HELOISA MILENA MODTKOSKI

CONCEITO MATEMÁTICO X ALGORITMO: CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO OU SIMPLES MECANIZAÇÃO?

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação no curso de Pós- Graduação em Educação, setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Profª Drª Ettiène Cordeiro Guérios

CURITIBA
2016

Catalogação na publicação
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

Modtkoski, Heloisa Milena.
Conceito matemático x algoritmo: construção do conhecimento ou simples mecanização? – Curitiba, 2016.
158 f.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ettiène Cordeiro Guérios
Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná.

1. Algoritmos. 2. Conhecimento. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Mecanização. I.Título.

CDD 507

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Educação
Programa de Pós-graduação em Educação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ M E C PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO 1912 MESTRADO E DOUTORADO SETOR DE EDUCAÇÃO

PARECER

Defesa de Dissertação de Heloisa Milena Modtkoski para obtenção do Título de MESTRA EM EDUCAÇÃO. Os abaixo assinados, Prof.ª Dr.ª Ettiène Cordeiro Guérios, Prof. Dr. Ricardo Antunes de Sá, Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, Prof.ª Dr.ª Leônia Gabardo Negrelli, arguiram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Dissertação: "CONCEITO MATEMÁTICO X ALGORITMO: CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO OU SIMPLES MECANIZAÇÃO?".

Procedida a arguição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está Apta ao Título de MESTRA EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Prof.ª Dr.ª Ettiène Cordeiro Guérios	Ettiène Guérios	Aprovada
Prof. Dr. Ricardo Antunes de Sá	[signature]	Aprovada
Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves	[signature]	APROVADA
Prof.ª Dr.ª Leônia Gabardo Negrelli	Leônia GN	Aprovada

Curitiba, 23 de março de 2016.

MJ-RSilva

Profª. Drª. Monica Ribeiro da Silva
Coordenadora do PPGE

Profª. Dra. Monica Ribeiro da Silva
Coordenadora do Programa de
Pós-Graduação em Educação
Matrícula: 125750

Dedico esse trabalho à minha mãe Vanda, que não está mais entre nós fisicamente, mas sempre está nos meus pensamentos e ao meu pai Luiz, professor de Matemática como eu, meu exemplo de retidão e ética.

Também com especial carinho, dedico esta dissertação ao meu esposo Sylvio, sempre presente em todos os momentos e aos meus filhos Andrey e Francisco, motivos dos meus sorrisos e do desejo de sempre seguir em frente. Amo vocês com todas as minhas forças.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Ettiène Guérios pelo acompanhamento, orientação e amizade, e por me deixar percorrer esse caminho com toda a liberdade possível.

À coordenação, ao colegiado e à secretaria do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, por todo o apoio e compreensão.

À CAPES, pela bolsa de estudos, fundamental para o bom encaminhamento deste trabalho.

Às Professoras Maria Cláudia Chemim Machado e Andrea Chaves pela imprescindível colaboração com esta dissertação.

À minha amada amiga Dayane Perez Bravo por seu companheirismo e dedicação que tanto me auxiliaram e auxiliam a ir em frente, desde os tempos da graduação. Obrigada Day... Amo você!

Ao Professor Marcelo Muniz Silva Alves por todos os cafés e preciosos conselhos.

Ao Professor Ricardo Antunes de Sá por compartilhar comigo seus ensinamentos, tanto do Pensamento Complexo quanto da vida e sua tessitura.

Aos Professores das Bancas de Qualificação e Defesa, pela dedicação à leitura e análise deste trabalho.

A utopia está lá no horizonte. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais o alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.

Eduardo Galeano

MODTKOSKI, Heloisa Milena. **Conceito matemático x algoritmo: construção do conhecimento ou simples mecanização?** Curitiba, 158 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

RESUMO

O presente estudo refere-se aos resultados da pesquisa qualitativa de natureza interpretativa, cujo objetivo é identificar se os alunos de uma escola do Ensino Fundamental do Município de Curitiba compreendem conceitualmente o conteúdo programático de equações polinomiais de 1º e 2º graus ou se as resolvem mecanicamente pela compreensão apenas de seu algoritmo. Os instrumentos para a coleta de dados são listas de exercícios, sendo uma de aplicação direta de equações de 1º e 2º graus e outra de problemas relativos às mesmas equações e foram construídos tendo por base elementos teóricos organizados nos eixos denominados como: construção do conhecimento, conceito matemático e algoritmo, resolução de problemas e a álgebra escolar. As categorias para análise dos dados são provenientes do conteúdo teórico referente ao campo algébrico e do nosso referencial teórico. Analisamos os dados em função das seguintes categorias provisórias organizadas a partir de Bernard e Cohen (1995) para as equações de 1º grau: método de desfazer, inversos operacionais, reversibilidade de um processo, passos invertíveis, resoluções aritméticas e resoluções algébricas. Já para as equações de 2º grau as categorias são: completamento de quadrados, fórmula de Bhaskara e relação entre os coeficientes. Os instrumentos foram aplicados a 29 alunos, seguido de entrevistas com alguns deles, conforme as resoluções apresentadas. Após esta aplicação, os dados empíricos foram analisados à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, de elementos da Teoria da Complexidade na perspectiva de Edgar Morin (2010), do conceito de experiência de Jorge Larrosa (2002) e de Ettiène Guérios (2002), em que fragmentação, relação parte-todo e circularidade-linearidade constituíram pontos de aproximação interpretativa entre as categorias.

Palavras-chave: Conceito matemático. Algoritmo. Construção do conhecimento. Mecanização.

MODTKOSKI, Heloisa Milena. **Conceito matemático x algoritmo: construção do conhecimento ou simples mecanização?** Curitiba, 158 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

ABSTRACT

This study refers to the results of a qualitative research of interpretative nature, which aims to identify whether students understand conceptually the syllabus polynomial equations of 1st and 2nd degrees or mechanically solved by only understanding their algorithm. The instruments for data collection are lists of exercises, being a direct application of equations 1st and 2nd degrees and other problems related to the same equations and were built based on theoretical elements arranged on the axes called construction of knowledge, mathematical concept and algorithm, problem solving and school algebra. The categories for data analysis are arising from two circumstances: from the theoretical framework of the algebraic field and our theoretical references. We analyzed the data according to the following provisional categories arranged from Bernard and Cohen (1995) for the 1st degree equations: method of undo, operational inverse, reversibility of a process, invertible steps, arithmetic resolutions and algebric resolutions. For the equations of 2nd degree, the categories are: completing the square, Bhaskara formula and relation between the coefficients. After validation, the tools were applied to 29 students, followed by interviews with someone as the resolutions presented. After this application, the empirical data were analyzed according to the Theory of Meaningful Learning from David Ausubel, Theory of Complexity from Edgar Morin (2010), the concept of experience from Jorge Larrosa (2002) and Ettiene Guérios (2002), when fragmentation, part-whole relation and circularity-linearity constituted points of interpretive approach between the categories.

Key-words: Mathematical concept. Algorithm. Knowledge contruction. Mechanization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

A ideia para esta pesquisa teve origem nas salas de aula do 9º ano do Ensino Fundamental quando esta pesquisadora estava ensinando à turma agitada a "Fórmula de Bhaskara" para resolução de equações polinomiais de 2º grau. Os alunos, geralmente cheios de dúvidas em matemática, gostaram demais do conteúdo e conseguiram resolver algumas das equações sem grandes problemas.

Surgiu uma grande curiosidade: como? Como alunos com tantas dificuldades em matemática conseguem resolver uma equação polinomial de 2º grau corretamente? Pois isso não parecia ser possível, a não ser que os alunos houvessem memorizado o passo a passo da resolução de uma equação polinomial de 2º grau, mesmo sem compreender os conceitos matemáticos envolvidos.

A pesquisa tem como objetivo investigar se os alunos realmente aprendem o conceito matemático envolvido em certa operação (no caso, equações polinomiais de 1º e 2º graus) ou se eles apenas memorizam o algoritmo para resolver a conta que estava sendo pedida. Os dados foram obtidos por meio de atividades algorítmicas e de resolução de problemas matemáticos cujas resoluções foram analisadas.

Ressaltando o conhecimento de que o grau se refere ao polinômio e não à equação, doravante utilizaremos a expressão "equações de 1º e de 2º graus" em lugar de "equação polinomial de 1º grau e equação polinomial de 2º grau", para facilitar a escrita.

Para elaboração desta pesquisa, primeiramente apresentamos referenciais teóricos que adotamos sobre a construção do conhecimento matemático, onde se percebe que a construção de conhecimento pelos alunos se dá em um movimento orgânico a partir dos conceitos que aprendem em momentos específicos na escola e os relacionam com os conceitos aprendidos previamente.

Em seguida apresentamos o conceito de algoritmo e sua relação com o conceito matemático que o envolve. Um conceito matemático é expresso por um algoritmo, que é a maneira em que podemos expressá-lo de modo abreviado em uma fórmula.

Mostramos então referenciais teóricos que nos norteiam sobre a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. Ao utilizar esta metodologia, apresentamos uma situação onde o problema facilita e é também ponto de partida do processo de aprendizagem, uma vez que o aluno está envolvido por uma ação, por um movimento, ou seja, numa movimentação de pensamento e construção de conhecimentos, e tem como meta resolver o problema utilizando-se de conceitos matemáticos.

A seguir desenvolvemos um breve estudo algébrico, um pequeno levantamento teórico sobre a Álgebra e a formação do pensamento algébrico.

Para auxiliar na análise dos dados, buscamos um olhar não só objetivo, no caso a aprendizagem do aluno, mas também subjetivo, focalizando alunos e professores como seres subjetivos passíveis de emoções, ideias e conflitos. Para tal, estudamos sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, elementos da Teoria da Complexidade e do Pensamento Complexo de Edgar Morin, o conceito de experiência de Jorge Larossa e permeamos estes elementos com a tese de Ettiène Guérios, que amplia o conceito de experiência relacionando-o a ideia de transformação e estabelece relações teóricas entre Morin e Larossa.

Os dados obtidos em sala de aula são categorizados e analisados, e finalmente, chega-se à conclusão da pesquisa.

As nossas inquietações (e da maioria dos professores de Matemática) estão ligadas ao convívio com os problemas de aprendizagem do aluno. Ao buscar soluções para esses problemas, procuramos por novas ideias pedagógicas, que forneçam sugestões de como abordar os conhecimentos matemáticos escolares em sala de aula de modo que auxiliem na aprendizagem dos alunos. No entanto, entendemos que novas ideias são inócuas se colaboram apenas para a atividade algorítmica relativa a determinados conceitos matemáticos. Afirmamos que a atividade algorítmica é importante, mas não só.

Embora a presente pesquisa não focalize a prática didática de professores, nossa preocupação com o modo como são conduzidos os conteúdos nas aulas de Matemática, aliada à constante preocupação em melhorar a prática docente foram motivadores para a realização desta pesquisa. Em nosso ponto de vista cabe ao professor tentar propiciar aos alunos uma verdadeira compreensão de um conceito matemático e não apenas ensiná-los a serem apenas reprodutores de modos resolutivos de conteúdos escolares fragmentados, muitas vezes sem significado para eles no contexto do campo do próprio conhecimento.

Tendo em vista a preocupação que gerou esta pesquisa, elegemos “Equações Polinomiais de 1º e 2º graus” como conteúdo escolar para investigar a atividade matemática dos alunos.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio. Assim fizemos porque pretendíamos investigar a compreensão do conceito matemático envolvido nas resoluções realizadas e a utilização significativa dos algoritmos uma vez que os alunos do 1º ano do Ensino Médio já tinham estudado este tema em anos anteriores e voltariam a utilizar estas equações em outros tópicos da matemática, como em funções, por exemplo.

Nos pareceu importante investigar a atividade matemática com "Equações Polinomiais de 1º e 2º graus" em um momento escolar que não fosse aquele em que estão aprendendo em sala de aula. O distanciamento do momento escolar da aprendizagem nos parecia relevante por evitar que os alunos utilizassem determinados conhecimentos por serem eles que estavam em jogo nas atividades.

Para identificar os procedimentos resolutivos dos alunos, utilizamos atividades de naturezas diferentes. Foram listas de exercícios algorítmicos e de Resolução de Problemas. O fizemos porque tínhamos como princípio que quando um aluno compreende determinado conceito matemático, o identifica como possibilidade resolutiva em diferentes situações.

Assim, a Resolução de Problemas foi definida como um dos métodos de obtenção de dados empíricos para análise, uma vez que permite identificar se os alunos realizariam soluções por meio de equações. Além disso, possibilita um levantamento de diferentes procedimentos resolutivos que poderiam ser adotados pelo aluno para chegar à solução dos problemas, e por isso, tivemos o cuidado de apresentar alguns enunciados que possibilitavam, também, resoluções por outras vias matemáticas além de equações.

Um considerável número de professores entende que resolver problemas é chegar a uma única resposta correta, independentemente do modo (processo) de chegada à determinada solução. Não é este o caso nesta pesquisa, pois o processo utilizado pelo aluno para chegar à resposta será primordial para subsidiar as conclusões que desejamos alcançar.

De certo modo, para Silveira (2006), oferecer ao aluno oportunidades de resolver problemas em contextos práticos poderá ajudá-lo a lidar mais efetivamente com problemas que ele pode vir a se deparar na sua vida fora da escola (qualquer tipo de problema, não necessariamente os de matemática), uma vez que ele precisa interligar conhecimentos adquiridos previamente para então chegar a um resultado.

Mas querendo ter uma visão mais ampla e significativa de ensino-aprendizagem, podemos contemplar no contexto desta pesquisa também o olhar do professor, uma vez que falando de aprendizagem, a figura do professor é essencial, importante como complementar à do aluno.

Então, ao finalizarmos esta pesquisa, acreditamos que além de identificar se o aluno constrói o conhecimento matemático em tela e assim o compreende conceitualmente, podemos contribuir para que os professores possam refletir sobre a prática pedagógica que lançam mãos em suas aulas.

Ampliando essa abordagem, acreditamos que a matemática é constitutiva do sujeito, desde que não se limitem seu conhecimento à um âmbito mecanicista de seus conteúdos, ou seja, reprodutor de seus mecanismos resolutivos. Justificamos esse entendimento com Silveira (2006) que diz que há uma necessidade de que os alunos sejam seres transformadores e críticos, incorporados à sociedade, capazes de elaborar de forma concreta suas próprias definições em benefício de suas atividades não só como aprendizes, mas como cidadãos.

Tais entendimentos dão margem a alguns questionamentos basilares para a constituição de questão de investigação desta dissertação, tais como:

- Como se dá a construção do conhecimento matemático pelos alunos e qual sua relação com algoritmos?
- Como os alunos demonstram sua compreensão sobre equações polinomiais do 1º e do 2º graus em atividades resolutivas, ou seja, atividades que necessitam de uma resolução, como, por exemplo, um problema matemático?

1.1 QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Dado o exposto até o momento, nos propusemos a investigar se ocorreu compreensão dos conteúdos matemáticos relacionados a equações de 1º e 2º graus após os alunos terem cursado os anos finais do Ensino Fundamental, ocasião em que estes conteúdos lhes são ministrados. A indagação que motivou esta pesquisa é se há construção do conhecimento, o entendimento do conceito matemático, ou se o aluno memorizou a solução algorítmica para chegar ao resultado pretendido.

Esta investigação ocorreu por meio de obtenção de dados por meio de exercícios algorítmicos e de atividades de resolução de problemas sobre equações de 1º e 2º graus, com alunos do 1º ano do ensino médio em uma escola do município de Curitiba, por estes já terem estudado estes temas e as utilizarem em outros tópicos da matemática nos anos subsequentes do Ensino Médio.

Deste modo, realizamos um estudo sobre a compreensão dos alunos acerca dos conceitos matemáticos e a utilização dos algoritmos próprios de resolução de equações. Acreditamos que poderemos mostrar ao professor um outro olhar sobre o que podemos identificar quando analisamos como o aluno resolveu um problema e o que pode ser feito para ajudá-lo nas suas dificuldades em matemática.

Assim, investigamos a questão:

Os alunos da Educação Básica compreendem o conceito matemático de equações polinomiais de 1º e 2º graus ou memorizam o algoritmo para chegar ao resultado pretendido?

1.2 OBJETIVOS

A presente pesquisa pretende investigar a aprendizagem e a compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos por meio dos seus registros quando o professor utiliza atividades de resolução de exercícios algorítmicos e de resolução de problemas. Essa perspectiva toma as soluções dos alunos como uma das partes do processo de ensino e aprendizagem, para que este se aprimore, possibilitando que com a ajuda desta metodologia os professores possam redirecionar sua prática docente e também sua estratégia pedagógica a fim de promover a aprendizagem da Matemática.

O conhecimento matemático, para Miguel (2006), não se consolida como uma relação de ideias prontas a serem memorizadas, vai muito além disso, pois um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de conjecturas e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências para o desenvolvimento das noções matemáticas.

Como o aluno constrói o conhecimento? O conhecimento de algum objeto, segundo Spinelli (2011), é construído a partir de relações que o sujeito estabelece entre os diversos conceitos aprendidos anteriormente. Então para se conhecer algo, é preciso relacionar significados.

Tendo em vista tais ponderações, apresentamos os objetivos da presente pesquisa.

Objetivo geral:

- Identificar se ocorreu a aprendizagem do conceito matemático de equações polinomiais do 1º e 2º graus pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos:

- Identificar como os alunos do Ensino Médio resolvem algoritmos ou problemas envolvendo equações polinomiais do 1º grau.
- Identificar como alunos do Ensino Médio resolvem algoritmos ou problemas envolvendo equações polinomiais do 2º grau.
- Identificar a natureza matemática de erros que os alunos cometem na resolução de equações do 1º e do 2º graus.
- Observar se o aluno identifica o conhecimento matemático de equações do 1º e do 2º graus como possibilidade de resolução de problema.
- Identificar em que medida os alunos compreendem o conceito solicitado em um momento escolar em que o mesmo não estava sendo ministrado, ou seja, em que a atividade matemática solicitada não era diretamente vinculada ao conteúdo que estava sendo aprendido naquela ocasião.

2 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Num primeiro momento, para começar a pesquisar o referencial teórico para embasar esta dissertação, foi realizado um breve estudo sobre a construção do conhecimento matemático, o que é conceito matemático e algoritmo e como estes estão relacionados. Conjecturamos que o limiar entre a aprendizagem conceitual e a algorítmica possa ser decorrente da significação ou não dos conteúdos em estudo.

Estudamos o campo da álgebra para buscar compreender relações entre o pensamento algébrico e o pensamento aritmético na construção do conhecimento matemático escolar.

A Resolução de Problemas nos dá a possibilidade de verificar a compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, ao se analisar como o aluno soluciona o problema apresentado a ele, neste caso, se o aluno percebe que a solução do problema pode partir de uma equação polinomial de 1º ou 2º grau.

Para conhecer melhor o tema de pesquisa fizemos um levantamento em teses, dissertações e artigos, na sua maioria dos últimos dez anos, que versam sobre aprendizagem e equações, conceito e matemática, álgebra e equações, que pudessem esclarecer e complementar os conhecimentos da pesquisadora sobre assuntos relevantes a esta pesquisa.

Para fundamentar a interpretação dos dados obtidos, estudamos obras de David Ausubel e sua Teoria da Aprendizagem Significativa, de Edgar Morin para analisar os dados à luz de elementos da Teoria da Complexidade e do Pensamento Complexo, alguns escritos de Jorge Larrosa, no que tange o conceito de experiência, além da tese de Ettiène Guérios, onde a autora amplia o conceito de experiência a partir de leituras de Morin e Larrosa.

2.1 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Esta é uma pesquisa qualitativa de natureza interpretativa.

Os sujeitos da pesquisa foram 29 alunos de colégio do Município de Curitiba, que não são identificados sob nenhum aspecto na pesquisa, quatro alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 25 alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Os dados foram coletados em duas fases.

Na primeira fase ocorreu a validação dos instrumentos de pesquisa. Participaram quatro alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que estavam aprendendo o conteúdo de equações polinomiais de 2º grau naquele momento. Estes alunos não foram entrevistados tendo em vista o objetivo dessa fase ser apenas de validação do instrumento de pesquisa.

Na segunda fase, participaram vinte e cinco alunos do 1º ano do Ensino Médio que resolveram duas listas de exercícios organizadas pela pesquisadora e validadas. Esses alunos foram entrevistados, gerando protocolos de análise. Uma das listas continha exercícios de aplicação direta de equações polinomiais de 1º e 2º graus e a outra continha enunciados de problemas cujas soluções poderiam ser as equações da lista de aplicação direta

Estes alunos estavam distanciados do momento de aprendizagem destes conhecimentos, por tê-los aprendidos em anos anteriores.

Os instrumentos para a produção do material empírico são os seguintes:

1. Uma lista de exercícios de equações de 1º e 2º graus para serem resolvidas algoritmicamente, ou seja, apresentadas como algoritmos do tipo *arme e efetue* para servir à pesquisa como método de obtenção dos dados a serem analisados e com objetivo de identificar a compreensão algorítmica procedimental do conceito de equações polinomiais de 1º e 2º graus.

2. Uma lista com enunciados de problemas, aqui entendidos como situações matemáticas apresentadas com enunciados que fariam com que os alunos tivessem que descobrir uma estratégia coerente com a pergunta do problema, cuja solução estava entre as mesmas equações que foram resolvidas algoritmicamente, com objetivo de verificar se os alunos compreenderam o conceito de equações de 1º e 2º graus e conseguiram identificá-las como úteis às soluções dos problemas.

As listas foram aplicadas aos alunos, que registraram a sua resolução.

3. Entrevista semiestruturada com os alunos que apresentaram soluções diferenciadas das soluções esperadas, ou seja, que chamaram a atenção por algum motivo: resolução correta do problema ou exercício proposto de uma maneira diferente, inovadora, ou até a resolução incorreta, mas que, de alguma forma, despertaram a nossa curiosidade.

Após a aplicação das listas para os alunos, seguimos os seguintes passos:

1. Categorizamos as soluções, em função dos procedimentos resolutivos dos alunos. As categorias para análise dos dados são advindas de duas circunstâncias provenientes do referencial teórico. Uma delas advém do campo algébrico para a organização dos dados empíricos. São elas: compreensões incompletas, atividade algébrica conceitual e atividade algébrica algorítmica. A outra circunstância advém do referencial teórico referente ao Pensamento Complexo para constituir ponto de aproximação interpretativa entre as categorias do campo algébrico, entre elas as falas dos alunos. São elas: fragmentação, relação parte-todo e circularidade-linearidade.
2. Entrevistamos os alunos que apresentaram alguma resolução interessante, ou seja, que chamaram a atenção por algum motivo: resolução correta do problema diferente da esperada, inovadora ou até mesmo incorreta, mas que de algum modo despertou a nossa curiosidade. A entrevista ocorreu em dois momentos, que na verdade não foram planejados, mas aconteceram porque a escola só liberou a sala de provas de segunda chamada, anexa à sala da pedagoga, para a realização das conversas e os alunos acabaram ficando todos na sala ao mesmo tempo. No primeiro momento, apenas os alunos entrevistados relataram o processo utilizado nas suas resoluções. Já no segundo momento, que ocorreu imediatamente após o relato individual, todos os alunos participaram ao mesmo tempo, expondo suas opiniões às questões levantadas pela pesquisadora.
3. Transcrevemos as entrevistas.
4. Compatibilizamos as falas dos alunos com as soluções das listas de exercícios previamente categorizadas.
5. Comparamos as resoluções dos alunos da 1ª fase da pesquisa (quando os alunos estavam aprendendo no 9º ano o conteúdo matemático em tela) com as resoluções da 2ª fase (quando não estavam em momento escolar de aprendizagem desse conteúdo no 1º ano do Ensino Médio)
6. Analisamos os dados empíricos compatibilizados à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, do Pensamento Complexo de Edgar Morin e do conceito de experiência de Jorge Larrosa e de Ettiène Guérios.

Por fim, as considerações finais retomam as interpretações da construção de conhecimento ou memorização do algoritmo, relacionando os dados obtidos com a Resolução de Problemas, respondendo articuladamente ao problema da pesquisa.

2.2 O PORQUÊ DA PESQUISA QUALITATIVA

Alves (1991) mostra que para obter um trabalho qualitativo de qualidade é preciso utilizar adequadamente as metodologias que permitem lidar com o problema proposto, ou se tem o risco de que o trabalho não passe de um relato impressionista e superficial que pouco contribui para a construção do conhecimento. Mas a realidade não pode ser reduzida ao tamanho do método, é preciso saber formalizar, sistematizar, analisar e coletar dados adequadamente. O paradigma qualitativo abriga uma variedade de tradições filosóficas, epistemológicas e metodológicas.

Ainda segundo a autora, para o pesquisador "qualitativo" a realidade é uma construção social da qual o investigador participa, e, portanto, os fenômenos só podem ser compreendidos dentro de uma perspectiva holística, que leve em consideração suas interações e influências recíprocas. Porém, para a autora, não se pode, no processo de investigação, deixar de valorizar a imersão do pesquisador no contexto, em interação com os participantes, procurando apreender o significado por eles atribuído aos fenômenos estudados. Além disso, os dados resultantes devem ser predominantemente descritivos e expressos através de palavras.

Quando não isolamos o objeto do seu ambiente e do seu observador e ao observar a situação com um olhar diferenciado, Morin (2010, p. 185) mostra uma regra de complexidade: o observador-conceptor deve se integrar na sua observação e na sua concepção. Ou seja, olhar o todo, proporcionando a volta do observador na sua observação, e também como parte dela.

Assim, os pesquisadores colocam-se no mesmo ângulo de visão do que é pesquisado, e pode-se ter um entendimento mais claro do que se quer observar e integrar sua observação na sua concepção de ensino-aprendizagem, conseguindo perceber os antagonismos e complementaridades que fazem parte da sua prática pedagógica diária.

Alves (1991) ainda diz que as pesquisas qualitativas podem ser definidas num *continuum*, que admite grande variabilidade interna em termos de grau de estruturação. Deve-se ter no projeto de pesquisa a formulação clara da questão, dos objetivos de estudo, da justificativa e das questões de pesquisa que se pretendem investigar e considerar as variações internas que possam ocorrer na focalização do problema (fronteiras da investigação, critérios de exclusão ou inclusão).

A relevância do problema merece atenção especial, pois é necessária uma boa fundamentação teórica, que dê base ao que se pretende estudar. Nos procedimentos metodológicos, de maneira geral, apresentam-se três etapas: período exploratório, investigação focalizada e análise final com a elaboração dos resultados. Entendemos tais etapas como constitutivas da presente pesquisa.

Martins (2010) mostra que o recurso básico da pesquisa qualitativa é a descrição. Devemos ter alguns cuidados com o verbo "descrever", como: condições que devem ser satisfeitas para o verbo ser usado adequadamente; atividades a que o termo "descrever" se refere, a aplicação do termo descrição nas sentenças; divergências entre usos comuns e técnicos para os termos "descrever", "descrição" e "descritivo"; o sentido do falso e do verdadeiro na descrição.

Segundo Martins (2010), descrever algo envolve uma ação que é dirigida a alguém, a outro sujeito a quem a descrição seja dirigida e "não conhece" o assunto ou objeto descrito, logo, a descrição, *"des" "ex-crivere"* tem sentido de algo que é escrito para fora. Então o investigador deve ter um cuidado especial em como as descrições do seu trabalho devem ser redigidas.

A coleta de dados, diz Sampieri *et al.* (2013), na pesquisa qualitativa é fundamental e busca obter dados, que serão transformados em informação de pessoas, seres vivos, comunidades, contextos ou situações. A coleta acontece nos ambientes naturais e cotidianos dos participantes ou unidades de análise. Temos três tipos principais de coleta de dados: observação, entrevista e a análise documental. Nesta pesquisa, após a obtenção dos protocolos escritos pelos alunos, que são as listas de exercícios e problemas, estes foram analisados e, de acordo com as soluções apresentadas, alguns alunos foram entrevistados.

Concordamos com os autores quando dizem que a observação não implica em mera contemplação, não basta só olhar e tomar notas, mas sim entrar profundamente em situações sociais e manter um papel ativo, assim como a permanente reflexão e estar atento aos detalhes, acontecimentos, eventos e interações.

Para os autores, o bom observador precisa saber ouvir e utilizar todos os sentidos, prestar atenção nos detalhes, possuir habilidades para decifrar e compreender condutas não verbais, ser reflexivo e disciplinado nas suas anotações, assim como flexível para mudar o foco de atenção se necessário.

Já na entrevista, por Sampieri *et al.* (2013), são feitas perguntas sobre experiências, opiniões, valores, emoções, sentimentos, fatos, histórias de vida, atribuições etc, com o propósito de obter respostas sobre o tema, na linguagem e na perspectiva do entrevistado.

As perguntas da entrevista podem ser: gerais (partem de informações globais para se chegar ao interesse do pesquisador), para exemplificar (deflagradoras de explorações mais profundas), estruturais (lista de conceitos como categorias) e de contraste (semelhanças e diferenças em relação a símbolos ou tópicos). Também podem ser perguntas de opinião, de expressão e sentimento, de conhecimentos, sensitivas, de antecedentes e de simulação.

Na entrevista realizada com os alunos nesta pesquisa, não nos coube somente questionar como chegou ao resultado, mas também indagar sobre suas estratégias de resolução, sobre fatos que recordou para resolver os problemas, se foi do conceito matemático em si, de algum conceito prévio que ele evocou, da memorização da fórmula resolutiva, se foi de alguma fala do professor que o marcou, entre outros.

Na análise documental, segundo Lüdke e Andre (1986), busca-se identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse. Os documentos constituem uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador. Representam ainda uma fonte "natural" de informações, surgindo num determinado contexto e fornecendo dados sobre o mesmo contexto. Na pesquisa, os documentos analisados são as listas resolvidas pelos alunos, que são as fontes para a análise dos dados coletados.

São, além disso, fonte não-reativa, permitindo que a obtenção de dados ocorra mesmo quando o acesso ao sujeito é impraticável (por sua morte, por exemplo) ou quando a interação com o sujeito pode alterar seu comportamento ou seus pontos de vista.

