

LORIL LEOCADIO BUENO

CORREÇÃO DA REFRAÇÃO NAS OBSERVAÇÕES DE DIREÇÃO E DISTÂNCIA

Dissertação apresentada ao  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geo-  
désicas para obtenção do Grau de Mes-  
tre em Ciências pela Universidade Fede-  
ral do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Julho 1980

CORREÇÃO DA REFRAÇÃO NAS OBSERVAÇÕES DE DIREÇÃO E DISTÂNCIA

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universida-  
de Federal do Paraná

por

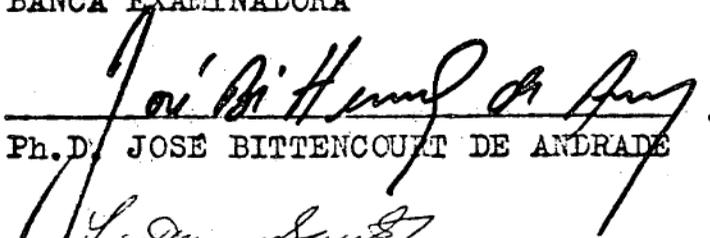
LORIL LEOCADIO BUENO, Licenciado em Física

...

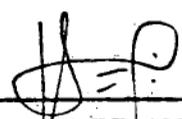
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1980

BANCA EXAMINADORA

  
Ph.D. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

  
Dr. LUIZ MUNIZ BARRETO

  
M.Sc. HANS ULRICH FILCHOWSKI

## AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus agradecimentos, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho ,em especial,

ao Professor Dr. José Bittencourt de Andrade, pela orientação recebida durante todo o trabalho,

à Universidade Estadual de Maringá, pela dispensa das permanências durante o período de execução deste,

à Capes, pelo apoio financeiro recebido durante a obtenção dos créditos.

## RESUMO

Este trabalho contém alguns modelos matemáticos para a determinação da correção das refrações atmosférica, ionosférica e astronômica, nas observações de direção e nas medidas eletrônicas de distância. Estão incluídas as correções da refração nas observações realizadas em astronomia, em fotogrametria e em geodésia celeste.

Nas medidas eletrônicas de distância, consideramos aquelas realizadas sobre corpos na superfície terrestre e também para os corpos celestes, naturais ou não.

## ABSTRACT

This work has some mathematical models to get the determination from the correction of atmospherical, ionospherical and astronomical refractions on directional observations and electromagnetic measurements of range. It has been included the corrections of refraction on observations made in astronomy, photogrammetry and celestial geodesy.

By electromagnetic measurements of range, we consider that ones made with bodies on earth surface and also the celestial ones, either natural or not.

## CONTEUDO

TÍTULO	Pag.
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
CONTEUDO	v
INTRODUÇÃO	vi
1. TEORIA GERAL	1
1.1. Considerações teóricas	1
1.2. Refração atmosférica	4
1.3. Refração astronômica	6
1.4. Refração nas medidas eletrônicas de distância	8
1.4.1. Propagação das ondas eletromagnéticas	8
1.4.2. Espectro de frequências das radiações eletromagnéticas	11
1.4.3. Efeitos sobre as ondas eletromagnéticas	14
1.5. Geodésia Celeste	15
1.5.1. Medidas com ondas de rádio	18
1.5.2. Medidas com frequências óticas	19
2. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO EM OBSERVAÇÃO DE DIREÇÃO	20
2.1. Em astronomia	20
2.1.1. Cálculo da refração para $Z' \leq 75^\circ$	21
2.1.2. Metodos para a resolução da equação geral da refração	23
2.1.3. Cálculo da refração para $Z' > 75^\circ$	27
2.2. Em fotogrametria	31
3. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO NAS MEDIDAS ELETRÔNICAS DE DISTÂNCIA	42
3.1. Medida de distância sobre a superfície terrestre	42
3.1.1. Índice de refração	42
3.1.2. Microondas	43
3.1.3. Luz visível e infravermelho	46
3.1.4. Reduções da medida observada	49
3.1.4.1. Redução geométrica da medida eletrônica	50

3.2. Medida de distância de corpos celestes	55
3.2.1. Correção da distância observada devido aos efeitos da troposfera e estratosfera nos sinais de ondas de rádio emitidos por satélites artificiais	55
3.2.2. Para ondas de rádio propagando-se através da ionosfera	57
3.2.3. Nos casos onde o sinal laser é utilizado	59
CONCLUSÕES	61
APENDICE I	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

## INTRODUÇÃO

Toda onda eletromagnética (visível ou não) ao passar de um meio para outro, sofre mudança em sua direção, alteração esta que poderá ser de aproximação ou afastamento, da perpendicular a superfície de separação considerada entre os dois meios. A este desvio chamamos de refração da onda eletromagnética. Este fenômeno ocorre em toda observação, seja de direção ou de distância.

O meio através do qual a onda se propaga é um meio extremamente turbulento cujas grandezas físicas tais como a pressão, densidade e temperatura, variam no tempo. Assim sendo, não conhecemos um modelo matemático que expresse em termos definitivos a variação da densidade com a altura. Então considerando algumas aproximações, as quais com auxílio das leis da ótica geométrica nos propiciam a construção de uma teoria da refração. Assumiremos também que a propagação de uma onda eletromagnética é governada pela lei básica da física formulada por Fermat, que a refração obedece a lei de Snell e que o modelo ondulatório, foi escolhido para a interpretação das propriedades empíricas da luz pela sua simplicidade em representação.

Nas observações angulares estaremos considerando as correções da refração a serem utilizadas nas observações astronômicas e fotogramétricas. Nas aplicações em astronomia separamos os modelos das referidas correções para distâncias zenitais até 75 graus e maiores que 75 graus. Em fotogrametria apresentaremos alguns modelos para as correções da refração sempre vinculados a algum modelo atmosférico.

Para a correção da refração nas medidas eletrônicas de distância consideraremos basicamente duas aplicações: àquelas realizadas sobre a superfície terrestre, com o observador e o objeto ligados a terra e àquelas realizadas sobre corpos celestes, naturais ou não. As correções das medidas

eletrônicas de distância são devidas ao retardamento da velocidade de propagação do sinal e para linhas longas também da curvatura. Nas observações sobre a superfície da terra, consideraremos às observações realizadas com microondas, luz visível e infravermelho, como sinais emitidos, onde a medida observada é corrigida do efeito de retardamento da velocidade e também das correções geométricas.

Nas medidas de corpos celestes consideraremos dois tipos básicos de ondas eletromagnéticas como sinais de transmissão, as ondas de rádio, cuja propagação se dá na troposfera, estratosfera e ionosfera e o laser cujas regiões de efeitos são a troposfera e a estratosfera.

## 1. TEORIA GERAL

### 1.1. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Toda onda eletromagnética (visível ou não) ao passar de um meio para outro, sofre mudança em sua direção, alteração esta que poderá ser de aproximação ou afastamento, da perpendicular a superfície de separação considerada entre os dois meios. A este desvio chamamos de refração da onda eletromagnética.

Para qualquer meio refrigente a propagação de uma onda eletromagnética é governada pela lei básica da física formulada por Fermat há mais de três séculos atrás, chamada de princípio de Fermat, o qual estabelece que a luz, por exemplo, percorre a distância entre dois pontos fixos num tempo mínimo.

Para formular as leis da refração, consideremos um raio de luz incidindo sobre uma superfície plana de separação entre duas substâncias transparentes (figura 1.1). Suponhamos que ambas as substâncias sejam homogêneas e isotrópicas, entendendo-se por isotrópicas as mesmas propriedades em todas as direções. Em geral o raio incidente separa-se em dois: um raio refletido, que retorna ao meio do qual provém o raio incidente e outro refratado que penetra no outro meio. Além disso devemos observar que: a) O raio incidente AO, o refletido OA' e o refratado OB jazem em um plano perpendicular a superfície de separação, chamado plano de incidência. b) Se  $\psi_1$  é o ângulo entre o raio incidente e NN' e  $\psi_2$  é o ângulo entre o raio refratado e NN', o quociente  $\frac{\text{sen } \psi_1}{\text{sen } \psi_2}$  é independente do valor do ângulo de incidência  $\psi_1$ , se tratando pois de uma constante característica de ambos os meios. Esta última condição, chamada Lei de

Snell, tem como expressão analítica

$$\frac{\text{sen } \psi_1}{\text{sen } \psi_2} = n_{21} \quad (1.1)$$

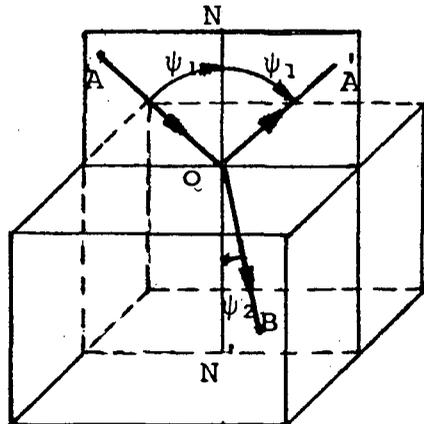


figura 1.1

Onde  $n_{21}$  é denominada índice de refração do segundo meio em relação ao primeiro. A experiência mostra que o índice de refração do meio 1 em relação ao meio 2 é o inverso do índice do meio 2 em relação ao meio 1; ou seja  $n_{12} = 1/n_{21}$ . Isto implica em afirmar que se um raio luminoso segue o caminho AOB ao passar de um meio a outro, percorrerá o caminho BOA ao passar do segundo meio para o primeiro. Note-se que a refração aproxima o raio refratado da normal ou o afasta segundo seja  $n_{21}$  maior ou menor que a unidade.

Para interpretar as propriedades empíricas da luz, mencionadas anteriormente, têm sido propostos dois modelos. O corpuscular e o ondulatório. Neste trabalho consideraremos o modelo ondulatório porque nos propicia uma representação geométrica simples.

A construção de Huygens (Rossi, 1966), considera que a luz se propaga ao longo de linhas retas, perpendiculares a

frente de onda. Chamaremos estas linhas retas de raios luminosos. Por suposto, a lei da propagação retilínea se aplica só a meios homogêneos em que a velocidade de propagação é a mesma em todas as direções. Em tais meios, uma fonte gera frentes de ondas esféricas e os raios correspondentes são linhas retas que partem da fonte. Uma porção de onda esférica a grande distância da fonte é aproximadamente uma onda plana: Os raios correspondentes são mutuamente paralelos e perpendiculares à frente de onda .

A teoria ondulatória, tal como se acha incorporada no principio de Huygens, especifica que a constante que é por definição o índice de refração  $n_{21}$  do segundo meio em relação ao primeiro é igual ao quociente entre as velocidades da luz no primeiro e no segundo meio

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} \tag{1.2}$$

Para a luz visível, se verifica que o índice de refração em relação ao vácuo de todos os materiais é maior que 1 (para gases, é muito próximo a 1). Isto significa que a velocidade da luz em qualquer material é menor que no vácuo. O índice de refração de um material em relação ao vácuo é usualmente chamado de **ÍNDICE ABSOLUTO DE REFRAÇÃO**. É definido mediante a relação

$$n = \frac{c}{v} \tag{1.3}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $v$  a velocidade da luz no material a ser considerado. O índice de refração  $n_{21}$  de um meio 2 em relação a um meio 1 pode expressar-se então em termos dos índices de refração dos dois meios.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1.4}$$

## 1.2. REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA

Neste trabalho consideraremos algumas hipóteses que não invalidam a teoria proposta bem como os valores dela obtido. Assim sendo, consideraremos para este estudo as seguintes aproximações: a) Terra esférica; b) Atmosfera constituída por uma infinidade de capas concêntricas; c) Índice de refração das sucessivas camadas como função contínua da distância ao centro da terra; d) Índice de refração assumindo valor unitário no limite superior prático da atmosfera. Com estas simplificações e com o auxílio das leis da Ótica Geométrica é possível contruir uma teoria da refração. (Gemael, 1975).

Refração atmosférica é o ângulo de desvio de uma onda eletromagnética ao percorrer um trecho da atmosfera efetiva. Esta que será considerada a partir da superfície terrestre até um limite superior prático, no zenite do observador, sendo que neste intervalo estará a fonte ou o objeto a ser observado.

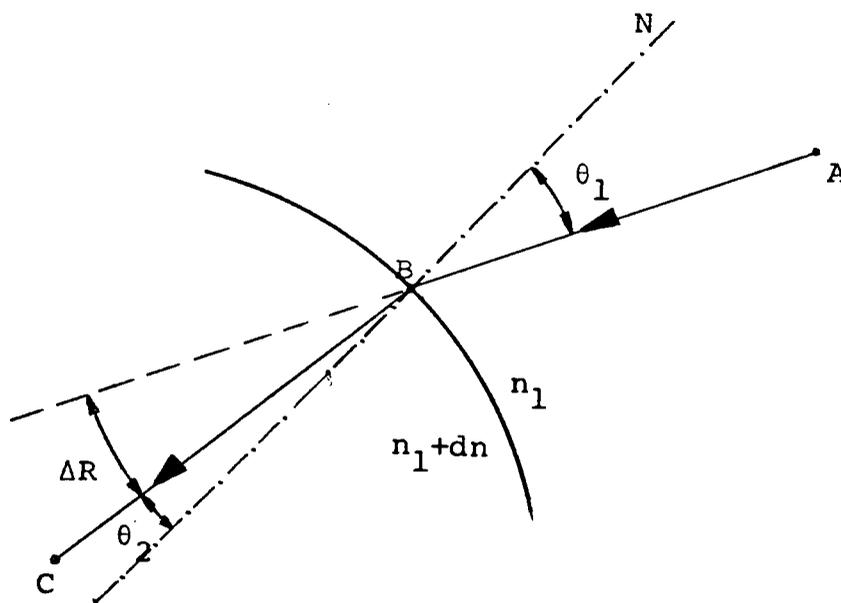


figura 1.2

Pela figura 1.2, observamos que ao atravessar uma superfície que separa dois meios óticos com índice de refração iguais a  $n_1$  e  $n_1 + \Delta n$ , o raio de luz que incide nesta superfície, formando um ângulo  $\theta_1$ , com a normal, refrata-se ou seja, desvia-se de seu caminho de um ângulo  $\Delta R$ .

$$\text{Seja } \theta_1 - \theta_2 = \Delta R$$

Através da Lei Snell da refração, teremos

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = (n_1 + \Delta n) \text{ sen } (\theta_1 - \Delta R)$$

Desprezando o índice 1 para  $n_1$  e  $\theta_1$ , teremos

$$n \text{ sen } \theta = (n + \Delta n) \text{ sen } (\theta - \Delta R)$$

Desenvolvendo o 2º membro

$$n \text{ sen } \theta = (n + \Delta n) (\text{sen } \theta \cos \Delta R - \cos \theta \text{ sen } \Delta R)$$

ou

$$n \text{ sen } \theta = n(\text{sen } \theta \cos \Delta R - \cos \theta \text{ sen } \Delta R) + \Delta n(\text{sen } \theta \cos \Delta R - \cos \theta \text{ sen } \Delta R)$$

(1.5)

Agora se A e C se movem para perto de B, de modo que suas distâncias com B são infinitesimais, assim no caso limite

$$\begin{aligned} \Delta n &\rightarrow dn \\ \Delta R &\rightarrow dR \\ \cos \Delta R &\rightarrow 1 \\ \text{sen } \Delta R &\rightarrow dR \\ \Delta n \text{ sen } \Delta R &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Então a equação 1.5, torna-se

$$n \text{ sen } \theta = n \text{ sen } \theta - n dR \cos \theta + dn \text{ sen } \theta$$

$$n \, dR \cos \theta = dn \, \text{sen } \theta$$

$$dR = \text{tg } \theta \frac{dn}{n} \quad (1.6)$$

que é a equação diferencial da refração atmosférica, ou ainda, a equação diferencial para a variação da direção de propagação do raio luminoso num meio cujo índice de refração varia continuamente de ponto para ponto. (Joshi, 1973).

A refração atmosférica é a integral da (1.6)

$$R = \int_{n_1}^{n_2} \text{tg } \theta \frac{dn}{n} \quad (1.7)$$

O ângulo  $\theta$  varia no caminho da luz através da atmosfera terrestre devido a duas causas: (Andrade, 1979)

- 1ª. - à própria refração;
- 2ª. - à curvatura das camadas da atmosfera.

Uma das maiores dificuldades na determinação da refração reside na integração da (1.6). Para fazê-lo, teríamos que conhecer a expressão de  $\theta$  em função de  $n$ . Esta dificuldade é no entanto contornada através de hipóteses simplificativas. Daí a existência de diversas fórmulas diferentes para a determinação da refração.

### 1.3 REFRAÇÃO ASTRONÔMICA

Um raio de luz proveniente de um astro antes de chegar à superfície da Terra, atravessa a massa gasosa (atmosfera) que envolve a Terra, passando assim do vazio dos espaços siderais para um meio gradativamente mais denso o qual depende principalmente das condições meteorológicas ( $T, p, e$ ) sendo que inevitavelmente ocorrerá uma mudança de direção no referido raio luminoso; variação esta que poderá provocar um

afastamento ou aproximação à normal ao ponto de incidência, dependendo das condições antes referidas.

Como o meio através do qual o raio luminoso se desloca é um meio não homogêneo, então a curvatura dos raios luminosos explica interessantes efeitos óticos na atmosfera. Em condições normais a densidade da atmosfera diminui gradualmente com a altura sobre o nível do mar; o índice de refração também diminui correspondentemente. Portanto os raios luminosos provenientes das estrelas seguem trajetórias curvas, com a concavidade dirigida para a superfície da Terra. Um observador na superfície da Terra vê a estrela na direção da tangente ao raio luminoso que penetra em seu olho e para este observador a estrela estará mais próxima do zenite que na realidade. No entanto este efeito é maior para as estrelas próximas do horizonte, onde a diferença é maior que 0,5 grau e nulo para estrelas próximas ao zenite.

