

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

AMANDA CAROLINA MATHIAS SIEMENTKOWSKI

**ESTRUTURAS FRACTAIS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS CAÓTICOS COM
APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMAS**

Curitiba, PR

2017

AMANDA CAROLINA MATHIAS SIEMENTKOWSKI

**ESTRUTURAS FRACTAIS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS CAÓTICOS COM
APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Curitiba, PR

2017

S571e Siementkowski, Amanda Carolina Mathias
Estruturas fractais em sistemas hamiltonianos caóticos com aplicações
em física de plasmas / Amanda Carolina Mathias Siementkowski. – Curitiba,
2017.
146 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Física , 2017.

Orientador: Ricardo Luiz Viana .
Bibliografia: p. 94-99.

1. Física dos plasmas. 2. Sistemas Hamiltonianos. 3. Ondas de Deriva. 4.
Mapa Martin-Taylor. I. Universidade Federal do Paraná. II.Viana, Ricardo
Luiz. III. Título.

CDD: 530.141



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **AMANDA CAROLINA MATHIAS SIEMENTKOWSKI** intitulada: **Estruturas Fractais em Sistemas Hamiltonianos Caóticos com Aplicações em Física de Plasmas**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 18 de Agosto de 2017.

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

EDSON DENIS LEONEL

Avaliador Externo (UNESP)

KELLY CRISTIANE IAROSZ

Avaliador Externo (USP)

JOSÉ DANILLO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Externo (UEPG)

ANTONIO MARCOS BATISTA

Avaliador Externo (UEPG)

Dedico esta Tese de Doutorado a minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu realizasse mais uma etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me incentivaram a começar mais uma jornada da minha vida, e que me ajudaram a ser quem eu sou hoje.

Especialmente,

- A Deus, pelo dom da vida e que sempre me deu forças para nunca desistir.
- Aos meus pais e à minha irmã, os mais profundos agradecimentos pelo imenso incentivo aos meus estudos.
- Ao meu marido, pelo apoio, segurança e dedicação durante todo nosso convívio.
- À minha amiga de coração Karla Weber por me escutar nos momentos mais difíceis e deixar os meus dias mais alegres nos últimos anos.
- Ao meu orientador Dr. Ricardo Luiz Viana, gostaria de agradecer imensamente por acreditar na minha capacidade, pela paciência e pelos conhecimentos transmitidos durante os 4 anos do doutorado.
- Aos colaboradores externos, professores Dr. Iberê Luiz Caldas e Dr. Tiago Kroetz e ao Dr. Francisco Alberto Marcus que contribuíram em discussões, ensinamentos e em publicações de trabalhos.
- Aos professores das bancas examinadoras (pré-defesa e defesa da tese) pelas sugestões e correções ao trabalho.
- Aos programa de pós-graduação em Física da UFPR e aos professores que tive durante o doutorado.
- Aos colegas da pós-graduação, pelas nossas distrações, brincadeiras, e os momentos de estudo.
- Ao professor Dr. Carlos de Carvalho, pelo suporte computacional.
- Ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho investigamos algumas propriedades do transporte de partículas em sistemas dinâmicos caóticos descritos a partir de um modelo de ondas de deriva e pelo mapa de Martin-Taylor. Em ambos casos estudados, a não uniformidade das regiões caóticas que aparecem nos espaços de fase é uma consequência do aparecimento de estruturas complexas de órbitas caóticas em sistemas dinâmicos. Essas estruturas são governadas pelo emaranhado homoclínico formado pelas intersecções das variedades invariantes provenientes de órbitas periódicas instáveis embutidas nas órbitas caóticas. Devido ao movimento das variedades, as trajetórias caóticas se tornam sensíveis às condições iniciais, ou seja, uma pequena perturbação pode levar uma órbita a escapar através de uma diferente saída, prejudicando a capacidade de prever o futuro do sistema. Em sistemas abertos, as trajetórias das partículas escapam para regiões bem definidas dos espaços de fase, desse modo determinamos as bacias de escape. A bacia de escape é formada por uma região do espaço de fase definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam, ou deixam, determinada região do espaço de fase. Em modelos para tokamaks, a parede da câmara de confinamento é uma saída do espaço de fase para órbitas da borda do plasma. Quantificamos a fractalidade das fronteiras das bacias de escape, através da dimensão da fronteira fractal da bacia de duas saídas. A entropia da bacia e a entropia da fronteira da bacia, foram calculadas para verificarmos o quanto as bacias estão entrelaçadas. No caso das bacias de escape com três saídas, averiguamos a existência da propriedade de Wada, onde qualquer ponto que está sobre a fronteira de uma bacia de escape estará também simultaneamente sobre a fronteira das outras bacias. Quantificamos as bacias de Wada, aplicando o método da grade para verificarmos o quanto a propriedade está satisfeita nos sistemas.

Palavras chave: Física de Plasma, Sistemas Hamiltonianos, Ondas de Deriva, Mapa Martin-Taylor

ABSTRACT

In this work we investigated some properties of particle transport in chaotic systems described using a model of drift waves and by the Martin-Taylor maps. In both cases studied, the non-uniformity of the chaotic regions appearing in the phase space is a consequence of the appearance of complex structures of chaotic orbits in dynamic systems. These structures are governed by the homoclinic tangled formed by the intersections of the invariant manifolds stemming from unstable periodic orbits embedded in the chaotic orbits. Due to the motion of the manifolds, the chaotic trajectories become sensitive to the initial conditions, that is, a small perturbation can cause an orbit to escape through a different exit, impairing the ability to predict the future of the system. In open systems, the trajectories of the particles escape into well defined regions of the phase space, thus determining the basins of escape. They are formed by a region of the phase space defined by the set of initial conditions that escape, or exit, a certain region of the phase space. In models for tokamaks, the confinement chamber wall is an exit region of the phase space for orbits in the plasma edge. We quantify the fractality of the escape basin boundaries, through the fractal boundary dimension of the two basins of escape. The basin entropy and the boundary basin entropy were calculated to verify how much the basins are intertwined. In the case of the three basins of escape, we investigate the existence of the Wada property, where any point on the boundary of an basins of escape will also be simultaneously over the boundary of the other basins of escape. We quantify the Wada basins by applying the grid approach technique to verify how much property is satisfied in the systems.

Keywords: Plasma Physics, Hamiltonian Systems, Drift Waves, Martin-Taylor Map

Lista de Figuras

2.1	Principais componentes de um tokamak	22
2.2	Aproximações de coordenadas: (a) geometria toroidal, (b) e (c) aproximação cilíndrica para a retangular	23
3.1	Movimento da partícula ao longo da linha de campo magnético	25
3.2	Movimento de deriva elétrica no centro de guia da partícula	25
4.1	Esboço de uma seção de Poincaré Ω	34
4.2	Espaço de fase do mapa de Poincaré para $U = 0$ e $A_2 = 0$	34
4.3	Espaço de fase do mapa de Poincaré para $U = 0$ e (a) $A_2 = 0, 1$, (b) $A_2 = 0, 5$, (c) $A_2 = 1, 5$ e (d) $A_2 = 2, 0$	35
4.4	Bacias de escape com saídas, na parede em $x = 0$ (pontos em vermelho) e em um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0, 05$ (pontos em verde), para diferentes amplitudes da segunda onda de deriva. (a) $A_2 = 0, 1$, (b) $A_2 = 0, 5$, (c) $A_2 = 1, 5$ e (d) $A_2 = 2, 0$. Órbitas na região em branco não escapam	37
4.5	Bacias de escape com saídas, na parede em $x = 0$ (pontos em vermelho) e em um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0, 15$ (pontos em verde), para diferentes amplitudes da segunda onda de deriva. (a) $A_2 = 0, 1$, (b) $A_2 = 0, 5$, (c) $A_2 = 1, 5$ e (d) $A_2 = 2, 0$. Órbitas na região em branco não escapam	38

4.6	Fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) em relação a amplitude da segunda onda de deriva (A_2) para diferentes valores de largura do quadrado. (a) $l = 0,05$ e (b) $l = 0,15$	39
4.7	Esquema de ponto fixo hiperbólico x_0 e suas variedades instável (V^i) e estável (V^e). A linha tracejada representa uma trajetória próxima ao ponto hiperbólico x_0	40
4.8	Variedades estáveis (curva azul) e instáveis (curva vermelha) de um ponto fixo instável embutido na região caótica ($x = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$) para diferentes amplitudes da segunda onda. (a) $A_2 = 0,1$, (b) $A_2 = 0,5$ e (c) $A_2 = 1,5$	41
4.9	Variedades instável (a) e estável (b) de um ponto fixo instável embutido na região caótica ($x = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$) para a amplitude $A_2 = 2,0$. Em (c) a correspondente sela caótica	42
4.10	Aproximação finita da variedade estável da sela caótica (em preto) sobreposta às bacias de escape para duas saídas com $A_2 = 2,0$ da figura 4.4 (d)	43
4.11	Região do espaço de fase limitado pela fronteira de bacia Σ que divide as bacias A e B. Os pontos 1 e 2 representam condições iniciais com uma incerteza ε	44
4.12	Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ε , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de A_2 , considerando a saída da janela com largura $l = 0,05$. (a) $A_2 = 0,1$ e (b) $A_2 = 2,0$	46
4.13	Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ε , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de A_2 , considerando a saída da janela com largura $l = 0,15$. (a) $A_2 = 0,1$ e (b) $A_2 = 2,0$	46
4.14	Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) para o caso de duas saídas da figura 4.4 como uma função da amplitude da segunda onda A_2	50

4.15	Entropias da bacia S_b como uma função da amplitude da segunda onda A_2 . Reta em vermelho representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 2$, reta em preto representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 5$ e reta em azul representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 8$. Onde α é o ângulo de inclinação de cada reta	51
4.16	Representação da reta que passa entre os pontos mínimo e máximo da entropia S_b em relação a amplitude A_2 com inclinação α	51
4.17	Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) para o caso de duas saídas da figura 4.5 como uma função da amplitude da segunda onda A_2	53
4.18	Entropias da bacia S_b como uma função da amplitude da segunda onda A_2 . Reta em vermelho representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 2$, reta em preto representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 5$ e reta em azul representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 8$. Onde α é o ângulo de inclinação de cada reta	54
4.19	Bacias de escape para a parede em $x = 0$ (pontos em azul) e dois pequenos quadrados centrados em: $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ (pontos em verde) e $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (pontos em vermelho) ambas janelas com largura $l = 0,15$ para o caso de $A_2 = 2, 0$, figura (a). As figuras (b), (c) e (d) representam sucessivas ampliações do retângulo amarelo nas figuras. Em (b) a variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as bacias é um indício da propriedade de Wada	55
4.20	Esquema do método da grade considerando $m = 3$ bacias	57
4.21	Estrutura da bacia da figura 4.19 (a), mostrando em preto os pontos classificados como G_1 (pontos internos da bacia), em vermelho pontos do conjunto G_2 (pontos da fronteira entre duas bacias) que após $q = 12$ passos de refinamento continuam a pertencer a este conjunto, e estão em azul os pontos do conjunto G_3 (pontos da fronteira entre três bacias)	59

4.22	Em (a) número de pontos reclassificados em cada passo de refinamento q , usando o método da grade para a estrutura da bacia da figura 4.19 (a). Em (b) os valores das quantidades W_2 e W_3 como uma função do passo de refinamento q	60
5.1	Representação esquemática da câmara de confinamento do plasma, exibindo o limitador magnético caótico com um anel específico. Onde l é a extensão do anel, ϕ é o ângulo toroidal, R_0 e b são os raios maior e menor do toro, respectivamente	62
5.2	Aproximações de coordenadas: (a) cilindro periódico ($z = \text{constante}$) envolvido por um anel limitador magnético. (b) coordenadas retangulares na borda do tokamak	63
5.3	Representação esquemática de uma linha de campo magnético em uma seção de Poincaré para $\phi = cte$	65
5.4	Geometria utilizada para o cálculo do campo gerado pelo limitador numa região próxima à borda do tokamak	69
6.1	Espaços de fase para o mapa de Martin-Taylor para diferentes valores de perturbação p e deslocamento constante $s = 2\pi$. (a) $p = 0, 1$, (b) $p = 0, 5$, (c) $p = 1, 0$, (d) $p = 1, 5$, (e) $p = 2, 0$ e (f) $p = 2, 5$	74
6.2	Plano xy com a posição das ilhas y_m e y_{m+1}	77
6.3	Esquema do método adotado para a estimativa da posição de escape de uma dada linha de campo magnético	78
6.4	Bacias de escape com saídas em: ($0 \leq x < \pi, y = 0$), bacia em vermelho e ($\pi \leq x < 2\pi$), bacia em verde, para $s = 2\pi$ e diferentes valores de perturbação. (a) $p = 0, 5$, (b) $p = 1, 5$, (c) $p = 2, 0$ e (d) $p = 2, 5$. Órbitas com condições iniciais na região em branco não escapam	79
6.5	Mapa do comprimento de conexão (medida em número de iterações no mapa) para condições iniciais no espaço de fase do mapa de Martin e Taylor para $s = 2\pi$ e $p = 2, 5$	80

6.6	Variedades invariantes da sela caótica para o caso $s = 2\pi$ e $p = 2, 5$, $n_i = 100$ e $\xi = 0, 5$: (a) estável, (b) instável e (c) sela caótica	81
6.7	Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ε , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de p , considerando o deslocamento $s = 2\pi$. (a) $p = 2, 0$ e (b) $p = 2, 5$	82
6.8	Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) para o caso de duas saídas da figura 6.4 como uma função da intensidade da perturbação p	84
6.9	Bacias de escape com saídas em: $(0 \leq x < 2\pi/3)$, bacia em azul, $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3)$, bacia em vermelho, e $(4\pi/3 \leq x < 2\pi)$ bacia em verde, para $s = 2\pi$ e $p = 2, 5$, figura (a). As figuras (b), (c) e (d) representam sucessivas ampliações do retângulo amarelo nas figuras. Em (b) a variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as bacias é um indício da propriedade de Wada	85
6.10	Estrutura da bacia da figura 6.9 (a), mostrando em preto os pontos classificados como G_1 (pontos internos da bacia), em vermelho pontos do conjunto G_2 (pontos da fronteira entre duas bacias) que após $q = 18$ passos de refinamento continuam a pertencer a este conjunto, e estão em azul os pontos do conjunto G_3 (pontos da fronteira entre três bacias)	87
6.11	Em (a) número de pontos reclassificados em cada passo de refinamento q , usando o método da grade para a estrutura da bacia da figura 6.9 (a). Em (b) os valores das quantidades W_2 e W_3 como uma função do passo de refinamento q	88

Sumário

1	Introdução	15
2	O plasma e seu confinamento	20
3	Ondas de deriva	24
3.1	Equação de movimento das partículas do plasma	24
3.2	Descrição hamiltoniana do modelo para ondas de deriva	26
3.2.1	Hamiltoniana para uma onda de deriva	28
3.2.2	Hamiltoniana para duas ondas de deriva	29
4	Resultados para o modelo de duas ondas de deriva	31
4.1	Parâmetro de confinamento	31
4.2	Espaços de fase	33
4.3	Bacias de escape para duas saídas	36
4.4	Variedades invariantes e sela caótica	39
4.5	Fronteiras fractais das bacias de escape	43
4.6	Bacias de escape para três saídas	54
5	Limitador magnético caótico	61
5.1	Mapa de Martin e Taylor	62
5.1.1	Obtenção do mapa	64

6	Resultados para o mapa de Martín e Taylor	73
6.1	Espaços de fase	73
6.2	Bacias de escape para duas saídas	77
6.3	Variedades invariantes e sela caótica	80
6.4	Fronteiras das bacias de escape fractais	82
6.5	Bacias de escape para três saídas	84
7	Conclusões	89
	Bibliografia	94
	Apêndice A Artigos	100

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas na física de plasmas é o controle de interação entre as partículas do plasma e a parede interna do Tokamak. Os tokamaks são as máquinas mais promissoras até o momento para a obtenção de energia elétrica por meio da fusão termonuclear controlada [1, 2]. Para que o processo de fusão nuclear ocorra, o plasma, uma coluna de gás altamente ionizada é aquecida ohmicamente e confinado magneticamente em uma câmara toroidal. O primeiro tokamak foi construído na Rússia na década de 50, e ao longo desses anos houve uma melhora contínua em seu desempenho [3]. Atualmente, existem vários tokamaks que estão em operação no exterior [4-6] e no Brasil [7]. Cada um dos tokamaks possui objetivos específicos que tentam esclarecer as propriedades do plasma e fornecer indicações sobre a viabilidade de se construir um reator de fusão nuclear. O tokamak ITER [8], que está sendo construído em Cadarache (França), será o maior reator de fusão nuclear em operação, cujo resultado de uma ampla colaboração internacional que visa demonstrar a viabilidade científica e tecnológica da fusão nuclear como fonte de energia renovável e menos poluente.

Porém, o confinamento do plasma em tokamaks não é perfeito. Algumas dificuldades surgem e precisam ser superadas, entre as quais estão, a instabilidade do plasma devido a ressonância dos campos magnéticos internos e externos que podem levar a extinção da corrente no plasma e o transporte anômalo de partículas e energia para a parede do tokamak, que implica na degradação do confinamento do plasma [9, 10]. A colisão de partículas com a parede metálica do tokamak pode resfriar e poluir o plasma com impurezas arrancadas da parte interna da câmara em processos denominados de *sputtering* [11]. O transporte radial de partículas é oca-

tionado principalmente, segundo W. Horton [12], pelo aparecimento de ondas de deriva, que são flutuações eletrostáticas produzidas pelos gradientes de densidade e temperatura na borda do plasma.

Desse modo, a procura por explicações de como controlar o transporte radial de partículas e diminuir o prejuízo que causa ao confinamento tem sido uma das questões fundamentais em vários trabalhos científicos para plasmas de fusão [13-20].

Uma maneira de controlar a interação do plasma com a parede do tokamak é gerar um campo magnético perturbativo próximo à borda do plasma [21-23]. Uma camada de linhas magnéticas caóticas na periferia da coluna de plasma pode uniformizar o fluxo de energia térmica sobre a parede da câmara de confinamento, evitando ataques localizados na estrutura e suas consequências [11].

Essa região de linhas de campo magnético caóticas na borda da coluna do plasma, pode ser criada por condutores helicoidais ressonantes de correntes elétricas, adequadamente enrolados sobre a superfície externa da câmara de confinamento. Entretanto, as diversas janelas em torno do tokamak, destinadas à observação do plasma, dificulta a instalação destes condutores. Para contornar esse problema, é possível utilizar um dispositivo conhecido como Limitador Magnético Caótico [24], que é formado por um anel condutor de corrente elétrica, instalado em uma seção do tokamak, que reproduz uma fatia estreita do condutor helicoidal.

Nesta tese, investigaremos primeiramente, os efeitos dinâmicos do transporte caótico de partículas devido ao movimento de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$, causado pelas flutuações eletrostáticas [12], e em seguida, o transporte de linhas de campo magnético caóticas na borda da coluna do plasma, devido as perturbações magnéticas ressonantes, causadas por um limitador magnético caótico. Além disso, relacionaremos o transporte com o surgimento de caos e estruturas fractais nos espaços de fase.

Para o estudo do transporte radial de partículas na borda do plasma, devido as ondas de deriva, utilizamos o modelo físico hamiltoniano, proposto por W. Horton [25]. Esse modelo descreve o movimento de deriva do centro de guia das partículas confinadas na região periférica do plasma no tokamak. Em geral, é usado um potencial eletrostático composto pelo potencial de equilíbrio, dependendo apenas da coordenada radial e uma superposição de infinitas ondas de deriva, de amplitudes, números de onda e frequências variadas. Cada uma destas ondas se

propagam na direção y (poloidal), são estacionárias na direção x (radial) e são transversais ao campo magnético na direção z (toroidal). Para apenas uma onda de deriva o sistema é integrável, e as trajetórias do centro de guia das partículas são regulares. Para duas ou mais ondas de deriva com velocidades de fase diferentes entre si, as equações do movimento não são mais integráveis, e as trajetórias apresentam comportamento caótico [26]. Sendo assim, consideramos o sistema composto por uma e duas ondas de deriva e verificamos como o transporte varia com o aumento da amplitude da segunda onda de deriva devido ao comportamento caótico de algumas trajetórias.

Através do mapa Martin-Taylor [27], analisaremos a dinâmica das linhas de campo magnético em tokamaks e o efeito do limitador magnético caótico sobre estas. Esse mapa foi um dos primeiros a serem propostos para modelar linhas de campo magnético em tokamaks e também a considerar um limitador magnético caótico. O mapa de Martin e Taylor é composto por dois mapas: um mapa integrável que descreve a dinâmica de equilíbrio e um mapa perturbativo que quebra a simetria do sistema. Utilizando este mapa, investigamos o transporte das linhas de campo magnético para a parede do tokamak variando o parâmetro de perturbação do mapa.

Em ambos os casos estudados, transporte radial de partículas, devido as ondas de deriva e o transporte das linhas do campo magnético, causado pelas perturbações magnéticas ressonantes, a não uniformidade das regiões caóticas que aparecem nos espaços de fase é uma consequência do aparecimento de estruturas fractais bastante complexas de órbitas caóticas.

O termo fractal significa “fraturado”, foi criado por B. Mandelbrot em 1975 [28]. Em geral, fractais são conjuntos complexos com dimensão não inteira. Além disso, eles apresentam uma auto-similariedade estatística, ou seja, uma estrutura fractal que contém uma cópia de si mesmo em diferentes escalas [29].

Estruturas fractais aparecem naturalmente na dinâmica não linear, e a análise dessas estruturas é especialmente útil para obter informações sobre a evolução de sistemas dinâmicos que modelam fenômenos físicos, pois fornecem informações fundamentais sobre a incerteza intrínseca na predição de seu comportamento futuro [29]. Essas estruturas são governadas pelo emaranhado homoclínico formado pelas intersecções das variedades invariantes provenientes de órbitas periódicas instáveis embutidas nas órbitas caóticas. Devido ao movimento das variedades, as trajetórias caóticas se tornam sensíveis às condições iniciais, ou seja, uma pequena

perturbação pode levar uma órbita a escapar através de uma diferente saída, dificultando a capacidade de prever o futuro do sistema [29, 30].

Em sistemas abertos, as trajetórias das partículas escapam para regiões bem definidas no espaço de fase, desse modo podemos determinar bacias de escape, ou saída. A bacia de escape é formada por uma região do espaço de fase definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam, ou deixam, determinada região do espaço de fase, sem ter antes atingido outra saída [31]. Em modelos para tokamaks, a parede da câmara é uma saída do espaço de fase para órbitas da borda do plasma. Entretanto, existem outras saídas que podem também ser colocadas em posições arbitrárias, representando obstáculos materiais no interior do tokamak, como antenas e sensores. Nos casos de interesse deste trabalho, analisamos a presença de estruturas fractais nas bacias de escape, ou saída. Em sistemas caóticos, a fronteira entre as possíveis bacias de escape possui dimensão fractal [32].

Para quantificarmos a fractalidade das fronteiras das bacias de escape, utilizamos o método da incerteza [33] a fim de calcularmos a dimensão da fronteira fractal da bacia de duas saídas. E, para verificarmos o quanto essas bacias estão entrelaçadas, aplicamos o método proposto por Daza e coautores [34], para o cálculo da entropia da bacia e entropia da fronteira da bacia. No caso das bacias de escape com três saídas, averiguamos a existência da propriedade de Wada [35], onde qualquer ponto que está sobre a fronteira de uma bacia de escape estará também simultaneamente sobre a fronteira das outras bacias. Para quantificarmos as bacias de Wada aplicamos o método da grade para verificarmos o quanto a propriedade está satisfeita no sistema [36].

A presente tese de doutoramento está organizada em duas partes de forma a apresentar os principais resultados obtidos a partir de dois modelos hamiltonianos com aplicações em física de plasmas. A primeira parte, está dedicada ao modelo hamiltoniano de ondas de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$ [25], para o estudo do transporte radial de partículas para a borda do plasma. Na segunda parte, mostraremos o escape das linhas de campo magnético causado por um limitador magnético caótico utilizando o mapa proposto por Martin e Taylor [27].

No capítulo 2, revisamos algumas características básicas do plasma e como é feito o seu confinamento em tokamak e as configurações do mesmo.

No capítulo 3, é introduzido a hamiltoniana do modelo das ondas de deriva, e a partir

dessa hamiltoniana, são descritas as trajetórias do centro de guia das partículas. Nesse mesmo capítulo, apresentamos as equações do movimento para uma onda e duas ondas de deriva.

No capítulo 4, mostramos as simulações computacionais que foram realizadas para o modelo de ondas de deriva, proposto por W. Horton. Na primeira seção, 4.1, mostramos as propriedades do modelo de ondas de deriva. Na seção 4.2, analisamos a dinâmica das trajetórias do centro guia das partículas para uma e duas ondas de deriva através de mapas de Poincaré [26]. Na seção 4.3, investigamos o transporte radial das partículas na borda do plasma usando bacias de escape para duas saídas variando o tamanho destas. Para entendermos as fronteiras fractais das bacias de escape, foram feitas as variedades instáveis e estáveis e a sua sela caótica, na seção 4.4. Na seção 4.5, calculamos a dimensão fractal da fronteira da bacia de escape com duas saídas e também a entropia da bacia e entropia da fronteira da bacia. Para o caso da bacia de escape com três saídas, na seção 4.6, verificamos qualitativa e quantitativamente a propriedade de Wada.

No capítulo 5, apresentamos de maneira sucinta, a atuação dos anéis limitadores magnéticos caóticos em tokamaks. Na seção 5.1, mostramos a obtenção do mapa de Martin e Taylor, segundo considerações sobre a configuração dos campos em tokamaks com limitadores magnéticos caóticos.

No capítulo 6, em sua primeira seção, 6.1, mostramos para alguns valores do parâmetro de perturbação os retratos de fase do mapa. Com relação ao escape das linhas do campo magnético, são mostrados na seção 6.2, as bacias de escape com duas saídas e os mapas de comprimento de conexão. Na seção 6.3, apresentamos as variedades invariantes e a sela caótica e relacionaremos com o mapa do comprimento de conexão. Na seção 6.4, apresentamos os resultados da dimensão da fronteira fractal da bacia de escape e a entropia da bacia juntamente com a entropia da fronteira da bacia. Na seção 6.5, são mostrados os resultados para a bacia de escape com três saídas e averiguamos o quanto a propriedade de Wada está satisfeita na bacia.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho e perspectivas futuras para esta pesquisa.

No Apêndice A, encontram-se o trabalho publicado [37], e os aceitos para publicação [38, 39], cujos resultados foram obtidos durante o período de doutorado e utilizados para a elaboração desta tese.

Capítulo 2

O plasma e seu confinamento

Plasma é definido como o quarto estado da matéria devido ao seu alto grau de ionização [40], e é composto por íons positivos, elétrons e partículas neutras. O plasma é formado à elevadas temperaturas ($\sim 10^8 K$), e pode ser encontrado em diferentes formas, por exemplo: nos plasmas espaciais, como no interior e nas vizinhanças de estrelas, no vento solar e em nebulosas interestelares; nos plasmas terrestres, como a chama, descargas atmosféricas e auroras; e nos plasmas artificiais, sendo encontrados em lâmpadas fluorescentes, televisores com tela de plasma e na exaustão de foguetes [1].

Uma das diferenças do plasma para um gás ionizado é sua quase neutralidade, de modo que as densidades das partículas de elétrons (n_e) e íons (n_i) são quase iguais ($n_e \approx n_i$). Essa característica se refere ao fato de que, embora a carga total num plasma seja praticamente nula, existem regiões onde se pode ter acúmulos significativos de cargas não neutras. Ou seja, existe uma certa densidade de partículas carregadas, em que a distância entre elas é estimada pela esfera de Debye, cujo raio é definido como comprimento de Debye, λ_D . Para valores acima do raio de Debye e menor que o comprimento físico do plasma L , encontra-se um sistema neutro. E, no caso de um gás ionizado teria-se cargas de sinais opostos em proporções diferentes. Esta densidade de partículas é calculada através da relação entre o comprimento linear L , onde o plasma está confinado, e o comprimento de Debye λ_D , de modo que $L \gg \lambda_D$.

O comprimento de Debye é dado por [1]:

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

onde n , e , T_e , k_B , ϵ_0 , são respectivamente, a densidade de partículas, a carga eletrônica, a temperatura do gás de elétrons, a constante de Boltzmann e a permissividade elétrica no vácuo.

Outra característica do plasma é o seu comportamento coletivo: o número de partículas N_D que interagem coletivamente no interior de uma esfera de raio igual ao comprimento de Debye, deve ser grande o suficiente para uma eficiente blindagem dos campos elétricos, ou seja, $N_D = \frac{4\pi}{3}n\lambda_D^3 \gg 1$. Para o caso de $L \gg \lambda_D$, um campo perturbativo que surge no interior do plasma deve se anular. A frequência de colisões entre as partículas carregadas e as cargas neutras do gás (ω_c) deve ser menor que a frequência natural de oscilação das partículas do plasma (ω_p), ou seja, $\omega_c \ll \omega_p \equiv (\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e})^{1/2}$, onde m_e é a massa do elétron [1].

Para a obtenção de energia através do plasma é necessário que os íons sofram colisões energéticas a ponto de ocorrer fusão nuclear. Um equipamento que suporte este tipo de energia é o Tokamak [3]. O primeiro tokamak foi construído na Rússia na década de 50, o seu nome significa câmara de confinamento toroidal; é uma máquina desenvolvida com formato de toróide, na qual se estabelecem campos magnéticos toroidais para o confinamento do plasma [41]. O tokamak foi criado com o objetivo de suportar uma reação de fusão nuclear para a obtenção de energia elétrica através do calor gerado no processo, e desde então estudos são feitos para o aperfeiçoamento desse tipo de máquina.

A figura 2.1, representa os principais componentes de um tokamak. O confinamento do plasma em um tokamak é obtido através da combinação dos campos poloidal e toroidal. O campo magnético toroidal é produzido por correntes elétricas que passam por bobinas situadas ao redor da câmara de vácuo, e o campo magnético poloidal é gerado pela corrente elétrica que flui através do plasma. Essa corrente que flui no plasma, serve para aquecer o plasma e foi induzida por uma corrente elétrica transitória que circula na bobina primária do tokamak. Dessa forma, o anel de plasma constitui o circuito secundário de um grande transformador ôhmico. Além do mais, existem outras bobinas que são posicionadas paralelamente acima e abaixo da câmara toroidal que geram campos magnéticos auxiliares para o controle e o formato da coluna de plasma.

Porém, para que o tokamak possa ser usado como um reator de fusão nuclear, existem vários problemas a serem resolvidos. Um deles, em relação ao confinamento do plasma, é a perda de partículas causado pelo transporte radial de partículas na borda do plasma [13]. O

transporte de partículas através das linhas de campo magnético é ocasionado principalmente pelo aparecimento de ondas de deriva, que são flutuações eletrostáticas provenientes da não uniformidade do plasma ao ser confinado magneticamente em uma câmara toroidal. Dessa forma, as partículas colidem com as paredes do tokamak, diminuindo a densidade do plasma e contaminando sua composição, dificultando assim, a realização da fusão nuclear controlada.

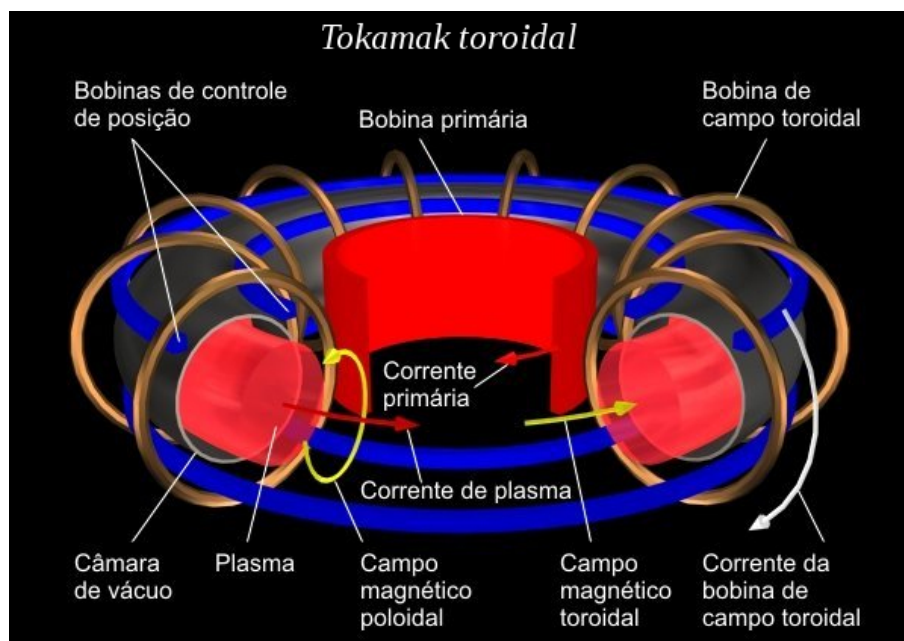


Figura 2.1: Principais componentes de um tokamak.

Como o transporte radial de partículas está ligado ao confinamento em tokamaks e não pode ser eliminado, busca-se então meios de como tratá-lo para diminuir as instabilidades das ondas de deriva, decorrentes do gradiente de densidade na borda do plasma [42]. Apesar dos diversos trabalhos feitos que descrevem o transporte, ainda não foi elaborada uma teoria completa que explicasse os resultados obtidos. Mas, através de simulações e análises numéricas é possível prever instabilidades que prejudicam o confinamento. Deste modo, novos sistemas dinâmicos são elaborados para tentar explicar satisfatoriamente os resultados encontrados experimentalmente [43].

Para a descrição do transporte radial de partículas pela borda do plasma, seria adequado tratar o movimento do plasma no interior do tokamak pelo sistema de coordenadas toroidais. Entretanto, para facilitar a análise, costuma-se simplificar a geometria do sistema. Dessa maneira, então utiliza-se, a aproximação do toróide para o cilindro, com a condição de que $r_0 \ll R$,

onde R é o raio do toróide que contém o plasma e r_0 é o raio do plasma. Com um corte na área seccionada do toróide, pode-se observar que a direção radial r , indicada pelos pontos da , passa a ser a variável x , enquanto que a direção poloidal θ , indicada pelos pontos dc , passa a ser a variável y , conforme observa-se na figura 2.2. Mas, a aproximação cilíndrica para as coordenadas retangulares é válida apenas se as distâncias ad e bc são muito pequenas se comparadas aos comprimentos ab e dc .

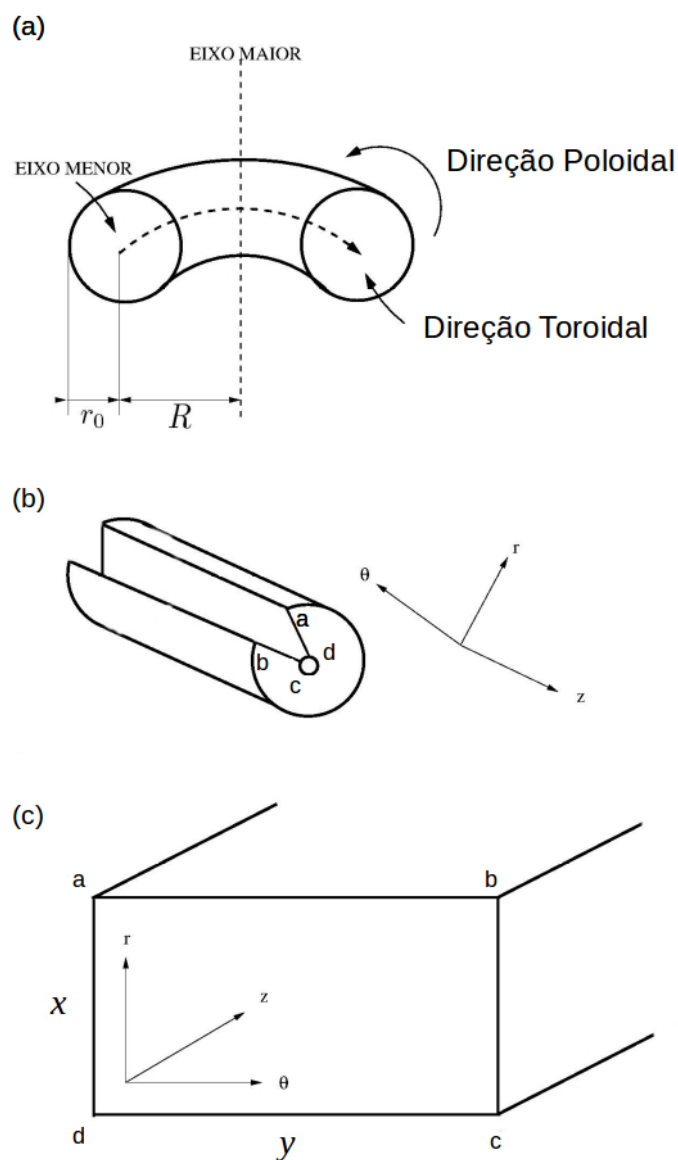


Figura 2.2: Aproximações de coordenadas: (a) geometria toroidal, (b) e (c) aproximação cilíndrica para a retangular. Figura adaptada de [16].

Capítulo 3

Ondas de deriva

Nesse capítulo, apresentamos a configuração dos campos elétrico e magnético de equilíbrio e as equações de movimento das partículas do plasma que levam à velocidade de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$. Posteriormente, apresentamos o modelo físico para ondas de deriva que descreve o transporte radial de partículas do plasma confinado magneticamente em tokamaks. A partir da descrição hamiltoniana do modelo, encontramos as equações de movimento que foram utilizadas para a integração numérica.

3.1 Equação de movimento das partículas do plasma

Este trabalho foi baseado na formulação de órbitas de partículas. Assim sendo, os fenômenos do plasma foram analisados de acordo com seu efeito sobre cada partícula de forma independente, desprezando as interações entre as partículas e considerando somente as interações destas com campos externos.

Dessa maneira, para uma partícula carregada sujeita a um campo eletromagnético, a equação de movimento é determinada a partir da força de Lorentz [1]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.1)$$

onde m é a massa, q a carga, \vec{v} a velocidade, \vec{E} o campo elétrico e \vec{B} o campo magnético.

Para um campo elétrico nulo $\vec{E} = \vec{0}$ e sobre ação de um campo magnético uniforme \vec{B} , é obtido como resultado o movimento circular uniforme das partículas em torno das linhas

de campo magnético, figura 3.1. Consequentemente, as partículas movem-se com frequência ciclotrônica ou de Larmor, $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$, e com raio de Larmor, $r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$, onde q e m são a carga elétrica e a massa da partícula, B é o campo magnético e v_{\perp} é a velocidade transversal ao campo magnético e tangencial ao movimento circular. O ponto central do movimento é definido como centro de guia da partícula, cuja trajetória se move a uma velocidade paralela ao campo magnético, de acordo com a equação (3.2):

$$v_{//} \equiv \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B}. \quad (3.2)$$

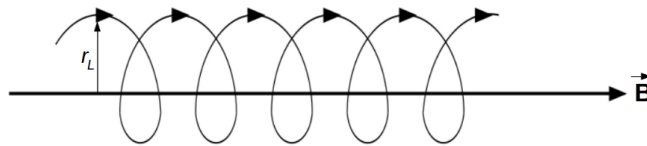


Figura 3.1: Movimento da partícula ao longo da linha de campo magnético.

Na presença de um campo elétrico perpendicular ao campo magnético, a velocidade do centro de guia da partícula é dada por (ver figura 3.2):

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (3.3)$$

onde \vec{v}_E é a velocidade de deriva do centro de guia da partícula devido aos campos elétrico e magnético ($\vec{E} \neq \vec{0}$ e $\vec{B} \neq \vec{0}$). É importante observar que a equação (3.3) não depende da carga da partícula, tanto elétrons quanto íons têm a mesma velocidade de deriva elétrica e giram no mesmo sentido ao redor do seu centro de guia.

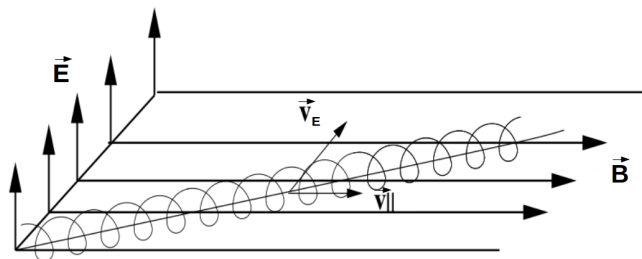


Figura 3.2: Movimento de deriva elétrica no centro de guia da partícula.

Em tokamaks, os campos elétrico e magnético não são uniformes, assim existem outras derivas que agem nas partículas, sendo elas: a deriva causada pela não uniformidade de \vec{B} e

pela sua curvatura [1]. Através dos resultados obtidos experimentalmente [44], o transporte radial das partículas na borda do plasma deve-se principalmente a deriva elétrica \vec{v}_E , dada pela equação (3.3). Deste modo, como é este o objetivo deste trabalho, iremos considerar apenas a deriva elétrica para o desenvolvimento do modelo.

3.2 Descrição hamiltoniana do modelo para ondas de deriva

Utilizamos o modelo hamiltoniano proposto por W. Horton [9], para a descrição do transporte radial de partículas causado pelas ondas de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$. Para isto, consideramos um campo magnético uniforme na direção toroidal, $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$, e um campo elétrico perpendicular ao campo magnético na direção radial, sendo $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(x, y, t)$. Assim, podemos reescrever a velocidade de deriva elétrica (\vec{v}_E), da equação (3.3), como:

$$\vec{v}_E = -\frac{1}{B_0} \vec{\nabla}\phi(x, y, t) \times \hat{e}_z. \quad (3.4)$$

Desta forma, as velocidades na direção x e y são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, t) \quad \text{e} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, t). \quad (3.5)$$

Sabendo que as equações de Hamilton são dadas por [45]:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} H(x, y, t) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, t). \quad (3.6)$$

Podemos então, comparar as equações (3.5) e (3.6), e identificarmos a hamiltoniana do sistema como sendo:

$$H(x, y, t) = \frac{\phi(x, y, t)}{B_0}. \quad (3.7)$$

Assim, a hamiltoniana tem um grau e meio de liberdade (depende do tempo) e um par de coordenadas generalizadas (x, y) .

O potencial eletrostático que utilizamos é formado pela superposição de infinitas ondas

de deriva:

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{xi}x) \cos(k_{yi}y - \omega_i t), \quad (3.8)$$

sendo ϕ_0 o potencial do plasma em equilíbrio e o segundo termo a direita do sinal de igualdade $\phi_i(x, y - \omega t)$ representa uma superposição do potencial de N ondas eletrostáticas se propagando na direção poloidal y e com modulação radial x . Na equação (3.8), A_i é a amplitude de cada onda, e os termos k_{xi} , k_{yi} e ω_i são os números de onda na direção x e y e a frequência angular em y da i -ésima onda, respectivamente.

Dessa maneira, supondo um potencial de equilíbrio linear $\phi_0(x) = ax$, onde a é o campo elétrico constante na direção radial, escrevemos a hamiltoniana para N ondas de deriva como:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{B_0} \left[ax + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{xi}x) \cos(k_{yi}y - \omega_i t) \right]. \quad (3.9)$$

Para estudarmos a dinâmica do sistema podemos considerar a hamiltoniana da equação acima adimensional, definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{r_0}, y' = \frac{y}{r_0}, a' = \frac{a}{E_0}, t' = \frac{t}{t_0}, \\ \omega' &= \omega_i t_0, u' = \frac{u}{v_0}, A'_i = \frac{A_i}{E_0 r_0}, k'_i = \frac{\omega'}{u'} = k_i r_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, substituindo as novas variáveis na equação (3.9), obtemos:

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \frac{a' E_0 x' r_0}{B_0} + \frac{1}{B_0} \left[\sum_{i=1}^N A'_i E_0 r_0 \sin\left(\frac{k'_{xi}}{r_0} x' r_0\right) \cos\left(\frac{k'_{yi}}{r_0} y' r_0 - \frac{\omega'_i}{t_0} t' t_0\right) \right], \\ H(x, y, t) &= \frac{E_0 r_0}{B_0} \left[a' x' + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(k'_{xi} x') \cos(k'_{yi} y' - \omega'_i t') \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Podemos definir a hamiltoniana em termos das novas variáveis da seguinte maneira:

$$H(x, y, t) = \frac{E_0 r_0}{B_0} H'(x', y', t'), \quad (3.12)$$

onde:

$$H'(x', y', t') = a' x' + \sum_{i=1}^N A_i \text{sen}(k'_{xi} x') \cos(k'_{yi} y' - \omega'_i t'), \quad (3.13)$$

é a hamiltoniana adimensional para N ondas de deriva.

Considerando o campo elétrico $a' = E_0$ na equação (3.13), podemos reescrever a hamiltoniana sem as linhas nas variáveis para não sobrecarregarmos a notação, e assim obtemos:

$$H(x, y, t) = E_0 x + \sum_{i=1}^N A_i \text{sen}(k_{xi} x) \cos(k_{yi} y - \omega_i t). \quad (3.14)$$

3.2.1 Hamiltoniana para uma onda de deriva

De acordo, com a equação (3.14), a hamiltoniana para uma onda de deriva ($N = 1$) pode ser escrita da seguinte forma:

$$H(x, y, t) = E_0 x + A_1 \text{sen}(k_{x1} x) \cos(k_{y1} y - \omega t). \quad (3.15)$$

Apesar dessa hamiltoniana ter um grau e meio de liberdade, ou seja, depender explicitamente do tempo e do par de coordenadas generalizadas (x, y) , podemos fazer uma transformação canônica mudando o referencial do laboratório para o referencial da onda, assim podemos transformá-la em uma hamiltoniana integrável. Para isso ser possível, definimos duas novas variáveis:

$$y' = y - u_1 t = \frac{\partial F(x', y, t)}{\partial x'} \quad \text{e} \quad x = x' = \frac{\partial F(x', y, t)}{\partial y}, \quad (3.16)$$

onde u_1 é a velocidade de fase da onda e $F(x', y, t)$ é a função geratriz, definidos como:

$$u_1 = \frac{\omega_1}{k_{y1}} \quad \text{e} \quad F(x', y, t) = x'(y - u_1 t). \quad (3.17)$$

Dessa forma, a nova hamiltoniana escrita em termos das novas variáveis x' e y' é:

$$H'(x', y') = H(x', y') + \frac{\partial F}{\partial t} = (E_0 - u_1) x' + A_1 \text{sen}(k_{x1} x') \cos(k_{y1} y'). \quad (3.18)$$

Para não sobrecarregarmos a notação, escrevemos a hamiltoniana sem as linhas nas variáveis x e y , de modo a obtermos:

$$H(x, y) = (E_0 - u_1)x + A_1 \text{sen}(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y). \quad (3.19)$$

Por fim, a hamiltoniana resultante para $N = 1$, da equação (3.19), não tem dependência explícita com o tempo no referencial de movimento. Assim, essa hamiltoniana é uma constante de movimento, o sistema é integrável e as trajetórias do centro de guia das partículas, no referencial da onda, são regulares. As equações do movimento para este caso, são obtidas a partir das equações (3.6) e (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1 k_{y1} \text{sen}(k_{x1}x) \text{sen}(k_{y1}y), \\ \frac{dy}{dt} &= (E_0 - u_1) + A_1 k_{x1} \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, dividindo $\frac{dx}{dt}$ por $A_1 k_{y1}$ e $\frac{dy}{dt}$ por $A_1 k_{x1}$, na equação (3.20), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \frac{1}{A_1 k_{y1}} &= \text{sen}(k_{x1}x) \text{sen}(k_{y1}y), \\ \frac{dy}{dt} \frac{1}{A_1 k_{x1}} &= U(x) + \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y), \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde $U(x) = \frac{(E_0 - u_1)}{A_1 k_{x1}}$ é o parâmetro de confinamento do plasma, que depende do campo elétrico radial de equilíbrio e da velocidade de fase da primeira onda. Este parâmetro caracteriza a forma com que as linhas de fluxo são apresentadas nos espaços de fase.

No capítulo seguinte, apresentamos as trajetórias do centro de guia das partículas para a hamiltoniana com uma onda de deriva ($N = 1$).

3.2.2 Hamiltoniana para duas ondas de deriva

Considerando nesta seção, o caso para duas ondas de deriva ($N = 2$), podemos escrever a hamiltoniana da equação (3.14) como:

$$H(x, y, t) = E_0 x + A_1 \text{sen}(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y - \omega_1 t) + A_2 \text{sen}(k_{x2}x) \cos(k_{y2}y - \omega_2 t). \quad (3.22)$$

Novamente, fazendo uma mudança do referencial do laboratório para o referencial da primeira onda e repetindo o processo analítico realizado na seção anterior, obtemos:

$$y' = y - u_1 t = y - \frac{\omega_1}{k_{y1}} t. \quad (3.23)$$

Portanto, a hamiltoniana para $N = 2$, da equação (3.22), sem as linhas nas variáveis x e y é dada por:

$$H(x, y, t) = (E_0 - u_1)x + A_1 \text{sen}(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + A_2 \text{sen}(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut)), \quad (3.24)$$

onde $u = \left| \frac{\omega_2}{k_{y2}} - \frac{\omega_1}{k_{y1}} \right|$ é a diferença de velocidade de fase entre as duas ondas.

Após fazermos a transformação canônica, a hamiltoniana ainda depende explicitamente do tempo (diferente do caso anterior para $N = 1$). Portanto, a equação (3.24) não é integrável, já que a hamiltoniana não é uma constante de movimento. Neste caso, se a diferença de velocidade de fase das ondas u for diferente de zero, as trajetórias apresentam comportamento caótico. As equações do movimento do centro de guia das partículas, podem ser encontradas, a partir das equações (3.6) e (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1 k_{y1} \text{sen}(k_{x1}x) \text{sen}(k_{y1}y) + A_2 k_{y2} \text{sen}(k_{x2}x) \text{sen}(k_{y2}(y - ut)), \\ \frac{dy}{dt} &= (E_0 - u_1) + A_1 k_{x1} \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + A_2 k_{x2} \cos(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dividindo na equação (3.25), $\frac{dx}{dt}$ por $A_1 k_{y1}$ e $\frac{dy}{dt}$ por $A_1 k_{x1}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \frac{1}{A_1 k_{y1}} &= \text{sen}(k_{x1}x) \text{sen}(k_{y1}y) + \frac{A_2 k_{y2}}{A_1 k_{y1}} \text{sen}(k_{x2}x) \text{sen}(k_{y2}(y - ut)), \\ \frac{dy}{dt} \frac{1}{A_1 k_{x1}} &= U(x) + \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + \frac{A_2 k_{x2}}{A_1 k_{x1}} \cos(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $U(x)$ é o parâmetro de confinamento do plasma definido anteriormente.

