamente oco ao quase completamente preenchido. Percebe-se que em todos os casos apresentados o modo  $LSE_{10}^x$  é o que inicialmente propaga-se no guia, motivo pelo qual para esta configuração o modo é dito *dominante*.

Nos casos extremos, preenchimento de 5% e 95% do guia, o modo dominante tangencia as retas de referência  $\beta_z/k_0 = 1$  e  $\beta_z/k_0 = \sqrt{2.32}$  que equivalem aos limites do guia oco e completamente cheio, respectivamente, o que indica nestes casos uma convergência dos modos híbridos LSE e LSM para os modos híbridos TE e TM [2]. Nota-se também que com a inserção do dielétrico a freqüência de corte dos modos desloca-se para esquerda, ou seja, os modos passam a propagar à uma freqüência menor. Nas Figuras 17 e 18 apresentam-se, respectivamente, as curvas de dispersão para o guia oco e completamente preenchido, nas quais evidencia-se a correlação entre os modos para diferentes direções de referência adotadas. Em seguida na Figura 19, para reiterar o estudo do comportamento dos modos híbridos, são apresentados concomitantemente as curvas para os modos dominantes no guia parcialmente carregado, oco e cheio.

FIGURA 11 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R = 2.32$ ) DE LARGURA  $s = 0.05a$

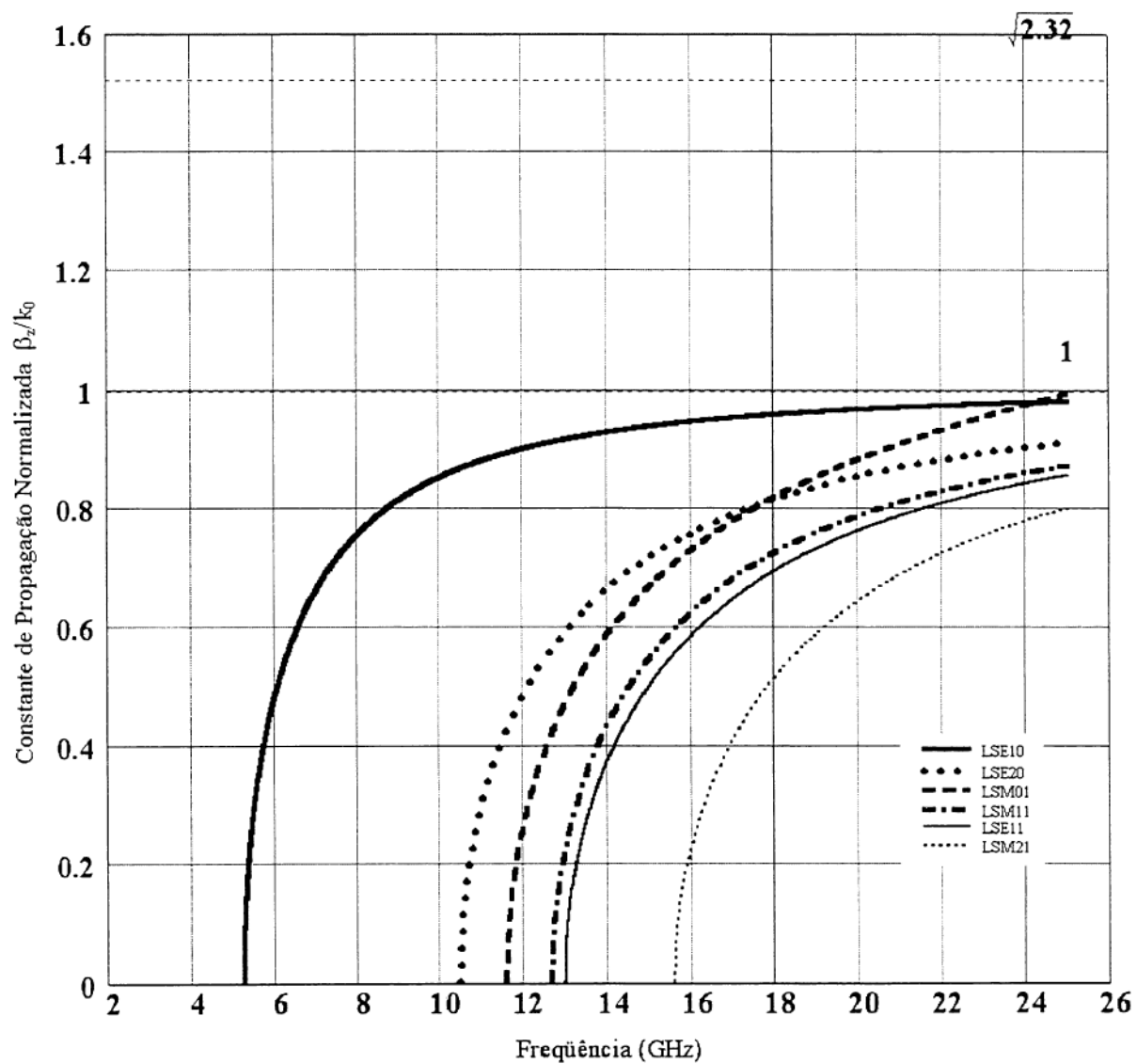


FIGURA 12 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R = 2.32$ ) DE LARGURA  $s = 0.2a$

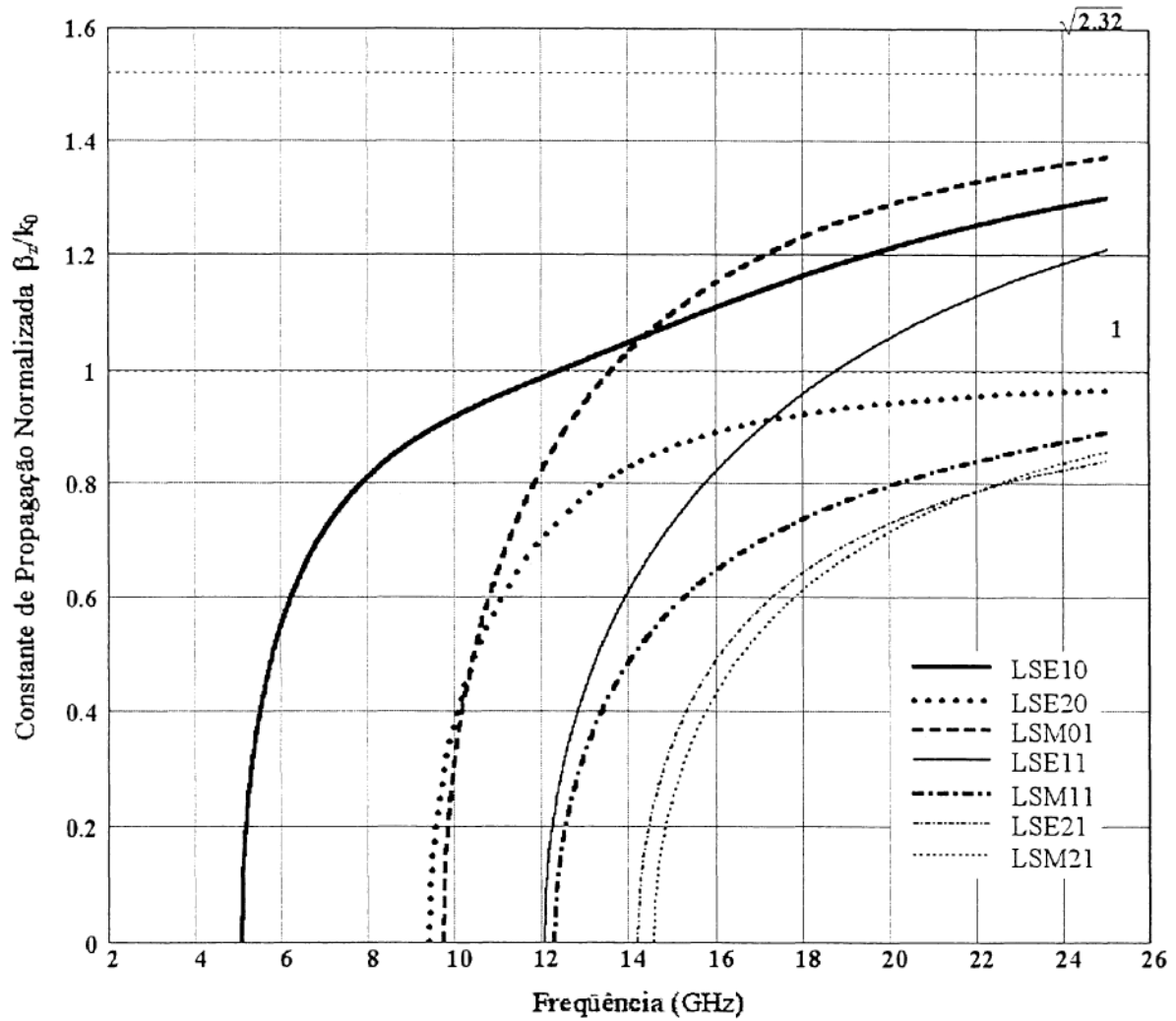


FIGURA 13 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R = 2.32$ ) DE LARGURA  $s = 0.4a$

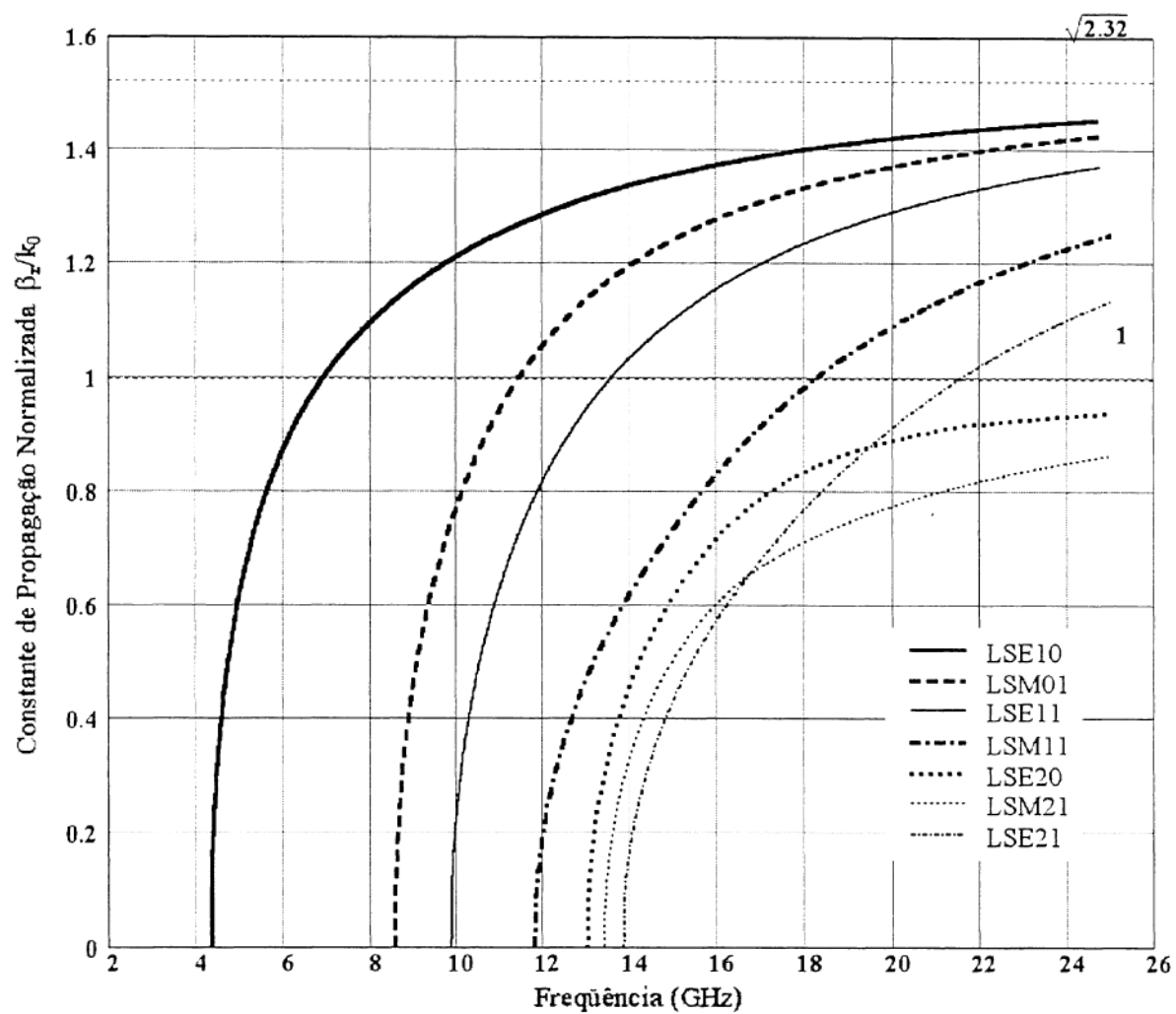


FIGURA 14 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R = 2.32$ ) DE LARGURA  $s = 0.6a$

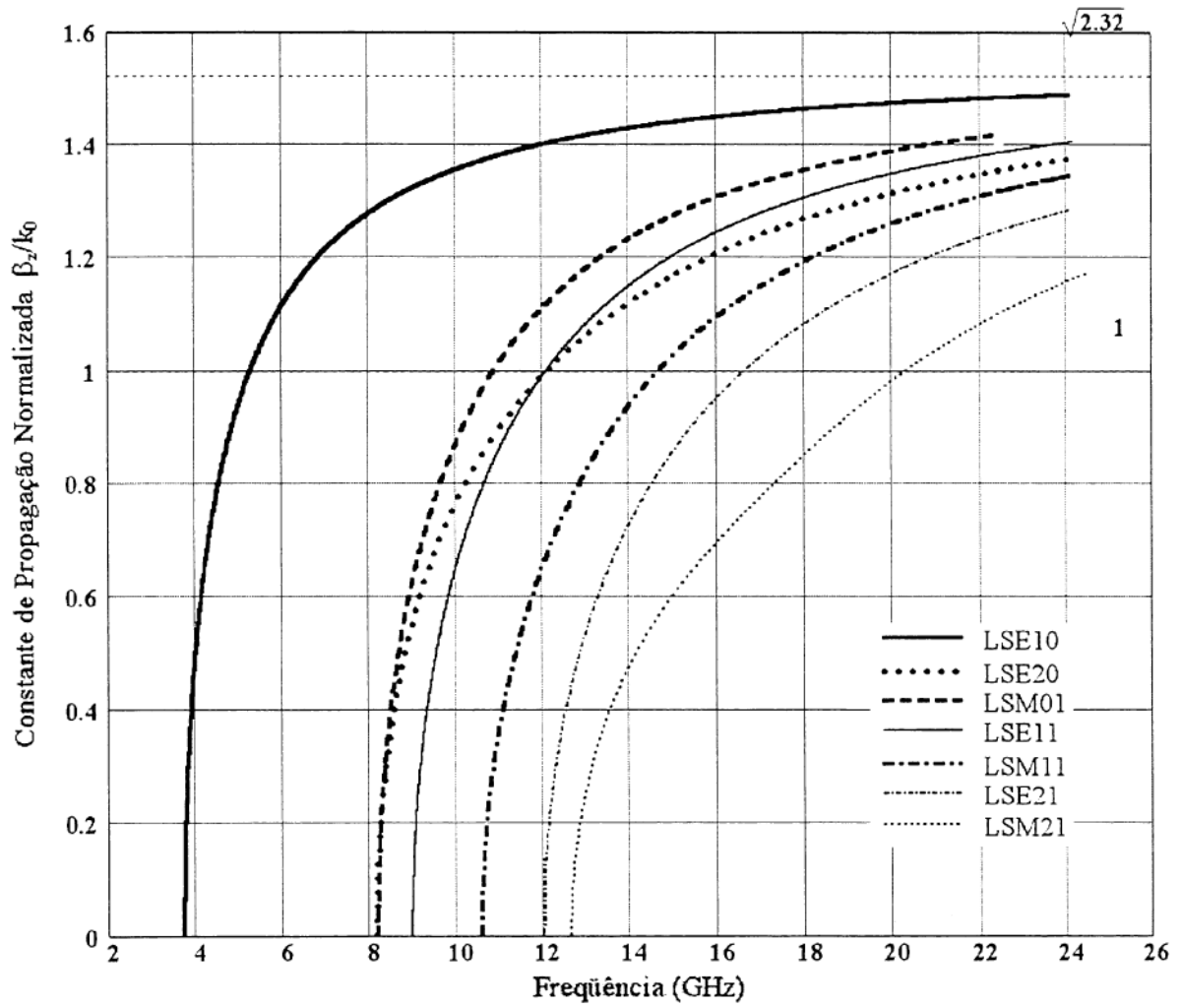


FIGURA 15 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R=2.32$ ) DE LARGURA  $s=0.8a$