O raio luminoso emanado do astro ao penetrar cada camada refrata-se aproximando-se da normal no ponto de incidência; como são infinitas as camadas, a trajetória luminosa, retilínea até atingir a atmosfera, a partir daí transforma-se numa curva cuja concavidade estará voltada para o plano do horizonte do observador. Uma tangente ao último elemento da curva materializa a direção em que se observará o astro, na realidade situado mais abaixo, a trajetória do raio luminoso estando contida no vertical do astro, é uma curva plana e côncava para o solo, onde concluímos que não há refração em azimute havendo alteração apenas na distância zenital do astro, de acordo com a primeira observação do item 1.1 (Gemael, 1975 - pg.5 - 02).

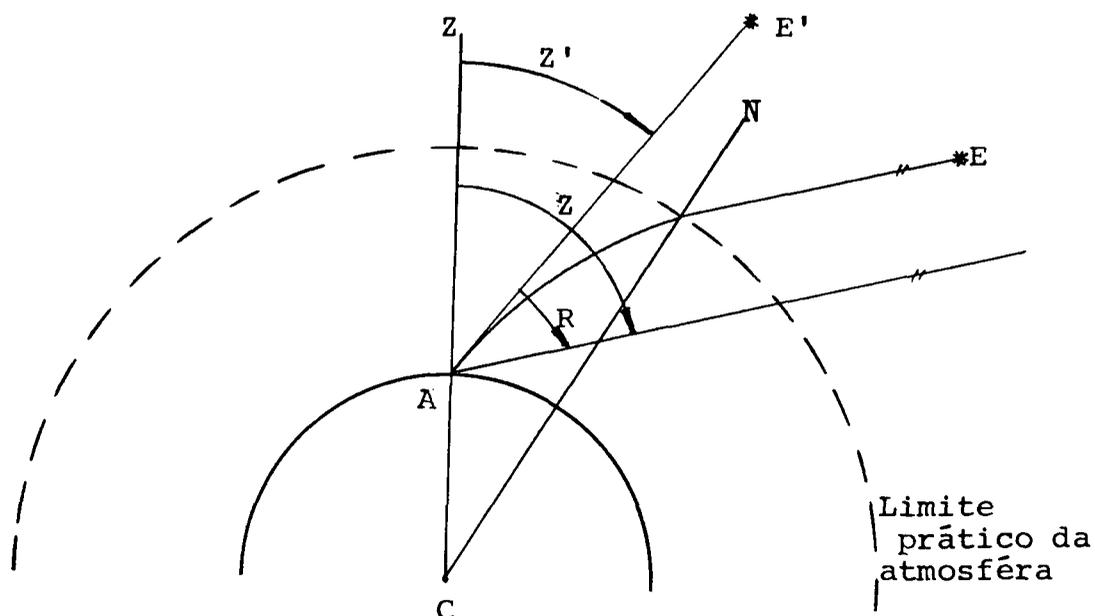


figura 1.3

Da figura 1.3, vemos que o ângulo  $E'AZ$  é a distância zenital aparente da estrela. A distância zenital verdadeira, é exatamente o ângulo que a reta do ponto A até a estrela faz com a vertical. Assim  $Z = Z' + R$  onde R mede o desvio do raio luminoso durante a sua passagem pela atmosfera e denomina-se ângulo de refração astronômica e  $Z'$  a distância zenital aparente da estrela.

#### 1.4 REFRAÇÃO NAS MEDIDAS ELETRÔNICAS DE DISTÂNCIA

##### 1.4.1 PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A experiência tem mostrado que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética num meio qualquer é diferente de sua velocidade de propagação no vácuo, isto porque sendo o meio de propagação dispersivo e não homogêneo contém portadores de carga ( elétrons e prótons ) cujos campos elétricos interagem com qualquer campo aplicado externamente.

Estes portadores de carga estando em movimento (spin dos elétrons e órbitas em torno do núcleo), causam momentos magnéticos os quais interagem com qualquer campo magnético aplicado externamente. A existência de tais interações dissipativas no campo externo e o tempo de interação finito necessário para a variação da posição ou movimento dos portadores de carga, retardam a propagação do campo externo através do meio, exceto quando ocorrer ressonância, que é o fenômeno da igualdade das frequências do campo externo e da interação atômica.

Uma onda eletromagnética basicamente tem dois campos de energia perpendiculares, um magnético e outro elétrico. Num nível macroscópico, a causa do retardamento do campo elétrico num meio é caracterizado por um parâmetro chamado de permissividade elétrica e a causa do retardamento do campo magnético por permeabilidade magnética. (Wells, 1974)

Assim, a velocidade de propagação através de um meio pode ser expressa por

$$V = 1/\sqrt{\mu \epsilon} \quad (1.8)$$

onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  a permeabilidade magnética do meio.

A permissividade e a permeabilidade para o vácuo são respectivamente

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$$

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$$

As constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são determinadas em condições de laboratório, experimentalmente ou através das relações

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi K_e}$$

$$\mu_0 = 4 \pi K_m$$

onde o valor de  $K_m = 10^{-7}$  é o adotado desde a 11ª conferência Geral sobre Pesos e Medidas, reunida em 1960.

$$K_e = K_m c^2 = 10^{-7} c^2$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

A razão entre a velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo,  $c$ , e num meio qualquer,  $v$ , é chamada de índice absoluto de refração do meio, designado por  $n$ .

Assim, pelas equações (1.3 e 1.8), temos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{v} \\ n &= \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Mas  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$  e  $\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$ , onde  $\epsilon_r$  e  $\mu_r$

são a permissividade e a permeabilidade relativas do meio.

Então a equação (1.9) ficará

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \tag{1.10}$$

onde  $c = 299.792,5 \pm 0,4$  km/s é o valor recomendado desde 1957 pela União Geodésica e Geofísica Internacional.

Em geral, como  $\mu_r$  difere muito pouco da unidade para a maioria das substâncias que transmitem ondas eletromagnéticas, podemos escrever

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \tag{1.11}$$

Ao se considerar o meio de propagação como sendo dispersivo, a velocidade de propagação que terá um significado físico real será a velocidade de grupo.

Pode ser demonstrado que

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \tag{1.12}$$

onde  $v_g$  é a velocidade de grupo,  $v_f$  é a velocidade de fase e  $\lambda$  o comprimento de onda. Para um meio não dispersivo, o fator de dispersão  $\frac{dv_f}{d\lambda}$  será nulo, assim  $v_g = v_f$

Fisicamente então a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas em meios de dispersão normal ( $v_g < v_f$ ), é a própria velocidade de grupo com que a informação é transmitida.

Relacionando as velocidades de grupo e fase com os índices de refração de grupo e fase, teremos

$$n_g = \frac{c}{v_g} \quad \text{e} \quad n_f = \frac{c}{v_f} \quad (1.13)$$

Assim de (1.12) e (1.13), temos

$$n_g = n_f - \lambda \frac{dn_f}{d\lambda} \quad (1.14)$$

#### 1.4.2 ESPECTRO DE FREQUENCIAS DAS RADIAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS

As ondas eletromagnéticas cobrem um intervalo bastante grande de frequências ou comprimentos de onda e podem ser classificadas de acordo com sua fonte principal. A classificação não tem fronteiras bem definidas, uma vez que diferentes fontes podem produzir ondas em intervalos que se sobrepõem.

O espectro de frequências de interesse para medidas eletrônicas de distâncias é dado pela tabela 1, onde é de nosso interesse considerar somente os casos para altas frequências a partir de 30 MHz, assim teremos:

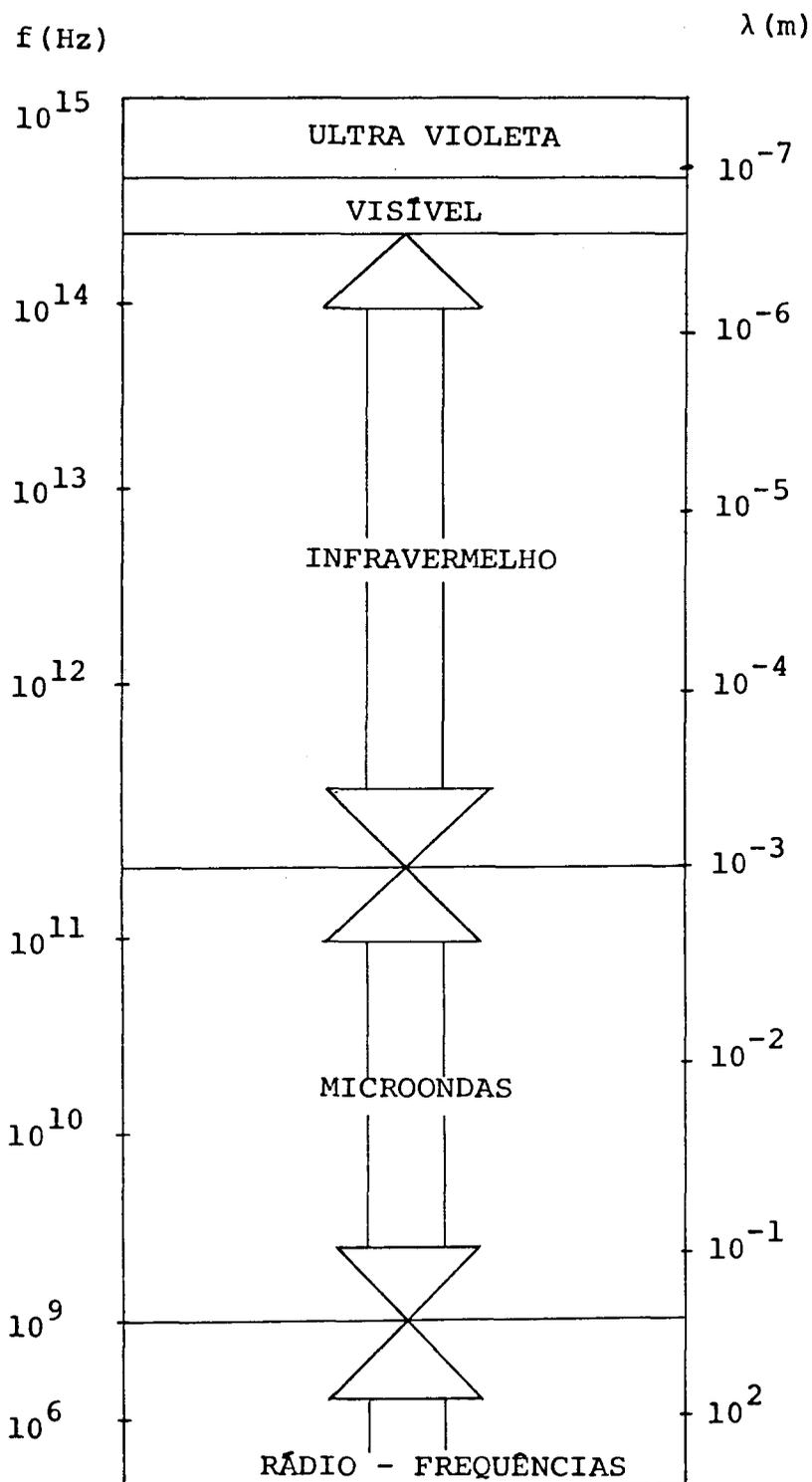
- a) Rádio-frequências - Os comprimentos de ondas variando desde alguns quilômetros

até 0,3 m. O intervalo de frequência vai desde alguns Hz até  $10^9$  Hz.

- b) Micro-ondas - Os comprimentos de ondas variam desde 0,3 m até  $10^{-3}$  m. O intervalo de frequências é de  $10^9$  Hz até  $3 \times 10^{11}$  Hz.
- c) Infravermelho - Cobre os comprimentos de ondas de  $10^{-3}$  m até  $7,8 \times 10^{-7}$  m ( $7.800 \text{ \AA}$ ). O intervalo de frequência vai de  $3 \times 10^{11}$  Hz até  $4 \times 10^{14}$  Hz. Essa região é subdividida em três: infravermelho distante de  $10^{-3}$  m a  $3 \times 10^{-5}$  m infravermelho médio de  $3 \times 10^{-5}$  m a  $3 \times 10^{-6}$  m e o infravermelho próximo que se estende até cerca de  $7,8 \times 10^{-7}$  m.
- d) Luz ou espectro visível - Estende-se de comprimentos de ondas desde  $7,8 \times 10^{-7}$  m até  $3,8 \times 10^{-7}$  m, com frequências variando de  $4 \times 10^{14}$  Hz a  $8 \times 10^{14}$  Hz.

TABELA 1

## ESPECTRO DE FREQUENCIAS DAS RADIAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS



### 1.4.3. EFEITOS SOBRE AS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

As ondas eletromagnéticas ao se propagarem através de um meio estarão sujeitas a três efeitos distintos nos sinais medidos, os quais contribuirão para a precisão final da linha medida (Friberg, 1971). São eles :

- (1) Atenuação do sinal ao viajar através do meio;
- (2) Retardamento na velocidade de propagação ao viajar através do meio.
- (3) Curvatura do raio de propagação do sinal ao viajar através do meio .

Estes efeitos atuarão de modos diferentes para diferentes tipos de ondas, sendo então distintas as suas contribuições para a precisão final da medida.

Neste trabalho estaremos considerando somente os efeitos de (2) e (3), uma vez que os equipamentos utilizados para medidas eletrônicas de distância tem seus alcances limitados.

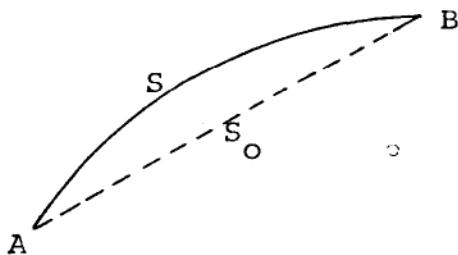
Os estudos das correções dos efeitos (2) e (3), serão realizados para observações na baixa troposfera (fonte e refletor sobre a superfície terrestre) e para observações de corpos celestes (naturais ou artificiais).

Nas observações sobre a superfície terrestre serão utilizadas as correções devidas aos parâmetros atmosféricos para a melhor determinação da refratividade do meio e a redução geométrica do caminho percorrido pelo sinal. Nas observações de corpos celestes consideraremos as correções da distância observada devido ao retardamento na velocidade de propagação .

## 1.5 GEODÉSIA CELESTE

Estaremos considerando aqui que o resultado direto das observações de um satélite, quando realizadas com equipamentos eletrônicos, estarão sujeitas as correções devidas à curvatura da trajetória das ondas eletromagnéticas na atmosfera, bem como do efeito devido ao retardamento da velocidade de propagação que ocorrem pelo mesmo fenômeno físico que é a variação do índice de refração da atmosfera.

Consideremos dois pontos A e B (fig. 1.4) num meio cujo índice de refração  $n$  é variável, ocorrendo assim um desvio na trajetória da onda eletromagnética passando o raio  $S_0$  a ser um deslocamento curvo  $S$ .



(figura 1.4)

Considerando-se que o tempo de propagação das ondas eletromagnéticas num meio é mínimo e dado por

$$t = \frac{S}{c} \quad (1.15)$$

onde  $c$  é a velocidade da onda eletromagnética no vácuo.

O tempo total de propagação será dado por

$$T = \int_S dt \quad (1.16)$$

ou

$$T = \int_S \frac{ds}{v}$$

onde  $S$  é a distância geométrica desde a posição do satélite no instante  $t$ , até o receptor.

Como  $n = \frac{c}{v}$ , o tempo real de propagação será

$$T = \int_s \frac{n}{c} ds$$

Assim,

$$c \cdot T = S = \int_s n ds$$

O erro causado pela refração será

$$\Delta S = S - S_0$$

$$\Delta S = \int_s n ds - S_0$$

como

$$S = \int_s (1+n-1) ds = \int_s ds + \int_s (n-1) ds = S + \int_s (n-1) ds$$

logo:

$$\Delta S = S + \int_s (n-1) ds - S_0$$

e

$$\Delta S = (S-S_0) + \int_s (n-1) ds$$

onde a integração é realizada ao longo do percurso eletromagnético.

Assumindo que o percurso eletromagnético e o geométrico são coincidentes,  $S = S_0$ , ignoramos o efeito da curvatura no tempo de propagação do sinal eletromagnético, o que não será válido para observações próximas a horizontal (segundo Joshi, 1973, altitudes até  $6^\circ$ ), assim, a contribuição da refração no tempo de propagação será dada pelo retardamento na propagação do sinal devido ao decréscimo de sua velocidade.

Então, teremos

$$\Delta S = \int_S (n - 1) ds \quad (1.17)$$

que é a integral básica para a correção da refração na distância eletromagnética observada devido a variação na velocidade de propagação do sinal, a qual será subtraída da distância eletromagnética observada  $S$  para se obter a distância satélite-receptor corrigida da refração.

Simbolicamente teremos:

$$S_{s-r} = S - \Delta s$$

onde  $S_{s-r}$  = distância satélite-receptor, corrigida da refração.

$S$  = distância eletromagnética observada.

$\Delta s$  = correção devido a refração da distância eletromagnética observada.

A correção do efeito da refração atmosférica devido ao retardamento na velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas que serão apresentadas neste trabalho, são devidas as propagações de rádio-frequências e frequências óticas em especial a LASER.

**FREQUÊNCIAS ÓTICAS** - Para estas frequências as regiões de efeitos consideráveis tanto para corpos celestes artificiais como naturais são a troposfera e a estratosfera.

Os efeitos da ionosfera não são observados e o vapor d'água tem pequeno efeito sobre estas frequências, como se pode ver pelas equações para o cálculo da refratividade.