No capítulo seguinte, apresentamos as trajetórias do centro de guia das partículas para a hamiltoniana com duas ondas de deriva ($N = 2$).

Capítulo 4

Resultados para o modelo de duas ondas de deriva

Nesse capítulo, mostramos os resultados obtidos através de métodos computacionais para o modelo de ondas de deriva que utilizamos para estudar o transporte radial de partículas do plasma confinado em tokamaks. Para caracterizarmos o transporte de partículas, empregamos no modelo, o parâmetro de confinamento igual a zero ($U = 0$) para uma e duas ondas de deriva. O comportamento dinâmico dos sistemas de equações diferenciais são estudados com o uso de algumas ferramentas conhecidas na literatura, dentre elas, analisamos as trajetórias apresentadas em mapas de Poincaré, investigamos o transporte de partículas na borda do plasma através de bacias de escape para duas e três saídas, e verificamos como estão dispostas as variedades instáveis e estáveis e a sela caótica nos espaços de fase. Além disso, calculamos a dimensão da fronteira fractal para a bacia de escape com duas saídas. Para verificarmos o quão misturadas estão as bacias, calculamos a entropia da bacia e a entropia da fronteira da bacia. Para a bacia de escape com três saídas, analisamos qualitativamente a propriedade de Wada e averiguamos quantitativamente o quanto a propriedade de Wada está satisfeita no sistema.

4.1 Parâmetro de confinamento

Para analisarmos o comportamento dinâmico dos sistemas de equações diferenciais (3.20) e (3.25), obtidas no capítulo anterior, utilizamos o parâmetro de confinamento $U = 0$.

Nesse caso, de acordo com a referência [46], o transporte caótico obtido é máximo. Para outros casos, em que o campo elétrico não é uniforme [47], podemos encontrar barreiras de transporte que suprimem o transporte.

Um aspecto importante para a escolha de $U = 0$, é obtida da condição de ressonância, usando a teoria da perturbação [26]. Para a hamiltoniana com apenas uma onda de deriva temos:

$$H = H_0 + H_1 \quad \text{e} \quad \frac{|H_1|}{|H_0|} \ll 1, \quad (4.1)$$

onde $H_0 = E_0 x$ e $H_1 = A \sin(k_{x1} x) \cos(k_{y1} y - \omega_1 t)$.

Assim, utilizando a teoria da perturbação, a condição de ressonância é dada por:

$$\frac{d}{dt}(k_{y1} y - \omega_1 t) \approx 0, \quad (4.2)$$

então, a velocidade de fase da onda u_1 é:

$$\begin{aligned} k_{y1} \dot{y} - \omega_1 &= 0, \\ \dot{y} &= \frac{\omega_1}{k_{y1}} = u_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da equação (3.20), sabemos que, $\dot{y} = \frac{dH_0}{dx} = E_0$, a condição de ressonância, então ocorre para:

$$E_0 - u_1 = 0, \quad (4.4)$$

o que corresponde quando temos $U = 0$. Dessa maneira, a ressonância ocorre quando a velocidade de deriva elétrica na direção poloidal é aproximadamente igual a velocidade de fase da onda.

Para determinarmos os pontos fixos na condição de ressonância ($U = 0$), fazemos uma mudança de variáveis e as derivadas iguais a zero da equação (3.21) para uma onda de deriva:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \sin(X) \sin(Y) = 0, \\ \frac{dY}{dT} &= \cos(X) \cos(Y) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo $T = \omega_0 t$, onde $\omega_0 = A_1 k_{x1} k_{y1}$, $X = k_{x1} x$ e $Y = k_{y1} y$.

Então, os pontos fixos da equação (4.5) são:

$$P_h = (X_h, Y_h) = \left(m\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right),$$

$$P_e = (X_e, Y_e) = \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, m\pi \right),$$

onde os índices h e e se referem aos pontos fixos hiperbólicos e elípticos, respectivamente, e $m, n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

4.2 Espaços de fase

Apresentamos, nesta seção, as configurações das linhas de fluxo, perturbadas pelas ondas de deriva, utilizando o perfil do potencial elétrico de equilíbrio linear $\phi_0(x) = E_0 x$. Desta forma, escolhendo valores dos parâmetros da primeira e segunda onda de deriva encontramos as trajetórias do centro de guia das partículas.

Para a integração numérica das equações do movimento da partícula (3.20) e (3.25) utilizamos o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo e aplicamos os seguintes valores para os parâmetros do sistema [37]:

$$\omega_1 = 0, 2; \quad \omega_2 = 1, 2; \quad k_{x1} = k_{y1} = k_{x2} = k_{y2} = 1, 0; \quad u = 1, 0; \quad A_1 = 1, 0 \quad \text{e} \quad U = 0.$$

Para analisarmos o comportamento dinâmico das trajetórias do centro de guia das partículas, construímos mapas a partir de seções de Poincaré através dos valores de x e y tomados em tempos múltiplos de período $T = 2\pi$. Assim, o conjunto de pontos que intercepta a seção de Poincaré com tempo múltiplo deste período formam o mapa de Poincaré.

A figura 4.1 mostra a intersecção de trajetórias com uma seção de Poincaré Ω . Aqui (x_n, y_n) é uma trajetória inicial que cruza a seção de Poincaré Ω , e (x_{n+1}, y_{n+1}) é a evolução desta trajetória que intercepta a seção Ω definindo pontos discretos após um período T . A dinâmica desenvolvida pelo conjunto de pontos (x_{n+1}, y_{n+1}) é quase-periódica, e é representada na seção de Poincaré por uma curva ou toro invariante, enquanto a dinâmica caótica é definida por pontos densamente distribuídos. Uma órbita periódica é formada pelo conjunto de pontos

periódicos em (x_{n+1}, y_{n+1}) [26].

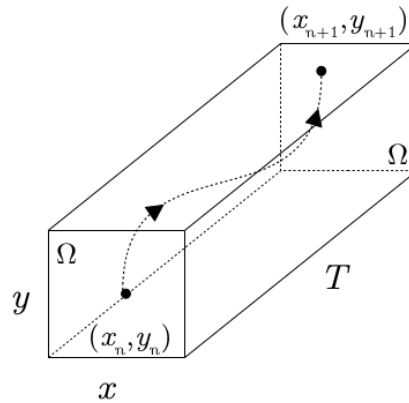


Figura 4.1: Esboço de uma seção de Poincaré Ω .

Primeiramente, considerando o caso de uma onda de deriva ($A_2 = 0$), integramos numericamente a equação (3.20) e obtemos o espaço de fase do mapa de Poincaré da figura 4.2.

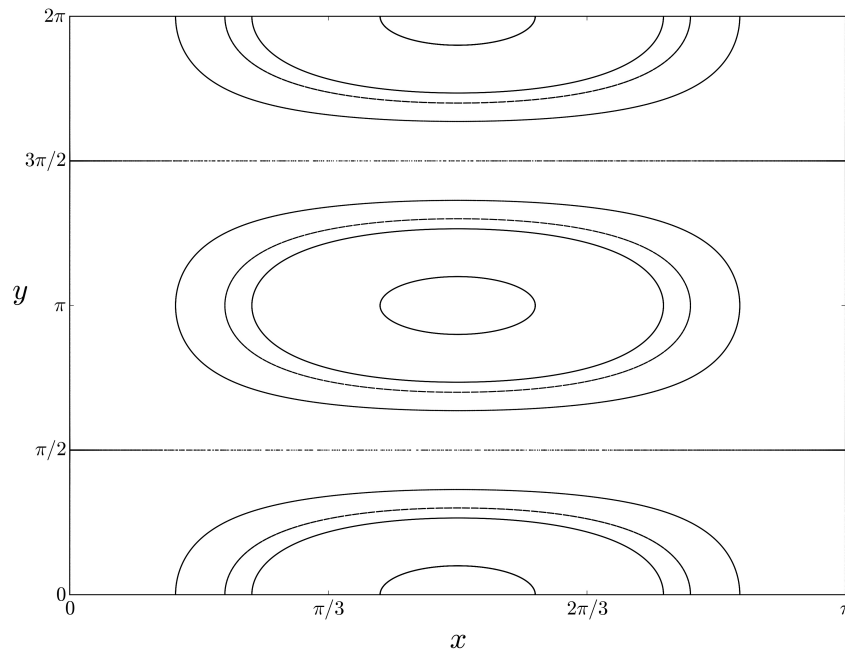


Figura 4.2: Espaço de fase do mapa de Poincaré para $U = 0$ e $A_2 = 0$.

Podemos observar na figura 4.2, que o espaço de fase do mapa de Poincaré apresenta apenas órbitas regulares. As trajetórias do centro de guia das partículas estão confinadas em curvas invariantes, chamadas de ilhas, e que giram em torno dos pontos elípticos, centrados em $(x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 0, \pi, 2\pi)$. As trajetórias ficam dentro de uma célula e separadas por separatrizes que se cruzam nos pontos hiperbólicos, localizados em $(x = 0, \pi$ e $y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Como não há

trajetórias entre as células, as partículas ficam confinadas em suas células de origem e no caso não há transporte de partículas no espaço de fase. As curvas que formam as separatrizes são as variedades estáveis e instáveis dos pontos hiperbólicos [48].

Quando adicionamos uma segunda onda de deriva a integrabilidade do sistema é quebrada, equação (3.25). Na figura 4.3 (a), é possível verificarmos a destruição das separatrizes, e portanto, o alargamento das órbitas caóticas. Algumas ilhas internas se deslocaram, indicando que os centros de guia das partículas sofreram desvios em suas trajetórias, mas permaneceram em trajetórias periódicas ou quase-periódicas. Podemos observar também, a existência de ilhas secundárias em torno das ilhas principais. Assim, é possível inferirmos que apenas as trajetórias próximas as separatrizes são caóticas e que passam a conectar diferentes células. Deste modo, o transporte radial de partículas ocorre quando adicionamos a segunda onda ao sistema.

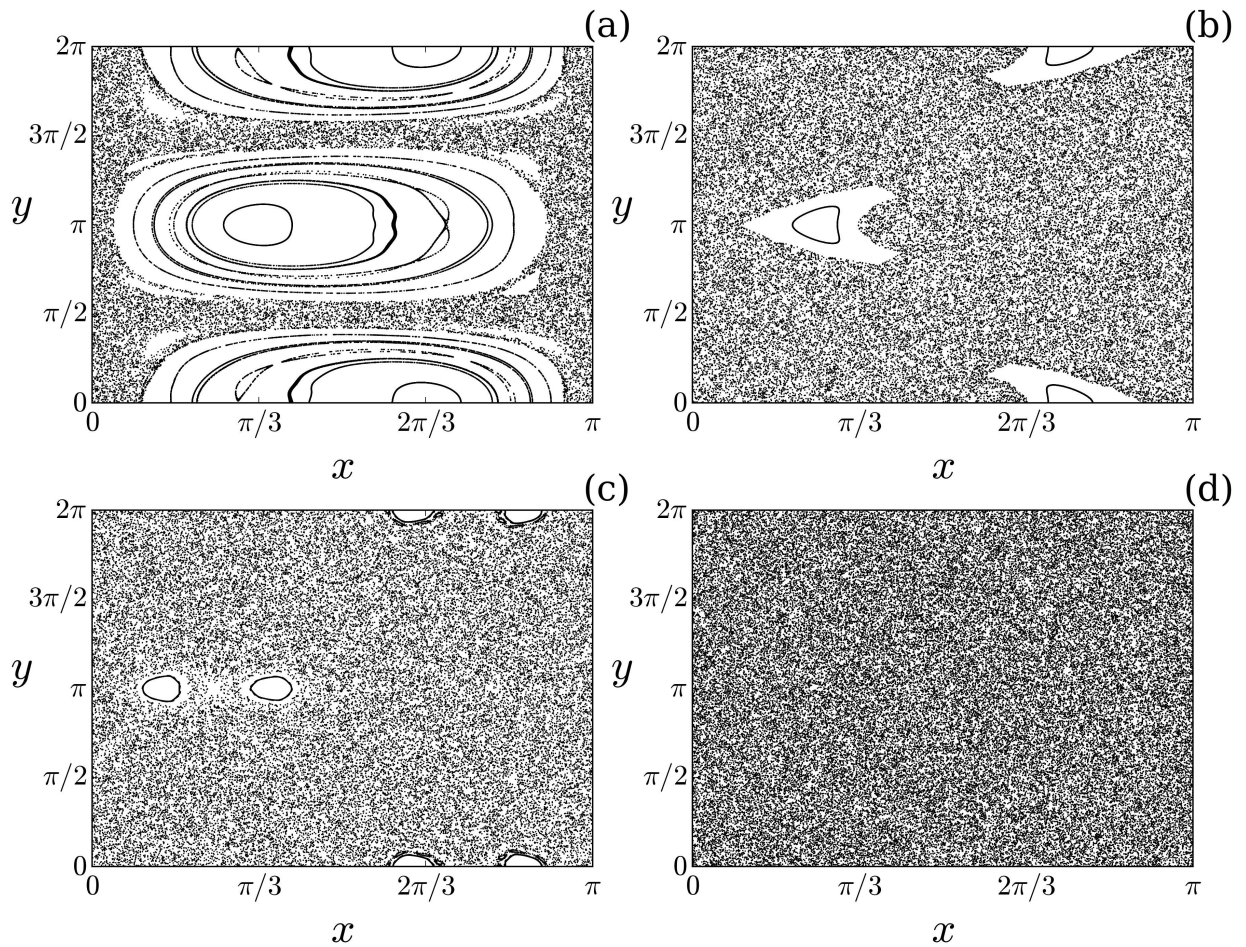


Figura 4.3: Espaço de fase do mapa de Poincaré para $U = 0$ e diferentes valores da amplitude da segunda onda de deriva. (a) $A_2 = 0, 1$, (b) $A_2 = 0, 5$, (c) $A_2 = 1, 5$ e (d) $A_2 = 2, 0$.

Na figura 4.3 (b) e (c), notamos que a área ocupada pelas trajetórias caóticas aumentou drasticamente, e conseqüentemente, a área ocupada pelas ilhas diminuiu, significando que as partículas que antes estavam confinadas nessas ilhas, em movimentos periódicos, agora estão livres para percorrer todo o espaço de fase. Como as separatrizes das ilhas foram destruídas, o escape das trajetórias das partículas é maior, como iremos verificar na seção seguinte.

Para o valor de amplitude $A_2 = 2,0$, na figura 4.3 (d), as ilhas, aparentemente, foram destruídas e a região caótica passou a dominar o espaço de fase. Deste modo, a partícula está livre para transitar no espaço de fase.

4.3 Bacias de escape para duas saídas

Em sistemas hamiltonianos abertos existem condições iniciais gerando órbitas que, eventualmente, deixam o sistema [30, 49]. Definimos regiões de saída de trajetórias de partículas no interior da câmara do tokamak, com o objetivo de simular obstáculos materiais. Outra saída para as órbitas de partículas, considerando a borda do plasma, é a parede do tokamak.

Bacia de escape é uma região do espaço de fase, definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam, ou deixam, uma determinada região do espaço de fase, sem ter antes atingido outra saída [30]. Neste trabalho, primeiramente, consideramos como saídas na borda do plasma, a parede do tokamak em $x = 0$ e um quadrado dentro do espaço de fase localizado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0,05$.

A figura 4.4, mostra a bacia de escape com saídas, na parede em $x = 0$, representada por pontos em vermelho, e em um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0,05$, representado por pontos em verde. As condições iniciais que não escaparam através dessas regiões após o tempo máximo de integrações (3×10^3) estão em branco. Podemos observar nessa figura, que a bacia de escape apresenta uma estrutura envolvida para todos os valores do parâmetro A_2 . Conforme aumentamos a amplitude da segunda onda, as fronteiras entre as bacias se mesclam de maneira intrincada e se distribuem de uma forma extremamente complicada, apresentando uma geometria possivelmente fractal. Esta fronteira torna-se mais complexa conforme aumentamos a amplitude de A_2 .

O espaço preenchido pela bacia vermelha é menor, quando comparada com o da bacia verde. De fato, a dependência $\sin(x)$ na componente x , da velocidade da partícula, da equação

(3.25), tende a zero quando $x \rightarrow 0$, ou seja, é mais provável que a partícula escape através da janela (bacia em verde) do que pela parede em $x = 0$ (bacia vermelha).

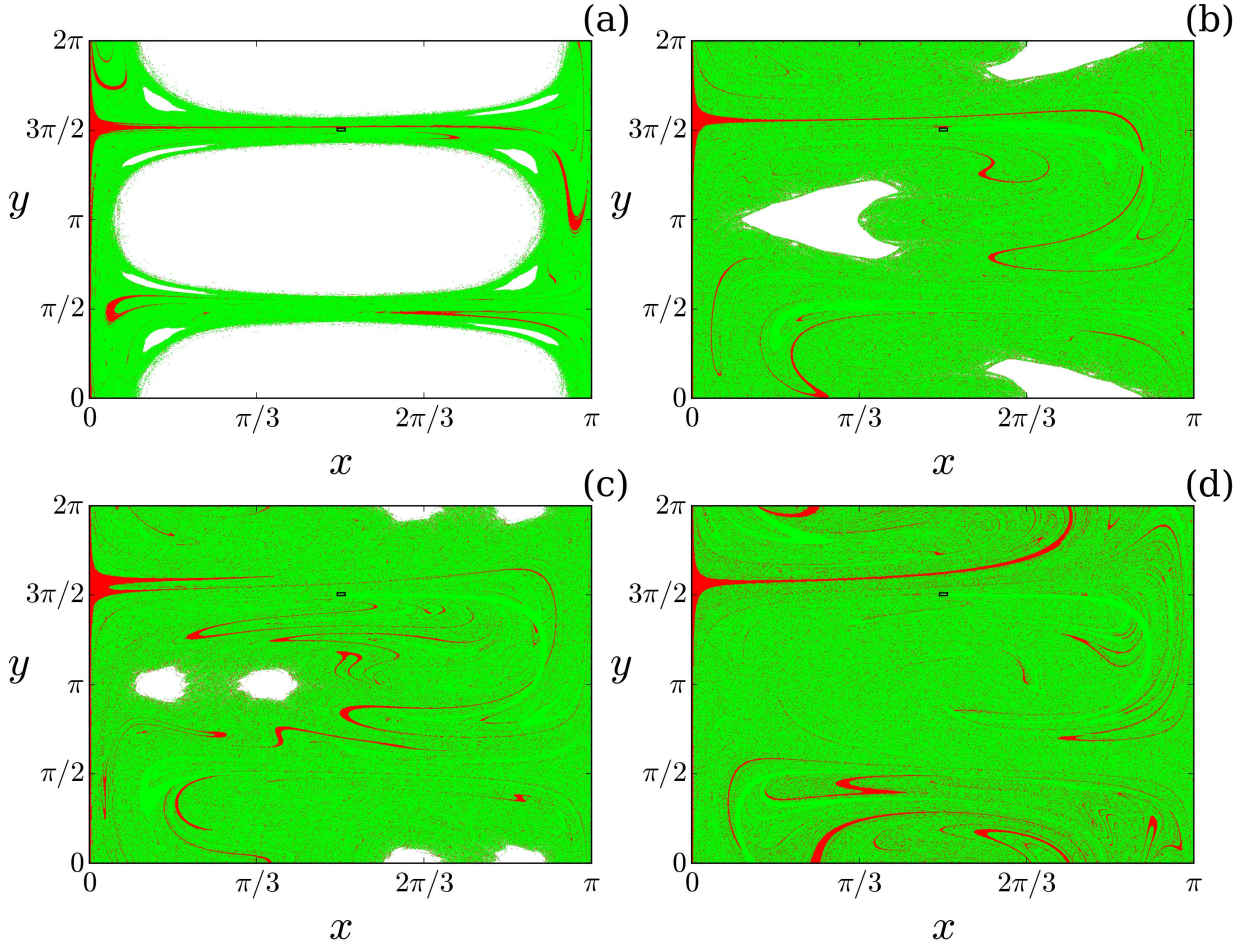


Figura 4.4: Bacias de escape com saídas, na parede em $x = 0$ (pontos em vermelho) e em um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0,05$ (pontos em verde), para diferentes amplitudes da segunda onda de deriva. (a) $A_2 = 0,1$, (b) $A_2 = 0,5$, (c) $A_2 = 1,5$ e (d) $A_2 = 2,0$. Órbitas na região em branco não escapam.

Outro fator que influencia no tamanho relativo das bacias de escape para duas saídas é a largura da janela dentro da região caótica [50]. Na figura 4.5, a largura da janela foi aumentada para $l = 0,15$, mantendo o seu centro em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$, e a saída na parede $x = 0$.

Com o aumento da largura da janela, verificamos visualmente um aumento na área da bacia verde, com relação a área ocupada pela bacia vermelha. Afim de averiguarmos o aumento da área da bacia vermelha, computamos a fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) no espaço de fase, ou seja, computamos a fração (\mathcal{A}) das condições iniciais que alcançaram primeiro a parede. Nossos resultados são apresentados na figura 4.6 em termos dos valores de

A_2 para os dois tamanhos da janela, (a) $l = 0,05$ e (b) $l = 0,15$.

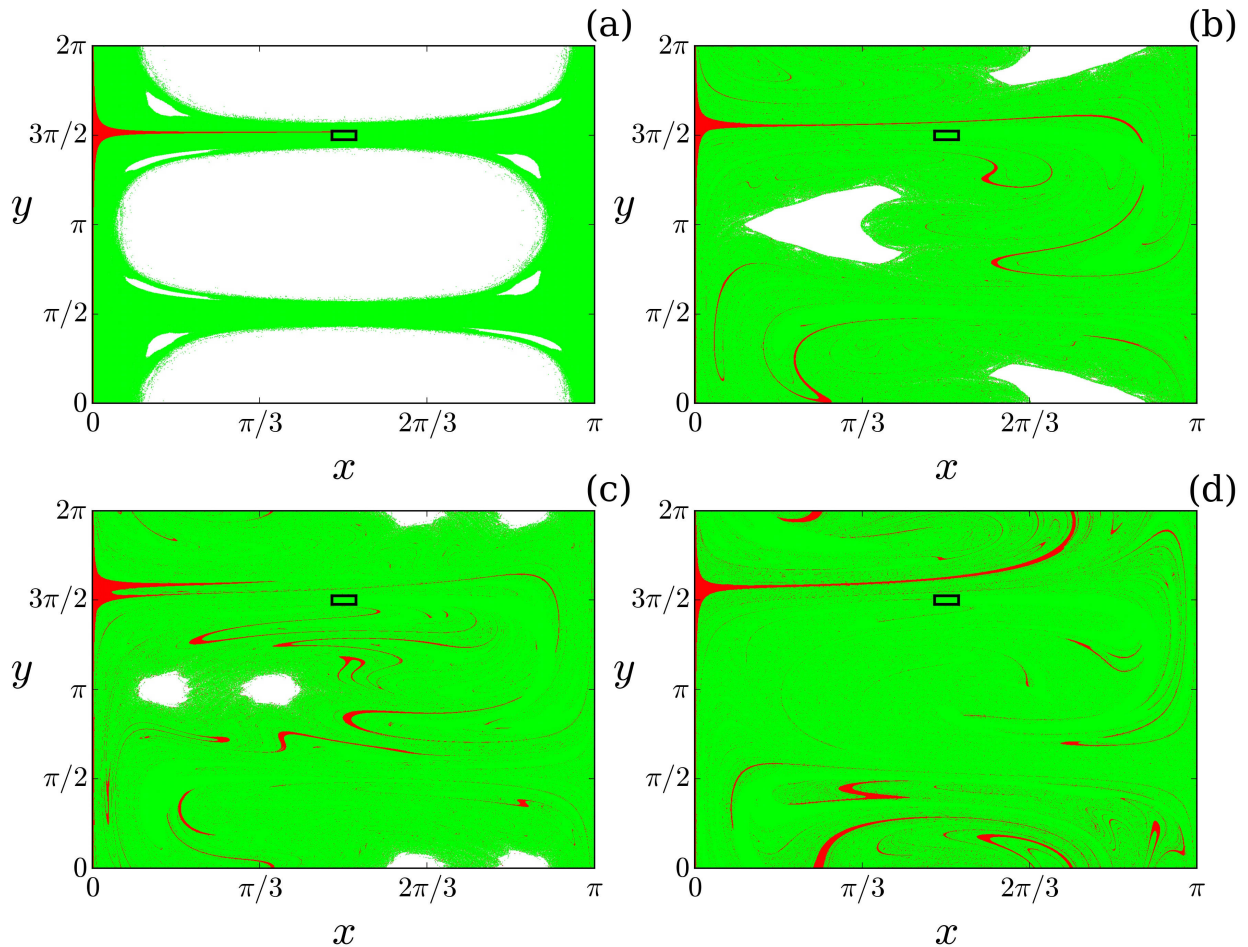


Figura 4.5: Bacias de escape com saídas, na parede em $x = 0$ (pontos em vermelho) e em um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ com largura $l = 0,15$ (pontos em verde), para diferentes amplitudes da segunda onda de deriva. (a) $A_2 = 0,1$, (b) $A_2 = 0,5$, (c) $A_2 = 1,5$ e (d) $A_2 = 2,0$. Órbitas na região em branco não escapam.

A figura 4.6 (a), nos indica um aumento da área da bacia vermelha com a intensidade da segunda onda. De fato, o aumento da amplitude de A_2 causou um alargamento da região caótica, na figura 4.3. Por outro lado, a área da bacia vermelha diminuiu com o aumento da largura da janela para os mesmos valores de A_2 , como podemos ver na figura 4.6 (b). Ou seja, mais condições iniciais escaparam pela janela (bacia verde) do que pela parede (bacia vermelha).

Comparando as figuras 4.4 e 4.5, observamos que a maioria das condições iniciais localizadas na região caótica do espaço de fase pertencem a bacia verde, ou seja, elas escapam pela janela posicionada dentro do espaço de fase. Consequentemente, muitas partículas pertencendo

a bacia vermelha, especialmente as que estão perto da parede do tokamak, gastam relativamente um tempo maior na região caótica. O aumento da área da bacia vermelha com A_2 , implica que a intensidade da segunda onda de deriva aumenta também o transporte de partículas energéticas através da parede do tokamak.

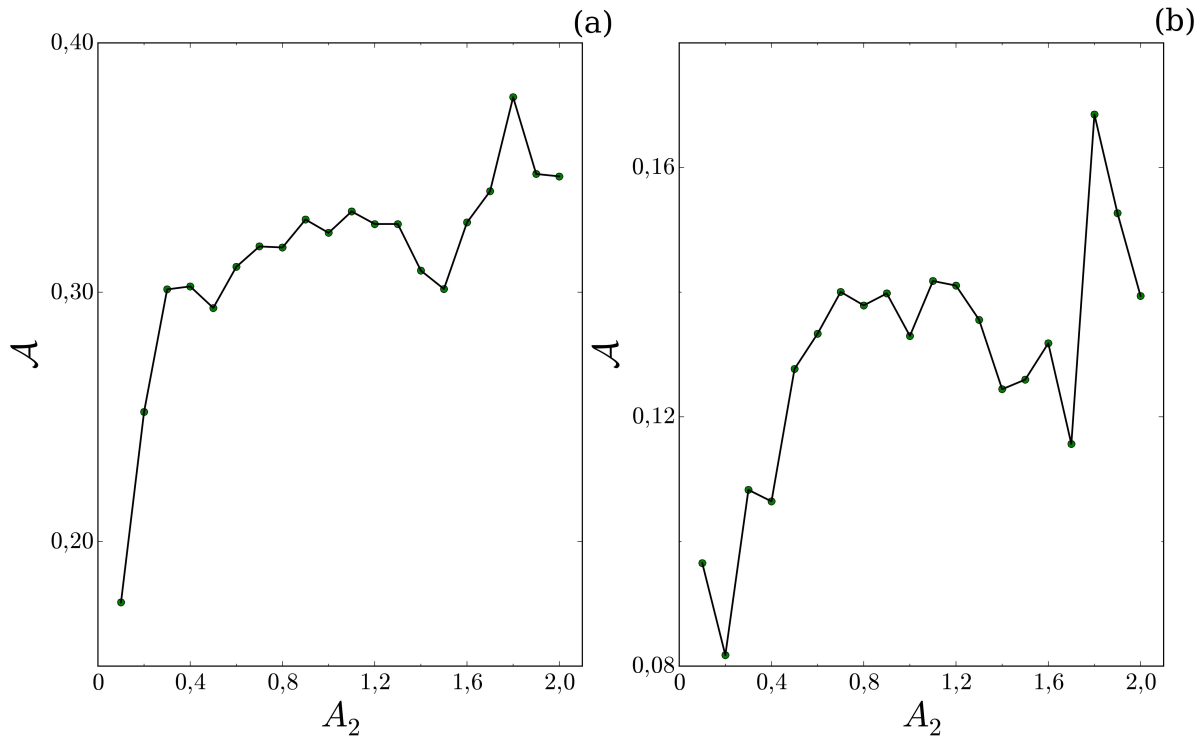


Figura 4.6: Fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) em relação a amplitude da segunda onda de deriva (A_2) para diferentes valores de largura do quadrado. (a) $l = 0,05$ e (b) $l = 0,15$.

A estrutura das bacias de escape, presentes nas figuras 4.4 e 4.5, pode ser entendida a partir das variedades invariantes e da sela caótica.

4.4 Variedades invariantes e sela caótica

O traçado das variedades invariantes que emergem de pontos hiperbólicos imersos no mar caótico ajudam a entender um pouco mais as estruturas das órbitas caóticas presentes nas figuras 4.4 e 4.5. As variedades são responsáveis pelo aparecimento de fronteiras que separam comportamentos dinamicamente distintos no espaço de fase [48].

Considerando mapas de Poincaré de período $T = 2\pi$, obtido da integração numérica da equação da trajetória da partícula (3.25), podemos encontrar as variedades invariantes. Supondo

duas trajetórias no espaço de fase separadas a uma certa distância inicial, após um determinado tempo e uma perturbação as trajetórias separam-se e escapam por diferentes saídas. Entre estas trajetórias existe outra, com condições iniciais que para $t \rightarrow \infty$ permanece presa ao sistema por longo período de tempo. Esta condição inicial e outras com essa característica formam a variedade instável. A variedade estável é obtida por pontos pertencentes às órbitas presas em $t \rightarrow -\infty$. As variedades instável e estável são tangenciais às direções instável e estável no ponto fixo hiperbólico, respectivamente. Para encontrarmos as aproximações dessas variedades, integramos para frente ($t \rightarrow \infty$) um círculo de condições iniciais com raio ε próximos ao ponto hiperbólico, resultando em condições que tendem a deixar o círculo de condições iniciais e seguir a variedade instável (V^i), e integramos para trás ($t \rightarrow -\infty$) para obtermos a variedade estável (V^e). Esse método apesar de não ser exato, fornece uma aproximação do conjunto invariante. A figura 4.7, representa o esquema de um ponto fixo hiperbólico x_0 e suas variedades instável (V^i) e estável (V^e).

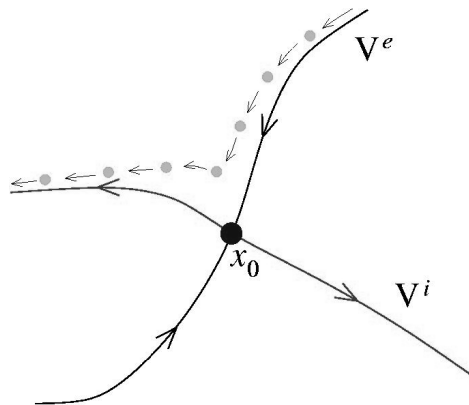


Figura 4.7: Esquema de ponto fixo hiperbólico x_0 e suas variedades instável (V^i) e estável (V^e). A linha tracejada representa uma trajetória próxima ao ponto hiperbólico x_0 .

As variedades estável e instável cruzam-se transversalmente um número infinito de vezes nos pontos hiperbólicos, dando origem a um número infinito, mas enumerável, de pontos de sela, que estão imersos na sela caótica. O conjunto não-atrativo formado por estes pontos é caótico, denominado sela caótica [51].

A figura 4.8, mostra as variedades estável (curva azul) e instável (curva vermelha) da sela caótica obtidas através do ponto fixo instável, centrado em $x = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$, para diferentes amplitudes da segunda onda A_2 . Para um valor pequeno de amplitude, $A_2 = 0,1$, houve a quebra das separatrizes, e no lugar delas, existe uma cadeia de estruturas finas entre as ilhas,

formando uma teia que se espalha pelo espaço de fase. Ao aumentarmos a amplitude da segunda onda para $A_2 = 1,5$, a área ocupada pelas ilhas diminuiu, e em consequência, a área ocupada pelas variedades aumentou, assim como a complexidade das estruturas. As ramificações presentes nas variedades agem como canais de escape, através dos quais, as trajetórias são direcionadas a escapar pela parede ou pela janela.

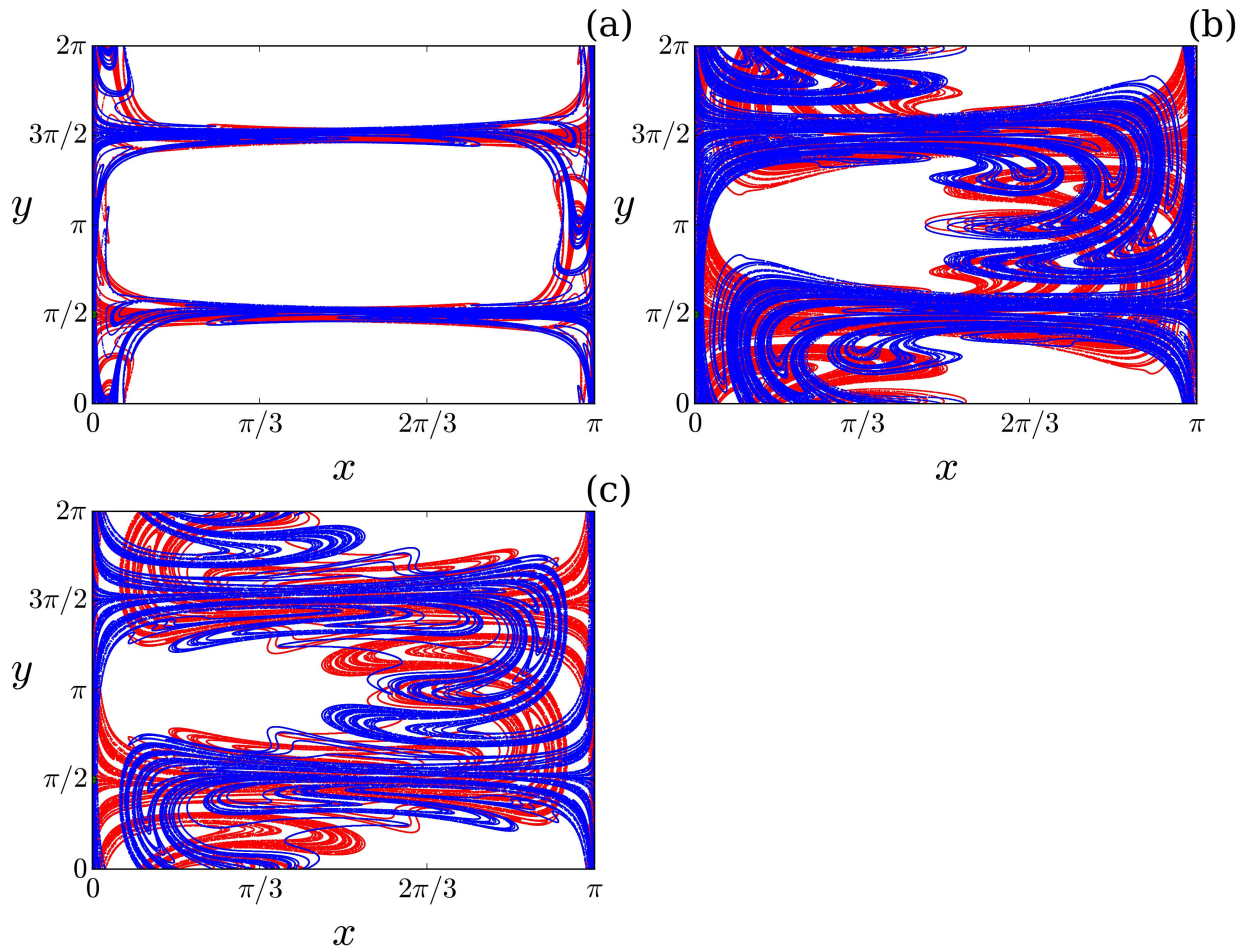


Figura 4.8: Variedades estáveis (curva azul) e instáveis (curva vermelha) de um ponto fixo instável embutido na região caótica ($x = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$) para diferentes amplitudes da segunda onda. (a) $A_2 = 0, 1$, (b) $A_2 = 0, 5$ e (c) $A_2 = 1, 5$.

Para a amplitude $A_2 = 2,0$, a perturbação é mais intensa. É possível notarmos na figura 4.9, que as variedades instável (a) e estável (b) ocupam praticamente todo o espaço de fase e os canais de escape são mais largos. Como consequência, as variedades induzem um alto transporte das trajetórias das partículas a escaparem pelas saídas. A figura 4.9 (c) mostra uma aproximação numérica da sela caótica resultante da intersecção das variedades instável (a)

e estável (b). As condições iniciais pertencentes a esta sela permanecem na região caótica, a menos que partes da sela interceptem as regiões de saída. A existência da sela caótica em (c), é uma confirmação da natureza fractal das fronteiras da bacia de escape [29].

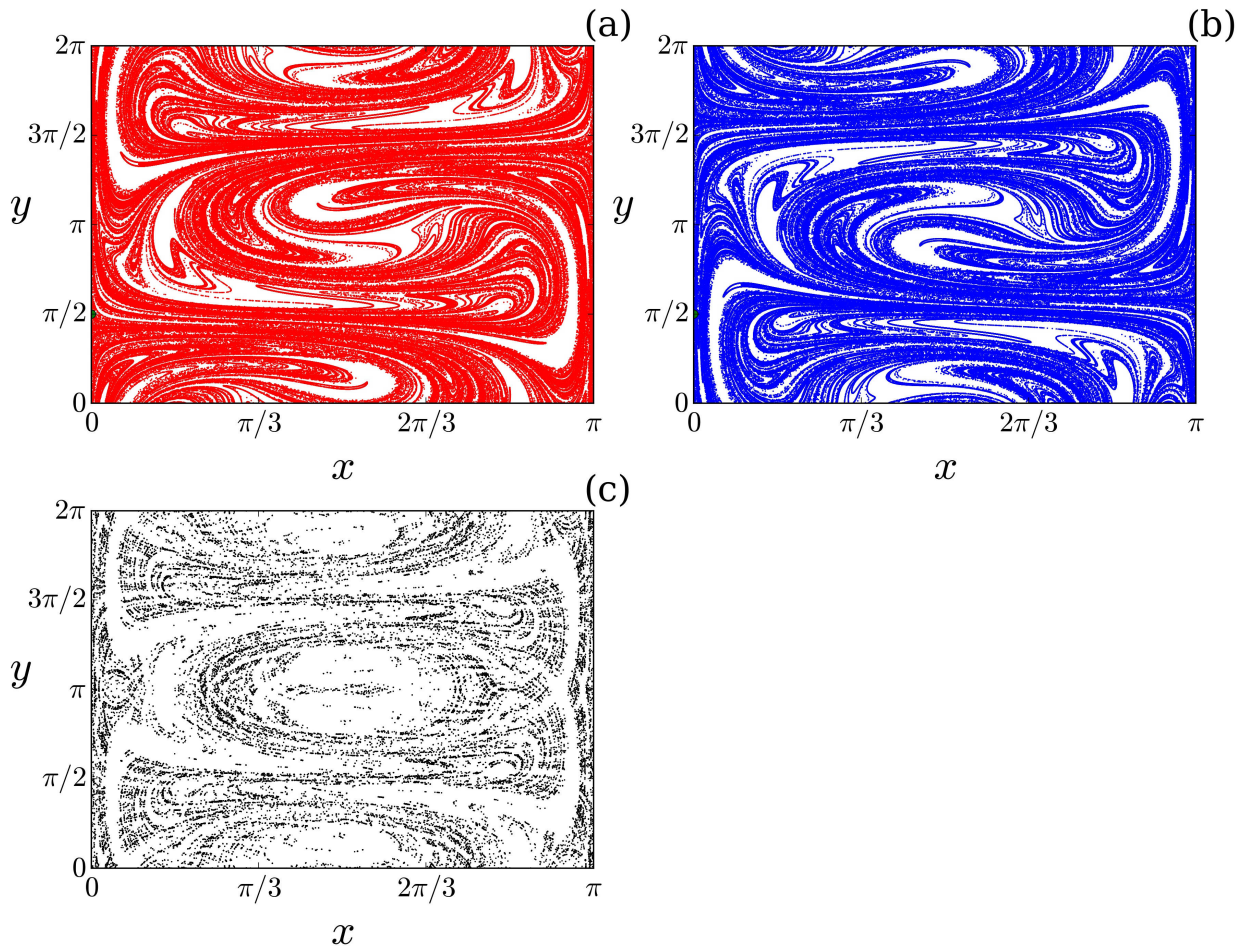


Figura 4.9: Variedades instável (a) e estável (b) de um ponto fixo instável embutido na região caótica ($x = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$) para a amplitude $A_2 = 2, 0$. Em (c) a correspondente sela caótica.

Sabendo que, os pontos da bacia são mapeados na saída, tal bacia é também mapeada pelas integrações a $t \rightarrow -\infty$ sobreposto aos pontos da saída. Então, temos que a variedade estável aplicada sobre a borda desta saída dá origem a fronteira das bacias. Deste modo, as bordas de saída suaves, arbitrariamente inseridas no espaço de fase, constroem a fronteira da bacia. Assim, apenas os pontos da fronteira que tendem assintoticamente à borda da saída seriam de fato fractais, sendo que os demais pontos, aqueles que são mapeados sobre a borda com um número finito de integrações, seriam aparentemente fractais. Essa fronteira entre as possíveis bacias de escape possui dimensão fractal. A figura 4.10, mostra em parte, a variedade

estável da sela caótica, traçando a fronteira das bacias de escape da figura 4.4 (d).

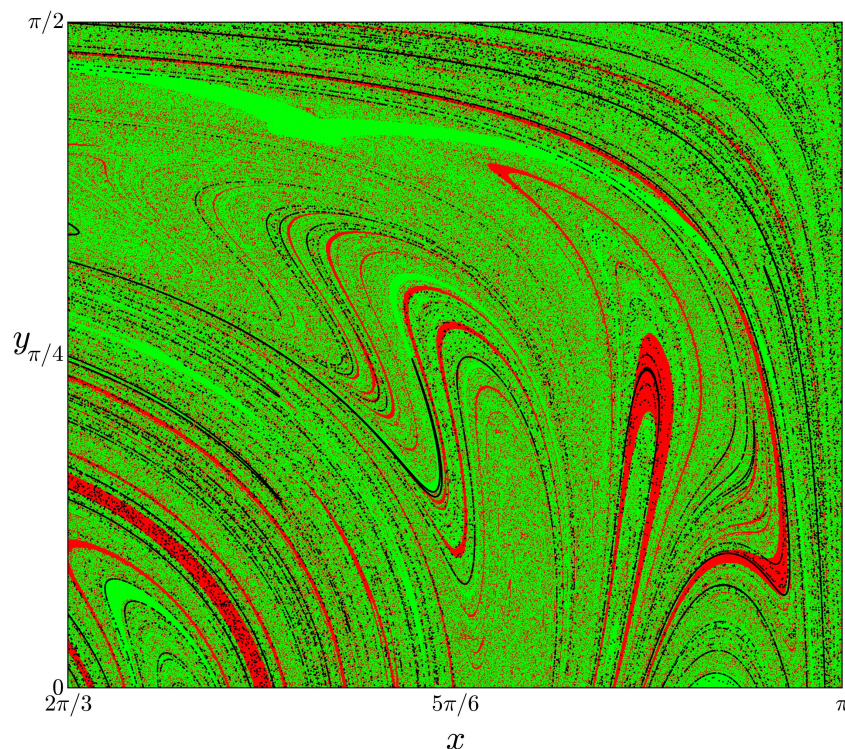


Figura 4.10: Aproximação finita da variedade estável da sela caótica (em preto) sobreposta às bacias de escape para duas saídas com $A_2 = 2, 0$ da figura 4.4 (d).

4.5 Fronteiras fractais das bacias de escape

A estrutura complicada presente nas bacias de escape é qualitativamente explicada pela natureza emaranhada das variedades invariantes formada pela infraestrutura da órbita caótica, matematicamente representada pela sela caótica. Uma forma de quantificarmos a complexidade das fronteiras da bacia de escape, é medindo-se a dimensão fractal das fronteiras. Para determinarmos a dimensão fractal das fronteiras das bacias de escape, utilizamos o método da incerteza [33].

Consideramos uma região do espaço de fase, tal que, existam duas bacias de escape, que denotaremos por bacia A e bacia B. A fronteira entre as bacias é representada por Σ . Tomemos duas condições iniciais aleatórias nesta região, 1 e 2, ambas com uma incerteza denotada por ε , mostrado na figura 4.11. A condição 1 irá escapar por B e a condição 2 poderá escapar pelas duas bacias, devido à incerteza. Para cada uma das condições iniciais, consideramos

outras duas condições aleatórias, separadas por um raio fixo ε da condição inicial. Essas três trajetórias são calculadas e verificamos, ao final, qual é a saída de cada uma delas. Se uma das duas órbitas (escolhidas no raio ε) tiver estado final diferente da condição inicial, a condição inicial é considerada incerta para a incerteza ε . A partir disso, contamos, entre as diversas condições iniciais, o número de incertas, de onde é obtido $\tilde{f}(\varepsilon)$, a fração de condições incertas para o raio de incerteza ε . Este procedimento é, então, repetido para diferentes valores de ε , e para calcularmos o erro de $\tilde{f}(\varepsilon)$ repetimos o procedimento 10 vezes.

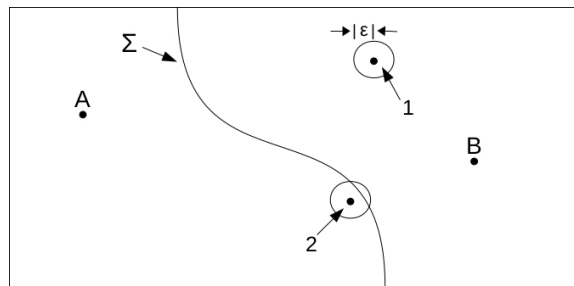


Figura 4.11: Região do espaço de fase limitado pela fronteira de bacia Σ que divide as bacias A e B. Os pontos 1 e 2 representam condições iniciais com uma incerteza ε .

Para fronteiras fractais das bacias de escape, a fração de condições iniciais incertas escala com:

$$\tilde{f}(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha, \quad (4.6)$$

onde ε é a incerteza e α é o expoente de incerteza, que se relaciona com a dimensão fractal da fronteira entre duas bacias d , por [33]:

$$\alpha = D - d, \quad (4.7)$$

onde D é a dimensão do espaço de fase.

A dimensão da fronteira entre as bacias d pode ser definida como dimensão de capacidade ou dimensão de contagem de caixas [33]:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}, \quad (4.8)$$

onde $N(\delta)$ é o número mínimo de cubos idênticos de tamanhos δ com dimensões D necessário para cobrir toda a fronteira da bacia Σ .

A equação (4.8), expressa a escala de $N(\delta)$ com o tamanho do cubo quando δ é diminuído, assim uma lei de potência que satisfaça a equação (4.8) é dada por:

$$N(\delta) \sim \delta^{-d}. \quad (4.9)$$

Considerando o tamanho do cubo δ igual o raio de incerteza ε , o volume da região incerta do espaço de fase é da ordem do volume total $N(\varepsilon)$ de todos os cubos com tamanho ε que cobrem a fronteira. Uma vez que o volume de um desses cubos que cobrem a fronteira é ε^D , o volume desta incerteza é $\varepsilon^D N(\varepsilon)$. De acordo com a equação (4.9), podemos estimar o volume do espaço de fase incerto como sendo $\varepsilon^D N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D-d}$. Assim, a fração de condições iniciais incertas de uma região do espaço de fase de dimensão D associada com o raio de incerteza ε é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \tilde{f}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \alpha, \quad (4.10)$$

apenas se a fronteira da bacia tem dimensão de capacidade $d = D - \alpha$. Então uma lei de potência que satisfaça a equação (4.10) é dada pela equação (4.6). Para bacias com fronteiras suaves o expoente de incerteza é $\alpha = 1$, e para $\alpha < 1$, caracteriza uma fronteira de bacia fractal. Quanto mais próximo α chegar a zero, mais difícil será prever o estado final do sistema [33].

Assim, aplicamos o método da incerteza para calcularmos a dimensão fractal das fronteiras de bacias de escape para diferentes amplitudes da segunda onda A_2 .

Na figura 4.12, mostramos o gráfico *log-log* de $\tilde{f}(\varepsilon) \times \varepsilon$, fração incerta como uma função do raio de incerteza, para a fronteira da bacia de escape dada pela figura 4.4, com largura da janela $l = 0,05$. Para a amplitude baixa, $A_2 = 0,1$, obtemos a dimensão: $d \approx 1,9233 \pm 0,0010$, cujo o expoente de incerteza é $\alpha = 0,0767 \pm 0,0010$, figura 4.12 (a). Quando aumentamos a amplitude para $A_2 = 2,0$, a estrutura da bacia é levemente mais complexa, tendo dimensão $d \approx 1,9712 \pm 0,0004$, e expoente de incerteza $\alpha = 0,0287 \pm 0,0004$, figura 4.12 (b). Os expoentes de incerteza foram obtidos ajustando a curva $\tilde{f}(\varepsilon) \times \varepsilon$.