A triangulação de métodos de coleta de dados é importante, para Richardson (1999), desde que o tempo e os recursos a possibilitem. Dados podem oferecer maior riqueza, profundidade e amplitude se vierem de diferentes atores do processo, de várias fontes e de variadas formas de coleta.

Nesta pesquisa, ao se confrontar os protocolos escritos dos alunos e as entrevistas e relacionar os dados, pretendemos aprofundar e ampliar a percepção de como ocorre a construção do conhecimento matemático e se ocorre. Para a organização e análise dos dados foram criados grupos de categorias, que são explicadas à frente nesse texto, que também serão trianguladas.

No processo qualitativo, para Sampieri *et al.* (2013), amostra é um grupo de pessoas, eventos, acontecimentos, comunidades, etc sobre o qual deveremos coletar dados, sem que necessariamente seja representativo do universo ou população que estudamos.

Os autores ainda dizem que para selecionar uma amostra apropriada para a pesquisa é necessário tornar a unidade de análise precisa e delimitar claramente a população a ser estudada. A amostra da população é a não probabilística, também chamada de amostra por julgamento, pois a escolha dos casos depende do critério do pesquisador.

Embora esta pesquisa não tenha a intenção de generalizar resultados pela sua natureza qualitativa, entendemos que embora ocorra em uma só escola, os resultados acenam para a constituição de um *corpus* de conhecimento em relação a uma temática específica, a partir do estudo detalhado das situações observadas. Flick (2009) e Sampieri *et al*. (2013) acenam nesse sentido, como veremos a seguir.

Na pesquisa qualitativa, segundo Flick (2009), a amostragem trata não apenas da seleção das pessoas a serem entrevistadas ou das situações a serem observadas, mas também da seleção dos lugares em que se espera encontrar essas pessoas ou situações.

Para o autor, na maioria dos casos, a amostragem na pesquisa qualitativa não é orientada por uma seleção formal de parte da população existente ou suposta, é antes concebida como forma de estabelecer um conjunto de casos, materiais ou eventos deliberadamente selecionados para se construir um corpus de exemplos empíricos com vistas a estudar o fenômeno de interesse da forma mais instrutiva.

Flick (2009) ainda diz que a amostragem é um passo crucial no desenho de pesquisa qualitativa, dado que é aquele em que se reduz o horizonte potencialmente infinito de materiais e casos possíveis para seu estudo a uma seleção administrável e, ao mesmo tempo, justificável. É comum iniciar com a identificação de ambientes propícios, depois de grupos e finalmente de indivíduos.

Assim, primeiramente foram analisados os protocolos de todos os alunos que realizarem as atividades dos instrumentos para coleta de dados e a entrevista ocorreu com os alunos que apresentaram resoluções diferentes das esperadas, interessantes ou criativas, ou seja, que de algum modo oferecem indicadores para a compreensão do pensamento do aluno e a sua aprendizagem ou não-aprendizagem.

Cada estudo qualitativo é, por si só, um desenho de pesquisa, dizem Sampieri *et al.* (2013).

Acreditamos que esta pesquisa precisava ser qualitativa, devido ao seu caráter não só objetivo, de conhecer, mas também subjetivo, ao conceber os alunos como seres passíveis de emoções, conflitos, ideias, e que possuem uma história de vida que é permeada pela vida estudantil. Uma vez que estávamos interessadas em observar em que medida os alunos compreendem o conceito que estão aprendendo, não haveria como este trabalho não ser qualitativo.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 REVISÃO DE LITERATURA

Realizamos uma busca sistematizada da produção cientifica relacionada a questão de investigação da presente pesquisa. Para tal efetuamos um levantamento dos estudos realizados nos últimos dez anos, que de algum modo tivessem alguma relação com o nosso estudo.

Consultamos referenciais para circunstanciar o tema e garantir a originalidade da pesquisa a ser desenvolvida, de modo que, ao perceber o conhecimento como coletivo, se pudesse enriquecer o que gostaríamos de discutir e nos munir com melhores condições cognitivas sobre o que se pretendia estudar.

Fizemos, então, um levantamento do que foi estudado em teses, dissertações e artigos, de 2004 a 2014, que versam sobre aprendizagem e equações, conceito e matemática, álgebra e equações, que pudessem esclarecer e complementar o que conhecíamos sobre os temas relevantes a esta pesquisa.

Gostaríamos de deixar claro que esta busca por outros estudos objetivou situar-nos sobre o que foi estudado sobre o assunto, mas não necessariamente que as pesquisas encontradas servissem como base teórica para o nosso estudo, e sim vistas como próximas à nossa pesquisa e similares em alguns aspectos.

Os bancos de dados pesquisados foram: banco de teses da Capes, *Scielo* e banco de dissertações da UFPR. As buscas ocorreram de acordo com as palavras-chave: aprendizagem e equações; conceito e matemática; resolução de problemas. Apresentamos agora os estudos que foram encontrados nos bancos de dados:

Puti (2011) estuda sobre educação matemática e pesquisa em educação matemática, com tópicos sobre álgebra escolar e seu desenvolvimento histórico, além da produção de significados. A autora apresenta conceitos de variável e equações e mostra dificuldades dos alunos, como a interpretação dos símbolos e a falta de referencial numérico advinda da aritmética. A pesquisa possui também um referencial teórico sobre resolução de problemas e atividades com equações. Utiliza resolução de problemas para sua coleta de dados, de modo similar ao que realizamos nesta pesquisa.

O autor Segundo (2012) usa a perspectiva das representações múltiplas, ou seja, das diversas representações externas, que compreendem a representação verbal, a representação numérica, a representação tabular, a representação algébrica e a representação geométrica e suas conexões, as quais podem influenciar nas representações internas dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, mas trata também das dificuldades na compreensão e apropriação de conceitos algébricos por parte dos alunos do Ensino Fundamental II e no ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau.

Langer (2004) investiga e analisa as diferenças e as similaridades existentes entre os significados produzidos pelos professores e por seus alunos por meio dos processos reflexivos manifestos através da fala e da escrita em situação de entrevista e mostra dificuldades dos alunos no ensino de álgebra e faz um pequeno detalhamento histórico do ensino da álgebra no Brasil.

A pesquisa mostra a ideia da construção de um significado para o cálculo mental não apenas como um mero procedimento de cálculo, como um algoritmo realizado mentalmente, mas a construção de significado algébrico onde o dinamismo da noção intuitiva de função é estendido para o restante de seu estudo. A autora fala também de um ensino mecânico e sem significados, o que vem ao encontro a este estudo.

Freire (2011) e Trindade (2008) estudaram as práticas dos professores para o ensino da matemática. Freire (2011) mostra como os professores podem utilizar o pensamento algébrico nas suas práticas, além de discorrer sobre a construção do conhecimento matemático e algébrico pelos estudantes. Cita também a necessidade de formação dos professores. A autora mostra a diferença entre aritmética e álgebra, apresenta pesquisas, conhecimentos e concepções em álgebra e mostra a álgebra como uma relação de equivalência, além do sentido algébrico das equações.

Trindade (2008) estuda as investigações que podem ser usadas para ensinar matemática. Discorre sobre o aprendizado, o pensamento matemático e as ferramentas mentais, processos e representações e faz um exame sobre o que é investigar e o que são investigações matemáticas e a relação entre problemas e investigações.

Já Cavalcante (2011) e Fávero e Neves (2009) abordam a formação do professor de Matemática. O trabalho de Cavalcante (2011) descreve o professor polivalente e é focado, na maior parte, nas abordagens da resolução de problemas sob a ótica de diversos autores, como Polya, Schoenfeld, Van de Walle e Fiorentini e Miorim.

Fávero e Neves (2009), em seu artigo, tratam da formação do professor e do que podemos deduzir dos relatórios oficiais, assim como dos estudos publicados e dos projetos de pesquisa que têm desenvolvido, é que há um grande impasse: de um lado, os professores não consideram os registros construídos pelos alunos como instrumentos importantes para a aquisição dos registros convencionais e, de outro, os alunos não o utilizam adequadamente porque desconhecem a sua lógica. Os dados da pesquisa levam as autoras a concluir que, independentemente do tipo de formação, os sujeitos que participaram dos estudos descritos não apresentaram competência para analisar o significado nas notações apresentadas e nem para apresentar sugestões de intervenção naquelas situações nas quais se identificaram equívocos na utilização dos algoritmos na resolução.

3.2 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

3.2.1 O conhecimento matemático e os conceitos matemáticos

Precisamos, num primeiro momento, discutir o saber matemático e como acontece a relação entre o sujeito e o conhecimento uma vez que se quer compreender como o aluno aprende e como se pode tornar o ensino escolar significativo.

Como o aluno constrói o conhecimento? O conhecimento de algum objeto, para Spinelli (2011), pode ser compreendido como um feixe de relações que dependem em quantidade e qualidade do grau de conhecimento que o sujeito possui sobre ele, ou seja, é construído a partir de relações que o sujeito estabelece entre os diversos conceitos aprendidos anteriormente. Então para se conhecer algo, é preciso relacionar significados, como também nos diz Ausubel (2003).

Esta seria uma das concepções de como ocorre a construção do conhecimento matemático, a partir dos conceitos matemáticos que os alunos aprendem na escola e como se relacionam com os conceitos formados previamente. Estes conceitos não são obrigatoriamente escolares, uma vez que a história de vida do aluno também integra uma das dimensões do seu conhecimento prévio.

Para Ausubel (2003), conceitos são objetos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolo, ou seja, estão na mesma classe de equivalência (matematicamente falando) e os conceitos são aspectos importantes na teoria da assimilação, pois a compreensão e a resolução significativa de problemas dependem da disponibilidade dos diversos tipos de conceitos (subsunçores, subordinados e particulares do indivíduo) na estrutura cognitiva do aprendiz.

Segundo Ausubel (2003), existem dois métodos gerais de aprendizagem conceitual: formação conceitual, que ocorre principalmente nas crianças jovens, onde os atributos específicos do conceito adquirem-se através de experiências diretas; e assimilação conceitual, que é a forma dominante de aprendizagem conceitual nas crianças, pois à medida que o vocabulário de uma criança aumenta, são adquiridos novos conceitos e os atributos específicos dos novos conceitos são definidos com a utilização em novas combinações de referenciais existentes que estão disponíveis na estrutura cognitiva. A assimilação conceitual ocorre também nos adultos.

Termos como “significado” e “significado conceitual”, para Brito (2001), têm adquirido cada vez mais relevância na educação escolar, principalmente se associados aos conhecimentos adquiridos mediante instrução, mas o professor precisa compreender o conceito de significado e aprendizagem significativa e como estes se relacionam e podem ser aplicados a cada um dos conceitos a serem ensinados-aprendidos:

> Os conceitos definidos como a informação organizada a respeito das propriedades de um ou mais objetos, são mediadores simbólicos e servem não apenas para designar os construtos mentais de um indivíduo, mas também os significados socialmente aceitos das palavras e dos conteúdos de uma área de conhecimento. [...]
>
> A formação e o desenvolvimento de conceitos, na abordagem cognitivista, implicam na aquisição de níveis conceituais cada vez mais diferenciados e é importante ressaltar que este desenvolvimento e aprendizagem obedecem ao padrão maturacional do indivíduo, às características do conceito que está sendo ensinado/aprendido e ao ambiente no qual está situado o aprendiz e de onde emerge o conceito. (BRITO, 2001, p. 80)

Ausubel (2003) afirma que a assimilação de conceitos ocorre quando o indivíduo incorpora, em sua estrutura cognitiva, novos conceitos. Os novos conceitos vão se modificando em contato com atributos essenciais dos conceitos já existentes. A assimilação de conceitos, da forma como acontece, é uma forma de aprendizagem receptiva, pois as relações a cada objeto apresentado são apresentadas e não descobertas. Há um processo ativo de relação, diferenciação e integração entre os conceitos relevantes, que já existem na estrutura cognitiva do aluno. (AUSUBEL, 2003)

Para o autor, as atividades escolares que são propostas aos alunos permitem ampliar seu campo conceitual, fazendo com que ele trabalhe com as novas informações que recebe, interpretando-as e selecionando-as de acordo com a situação em que se encontra. O estudante, a partir da formação de conceitos aprende princípios, regras e axiomas e pode solucionar problemas que envolvam esses objetos, ampliando sua estrutura de conhecimento. (AUSUBEL, 2003)

Brito (2001) apresenta quatro níveis de aprendizagem de conceitos: concreto, identidade, classificatório e formal. No nível concreto as operações cognitivas são: prestar atenção ao objeto, realizar uma discriminação, ou seja, reconhecer o objeto mesmo se ele estiver em conjunto com outros objetos e por fim, lembrar do objeto mesmo quando ele estiver ausente. Já no nível identidade, além das operações cognitivas do nível anterior, o aluno deve ser capaz de generalizar que dois ou mais objetos são equivalentes. O nível classificatório é caracterizado pela capacidade do estudante responder a pelo menos dois diferentes exemplos de uma mesma classe de ações, objetos, eventos, como equivalentes. Por fim, no nível formal, o aluno é capaz de denominar o conceito e defini-lo, além de recordar do conteúdo verbal referente a ele, formular hipóteses, reconhecer relações e também usar princípios que envolvem o conceito para solucionar problemas.

Como podemos perceber, a cada nível cabem determinadas operações mentais (cognitivas) que são pré-requisitos para se alcançar o nível seguinte. A aquisição de conceitos particulares, cada vez mais complexos e abrangentes, é entendida como um processo de construção e não como processo aditivo de recepção (BRITO, 2001).

Mas o que são conceitos em Matemática? Segundo Silveira (2006), ao se deparar com o objeto matemático, o conceito do objeto sofre intervenção da imaginação e da memória. Estes julgamentos virtuais do objeto têm necessidade de uma formalização. Existe uma ruptura com a intuição, o aluno abandona o conceito antigo e sua intenção de determinar um novo conceito com suas palavras faz com que

crie uma nova regra, um novo conceito. Assim se forma o conceito matemático.
Um conceito matemático é a definição de um objeto, podendo conter sua representação simbólica, obtida após observação e estudo das suas características.

Já o conhecimento matemático, para Miguel (2006), não se consolida como uma relação de ideias prontas a serem memorizadas; muito além disso, um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de conjecturas e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências para o desenvolvimento das noções matemáticas.

É na ação, segundo Silveira (2006), no movimento entre o objeto matemático e o seu conceito que surge uma rede de intenções do aluno. A compreensão prévia do objeto permite que o aluno o interprete, projete sentidos na interpretação e construa seu conceito na compreensão do objeto.

Ao se falar em conceito matemático, é necessário considerar que o aluno que está construindo o conhecimento precisa perceber o objeto a ser estudado e criar uma visão sua do objeto, na sua memória, daí o conceito é formado a partir das informações que o aluno traz consigo anteriormente mais a informação recebida no momento. É o que diz Silveira, ao focalizar a memória e a imaginação no processo de criação de um objeto e de seu conceito. Em suas palavras,

> [...] o objeto percebido e imaginado pode não corresponder à realidade. A necessidade conceitual obedece às regras da Matemática, de maneira mecânica, porém repensada pelo aluno, de maneira não mecânica. A memória do aluno é associativa. Ela auxilia a prever e a agir, em função de experiências passadas. O aluno pode se enganar, quando fornece ao objeto percebido, uma imagem de outro objeto percebido no passado. O objeto sofre as influências dos equívocos provenientes da aparência do objeto percebido, com o objeto em si. A imaginação é decisiva e não se engana, todavia depende da memória, que faz analogias do objeto com outros objetos. Ela organiza estes elementos e cria o objeto e o conceito do objeto. (SILVEIRA, 2006, p.52)

Os conhecimentos prévios que o aluno traz consigo, para Morais (2008), não só permitem um ponto de partida para o novo conhecimento, mas também facilitam a construção de um novo significado para então complementar ou substituir o conceito anterior e quanto mais relações forem estabelecidas entre o novo e o já conhecido, mais o novo conteúdo estará consolidado.

São considerados conhecimentos prévios os conhecimentos aprendidos através de leituras, aprendidos na escola ou não, que fazem parte do mundo real da criança, podendo inclusive nem estar ligados à Matemática. (MORAIS, 2008)

Segundo Morais (2008), uma extensão lógica da visão de que para se chegar a um novo conhecimento parte-se do conhecimento existente, é que os professores precisam dar atenção ao que a autora chama de compreensões incompletas, ou seja, falsas crenças e interpretações superficiais de conceitos que os aprendizes trazem consigo para um determinado assunto.

Os professores precisam então trabalhar sobre estas ideias de modo a auxiliar os estudantes a atingirem uma compreensão mais madura. “Se as ideias iniciais dos alunos e suas crenças forem ignoradas, as compreensões que eles desenvolvem podem ser muito diferentes daquelas que os professores querem imprimir.” (MORAIS, 2008, p. 35)

Mas a autora ainda nos informa que, apesar de serem importantes, o simples fato das crianças trazerem conhecimentos prévios consigo não é condição suficiente para uma nova aprendizagem, para que os alunos aprendam e guardem novas informações.

Estes conhecimentos precisam ser elaborados ativamente, atualizados e organizados de maneira que estejam consolidados quando os estudantes deles necessitarem e então elaborarem as relações correspondentes. Nesta etapa, a participação do professor é fundamental, pois dele depende a discussão “pós-aprendizado novo”, onde o aluno organizaria e definiria as estruturas de pensamento necessárias para a efetiva compreensão do conceito. (MORAIS, 2008)

A autora ainda diz que o aluno, ao estudar um novo assunto, tem que lidar com seu conhecimento anterior, mesmo que este conhecimento esteja “truncado” ou confuso na sua cabeça, ele tem que recuperar dados que estão na sua memória para construir o novo conhecimento.

Uma saída para o aluno que não consegue relacionar o novo conhecimento com seu conhecimento anterior é memorizar o novo dado, ou seja, no assunto tratado nesta pesquisa, o aluno pode apenas memorizar o algoritmo sem estabelecer relação com o conceito matemático envolvido. Mas o que é memorizar?

Segundo Fonseca (2001), a memória é a capacidade de adquirir, armazenar e recuperar informações disponíveis, seja internamente, no cérebro ou externamente, em dispositivos artificiais. Estes processos da memória são chamados de aquisição, consolidação e evocação.

Ainda para a autora, essa evocação, ou seja, a recuperação pela memória da experiência da sua vida escolar é tão importante como a experiência de vida do aluno e não pode ser renegada ou ignorada. As lembranças que emergem no decorrer do processo de aprendizagem contribuem para formar o corpo do conhecimento matemático.

Há também a questão da subjetividade e como a Matemática tem um modo peculiar para expressar os elementos subjetivos. “Quando alguém resolve um problema, tece uma demonstração ou compõe uma teoria, estabelecendo definições e axiomas, lá estão a sua marca, e mais que isso, o desdobramento da personalidade humana.”. (FONSECA, 2001, p. 30).

Então, para a autora, a matemática, por mais exata que seja, permite que a subjetividade de quem está lidando com ela se mostre na forma de como a escreve, ou seja, na maneira como resolve um exercício, como demonstra um teorema. Percebe-se o aluno não somente como aprendiz, mas como diz Morin (2010), como uma pessoa que pensa, sente, sofre, se transforma, e como ser complexo que é, não pode ser desligado da sua história e cultura.

Por meio dos autores aqui apontados, nos apropriamos de abordagens teóricas acerca do conhecimento matemático e sua aprendizagem pelos alunos, cujas articulações com os dados empíricos desta pesquisa faremos nos próximos capítulos.

3.3 O PAPEL DO ALGORITMO NO CONCEITO MATEMÁTICO

3.3.1 Os algoritmos nos Parâmetros Curriculares Nacionais

A palavra-chave “algoritmo” não surge muitas vezes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e quando ocorre está ligada ao cálculo aritmético e ao estudo dos números naturais.

Segundo o documento, os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele de qualquer tipo: exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Os alunos ainda não têm total domínio das técnicas operatórias, mas devem superar a mera memorização de regras e de algoritmos e os procedimentos mecânicos que limitam o ensino tradicional do cálculo.

Ainda pelo documento, comprometeriam a aprendizagem dos alunos: ausência de situações-problema envolvendo números grandes; desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos quando comparados aos procedimentos algébricos; ausência de um trabalho com estimativas e com cálculo mental e o abandono da exploração dos algoritmos das operações fundamentais; trabalho centrado nos algoritmos, sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números.

Pelo que percebemos, o conteúdo dos PCN referente aos algoritmos vêm ao encontro do que se pretende estudar neste trabalho, ou seja, verificar se os alunos somente memorizam (ou como citado acima, mecanizam) o algoritmo sem a compreensão do conceito matemático envolvido.

3.3.2 Algoritmos e conceitos matemáticos

Os conceitos em Matemática não podem ser vistos de maneira isolada. O conceito matemático traz consigo o algoritmo, que é a maneira em que podemos expressar o conceito na forma de uma fórmula, de modo abreviado. “[...] o método não-abreviado (método que promove ações praticadas pelo sujeito na construção de um conceito) deve ser construído pelo aluno, até que conclua o método abreviado (a fórmula, o algoritmo).”. (SILVEIRA, 2006, p. 52) A autora ainda complementa:

> As fórmulas utilizadas para se resolver um problema [algoritmos] são expressões algébricas que representam regras, e elas precisam ser interpretadas. Seguir uma regra é interpretar, e a interpretação demanda a leitura e a tradução de seus signos. O “que” fazer obedece à regra, o “como” fazer constitui a demonstração. A demonstração procede segundo uma técnica e produz um novo conceito. A técnica de descrição e de representação de objetos, num jogo de linguagem, se convertem em conceitos. (SILVEIRA, 2006, p. 52)

Um algoritmo possui uma sequência finita de etapas com procedimentos resolutivos definidos, relacionados a conceitos matemáticos. E é onde surge a dúvida geradora da presente pesquisa: o aluno compreendeu o conceito matemático envolvido em determinada questão ou somente memorizou seu algoritmo? E será que o conceito matemático foi compreendido através do uso do algoritmo? Ou seja, o cálculo algorítmico garante a aprendizagem conceitual?

Pode acontecer que durante a exposição de certo conceito, o professor já comece o conteúdo ensinando o algoritmo, sem nenhuma demonstração ou explicação complementar de como esta fórmula surge no tópico que está sendo explicado, ou seja, de como a "conta" e o conceito matemático estão relacionados. (MIGUEL; MIORIM, 1986)

A prática do algoritmo tradicional não deve ser abordada no início da exploração de um conceito ainda a ser estudado. Consideram importante o trabalho com diferentes atividades introdutórias, que podem detonar a organização de variadas formas de operar. O algoritmo, então, deveria ser introduzido após muitas outras elaborações e, ainda assim, "[...] de forma não compulsória, mas como uma opção.". (MIGUEL; MIORIM, 1986, p. 25).

3.4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

3.4.1 Resolução de Problemas nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Segundo os PCN, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas pode ser vista como uma possibilidade para a aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos e independe da compreensão do conteúdo.

Ainda pelo documento, ao resolver um problema, o aluno teria o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo. Ou seja, a Matemática assim apresentada auxilia o aluno na sua construção como sujeito.

> É relativamente recente a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas. [...] A opção por organizar o trabalho pedagógico a partir da resolução de problemas traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (1998, p. 37 e 40)

Consta no documento que a resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilitaria aos alunos mobilizar, colocar em ação, conhecimentos prévios e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos teriam a oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática e do mundo em geral, além de desenvolver sua autoconfiança.

Quanto à função da resolução de problemas, segundo os PCN, esta não seria uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação de conteúdos matemáticos, mas como orientação para a aprendizagem, se configurando num contexto em que se pode apreender conceitos, realizar procedimentos e desenvolver atitudes matemáticas.

Pelo documento, o ponto de partida do ensino-aprendizagem de Matemática seria a resolução de problemas, pois as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolveria processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

Ao se trabalhar com a Álgebra, a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação seriam otimizados ao se trabalhar com resolução de problemas:

> A organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno. Porém, se o professor se predispuser a traçar no seu planejamento algumas conexões entre os conteúdos matemáticos, estes obstáculos podem ser rompidos. Para tanto, ao construir o planejamento, é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os

> conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos, propor as situações-problema que irão desencadeá-los. É importante que as conexões traçadas estejam em consonância com os eixos temáticos das outras áreas do currículo e também com os temas transversais. (1998, p.138)

3.4.2 Resolução de Problemas como estratégia de ensino

Tendo em vista que a resolução de problemas pelos alunos é um dos procedimentos de coleta de dados desta pesquisa, nos detivemos a estudar a abordagem teórica de expressivos autores sobre o tema.

No que se refere à compreensão dos conceitos matemáticos, a partir da nossa experiência como docentes, precisamos levar em conta como cada pessoa organiza seu pensamento a seu modo. Percebemos em sala de aula o quanto os alunos são diferentes no entendimento dos tópicos que são ensinados e talvez o uso de estratégias diferenciadas possa amenizar as dificuldades encontradas e é esse um dos olhares da Educação Matemática.

Como metodologia de ensino da matemática, compreendemos que a Resolução de Problemas colabora para a significação do conteúdo matemático pelo aluno uma vez que ao percebê-lo em diferentes situações apresentadas nos enunciados, supera a fragmentação restrita ao procedimento operatório resolutivo e atribui-lhe significado. Porém o professor deve ter cuidado, pois às vezes o verdadeiro sentido da atividade acaba sendo perdido e a atividade acaba tendo um fim nela mesma, sem propiciar que ocorra construção de conhecimento pelos alunos.

Um dos procedimentos didáticos é apresentar uma situação onde o problema é facilitador e também desencadeador do processo de aprendizagem, uma vez que o aluno está envolvido por um movimento intelectual de pensamento e construção de conhecimentos, e tem como meta resolver o problema utilizando-se de conceitos matemáticos.

A Resolução de Problemas, além de possibilitar ao aluno uma visão diferente do que está se ensinando, dá ao professor a possibilidade de analisar o procedimento que o aluno usou para se chegar a um resultado. Muitas vezes esta análise mostra quais são as dificuldades dos alunos, quais conceitos matemáticos não foram compreendidos da forma esperada.

Ao analisarmos erros em resoluções de problemas é possível identificarmos dificuldades que alunos venham a apresentar, que podem incluir, entre outras, a compreensão do enunciado do problema. Guérios e Ligeski (2013) investigaram o desempenho de alunos do Ensino Fundamental durante a Resolução de Problemas e identificaram que erros acontecem por ausência de compreensão textual, de conhecimento matemático ou de ambas. Segundo as pesquisadoras,

> No primeiro caso, a dificuldade na leitura comprometeu a compreensão textual dos enunciados, o que impossibilitou ao aluno vislumbrar uma estratégia de resolução para a situação configurada, por ele não compreendida. No segundo caso, a dificuldade esteve na ausência de compreensão conceitual de conhecimentos curriculares, o que impossibilitou ao aluno a identificação do conhecimento matemático que resolvesse a situação configurada, nesse caso por ele compreendida. (GUÉRIOS; LIGESKI, 2013, p. 326)

Segundo Miguel (2006), a competência para a resolução de problemas envolve a compreensão de uma situação que exige a resolução, a identificação de dados, a mobilização de outros conhecimentos, a elaboração de estratégias ou procedimentos, a organização da informação, o teste de validade da resposta e mesmo a formulação de outras situações-problema, ou seja, envolve um raciocínio mais sofisticado, leva o aluno a pensar sobre estratégias de resolução.

Assim sendo, o problema é que justifica a necessidade da operação, isto é, é sempre uma dada situação-problema que precisa ser resolvida a geradora da necessidade de um tratamento matemático capaz de solucioná-la.

O autor ainda diz que, para o aprendiz, é sempre importante criar situações pedagógicas que lhes permitam visualizar os fatos fundamentais das operações, levantar hipóteses, testá-las, poder voltar atrás e refazer a trajetória, o que não seria possível somente com a resolução via algoritmos.

A resolução de problemas, para Diniz (2011), não seria uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

O professor pode proporcionar ao aluno condições para que este possa construir seu conhecimento. Para Freitas (2012), o professor deve evitar adiantar resultados gerais envolvendo conteúdos ainda a serem ensinados. Ele deve estimular os alunos a chegarem aos resultados e sempre que possível deve simular um ambiente científico de pesquisa que proporcione aos aprendizes viverem momentos de investigação. Para isso, deve apresentar a seus alunos problemas carregados de intenções de ensino. Esses problemas devem envolver conhecimentos que o aluno tem e os que vai construir.

3.4.3 George Polya e a Resolução de Problemas

George Polya é um dos autores mais conhecidos e respeitados no que diz respeito à Resolução de Problemas. Polya (1995) nos mostra que para resolver um problema, precisamos saber alguma coisa do assunto em questão e, também, reunir e selecionar os itens relevantes do nosso conhecimento que se encontram em estado latente. A concepção do problema é muito mais ampla no fim do que no princípio.

O que lhe foi acrescentado? Segundo o autor, é acrescentado aquilo que se consegue extrair da nossa memória, pois para chegar à solução, temos de relembrar vários fatos essenciais e recordar, se o nosso problema for um matemático, de problemas já resolvidos, de teoremas conhecidos, de definições. O ato de extrair da nossa memória, de evocar esses elementos relevantes pode ser chamado de *mobilização.*

Polya (1995), em seu modelo para resolução de problemas, acaba por inspirar muitos daqueles que buscam neste recurso um aprimoramento para o processo de aprendizagem em matemática. O modelo de Polya nos dá quatro etapas para a resolução de um problema: (a) compreensão do problema, (b) construção de uma estratégia de resolução, (c) execução da estratégia escolhida e, (d) revisão da solução.

Ainda de acordo com Polya (1995), o professor que deseja melhorar o aproveitamento de seus alunos necessitará de uma caracterização mais rigorosa dos aspectos bons e maus em relação à aprendizagem de seus alunos, necessita de um diagnóstico. Mas como podemos categorizá-lo? Podemos aproveitar a distinção entre as quatro fases da resolução.

De fato, segundo Polya (1995), o comportamento do estudante nessas diferentes fases é muito peculiar e possui as características a seguir relatadas:

A *compreensão* incompleta do problema, em consequência da falta de concentração, talvez seja, para Polya, a dificuldade mais comum que o aluno tem quando resolve um problema.