Assim sendo, as correções da refração atmosférica, nas distâncias observadas utilizando LASER estão entre 2 e 6 m (Lehr, 1969).

RÁDIO-FREQUÊNCIAS - O comportamento das ondas de rádio (freq. até 15 GHz) para as regiões da troposfera e estratosfera é o mesmo que das ondas de luz, exceto que sua refratividade é dada por (Smith e Weintraub, 1953).

$$(N - 1) 10^6 = N = 77,6 \frac{p}{T} + 3,73 \times 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (1.18)$$

Na ionosfera, as ondas de rádio são afetadas por portadores de cargas como resultado da radiação solar. A refração das ondas de rádio nesta região dependem de alguns fatores, principalmente da densidade de elétrons, carga do elétron, frequência de giro do elétron e campo magnético da Terra, muito dos quais variáveis no tempo e no espaço. Assim, a refratividade numa posição  $r$  e tempo  $t$  é dada pela fórmula de Appleton - Hartree (Joshi, 1973), Eq. nº3.34 do capítulo 3.

### 1.5.1 MEDIDAS COM ONDAS DE RÁDIO

CORPOS CELESTES ARTIFICIAIS - A distância da estação terrestre ao satélite artificial é medida pela transmissão de uma onda eletromagnética de fase modulada.

O sinal é recebido pelo satélite e retorna à estação com uma diferença de fase, sendo esta, proporcional a distância de propagação.

Devido a refração atmosférica correções são requeridas para o cálculo da distância medida, usando-se a velocidade de propagação da luz no vácuo em lugar de velocidade real de propagação da onda eletromagnética.

Segundo Joshi, 1973, um sistema de rastreamento americano que utiliza este princípio é o SECOR (Sequential Collation of Range).

Alguns modelos para a correção da distância observada serão apresentados no capítulo 3.

### 1.5.2. MEDIDAS COM FREQUENCIAS ÓTICAS

A frequência ótica mais comum na medida de distância de corpos celestes artificiais ou naturais é a LASER. O tratamento da correção da distância observada é o mesmo daqueles considerados para ondas de rádio ignorando-se os efeitos da ionosfera e do vapor d'água. No capítulo 3, apresentaremos alguns modelos para a correção da distância observada.

## 2. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO EM OBSERVAÇÃO DE DIREÇÃO

### 2.1 EM ASTRONOMIA

Para se obter o valor da distância zenital real de um corpo celeste, seja ele natural ou artificial é necessário corrigir o valor da distância zenital observada da refração devido a atmosfera terrestre. Da figura 1.3, temos que

$$Z = Z' + R_e \quad (2.1)$$

onde  $Z$  é a distância zenital real,  $Z'$  a distância zenital observada e  $R_e$  a correção devido a refração da atmosfera.

A refração será chamada de refração astronômica  $R_A$  quando o objeto estiver fora dos limites da atmosfera. Quando o objeto estiver dentro da atmosfera (caso da maioria dos satélites artificiais) a refração será chamada de refração atmosférica  $R_a$ . A diferença entre as duas chama-se refração diferencial  $\Delta R$ .

Uma estrela situada em  $E$  (no infinito) e um satélite em  $S$  seriam vistos na mesma direção  $AE' = AS'$ .

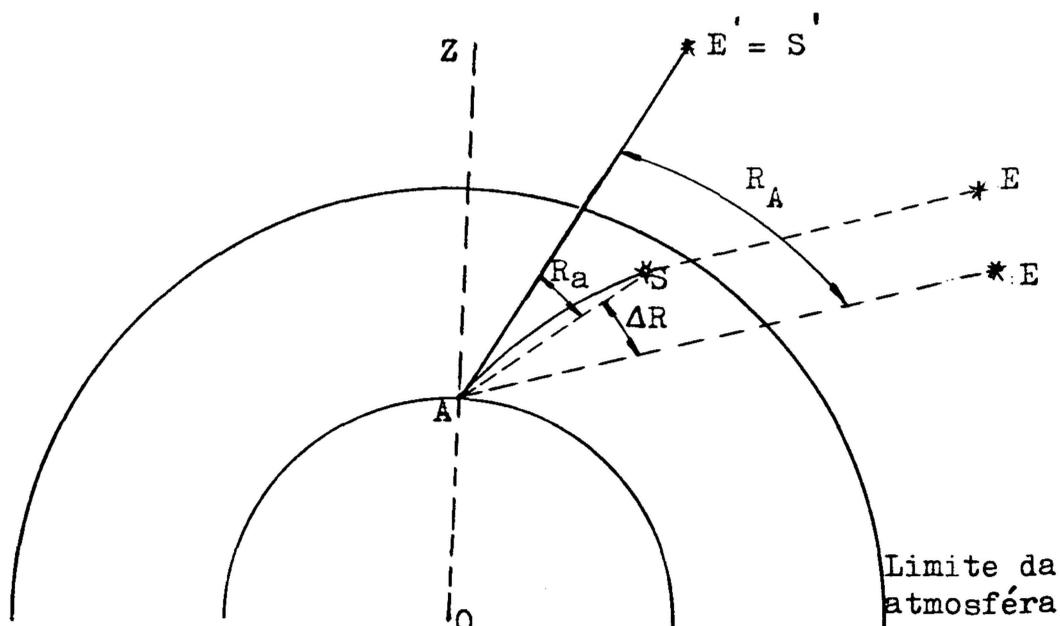


figura 2.1

Tanto para o cálculo da refração atmosférica como astronômica, temos as limitações devidas a distância zenital observada ou seja, podemos separar o referido cálculo para  $Z' \leq 75^\circ$  e  $Z' > 75^\circ$ .

### 2.1.1 CÁLCULO DA REFRAÇÃO PARA $Z' \leq 75^\circ$

O cálculo da refração em distâncias zenitais de até  $75^\circ$ , é apresentado por diversas equações de autores e épocas diferentes, sendo que cada uma delas tem sua característica própria bem como a precisão oferecida. Apresentaremos a seguir algumas destas equações onde os resultados são comparados com a tabela da refração média dada por Ivan I. Mueller, 1969. (Hoskinson e Duerksen, 1952, pag. 173) tabela 9, anexo I.

2.1.1.a - NASSAU (1948) - Apresenta uma fórmula para o cálculo da refração que é baseada nas condições de temperatura do ar de  $10^\circ\text{C}$ , pressão atmosférica de 760 mmHg e dada por

$$R'' = 60,6'' \cdot \cotg h' \quad (2.2)$$

onde  $h'$  é a altura observada. Sendo que o erro desta fórmula é em torno de  $4,4''$  de arco para altura de  $20^\circ$ , decrescendo com o aumento da altura.

2.1.1.b - SMART (1960) - considera que para corpos próximos ao zenite do observador as camadas atmosféricas são admitidas como uma série de planos paralelos cada um com densidade constante (atmosfera estratificada). É admitido que a relação  $n_0 - n = 0,00029$  onde  $n_0$  é o índice de refração no local da observação e  $n$  o índice de refração, igual a unidade na posição do objeto fora da atmosfera efetiva.

Assim nas condições de pressão barométrica de 760 mmHg e temperatura de  $10^\circ\text{C}$  temos,

$$n_0 - 1 = 0,00029$$

$$Re = (n_0 - 1) \operatorname{tg} Z'$$

$$Re'' = 206265 \cdot 0,00029 \cdot \operatorname{tg} Z'$$

logo

$$Re'' = 59,8'' \cdot \operatorname{tg} Z' \quad (2.3)$$

onde  $Z'$  é a distância zenital observada. Esta relação apresenta erros de até  $2''$  de arco para distâncias zenitais de até  $45^\circ$ , decrescendo com o decréscimo de  $Z'$ . O valor mais preciso determinado por meio de observações astronômicas é  $58,2''$ , assim

$$Re'' = 58,2'' \cdot \operatorname{tg} Z' \quad (2.4)$$

o erro obtido por esta relação é de  $2''$  de arco para distância zenital de  $70^\circ$ , decrescendo com o decréscimo de  $Z'$ .

Considerando-se que o índice de refração  $n$  depende da temperatura e pressão atmosférica, uma fórmula que expresse a correção da refração em termos destas duas quantidades fornecerá resultados mais precisos. A relação empírica dada por Comstocks (Smart, 1960) é

$$Re'' = \frac{983 \cdot p}{460 + t} \cdot \operatorname{cotg} h' \quad (2.5)$$

onde  $p$  é a pressão barométrica em polegadas de Hg,  $t$  em graus Fahrenheit e  $h'$  a altura observada. Nas condições de pressão barométrica de 760 mmHg, temperatura de  $10^\circ \text{C}$ , obtemos:

$$Re'' = 57,67'' \cdot \operatorname{cotg} h' \quad (2.6)$$

O erro obtido por esta relação é de  $0,7''$  de arco para distância zenital de  $70^\circ$ , decrescendo quando  $h'$  aumenta.

Para distâncias zenitais observadas maiores que  $45^\circ$  (Smart, 1960) deixa de considerar a atmosfera como formada por camadas planas estratificadas, e passa a admiti-la como esférica. Assim o desvio sofrido por um raio ao passar de uma camada esférica de índice de refração  $n$  para a próxima camada com índice de refração  $n + dn$  terá como desvio total uma relação que nos fornece a refração total devida a toda atmosfera e dada por:

$$R_e = \bar{R} n_0 \int_n^{\sin z'} \frac{dn}{n} \left( R^2 n^2 - \bar{R}^2 n_0^2 \sin^2 z' \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

onde  $R$  é o raio geocêntrico do objeto,  $\bar{R}$  o raio da terra,  $n$  e  $n_0$  os índices de refração na posição  $R$  e  $\bar{R}$  respectivamente,  $Z'$  a distância zenital observada.

Quando o objeto está dentro da atmosfera a integral pode ser avaliada para qualquer altura do objeto que se deseje. Entretanto quando o objeto estiver fora da atmosfera  $n = 1$ , a integral independe da altura do objeto pois o mesmo é suposto estar no limite superior da atmosfera efetiva.

Podemos ver que a fórmula geral da refração envolve duas variáveis,  $R$  e  $n$ . O índice de refração de qualquer camada depende das características físicas da camada a qual, dependerá da altura geocêntrica acima da superfície terrestre, ou seja  $n = f(R)$ . Antes da referida integral ser rigorosamente calculada a relação entre  $n$  e  $R$  deve ser especificada. Para isto envolve a aplicação das leis físicas abrangendo a pressão, densidade e temperatura do ar,  $n = f(p, \delta, T)$ .

Como o nosso conhecimento do estado físico da atmosfera superior é insuficiente para indicar a dependência precisa de  $n$  e  $R$ , somos assim, forçados a tratar a equação geral por métodos aproximados.

## 2.1.2 MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DA REFRAÇÃO

2.1.2.1. SMART (1960) - apresenta uma forma para a resolução da equação geral a partir da relação

$$\frac{R}{\bar{R}} = 1 + s \quad (2.8)$$

onde  $R$  e  $\bar{R}$  são respectivamente as distâncias geocêntricas do objeto observado e do observador e  $s$  uma pequena quantidade que varia desde zero na superfície da Terra até 0,01 no limite da atmosfera efetiva. Usando-se a relação (2.8) e desprezando-se os termos em  $s^2$ ,  $s^3$ , etc, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 (R^2 n^2 - \bar{R}^2 n_0^2 \sin^2 Z')^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{R} (n^2 - n_0^2 \sin^2 Z' + 2 \sin^2 Z')^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{R} (n^2 - n_0^2 \sin^2 Z')^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{\sin^2 Z'}{n^2 - n_0^2 \sin^2 Z'} \right)
 \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a equação geral na forma

$$\begin{aligned}
 R_e = n_0 \sin Z' \int_{n_0}^n \frac{1}{n} (n^2 - n_0^2 \sin^2 Z')^{-\frac{1}{2}} dn - \\
 n_0 \sin Z' \int_{n_0}^n \frac{n_0}{n} \sin (n^2 - n_0^2 \sin^2 Z')^{-\frac{3}{2}} dn \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

A expansão pelo teorema do binômio é somente válida se  $2 \sin^2 Z'$  é pequeno comparado com  $(n^2 - n_0^2 \sin^2 Z')$  e onde  $n_0$  e  $n$  são aproximadamente unitários, e é inválido quando o corpo celeste está no horizonte ou próximo dele.

Desenvolvendo o primeiro termo de (2.9) e considerando que  $n_0 = 1 + x$ , onde  $x$  é uma quantidade pequena, temos

$$R_1 = f(x) = \sin^{-1} \left[ (1 + x) \sin Z' \right] - Z'$$

Pelo teorema de Maclaurin, e negligenciando os termos superiores de  $x$ , temos

$$R_1 = x \operatorname{tg} Z'$$

como  $n_0 = 1 + x$

$$R_1 = (n_0 - 1) \operatorname{tg} Z' \quad (2.10)$$

No desenvolvimento do segundo termo da (2.9) relacionemos inicialmente  $n$  com a densidade atmosférica  $\rho$  através da lei de Gladstone e Dale,

$$n = 1 + c\rho \quad (2.11)$$

onde  $c$  é constante de valor numérico 0,226. Assim com as devidas considerações, temos

$$R_2 = -B \operatorname{tg} Z' \sec^2 Z' \quad (2.12)$$

onde B (a qual é  $c/\bar{R}$  x massa de coluna considerada) pode ser observada como dependente da temperatura e pressão. Combinando (2.10) e (2.12), chega-se a

$$R_e = A \operatorname{tg} Z' + B \operatorname{tg}^3 Z' \quad (2.13)$$

onde A pode ser escrita por  $(n - 1) + B$ .

Finalmente, a expressão numérica para as condições de pressão barométrica 760 mmHg e temperatura de  $10^\circ \text{C}$  é

$$R_e = 58,294 \operatorname{tg} Z' - 0,0668 \operatorname{tg}^3 Z' \quad (2.14)$$

Os valores obtidos por este modelo diferem de no máximo  $1,1$  de arco para distância zenital de  $80^\circ$ , decrescendo com o decréscimo desta.

2.1.2.2 OTERMA (1960) - apresenta a relação

$$R_e = \operatorname{tg} Z' \left[ U_0 - \frac{1}{2} U_1 \sec^2 Z' + \frac{3}{8} U_2 \sec^4 Z' - \frac{5}{16} U_3 \sec^6 Z' + \dots \right] \quad (2.15)$$

$$U_0 = n \int^{n_0} \frac{dn}{n} \quad U_1 = n \int^{n_0} M \frac{dn}{n} \quad U_2 = n \int^{n_0} M^2 \frac{dn}{n}$$

$$U_3 = n \int^{n_0} M^3 \frac{dn}{n} \quad e \quad M = \frac{n^2 R^2}{n_0^2 R_0^2} - 1$$

Foi assumido o modelo de que a temperatura decresce uniformemente com a altura a partir da superfície terrestre até o limite da estratosfera quando então permanece constante. Assim, os valores dos coeficientes  $U_0, U_1, U_2, \dots$ , são determinados utilizando-se a relação de Gladstone e Dale equação (2.11), e dados por:

$$U_0 = 60,17052$$

$$\frac{1}{2} U_1 = 6,6968 \times 10^{-2}$$

$$\frac{3}{8} U_2 = 2,0971 \times 10^{-4}$$

$$\frac{5}{16} U_3 = 1,0704 \times 10^{-6}$$

Este modelo fornece valores que diferem de 4,4 de arco para distância zenital de 60°, decrescendo com o decrescimo desta.

2.1.2.3. BALDINI (1963) - apresenta a relação

$$R_e = A_0(n_0-1)tgZ' + A_1(n_0-1)tg^3Z' + A_2(n_0-1)tg^5Z' \quad (2.16)$$

onde

$$A_0 = 0,99827 \quad A_1 = -0,00130 \quad A_2 = 0,000006$$

sendo o cálculo de  $n_0$  para o plano do observador dado pela equação de Barrel e Sears, 1939. Assim pela equação de Edlén(1953),

$$(\bar{n}-1) 10^7 = 2876,04 + \frac{16,288}{\lambda^2} + \frac{0,136}{\lambda^4} \quad (2.17)$$

sendo  $\lambda$  o comprimento de onda da luz em microns.

Então

$$(n_0 - 1) = \frac{(\bar{n}-1)}{1+\alpha t_0} \cdot \frac{P_0}{760} - \frac{0,55 \cdot 10^{-7} \cdot e_0}{1 + \alpha t_0} \quad (2.18)$$

onde  $t_0$  é a temperatura em graus celsius no plano do observador,  $P_0$ ,  $e_0$  dados em mmHg e  $\alpha = 0,00367$ .

Este modelo fornece diferença máxima de 0,3 de arco quando a distância zenital é 50°, decrescendo para os dois extremos a partir deste valor.

2.1.2.4. SAASTAMOINEN (1971) - Apresenta uma relação baseada na distribuição simétrica radial de  $n$  considerando a Terra esférica. Assim a equação geral assume a forma

$$R_e = 16,271 tgZ' \left[ 1 + 0,0000394 tg^2 Z' \left( \frac{P_0 - 0,156 e_0}{t_0} \right) \right] \times$$

$$\left( \frac{P_0 - 0,156 e_0}{t_0} - 0,0749 \left[ tg^3 Z' + tg Z' \right] \frac{P_0}{1000} \right) \quad (2.19)$$

onde  $P_0$ ,  $e_0$  são dados em milibares e  $t_0$  em graus Kelvin, para o local de observação. Esta fórmula é aplicável para  $Z' \leq 75^\circ$ .

Este modelo fornece valores que diferem de 14" de arco para distância zenital de 60°, decrescendo com o decrescimo desta.