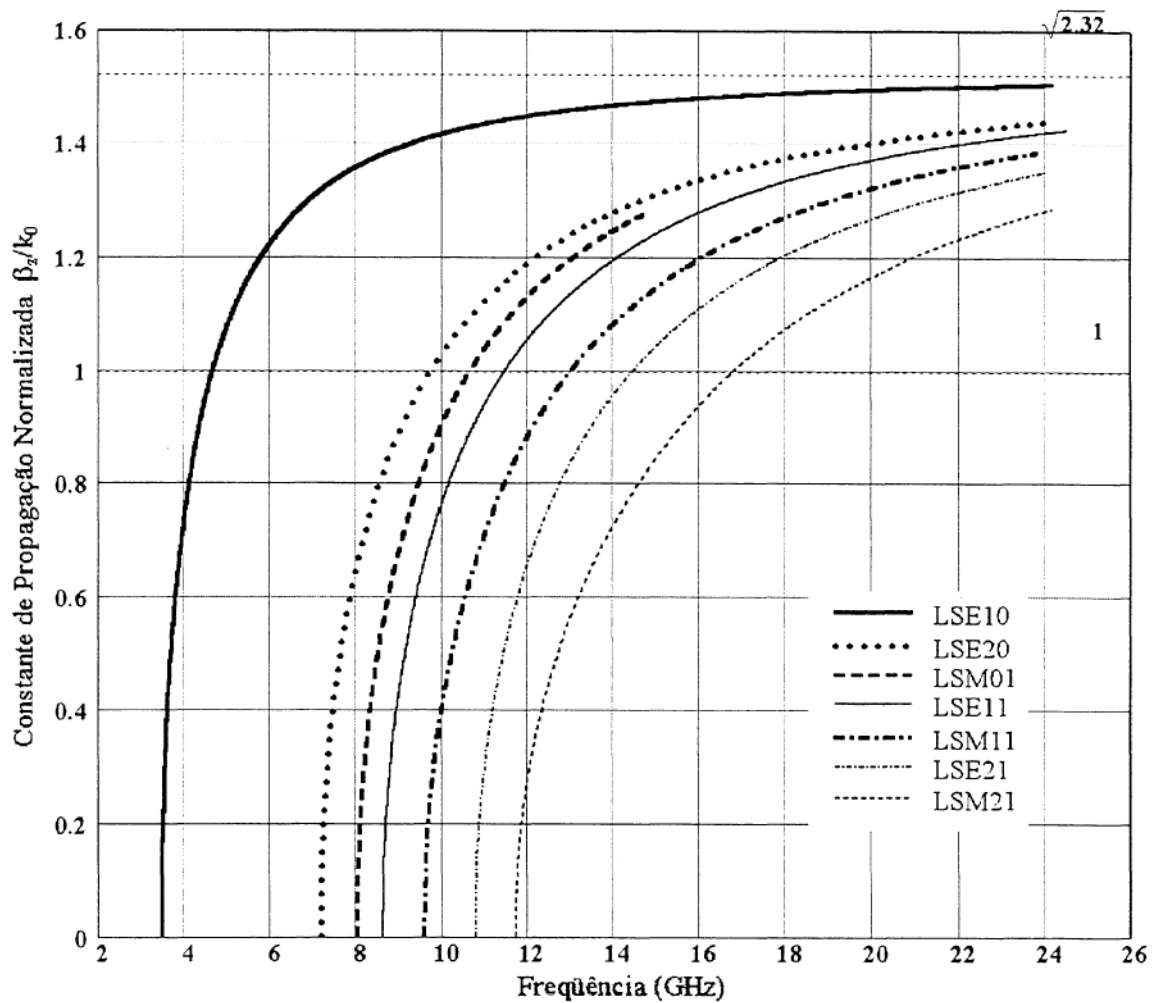


FIGURA 16 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA ( $\epsilon_R = 2.32$ ) DE LARGURA  $s = 0.95a$

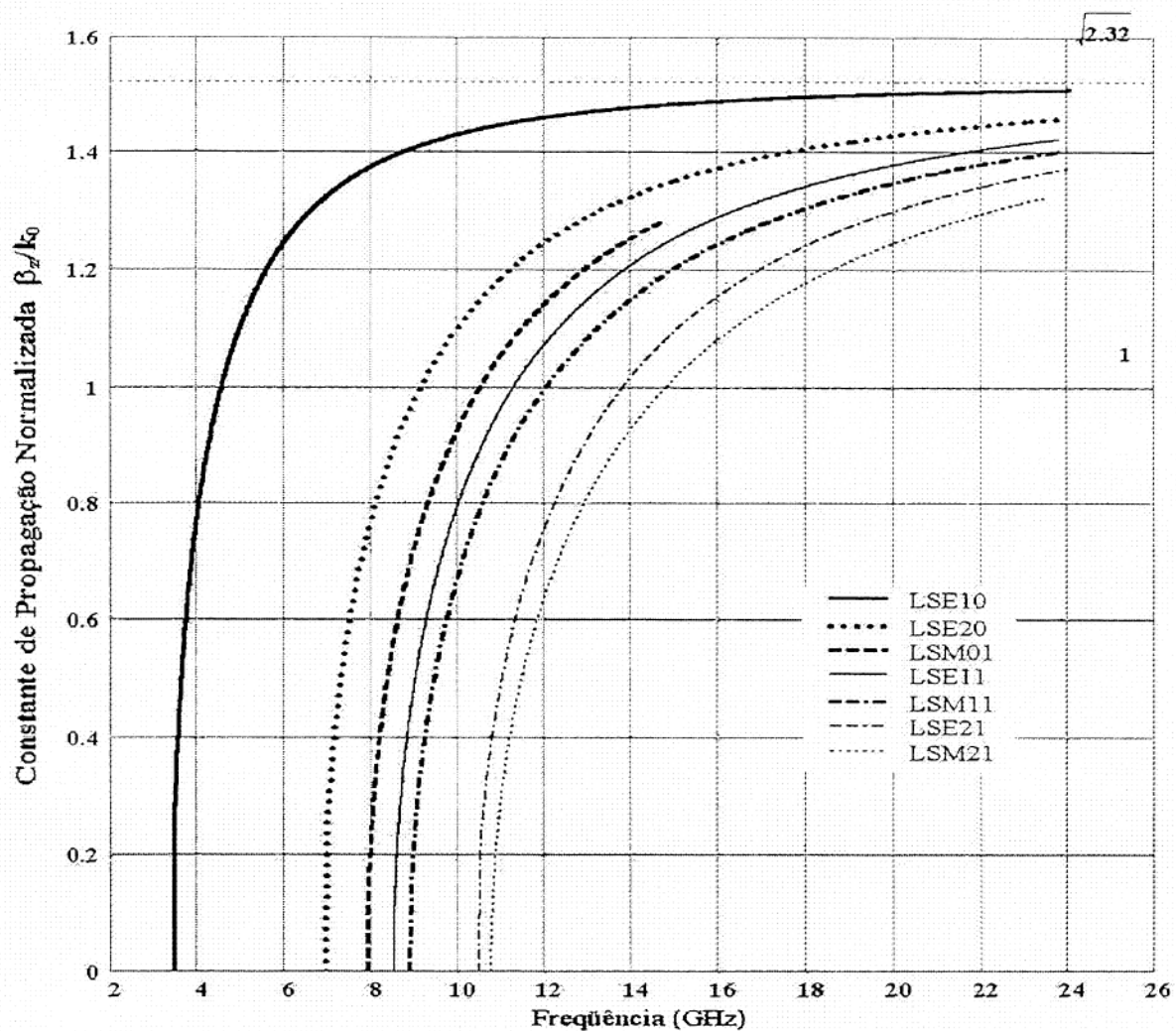




FIGURA 17 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR OCO

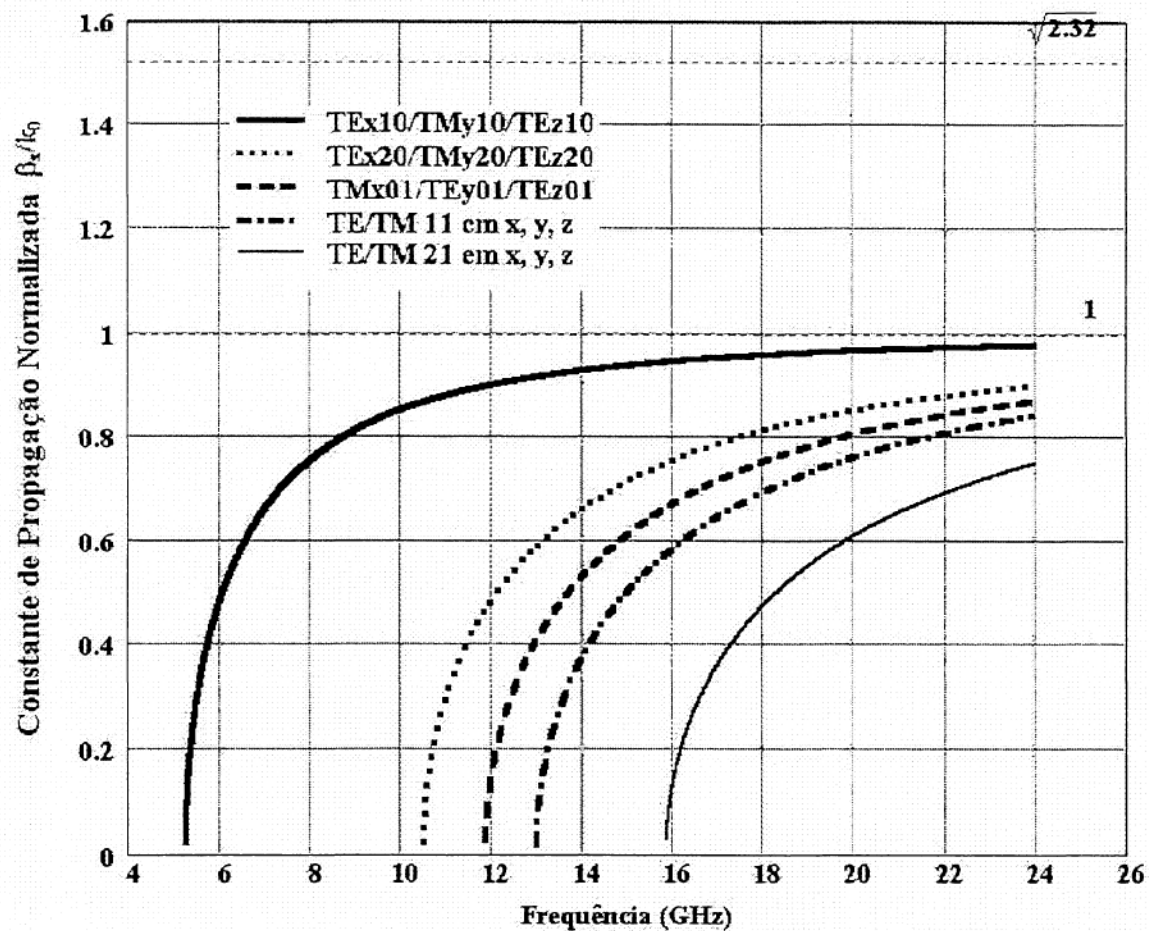


FIGURA 18 CURVAS DE DISPERSÃO PARA O GUIA DE ONDA RETANGULAR CARREGADO COM DIELÉTRICO ( $\epsilon_R = 2.32$ )