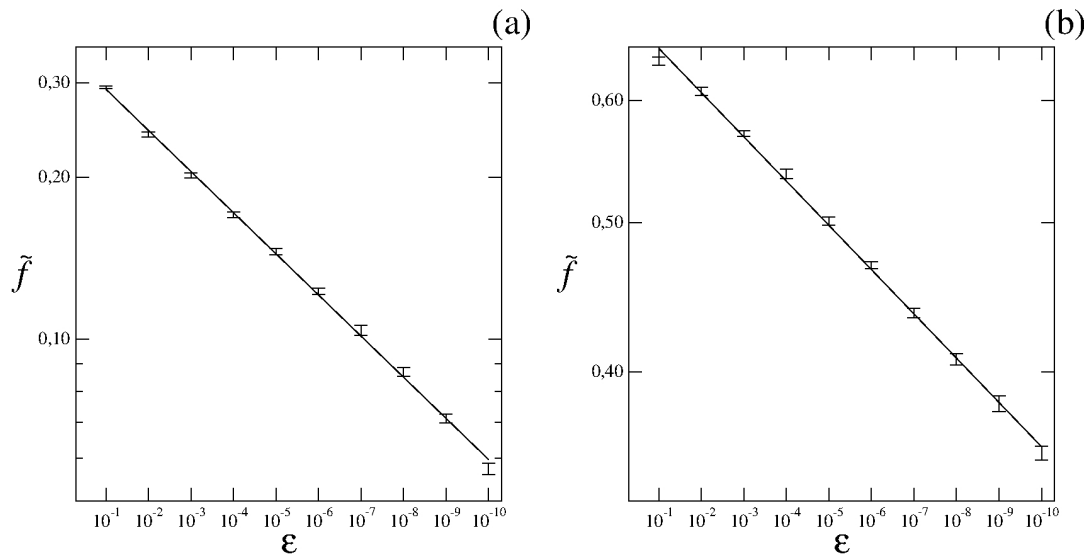


Figura 4.12: Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ϵ , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de A_2 , considerando a saída da janela com largura $l = 0,05$. (a) $A_2 = 0, 1$ e (b) $A_2 = 2, 0$.

Considerando a fronteira da bacia de escape da figura 4.5, com largura da janela $l = 0,15$, obtemos o gráfico *log-log* de $\tilde{f}(\epsilon) \times \epsilon$, fração incerta como uma função do raio de incerteza, na figura 4.13.

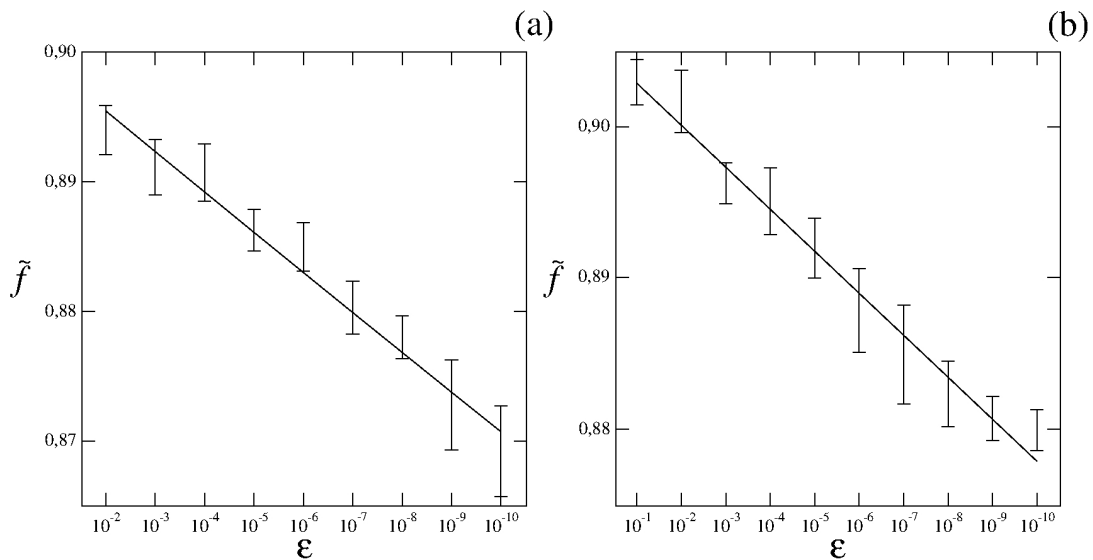


Figura 4.13: Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ϵ , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de A_2 , considerando a saída da janela com largura $l = 0,15$. (a) $A_2 = 0, 1$ e (b) $A_2 = 2, 0$.

Para o tamanho da saída da janela, $l = 0,15$, as dimensões das fronteiras, pratica-

mente, são iguais para os valores de $A_2 = 0,1$ e $A_2 = 2,0$, figura 4.13 (a) e (b), respectivamente. No caso (a), a dimensão é $d \approx 1,99847 \pm 0,00009$, e o expoente de incerteza é $\alpha = 0,00152 \pm 0,00009$. Para o caso (b), obtemos dimensão $d \approx 1,99864 \pm 0,00007$, cujo expoente de incerteza é $\alpha = 0,00136 \pm 0,00007$.

Comparando os resultados obtidos para os diferentes tamanhos das saídas e amplitudes de A_2 , a dimensão da fronteira fractal não é apreciavelmente afetada.

Para quantificarmos o grau de incerteza devido a fractalidade da fronteira da bacia de escape, aplicamos o cálculo para entropia da bacia, introduzida por Daza e coautores [34].

A técnica consiste em fazer uma grade de caixas de tamanho ε em uma dada região do espaço de fase Ω , caracterizada pela presença de N_A saídas. Cada ponto da grade corresponde a uma condição inicial que irá escapar por uma diferente saída (bacia), de modo que iremos atribuir cores de 1 a N_A às saídas. E por fim, a entropia da bacia é obtida da aplicação da entropia informacional para este conjunto de caixas.

Associamos a probabilidade $p_{i,j}$ de cada cor j dentro de uma caixa i como $p_{i,j}$, onde $i = 1, 2, \dots, N$, sendo N o número total de caixas. Supondo que as trajetórias dentro de cada caixa são estatisticamente independentes, computamos a entropia informacional da i -ésima caixa S_i como [34]:

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \log_2 \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right), \quad (4.11)$$

onde $m_i \in [1, N_A]$ é o número de cores dentro da i -ésima caixa.

A entropia total da grade de caixas S cobrindo a região Ω é obtida pelo somatório da entropia associada a cada um das N caixas da grade, ou seja:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \log_2 \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right). \quad (4.12)$$

Dessa maneira, a entropia da bacia S_b está relacionada com a entropia total relativa ao número total de caixas N :

$$S_b = \frac{S}{N}. \quad (4.13)$$

Essa quantidade (S_b) está associada ao grau de incerteza da bacia. Para uma única saída de escape a entropia da bacia é zero, significando que não existe incerteza para este caso. Porém, se tivermos N_A saídas de escape, a entropia da bacia atinge um valor máximo de $S_b = \log_2 N_A$, de modo que caracteriza uma estrutura da bacia de escape completamente randomizada com N_A saídas (bacias) equiprováveis.

Podemos adaptar este cálculo da entropia da bacia para obtermos a incerteza relacionada a fronteira da bacia de escape S_{bb} , em vez da incerteza de toda a estrutura da bacia de escape. Isto é possível, restringindo o cálculo da entropia da bacia apenas para o número de caixas que contêm mais de uma cor N_b . Neste caso, obtemos a entropia da fronteira da bacia [34]:

$$S_{bb} = \frac{S}{N_b}. \quad (4.14)$$

Portanto, considerando um número suficiente de caixas nas fronteiras da bacia, a fronteira será fractal se a entropia da fronteira da bacia for maior do que:

$$S_{bb} > \log_2 2. \quad (4.15)$$

Esta é uma condição suficiente mas não necessária para fractalidade, ou seja, pode haver fronteiras fractais com $S_{bb} < 1,0$. Para o critério $S_{bb} > 1,0$ ser válido, o sistema deve possuir mais que duas bacias [52]. Em sistemas onde existem mais que duas bacias, porém tendo uma bacia que ocupa boa parte do espaço de fase, o critério da equação (4.15) também não é cumprido [34].

Para o cálculo da entropia, no nosso trabalho consideramos duas bacias para as análises e excluimos da estatística as condições iniciais que não escaparam durante o tempo de integração. Para cada caixa cobrindo uma certa região Ω obtemos as quantidades:

$$p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \quad (4.16)$$

onde n_1 é o número de pontos da caixa correspondendo a saída 1 e n_2 é o número de pontos da

caixa correspondendo a saída 2. Assim, a entropia para cada caixa é:

$$S = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2). \quad (4.17)$$

A entropia da bacia S_b é obtida somando os valores da entropia S da equação (4.17) com relação a todas as caixas com condições iniciais que escaparam (p_1 e p_2) e dividindo o resultado pelo número de caixas para o qual todas as condições iniciais escaparam N . A entropia da fronteira de bacia S_{bb} é obtida similarmente, mas excluimos dos cálculos as caixas em que $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, ou seja, consideramos apenas as caixas que tinham ao menos uma fronteira em seu interior N_b .

Considerando o caso da estrutura da bacia de escape da figura 4.4, com saídas na parede em $x = 0$ (saída 1), representada por pontos em vermelho, e em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (saída 2) com largura $l = 0,05$ (janela), representada por pontos em verde. Utilizamos, primeiramente, uma resolução de 200×200 caixas com 25 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa para o cálculo da entropia.

Na figura 4.14, plotamos os valores da entropia da bacia S_b e da entropia da fronteira da bacia S_{bb} em termos da intensidade da segunda onda A_2 . De acordo com a figura, a entropia da bacia S_b cresce conforme a intensidade de A_2 . Para $A_2 = 1,5$ a entropia S_b levemente decresce mas em seguida volta a aumentar seu valor. Esse comportamento pode ser observado na figura 4.4, onde as bacias vermelha e verde progressivamente tornam-se mais misturadas.

O comportamento das entropias pode ser qualitativamente entendido comparando os resultados com a fração ocupada pela área da bacia vermelha, referente a saída 1 na parede, plotado também na figura 4.14. Ambas as entropias S_b e S_{bb} , seguem a variação da fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}). Para a amplitude $A_2 = 1,8$ os valores correspondentes das entropias atingem os valores máximos, assim como a fração ocupada pela área da bacia vermelha em torno de 40%. A entropia da fronteira da bacia S_{bb} é relevante para quantificarmos o quão misturadas as bacias estão. Para esta amplitude ($A_2 = 1,8$), as bacias estão quase que totalmente misturadas.

Em geral, o grau de complexidade da estrutura da bacia e da sua fronteira aumenta com a amplitude de A_2 . Como estamos estudando bacias de escape com duas saídas (figura 4.4), o critério da equação (4.15), $S_{bb} > 1,0$, não é satisfeito. Entretanto, a estrutura presente na bacia

de escape da figura 4.4 é fractal conforme evidências anteriores.

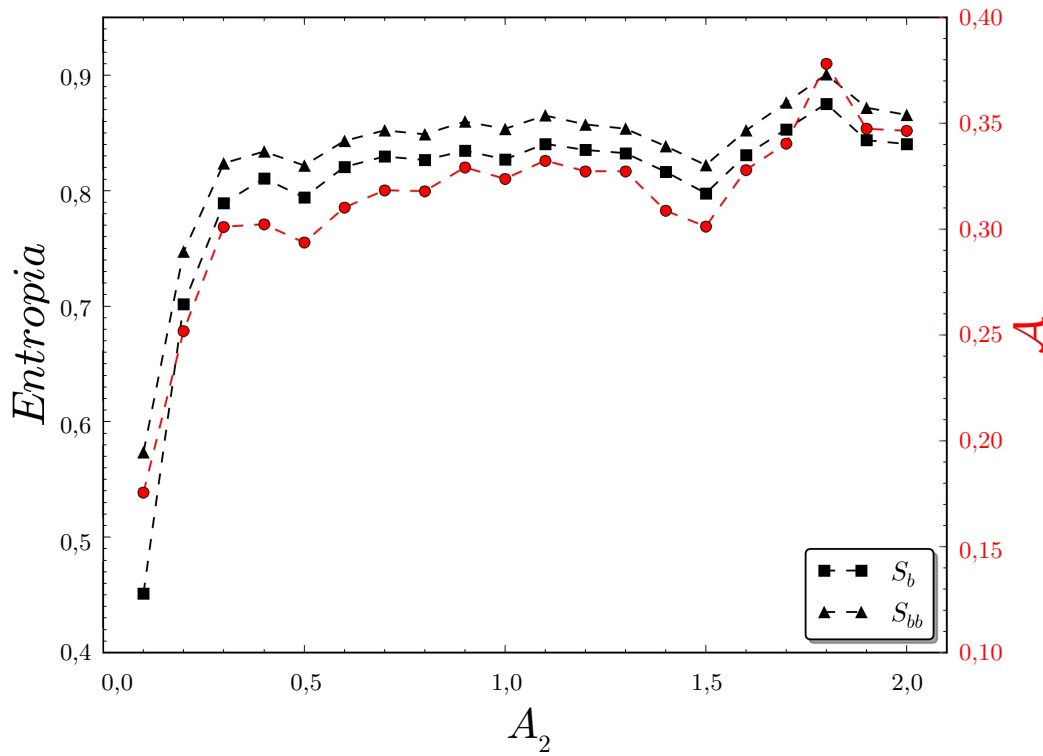


Figura 4.14: Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}) para o caso de duas saídas da figura 4.4 como uma função da amplitude da segunda onda A_2 .

Ainda para o caso da figura 4.4, com saídas na parede em $x = 0$ (saída 1), representada por pontos em vermelho, e em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (saída 2) com largura $l = 0,05$ (janela), utilizamos resoluções diferentes para computarmos a entropia da bacia. Na figura 4.15, plotamos a entropia da bacia para resoluções de 500×500 caixas com 4 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em vermelho), de 200×200 caixas com 25 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em preto) e de 125×125 caixas com 64 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em azul).

Na figura 4.15, podemos observar que embora os tamanhos das caixas sejam diferentes, a inclinação da reta α que passa entre os pontos mínimo e máximo de cada entropia da bacia em relação a amplitude A_2 (ver figura 4.16) varia muito pouco conforme diminuimos ou aumentamos o tamanho da caixa. Para um número maior de trajetórias dentro de cada caixa o valor da entropia irá convergir para um valor máximo. Caso as bacias fossem do mesmo tamanho, o valor máximo da entropia da bacia, seria $S_b = 1,0$, de modo que teríamos uma estrutura da

bacia de escape completamente randomizada [52].

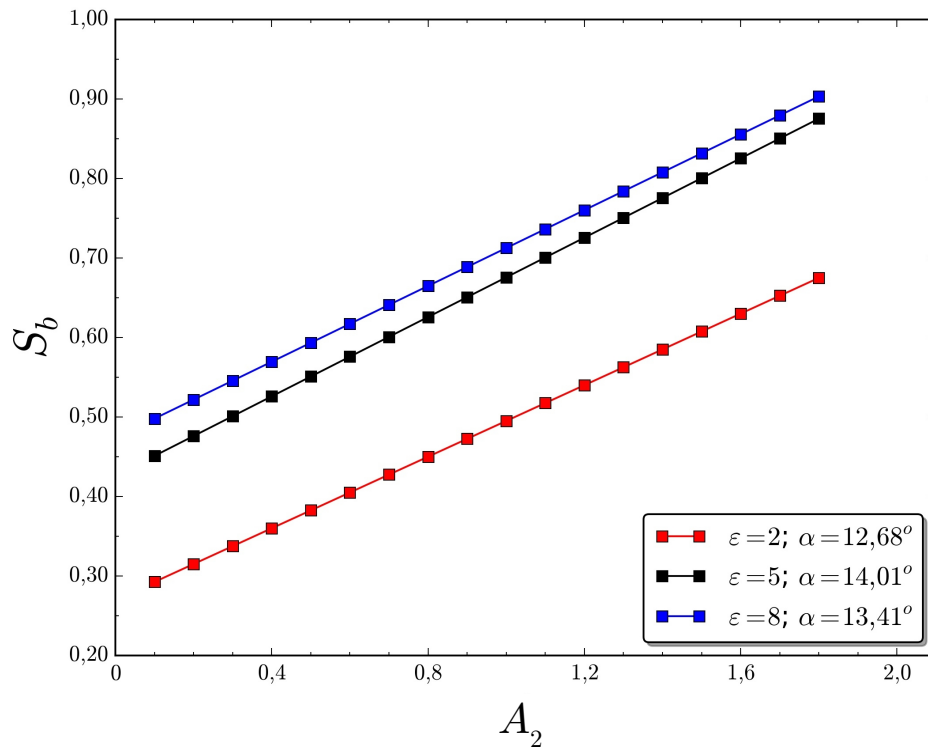


Figura 4.15: Entropias da bacia S_b como uma função da amplitude da segunda onda A_2 . Reta em vermelho representa a entropia com o tamanho da caixa $\epsilon = 2$, reta em preto representa a entropia com o tamanho da caixa $\epsilon = 5$ e reta em azul representa a entropia com o tamanho da caixa $\epsilon = 8$. Onde α é o ângulo de inclinação de cada reta.

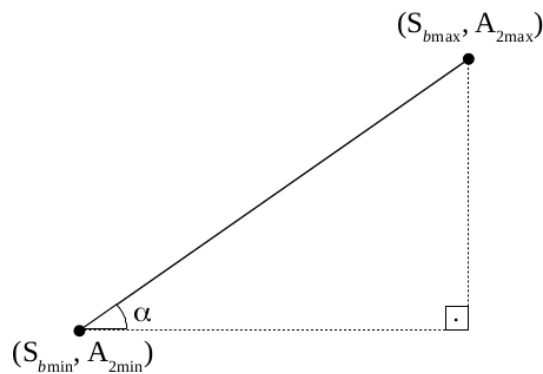


Figura 4.16: Representação da reta que passa entre os pontos mínimo e máximo da entropia S_b em relação a amplitude A_2 com inclinação α .

De acordo com a referência [34], a entropia da bacia tende a zero ($S_b \rightarrow 0$) quando o tamanho das caixas tende a zero ($\epsilon \rightarrow 0$). Este fato pode ser visto na figura 4.15, os valores da entropia da bacia convergem muito mais rapidamente quando se tem fronteiras aproximada-

mente suaves do que fronteiras fractais. Para o tamanho da caixa $\varepsilon = 2$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia $S_b = 0,29252$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,67503$. Para $\varepsilon = 5$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia $S_b = 0,45109$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,87531$. Para um tamanho maior da caixa $\varepsilon = 8$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia $S_b = 0,49798$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,90324$. Por fim, quando o tamanho da caixa (ε) é pequeno e a amplitude (A_2) é baixa, a entropia da bacia (S_b) é menor comparado aos resultados obtidos para tamanhos maiores da caixa.

Considerando agora, o caso da estrutura da bacia de escape da figura 4.5, com saídas na parede em $x = 0$ (saída 1), representada por pontos em vermelho, e em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (saída 2) com largura $l = 0,15$ (janela), representada por pontos em verde. Utilizamos, a mesma resolução do caso anterior de 200×200 caixas com 25 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa para o cálculo da entropia.

Na figura 4.5 (a), podemos observar que o escape pela janela (bacia verde) é muito maior do que o escape pela parede (bacia vermelha), dessa maneira o valor da entropia da bacia S_b é muito pequeno quando a intensidade da amplitude da segunda onda A_2 é baixa, ou seja, para $A_2 = 0,1$ temos $S_b = 0,02091$, figura 4.17. Conseqüentemente, a entropia da fronteira da bacia S_{bb} tem um valor alto, pois de fato a maioria das caixas não contém fronteiras separando duas bacias, apesar de haver um número finito de caixas contendo as duas bacias. Portanto, a contribuição das caixas contendo as bacias é negligenciado para o número total de caixas. Para $A_2 = 0,1$ a entropia da fronteira de bacia atinge um máximo em $S_{bb} = 0,83306$. Para fronteiras aproximadamente suaves o máximo valor obtido para a entropia da fronteira da bacia é $S_{bb} = 1,0$, o que corresponde a situação onde todas as caixas da fronteira tem proporções iguais das duas bacias [52].

Pode ser visto na figura 4.17, que as entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} variam de acordo com a fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}). Conforme a amplitude da segunda onda A_2 aumenta, a área da bacia vermelha também aumenta, e em consequência, o valor da entropia da bacia S_b aumenta progressivamente. Para intensidade de A_2 superior a $0,1$ o valor da entropia da fronteira S_{bb} varia entre $0,48632$ e $0,61298$. Podemos observar na figura 4.5 que para esses valores de A_2 as bacias estão mais misturadas.

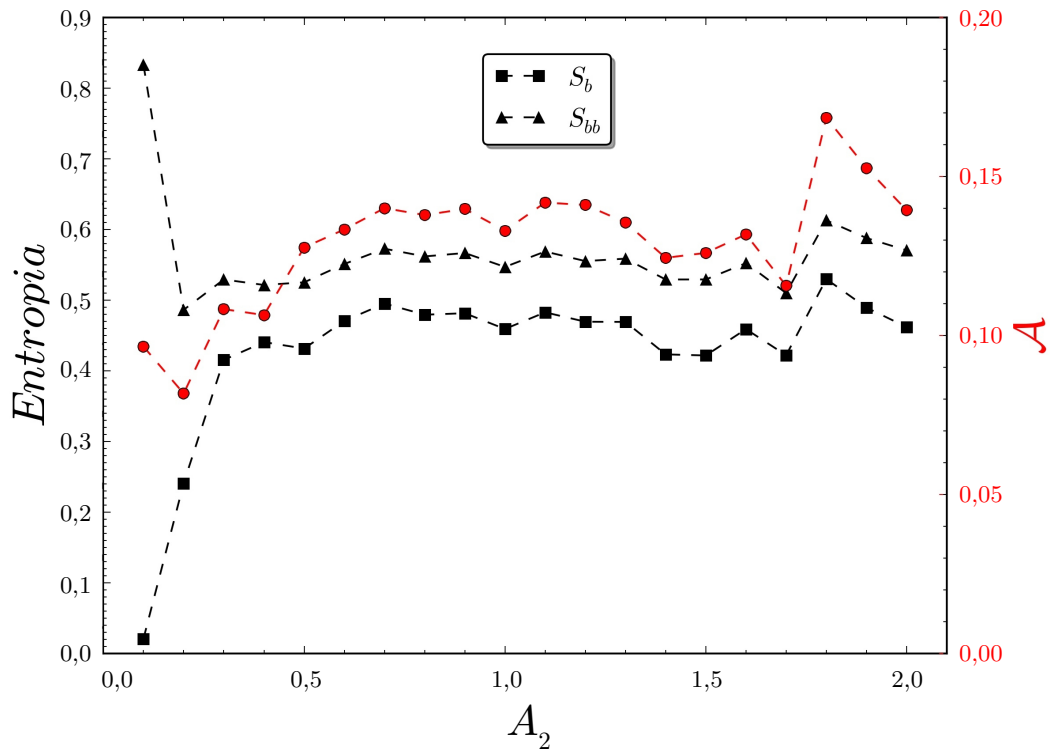


Figura 4.17: Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (A) para o caso de duas saídas da figura 4.5 como uma função da amplitude da segunda onda A_2 .

Utilizamos agora diferentes resoluções para computarmos a entropia da bacia para esse mesmo caso da estrutura da bacia de escape da figura 4.5. Na figura 4.18, plotamos a entropia da bacia para resoluções de 500×500 caixas com 4 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em vermelho), de 200×200 caixas com 25 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em preto) e de 125×125 caixas com 64 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa (curva em azul).

Na figura 4.18, a inclinação da reta α que passa entre os pontos mínimo e máximo de cada entropia da bacia em relação a amplitude varia entre $11,62^\circ$ e $17,10^\circ$, conforme aumentamos o tamanho da caixa de $\varepsilon = 2$ para $\varepsilon = 8$.

Podemos verificar nessa figura, que os valores da entropia da bacia convergem para zero ($S_b \rightarrow 0$) muito mais rapidamente quando se tem fronteiras aproximadamente suaves do que fronteiras fractais quando o tamanho das caixas tende a zero ($\varepsilon \rightarrow 0$), esse fato é mais evidente para a janela com largura $l = 0,15$ do que o caso anterior da janela com largura $l = 0,05$, figura 4.15. Para o tamanho da caixa $\varepsilon = 2$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia

$S_b = 0,00677$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,35640$. Para $\varepsilon = 5$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia $S_b = 0,02091$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,52986$. Para um tamanho maior de caixa $\varepsilon = 8$, a amplitude $A_2 = 0,1$ possui entropia $S_b = 0,04071$ e para a amplitude $A_2 = 1,8$ a entropia da bacia é $S_b = 0,56381$.

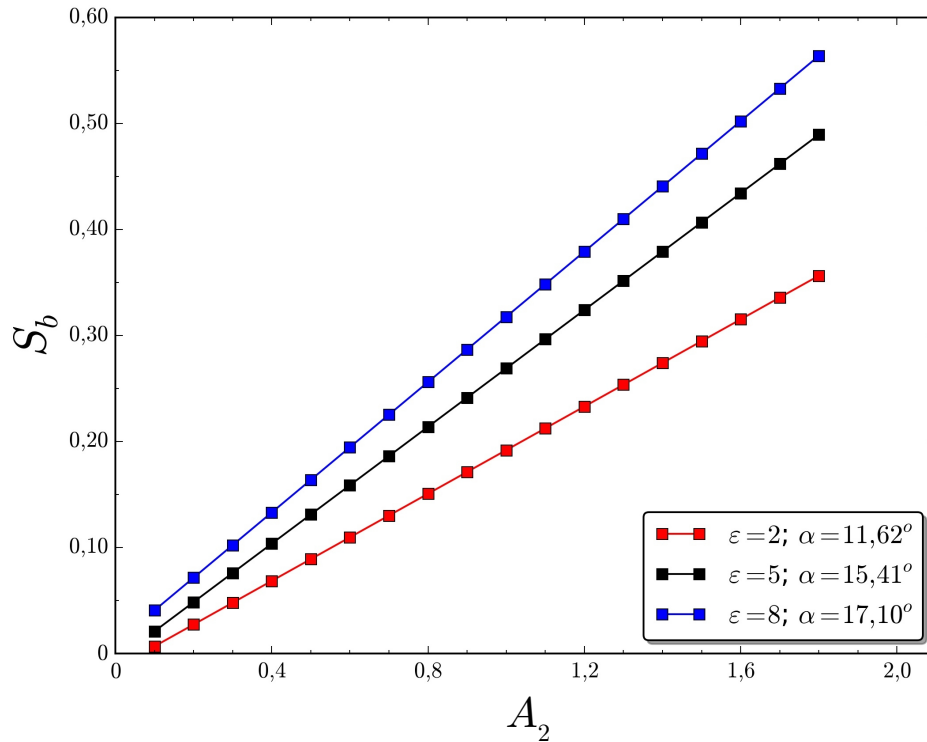


Figura 4.18: Entropias da bacia S_b como uma função da amplitude da segunda onda A_2 . Retas em vermelho representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 2$, retas em preto representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 5$ e retas em azul representa a entropia com o tamanho da caixa $\varepsilon = 8$. Onde α é o ângulo de inclinação de cada reta.

4.6 Bacias de escape para três saídas

Nesta seção, incluímos uma terceira saída para o escape de partículas, um quadrado centrado em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ com largura $l = 0,15$. Quando existem três ou mais bacias de escape, a propriedade de Wada pode ser observada.

Por definições matemáticas [35]: Um ponto P é um ponto da fronteira de uma bacia de escape B se cada ponto vizinho de P interceptar a bacia B e pelo menos outra bacia. A fronteira da bacia é formada pelo conjunto de todos os pontos da fronteira desta bacia. O ponto

da fronteira P é também um ponto de Wada se cada ponto vizinho de P interceptar ao menos três diferentes bacias. Uma fronteira da bacia é dita possuir a propriedade de Wada se cada ponto da fronteira de B é um ponto de Wada, tal que a fronteira de uma bacia é uma fronteira da bacia de escape de Wada.

A figura 4.19 (a), mostra a bacia de escape com $A_2 = 2, 0$ para as três saídas: a bacia da parede em $x = 0$ (pontos em azul), a bacia centrada em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ (pontos em verde) e a bacia centrada em $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (pontos em vermelho), ambas janelas com largura $l = 0, 15$.

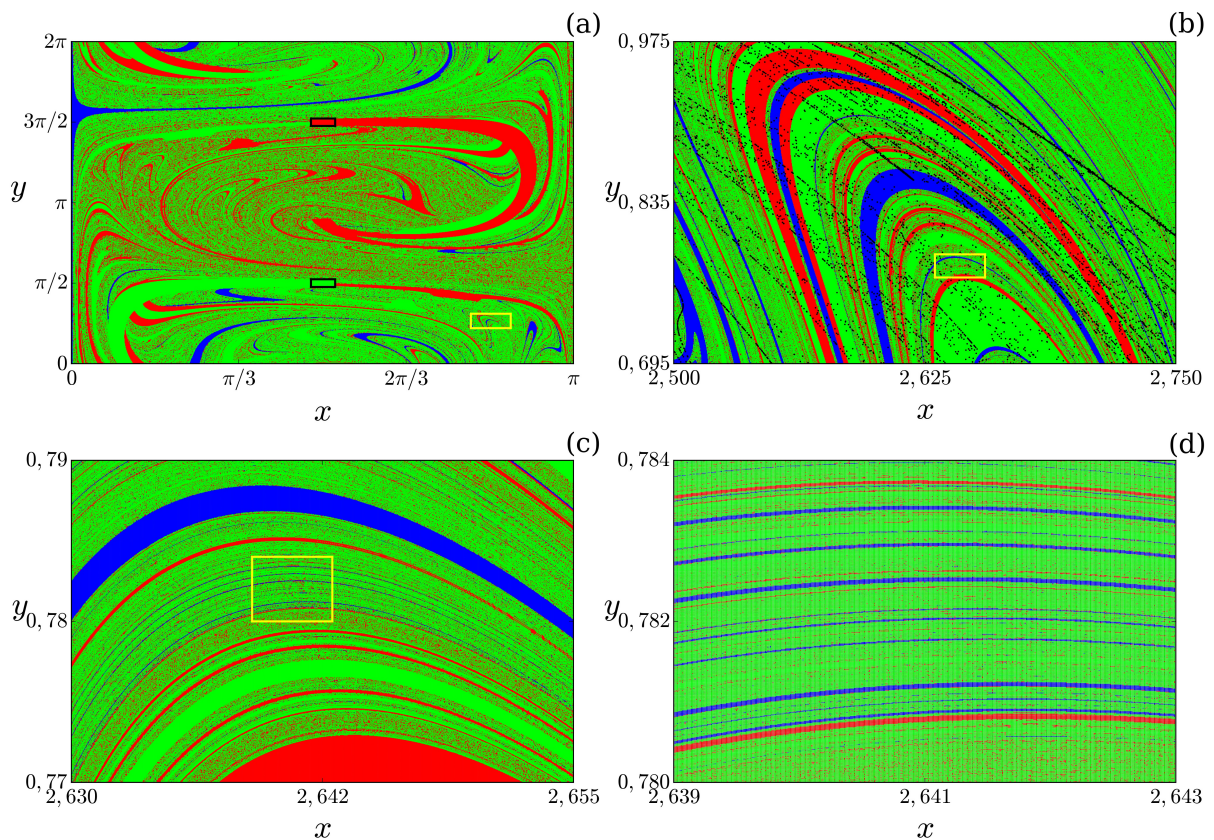


Figura 4.19: Bacias de escape para a parede em $x = 0$ (pontos em azul) e dois pequenos quadrados centrados em: $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ (pontos em verde) e $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{3\pi}{2}$ (pontos em vermelho) ambas janelas com largura $l = 0, 15$ para o caso de $A_2 = 2, 0$, figura (a). As figuras (b), (c) e (d) representam sucessivas ampliações do retângulo amarelo nas figuras. Em (b) a variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as bacias é um indício da propriedade de Wada.

A propriedade de Wada pode ser vista nas sucessivas ampliações nas figuras 4.19 (b)-(d) do retângulo em amarelo da figura 4.19 (a), revelando uma parte da terceira bacia onde parecia ser a fronteira entre as outras duas bacias. Isto é uma evidência da fronteira de Wada, que é uma fronteira fractal em que cada ponto delimita três bacias ou mais [35]. Esta propriedade não está

presente totalmente na bacia de escape, uma vez que, a fronteira é fractal apenas nos pontos que tendem assintoticamente à borda das saídas. Outra evidência da propriedade de Wada é o trecho da variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as três bacias na figura 4.19 (b). Essa é uma condição necessária, mas não suficiente para a propriedade de Wada existir [35]. Dessa maneira, a propriedade de Wada está cumprida no nosso sistema.

Uma forma para quantificarmos a propriedade de Wada em sistemas dinâmicos de fronteiras de bacias foi recentemente proposto por Daza e coautores [36]. O método apresentado por eles consiste basicamente em aplicar uma grade para a bacia de escape de Wada.

Considerando uma região limitada Ω do espaço de fase contendo bacias de escape S_j , onde $j = 1, 2, \dots, N_A$ para $N_A \geq 3$. A região Ω é coberta pelo conjunto de caixas da grade $P = b_1, b_2, \dots, b_k$ que não se sobrepõem, onde b_k denota a k -ésima caixa. No nosso caso, tomando uma grade 1000×1000 , k será 10^6 para essa grade. Para cada condição inicial $(x_i, y_i) \in \Omega$ assumimos uma função de valor inteiro $C(x_i, y_i)$, tal que $C(x_i, y_i) = j$, se $(x_i, y_i) \in S_j$ e $C(x_i, y_i) = 0$, se (x_i, y_i) não pertence a nenhuma das bacias S_j . Para cada caixa b_j definimos $C(b_j) = C(x_i, y_i)$, onde (x_i, y_i) é o ponto central da caixa tomado como uma condição inicial. Se (x_i, y_i) não pertencer a nenhuma saída, então $C(b_j) = 0$. Definimos, ao valor numérico C uma cor da caixa da grade.

Denotamos $b(b_j)$ a coleção de caixas da grade de b_j , tendo ao menos um ponto em comum com b_j , como mostrado na figura 4.20. O número de diferentes cores em $b(b_j)$ é denotado por $M(b_j)$. Em cada caixa b_j com $M(b_j) \neq 1, N_A$, ou seja, que não está no interior e nem na fronteira de Wada, selecionamos as duas caixas mais próximas em $b(b_j)$ com diferentes cores e traçamos uma linha entre eles, computando a cor do ponto médio da linha. Se a cor computada completar a cor faltante dentro de $b(b_j)$, então $M(b_j) = N_A$ e o processo é parado. Caso contrário, refinamos o procedimento escolhendo pontos intermediários até que $M(b_j) = N_A$, ou o número de pontos calculados nesse segmento atinja um valor máximo previamente especificado.

Seja G_m o conjunto de todas as caixas da grade originais tal que $M(b_j) = m$. Para $m = 1$, todas as caixas dentro de $b(b_j)$ têm a mesma cor e pertencem a mesma bacia, dessa forma os pontos dessa bacia formam o conjunto G_1 . Para $m = 2$, o conjunto G_2 pertence a fronteira entre duas bacias, uma vez que existam duas diferentes cores na caixa $b(b_j)$. Analogamente, o conjunto G_3 é formado pelos pontos que satisfazem a propriedade de Wada, ou seja, existem

três cores diferentes dentro da caixa $b(b_j)$. Dessa forma, G_n^q é o conjunto G_n para q passos de refinamento.

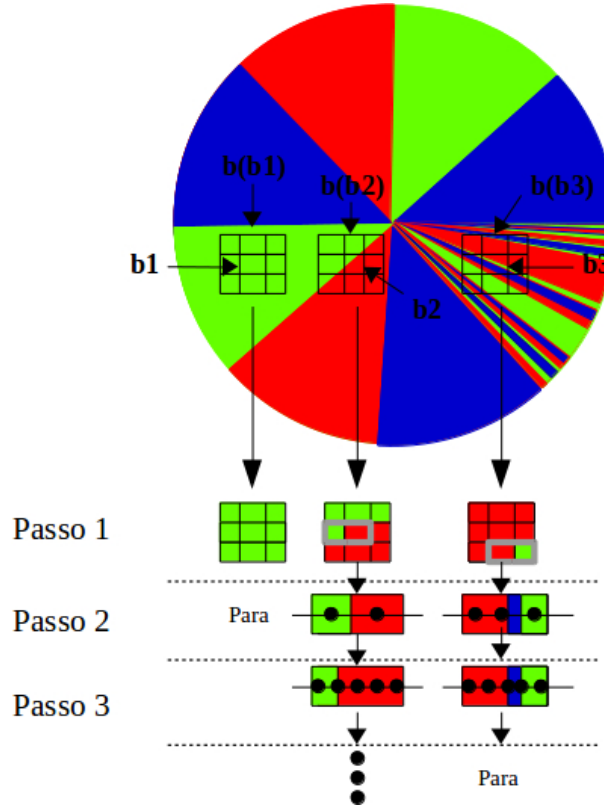


Figura 4.20: Esquema do método da grade considerando $m = 3$ bacias. Figura adaptada de [36]

Assim, para decidirmos se o sistema tem ou não Wada, ou se apresenta parcialmente, podemos calcular o número de caixas $N(G_m^q)$ pertencendo a fronteira de m diferentes bacias para q passos de refinamento. Para isso calculamos o seguinte parâmetro:

$$W_m = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{N(G_m^q)}{\sum_{j=2}^{N_A} N(G_j^q)}, \quad (4.18)$$

onde $m \in [2, N_A]$.

Se $W_m = 0$, o sistema não contém caixas que pertencem a uma fronteira separando as m bacias de escape. Se $W_m = 1$, todas as caixas na fronteira separam as m bacias de escape. Se $W_{N_A} = 1$, o sistema é dito possuir a propriedade de Wada, uma vez que irá sempre ser possível encontrar uma terceira bacia entre duas outras bacias. E se $0 < W_m < 1$, com $m \geq 3$, a bacia parcialmente satisfaz a propriedade de Wada.

Para o caso da figura 4.19, existem três bacias, onde $N_A = 3$. Dividimos a estrutura da bacia de escape em caixas, cada uma delas contendo um ponto da bacia. Analisamos cada conjunto de caixas formado por 9 caixas internas. Se todas as caixas são da mesma cor que a da caixa central, definimos o ponto central pertencendo ao conjunto G_1 . Se existirem caixas de mesma cor mas com cor diferente da caixa central, este será definido como G_2 . E se todas as caixas vizinhas apresentarem as outras duas cores faltantes, o ponto central irá pertencer ao conjunto G_3 . Assim, da equação (4.18), temos as seguintes quantidades para q passos de refinamento:

$$W_2 = \frac{N(G_2)}{N(G_2) + N(G_3)} \quad \text{e} \quad W_3 = \frac{N(G_3)}{N(G_2) + N(G_3)}. \quad (4.19)$$

Em cada passo de refinamento checamos se os pontos de G_2 poderiam ou não pertencer a G_3 testando q condições iniciais intermediárias entre a caixa central e a caixa vizinha de cor diferente. Se algumas dessas q condições iniciais intermediárias exibirem a terceira cor faltante, a caixa central é reclassificada como G_3 .

A figura 4.21, mostra em preto os pontos classificados como G_1 , que pertencem a alguma bacia, e os pontos em vermelho, que após $q = 12$ passos de refinamento continuam a pertencer ao conjunto G_2 , ou seja na fronteira da bacia. Os pontos em azul pertencem ao conjunto G_3 , ou seja, satisfazem a propriedade de Wada. Fica claro aqui, que embora muitas condições iniciais exibam a propriedade de Wada, existem pontos que não satisfazem essa condição. Assim, a bacia da figura 4.19 (a) é classificada como parcialmente Wada [36].

Está representado no histograma da figura 4.22 (a), o número de pontos iniciais classificados inicialmente como G_2 e após q passos de refinamento passam a pertencer ao conjunto G_3 . Podemos observar, que após $q = 5$ passos de refinamento, o número de pontos (N) reclassificados decresce a zero quando q aumenta. Esta convergência pode ser vista na figura 4.22 (b), através dos valores das quantidades W_2 e W_3 , obtidos da equação (4.19). Para $q = 12$, as quantidades convergem para $W_2 \approx 0,072$ e $W_3 \approx 0,928$. Uma vez que obtemos a quantidade $0 < W_3 < 1$, podemos dizer que a estrutura da bacia da figura 4.19 (a) é parcialmente Wada [36].

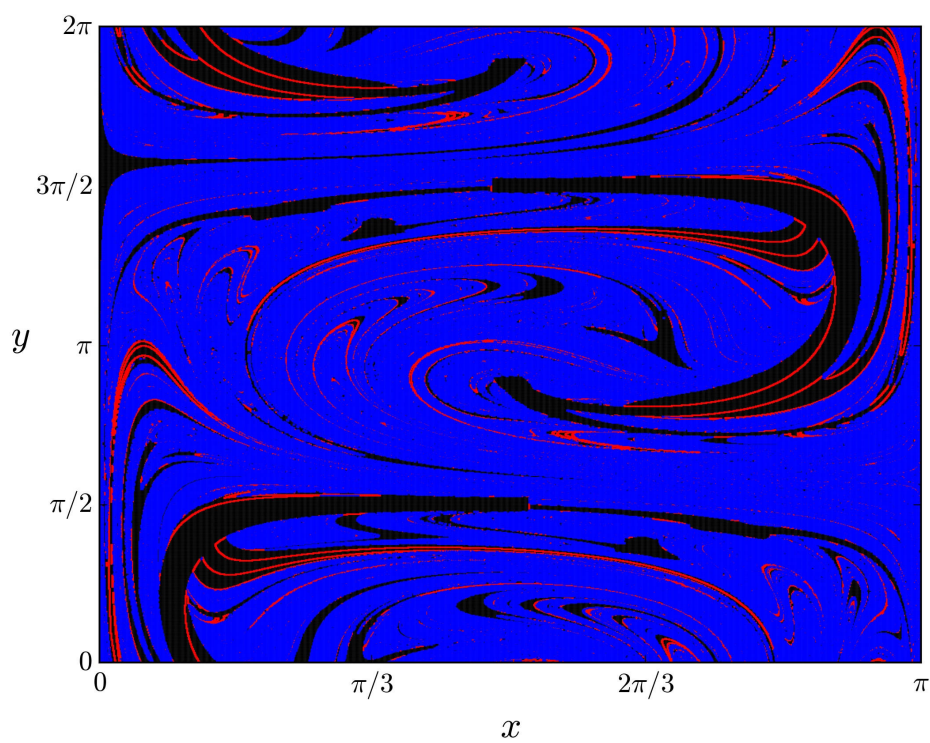


Figura 4.21: Estrutura da bacia da figura 4.19 (a), mostrando em preto os pontos classificados como G_1 (pontos internos da bacia), em vermelho pontos do conjunto G_2 (pontos da fronteira entre duas bacias) que após $q = 12$ passos de refinamento continuam a pertencer a este conjunto, e estão em azul os pontos do conjunto G_3 (pontos da fronteira entre três bacias).

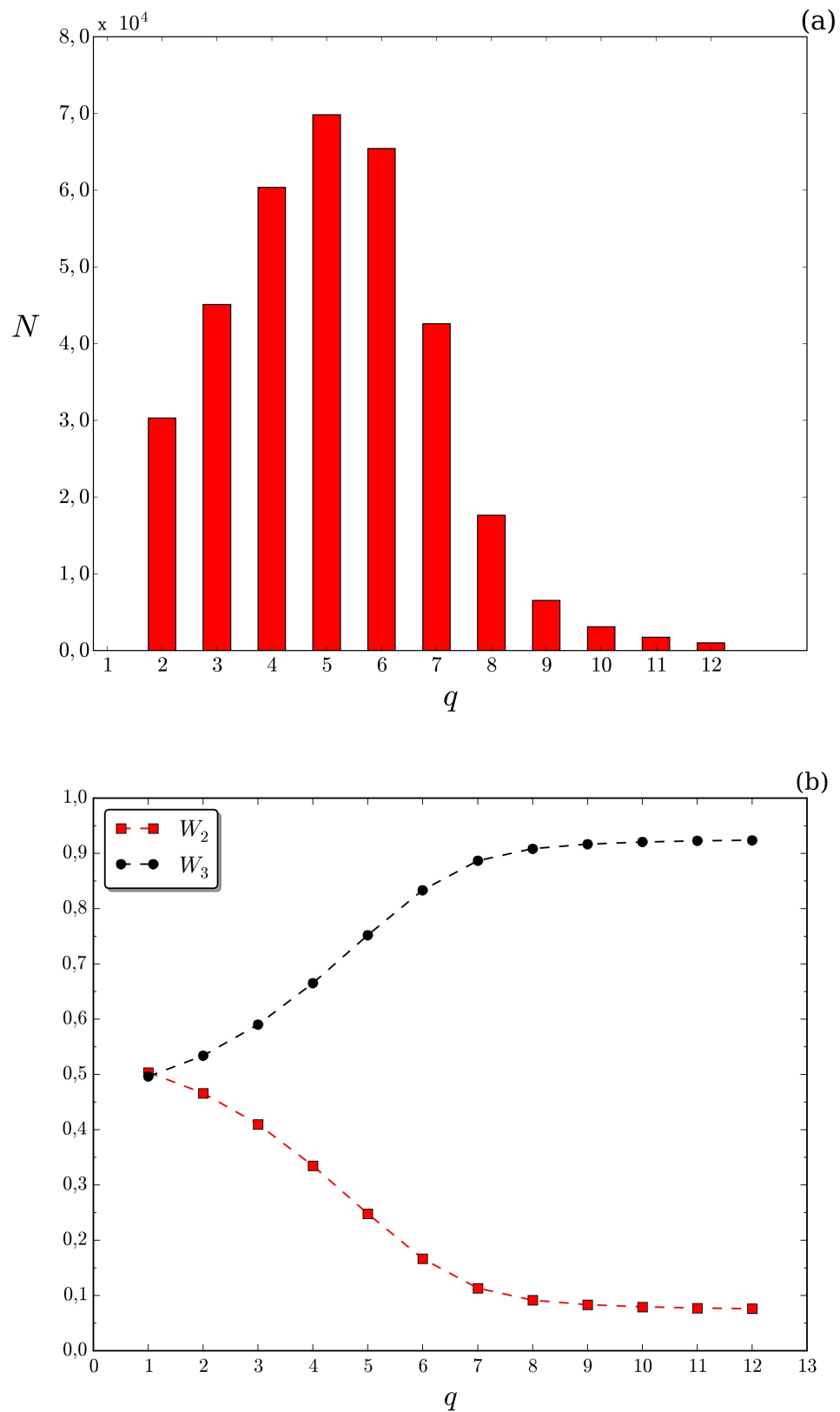


Figura 4.22: Em (a) número de pontos reclassificados em cada passo de refinamento q , usando o método da grade para a estrutura da bacia da figura 4.19 (a). Em (b) os valores das quantidades W_2 e W_3 como uma função do passo de refinamento q .

Capítulo 5

Limitador magnético caótico

No final dos anos 70, foi inicialmente proposto por F. Karger e K. Lackner [21] e W. Engelhardt e W. Feneberg [22] a ideia de um limitador magnético caótico. Este dispositivo tem como objetivo gerar, na periferia da coluna de plasma, uma região de linhas de campo magnético caóticas para auxiliar no controle da interação entre o plasma e a parede do tokamak. Essa interação (plasma-parede) é uma das principais dificuldades a serem superadas, já que muitas partículas carregadas alcançam a parede do tokamak e comprometem a qualidade do confinamento. A colisão de partículas com a parede metálica do tokamak pode provocar aquecimentos locais na parede de contenção e conseqüentemente a liberação de impurezas arrancadas da parte interna do tokamak em processos denominados de *sputtering*.

De acordo com o modelo das referências [21] e [22], uma camada de linhas de campo magnético caóticas próximas à borda do plasma pode gerar uma região de alto coeficiente de difusão e alta densidade de partículas, evitando os aquecimentos locais na parede do tokamak. A concentração de impurezas na região central do plasma deve ser proporcional ao inverso deste coeficiente de difusão e da densidade. Conforme esse modelo, as partículas neutras de impurezas, oriundas da parede do tokamak, que entrassem na região das linhas de campo magnético caóticas, seriam ionizadas e conduzidas de volta à parede do tokamak devido a um elevado coeficiente de difusão. Esse processo faria com que o fluxo de impurezas, dirigido para o centro da coluna de plasma aumentasse apenas a densidade de partículas na região de linhas de campo magnético caóticas, sem alterar a concentração de impurezas no centro da coluna de plasma. Como partículas carregadas em movimento estão sujeitas a campos magnéticos, um aumento

do coeficiente de difusão das partículas carregadas requer um aumento do coeficiente de difusão das próprias linhas de campo magnético na borda da coluna de plasma. Isto é, o aumento do coeficiente de difusão de partículas carregadas na periferia da coluna de plasma pode ser obtido forçando as linhas de campo magnético dessa região a exibir um comportamento caótico.

Primeiramente, quando foi proposto o limitador magnético caótico, o dispositivo consistia em uma hélice condutora enrolada adequadamente ao longo do comprimento maior do tokamak, que era capaz de criar um campo magnético ressonante e perturbativo. Entretanto, as diversas janelas ao redor do tokamak, prejudicam a instalação desses condutores de correntes elétricas que geram os campos magnéticos ressonantes. Posteriormente, optou-se por construir um modelo mais simplificado derivado dessa ideia, que utiliza um ou mais anéis de corrente que formam o limitador magnético caótico. Esses anéis correspondem a estreitas fatias dos condutores helicoidais posicionadas na direção toroidal do tokamak, figura 5.1.