No que diz respeito à *concepção do plano* e à visualização de uma ideia geral da resolução, duas ações opostas são muito frequentes para o autor: alguns alunos atiram-se ao cálculo sem qualquer plano ou ideia geral ou então esperam desajeitadamente que surja alguma ideia e nada fazem para apressar a sua aparição.

Na *execução do plano,* ainda segundo o autor, o motivo de erro mais frequente é a falta de paciência do aluno para verificar cada passo.

A omissão da *verificação do resultado*, para Polya, é muito comum: o aluno contenta-se em obter uma resposta, põe de lado o lápis e não se espanta com os resultados, por mais disparatados que eles forem.

Mas resolver um problema não é somente verificar se a aplicação das técnicas descritas acima foi cumprida e a resposta correta foi obtida, pois esta seria uma visão muito simplista do que Polya propõe em seu livro *A Arte de Resolver Problemas.* A teoria não pode ser reduzida a uma "receita" para que o aluno simplesmente seja um bom "resolvedor de problemas" e Polya (1995) diz que o ensino deve ser ativo.

Polya (1995) mostra a Matemática não como disciplina formal, mas como dependente da intuição, da imaginação, da descoberta. Por exemplo, antes de provar um teorema é preciso imaginar a ideia da prova. O autor diz que ao se falar da intuição na resolução de problemas nos vêm à mente a imagem do professor da nossa infância, que não nos deixava usar a imaginação, pois era necessário que resolvêssemos os problemas do jeito que ele queria, sem dar palpite, sem usar a intuição.

Seria então necessária uma conexão entre o professor e o aluno. O professor precisa gostar da sua matéria, ter interesse por ela e conhecê-la muito bem, mas também precisa olhar para o aluno, sentir suas angústias e frustrações, se colocar no lugar do aluno. Isso cria a conexão!

Ao deixar que o aluno use sua intuição, que ele opine, que ele use sua imaginação para resolver um problema, o professor permite que o aluno perceba que suas ideias também são importantes. Como é bom aprender alguma coisa que você ajudou a pensar, a descobrir como funciona! O aluno pode descobrir por si algo que precisa aprender.

Polya (1995) diz que os alunos capazes de fazer algo por seus próprios meios têm *know how*, que é a habilidade de lidar com as informações adquiridas. Ter o *know how* seria mais importante do que ter a informação repassada pelo professor, pois o ato de ter a habilidade está diretamente ligado à capacidade do aluno em fazer analogias e deduções.

No que se refere ao erro e acerto dos alunos, o autor segue dizendo que em vez de apresentar a resolução certa ou errada aos demais alunos, é melhor acompanhar o que o aluno escreveu linha por linha na sua resolução e incentivá-lo, dialogando e mostrando onde poderia melhorar. E então o professor poderia sugerir um caminho, caso fosse preciso. Mas é necessário que o professor encoraje seus alunos a usarem a intuição, a originalidade, a buscar um trabalho criativo e fazê-los experimentar a tensão e o triunfo da descoberta.

Segundo Medeiros (2007), não podemos deixar que as teorias de Polya se tornem simplistas, apenas receitas a serem seguidas. É preciso perceber a sua preocupação com as analogias e com a indução. Nos exemplos do livro o autor deixa bem claro que sempre é necessário buscar analogias com conhecimentos adquiridos previamente, de forma ativa.

Finalizando, Polya (1995) não apenas nos mostra os passos para resolver um problema, mas chama a atenção para o potencial das descobertas, do trabalho criativo dos alunos e para o tratamento da matemática como disciplina ativa, onde se pode abstrair conceitos a partir de situações matemáticas utilizando também nossa criatividade e intuição.

3.4.4 Algumas considerações de Lourdes Onuchic e Alan Shoenfeld sobre Resolução de Problemas

Onuchic (2012) aborda a Resolução de Problemas a partir do tripé formado por Ensino-Aprendizagem-Avaliação em que afirma que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a construção de novo conhecimento faz-se presente através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Uma proposta para a metodologia, segundo Onuchic (2012) consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

- P*reparação do problema*, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador;

- *Leitura individual*, onde é entregue uma cópia do problema para cada aluno e solicita-se que seja feita sua leitura;
- L*eitura em conjunto*, onde é realizada uma nova leitura em grupos com o auxílio do professor, se necessário;
- R*esolução do problema*, que é a solução do problema proposto e o professor aqui considera os alunos como co-construtores da “matemática nova” que se quer trabalhar;
- O*bservação e incentivo*, ou seja, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo e leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles;
- R*egistro das resoluções na lousa*, onde os representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam;
- *Plenária*, que consiste no convite a todos os alunos para que participem da discussão dessas diferentes resoluções, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem;
- *Busca de consenso*, que é o momento em que são sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema e o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto;
- *Formalização do conteúdo*, onde o professor registra na lousa uma apresentação “formal”, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Zuffi e Onuchic (2007) compactuam com os demais teóricos que entendem que problema *é* tudo aquilo que não se sabe fazer e que, na escola deverá estar interessado em resolver, isto é, uma situação que seja estimulante para o aluno, que o leve a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial. Também é desejável que ela tenha reflexo na realidade dos alunos a que se destina:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo,

> estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 83)

As autoras acreditam que a Resolução de Problemas como uma metodologia, para a área de Matemática, pode colaborar para que haja alguma mudança na perspectiva da ação docente, para além da organização do conhecimento em disciplinas. A intervenção seria modesta, pois a organização da escola escolhida permanece pautada no modelo disciplinar.

No entanto, com a aplicação reiterada desta metodologia, os alunos são estimulados a relacionar os conhecimentos escolares adquiridos, não só à resolução de problemas matemáticos e suas generalizações, mas também com problemas relativos a outras áreas do conhecimento e outras disciplinas escolares. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007)

Como podemos perceber, os passos da Resolução de Problemas por Onuchic e Polya possuem algumas diferenças, como por exemplo, Polya não priorizar a leitura em conjunto nem a verificação plenária da resolução apresentada pelos alunos. A seguir apresentamos um quadro comparativo com os passos para a Resolução de Problemas, conforme Polya e Onuchic, para melhor visualização do que foi dito anteriormente:

PASSOS PARA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA	
POLYA	**ONUCHIC**
Compreensão do problema;	Preparação do problema;
	Leitura individual;
Concepção do plano;	Leitura em conjunto;
	Resolução do problema;
Execução do plano;	Observação e incentivo;
	Registro das resoluções na lousa;
Verificação do resultado.	Plenária;
	Busca de consenso;
	Formalização do conteúdo.

Tabela 1 - Quadro comparativo dos passos para Resolução de Problemas.
Fonte: referencial teórico da pesquisa.

Já Schoenfeld (1996) diz que o objetivo da metodologia de Resolução de Problemas não seria somente resolver problemas, mas auxiliar o aluno a pensar matematicamente. E pensar matematicamente significa ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso.

O autor segue dizendo que os problemas que vemos – quer na resolução de problemas ou em instrução regular – deveriam servir como introduções ao pensamento matemático. E, segundo o autor, devem ter quatro propriedades, listadas a seguir.

- Em geral, os bons problemas são (relativamente) acessíveis. São facilmente compreendidos e não requerem uma quantidade de vocabulário ou maquinaria para poder fazer progressos neles.
- Se deve preferir problemas que possam ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos. Para alunos iniciantes é bom ver múltiplas soluções: os alunos tendem a pensar que há só uma maneira de resolver qualquer problema (usualmente

o método de resolução que o professor acabou de demonstrar na classe). É necessário que eles compreendam que o fundamental não é obter uma resposta, mas as relações.

- Os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas. Isto pode acontecer de duas maneiras, pelo menos. Obviamente, os tópicos e as técnicas matemáticas envolvidas na resolução de problemas podem ser de importância compatível.
- Os problemas utilizados devem servir, se possível, como “germens” para “honestas e boas” explorações matemáticas. Problemas abertos são boas maneiras de levar os alunos a *fazer* Matemática. Outra é escolher problemas que sejam extensíveis e generalizáveis. Bons problemas conduzem a mais problemas e se o domínio é suficientemente rico, os alunos podem começar com problemas “gérmen” e começar a fazer o seu domínio.

Estudar diversas abordagens sobre Resolução de Problemas teve o objetivo de nos circunstanciar teoricamente tanto para elaborarmos os enunciados dos problemas que seriam resolvidos pelos alunos, quanto para analisar suas resoluções.

3.5 UM BREVE ESTUDO SOBRE A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Este tópico traz um breve estudo sobre a álgebra e o pensamento algébrico e tem por objetivo nos situar sobre os diferentes olhares do que seria a álgebra e como se dá a construção do conhecimento algébrico e algumas de suas peculiaridades em relação ao conhecimento aritmético previamente construído pelo aluno.

A partir de um pequeno estudo sobre a evolução das notações algébricas, a aprendizagem da álgebra escolar e as equações, discorreremos sobre o pensamento algébrico.

Tomamos por base o que diversos autores nos dizem sobre estes assuntos e elencamos, tentando manter certa ordem, as diferentes concepções de álgebra e pensamento algébrico, como as ideias de generalização, relações entre aritmética e álgebra escolares, linguagens e simbologia.

3.5.1 O início da Álgebra na escola

Lins e Gimenez (2001) consideram as seguintes fases da evolução das notações algébricas em vários momentos históricos: retórica (eram utilizadas apenas palavras), sincopada (havia alguma notação especial, em particular palavras abreviadas) e simbólica (são utilizados apenas símbolos e manipulações). Das fases retórica a sincopada e simbólica, segundo os autores, haveria um correspondente desenvolvimento intelectual.

Os autores ainda mostram que partindo da ideia Piagetiana de desenvolvimento intelectual a partir da maturação eminentemente biológica, o ensino-aprendizado da álgebra na escola deveria ser iniciado de forma tardia, porém Lins e Gimenez discordam ao lerem trabalhos sobre a produção de significados para a álgebra e dizem que "[...] é preciso começar mais cedo o trabalho com a álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicando no trabalho da outra." (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 10)

Moura e Sousa (2005) mostram que no processo de constituição de uma linguagem simbólica, síntese de abstrações diversas, a álgebra contém o movimento da vida, pois o movimento é gerado a partir dos movimentos dos problemas da vida das diversas culturas.

E, segundo as autoras, é a partir das álgebras retórica, sincopada, geométrica e simbólica, que se forma o pensamento algébrico que por sua vez leva ao pensamento flexível da realidade. As autoras, diferente de Lins e Gimenez (2001), incluem a fase geométrica (CARAÇA, 1951) na linha evolutiva da álgebra, fase que vem de quando a geometria estava descolada da aritmética e as verdades eram representadas a partir de formas, de proposições geométricas. Por exemplo, podemos contextualizar as equações de 2º grau sob o ponto de vista geométrico, quando exploramos o conceito de áreas quadradas e retangulares apresentados tendo a medida de um dos seus lados apresentada como a incógnita x ou relacionada a uma incógnita x.

3.5.2 A aprendizagem da álgebra

O trabalho de Lins e Gimenez (2001) permite que identifiquemos de que modo aritmética e álgebra se relacionam, mas de forma diferente das leituras tradicionais, onde “álgebra é aritmética generalizada” ou “álgebra é estrutura da aritmética”. Os autores dizem que realmente há um corte, uma ruptura no que se refere à compreensão da educação aritmética e da educação algébrica, porém isso não pode significar abandono do que se foi visto em pesquisas anteriores em detrimento a uma nova leitura dessas compreensões.

A coexistência da álgebra e da aritmética permitiria que a álgebra fosse vista como relações entre números, operações aritméticas e igualdades (ou desigualdades) e que a aritmética fosse vista como uma ferramenta que toma parte do processo de organização da atividade humana, a partir de relações quantitativas entre coleções de objetos, como os diferentes números, por exemplo. (LINS; GIMENEZ, 2001)

Segundo os autores, a educação aritmética tem sido insuficiente em termos de seu alcance e a educação algébrica tem sido insuficiente em termos de objetivos. A primeira precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades que considera e a segunda precisa considerar o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver a partir do modo de produção de significados que o sustenta e que estes aspectos é que conferem legitimidade ao aprendizado do aluno.

Os autores ainda ressaltam que a educação aritmética e a algébrica devem a um só tempo se integrar com a escola e com o mundo fora da escola, de modo que os alunos aumentem seus repertórios e produzam significados a partir delas.

O grande objetivo da educação aritmética e algébrica deve ser encontrar o equilíbrio em três frentes: o desenvolvimento da capacidade de colocar em jogo nossas habilidades de resolver problemas, de investigar e explorar situações; o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significados, ou seja, diferentes modos de pensar e o aprimoramento de habilidades técnicas, em outras palavras, a capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade. (LINS; GIMENEZ, 2001)

Considerando que a matemática pode ser concebida como forma particular de organização de eventos e objetos do mundo, segundo Loos, Falcão e Acioly-Regniér (2001), a matemática pode ser entendida como atividade humana, embora mais comumente seja considerada como a mais abstrata, racional, formal e descontextualizada das disciplinas. Ao perceber a matemática como atividade humana, devemos procurar compreender o que é esse objeto desenvolvido pelos indivíduos, mas como também estes se relacionam com ela.

Ao se pensar na passagem da aritmética para a álgebra no ensino da matemática, para Loos, Falcão e Acioly-Regniér (2001) na visão dos alunos, é fazê-los se deparar com o novo, onde existe a mobilização do pensamento para lidar com um novo conhecimento, conhecimento que pode nos incomodar e confundir. E estes detalhes podem passar despercebidos aos professores.

Para eles, quando o aluno é apresentado ao campo conceitual da álgebra, isso requer uma série de modificações em seus conhecimentos teóricos e práticos anteriores, bem como a aquisição de novas concepções e competências, gerando desequilíbrio nas concepções já existentes. Ou seja, para os autores, concepções válidas em certo domínio se revelam improdutivas em outro, se constituindo um obstáculo à aprendizagem. O que acontece, então, é que um erro, visto como efeito de um conhecimento anterior, se mantido pode se revelar falso ou inadaptado.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), uma perspectiva assumida por alguns autores é a de que o objeto central da Álgebra são os símbolos. Este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica. Deste modo, faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas.

A verdade é que não podemos minimizar a importância dos símbolos. A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009)

Ponte, Branco e Matos (2009) ainda nos mostram que esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza e é esta vida própria da Álgebra que tem tendência a se desligar dos referentes concretos iniciais (não simbólicos) e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno.

É, ainda pelos autores, o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstrato, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios.

Trivilin e Ribeiro (2015), ao tratarem da aprendizagem algébrica, falam sobre as diferentes compreensões do sinal de igualdade, tanto dos professores quanto dos alunos. Para os alunos, o sinal de igual é apenas um indicativo de onde devem colocar o resultado de uma operação, e na mudança da aritmética para a álgebra algumas dificuldades na aprendizagem estão relacionadas à mudança de significados do sinal de igualdade, pois a igualdade aparece como significado de equivalência, ou seja, “[...] indica o mesmo valor, a mesma coisa ou o que tem de um lado é igual ao que tem do outro lado.”. (TRIVILIN; RIBEIRO, 2015, p. 45)

Ainda segundo os autores, outro significado do sinal de igualdade é a noção relacional, identificada quando o sinal de igualdade pode identificar uma igualdade de expressões, em uma relação funcional.

Lins e Gimenez (2001) mostram que as discussões das atividades algébricas passam pelas tendências “letristas”, ou seja, que a álgebra é “um cálculo com letras”, prática não baseada em nenhuma reflexão ou investigação ou profundidade, ineficaz e perniciosa à aprendizagem, mas que é aceita e sobrevive por resignação dos professores.

Os autores, indo contra as tendências letristas, categorizam a álgebra como equações e expressões numérico-literais, pensando na possibilidade de produção de significado para todas elas em relação a um núcleo comum: números, operações aritméticas, igualdade e desigualdade.

Savioli (2009), ao discutir o ensino da álgebra, diz que a formalidade da escrita matemática se faz indispensável, pois é na álgebra que o estudante começa a conhecer o que é matemática e como se expressa em matemática, fazendo-se entender e, logo, comunicando-se com o mundo matemático.

Porém, para a autora, se o ensino se reduz a uma memorização de procedimentos, operações sobre sequências de símbolos e resolução de problemas artificiais sem significado para os alunos, os estudantes não refletem sobre suas próprias experiências, não articulam seus conhecimentos e não percebem a importância e a utilidade do conhecimento matemático que construíram nas suas vidas.

Ao se utilizar de problemas, ao encontrar um modo de conseguir a solução, o aluno enfrenta novos desafios e descobre por si só a melhor estratégia que deve ser utilizada para o problema ser solucionado (POLYA, 1995).

O autor ainda diz que o estudante pode então levar este aprendizado para o seu cotidiano, utilizando o que aprendeu não somente em problemas relacionados à

Matemática, mas incorporando este procedimento de reflexão, enfrentamento das dificuldades e busca de soluções ao seu modo de ver o mundo, aguçando seu raciocínio:

> Não apenas os piores alunos da turma, mas até alunos bem inteligentes, podem ter aversão à álgebra, que se justificará se não for lhe dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio. Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefas do professor. (POLYA, 1995, p.101)

3.5.3 As equações e a Álgebra

Ao pensar em álgebra, geralmente nos lembramos das equações, que são consideradas um conceito importante da Álgebra, e por isto foram escolhidas como objeto deste trabalho.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), as equações, ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações, encaminham o trabalho com a Matemática para outro nível de abstração, pois envolve novos símbolos e novas regras de resolução, de manipulação, que anteriormente não seriam utilizadas de forma explicita pelos alunos. Para os autores, o início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos pelo novo grau de entendimento e abstração que se é exigido.

É importante, ainda segundo Ponte, Branco e Matos (2009), ter atenção, pois o trabalho com equações facilmente pode conduzir a uma mecanização de procedimentos por parte dos alunos, sem qualquer compreensão do que estão fazendo. Para evitar que isso aconteça, o professor deve proporcionar aos alunos experiências informais, em casos necessariamente simples, antes da resolução algébrica formal.

3.5.4 O pensamento algébrico

Ao compreender efetivamente o que ocorre quando se resolve uma equação, podemos dizer que o aluno desenvolveu o pensamento algébrico. Para Savioli (2009), "[...] o pensamento algébrico pode ser entendido como uma manifestação do conhecimento tendo como sujeito o aluno e como objeto a álgebra. Pensamento e linguagem, deste ponto de vista, estão ligados, pois o pensamento se confirma por meio da linguagem, verbal ou não verbal.". (SAVIOLI, 2009, p.1)

Já para Lins e Gimenez (2001), pensar algebricamente é produzir significação em termos de números e operações aritméticas e com essa base transformar as expressões obtidas.

Os autores Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) caracterizaram o pensamento algébrico a partir da análise de situações que consistiram de problemas algébricos nos quais nem sempre ficava evidente a manifestação do pensamento algébrico, suspendendo os aspectos linguísticos das situações apresentadas para assim perceber a existência de elementos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com aspectos que variam.

O pensamento algébrico, ainda segundo os autores, pode manifestar-se ainda que não se tenha a parte literal explícita num problema e a falta de conhecimento de uma linguagem mais aperfeiçoada e a pouca habilidade com o simbolismo matemático podem nos levar a considerar que não houve pensamento algébrico na solução de questões.

Para Savioli (2009), o ensino de álgebra, como vem sendo realizado, não surte efeito nos alunos, nem nos do ensino fundamental, nem nos do ensino médio, nem nos do ensino superior, pois os alunos são meros reprodutores de regras e fórmulas sem reflexão alguma sobre o que estão resolvendo, gerando dificuldades na resolução de problemas, no desenvolvimento do raciocínio algébrico e no conhecimento da linguagem algébrica.

Ponte, Branco e Matos (2009) ponderam que poderíamos dizer que o grande objetivo do estudo da Álgebra, na educação básica, é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos e este pensamento incluiria a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além disso: o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções.

Inclui ainda, segundo os autores, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. Além da capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o “sentido de símbolo”, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas.

E os autores ainda mostram que um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos, ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção às relações existentes entre os objetos, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), na perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico, acima apresentados, se reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal, pelo contrário, aprender álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação.

Se resumirmos a atividade algébrica à manipulação simbólica, segundo os autores, reduziremos a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas, o que corrobora com Araújo (2008), quando diz que:

> Para que ocorram mudanças, tão necessárias no ensino de álgebra, é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico. Entendemos que o pensamento algébrico está presente não apenas quando se trabalha na álgebra formal, mas em diversos campos do conhecimento manifestados por diversas linguagens, como a aritmética, a geométrica ou mesmo a natural. É necessária uma imersão em atividades algébricas, que propiciem a construção do pensamento algébrico […] (ARAÚJO, 2008, p.338)

O autor ainda diz que não se pode utilizar uma nova linguagem, no caso a algébrica, sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização e deve-se entender que a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Como o pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola pode-se afirmar que a álgebra perde seu valor como um rico instrumento para o desenvolvimento de um raciocínio mais abrangente e dinâmico.

Forentini, Miorin e Miguel (1993) também dizem que tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra.

Para os autores, entretanto, tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento e leitura do mundo. Os autores ainda vão além, dizendo que em cada época, vimos surgir, para expressar o pensamento algébrico, uma linguagem possível e integrada historicamente à cultura de uma determinada comunidade.

Segundo Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), na análise das resoluções ou produções dos alunos, se tomam aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, como afirmam a seguir:

> [...] como principal referência para identificar a evolução do pensamento algébrico que vai de uma fase pré-algébrica (quando o aluno utiliza algum que outro elemento considerado algébrico - letra, por exemplo - mas não consegue, ainda, concebê-lo como número generalizado qualquer ou como variável), passa por uma fase de transição (do aritmético para o algébrico, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalização, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica), atingindo, enfim, um pensamento algébrico mais desenvolvido (expressando capacidade de pensar e se expressar genericamente, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz não só de expressá-las por escrito, mas, também, de operá-las). (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 5)

Cabe, contudo, esclarecer que, para os autores, o aluno pode atingir a terceira fase do pensamento algébrico, sem necessariamente fazer uso de uma linguagem estritamente algébrico-simbólica, não deixam de reconhecer que o pensamento algébrico se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele.

Se, de um lado, a introdução precoce e sem suporte empírico a uma linguagem simbólica e abstrata pode funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro, o menosprezo ou recusa ao modo simbólico e formal de pensar algebricamente, pode representar também um freio ao pleno desenvolvimento do pensamento algébrico. (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993)

3.5.5 A álgebra e as equações nos Parâmetros Curriculares Nacionais

De acordo com os PCN, devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos, não é desejável que no 6º e 7º anos do ensino fundamental se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nessa etapa que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas.

É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno se depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que os PCN recomendam é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. É importante salientar que não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre.

Os PCN citam que os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos e em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se até afirmar que os procedimentos não algébricos (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária.

Então é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções aritméticas tanto quanto as algébricas.

O trabalho com a Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental, teria como ponto de partida a pré-álgebra desenvolvida nos anos anteriores, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações.

Desse modo, pelo documento, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes empregos da Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas).

Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções, o que dificultaria ainda mais a sua compreensão.

Quanto à álgebra e ao currículo, temos que:

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (1998, p.116, grifo nosso).

Os professores muitas vezes não desenvolvem todos os aspectos da Álgebra no ensino fundamental, pois preferem trabalhar fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações muitas vezes desconectadas dos problemas.

Ao se iniciar o estudo da manipulação simbólica, ou seja, do sentido que o aluno está construindo com as letras, ainda segundo o documento, poderá se completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. “Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema.”. (1998, p.118, grifo nosso)

A noção de variável, tão importante na Álgebra, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o ensino médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar um valor desconhecido.

Ou seja, para eles, a letra sempre significaria uma incógnita, não uma variável. “A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.”. (1998, p.118)

Pelo que mostram os PCN, na pouca quantidade que o documento tem de informações sobre equações em geral, nas séries iniciais já se pode desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas.

Pela exploração de situações-problema o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

Esse encaminhamento dado a Álgebra pelos PCN, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas numa equação, possibilitaria a exploração da noção de função nos últimos anos do ensino fundamental. Entretanto, pelo documento, a abordagem formal desse conceito só deverá ser objeto de estudo do ensino médio, sendo apresentada somente uma introdução no ensino fundamental.

É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o documento recomenda que os alunos sejam estimulados pelo professor a construir procedimentos diversos para resolvê-las:

> Ao longo dessas etapas é importante que os alunos percebam que as equações, sistemas e inequações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis do ponto de vista aritmético. Nesse caso, a letra assume o papel de incógnita e eventualmente de parâmetro. (1998, p.121)

O documento ainda diz que no trabalho do conteúdo de equações podem ser propostos problemas com contextos diversificados (matemático e não-matemático) para que os alunos tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e então construir as regras para resolução de equações.

Pelo que se pode verificar, é dada grande ênfase à importância da álgebra nos conteúdos referentes às equações polinomiais, o que corrobora com o que nos dizem os autores que estudamos para realizar este trabalho.

4 REFERENCIAIS TEÓRICOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos que utilizamos para a análise das entrevistas feitas com os alunos. É uma análise subjetiva, centrada na fala dos alunos, uma vez que na nossa concepção, o aluno não é só objetivo nas suas resoluções, mas tem sua subjetividade presente todo o tempo nas suas ações, pensamentos, ideias e sofre as consequências desta subjetividade.

Suas experiências com a Matemática também são levadas em conta na construção do seu conhecimento, experiências estas que o marcaram e fazem que sua compreensão seja diferenciada, bem como a relação que o aluno faz entre os conceitos que já estão presentes na sua estrutura cognitiva e os novos conceitos que estão sendo construídos.

4.1 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE DAVID AUSUBEL

David P. Ausubel foi um dos teóricos cognitivistas que apresentou uma teoria a respeito da aprendizagem e das formas de incorporação da aprendizagem de novos materiais à estrutura cognitiva, trabalhando com o ensino-aprendizagem em situações escolares.

Para Moreira e Masini (2011), o cognitivismo procura descrever, em linhas gerais, o que acontece quando o ser humano se localiza, se situa na organização do seu mundo, de forma que consiga distinguir o igual do diferente, ou seja, classificar seu mundo em classes de equivalência.

Já para definir cognição, os autores mostram que esse é um processo que dá origem a um mundo de significados, pois o indivíduo à medida que se situa no mundo, estabelece relações de significação, atribuindo significados àquilo que o cerca. Aprendizagem, segundo o construto cognitivista, é o processo de armazenamento da informação, a condensação destas informações em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporadas à estrutura mental do indivíduo, de modo que possam ser manipuladas no futuro.

Segundo Ausubel (2003), existem dois tipos de aprendizagem: a aprendizagem por descoberta (o aprendiz encontra sozinho o significado de um conceito que estava imerso no conteúdo total a ser aprendido) e a aprendizagem por recepção (o material é apresentado ao aluno em sua forma pronta, final e acabada), mas que ambas possuem características da aprendizagem por recepção:

> De fato, *quer* a aprendizagem por recepção, *quer* a pela descoberta, exibem *ambas* muitas características do modo de recepção. A única diferença verdadeira entre as duas é que na aprendizagem por recepção se apresenta ao aprendiz o conteúdo principal do que está por aprender, ao passo que na aprendizagem pela descoberta deve reorganizar-se a proposição levantada pelo problema e os conhecimentos anteriores relevantes que esta suscita, de forma a preencher-se os requisitos de uma relação meios–fim. Esta última formulação e análise de hipóteses de resolução de problemas é, na verdade, o único aspecto verdadeiro da famosa aprendizagem pela descoberta. (AUSUBEL, 2003, p.54)

A aprendizagem por recepção significativa envolve, segundo o autor, principalmente, a aquisição de novos significados a partir do material de aprendizagem apresentado, satisfazendo as seguintes condições: que este seja um material *potencialmente* significativo para o aprendiz e que a estrutura cognitiva (estrutura dos conhecimentos do indivíduo) *particular* do aprendiz contenha ideias *ancoradas* relevantes que possam se relacionar com o novo material.

A interação entre novos significados potenciais e ideias relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz dá origem a outros novos significados e como a estrutura cognitiva de cada aprendiz é única, todos os novos significados adquiridos são, também eles, obrigatoriamente únicos. Ausubel (2003) emprega o termo *ancoragem* para sugerir a ligação dos novos significados com as ideias preexistentes ao longo do tempo.

Mas a aquisição de novos conhecimentos nem sempre se dá de maneira simples. O percurso escolar dos alunos, para Brito (2001), é marcado por dificuldades para trabalhar os conteúdos que são ensinados-aprendidos, uma vez que ao longo da sua vida estudantil as aprendizagens vão se tornando cada vez mais complexas e entrelaçadas.

Mas o que significa adquirir um novo conhecimento? A “aquisição” de um conhecimento, para Ausubel (2003), não possui um sentido construtivista, possui um significado de “ganhar a posse” de novos significados (conhecimentos) que anteriormente não se compreendiam ou não existiam e pode ocorrer através de um processo de memorização, ou ainda significativo, ou ainda autoritário, não integrado, passivo, mecânico e absorvente.

A maneira como a aprendizagem acontece, segundo Ausubel (2003), é diferente da maneira como o aluno vai incorporar uma nova aprendizagem, o que possibilita maior ou menor retenção do conteúdo aprendido e uma maior ou menor transferência dessa aprendizagem para novas situações e usos posteriores.

Ou seja, diferentes mecanismos de aprendizagem serão acionados e serão processados diferentemente, e incorporados e retidos na estrutura cognitiva do aluno de formas distintas. Para o autor, as situações de aprendizagem do aluno podem ser entendidas como todos os fatores externos e internos e experiências passadas vivenciadas pelos alunos.

Ausubel (2003) diz que ao final de um processo de aprendizagem significativa, o aprendiz constrói a memória semântica, mais formal e de onde emergem novos significados, que são produtos substantivos da interação entre significados potenciais do material significativo com as ideias ancoradas na estrutura cognitiva do aprendiz e "[...] acabam por se tornar, de forma sequencial e hierárquica, parte de um sistema organizado, relacionado com outras organizações de ideias (conhecimentos) tópicas e semelhantes da estrutura cognitiva.". (AUSUBEL, 2003, prefácio)

Nesse processo, a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, chamado por Ausubel de *conceito subsunçor*, existente na estrutura cognitiva do indivíduo, e o armazenamento de informações é altamente organizado e forma uma hierarquia conceitual entre os elementos que estão relacionados e assimilados, ou seja, uma estrutura hierárquica de subsunçores, que seriam as abstrações das experiências dos indivíduos, que é chamada de estrutura cognitiva.