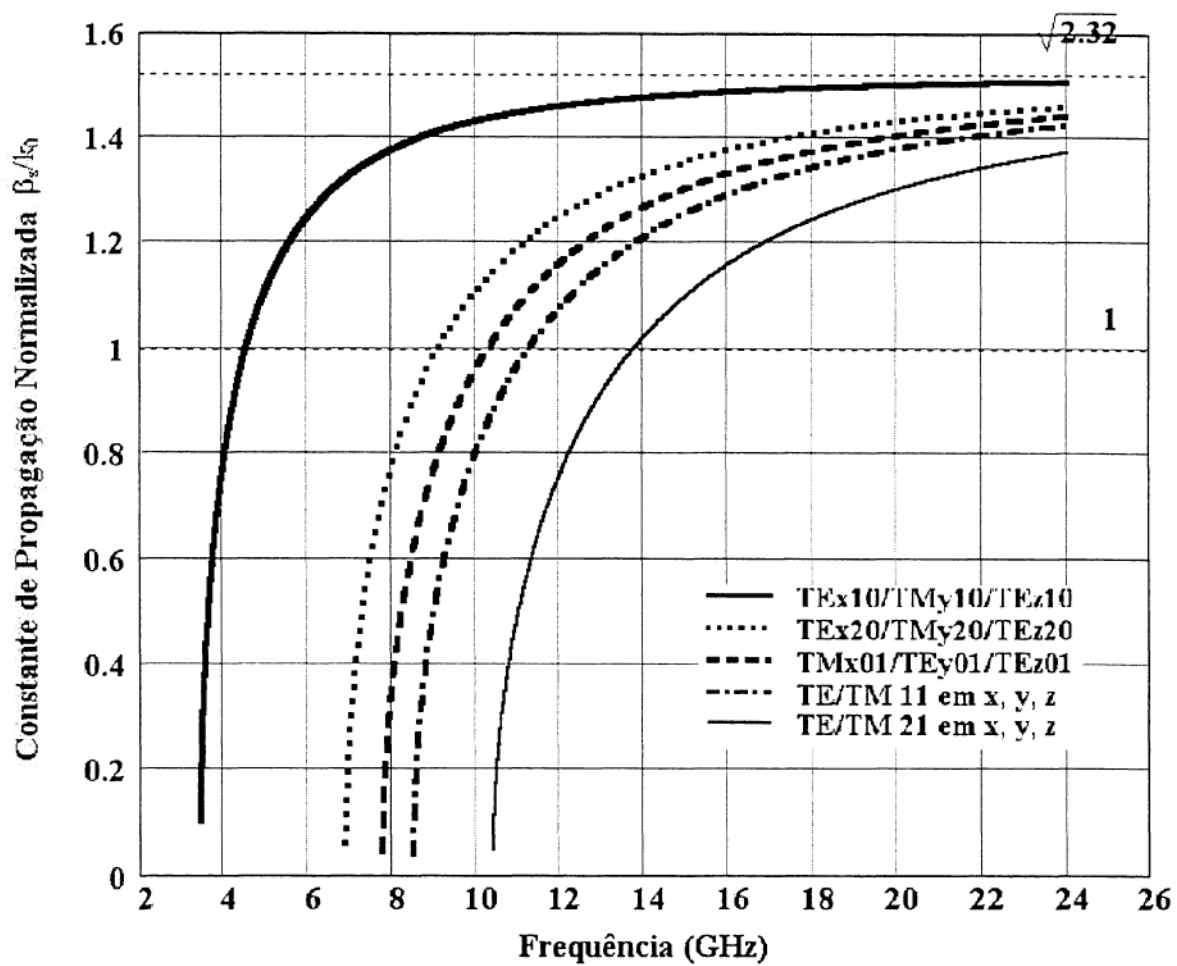
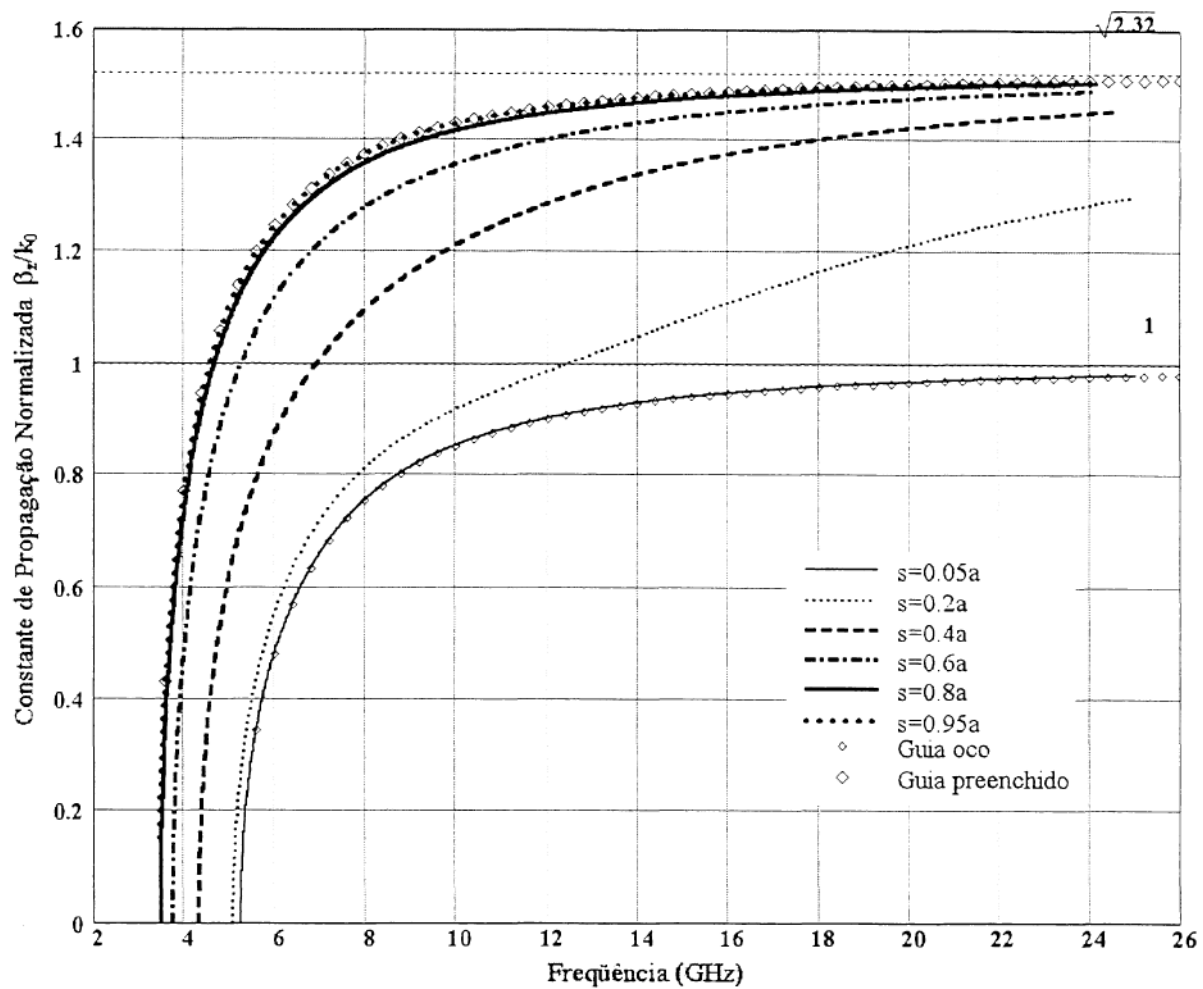


FIGURA 19 COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS DE DISPERSÃO PARA O MODO FUNDAMENTAL LSE10. GUIA DE ONDA RETANGULAR WR112 PARCIALMENTE CARREGADO ( $\epsilon_R = 2.32$ ).



## 4.2 ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA O GUIA RETANGULAR PARCIALMENTE PREENCHIDO

Nesta seção, têm-se o intuito de estudar o comportamento dos campos radiados na região de campo distante, com vistas na influência que o dielétrico usado no preenchimento do guia exerce sobre o diagrama de radiação. Considerando o guia WR112, parcialmente preenchido com material dielétrico de permissividade elétrica  $\epsilon_r = 2.32$  (PTFE), operando com apenas o modo dominante LSE<sub>10</sub> excitado, sendo usado como dispositivo irradiador. Para dispositivos alimentadores e antenas em geral, medidas dos campos sob polarização cruzada e co-polar são usualmente requeridas. Seguindo a afirmação anterior, na presente análise, os campos eletromagnéticos radiados pela abertura do guia retangular, serão calculados tomando-se os planos  $E$  e  $H$  copolar e a a polarização cruzada no plano  $\phi=45^\circ$ . O cálculo da polarização cruzada baseia-se na *Terceira Definição de Ludwig* [43], como apresentado a seguir:

$$E_{co-polar} = E_\theta \sin\phi + E_\phi \cos\phi \quad (4.5)$$

$$E_{cruzada} = E_\theta \cos\phi - E_\phi \sin\phi \quad (4.6)$$

Nos diagramas de radiação exibidos nas Figuras 20 a 25 foram considerados três planos de interesse. O plano  $\phi=0$ , dito plano  $H$ , onde ocorre a máxima intensidade do campo magnético, o plano  $E$ , em  $\phi=90^\circ$ , onde observa-se a máxima intensidade de campo elétrico e o plano de  $\phi=45^\circ$ , no qual a polarização cruzada é máxima. Os diagramas citados foram calculados pelo uso das equações 2.229 e 2.230. Com o conjunto de diagramas calculados, simula-se o preenchimento gradual do guia com camadas de dielétrico que variam de  $s=0.05a$  a  $s=0.95a$ . Por meio deste estudo paramétrico, pode-se observar que o dielétrico gera alterações consideráveis no diagrama de radiação, sendo que para configuração em que  $s=0.4a$  o diagrama apresenta supressão do lóbulo traseiro consistindo na melhor relação frente-costas na análise. Para localizar que configuração responde com menor valor de pico de polarização cruzada, foi traçada a curva da Figura 26. Esta, descreve o comportamento

da máxima polarização cruzada com relação a espessura da camada dielétrica,  $s$ . Os melhores resultados são obtidos quando  $s=0.4a$ , (veja Figura 26), onde o nível de polarização cruzada máxima é cerca de  $-59$  dB, em valores normalizados. Para esta configuração, foi feito o levantamento da curva de resposta dos níveis de polarização cruzada máxima em função da frequência, como apresentado na Figura 27. Nesta, evidencia-se uma queda acentuada da polarização cruzada com o acréscimo da frequência, ao longo da faixa de operação monomodo LSE10, apresentando menor nível de polarização cruzada,  $-59$  dB, para frequência de 7GHz.

FIGURA 20 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.05a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7$ GHz.

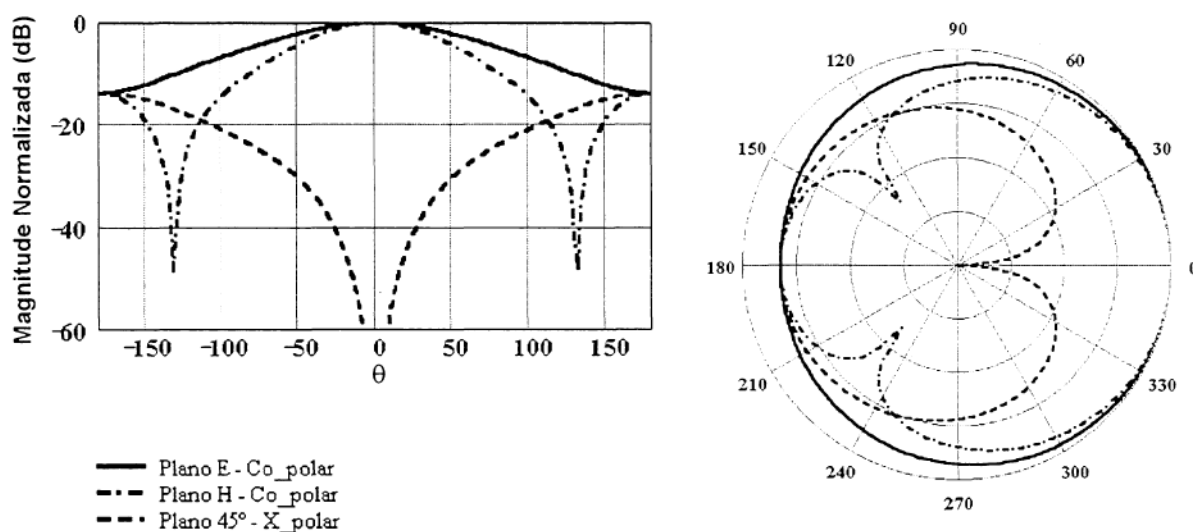


FIGURA 21 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.2a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7\text{GHz}$ .

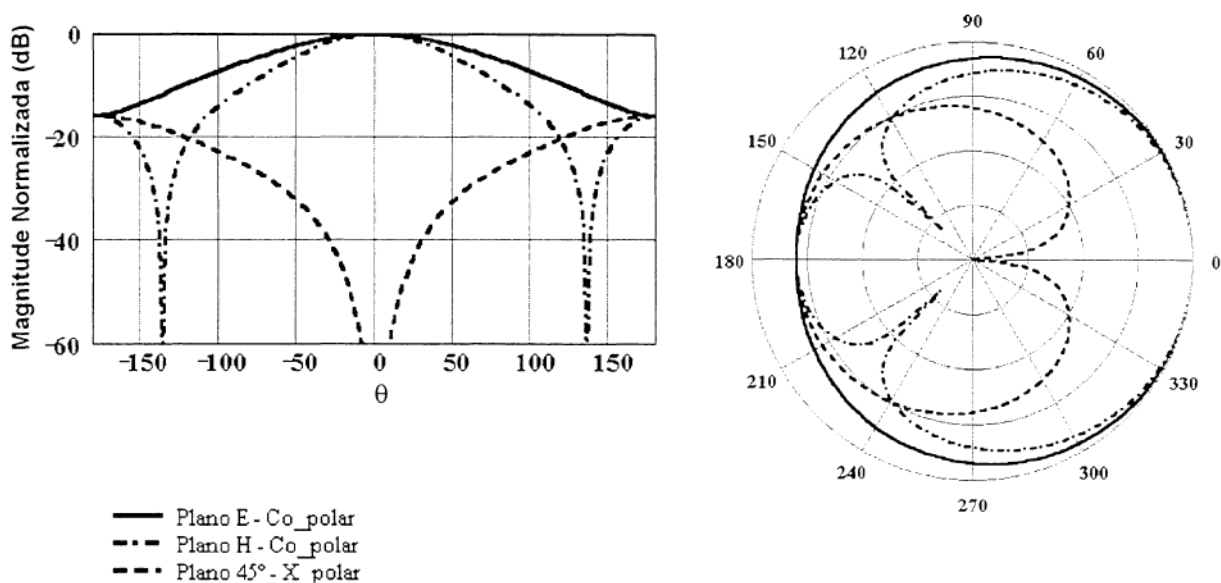


FIGURA 22 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.4a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7\text{GHz}$ .

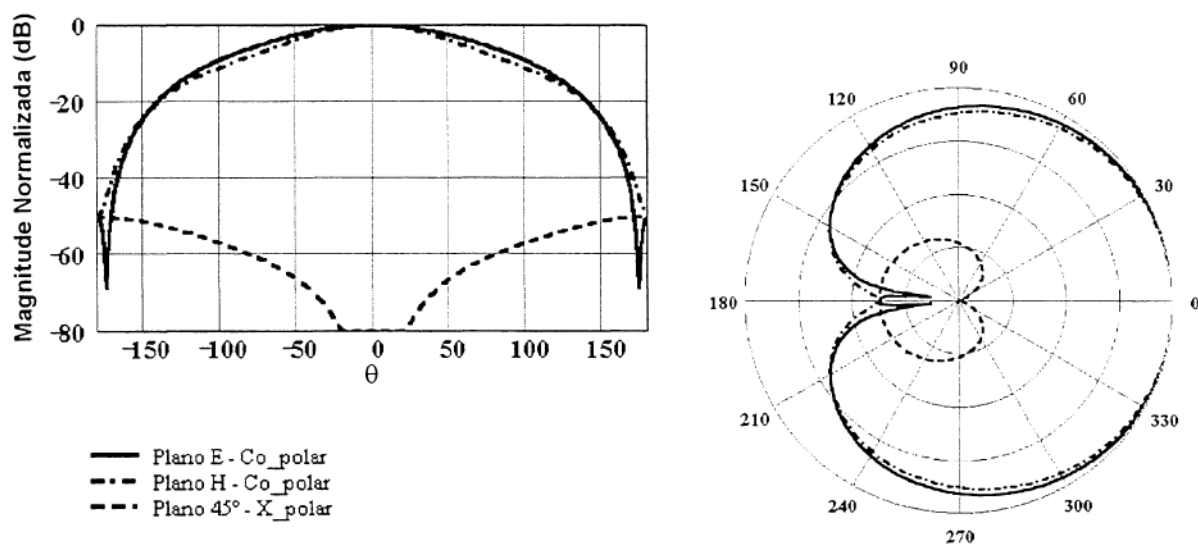


FIGURA 23 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.6a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7\text{GHz}$ .