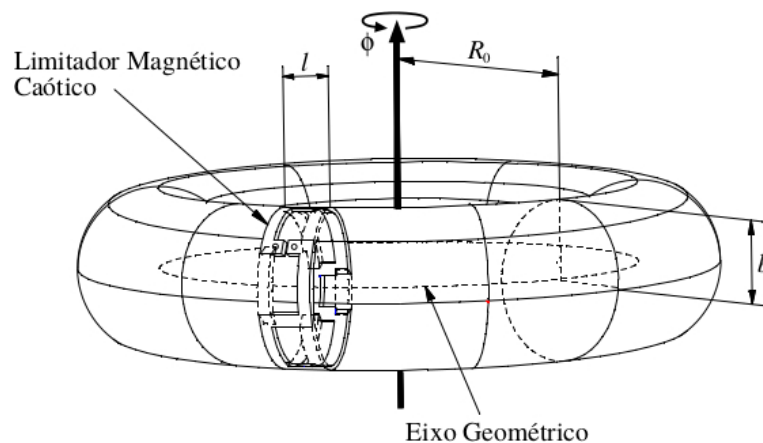


Figura 5.1: Representação esquemática da câmara de confinamento do plasma, exibindo o limitador magnético caótico com um anel específico. Onde l é a extensão do anel, ϕ é o ângulo toroidal, R_0 e b são os raios maior e menor do toro, respectivamente. Figura adaptada de [53].

5.1 Mapa de Martin e Taylor

O primeiro mapa para linhas de campo magnético em tokamaks a considerar a presença de limitadores magnéticos caóticos, foi apresentado por T. J. Martin e J. B. Taylor [27]. O modelo proposto pelos autores, apresenta um único anel de corrente envolvendo o tokamak, como mostrado na figura 5.1.

O tokamak estudado, foi aproximado para um cilindro de comprimento $2\pi R_0$, cujo raio é b , esquematizado na figura 5.2. A coordenada r é o raio a partir do eixo geométrico, θ é o ângulo poloidal e ϕ é o ângulo toroidal. Considerando uma região próxima à periferia da coluna de plasma, podemos utilizar a aproximação na borda do tokamak, que consiste na aproximação cilíndrica do toro ao sistema de coordenadas retangulares, dada pelas relações da equação (5.1).

$$x = b\theta, \quad y = b - r, \quad z = R_0\phi. \quad (5.1)$$

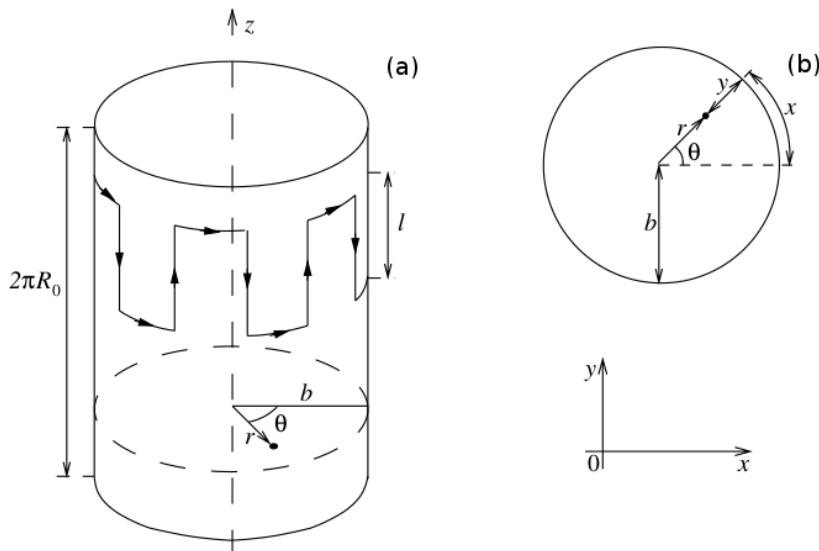


Figura 5.2: Aproximações de coordenadas: (a) cilindro periódico ($z = \text{constante}$) envolvido por um anel limitador magnético. (b) coordenadas retangulares na borda do tokamak. Figura adaptada de [53].

A utilização da aproximação do toróide para o cilindro é válida com a condição de que $b \ll R_0$. Nessa aproximação, o campo magnético toroidal de equilíbrio, B_ϕ , é aproximadamente uniforme, e portanto, consideramos $B_\phi = B_0$. A aproximação cilíndrica para as coordenadas retangulares é usada pelo fato da ação do limitador se restringir, basicamente, à borda da coluna de plasma, $|y| \ll b$, que é justamente a nossa região de interesse.

Dessa maneira, x é a medida do arco ao longo do comprimento menor do cilindro, y é a distância radial, medida a partir da parede do cilindro (localizada em $y = 0$), de modo que, $y < 0$ é a região externa à câmara de confinamento e z é a medida do comprimento ao longo do eixo do cilindro.

5.1.1 Obtenção do mapa

O modelo de Martin e Taylor, considera uma superposição do campo magnético de equilíbrio do tokamak ($\vec{B}^{(0)}$) com o campo perturbador ($\vec{B}^{(1)}$) gerado pelo limitador magnético caótico.

Para a obtenção do campo magnético de equilíbrio $\vec{B}^{(0)}$, sabemos que as linhas de campo magnético são curvas paralelas. Em cada ponto do espaço, existe um campo magnético \vec{B} , que pode ser obtido através do elemento de linha $d\vec{l}$, da seguinte maneira:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = \vec{0}. \quad (5.2)$$

Por simplicidade, consideramos um tokamak com grande razão de aspecto, ou seja, adotamos que $b \ll R_0$, figura 5.2 (a), dessa forma, é conveniente escrevermos a equação (5.2) em coordenadas cilíndricas, dadas como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi}. \quad (5.3)$$

Estas equações podem ser integradas numericamente, fornecendo as trajetórias das linhas de campo magnético de equilíbrio. Assim, a dinâmica das linhas de campo em um tokamak pode ser estudada por meio de um mapa de retorno. No qual, as trajetórias são obtidas das trajetórias contínuas de uma determinada região no espaço de fase, fixando os valores das coordenadas apenas no instante do retorno da trajetória a essa região. Por exemplo, um mapa de retorno na coordenada ϕ , consiste em um mapa de Poincaré sobre a seção $z = \text{constante}$, com variáveis (r_n, θ_n) , em coordenadas cilíndricas. Aqui n denota as coordenadas da n -ésima intersecção de uma dada linha de campo magnético com a superfície de seção.

Um mapa de Poincaré pode então ser obtido, integrando analiticamente as equações das linhas de campo magnético de um ponto inicial (r_n, θ_n, ϕ_n) , sobre a superfície de seção, ao novo ponto $(r_{n+1}, \theta_{n+1}, \phi_{n+2\pi})$, sobre a mesma superfície, obtendo assim, uma relação recursiva. A figura 5.3 representa esquematicamente uma linha de campo magnético em uma seção de

Poincaré para $\phi = \text{constante}$. O mapa, numa forma geral, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= f(r_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= g(r_n, \theta_n), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde f e g dependem da natureza do campo magnético.

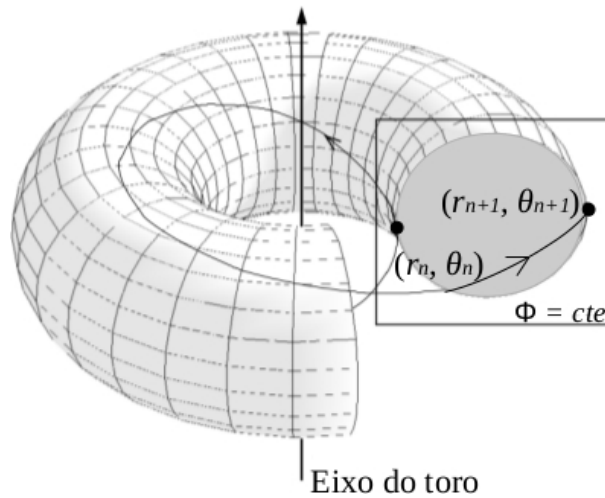


Figura 5.3: Representação esquemática de uma linha de campo magnético em uma seção de Poincaré para $\phi = \text{cte}$. Figura adaptada de [54].

Devido à conservação do fluxo magnético, que é constante para cada superfície, o mapa deve preservar sua área no espaço de fase, ou seja, o mapa deve ser hamiltoniano, resultando no jacobiano com determinante unitário:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial r_n} \frac{\partial g}{\partial \theta_n} - \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \frac{\partial g}{\partial r_n} \right| = 1. \quad (5.5)$$

Quando uma linha de campo magnético efetua uma volta toroidal, a mesma linha sofre um deslocamento poloidal, isso nos permite definir a transformada rotacional, ou número de rotação, ι , como o deslocamento poloidal médio varrido pela linha de campo ao dar uma volta toroidal completa. Em teoria de plasmas, é comum definirmos o fator de segurança, q , em termos da transformada rotacional, ou número de rotação. Assim, o fator de segurança q , para

as linhas de campo magnético é definido como:

$$q = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2\pi}{\iota}. \quad (5.6)$$

No tokamak [3] é induzida uma corrente toroidal de plasma que origina um campo magnético poloidal, B_θ , as correntes elétricas que passam pelas bobinas montadas sobre a câmara de vácuo produzem um campo magnético toroidal, B_ϕ . Assim, o campo magnético de equilíbrio é a composição destes campos. Em coordenadas cilíndricas, as componentes do campo são:

$$B_r^{(0)} = 0, \quad B_\theta^{(0)} = B_\theta^{(0)}(r), \quad B_\phi^{(0)} = \text{constante}. \quad (5.7)$$

As equações das linhas de campo magnético (5.3) para o campo de equilíbrio (5.7) são:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= 0, \\ \frac{d\theta}{d\phi} &= \frac{R_0 B_\theta^{(0)}(r)}{r B_\phi^{(0)}} = \frac{\iota}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dessa forma, a equação (5.8) pode ser integrada de $\phi = \text{constante}$ a $\phi = \text{constante} + 2\pi$, resultando no mapa de equilíbrio sobre a superfície de seção ϕ :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \iota(r_{n+1}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Adotando a aproximação feita das coordenadas cilíndricas para as retangulares, figura 5.2 (b), o campo magnético de equilíbrio da equação (5.7), pode ser reescrito como: $\vec{B}^{(0)} = (B_x^{(0)}(y), 0, B_z^{(0)})$, em que a componente radial, $B_y^{(0)}$, é nula, e a componente toroidal, $B_z^{(0)}$, é considerada uniforme no interior da câmara de vácuo do tokamak.

As equações da dinâmica das linhas de campo magnético de equilíbrio (5.2), podem ser escritas em coordenadas retangulares como:

$$\frac{dx}{B_x^{(0)}} = \frac{dy}{B_y^{(0)}} = \frac{dz}{B_z^{(0)}}. \quad (5.10)$$

Dessa maneira, rearrajando a equação (5.10) e considerando as relações da equação (5.1)

temos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{B_x^{(0)}}{B_z^{(0)}} = \frac{b}{R_0 q(r)}, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{B_y^{(0)}}{B_z^{(0)}} = 0.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Manipulando as equações (5.8) e (5.11), encontramos a expressão para a componente poloidal do campo $B_x^0(r)$, considerando $B_z^{(0)} = B_0$:

$$B_x^0(r) = \frac{bB_0}{R_0 q(r)}. \quad (5.12)$$

Expandindo $q(r)$ em série de Taylor, em torno da posição $r = b$, e desprezando os termos quadráticos da expansão, a equação (5.12) pode ser escrita como sendo:

$$B_x^0(r) = \frac{bB_0}{R_0 q_b} \frac{1}{\left(1 - \frac{yq'_b}{q_b}\right)} = \frac{bB_0}{R_0 q_b} \left(1 - \frac{yq'_b}{q_b}\right)^{-1} \approx \frac{bB_0}{R_0 q_b} \left(1 + \frac{yq'_b}{q_b}\right), \quad (5.13)$$

supondo $|r/b - 1| = |y/b| \ll 1$, e $q^n(r = b) \equiv q_b^n$, onde q_b^n denota a n -ésima derivada de q no ponto b .

Assim, as equações das linhas de campo magnético de equilíbrio (5.11) são:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{bB_0}{R_0 q_b} \left(1 + \frac{yq'_b}{q_b}\right), \\ \frac{dy}{dz} &= 0.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Para obtermos o mapa de equilíbrio, efetuamos a integração da equação (5.14), definida de um ponto inicial (x_n, y_n, z_n) ao novo ponto $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n + 2\pi R_0)$, com variação de $\Delta z = 2\pi R_0$. De acordo com a equação (5.13), B_x^0 é uma função apenas de y , assim definimos duas novas variáveis:

$$\alpha = \frac{2\pi b}{q_b} \quad \text{e} \quad s = \frac{2\pi b}{q_b^2} q'_b. \quad (5.15)$$

Como a componente radial do campo B_y^0 é nula, o mapa do campo de equilíbrio do

tokamak, de acordo com a equação (5.14) é:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + \alpha + sy_1, \\y_2 &= y_1.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Agora, para determinarmos o campo magnético gerado pelo limitador magnético, sabemos que o limitador da figura 5.1, consiste de um conjunto de m pares de fios, de extensão l , que conduzem uma corrente I em sentidos alternados, orientados na direção toroidal z . Para calcularmos o campo gerado por essa configuração, utilizaremos as seguintes considerações:

- Os fios que constituem o anel do limitador possuem extensão infinita, ou seja, ignoramos os efeitos de borda causados pela extensão finita l do anel;

- Na região próxima à borda do tokamak, temos: $x = b\theta$, $y = b - r$, onde ($|y| \ll b$) e $z = R_0\phi$;

- Na região do anel, o campo poloidal gerado pela corrente de plasma será considerado desprezível, em virtude de sua pequena intensidade comparado ao campo magnético toroidal de equilíbrio.

Um ponto próximo à borda do tokamak estará dentro do seguinte intervalo:

$$0 \leq x \leq 2\pi b, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq 2\pi R_0.\tag{5.17}$$

Levando em conta estas considerações, o cálculo do campo gerado pelo limitador se resume em utilizar a configuração de correntes retilíneas, conduzindo correntes em direções opostas em fios adjacentes, figura 5.4. Sendo $y < 0$, região externa do cilindro e $y > 0$, região interna do cilindro.

Na ausência de correntes internas, ou seja, para $y < 0$, temos que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$. O campo magnético pode ser obtido através de um potencial escalar magnético $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$, que satisfaz a equação de Laplace bidimensional:

$$\nabla^2\Phi = 0.\tag{5.18}$$

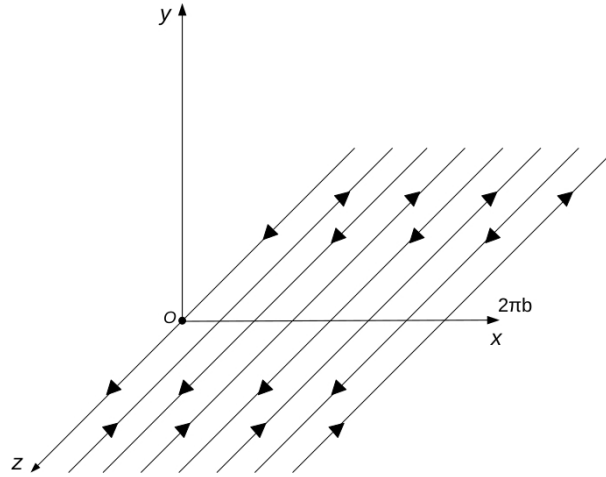


Figura 5.4: Geometria utilizada para o cálculo do campo gerado pelo limitador numa região próxima à borda do tokamak.

Em coordenadas retangulares temos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} = 0. \quad (5.19)$$

A solução da equação (5.19), pode ser obtida através de separação de variáveis. Impondo que o potencial é nulo a medida que nos afastamos da região interna (*i*) ou externa (*e*) do anel do limitador, a solução geral pode ser escrita como uma superposição de harmônicos do tipo [55]:

$$\Phi_{i,e}(x, y) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N^{i,e} \exp(\mp Ny/b) \text{sen} \left(\frac{Nx}{b} \right), \quad (5.20)$$

onde a solução se restringe em $|y| \ll b$.

Considerando uma região muito próxima da borda do tokamak e manipulando a equação (5.20), encontramos as componentes do campo magnético gerado pelo limitador magnético:

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \\ B_y &= \frac{\mu_0 m I}{\pi b} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{mx}{b}\right), \\ B_z &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde m é o número de pares de fios, I é a corrente que circula no anel do limitador e $\mu_0 =$

$$4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}.$$

De acordo com as equações (5.10) e (5.21), as equações das linhas de campo magnético gerado pelo limitador são [27, 56]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= -\frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{mx}{b}\right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Entretanto, o comprimento do anel é finito (l) ao longo da coordenada z , assim, considerando uma aproximação tipo delta de Dirac, $\delta\left(\frac{z}{2\pi R_0}\right)$, temos que a integração de $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ da equação (5.22), definida de um ponto inicial (x_n, y_n, z_n) ao novo ponto $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n + l)$, com variação de $\Delta z = l$, resulta em:

$$x_2 = x_1 - \frac{\mu_0 m I l}{\pi b B_0} \exp\left(-\frac{my_1}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right). \quad (5.23)$$

Agora dividindo $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ por $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ na equação (5.22), temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\tan\left(\frac{mx}{b}\right). \quad (5.24)$$

Assim, a integração da equação (5.24) resulta em:

$$y_2 = y_1 + \frac{b}{m} \left\{ \ln \left| \cos\left(\frac{mx_2}{b}\right) \right| - \ln \left| \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right) \right| \right\}. \quad (5.25)$$

Portanto, o mapa do campo gerado pelo limitador magnético caótico é:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{\mu_0 m I l}{\pi b B_0} \exp\left(-\frac{my_1}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right), \\ y_2 &= y_1 + \frac{b}{m} \left\{ \ln \left| \cos\left(\frac{mx_2}{b}\right) \right| - \ln \left| \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right) \right| \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Podemos compor o mapa de Martin e Taylor, fazendo algumas manipulações matemáticas nas equações encontradas. Primeiramente, definimos o parâmetro de perturbação p , que

mede a intensidade da perturbação em relação ao campo toroidal de equilíbrio B_0 , como sendo:

$$p \equiv \frac{\mu_0 m^2 I l}{\pi b^2 B_0}. \quad (5.27)$$

Fazendo uma multiplicação nas equações do mapa de equilíbrio (5.16) e do mapa do limitador (5.26) por m/b , temos:

$$\frac{m}{b}x_2 = \frac{m}{b}x_1 + \frac{m}{b}\alpha + \frac{m}{b}sy_1, \quad (5.28a)$$

$$\frac{m}{b}y_2 = \frac{m}{b}y_1, \quad (5.28b)$$

$$\frac{m}{b}x_2 = \frac{m}{b}x_1 - \frac{\mu_0 m^2 I l}{\pi b^2 B_0} \exp\left(-\frac{my_1}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right), \quad (5.28c)$$

$$\frac{m}{b}y_2 = \frac{m}{b}y_1 + \ln \left| \cos\left(\frac{mx_2}{b}\right) \right| - \ln \left| \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right) \right|. \quad (5.28d)$$

Agora, somando $\frac{m\alpha}{sb}$ nas equações (5.28b) e (5.28d), encontramos:

$$\frac{m}{b}y_2 + \frac{m\alpha}{sb} = \frac{m}{b}y_1 + \frac{m\alpha}{sb}, \quad (5.29a)$$

$$\frac{m}{b}y_2 + \frac{m\alpha}{sb} = \frac{m}{b}y_1 + \frac{m\alpha}{sb} + \ln \left| \cos\left(\frac{mx_2}{b}\right) \right| - \ln \left| \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right) \right|. \quad (5.29b)$$

Redefinindo x e y :

$$x \equiv \frac{mx}{b} \quad \text{e} \quad y \equiv \left(\frac{m}{b}\right) \left(y + \frac{\alpha}{s}\right). \quad (5.30)$$

Chegamos nas expressões:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + sy_1, \\ y_2 &= y_1, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - pe^{-y_1} \cos x_1, \\ y_2 &= y_1 + \ln \left| \frac{\cos x_2}{\cos x_1} \right|, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde aproximamos $\exp\left(\frac{m\alpha}{sb}\right) = 1$.

Fazendo a composição desses mapas, obtemos o mapa hamiltoniano de Martin e Taylor para linhas de campo magnético de um tokamak com limitadores magnéticos caóticos, em termos dos parâmetros p e s :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + sy_n + g(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n + h(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{5.33}$$

onde:

$$\begin{aligned}g(x, y) &= -pe^{-y} \cos x + sh(x_n, y_n), \\h(x, y) &= \ln |\cos(x - pe^{-y} \cos x)| - \ln |\cos x|.\end{aligned}\tag{5.34}$$

O parâmetro s (do inglês *shear* - cisalhamento) é a intensidade do deslocamento poloidal da linha causado pelo corrente de plasma. Para tokamaks, s é definido como:

$$s \equiv \frac{2\pi b}{q^2} \frac{dq}{dy}.\tag{5.35}$$

Caso o sistema não sofra uma perturbação ($p = 0$), o mapa da equação (5.33) volta a ser o mapa de equilíbrio da equação (5.16).

Capítulo 6

Resultados para o mapa de Martin e Taylor

Nesse capítulo, são mostrados os resultados obtidos através de métodos computacionais para o mapa de Martin e Taylor, utilizado para descrever a evolução das linhas de campo magnético de um tokamak com limitador magnético caótico. A dinâmica das linhas de campo foram analisadas através de mapas de Poincaré para diferentes valores do parâmetro de perturbação p . Para caracterizarmos a perda de linhas de campo magnético, apresentamos as bacias de escape para duas saídas e verificamos como estão dispostas as variedades instáveis e estáveis e a sela caótica nos espaços de fase. Computamos o comprimento de conexão através do número de iterações de cada condição inicial que atinge a parede do tokamak. Para a bacia de duas saídas, calculamos a dimensão fractal da fronteira da bacia e verificamos o quão misturadas estão essas bacias calculando a entropia de bacia e a entropia da fronteira de bacia. Por fim, analisamos a bacia de escape com três saídas e verificamos, qualitativa e quantitativamente, a propriedade de Wada para o mapa de Martin e Taylor.

6.1 Espaços de fase

O mapa de Martin e Taylor, equação (5.33), consiste na composição de um mapa simples, que descreve a dinâmica de equilíbrio e um mapa perturbativo, que quebra a simetria do sistema.

Os parâmetros do mapa s e p , influenciam na dinâmica das linhas de campo. Esse efeito pode ser exemplificado na figura 6.1. Mantivemos o deslocamento constante $s = 2\pi$ e analisamos o efeito da perturbação p . Na figura 6.1 (a), a intensidade da perturbação é baixa $p = 0,1$ (equivalente a uma baixa corrente no limitador), as cadeias de ilhas ainda estão bem achatadas e não há muitas regiões de linhas caóticas. Para este valor de perturbação ($p = 0,1$), aparecem 3 ilhas periódicas no espaço de fase, correspondendo aos valores de $m = 0, 1$ e 2 .

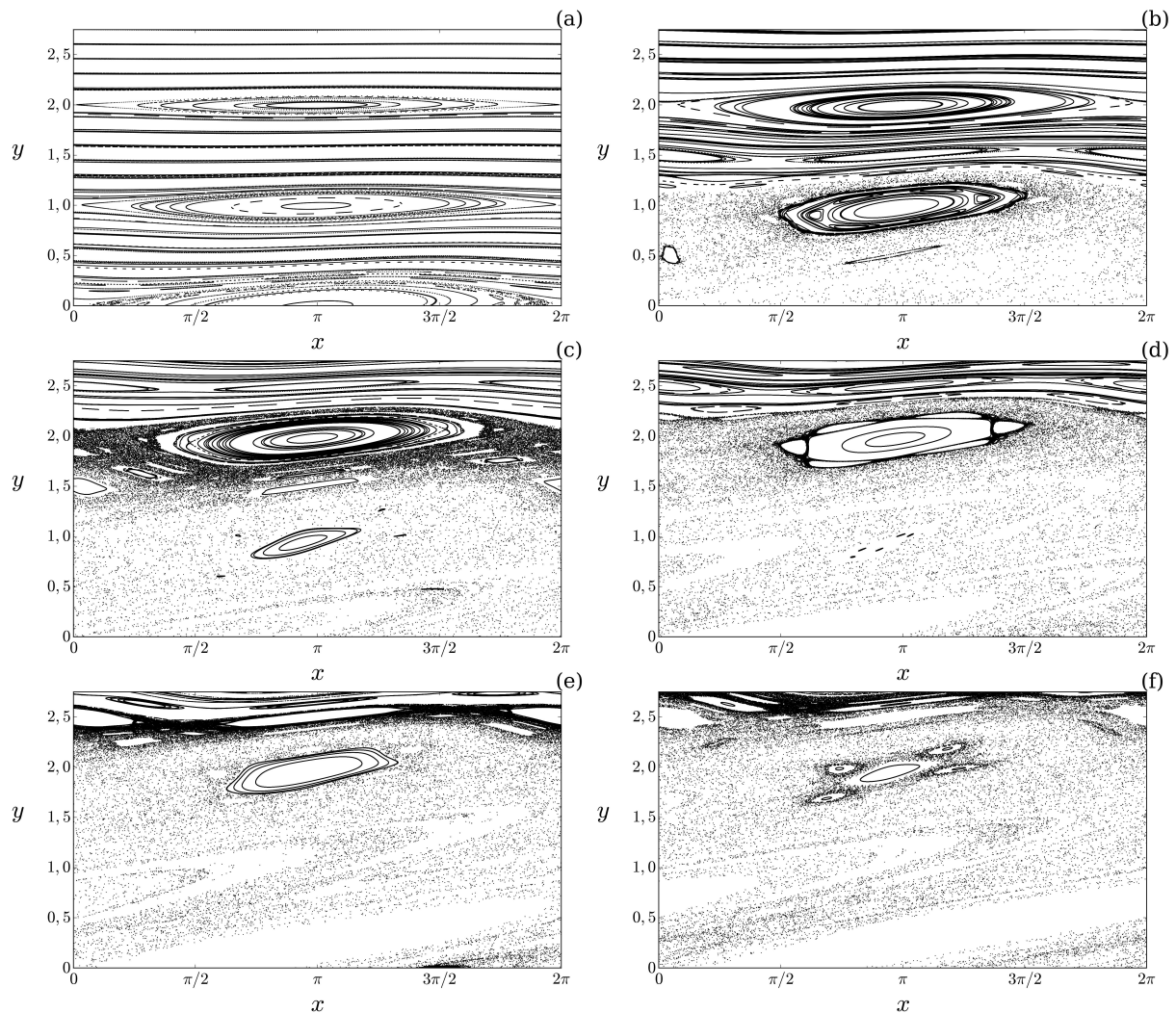


Figura 6.1: Espaços de fase para o mapa de Martin-Taylor para diferentes valores de perturbação p e deslocamento constante $s = 2\pi$. (a) $p = 0,1$, (b) $p = 0,5$, (c) $p = 1,0$, (d) $p = 1,5$, (e) $p = 2,0$ e (f) $p = 2,5$.

Conforme aumentamos a intensidade de perturbação $p = 0,5$, os toros KAM existentes entre as ilhas ($y = 0$ e $y = 1,0$) vão sendo deformados e eventualmente destruídos, enquanto a

camada caótica da ilha próxima ao limitador aumenta suas dimensões. Na figura 6.1 (b), a ilha que estava localizada em $x = \pi$ e $y = 0$, para $m = 0$, na figura (a), foi imersa no mar caótico. Na figura 6.1 (d), a ilha central localizada em $x = \pi$ e $y = 1, 0$, para $m = 1$, que antes aparecia no espaço de fase da figura 6.1 (c), foi englobada pelo caos. Nessa figura, percebemos que a perturbação fornecida foi alta o suficiente para destruir o último toro KAM próximo da parede do tokamak em $y = 0$. Para uma intensidade maior de perturbação $p = 2, 0$, na figura 6.1 (e) e $p = 2, 5$, na figura 6.1 (f), os espaços de fase apresentam uma maior área caótica. A ilha remanescente para esses valores de parâmetros, localizada em $x = \pi$ e $y = 2, 0$, para $m = 2$, está distorcida devido ao parâmetro de deslocamento ser diferente de zero ($s = 2\pi$). Para um valor maior de perturbação p a ilha será destruída.

Se alterarmos o valor do deslocamento s , de acordo com os trabalhos [27, 53, 56], encontramos outras cadeias de ilhas em outras posições ressonantes. A origem da área caótica é ocasionada pela aproximação entre as ilhas com o aumento de s .

As ilhas magnéticas podem ser encontradas através dos pontos fixos do mapa de Martin-Taylor, equação (5.33) [56]:

$$\begin{aligned} x^* &= \pi m + \frac{p}{2} e^{-y^*} \cos x^*, \\ y^* &= \frac{2\pi m}{s} + \frac{p}{s} e^{-y^*} \cos x^*, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde m é um número inteiro positivo, e x é periódico em 2π , ou seja, $x = x \pm 2\pi m$.

Considerando p suficientemente pequeno, podemos aproximar $pe^{-y} < 1$. Assim, expandindo as equações (6.1) em termos de p , e ignorando os termos quadráticos de p , obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + \frac{p}{2} e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2), \\ x_2 &= \pi - \frac{p}{2} e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

e

$$y = \frac{2\pi m}{s} - \frac{p}{s} e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2). \quad (6.3)$$

Assim, os pontos fixos do mapa são:

$$P_1 = (x_1, y) = \left(0 + \frac{p}{2}e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2), \frac{2\pi m}{s} - \frac{p}{s}e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2) \right),$$

$$P_2 = (x_2, y) = \left(\pi - \frac{p}{2}e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2), \frac{2\pi m}{s} - \frac{p}{s}e^{(-\frac{2\pi m}{s})} + o(p^2) \right),$$

onde P_1 representa os pontos hiperbólicos e P_2 representa os pontos elípticos [56].

As ilhas do mapa de Martin e Taylor, figura 6.1, estão centradas nos pontos elípticos, cujas posições são: $(\pi, \frac{2\pi m}{s})$. Com o aumento da perturbação p , as ilhas sofrem uma mudança ligeiramente pequena na sua localização, com um pequeno erro de $\frac{p}{2}e^{(-\frac{2\pi m}{s})}$.

A semi-largura de uma ilha (ver figura 6.2) centrada em $y_m \approx 2\pi m/s$ é [26]:

$$\Delta y_m \approx 2\sqrt{\frac{p}{s}}e^{(-\frac{\pi m}{s})}, \quad (6.4)$$

na qual, a semi-largura da ilha aumenta com a raiz quadrada da força do limitador e diminui exponencialmente com a posição da ilha.

A separação entre duas ilhas adjacentes (ver figura 6.2) é dada como:

$$\delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{2\pi}{s} + \frac{p}{s}e^{(-\frac{2\pi}{s})}, \quad (6.5)$$

ou seja, $\delta y \approx \frac{2\pi}{s}$.

Conforme a perturbação do sistema aumenta, as semi-larguras das ilhas (Δy_m e Δy_{m+1}) também aumentam. Ademais, quando estas aumentam as camadas caóticas são aproximadas gradativamente, e no decorrer de tal processo os toros KAM existentes entre as ilhas são destruídos. No limite quando as “separatrizes” das ilhas se tocam, o último toro KAM entre as mesmas é destruído. Quando isto efetivamente ocorre, o que se observa é um mar de pontos distribuídos irregularmente entre as duas ilhas adjacentes, e assim temos caos global [26].

O critério de Chirikov [57], prescreve o início do caos global. Assim, para um valor de perturbação crítica p_c , todos os toros KAM são destruídos. De acordo com Chirikov, o parâmetro de caoticidade entre as ilhas y_m e y_{m+1} é definido como:

$$S_{m,m+1} = \frac{\Delta y_{m+1} + \Delta y_m}{\delta y} = \frac{\sqrt{ps}}{\pi}e^{(-\frac{\pi m}{s})}(1 + e^{(-\frac{\pi}{s})}), \quad (6.6)$$

onde Δy_{m+1} e Δy_m são as semi-larguras das ilhas e δy é a separação entre as mesmas, figura 6.2.

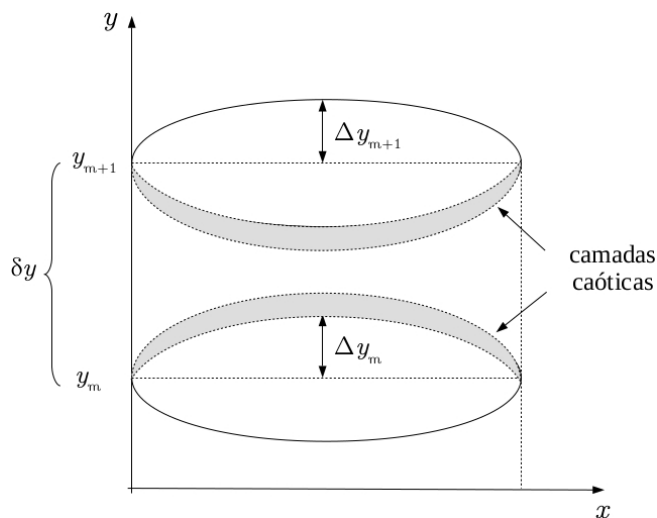


Figura 6.2: Plano xy com a posição das ilhas y_m e y_{m+1} .

O critério de Chirikov estabelece que o último toro entre as ilhas y_m e y_{m+1} é destruído quando $\mathcal{S}_c = 1$ [57]. Assim, para o caso do mapa de Martin e Taylor, equação (5.33), é possível obtermos uma estimativa teórica para o valor de p_c , por meio do critério de Chirikov. Considerando a quebra do último toro entre as ilhas secundárias $y = 1,0$ e a seguinte $y = 2,0$, o parâmetro de caoticidade é $\mathcal{S}_{12} \approx \sqrt{2p_c/\pi}$, assim obtemos o valor de $p_c \approx 1,57$. Portanto, para valores maiores de p_c obtemos caos global próximo à parede do tokamak em $y = 0$. Na figura 6.1 (d), podemos observar que o último toro KAM foi destruído para a perturbação $p = 1,5$.

6.2 Bacias de escape para duas saídas

Podemos analisar a perda de linhas de campo magnético através de bacias de escape. A bacia de escape de uma dada saída é o conjunto de condições iniciais (na superfície de seção) que geram linhas de campo magnético que atingem esta saída, sem ter antes atingido outra saída, após um certo número de iterações.

Consideramos como escape, as órbitas da borda do plasma que atingem a parede do tokamak em $y = 0$, após n iterações. Dividimos a parede do tokamak em duas saídas, para cada saída foi associado uma cor diferente, ou seja, o intervalo $(0 \leq x < \pi)$, corresponde aos pontos em vermelho e o intervalo $(\pi \leq x < 2\pi)$, corresponde aos pontos em verde. Órbitas que não

atingiram a parede após o limite de iterações (10^4) foram deixadas na cor branca. A união dos pontos em vermelho formam a bacia A e dos pontos em verde a bacia B .

Dividimos o espaço de fase em uma grade de pontos, em que cada um deles é a condição inicial (x_0, y_0) para uma órbita do mapa, equação (5.33). Uma vez que o mapa nos fornece as coordenadas das linhas de campo na seção de Poincaré, a colisão com a parede geralmente ocorre entre duas iterações sucessivas do mapa, ou seja, (x_n, y_n) e (x_{n+1}, y_{n+1}) . Portanto, o escape na parede, em $y_e = 0$, ocorre quando $y_n < 0 < y_{n+1}$. A coordenada polar x_e , relacionada ao escape é obtida por interpolação linear: $x_e = x_n - \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \right) x_n$, esquematizado na figura 6.3.

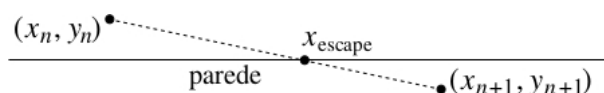


Figura 6.3: Esquema do método adotado para a estimativa da posição de escape de uma dada linha de campo magnético.

Na figura 6.4, mostramos as bacias de escape com o deslocamento constante $s = 2\pi$ e para diferentes valores de perturbação em (a) $p = 0,5$, em (b) $p = 1,5$, em (c) $p = 2,0$ e em (d) $p = 2,5$. Para intensidade de perturbação baixa, figura 6.4 (a), a incidência sobre a região ($0 \leq x < \pi$) é muito pequena, mostrando que as órbitas têm preferência pela saída na região ($\pi \leq x < 2\pi$). Quando aumentamos a perturbação, as bacias mostram-se mais complexas, com a destruição do toro KAM entre as ilhas secundárias ($y = 1,0$ e $y = 2,0$), figura 6.4 (b). Para perturbações altas $p = 2,0$ e $p = 2,5$, figuras 6.4 (c) e (d), na maior parte da região caótica, as bacias A e B estão muito misturadas, exibindo fronteiras com aspectos fractais. As perturbações elevadas provocam canais de escape mais profundos e mais largos favorecendo a uniformização na deposição de linhas de campo magnético na parede do tokamak.

Cada condição inicial (x_0, y_0) foi iterada (dentro do limite de iterações) até a colisão com a parede do tokamak em $y = 0$. Computamos então, o número n de iterações no mapa de Poincaré (ou voltas toroidais) necessárias para que uma linha de campo magnético atinja a parede do tokamak em $y = 0$. Esse tipo de estudo é conhecido com o nome de comprimento de conexão. Sendo assim, traçamos um mapa de conexão escolhendo uma grade de condições iniciais (x_0, y_0) e obtendo o número n de iterações para cada condição. Associamos uma cor para cada intervalo de 10 iterações e obtivemos a figura 6.5, considerando $s = 2\pi$ e $p = 2,5$.

As condições iniciais com $n > 100$ foram pintadas em vermelho.

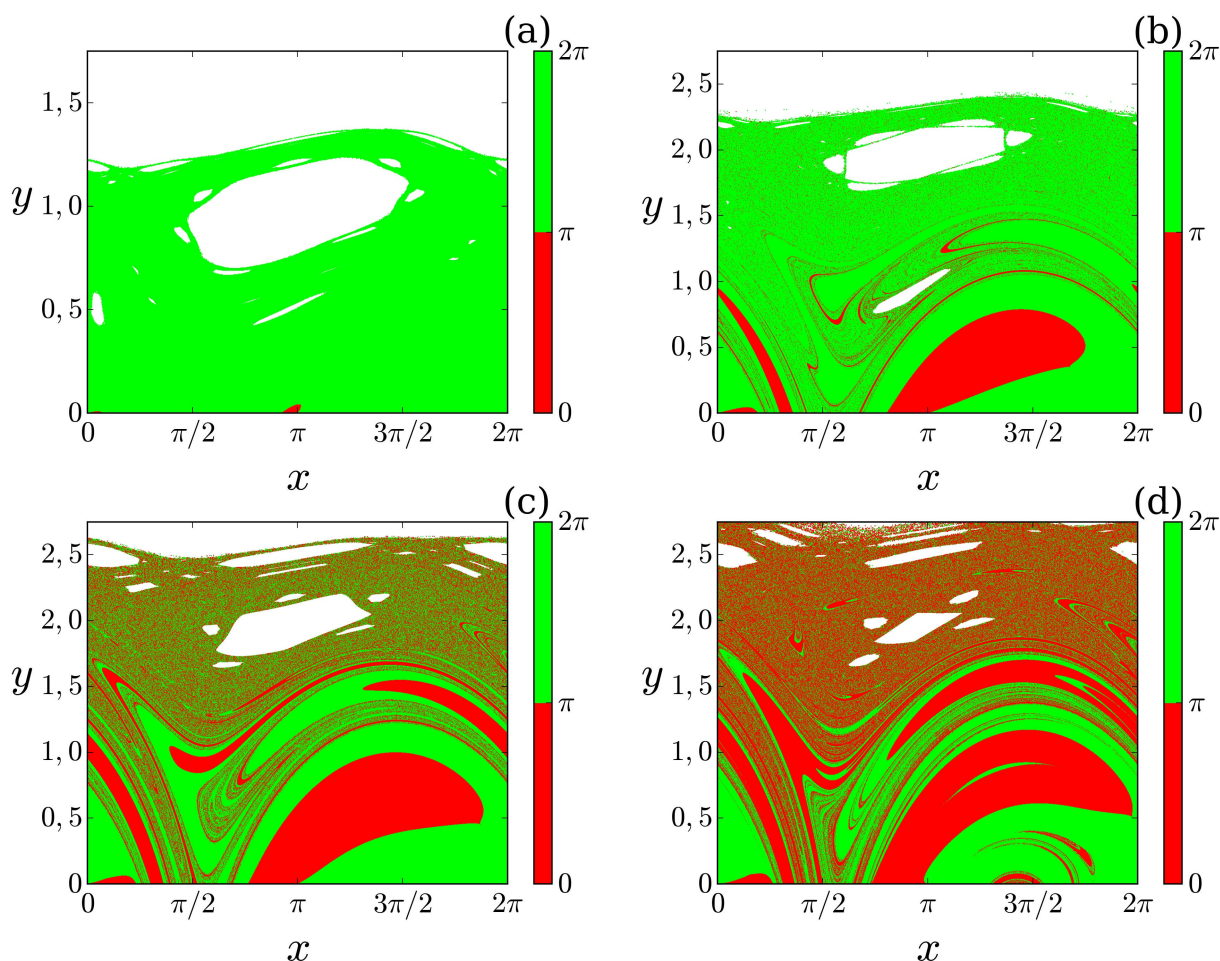


Figura 6.4: Bacias de escape com saídas em: $(0 \leq x < \pi, y = 0)$, bacia em vermelho e $(\pi \leq x < 2\pi)$, bacia em verde, para $s = 2\pi$ e diferentes valores de perturbação. (a) $p = 0,5$, (b) $p = 1,5$, (c) $p = 2,0$ e (d) $p = 2,5$. Órbitas com condições iniciais na região em branco não escapam.

A sensibilidade das condições iniciais define se uma dada linha de campo magnético é caótica ou estável. Se compararmos o comprimento de conexão, da figura 6.5, e a bacia de escape, da figura 6.4 (d), vemos que o comprimento de conexão pequeno está relacionado com a estabilidade da linha de campo magnético e conseqüentemente com a não divergência de suas trajetórias. Semelhantemente, comprimentos de conexão maiores, relacionam-se com o quão caótica é a linha de campo magnético e portanto com a divergência de suas trajetórias. As figuras 6.4 (d) e 6.5, apresentam uma semelhança apesar das figuras tratarem de informações diferentes. Porém, essa semelhança não vale para todo o espaço de fase, regiões bem definidas surgem nas bacias de escape quando há regiões bem definidas também no mapa do comprimento de

conexão, ou seja, quando n é pequeno. Assim, linhas de comprimentos de conexão pequenos e com valores iniciais próximos escapam para uma mesma saída e com comprimentos de conexão maiores temos linhas, mesmo com condições iniciais muito próximas, escapando para saídas diferentes. Essa estrutura semelhante, presente nas figuras, pode ser melhor entendida a partir das variedades invariantes e da sela caótica.

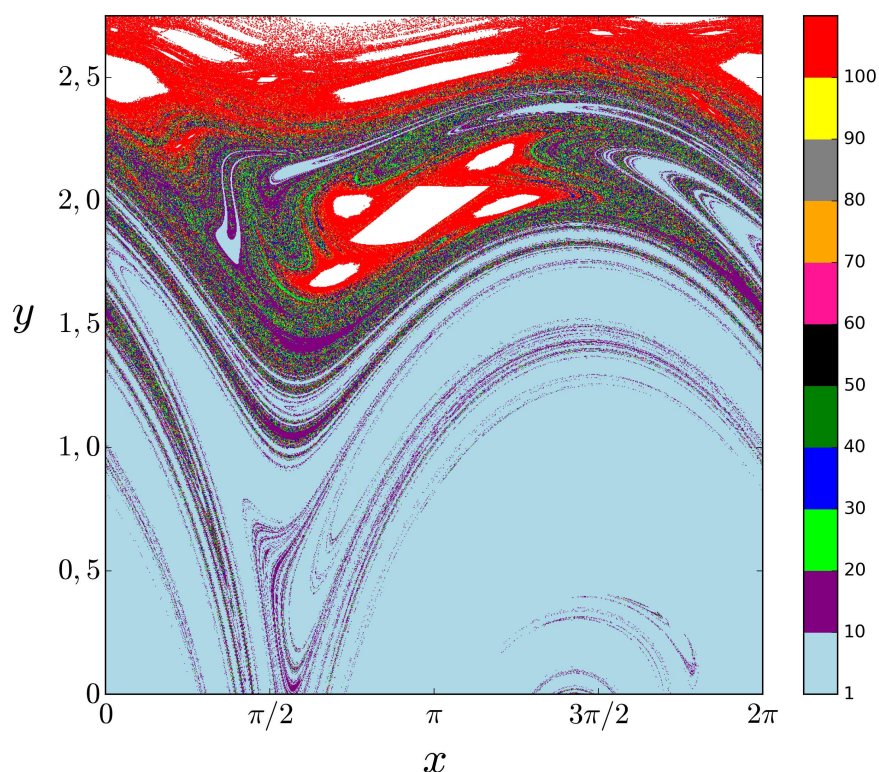


Figura 6.5: Mapa do comprimento de conexão (medida em número de iterações no mapa) para condições iniciais no espaço de fase do mapa de Martin e Taylor para $s = 2\pi$ e $p = 2, 5$.

6.3 Variedades invariantes e sela caótica

As variedades invariantes da sela caótica foram obtidas utilizando o método do regador [58]. Este método consiste, em dividir a região caótica do espaço de fase em uma malha fina, iterando cada ponto da malha um número n de iterações sobre o mapa, equação (5.33).

Para obtermos as variedades, consideramos um número n_i de iterações do mapa e um erro ξ , no qual n_i deve ser maior que o valor médio do comprimento de conexão, e $\xi = 0,5$, sendo uma boa escolha para esse sistema dinâmico [31]. A aproximação da variedade estável é

obtida das condições iniciais que levam as trajetórias das linhas de campo magnético à cruzarem a parede do tokamak quando $n_i = 100$, figura 6.6 (a). Em contrapartida, a aproximação da variedade instável resulta das trajetórias das linhas de campo magnético após $n_i = 100$ iterações, figura 6.6 (b). E a sela caótica, provém de condições iniciais, cujas trajetórias são obtidas quando $\bar{n} = 0,5 \cdot n_i = 50$, figura 6.6 (c).

Uma importante consequência física, da estrutura da variedade invariante revelada pela figura 6.6, é que a distribuição espacial dos comprimentos de conexão é altamente não uniforme, conforme mostrado na figura 6.5, uma vez que as linhas de campo servem como guias para as partículas carregadas. De acordo com o mapa de comprimento de conexão, temos que as regiões de maior comprimento de conexão tendem a seguir a variedade estável da fronteira. Enquanto os pontos exatamente sob a variedade estável não escapam, pontos muito próximos dessa variedade, levarão mais iterações para escapar ($n_i > 100$).

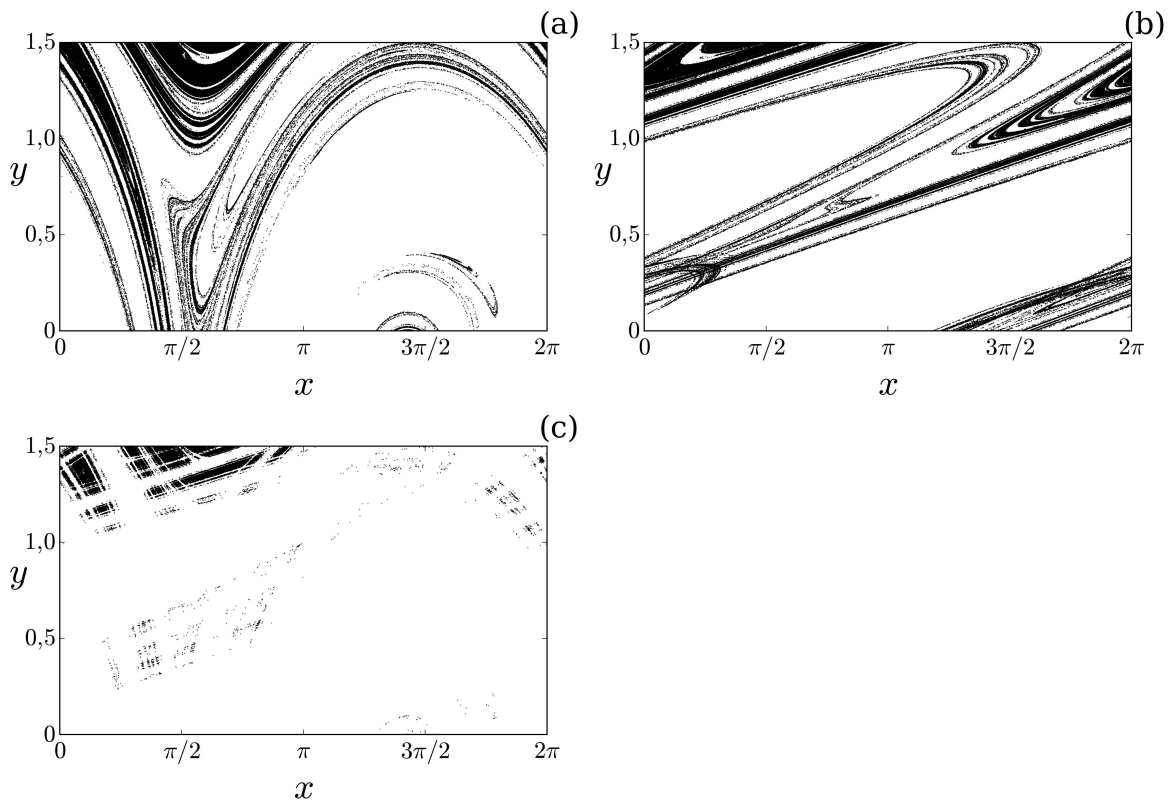


Figura 6.6: Variedades invariantes da sela caótica para o caso $s = 2\pi$ e $p = 2,5$, $n_i = 100$ e $\xi = 0,5$: (a) estável, (b) instável e (c) sela caótica.

É evidente que a variedade estável da figura 6.6 (a), traça a fronteira entre as bacias A e B da figura 6.4. Além disso, a forma da variedade instável, da figura 6.6 (b), nos ajuda a

entender a preferência pela saída B , uma vez que a variedade instável intercepta a parede do tokamak em $y = 0$, no intervalo da saída da bacia B ($\pi \leq x < 2\pi$).

Por fim, estas variedades guiam as linhas de campo magnético para a parede do tokamak em posições que refletem a natureza fractal deste fenômeno. A fronteira da bacia de escape da figura 6.4, pode ser medida através da dimensão fractal.