Ao contrário das aprendizagens significativas, as aprendizagens por memorização não aumentam a composição do conhecimento e normalmente possuem (ex.: os números de telefone) uma utilidade limitada, prática e com intuito de poupar tempo e esforço. "Na aprendizagem por memorização ocorre uma ligação simples, arbitrária e não integradora com a estrutura cognitiva preexistente.". (AUSUBEL, 2003, p.3)

Porém, Ausubel diz sobre a aprendizagem por memorização que:

> […] esta capacidade, arbitrária e literal, de relacionar tarefas de <u>aprendizagem por memorização com a estrutura cognitiva possui determinadas consequências significativas para a aprendizagem.</u> Em primeiro lugar, uma

> vez que o equipamento cognitivo humano, ao contrário do de um computador, não consegue lidar de modo eficaz com as informações relacionadas consigo numa base arbitrária e literal, apenas se conseguem interiorizar tarefas de aprendizagem relativamente simples e estas apenas conseguem ficar retidas por curtos períodos de tempo, a não ser que sejam bem apreendidas. Em segundo, a capacidade de relação arbitrária e literal para com a estrutura cognitiva torna as tarefas de aprendizagem por memorização altamente vulneráveis à interferência de materiais semelhantes, anteriormente apreendidos e descobertos de forma simultânea ou retroativa. (AUSUBEL, 2003, p. 4, grifo nosso)

Seja na aprendizagem por memorização, seja na significativa, a reprodução real do material retido pelo aprendiz também é afetada por fatores como as tendências culturais, de atitude do indivíduo e pelas exigências de situação específicas de onde se exige a reprodução. (AUSUBEL, 2003)

“Estas diferenças entre os processos de aprendizagem por memorização e significativa explicam, em grande parte, a superioridade da aprendizagem e da retenção significativas em relação aos correspondentes por memorização.”. (AUSUBEL, 2003, p. 4)

Segundo o autor, muitas vezes se apresenta aos alunos matéria potencialmente significativa, geralmente de forma expositiva, de tal forma equivocada que apenas conseguem apreendê-la por memorização.

Ou seja, apresenta-se ao aprendiz, numa forma mais ou menos final, o conteúdo principal daquilo que o mesmo deve apreender e assim apenas se exige do aprendiz que compreenda o material e o incorpore na própria estrutura cognitiva, de forma a ficar disponível quer para reprodução, para aprendizagem relacionada ou para resolução de problemas no futuro. (AUSUBEL, 2003)

O autor ainda diz que se o aprendiz não tiver o suporte ideacional pertinente (que pode ser uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição), a aprendizagem será incorporada de forma mecânica.

Segundo Jesus e Fini (2001), o uso de métodos de ensino que favorecem a ocorrência de aprendizagem mecânica é muito comum entre professores de matemática. “Isso ocorreria porque os alunos não apresentam disposição para a aprendizagem significativa, devido à ansiedade ou a uma experiência de fracasso, acarretando assim falta de confiança e baixa autoestima”. (JESUS; FINI, 2001, p. 135)

A aprendizagem mecânica muitas vezes se torna primordial, dependendo da informação que se está adquirindo: “[...] a aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire informação numa área de conhecimento totalmente nova para ele.”. (MOREIRA; MASINI, 2011, p. 19).

Segundo Ausubel (2003), essa aprendizagem mecânica ocorre até que elementos do conhecimento, relevantes às novas informações, existam na estrutura cognitiva e então possam servir de subsunçores, mesmo que ainda sejam pouco elaborados. Se a aprendizagem for se tornando significativa, esses subsunçores se tornam cada vez mais elaborados e capazes de ancorar novas informações.

Quanto à memorização, para Brito (2001), o termo é entendido como única e exclusivamente o ato de decorar determinados conteúdos e posteriormente “recitá-los” sem nenhuma compreensão dos significados subjacentes a eles.

Mas a memória refere-se também à retenção das experiências passadas, inclusive experiências prévias com conteúdos significativos anteriormente aprendidos. Para a autora, um conteúdo previamente “decorado” e incorporado de forma mecânica ainda assim pode vir a tornar-se significativo, pois o entendimento de tal conteúdo pode acontecer posteriormente.

A aprendizagem significativa constitui apenas a primeira fase de um processo de assimilação mais vasto e inclusivo, que também consiste na própria fase sequencial, natural e inevitável, da retenção e do esquecimento. Ausubel (2003) apresenta então a Teoria da Assimilação, que justamente trata da retenção e do esquecimento das informações:

> [...]explica a forma como se relacionam de modo seletivo, na fase de aprendizagem, novas ideias potencialmente significativas do material de instrução com ideias relevantes, e, também, mais gerais e inclusivas (mais estáveis), existentes (ancoradas) na estrutura cognitiva. Estas ideias novas interagem com as ideias relevantes ancoradas e o produto principal desta interação torna-se, para o aprendiz, o significado das ideias de instrução acabadas de introduzir. Estes novos significados emergentes são, depois, armazenados (ligados) e organizados no intervalo de retenção (memória) com as ideias ancoradas correspondentes. (AUSUBEL, 2003, p. 8)

Mas o autor diz ainda que as próprias ideias ancoradas também se alteram de forma variável no processo interativo, quer com as novas ideias de instrução com as quais interagem, quer, mais tarde, com os novos significados emergentes aos quais estão ligadas no armazenamento de memória. Se a ligação entre as ideias se estabelecer, parte do processo de retenção então diz respeito a esta ligação e armazenamento das ideias recentemente apreendidas com as ancoradas e mais estáveis.

Após estas colocações sobre a construção do conhecimento para Ausubel, verificar-se-á, num *continuum*, os elementos da Teoria da Complexidade que embasam a análise dos dados desta pesquisa.

4.2 ELEMENTOS DA TEORIA DA COMPLEXIDADE E DO PENSAMENTO COMPLEXO DE EDGAR MORIN

Como visto anteriormente, a construção do conhecimento envolve certos aspectos, como a interligação que o aluno faz com a nova informação que recebe e as experiências anteriores que ele tem guardadas na memória somados, geralmente, à obediência de certa regra que no caso da pesquisa é o algoritmo.

Esta construção pode não ser simples e se o aluno não tiver consigo, bem fundamentados, os conceitos necessários, que seriam os conceitos subsunçores segundo Ausubel (2003), para o entendimento deste novo conhecimento, pode ser que a legítima construção do novo conceito apresentado não aconteça.

Para Petraglia (2015), a construção do conhecimento pressupõe aprendizagem e mudança de comportamento a partir da nova descoberta ou verificação e a finalidade primeira das instituições de ensino seria refletir sobre o processo de produção de conhecimento que promovem.

A partir do momento que se entende que a construção do conhecimento, a compreensão do conceito matemático, a relação professor-aluno, a escola e suas relações com a sociedade são complexos, ou seja, “tecidos juntos” (MORIN, 2010), o sistema escolar passa a ser visto pela inter-retro-ação de suas partes. O aluno, o professor, o método de ensino, a aprendizagem, a escola, a comunidade e assim por diante, ao se relacionarem entre si, das mais diferentes maneiras, formam um todo sistêmico.

Ao falar sobre uma Pedagogia Complexa pautada pelo pensar complexo, Sá (2015) explicita uma interpretação da realidade educativa, que busca tecer, religar saberes, incorporar processos de análise e descrição dos fatos e eventos do fenômeno educacional:

> Seu olhar caminha na bricolagem, na tessitura e na captura dos movimentos, das ações, das interações, das retroações, dos desvios, dos antagonismos, das complementaridades, das ordenações e das desordenações que

> integram o processo educativo que, como um holograma, representa ou apresenta as dimensões constituintes da sociedade da qual é produto e produtora. (SÁ, 2015, p. 65)

Assim, pensamos que o fenômeno educativo pode ser observado, descrito, analisado e interpretado a partir de suas partes constituintes e de suas especificidades, parte e todo, este retroagindo sobre as partes e intercambiando movimentos dinâmicos complementares e antagônicos do qual emerge um todo: a escola ou o fenômeno educativo. (SÁ, 2015)

Outros questionamentos surgem: quem é o aluno? Quem é o professor? O que é a Matemática? Por que estudamos Matemática na escola? Ao nos colocarmos na posição de observadores inseridos na observação e voltando à questão da aprendizagem, o olhar se volta primeiramente aos “eus” presentes no processo de aprendizagem, ou seja, os sujeitos que fazem parte e as interações envolvidas entre eles.

Começando pelo “eu-aluno”. Ele é um conjunto de muitos “eus”, como todos nós. Ele é aluno-pessoa, aluno-família, aluno-cidadão. O aluno não é somente “computo”, ser computante que se situa no centro do universo, que ele ocupa de forma exclusiva, o aluno também é “cogito”, tem consciência, linguagem e cultura, sendo capaz de tomar decisões, escolher estratégias, ter escolhas, ter liberdade, criar. O aluno não pode ser visto como uma máquina apenas capaz de fazer cálculos, ele também tem emoção, imaginação, criatividade e raciocínio e é capaz de pensar e chegar a pensamentos coerentes por si. (MORIN, 2010)

Depois de ler as obras de Morin, percebemos uma realidade da escola: muitas vezes o professor acaba não compreendendo que seu aluno é um ser objetivo e também subjetivo, que traz consigo todas as experiências vividas fora da escola e que estas podem ser significativamente importantes na sua construção do conhecimento.

O aluno também não tem essa percepção do seu professor, pois geralmente ele enxerga o professor de maneira esotérica, como se ele fosse um oráculo infalível, que detém o conhecimento de todos os fatos que ocorrem no universo, e não como pessoa imperfeita, sujeita às emoções, à certeza e à incerteza e à imprevisibilidade que se está sujeito ao ensinar algo à outra pessoa.

Como o aluno, o professor também é professor-pessoa, professor-família, professor-sociedade, professor-cidadão: “eus” que formam sua essência e seu modo de ensinar.

O professor, segundo D´Ambrosio (1996), além de perceber o aluno na sua prática pedagógica, também precisa refletir sobre o seu discurso (teoria) e a sua ação em sala de aula. A teoria se dá pelos conhecimentos acumulados no passado e os efeitos da ação se refletirão no futuro e a ligação entre passado e futuro, entre teoria e prática, se dá no presente requerendo uma atitude concreta do professor.

Assim, ao perceber as relações, retroações e inter-retro-ações entre alunos e professores, aqui considerados como partes, nota-se que o professor não é um mero transmissor e é mais que um mediador do conhecimento. O professor faz parte do conhecimento, com suas experiências e história de vida, assim como o aluno. E professor e aluno acabam numa mesma dimensão, como seres objetivos e subjetivos que são, sendo produtores de conhecimento, transmitindo e ensinando coisas o tempo todo, um ao outro. (GUÉRIOS, 2002; LARROSA, 2012)

Para Morin (2011), a educação deve favorecer a aptidão natural da mente do aprendiz em formular e resolver problemas essenciais, deixando que o aluno exercite livremente a curiosidade, faculdade mais expandida e viva da infância e da adolescência, que a instrução minimiza.

A especialização e a fragmentação das disciplinas fazem com que as mentes formadas nestas condições percam suas aptidões naturais para contextualizar os saberes e impedem a percepção do global. O recorte de disciplinas ministradas impossibilita apreender "[...] o que está tecido junto [...]" no sentido original do termo complexo. (MORIN, 2010)

Segundo o autor, as disciplinas da Ciência se fecham e não se comunicam mais umas com as outras, os fenômenos são fragmentados e não se consegue mais conceber sua unidade, além de que, é preciso insistir fortemente na utilidade de um conhecimento que possa servir à reflexão, meditação, discussão, incorporação por todos, cada um no seu saber, na sua experiência e na sua vida.

O pensamento complexo, diz o autor, tenta dar conta daquilo que o pensamento mutilante se desfaz, excluindo os simplificadores, indo contra a mutilação: "Ante um paradigma simplificador que consiste em isolar, desunir e justapor, propomos um pensamento complexo que reata, articula, compreende e que, por sua vez, desenvolve sua própria autocrítica.". (MORIN, 2003, p. 37)

Morin (2011) mostra o sentido do contexto e sua relação com o global. O autor diz que o conhecimento das informações ou dos dados isolados é insuficiente, sendo necessário situar estas informações e dados em seu contexto para que adquiram sentido. E, ainda segundo o autor, o todo tem qualidades ou propriedades que não serão encontradas nas partes se estas estiverem isoladas umas das outras e que estas qualidades ou propriedades podem, então, ser inibidas.

Por exemplo, ao estudar geometria, o aluno não se dá conta que a álgebra está presente, permeando os conteúdos geométricos. A álgebra se torna "o olho" do geômetra, pois permite que se enxergue aquilo que a geometria por si não consegue mostrar. Isso é facilmente verificado quando estudamos a resolução de uma equação de 2º grau utilizando completamento de quadrados; verificamos que a geometria está imbricada na resolução, embora esta possa ocorrer sem a visualização do procedimento geométrico envolvido.

Na Educação Básica, alguns professores ensinam os alunos a isolar os objetos de seu meio ambiente, a separar as disciplinas em vez de conhecer suas correlações e a dissociar os problemas em vez de reunir e integrar. Devido a diferentes fatores, entre eles a própria estrutura curricular, obrigam os alunos a reduzirem o complexo ao simples, a decompor e a não recompor, a eliminar tudo que possa causar desordens ou contradições em nosso entendimento, e as mentes jovens perdem suas aptidões naturais para contextualizar saberes e integrá-los em conjunto. (MORIN, 2012)

Morin (2011) diz que nossa escola nos ensina a separar, compartimentar, isolar e não unir os conhecimentos, tornando-os um quebra-cabeça, gerando uma incapacidade de organizar o saber disperso, atrofiando a disposição mental natural de contextualizar e globalizar:

> A inteligência parcelada, compartimentada, mecanicista, disjuntiva e reducionista rompe o complexo do mundo em fragmentos disjuntos, fraciona os problemas, separa o que está unido, torna unidimensional o multidimensional. É uma inteligência míope que acaba por ser normalmente cega. Destrói no embrião as possibilidades de compreensão e reflexão, reduz as possibilidades de julgamento corretivo ou da visão a longo prazo. (MORIN, 2011, p.40)

Morin (2010) diz que a tendência para a fragmentação e para a disjunção do saber científico faz com que este deixe de ser pensado, meditado, refletido e discutido por seres humanos e então ele deixa de ser integrado na investigação individual de conhecimento e sabedoria.

Ao se fragmentar o ensino do conhecimento algébrico, quando o desenvolvemos de modo descontextualizado, a álgebra escolar fica compartimentada no todo da matemática e assim deixa de ser integrada no saber do aluno, que fica fragmentado e este não estabelece relações entre os fragmentos do seu aprendizado. Assim sendo, não é possível estabelecer relações no contexto matemático em que os conteúdos que lhes são ministrados aula a aula, o que lhe dificulta a aprendizagem

A especialização, segundo Morin (2012) extrai um objeto de seu contexto e de seu conjunto, rejeita os laços e as intercomunicações com seu meio, se fecha em si mesma e não permite que o global inerente ao objeto seja percebido, considerando dele apenas um aspecto ou uma parte, e ainda "[...]conduz a uma abstração matemática que opera de si própria uma cisão com o concreto, privilegiando assim tudo que é calculável e passível de formalização, impedindo que a compreensão aconteça.". (MORIN, 2011, p.38)

Já ao falar sobre a redução e disjunção das disciplinas, o autor mostra que ao reduzir o conhecimento do todo ao conhecimento das partes, se restringe o complexo ao simples, aplicando às complexidades vivas e humanas a lógica mecânica de determinista da máquina artificial. O princípio da redução cega e exclui tudo o que não é quantificável e mensurável, eliminando o elemento humano, isto é, eliminando paixões, emoções, dores e alegrias e ocultando o imprevisto, o novo e a invenção.

Sobre o ser humano e a cultura, Morin diz:

> O humano é um ser, a um só tempo, plenamente biológico e plenamente cultural, que traz em si a unidualidade originária. É super e hipervivente: desenvolveu, de modo surpreendente, as potencialidades da vida. […] O homem é, portanto, um ser plenamente biológico, mas se não dispusesse plenamente da cultura seria um primata do mais baixo nível. A cultura acumula em si o que é conservado, transmitido, aprendido, e comporta normas e princípios de aquisição. (MORIN, 2011, p.47)

O homem não pode ser separado da sua cultura. Afinal, ele conhece, pensa e age de acordo com os saberes comuns, que seriam advindos da sua cultura, que estão inscritos na sua vivência.

Ainda sobre a cultura, o autor diz:

> A cultura é constituída pelo conjunto dos saberes, dos fazeres, das regras, das normas, das proibições, das estratégias, das crenças, das ideias, dos valores, dos mitos, que se transmitem de geração em geração, se reproduz em cada indivíduo, controla e existência da sociedade e mantém a complexidade psicológica e social. (MORIN, 2011, p. 51)

Ou seja, o que é inerente à cultura do homem é passado de geração em geração, porém cada indivíduo se apropria de maneira diferente do que advém da sua cultura, pois somos únicos e complexos e assim formamos sociedades únicas e complexas.

Ampliando o foco e falando da Matemática e do ensino da Matemática, muitas vezes são questionados os porquês: por que se estuda matemática na escola? Por que se ensina matemática na escola? Por que se tem a preocupação que os alunos compreendam os seus conceitos? A seguir abordaremos estas questões.

Por que se estuda Matemática na escola? É uma pergunta que escutamos muitas vezes em sala de aula. De maneira simplificada, respondemos aos alunos que é preciso estudar matemática porque “ela está em tudo”, mas essa é uma explicação que simplesmente não explica nada. Talvez o aluno até pense sobre o assunto, mas não consiga enxergar de imediato onde podemos encontrar tanta matemática.

Se disséssemos que a matemática ajuda a interpretar e entender o mundo que nos rodeia, talvez fizesse mais sentido. O aluno precisa conceber a matemática como ciência, como ferramenta útil em muitos aspectos, embora tenha que aprender conteúdos que ele talvez não utilize de forma habitual e cotidiana.

E por que se ensina matemática na escola? Não podemos ver a matemática como ciência indiscutível, perfeita, acabada. Estudar matemática não nos ensina necessariamente a pensar, mas a exercitar o raciocínio e aguçar o senso crítico e isto abre os horizontes, pois situa o aluno no mundo não só como mero aprendiz, mas como pessoa, como cidadão.

Uma dificuldade surge ao percebermos como a matemática consta no currículo escolar. É uma disciplina fragmentada, subdividida nos currículos do Ensino Fundamental e Ensino Médio em conteúdos que geralmente não se comunicam, ou seja, é uma disciplina cujo entendimento da sua totalidade não é favorecido por esta fragmentação.

Alunos e professores muitas vezes não percebem a falta que um entrelaçamento entre os conteúdos faz, pois tudo é simplificado, uma vez que se fragmenta o conteúdo para “facilitar” a aprendizagem e se cria uma nova dificuldade: os alunos não veem sentido em aprender o que está sendo exposto. Como consequência, as dificuldades de aprendizagem dos alunos vão aparecendo e aumentando com o passar do tempo, se não forem sanadas ao serem percebidas.

Morin (2012) diz que devemos pensar o problema do ensino considerando os graves efeitos da compartimentação dos saberes e da incapacidade de articular estes saberes. E pior, se a disciplina que trata da matemática não se comunica nem com ela mesma, com seus próprios tópicos, como vai ser interligada com outras disciplinas? Concordamos com Morin quando diz que “[...] sabemos cada vez mais que as disciplinas não se fecham e não se comunicam umas com as outras. Os fenômenos são cada vez mais fragmentados, e não consegue se conceber a sua unidade.”. (MORIN, 2010, p.135)

> O ensino matemático, que compreende o cálculo, é claro, será levado aquém e além do cálculo. Deverá revelar a natureza intrínseca problemática das matemáticas. O cálculo é um instrumento do raciocínio matemático […]. No decorrer dos anos de aprendizagem é preciso valorizar, progressivamente, o diálogo entre o pensamento matemático e o desenvolvimento dos conhecimentos científicos, e, finalmente os limites da formalização e quantificação. (MORIN, 2012, p. 23)

Para organizar estes conhecimentos, Morin (2012) fala que todo conhecimento constitui ao mesmo tempo uma tradução e reconstrução, a partir de sinais, símbolos, representações, ideias, teorias, discursos, que são ligados por conjunção, inclusão, implicação e separados por diferenciação, oposição, seleção e exclusão.

O processo para organizar os conhecimentos é circular, passando da separação à ligação, da ligação à separação, da análise à síntese, da tese à análise, comportando então, ao mesmo tempo, separação e ligação, síntese e análise. Para que o conhecimento progrida é preciso integrá-lo em seu contexto global.

O aluno não conseguirá conceber que a Matemática é também uma ferramenta útil para as outras disciplinas que estuda. Como fazer brotar o novo (MORIN, 2010), a curiosidade, o espírito científico nos alunos (MORIN, 2012)? Como transformá-lo em um sujeito crítico e questionador, interessado com o que acontece à sua volta?

Segundo Morin, citado em Guérios (2002, p.176):

> (...) **o inesperado surpreende-nos**. É que nos instalamos de maneira segura em nossas teorias e ideias, e estas não têm estrutura para acolher o novo. ***Entretanto, o novo brota sem parar.*** Não podemos jamais prever como se apresentará, mas deve-se esperar sua chegada, ou seja, esperar o inesperado. E quando o inesperado se manifesta, é preciso ser capaz de rever nossas teorias e ideias, em vez de deixar o fato novo entrar à força na teoria incapaz de recebê-lo (MORIN, 2000, p. 30).

O professor e o aluno, segundo Guérios (2002), estando o tempo todo trabalhando juntos com o conhecimento e com a construção deste, precisam estar prontos para o novo e devem saber lidar com o inesperado.

Quando estão preparados, quando deixam as vivências acontecerem, mudam sua perspectiva e seu olhar ao que os cercam, potencializam as oportunidades e naturalmente surge a curiosidade no aluno, não sendo necessário empurrar um assunto à força, como dizemos na escola.

"O professor precisa dar vez e voz ao seu aluno! E escutá-lo!" (GUÉRIOS, 2002, p. 186) O inesperado pode produzir e fazer emergir pensamentos nos alunos, ou seja, ser um desencadeador de aprendizado.

Quanto à compreensão dos conceitos matemáticos, temos que levar em conta como cada pessoa organiza seu pensamento. Percebe-se em sala de aula o quanto os alunos são diferentes no entendimento dos tópicos que são ensinados. (AUSUBEL, 2003)

Porém apenas a comunicação do conteúdo não garante a compreensão. Morin (2011) diz que a informação mesmo quando bem transmitida não é garantia de compreensão e que compreender significa apreender em conjunto, o texto e seu contexto, as partes e o todo, o múltiplo e o uno.

A compreensão intelectual passa pela inteligibilidade e explicação. "Explicar é considerar o que é preciso conhecer como objeto e lhe aplicar todos os meios objetivos de conhecimento.". (MORIN, 2011, p.82) Porém, para Morin (2012) os meios objetivos são insuficientes para compreender o ser subjetivo.

O conhecimento pertinente, para Morin (2012), é capaz de situar qualquer informação em seu contexto, progredindo pela sua capacidade de contextualizar e englobar e não tanto por sofisticação, formalização e abstração. "Enfrentar a dificuldade da compreensão humana exigiria o recurso não a ensinamentos separados, mas a uma pedagogia conjunta que agrupasse o que é filosófico, psicológico, sociológico, histórico, escrito, que seria conjugada a uma iniciação à lucidez.". (MORIN, 2012, p.51)

Os conceitos em Matemática não podem ser vistos de maneira isolada em si mesma, segundo Silveira (2006). Junto com o conceito vem também o algoritmo, que é a maneira em que podemos expressar o conceito na forma de uma fórmula, de modo abreviado. "[...] o método não-abreviado (método que promove ações praticadas pelo sujeito na construção de um conceito) deve ser construído pelo aluno, até que conclua o método abreviado (a fórmula, o algoritmo).". (SILVEIRA, 2006, p. 2)

E é onde surge a dúvida: o aluno compreendeu o conceito matemático envolvido em determinada questão ou somente mecanizou seu algoritmo? E será que o conceito matemático foi compreendido?

Para que o aluno compreenda um conceito matemático, talvez seja necessário que ele tenha uma experiência com a disciplina, mas não uma experiência no sentido empírico e sim no sentido de transformação, como será discorrido a seguir.

4.3 EXPERIÊNCIA POR JORGE LARROSA

Pensando nas relações e conexões dos sujeitos em sala de aula como relações “[...] entre alguém (que lê) e o seu outro (o texto, a pessoa, a situação, o objeto etc)” (LARROSA, 2007, p.133), podemos concluir que o professor “lê” seu aluno e por conseguinte o aluno também “lê” seu professor e o conteúdo ensinado. Há uma relação não somente de apropriação, mas de escuta.

Para Larrosa (2002), ler o outro é traduzir e interpretar é traduzir, ou seja, o professor de matemática precisa ler o aluno, ler o que ele escreve, analisar se a resolução do exercício mostra se o aluno realmente compreendeu o conteúdo. Ler a resolução do aluno com profundidade pode mostrar muito mais além de um resultado correto ou não, pode mostrar se o aluno está “lendo” corretamente o que o professor está ensinando.

Larrosa (2007) diz que se o professor de matemática simplesmente se limitar a mostrar o algoritmo, o código, está convertendo a “leitura” em algo previsto e resumido, antecipando o sentido essencial do “texto” e também, cancelando, de uma forma autoritária e dogmática, a possibilidade de “escuta” do aluno. Podemos dizer que o professor tira a possibilidade de compreensão do aluno, pois o algoritmo nunca está sozinho, o conceito é seu companheiro, não há sentido no algoritmo desacompanhado do conceito.

O escrito e o lido podem ser um traço visível e decepcionante, caso o aluno não tenha conseguido compreender o conteúdo, pois a “aventura de ler” pode se revelar impossível, no entanto, ainda pode-se voltar transformado, ou seja, apesar de tudo há uma mudança, um movimento, e a transformação pode acontecer tanto com o professor quanto com o aluno, quando descobrem algo que não sabiam antes ou sentem algo que não sentiram antes. (LARROSA, 2007)

Se algo se transforma, diz Larrosa (2007), pode-se dizer que quem é transformado se transforma nas suas palavras, nas suas ideias, nos seus sentimentos, nas suas representações. E ainda se o sujeito tem experiência de algo (experiência como algo “que o passa”), tem a experiência da própria transformação.

Guérios (2002) mostra claramente como Larrosa percebe a experiência, não no sentido de experimento, de modo planejado e técnico, mas como acontecimento não programável, não controlável e não submetido à lei da causa e efeito. A experiência segundo Larrosa (2011) é uma relação com algo que não é o sujeito, é uma condição de exterioridade a ele.

Para o autor, a experiência tem lugar na pessoa, mas é uma condição reflexiva, subjetiva, que implica no que se é, mas que por sua condição transformadora o faz outro e é uma relação em que algo passa de um a outro de do outro novamente ao sujeito, e se sofre seus efeitos, se afeta.

E mais, a partir do pensamento de outra pessoa podemos formar ou transformar o próprio pensamento, podemos pensar por nós mesmos com nossas próprias ideias. Por isso podemos pensar no aluno e no seu processo de aprendizagem matemática na escola, especificamente em álgebra. (LARROSA, 2011)

Segundo o autor, o sujeito da experiência pode não ser o sujeito do saber ou o sujeito do poder ou o sujeito do querer, senão o sujeito da transformação. Professor e aluno podem sair transformados depois de uma experiência efetiva de aprendizagem, transformados em suas palavras, em suas ideias, em seus sentimentos, em suas representações, enfim, nas relações com a sua subjetividade.

O sujeito da experiência acaba sendo “[...] um território de passagem, uma superfície de sensibilidade em que algo passa, e ao passar deixa um vestígio, uma marca, um rastro, uma ferida.”. (LARROSA, 2011, p. 8)

Se a matemática é uma experiência que “nos passa”, métodos de ensino podem ser modificados, a matemática pode passar a ser vista como matéria prazerosa e instigante para o aluno e até mesmo para o professor, se este ainda não tiver uma experiência real com a disciplina.

Não se pode, contudo, saber previamente qual vai ser o resultado de uma experiência, se algo em que se está empenhado resultará em verdadeira experiência. Segundo Larrosa (2011), a experiência não tem a ver com o tempo linear da planificação, da previsão, da predição se nosso método de ensinar funcionará, senão com o tempo de abertura. O autor ainda diz que a experiência tem algo de imprevisível, de indizível, de imprescritível e que a incerteza lhe é constitutiva!

Para Larrosa (2002), a experiência é singular, ou seja, cada um tem a sua. A experiência não pode ser repetida, pois cada experiência é distinta, única, surpreendente. A mesma experiência, em cada caso, pode ser outra, ou seja, a experiência é plural. Ante o mesmo fato, ante o mesmo texto, há sempre uma pluralidade de experiência. A experiência produz pluralidade.