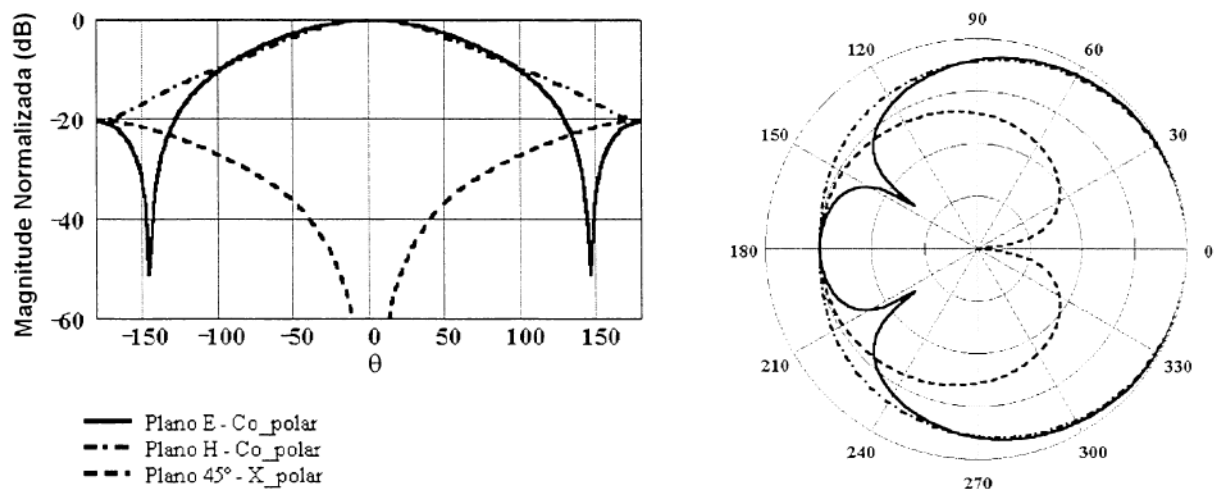


FIGURA 24 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.8a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7\text{GHz}$ .

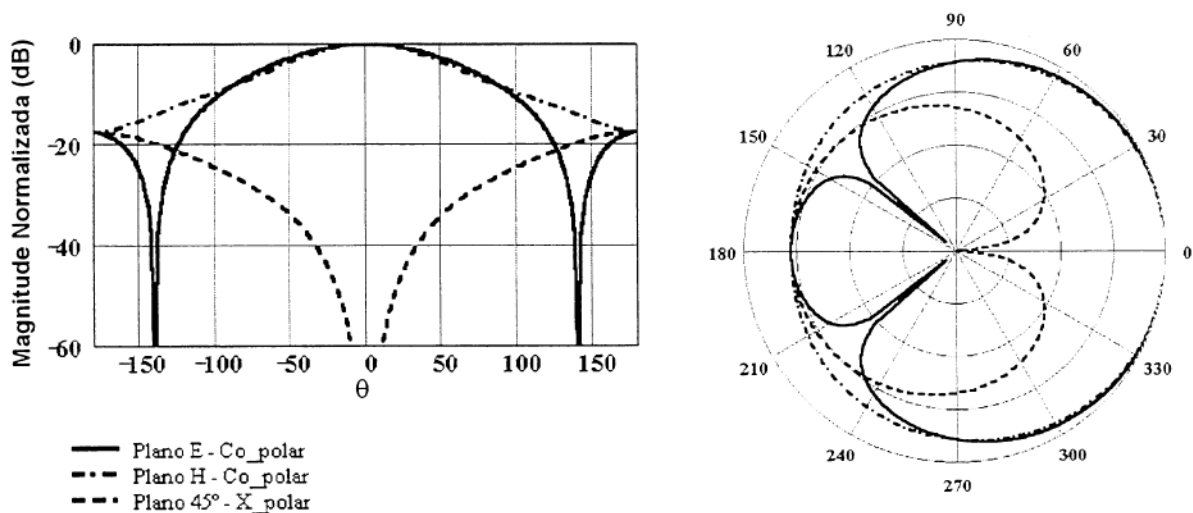


FIGURA 25 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO PARA O GUIA WR112 CARREGADO COM CAMADA DIELÉTRICA DE LARGURA  $s=0.95a$ . ( $\epsilon_r=2.32$ ) e  $f=7\text{GHz}$

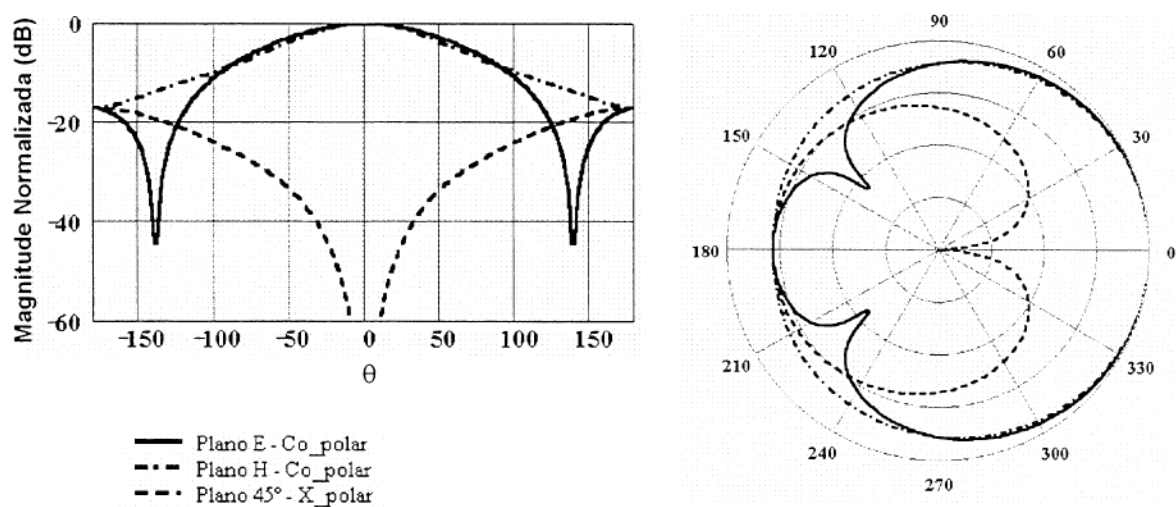


FIGURA 26 MÁXIMA POLARIZAÇÃO CRUZADA EM FUNÇÃO DO PREENCHIMENTO DIELÉTRICO,  $s$ . GUIA DE ONDA RETANGULAR WR112 ( $a = 2.850\text{ cm}$  E  $b = 1.262\text{ cm}$ ).  $\epsilon_r = 2.32$ .  $f = 7\text{ GHz}$ .

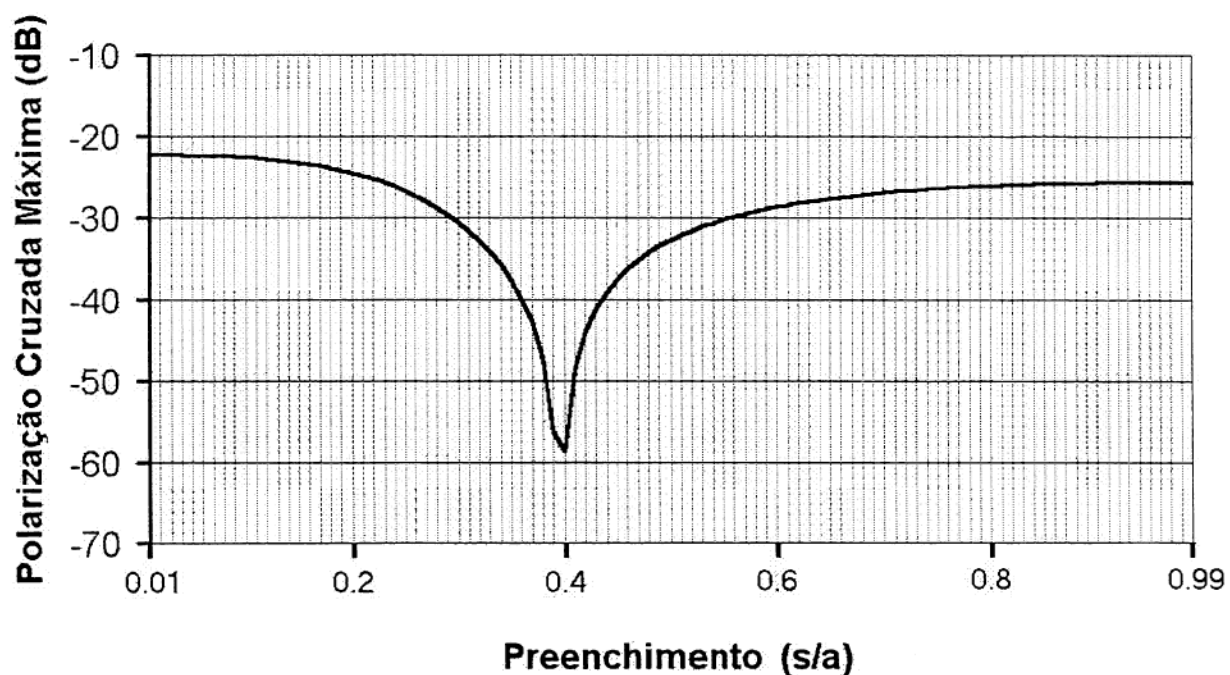
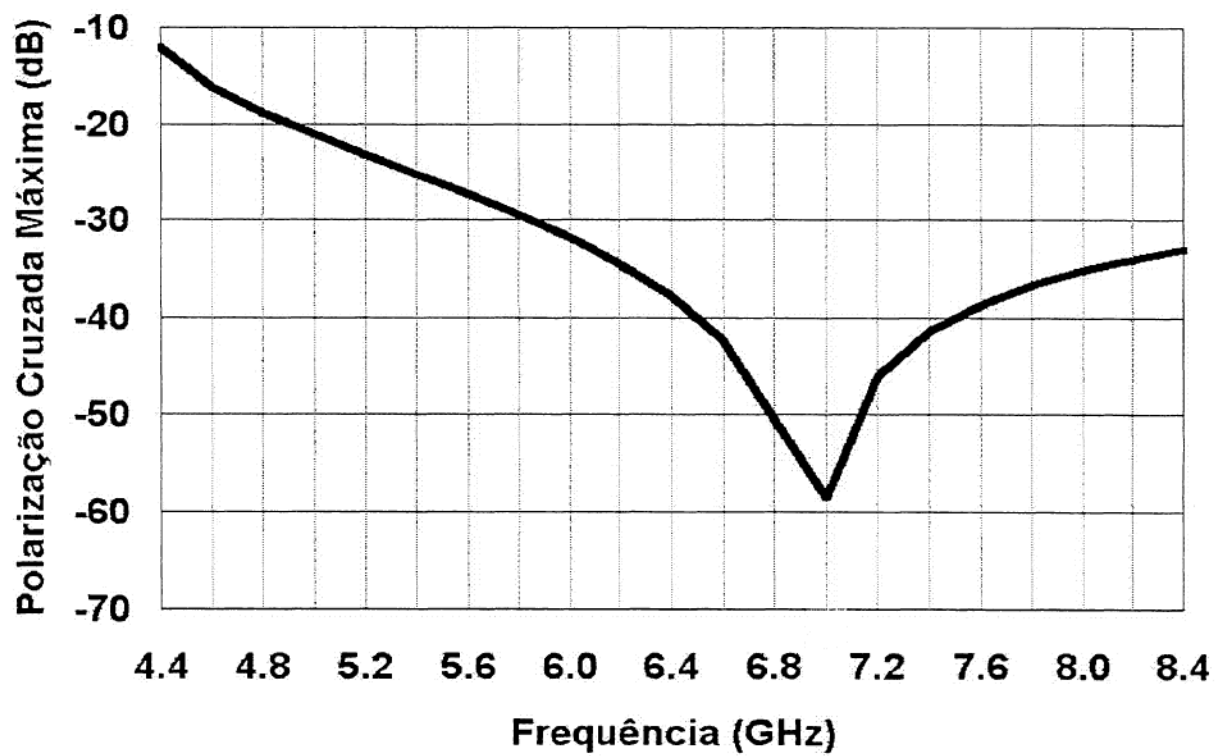




FIGURA 27 MÁXIMA POLARIZAÇÃO CRUZADA EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA.  $s=0.4a$ . GUIA DE ONDA RETANGULAR WR112 ( $a = 2.850$  cm E  $b = 1.262$  cm).  $\epsilon_r = 2.32$ .



### 4.3 ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA CORNETA PIRAMIDAL PARCIALMENTE PREENCHIDA

As antenas do tipo cornetas são dispositivos que promovem uma transição suave para onda que inicialmente propagando confinada em um guia, irradia em um espaço aberto. Diversos estudos já foram realizados com o intuito de aperfeiçoar o desempenho deste dispositivo [44]-[46], dentre os quais pode-se destacar: o uso de paredes dielétricas [47] e [48], excitação de modos híbridos ou múltiplos modos [49]-[58] e a inserção de corrugações às paredes da corneta [59]-[62]. Com a aplicação destas técnicas consegue-se em muitos casos reduzir os lóbulos secundários e a polarização cruzada à níveis menores que os requeridos pelos sistemas de comunicação, sendo que os resultados mais expressivos são obtidos pelo uso de técnicas mistas [63].

Nesta seção serão apresentados os resultados do estudo paramétrico relativo ao preenchimento gradual por dielétrico da corneta piramidal, com os quais objetiva-se investigar o comportamento do diagrama de radiação na região de campo distante e também como variam os valores de polarização cruzada máxima para este dispositivo. Esta análise é similar a realizada com o guia retangular na seção 4.2.

Na simulação utiliza-se o guia retangular WR112 (dimensões,  $a=2.850$  cm e  $b=1.262$  cm) como alimentador da corneta piramidal, ambos parcialmente preenchidos com dielétrico de permissividade  $\epsilon_r=2.32$  (PTFE). Para frequência de operação de 7 GHz, foi tomada uma corneta com *semi-flare angle* de  $12^\circ$  no plano E,  $5.4^\circ$  no plano H e com  $D = 33.5$  cm (veja Figura 9, pg. 43). Para frequência de operação utilizada apenas o modo híbrido dominante LSE<sub>10</sub> é excitado na estrutura da corneta, de acordo com discussão apresentada na seção 3.2. No cálculo da polarização cruzada, utilizou-se a terceira definição de Ludwig [43], considerado o plano  $\phi=45^\circ$ . Nas Figuras 28 à 33 apresentam-se os diagramas de radiação para corneta piramidal em questão, nos quais verifica-se a influência que a camada de dielétrico exerce sobre o diagrama de radiação na região de campo distante. Percebe-se uma gradual deformação, ou em outras palavras, uma perturbação da simetria do diagrama no plano H em relação ao

eixo  $\theta=0^\circ$ , com a variação da razão  $s/a$ . Note que essa assimetria não ocorre no plano E, haja vista a geometria do problema. Quando  $s=0.4a$  o diagrama apresenta-se com melhor relação frente-costas, Figura 30, em comparação com as demais configurações averiguadas na simulação. Na Figura 34 apresenta-se a curva de variação da máxima polarização cruzada em função do preenchimento dielétrico,  $s$ . Em  $s=0.4a$  ocorre a melhor situação para a máxima polarização cruzada no estudo paramétrico, com nível em cerca de  $-89$  dB. O comportamento da polarização cruzada em função da frequência, considerando-se a configuração do guia que retornou melhor nível de polarização cruzada no estudo paramétrico anterior, é apresentado na Figura 35. Nota-se uma acentuada redução da polarização cruzada com o incremento da frequência, com mínimo de aproximadamente  $-89$ dB observado em  $f=7$ GHz. A faixa de frequência adotada no gráfico da Figura 35 foi tomada de acordo com a curva de dispersão do guia WR112 (veja Figura 13, pg. 52), onde 4.4 GHz é a frequência de corte do modo LSE10 e 8.4 GHz é a frequência superior para operação monomodo.