6.4 Fronteiras das bacias de escape fractais

Uma forma de quantificarmos a complexidade das fronteiras da bacia de escape, da figura 6.4, é medindo-se a dimensão fractal das fronteiras. Para determinarmos a dimensão fractal das fronteiras das bacias de escape, utilizamos o método da incerteza [33], explicado na Seção 4.5. Aqui, comparamos os casos com intensidades elevadas de perturbação, $p = 2,0$ e $p = 2,5$, com deslocamento $s = 2\pi$.

Na figura 6.7, mostramos o gráfico $\log\text{-}\log$ de $\tilde{f}(\varepsilon) \times \varepsilon$, fração incerta como uma função do raio de incerteza, para a fronteira da bacia de escape, dada pela figura 6.4, para os casos de $p = 2,0$ e $p = 2,5$ com deslocamento $s = 2\pi$.

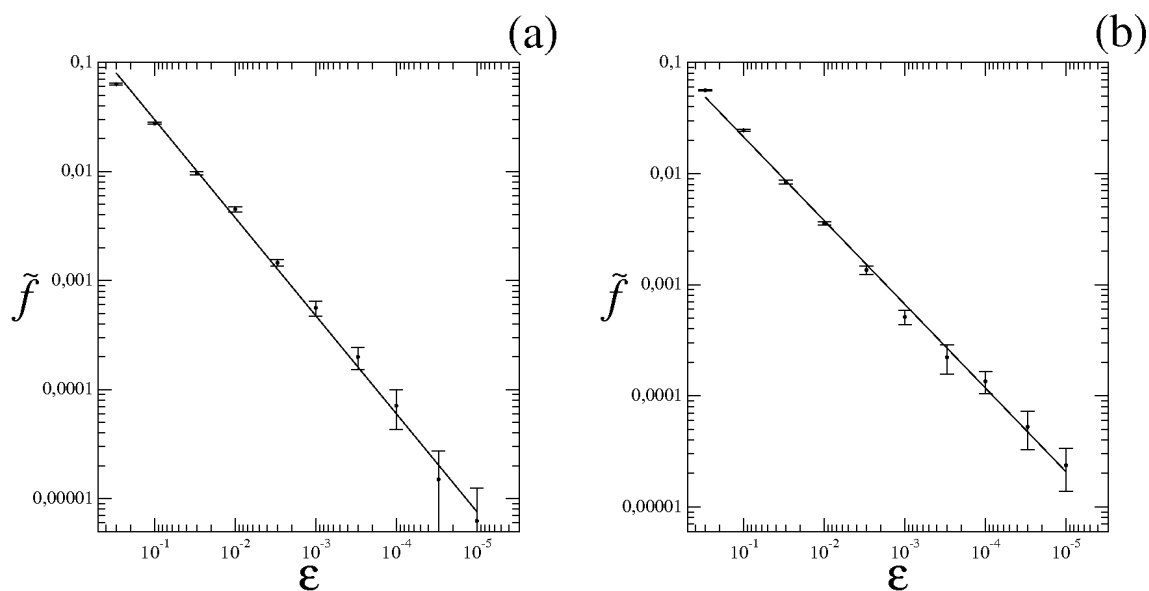


Figura 6.7: Fração de condições iniciais incertas, \tilde{f} , em função da incerteza, ε , para a fronteira da bacia de escape com valores diferentes de p , considerando o deslocamento $s = 2\pi$. (a) $p = 2,0$ e (b) $p = 2,5$.

Para a intensidade de perturbação menor, $p = 2,0$, obtemos a dimensão: $d \approx 1,1010 \pm$

0,0199, cujo o expoente de incerteza é $\alpha = 0,8990 \pm 0,0199$, figura 6.7 (a). Quando aumentamos a intensidade de perturbação para $p = 2,5$, a estrutura da bacia é mais complexa, tendo dimensão $d \approx 1,2469 \pm 0,0156$, e expoente de incerteza $\alpha = 0,7531 \pm 0,0156$, figura 6.7 (b). Os expoentes de incerteza foram obtidos ajustando a curva $\tilde{f}(\varepsilon) \times \varepsilon$.

Comparando os resultados encontrados da dimensão fractal para as diferentes intensidades de perturbação p , podemos ver que o aumento da perturbação leva a bacia a ter uma estrutura mais complexa, confirmando nossa impressão na figura das bacias de escape 6.4.

Para quantificarmos o grau de incerteza devido a fractalidade da fronteira da bacia de escape, aplicamos o cálculo da entropia da bacia, introduzida por Daza e coautores [34], descrito na Seção 4.5.

A entropia da bacia S_b é obtida somando os valores da entropia S , da equação (4.13), com relação a todas as caixas com condições iniciais que escaparam (p_1 e p_2) e dividindo o resultado pelo número de caixas para o qual todas as condições iniciais escaparam N . A entropia da fronteira da bacia S_{bb} é obtida semelhantemente, mas excluímos dos cálculos as caixas em que $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, ou seja, analisamos apenas as caixas no qual tinham ao menos uma fronteira em seu interior N_b .

Considerando a estrutura da bacia de escape da figura 6.4, com saídas na parede em $y = 0$, A : ($0 \leq x < \pi$), corresponde a bacia representada por pontos em vermelho, e B : ($\pi \leq x < 2\pi$), corresponde a bacia representada por pontos em verde. Usamos uma resolução de 200×200 caixas com 25 trajetórias distribuídas dentro de cada caixa de tamanho $\varepsilon = 5$, para o cálculo da entropia.

Na figura 6.8 são plotados os valores da entropia da bacia S_b e da entropia da fronteira da bacia S_{bb} em termos da intensidade da perturbação p . De acordo com a figura, a entropia da bacia S_b cresce conforme a intensidade p . Para $p = 1,75$ a entropia S_b decresce até o valor máximo de perturbação $p = 2,5$. Esse comportamento pode ser observado na figura 6.4, onde as bacias vermelha e verde progressivamente tornam-se mais misturadas.

O comportamento das entropias, pode ser qualitativamente entendido, comparando os resultados com a fração ocupada pela área da bacia vermelha, referente a saída na parede do tokamak em $y = 0$ e ($0 \leq x < \pi$), plotado também na figura 6.4. Ambas as entropias S_b e S_{bb} , seguem a variação da fração ocupada pela área da bacia vermelha (\mathcal{A}). Para o valor da

intensidade $p = 1,75$, os valores correspondentes das entropias atingem os valores máximos, assim como a fração ocupada pela área da bacia vermelha em torno de 50%. A entropia da fronteira da bacia S_{bb} é relevante para quantificarmos o quão misturadas estão as bacias. Para este valor de perturbação ($p = 1,75$), as bacias estão praticamente misturadas.

Em geral, o grau de complexidade da estrutura da bacia e da sua fronteira aumenta com a intensidade de p . Como estamos estudando bacias de escape com duas saídas (figura 6.4), novamente o critério da equação (4.15), $S_{bb} > 1,0$, não é satisfeito. Entretanto, a estrutura presente na bacia de escape da figura 6.4 é fractal de acordo evidências anteriores.

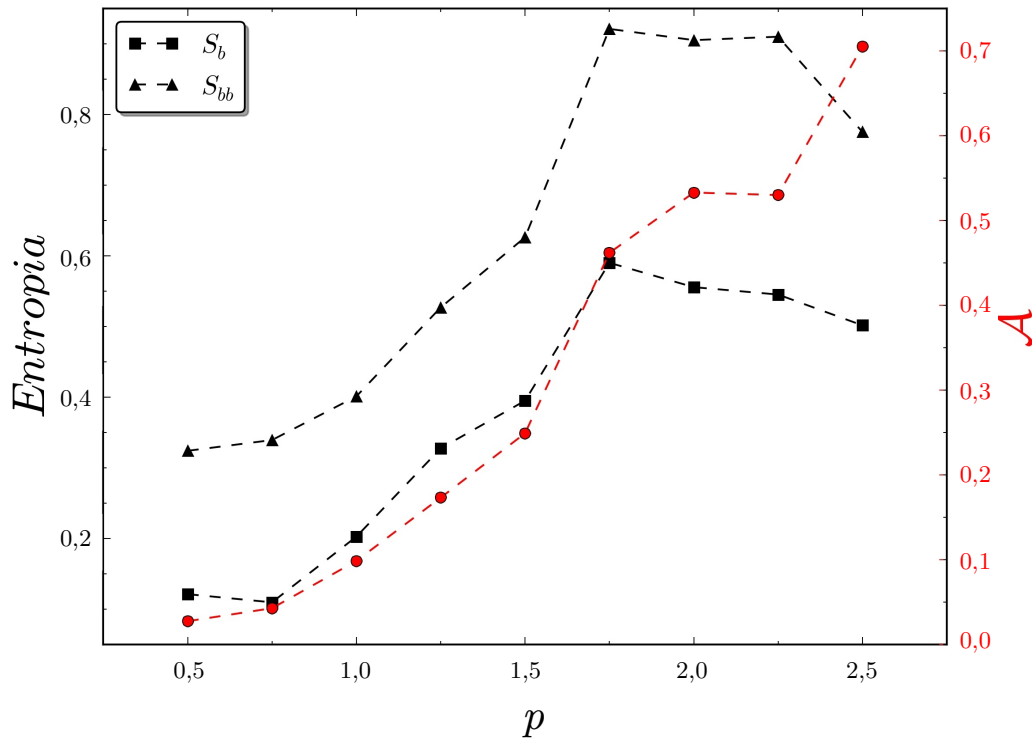


Figura 6.8: Entropias da bacia S_b e da fronteira da bacia S_{bb} e fração ocupada pela área da bacia vermelha (A) para o caso de duas saídas da figura 6.4 como uma função da intensidade da perturbação p .

6.5 Bacias de escape para três saídas

Nesta seção, dividimos a parede do tokamak em três saídas para estudarmos a propriedade de Wada [35]. Para cada saída foi associado uma cor diferente, ou seja, o intervalo $(0 \leq x < 2\pi/3)$, corresponde aos pontos em azul, o intervalo $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3)$, corresponde aos pontos em vermelho e o intervalo $(4\pi/3 \leq x < 2\pi)$, corresponde aos pontos em verde.

Órbitas que não atingiram a parede após o limite de iterações (10^4 voltas toroidais no tokamak) foram deixadas na cor branca. A união dos pontos em azul formam a bacia A , dos pontos em vermelho a bacia B e dos em verde a bacia C .

Na figura 6.9 é plotada a bacia de escape para três saídas com intensidade de perturbação elevada $p = 2,5$ e deslocamento constante $s = 2\pi$. A propriedade de Wada pode ser vista nas sucessivas ampliações (b)-(d) do retângulo em amarelo da figura 6.9 (a), revelando uma parte da terceira bacia onde parecia ser a fronteira entre as outras duas bacias. Isto é uma evidência da fronteira de Wada, que é uma fronteira fractal em que cada ponto delimita três bacias ou mais [35]. Esta propriedade não está presente totalmente na bacia de escape, uma vez que, a fronteira é fractal apenas nos pontos que tendem assintoticamente à borda das saídas. O trecho da variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as três bacias na figura 6.6 (b) é outra evidência da propriedade de Wada.

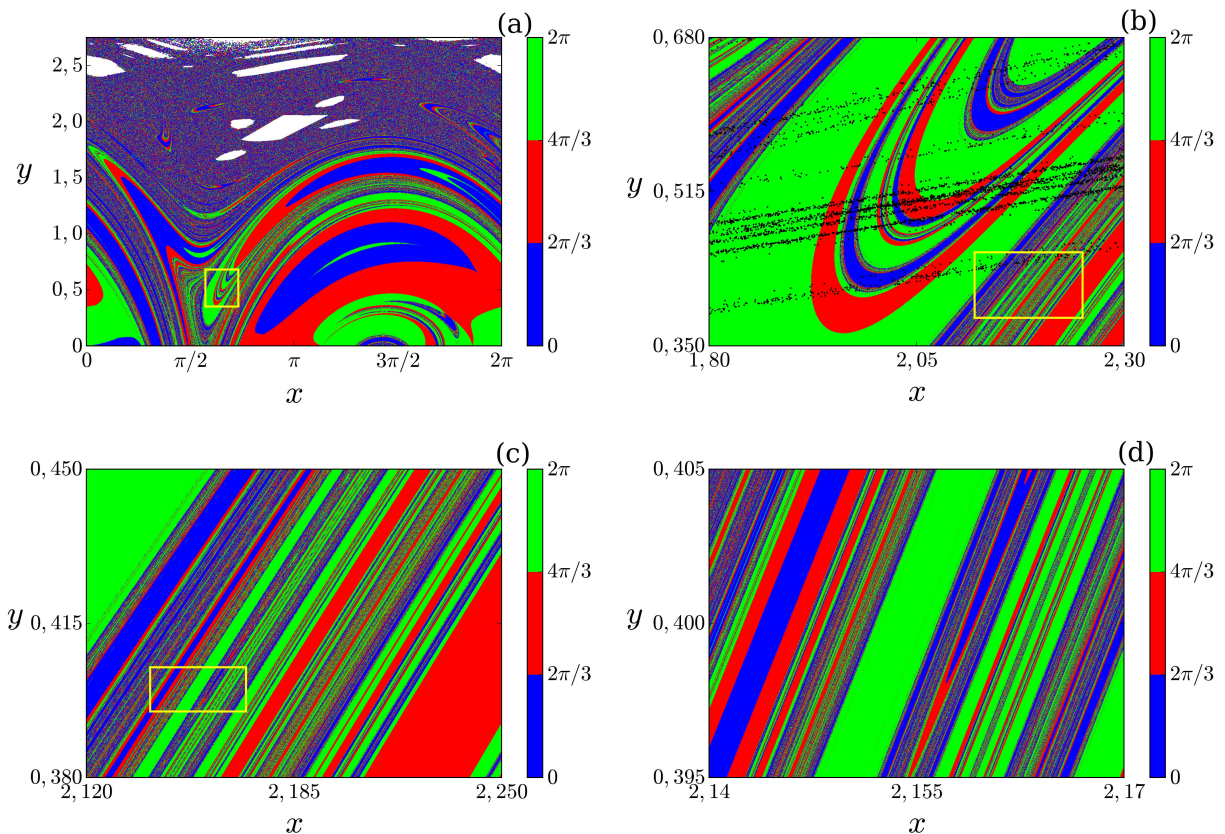


Figura 6.9: Bacias de escape com saídas em: $(0 \leq x < 2\pi/3)$, bacia em azul, $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3)$, bacia em vermelho, e $(4\pi/3 \leq x < 2\pi)$ bacia em verde, para $s = 2\pi$ e $p = 2,5$, figura (a). As figuras (b), (c) e (d) representam sucessivas ampliações do retângulo amarelo nas figuras. Em (b) a variedade instável da sela caótica (em preto) cruzando as bacias é um indício da propriedade de Wada.

Para quantificarmos a propriedade de Wada utilizamos o método da grade proposto por Daza e coautores [36], mencionado na Seção 4.6. A figura 6.9 (a), possui três bacias, onde $N_A = 3$. Dividimos a estrutura da bacia de escape em caixas, cada uma delas contendo um ponto da bacia. Analisamos então cada conjunto de caixa formado por 9 caixas. Estabelecemos que se todas as caixas são da mesma cor que a da caixa central, o ponto central pertence ao conjunto G_1 . Se existirem caixas de mesma cor mas com cor diferente da caixa central, este irá pertencer ao conjunto G_2 . E se todas as caixas vizinhas apresentarem as outras duas cores faltantes, o ponto central irá pertencer ao conjunto G_3 .

Em cada passo de refinamento, averiguamos se os pontos de G_2 poderiam ou não pertencer a G_3 testando q condições iniciais intermediárias entre a caixa central e a caixa vizinha de cor diferente. Se alguma dessas q condições iniciais intermediárias exibirem a terceira cor faltante, a caixa central é reclassificada como G_3 .

A figura 6.10, mostra em preto os pontos classificados como G_1 , que pertencem a alguma bacia, e os pontos em vermelho, que após $q = 18$ passos de refinamento continuam a pertencer ao conjunto G_2 , ou seja na fronteira da bacia. Os pontos em azul pertencem ao conjunto G_3 , ou seja, satisfazem a propriedade de Wada. Fica claro aqui, que embora muitas condições iniciais exibam a propriedade de Wada, existem pontos que não satisfazem essa condição. Assim, a bacia da figura 6.9 (a) é classificada como parcialmente Wada [36].

Representado no histograma da figura 6.11 (a), o número de pontos iniciais classificados inicialmente como G_2 e após q passos de refinamento passam a pertencer ao conjunto G_3 . Podemos observar, que após $q = 3$ passos de refinamento, o número de pontos (N) reclassificados decresce a zero quando q aumenta. Esta convergência pode ser vista também na figura 6.11 (b), através do valores das quantidades W_2 e W_3 , obtidos da equação (4.19), na Seção 4.6. Para $q = 18$, as quantidades convergem para $W_2 \approx 0,112$ e $W_3 \approx 0,888$. Uma vez que obtemos a quantidade $0 < W_3 < 1$, de acordo com [36], podemos dizer que a estrutura da bacia da figura 6.9 (a) é parcialmente Wada.

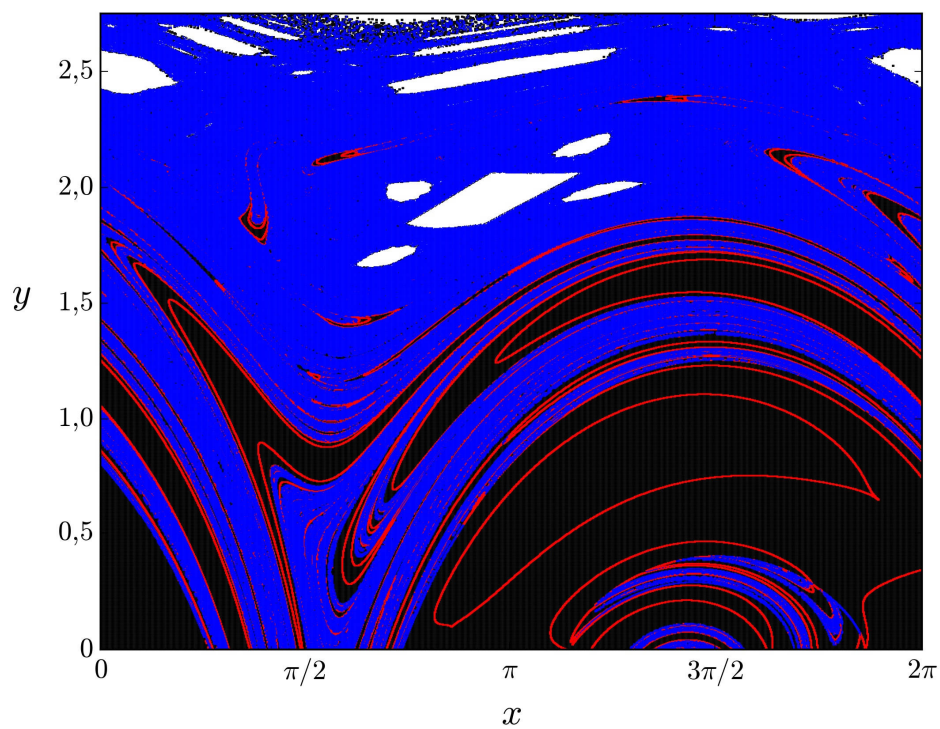


Figura 6.10: Estrutura da bacia da figura 6.9 (a), mostrando em preto os pontos classificados como G_1 (pontos internos da bacia), em vermelho pontos do conjunto G_2 (pontos da fronteira entre duas bacias) que após $q = 18$ passos de refinamento continuam a pertencer a este conjunto, e estão em azul os pontos do conjunto G_3 (pontos da fronteira entre três bacias).

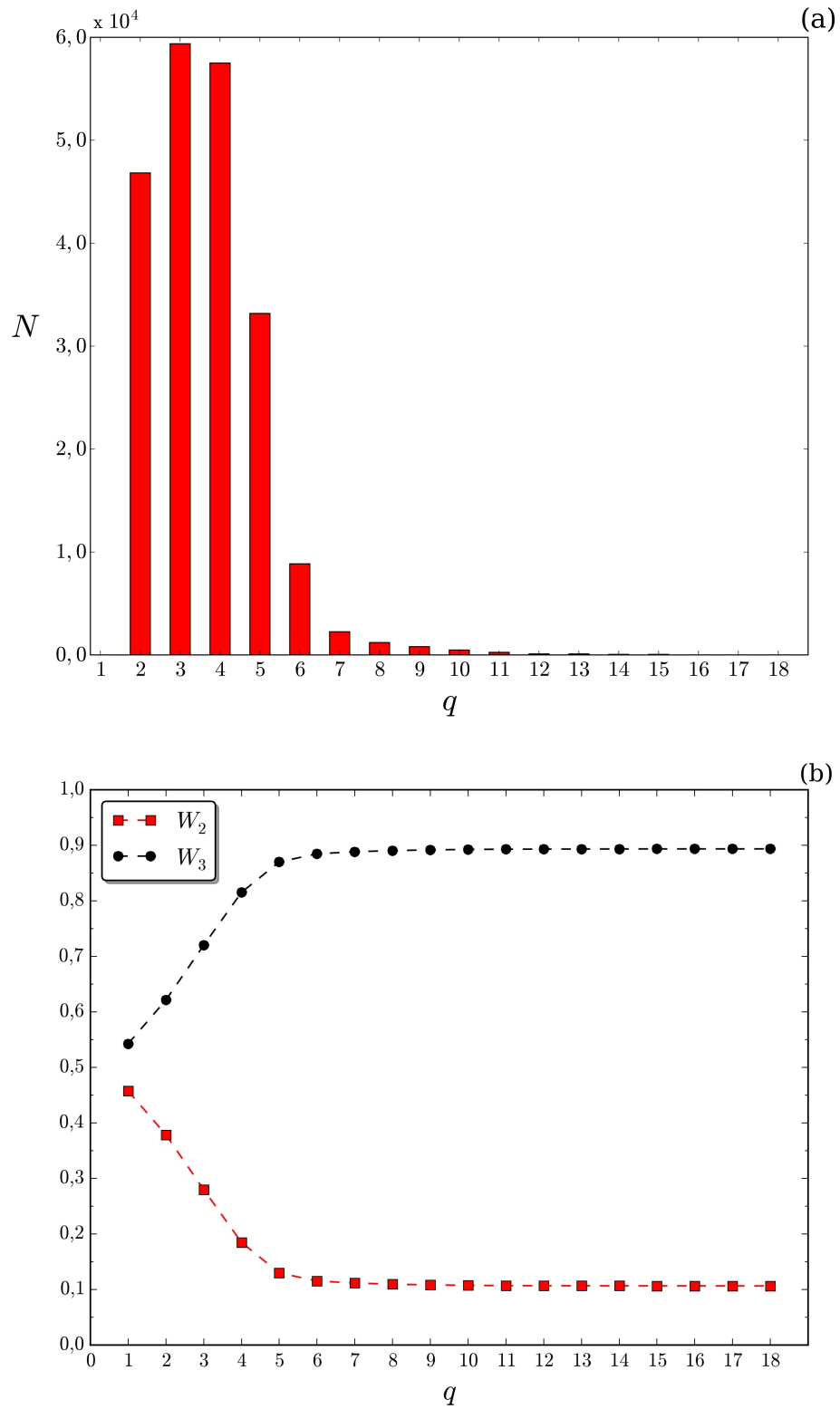


Figura 6.11: Em (a) número de pontos reclassificados em cada passo de refinamento q , usando o método da grade para a estrutura da bacia da figura 6.9 (a). Em (b) os valores das quantidades W_2 e W_3 como uma função do passo de refinamento q .

Capítulo 7

Conclusões

O entendimento do processo de escape de trajetórias de partículas e energia é muito importante para a eficiência das máquinas destinadas à obtenção da fusão nuclear. A colisão de partículas com a parede metálica do tokamak é um dos principais problemas enfrentados para a qualidade do confinamento do plasma. Uma forma de evitar a contaminação do plasma com impurezas arrancadas da parte interna do tokamak é a utilização de um limitador magnético caótico ao redor do dispositivo de confinamento. O limitador magnético caótico é capaz de gerar, na periferia da coluna de plasma, uma região de linhas de campo magnético caóticas que auxiliam no controle da interação entre o plasma e a parede do tokamak.

Na primeira parte desta tese, utilizamos o modelo hamiltoniano, proposto por W. Horton, para estudar o transporte de partículas na borda do plasma, causado principalmente, por ondas de deriva que aparecem ao confinar o plasma magneticamente em tokamaks. Nesse modelo para ondas de deriva, consideramos o movimento de deriva do centro de guia das partículas e analisamos o efeito da deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$.

Inicialmente, no Capítulo 3, apresentamos o modelo físico que descreve o transporte radial de partículas do plasma. A partir da descrição hamiltoniana do modelo, encontramos as equações de movimento que foram utilizadas para obtenção das órbitas das partículas.

No Capítulo 4, através de simulações computacionais, obtivemos resultados bastante interessantes que contribuem para um melhor entendimento do transporte de partículas na borda do plasma. Quando apenas uma onda de deriva é considerada, as trajetórias do centro de guia das partículas são regulares, e as partículas ficam confinadas em estruturas celulares, separadas

por separatrizes que se cruzam nos pontos fixos hiperbólicos. Para este caso, quando $A_2 = 0$, o transporte de partículas é nulo. Quando adicionamos uma segunda onda de deriva, com velocidade de fase diferente da outra, as trajetórias apresentam comportamentos caóticos. As separatrizes, que antes separavam as partículas, foram destruídas e agora as partículas estão livres para percorrer o espaço de fase. Para uma amplitude alta da segunda onda de deriva ($A_2 = 2, 0$), as ilhas, aparentemente, foram todas destruídas e o espaço de fase é dominado pelo caos, dessa maneira, o transporte de partículas é maior, uma vez que as partículas não estão mais confinadas.

A fim de investigarmos a borda do plasma, estudamos como ocorre o processo de escape das partículas na região caótica. Na Seção 4.3, analisamos as bacias de escape para duas saídas, onde consideramos como saídas, a borda do plasma na parede do tokamak em $x = 0$, e uma janela dentro do espaço de fase localizada em $x = \pi/2$ e $y = 3\pi/2$ com largura $l = 0,05$. Observamos neste caso, uma estrutura envolvida para todos os valores do parâmetro A_2 . Quando aumentamos a amplitude da segunda onda de deriva, as fronteiras entre as bacias se mesclam de maneira intrincada e se distribuem formando uma geometria fractal. Resultados semelhantes foram obtidos, alterando o tamanho da largura da saída para $l = 0,15$. Vimos, que para uma saída com tamanho menor, a incerteza em prever por qual saída a trajetória da partícula escapará aumenta.

Na Seção 4.4, considerando a região onde o caos domina ($A_2 = 2, 0$), as variedades instáveis e estáveis e a sela caótica foram feitas para entendermos as fronteiras fractais presentes nas bacias de escape. Com o cálculo das variedades instáveis e estáveis, verificamos que as variedades se cruzam transversalmente inúmeras vezes formando a sela caótica. As trajetórias que formam a variedade instável, permanecem presas por longos períodos de tempo e a variedade estável traça a fronteira fractal das bacias de escape.

A dimensão fractal foi obtida para as bacias de escape com amplitudes $A_2 = 0,1$ e $A_2 = 2,0$, na Seção 4.5. Considerando a saída com largura $l = 0,05$, obtivemos uma dimensão fractal ligeiramente maior quando aumentamos a amplitude da segunda onda de deriva, para $A_2 = 0,1$ encontramos $d \approx 1,92$ e para $A_2 = 2,0$ encontramos $d \approx 1,97$. Porém, para a saída com largura $l = 0,15$, a dimensão fractal não foi afetada, ambas apresentaram dimensões muito próximas $d \approx 1,99$. Além do cálculo da dimensão fractal, calculamos a entropia da

bacia S_b e a entropia da fronteira da bacia S_{bb} . Observamos nas figuras, que em geral, o grau de complexidade da estrutura da bacia e da sua fronteira aumenta com a amplitude de A_2 , para ambas as saídas com tamanhos diferentes.

Na Seção 4.6, incluímos uma terceira saída na bacia de escape, uma janela localizada em $x = \pi/2$ e $y = \pi/2$, com largura $l = 0,15$, para verificarmos a propriedade de Wada. Através, de sucessivas ampliações de regiões das bacias de escape, uma parte da terceira bacia foi revelada, onde parecia ser a fronteira entre as outras duas bacias. Outra evidência da propriedade de Wada é a variedade instável obtida cruzando as três bacias. Para verificarmos o quanto a propriedade de Wada está satisfeita no nosso sistema, aplicamos o método da grade, e os resultados nos mostraram que a bacia de escape com saídas na parede $x = 0$, e janelas dentro do espaço de fase localizadas em: $(x = \pi/2$ e $y = 3\pi/2)$, e $(x = \pi/2$ e $y = \pi/2)$, com largura $l = 0,15$ é classificada como parcialmente Wada, pois embora muitos pontos exibam a propriedade de Wada, existem pontos que não satisfazem a condição.

Na segunda parte desta tese, Capítulo 5, abordamos o problema da ação de um limitador magnético caótico sobre um tokamak, capaz de gerar uma região de linhas de campo magnético caóticas para auxiliar no controle da interação entre o plasma e a parede do tokamak melhorando o confinamento.

Na Seção 5.1, apresentamos a dedução e as propriedades do mapa de Martin e Taylor, que descreve a evolução das linhas de campos magnético sob a influência de um limitador caótico em um tokamak.

No Capítulo 6, mostramos os resultados obtidos utilizando o mapa de Martin e Taylor. Na Seção 6.1, através de mapas de Poincaré, analisamos a dinâmica das linhas de campo magnético para diferentes valores do parâmetro de perturbação p e mantivemos constante o parâmetro deslocamento em $s = 2\pi$. Para a intensidade de perturbação baixa $p = 0,1$, vimos que as cadeias de ilhas estão achatadas e não há muitas regiões de linhas caóticas. Conforme aumentamos a intensidade de p , as cadeias de ilhas magnéticas ressonantes ficam mais largas, e acabam se superpondo, e assim dão origem às regiões de linhas de campo magnético caóticas. Para intensidades elevadas de perturbação $p = 2,0$ e $p = 2,5$, os espaços de fase apresentam uma maior área caótica, com um ilha remanescente, localizada em $x = \pi$ e $y = 2,0$. De acordo com o critério de Chirikov, o caos global é obtido para o valor de perturbação $p_c \approx 1,57$, onde

o último toro KAM próximo à parede foi destruído.

Na Seção 6.2, para caracterizarmos a perda de linhas de campo magnético, analisamos as bacias de escape com duas saídas na parede do tokamak ($y = 0$), A : ($0 \leq x < \pi$) e B : ($0 \leq x < 2\pi$). Para intensidade de perturbação baixa, verificamos que a incidência sobre a região A é muito pequena, mostrando que as órbitas têm preferência pela saída na região B . Quando aumentamos a perturbação p , as bacias mostram-se mais complexas. E para perturbações altas $p = 2,0$ e $p = 2,5$, as bacias A e B estão muito misturadas, exibindo fronteiras com aspecto fractais. Através do mapa do comprimento de conexão, para intensidade de perturbação $p = 2,5$, vimos que as linhas de campo com condições iniciais próximas a parede do tokamak realizam poucas voltas toroidais antes de chocarem-se com a parede em $y = 0$.

Para entendermos a estrutura presente nas bacias de escape, computamos as variedades invariantes da sela caótica com auxílio do método do regador, na Seção 6.3. Comparando os resultados obtidos das variedades e o mapa de comprimento de conexão, temos que as regiões de maior comprimento de conexão tendem a seguir a variedade estável da fronteira. A variedade instável cruzando a parede do tokamak na região B , confirma a preferência do escape das linhas de campo por essa região.

Na Seção 6.4, quantificamos a dimensão fractal da estrutura presente na bacia de escape para $p = 2,0$ e $p = 2,5$. Para a intensidade de perturbação menor, obtemos $d \approx 1,10$ e para a intensidade de perturbação maior, a estrutura da bacia é mais complexa, obtendo $d \approx 1,25$. Para verificarmos o grau de incerteza devido a fractalidade da fronteira da bacia de escape, quantificamos a entropia de bacia S_b e a entropia da fronteira de bacia S_{bb} . Em geral, obtemos que grau de complexidade da estrutura da bacia e da sua fronteira aumenta com a intensidade de p . Porém, para o valor da intensidade $p = 1,75$, os valores correspondentes das entropias atingem os valores máximos, assim como a fração ocupada pela área da bacia vermelha em torno de 50%. Para este valor de perturbação, as bacias estão praticamente misturadas.

Por fim, na Seção 6.5, para averiguarmos a propriedade de Wada, dividimos a parede do tokamak em $y = 0$ em 3 saídas. A bacia de escape para perturbação $p = 2,5$ apresentou a propriedade de Wada, uma vez que, após fazermos sucessivas ampliações da bacia, uma parte da terceira bacia foi revelada, onde parecia ser a fronteira entre as outras duas. A variedade instável cruzando as bacias é outro indício da propriedade de Wada. Com o método da grade, obtemos

que 88,8% dos pontos da fronteira separam 3 bacias, ou seja, que apresentam a propriedade de Wada. Assim, concluímos que a essa bacia é parcialmente Wada.

Dando continuidade ao trabalho de ondas de deriva, podemos aperfeiçoar os resultados obtidos, melhorando os parâmetros de integração. Com relação ao transporte de partículas, os resultados encontrados foram para o valor do parâmetro de confinamento $U = 0$, portanto, podemos obter novos resultados para $U \neq 0$, analisando a existência das barreiras de transporte nos espaços de fase. Para a verificação do transporte radial de partículas, calcularemos o coeficiente de difusão temporal [59], que caracteriza o tipo de transporte. O potencial elétrico utilizado no nosso modelo é do tipo linear, então iremos investigar o transporte de partículas para outros dois tipos de perfis de potencial, um perfil monotônico e um outro não monotônico.

Em relação a utilização de dispositivos capazes de auxiliar no controle da interação do plasma com a parede do tokamak, iremos analisar o fluxo de partículas a partir de um tokamak equipado com um defletor. Para este estudo, em colaboração com o prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, iremos utilizar primeiramente, o mapa de A. Punjabi [60], conhecido como mapa simples para defletor.

Em colaboração com o prof. Dr. José Danilo Szezech Júnior e a sua aluna de mestrado Michele Mugnaine da Universidade Estadual de Ponta Grossa, estamos aplicando o método, introduzido por Daza e coautores [34] para quantificarmos o grau de incerteza devido a fractalidade da fronteira da bacia para o caso do Mapa Não-Twist [61].

Referências Bibliográficas

- [1] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, 1988.
- [2] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, Springer, 2004.
- [3] J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford University Press, 3rd Edition, 2004.
- [4] M. Keilhacker, A. Gibson, C. Gormezano, P.J. Lomas, P.R. Thomas, M.L. Watkins, P. Andrew, B. Balet, D. Borba, C.D. Challis, I. Coffey, G.A. Cottrell, H.P.L. De Esch, N. Deliyanakis, A. Fasoli, C.W. Gowers, H.Y. Guo, G.T.A. Huysmans, T.T.C. Jones, W. Kerner, R.W.T. Konig, M.J. Loughlin, A. Maas, F.B. Marcus, M.F.F. Nave, F.G. Rimini, G.J. Sessler, S.E. Sharapov, G. Sips, P. Smeulders, F.X. Soldner, A. Taroni, B.J.D. Tubbing, M.G. Von Hellermann, D.J. Ward e JET Team, High fusion performance from deuterium-tritium plasmas in JET, *Nuclear Fusion*, vol. 39, n. 2, pag. 209, 1999.
- [5] F. Wagner, G. Becker, K. Behringer, D. J. Campbell, A. Eberhagen, W. W. Engelhardt, G. Fubmann, O. Gehre, J. Gernhardt, M. G. Von, G. Haas e M. Huang, Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak, *Physical Review Letters*, vol. 49, n. 19, pag. 1408, 1982.
- [6] T.C. Luce, M.R. Wade, J.R. Ferron, A.W. Hyatt, A.G. Kellman, J.E. Kinsey, R.J. La Haye, C.J. Lasnier, M. Murakami e P.A. Politzer, Stationary high-performance discharges in the DIII-D tokamak, *Nuclear Fusion*, vol. 43, n. 5, pag. 321, 2003.
- [7] I.C. Nascimento, Y.K. Kuznetsov, J.H.F. Severo, A.M.M. Fonseca, A. Elfimov, V. Bellintani, M. Machida, M.V.A.P. Heller, R.M.O. Galvão e E.K. Sanada, Plasma confinement using biased electrode in the TCABR tokamak, *Nuclear Fusion*, vol. 45, n. 8, pag. 796, 2005.

- [8] Iter physics basis, *Nuclear Fusion*, vol. 39, n. 12, 1999.
- [9] W. Horton, *Turbulent transport in magnetized plasmas*. World Scientific, 2012.
- [10] R. Balescu, *Aspects of anomalous transport in plasmas*, CRC Press, 2005.
- [11] D. E. Post e R. Behrisch, *Introduction to the physics of plasma-wall interactions in controlled fusion*, Plenum Press, pag. 1-14, 1986.
- [12] W. Horton, "Drift waves and transport", *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, pag. 735, 1999.
- [13] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa e B. Gonçalves, "Fluctuations, sheared radial electric fields and transport interplay in fusion plasmas", *New Journal of Physics*, vol. 4, pag. 51, 2002.
- [14] J. W. Connor, "Pressure-Gradient Turbulent Transport and Collisionless Reconnection", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 35, pag. B293, 1993.
- [15] A. J. Wootton, B. A. Carreras, H. Matsumoto, K. McGuire, W. A. Peebles e et al., "Fluctuations and anomalous transport in tokamaks", *Physics of Fluids B*, vol. 2, pag. 2879, 1990.
- [16] R. S. Oyarzabal, J. D. Szezech Júnior, A. M. Batista, I. L. Caldas, R. L. Viana e K. C. Iarosz, "Efeito de um termo dissipativo no sistema hamiltoniano de ondas de deriva", *Revista Brasileira de Física*, vol. 37, n. 2, 2015.
- [17] R. S. Oyarzabal, J. D. Szezech Júnior, A. M. Batista, S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, R. L. Viana e M. A. F. Sanjuán, "Transient chaotic transport in dissipative drift motion", *Physics Letters A*, vol. 380, pag. 1621, 2016.
- [18] R. S. Oyarzabal, J. D. Szezech Júnior, A. M. Batista, J. M. Seane e M. A. F. Sanjuán, "Stochastic resonance in dissipative drift motion", *Physics Letters A*, vol. 54, pag. 62, 2018.
- [19] F. A. Marcus, *Transporte de partículas induzido por ondas de deriva*. Phd thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 2007.

- [20] R. O. Suigh, *Transporte Caótico Causado por Ondas de Deriva*. Phd Thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 2010.
- [21] F. Karger e K. Lackner, "Resonant helical divertor", *Physics Letters A*, vol. 61, pag. 385, 1977.
- [22] W. Engelhardt e W. Feneberg, "Influence of an ergodic magnetic limiter on the impurity content in a tokamak", *Journal of Nuclear Materials*, vol. 76-77, pag. 518, 1978.
- [23] T. E. Evans, "Resonant magnetic perturbations of edge-plasmas in toroidal confinement devices", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 57, pag. 123001, 2015.
- [24] P. J. Morrison, "Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems", *Physics of Plasmas*, vol. 7, pag. 2279, 2000.
- [25] W. Horton, "Onset of stochasticity and the diffusion approximation in drift waves", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 27, pag. 937, 1985.
- [26] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Motion*, Springer, 1995.
- [27] T. J. Martin e J. B. Taylor, "Ergodic behaviour in a magnetic limiter", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 26, pag. 321, 1984.
- [28] B. B. Mandelbrot, *Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension*, 1975.
- [29] J. Aguierre, R. L. Viana e M. A. F. Sanjuán, "Fractal structures in nonlinear dynamics", *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, pag. 333, 2009.
- [30] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott e R. Brown, "Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics", *Physical Review A*, vol. 38, pag. 930, 1988.
- [31] E. G. Altmann, J. S. E. Portela e T. Tél, "Leaking Chaotic Systems", *Reviews of Modern Physics*, vol. 85, pag. 869, 2013.
- [32] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, "Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics", *Science*, vol. 238, pag. 632, 1987.

- [33] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, "Fractal basin boundaries", *Physica D*, vol. 17, pag. 125, 1985.
- [34] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin e M. A. F. Sanjuán, "Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems", *Scientific Reports*, vol. 6, pag. 3416, 2016.
- [35] H. E. Nusse e J. A. Yorke, "Wada basin boundaries and basin cells", *Physica D*, vol. 90, pag. 242, 1996.
- [36] A. Daza, A. Wagemakers, M. A. F. Sanjuán e J. A. Yorke, "Testing for Basins of Wada", *Scientific Reports*, vol. 5, pag. 16579, 2015.
- [37] A. C. Mathias, R. L. Viana, T. Kroetz e I. L. Caldas, "Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves", *Physica A*, vol. 469, pag. 681, 2017.
- [38] R. L. Viana, A. C. Mathias, F. A. Marcus, T. Kroetz e I. L. Caldas, "Fractal boundaries in chaotic hamiltonian systems", *Journal of Physics: Conference Series*, aceito para publicação.
- [39] A. C. Mathias, T. Kroetz, I. L. Caldas e R. L. Viana, "Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter", submetido para *Chaos, Solitons & Fractals*.
- [40] R.J. Goldston e P.H Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*. CRC Press, 2010.
- [41] B. B. Kadomtsev, *Tokamak Plasma: A Complex Physical System*, IOP Publishing Ltd., London, 1992.
- [42] W. Horton. "Anomalous Ion Conduction From Toroidal Drift Modes", *Plasma Physics*, vol. 23, pag. 1107, 1981.
- [43] C. Hidalgo. "On the nature of transport in fusion plasmas", *Astrophysics and Space Science*, vol. 292, pag. 681, 2004.

- [44] Ch. P. Ritz, R. V. Bravenec, P. M. Schoch, R. D. Bengston, J. A. Boedo, J. C. Forster, K. W. Gentle, Y. He, R. L. Hickok, Y. J. Kim, H. Lin, P. E. Phillips, T. L. Rhodes, W. L. Rowan, P. M. Valanju and A. J. Wootton. "Fluctuation-induced energy flux in the tokamak edge", *Physical Review Letters*, vol. 62, pag. 3099, 1989.
- [45] M. V. Berry, "Regular and Irregular Motion", *AIP Conference Proceedings*, vol. 46, pag. 16, 1978.
- [46] F. A. Marcus, I. L. Caldas, Z. O. Guimarães-Filho, P. J. Morrison, W. Horton, Yu. K. Kuznetsov e I. C. Nascimento. "Reduction of chaotic particle transport driven by drift waves in sheared flows", *Physics of Plasmas*, vol. 15, pag. 112304, 2008.
- [47] K.C. Rosalem, M. Roberto e I.L. Caldas. "Influence of the electric and magnetic shears on tokamak", *Nuclear Fusion*, vol. 54, pag. 064001, 2014.
- [48] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1996.
- [49] M. A. F. Sanjuán, T. Horita e K. Aihara, "Opening a closed Hamiltonian map", *Chaos*, vol. 13, pag. 17, 2003.
- [50] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, R. L. Viana e M. A. F. Sanjuán, "Fractal and Wada Exit Basin Boundaries in Tokamaks", *Chaos*, vol. 17, pag. 4067, 2007.
- [51] Á. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi e J. A. Yorke, "Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles", *Physical Review E*, vol. 51, pag. 4076, 1995.
- [52] A. Daza, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, A. Wagemakers e M. A. F. Sanjuán, "Chaotic dynamics and fractal structures in experiments with cold atoms", *Physical Review A*, vol. 95, pag. 013629, 2017.
- [53] J. S. E. Portela, I. L. Caldas e R. L. Viana, "Tokamak magnetic field lines described by simple maps", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 165, pag. 195, 2008.
- [54] J. S. E. Portela. *Descrição dos Campos Magnéticos em Tokamaks por Mapas Hamiltonianos*, Phd thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 2008.

- [55] R. L. Viana e I. L. Caldas, "Comments on the magnetic field generated by an infinite current grid", *European Journal of Physics*, vol. 12, no. 6, pag. 293, 1991.
- [56] J. S. E. Portela, R. L. Viana e I. L. Caldas, "Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters", *Physica A*, vol. 317, pag. 411, 2003.
- [57] B.V. Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", *Physics Reports*, vol. 52, pag. 263, 1979.
- [58] Y.-C. Lai e T. Tél, *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*, Springer, 2011.
- [59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Second Edition, Butterworth-Heinemann, 1987.
- [60] A. Punjabi, A. Verma e A. Boozer, "Stochastic broadening of the separatrix of a tokamak divertor", *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 23, pag. 3322, 1992.
- [61] C. Vieira Abud e I. L. Caldas, "Secondary nontwist phenomena in area-preserving maps", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, pag. 033142, 2012.

Apêndice A

Artigos

No apêndice reunimos os artigos resultantes de nosso trabalho.

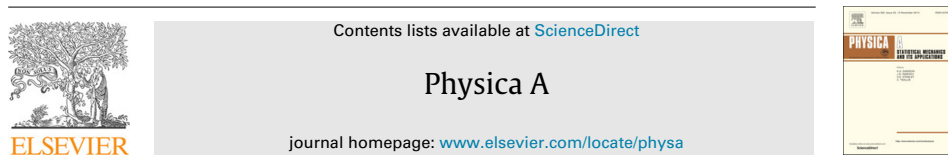
O primeiro artigo, "Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves", pag. 101, reúne alguns dos resultados referentes à dinâmica do sistema hamiltoniano proposto por W. Horton para descrever o escape das partículas para a borda do plasma.

O segundo artigo, "Fractal boundaries in chaotic hamiltonian systems", pag. 115, trata do mesmo modelo utilizado no artigo anterior, porém os resultados obtidos são para diferentes regiões de escape e com diferentes parâmetros das ondas de deriva. Esse artigo foi aceito para publicação em número especial do Journal of Physics: Conference Series, destinado aos trabalhos apresentados no XVIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, ocorrido em 2016.

O último artigo, "Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter", pag. 121, contém resultados referentes às propriedades da dinâmica do mapa de Martin-Taylor, como o transporte das linhas de campo, e o surgimento do caos com a variação dos parâmetros. Esse artigo foi aceito para publicação em Chaos, Solitons & Fractals.

A.1 Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves

Physica A 469 (2017) 681–694



Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves



A.C. Mathias^a, R.L. Viana^{a,*}, T. Kroetz^b, I.L. Caldas^c

^a Department of Physics, Federal University of Paraná, Curitiba, Paraná, Brazil

^b Department of Physics, Federal Technological University of Paraná, Pato Branco, Paraná, Brazil

^c Institute of Physics, University of São Paulo, São Paulo, Brazil

HIGHLIGHTS

- Fractal structures are typically found in chaotic orbits of area-preserving dynamical systems, and they influence its transport properties.
- We identify a number of fractal structures in a problem of interest in plasma physics: the drift motion of charged particles in a magnetized plasma under the action of two drift waves.
- The fractal structures we identify are escape basins, describing its fractal basin structure and also the Wada property.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 1 July 2016

Received in revised form 23 September 2016

Available online 19 November 2016

Keywords:

Fractal structures
Drift waves
Charged particle motion
Fractal basin boundaries
Exit basins
Wada property

ABSTRACT

Chaotic dynamics in open Hamiltonian dynamical systems typically presents a number of fractal structures in phase space derived from the interwoven structure of invariant manifolds and the corresponding chaotic saddle. These structures are thought to play an important role in the transport properties related to the chaotic motion. Such properties can explain some aspects of the non-uniform nature of the anomalous transport observed in magnetically confined plasmas. Accordingly we consider a theoretical model for the interaction of charged test particles with drift waves. We describe the exit basin structure of the corresponding chaotic orbit in phase space and interpret it in terms of the invariant manifold structure underlying chaotic dynamics. As a result, the exit basin boundary is shown to be a fractal curve, by direct calculation of its box-counting dimension. Moreover, when there are more than two basins, we verify the existence of the Wada property, an extreme form of fractality.

© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

One of the outstanding problems in modern plasma physics is the control of anomalous transport of particles across the magnetic field in fusion-oriented devices like tokamaks [1,2]. It is known that low-frequency drift-wave fluctuations govern plasma transport across magnetic field, specially in the plasma edge region [3]. These fluctuations arise from density and temperature gradients in a magnetized plasma, leading to ion and electron diamagnetic currents across the magnetic field. Drift waves are collective oscillations appearing due to the drift velocities associated with these currents [3].

* Corresponding author.

E-mail address: viana@fisica.ufpr.br (R.L. Viana).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.049>

0378-4371/© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.

Particle transport in high-temperature plasmas is dominated by the long-range electric field which results from the Coulomb interaction among charged particles. For magnetized plasmas the collective modes of interest are low-frequency ion acoustic oscillations, because they dominate transport properties, namely resistivity and thermal conductivity. The presence of steep density and temperature gradients causes instability of these low-frequency modes, leading to electrostatic turbulence and consequently an anomalous transport of particles and energy.

While the ion acoustic oscillations are related to the parallel component of wave vector (with respect to the magnetic field), its perpendicular component produces the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift of particle guiding centers across the magnetic field [4]. The corresponding dynamical system can be described by a Hamiltonian, after the definition of suitable coordinates and momenta.

It has been found that the motion influenced by a single drift wave leads to an integrable system [5]. The presence of KAM tori (invariant curves, in the Poincaré surface of section) prevents particle diffusion, resulting in a localized motion within “convection cells”. However, if two or more drift waves are considered the system is no longer integrable and chaotic motion is a possible outcome. This chaotic dynamics can be viewed as a low-dimensional approximation of the extremely complicated scenario observed in electrostatic turbulence [6].

The mathematical properties underlying chaotic orbits in area-preserving dynamical systems lead to the appearance of fractal structures which make transport highly non-uniform through the chaotic orbit. One of such structures is the exit or escape basin, which is a region in phase space defined by the set of initial conditions that escape, or exit, outside a prescribed region of the phase space [7]. In open Hamiltonian systems such exits can be literally openings through which trajectories can escape, such as billiards with holes, as in Ref. [8]. In other systems the exits can be thought as regions to which trajectories collide and are considered lost [9]. Also, it would be an open equipotential surface consisting of channels through which an orbit can escape [10].