A experiência também soa a finitude, pois possui um tempo e um espaço particular, limitado, contingente, finito. Podemos habitar o mundo como experts, sendo especialistas, profissionais e críticos, mas também somos sujeitos da experiência, abertos, vulneráveis, sensíveis, temerosos, pois a experiência tem a ver com o não saber e com o limite do nosso saber e do que podemos fazer. (LARROSA, 2002)

Não se pode saber o resultado da experiência de antemão, nem para onde seremos conduzidos, nem o que será feito de nós. Depois de assistir uma aula de matemática, depois de ter tido alguma informação sobre um conteúdo matemático, pode-se dizer que se sabe algo que antes não sabia, que se tem mais informação, mas pode acontecer que o fato de maneira alguma tenha tocado e transformado, que nada sucedeu, que nada aconteceu. (LARROSA, 2002)

Há no processo, além de uma possível transformação, a formação do aluno ainda aprendiz e a do professor, já mestre. E formação significa desenvolver um conjunto de disposições preexistentes, recuperar a ideia de "[...]trazer algo novo para o espaço tensionado entre a educação técnico-científica dominante e as formas dogmáticas e neoconservadoras de reivindicar a velha educação humanística.". (LARROSA, 2007, p. 135)

> […] Ensinar é mais difícil que aprender porque ensinar significa deixar aprender. Mais ainda: o verdadeiro professor não deixa aprender mais do que "o aprender". Por isso também seu fazer produz, em geral, a impressão de que não se aprende nada com ele, se por "aprender" se entende nada mais do que a obtenção de conhecimentos úteis. O professor possui, em relação aos aprendizes, como único privilégio o de que tem de aprender ainda muito mais do que esses, a saber: o deixar aprender. (LARROSA, 2007, p. 148)

Quando o professor deixa de ser transmissor do conhecimento e é mais que mediador, ele aprende também com seu aluno. Ao se utilizar de diferentes métodos de ensino, como a Resolução de Problemas, o professor dá oportunidade para que o aluno possa ter uma experiência com o conteúdo que está sendo ensinado.

Segundo Larrosa (2007), deixar aprender não é simplesmente não fazer nada, é um fazer muito mais difícil do que transmitir o que se sabe. Este fazer requer humildade e silêncio, mas exige também audácia e falar alto, porque para deixar aprender devem ser eliminados muitos obstáculos, entre eles a arrogância daqueles que sabem.

Ainda pelo autor, o papel do professor é fazer com que seja possível a pluralidade. Dar um sentindo de contingência, de relatividade, enfim, de liberdade ao aluno, de escolha, uma vez que o aprendizado é possível, mas incerto.

Indo além, Larrosa (2011) diz que falar sobre sua experiência para o aluno não é ensinar o modo como o professor tenha se apropriado do conhecimento, mas mostrar de que maneira alguém se abre a sobre o que determinado conteúdo tem a dizer. É mostrar inquietude. O que o professor transmite é a sua abertura, a sua escuta. E seu esforço deve ser para que o conteúdo não caia no dogmatismo.

O autor diz ainda que a linguagem da educação está cheia de fórmulas, de saberes que fazem tudo calculável, identificável, compreensível, mensurável, manipulável. Dominamos a linguagem da teoria, da prática e da crítica, mas nos falta a linguagem da experiência. Uma língua de paixão, de incerteza, de singularidade.

Ensinar o conteúdo não é colocar o saber de quem sabe mais contra o saber de quem sabe menos, mas colocar uma experiência junto a outra experiência. Larrosa (2002) diz que saber da experiência só se dá na relação do conhecimento e da vida humana, em uma espécie de mediação entre ambos.

Como não envolver sua pessoa (seu “eu”) e sua cultura, ou seja, as memórias da sua origem, quando se “lê”? A escrita que não envolve sua pessoa ou sua cultura aspira a conservar o silêncio e o calar. Em Larrosa (2013), temos que cultura é o que faz com que o mundo esteja aberto para nós e não podemos deixá-la converter-se em fórmula, em bordão, tornando o mundo fechado e falsificado.

É o que acontece na matemática, muitas vezes se deixa que o conteúdo se converta em mera fórmula, deixando de lado o conhecimento que o aluno traz consigo e as relações que podem ser formadas, e por fim perde o significado matemático para os alunos e até para os professores. As relações entre os assuntos se perdem, se fragmentam.

O professor, numa bela imagem de Larrosa (2013), é quem conduz alguém até si mesmo e quem aprende é alguém que se volta para si mesmo, e encontra sua maneira própria, sua forma própria. E como a mecanização de um algoritmo, a repetição de um procedimento e a imitação do que o professor faz poderia permitir que esta descoberta de si mesmo, do seu entender, do seu jeito de fazer, acontecesse?

A compreensão matemática pode acontecer de diferentes maneiras em diferentes pessoas. “A relação com a matéria de estudo é de tal natureza, que nela, alguém se volta para si mesmo, alguém é levado para si mesmo e isso não é feito por imitação, mas por algo assim como ressonância, porque se alguém lê ou escuta ou olha com o coração aberto, aquilo que lê, escuta ou olha ressoa nele.”. (LARROSA, 2013, p.52)

Ao observarmos o aprender e o ensinar como algo que se lê, no sentido de que os alunos e o professor e o conteúdo são lidos, são escutados e falados no processo de ensino e aprendizagem, como no começo de uma lição, o primeiro passo seria abrir o livro, “[...] num abrir que é ao mesmo tempo, um convocar.”. (LARROSA, 2013, p.139). E ainda segundo o autor, o que se pede a quem abre o livro é a disposição de entrar no que foi aberto, ou seja, é a relação que existe entre a abertura do livro e a disponibilidade do leitor. “Mútua entrega: condição de um duplo dever.”. (LARROSA, 2013. p. 139).

Olhando o tempo todo o processo de ensino-aprendizagem como leitura, a experiência proposta, em comum, seria como um dos jogos possíveis do ensinar e do aprender. “E simultaneamente, estabelecer o que tem a ver esse jogo com a experiência da liberdade, com essa curiosa relação de alguém consigo mesmo, à qual chamamos de liberdade [...]” (LARROSA, 2013, p. 139). Liberdade de ensinar e de aprender, implicando as relações de cada um consigo mesmo e com os outros.

Quando o ato de ler em público acontece numa sala de aula, costuma-se dizer que se trata de uma lição. “Na lição, a leitura aventura-se no ensinar e no aprender.”. (LARROSA, 2013, p. 139). Para o autor, o professor seleciona o texto para a lição, e como um presente para o aluno, o remete.

E se o aluno simplesmente recusar? Ou não entender a intenção do professor? Por isso que uma análise de como o aluno responde ao ensinamento é importante. Ler, como aluno, não no sentido de obrigação, mas de cumprir uma tarefa. “Uma tarefa é algo que nos põe em movimento.”. (LARROSA, 2013, p.140). Movimento de ler e de escutar, criando uma correspondência entre o ler, o escutar e o falar.

O professor, ao ensinar um conteúdo, ou seja, ao dar uma lição, começa a ler. “E seu ler é um falar escutando[...]. O professor lê escutando o texto, escutando-se a si mesmo enquanto lê, e escutando o silêncio daqueles com os quais está lendo.”. (LARROSA, 2013, p.140)

Segundo Larrosa (2013), a lição a que os alunos são convocados é o fluxo do que se vem dizendo, ou do que, se dizendo, vem e ler é recolher o que se vem dizendo para que se diga outra vez, mas como sempre se disse e como nunca se disse, numa repetição que é diferença quando resulta numa experiência.

O autor ainda mostra que há modos de falar como quem já sabe de antemão o que diz o texto ou o que uma vez já tenha sido dito, dado então por resolvida determinada questão. Ainda para o autor, a leitura por si não resolve uma questão, mas a reabre, a repõe e a reativa, na medida em que nos pede correspondência.

E o objetivo da lição, segundo Larrosa (2002), que o professor ensina, que o professor lê com os alunos, não é um terminar em assimilação ou pela aprendizagem dogmática do que deve ser dito. Na lição, a ação de ler extravasa o conteúdo e o abre para o infinito. Aprender pela leitura do outro não é transmitir o que se sabe, ou do que existe, mas uma cumplicidade de quem se encontra no mesmo lugar. (LARROSA, 2002)

Larrosa (2013) ainda diz que ensinar a ler (o outro, o objeto, o conteúdo) é produzir um deixar escrever, deixar aberta a possibilidade de aprender novas palavras, palavras que podem ser não pré-escritas. Deixar escrever não é apenas permitir que se escreva, mas estender e alargar o que pode ser escrito, prolongar o escrevível e a leitura se torna uma tarefa aberta e os textos lidos se entrelaçam, se entremeiam e um novo texto é tecido, um texto múltiplo e infinito. (LARROSA, 2013)

Concordamos com Guérios, quando diz em sua tese, ao discorrer sobre as noções de espaço intersticial, mas que se aplica neste caso:

> É quando professores e alunos embarcam na arte de criar para a qual não há tempo marcado, convivem com o pré-determinado para ser aprendido e ensinado (os programas escolares) desprendendo-se das amarras que predeterminam o fazer (modelos e técnicas estáticas, mortas). As técnicas adquirem vida e movimento e embasam fazeres ousados, mas responsáveis. Todos, professores e alunos, estarão aprendendo e ensinando ao mesmo tempo, uns aos outros, ao enfrentarem situações imprevisíveis decorrentes de tal postura. (GUÉRIOS, 2002, p. 175)

O aluno aprende com o professor, o professor aprende com o aluno, eles ressoam juntos, se apropriam e dão sentido ao conteúdo, mas juntos. O ensinar é também deixar, dar permissão, alargar, estender. (GUÉRIOS, 2002; LARROSA, 2013)

5 ELEMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

5.1 INSTRUMENTOS PARA COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Os instrumentos para a coleta de dados foram duas listas de exercícios, uma em que alunos resolveram exercícios de aplicação direta de equações de 1º e 2º graus e outra em que os alunos resolveram problemas cujas soluções são possíveis por meios das equações da lista de aplicação direta. As resoluções geraram protocolos escritos que foram organizados, sistematizados, categorizados e analisados.

A pesquisa foi realizada em duas fases.

Na primeira, quatro alunos do 9º ano resolveram as listas de exercícios para validação dos instrumentos de pesquisa, sem necessidade de entrevistas. Na segunda, 25 alunos do Ensino Médio resolveram as duas listas e foram entrevistados.

Após aplicados os exercícios em sala de aula para os alunos do 1º ano do Ensino Médio, os protocolos escritos foram analisados para identificação e classificação das soluções obtida pelos alunos. A seguir, foi realizada uma entrevista semiestruturada com os quatro alunos que foram selecionados em função de resoluções originais ou inesperadas, de resoluções diferenciadas das classicamente esperadas ou de resoluções incompreensíveis à primeira vista.

As listas de exercícios para coleta de dados foram construídas tendo por base elementos teóricos apresentados nos capítulos anteriores, organizados nos eixos denominados:

- *Construção do conhecimento,* para visibilizar os modos de resolução em relação a processos aritméticos, algébricos ou por meio de outras tentativas e para verificar as construções resolutivas dos alunos sem intenção de classificar como certo ou errado;
- *Conceito algébrico e algorítmico,* para identificar se a resolução é conceitual ou algorítmica;
- *Resolução de problemas e a álgebra escolar*, para identificar se o aluno percebe que o problema pode ser resolvido por meio de equações (as mesmas dos exercícios) e se as resolve corretamente.

Os eixos teóricos descritos acima embasaram a elaboração das listas de exercícios, principalmente a de enunciados de problemas, uma vez que ao produzi-la buscamos enunciados que não possuíssem apenas um tipo de resolução, no caso a algébrica, mas também possibilitassem outras soluções, como realmente ocorreu, e pudéssemos, então, verificar se houve ou não a construção do conhecimento algébrico.

5.2 CATEGORIZAÇÃO E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

Para organizar os dados coletados e classificá-los, num primeiro momento, são utilizados os métodos de [1]Bernard e Cohen (1995) citados em Sperafico e Golbert (2012), para as equações de 1º grau. Já para as equações de 2º grau, os métodos apresentados são os descritos pelos livros didáticos, uma vez que são os que os alunos estão habituados a usar e são empregados nas práticas dos professores. Estes métodos foram usados para descrever como os alunos resolveram as equações e depois as resoluções foram analisadas de acordo com as categorias criadas que subsidiaram a análise dos dados e estão elencadas a seguir.

Apresentamos os métodos de resolução que os alunos podem utilizar para resolver os exercícios e problemas que foram apresentados a eles na pesquisa, porém deixamos bem claro que estivemos abertas a toda solução diferenciada e surpreendente que os alunos apresentassem, pois compactuamos com Morin (2010) que o novo e o inesperado podem brotar a qualquer momento nas resoluções e, assim, proporcionar interessantes pistas para entendermos a aprendizagem dos alunos investigados.

Uma equação do 1º grau pode ser solucionada de diferentes maneiras. Bernard e Cohen (1995) citados em Sperafico e Golbert (2012), destacam quatro métodos de solução que podem constituir também uma sequência de ensino evolutiva, conforme descrevemos a seguir:

> O *método de gerar e avaliar* consiste em gerar valores, primeiro de modo aleatório, e aplicá-los à equação verificando se estes valores são válidos ou não para a equação, ou seja, é um método de tentativa e erro.

---

1 BERNARD, J. ; COHEN, M. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, A. ; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

> O *método de esconder* é aplicado na resolução de equações aritméticas simples, consistindo em esconder a variável e fixar a atenção ao que a equação pede (como os problemas resolvidos nos anos iniciais). Por exemplo, na equação x – 2 = 5, pede-se ao aluno que valor menos dois tem resultado igual a cinco.
> Já o *método de desfazer* "baseia-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis". (BERNARD & COHEN, 1995, p. 116). Assim, as operações, através de operações inversas, geralmente do primeiro membro, são "desfeitas", buscando isolar a incógnita e determinar seu valor.
> O quarto e último método pressupõe *a conceituação de equações equivalentes.* Para isso, primeiramente deve haver uma compreensão mais profunda do sinal de igualdade, que deve deixar de pressupor um resultado, como frequentemente é compreendido pelo aluno. Este método é semelhante ao método de desfazer, mas pelo fato da equação se apresentar como uma equivalência, as operações devem ser desfeitas em ambos os membros da equação. (SPERAFICO; GOLBERT, 2012, p. 3-4)

Quanto ao modo de resolver equações de 2º grau, os métodos a seguir apresentados são os descritos pelos livros didáticos, uma vez que são os que os alunos estão habituados a usar e são empregados nas práticas dos professores. É esperado que os alunos utilizem três tipos de resolução para encontrar as raízes das equações completas (que serão as utilizadas nos exercícios e problemas), conforme descritas a seguir:

- *Completamento de quadrados*, processo geométrico que consiste na construção de um quadrado que deve ser completado e então será adicionada uma expressão à equação, formando um trinômio quadrado perfeito, para então se chegar à solução.

- *Fórmula de Bhaskara ou fórmula resolutiva de equações polinomiais do 2º grau*, que é uma fórmula resolutiva da equação completa, e consiste na generalização do método de completar quadrados, que permite encontrar as duas raízes da equação. O *delta* da fórmula permite perceber se há dois valores reais para as raízes, ou um valor real, ou nenhum valor real.

- *Relação entre os coeficientes* da equação, onde encontramos as raízes a partir de dois números que somados mostrem como resultado o coeficiente *b* da equação (com sinal invertido) e multiplicados mostrem o coeficiente *c* da equação. Por exemplo, na equação $x^2 - 8x + 12 = 0$, onde 8 é o coeficiente *b* e 12 o coeficiente *c*, as raízes são 2 e 6.

5.3 CATEGORIAS PARA ANÁLISE DOS DADOS

As categorias para análise dos dados são advindas do referencial teórico. São seis categorias no total, três advindas do referencial teórico algébrico e três a partir de elementos do Pensamento Complexo de Edgar Morin. As categorias constituíram um todo, sob o qual os dados foram interpretados à luz do referencial teórico adotado.

5.3.1 Categorias advindas do campo algébrico

5.3.1.1 Compreensões incompletas

A partir do momento que acreditamos que o aluno constrói um novo conhecimento a partir de conhecimentos (ou conceitos) já existentes na sua estrutura cognitiva, surgem as *compreensões incompletas* (MORAIS, 2008), que são as compreensões imaturas, ou seja, falsas crenças e interpretações superficiais de conceitos que os alunos trazem consigo para um determinado assunto, como por exemplo, no caso das equações, a não compreensão dos conceitos de números naturais, inteiros e racionais e a não habilidade com as operações definidas sobre estes conjuntos numéricos.

> Se ao iniciar-se um novo processo de aprendizagem, for diagnosticado que os conhecimentos prévios de que os alunos dispõem, sobre o conteúdo em questão, se apresentarem desorganizados ou errôneos, dificultando consideravelmente os processos de ensino e aprendizagem dos novos conteúdos, é importante que se resolva esse problema com atividades específicas, antes de se dar início à aprendizagem dos novos conteúdos. (MORAIS, 2008, p. 37)

Nesse caso, adotamos por interpretação superficial as soluções fora do campo algébrico, foco da aprendizagem naquele momento, sem que isso desmereça a atividade cognitiva do aluno. Temos consciência, conforme Morais (2008), de que se as ideias iniciais e conhecimentos prévios dos alunos forem ignorados, suas compreensões podem ser diferentes das esperadas e o aluno pode não compreender o que é uma equação.

Freitas (2002) mostra uma grande frequência de erros cometidos pelos sujeitos de sua pesquisa em relação à transposição de elementos do primeiro membro para o segundo (transposição de termos independentes, de termos em x e em ambos) e esses erros na resolução têm origem em problemas com compreensão de conhecimentos prévios dos mais variados (números inteiros, concepção de operações etc).

Da Ponte, Branco e Matos (2009) também destacam erros de procedimento com origens na má compreensão ou falta de compreensão do conceito de variáveis, como a adição de termos que não são semelhantes (por exemplo, $2+4x=6x$). Os autores também destacam a adição incorreta de termos semelhantes ($-4x+2x=6x$) que pode ter origem em conhecimentos mal formados sobre números inteiros e racionais.

Outros autores também têm um entendimento sobre compreensões incompletas ou mal formadas: para Loos, Falcão e Acioly-Régnier (2008), conhecimentos mal formados podem ser fontes de erros, por exemplo, ao se passar do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

A compreensão incompleta pode não ser apenas referente ao conteúdo matemático em questão, mas também se referir à compreensão do problema a ser resolvido ou da falta de concentração do aluno. Estas talvez sejam as dificuldades mais comuns que o aluno tem quando resolvem um problema. (POLYA, 1995)

5.3.1.2 Atividade algébrica conceitual

A atividade algébrica conceitual, categoria elaborada pelas autoras desta pesquisa, se constitui ao observar que para resolver um problema que envolve uma equação de 1º ou 2º grau, o aluno percebe que a resolução parte da equação em questão e então consegue solucionar o problema, ou seja, o aluno compreendeu o conceito de equação.

O conhecimento matemático se proveniente de um processo significativo, para Ausubel (2013), Brito (2001), Miguel (2006), Morais (2008), Silveira (2006) e Spinelli (2011), conduz os alunos a uma variedade de conjecturas e ao estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar as experiências e os contextos para o desenvolvimento das noções matemáticas.

Lembrando que, segundo Loos, Falcão e Acioly-Régnier (2001), quando o aluno é apresentado ao campo conceitual da álgebra, são requeridas modificações em seus conhecimentos teóricos e práticos anteriores e a aquisição de novas competências.

É importante ainda, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), ter atenção, pois o trabalho com equações facilmente pode conduzir a uma mecanização de procedimentos por parte dos alunos, sem qualquer compreensão do que estão fazendo. Os autores defendem que para evitar que isso aconteça, o professor deve proporcionar aos alunos experiências informais, em casos necessariamente simples, antes da resolução algébrica formal.

Se o aluno compreende os conceitos pertencentes à Álgebra, é possível que desenvolva o pensamento algébrico. Ponte, Branco e Matos (2009) ponderam que poderíamos dizer que o grande objetivo do estudo da Álgebra, na educação básica, é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos e este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além disso: o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções.

O pensamento algébrico, para Savioli (2009), pode ser entendido assim:

> [...]o pensamento algébrico pode ser entendido como uma manifestação do conhecimento tendo como sujeito o aluno e como objeto a álgebra. Pensamento e linguagem, deste ponto de vista, estão ligados, pois o pensamento se confirma por meio da linguagem, verbal ou não verbal. (SAVIOLI, 2009, p.1)

O pensamento algébrico do aluno pode ser confirmado também por meio da resolução de problemas, quando o professor analisa as resoluções dos alunos. Para Lins e Gimenez (2001), pensar algebricamente é produzir significação em termos de números e operações aritméticas e com essa base transformar as expressões obtidas, e isso seria resultado da compreensão conceitual.

Ponte, Branco e Matos (2009) observaram que a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas, usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios, além da capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também é o “sentido de símbolo”, que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas.

Se os alunos compreenderam os conceitos de equações de 1º e 2º graus e seus símbolos, conseguem estabelecer relações entre os conceitos ancorados em sua estrutura cognitiva, conseguem resolver os problemas que estão sendo apresentados e constroem o pensamento algébrico.

5.3.1.3 Atividade algébrica algorítmica

Na atividade algébrica algorítmica, categoria também elaborada pelas autoras deste trabalho, o aluno consegue resolver um exercício de aplicação direta sobre uma equação de 1º ou 2º grau, utilizando apenas o algoritmo, pois não depende da apreensão do seu conceito para perceber como se resolve o exercício.

Porém, ao resolver um problema que envolva um tipo destas equações, se o aluno somente tiver mecanizado o algoritmo, certamente, não conseguirá perceber que a solução parte de uma equação e tentará chegar a uma solução utilizando algum outro caminho.

Enfatizamos que valorizamos diferentes caminhos que os alunos utilizem em todo tipo de resolução matemática. O que buscamos identificar é a compreensão dos alunos sobre equações do 1º e do 2º grau: se conceitual ou algorítmica.

Para Miguel e Miorim (1986), pode acontecer que durante a exposição de certo conceito, o professor já comece o conteúdo ensinando o algoritmo, sem nenhuma demonstração ou explicação complementar de como esta fórmula surge no tópico que está sendo explicado, de como a “conta” e o conceito matemático estão relacionados e assim, o aluno tem apenas a aprendizagem algorítmica do conceito.

5.3.2 Categorias advindas das aproximações interpretativas entre as categorias

Estas categorias não são advindas do referencial teórico algébrico, mas sim de elementos do Pensamento Complexo de Edgar Morin e podem promover uma aproximação entre as categorias, de modo interpretativo, ou seja, de maneira que consigamos enxergar na escrita dos alunos algo que indique uma aprendizagem conexa ou fragmentada, desvinculada e desconectada do conhecimento matemático necessário para se resolver uma equação, uma solução puramente abstrata e irrefletida, sem relações entre os vários conteúdos necessários à compreensão dos conceitos de equações de 1º e 2º graus.

5.3.2.1 Fragmentação

Ao analisar os dados empíricos, poderiam ser encontrados indícios de que os alunos têm uma aprendizagem fragmentada no que se refere às equações de 1º e 2º graus e não conseguiriam conceber na sua estrutura cognitiva o pensamento algébrico, ou seja, a fragmentação desse conhecimento os impede de operar o vínculo entre o conhecimento aritmético e o conhecimento algébrico.

Pode acontecer ainda que os alunos se habituaram tanto a resolver equações sempre da mesma maneira, ou seja, só tem um fragmento do conhecimento que deveriam ter, que qualquer modificação que ocorra numa equação ou num enunciado de problema já os impede de pensar numa estratégia de resolução diferenciada: “A inteligência parcelada, compartimentada, mecanicista, disjuntiva e reducionista rompe o complexo do mundo em fragmentos disjuntos, fraciona os problemas, separa o que está unido, torna unidimensional o multidimensional.” (MORIN, 2011, p.42)

5.3.2.2 Relação parte-todo

O aluno não consegue apreender o “que está tecido junto” (MORIN, 2011), pois o conceito de equações acaba sendo subtraído do seu contexto matemático, reduzindo-se a um aprendizado puramente abstrato e irrefletido, separado do seu cotidiano, privilegiando o cálculo e a formalização por si só. “Como nossa educação nos ensinou a separar, compartimentar, isolar e, não, a unir os conhecimentos, o conjunto deles constitui um quebra-cabeças ininteligível.”. (MORIN, 2011, p. 42)

As interações, retroações, os contextos e a complexidade entre os conteúdos aritméticos e algébricos se tornam invisíveis para os alunos e eles se tornam incapazes de organizar os saberes dispersos na matemática.

5.3.2.3 Circularidade-linearidade

A organização dos conhecimentos matemáticos, assim como a organização dos conhecimentos em geral, é realizada em função de princípios e regras, pois comporta operações lógicas de ligação (conjunção, inclusão, implicação) e de separação (diferenciação, oposição, seleção e exclusão). O processo de aprendizagem da matemática é circular, pois passa da separação à ligação, da ligação à separação e da análise à síntese, da síntese à análise. (MORIN, 2011)

O aluno precisa perceber que entre os tópicos aprendidos na matemática há uma causalidade circular, pois os diversos conceitos são inter-relacionados, há também uma retroatividade e recursividade entre eles, pois os conceitos não são isolados, eles dependem uns dos outros, especialmente na formação de novos saberes. (MORIN, 2011)

Por exemplo, o aluno pode não conceber que para resolver uma equação ele precisa ter apropriado no seu sistema cognitivo o conhecimento aritmético, que se relacionará com uma variável ou incógnita e um sinal de igualdade sendo que após algumas manipulações dos símbolos algébricos findará na solução da equação, ou seja, há uma retroatividade e recursividade entre a aritmética e a álgebra durante todo o processo resolutivo de uma equação.

Para compreender um conceito matemático há um movimento circular, quando vamos das partes para o todo e do todo para as partes. Para Lins e Gimenez (2001), a álgebra pode ser vista como as relações entre números, operações aritméticas e igualdades, enquanto a aritmética é a ferramenta que torna a organização e as relações entre estas atividades possíveis.

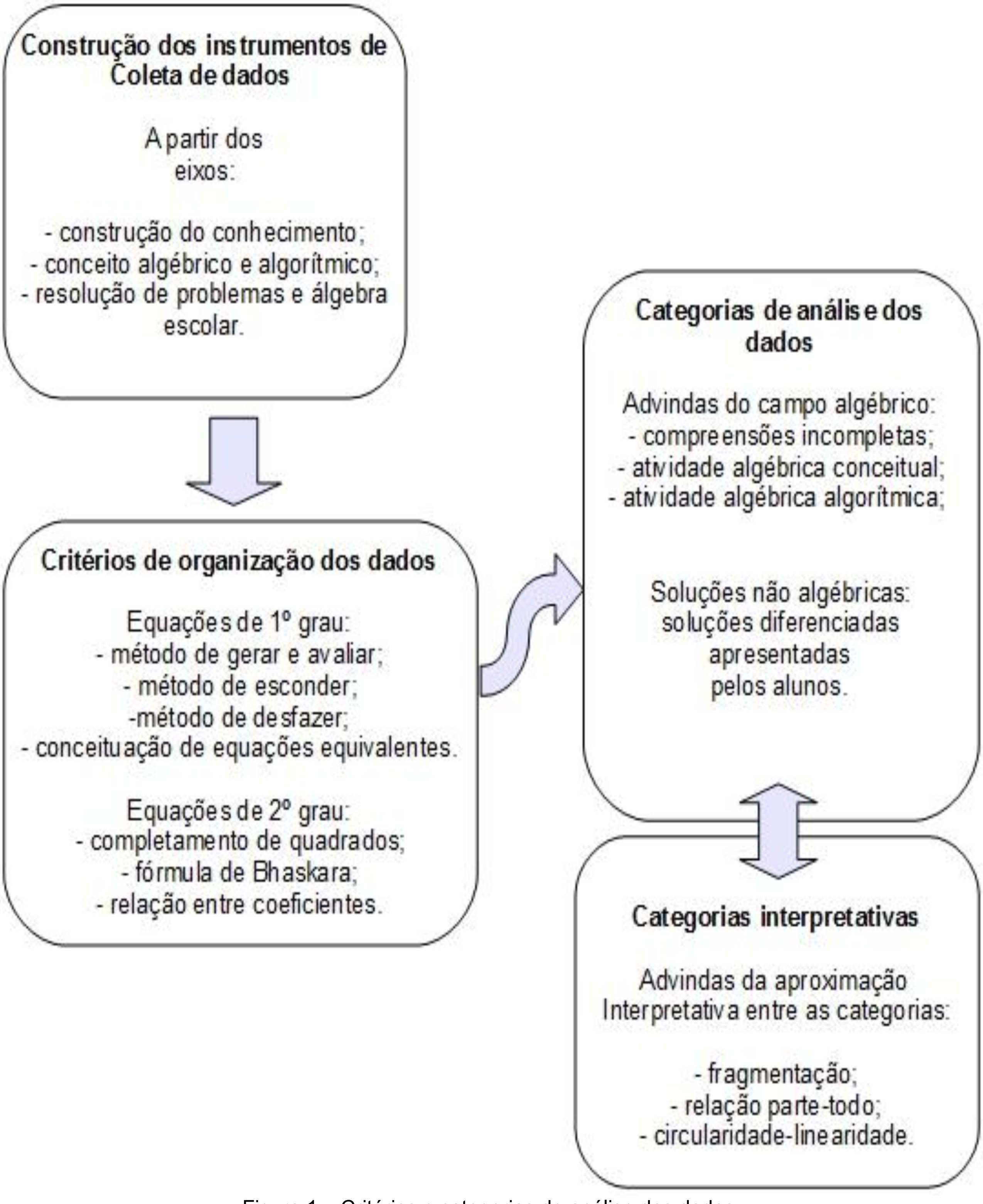


Figura 1 – Critérios e categorias de análise dos dados.
Fonte: referencial teórico da pesquisa.

6 RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

6.1 OBJETIVOS E RACIOCÍNIO ESPERADOS NA RESOLUÇÃO DAS LISTAS

Apresentamos, a seguir, os objetivos que tivemos ao elaborar os exercícios e os raciocínios esperados dos alunos ao resolverem os exercícios que geraram os protocolos escritos que utilizamos para classificar e analisar os dados coletados e chegar às conclusões desta pesquisa. Os resultados esperados se constituem na resolução esperada dos alunos, considerando-se atividade algébrica algorítmica e conceitual,

Entendemos que resolver um problema não se resume à mera leitura do que o enunciado propõe e chegar a uma solução correta utilizando os procedimentos esperados pelos professores, mas sim, envolve a compreensão do conceito envolvido, no nosso caso, equações de 1º e 2º graus, ou seja, além de chegar a uma resolução, o aluno deve questionar os resultados e perceber a sua coerência. Uma resposta correta à um problema, não raras vezes, perde um pouco da sua importância quando comparada ao processo de resolução que foi utilizado.