FIGURA 28 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H,  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.05$  E  $f = 7$ GHz. POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi = 45^\circ$

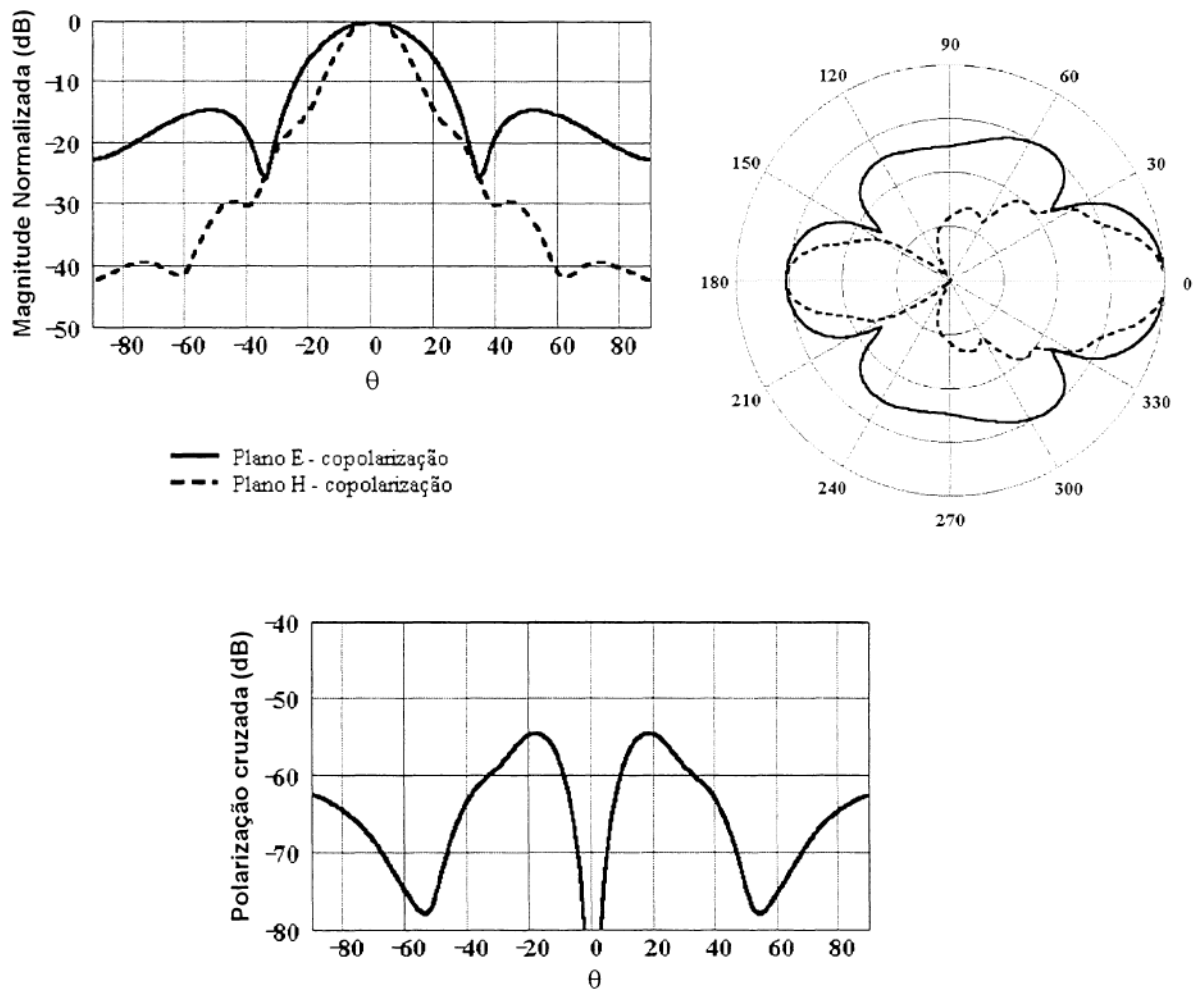


FIGURA 29 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H,  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.2$  E  $f = 7$ GHz. POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi=45^\circ$

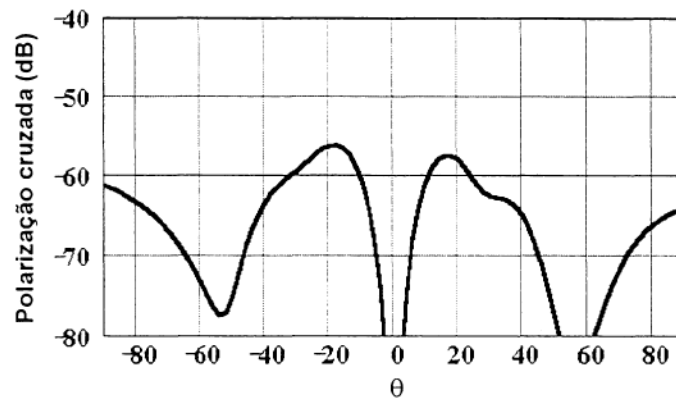
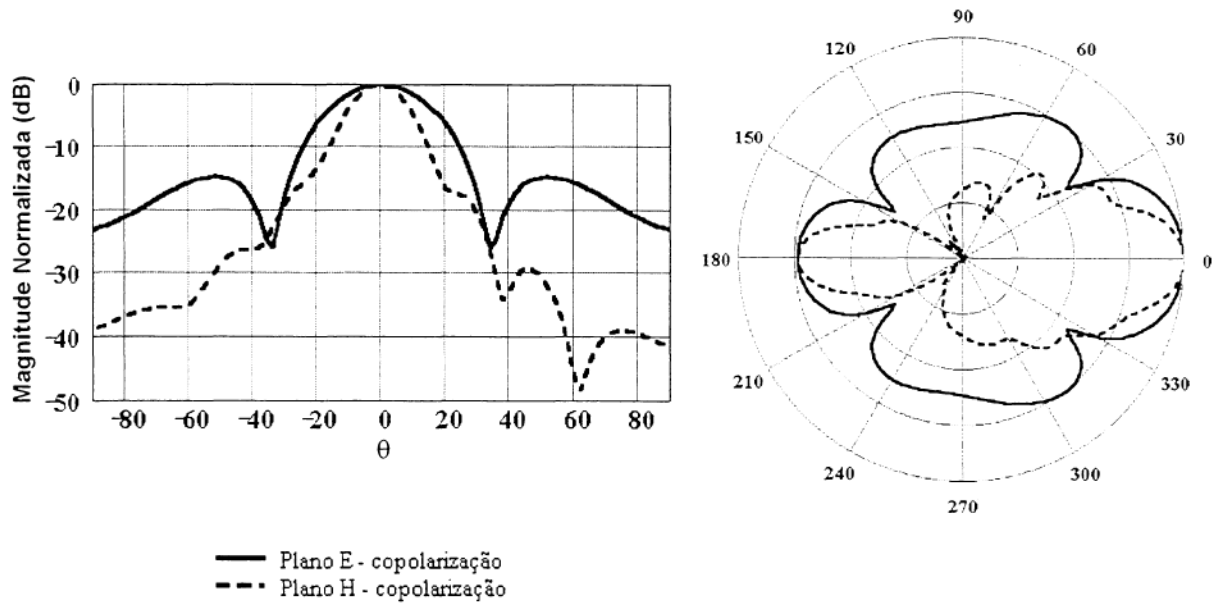


FIGURA 30 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H,  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.4$  E  $f = 7$  GHz. POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi = 45^\circ$

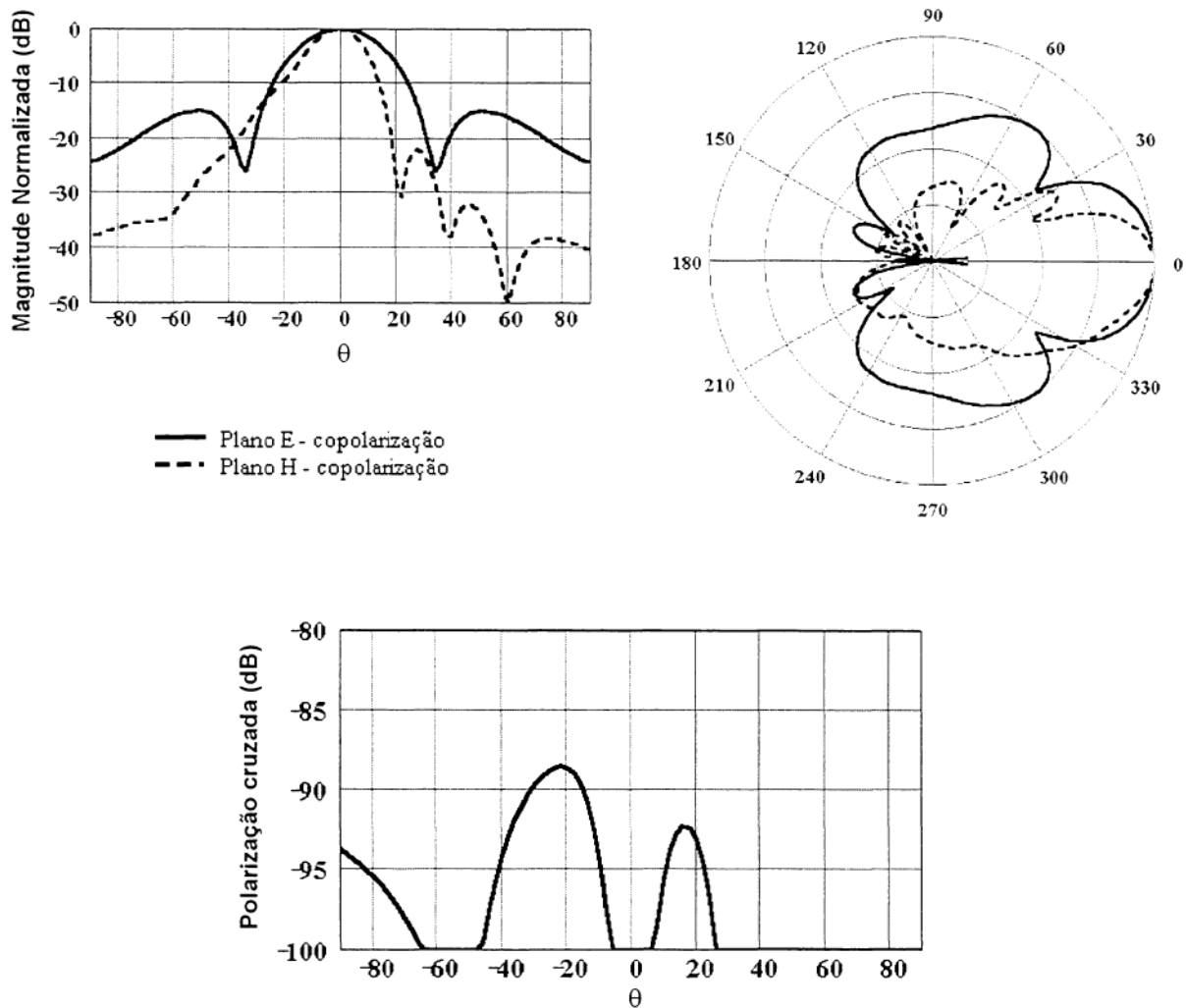


FIGURA 31 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE 12° NO PLANO E E 5.4° NO PLANO H,  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.6$  E  $f = 7$ GHz. POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi = 45^\circ$

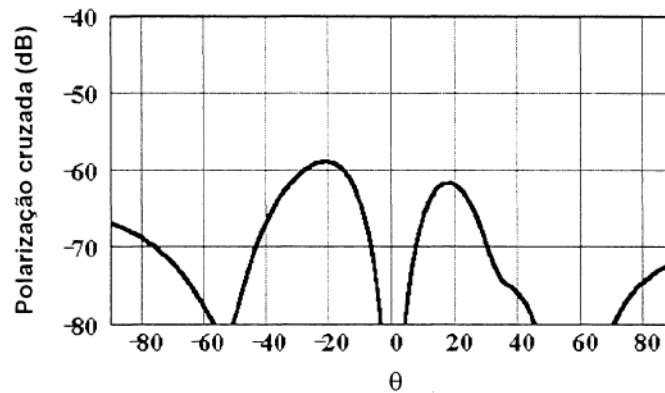
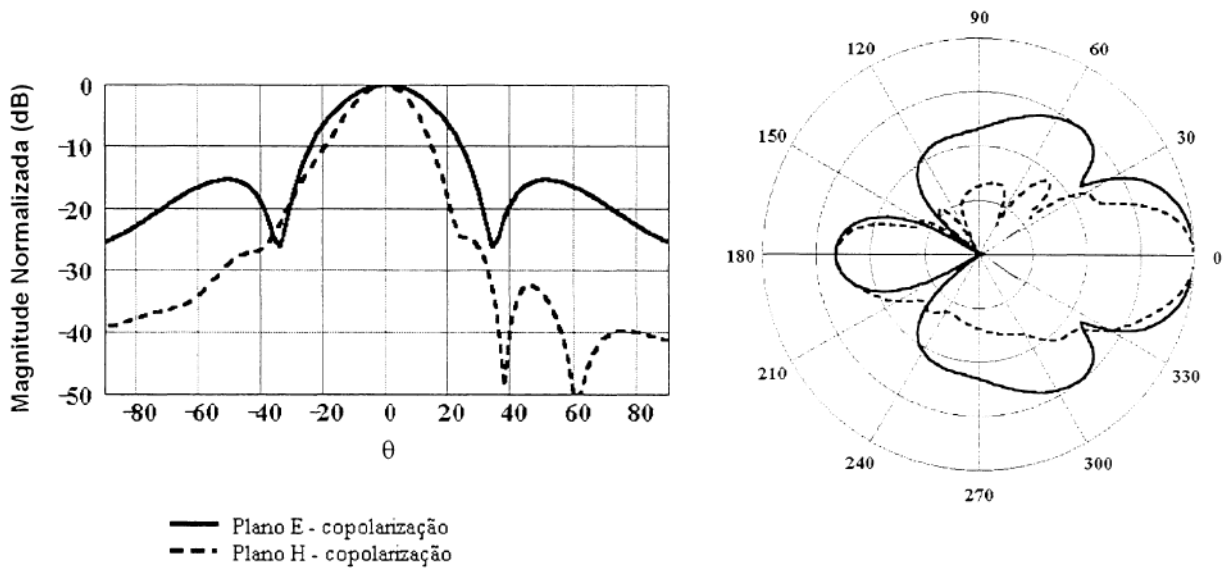


FIGURA 32 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H,  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.8$  E  $f = 7$ GHz. POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi = 45^\circ$