### 2.1.3 CÁLCULO DA REFRAÇÃO PARA $Z > 75^\circ$

Mueller, em *Spherical and Practical Astronomy As Applied To Geodesy*, apresenta uma tabela de valores médios da refração para as condições de pressão barométrica 760 mmHg, Temperatura  $10^\circ$  C e a umidade de 60%. A referida tabela foi por nós adotada como modelo para a comparação dos valores obtidos pelas relações propostas. Esta tabela foi calculada por meio do método de Willis para as distâncias zenitais de 0 a  $85^\circ$ . Para observações tomadas próximas ao horizonte, tabelas especiais da refração baseadas somente nos dados observados são usadas em observatórios. Entre elas as tabelas de Pulkovo Observatory (1870) e tabelas de Greenwich (1898), sendo a primeira usada por Mueller para completar a sua tabela de valores médios.

2.1.3.1 ANDRADE (1979) - considerando que qualquer atmosfera pode ser substituída por outra simplificada, definida por uma superfície dióptrica a qual ele considera ser a superfície de separação de dois meios óticos com índices de refração iguais aqueles dos extremos da atmosfera dada e que contém o centro de massa da coluna atmosférica de base unitária percorrida pela luz.

Para o cálculo da refração atmosférica, Andrade propôs a relação:

$$R_e = \operatorname{tg} \left[ \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{\bar{R}}{\bar{R} + \zeta} \cdot \operatorname{sen} Z' \right) \right] \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (2.20)$$

onde  $\bar{R}$  é o raio médio de terra e  $\zeta$  a altura da superfície dióptrica sendo dada por:

$$\zeta = \frac{\sum_{i=p}^s z_i \Delta n_i}{\sum_{i=p}^s \Delta n_i} = \frac{\sum_{i=p}^s z_i \Delta n_i}{n_p - n_s} \quad (2.21)$$

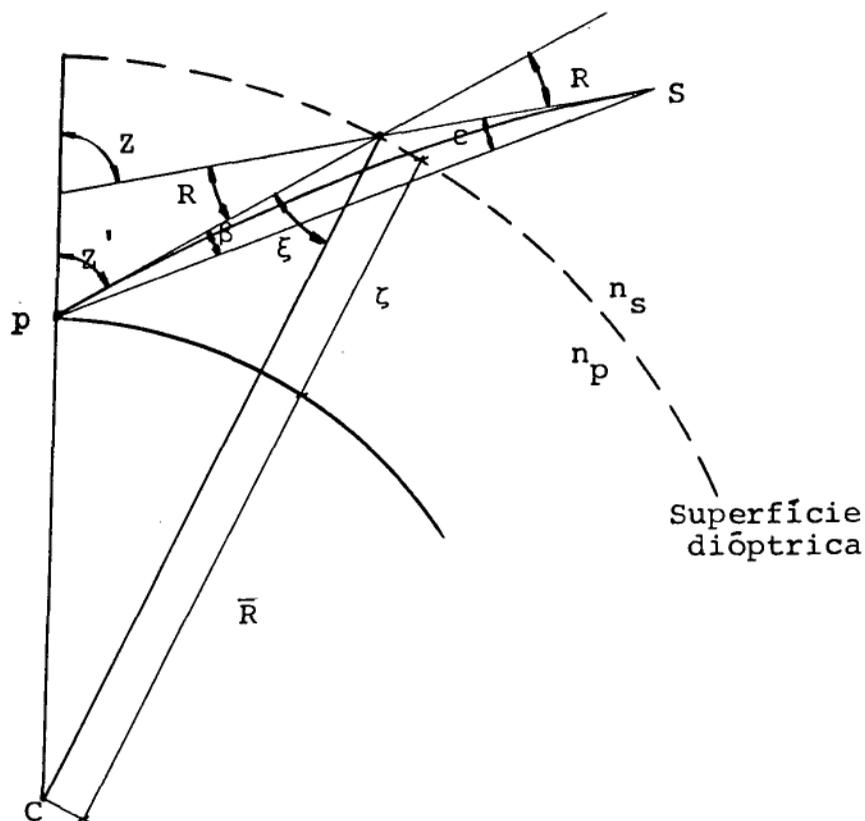


fig.2.2 - Ângulo  $\xi$  entre o raio incidente e a normal

Da figura acima, pela lei dos senos, temos

$$\frac{\text{sen } \xi}{\bar{R}} = \frac{\text{sen}(180-Z')}{\bar{R} + \zeta}$$

$$\text{sen } \xi = \frac{\bar{R} \text{ sen } Z'}{\bar{R} + \zeta}$$

obtendo-se deste modo o valor de  $\xi$  :

Então a equação (2.20), resume-se a

$$R_e = \text{tg } \xi \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (2.22)$$

sendo  $n_p$  e  $n_s$  os índices de refração para os níveis do solo e da superfície dióptrica respectivamente e onde  $R_e$  é a refração atmosférica em radianos.

Para o cálculo da refração astronômica, Andrade apresenta ainda que

$$R_e = \text{tg} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{\bar{R}}{\bar{R} + \zeta} \text{ sen } Z' \right) \right] \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (2.23)$$

Assumindo o modelo adotado por Edlen (1966).

$$(\bar{n} - 1) 10^6 = \frac{47230,0}{173,3 - \lambda^{-2}} \quad (2.24)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda.

Para outras condições atmosféricas o índice de refração é dado por

$$(n - 1) = \frac{(\bar{n} - 1) \cdot 288}{760} \left( \frac{P}{T} \right) - 16,4 \left( \frac{e}{T} \right) \quad (2.25)$$

onde  $T$  = temperatura em  $^{\circ}\text{K}$

$P$  = pressão total do ar em mmHg

$e$  = pressão parcial do vapor d'água em mmHg.

Andrade, tomando o valor de  $\lambda = 0,555 \mu\text{m}$  como representativo da luz visível, obteve de acordo com a (2.24).

$$(\bar{n} - 1) \times 10^6 = 277,736$$

Substituindo este valor na equação (2.25), obteve

$$(n-1) \times 10^6 = 105,247 \left( \frac{P}{T} \right) - 16,4 \left( \frac{e}{T} \right)$$

Tomando-se o raio da Terra como 6.367.447 m e a altitude do centro de massa da coluna atmosférica de base unitária como constante e igual a 8.458 m (ver Andrade, 1977), a equação (2.23) resulta

$$R_e = \text{tg} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 0,998673 \text{ sen } Z' \right) \right] \ln \left[ 1 + 105,247 \times \frac{10^{-6}}{\left( \frac{P}{T} \right) - 16,4 \times 10^{-6} \left( \frac{e}{T} \right)} \right] \quad (2.26)$$

para  $R$  em radianos. Para  $R_e$  em segundos de arco, será

$$R_e'' = 206265 R_e \quad (2.27)$$

Andrade afirma que por se admitir  $\zeta$  constante a equação (2.26) só não é válida para  $Z'$  nos intervalos de  $80^{\circ}$  a  $100^{\circ}$  e  $260^{\circ}$  a  $280^{\circ}$ .

Este modelo fornece diferença nula para distância zenital de  $76^\circ$ , onde a diferença máxima de  $0,3''$  de arco foi obtida para distância zenital de  $72^\circ$ . Para distância zenital de  $78^\circ$  a diferença é de  $0,3''$  de arco menor que o valor da tabela 9.

## 2.2 EM FOTOGRAMETRIA

O ângulo entre o eixo ótico da câmara e a tangente ao raio real medido num ponto acima do terreno (figura 2.3), tomado como positivo, para fora do deslocamento radial da imagem e causado pela refração atmosférica, recebe o nome de ângulo de refração fotogramétrica. Este ângulo é uma função da variação da densidade do ar em todos os pontos ao longo do raio. Para o cálculo da refração fotogramétrica pode ser assumido que a atmosfera é constituída por uma série de finas camadas concêntricas, cada qual com a densidade constante. Neste modelo atmosférico, a refração é causada pela variação na densidade das vizinhanças (limites) das camadas as quais decrescem com o aumento da altura.

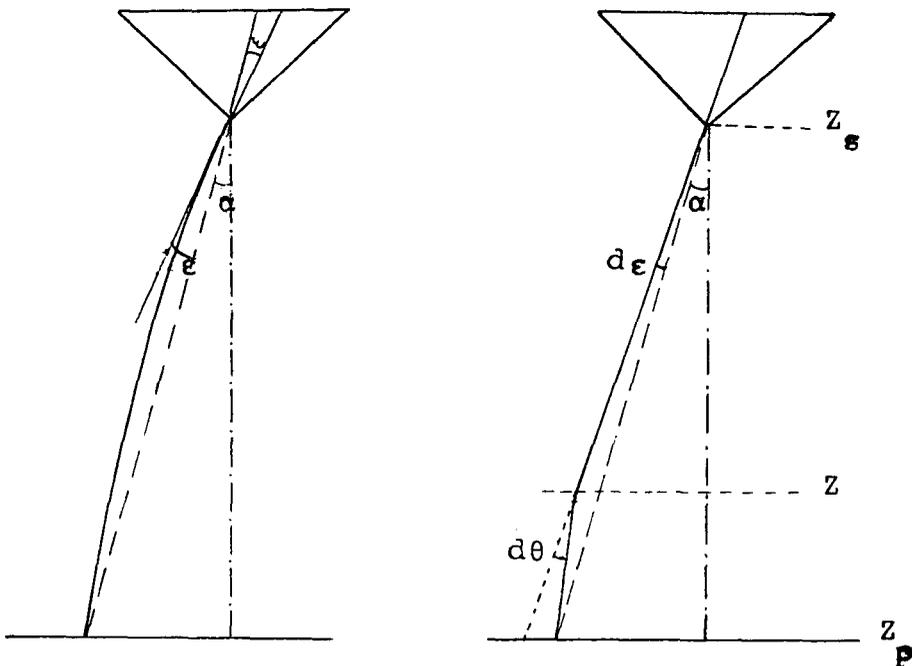


fig. 2.3

De acordo com a lei de Snell da refração, para um raio de luz que penetra numa vizinhança, o produto  $n \operatorname{sen} \theta$  é o mesmo em ambos os lados da vizinhança:

$$n \operatorname{sen} \theta = \text{constante}$$

Assim, a partir da equação diferencial da refração atmosférica (equação 1.6)

$$d\theta = \operatorname{tg}\theta \frac{dn}{n}$$

teremos a refração devida a cada camada considerada, a qual contribui para a determinação da refração fotogramétrica (figura 2.3) dada por

$$d\varepsilon = \frac{Z - Z_p}{Z_s - Z_p} \cdot d\theta$$

onde  $Z$ ,  $Z_p$  e  $Z_s$  são respectivamente as alturas da camada considerada, da superfície do terreno e da câmara (Schut, 1969).

A seguir apresentaremos alguns modelos para a correção da refração fotogramétrica dados por vários autores, cujos resultados serão comparados com os valores da tabela da refração fotogramétrica dada por G.H.Schut, 1969. (tabela 4 do anexo I)

### 2.2.1 MANUAL DE FOTOGAMETRIA DA A.S.P. (American Society of Photogrammetry, 1966 - pag.396)

Partindo-se da suposição que  $\varepsilon = 1/2 d\theta$  sendo  $d\theta$  a equação diferencial da refração atmosférica, teremos

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (2.28)$$

onde:  $\varepsilon$  = é a refração fotogramétrica em radianos

$\alpha$  = ângulo entre o raio de luz e a vertical do solo

$n_s$  = índice de refração no nível da câmara

$n_p$  = índice de refração para o nível do terreno.

Testando a equação (2.28), para o modelo atmosférico de latitude 50°N, para pontos ao nível do mar e  $\alpha = 45^\circ$ , vimos que sua aproximação é menor que 1,2" de arco para alturas de vôo até 6 km, decrescendo com o aumento da altura. Para o modelo atmosférico ARDC-1959, a diferença é de 1,0" de arco para a mesma altura anterior.

2.2.2 BERTRAM (1966) - Apresenta uma equação diferencial para a refração fotogramétrica em termos da variação da velocidade da luz com a altitude. Todo o seu trabalho é desenvolvido no modelo de atmosfera A R D C (1959) (Air Research and Development Command), considerando a atmosfera dividida em capas concêntricas de mesma espessura. A equação diferencial é

$$d\varepsilon = \frac{Z}{Z_0} \frac{dv}{v} \operatorname{tg} \alpha \, dz \quad (2.29)$$

ou

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{Z_0 \cdot v} \int_{Z_0}^Z \left( \frac{dv}{dz} \right) dz \quad (2.30)$$

onde:

$Z_0$  = altura de vôo em relação ao solo.

$v$  = velocidade da luz, constante para a altura  $Z_0$

Se for considerado o efeito da curvatura da terra na refração fotogramétrica, Bertram mostra que a refração fotogramétrica pode ser expressa como

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v \cdot Z_0} \int_{Z_0}^Z \frac{dv}{dz} \, dz + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v \cdot Z_0} \int_{Z_0}^Z \frac{(Z - Z_0) Z}{R} \frac{dv}{dz} \, dz \quad (2.31)$$

sendo  $R$  o raio da terra.

O primeiro termo da (2.31) é a solução para uma Terra plana e o segundo termo, quando for necessário considerar o efeito da curvatura da terra, sendo que para alturas de 64 km por exemplo, o efeito da curvatura é de 1% do valor do primeiro termo.

Considerando-se o modelo atmosférico adotado, Bertram calculou as tabelas 1 e 2 do anexo I, as quais fornecem valores para a refração fotogramétrica para alturas de vôo até 80.500 m acima do nível do mar.

Ao considerar a refração para um ponto sobre a su-

perfície a uma determinada altura do nível do mar, Bertram propôs a relação

$$\epsilon = \epsilon_s - \frac{z_p}{z_s} \epsilon_p \quad (2.32)$$

onde  $\epsilon_s$  = refração para alturas de vôo  $z_s$ , acima do nível do mar.

$\epsilon_p$  = refração para o ponto objeto a uma altura  $z_p$ , acima do nível do mar.

Como foi constatado por Schut em 1969, o segundo termo da equação (2.32) está errado, obrigando então Bertram (1969) a publicar outra equação para o cálculo da refração para pontos a quaisquer altitudes. Portanto a equação (2.30) e assumindo que  $v = c$ , Bertram generalizou assim

$$\epsilon = \frac{\text{tg } \alpha}{(z_s - z_p) c} \int_{z_p}^{z_s} (z - z_p) dv = K \text{tg } \alpha \quad (2.33)$$

como  $v = c (1 - 0,000226 \rho)$

onde  $\rho$  é a densidade atmosférica como uma função da altitude e  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

Assim, substituindo  $dv$  por  $-0,000226 c d\rho$  e integrando a (2.33) por partes:

$$K(z_s, z_p) = \frac{0,000226}{z_s - z_p} \int_{z_p}^{z_s} \rho dz - 0,000226 \rho_s \quad (2.34)$$

sendo  $\rho_s$  a densidade na posição da câmara,  $z_s$  e  $z_p$  respectivamente altura de vôo e altura do ponto no solo, ambas em relação ao nível do mar.

Tomando-se

$$\begin{aligned} R(z_s) &= 0,000226 \rho_s \\ e \\ I(z) &= 0,000226 \int_o^z \rho dz \end{aligned} \quad (2.35)$$

teremos

$$K(z_s, z_p) = \frac{1}{z_s - z_p} [ I(z_s) - I(z_p) ] - R(z_s) \quad (2.36)$$

Utilizando-se das equações (2.35), Bertram construiu uma tabela (tabela 3, anexo I), baseando-se no modelo atmosférico ARDC-1959. Esta tabela foi por nos ampliada para alturas até 49 km, a partir de 5 km.

Este modelo fornece valores cuja aproximação é inferior a 0,3 de arco para altura de vôo de 40 km, diminuindo a diferença para outras alturas.

Para outros ângulos  $\alpha$ , deve-se multiplicar os valores da tabela por  $\text{tg } \alpha$ , assim

$$\epsilon = K \text{ tg } \alpha$$

2.2.3 - SCHUT (1969) - Ele assume que a refração fotogramétrica na atmosfera real é a mesma que numa atmosfera padrão. Afirma também que acima de 20 km os modelos atmosféricos ICAO 1952; ARDC 1959 e U.S. Standard Atmosphere 1962, são praticamente os mesmos. Para o cálculo da refração é admitido que a atmosfera é constituída de uma série de finas camadas concêntricas cada qual com densidade constante.

Com uma aproximação diferente, Schut apresenta uma equação idêntica àquela dada por Bertram,

$$\epsilon = 0,000226 \frac{\text{tg } \alpha}{z_s - z_p} \sum_p^s (z - z_p) \Delta \rho \quad (2.37)$$

onde  $\Delta \rho$  é a diferença de densidade entre duas camadas consecutivas.

A tabela 4 do anexo I, fornece valores da refração pa-

ra a U. S. Standard Atmosphere 1962 para um raio a  $45^{\circ}$  com a vertical. Para outros ângulos, valores da refração podem ser obtidos multiplicando-se por  $\text{tg } \alpha$  os valores da tabela, onde  $\alpha$  é o ângulo desejado.