The latter is the case when we consider charged particles in a magnetic field under the action of two drift waves. In the non-integrable case particles can follow chaotic orbits which intersect exits such as plates or the wall itself which contains the particles. Once particles hit those exits they are considered lost and removed from numerical simulations. We are particularly interested in the structure of those exit basins in the case we can vary at least some parameters like the amplitude of the second wave, related to the degree of non-linearity present in the system.

If the boundary between two basin were a smooth curve it would be simple, in principle, to determine to what exit a given initial condition will asymptote to. However, for two exit basins in the chaotic region the boundary is typically fractal, which is by itself a factor limiting the knowledge we have to predict the final state of the system [11]. This uncertainty is ultimately determined by the box-counting dimension of the fractal boundary. Fractal basin boundaries have been long investigated in a variety of dissipative as well as conservative systems [12]. Moreover, we included in this paper an application of a very recent method proposed by Daza et al., which introduces the concept of a basin entropy so as to analyze fractal structures in the basin boundaries [13].

If more than two exit basins are present, there follows that the corresponding exit basins can exhibit the even stronger Wada property: any point which is on the boundary of one escape basin is also simultaneously on the boundary of all the others [14]. The Wada property has been investigated in many open Hamiltonian systems, as the three-disk billiard [15], Duffing equation [16–18], particle scattering by a Hénon–Heiles potential [19,20], tracer advection in fluid flows [21,22], and quasi-periodically driven systems [23]. The occurrence of Wada basins can be quantitatively characterized by a grid approach [24]. In the plasma physics context, fractal and Wada basins have been described for the magnetic field line flow in time-independent systems [25–28].

The major goal of this manuscript is to present some of these fractal structures and the role they play in the passive transport of particles in the chaotic motion of guiding centers experiencing $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift influenced by more than one drift wave. By considering this as an open system, many structures are related to the non-uniform escape of particles through different exits both inside and at the boundary of the plasma. In a previous work [29] the presence of fractal structures in the phase space of dissipative drift motion was considered, showing the existence of fractal basin boundaries for attractors that appear due to the presence of small damping. In this paper, on the other hand, we consider the conservative version of the problem, showing that these fractal structures can be assigned also to the escape properties of the chaotic orbit.

This paper is organized as follows: in Section 2 we outline the model for particle motion in drift waves to be used. Section 3 presents numerical results for chaotic particle motion with emphasis on chaotic motion. Section 4 considers fractal structures for two escape basins, particularly their fractal basin boundaries. Section 5 explores topological properties like the existence of Wada basins for three (or more) escape basins. Our Conclusions are left to the final Section.

2. Particle–drift wave interaction model

One approach to describe the turbulent behavior at the tokamak plasma edge related to drift instabilities is to investigate single particle motion in presence of both magnetic and electric fields, the latter being perturbed by electrostatic drift waves. Factoring out the gyration around magnetic field lines we can focus on the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift motion of the guiding centers.

Neglecting curvature effects the plasma edge region can be approximately described by a slab geometry: let z be the toroidal direction, along which there is a uniform magnetic field $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. The radial direction is described by the x coordinate, parallel to a radial electric field perturbed by one or more electrostatic drift waves. The drift current, on its hand, has the poloidal direction described by y coordinate, with periodicity 2π . Hence the plasma is bounded in x and periodic in y .

We assume that the ion and electron charges do not affect appreciably the electric and magnetic fields, hence the corresponding guiding centers can be considered as passive tracers, or test particles. Such a test particle moves with the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift velocity

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\Phi \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (1)$$

where the electric field is written as $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, where $\Phi(x, y, t)$ is a scalar potential. This is equivalent to the following set of canonical equations

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (3)$$

corresponding to a time-dependent Hamiltonian

$$H(x, y, t) = \frac{1}{B_0} \Phi(x, y, t). \quad (4)$$

The electric potential can be divided into two parts: an equilibrium part $\Phi_0(x)$ corresponding to a radial electric field and a perturbation caused by N drift waves with amplitudes A_i , frequencies ω_i and wave vectors $\mathbf{k}_i = (k_{xi}, k_{yi})$, for $i = 1, 2, \dots, N$, in such a way that [5]

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{xi}x) \cos(k_{yi}y - \omega_i t), \quad (5)$$

where we suppose that there is a stationary wave pattern along the radial distance x and a traveling wave along the poloidal direction y . Let L_x and L_y the characteristic lengths along both directions (L_x may stand for the radial extent of the plasma edge region and L_y is the rectified poloidal circumference), hence

$$k_x = \frac{n\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi m}{L_y}$$

where m and n are suitably chosen positive integers.

In the case of N drift waves the Hamiltonian reads

$$H(x, y, t) = \frac{1}{B_0} \left\{ \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{xi}x) \cos(k_{yi}y - \omega_i t) \right\}. \quad (6)$$

The electric field in a tokamak has typically a monotonic radial profile

$$\Phi_0 = \alpha x^2 + \beta x, \quad (7)$$

where the parameters α and β can be adjusted to fit the electric potential profile of a tokamak discharge [30,31]. In particular, if $\alpha = 0$ we have that $\beta = E_0$ represents a uniform electric field in the radial direction.

For two drift waves ($N = 2$), using dimensionless variables and in the reference frame moving with the phase velocity of wave 1 the normalized Hamiltonian (6) is given by

$$H(x, y, t) = \Phi_0(x) - u_1 x + A_1 \sin(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + A_2 \sin(k_{x2}x) \cos[k_{y2}(y - ut)], \quad (8)$$

where $u_1 = \omega_1/k_{y1}$ is the phase velocity of the first wave and

$$u = \frac{\omega_2}{k_{y2}} - \frac{\omega_1}{k_{y1}} \quad (9)$$

is the difference between the phase velocities of the two waves.

Let us first consider the case of only one wave ($A_2 = 0$). Since $H = H(x, y)$ the system is integrable (in the Liouville sense). In this case the phase space has cells where the particle motion is bounded. It can be defined a dimensionless trapping parameter as

$$U(x) = \frac{1}{A_1 k_{x1}} \left(\frac{d\Phi_0}{dx} - u_1 \right), \quad (10)$$

which is proportional to the difference between the drift velocity (1) and the phase velocity of the wave. It quantifies how sensitive is the equilibrium system with respect to a second drift wave, and how intense we expect to be the radial particle transport [31].

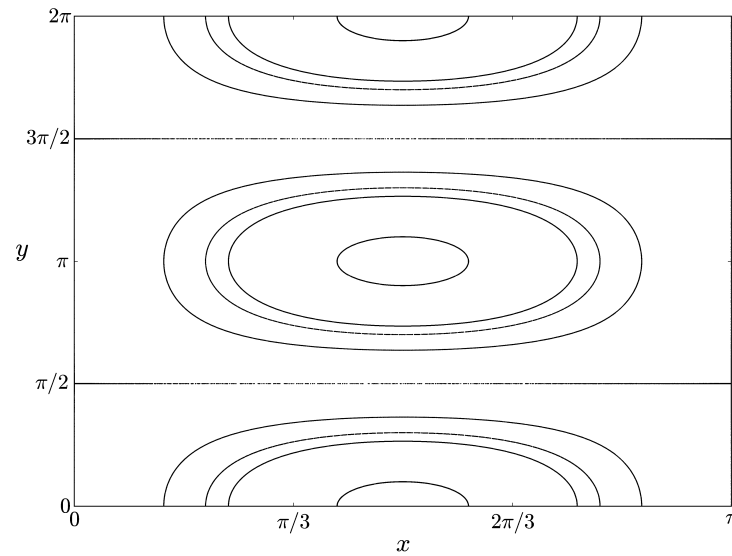


Fig. 1. Phase portrait for the Poincaré time- $T = 2\pi$ map, in the case $A_2 = 0$ and $U = 0$.

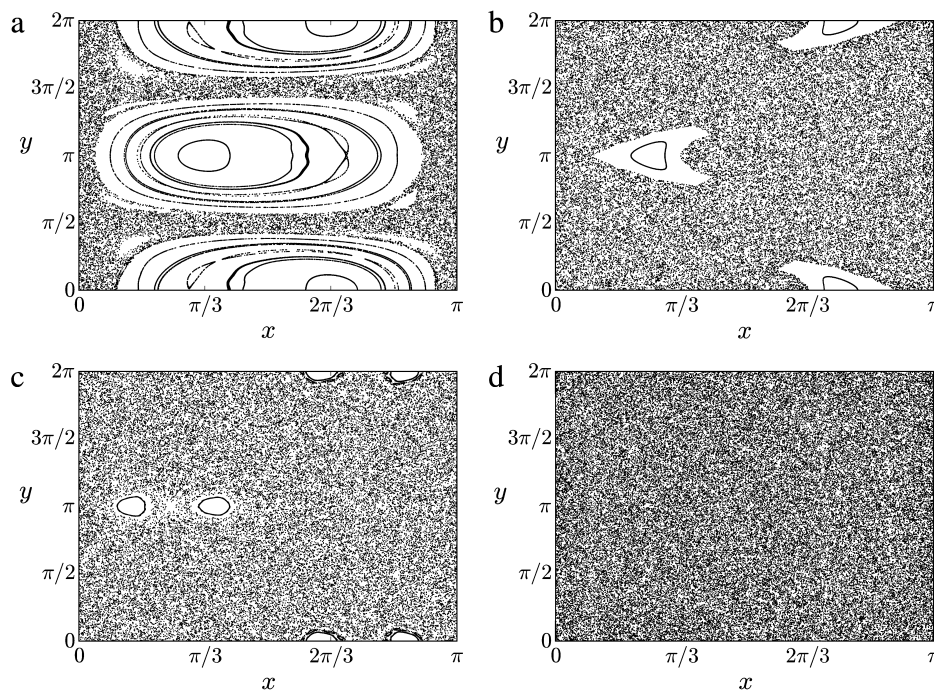


Fig. 2. Phase portrait for the Poincaré map, in the case $U = 0$ and different values of the parameter A_2 . (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.5, and (d) 2.0.

The canonical Eqs. (2)–(3) were numerically integrated for Hamiltonian (8), using an Adams 12th-order predictor–corrector scheme, and a Poincaré map was taken after considering only the values of (x, y) at times equal to an integer multiple of the period $T = 2\pi$ (stroboscopic map). We use the following values for the system parameters

$$\omega_1 = 0.2, \quad \omega_2 = 1.2, \quad k_{x1} = k_{y1} = k_{x2} = k_{y2} = 1.0, \quad u = 1.0, \quad A_1 = 1.0, \quad U = 0.0,$$

and take A_2 (amplitude of the second wave) as a tunable parameter. The integrable case ($A_2 = 0$) is depicted in Fig. 1, where we observe the cells in which the particle motion is bounded. These cells are limited by separatrices emanating from hyperbolic fixed points at $(x = 0, \pi)$ and $y = \pi/2, 3\pi/2$. The closed curves orbit around the elliptic fixed points at $x = \pi/2$ and $y = 0, \pi, 2\pi$.

When the amplitude of the second wave is small but nonzero [Fig. 2(a)] the system integrability is broken, and the interior of the cells has a more involved structure, the former separatrices intersecting at an infinite number of

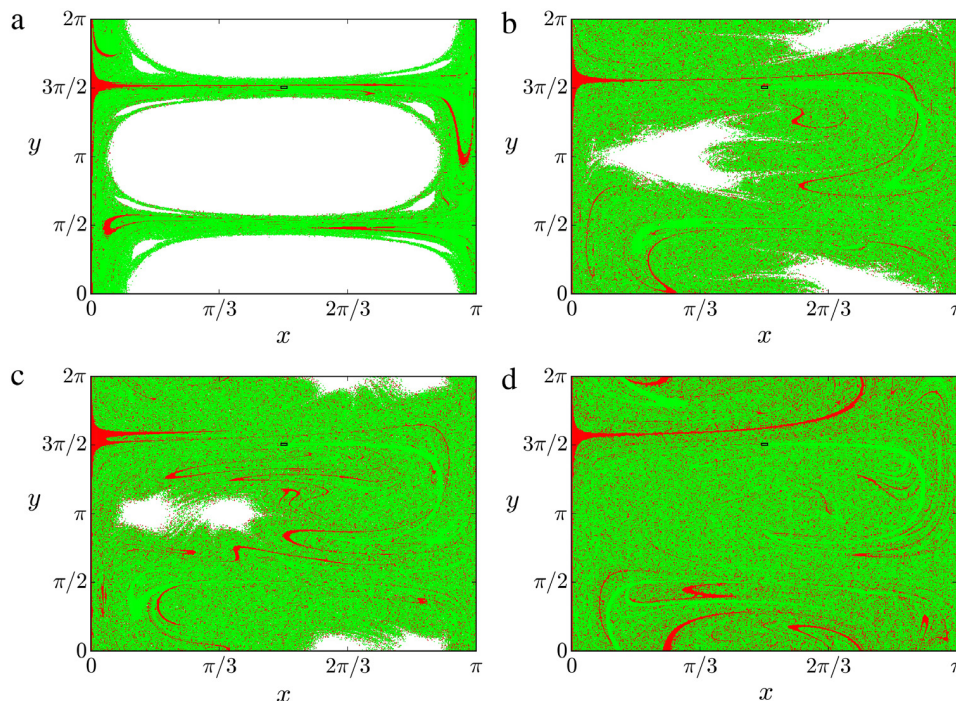


Fig. 3. Exit basins for the wall ($x = 0$, red points) and a small square box with center at $x = \pi/2$ and $y = 3\pi/2$ and width 0.05 (green points) in the case $U = 0$ and different values of the parameter A_2 . (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.5, and (d) 2.0. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

homoclinic/heteroclinic points, which are the skeleton of the area-filling chaotic orbit. Increasing the control parameter A_2 causes the destruction of most invariant curves around the displaced elliptic points, and the consequent enlargement of the chaotic orbit [Fig. 2(b)]. A further increase of A_2 leads to a bifurcation of the elliptic points, turning them to hyperbolic points and creating two new elliptic points (a saddle-center bifurcation) [Fig. 2(c)]. Finally, as A_2 is large enough, no visible traces of the invariant curves remain and the chaotic region spans virtually all phase space [Fig. 2(d)].

3. Exit basins

The dynamics in the chaotic orbits displayed in Fig. 2 is aperiodic but not uniformly so, due to the complicated nature of the manifold structure therein. This non-uniformity of chaotic motion can be illustrated by the structure of escape (or exit) basins, which is a phase space region defined by the set of initial conditions that escape, or exit, outside a prescribed region of the phase space. For example, if we consider that particles hitting the surface $x = 0$ (physically corresponding to a “wall”) are lost, we might be interested on the basin of escaping initial conditions to that wall. Another possibility is that a chaotic orbit hits a given “opening” within the phase space (an exit window) before it hits the wall. Then we can draw the basin of escaping initial conditions through that exit [7]. If the initial condition is not placed in the chaotic region (if it belongs to the interior region of a periodic island, for example) it generates a non-escaping orbit and do not belong to any exit basin.

In summary, for an initial condition originating in a chaotic region in the phase space there are three possibilities: (i) either the particle hits the wall at $x = 0^+$ (i.e. within a given tolerance) and is considered lost; (ii) or the particle hits first a bounded region (window) and is also considered as lost, or (iii) it never escapes. As a matter of fact, there exists a Lebesgue measure zero set of initial conditions for which the trajectories never leave the chaotic region, but the probability of a typical trajectory to belong to this set is zero [12].

Fig. 3 shows a representation of the exit basins for the wall at $x = 0$ (red points) and an opening represented by a small square which center is placed at $x = \pi/2$ and $y = 3\pi/2$, with width $w = 0.05$ (green points). The initial conditions that never escape through these regions are left blank. These exit basins have an involved structure for all values of the control parameter A_2 [Fig. 3(a)–(d)]. The smaller size of the red basin, when compared with the green basin, can be explained qualitatively on the basis of the $\sin x$ dependence of the particle velocity. Since the latter tends to zero as $x \rightarrow 0$, it is more probable that a particle be lost through the square opening than through the wall $x = 0$.

Another factor that influences the relative sizes of the two exit basins is the width of the opening inside the chaotic region [27]. For example, in Fig. 4 the width has increased to $w = 0.15$, causing an increase of the area of the green basin, with respect to the area occupied by the red basin. We have computed these areas through the fraction of the basin points with respect to the total number of grid points in which the phase portrait has been divided. In particular, we have done so

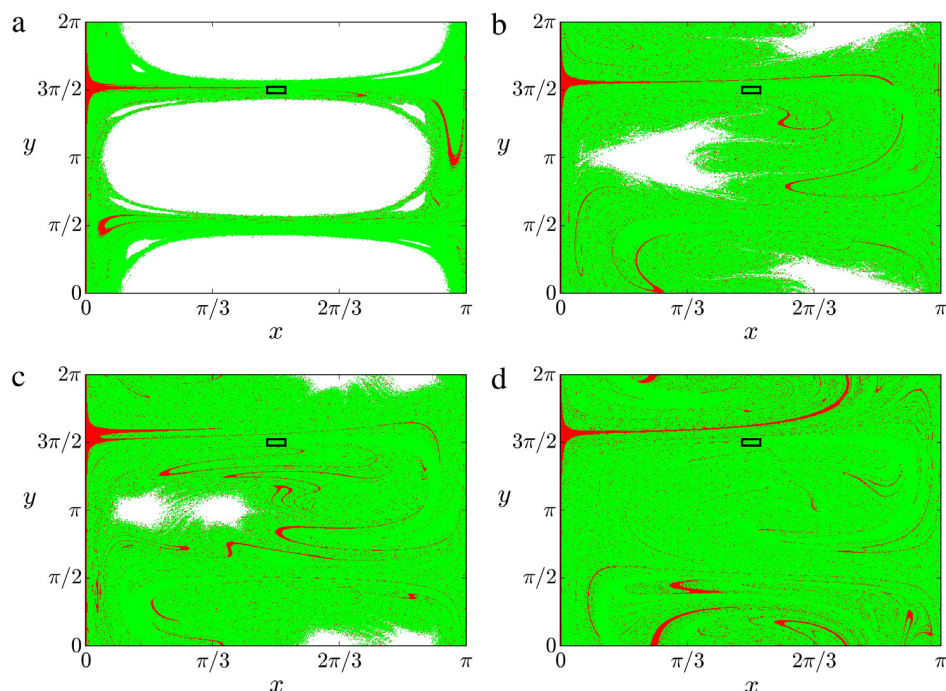


Fig. 4. Exit basins for the wall ($x = 0$, red points) and a small box with width 0.15 (green points) in the case $U = 0$ and different values of the parameter A_2 . (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.5, and (d) 2.0. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

for the points belonging to the red basin, i.e. we computed the fraction S_{wall} of initial conditions which lead to trajectories hitting first the wall.

Our results are presented in Fig. 5 in terms of A_2 , for two different values of the exit width w . As a trend, Fig. 5(a) indicates that the red exit basin area increases with the intensity of the second wave. This can be explained by remembering that the increase of A_2 actually causes the enlargement of the chaotic orbit itself [see Fig. 2], and thus the available number of initial conditions for trajectories hitting either exit. On the other hand, the red basin area decreases with the width of the second exit for the same value of A_2 [Fig. 5(b)], since the more initial conditions belong to the green basin, the less initial conditions are expected to belong to the red basin (those are the only available exits). Such observations can be explained by a detailed analysis of the invariant manifold structure, as it will be made in the next section.

It is worth to explore some physical consequences of the increase of the red basin area with the value of A_2 . A cursory look at Figs. 3 and 4 shows that most of the initial conditions placed in the chaotic region of the phase space belong to the green basin, i.e. they escape by the small box placed inside the chaotic region. Hence many particles belonging to the red basin, specially those far from the tokamak wall (by where they escape), spend a relatively large time in the chaotic region, and are expected to be more energetic than particles that escape rapidly by the small box. The increase of the red basin area with A_2 suggests that the intensity of the second drift wave increases also the transport of energetic particles through the tokamak wall. This result agrees with experimental measurements of turbulent-driven particle fluxes through the plasma edge of tokamaks, which increase with the turbulence level [32].

4. Invariant manifolds and exit basin structure

The nature and properties of the exit basins discussed in the previous section can be understood from the structure of the chaotic region in phase space, which is governed by its invariant manifold structure. Let the Poincaré map obtained from the numerical integration of the Hamilton's equations for the drift trajectories (2)–(3) be denoted as \mathbf{F} , which is invertible (since we can integrate the equations backwards by using negative stepsizes). Due to the area-preserving nature of the system the map \mathbf{F} is symplectic. We assume the existence of an area-filling chaotic orbit due to the non-integrability of the underlying Hamiltonian system.

Let P be an unstable periodic point of the map \mathbf{F} embedded in this chaotic region. The stable and unstable subspaces for P are denoted as $E^s(P)$ and $E^u(P)$, respectively, and are eigendirections for the tangent map $D\mathbf{F}(P)$, with real eigenvalues $|\xi_s| < 1$ for $E^s(P)$ and $|\xi_u| > 1$ for $E^u(P)$. These subspaces are tangent to the stable ($W^s(P)$) and unstable ($W^u(P)$) manifolds at P . The invariant manifolds $W^u(P)$ and $W^s(P)$ can be numerically obtained by considering the number of forward and

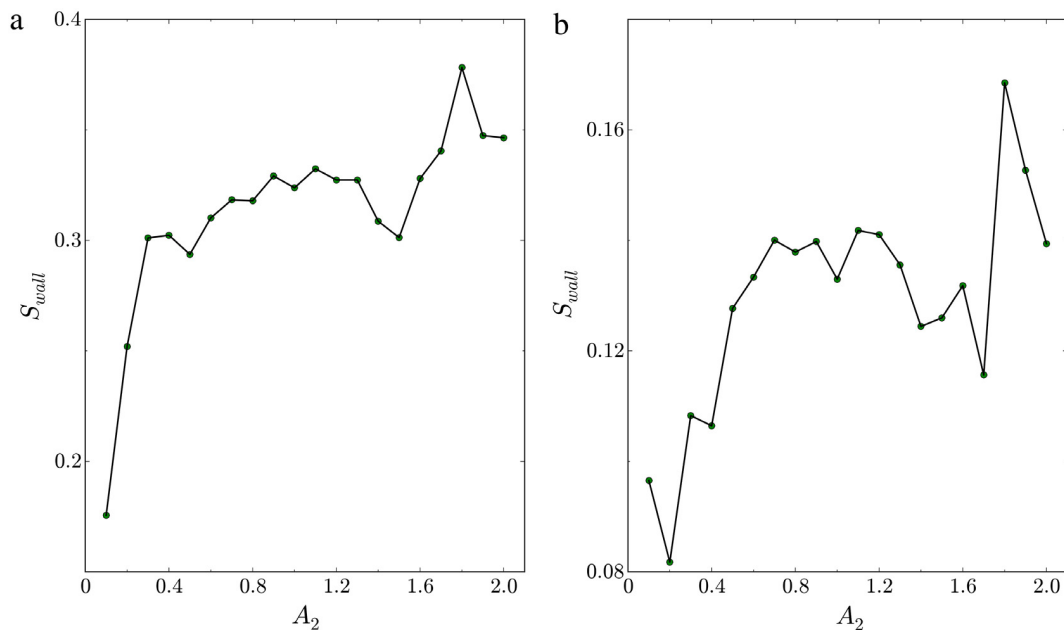


Fig. 5. Fraction of the red exit basin area S_{wall} as a function of A_2 for different values of the exit width w . (a) 0.05 and (b) 0.15. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

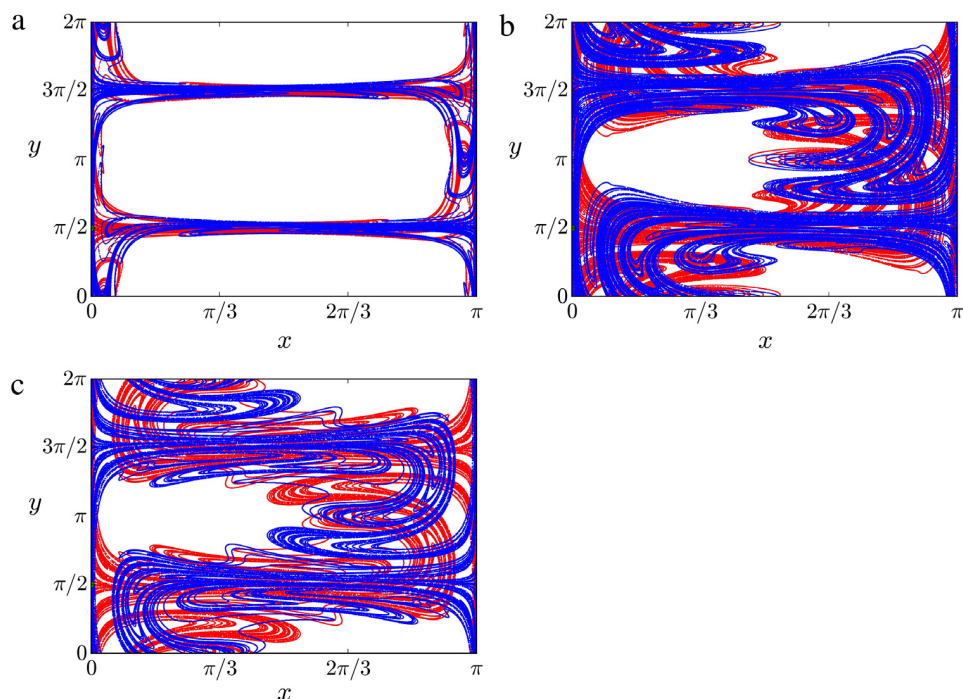


Fig. 6. Unstable (red curve) and stable (blue curve) invariant manifolds of an unstable fixed point embedded in the chaotic orbit for different values of A_2 . (a) 0.1, (b) 0.5, and (c) 1.5. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

backward images, respectively, of a small ball filled with a large number of initial conditions and centered at a numerical approximation for the location of an unstable periodic orbit P embedded in the chaotic orbit [Fig. 6].

The increasingly higher region occupied by those manifolds is reflected the increased area of both red and green basins in Fig. 3. The striations displayed by the manifold branches explain the incursive fingers characterizing pieces of the exit basins and which act as escape channels through which chaotic trajectories are directed towards either the wall or the rectangular

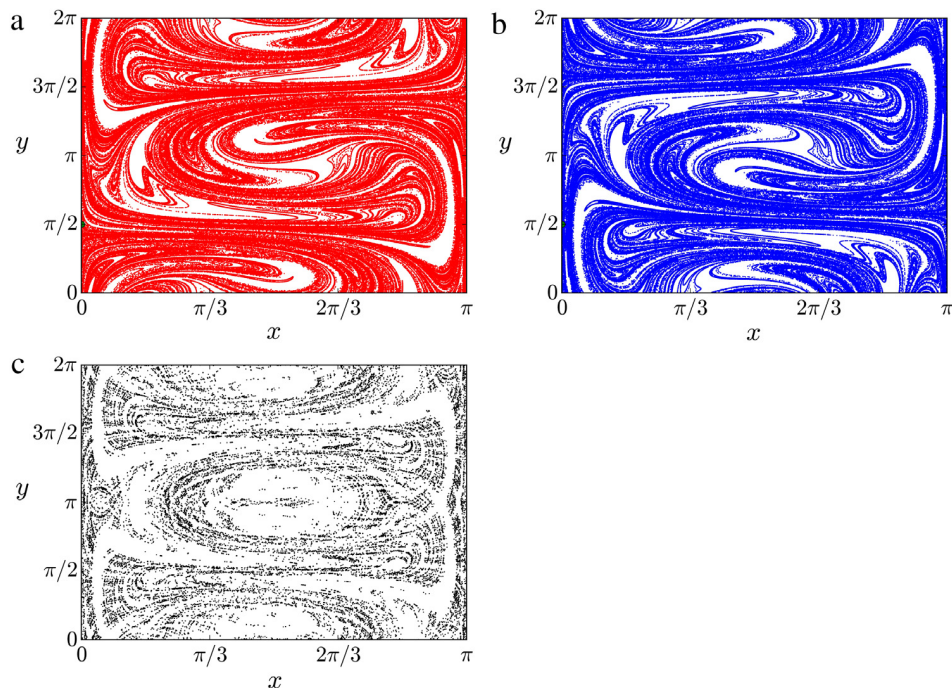


Fig. 7. Unstable (a) and stable (b) manifolds stemming from an unstable periodic orbit embedded in the chaotic region for $A_2 = 2.0$. The corresponding chaotic saddle is depicted in (c).

exit. The wider is the exit the more unstable manifold segments will cross this exit, leading to trajectories escaping by that exit. Hence, the size of that exit ultimately causes an increase of the corresponding exit basin. This has physical consequences similar to those caused by the increase of the second wave amplitude, as discussed at the end of the previous section.

The skeleton of the chaotic orbit is a chaotic saddle, formed by homoclinic and heteroclinic intersections of the stable and unstable manifolds of an infinite number of unstable periodic orbits embedded in the chaotic region, and which support the ergodic measure of typical orbits [22]. In other words, a chaotic saddle is a non-attracting invariant set with a dense chaotic orbit. Initial conditions belonging to this saddle remain in the chaotic region, unless portions of the saddle intercept the exit regions. Fig. 7(c) shows a numerical approximation of the chaotic saddle resulting from the intersection of the stable and unstable manifolds depicted in Fig. 7(a) and (b), respectively. The existence of a chaotic saddle is a further confirmation of the fractal nature of the exit basin boundaries.

5. Fractal exit basin boundaries

The complicated structure of the exit basins is qualitatively explained by the convoluted nature of the invariant manifolds comprising the infrastructure of the chaotic orbit, mathematically represented by the chaotic saddle. In addition we can also make a quantitative study of the exit basin boundaries by the uncertain fraction method. The key issue is that the boundaries separating two exit basins have final state sensitivity [33].

An initial condition in the phase space is known up to a given uncertainty ε , what can be represented by a ball of radius ε centered at that initial condition. If the initial condition is so near the boundary that the ε -ball intercepts it, we cannot be sure if that initial condition will evolve to one or another exit. The union of all ε -balls intercepting the boundary, divided by the area of the phase space region, is called the uncertain fraction $f(\varepsilon)$. If the boundary is smooth we have that $f(\varepsilon) \sim \varepsilon$, since the uncertain conditions occupy a strip of width 2ε straddling the boundary.

On the other hand, for fractal basin boundaries, the uncertain fraction scales as $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, where $0 < \alpha < 1$ is the uncertainty exponent. The latter is related to the box-counting boundary dimension d by $\alpha = 2 - d$, in a two-dimensional phase space [12]. The more involved the basin boundary, the higher is its box-counting dimension such that it can be used as a quantitative characterization of the basin structure complexity [11].

We can examine, for example, the influence of the amplitude of the second wave on the basin structure by computing the uncertain fraction for different values of A_2 [Fig. 8]. We selected a representative portion of the exit basin boundaries in Fig. 2 and covered it with a fine mesh of initial conditions. At each initial condition **A** we randomly choose three other initial conditions **B**₁, **B**₂, and **B**₃, inside an ε -ball centered at **A**. If **A** and **B**_{1,2,3} lead to orbits escaping through different exits, it turns out that **A** a ε -uncertain initial condition. The uncertain fraction was estimated from the ratio between the number of all uncertain conditions and the total number of mesh points. The uncertainty exponent was obtained from a least-squares fit

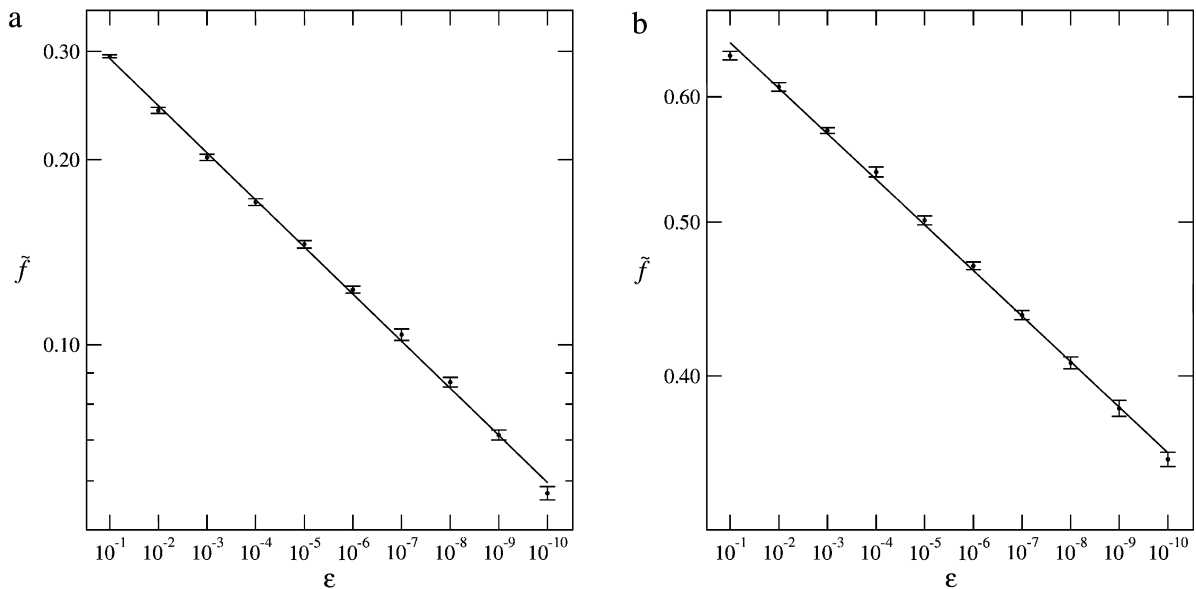


Fig. 8. Uncertain fraction as a function of the uncertainty radius for the exit basin boundary with different values of A_2 . (a) 0.1 and (b) 2.0. The box width is $w = 0.05$.

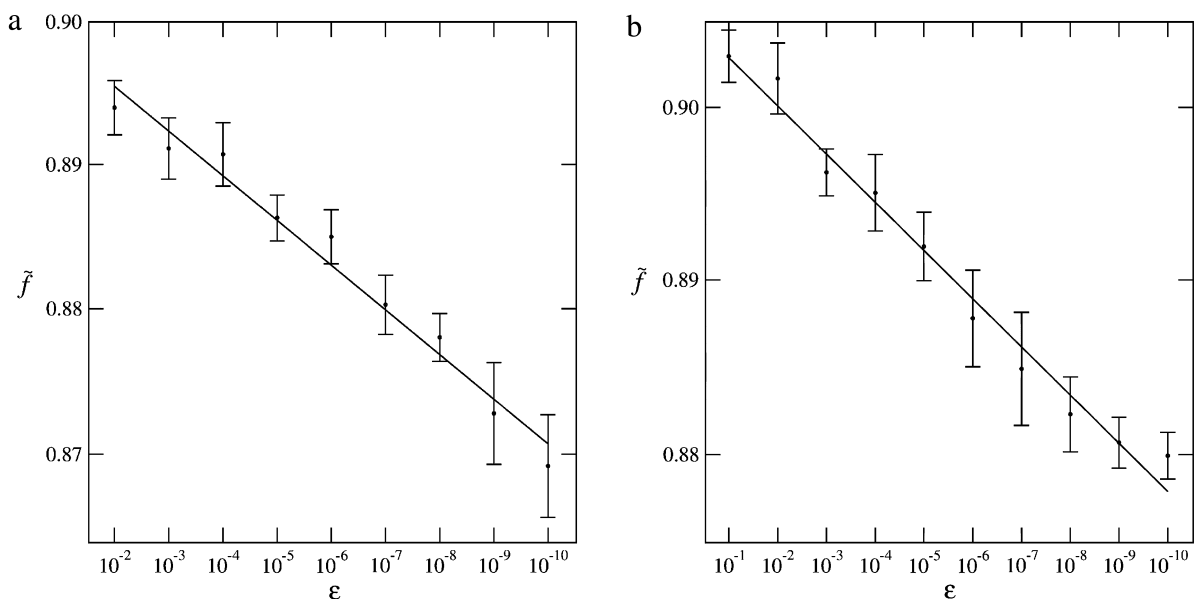


Fig. 9. Uncertain fraction as a function of the uncertainty radius for the exit basin boundary with different values of A_2 . (a) 0.1 and (b) 2.0. The box width is $w = 0.15$.

in a log–log plot of $f(\epsilon)$ versus ϵ for different values of A_2 , comprising ten orders of magnitude. For smaller A_2 the exit basin boundary dimension is $d \approx 1.92$ [Fig. 8(a)], whereas a larger value of A_2 yields $d \approx 1.97$, hence a slightly more complex basin structure [Fig. 8(b)].

The same technique was used to investigate the effect of increasing opening width on the basin dimension. For $w = 0.15$ we show in Fig. 9(a) and (b) that the boundary dimension is $d \approx 1.99$ for two widely different amplitudes showing that, although the exit basin area is affected by the exit width [see Fig. 5] the corresponding exit boundaries do not show appreciable effect.

In addition, we can apply to this problem a technique introduced by Daza et al., based on the calculation of the so-called basin entropy, which is a quantitative measure of the degree of uncertainty achieved by the fractality of the basin boundary [13]. The basic idea of this technique is to make a grid in a given region of the phase space, such that each grid

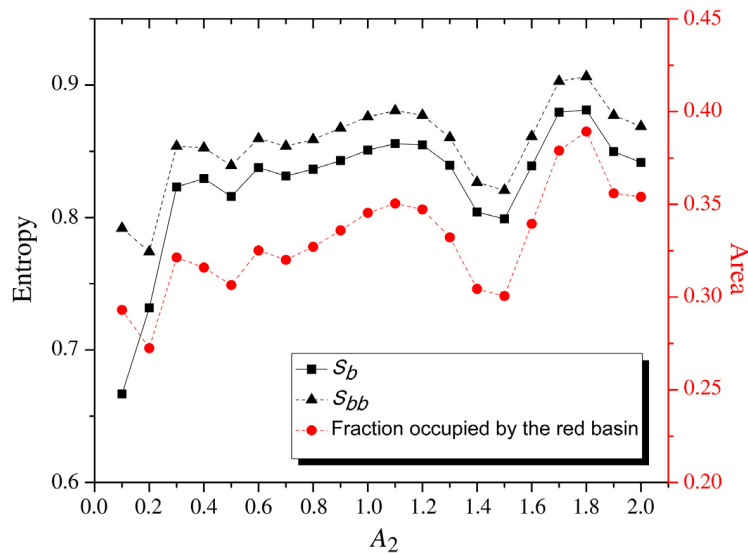


Fig. 10. Basin entropy and basin boundary entropy for the case of two exits [see Fig. 3] as a function of the second wave amplitude. We also plot the fraction occupied by the red basin. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

point can be assigned to a random variable with the different exits (in the present context) as the possible outcomes. The basin entropy results from applying the Gibbs entropy definition to that set.

More precisely, let a region Ω of the phase space characterized by the presence of N_A exits (or attractors, in its dissipative version). The region Ω is covered by a fine mesh of boxes with size ε , and to each initial condition we assign a color labeled from 1 to N_A . The colors within each box are randomly distributed according to a probability $p_{i,j}$ for the j th color assigned to the i th box. On supposing that the trajectories inside a box are statistically independent we compute the Gibbs entropy of the i th box as [13]

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \log \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right), \quad (11)$$

where $m_i \in [1, N_A]$ is the number of colors inside the i th box. The total entropy of the grid is the sum over the N boxes, or $S = \sum_{i=1}^N S_i$, such that the basin entropy is the total Gibbs entropy divided by the number of boxes, $S_b = S/N$. For a single attractor the basin entropy is zero, meaning zero uncertainty, whereas for N_A equiprobable exits $S_b = \log N_A$, which means a completely randomized basin structure.

We may be interested in the uncertainty related to the basin boundary, rather than the uncertainty of the whole basin structure, as quantified by S_b . For this purpose we can repeat the above calculation, but restricting the computation of the total entropy to the number N_b of boxes which contain more than one color, yielding the so-called boundary basin entropy, or $S_{bb} = S/N_b$.

Applying those concepts to the escape basin structure of the present paper, let us consider the case of two exits, namely the wall at $x = 0$ (red points) and a small square box with center at $x = \pi/2$ and $y = 3\pi/2$ and width 0.05 (green points). We considered a grid of 1000×1000 points of each basin, distributed inside 4×10^4 boxes. For each grid point, a maximum number of 3000 stroboscopic map points were computed, excluding from the statistics those initial conditions that have not escaped during that integration time. For each box we obtained the quantities

$$p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2},$$

where n_1 is the number of points of the box corresponding to the exit 1, and n_2 is the number for exit 2. The entropy for each box is

$$S = -p_1 \log(p_1) - p_2 \log(p_2),$$

and the basin entropy S_b was obtained by summing up the values of s with respect to those boxes for which all the initial conditions escape and dividing the result by the number of boxes N_b for which all initial conditions escape. The boundary basin entropy was obtained in the same way, but excluding from the statistics those boxes for which either $p_1 = 0$ or $p_2 = 0$, i.e. there were considered only those boxes which have at least one boundary in their interior. The quantity S_{bb} is the summation of the entropy S for all boxes that contain at least one boundary divided by the number N_{bb} of boxes having at least one boundary.

In Fig. 10 we plot the values of the basin entropy S_b and the basin boundary entropy S_{bb} for the case of two exits, namely the wall at $x = 0$ (red points) and a small square box with center at $x = \pi/2$ and $y = 3\pi/2$ and width 0.05 (green points).

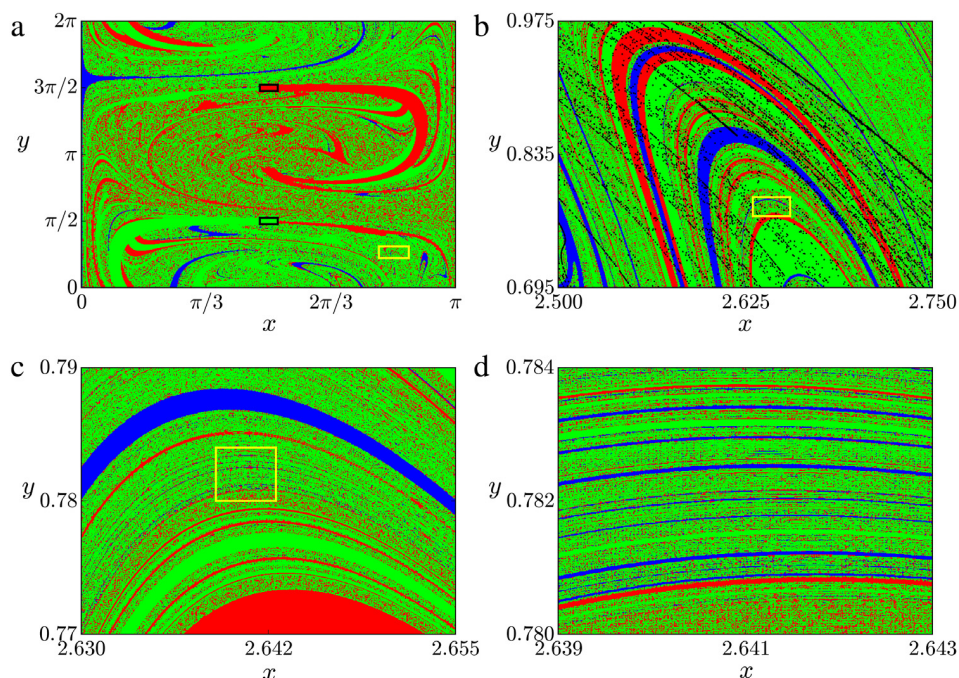


Fig. 11. Exit basins for the wall ($x = 0$, blue points) and two small boxes at $y = \pi/2$ (green points) and $y = 3\pi/2$ (red points) with both widths equal to 0.15 and for the same parameter values considered in Fig. 2(a)–(d). (b) and (d) represent successive magnification of boxes. In (b) the black line is a piece of the unstable manifold of a fixed point embedded in the chaotic region. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

The variable parameter is the amplitude of the second wave A_2 , all the remaining parameters being unchanged. We also plot in Fig. 10 the fraction occupied by the red basin. The basin entropy and the basin boundary entropy follow the variation of the fraction occupied by the red basin (escape at the wall). As a general trend, the degree of complexity of the basin structure and its boundary increases with A_2 , confirming that the increase of complexity of the basins is essentially due to the increase of the area of the escape basin.

6. Wada exit basin boundaries

When there are three or more exit basins, the so-called Wada property can also be observed. This is an even stronger statement of complexity than the fractality of the basin boundary for two exit basins. We begin with some mathematical definitions [34,35]: a point P is a boundary point of an exit basin \mathcal{B} if every open neighborhood of P intersects the basin \mathcal{B} and least another basin. The basin boundary is the set of all boundary point of that basin. The boundary point P is also a Wada point if every open neighborhood of P intersects at least three different basins. A basin boundary is said to possess the Wada property if every boundary point of \mathcal{B} is a Wada point, such that the boundary of such a basin is a Wada exit basin boundary [15,24].

The presence of Wada boundaries have important physical consequences, since in this case any boundary point turns to be arbitrarily close to points of all exit basins [14]. Since an initial condition is always known up to a given uncertainty, such an uncertainty ball typically contains points belonging to all exit basins. Hence it is not possible to say with certainty to which exit basin will the trajectory asymptote to, even if we could improve the uncertainty. This would be called an extreme final-state sensitivity.

In order to look for Wada property in our system it is necessary to include a third exit, namely another square box at the same x -coordinate as the former and the same width, but its y -coordinate is displaced by π . In Fig. 11(a) we plot the basin of the first exit box (red points), the basin of the second exit box (green points) and the basin of the wall (blue points). The Wada property is can be illustrated by successive magnification of a rectangle containing pieces of the three exit basins, showing that stripes of all basins coexist in increasingly finer scales [Fig. 11(b)–(d)].

Although highly compelling, this visual evidence is not a bona fide proof that Wada property exists in this system. A necessary (but not sufficient) condition for the Wada property to exist is that the unstable manifold $W^u(P)$ of an unstable periodic orbit P belonging to this boundary must intersect every exit basin [35]. This has been shown to be true in Fig. 11(b), where we plot (in black) a segment of the unstable manifold stemming from a saddle point belonging to an exit basin boundary, which is seen to intercept points of the red, green and blue basins. Since the unstable manifold of a periodic orbit P belonging to an exit basin boundary has intersected all the exit basins the Wada property is fulfilled.

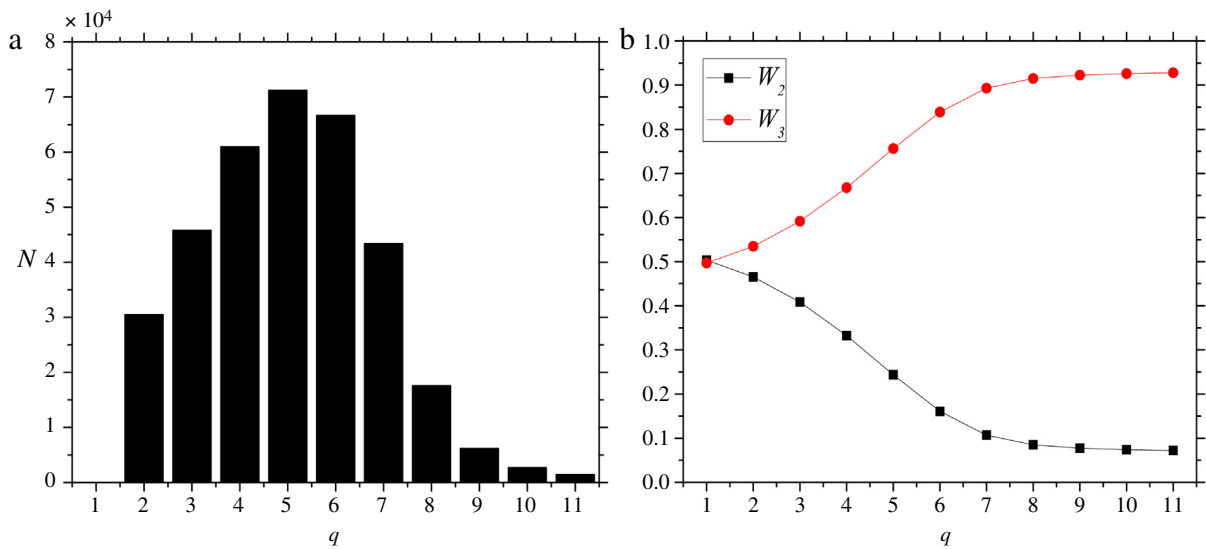


Fig. 12. (a) Number of reclassified points in each refinement step, using the grid approach for the basin structure depicted in Fig. 11. (b) Values of W_2 and W_3 as a function of the refinement step.

It has been recently proposed by Daza et al. a method for quantifying the Wada property in basin boundaries of dynamical systems (dissipative or conservative) [24]. In the following we shall indicate the basics of this grid approach as applied to escape Wada basins, further details being found in Ref. [24]. Let us consider a bounded region Ω of the phase space containing $N_A \geq 3$ disjoint escape basins S_j , where $j = 1, 2, \dots, N_A$. There is also a two-dimensional rectangular grid G covering Ω , such that there is a set of non-overlapping grid boxes $P = \{box_1, box_2, \dots, box_K\}$. For each point $x \in \Omega$ we assign an integer-valued “color” function C such that $C(x) = j$ if $x \in S_j$ and $C(x) = 0$ if x does not belong to any of the sets S_j , in such a way that an escape is labeled by $C(x)$.

The collection of grid boxes consisting of box_j and all the grid boxes having at least one point in common with box_j is denoted $b(box_j)$. For each box box_j we call $M(box_j)$ the number of different colors in $b(box_j)$. Provided $M(box_j) \neq 1, N_A$ we select the two closest boxes in $b(box_j)$ with different colors and draw a line segment between them, computing the color of the segment midpoint. If the computed color completes all colors inside $b(box_j)$ then $M(box_j) = N_A$ and the procedure is stopped. Otherwise we refine the procedure by choosing intermediate points until $M(box_j) = N_A$ (or the number of points exceeds a specified maximum limit).