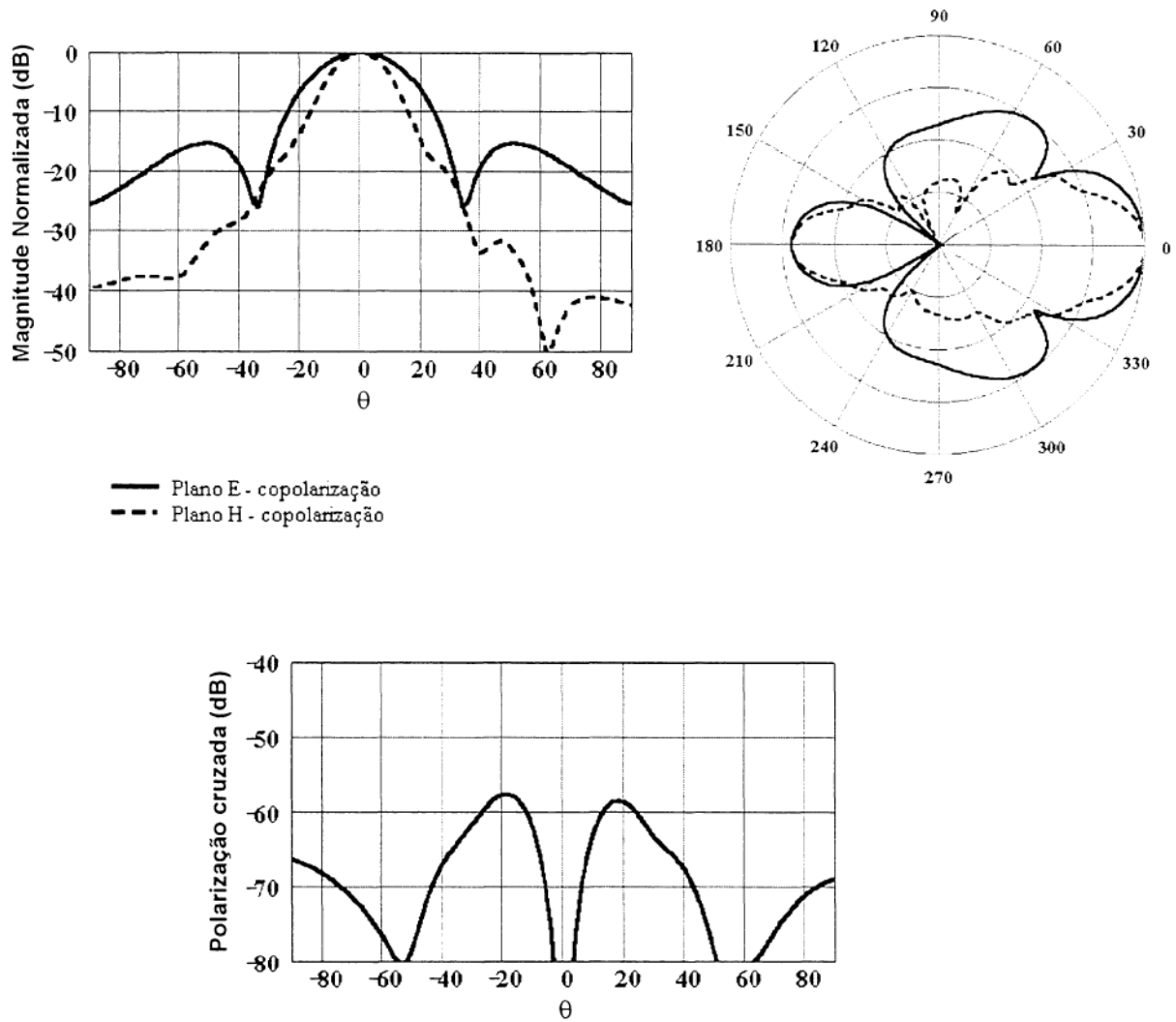




FIGURA 33 DIAGRAMA DE RADIAÇÃO PARA A CORNETA PIRAMIDAL: SEMI-FLARE ANGLE 12° NO PLANO E E 5.4° NO PLANO H, a1 = 2.850 cm, b1 = 1.262 cm, a = 17.100 cm, b = 7.572 cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.95$  E  $f = 7\text{GHz}$ . POLARIZAÇÃO CRUZADA NO PLANO  $\phi = 45^\circ$

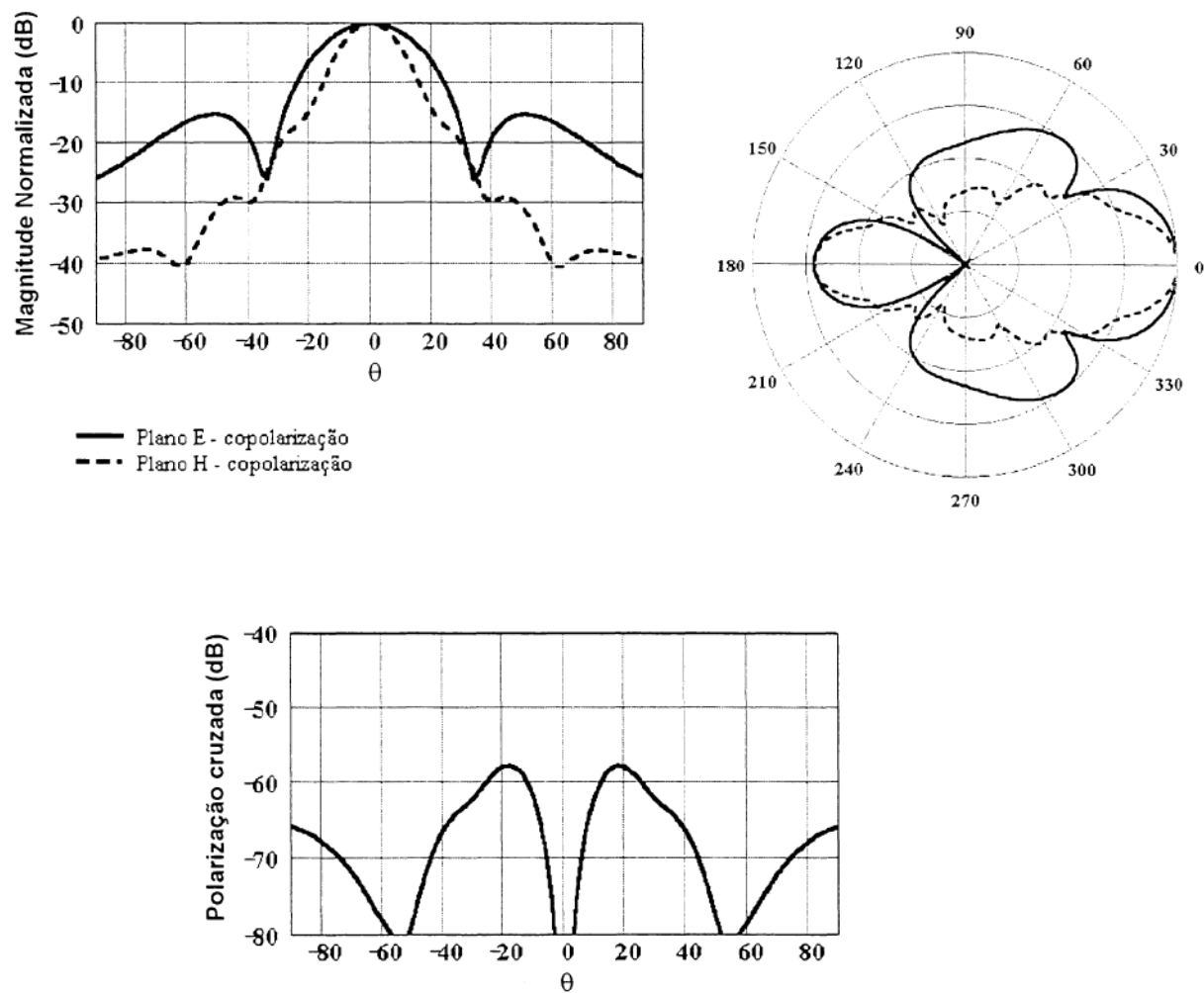


FIGURA 34 MÁXIMA POLARIZAÇÃO CRUZADA EM FUNÇÃO DO PREENCHIMENTO DIELÉTRICO  $\epsilon_r$  NO PLANO  $\phi=45^\circ$ . CORNETA PIRAMIDAL SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H.  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$  E  $f = 7$ GHz

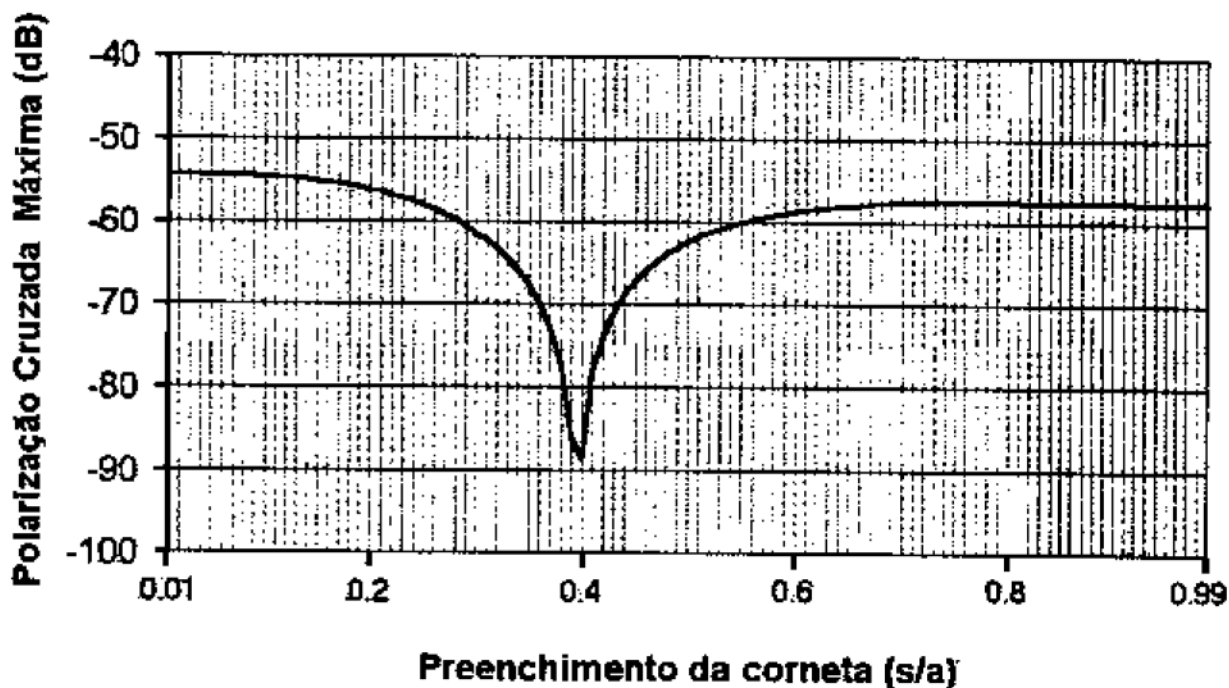
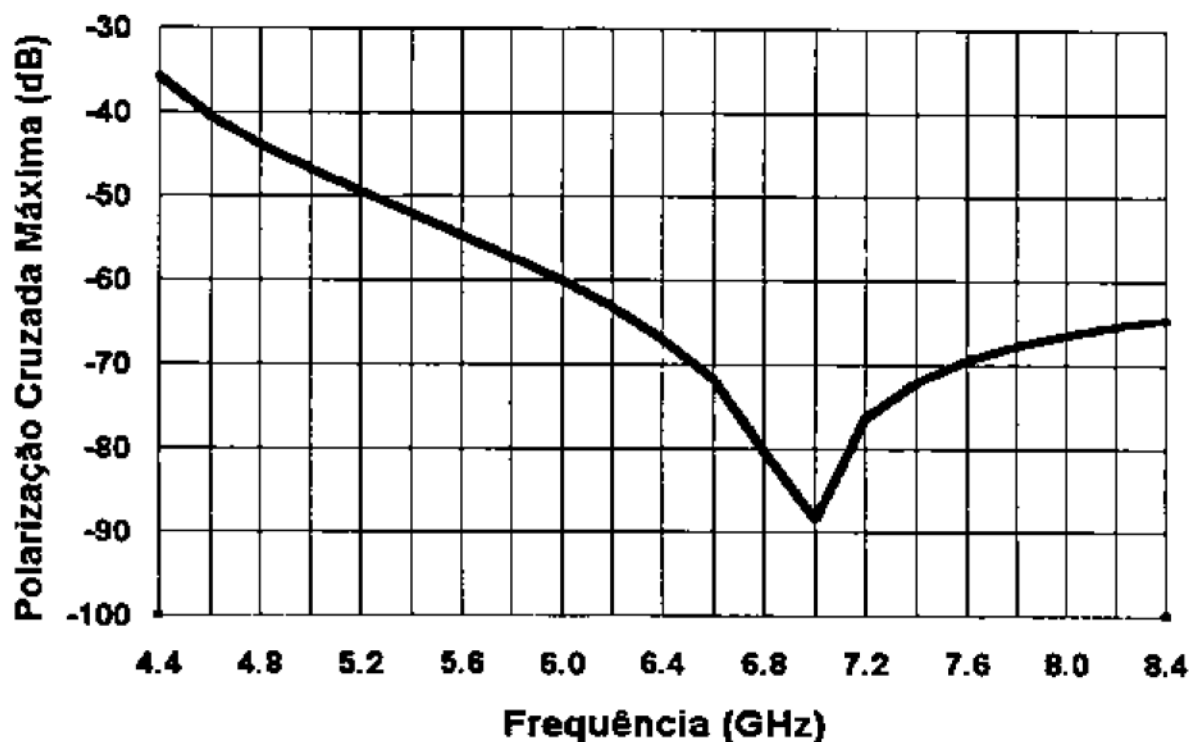


FIGURA 35 MÁXIMA POLARIZAÇÃO CRUZADA VERSUS FREQUÊNCIA NO PLANO  $\phi=45^\circ$ . CORNETA PIRAMIDAL SEMI-FLARE ANGLE  $12^\circ$  NO PLANO E E  $5.4^\circ$  NO PLANO H.  $a_1 = 2.850$  cm,  $b_1 = 1.262$  cm,  $a = 17.100$  cm,  $b = 7.572$  cm,  $\epsilon_r = 2.32$ ,  $s/a = 0.4$



## CONCLUSÃO

### DISCUSSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo sobre guias de onda de seções retangulares parcialmente preenchidos com mais de um material dielétrico, enfatizando os modos híbridos propagantes na estrutura e características de radiação no espaço livre.