Para se obter a refração nas alturas de vôo dadas em relação ao nível do mar, desenvolvendo o somatório da equação (2.37), teremos

$$\sum_p^s (Z - Z_p) \Delta\rho = \sum_o^s Z \Delta\rho - \sum_o^p Z \Delta\rho - Z_p \sum_p^s \Delta\rho \quad (2.38)$$

substituindo na equação (2.37)

$$\epsilon = \frac{Z_s}{Z_s - Z_p} \epsilon_s - \frac{Z_p}{Z_s - Z_p} \epsilon_p - 0,000226 \text{ tg } \alpha \frac{Z_p}{Z_s - Z_p} (\rho_s - \rho_p) \quad (2.39)$$

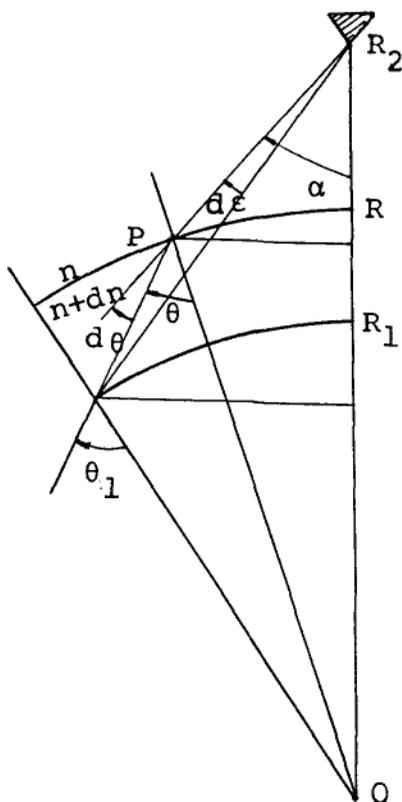
onde  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_p$  são a refração fotogramétrica para altura de vôo e para altura do solo, ambas com relação ao nível do mar.

$\rho_s$  e  $\rho_p$  são as densidades da atmosfera nos níveis da câmara e do solo respectivamente.

2.2.4 SAASTAMOINEN (1972) - Apresenta a equação diferencial da refração fotogramétrica na forma

$$d\epsilon = \left( \frac{R-R_1}{R_2-R_1} \right) \frac{\text{tg}\theta}{n} dn + R_2 \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2R_1^2} \left[ (R-R_1) - \frac{R_2}{R_1(R_2-R_1)} (R-R_1)^2 \right] \frac{\text{tg}\theta}{n} dn \quad (2.40)$$

cujos elementos são definidos na figura abaixo



Esquema de ilustração da refração fotogramétrica de devido a refração para o ponto P de uma camada esférica da atmosfera. (Saastamoinen, 1972).

Após a consideração da variação de  $\theta$  com o índice de refração de acordo com a lei da refração

$$n R \operatorname{sen} \theta = n_2 R_2 \operatorname{sen} \theta = \text{const.} \quad (2.41)$$

foi encontrado que

$$\epsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_2 - R_1} n_2^{\int n_1 (R - R_1) dn} + A_1 n_2^{\int n_1 (R - R_1) dn} - A_2 n_2^{\int n_1 (R - R_1)^2 dn} \quad (2.42)$$

onde

$$A_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{R_2^2}{2R_1^2} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_2} \left( 1 + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \quad (2.43)$$

e

$$A_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_2(R_2 - R_1)} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{R_2^3}{2R_1^3} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \approx \frac{A_1}{R_2 - R_1} \quad (2.44)$$

O primeiro termo da equação (2.42) dá o valor da refração para todas as aplicações quando a curvatura da terra for negligenciada. De acordo com Saastamoinen (1972) os dois últimos termos são devidos aos efeitos da curvatura e terão pouca influência nos valores da refração para vôos acima de 20.000 metros, sendo dispensáveis para alturas menores.

Considerando as grandezas físicas atmosféricas, Saastamoinen reescreveu a equação (2.42) como segue

$$\varepsilon = \frac{(n_0 - 1) R_a T_0}{P_0 g} \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{P_1 - P_2}{R_2 - R_1} - \frac{g}{R_a} \cdot \frac{P_2}{T_2} \right] + \delta_1 + \delta_2 \quad (2.45)$$

onde

$n_0$  = índice de refração para uma atmosfera seca, pressão  $P_0$  e temperatura absoluta  $T_0$ .

$R_a$  = Constante dos gases para o ar seco.

$g$  = valor para aceleração da gravidade (9,790 m/s<sup>2</sup>)

$$\delta_1 = A_1 n_2^{\int n_1} (R - R_1) dn - A_2 n_2^{\int n_1} (R - R_1)^2 dn \quad (2.46)$$

é a correção da curvatura Terra.

$$\delta_2 = \frac{R_a}{4g} \left[ \frac{(n_0 - 1) T_0}{P_0} \left( 1 - \frac{R}{R_w} \right) - c_w \right] \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{e_1 - e_2}{R_2 - R_1} \right) + c_w \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{e_2}{T_2} \right) \quad (2.47)$$

é a correção para a umidade onde:

$R_w$  = constante dos gases para o vapor d'água

$e$  = pressão parcial do vapor d'água

$c_w$  = constante.  $c_w = 12,3 \times 10^{-6}$  para todos comprimentos de onda da luz visível. (Édlen, 1966).

Negligenciando os termos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  na equação (2.45) e substituído os termos constantes por seus valores numéricos Saastamoinen, finalmente escreveu, assumindo o ar seco:

$$\epsilon = 2,316 \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{P_1 - P_2}{H} - 34,11 \frac{P_2}{T_2} \right) \quad (2.48)$$

onde

$\epsilon$  = refração fotogramétrica em microradianos

$P_1$  e  $P_2$  = pressão barométrica em milibares para os níveis do solo e câmara.

$T_2$  = temperatura absoluta para o nível da câmara ( $273,2 + t_2$  °C)

$H$  = altura de vôo em quilômetros acima do nível do solo.

$\alpha = 45^\circ$

Usando-se o modelo atmosférico U.S.S.A. 1976, os valores obtidos com a (2.48) não excedem a 0,1 daqueles obtidos por Schut, 1969 para alturas de vôo até 1 km, decrescendo a diferença com o acréscimo da altura.

Tanto Saastamoinen (1972) como também Schut (1969) apresentaram formulas para a correção da refração fotogramétrica devido efeitos da curvatura da terra. Estas correções entretanto, para vôos até 100 km de altura não chegam a ser 1 microradiano.

2.2.5 - ANDRADE (1977) - Considerando que qualquer atmosfera pode ser substituída por outra simplificada, definida por uma superfície dióptrica (fig. 2.2) a qual ele considera ser a superfície que separa dois meios óticos com índice de refração iguais aqueles dos extremos da atmosfera dada, e cuja superfície contém o centro de massa da coluna atmosférica de base unitária percorrida pela luz. É demonstrado que

$$\zeta = \frac{\int_0^s \frac{m}{p} z \, dm}{\frac{M}{P}} \quad (2.49)$$

onde  $\zeta$  é a distância desde o solo até o centro de massa de uma coluna atmosférica entre os níveis do solo e da câmara,  $Z$  é a altura de vôo,  $dm$  o elemento de massa e  $M$  a massa total da coluna atmosférica. O valor  $\zeta$  pode também ser dado por

$$\zeta = \frac{\int_{n_p}^{n_s} Z \, dn}{\int_{n_p}^{n_s} dn} \quad (2.50)$$

ou

$$\zeta = \frac{\sum_{i=p}^s Z_i \Delta n_i}{n_p - n_s} \quad (2.51)$$

valores de  $\zeta$  são dados nas tabelas 5 e 6 do anexo I, ambas calculadas para o ponto P no nível do mar.

Se o ponto considerado não estiver no nível do mar, teremos para qualquer altura,

$$\zeta = \frac{\zeta_s (n_o - n_s) - \zeta_p (n_o - n_p)}{n_p - n_s} - z_p \quad (2.52)$$

onde

$\zeta_s$  = valor de  $\zeta$  correspondente a altitude da estação da câmara.

$\zeta_p$  = valor de  $\zeta$  correspondente a altitude do ponto sobre o solo.

$n_o, n_p, n_s$  = índices de refração para os níveis do mar, do ponto sobre o solo e da câmara.

$z_p$  = altitude do ponto sobre o solo.

Assim, para uma atmosfera padrão adotada e para um ponto sobre o solo a qualquer nível, a refração fotogramétrica será dada por :

$$\epsilon = \frac{\text{tg } \alpha}{Z_s - Z_p} \left[ \frac{\zeta_s (n_o - n_s) - \zeta_p (n_o - n_p)}{n_p - n_s} - Z_p \right] \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (2.53)$$

onde  $Z_s$  é a altura de vôo em relação ao nível do mar e  $\epsilon$  será dada em microradianos.

A tabela 7 do anexo I, calculada pela relação 2.53 dá a refração fotogramétrica para um ponto a qualquer nível. Através da tabela 6 do anexo I, podemos calcular a refração fotogramétrica pela equação (2.53).

Usando-se o modelo atmosférico ARDC - 1959, vimos que os valores obtidos com a equação (2.53) não excedem a 0,06 de arco daqueles dados por Schut, 1969 para alturas de vôo de 3 km, decrescendo para outras alturas de vôo.

### 3. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO NAS MEDIDAS ELETRÔNICAS DE DISTÂNCIA

#### 3.1 MEDIDA DE DISTÂNCIA SOBRE A SUPERFÍCIE TERRESTRE

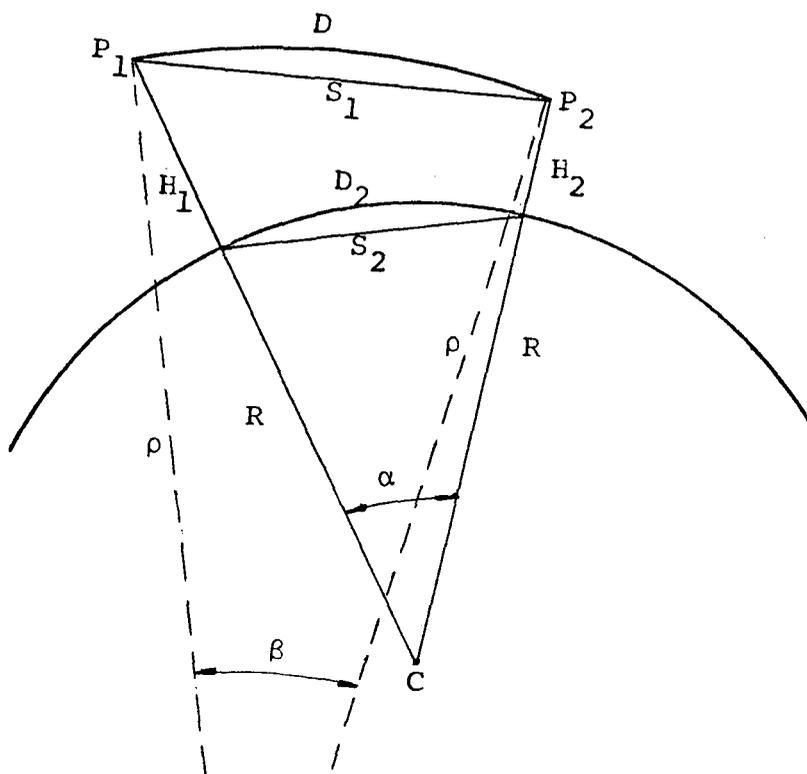


fig. 3.1

As correções aplicadas nas medidas eletrônicas de distância são devidas ao retardamento da velocidade e para linhas longas (maior que 30 km, Roy, 1971) da curvatura. As correções da distância devido ao retardamento da velocidade são normalmente baseadas nas medidas dos parâmetros atmosféricos nos extremos da linha medida (estação e refletor).

##### 3.1.1 ÍNDICE DE REFRAÇÃO

O cálculo do índice de refração é fator limitante da precisão obtida na medida de distância. Assim sendo a determinação do índice de refração no caminho percorrido pela onda

é essencial para os instrumentos mais precisos. Ao se adotar algum padrão atmosférico, alguns fatores determinam o seu valor exato:

- 1 - A composição dos gases na atmosfera que é quase constante.
- 2 - Quantidade de vapor d'água na atmosfera.
- 3 - A temperatura e pressão da mistura dos gases.
- 4 - A frequência do sinal irradiado.

Segundo DAVID WELLS (1974), um modelo adequado da refração troposférica pode ser dado assumindo-se que a troposfera é constituída somente por dióxido de carbono, vapor d'água e outros gases agregados sob o título de ar úmido-seco com dióxido de carbono. O que se considera na realidade é que a atmosfera contém 0,03% de dióxido de carbono.

Neste trabalho estaremos considerando as correções dos sinais emitidos tipos microondas, infravermelho e luz visível.

### 3.1.2 MICROONDAS

O cálculo do índice de refração é dado pela forma modificada da relação de ESSEN e FROOME (1951) aprovada provisoriamente pela Associação Internacional de Geodésia em 1960.

$$(n - 1)10^6 = \frac{103,46}{273,2 + t} \cdot p + \frac{490814,24}{(273,2 + t)^2} \cdot e \quad (3.1)$$

onde  $p$  = pressão atmosférica medida em mmHg  
 $e$  = pressão do vapor d'água em mmHg  
 $t$  = temperatura do ar (bulbo seco) em °C

Como o índice de refração  $n$  pode ser representado pela refratividade  $N$ , temos

$$N = (n - 1)10^6 \quad (3.2)$$

Brunner (1976), apresenta a relação

$$N = \frac{77,64}{T} (p - e) + \frac{64,68}{T} \left(1 + \frac{5748}{T}\right) e \quad (3.3)$$

Como representando a fórmula de ESSEN e FROOME (1951),  
onde:

$p$  = pressão do ar em milibares

$e$  = pressão do vapor d'água em milibares

$T$  = temperatura do ar em graus kelvin

Outra relação possível para o cálculo da refratividade  
é a de SMITH-WEINTRAUB

$$N = \frac{77,6}{T} \left(p + \frac{4810}{T} e\right) \quad (3.4)$$

ou ainda, separando a equação acima em componentes "seca" e  
"úmida"

$$N = N_s + N_u = 77,6 \frac{p}{T_s} + 77,6 \times (4810) \frac{e}{T_u^2} \quad (3.5)$$

onde

$T_s$  e  $T_u$  = temperaturas em °K

$p$  = pressão em milibares

$e$  = pressão parcial do vapor d'água em milibares

Segundo BRUNNER (1976) a relação (3.3) não apresenta  
efeitos apreciáveis de dispersão para comprimentos de onda  
 $\lambda$  de 0,3 a 100 cm.

BURNSIDE (1971) afirma ser válida a relação (3.3) para  
frequências abaixo de 30 GHz, para  $\lambda \approx 1$  cm, temperatura en-  
tre  $-20^\circ$  a  $+60^\circ\text{C}$ , pressão do vapor d'água superior a 100  
mmHg sendo o erro desta relação menor ou igual a 1 parte em  
 $10^6$  (1 ppm) onde então a precisão desta fórmula é satisfató-

ria para a maior parte dos trabalhos com equipamentos de microondas.

Para o cálculo da pressão do vapor d'água, consideraremos a fórmula apresentada por MEADE (1972), por nos parecer a mais prática

$$e = e' - 0,000367 \cdot p (t - t') \cdot \left(1 + \frac{t' - 32}{1571}\right) \quad (3.6)$$

onde

$p$  = pressão atmosférica em polegadas de Hg

$e'$  = pressão do vapor saturado, em polegadas de Hg

$t$  = temperatura do ar (bulbo seco), em  $^{\circ}\text{F}$ .

$t'$  = temperatura do ar (bulbo úmido), em  $^{\circ}\text{F}$ .

ANUNCIÇÃO (1978) apresenta uma fórmula prática (de autor desconhecido) para o cálculo da pressão do vapor saturado dada por

$$e' = e_0 \cdot 10^k \quad (3.7)$$

onde

$$k = \frac{a \cdot t}{b + t} \quad (3.8)$$

sendo

$e_0 = 6,11 \text{ mb}$

$t$  = temperatura do ar (bulbo seco) em  $^{\circ}\text{C}$

$a = 7,5$

$b = 237,3 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Quando se trabalha com microondas como sinal transmitido, a dispersão devida a atmosfera tem efeito muito pequeno, sendo inclusive negligenciada; porém erros cometidos na determinação dos parâmetros atmosféricos contribuirão negativamente nos resultados obtidos.

Segundo MEADE (1972), um erro de 1°C produzirá uma variação em torno de 1 ppm nas medidas tomadas com microondas, um erro de 2,5 mm na pressão, causará uma variação de 1 ppm na correção do índice de refração e o efeito da umidade na correção do índice de refração pode ser 100 vezes maior para microondas do que para ondas de luz.

Por conveniência de cálculos a correção do índice de refração para medidas com microondas, em partes por milhão da distância pode ser dado na forma

$$\text{Correção (ppm)} = I - Ap - Be \quad (3.9)$$

onde I = índice de refração padrão (Cubic Corporation = 1,000320 e Meade = 1,000325) utilizado para a calibração do instrumento.

p = pressão em polegadas de mercúrio.

e = pressão do vapor d'água em polegadas de mercurio.

t = temperatura ( bulbo seco ) em °F .

$$A = \frac{4730}{459,7 + t} \quad e \quad B = \frac{40394200}{(459,7 + t)^2}$$

$$\text{Correção (metros)} = D \cdot \text{Correção em ppm} \quad (3.10)$$

Sendo D o valor da distância medida em metros. Os dois últimos termos da equação (3.9), representam o índice de refração real no instante da medida .

### 3.1.3 LUZ VISÍVEL E INFRAVERMELHO

O cálculo do índice de refração é dado pela fórmula de BARREL e SEARS (1939), recomendada pela União Geodésica e Geofísica Internacional em 1960.

$$(n_t - 1) = (n_p - 1) \frac{273}{273 + t} \cdot \frac{p}{760} - \frac{15,02}{273 + t} \cdot e \cdot 10^{-6} \quad (3.11)$$

onde

$n_p$  = índice de refração do ar para as condições de  $0^\circ\text{C}$ ,  
760 mmHg e 0,03%  $\text{CO}_2$  .

$n_t$  = índice de refração real (para temperatura  $t$ ).

$t$  = temperatura do ar (bulbo seco) em  $^\circ\text{C}$ .

$p$  = pressão em mmHg.

$e$  = pressão do vapor d'água em mmHg (calculado pela fórmula 3.6).