6.1.1 Objetivo dos exercícios e raciocínio esperados nas resoluções algorítmicas

Exercício 1 – Resolva a equação 3 x – 6 = 18. Qual o valor de x?
Objetivo: verificar se o aluno resolve a equação de 1º grau (resolução do algoritmo).
Modos de resolução: os métodos de resolução para equações de 1º grau (método de gerar e avaliar, método de esconder e o método de desfazer).

Uma dificuldade pode ocorrer para o aluno quando o professor não explica uma equação trabalhando com os dois lados da igualdade, no sentido de equivalência, e os alunos podem não construir relações entre este significado e o operacional (RIBEIRO e SILVA, 2014). O professor, por praticidade ou maior “facilidade”, diz que no início da resolução “passamos o 6 para o outro lado com sinal invertido” e depois “passamos o 3 que está multiplicando o x para o outro lado dividindo o 24”, promovendo então uma mecanização excessiva dos procedimentos, sem que o aluno entenda realmente o que está fazendo.

Esta atitude do professor pode levar o aluno a cometer alguns erros, como por exemplo, a não inversão do sinal na hora de mudar o número de lado na igualdade por esquecimento e a passagem do número que está multiplicando x como se estivesse somado com x, ou seja, ele passa diminuindo para o outro lado em vez de passar dividindo**.**

Exercício 2 – Resolva a equação 4 y + 2. (13 – y) = 46. Qual o valor de y?
Objetivo: verificar se o aluno resolve a equação de 1º grau (resolução do algoritmo) após efetuar a operação aritmética necessária..
Modos de resolução: os métodos de resolução para equações de 1º grau (método de gerar e avaliar, método de esconder e o método de desfazer).

A diferença entre esta equação e a anterior, é que nesta há operações aritméticas a serem efetuadas antes das operações propriamente algébricas, que nos auxiliam a avaliar o conhecimento operacional do aluno e com isso podemos observar se determinado erro cometido é de natureza aritmética ou algébrica.

No nosso ponto de vista, a propriedade distributiva que deve ser efetuada no primeiro termo da equação é observada como um procedimento aritmético em um contexto algébrico. Observamos, em alguns casos em nossa rotina escolar, que alunos erram o procedimento distributivo seja em atividade aritmética ou algébrica.

Exercício 3 – Resolva a equação 4 x = 2.(150). Qual o valor de x?
Objetivo: verificar se o aluno resolve a equação de 1º grau (resolução do algoritmo) após efetuar a operação aritmética necessária..
Modos de resolução: os métodos de resolução para equações de 1º grau (método de gerar e avaliar, método de esconder e o método de desfazer).

Como na equação anterior, há também operações aritméticas (ao efetuarmos a multiplicação de 2 por 150) a serem efetuadas por primeiro, que nos auxiliam a avaliar o conhecimento operacional do aluno. O aluno antes de resolver a equação propriamente dita, precisa multiplicar 2. (150) = 300, obtendo 4 x = 300 e por fim x = 75.

Exercício 4 – Resolva a equação x. (x + 10) – 600 = 0.

Objetivo: resolução da equação de 2º grau dada (resolução do algoritmo) após efetuar a operação aritmética necessária.

Modos de resolução: os métodos de resolução para uma equação de 2º grau (completamento de quadrados, fórmula de Bhaskara ou relação entre os coeficientes da equação).

O aluno deve utilizar a propriedade distributiva em relação a soma para então resolvê-la, efetuando *x . (x +10)*, obtendo $x^2 + 10x - 600 = 0$ e então aplicar os métodos para resolução da equação de 2º grau.

Exercício 5 – Resolva a equação $x^2 - 2x = 5x + 8$.

Objetivo: resolução da equação de 2º grau dada (resolução do algoritmo).

Modos de resolução: os métodos de resolução para uma equação de 2º grau (completamento de quadrados, fórmula de Bhaskara ou relação entre os coeficientes da equação). Nesta equação, o aluno deve tratar algebricamente a equação antes de resolvê-la, obtendo $x^2 - 2x - 5x = 8$ e depois $x^2 - 7x - 8 = 0$.

6.1.2 Objetivos dos problemas e raciocínio esperados na resolução dos problemas

A seguir discutiremos os objetivos e raciocínio esperados do aluno ao resolver os problemas que fazem parte do protocolo escrito que utilizaremos para analisar os dados e chegar às conclusões desta pesquisa.

Problema 1 - Pensei em um número, multipliquei por 3, subtrai 6 e obtive 18. Em que número pensei?

Objetivo: verificar se o aluno percebe que a resolução do problema parte de uma equação de 1º grau e a resolve.

Modos de resolução: os métodos de resolução demonstrados anteriormente nas resoluções esperadas a equação de 1º grau.

Se o aluno pensar o número como uma incógnita *x*, desenvolver e resolver a equação, o problema está resolvido.

Problema 2 - No estacionamento de um edifício há 13 veículos, entre carros e motos. Os 13 veículos totalizam 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

Objetivo: verificar se o aluno percebe que a resolução do problema pode partir de uma equação de 1º grau e a resolve.

Modos de resolução: os métodos de resolução esperadas para uma equação de 1º grau.

Este problema seria passível de duas soluções.

O aluno pode partir da resolução da equação de 1º grau apresentada na lista de equações, ou seja, montar a equação $4\,y + 2.\,(13 - y) = 46$, onde 4y seriam os veículos de quatro rodas (4 o número de rodas e y equivalendo aos carros) e o $2.(13 - y)$ seriam as motos, calculadas diminuindo os carros (y) do total de veículos apresentado no problema numa igualdade cujo resultado é o número total de carros. Teríamos 10 carros e três motos.

O aluno ainda pode resolver um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas para chegar ao resultado, fazendo, por exemplo, x como os carros e y como as motos, então o sistema teria as equações $x + y = 13$ e $4\,x + 2\,y = 46$, onde ele multiplicaria a primeira equação inteira por $-\,2$ e eliminaria o y e na soma das equações teria $2x = 20$, logo seriam 10 carros. Substituindo x por 10 na segunda equação ele teria $4\,.\,10 + 2\,y = 46 \rightarrow 40 + 2\,y = 46 \rightarrow 2\,y = 46 - 40 \rightarrow 2\,y = 6$, logo $y = 3$, logo são 3 motos, ou ainda, depois de ter encontrado o $x = 10$, bastaria fazer o total de veículos 13 menos 10, obtendo 3.

Problema 3: Numa balança com dois pratos, 4 bolas de x gramas cada equilibram-se com 2 maçãs de 150 gramas cada. Quanto pesa cada bola?

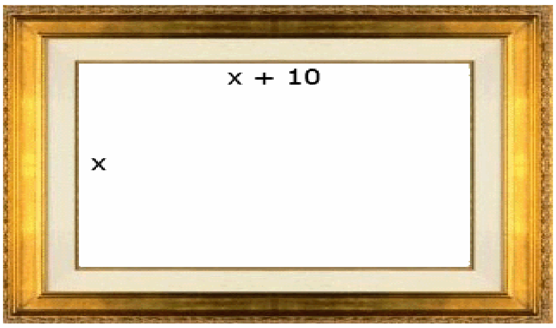
Objetivo: verificar se o aluno percebe que a resolução do problema parte de uma equação de 1º grau e a resolve.

Modos de resolução: os métodos de resolução citados anteriormente nas resoluções esperadas para uma equação de 1º grau.

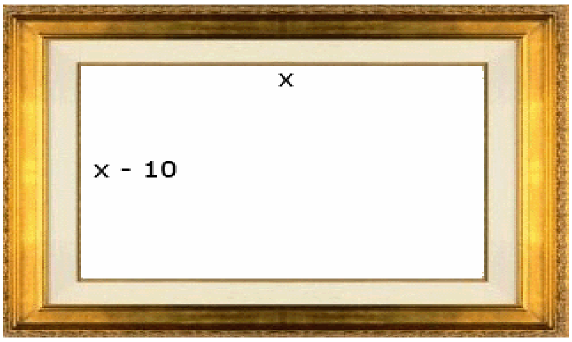
Este problema remete diretamente à incógnita *x* já no enunciado. O aluno pode montar a equação corretamente e resolvê-la. Este seria o resultado esperado.

Problema 4: Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:
- a área de cada quadro deve ter 600 cm²;
- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.
Qual deve ser a altura dos quadros?
Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.
Objetivo: verificar se o aluno percebe que a resolução do problema parte de uma equação de 2º grau e a resolve.
Modos de resolução: os métodos de resolução citados anteriormente nas resoluções esperadas para uma equação de 2º grau.

Neste problema, há a possibilidade do aluno modificar as medidas da altura e da largura, ele pode inclusive, se não ler corretamente o enunciado, invertê-las! Ele pode considerar o enunciado que mostra que a largura é igual a x + 10, porém ele pode considerar a altura como x – 10, invertendo a informação do enunciado. Caso essa inversão de informações ocorra, o resultado da equação de 2º grau será modificado. Ou seja, em vez de pensar as medidas do quadro assim:



Ele poderia pensar as medidas do quadro assim:



O resultado esperado é que o aluno considere a informação do enunciado e que a largura do retângulo (quadro) seja computada como x + 10. Teríamos a equação x. (x+10) = 600 e após efetuar a multiplicação do x, $x^2 + 10x = 600$ e por fim $x^2 + 10x - 600 = 0$.

Ao resolver o problema da forma esperada, ou seja, resolvendo a equação de 2º grau $x^2 + 10x - 600 = 0$, as raízes da equação serão 20 e – 30. Mas a altura não pode ser expressa por um número negativo, logo a altura dos quadros deve ser de 20 cm.

Problema 5: O quadrado do número que representa, em anos, a idade do irmão de Caio, menos o dobro desse número, é igual a cinco vezes o número aumentado de oito. Quantos anos tem o irmão de caio?

Objetivo: verificar se o aluno percebe que a resolução do problema parte de uma equação de 2º grau e a resolve.

Modos de resolução: os métodos de resolução citados anteriormente nas resoluções esperadas para uma equação de 2º grau.

Este problema remete diretamente à incógnita *x* já no enunciado, pois x seria a idade do irmão de Caio. Basta ao aluno montar a equação de 2º grau corretamente e resolvê-la, e encontrando ao finalizar a idade do irmão de Caio. Este seria o resultado esperado. Porém, se o aluno não interpretar da forma esperada, a equação pode ser efetuada de forma incorreta e então o aluno pode errar a resposta do problema.

Neste problema, o aluno deve, pelo resultado esperado, montar a equação, obtendo $x^2 - 2x - 5x = 8$ e depois $x^2 - 7x - 8 = 0$.

Outra observação pertinente, é que ao resolver a equação de 2º grau da maneira que o problema pede, ele chegará às raízes -1 e 8. Ora, não existe idade expressa em números negativos, logo a idade do irmão de Caio é de 8 anos.

Retomamos aqui o ponto nodal da escolha de problemas que tivessem como uma das soluções possíveis as equações resolvidas anteriormente pelos alunos. Esta escolha foi baseada na verificação da atividade algébrica algorítmica ou atividade algébrica conceitual dos alunos, descritas anteriormente na concepção das nossas categorias. Esta escolha foi proposital para que pudéssemos fundamentar nossas classificações e análises, e assim chegar às conclusões que almejávamos ao iniciar este estudo.

6.2 ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS – PRIMEIRA FASE

Para validação dos instrumentos de coleta de dados foi realizada uma aplicação das listas de exercícios e de problemas (instrumentos de coleta de dados para a pesquisa) com quatro alunos do 9º ano no momento em que lhes foi ministrado o conteúdo curricular equações de 2º grau, cujos protocolos escritos serão analisados a seguir. Para preservar a identidade dos alunos, estes foram nomeados por A1, A2, A3 e A4.

Por fim, achamos por bem inserir estes dados na pesquisa, apesar de não estarem listados nos nossos objetivos ao início da pesquisa, pois os resultados encontrados se mostraram muito interessantes e dignos de comparação, uma vez que os alunos do 9º ano estavam aprendendo equações de 2º grau e os do 1º ano do Ensino Médio não tinham mais contato com este conteúdo.

6.2.1 Resoluções das equações realizadas pelos alunos

As resoluções dos problemas realizadas pelos alunos serão descritas a seguir:

Exercício 1 – Resolva a equação 3 x – 6 = 18. Qual o valor de x?

A1, A2, A3 e A4: utilizaram o método de desfazer, baseando-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis. Acertaram a solução**.**

Exercício 2 – Resolva a equação 4 y + 2. (13 – y) = 46. Qual o valor de y?

A1, A3 e A4: efetuaram a operação aritmética corretamente. Utilizaram o método de desfazer para resolver a equação. Acertaram a solução.

A2: efetuou a operação aritmética, mas errou a multiplicação. Utilizou o método de desfazer, porém, por causa do erro da multiplicação, o resultado da equação foi incorreto.

Exercício 3 – Resolva a equação 4 x = 2.(150). Qual o valor de x?

A1, A2, A3 e A4: efetuaram a operação aritmética corretamente. Utilizaram o método de desfazer para resolver a equação. Acertaram a solução

Exercício 4 – Resolva a equação x. (x + 10) = 600.

A1, A2 e A4: efetuaram operação algébrica corretamente. Utilizaram a fórmula de Bhaskara para resolver a equação. Acertaram a solução

A3: efetuou a operação algébrica corretamente. Utilizou a fórmula de Bhaskara, mas errou o cálculo da raiz do delta, chegando no valor 500, quando o valor correto seria 50. Por isso não acertou as raízes da equação.

Exercício 5 – Resolva a equação $x^2 - 2x = 5x + 8$.

A1: efetuou a operação algébrica corretamente. Utilizou a fórmula de Bhaskara para resolver a equação, porém ao efetuar a conta de uma das raízes**,** errou ao dividir 16 por 4, pois obteve 8 e não 4. Acertou a outra raiz.

A2 e A3: efetuaram a operação algébrica corretamente. Utilizaram a fórmula de Bhaskara para resolver a equação. Acertaram a solução

A4: efetuou a operação algébrica corretamente. Utilizou a fórmula de Bhaskara para resolver a equação, mas errou na substituição dos valores no cálculo do delta e na fórmula, pois substituiu o coeficiente b por -2 quando o correto seria -7. Logo o resultado não foi correto.

6.2.2 Resoluções dos problemas resolvidos pelos alunos

As resoluções dos problemas realizadas pelos alunos estão descritas a seguir e também apresentamos extratos de soluções diferenciadas que foram apresentadas:

Problema 1 - Pensei em um número, multipliquei por 3, subtrai 6 e obtive 18. Em que número pensei?

A1, A2 e A3: denominaram o número a ser encontrado pela incógnita x e resolveram corretamente o problema.

A4: O aluno não resolveu o problema utilizando uma equação de 1º grau e apresentou esta resolução:

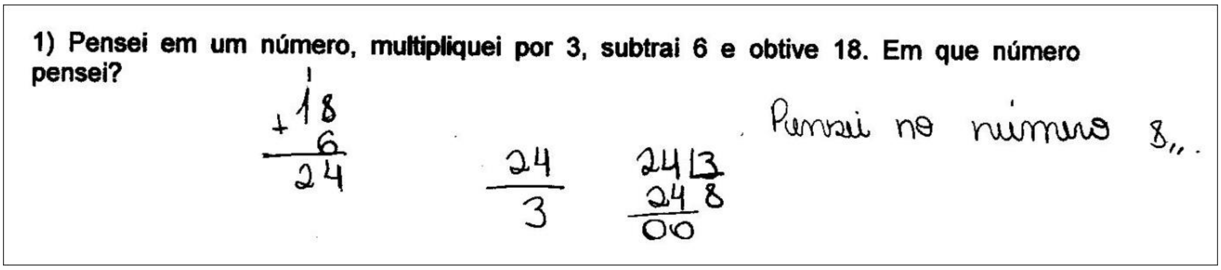


Figura 2 – Resolução do aluno A4 – Problema 1
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 1

Como podemos ver, ele teve outro raciocínio. Começou a resolver pelo número que foi obtido e foi efetuando operações aritméticas 18+ 6 = 24, 24 : 3 = 8, chegando ao resultado correto do problema.

Problema 2 - No estacionamento de um edifício há 13 veículos, entre carros e motos. Os 13 veículos totalizam 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

A1: montou as duas equações que seriam as do sistema de equações, porém não o resolveu, não solucionando o problema.

A2 e A4 : Não resolveram o problema. Resposta em branco.

A3: Não desenvolveu uma resolução aritmética, nem algébrica, conforme o seguinte extrato:

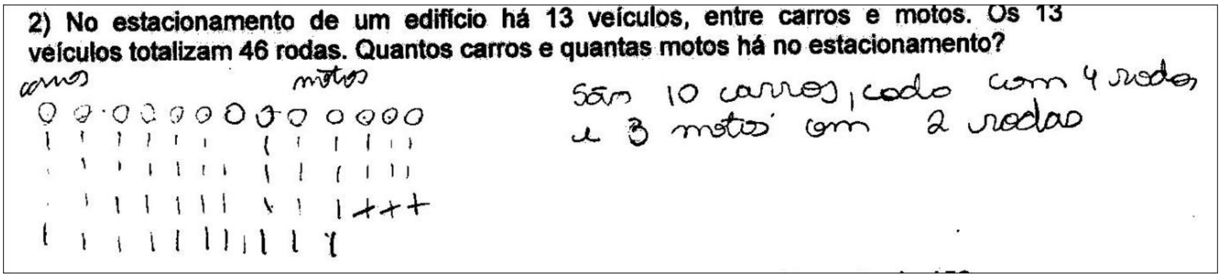

2) No estacionamento de um edifício há 13 veículos, entre carros e motos. Os 13 veículos totalizam 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

Figura 3 – Resolução do aluno A3 – Problema 2
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 1

O aluno montou um desenho com círculos e foi tracejando embaixo dos círculos (acreditamos serem as rodas). Ao final, chegou ao resultado esperado, 10 carros e três motos.

Problema 3: Numa balança com dois pratos, 4 bolas de x gramas cada equilibram-se com 2 maçãs de 150 gramas cada. Quanto pesa cada bola?

A1, A2, A3 e A4 : montaram a equação e resolveram o problema corretamente.

Problema 4: Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:

- a área de cada quadro deve ter 600 cm²;

- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Qual deve ser a altura dos quadros?

Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.

A1, A2 e A4: Não resolveram o problema. Resposta em branco.

A3: Tentou resolver o problema, conforme o seguinte extrato:

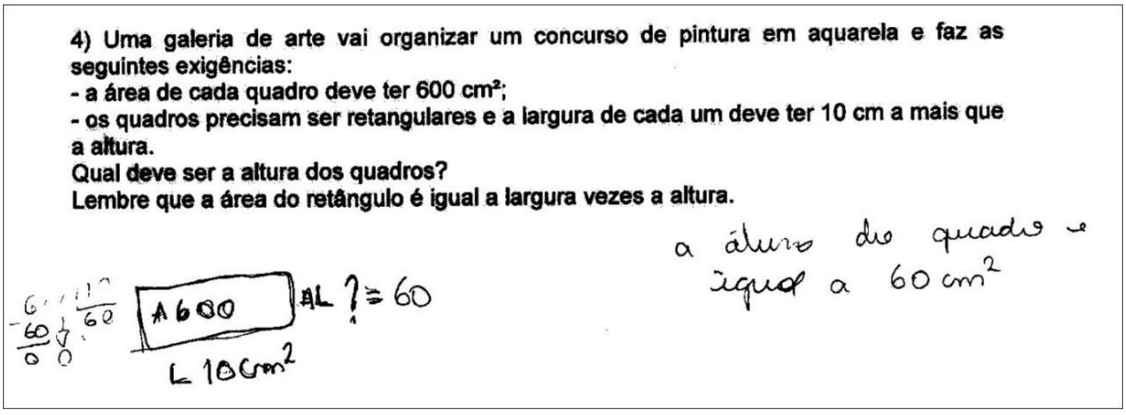

4) Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:
- a área de cada quadro deve ter 600 cm²;
- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.
Qual deve ser a altura dos quadros?
Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.

Figura 4 – Resolução do aluno A3 – Problema 4
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 1

O aluno desenhou o quadro e usou uma medida citada no problema, usou 10 cm para ser a largura e tentar resolver o problema, mas a informação do problema era que a largura media x + 10 cm e a altura media x, logo não chegou ao resultado correto.

Notemos que essa resolução pode nos levar a algumas conclusões, como a que o aluno não compreendeu o enunciado do problema, ou que não havia ainda resolvido nenhum problema parecido e não tinha um conhecimento anterior para resolver este problema ou ainda que o aluno simplesmente utilizou os dados do enunciado para chegar a uma resolução qualquer, não importando o quão disparatado fosse o resultado.

Problema 5: O quadrado do número que representa, em anos, a idade do irmão de Caio, menos o dobro desse número, é igual a cinco vezes o número aumentado de oito. Quantos anos tem o irmão de caio?

A1 e A2: Montaram a equação corretamente, resolvendo a parte aritmética e a parte algébrica, chegando às raízes corretas. Porém ao responder a idade do irmão de Caio, somaram as duas raízes (8 + (- 1) = 7), chegando à idade de 7 anos quando o correto seria 8 anos.

A3: Montou a equação corretamente, resolvendo a parte aritmética e a parte algébrica, chegando às raízes corretas. Mas não respondeu qual era a idade do irmão de Caio.

A4: Montou a equação corretamente, resolvendo a parte aritmética e a parte algébrica, chegando às raízes corretas. Respondeu que a idade do irmão de Caio é de 8 anos.

6.2.3 Análises das respostas dos alunos na primeira fase

Ao resolverem a lista das equações, os alunos acertaram praticamente todas as equações de 1º grau. Um dos alunos cometeu um erro aritmético. Os procedimentos algébricos, ao utilizarem o método de desfazer, foram corretos. Pelas categorias de análise então, podemos verificar que os alunos tiveram atividade algébrica algorítmica ao resolverem as equações pedidas.

Já nas equações de 2º grau, houve três erros de alunos diferentes. Porém um erro foi aritmético (acreditamos que por falta de atenção), um na substituição de coeficientes na fórmula do *delta* e outro na fórmula de Bhaskara, apesar dos procedimentos de resolução das fórmulas estarem corretos. Estes alunos podem não ter conseguido utilizar os símbolos de forma adequada, talvez possuam compreensões incompletas dos conceitos envolvidos.

Aqui percebemos a fragmentação dos conceitos matemáticos aprendidos na álgebra escolar e como este distanciamento entre os tópicos interfere na compreensão deste conteúdo pelo aluno e também que nesta fragmentação, na estrutura cognitiva do aluno, este conceito se torna apenas um tópico descontextualizado, sem sentido. Há uma manipulação correta do algoritmo, mas a substituição errada dos coeficientes, sem a percepção do erro pelo aluno, revela a mecanização do procedimento. Ele sabe o que faz, mas não sabe o porquê de fazer isso.

Já quando passamos para a lista de enunciados, nos deparamos com o que os autores nos dizem das dificuldades que o aluno tem de construir o pensamento algébrico. Nas equações de 1º grau, quando as informações do problema eram diretas, a maioria dos alunos resolveu as equações sem grandes problemas, ou seja, mostraram atividade algébrica algorítmica nas resoluções das equações. Porém, quando o problema era um pouco mais "aprimorado", ou seja, com informações dispostas de forma não direta, houve dificuldades, e não apresentaram atividade algébrica conceitual.

Apenas um dos alunos não usou equação de 1º grau para resolver o problema 1, efetuando o cálculo de maneira totalmente aritmética, a partir das informações do problema, do fim para o início, ou seja, a princípio há uma compreensão incompleta do conceito de equação de 1º grau ou talvez nem isso. Já o problema 3 foi resolvido corretamente por todos, utilizando a equação de 1º grau esperada, então há atividade algébrica algorítmica, pois era um problema de aplicação direta da equação.

No problema 2, por exemplo, apesar de haver várias possibilidades de resolução, apenas um dos quatro alunos tentou resolver montando um sistema de equações de 1º grau, porém não chegou a resolvê-lo, mostrando então provavelmente uma compreensão incompleta do conteúdo, ou seja, ele mostrou que percebe que a resposta pode ser um sistema de equações, mas como não compreendeu o conceito, não sabe como resolver este sistema, mais um resultado da fragmentação do conhecimento da álgebra escolar. O aluno que chegou ao resultado esperado, utilizou círculos e traços, mas de maneira não muito explícita, não estabelecendo uma relação entre o enunciado e a equação equivalente, ou seja, aparenta não ter compreendido o conceito de equações de 1º grau.

Quanto aos problemas que envolviam como solução esperada uma equação de 2º grau, o resultado foi semelhante. O problema 5, que fornecia informações mais diretas, aplicadas imediatamente e formando uma equação de 2º grau, pareceu que algebricamente foi resolvido com mais facilidade, pois foi resolvido por todos os alunos que encontraram as duas raízes corretas da equação, apesar de só um acertar a resposta do problema. Os alunos apresentaram atividade algébrica algorítmica, mas aparentemente não houve compreensão do enunciado do problema, pois ou não apresentaram a resposta do problema, ou somaram as duas raízes, o que mostra não entendimento do que seja uma raiz. Somente um aluno respondeu corretamente.

Já no problema 4 foi percebida uma maior dificuldade de resolução. As informações não estavam dispostas de forma direta e exigiam um grau de interpretação maior do aluno, talvez até um desenho para que ele pudesse visualizar com mais clareza o que estava sendo pedido. Apenas um aluno se aventurou a resolver o problema, e o fez de modo totalmente equivocado.

Talvez aqui também coubesse uma entrevista com estes alunos, para compreender qual foi realmente a dificuldade que eles tiveram, uma vez que na resolução algorítmica da equação equivalente à que deveria ter sido utilizada neste problema, três dos quatro alunos acertaram. Num primeiro momento, pode-se dizer que os alunos têm a compreensão algorítmica de equações de 2º grau, mas não conceitual, pois não resolveram os problemas de maneira esperada, utilizando as equações de 1º e 2º graus.

Ao resolverem a lista de problemas, quando os dados do enunciado não eram de utilização direta e exigiam uma maior interpretação para se chegar a uma forma de resolução (nos problemas 2 e 4), os alunos parecem não ter conseguido alcançar o resultado almejado, a maioria deixando as respostas em branco. Ou seja, somada a dificuldade de interpretação há a dificuldade de enxergar o problema de modo algébrico.

Pode-se então, à primeira vista, dizer que os alunos que participaram da primeira atividade e resolveram as duas listas mecanizaram os procedimentos algorítmicos, pois demonstraram atividade algébrica algorítmica no momento que conseguiram resolver as equações da lista, mas não construíram o conhecimento referente aos conceitos matemáticos envolvidos nas equações de 1º e 2º graus, não mostraram atividade algébrica conceitual, pois a maioria teve dificuldades para resolver os problemas e não perceberam que a resolução partia de equações.

Verificamos então que a aplicação das listas, num primeiro momento para quatro alunos, evidencia os processos resolutivos, tanto algoritmicamente quanto conceitualmente. Como percebido, não foram utilizadas as categorias de análise advindas da aproximação interpretativa entre as categorias, pois para ter parâmetros para o uso destas categorias, seriam necessárias as entrevistas com os alunos, o que não estava previsto para esta fase e ocorreu na seguinte.

Cabe a observação que os alunos do 9º ano, ao resolverem as listas, estavam aprendendo o conteúdo relativo a equações de 2º grau. Após esta fase, as listas foram validadas para aplicação com os demais participantes da pesquisa, os alunos do 1º ano do Ensino Médio.

6.3 ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS E PROBLEMAS – SEGUNDA FASE

6.3.1 Classificação e análise das resoluções organizadas por atividade – Segunda fase

Apresentamos agora acertos e erros apresentados por atividade desenvolvida com os alunos participantes da pesquisa. Nos gráficos, os dados estão demonstrados tanto por número de alunos quanto por percentual, tanto nos erros quanto nos acertos.

Os 25 alunos do 1º ano do Ensino Médio, no momento da resolução das listas, não estavam aprendendo nenhum conteúdo referente a equações. Estavam terminando o ano letivo, ou seja, nosso interesse se fixou nos conceitos referentes a equações polinomiais de 1º e 2º graus que ficaram ancorados na estrutura cognitiva dos alunos e as relações construídas a partir destes conceitos.

Cabe lembrar que nesta pesquisa, os erros são indicadores da natureza da aprendizagem da Álgebra referente a equações de 1º e 2º graus, ou seja, os erros podem indicar compreensões incompletas relativas à construção dos conhecimentos aritméticos e algébricos, bem como se os alunos possuem ou não atividade algébrica algorítmica e atividade algébrica conceitual, categorizadas anteriormente para análise dos dados coletados.

EQUAÇÃO 1: Resolva a equação 3 x – 6 = 18. Qual o valor de x?

21 alunos acertaram e quatro alunos erraram esta atividade algorítmica.

Foram apresentados os seguintes erros:

- erro na inversão do sinal no momento de passar o número para o outro lado da igualdade por dois alunos;
- erro de divisão por um aluno;
- erro na regra de sinal por um aluno.

Não houve problemas algébricos nesta equação, somente erros aritméticos. Um dos alunos (A02) não apresentou as contas escritas, parece ter feito cálculo mental (acertou).

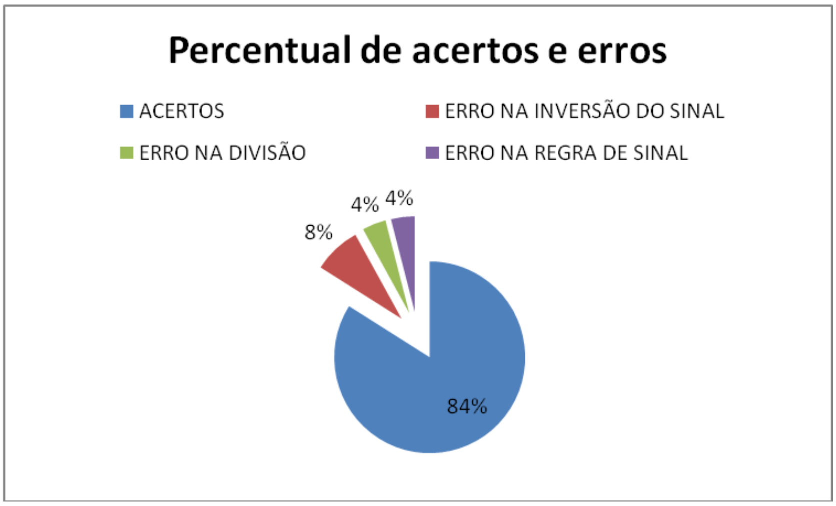


Gráfico 1 – Percentual de acertos e erros – Equação 1
Fonte: dados da pesquisa

EQUAÇÃO 2: Resolva a equação 4 y + 2. (13 – y) = 46. Qual o valor de y?