Em análise inicial foi tomado o guia de onda retangular WR112 parcialmente preenchido com dielétrico de permissividade elétrica 2.32 (PTFE), camada esta disposta no plano E (*E-plane dielectric slab*). Do levantamento das curvas de dispersão constatou-se que o modo dominante no guia é o LSE10 em todos os casos de preenchimento do estudo paramétrico. Observou-se que para o guia operando apenas no modo dominante e carregado com camada dielétrica correspondente à 40% do volume total, os níveis de polarização cruzada máxima são reduzidos a -59 dB. Esta configuração,  $s=0.4a$ , também apresenta uma melhor relação frente-costas quando comparada com os demais resultados do estudo paramétrico e a resposta para o mesmo guia com preenchimento homogêneo. Como comentado anteriormente, acredita-se que melhores níveis de polarização cruzada podem ser obtidos pelo uso de dielétricos com permissividade elétrica maior que o utilizado neste trabalho. Cabe dizer no entanto, que materiais com  $\epsilon_r$  elevados introduzem no sistema perdas por reflexão na transição entre o guia oco e o guia parcialmente carregado com dielétrico. A presença do dielétrico deslocou a faixa de operação do modo principal, como esperado, de 5-9 GHz do modo TE10 dominante no guia vazio, para 4.4-8.4 GHz no mesmo guia com carregamento dielétrico parcial ( $s = 0.4a$ ).

Em um segundo momento foi tomada uma antena piramidal de modo híbrido para análise teórica. Para um caso particular de configuração da corneta (dimensões, abertura e ângulo de *flare*) um estudo paramétrico similar ao realizado sobre o guia de

onda retangular foi realizado. Verificou-se que o carregamento da corneta piramidal gera modos híbridos, em especial neste estudo o modo dominante LSE10, que alterou o diagrama de radiação quando comparado ao diagrama para o mesmo guia vazio. Em adição, existe uma razão de carregamento ( $s/a$ ) ótima onde o nível de polarização máxima é reduzido. Este estudo considerou o comportamento da polarização cruzada tendo em vista parâmetros como carregamento ( $s/a$ ) do guia e frequência. Níveis reduzidos foram obtidos (abaixo de  $-60$  dB) ao longo de quase metade da oitava. O dielétrico causou deformações no diagrama de radiação e em função da geometria do problema, alterou o diagrama de radiação no plano H, reduzindo-se lóbulos laterais com preenchimento de nulos, o que pode ser verificado na Figura 30, onde nota-se a falta de simetria do diagrama em relação ao eixo de  $0^\circ$ . Esta simetria é observada no guia vazio e é mantida apenas no plano E.

As curvas de resposta da máxima polarização cruzada obtidas nos estudos paramétricos realizados sobre o guia WR112 e a corneta piramidal são similares. Pode-se observar esta singularidade nos pares de respostas das Figuras: Figura 26, Figura 34 e Figura 27, Figura 35. Praticamente as curvas diferenciam-se apenas em magnitude, onde as respostas para a corneta apresentam níveis cerca de 30dB abaixo dos níveis calculados para o guia retangular WR112.

## SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho aponta para necessidade de trabalhos futuros, dentre os quais cito:

- O estudo modal de estruturas híbridas, realizado neste trabalho, pode ser utilizado como base para estudo do casamento modal entre guias retangulares de diferentes características de preenchimento dielétrico. Portanto, sugere-se o estudo de um perfil ótimo para o casamento modal entre um guia de onda oco e

outro completamente carregado.

- Na análise desenvolvida nesta dissertação foram utilizadas algumas aproximações, as quais podem ser revistas em trabalhos posteriores.
- Uso de anisotropia no dielétrico;
- Incluir o efeito de difração;
- Uso do Método dos Momentos (MoM) para análise da estrutura híbrida.

## PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA ASSOCIADA À DISSERTAÇÃO

O estudo desenvolvido nesta dissertação possibilitou a geração de dois artigos técnicos os quais foram aceitos em conferência internacional e em publicação periódica nacional tal como listado abaixo:

- VITAL, D. S.; DESCARDECI, J. R. Parametric Analysis of Open-ended Dielectric-Slab-Loaded Rectangular Waveguide. **Journal of Microwaves and Optoelectronics**, vol. 2, Nº 4, pp. 22-29, 2001.
- VITAL, D. S.; DESCARDECI, J. R. Parametric Analysis of the Pyramidal Horn Partially Filled. Aceito na **Internacional Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications - MIKON2002** que realizar-se-á no período de 20 à 22 de maio de 2002 em Gdansk, Polônia.
- VITAL, D. S.; DESCARDECI, J. R. Análise Paramétrica da Corneta Piramidal Parcialmente Preenchida. Artigo submetido para o X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica - SBMO. que realizar-se-á no período de 12 à 16 de agosto de 2002 em Recife, Brasil.

## REFERÊNCIAS

- [1] BALANIS, C. A., **Advanced Engineering Electromagnetics**. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [2] HARRINGTON, R. F. **Time-Harmonic Electromagnetics Fields**. New York: MCGraw-Hill, 1961.
- [3] COLLIN, R. E. **Field Theory of Guided Waves**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: MCGraw-Hill, sponsored by IEE Antennas and Propagation Society, 1991.
- [4] HALE, J. K. **Ordinary Differential Equations**. New York: Wiley-Interscience, 1969.
- [5] Padronização da Electronic Industries Association (EIA). [www.eia.org](http://www.eia.org)
- [6] BALANIS, C. A. **Antenna Theory: Analysis and Design** . New York: John Wiley & Sons, 1997.
- [7] EYGES, L. **The Classical Electromagnetic Field**. New York: Dolver, 1980.
- [8] HEALD, M. A.; MARION, J. B. **Classical Electromagnetic Radiation**. 3. Ed. New York: Saunders College Publishing, 1995.
- [9] CHAMBER, L. G. Propagation in waveguides filled longitudinally with two or more dielectrics. **J. Appl. Physics**, N° 4, pp 39-45, 1953.
- [10] VARTANIAN, P. H. et. al. Propagation in dielectric slab loaded rectangular waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT-6, pp 215-222, 1958.
- [11] MUSHIAKE, Y. e TSHIDE, T. Characteristics of loaded rectangular waveguides. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, MTT-13, pp 451-457, 1965.
- [12] SECKELMANN, R. Propagation of TE modes in dielectric loaded waveguides. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT-14, pp 518-527, 1966.
- [13] EBERHARDT, N. Propagation in the off center E-plane dielectric loaded waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 15, pp 282-289, 1967.

- [14]GARDIOL, F. E. Higher-order modes in dielectrically loaded rectangular waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 16, pp 919-924, 1968.
- [15]GONZALEZ, G.; STINSON, D. C. Propagation in Rectangular Waveguide Partially Filled with an Inhomogeneous Dielectric. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT -17, pp 284-286, 1969.
- [16]CSENDES, Z. J.; SILVESTER, R. Numerical solution of dielectric-loaded waveguides: I- finite element analysis. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 18, pp 1124-1131, 1970.
- [17]GONZALEZ, G.; STINSON, D. C. Propagation in Rectangular Waveguide Partially Filled with a Linearly Varying Dielectric. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, pp 404-406, 1970.
- [18]CSENDES, Z. J.; SILVESTER, R. Numerical solution of dielectric-loaded waveguides: II – modal approximation technique . **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 19, pp 504-509, 1971.
- [19]MONTGOMERY, J. P. On complete eigenvalue solution of ridge waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. 19, pp 547-555, 1971.
- [20]LIN, W. G. Electromagnetic wave propagation in uniforme waveguides containing inhomogeneous dielectrics. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT-28, pp 339-348, 1980.
- [21]LIU, C. T. e CHEN, C. H. A variational theory for wave propagation in inhomogeneous dielectric slab loaded waveguides. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT-29, pp 805-812, 1981.
- [22]ZAKI, K. A.; ATIA, A. Modes in dielectric-loaded rectangular waveguides and resoators. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 31, pp 1039-1045, 1983.
- [23]KULMAR, A. Dielectric-loaded rectangular waveguide applicator. **Inter. Journal of Electronics** , vol. 57, pp. 299-303, 1984.
- [24] HSU, C. G.; AUDA, H. Multiple dielectric posts in a rectangular waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT -34, pp 883-891, 1984.
- [25] ZAKI, K. A.; CHEN, C. H. Intensity and distribution of hyibrid mode field in dielectric-loaded waveguides. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT-33, pp 1442-1447, 1985.

- [26] SHI, Z. D.; YU, R. The dispersion relations of rectangular waveguides partially loaded dielectric slabs in terms of transverse resonance technique. **J. Chengdu Inst. of Radio Eng.**, N° 15, p 45, 1986.
- [27] LING, Z. F. Dispersion characteristics of waveguide filled with two dielectric slabs in E-plane. **J. Electron. (China)**, N° 10, pp 263-268, 1988.
- [28] JOUBERT, J.; McNAMARA, D. A. Dyadic Green's function of electric type for inhomogeneously loaded rectangular waveguides. **IEEE Proceedings**, Pt. H, vol. 136, pp 469-474, 1989.
- [29] YU, C.; CHU, T. Analysis of dielectric-loaded waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. MTT 38, pp 1333-1338, 1990.
- [30] MA, J. G. Numerical analysis of the characteristics of TE-modes of waveguides loaded with inhomogeneous dielectrics. **IEEE Proceedings**, pt. H, vol. 138, N° 1, 1991.
- [31] SWAMINATHAN, M.; SARKAR, T. K. Computation of TM and TE in waveguides based on a surface integral formulation. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. 40, pp 285-296, 1992.
- [32] BERNHARD, J. T.; JOINES W. T. Electric Field Distributions in TEM Waveguides versus Frequency. **Journal of Micr. Power and Electromagnetic Energy**, vol. 30, N° 2, pp. 109-116, 1995.
- [33] SILVESTRE, E. et al. Analysis of inhomogeneously filled waveguides using the Bi-orthonormal Basis Method. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech.**, vol. 48, pp 589-596, 2000.
- [34] LOVE, A. E. H. The integration of the equations of propagation of electric waves. **Phil. Trans. Roy. Soc.**, London, Ser. A, vol. 197, pp. 1-45, 1901.
- [35] SCHELKUNOFF, S. A. Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems. **Bell System Tech. J.**, vol. 15, pp. 92-112, 1936.
- [36] SCHELKUNOFF, S. A. Kirchhoff's formula, its vector analogue and other field equivalence theorems. **Commun. Pure Appl. Math.**, vol. 4, pp. 43-59, 1951.
- [37] MARCUVITZ, N. ; SCHWINGER, J. On the representation of the electric and magnetic fields produced by currents and discontinuities in waveguides. **J. Appl. Phys.**, vol. 22, pp. 806-819, 1951.
- [38] SENIOR, T. B. A. Some extensions of Babinet's principle in electromagnetic theory. **IEEE Trans Antennas Propagat.**, vol. AP-25, pp. 417-420, 1977.



- [39]YAGHJIAN, A. D. Approximate formulas for the far-fields and gain of open-ended rectangular waveguide. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech**, AP-32, pp 378-384, 1984.
- [40]GARDIOL, F. E. Open-end Waveguides. Principles and Applications. **Advances in Electronic and Electron Physics**, P. Hawkes Ed. New York Academic, vol. 63, pp 139-187, 1985.
- [41]BAUDRAND, H. et. al. Study of Radiating Properties of Open-ended Rectangular Waveguides. **IEEE Trans. Antennas Propagat.**, vol. 36, N° 8, pp 1071-1077, 1988.
- [42]SELVAN, K. T. Simple formulas for the gain and far fields of open-ended rectangular waveguides. **IEEE Microwave Antennas and Propagation**, vol 45, N° 1, pp 80-84,1998.
- [43]LUDWIG, A. C. The Definition of Cross Polarization. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-21, pp. 116-119, 1973.
- [44]EWING, P. D. Approximation Technique for Determining Gain and Radiation Pattern of the Horn Antenna. **IEEE Proc.**, pp. 296-301, 1989.
- [45]LIU, K.; BALANIS, C. A. Integral Equation Analysis of High-gain Pyramidal Horn Antennas. **IEEE Proc.**, pp. 592-595, 1992.
- [46]LIU, K. et al. Analysis of Pyramidal Horn Antennas Using Moment Method. **IEEE Trans. Antennas Propagat.**, vol. 41, N° 41, pp. 1379-1389, 1993.
- [47]TIWARI, T. et. al. Analysis of H-Plane Sectoral Dielectric Horn Antennas. **IEEE Trans. Antennas Propagat.**, N° 5, pp. 1018-1021, 1993.
- [48]PALIT S. K. Design of Hollow Dielectric Pyramidal Horn Antennas. **IEEE Trans. Antennas Propagat.**, N° 3, pp. 1086-1089, 1997.
- [49]OH, L. L.; PENG, S. Y.; LUNDEN, C. D. Effects of Dielectrics on the Radiation Patterns of an Electromagnetic Horn. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-18, N° 4, pp. 553-556, 1970.
- [50]TSANDOULAS, G. N.; FITZGERALD, W. D. Aperture Efficiency Enhancement in Dielectrically Loaded Horns. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-20, N° 1, pp. 69-74, 1972.
- [51]BALDWIN, R.; McINNES, P. A. Radiation Patterns of Dielectric Loaded Rectangular Horns. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-21, N° 3, pp. 375-376, 1973.

- [52]PALIT S. K; CHARTTERJEE, R. Radiation Characteristics of Tampered Rectangular Dielectric Rod Antenna at Microwave Frequencies. **Proc. URSI Symp. Electrom. Theory**, Santiago, Spain, pp. 351-354, 1983.
- [53]CLARRICOATS, P. J. B.; OLVER, A. D.; RIZK, M. S. A. A dielectric loaded conical feed with low crosspolar radiation. **Proc. URSI Symp. Electrom. Theory**, Santiago, Spain, pp. 351-354, 1983.
- [54]CHARTTERJEE, R. **Dielectric and Dielectric-loaded Antennas**. John Wiley & Sons Inc, pp. 189-210, 1985.
- [55]RIZK, M.; MORRIS, G. Broadband dielectric loaded hybrid mode horns. **Proc. Military Microwaves-86 Conference**, Brighton, United Kingdom, pp. 267-272, 1986.
- [56]LIER, E. A dielectric hybrid mode antenna feed: A simple alternative to the corrugated horn. **IEEE Trans Antennas Propagat.**, vol. AP-34, n° 1, pp. 21-29, 1986.
- [57]OLVER, A. D.; CLARRICOATS, P. J. B.; RAGHAVAN, K. Dielectric Cone Loaded Horn Antennas. **IEEE Proc.**, pt. H, vol. 135, N° 3, pp. 158-162, 1988.
- [58]PALIT S. K.; PERRIS, W. Dielectric-loaded Pyramidal Horns. **JEEE**, Aust., vol. 16, N° 2, pp. 139-146, 1996.
- [59]MENTZER, C. A.; PETERS Jr., L. Pattern Analysis of Corrugated Horns Antennas. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-24, N° 3, pp. 304-309, 1976.
- [60]CLARRICOATS, P. J. B.; OLVER, A. D. Corrugated horns for microwave antennas. **Peter Peregrinus (IEEE Books)**, London, 1984.
- [61]OLVER, A. D.; XIANG, J. Design of profiled corrugated horns. **IEEE Trans Antennas Propagat.** , vol. AP-34, n° 7, pp. 936-940, 1988.
- [62]OLVER, A. D.; XIANG, J. Wide Angle Corrugated Horns Analyzed Using Spherical Modal Matching . **IEEE Proc.**, pt. H, vol. 135, N° 1, pp. 34-40, 1988.
- [63]DESCARDECI, J. R.; CLARRICOATS, P. J. B. A Low Crosspolar Feed for Broadband Application. **URSI-International Symp. On Electromagnetic Theory**, Vol. 1, Thessaloniki, 1998.