O índice de refração  $n_p$  pode ser obtido através do desenvolvimento de EDLEN (1953) que tem sua expressão na forma de Cauchy

$$(n_p - 1)10^8 = 28760,4 + \frac{162,88}{\lambda_0^2} + \frac{1,36}{\lambda_0^4} \quad (3.12)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda da luz no vácuo expresso em  $\mu\text{m}$ .

Para medidas de distância, usando-se luz não monocromática, a refratividade  $N_g$  para a velocidade de grupo (eq. 1.12) deve ser usada em lugar de  $N$  na equação (3.2); assim temos a relação usada pelo National Geodetic Survey dos E.U.A.

$$n_g = 1 + \left( 287,604 + \frac{4,8864}{\lambda^2} + \frac{0,068}{\lambda^4} \right) \cdot 10^{-6} \quad (3.13)$$

onde  $n_g$  = índice de refração de grupo para  $\lambda$  em microns nas condições de  $0^\circ\text{C}$ , 760 mmHg e 0,03%  $\text{CO}_2$ .

Nas condições reais de medida, temos

$$n_a = 1 + \frac{n_g - 1}{1 + \frac{t}{273,2}} \cdot \frac{p}{760} - \frac{5,5 \cdot e \cdot 10^{-8}}{1 + \frac{t}{273,2}} \quad (3.14)$$

onde

$p$  = pressão em mmHg

$t$  = temperatura em  $^{\circ}\text{C}$

$e$  = pressão do vapor d'água em mmHg

Simplificando para fins de cálculo, temos:

$$n_a = 1 + \frac{0,359474(n_g - 1) \cdot p}{273,2 + t} - \frac{1,5026 \cdot e \cdot 10^{-5}}{273,2 + t} \quad (3.15)$$

onde segundo MEADE (1972),  $0,359474(n_g - 1) = N \times 10^{-6}$ ,  
assim temos

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	N
0,5500 - lâmpada de vapor Hg	109,460
0,5650 - lâmpada de Tungstênio	109,129
0,6328 - Laser vermelho	107,925
0,9200 - Infravermelho (próximo)	105,496
0,9300 - Infravermelho (próximo)	105,450

Brunner (1976) apresenta outra relação para luz não-monocromática dada por:

$$N_g = 287,569 + 3 \left( \frac{1,6206}{\lambda^2} \right) + 5 \left( \frac{0,0139}{\lambda^4} \right) \quad (3.16)$$

Para as medidas de distância utilizando luz visível ou infravermelho, a fórmula para o cálculo da correção do índice de refração, em partes por milhão da distância, é usada na forma

$$\text{Correção (ppm)} = I - \frac{N \cdot P}{273,2 + t} + \frac{15 \cdot e}{273,2 + t} \quad (3.17)$$

onde  $I$  = índice de refração padrão (pode ser calculado pela relação  $I=c/4uf$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $u$  é a unidade de comprimento de onda e  $f$  a frequência do sinal utilizado)

$N$  = refratividade, constante para dado valor de  $\lambda$

$P$  = pressão em mmHg

$t$  = temperatura em °C

$e$  = pressão do vapor saturado em mmHg

$$\text{Correção (m)} = D \cdot \text{correção em ppm} \quad (3.18)$$

onde  $D$  é o valor da distância medida em metros.

Segundo Meade (1972) se um valor médio de 0,5 ppm é usado para a correção da umidade, o termo envolvendo  $e$  pode ser desprezado.

As correções dadas pelas equações ( 3.10) ou (3.18) deverão ser somadas algebricamente as distâncias medidas para se obter a distância corrigida dos efeitos da atmosfera.

#### 3.1.4 REDUÇÕES DA MEDIDA OBSERVADA

Após terem sido feitas as correções do índice de refração pelas relações ( 3.9 ) ou ( 3.17 ), teremos a distância corrigida do efeito de retardamento da velocidade de propagação da onda eletromagnética através das relações (3.10) ou ( 3.18 ). Outra forma para esta correção é a apresentada por Höpcke 1964,

$$\begin{aligned} K' &= D - D' = c \cdot t \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} \right) \\ &= c \cdot t \left( \frac{n_0 - n}{n \cdot n_0} \right) \approx D' (n_0 - n) \end{aligned}$$

onde  $D'$  é a distância indicada pelo aparelho com base no valor constante do índice de refração  $n_0$ ,  $c$  é a velocidade da onda eletromagnética no vácuo,  $t$  é a metade do tempo de trânsito e  $n$  o valor médio do índice de refração do percurso considerado,

$$D' = \frac{c}{n_0} \cdot t$$

Considerando-se o meio real de propagação, a distância real é dada por

$$D = D' + K'$$

ou (3.19)

$$D = D' ( 1 + \Delta n )$$

Esta equação fornece diretamente o valor da distância já corrigida dos efeitos da atmosfera, cuja correção é igual aquela dada pelas equações ( 3.10 ) ou ( 3.18 ) .

Tendo-se obtido o valor da distância corrigida do efeito de retardamento da velocidade, finalmente devemos fazer a redução geométrica da medida eletrônica .

#### 3.1.4.1 REDUÇÃO GEOMÉTRICA DA MEDIDA ELETRÔNICA

Após a correção do efeito de retardamento da velocidade, são aplicadas às medidas eletrônicas algumas reduções necessárias antes da redução ao nível do mar.

##### A. - CORREÇÃO DA CURVATURA DO PERCURSO DO RAI

A partir da figura (3.1), pode-se demonstrar que, (Höpcke, 1964)

$$s_1 = 2 \rho \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

como  $\beta = \frac{D}{\rho}$  (3.20)

$$s_1 = 2 \rho \operatorname{sen} \frac{D}{2\rho}$$

Desenvolvendo em séries para funções trigonométricas, temos

$$s_1 = D - \frac{D^3}{24 \rho^2} + \frac{D^5}{1920 \rho^4} \quad (3.21)$$

Desprezando-se a pequena contribuição do último termo,

$$S_1 = D + K_1 \quad (3.22)$$

onde  $S_1$  é o valor da corda,  $D$  a distância corrigida pela relação (3.19) e  $K_1$  a correção devido a curvatura do raio entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

A correção para a curvatura do raio é dada por

$$K_1 = - \frac{D^3}{24 \rho^2}$$

pela razão

$$k = \frac{R}{\rho} \quad (3.23)$$

chamada de coeficiente de refração, onde  $R$  e  $\rho$  são os raios da terra e curvatura respectivamente. Para a correção da curvatura um valor padrão do coeficiente de refração  $k_L$  e  $k_M$  são normalmente adotados (MEADE, 1972), assim temos

$$\begin{aligned} \text{para luz} \quad k_L &= 0,13 \text{ para observações diurnas} \\ k_L &= 0,20 \text{ para observações noturnas} \end{aligned}$$

$$\text{para microondas} \quad k_M = 0,25$$

Para cálculos detalhados do coeficiente de refração ver (HOPCKE, 1964) e (BRUNNER, 1977).

Assim pela relação (3.23) temos

$$K_1 = - \frac{D^3}{24 \rho^2} = - k^2 \frac{D^3}{24 R^2} \quad (3.24)$$

Assim, substituindo na (3.22) teremos a distância  $P_1P_2$  corrigida da curvatura. Para  $R=6400$  Km,  $D=65$  Km e usando sinal de micro-ondas, esta correção não será superior a 7 cm.

B. - CORREÇÃO PARA A INCLINAÇÃO ENTRE OS PONTOS  $P_1$  e  $P_2$

Considerando a figura 3.1, temos

$$\cos \alpha = \frac{(R + H_1)^2 + (R + H_2)^2 - S_1^2}{2(R + H_1)(R + H_2)} \quad e$$

$$\cos \alpha = \frac{2R^2 - S_2^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{S_2^2}{R^2} \right)$$

substituindo e simplificando temos

$$S_1 - S_2 = \frac{(H_1 - H_2)^2}{S_1 + S_2} + \frac{H_1 + H_2}{R(S_1 + S_2)} \cdot S_2^2 + \frac{H_1 H_2}{R^2(S_1 + S_2)} \cdot S_2^2$$

Desprezando-se o último termo pelo seu pequeno valor, temos

$$S_2 = S_1 - \frac{(H_1 - H_2)^2}{S_1 + S_2} - \frac{H_1 + H_2}{R(S_1 + S_2)} \cdot S_2^2$$

Uma aproximação geralmente adequada (HÖPCKE, 1964), é

$$S_2 = S_1 - \frac{(H_1 - H_2)^2}{2D} - \frac{H_1 + H_2}{2R} \cdot D \quad (3.25)$$

ou

$$S_2 = S_1 + K_2 + K_3$$

(MEADE, 1972) apresenta uma relação para se obter a distância diretamente sobre o geóide, partindo da distância já corrigida da curvatura e cuja diferença não é superior a  $2.10^{-5} \text{m}$  comparada com o valor obtido pela relação (3.25) para  $D=65 \text{ km}$ ,

$$s^2 = \frac{(D - \Delta H) (D - \Delta H)}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}$$

Então, teremos para a correção da inclinação

$$K_2 = - \frac{(H_1 - H_2)^2}{2 D} \quad (3.26)$$

(MEADE, 1972), alerta que o erro de uma unidade na diferença de altura, produzirá uma variação na correção da inclinação de  $\Delta H/D$ , onde  $\Delta H$  é a diferença de altura e  $D$  a distância inclinada. Assim, sobre uma linha de 5000 metros de comprimento e uma diferença de 500 metros nas alturas das estações, um erro de 1 metro na diferença de altura causará uma variação na correção da inclinação de 10 centímetros. Uma fórmula conveniente para a determinação da diferença de altura entre as duas estações é dada por

$$\Delta H = D \cos Z + \frac{(1 - k)}{2 R} \cdot D^2 \quad (3.27)$$

onde

$\Delta H$  = diferença de elevação

$D$  = distância inclinada

$Z$  = distância zenital

$k$  = coeficiente de refração

$R$  = raio de curvatura da Terra.

### C. - CORREÇÃO PARA A ALTURA SOBRE O NÍVEL DO MAR

O último termo da equação (3.25)

$$K_3 = - \frac{H_1 + H_2}{2 R} \cdot D \quad (3.28)$$

será a correção para a altura sobre o nível do mar.

Finalmente, pela figura (3.1) e pela lei dos senos, teremos que

$$D_2 = R \alpha = 2 R \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{S_2}{2R}$$

Desenvolvendo em séries para funções trigonométricas, temos

$$D_2 = S_2 + \frac{S_2^3}{24R^2} + \frac{3 S_2^5}{640R^4}$$

Desprezando a pequena contribuição do último termo, teremos

$$D_2 = S_2 + \frac{S_2^3}{24R^2}$$

ou

$$D_2 = S_2 + K_4 \quad (3.29)$$

onde  $D_2$  é a distância sobre a superfície da Terra,  $S_2$  o valor da distância sobre o nível do mar e  $K_4$  a correção devida a curvatura da Terra.

### D. - CORREÇÃO PARA A CURVATURA DA TERRA

$$K_4 = \frac{D^3}{24 R^2} \quad (3.30)$$

Para  $R=6400$  km,  $D=65$  km esta correção não será superior a 27 cm, aproximando-se a 1 mm para distâncias de 10 km.

Com as duas correções das curvaturas combinadas, teremos

$$K_1 + K_4 = (1 - k^2) \frac{D^3}{24 R^2}$$

com os valores médios de  $k_L = 0,13$  e  $k_M = 0,25$ , temos

$$K_1 + K_4 = \frac{63}{64} \frac{D^3}{24R^2} \quad \text{para luz}$$

$$K_1 + K_4 = \frac{15}{16} \frac{D^3}{24R^2} \quad \text{para microondas}$$

### 3.2 MEDIDA DE DISTÂNCIA DE CORPOS CELESTES

Devido à não uniformidade do meio, visto a variação de sua densidade, conseqüentemente a variação do índice de refração, vários autores tem apresentado modelos para a resolução da equação (1.17). A seguir apresentaremos alguns dos referidos modelos.

3.2.1 Correção da distância observada devido aos efeitos da troposfera e estratosfera nos sinais de ondas de rádio emitido por satélites artificiais.

3.2.1.1. CUBIC CORPORATION - A relação sugerida por esta entidade é dada por (Joshi, 1973)

$$\Delta s = \frac{K_1 (1 - e^{-H/K_3})}{K_2 \cos E_o + \text{Sen } E_o} \quad (3.31)$$

onde

- $\Delta s$  = correção da distância observada  
 $K_1$  = correção da refratividade vertical (=2,7 metros)  
 $K_2$  = correção da escala horizontal (= 0,0236)  
 $K_3$  = constante (altura da escala = 7000 metros)  
 $E_0$  = ângulo de elevação  
 $H$  = altura do satélite em metros.

3.2.1.2. SAASTAMOINEN(1973) - Baseado na distribuição radialmente simétrica de  $n$  para uma terra esférica, assumindo conhecidas as condições de temperatura e pressão a equação (1.17) deriva-se na expressão para a correção atmosférica da troposfera e estratosfera, da medida eletrônica observada da distância do satélite ao receptor, na forma

$$\Delta s = 0,002277 \sec Z_0 \left[ P_0 + \left( \frac{1255}{T_0} + 0,05 \right) e_0 - B \operatorname{tg}^2 Z_0 \right] + \delta_R \quad (3.32)$$

ou em termos da altitude do satélite

$$\Delta s = \frac{0,002277}{\operatorname{sen} E_0} \left[ P_0 + \left( \frac{1255}{T_0} + 0,05 \right) e_0 - \frac{B}{\operatorname{tg}^2 E_0} \right] + \delta_R \quad (3.33)$$

onde

- $\Delta s$  = é a correção da distância em metros.  
 $Z_0$  = distância zenital aparente do satélite.  
 $P_0$  = pressão atmosférica em milibares.  
 $e_0$  = pressão parcial do vapor d'água em milibares.  
 $T_0$  = temperatura absoluta em graus Kelvin.  
 $E_0$  = altitude do satélite.

O índice "o" refere-se as grandezas medidas na estação receptora.

B é uma função da altura ( $h_0$ ) da estação (da ordem da unidade) e  $\delta_R$  é usada quando  $E_0$  está entre  $10^\circ$  e  $30^\circ$  e é tabelada em função de  $E_0$  e  $h_0$  (anexo I, tabela nº 8) sendo da ordem de 0,001 m a 0,0121 m. Saastamoinen recomenda sua formula para  $E_0 > 10^\circ$  e estima erros em torno de 10 a 20 cm.

3.2.2 Para ondas de rádio propagando-se através da ionosfera, (Joshi, 1973 e Wells, 1974) a relação de Appleton Hartree para a correção do índice de refração é dada por:

$$n(r, f, t) = \left[ 1 - \frac{f_N^2(r, t)}{f^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

onde  $f_N(r, t)$  - é a frequência de ressonância do elétron plasma para o ponto  $(r, t)$ .

$$f_N(r, t) = \left[ \frac{N(r, t) e^2}{\pi m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$N(r, t)$  - é a densidade de elétrons na posição  $r$  e tempo  $t$

$e$  = carga do elétron

$m$  = massa do elétron

e  $\alpha$  é uma função complicada do valor do campo magnético da terra na posição  $r$ , da orientação do campo magnético para a direção de propagação e da frequência de propagação  $f$ .

O índice de refração ionosférico pode ser expandido em potencias inversas da frequência dado por

$$n = 1 + \frac{C_1}{f^2} + \frac{C_2}{f^3} + \dots$$

onde os  $C_i$  são funções da posição e do tempo, mas não da frequência.

Assim a contribuição ionosférica para a medida de distância é

$$\Delta s_{ij} = \int_i^j (n - 1) ds = \frac{b_1}{f^2} + \frac{b_2}{f^3} + \dots \quad (3.35)$$

onde os  $b_i$  não são funções da frequência.

Uma aplicação comum desta relação é aquela utilizada na contagem Doppler dada por

$$\Delta s_{12} = N_{\text{obs.}} - N_{\text{v\u00e1cuo}} = \frac{f_0}{c} (\Delta s_2 - \Delta s_1)$$

onde  $\Delta s_2 - \Delta s_1 = \Delta s_{12}$  representa a variação da distância do satélite ao observador no intervalo de 2 minutos TU.

Assim,

$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = \Delta s_{12} = (N_{\text{obs.}} - N_{\text{v\u00e1cuo}}) \frac{c}{f_0}$$

onde podemos ver que a correção da distância devida a refração ionosférica é uma função da correção da mesma refração na contagem Doppler válida no vácuo,

$$N_{\text{obs.}} - N_{\text{v\u00e1cuo}} = \Delta N_I = \frac{a_1}{f_0} + \frac{a_2}{f_0^2} + \dots$$

limitando-se à precisão de 1ª ordem e desprezando as correções quadráticas e de ordem superior, o problema da refração ionosférica fica resolvido com o uso de apenas duas frequências, obtendo-se assim o valor do coeficiente  $a_1$ .

Nas situações em que o satélite se aproxima do observador a correção ionosférica é negativa e quando ele se afasta é positiva.

3.2.3 Nos casos onde o sinal LASER é utilizado, a correção devida a refração troposférica pode ser dada pelas seguintes relações:

3.2.3.1. GODDARD SPACE FLIGHT CENTER - esta organização usa uma relação simples para a correção da distância eletrônica observada dada por (Joshi, 1973)

$$\Delta s = \frac{2,10}{\text{sen } E_0} \quad (3.36)$$

onde

$\Delta s$  = correção a ser subtraída da distância observada em metros.

$E_0$  = altitude do satélite.

3.2.3.2 LEHR (1967) - Recomenda uma relação para a correção do efeito da refração atmosférica na medida eletrônica observada, baseada na pressão, temperatura e altura da estação de observação dada por:

$$\Delta s = \frac{2,238 + 0,0414 (P_0/T_0) - 0,238 H_0}{\text{sen } E_0 + 10^{-3} \text{cotg } E_0} \quad (3.37)$$

onde  $\Delta s$  = correção da distância observada em metros.