Let G_m be the set of all the original grid boxes such that $M(box_j) = m$. If $m = 1$ then the set G_1 contains points belonging to the interior of the j th basin, because all the boxes inside the ball $b(box_j)$ have the same color. For $m = 2$ it turns out that G_2 belongs to the boundary between two basins, since there are two different colors inside the ball $b(box_j)$, and so on. We call G_n^q the set G_n at the q th procedure step. Then we compute the following parameter

$$W_m = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\text{number of points of } G_m^q}{\sum_{j=2}^{N_A} \text{number of points of } G_j^q}, \tag{12}$$

where $m \in [2, N_A]$. In the limiting cases of $W_m = 0$ then the system has no grid boxes that belong to the boundary separating m escape basins, and if $W_m = 1$ then all the boxes in the boundary separate m escape basins. If $W_{N_A} = 1$ the system possesses the Wada property, since it will always be possible to find a third color between the two other two colors. The case of $0 < W_m < 1$ with $m \geq 3$ is said to be partially Wada.

In the example depicted in Fig. 11 there are three exits, hence $N_A = 3$. We divided the escape basin structure into boxes, each of them containing one point of the basin. We classify that point by analyzing the eight neighbor boxes. If all those boxes are of the same color than the central box, the latter will belong to the set G_1 . If there are boxes of a same color but different from the central box, the latter will belong to G_2 . If the neighbor boxes present two other colors, the central box will belong to G_3 . According to (12) we compute the quantity

$$\hat{W}_2 = \frac{\text{number of points of } G_2}{\text{number of points of } G_2 + \text{number of points of } G_3} \tag{13}$$

for q procedure steps. In each refinement step we check whether or not points of G_2 may belong to G_3 by testing q initial conditions intermediate between the central box and a neighbor box of different color. If some of those q intermediate initial conditions exhibit the missing third color, the central box will be reclassified as G_3 .

The number of points classified as G_3 for each refinement step q is shown as a frequency histogram in Fig. 12(a). It is apparent that after $q = 11$ refinement steps the number of reclassified points is so small that the method converges for

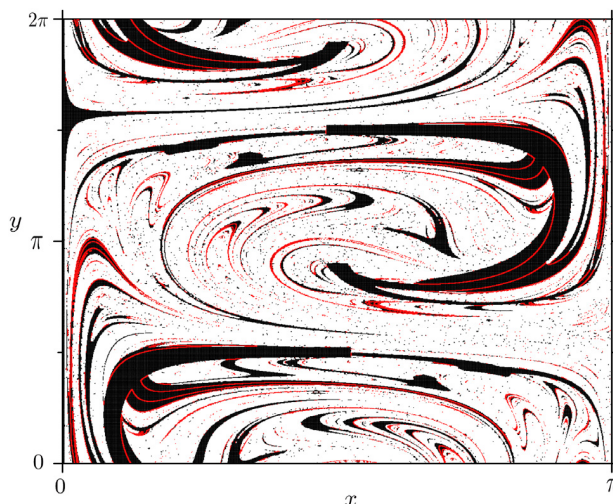


Fig. 13. Basin structure of Fig. 11, showing in black points belonging to G_1 set (internal points) and in red points of the G_2 set (boundary points), after $q = 11$ refinement steps. The points of G_3 (Wada points) are not shown for clarity. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

this value of q . This convergence can also be observed to occur both for W_2 , computed from Fig. 12(b), as well for W_3 , which converge to 7.2% and 92.8%, respectively. Since $0 < W_2 < 1$ the basin structure in Fig. 11 can more properly be classified as partially Wada (remember that the basin will be totally Wada if $W_2 \rightarrow 0$ if $q \rightarrow \infty$).

Fig. 13 shows in black the points classified as G_1 (internal to some basin) and in red those points that, after $q = 11$ refinement steps continue to be classified as G_2 , hence belonging to basin boundaries. It is clear that some of the boundary regions really do not exhibit the Wada property, although most of the points (not shown in Fig. 13) belong to G_3 , what explains why the basin structure as a whole is partially Wada.

7. Conclusions

Open non-integrable Hamiltonian systems having two or more exits allow for a detailed investigation of the complicated structure underlying the chaotic dynamics. In physical terms, it means at least two important consequences: (i) the transport in the chaotic region is far from being uniform, presenting escape channels by which particles have a faster transport rate; (ii) there is final-state sensitivity: an initial condition having a given uncertainty close enough to the basin boundaries is uncertain in the sense that we cannot be sure to what exit this initial condition will asymptote to.

Previous works in systems of interest in plasma physics have investigated this exit basins structure for the magnetic field lines in time-independent systems. In this work we have investigated the presence of exit basins with a complicated boundary structure in a time-dependent problem, which is the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift motion of charged particles under the action of two drift waves with different amplitudes. Although our model is physically simple (the magnetic field, for example, is supposed to be uniform) we claim that the general aspects of more detailed models would be similar, in the sense that the structures we investigated are rather universal consequences of the dynamics underlying chaotic orbits in non-integrable area-preserving systems.

We observed that the exit basins closely follow the invariant manifold structure underlying the dynamics of the area-filling chaotic orbit. The exit basin boundaries are made of branches of invariant (unstable and stable) manifolds stemming from unstable periodic orbits (saddles in two dimensions) embedded in the chaotic region. For two exit basin we have shown that the boundary is indeed fractal, with a box-counting dimension close to the dimension of the phase space itself, i.e. it is almost an area-filling curve, showing the extremely involved nature of the basin structure. The box-counting dimension has been shown to increase with the amplitude of the second wave. The area occupied by the exit basins, on the other hand, has been shown to increase with the increase of the exit widths.

Moreover we applied in this paper the method of basin entropy, proposed by Daza and coworkers [13] to quantify the basin structure of any system, yielding a more direct measure to compute the loss of information on the final state of the system. In addition we found that both the basin and basin boundary entropies depend on the perturbation strength in the same way as the fraction in phase space occupied by the basin of the initial conditions leading to an escape through the tokamak wall. Since the latter generates orbits that spend a relatively large time in the chaotic region, it can be related to an enhanced radial transport of energetic particles through the tokamak wall.

In the case of three basins we also shown the Wada property to exists, thanks to the fact that the unstable manifold of an orbit belonging to the basin boundary intercepts pieces of all exit basins. We also applied a new procedure for the quantification of the basin boundary structure (grid approach) recently proposed by Daza and coworkers [24]. Our results

show that most points of the basin structure possess the Wada property, but there are phase space regions in which this property does not hold. As a consequence our basin structure is only partially Wada.

Acknowledgments

The authors would like to thank useful discussions with Dr. F. A. Marcus. This work has been supported by grants from CNPq and CAPES.

References

- [1] W. Horton, *Turbulent Transport in Magnetized Plasmas*, World Scientific, Singapore, 2012.
- [2] R. Balescu, *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas*, CRC Press, 2005.
- [3] W. Horton, *Rev. Modern Phys.* 71 (1999) 735.
- [4] G. Schmidt, *Physics of High-Temperature Plasmas*, Academic Press, New York, 1979.
- [5] W. Horton, *Plasma Phys. Control. Fusion* 27 (1985) 937.
- [6] A.M. Batista, I.L. Caldas, S.R. Lopes, R.L. Viana, W. Horton, P.J. Morrison, *Phys. Plasmas* 13 (2006) 042510.
- [7] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott, R. Brown, *Phys. Rev. A* 38 (1988) 930.
- [8] H. Alt, H.-D. Gräf, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, P. Schardt, *Phys. Rev. E* 53 (1996) 221.
- [9] J. Aguirre, M.A.F. Sanjuán, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 056201.
- [10] R. Barrio, F. Blesa, A. Serrano, *New J. Phys.* 11 (2009) 053004.
- [11] J. Aguirre, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuan, *Rev. Modern Phys.* 81 (2009) 333.
- [12] S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Physica D* 17 (1985) 125.
- [13] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, M.A.F. Sanjuán, *Sci. Rep.* 6 (2016) 3416.
- [14] J. Kennedy, J.A. Yorke, *Physica D* 51 (1991) 213.
- [15] L. Poon, J. Campos, E. Ott, C. Grebogi, *Internat. J. Bifur. Chaos* 6 (1996) 251.
- [16] J. Aguirre, M.A.F. Sanjuán, *Physica D* 171 (2002) 41.
- [17] Y. Zhang, H. Zhang, W. Gao, *Nonlinear Dynam.* 79 (2015) 2667.
- [18] Y. Zhang, H. Zhang, *Nonlinear Dynam.* 79 (2015) 2309.
- [19] J. Aguirre, J.C. Vallejo, M.A.F. Sanjuán, *Phys. Rev. E* 64 (2001) 066208.
- [20] F. Blesa, J. Seoane, R. Barrio, M.A.F. Sanjuán, *Internat. J. Bifur. Chaos* 22 (2012) 1230010.
- [21] Z. Toroczkai, G. Károlyi, A. Péntek, T. Tél, C. Grebogi, J.A. Yorke, *Physica A* 239 (1997) 235.
- [22] A. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi, J.A. Yorke, *Phys. Rev. E* 51 (1995) 4076.
- [23] U. Feudel, A. Witt, Y.-C. Lai, C. Grebogi, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 3060.
- [24] A. Daza, A. Wagemakers, M.A.F. Sanjuán, J.A. Yorke, *Sci. Rep.* 5 (2015) 16579.
- [25] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuán, *Phys. Plasmas* 9 (2002) 4917.
- [26] T.E. Evans, R.K.W. Roeder, J.A. Carter, B.I. Rapoport, *Contrib. Plasma Phys.* 44 (2004) 235.
- [27] J.S.E. Portela, I.L. Caldas, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuán, *Internat. J. Bifur. Chaos* 17 (2007) 4067.
- [28] R.L. Viana, E.C. da Silva, T. Kroetz, I.L. Caldas, M. Roberto, M.A. Sanjuán, *Phil. Trans. R. Soc. A* 369 (2011) 371.
- [29] R.S. Oyarzabal, J.D. Szezech Jr., A.M. Batista, S.L.T. de Souza, I.L. Caldas, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuán, *Phys. Lett. A* 380 (2016) 1621.
- [30] T. Kroetz, F.A. Marcus, M. Roberto, I.L. Caldas, R.L. Viana, E.C. da Silva, *Comput. Phys. Comm.* 180 (2009) 642.
- [31] A.F. Marcus, T. Kroetz, M. Roberto, I.L. Caldas, E.C. da Silva, R.L. Viana, Z.O. Guimarães-Filho, *Nucl. Fusion* 48 (2008) 024018.
- [32] Z.O. Guimarães-Filho, I.L. Caldas, R.L. Viana, M.V.A.P. Heller, I.C. Nascimento, Yu.T. Kuznetsov, R. Bengtson, *Phys. Plasmas* 15 (2008) 062501.
- [33] C. Grebogi, S.W. McDonald, E. Ott, J.A. Yorke, *Phys. Lett. A* 99 (1983) 415.
- [34] H.E. Nusse, J.A. Yorke, *Science* 271 (1996) 1376.
- [35] H.E. Nusse, J.A. Yorke, *Physica D* 90 (1996) 242.

A.2 Fractal boundaries in chaotic hamiltonian systems

Fractal boundaries in chaotic hamiltonian systems

R L Viana¹, A C Mathias¹, F A Marcus¹, T Kroetz² and I L Caldas³

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brazil

² Departamento de Física, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brazil

³ Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brazil

E-mail: viana@fisica.ufpr.br

Abstract. Fractal structures are typically present in the dynamics of chaotic orbits in non-integrable open Hamiltonian systems and result from the extremely complicated nature of the invariant manifolds of unstable periodic orbits. Exit basins, the set of initial conditions leading to orbits escaping through a given exit, have very frequently fractal boundaries. In this work we analyze exit basin boundaries in a dynamical system of physical interest, namely the motion of charged particles in a magnetized plasma subjected to electrostatic drift waves, and characterize in a quantitative way the fractality of these structures and their observable consequences, as the final-state uncertainty.

1. Introduction

In open chaotic hamiltonian systems there are initial conditions generating orbits which eventually exit from the system. Suppose there are two or more different ways in which an orbit can exit from the system. We define the exit (or escape) basin as the set of initial conditions in a certain phase-space region leading to orbits escaping through a given exit [1]. In particular we are interested in characterizing the boundary between these exit basins, which is often fractal and thus presents final-state sensitivity: a slight perturbation of some initial condition may lead to an orbit escaping through a different exit, impairing our capacity of predict the future outcome of the system [2, 3].

This problem has various applications in many fields. In celestial mechanics for example, Contopoulos and coworkers [4, 5] has studied the escape of stars from a galaxy using a paradigm hamiltonian such that, for energies larger than a critical value, there exists channels whereby orbits may escape to infinity. More recently Aguirre *et al.* have studied the exit basins of such a problem using the Hénon-Heiles hamiltonian [6].

Other field in which exit basins have been intensively studied in recent years is plasma physics. The escape of magnetic field lines in a magnetically confined fusion plasma with destroyed magnetic surfaces presents fractal exit basins [7, 8]. Another problem in which such fractal structures appear is the charged particle motion in a magnetized plasma under electrostatic drift waves [9], which is a relevant scenario in the study of plasma turbulence in the plasma edge in a tokamak [10, 11].

In this paper we present some results on the characterization of exit basins in the abovementioned problem of particle motion under two drift waves, which is hamiltonian but generally nonintegrable. The existence of a chaotic, area-filling orbit in phase space, and its

corresponding homoclinic tangle, is ultimately responsible for the fractality of exit basins [12]. We characterize the latter by computing the box-counting dimension of the exit basin boundaries, using the uncertainty fraction method [2] and also by calculating the basin entropy and basin boundary entropy, two concepts recently developed by Daza et al. [13].

This paper is organized as follows: in Section II we introduce the physical system to be considered, as well as the chaoticity of particle motion we focus on. Section III deals with the subject of exit basins and the characterization of their fractality. The last Section is devoted to our Conclusions.

2. Model

It is well-known that the motion of a particle of mass m and charge e in a uniform magnetic field B_0 , also called gyration, is a combination of a circular motion of radius mv/eB_0 on the plane perpendicular to \mathbf{B} and a uniform motion along \mathbf{B} . The motion of particle's guiding center suffers a drift when an electric field $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ is present. The velocity of such $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ is given by [14]

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\Phi \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1)$$

In our discussion we neglect all energy dissipation caused by, e.g. collisions between particles with energy and momentum exchange. If such effects were to be taken into account the system would become dissipative, with a completely different dynamics. However, the effect of such collisions can be neglected if the collisional frequency is small enough.

Factoring out the gyration, we can focus on the drift motion of the charged particles with a velocity \mathbf{v} , whose components satisfy canonical equations

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2)$$

where the Hamiltonian is $H(x, y, t) = \Phi(x, y, t)/B_0$. In the following, all variables have been suitably nondimensionalized.

The electric potential has an equilibrium part $\Phi_0(x)$ corresponding to a radial electric field and a perturbation caused by two electrostatic drift waves with amplitudes $A_{1,2}$, frequencies $\omega_{1,2}$ and wave vectors $\mathbf{k}_{1,2}$, in which, by a canonical transformation, leads to the following Hamiltonian [15]

$$H(x, y, t) = \Phi_0(x) - u_1 x + A_1 \sin(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + A_2 \sin(k_{x2}x) \cos[k_{y2}(y - ut)], \quad (3)$$

where $u_{1,2} = \omega_{1,2}/k_{y1,2}$ are the phase velocities of the drift waves and $u = u_2 - u_1$. We suppose that a stationary wave pattern along the radial distance x and a travelling wave along the poloidal direction y , such that the wave numbers are chosen as $k_x = n\pi/L_x$ and $k_y = 2\pi m/L_y$, where m and n are suitably chosen positive integers and $L_{x,y}$ are characteristic lengths [9]. We suppose a uniform electric field applied in the radial direction of the tokamak, such that $\Phi_0 = E_0 x$. In this model we neglect some collective effects in the plasma and consider it simply a collection of charged particles. Within this approximation, the interaction of the confined plasma with the electric and magnetic fields does not lead to collective effects, such as mechanical or magnetohydrodynamical waves.

The canonical equations (2) were numerically integrated for the Hamiltonian (3), and a Poincaré map was taken after considering only those values of (x, y) at times equal to an integer multiple of the period $T = 20\pi$. We choose A_2 (amplitude of the second wave) as the perturbation strength. The case $A_2 = 0$ represents an integrable system, and the particle motion is bounded within 4×4 cells limited by the separatrices emanating from the hyperbolic

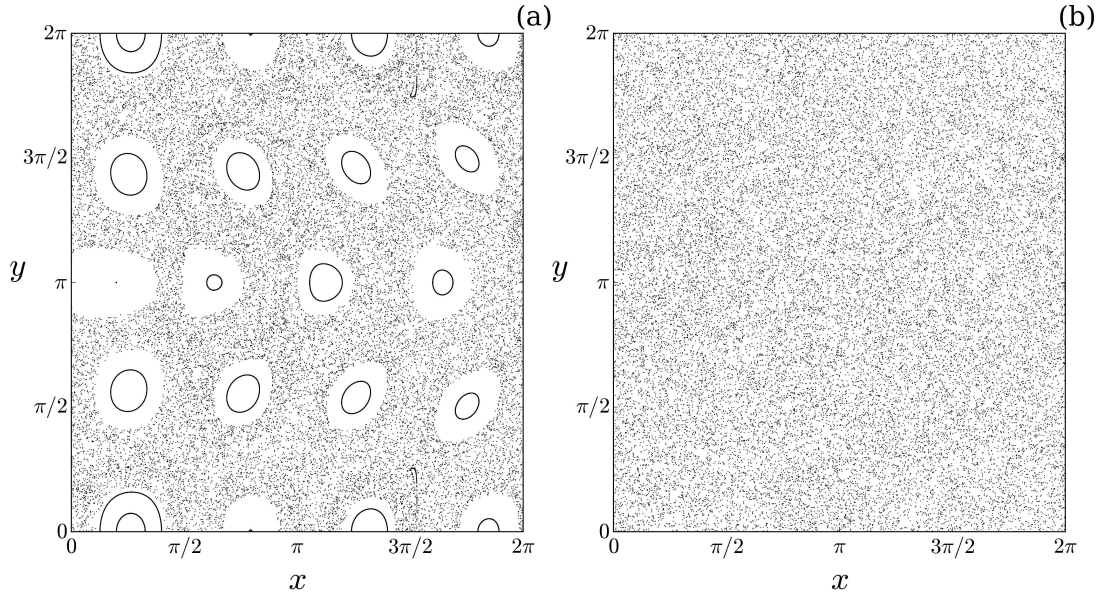


Figure 1. Phase portrait for the Poincaré map for $\omega_1 = \omega_2 = 0.2$, $k_{x1} = k_{y1} = 2.0$, $k_{x2} = \sqrt{3}$, $k_{y2} = 1.0$, $u = 0.1$, $A_1 = 1.0$ and (a) $A_2 = 0.8$, (b) $A_2 = 1.5$.

fixed points of the Poincaré map. In the interior of each cell there are closed curves orbiting around the elliptic fixed points.

In Fig. 1 we show two phase portraits for the Poincaré map obtained with different values of the perturbation intensity. For the case of smaller perturbation [Fig. 1(a)] the system integrability is broken, and the separatrices of the cells give place to a localized area-filling chaotic orbit, which is considerably enlarged as the perturbation is increased, practically engulfing all the remnant islands [Fig. 1(b)].

3. Exit basins

The chaotic orbits depicted in Fig. 1(a) and (b) allow particle transport over all the available phase space region. Since the left-hand boundary of this region coincides with the tokamak wall ($x = 0$) those particles hitting this line can be considered as effectively lost, due to many plasma-wall processes like sputtering. In order to investigate the distribution of particle escape through this wall we will divide it into two congruent segments: $\mathbf{A} = \{x = 0, 0 < y \leq \pi\}$ and $\mathbf{B} = \{x = 0, \pi < y \leq 2\pi\}$.

The next step is to cover the phase space region in Fig. 1 with a fine mesh of points and, considering each mesh point an initial condition (x_0, y_0) we iterated the Poincaré map and wait until the ensuing orbit escape through the wall at $x = 0$. If the trajectory has escaped through exit \mathbf{A} (\mathbf{B}) the corresponding initial condition is painted green (red). The sets of green and red pixels are thus numerical approximations of the basins of exits \mathbf{A} and \mathbf{B} , respectively. The white pixels stand for initial conditions that do not escape, since they are inside the periodic islands. The results are depicted in Fig. 2(a) and (b) for the same parameter values used in the phase portraits of Fig. 1(a) and (b).

A visual inspection of Figs. 2(a) and (b) shows that the size of the green basin is considerably

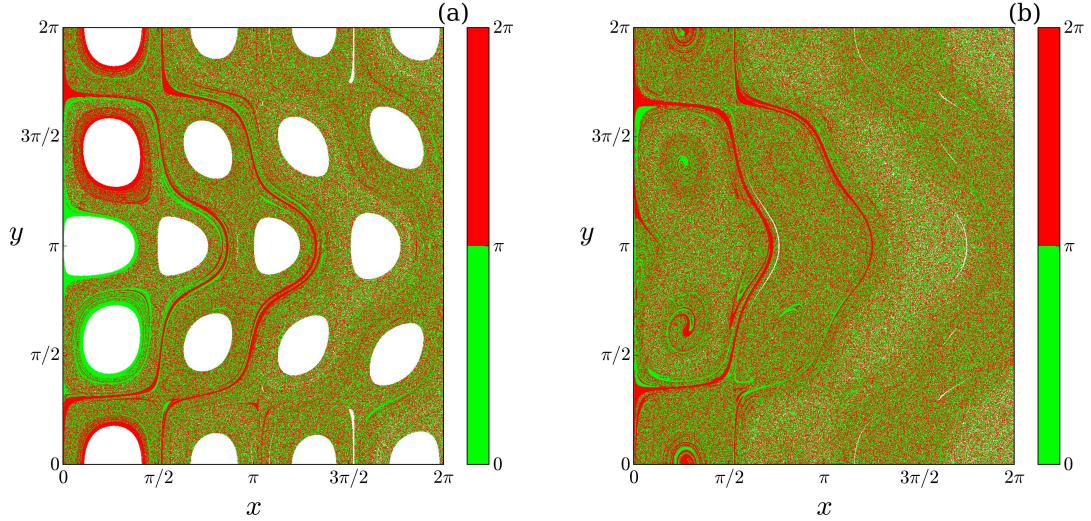


Figure 2. Basins of the exits $\mathbf{A} = \{x = 0, 0 < y \leq \pi\}$ (green pixels) and $\mathbf{B} = \{x = 0, \pi < y \leq 2\pi\}$ (red pixels) for the same parameters of Fig. 1, and (a) $A_2 = 0.8$, (b) $A_2 = 1.5$.

smaller than for the red basin. This means that most initial conditions escape through exit \mathbf{B} , i.e. the escape pattern is strongly nonuniform. The reason for this behavior is the structure of invariant manifolds (stable and unstable) that cross themselves in an infinite number of homoclinic and heteroclinic points. Since the manifolds have an extremely involved behavior, the resulting meanders act as escape channels, through which the phase space trajectories are directed to escape towards $x = 0$.

When two exit basins are intertwined the way shown in Fig. 2, it is typically found that their common boundary is fractal. In order to check this fact we computed the box counting dimension of this boundary using the uncertainty fraction technique [2, 3]. We know that an initial condition is known up to a given uncertainty ε , represented by a ball of radius ε centered at that initial condition. If this ε -ball intercepts the basin boundary, we cannot be sure to which exit that initial condition will evolve to one. In this case we say that the initial condition is ε -uncertain.

The fraction of uncertain initial condition scales with the uncertainty as $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, where $0 < \alpha < 1$ is called the uncertainty exponent. The latter is related to the box-counting boundary dimension D_0 by $\alpha = 2 - D_0$, in a two-dimensional phase space [2]. If the boundary is a smooth curve, then $\alpha = 1$ and $D_0 = 1$, whereas $\alpha < 1$ is for a fractal boundary. Using this technique we found that the box-counting dimension of the boundary between red and green basins in Fig. 2(a) and (b) is $D_0 = 1.945 \pm 0.002$ and $D_0 = 1.956 \pm 0.002$, respectively. Hence the basin boundary dimension has increased with the perturbation, and it approaches 2.0, which would mean an area-filling curve.

The box-counting dimension, while useful to characterize the fractality of the exit basin boundary, do not give information about the degree in which these basins are intertwined. A more convenient measure for this purpose is the basin entropy introduced by Daza *et al.* [13]. We start by covering a given region of the phase space by a grid of 1000×1000 points of each basin, distributed inside 4×10^4 boxes. For each grid point, a maximum of 1.5×10^4 stroboscopic map points were obtained, and excluding those initial conditions that have not escaped during

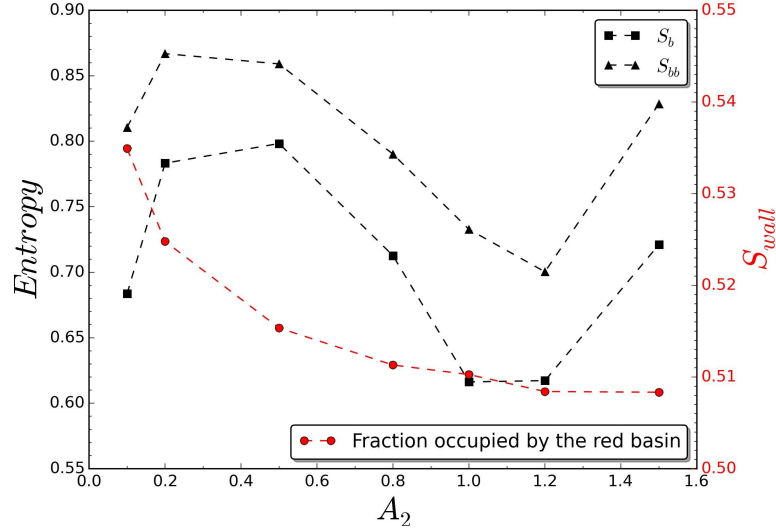


Figure 3. Basin entropy and basin boundary entropy for the case of two exits [see Fig. 2] as a function of the second wave amplitude. We also plot the fraction occupied by the red basin.

that time.

Let n_1 be the number of points of the box corresponding to the exit 1, and n_2 to exit 2. For each box we obtained the probabilities $p_1 = n_1/(n_1 + n_2)$ and $p_2 = n_2/(n_1 + n_2)$, and we apply the Gibbs entropy definition for each box [13]:

$$S = - \sum_{i=1}^2 p_i \log_2(p_i). \quad (4)$$

The basin entropy S_b is the sum of the values of S for those boxes such that all the initial conditions escape, divided by the number of boxes N_b for which all initial conditions escape. The boundary basin entropy S_{bb} was obtained analogously, but excluding those boxes for which either $p_1 = 0$ or $p_2 = 0$, i.e., there were considered only the boxes that have at least one boundary in their interior.

If there were a single exit the basin entropy would vanish, meaning zero final-state uncertainty. On the other hand, if the two exits are equiprobable, in the sense that their basins are of comparable sizes and densely intertwined, the maximum value of the basin entropy would be $S_b = \log_2 2 = 1$, i.e. a completely randomized basin structure.

We show in Fig. 3 the values of the basin entropy S_b and the basin boundary entropy S_{bb} for the two exits as a function of the second wave amplitude A_2 . It is also plotted the fraction S_{wall} occupied by the (red) basin of the exit **B** (the fraction of the green basin is $1 - S_{wall}$). The values of S_{wall} are slightly higher for weak perturbation (about 53%) and tend to 51% for strong perturbation. This fact is exemplified by Fig. 2(a) and (b), in which the green and red basins are more intertwined for stronger perturbation. We observe that the values of S_b fluctuate between 0.68 and 0.80 for the range of perturbation considered, meaning that the basins are mixed together in a very complicated way for all considered values of the perturbation strength A_2 .

4. Conclusions

The dynamics in chaotic orbits of non-integrable open Hamiltonian systems is strongly influenced by fractal structures coming from the complicated intersections between stable and unstable invariant manifolds of unstable periodic orbits embedded in the chaotic orbit. In particular, the chaotic saddle (formed by the intersections between the manifolds) has a Cantor dust structure similar to the horseshoe set. Such fractal structures have observable consequences in open Hamiltonian systems of physical interest, like the motion of charged particles in a magnetic field under the influence of electrostatic drift waves of different frequencies and wave numbers. In this case, we analyzed the presence of fractal structures in the so-called exit basins, which are the sets of initial conditions leading to an escaping orbit through some specified exit. The boundary between two escaping basins has shown to be a fractal curve through direct computation of its box-counting dimension, showing a value close to the phase space dimension, which means a highly convoluted curve. This fact leads, as a consequence, to a final-state uncertainty, i.e. once the initial condition is determined within a given uncertainty, it turns to be increasingly difficult to know for sure to which exit the ensuing orbit asymptotes to. We verified this fact also by computing the basin entropy, which is a novel measure for the degree of uncertainty related to fractal exit basin boundaries. Our results are not restricted to this particular physical system though, and are quite often observed in other open Hamiltonian systems as well.

Acknowledgments

This work has received the partial financial support from the following Brazilian government agencies: CNPq, CAPES and FAPESP (Processo 2011/19296-1). We would like to acknowledge useful discussions with Prof. Miguel Sanjuán (Madrid).

References

- [1] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott, and R. Brown, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 930.
- [2] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica D* **17** (1985) 125.
- [3] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 333.
- [4] G. Contopoulos, *Astron. Astrophysics* **231** (1990) 41.
- [5] G. Contopoulos, H. E. Kandrup and D. Kauffman, *Physica D* **64** (1993) 310.
- [6] J. Aguirre, J. C. Vallejo, and M. A. F. Sanjuán, *Phys. Rev. E* **64** (2001) 066208.
- [7] E. C. da Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, *Phys. Plasmas* **9** (2002) 4917.
- [8] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, R. L. Viana and M. A. F. Sanjuán, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17** (2007) 4067.
- [9] W. Horton, *Plas. Phys. Contr. Fusion* **27** (1985) 937.
- [10] W. Horton, *Turbulent transport in magnetized plasmas* (World Scientific, Singapore, 2012)
- [11] A. C. Mathias, R. L. Viana, T. Kroetz, and I. L. Caldas, *Physica A* **469** (2017) 681.
- [12] R. K. W. Roeder, B. I. Rapoport, and T. E. Evans, *Phys. Plasmas* **10** (2003) 3796.
- [13] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, and M. A. F. Sanjuán, *Sci. Rep.* **6** (2016) 3416.
- [14] G. Schmidt, *Physics of high-temperature plasmas* (Academic Press, New York, 1979).
- [15] F. A. Marcus, I. L. Caldas, Z. O. Guimarães-Filho, P. J. Morrison, W. Horton, Yu. K. Kuznetsov, and I. C. Nascimento, *Phys. Plasmas* **15** (2008) 112304

A.3 Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter

Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter

A. C. Mathias ¹, T. Kroetz ², I. L. Caldas ³, and R. L. Viana ^{1 a}

1. Department of Physics, Federal University of Paraná, Curitiba, Paraná, Brazil

2. Department of Physics, Federal Technological

University of Paraná, Pato Branco, Paraná, Brazil

3. Institute of Physics, University of São Paulo, São Paulo, Brazil

(Dated: September 11, 2017)

Abstract

Open hamiltonian systems have typically fractal structures underlying chaotic dynamics with a number of physical consequences on transport. We consider such fractal structures related to the formation of a chaotic magnetic field line region near the tokamak wall and the corresponding field line dynamics, described by a two-dimensional area-preserving map. We focus on the exit basins, which are sets of points which originate orbits escaping through some exit and are typically fractal, also exhibiting the so-called Wada property. We show qualitative as well as quantitative evidences of these properties.

^a Corresponding author. e-mail: viana@fisica.ufpr.br

I. INTRODUCTION

An outstanding problem in the physics of magnetically confined fusion plasmas is the control of the interaction between plasma particles and the inner wall in which they are supposed to be contained (e.g. in a tokamak) [1]. Due to the so-called anomalous transport, plasma particles escape towards the wall and are lost, reducing the plasma density and thus the quality of confinement [2, 3]. Moreover, since many of these particles can be highly energetic they interact with the metallic wall causing the release of contaminants through sputtering and other processes [4]. One of the proposed ways to control plasma-wall interactions is the use of chaotic magnetic fields near the tokamak wall, spanning both the plasma outer edge and the scrape-off layer between the plasma and wall [5–9].

Such a chaotic field line region can be obtained by applying suitable magnetic perturbations that break the integrability of the magnetic field line flow, causing the appearance of area-filling stochastic lines (ergodic magnetic limiter) [10]. The initial claim was that such chaotic field would uniformize heat and particle loadings, so diminishing localized attacks and their undesirable consequences [5–7]. However, both theoretical and experimental evidences suggest that this is not true, i.e. the chaotic region can be highly non-uniform and thus the risk of localized loadings can only be diminished, if not completely avoided [11–16].

This non-uniformity of chaotic regions is ultimately the consequence of the underlying mathematical structure of chaotic orbits in area-preserving mappings, since they are structured on a complicated homoclinic tangle formed by intersections of invariant manifolds stemming from unstable periodic orbits embedded in the chaotic orbits [17, 18]. Hence it is important to use such knowledge to understand how the escape is structured near the tokamak wall, locating possible “hot spots” (i.e. high loading parts of the wall) that should be protected so as not to cause extremely localized particle fluxes from the plasma, for example by using divertor configurations [19–21].

The main goal of this paper is to show the presence of fractal structures in the chaotic region of escaping magnetic field lines caused by an ergodic limiter, by using a simple area-preserving mapping proposed by Martin and Taylor [22]. We observe the presence of fractal basins, in the case of two exits [17], and the so-called Wada property in the case of three (or more) exits [23]. We emphasize the physical consequences of those mathematical properties in terms of escape times and magnetic footprints caused by the self-similarity of the fractal

structures [24].

In previous papers dealing with exit basins due to ergodic limiter fields we have considered the fractality of exit basins from the direct calculation of the box counting dimension of the exit basin boundaries, and characterized the Wada property by a qualitative argument [11, 12]. This may be an insufficient characterization of the exit basin structure because we would like to know the answer to questions like: (i) to which degree are the fractal basins mixed together? or (ii) to what extent is the Wada property fulfilled? In this paper we provide answers to these questions by developing further the analysis by presenting quantitative techniques introduced recently by Sanjuán and coworkers [25–27].

This paper is organized as follows: in Section II we outline the physical model used to describe the ergodic magnetic limiter as well as the mapping equations governing the dynamics of the corresponding magnetic field line flow. Section III considers the fractal nature of the escape basin boundary, both qualitatively (using the invariant manifold structure as a guide) and quantitatively (by computing the box-counting dimension of the boundary). In Section IV we use the concepts of basin entropy and basin boundary entropy to characterize the fractality of the exit basins. Section V is devoted to a discussion of the Wada property for three exit basins and to the application of a technique (grid approach) to verify in what extent the Wada property is fulfilled by the system. The last Section is devoted to our Conclusions.

II. MAGNETIC FIELD LINE MAP

A tokamak is a toroidal device for magnetic confinement of fusion plasmas, in which the plasma is generated by the ionization of an injected low-pressure gas (hydrogen) through an induced emf caused by the discharge of a capacitor bank [28]. There are two basic confining magnetic fields: a toroidal field \mathbf{B}_T generated by coils mounted externally to the toroidal chamber and a poloidal field \mathbf{B}_P generated by the plasma itself. In the axisymmetric case the resulting magnetic field lines are helicoidal, winding on nested toroidal surfaces (called magnetic surfaces) [29].

A general non-axisymmetric perturbation will break up a certain number of these magnetic surfaces. As a result, some of the magnetic field lines will no longer lie on surfaces, ergodically filling a bounded volume inside the toroidal device. Such magnetic field lines will

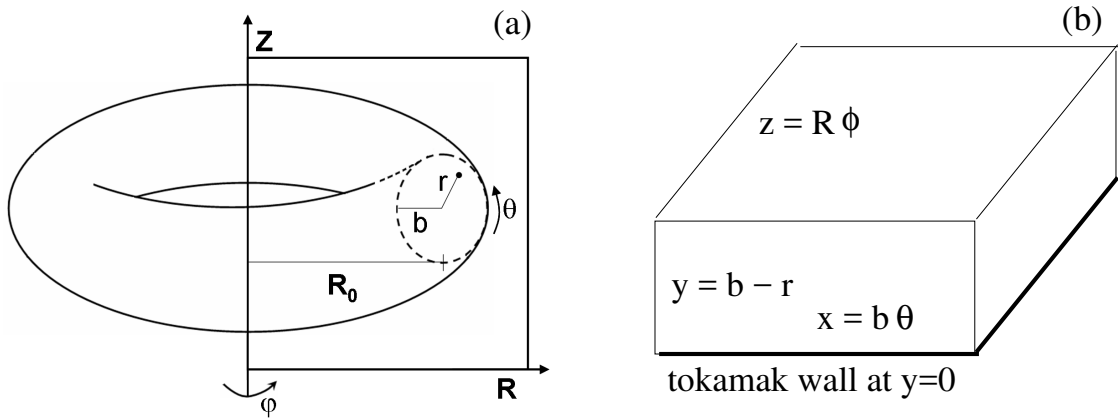


FIG. 1. Schematic figure showing the basic tokamak geometry in (a) local and (b) rectangular coordinates.

be called chaotic but, since we are dealing with strictly time-independent configurations, the word chaos must be intended in a Lagrangian sense: two field lines, originated from very close points, separate spatially at an exponential rate as winding around the torus. Such description can be made rigorous by considering a hamiltonian description of magnetic field lines [10].

The basic tokamak geometry is depicted in Fig. 1(a) using cylindrical coordinates (R, ϕ, Z) : the tokamak vessel is a torus of major radius $R = R_0$ with respect to the major axis parameterized by coordinate Z). The major radius stands for the minor axis, such that the position of a field line point can be assigned to the local coordinates (r, θ, ϕ) , where $R = R_0 + r \cos \theta$ and $Z = r \sin \theta$. The variables θ and ϕ are also called poloidal and toroidal angles, respectively. The tokamak wall is located at $r = b$.

In this paper we will focus on the production of chaotic field lines near the wall of the toroidal device. Hence we can use a simplified rectangular geometry to describe the situation therein, so avoiding the use of unnecessarily complicated coordinate system. In this slab geometry description we use three coordinates (x, y, z) to describe a field line point, where $x = b\theta$ stands for the rectified arc along the wall, and $y = b - r$ is the radial distance measured from the wall (which is located at $y = 0$) [Fig. 1(b)]. The coordinate $z = R\phi$ measures the rectified arc along the toroidal direction.

The magnetic field line equations in these coordinates are written as

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (1)$$

where the equilibrium magnetic field is $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$. In the lowest-order approximation we set $\mathbf{B}_T = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ and the field line equations can be written as [30]

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\pi R_0} [\alpha + sy + o(y^2)], \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dz} = 0, \quad (3)$$

where the parameters α and s are related to the equilibrium magnetic field components, by expanding the safety factor $q(r)$ in a power series around the plasma boundary $r = b$, such that $\alpha = 2\pi b/q_b$ and $s = 2\pi b q'(b)/q_b^2$ [30]. Let us take, for example, a quadratic profile $q(r) = q_b r^2/b^2$. This yields $s = 4\pi/q_b$. Hence our choice $s = 2\pi$ would correspond to $q_b = 2$, which is a value in agreement with Tokamak experiments.

The equations (2)-(3) can be integrated, using z as the independent variable, such that a Poincaré map is obtained by sampling the values of x and y just after the n th crossing of a surface of section at $z = 0$ (the z -direction has a well-defined periodicity corresponding to the long way around the torus). In this way we define discrete-time variables (x_n, y_n) which are known as functions of the same variables at the previous crossing, namely (x_{n-1}, y_{n-1}) .

The axisymmetric configuration (closed, toroidal magnetic surfaces) can be described in such a framework by a simple twist map (after a convenient rescaling of variables, such that $0 \leq x < 2\pi$ and $y \geq 0$)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbb{T}_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + s(y_n) y_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

The equality of y for consecutive iterations of the map reflects the fact that a field line always lies on a magnetic surface $y = \text{const.}$.

In this paper we consider a particular kind of symmetry-breaking perturbation on the above equilibrium configuration, the so-called ergodic limiter, which is a ring-shaped coil at $r = b$ with m pairs of straight wire segments of length ℓ , aligned with the toroidal direction and conducting a current I [Fig. 2]. The ergodic magnetic limiter generates a spatially localized magnetic field

$$\mathbf{B}_1(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{B}}_1(x, y), & \text{if } 0 \leq z \leq \ell \\ 0, & \text{if } \ell < z < 2\pi R_0, \end{cases} \quad (5)$$

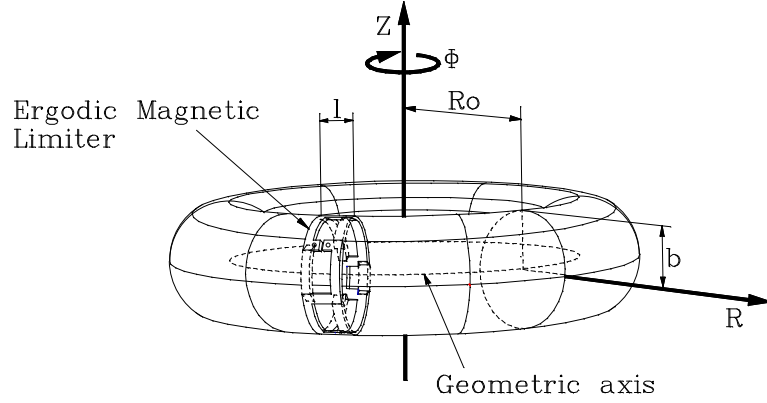


FIG. 2. Schematic figure showing the ergodic magnetic limiter.

where

$$\tilde{B}_{1x}(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{b\pi} e^{-my/b} \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (6)$$

$$\tilde{B}_{1y}(x, y) = \frac{\mu_0 m I}{b\pi} e^{-my/b} \sin\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (7)$$

$$\tilde{B}_{1z}(x, y) = 0 \quad (8)$$

The limiter field is superimposed to the equilibrium field, i.e. we make $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, leading to the destruction of a number of magnetic surfaces. Martin and Taylor have, by an ingenious integration of the field line equations (1), obtained an analytical map T_2 representing the limiter field action on the magnetic field lines twisting according to the map (4) [22]. The composition of the two mappings, $T = T_1 \circ T_2$ yields

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + s y_n + g(x_n, y_n) \\ y_n + h(x_n, y_n) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

where

$$h(x, y) = \ln \left| \frac{\cos(x - p e^{-y} \cos x)}{\cos x} \right|, \quad (10)$$

$$g(x, y) = -p e^{-y} \cos x + s h(x, y), \quad (11)$$

in which $p = \mu_0 \ell m^2 I / B_0 b^2 \pi$ is a positive parameter representing the strength of the limiter magnetic field. It depends on the limiter current and length [30]. If $p = 0$ (no limiter field) we recover the simple twist map (4).

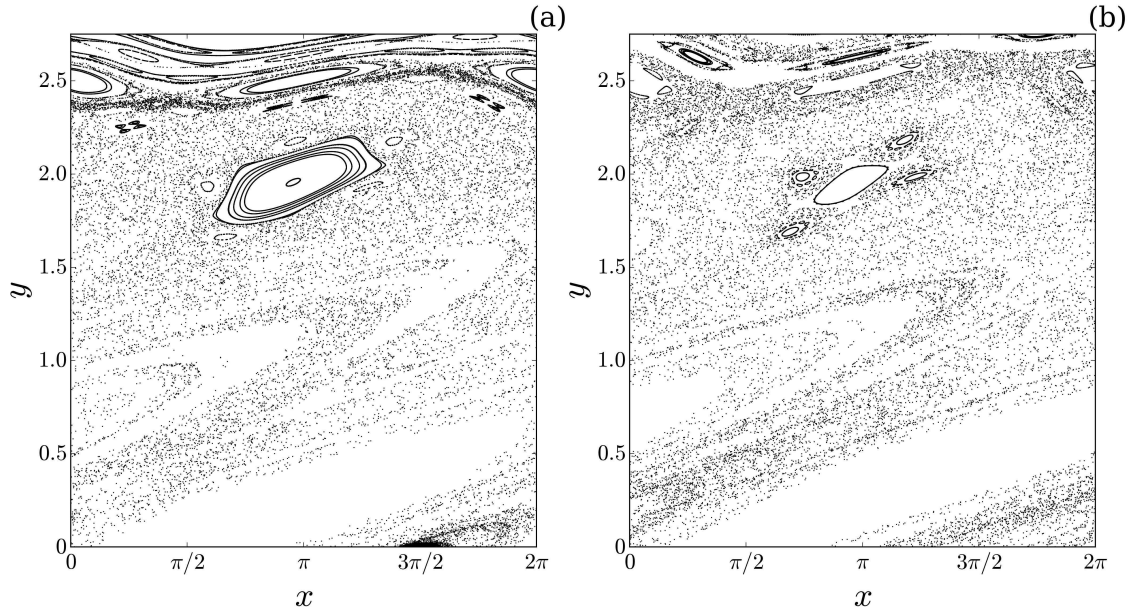


FIG. 3. Phase portraits of the map (9) for $s = 2\pi$ and $p = 2.0$ (a) and 2.5 (b).

A direct calculation of the corresponding jacobian determinant shows that the above map is area-preserving. This is a necessary requirement due to the divergenceless property of the magnetic fields involved. Being a perturbed twist mapping, we expect a rich dynamical behavior from its iteration. The general aspects of the dynamics are well-known [22, 30]. The fixed points of the map (9) are roughly located at $(0, 2\pi m/s)$ and $(\pi, 2\pi m/s)$, where $m = 0, 1, 2, \dots$. The former are saddles and the latter, centers of periodic islands with half-widths

$$\Delta y_m \approx 2 \sqrt{\frac{p}{s}} e^{-\pi m/s}, \quad (12)$$

which decrease with y , thanks to the fact that the limiter magnetic field strength decays exponentially as we go inside the toroidal vessel. The non-equality of the island widths and the non-periodicity of the y -direction make the map (9) in many ways very different from the widely studied Chirikov-Taylor standard map [31]. On the other hand, the separation between two adjacent periodic islands is $\delta y_m \approx 2\pi/s$ and does not depend on p .

A consequence of the above properties is that, if the limiter strength p is increased, only the islands closer to the tokamak wall at $y = 0$ are significantly affected. Let us thus consider

only the islands with $m = 1$ and $m = 2$. The so-called stochasticity parameter is defined as

$$\mathcal{S}_{12} = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{\delta y_1} = \frac{\sqrt{ps}}{\pi} e^{-\pi/s} (1 + e^{-\pi/s}). \quad (13)$$

For the case $s = 2\pi$ (this value will be kept constant from now on) the exponential factors add up practically to the unity and $\mathcal{S}_{12} \approx \sqrt{2p/\pi}$. A rough but useful estimate for the threshold of global chaos is given by the well-known Chirikov criterion $\mathcal{S}_{12} = 1$ [31], which indicates that after $p \approx 1.6$ there is a area-filling chaotic orbit encompassing the region near the tokamak wall, which was the intended function of the magnetic limiter.

An example is provided by the phase portrait depicted in Fig. 3(a), obtained for $p = 2.0$. For this value of the perturbation strength the two first periodic islands (with $m = 0$ and 1) have already been destroyed, whereas remnants of the island with $m = 2$ can still be observed centered about $x = \pi$. This remnant island is also distorted in shape thanks to the nonzero shear s . For a larger value of p [Fig. 3(b)] even that remnant is further destroyed. In both cases a large chaotic orbit near the tokamak wall has been developed.

The chaotic region displayed in Figs. 3(a) and (b) was obtained from a mesh of $N = 8 \times 20 = 160$ initial conditions distributed along both x and y directions, in the following way:

$$(x_{0k}, y_{0\ell}) = (k\pi/4, \ell(y_{max} - y_{min})/20), \quad 0 \leq k \leq 7, \quad 0 \leq \ell \leq 19,$$

such that, for every initial condition, we computed the 1000 first map iterations.

III. FRACTAL ESCAPE BASIN BOUNDARIES

A closer look at Figs. 3(a) and (b) shows that the area-filling chaotic orbits therein are far from being uniform, i.e. the distribution of iterates (corresponding to intersections of field lines with a fixed surface of section) is non-uniform. In some cases, it appears that “voids” develop within these chaotic orbits, what is obviously only an artifact of the finite number of iterations used to generate those plots. If we were to plot an infinitely large number of iterates then the whole available region would be filled. However, this would not add to the clarity of the picture, hence we use a moderately large number of map iterates to illustrate the chaotic orbits.

Nevertheless, those non-uniformities in the chaotic orbits of Fig. 3 teach us some lessons on the type of behavior we expect to see for charged particles belonging to the confined

plasma. The most basic motion for them, when in a magnetic field, is a gyration with finite Larmor radius and whose guiding center follows, in a first approximation, the field lines (in this case we would neglect any kinds of particle drifts due, for example, to curvature and non-uniformities of the magnetic field) [32]. In the realm of this approximation it is possible to describe the transport of charged plasma particles by considering the topology of the magnetic field lines, in such a way that particles will closely follow those lines. This approximation is justified if the characteristic drift times are larger than the typical time used to describe a given plasma phenomenon.

Since the chaotic orbits generated by limiter action intercept the tokamak wall, a given particle following the corresponding field lines will eventually hit the tokamak wall and be lost (physically it corresponds to a metallic wall which absorbs particles, perhaps with the production of undesirable quantities of contaminants by sputtering and other processes). The original design of the ergodic limiter was based on the assumption that a chaotic orbit would uniformize particle fluxes near the tokamak wall, so avoiding localized particle loadings [5–7]. However, it turns out that the chaotic orbit itself is highly non-uniform, hence it is somewhat unavoidable to have some degree of non-uniform particle loading on the wall.

One numerical characterization of the non-uniformity inherent to the chaotic orbit is the computation of the so-called escape basins. Such a basin is the set of points in the Poincaré phase plane that generate orbits which escape through a specified exit [17]. Hence the application of this concept requires an open system. Since a field line (and the corresponding particle that follows it) is considered lost once it hits the tokamak wall at $y = 0$ we divide this line into two segments, or exits: **A** : $(0 \leq x < \pi, y = 0)$, and **B** : $(\pi \leq x < 2\pi, y = 0)$.