## ANEXO I

## A FAMÍLIA DE MODOS $TE_{m0}$ COMO SOLUÇÃO PARA O GUIA DE ONDA PARCIALMENTE PREENCHIDO

As expressões para os campos E e H podem ser obtidas considerando-se  $\vec{A} = 0$  e somente a componente na direção z de  $\vec{F}$ .

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F_z}{\partial y} \vec{a}_x + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F_z}{\partial x} \vec{a}_y + 0 \vec{a}_z \quad (\text{A-1})$$

$$H(x, y, z) = -j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} \vec{a}_x - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} \vec{a}_y - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) F_z \vec{a}_z \quad (\text{A-2})$$

Onde,

$$F_z(x, y, z) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] A_3 e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-3})$$

Como ilustra a Figura A-1, o guia de onda possui no seu interior duas regiões cujos materiais dielétricos são distintos e portanto as equações (A-1), (A-2) e (A-3) devem ser rescritas na forma:

$$\vec{E} = \begin{cases} E^d = -\frac{1}{\varepsilon_d} \frac{\partial F_z^d}{\partial y} \vec{a}_x + \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{\partial F_z^d}{\partial x} \vec{a}_y \\ E^0 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial F_z^0}{\partial y} \vec{a}_x + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial F_z^0}{\partial x} \vec{a}_y \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

$$\vec{H} = \begin{cases} H^d = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_d} \frac{\partial^2 F_z^d}{\partial x \partial z} \vec{a}_x - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_d} \frac{\partial^2 F_z^d}{\partial y \partial z} \vec{a}_y - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_d} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) F_z^d \vec{a}_z \\ H^0 = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_0} \frac{\partial^2 F_z^0}{\partial x \partial z} \vec{a}_x - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_0} \frac{\partial^2 F_z^0}{\partial y \partial z} \vec{a}_y - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) F_z^0 \vec{a}_z \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

Onde

$$F_z^d = [C_1^d \cos(\beta_{dx} x) + D_1^d \text{sen}(\beta_{dx} x)] [C_2^d \cos(\beta_{dy} y) + D_2^d \text{sen}(\beta_{dy} y)] A_3^d e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-6})$$

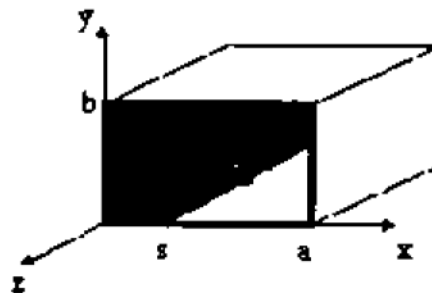
$$F_z^0 = [C_1^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)] + D_1^0 \text{sen}[\beta_{0x}(a-x)]] [C_2^0 \cos(\beta_{0y} y) + D_2^0 \text{sen}(\beta_{0y} y)] A_3^0 e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-7})$$

Os índices  $0$  e  $d$  indicam a região na qual a solução é válida,

$d \rightarrow$  para região do dielétrico ( $0 \leq x \leq s$ ;  $0 \leq y \leq b$ )

$0 \rightarrow$  para o ar ( $s \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ )

**Figura A-1** Guia de onda parcialmente preenchido



As condições de contorno necessárias e suficientes são as seguintes:

Na região do dielétrico ( $0 \leq x \leq s$ ;  $0 \leq y \leq b$ )

$$E_x^d(0 \leq x \leq s; y=0) = E_x^d(0 \leq x \leq s; y=b) = 0 \quad \text{tangenciais à base e ao topo} \quad (\text{A-8})$$

$$E_y^d(x=0; 0 \leq y \leq b) = 0 \quad \text{tangenciais à parede lateral} \quad (\text{A-9})$$

De (A-4) e (A-6),

$$E_x^d = -\frac{\beta_{dy}}{\varepsilon_d} [C_1^d \cos(\beta_{dx}x) + D_1^d \sin(\beta_{dx}x)] [-C_2^d \sin(\beta_{dy}y) + D_2^d \cos(\beta_{dy}y)] A_3^d e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-10})$$

$$E_y^d = \frac{\beta_{dx}}{\varepsilon_d} [-C_1^d \sin(\beta_{dx}x) + D_1^d \cos(\beta_{dx}x)] [C_2^d \cos(\beta_{dy}y) + D_2^d \sin(\beta_{dy}y)] A_3^d e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-11})$$

Aplicando (A-8) em (A-10) resulta:

$$\boxed{D_2^d = 0} \text{ e } -C_2^d \sin(\beta_{dy}b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_{dy} = \frac{n\pi}{b}} \text{ com } n = 0, 1, 2 \quad (\text{A-12})$$

Aplicando (A-9) em (A-11) resulta:

$$\boxed{D_1^d = 0} \quad (\text{A-13})$$

Na região do ar ( $s \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$ )

$$E_x^0(s \leq x \leq a; y = 0) = E_x^0(s \leq x \leq a; y = b) = 0 \quad \text{tangenciais à base e ao topo} \quad (\text{A-14})$$

$$E_y^0(x = a; 0 \leq y \leq b) = 0 \quad \text{tangenciais à parede lateral} \quad (\text{A-15})$$

De (A-4) e (A-7),

$$E_x^0 = -\frac{\beta_{0y}}{\varepsilon_0} [C_1^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)] + D_1^0 \sin[\beta_{0x}(a-x)]] [-C_2^0 \sin(\beta_{0y}y) + D_2^0 \cos(\beta_{0y}y)] A_3^0 e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-16})$$

$$E_y^0 = \frac{\beta_{0x}}{\varepsilon_0} [C_1^0 \sin[\beta_{0x}(a-x)] - D_1^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)]] [C_2^0 \cos(\beta_{0y}y) + D_2^0 \sin(\beta_{0y}y)] A_3^0 e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-17})$$

Aplicando (A-14) em (A-16) resulta:

$$\boxed{D_2^0 = 0} \text{ e } -C_2^0 \sin(\beta_{0y}b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_{0y} = \frac{n\pi}{b}} \text{ com } n = 0, 1, 2 \quad (\text{A-18})$$

Aplicando (A-15) em (A-17) resulta:

$$\boxed{D_1^0 = 0} \quad (\text{A-19})$$

Reescrevendo (A-6) e (A-7) de forma simplificada, pela substituição de (A-12), (A-13), (A-18) e (A-19)

$$F_z^d = B_{mn}^d \cos(\beta_{dx}x) \cdot \cos(\beta_{dy}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-23})$$

$$F_z^0 = B_{mn}^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \cos(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-24})$$

As expressões para as componentes de campo de (A-4) e (A-5) reduzem à:

No ar

$$E_x^0 = \frac{\beta_{0y}}{\epsilon_0} B_{mn}^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \text{sen}(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-25})$$

$$E_y^0 = \frac{\beta_{0x}}{\epsilon_0} B_{mn}^0 \cdot \text{sen}[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \cos(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-26})$$

$$H_x^0 = -\frac{\beta_z \cdot \beta_{0x}}{\omega \mu \epsilon_0} B_{mn}^0 \cdot \text{sen}[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \cos(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-27})$$

$$H_y^0 = \frac{\beta_z \cdot \beta_{0y}}{\omega \mu \epsilon_0} B_{mn}^0 \cdot \cos[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \text{sen}(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-28})$$

$$H_z^0 = j \frac{(\beta_z^2 - \beta_0^2)}{\omega \mu \epsilon_0} B_{mn}^0 \cdot \cos[\beta_{0x}(a-x)] \cdot \cos(\beta_{0y}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-29})$$

No dielétrico

$$E_x^d = \frac{\beta_{dy}}{\epsilon_d} B_{mn}^d \cos(\beta_{dx}x) \cdot \text{sen}(\beta_{dy}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-30})$$

$$E_y^d = -\frac{\beta_{dx}}{\epsilon_d} B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{dx}x) \cdot \cos(\beta_{dy}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-31})$$

$$H_x^d = \frac{\beta_z \cdot \beta_{dx}}{\omega \mu \epsilon_0 \epsilon_r} B_{mn}^d \cdot \text{sen}(\beta_{dx}x) \cdot \cos(\beta_{dy}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-32})$$

$$H_y^d = \frac{\beta_z \cdot \beta_{dy}}{\omega \mu \epsilon_d} B_{mn}^d \cdot \cos(\beta_{dx}x) \cdot \text{sen}(\beta_{dy}y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-33})$$

$$H_z^d = j \frac{(\beta_z^2 - \beta_d^2)}{\omega \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r} B_{mn}^d \cdot \cos(\beta_{dx} x) \cdot \cos(\beta_{dy} y) \cdot e^{-j\beta_z z} \quad (\text{A-34})$$

$$\text{Onde: } \boxed{B_{mn}^0 = C_1^0 C_2^0 A_3^0} ; \boxed{B_{mn}^d = C_1^d C_2^d A_3^d} ; \boxed{\beta_{0y} = \beta_{dy} = \frac{n\pi}{b}} ; \boxed{\varepsilon_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (\text{A-35})$$

Para verificar a validade das soluções (A-25) a (A-34) deve-se testar a relação entre os campos elétricos e magnéticos na região de fronteira entre os dielétricos. Considerando a condição de continuidade de campo elétrico tangencial à interface dielétrico/ar:

$$E_y^0(x=s; 0 \leq y \leq b) = E_y^d(x=s; 0 \leq y \leq b) \quad \text{tangenciais à interface dielétrico/ar} \quad (\text{A-36})$$

$$\beta_{0x} \cdot B_{mn}^0 \cdot \text{sen}[\beta_{0x}(a-s)] \cdot \cos(\beta_{0y} y) \varepsilon_r = -\beta_{dx} \cdot B_{mn}^d \cdot \text{sen}(\beta_{dx} s) \cdot \cos(\beta_{dy} y) \quad (\text{A-37})$$

Obs: Devido a relação de ortogonalidade entre os campos elétrico e magnético, da condição de continuidade das componentes de campo magnético  $H_x$ , normais à interface dielétrica, resulta uma relação idêntica a (A-37)

Considerando agora os campos elétricos normais à interface dielétrico/ar, que devem obedecer a relação[1]:

$$\varepsilon_d E_x^d = \varepsilon_0 E_x^0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r E_x^d = E_x^0 \quad (\text{A-38})$$

Então,

$$\beta_{0y} B_{mn}^0 \cos[\beta_{0x}(a-s)] \text{sen}(\beta_{0y} y) = \beta_{dy} B_{mn}^d \cos(\beta_{dx} s) \cdot \text{sen}(\beta_{dy} y) \quad (\text{A-39})$$

Da condição de continuidade de campo magnético tangente à interface dielétrico/ar resulta:

$$H_z^0(x=s; 0 \leq y \leq b) = H_z^d(x=s; 0 \leq y \leq b) \quad \text{tangenciais à interface dielétrico/ar} \quad (\text{A-40})$$

Substituindo (A-29) e (A-34) na condição (A-40) obtém-se,

$$(\beta_z^2 - \beta_0^2) B_{mn}^0 \cdot \cos[\beta_{0x}(a-s)] \cdot \cos(\beta_{0y} y) \varepsilon_r = (\beta_z^2 - \beta_d^2) B_{mn}^d \cdot \cos(\beta_{dx} s) \cdot \cos(\beta_{dy} y) \quad (\text{A-41})$$

Sabendo que,

$$\beta_d^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r = \beta_{dx}^2 + \beta_{dy}^2 + \beta_z^2 \quad \text{e} \quad \beta_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0 = \beta_{0x}^2 + \beta_{0y}^2 + \beta_z^2 \quad (\text{A-42})$$

A relação (A-41) pode ser então escrita na forma,

$$\left(\beta_{0x}^2 + \beta_{0y}^2\right) B_{mn}^0 \cdot \cos[\beta_{0x}(a-s)] \cdot \cos(\beta_{0y}y) \varepsilon_r = \left(\beta_{dx}^2 + \beta_{dy}^2\right) B_{mn}^d \cdot \cos(\beta_{dx}s) \cdot \cos(\beta_{0y}y) \quad (\text{A-43})$$

Por fim deve-se verificar que relação retorna a condição de continuidade da componente de campo magnético  $H_y$  na interface dielétrico/ar:

$$H_y^0(x=s; 0 \leq y \leq b) = H_y^d(x=s; 0 \leq y \leq b) \quad \text{tangenciais à interface dielétrico/ar} \quad (\text{A-44})$$

$$\beta_{0y} B_{mn}^0 \cos[\beta_{0x}(a-s)] \text{sen}(\beta_{0y}y) \cdot \varepsilon_r = \beta_{dy} B_{mn}^d \cos(\beta_{dx}s) \cdot \text{sen}(\beta_{dy}y) \quad (\text{A-45})$$

Comparando as relações obtidas em (A-39) e (A-45) pode-se concluir que estas só serão válidas simultaneamente quando  $n=0$ , ou seja, pela igualdade de zeros. Portanto, os modos transversos elétricos que atendem às condições de contorno da estrutura são apenas a família de modos  $\text{TE}_{m0}$ . Conseqüentemente, as relações (A-37) e (A-43) resumem-se à:

$$\beta_{0x} \cdot B_{mn}^0 \cdot \text{sen}[\beta_{0x}(a-s)] \varepsilon_r + \beta_{dx} \cdot B_{mn}^d \cdot \text{sen}(\beta_{dx}s) = 0 \quad (\text{A-46})$$

$$\beta_{0x}^2 \cdot B_{mn}^0 \cdot \cos[\beta_{0x}(a-s)] \varepsilon_r - \beta_{dx}^2 \cdot B_{mn}^d \cdot \cos(\beta_{dx}s) = 0 \quad (\text{A-47})$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (A-46) e (A-47) obtém-se a equação característica para o modo  $\text{TE}_{m0}$ :

$$\beta_{0x} \cdot \cot[\beta_{0x}(a-s)] + \beta_{dx} \cdot \cot(\beta_{dx}s) = 0 \quad (\text{A-48})$$

Onde

$$\beta_{xd} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r - \beta_z^2} \quad \beta_{x0} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon_0 - \beta_z^2} \quad (\text{A-49})$$



Campos na Abertura:

$$E_y^d = -\frac{\beta_{dx}}{\varepsilon_d} B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{dx}x) \quad (\text{A-50})$$

$$E_y^0 = \frac{\beta_{0x}}{\varepsilon_0} B_{mn}^0 \text{sen}[\beta_{0x}(a-x)] \quad (\text{A-51})$$

$$H_x^d = \frac{\beta_z \cdot \beta_{dx}}{\omega \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r} B_{mn}^d \text{sen}(\beta_{dx}x) \quad (\text{A-52})$$

$$H_x^0 = -\frac{\beta_z \cdot \beta_{0x}}{\omega \mu \varepsilon_0} B_{mn}^0 \text{sen}[\beta_{0x}(a-x)] \quad (\text{A-53})$$

$$H_z^d = j \frac{(\beta_z^2 - \beta_d^2)}{\omega \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r} B_{mn}^d \cos(\beta_{dx}x) \quad (\text{A-54})$$

$$H_z^0 = j \frac{(\beta_z^2 - \beta_0^2)}{\omega \mu \varepsilon_0} B_{mn}^0 \cos[\beta_{0x}(a-x)] \quad (\text{A-55})$$