$P_0$  = pressão atmosférica em milibares.

$T_0$  = temperatura em Kelvin.

$H_0$  = altura da estação acima do nível do mar em km.

$E_0$  = altitude do satélite.

3.2.3.3 SAASTAMOINEN (1973) - com o mesmo tratamento discutido anteriormente no modelo 3.2.1.2, Saastamoinen chegou a uma expressão para a correção atmosférica da troposfera e estratosfera da medição eletrônica observada dada pela forma:

$$\Delta s = 0,002357 \sec Z (P_0 + 0,06 e_0 - B \operatorname{tg}^2 Z) + \delta_L \quad (3.38)$$

onde

$\Delta s$  = correção da distância observada em metros.

$Z$  = distância zenital aparente do satélite.

$P_0$  = pressão atmosférica em milibares.

$e_0$  = pressão parcial do vapor d'água em milibares.

$B$  e  $\delta_L$  = são também dadas pela tabela nº 8 do anexo I, da mesma forma descrita anteriormente.

O coeficiente numérico do primeiro termo foi calculado para um comprimento de onda de 0,6943 microns para um sistema Laser rubi.

Para outros sistemas Laser este coeficiente pode ser calculado pela relação:

$$\frac{0,39406 (173,3 + \frac{1}{\lambda^2})}{(173,3 - \frac{1}{\lambda^2})^2} \quad (3.39)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do sistema expresso em microns.

O modelo de Saastamoinen estima erros em torno de 1 a 2 cm na correção da distância observada para distâncias zenitais não superiores a 80 graus.

## CONCLUSÕES

Devido às constantes mudanças dos fatores atmosféricos e a impossibilidade de se obter estes fatores em todos os pontos entre o observador e o objeto, é que se desenvolveram vários modelos para as correções dos efeitos da atmosfera nas observações de direção e nas medidas eletrônicas de distância. Como o nosso conhecimento do estado físico da atmosfera superior é insuficiente para indicar a dependência precisa do índice de refração com a distância geocêntrica, somos assim, forçados a tratar a equação geral da refração (equação 2.7) por métodos aproximados.

Um modelo para a determinação da refração em observações angulares baseado numa atmosfera formada por camadas planas estratificadas é aquele dado por Comstocks (equação 2.6) o qual, entre os mais simples é o que melhor se aproxima dos valores fornecidos pela tabela 9 do anexo I, adotada como padrão. As diferenças observadas foram de  $0,7''$  de arco para distância zenital de  $70^\circ$ , decrescendo com o decréscimo desta. Um modelo para a solução da equação geral é aquele apresentado por Andrade (equação 2.27) à partir de uma atmosfera simplificada definida por uma superfície dióptrica. Este modelo fornece os melhores valores ao serem comparados com a tabela 9. Nas mesmas condições da referida tabela este modelo apresentou uma diferença máxima de  $0,3''$  de arco para distância zenital de  $72^\circ$ , diferença nula para distância zenital de  $76^\circ$  e diferença superior a  $1,0''$  de arco para distância zenital de  $80^\circ$ , aumentando com a aproximação da horizontal.

O padrão adotado para a refração fotogramétrica é dado pelo modelo de Schut 1969, cujos valores são apresentados na tabela 4 do anexo I. Para a determinação desta refração, entre os modelos apresentados o que melhor se aproxima do padrão é aquele dado por Andrade (equação 2.59) cuja aproximação não excede a  $0,06''$  de arco do valor dado pela tabela 4 para altura de vôo de 3 km, decrescendo para outras alturas.

Nas medidas eletrônicas de distância de corpos sôbre a superfície terrestre, teremos que após a correção dos efeitos da troposfera através das relações (3.10), (3.18) ou (3.19), reduzi<sub>l</sub>as geometricamente até se obter a distância ao nível do mar (equação 3.25), para finalmente se ter a distância sôbre a superfí<sub>c</sub>ie terrestre através da equação (3.29).

Nas medidas eletrônicas de distância de corpos celes-<sub>t</sub>es a equação (1.17) é a equação geral para a correção da refra-<sub>ç</sub>ão na distância eletrônica observada, para cuja solução são a-<sub>p</sub>resentados vários modelos sendo os mesmos dados para diferentes tipos de sinais utilizados. Para sinais de ondas de rádio, a cor-<sub>r</sub>eção dos efeitos da troposfera e estratosfera é dada pela equa-<sub>ç</sub>ão (3.32) a qual dos modelos apresentados é a que fornece os me-<sub>l</sub>hores resultados; seu autor estima erros em torno de 10 a 20 cm para corpos celestes com altitudes superiores a  $10^{\circ}$ . Para a cor-<sub>r</sub>eção dos efeitos da ionosfera nos sinais de ondas de rádio, a diferença de distância é dada pela equação (3.35). Para sinais de laser, o modelo dado por Saastamoinen (equação 3.38) estima um erro máximo de 3,4 cm na correção da distância medida devido a troposfera, para distância zenital observada de  $80^{\circ}$  e conclui que o erro padrão na correção da distância será de 1 a 2 cm. De-<sub>v</sub>ido ao fato de que não são observados efeitos da refração ionos-<sub>f</sub>érica sobre as medidas realizadas com laser, e que o vapor d'a-<sub>g</sub>ua tem pequeno efeito sobre elas, é que a correção da refração atmosférica nas medidas com laser está entre 2 e 6 metros, poden-<sub>d</sub>o seu valor ser determinado em torno de 1 por cento. (Lehr, 1969)

## APENDICE I

TABELA 1

REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA PARA MODELO ATMOSFÉRICO - ARDC  
1959 - (Intervalo de calculo - 1000 metros)

Z	$\rho$	$\rho'$	$\rho'Z/2$	$\Sigma$	$\frac{1}{Z} \Sigma$	$\frac{226}{Z} \Sigma$ (microrad)
500	1.225	0.113	28	14	0.028	6.4
1,500	1.112	0.105	79	121	0.081	18.3
2,500	1.007	0.098	121	321	0.129	29.1
3,500	0.909	0.090	157	599	0.172	38.8
4,500	0.819	0.083	186	942	0.210	47.5
5,500	0.736	0.076	210	1,338	0.244	55.1
6,500	0.660	0.070	228	1,776	0.274	61.9
7,500	0.590	0.064	241	2,245	0.300	67.8
8,500	0.526	0.059	249	2,735	0.322	72.8
9,500	0.467	0.054	255	3,239	0.341	77.1
10,500	0.413	0.049	256	3,750	0.357	80.7
11,500	0.365	0.053	304	4,310	0.375	84.8
12,500	0.312	0.045	283	4,897	0.392	88.6
13,500	0.267	0.039	262	5,442	0.403	91.1
14,500	0.228	0.033	240	5,944	0.410	92.7
15,500	0.195	0.028	218	6,402	0.413	93.3
16,500	0.166	0.024	200	6,820	0.413	93.3
17,500	0.142	0.021	181	7,201	0.412	93.1
18,500	0.122	0.018	163	7,545	0.408	92.2
19,500	0.104	0.015	147	7,855	0.403	91.1
20,500	0.089	0.013	132	8,137	0.397	89.7
	0.076					

TABELA 2

REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA PARA MODELO ATMOSFÉRICO - ARDC  
1959 - (Intervalo de calculo - 3000 metros)

Z	$\rho$	$\rho'$	$\rho'Z/2$	$\Sigma$	$\frac{1}{Z} \Sigma$	$\frac{226}{Z} \Sigma$ (microrad.)
20,500	0.1040	0.0390	400	8,137	0.397	89.7
23,500	0.0650	0.0244	287	8,824	0.375	84.7
26,500	0.0406	0.0159	211	9,320	0.352	79.6
29,500	0.0247	0.0095	140	9,670	0.328	74.1
32,500	0.0152	0.0056	91	9,900	0.305	68.9
35,500	0.0096	0.0035	62	10,050	0.283	64.0
38,500	0.0061	0.0021	40	10,150	0.264	59.7
41,500	0.00400	0.00136	28	10,220	0.246	55.6
44,500	0.00264	0.00087	19	10,270	0.231	52.2
47,500	0.00177	0.00055	13	10,310	0.217	49.0
50,500	0.00122	0.00037	9	10,330	0.205	46.3
53,400	0.00085	0.00024	6	10,340	0.193	43.6
56,500	0.00061	0.00020	6	10,350	0.183	41.3
59,500	0.00041	0.00010	3	10,360	0.174	39.3
62,500	0.00031	0.00009	3	10,370	0.166	37.5
65,500	0.00022	0.00007	2	10,370	0.158	35.7
68,500	0.00015	0.00005	2	10,380	0.152	34.4
71,500	0.00010	0.00004	1	10,380	0.145	32.8
74,500	0.00006	0.00002	1	10,380	0.139	31.4
77,500	0.00004	0.00002	1	10,380	0.134	30.3
80,500	0.00002	0.00000	0	10,380	0.129	29.1

TABELA 3

Tabela calculada pelas relações (2.35), assumindo-se  $\rho$  do modelo atmosférico ARDC - 1959 .

Z	$\rho$	R	I
0	1,225	276,8	0
1	1,112	251,3	264,0
2	1,007	227,5	503,4
3	0,909	205,4	719,9
4	0,819	185,1	915,1
5	0,736	166,3	1090,8
6	0,660	149,16	1248,7
7	0,590	133,34	1390,1
8	0,526	118,88	1516,1
9	0,467	105,54	1628,3
10	0,413	93,34	1727,8
11	0,365	82,49	1815,7
12	0,312	70,51	1892,2
13	0,267	60,34	1957,5
14	0,228	51,53	2013,5
15	0,195	44,07	2061,3
16	0,166	37,52	2102,1
17	0,142	32,09	2136,9
18	0,122	27,57	2166,8
19	0,104	23,50	2192,3
20	0,089	20,11	2214,1
21	0,076	17,18	2237,7
22	0,0650	14,69	2248,7
25	0,0406	9,18	2260,6
28	0,0247	5,58	2268,0
31	0,0152	3,44	2272,5
34	0,0096	2,17	2275,3
37	0,0061	1,38	2277,1
40	0,00400	0,90	2278,2
43	0,00264	0,60	2278,9
46	0,00177	0,40	2279,4
49	0,00122	0,28	2279,8

TABELA 4

## REFRAÇÃO FOTOGRAFÉTRICA EM MICRORADIANOS PARA

 $\alpha = 45^\circ$  - U.S.STANDARD ATMOSPHERE, 1962. (Schut,1969).

Altura de vôo acima do nível do mar	Refração Fotogramétrica para alturas do solo em quilômetros				Altura de vôo acima do nível do mar	Refração Fotogramétrica para alturas do solo em quilômetros			
	0,0	1,0	2,0	4,0		0,0	1,0	2,0	4,0
0,5km.	6,5				23km.	85,8	78,3	71,2	58,4
1,0	12,6	0,0			24	84,0	76,7	69,8	57,2
1,5	18,5	6,0			25	82,2	75,0	68,2	56,0
2,0	24,1	11,7	0,0		26	80,3	73,3	66,7	54,8
2,5	29,3	17,1	5,6		27	78,4	71,6	65,1	53,5
3,0	34,3	22,3	10,9		28	76,6	69,8	63,6	52,2
3,5	39,0	27,1	15,9		29	74,7	68,2	62,0	50,9
4,0	43,5	31,7	20,6	0,0	30	72,9	66,5	60,5	49,6
4,5	47,7	36,1	25,1	4,8	31	71,2	64,8	59,0	48,3
5,0	51,6	40,2	29,3	9,2	32	69,4	63,3	57,5	47,1
5,5	55,3	44,0	33,3	13,5	34	66,1	60,2	54,7	44,8
6,0	58,8	47,6	37,0	17,5	36	63,0	57,4	52,1	42,6
6,5	62,1	51,0	40,6	21,3	38	60,1	54,7	49,6	40,5
7,0	65,1	54,2	43,9	24,8	40	57,4	52,2	47,3	38,5
7,5	67,9	57,2	47,0	28,2	42	54,9	49,8	45,1	36,7
8,0	70,6	59,9	49,8	31,3	44	52,6	47,7	43,1	35,0
8,5	73,0	62,5	52,5	34,2	46	50,4	45,7	41,3	33,5
9,0	75,2	64,9	55,0	37,0	48	48,4	43,8	39,6	32,1
9,5	77,3	67,1	57,3	39,5	50	46,5	42,1	38,0	30,7
10,0	79,2	69,1	59,5	41,9	52	44,8	40,5	36,5	29,5
10,5	80,9	70,9	61,5	44,1	54	43,2	39,0	35,2	28,4
11,0	82,5	72,6	63,3	46,1	56	41,7	37,6	33,9	27,3
11,5	85,0	75,2	66,0	49,0	58	40,3	36,3	32,7	26,3
12,0	87,1	77,4	68,3	51,5	60	38,9	35,1	31,6	25,4
12,5	88,8	79,2	70,2	53,7	62	37,7	34,0	30,6	24,5
13,0	90,2	80,8	71,8	55,5	64	36,5	32,9	29,6	23,7
13,5	91,3	82,0	73,2	57,0	66	35,4	31,9	28,7	23,0
14,0	92,2	83,0	74,2	58,2	68	34,4	31,0	27,8	22,2
14,5	92,8	83,7	75,1	59,2	70	33,4	30,1	27,0	21,6
15,0	93,3	84,2	75,7	60,1	72	32,5	29,2	26,2	21,0
15,5	93,5	84,6	76,2	60,7	74	31,6	28,4	25,5	20,4
16,0	93,6	84,8	76,5	61,2	76	30,8	27,7	24,8	19,8
16,5	93,6	84,9	76,6	61,5	78	30,0	27,0	24,2	19,3
17,0	93,4	84,8	76,6	61,7	80	29,2	26,3	23,6	18,8
17,5	93,2	84,6	75,5	61,8	82	28,5	25,6	23,0	18,3
18,0	92,8	84,3	76,4	61,8	84	27,9	25,0	22,4	17,8
18,5	92,3	84,0	76,1	61,7	86	27,2	24,4	21,9	17,4
19,0	91,8	83,5	75,7	61,5	88	26,6	23,9	21,4	17,0
19,5	91,2	83,0	75,3	61,3	90	26,0	23,3	20,9	16,6
20,0	90,5	82,4	74,8	61,0					
21,0	89,1	81,2	73,8	60,3	Z > 90	$\frac{2,340}{Z}$	$\frac{2,076}{Z-1}$	$\frac{1,837}{Z-2}$	$\frac{1,426}{Z-4}$
22,0	87,5	79,8	72,6	59,4					

TABELA 5

REFRAÇÃO FOTOGRAFÉTRICA PARA O MODELO ATMOSFÉRICO  
 LATITUDE 50° N (Pontos ao nível do mar,  $\alpha = 45^\circ$ )

$Z_s$ (km)	$(n-1) \times 10^6$	$\zeta$ (km)	$\epsilon$ (rad $\times 10^6$ )	$\epsilon''$
0	283.31	0	0.00	0.00
0.2	277.72	0.10000	2.79	0.58
0.4	272.21	0.19928	5.53	1.14
0.6	266.80	0.29782	8.19	1.69
0.8	261.47	0.39597	10.81	2.23
1	256.22	0.49365	13.37	2.76
1.5	243.46	0.73583	19.54	4.03
2	231.21	0.97429	25.37	5.23
2.5	219.45	1.20922	30.88	6.37
3	208.16	1.44069	36.08	7.44
3.5	197.34	1.66841	40.97	8.45
4	186.96	1.89200	45.56	9.40
4.5	177.02	2.11312	49.90	10.29
5	167.50	2.32988	53.95	11.13
5.5	158.38	2.54305	57.75	11.91
6	149.66	2.75229	61.29	12.64
7	133.36	3.15967	67.67	13.96
8	118.49	3.55126	73.15	15.09
9	109.95	3.92693	77.81	16.05
10	92.66	4.28619	81.70	16.85
10.5	86.96	4.45932	83.37	17.20
12	68.90	5.03131	89.88	18.54
14	50.52	5.66048	94.11	19.41
16	37.04	6.17169	94.98	19.59
18	27.15	6.58976	93.77	19.34
20	19.91	6.93088	91.27	18.82
25	9.16	7.54138	82.69	17.06
30	4.22	7.89465	73.43	15.15
35	1.94	8.09403	65.06	13.42
40	0.89	8.20336	57.91	11.95
50	0.19	8.29434	46.96	9.69
60	0.04	8.31907	39.27	8.10
70	0.01	8.32507	33.69	6.95
80	0.00	8.32743	29.49	6.08
90	0.00	8.32743	26.21	5.41

TABELA 6

## REFRAÇÃO FOTOGRAFÉTRICA PARA O MODELO ATMOSFÉRICO

ARDC - 1959 - (Pontos ao nível do mar,  $\alpha = 45^\circ$ )