18 alunos acertaram e sete alunos erraram esta atividade algorítmica. Os erros apresentados foram:

- um aluno apresentou erro não classificado, pois não compreendemos o que o aluno fez;

- dois alunos apresentaram erro de falta de atenção;
- um aluno cometeu erro na inversão do sinal;
- três alunos cometeram erros ao utilizar a propriedade distributiva.

Não houve problemas algébricos nesta equação, somente erros aritméticos.

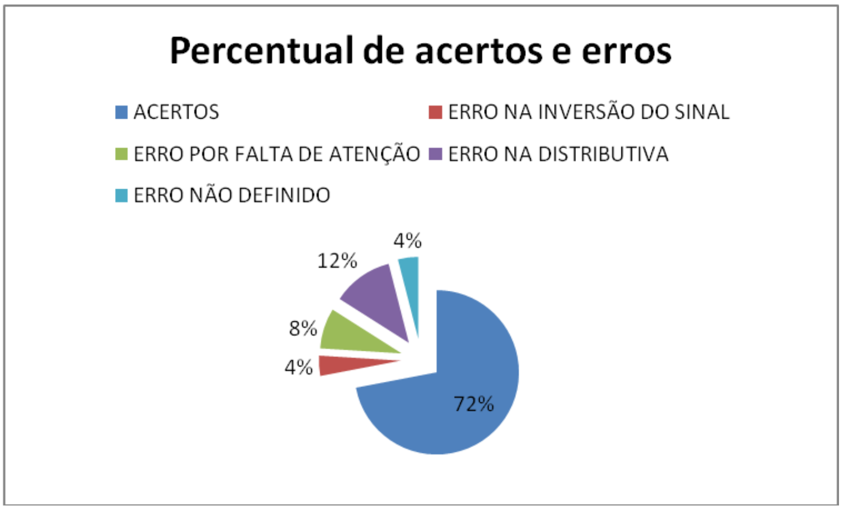


Gráfico 2 – Percentual de acertos e erros – Equação 2
Fonte: dados da pesquisa

EQUAÇÃO 3: Resolva a equação 4 x = 2 . (150). Qual o valor de x?

Nesta atividade algorítmica 23 alunos acertaram e dois cometeram erros de divisão.

Não houve problemas algébricos nesta equação, somente erros aritméticos. Um dos alunos (A02) não apresentou as contas, parece ter feito cálculo mental (acertou).

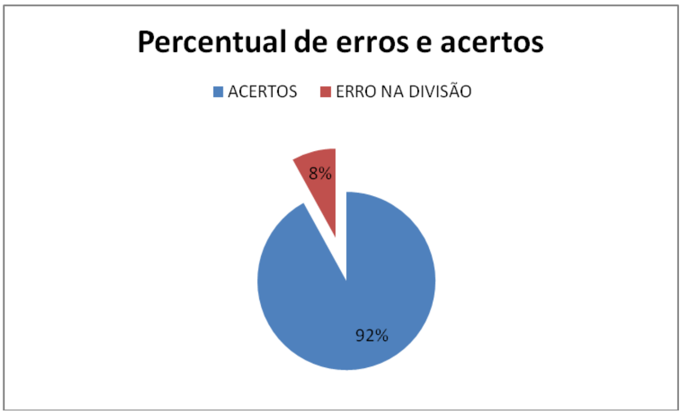


Gráfico 3 – Percentual de acertos e erros – Equação 3
Fonte: dados da pesquisa

EQUAÇÃO 4: Resolva a equação $x^2 + 10x - 600 = 0$.

Nesta atividade 15 alunos acertaram e 10 erraram.

Os erros apresentados foram:

- um aluno apresentou resolução errada, direta, sem cálculo;
- quatro alunos cometeram erros ao calcular o delta: um na multiplicação do -4ac, outro na substituição dos dados da equação na fórmula e dois erraram no sinal no -4ac;
- três alunos erraram na fórmula de Bhaskara: um o sinal – b, outro na radiciação e o último no sinal da raiz;
- um aluno utilizou o método de desfazer das equações de 1º grau;
- um aluno deixou a questão em branco.

A maioria dos alunos apresentou atividade algébrica algorítmica, o restante cometeu erros de falta de atenção e aritméticos ao utilizar as fórmulas do delta e Bhaskara. Dois alunos não souberam resolver a questão.

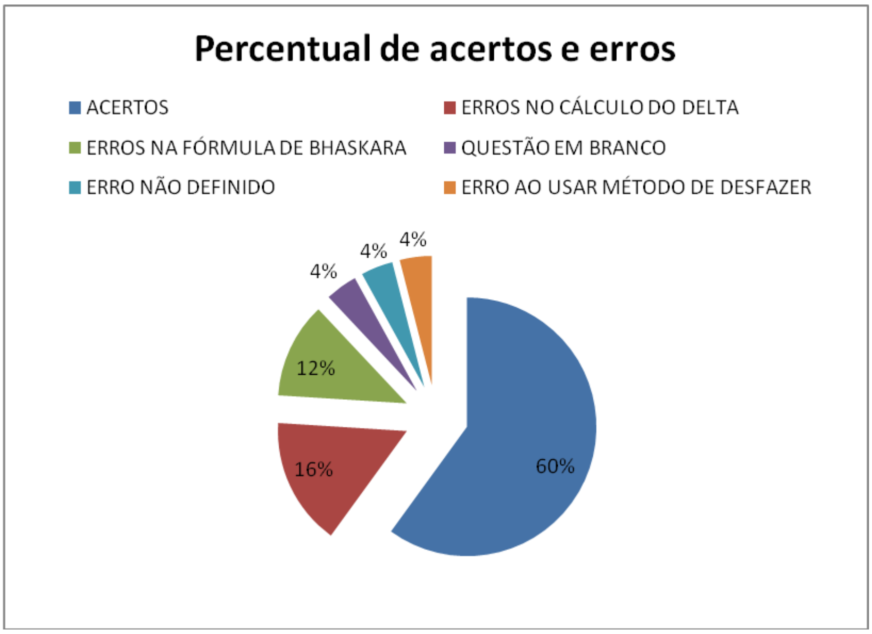


Gráfico 4 – Percentual de acertos e erros – Equação 4
Fonte: dados da pesquisa

EQUAÇÃO 5: Resolva a equação $x^2 – 2x = 5x + 8$.

Doze alunos acertaram a questão e 13 erraram. Os erros cometidos foram:

- dois alunos utilizaram o método de desfazer das equações de 1º grau;
- seis alunos cometeram erros na fórmula de Bhaskara: dois no sinal da raiz, três na divisão e um aluno na substituição dos termos da fórmula;
- dois alunos erraram ao calcular o delta: um errou o sinal do -4ac e outro na multiplicação do -4ac;
- dois alunos erraram ao resolver a equação: um na adição de termos semelhantes e outro na inversão do sinal;
- um aluno deixou a questão em branco.

A maioria dos alunos errou, apesar de apresentar atividade algébrica algorítmica. Ocorreram erros aritméticos nas fórmulas e na equação. Três alunos não apresentaram atividade algébrica algorítmica.

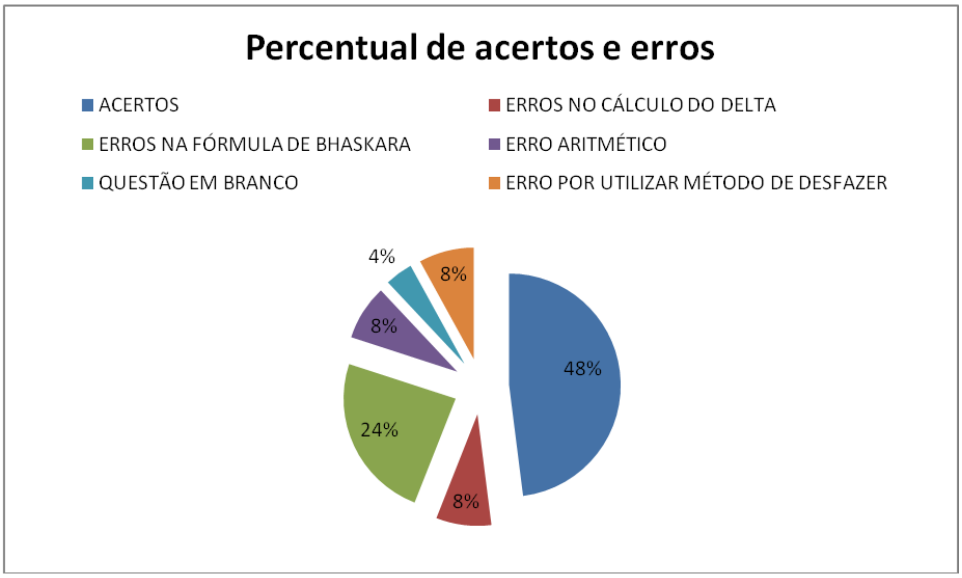


Gráfico 5 – Percentual de acertos e erros – Equação 5
Fonte: dados da pesquisa

PROBLEMA 1: Pensei em um número, multipliquei por 3, subtrai 6 e obtive 18. Em que número pensei?

20 alunos acertaram o problema, porém nove destes alunos não utilizaram equações para resolvê-lo. 11 alunos usaram equações com resolução pelo método de desfazer. Os outros métodos utilizados foram:
- quatro alunos utilizaram o método de esconder, “esconderam” a incógnita e fixaram a atenção ao que a equação pedia;
- três alunos utilizaram o método de gerar e avaliar, fazendo contas até encontrar o

valor procurado;

- um aluno resolveu por cálculo mental, não apresentando a resolução do problema, mas as respostas foram corretas;
- um aluno utilizou o caminho inverso por operações aritméticas, fazendo as contas apresentadas no enunciado de maneira inversa para chegar ao resultado.

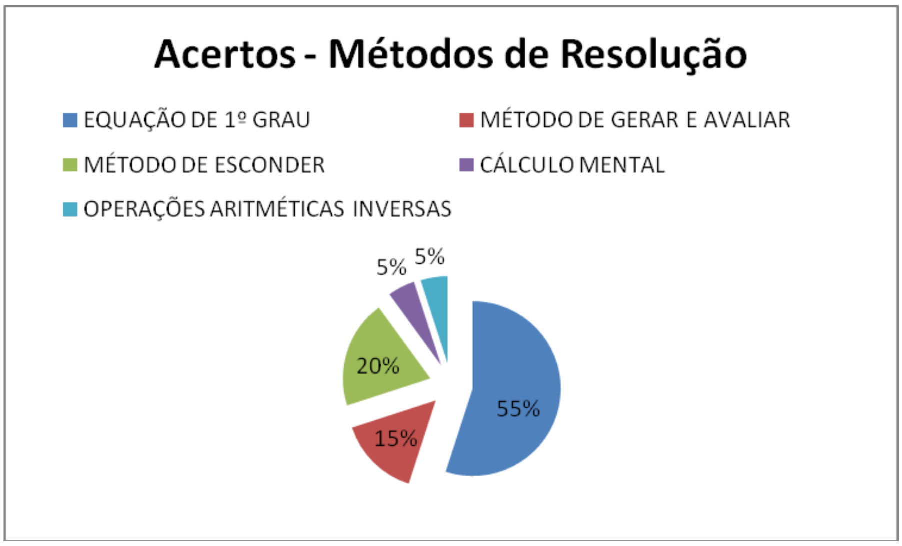


Gráfico 6 – Métodos de resolução utilizados pelos alunos que acertaram o problema – Problema 1
Fonte: dados da pesquisa

Cinco alunos cometeram erros ou não resolveram:

- um aluno errou ao inverter o sinal;
- um aluno errou ao utilizar regra de três;
- dois alunos erraram ao interpretar o enunciado;
- um aluno não resolveu, deixou em branco.

Considerando os métodos de esconder e gerar e avaliar como métodos de resolução de equações de 1º grau por Bernard e Cohen (1995), então 18 alunos utilizaram métodos de resolução de equações de 1º grau para resolver o problema, o que indica possuírem atividade algébrica conceitual.

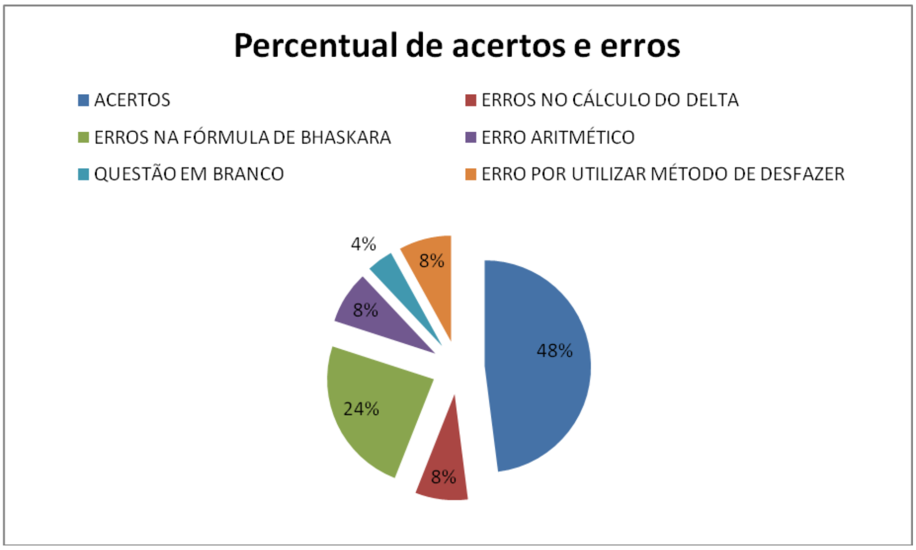


Gráfico 7 – Percentual de acertos e erros – Problema 1
Fonte: dados da pesquisa

PROBLEMA 2: No estacionamento de um edifício há 13 veículos, entre carros e motos. Os 13 veículos totalizam 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

17 alunos acertaram o problema, utilizado as seguintes resoluções:

- 13 alunos utilizaram o método gerar e avaliar, fazendo tentativas e cálculos para descobrir qual seria o número de carros e motos. Esses alunos têm "noção intuitiva" de equação, pois sabiam que precisavam encontrar dois números distintos que representassem a incógnita carros e a incógnita motos;
- três alunos resolveram por cálculo mental, não apresentando a resolução do problema, mas as respostas foram corretas;
- um aluno utilizou a equação esperada, usou a equação de 1º grau propriamente dita.

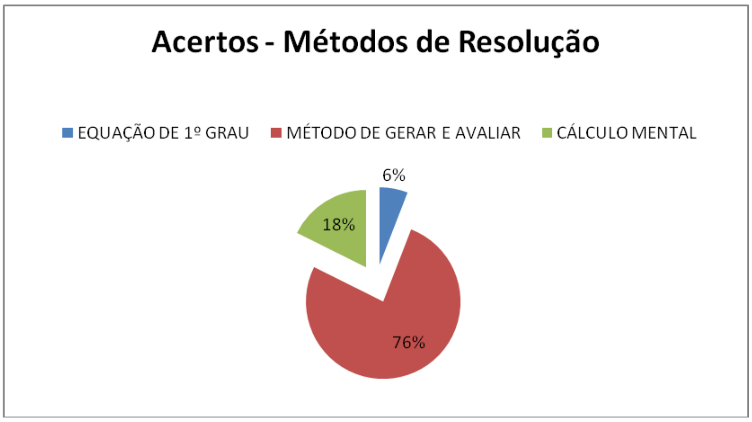


Gráfico 8 – Métodos de resolução utilizados pelos alunos que acertaram o problema – Problema 2
Fonte: dados da pesquisa

Oito alunos cometeram os seguintes erros:

- três alunos usaram o método de gerar e avaliar, pois tentaram fazer a conta aritmeticamente, mas não chegaram ao resultado;
- dois alunos resolveram por dedução, trabalhando com outras representações não-numéricas para chegar ao resultado (risquinhos, bolinhas etc), mas chegaram ao resultado errado;
- dois alunos deixaram em branco, não resolveram;
- um aluno errou ao interpretar o enunciado, não compreendendo como utilizar os dados do enunciado.

Um pouco mais da metade dos alunos apresentou atividade algébrica conceitual, uma vez que a maioria chegou à solução a partir do método de gerar e avaliar, que pelo nosso referencial teórico é uma das formas de solução das equações de 1º grau.

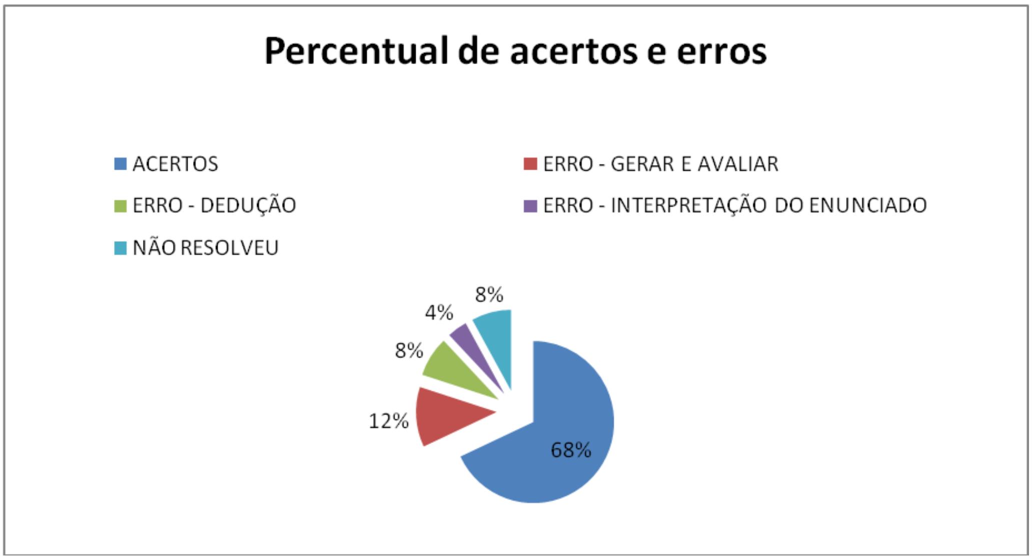


Gráfico 9 – Percentual de acertos e erros – Problema 2
Fonte: dados da pesquisa

PROBLEMA 3: Numa balança, 4 bolas de x gramas cada equilibram-se com 2 maçãs de 150 gramas cada. Quanto vale x?

16 alunos acertaram a resposta do problema.

- um aluno fez uso do método de gerar e avaliar, fazendo cálculos (multiplicações);
- um aluno utilizou regra de três e depois divisão;

- dois alunos fizeram a conta aritmética;
- 12 alunos utilizaram a equação de 1º grau esperada.

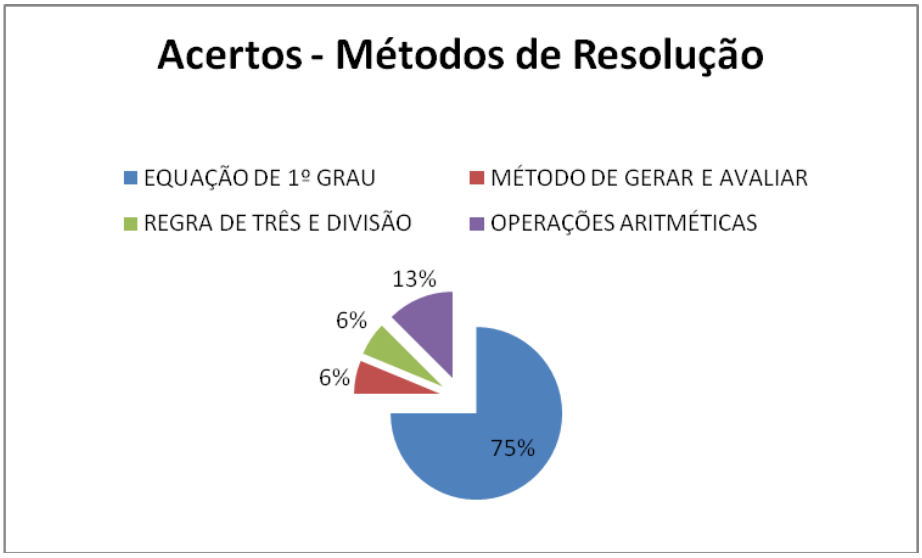


Gráfico 10 – Métodos de resolução utilizados pelos alunos que acertaram o problema – Problema 3
Fonte: dados da pesquisa

Nove alunos cometeram erros.

- um aluno cometeu um erro indefinido;
- cinco alunos utilizaram regra de três;
- um aluno errou na divisão (erro aritmético);
- dois alunos erraram na interpretação do problema.

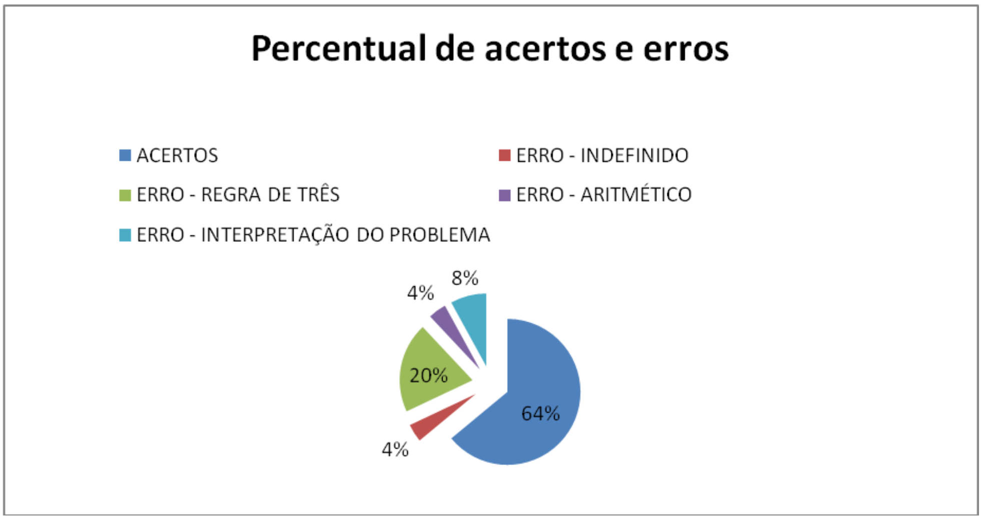


Gráfico 11 – Percentual de acertos e erros – Problema 3
Fonte: dados da pesquisa

Pelo nosso referencial teórico, o aluno que utilizou o método de gerar e avaliar tem sim atividade algébrica conceitual, pois consegue perceber quando chega ao resultado pretendido. Esse aluno ainda não teria o domínio das atividades operativas da incógnita da equação. É perceptível que há noção conceitual intuitiva, que não está plenamente desenvolvida e está em processo de construção, mas é indicativo de desenvolvimento de atividade algébrica conceitual.

PROBLEMA 4: Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:

- a área de cada quadro deve ter 600 cm²;

- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Qual deve ser a altura dos quadros? Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.

13 alunos acertaram a resolução.

- seis alunos utilizaram a equação de 2º grau esperada;
- seis alunos resolveram geometricamente;
- um aluno acertou, mas com uma resolução incoerente.

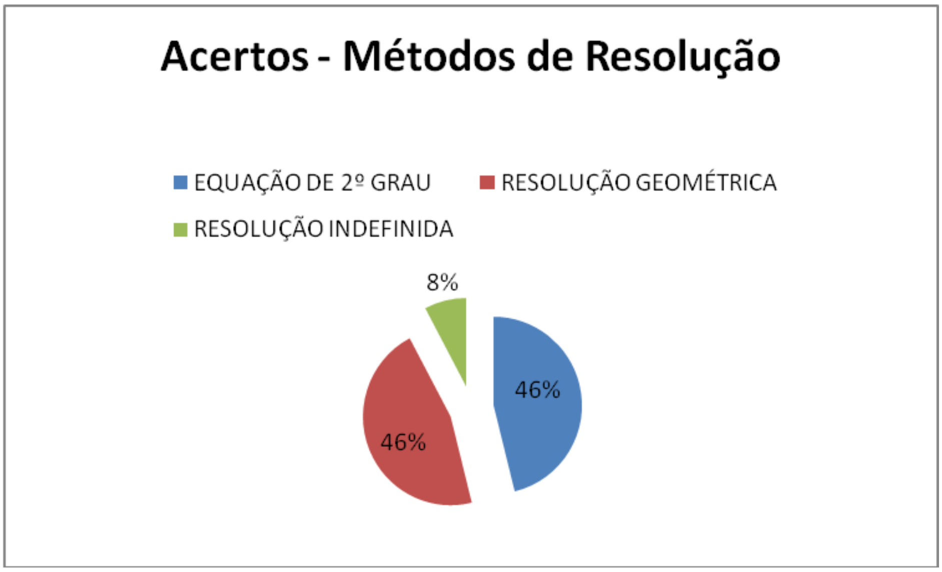


Gráfico 12 – Métodos de resolução utilizados pelos alunos que acertaram o problema – Problema 4
Fonte: dados da pesquisa

12 alunos erraram ou não responderam.

- três alunos cometeram erros de natureza geométrica;
- três alunos não desenvolveram a resolução ou deixaram em branco;

- um aluno errou a raiz do delta na fórmula de Bhaskara;
- dois alunos utilizaram o método de desfazer usado nas equações de 1º grau ;
- dois alunos erraram ao interpretar o problema;
- um aluno cometeu erro aritmético na distributiva ao montar a equação de 2º grau.

Apesar de vários alunos acertarem a resposta do problema, não há demonstração de atividade algébrica pela maioria dos alunos, pois somente oito alunos utilizaram a equação de 2º grau correspondente para resolver ou tentar solucionar o problema. Outros alunos usaram propriedades geométricas do retângulo (ou do triângulo retângulo) para resolver por dedução, ao multiplicarem 30 X 20 obtiveram 600 e assim responderam o problema. Assim sendo, a maioria dos alunos não demonstrou possuir atividade algébrica conceitual.

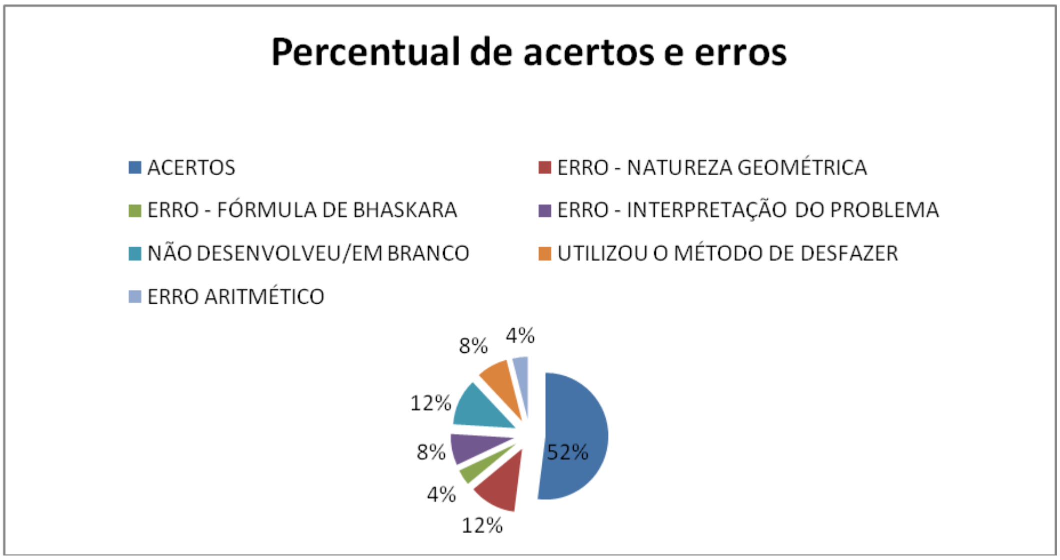


Gráfico 13 – Percentual de acertos e erros – Problema 4
Fonte: dados da pesquisa

PROBLEMA 5: O quadrado do número que representa, em anos, a idade do irmão de Caio, menos o dobro desse número, é igual a cinco vezes o número aumentado de oito. Quantos anos tem o irmão de Caio?

Nove alunos acertaram.

- dois alunos acertaram parcialmente, pois montaram a equação mas não deram resposta e erraram no sinal de uma raiz;
- dois alunos acertaram equação, mas não responderam o problema;
- cinco alunos acertaram a equação 2º grau.

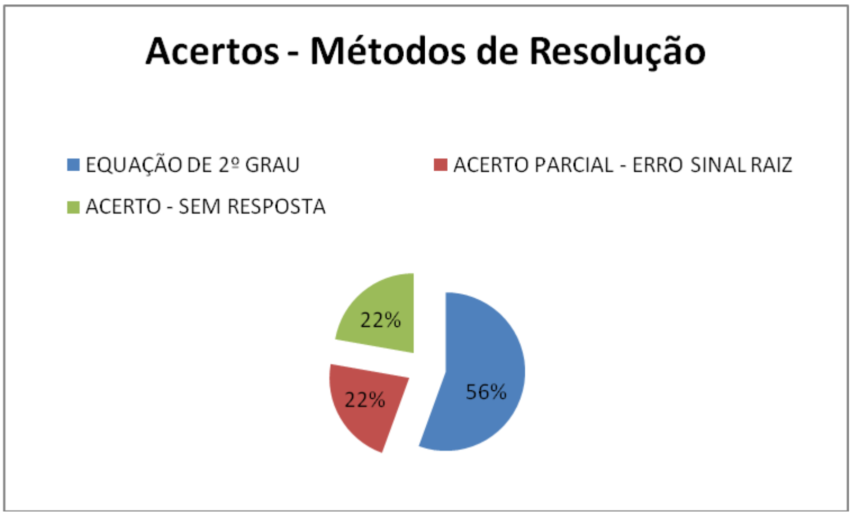


Gráfico 14 – Métodos de resolução utilizados pelos alunos que acertaram o problema – Problema 5
Fonte: dados da pesquisa

16 alunos cometeram erros.