We divide the phase plane into a $10^3 \times 10^3$ mesh of points, each of them being the initial condition (x_0, y_0) for an orbit of the map (9). Just after this orbit crosses the wall at $y = 0$ we depict the initial condition pixel in red if the escape occurs through exit **A** and green if through exit **B**. The union of the red (green) regions is a numerical approximation for the basin of the exit **A** (**B**). Since the map gives us the field lines coordinates at the Poincaré section, the collision with the wall usually happens between two successive iterations of the map. Therefore, the escape ($y_e = 0$) occurs when $y_n < 0 < y_{n+1}$. The polar coordinate x_e related to the escape is obtained by linear interpolation: $x_e = x_n - [(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n)]y_n$. It must be emphasized that, since x is defined in the interval $[0, 2\pi)$, if the escape point x_e is outside $[0, 2\pi)$ we first reduce to this interval to decide through which exit it is escaping.

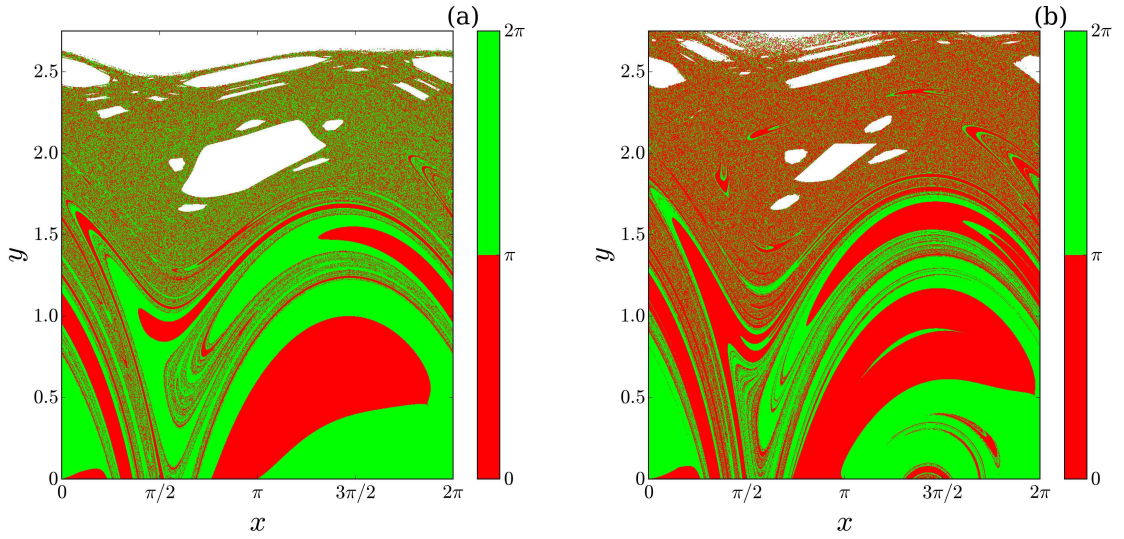


FIG. 4. Escape basins of exits **A** : $(0 \leq x < \pi, y = 0)$ (red) and **B** : $(\pi \leq x < 2\pi, y = 0)$ (green) for $s = 2\pi$ and $p = 2.0$ (a) and 2.5 (b). White pixels stand for initial conditions which do not escape at all.

Each initial condition is iterated by a maximum of 10^4 times. If the initial condition has not escaped after this limit, we consider it as non-escaping. In fact this does not imply that the initial condition cannot escape at all (since it might escape after, say, 10^5 iterations). However, the number of this false-positive points is expected to be relatively small and does not affect appreciably our main results.

In Fig. 4(a) we show the exit basins for the same parameters used to generate the Poincaré phase plane depicted in Fig. 3(a). The white regions correspond to initial conditions which do not escape (within 10^4 iterations), corresponding to orbits inside periodic islands as well as chaotic orbits separated by KAM tori from the large chaotic sea near the wall. Within most of the chaotic region the basins of **A** and **B** are intermixed, sometimes in a very intricate way. The fraction of initial conditions escaping through the exits **A** and **B** with respect to the total number of escaping initial conditions are 46.71% and 53.29%, respectively.

It is worthwhile to note that there are initial conditions (painted in green) very close to the exit **A** that nevertheless belong to the basin of **B**. This suggests the existence of escape channels that in some way provide a preferential escape through **B**. On increasing the

perturbation strength [Fig. 4(b)] it is clearly visible an increase of the red points belonging to the basin of **A**. Indeed, the fraction of initial conditions escaping through **A** and **B** is respectively 29.46% and 70.54%. In a certain sense the intermixing of the basins has been enhanced with increasing perturbation.

From a mathematical point of view, the complicated structure of the escape basins revealed by Fig. 4 can be understood by considering the invariant chaotic sets underlying the large chaotic orbit near the tokamak wall. We begin by considering an unstable periodic orbit embedded in the chaotic region, with its stable and unstable manifolds. They are invariant sets of points which asymptote to the periodic orbit under forward and backward iterations of the map, respectively [33]. The intersection of the stable and unstable manifolds, called chaotic saddle Λ , is a non-attracting invariant chaotic set containing a dense orbit [34].

The boundary of the escape basins coincides with the stable manifold of the chaotic saddle Λ (actually the boundary is the closure of the stable manifold). The convoluted aspect of the escape boundary reveals a smooth component along the stable manifold and a fractal Cantor-like set transversal to it. It is thus necessary that the escape boundary crosses the stable manifold in order to have a fractal structure [35].

The basic dynamical behavior in the phase space region \mathcal{R} containing the chaotic saddle Λ is the following: the orbits of all initial conditions in \mathcal{R} will eventually leave \mathcal{R} through either one of the two exits **A** or **B**, except for a measure zero set of initial conditions lying on the stable manifold of Λ . Those initial conditions that are off but close to the stable manifold are first attracted to Λ and stay close to its neighborhood for a number of map iterations, before they are repelled, following the unstable manifold of Λ [36]. The closer the initial condition is to the stable manifold of Λ the longer the number of map iterations it takes before leaving the phase space region \mathcal{R} .

We obtained the invariant manifolds of the chaotic saddle using the so-called sprinkler method, which consists in partitioning the phase space region \mathcal{R} into a fine mesh of N_0 points [37, 38]. We compute for each point (initial condition) the connection length, i.e. the number of map iterations it takes for the corresponding orbit to leave \mathcal{R} [Fig. 5]. The initial conditions with a connection length larger than some specified value n_c represent an approximation to the stable manifold of Λ , and their last iterations before leaving \mathcal{R} are an approximation of the unstable manifold [36, 39]. Those initial conditions with a given

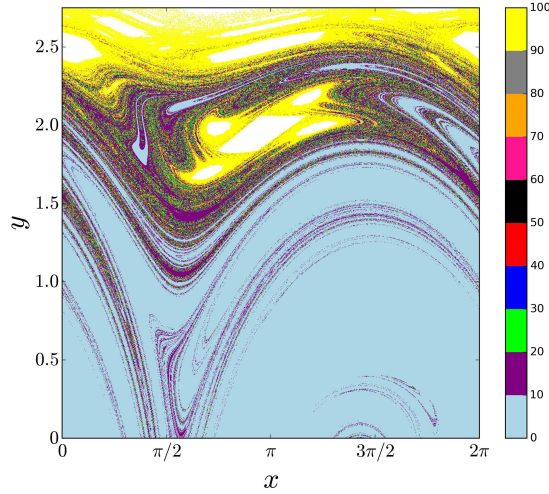


FIG. 5. Connection lengths (measured in number of map iterations) for initial conditions in the phase portrait of the Martin-Taylor map for $s = 2\pi$ and $p = 2.5$.

connection length $\bar{n} = \xi n_c$, where $0 < \xi < 1$ are an approximation to the chaotic saddle Λ .

The values of n_c and ξ must be chosen after trial and error, but the numerical results seem not to be substantially affected by them. n_c must be large compared with the average connection length, and $\xi = 0.5$ seems to be a good choice for most dynamical systems [40]. Figure 3 shows our results for the case $s = 2\pi$ and $p = 2.5$, where we have used $n_c = 100$ and $\xi = 0.5$. Starting from a grid of $N_0 = 10^4 \times 10^4$ initial conditions, we record those initial conditions with a connection length larger than n_c . Such initial conditions constitute an approximation to the stable manifold of the chaotic saddle [Fig. 6(a)]. On the other hand, the end points of the trajectories related to the recorded initial conditions (i.e., the orbit points for those trajectories after $n_c = 100$ map iterations), are an approximation to the unstable manifold of the saddle [Fig. 6(b)]. The points from the middle of these trajectories ($\bar{n} = 0.5n_c = 50$) are thus representations for the chaotic saddle [Fig. 6(c)].

On comparing Figs. 6(a) and 4(b), both obtained with the same perturbation strength $p = 2.5$, it is apparent that the part shown of the stable manifold traces out the boundary between the exit basins of **A** and **B**. Moreover, the shape of the unstable manifold shown in Fig. 6(b) helps us to understand the asymmetry between the basins of exits **A** and **B**, as illustrated by Fig. 4. Points belonging to the green basin escape through exit **B** and points

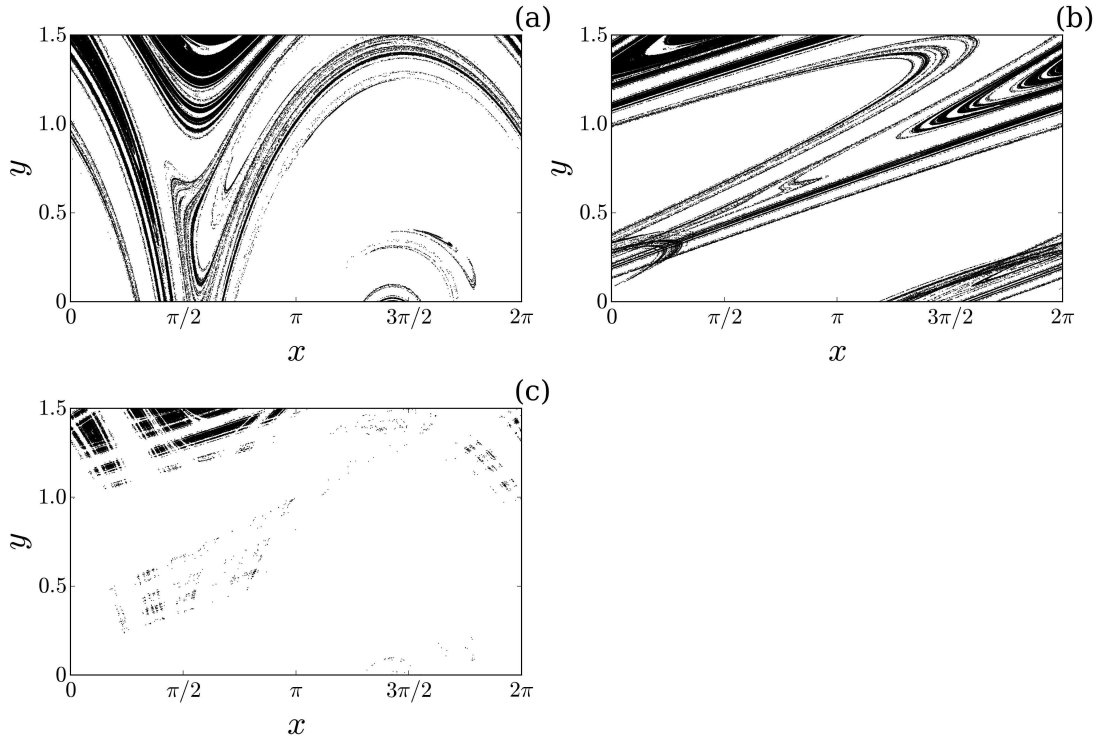


FIG. 6. (a) Stable and (b) unstable manifold and (c) chaotic saddle for a chaotic orbit in the case $s = 2\pi$ and $p = 2.5$. There was used the sprinkler method with $n_c = 100$ iterations and $\xi = 0.5$.

nearby it are mostly green. On the other hand, many green points can be found very close to the exit **A** (whose basin points are painted red). This is because the unstable manifold intersects the tokamak wall mostly at exit **B**, as clearly seen in Fig. 6(b).

An important physical consequence of the invariant manifold structure revealed by Fig. 6 is that the spatial distribution of connection lengths is highly non-uniform, as shown by Fig. 5. By comparing it with Fig. 6(a) there follows that the regions of higher connection lengths tend to follow the stable manifold of the boundary. While points exactly on the stable manifold will not escape at all, points off but very close to the stable manifold will take more map iterations to escape.

The fractal nature of the escape basin boundary can also be quantitatively investigated by computing its box-counting dimension using the uncertain fraction method. We randomly choose a large number of initial conditions (x_0, y_0) in the chaotic region and iterate the map

(9) until the corresponding orbit reaches the tokamak wall at some exit (**A** or **B**). For each initial condition we choose another one in a random way within a ball of radius ε and repeat the iteration. If this second initial condition goes to a different exit the first one is dubbed ε -uncertain. The fraction of uncertain conditions $f(\varepsilon)$ is expected to increase with ε as a power-law $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, where α is the so-called uncertainty exponent [35, 41].

Let D_p be the phase space dimension. If D is the box-counting dimension of the basin boundary there results that the uncertainty exponent satisfies the relation $\alpha = D_p - D$. A heuristic proof of this result is the following [35]: let $N(\delta)$ be the minimum number of D_p -dimensional hypercubes of side δ required to completely cover the escape basin boundary. The box-counting dimension of the latter is

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}, \quad (14)$$

in such a way that $N(\delta) \sim \delta^{-D}$. If we set $\delta = \varepsilon$, the volume of the uncertain region in the phase space will be $N(\varepsilon)$ times the volume of the D_p -dimensional cubes, which is ε^{D_p} . Since the initial conditions are uniformly chosen over the phase space region, the uncertain fraction is of the order of the total volume $N(\varepsilon)\varepsilon^{D_p} = \varepsilon^{D_p-D}$. Hence $\alpha = D_p - D$. A rigorous proof of this statement can be found in Ref. [35]. In our case we have $D_p = 2$, for which $\alpha = 2 - D$, in such a way that a smooth boundary with $D = 1$ has $\alpha = 1$, whereas $0 < \alpha < 1$ characterizes a fractal basin boundary.

Figure 7(a) and (b) show log-log plots of $f(\varepsilon)$ vs. ε for two different values of the perturbation strength. The solid lines represent least squares fits, and yield the following values of the dimensions of the fractal escape boundaries: $D = 1.10 \pm 0.02$ for $p = 2.0$ and $D = 1.25 \pm 0.02$ for $p = 2.5$, confirming our first impression that the increase of perturbation leads to a more complex basin boundary structure. Moreover, the fractality of the basin boundary leads to important physical consequences on the predictability of the final state the system will asymptote to.

As an example, consider the escape basin structure depicted in Fig. 4(b), for which $\alpha \approx 2 - 1.25 = 0.75$. Any basin point (initial condition for iterate the map) is known within a given uncertainty ε , such that the fraction of uncertain points scales as $\varepsilon^{0.75}$. Suppose we can reduce this uncertainty by 50%. There follows that the fraction of uncertain point will be reduced by only a factor of 0.59. If α decreases to zero this reduction is even shorter, hence a practical consequence of the fractality of the escape boundary is that our ability of

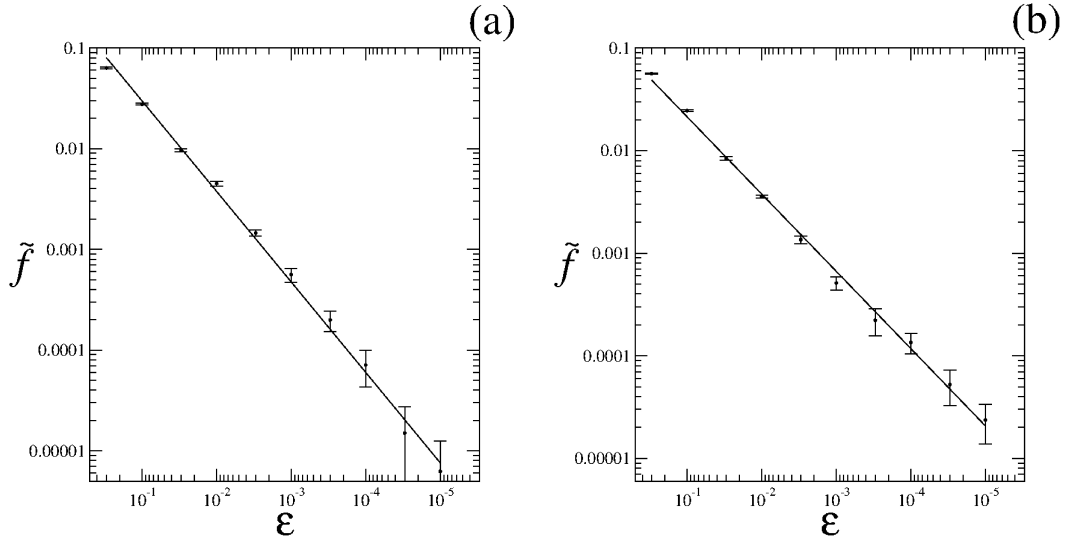


FIG. 7. Uncertainty exponent versus uncertainty radius for (a) $p = 2.0$ and (b) $p = 2.5$.

improving the knowledge of the future state of the system is impaired [41].

IV. BASIN ENTROPY

Besides the calculation of the basin boundary box-counting dimension, as shown in the last section, we can compute the so-called basin entropy, which quantifies the degree of uncertainty due to the fractality of the basin boundary [26, 27]. Let us consider a phase space region Ω which includes a part of the escape basin boundary, and divide this region into boxes by using a fine mesh, assigning to each mesh point a random variable. The values taken on by this random variable characterize each different escape, and the basin entropy is obtained by application of the information entropy definition to this set. In the general case, let the system consists of N_A escapes ($N_A = 2$ in the present case), and the phase space region Ω is covered by a mesh of boxes with a given size. We assign to each mesh point, or initial condition, a color labeled from 1 to N_A .

The colors in each mesh point stand for an integer random variable j defined in the interval $[1, N_A]$, and the values are distributed according to a given probability. Let $p_{i,j}$

denote the probability that the j th color is assigned to the i th box, where $i = 1, 2, \dots, N$, N being the number of mesh points, or boxes. On supposing statistical independence, the information (Gibbs) entropy of the i th box is [26]

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \log \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right), \quad (15)$$

where $m_i \in [1, N_A]$ is the number of colors for the i th box. The total entropy for the mesh covering the region Ω is obtained by summing over the N boxes, or $S = \sum_{i=1}^N S_i$. The basin entropy is then the total entropy per box, or $S_b = S/N$. For a single escape the basin entropy is zero, which means that there is no uncertainty at all. On the other hand, if we have N_A equiprobable escapes the basin entropy reaches a maximum of $S_b = \log N_A$, so characterizing a completely randomized escape basin structure.

It is also possible to adapt this entropy calculation to evaluate the uncertainty related to the escape basin boundary, rather than the uncertainty of the escape basin itself. In order to accomplish this new task we repeat the above calculation, but restricting the computation of the total entropy to the number N_{bb} of boxes which contain more than one color. In this way we obtain the boundary basin entropy, or $S_{bb} = S/N_{bb}$ [26].

In the case analyzed in the previous section, there are two exits, namely **A** : $(0 \leq x < \pi, y = 0)$ (red basin in Fig. 4) and **B** : $(\pi \leq x < 2\pi, y = 0)$ (green basin in Fig. 4). Choosing a representative phase space region Ω comprising both exit basins (and perhaps points that do not exit at all) we cover it with a grid of 1000×1000 points of each basin, distributed inside 4×10^4 boxes. For each grid point we computed a maximum number of 10^4 iterations of the map, and exclude from the statistics those initial conditions leading to orbits that do not escape during this maximum iteration time. Naming n_A and n_B the number of points into each box corresponding to the exits **A** and **B**, respectively, we compute the probabilities

$$p_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}, \quad p_B = \frac{n_B}{n_A + n_B}, \quad (16)$$

such that the entropy for each box is (we use base 2 logarithms)

$$S = -p_A \log p_A - p_B \log p_B. \quad (17)$$

The basin entropy S_b is obtained by summing up the entropy values with respect to those boxes for which all the initial conditions escape and dividing the result by the number of boxes N_b for which all initial conditions escape. The boundary basin entropy is obtained

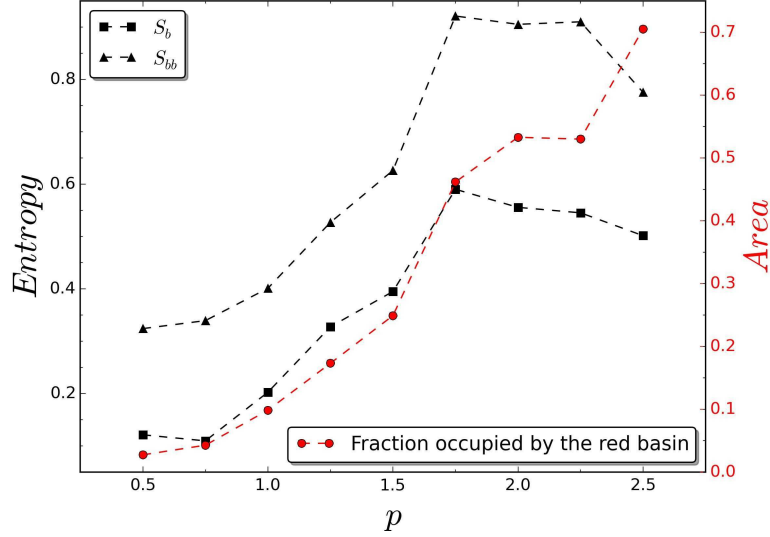


FIG. 8. Basin entropy and basin boundary entropy for the case of two exits as a function of p . We also plot the fraction occupied by the red basin.

similarly, excluding from the summation those boxes for which either $p_A = 0$ or $p_B = 0$. In other words, for the computing the boundary basin entropy we consider only those boxes which have at least one boundary in their interior, such that S_{bb} equals the summation of the entropy S for all boxes that contain at least one boundary divided by the number N_{bb} of boxes having at least one boundary. Since $N_A = 2$ both entropies vary between zero and $\log 2 = 1$.

We plot in Fig. 8 the values of the basin entropy S_b and the basin boundary entropy S_{bb} relative to the case of the escape through **A** : ($0 \leq x < \pi, y = 0$) (red points in Fig. 4) and **B** : ($\pi \leq x < 2\pi, y = 0$) (green points in Fig. 4), as a function of the parameter p . As a trend the entropies increase as p goes from zero to 1.75 and suffer a decrease afterwards. The increase of entropy means that the red and green exit basins in Fig. 4 become progressively more mixed and involved, their fractality being most pronounced at $p \approx 1.75$ and decreases for higher values of p .

The behavior of the entropies can be qualitatively understood by comparing them with the fraction \mathcal{A} occupied by the red basin (corresponding to the exit through the first half poloidal arc on the tokamak wall), which is also depicted in Fig. 8. Both S_b and S_{bb} follow

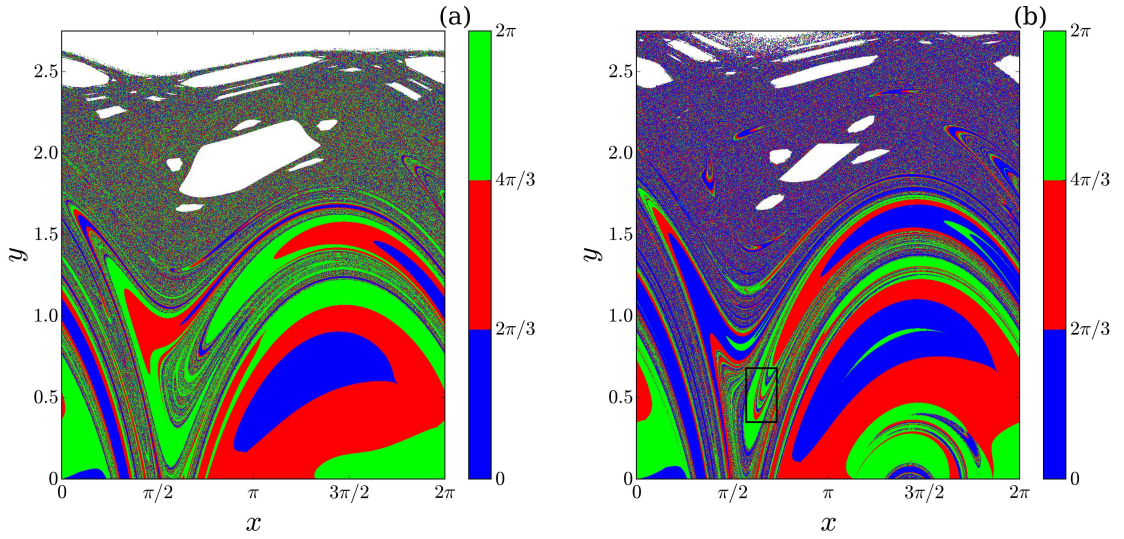


FIG. 9. Escape basins of exits **A** : $(0 \leq x < 2\pi/3, y = 0)$ (blue), **B** : $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3, y = 0)$ (red), and **C** : $(4\pi/3 \leq x < 2\pi, y = 0)$ (green), for $s = 2\pi$ and $p = 2.0$ (a) and 2.5 (b). White pixels stand for initial conditions which do not escape at all.

the increase of the red basin fraction. A cursory inspection of Fig. 4 shows a predominance of the green basin over the red one. Since the basin entropies measure the degree of mixing of both basins, there follows that the entropies increase as the red basin becomes larger and comparable to the green basin. Indeed, at the maximum value of the basin entropy (for $p \approx 1.75$) the fraction of the red basin is roughly 50%. As the perturbation p increases, so the fraction of the red basin also increases, but this time the fraction of the green basin will decrease, and the entropies become smaller again. Hence, besides the exit basin boundary dimension, it is important to compute the basin entropies to know at what extent the basins are mixed together.

V. WADA ESCAPE BASIN BOUNDARIES

If we divide the tokamak wall into three or more partitions, each of them can be considered a new exit with its own escape basin. For example we can divide the tokamak wall into three exits, namely **A** : $(0 \leq x < 2\pi/3, y = 0)$, **B** : $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3, y = 0)$, and **C** : $(4\pi/3 \leq x < 2\pi, y = 0)$. In Fig. 9(a) we plot the corresponding escape basins in

different colors (blue for the basin of **A**, red for **B** and green for **C**) for $p = 2.0$. The fraction of initial conditions escaping through the exits **A**, **B** and **C** with respect to the total number of escaping initial conditions are 35.58%, 36.46%, and 27.96%, respectively. A similar situation is displayed in Fig. 9(b), obtained for $p = 2.5$, and for which the fraction of initial conditions escaping through the exits **A**, **B** and **C** changed to 54.98%, 33.08%, and 11.94%, respectively.

Given that, for two basins the boundary is a fractal curve, one may wonder what this would mean for a higher number of basins. The answer lies in the so-called Wada property: if the boundary between two basins is smooth, three of such basins have only one common boundary point. However, if the boundary is fractal (non-smooth) there may be an infinite number of such common points [42].

Let us consider the escape basin of some exit, say **A**. It has a boundary point p if every open neighborhood of p intersects the basin of **A** and at least the basin of other exit, like **B** or **C**. We define the basin boundary as the set of all boundary points corresponding to that basin.

The boundary point p is called a Wada point if every open neighborhood of it intersects at least three different basins, in our case **A**, **B**, and **C** [43]. If every boundary point of the basin of **A** is a Wada point, then the boundary is said to possess the Wada property. A necessary (albeit not sufficient) condition for the latter to hold is that the unstable manifold of p must intersect the basin of every exit [44, 45].

In order to make a first check for the validity of this condition, in Fig. 10(a) we exhibit a magnification of a portion of the exit basin structure, depicted as a rectangular box in Fig. 9(b). The black lines in Fig. 10(a) represent a portion of the unstable manifold of some periodic orbit embedded in the chaotic region, and it is clearly seen that such manifold intersects all the three escape basins. Successive magnifications [Figs. 10(b) and (c)] confirm the presence of strips of the three basins in finer scales, suggesting that at least some of the boundary points have the Wada property, since a small neighborhood of such point will intersect all basins.

Although a compelling evidence, this criterion does not indicate which boundary points have the Wada property. If many but not all boundary points do, then we have only partial fulfillment of this property. This characterization is provided by the grid approach proposed in Ref. [25], by considering a bounded phase space region Ω containing $N_A \geq 3$ disjoint

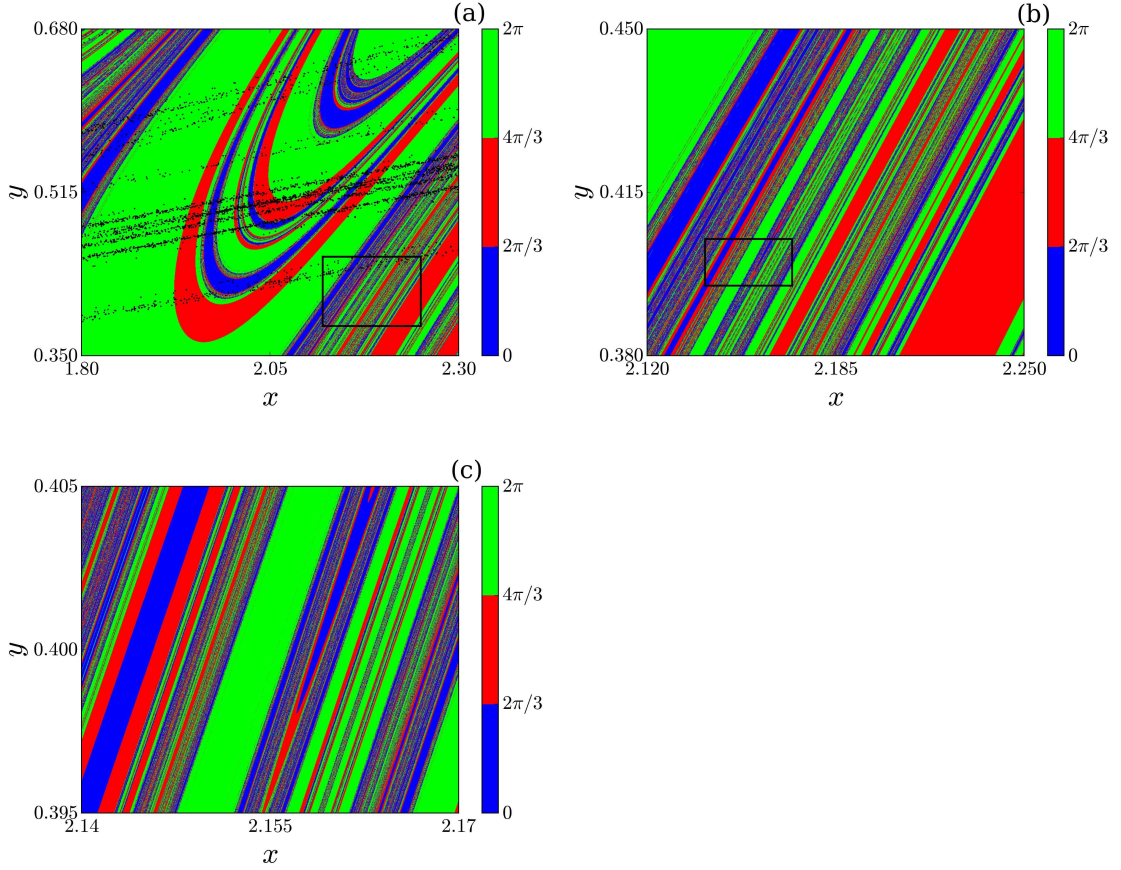


FIG. 10. Successive magnifications of the escape basins of exits **A** : $(0 \leq x < 2\pi/3, y = 0)$ (blue), **B** : $(2\pi/3 \leq x < 4\pi/3, y = 0)$ (red), and **C** : $(4\pi/3 \leq x < 2\pi, y = 0)$ (green), for $s = 2\pi$ and $p = 2.5$. The black points in (a) indicate a portion of the unstable manifold of some periodic orbit embedded in the chaotic region.

escapes \mathbf{A}_j , $j = 1, 2, N_A$, the corresponding escape basins being denoted by \mathcal{B}_j . The region Ω is covered by a set of grid boxes $P = \{b_1, b_2, \dots, b_K\}$, where b_i denotes the i th box, and such that any pair of boxes b_i and b_j are non-overlapping.

By iterating the map we can know, for each point $(x, y) \in \Omega$ to which exit \mathbf{A}_j the corresponding trajectory escapes through, i.e. to which escape basin \mathcal{B}_j it belongs to. We thus define an integer-valued function $C(x_i; y_i)$ related to the initial condition $(x_i; y_i)$, such

that $C(x_i; y_i) = j$ if $(x_i; y_i) \in \mathcal{B}_j$ and $C(x_i; y_i) = 0$ if $(x_i; y_i)$ does not belong to any of such basins \mathcal{B}_j . For any rectangular box b_j we define $C(b_j) = C(x_i; y_i)$, where $(x_i; y_i)$ is the point at the center of the box taken as an initial condition. If $(x_i; y_i)$ does not belong to any of the escapes, then $C(b_j) = 0$.

In addition we denote by $b(b_j)$ the collection of grid boxes consisting of b_j and all the grid boxes having at least one point in common with b_j . For example, in a two-dimensional phase space region $b(b_j)$ turns to be a 3×3 collection of boxes, with b_j being the central box. The number of different colors in $b(b_j)$ is denoted $M(b_j)$. Provided $M(b_j) \neq 1, N_A$ we select the two closest boxes in $b(b_j)$ with different colors and draw a line segment between them, computing the color of the midpoint for the line segment. If the computed color completes all colors inside $b(b_j)$ then $M(b_j) = N_A$ and we stop the procedure. Otherwise we iterate this procedure by choosing intermediate points until $M(b_j) = N_A$, or the number of points exceeds a limit.

Let G_m be set of all the original grid boxes such that $M(b_j) = m$. If $m = 1$ then the corresponding set (G_1) contains points belonging to the interior of the j th escape basin, because all the boxes inside the ball $b(b_j)$ have the same color. For $m = 2$ the set G_2 belongs to the boundary between two basins, since there are two different colors inside the ball $b(b_j)$. Analogously, the set G_3 contains points satisfying the Wada property. We call G_n^q the set G_n at the q th procedure step. Calling $\mathcal{N}(G)$ the number of points of the set G we compute

$$W_m = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(G_m^q)}{\sum_{j=2}^{N_A} \mathcal{N}(G_j^q)}, \quad (18)$$

where $m \in [2, N_A]$.

If $W_m = 0$ the system has no grid boxes that belong to the boundary separating the m escape basins. Conversely, if $W_m = 1$ then all the boxes in the boundary separate m escape basins. If $W_{N_A} = 1$ the system is said to have the Wada property, since it will always be possible to find a third color between the two other colors. If $0 < W_m < 1$, with $m \geq 3$, the basins partially satisfy the Wada property.

In the case depicted in Fig. 9(b) we have $N_A = 3$ exits and thus we use (18) to compute, for q procedure steps of computing colors at the intermediate points between adjacent boxes,

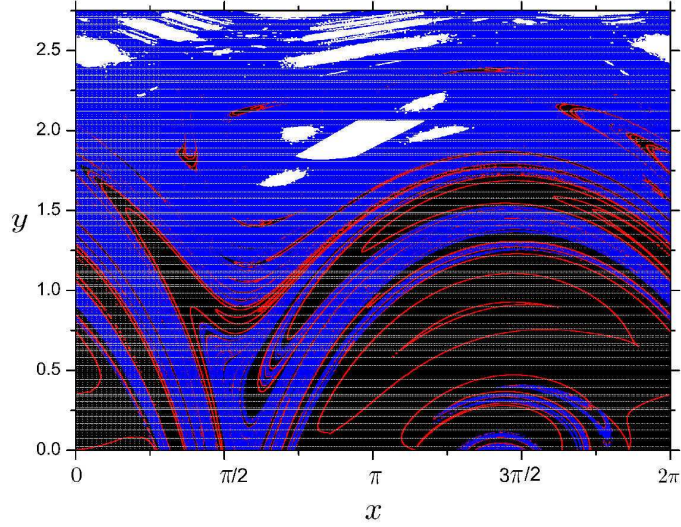


FIG. 11. Basin structure of Fig. 9(b), showing in black points belonging to G_1 set (internal points), in red points of the G_2 set (boundary points between two basins), and in blue points of the G_3 set (boundary points between three basins), after $q = 18$ refinement steps.

the following ratios

$$W_2 = \frac{\mathcal{N}(G_2)}{\mathcal{N}(G_2) + \mathcal{N}(G_3)}, \quad (19)$$

$$W_3 = \frac{\mathcal{N}(G_3)}{\mathcal{N}(G_2) + \mathcal{N}(G_3)}, \quad (20)$$

and check, for each q th iteration of the procedure, whether or not points of G_2 may belong to G_3 by testing $2^{(q-2)}$ initial conditions intermediate between the central box and a neighbor box of different color. If some of those $2^{(q-2)}$ intermediate initial conditions show the missing third color, the central box will be reclassified as G_3 and so on. We depict in Fig. 11 points classified as G_1 (black points), G_2 (red points) and G_3 (blue points), after $q = 18$ procedure of refinement steps.

Once we have tracked a number of points with the Wada property we can quantify at what extent this property is fulfilled in the system. Fig. 12(a) shows a histogram for the number of points initially classified as belonging to the set G_2 but which are found to belong to the set G_3 in each refinement step q . We see that, after three refinement steps the number of reclassified points decreases to zero as q increases. For $q = 18$ the method converges in a very satisfactory way. The values of the quantities W_2 and W_3 , as given by Eq. (18) are

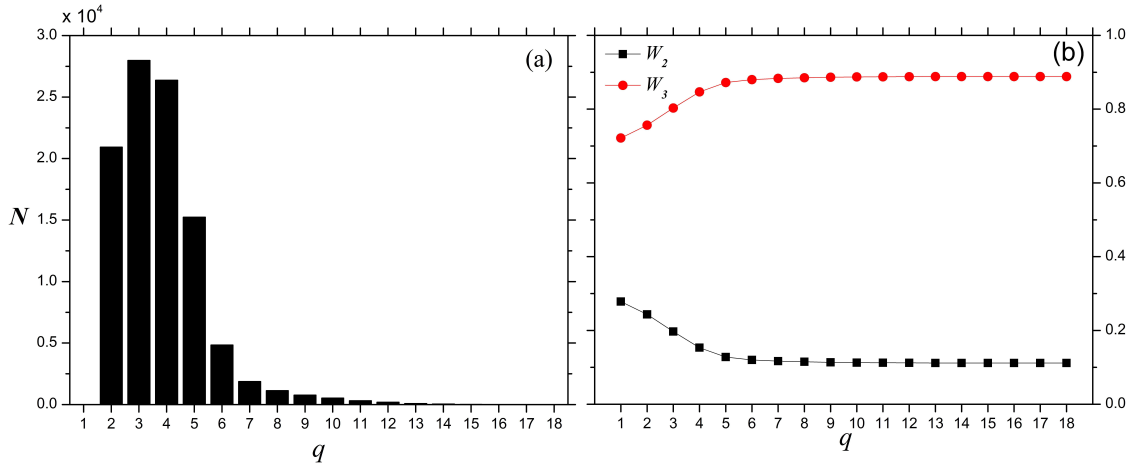


FIG. 12. (a) Number of reclassified points in each refinement step, using the grid approach for the basin structure depicted in Fig. 9(b). (b) Values of W_2 and W_3 as a function of the refinement step.

shown in Fig. 12(b) as a function of q , showing good convergence after less than 10 steps. Since $W_2 \approx 0.112$ and $W_3 \approx 0.888$ for a large number of refinement steps we say that the basin structure in Fig. 9 is partially Wada.

VI. CONCLUSIONS

Open hamiltonian systems may present an arbitrarily large number of exits through which a given trajectory can escape. The set of initial conditions leading to trajectories leaving a phase space area through an exit is called its exit basin. When there is a chaotic (area-filling) orbit in a part of the phase space region it turns out that the exit basins are fractal as well as their common boundary. This fractality comes from structures such as invariant (unstable and stable) manifolds underlying the chaotic orbit.

In this paper we investigated the fractality of exit basins in the context of magnetic field line flow in magnetically confined fusion plasmas, such as those produced in a tokamak. Although the equilibrium magnetic fields yield an integrable hamiltonian system in an axisymmetric system, the presence of symmetry-breaking perturbations causes the formation of chaotic orbits coexisting with islands and KAM tori. In particular, we investigate the chaotic magnetic field region appearing near the tokamak wall due to an ergodic limiter, as

described by a two-dimensional area-preserving map.

We divided the tokamak wall into two regions through which the magnetic field lines can escape and considered the basins corresponding to each exit. The basin structure exhibits an infinite number of incursive fingers which follow the intersection of a basin boundary segment with the stable manifold of an unstable periodic orbit embedded in the chaotic orbit. If we make a transversal cut of this fingering structure the result is the product of a smooth curve (dimension 1) and a Cantor-like fractal set. Indeed, we obtained directly the box-counting dimension of the exit basin boundary by using the uncertainty exponent method. The basin boundary dimension was found to increase with the intensity of the symmetry-breaking perturbation.

It is worthwhile to point out that the fractal dimension of the exit basin has important consequences on the predictability of the final state of the system, i.e. to which exit will escape the orbit (magnetic field line, in our case) from a given initial condition. If the exit basin boundary were smooth (with an integer dimension) an improvement in the precision to which we know a given initial condition causes a corresponding decrease in the uncertainty of the final state. On the other hand, for fractal basin boundaries the scaling is unfavorable, such that even a huge improvement in the precision of the initial condition might cause only a slight decrease of the final-state uncertainty.

Moreover the fractality of the basin structure was evidenced by computing the basin and basin boundary entropies. The latter vary between zero (in the case of just one exit, meaning no uncertainty at all) and unity (for two exit basins), when the basins are extremely intertwined and we have maximum final-state uncertainty. The entropies were found to increase with the symmetry-breaking perturbation p in the same way as the fraction occupied by one of the basins, until a critical perturbation $p_c \approx 1.75$ is achieved. For $p > p_c$, although the fraction occupied by one basin continues to increase, the entropies show some decrease.

This behavior is ultimately due to the meaning of the basin entropy in terms of the degree of mixing of the exit basins. When one exit basin has its area increased (by augmenting p) the other exit basin has its area decreased, and the entropies achieve a maximum (slightly less than unity) when the areas have comparable fractions (around 0.5 each). As p is further increased, the exit basin areas become distinct again and the entropies decrease accordingly.

However the behavior of the entropies for $p < p_c$ is different from the case $p > p_c$, since the entropy increase observed for smaller p has a larger rate than the entropy decrease for

larger p . The reason is in the qualitative dynamics of the system in the two cases. For small p the chaotic region is restricted to the vicinity of the separatrices of the islands nearer the tokamak wall (since the perturbation strength is higher therein). As p increases the islands also augment their widths, while their mutual distance remain practically unchanged.

For p large enough the local chaotic regions of adjacent islands merge together forming a single connected region of global chaos. We used a simple overlapping criterion to estimate the value of $p_c \approx 1.6$, which is close to the value (1.75) which maximizes the entropy. Hence the entropies increases with p (for $p < p_c$) because the available region for the chaotic orbit also increases. However, for $p > p_c$ the chaotic region increases at a lower rate, essentially by engulfing the remnant islands still embedded in the chaotic region.

Another fractal signature we have found in the basin boundary structure, in the case of three exits (we divided the tokamak wall into three instead of two escape regions) is the Wada property. In a totally Wada basin, each boundary point has in its vicinity points belonging to all three basins. In our system we made a first characterization of this property by considering the intersections of the stable manifold with all three basins. However, since this does not lead to quantitative information we used a recently developed technique to evaluate the fraction of points of the basin boundary possessing the Wada property. In a representative case we found that approximately 11.2% of the boundary points separate two basins, and 88.8% of them separate three basins, i.e. have the Wada property. Since these results are consistently obtained with other values of the perturbation we conclude that the basins are only partially Wada.

As a final remark, we would like to emphasize the physical importance of the results we have obtained. Initially, the considered resonant perturbations from a magnetic limiter were planned to uniformize the energy and particle loading to the tokamak walls. This idea is based on the fact that divertor plates and other material limiters in the scrape-off layer of the tokamak, between the plasma and the wall, can be severely damaged by localized particle loadings. However, instead of the predict uniformity the fractal distribution of this loading can also result and some localized regions of high energy and particle loading. This fact has been pointed out in some experiments [46, 47], and suggests that knowing the basic features of the fractal structures in the chaotic region is an important ingredient on the design of protective schemes.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been supported by grants from the Brazilian Government Agencies CNPq, CAPES and FAPESP (2011/19296-1). RLV would like to acknowledge Prof. Miguel A. F. Sanjuán (Univ. Rey Juan Carlos, Madrid, Spain) for useful discussions.

-
- [1] P. Ginot, *J. Nucl. Mat.* **76–77**, 30 (1978).
 - [2] W. Horton, *Turbulent transport in magnetized plasmas* (World Scientific, Singapore, 2012)
 - [3] R. Balescu, *Aspects of anomalous transport in plasmas* (CRC Press, 2005)
 - [4] D. E. Post and R. Behrisch, *Introduction to the physics of plasma-wall interactions in controlled fusion*, in *Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion*, Eds. D. E. Post and R. Behrisch (Plenum Press, New York, 1986) p. 1-14.
 - [5] F. Karger and K. Lackner, *Phys. Lett. A* **61**, 385 (1977).
 - [6] W. Engelhardt and W. Feneberg, *J. Nucl. Mater.* **76–77**, 518 (1978).
 - [7] W. Feneberg and G. H. Wolf, *Nucl. Fusion* **27**, 669 (1981).
 - [8] T. E. Evans, *Plasma Phys. Control. Fusion* **57**, 123001 (2015).
 - [9] O. Schmitz, M. Becoulet, P. Cahyna, T. E. Evans, Y. Feng, H. Frerichs, A. Loarte, R. A. Pitts, D. Reiser, M. E. Fenstermacher, D. Harting, A. Kirschner, A. Kukushkin, T. Lunt, G. Saibene, D. Reiter, U. Samm, and S. Wiesen, *Nucl. Fusion* **56**, 066008 (2016).
 - [10] P. J. Morrison, *Phys. Plasmas* **7**, 2279 (2000).
 - [11] E. C. da Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, *Phys. Plasmas* **9**, 4917 (2002).
 - [12] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, R. L. Viana and M. A. F. Sanjuán, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17**, 4067 (2007).
 - [13] M. W. Jakubowski, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, K. H. Finken, A. Krämer-Flecken, M. Lehnen, U. Samm, K. H. Spatschek, B. Unterberg, and R. C. Wolf (TEXTOR Team), *Phys. Rev. Lett.* **96**, 035004 (2006).
 - [14] M. W. Jakubowski, T. E. Evans, M. E. Fenstermacher, M. Groth, C. J. Lasnier, A. W. Leonard, O. Schmitz, J. G. Watkins, T. Eich, and W. Fundamenski, *Nucl. Fusion* **49**, 095013 (2009).

-
- [15] T. E. Evans, R. K. W. Roeder, J. A. Carter, and B. I. Rapoport, *Contrib. Plasma Phys.* **44**, 235 (2004).
- [16] T. E. Evans, R. K. W. Roeder, J. A. Carter, B. I. Rapoport, M. E. Fenstermacher, and C. J. Lasnier, *J. Phys.: Conf. Ser.* **7**, 174 (2005)
- [17] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott, R. Brown, *Phys. Rev. A* **38**, 930 (1988).
- [18] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 333 (2009).
- [19] T. Kroetz, M. Roberto, E. C. da Silva, I. L. Caldas, and R. L. Viana. *Phys. Plasmas* **15**, 092310 (2008).
- [20] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, and P. J. Morrison, *Plas. Phys. Contr. Fusion* **54** 045007 (2012).
- [21] M. Kotschenreuther *et al.*, *Phys. Plasmas* **14**, 072502 (2007).
- [22] T. J. Martin and J. B. Taylor, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **26**, 321 (1984).
- [23] H. E. Nusse and J. A. Yorke, *Science* **271**, 1376 (1996).
- [24] R. L. Viana, E. C. da Silva, T. Kroetz, I. L. Caldas, M. Roberto, and M. A. Sanjuán, *Phil. Trans. Royal Soc. A* **369**, 371 (2011).
- [25] A. Daza, A. Wagemakers, M. A. F. Sanjuán, and J. A. Yorke, *Sci. Rep.* **5** (2015) 16579.
- [26] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, and M. A. F. Sanjuán, *Sci. Rep.* **6** (2016) 3416.
- [27] A. Daza, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, A. Wagemakers, and M. A. F. Sanjuán, *Phys. Rev. A* **95**, 013629 (2017).
- [28] J. Wesson, *Tokamaks*, 4th. Ed. (Oxford University Press, 2011)
- [29] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Dover, New York, 2003)
- [30] J. S. E. Portela, R. L. Viana, and I. L. Caldas, *Physica A* **317**, 411 (2003).
- [31] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 265 (1979).
- [32] G. Schmidt, *Physics of High-Temperature Plasmas*, 2nd. Ed.(Academic Press, New York, 1979)
- [33] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747 (1967).
- [34] A. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. E* **51**, 4076 (1995).
- [35] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica D* **17**, 125 (1985).
- [36] E. L. Rempel, A. C.-L. Chian, E. E. N. Macau, and R. R. Rosa, *Chaos* **14**, 545 (2004).

-
- [37] Y.-C. Lai and T. Tél, *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales* (Springer-Verlag, New York, 2011).
- [38] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, and T. Tél, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 869 (2013).
- [39] L. Poon, J. Campos, E. Ott, and C. Grebogi, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **6**, 251 (1996).
- [40] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, and T. Tél, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 869 (2013).
- [41] C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott, and J. A. Yorke, *Phys. Lett. A* **99**, 415 (1983).
- [42] J. Kennedy and J. A. Yorke, *Physica D* **51**, 213 (1991).
- [43] H. E. Nusse and J. A. Yorke, *Science* **271**, 1376 (1996).
- [44] H. E. Nusse and J. A. Yorke, *Physica D* **90**, 242 (1996).
- [45] Z. Toroczkai, G. Károlyi, A. Péntek, T. Tél, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Physica A* **239**, 235 (1997).
- [46] M. W. Jakubowski, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, M. Lehnen, and the TEXTOR Team, *J. Nucl. Mater.* **337–339**, 532 (2005).
- [47] A. Wingen, M. Jakubowski, K. H. Spatschek, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, and A. Lehnen, *Phys. Plasmas* **14**, 042502 (2007).