$Z_s$ (km)	$(n-1) \times 10^6$	$\zeta$ (km)	$\epsilon$ (rad $\times 10^6$ )	$\epsilon''$
0.0	276.85	0	0	0
1.0	251.31	0.50000	12.77	2,63
2.0	227.58	0.98163	24.18	4.99
3.0	205.43	1.45253	34.57	7.13
4.0	185.09	1.90639	43.72	9.02
5.0	166.34	2.34644	51.85	10.69
6.0	149.16	2.77073	58.95	12.16
7.0	133.34	3.18183	65.22	13.45
8.0	118.88	3.57710	70.62	14.57
9.0	105.54	3.96045	75.37	15.55
10.0	93.34	4.32873	79.42	16.38
11.0	82.49	4.67324	82.56	17.03
12.0	70.51	5.06959	87.16	17.98
13.0	60.34	5.41862	90.23	18.61
14.0	51.53	5.73460	92.28	19.03
15.0	44.07	6.01561	93.34	19.25
16.0	37.52	6.27508	93.85	19.36
17.0	32.09	6.50192	93.60	19.31
18.0	27.57	6.70134	92.79	19.14
19.0	23.50	6.89088	91.87	18.95
20.0	20.11	7.05737	90.55	18.68
21.0	17.18	7.20905	89.13	18.38
22.0	14.69	7.34479	87.51	18.05
25.0	9.18	7.67735	82.19	16.95
28.0	5.58	7.92714	76.79	15.84
31.0	3.44	8.09599	71.39	14.73
34.0	2.17	8.20882	66.31	13.68
37.0	1.38	8.28709	61.69	12.72
40.0	.90	8.33964	57.53	11.87
43.0	.60	8.37566	53.80	11.10
46.0	.40	8.39265	50.43	10.40
49.0	.27	8.41103	47.47	9.79
52.0	.19	8.42321	44.81	9.24
55.0	.14	8.43135	42.41	8.75
58.0	.09	8.44004	40.27	8.31

TABELA 6 (Continuação)

$z_s$ (km)	$(n-1) \times 10^6$	$\zeta$ (km)	$\epsilon$ (rad $\times 10^6$ )	$\epsilon''$
61.0	.07	8.44373	38.31	7.90
64.0	.05	8.44764	36.53	7.54
67.0	.03	8.45176	34.91	7.20
70.0	.02	8.45393	33.43	6.90
73.0	.01	8.45621	32.06	6.61
400.0	.00	8.45829	5.85	1.21
600.0	.00	8.45829	3.90	.80

TABELA 7

REFRAÇÃO FOTOGRAFÉTRICA PARA DIFERENTES ELEVAÇÕES DO TERRENO. MODELO ATMOSFÉRICO U.S. STANDARD ATMOSPHERE, 1962 -  $\alpha = 45^\circ$

$Z_p$ (km)	0.0		1.0		2.0		3.0		4.0	
	rad	$\times 10^6$ cc								
1	12.77	8								
2	24.17	15	11.86	8						
3	34.57	22	22.54	14	11.07	7				
4	43.72	28	31.97	20	20.79	13	10.17	6		
5	51.85	33	40.38	26	29.48	19	19.14	12	9.37	6
6	58.95	38	47.77	30	37.14	24	27.08	17	17.57	11
7	65.22	42	54.30	35	43.95	28	34.15	22	24.89	16
8	70.62	45	59.97	38	49.88	32	40.33	26	31.32	20
9	75.37	48	64.98	41	55.14	35	45.84	29	37.06	24
10	79.42	51	69.28	44	59.68	38	50.61	32	42.07	27
20	90.55	58	82.51	53	74.48	48	67.77	43	61.06	33

TABELA 8

CORREÇÃO DO TERMO  $\delta L$  EM METROS, PARA A  
CORREÇÃO TROPOSFÉRICA DA DISTÂNCIA (  $\delta L \approx \delta R$  )

Distância Zenital Aparente	Altura da estação acima do nível do mar em quilômetros.							
	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
60°00'	+0,003	+0,003	+0,002	+0,002	+0,002	+0,002	+0,001	+0,001
66 00	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002
70 00	0,012	0,011	0,010	0,009	0,008	0,006	0,005	0,004
73 00	0,020	0,018	0,017	0,015	0,013	0,011	0,009	0,007
75 00	0,031	0,028	0,025	0,023	0,021	0,017	0,014	0,011
76 00	0,039	0,035	0,032	0,029	0,026	0,021	0,017	0,014
77 00	0,050	0,045	0,041	0,037	0,033	0,027	0,022	0,018
78 00	0,065	0,059	0,054	0,049	0,044	0,036	0,030	0,024
78 30	0,075	0,068	0,062	0,056	0,051	0,042	0,034	0,028
79 00	0,087	0,079	0,072	0,065	0,059	0,049	0,040	0,033
79 30	0,102	0,093	0,085	0,077	0,070	0,058	0,047	0,039
79 45	0,111	0,101	0,092	0,083	0,076	0,063	0,052	0,043
80 00	0,121	0,110	0,100	0,091	0,083	0,068	0,056	0,047

VALORES PADROËS DE B PARA A CORREÇÃO  
TROPOSFÉRICA DA DISTÂNCIA

Altura da estação acima do nível do mar (km)	B (mb)
0	1,156
0,5	1,079
1	1,006
1,5	0,938
2	0,874
2,5	0,813
3	0,757
4	0,654
5	0,563

## TABELA 9

## REFRAÇÃO MÉDIA

Pressão = 760 mmHg, Temperatura = 10°C, Umidade relativa=60%

z	00'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
0	0.0	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	1.0
1	1.0	1.2	1.3	1.5	1.7	1.9	2.0
2	2.0	2.2	2.4	2.5	2.7	2.9	3.0
3	3.0	3.2	3.4	3.5	3.7	3.9	4.0
4	4.0	4.2	4.4	4.6	4.7	4.9	5.1
5	5.1	5.2	5.4	5.6	5.7	5.9	6.1
6	6.1	6.3	6.4	6.6	6.8	6.9	7.1
7	7.1	7.3	7.5	7.6	7.8	8.0	8.1
8	8.1	8.3	8.5	8.7	8.8	9.0	9.2
9	9.2	9.3	9.5	9.7	9.9	10.0	10.2
10	10.2	10.4	10.6	10.7	10.9	11.1	11.3
11	11.3	11.4	11.6	11.8	12.0	12.1	12.3
12	12.3	12.5	12.7	12.8	13.0	13.2	13.4
13	13.4	13.5	13.7	13.9	14.1	14.3	14.4
14	14.4	14.6	14.8	15.0	15.2	15.3	15.5
15	15.5	15.7	15.9	16.1	16.2	16.4	16.6
16	16.6	16.8	17.0	17.2	17.3	17.5	17.7
17	17.7	17.9	18.1	18.3	18.4	18.6	18.8
18	18.8	19.0	19.2	19.4	19.6	19.8	19.9
19	19.9	20.1	20.3	20.5	20.7	20.9	21.1
20	21.1	21.3	21.5	21.7	21.8	22.0	22.2
21	22.2	22.4	22.6	22.8	23.0	23.2	23.4
22	23.4	23.6	23.8	24.0	24.2	24.4	24.6
23	24.6	24.8	25.0	25.2	25.4	25.6	25.8
24	25.8	26.0	26.2	26.4	26.6	26.8	27.0
25	27.0	27.2	27.4	27.6	27.8	28.0	28.2
26	28.2	28.4	28.7	28.9	29.1	29.3	29.5
27	29.5	29.7	29.9	30.1	30.4	30.6	30.8
28	30.8	31.0	31.2	31.4	31.7	31.9	32.1
29	32.1	32.3	32.5	32.8	33.0	33.2	33.4
30	33.4	33.6	33.9	34.1	34.3	34.6	34.8
31	34.8	35.0	35.2	35.5	35.7	35.9	36.2
32	36.2	36.4	36.6	36.9	37.1	37.4	37.6
33	37.6	37.8	38.1	38.3	38.6	38.8	39.0
34	39.0	39.3	39.5	39.8	40.0	40.3	40.5
35	40.5	40.8	41.0	41.3	41.5	41.8	42.1
36	42.1	42.3	42.6	42.8	43.1	43.3	43.6
37	43.6	43.9	44.1	44.4	44.7	44.9	45.2
38	45.2	45.5	45.8	46.0	46.3	46.6	46.9
39	46.9	47.1	47.4	47.7	48.0	48.3	48.6
40	48.6	48.8	49.1	49.4	49.7	50.0	50.3
41	50.3	50.6	50.9	51.2	51.5	51.8	52.1
42	52.1	52.4	52.7	53.0	53.3	53.6	54.0
43	54.0	54.3	54.6	54.9	55.2	55.5	55.9
44	55.9	56.2	56.5	56.9	57.2	57.5	57.9
45	57.9	58.2	58.5	58.9	59.2	59.6	59.9
46	59.9	60.2	60.6	61.0	61.3	61.7	62.0
47	62.0	62.4	62.8	63.1	63.5	63.9	64.2
48	64.2	64.6	65.0	65.4	65.7	66.1	66.5
49	66.5	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	68.9
50	68.9	69.3	69.7	70.1	70.6	71.0	71.4
51	71.4	71.8	72.2	72.7	73.1	73.6	74.0
52	74.0	74.4	74.9	75.3	75.8	76.2	76.7
53	76.7	77.2	77.6	78.1	78.6	79.1	79.5
54	79.5	80.0	80.5	81.0	81.5	82.0	82.5
55	82.5	83.0	83.5	84.1	84.6	85.1	85.6
56	85.6	86.2	86.7	87.3	87.8	88.4	88.9
57	88.9	89.5	90.1	90.7	91.2	91.8	92.4
58	92.4	93.0	93.6	94.2	94.8	95.5	96.1
59	96.1	96.7	97.4	98.0	98.6	99.3	100.0
60	100.0	100.6	101.3	102.0	102.7	103.4	104.1
61	104.1	104.8	105.5	106.3	107.0	107.7	108.5
62	108.5	109.2	110.0	110.8	111.6	112.4	113.2
63	113.2	114.0	114.8	115.6	116.5	117.3	118.2
64	118.2	119.0	119.9	120.8	121.7	122.6	123.5
65	123.5	124.5	125.4	126.4	127.4	128.3	129.3
66	129.3	130.3	131.4	132.4	133.4	134.5	135.6
67	135.6	136.7	137.8	138.9	140.0	141.2	142.3
68	142.3	143.5	144.7	145.9	147.2	148.4	149.7
69	149.7	151.0	152.3	153.6	155.0	156.4	157.8
70	157.8	159.2	160.6	162.1	163.6	165.1	166.6
71	166.6	168.2	169.7	171.4	173.0	174.7	176.3
72	176.3	178.1	179.8	181.6	183.4	185.3	187.2
73	187.2	189.1	191.0	193.0	195.1	197.1	199.2
74	199.2	201.4	203.6	205.8	208.1	210.4	212.8
75	212.8	215.2	217.7	220.2	222.8	225.5	228.2
76	228.2	230.9	233.7	236.6	239.6	242.6	245.7
77	245.7	248.9	252.1	255.4	258.9	262.3	265.9
78	265.9	269.6	273.4	277.2	281.2	285.3	289.5
79	289.5	293.8	298.2	302.8	307.5	312.3	317.3
80	317.3	322.4	327.7	333.2	338.8	344.6	350.6
81	350.6	356.8	363.2	369.8	376.6	383.7	391.1
82	391.1	398.7	406.6	414.8	423.3	432.1	441.3
83	441.3	450.9	460.9	471.2	482.0	493.3	505.1
84	505.1	517.4	530.3	543.8	558.0	572.8	588.4
85	588.4	604.4	621.6	639.7	658.8	678.9	700.2
86	700.2	722.7	746.6	771.8	798.7	827.2	857.6
87	857.6	890.0	924.7	961.6	1,001.3	1,043.9	1,089.7
88	1,089.7	1,138.9	1,192.0	1,249.2	1,311.4	1,378.6	1,452.0
89	1,452.0	1,531.7	1,618.8	1,714.0	1,818.4	1,933.1	2,059.5

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, M. e FINN, E.J., - Física-Um curso universitário, Vol. II, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo - 1972.
- AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY, - Manual of Photogrammetry, 3rd edition, Vol. I, p.396, Virginia - 1966, // Apud.//
- ANDRADE, J.B., - Photogrammetric Refraction, PhD Dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1977.
- ANDRADE, J.B., - Photogrammetric Refraction, PhD Dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, - 1977.
- ANDRADE, J.B., - Refração nas Observações Angulares, 9º Congresso Brasileiro de Cartografia, UFPr., Curitiba - Paraná 1979.
- ANUNCIAÇÃO, P.E.M., - Equação da Pressão do Vapor Saturado, Dissertação de Mestrado, UFPr., Curitiba - Paraná, 1978.
- BALDINI, A.A., - Formulae for Computing Atmospheric Refraction for Objects Inside or Outside the Atmosphere, GIMRADA, Research Note, 8 - 1963, // Apud.//, JOSHI, C.S., Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192 - NASA, Ohio State University, Columbus - Ohio, - 1973.
- BERTRAM, S., - Atmospheric Refraction, Photogrammetric Engineering Vol. XXXII, nº 1, p. 76-84, - 1966.
- BERTRAM, S., - Atmospheric Refraction in Aerial Photogrammetry, Discussion Paper in : Photogrammetric Engineering, Vol. XXXV, nº 6, p.150, - 1969.
- BURNSIDE, C.D., - Electromagnetic Distance Measurement, Crosby Lockwood e Son Ltda, London - 1971.
- BRUNNER, F.K. e ANGUS-LEPPAN, P.V., - On the Significance Of Meteorological Parameters For Terrestrial, Unisurv G nº 25, p.95-108, University of New South Wales, Sydney, Austrália - 1976.
- BRUNNER, F.K., - On the Refraction Coefficient of Microwaves, Bulletin Geodésique nº 51, p.257-264, - 1977.

- CAILLEMER, A.- Astronomie de Position, Geodésie, Societe des Editions Tecnip, Paris - 1971.
- CHAUVENET, W.,- A Manual of Spherical and Practical Astronomy, Vol.1, J.B. Lippincott Co. - Philadelphia-1891.
- DOUBEK, A.,- Levantamentos Eletrônicos, 1ª e 2ª partes, Universidade Federal do Paraná - 1974.
- EDLÉN, B.,- The Dispersion of Standard Air, J.Opt.Soc.Amer., 43, n°5 p.339 - 344, - 1953, // Apud.//, BRUNNER, F.K.,- On the Refraction Coefficient of Microwaves, Bulletin Geodésique n° 51, p.257 -264,- 1977.
- ESSEN, L. e FROOME, K.D.,- The refractive indices and dielectric constants of air and its principal constituents at 24 000 Mc/s. Proc.Phys.Soc.(London), B-64, p. 862-875, 1951, // Apud.//, BRUNNER, F.K.,- On the Refraction Coefficient of Microwaves, Bulletin Geodésique n°51, p. 257-264, - 1977.
- FRIBERG JR., C.R.,- Short Range Electromagnetic Measurements for Surveying and Geodesy, Ohio State University, 1971.
- GEMAEL, C.,- Introdução a Geodésia Celeste, 1ª parte, Universidade Federal do Paraná, Curitiba- Paraná,- 1975.
- HOPCKE, W.,- On the Curvature of Electromagnetic Waves and its Effect on Measurement of Distance - Survey Review XVIII (141)p. 289 - 312, 1966 - Translated from Zeitschrift für Vermessungswesen, VI, n°89, p.183 - 200, 1964.
- JOSHI, C.S., - Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192 - NASA- Ohio State University, Columbus, Ohio - 1973.
- LEHR, C.G.,- Atmospheric Correction to Laser Observations, S.A.O. Memorandum dated 1, November, 1967. Corrected 2 January 1968, // Apud.//, JOSHI, C.S., Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192- NASA- Ohio State University, Columbus- Ohio, 1973.

- LEHR, C.G., et al. - Satellite Ranging With Laser and the Correction for Atmosphere Refraction. International Symposium - Figure of the Earth and Refraction, Vienna, March, 1967, // Apud.//, JOSHI, C.S., Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192 - NASA - Ohio State University, Columbus- Ohio, 1973.
- MEADE, B.K., - Precision In Electronic Distance Measuring, Surveying and Mapping, Vol. XXXII, n<sup>o</sup>1, 1972.
- MUELLER I., - Introduction to Satellite Geodesy, Frederick Ungar Publishing Co., Inc. - USA - 1964.
- MUELLER, I., - Spherical and Practical Astronomy As Aplied to Geodesy, Frederick Ungar Publishing Co., Inc. NY, 1969.
- NASSAU, J.J., - Corrections to Observations, McGraw-Hill Co., Inc., NY - 1948.
- OTERMA, L., - Computing the Refraction for the Vaisala Astronomical Method of Triangulation. Astronomia - Optika Institacio, Universitato de Turku, Informo, 20, Turku 1960, // Apud.//, JOSHI, C.S., Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192 - NASA - Ohio State University, Columbus- Ohio, 1973.
- ROSSI, B., - Fundamentos de Optica, Editorial Reverté SA - Barcelona, 1966.
- SAASTAMOINEN, J., - Contributions to the Theory of Atmospheric Refraction, 1<sup>a</sup> parte. Bulletin Geodésique, n<sup>o</sup> 105, p. 279-298, - 1972.
- SAASTAMOINEN, J., - Refraction, Photogrammetric Engineering, Vol. XXXVIII, n<sup>o</sup>8, p.799-810, - 1972.
- SAASTAMOINEN, J., - Contributions to the Theory of Atmospheric Refraction, 2<sup>a</sup> parte. Bulletin Geodésique, n<sup>o</sup> 107, p. 13-34, - 1973.
- SAASTAMOINEN, J., - Local Variation of Photogrammetric Refraction Photogrammetric Engineering, Vol. XL, n<sup>o</sup>3, p.295-301, 1974.

- SCHUT, G.H., - Photogrammetric Refraction, Photogrammetric Engineering, vol. XXXV, nº1, p. 79-86, 1969.
- SMART, W.M., - Text-Book on Spherical Astronomy, 4ª edição, Cambridge University Press, London, NY, 1960.
- SMITH JR., E.K. and WEINTRAUB, S., - The Constants in the Equation for Atmospheric Refractive Index at Radio Frequencies - Proc. IRE, vol. 41, nº 8, August, 1953, // Apud. //,
- JOSHI, C.S., - Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies, Report 192, NASA - Ohio State University, Columbus - Ohio, 1973.
- WELLS, D.E., - Doppler Satellite Control, Department of Surveying Engineering. Technical Report, nº 29 - 1974.