- oito alunos fizeram uma interpretação os dados de maneira diferenciada;
- um aluno errou a soma dos termos em x da equação;
- um aluno errou na substituição dos termos na fórmula de Bhaskara;
- dois alunos erraram ao deduzir o resultado;
- quatro alunos erraram ao começar a resolver e não terminaram ou deixaram em branco.

12 alunos demonstraram ter atividade algébrica conceitual, ou seja, resolveram o problema a partir de uma equação de 2º grau, apesar de apenas cinco alunos terem acertado totalmente a equação. Já o restante dos alunos não conseguiu resolver o problema, ou seja, não apresentaram atividade algébrica conceitual, pois não perceberam que a resolução partia diretamente do enunciado, não sendo necessárias deduções ou outros meios de resolução.

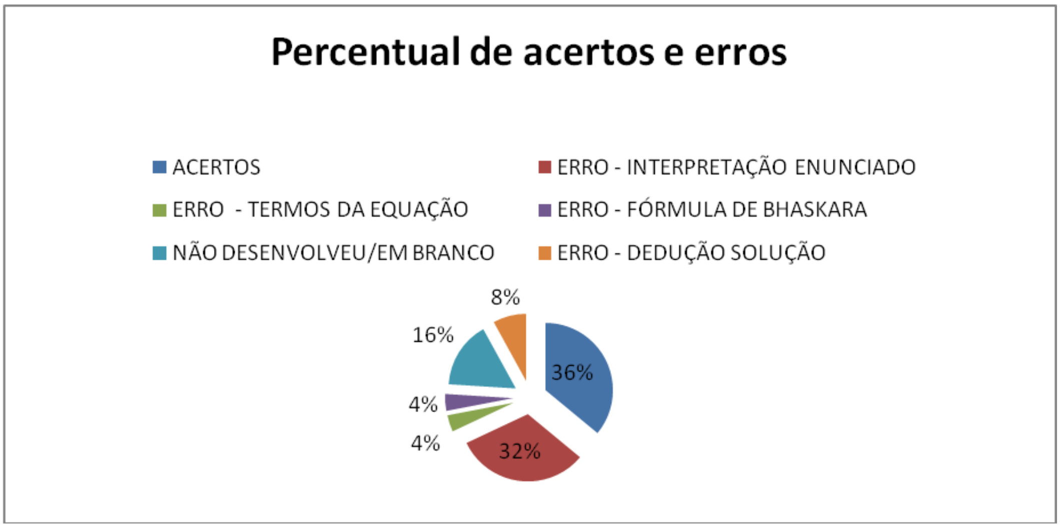


Gráfico 15 – Percentual de acertos e erros – Problema 5
Fonte: dados da pesquisa

6.3.2 Análise das resoluções por aluno

Abaixo estão descritas as resoluções das atividades algorítmicas e dos problemas, por aluno, seguidas da análise dos dados que deram origem à seleção dos alunos para a entrevista.

A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética da Universidade Federal do Paraná, do Setor de Ciências e Saúde e somente realizada após a devida aprovação por esta instituição.

As listas foram aplicadas aos 25 alunos do 1º ano do Ensino Médio pertencentes à segunda fase da pesquisa. Cinco deles não apresentaram para as pesquisadoras o Termo de Compromisso Livre e Esclarecido (TCLE) devidamente assinado pelos pais. Assim, esses cinco alunos, mesmo apresentando soluções originais ou inesperadas, não puderam estar entre os selecionados para entrevista..

ALUNO A01

Na resolução das atividades algorítmicas, não acertou a atividade 1, apresentando erro aritmético. Já nas atividades 4, usou regra de sinais de multiplicação na fórmula de Bhaskara e os sinais das raízes ficaram invertidos. Na atividade 5, acertou. Mas poderia ter acertado mesmo se usasse regra de multiplicação nas raízes, pois o resultado não seria alterado nessa atividade.

Já na resolução dos problemas, usou o método de esconder no problema 1, chegando ao resultado correto. No problema 2, foi por tentativa e também acertou.

No problema 3, montou corretamente a equação $4x = 2 \cdot 150$, mas errou porque colocou $16x = 300$. De onde surgiu o 16, se era $4x = 300$?

No problema 4, fez o desenho do quadro, mas colocou a altura como 10cm (dado do problema). Começou a resolver o problema usando a fórmula de área do triângulo retângulo (base x altura dividido por 2). Provavelmente não entendeu o que o problema pedia, ou não conseguiu escrever em linguagem matemática e por isso não resolveu.

No problema 5, houve dificuldade de interpretação do problema, na hora de escrevê-lo em linguagem matemática. “O quadrado de um número... menos o dobro desse número é igual a cinco vezes” escreveu raiz de 10 menos 20 igual a 40. Presumimos que o aluno pegou o 5 (do “cinco vezes”) e colocou numa raiz, multiplicou por dois (do “o dobro”) e diminuiu da raiz de 10 e ficou igual a 40, que é o dobro de 20.

Parece ter dificuldades aritméticas, que pelo referencial teórico são compreensões incompletas. Tem dificuldades na interpretação dos problemas, na hora de transpor da linguagem formal para a linguagem matemática, além de não possuir atividade algébrica conceitual.

Este aluno foi selecionado para entrevista, porque apresentou soluções que chamaram nossa atenção pelo seu modo de resolver os problemas apresentados.

ALUNO A02

Nas atividades algorítmicas, na atividade 1, parece ter resolvido direto, chegou imediatamente a $x = 8$. Na atividade 2, fez $4y + 2$, então $y=1$ e $13 – y$ com $y = 29$. Ou seja, não mostrou a resolução. Na atividade 3, escreveu direto o resultado $x = 75$, sem cálculo algum. Na atividade 4, de novo, somente $x = 60$, sem cálculos. Na atividade 5, fez $- 8 = - x^2 + 2x + 5x$, chegando a $– 8 = 7x$ (onde foi parar o $– x^2$?), com $x = - 8 / 7$, com $x = -1$.

Nos problemas, nos três primeiros (que seriam resolvidos por uma equação de 1º grau), acertou os resultados, porém respondeu todos desenvolvendo as tabuadas. No primeiro fez a tabuada do três até chegar em $3 \times 8 = 24$. Como $24 – 6 = 18$, respondeu que o número é 8. No problema 2, fez a mesma coisa, desenvolvendo a tabuada do 4 (número de rodas do carro) inteira, com 4 X 10 = 40 e a tabuada do 2 (número de rodas da moto) até 2 X 7 = 14. Então deduziu que são 10 carros e 3 motos. No problema 3, fez várias contas: somou 40 quatro vezes, 25 quatro vezes, 50 quatro vezes, 30 quatro vezes e 75 quatro vezes, que resultou o 300 esperado. Dai colocou que cada bola pesava 75 gramas. Não resolveu os problemas 4 e 5, deixou em branco.

Parece não possuir nem atividade algébrica algorítmica, nem atividade algébrica conceitual. Ou não tem compreensão do que seja uma equação.

Este aluno foi selecionado para entrevista pela resolução apresentada nas listas de equações e de problemas.

ALUNO A03

Resolveu todas as atividades algorítmicas, demonstrando ter competência para resolver equações de 1º e 2º graus algoritmicamente. Porém, não acertou a atividade 2, provavelmente por falta de atenção, pois o fez 4 y + 26 – 2 y = 16 (em vez de escrever 46, escreveu 16). Na atividade 5, esqueceu do sinal de menos em uma das respostas, obtendo 1 no lugar de – 1.

Nos problemas, resolveu corretamente primeiro e o terceiro, mas no segundo escreveu 10 X 4 = 40 e 3 X 2 = 6, obtendo 10 carros e 3 motos, porém escreveu à caneta acima de várias contas feitas a lápis e apagadas. No problema 4, chegou na resolução usando área = base X altura, chegando em $0 = h^2 + 10 - 600$, calculou o delta baseado nessa expressão, assumindo que o 10 seria o coeficiente b, acertou o problema. Resolveu o problema 5 corretamente, mas cometeu o mesmo erro de sinal da atividade 5.

Os únicos problemas com resposta foram o 1, 2 e 3. Os outros foram resolvidos, mas a resposta ao problema não foi dada.

Parece ter atividade algébrica algorítmica e conceitual para equações de 1º grau com uma variável (desde que essa variável não dependa de outra, por exemplo, x em relação à y) e para equações de 2º grau, porém precisa prestar mais atenção ao resolver para não cometer pequenos equívocos como os que apareceram nas resoluções. Talvez tenha compreensão incompleta de números inteiros e suas operações.

ALUNO A04

Resolveu corretamente as equações de 1 a 3. Na equação 4 não conseguiu encontrar o delta, pois não somou 2400 + 100, e sim multiplicou (possivelmente por falta de atenção). Parou a resolução ai. Na equação 5 encontrou corretamente o delta, mas ao calcular as raízes, fez16/2 = 1, logo errou esta raiz, mas encontrou a outra corretamente.

Ao resolver o problema 1, montou a equação corretamente, mas não utilizou o método de desfazer, parece ter usado o método de esconder, escreveu 8.3 – 6 = 18, 24 – 6 = 18 e fez as contas ao lado. No problema 2, tentou resolver por tentativa e erro, mas chegou ao resultado errado de 11 carros e 2 motos, que dá mais do que 46 rodas. Resolveu o problema três por regra de três, obtendo 2x=600, com resultado x = 300. O problema 4 foi resolvido, aparentemente, ao perceber que 20 e 30 seriam as medidas que resultariam numa área de 600 cm² e que seria o correto, pois 30 tem 10 cm a mais que 20. Não conseguiu montar o problema 5, escreveu $x^2 - d = 5\ x^{\wedge}8$, depois apagou a expressão x^2 – dobro = 5, escreveu = (5.x) + 8, depois 5x +8 e não terminou o problema. Parece não ter compreendido o enunciado do problema 5. Os problemas acertados tinham respostas.

Parece ter atividade algébrica algorítmica embora tenha problemas de falta de atenção ao resolver a parte aritmética, resultante da compreensão incompleta das equações de 2º grau. Não possui atividade algébrica conceitual. Compreensão incompleta ao não conseguir resolver de maneira algébrica os problemas 1, 2, 3 e 4.

ALUNO A05

Acertou as equações 1,2 e 3. Errou a equação 4 por não acertar a fórmula do delta (escreveu 100 – 2. - 600 + 1 → 100 + 1200 → 1300, com resposta de não existe raiz de 1300, x = conjunto vazio). Acertou a equação 5.

Acertou o problema 1 e o 3, utilizando a equação correspondente. O problema 2 foi por tentativa e erro (risquinhos divididos pelas rodas de cada veículo), mas chegou a 11 carros e 1 moto. Obtendo total diferente dos 13 veículos do enunciado. Fez o problema 4 corretamente, mas errou a raiz do delta, chegando a 25 em vez de 50. Dai errou as raízes. No problema 5 montou a equação corretamente, mas errou fazendo o – 2 x – 5 x = - 3 x. E cometeu chegou a delta 41, alegando novamente que não existe raiz de 41, x = conjunto vazio. Somente deu resposta aos problemas 1, 2 e 3.

Parece resolver corretamente equações de 1º grau e problemas de montagem direta que envolvam estas equações. O mesmo ocorre com as equações de 2º grau, porém erra os resultados por falta de atenção ao escrever a fórmula e nas contas aritméticas por compreensão incompleta de números inteiros e suas operações e erros de procedimento por má compreensão do conceito de variáveis.

ALUNO A06

Acertou todas as atividades algorítmicas.

O problema 1 foi resolvido corretamente pela equação. Fez o problema 2 por tentativa e acertou a resposta. Errou o problema 3 (fez regra de três) e resolveu o problema 4 encontrando dois números que multiplicados resultaram em 600, no caso 20 e 30, respondendo corretamente que a altura é 20 cm. Utilizou equação e acertou o problema 5. Respondeu todos os problemas.

Possui atividade algébrica algorítmica. Nos problemas, usou as equações correspondentes somente em dois, um referente à equação de 1º grau e um referente à equação de 2º grau.

Aluno selecionado para entrevista para que possamos compreender o porquê das suas soluções.

ALUNO A07

Na equação 1, seguiu o processo algébrico de resolução, mas teve erro aritmético: ao dividir 24 por 3 obteve 6, não 8. Equação 2, correta. Teve erro aritmético também na equação 3, ao dividir 300 por 4 obteve 74,10. Acertou a equação 4. Errou uma das raízes da equação 5, ao dividir -2 por 2 obteve -2, mas acertou a outra raiz.

Errou o problema 1, embora tenha montado a equação corretamente, passou o – 6 para o outro lado com o mesmo sinal, obtendo 3x = 12 em lugar de 3x = 18, tendo como resposta x = 4. Não resolveu o problema 2, deixou em branco. Cometeu o mesmo erro da equação 3 no problema 3. Montou a equação corretamente no problema 4, mas usou a fórmula da área, como base X altura para resolver. Definiu a=600, x+10=base, x = h.

Fez h.b = a → x.(x+10) = a → $10x + x^2 = 600$ → $x + x^2 = 60$ → $x^2 = 60$ e não terminou. No problema 5 montou a equação corretamente e a resolveu. Errou na fórmula de Bhaskara, pois considerou o coeficiente b = 2 (do começo da montagem da equação) e não b = - 7 (equação final).

O aluno tem atividade algébrica algorítmica, embora erre algumas divisões. Quando os problemas resultam numa equação já pelo enunciado, consegue chegar à equação, mas erra a parte aritmética. Os problemas que não resultam diretamente numa equação, que exigem uma elaboração anterior, não foram resolvidos ou foram resolvidos de maneira equivocada, talvez por compreensão incompleta de números naturais e suas operações.

ALUNO A08

Na Equação 1 teve erro aritmético ao passar um elemento aritmético para o outro lado da igualdade da equação, errando o resultado final. Na equação 2, erro de sinal ao passar um número para o outro lado da igualdade, ou seja, problema aritmético novamente. Na equação 3, resolução correta. Na equação 4, foi resolvendo corretamente até o cálculo das raízes, mas obteve raízes incorretas, pois fez 10 – 50 = 40 → 40/2 = 20. Na equação 5 fez $x^2 – 2x – 5x – 8$ (não usou a igualdade e foi resolvendo) → $x^2 – 3x – 8$ (adição incorreta de termos semelhantes), obteve delta = 41 e não continuou a resolução.

No problema 1, resolveu por regra de três. No problema 2, foi efetuando somas de 13, primeiro quatro somas (carros) obtendo 52 rodas e depois duas somas (motos) obtendo 29 rodas. Diminuiu 29 de 52, obteve 23, somou com 23, obteve 46 e chegou à conclusão que havia 23 carros no estacionamento. Resolveu o problema 3 também por regra de 3. O problema 4 foi resolvido usando o dado que a área é igual à largura vezes a altura. Chegou à medida do lado = 20, resultando em altura = 30. No problema 5, fez 5 + 3 = 8 , 5 – 8 = 3, e que Caio tem 3 anos (não o irmão de Caio).

O aluno possui compreensão incompleta de números naturais e suas operações e também de erros de procedimento com origens na má compreensão ou falta de compreensão do conceito de variáveis. Não possui atividade algébrica conceitual.

ALUNO A09

Acertou todas as equações, com resoluções perfeitas.

Acertou o problema 1 pelo método de esconder, chegou à conclusão que o número era 8, pois 8.3 = 24 e 24 – 6 = 18. Tentou resolver o problema 2, mas apagou e deixou em branco. Acertou o problema 3. No problema 4, percebeu que 20X30=600, mas deu como resposta 30 cm, que é a largura, não a altura do retângulo. No problema 5, passou as informações do problema para linguagem matemática corretamente, mas interpretou a informação dada no enunciado do problema como 5 (x-8), não 5x – 8, chegando à equação $x^2 - 7x - 40 = 0$. Não finalizou o cálculo do delta e não seguiu com a resolução do problema.

Tem atividade algébrica algorítmica, mas dificuldades com o conceito de equações quando o problema não é de resolução direta.

ALUNO A10

Acertou todas as equações e todos os problemas, escrevendo as respostas corretamente. Foi um dos únicos alunos que colocou o delta junto com a fórmula de Bhaskara. O aluno demonstra ter atividade algorítmica e algébrica, pois conseguiu resolver as equações e solucionar os problemas de acordo com o esperado e por isso não foi selecionado para entrevista.

ALUNO A11

Acertou todas as equações.

Na atividade dos problemas, só não acertou o problema 2. Há contas apagadas em seu protocolo. Começou a resolver por tentativa e erro, mas não chegou a um resultado. O aluno conseguiu resolver as equações e solucionar os problemas de acordo com o esperado e por isso não foi selecionado para entrevista.

ALUNO A12

Errou a equação 2 por falta de atenção, pois copiou a equação = 48, não 46. Não resolveu a equação 4, pois também faltou atenção com o coeficiente c = - 600, obtendo delta de – 2300. Na fórmula de Bhaskara, colocou raiz de 2300 (não negativo), indicou as setas, mas não resolveu. Também errou a equação 5 por falta de atenção ao copiar, novamente esquecendo o sinal do coeficiente c, obtendo delta 17 e achou raiz de 17 = 4,3, mas não resolveu a fórmula de Bhaskara, deixando as setas indicadas sem resposta.

No problema 1, fez 8 . 3 = 24 e 24 – 6 = 18, dando resposta que pensou no número 8. No problema 2, colocou a resposta direto, 10 carros e 3 motos sem fazer nenhuma conta. Fez o problema 3 usando a equação e acertou. Fez um desenho do quadro no problema 4 mas não resolveu. No problema 5, fez $x^2 - 2x = 40 \Rightarrow x^2 - x = 40/2 \Rightarrow -x^2 = 20 \Rightarrow -x =$ raiz de $20 \Rightarrow x = 4$.

O aluno foi selecionado para entrevista, mas não estava apto à pesquisa pela falta de TCLE.

ALUNO A13

Acertou as equações 1 e 2. Errou ao dividir 300/3 na equação 3, obtendo x = 85. Acertou a equação 4 e na 5 errou uma raiz, fazendo -2/2 = -2.

Acertou o problema 1. Acertou o problema 2, mas usou bolinhas para contar as rodas, agrupando de quatro em quatro e depois de dois em dois para obter 10 carros e três motos. Acertou o problema 3. Errou o problema 4, pois usou os dados do problema como se estivesse calculando o perímetro, não a área. Fez $10 + x + x = 600 \rightarrow 2x = 600 - 10 \rightarrow 2x = 590 \rightarrow x = 295$. Acertou o problema 5, mas errou o sinal de uma raiz (na conta fez certo). Não deu resposta para esse problema.

O aluno apresenta atividade algébrica algorítmica. Já os problemas que exigiam um pouco mais de interpretação não foram resolvidos. Tem compreensão incompleta de números inteiros e suas operações.

ALUNO A14

Acertou as equações de 1 a 4. Ao resolver a equação 5, fez – b = - 7, logo as raízes ficaram com sinais invertidos.

Acertou o problema 1, mas não respondeu a pergunta do problema. No problema 2 parece ter usado tentativa e erro. Achou 4.10 + 2.3 = 46, mas não deu uma resposta ao problema também. Acertou o problema 3. Resolveu os problemas 4 e 5 corretamente, mas não respondeu às perguntas dos problemas.

O aluno possui atividade algébrica algorítmica e conceitual.

ALUNO A15

Acertou as equações 1, 2 e 3. Errou as equações 4 e 5. Na 4, errou a raiz de delta (fez raiz de 2500 = 25) e os sinais das raízes (na soma) após a fórmula de Bhaskara (usou a regra de sinais para multiplicação). Na 5, já errou o sinal ao somar – 2x com – 5x , obtendo + 7x (erro soma termos semelhantes usando regra de sinal da multiplicação). Errou o delta, pois fez -4 . 1 . - 8 = +24. Dai errou as raízes e de novo usou regra de sinais da multiplicação na soma dos números.

Acertou os problemas 1 e 3. Tentou resolver o problema 2 baseado nas rodas dos carros, fez várias contas: multiplicou as rodas de cada veículo por 13, somou os dois resultados, dividiu o resultado por 13 e obteve 6. O problema 4 teve resposta correta, mas a raíz -30 apareceu positiva. Parece não ter cometido o mesmo procedimento das equações. Apresentou o mesmo raciocínio de interpretação do aluno A09 no problema 5 (fez 5 (x + 8)), não errou os sinais e parou após encontrar a equação $x^2 – 7x – 40$.

O aluno foi selecionado para entrevista, mas não estava apto pela falta de TCLE.

ALUNO A16

Acertou as equações de 1º grau. Não sabe lidar com equações de 2º grau, usa o modo de desfazer para resolvê-las, apesar de escrever a fórmula de Bhaskara na lateral da folha, o aluno simplesmente ignora o x^2 ao resolver ou o transforma em x.x e trata isoladamente.

Acertou o problema 2, mas foi por tentativa e erro. No problema 3 fez desenhos e a resposta correta apareceu “magicamente” ao lado. Não desenvolveu uma equação, somente fez a divisão 300 / 4 = 75.

No problema 4, utilizando as informações do enunciado, chamou a largura de x e a altura de y, fazendo a conta 10 + x . y = 600 => 10x.y = 600 e não seguiu em frente, mas colocou as medidas 20 e 30 corretamente no retângulo que representa o quadro.

No problema 5, também fez (x – 8).5 obtendo $x^2 – 7x = 40$, e novamente tratou a equação pelo método de desfazer e não conseguiu resolver.

O aluno foi selecionado para entrevista, mas não estava apto pela falta de TCLE.

ALUNO A17

Acertou todas as equações.

Errou o problema 1, escreveu 3x / 6 = 18, obtendo x = 36, o "subtrai 6" virou quociente. Acertou o problema 2 (tentativa) e fez o 3 corretamente. Fez o problema 4 baseado na fórmula da área. b.h=600 → 10x = 300 (?) → x = 30. Escreveu os valores corretos no retângulo. No problema 5, fez raiz de x – 2x = 5x + 8 e escreveu o irmão de Caio tem x anos, fim.

Tem atividade algébrica algorítmica. Não conseguiu resolver o problema 5, cujo enunciado já determina a fórmula de 2º grau. Parece ter dificuldades de interpretação.

O aluno foi escolhido para entrevista, mas não estava apto a ser utilizado na pesquisa pela falta de TCLE.

ALUNO A18

Acertou todas as equações.

Usou a equação esperada no problema 1 e acertou. O problema 2 foi por tentativa. O problema 3 não teve um desenvolvimento. Só escreveu que 1 bola = 2 maçãs de 150g cada e chegou à conclusão que x = 1200g (escrito ao lado 1kg 200g), pode não ter interpretado o problema ou entendido que a cada bola corresponderiam 2 maçãs.

No problema 4, percebeu que 600 = 20 X 30 e respondeu corretamente. Acertou a equação e a resposta do problema 5.

O aluno apresenta atividade algébrica algorítmica e atividade algébrica conceitual, embora tenha demonstrado alguma dificuldade na interpretação de problemas.

ALUNO A19

Acertou a equação 1. Não soube fazer a distributiva na equação 2 e errou.

Acertou as equações 3, 4 e 5.

Usou o método de esconder para resolver o problema 1 e acertou. Fez várias tentativas de resolução no problema 2, não usando equações, e acabou dando resposta de 8 carros e 7 motos. Errou o problema 3, respondeu que cada bolinha tem 37,5g, pois dividiu 150 por 4 direto. No problema 4, desenhou o retângulo e colocou direto as medidas 60 no comprimento e 10 na altura, mas respondeu que a altura era 60 cm. No problema 5, foi resolvendo aos pedaços, fez x^2 → anos, embaixo do x^2 escreveu .- 2 e abaixo disso "irmão de Caio". Ao lado dessa conta, escreveu "menos o dobro", abaixo 5 e então +8. Obteve resposta 13, pois deve ter somado 5+8.

O aluno demonstra ter atividade algébrica algorítmica, mas não atividade algébrica conceitual.

ALUNO A20

Acertou a equação 1. Na equação 2, fez 4 y + 2. – 13 y (não usou a distributiva, multiplicou os números dentro dos parênteses) → 4 y + 26 y = 46 obtendo → 30 y = 46 → y = 1. Acertou a equação 3 e a 4. Na equação 5 errou, pois esqueceu de mudar o sinal do 5 x ao passá-lo para o outro lado, obtendo b = 3. Logo errou o delta e não prosseguiu com a resolução.

No problema 1, multiplicou 37 por 3 e obteve 111. Dividiu por 6 e obteve 18. Respondeu que o número é o 37. No problema 2, fez 13 X 4 = 52 e 10 X 4 = 40, escrevendo como resposta carros 10 e motos 3. No problema 3, dividiu direto 300 por 4 e obteve x = 75 g. No problema 4 desenhou um retângulo com largura 10 cm e altura 60 cm. Multiplicou 10 por 60 e obteve a área. Respondeu que a altura era 60 cm. Não resolveu o problema 5.

O aluno foi escolhido para entrevista, mas não estava apto pela falta de TCLE.

ALUNO A21

Acertou as equações 1, 2 e 3. Errou uma raiz das equações 4 e 5, pois esqueceu de colocar o sinal negativo nas respostas.

Acertou o problema 1, por operações inversas. Acertou o problema 2 efetuando multiplicações, 10 X 4 = 40 e 3 X 2 = 6. Tentou responder o problema 3 por regra de três e obteve x = 300. No problema 4, efetuou a multiplicação 20 X 30 = 600,

respondendo que a altura é 20 cm e a largura é 30 cm. No problema 4, montou a equação corretamente, mas fez 5 X 8 = 40 e essa foi a resposta dada.
O aluno apresenta atividade algébrica algorítmica, mas não atividade algébrica conceitual.

ALUNO A22

Acertou as equações 1, 2 e 3. Resolveu a equação 4 até o delta, que errou por causa do sinal, obtendo – 2300. Parou o cálculo ai. Na equação 5, errou as raízes ao sobstituir o – b na fórmula de Bhaskara por – 2 e não – 7, que seria o correto.

Nos problemas 1 e 2, colocou as respostas direto, sem efetuar nenhum cálculo. Resolveu o problema 3 por regra de três, errou. No problema 4, apresentou várias contas, mas considerou o cálculo 20 X 30 que dá 600, acertando a resposta. Montou a equação do problema 5 começando por raiz quadrada de x, não o quadrado de x como era pedido. Escreveu números aleatórios, mas não resolveu nada.

O aluno apresenta atividade algébrica algorítmica para equações de 1º grau. Conhece o algoritmo das equações de 2º grau, mas comete erros. Não possui atividade algébrica conceitual.

ALUNO A23

Acertou todas as equações. Acertou todos os problemas (resolveu o problema 2 por tentativa). Sendo assim, de acordo com nossas categorias, o aluno apresenta atividades algébricas conceitual e algorítmica.

ALUNO A24

Acertou as equações 1 e 3. Errou a equação 2, pois não fez a distributiva, pois de 4 y + 2. (13 – y) = 46 obteve 6 y – 13 – y = 46 → 6 y – y = 13 + 46 → 5 y = 33 → y = 33 / 5. Não resolveu as equações 4 e 5.

No problema 1 chegou ao resultado correto a partir de contas aritméticas. No problema 2 foi por tentativa e erro, acertou. Fez o problema 3 por regra de três, obtendo x = 300. No problema 4 desenhou um retângulo e nada mais. Não fez o problema 5.

O aluno apresenta ter noção do procedimento algorítmico das equações de 1º grau, mas não possui atividade algorítmica conceitual. Não possui atividade algébrica algorítmica nem conceitual de equações de 2º grau.

ALUNO A25

Acertou todas as equações.

Acertou os problemas 1 e 3. O problema 2 resolveu por tentativa, acertou. No problema 4, escreveu a largura como x e a altura como x – 10. Montou a seguinte equação: x (x – 10) = 600 → 2x – 10x = 600 (engano no desenvolvimento da distributiva), mas calculou o delta com os dados corretos, obtendo delta = 1900. Fatorou 1900 para chegar numa raiz aproximada. Utilizou corretamente a fórmula de Bhaskara, mas por causa do delta, não chegou às raízes esperadas. Acertou o problema 5. Não escreveu as respostas dos problemas 4 e 5.

O aluno demonstra atividade algébrica algorítmica e conceitual. Tem excelente interpretação dos problemas, marcando no enunciado tudo o que é importante, só não usou equações no problema 2.

Aluno selecionado para entrevista pelo acerto da totalidade das equações, pois gostaríamos de verificar como o aluno percebe seu entendimento sobre o assunto.

6.3.3 Análise da resolução das atividades algorítmicas *X* resoluções de problemas

Nesse momento verificamos o que a relação entre as resoluções das atividades algorítmicas e dos problemas nos mostra, numa análise das atividades algébricas algorítmicas e conceituais dos alunos.

Na questão 1 e no problema 1, a maioria dos alunos demonstrou possuir atividade algébrica algorítmica e conceitual, pois responderam as atividades de acordo com o esperado, ou seja, utilizando e desenvolvendo a equação polinomial de 1º grau de acordo com os modos de resolução apresentados pelo referencial teórico, utilizando o método de desfazer, o método de esconder e o método de gerar e avaliar.

Na equação 2 e no problema 2, a maioria dos alunos apresentou atividade algébrica algorítmica e conceitual, utilizando o método de desfazer nas equações e também o método de gerar e avaliar para resolver o problema. Apesar da maioria das resoluções do problema não utilizar a equação como procedimento padrão, a utilização do método de gerar e avaliar condiz com nosso referencial teórico, uma vez que o método de gerar e avaliar foi utilizado com sucesso para se alcançar o resultado correto.

Na equação 3 e no problema 3, os alunos também apresentaram maior índice de atividades algébrica algorítmica e menor índice de atividade algébrica conceitual ao resolver o problema, apesar deste ser interpretado diretamente como a equação resolvida algoritmicamente.

Na equação 4 e no problema 4, percebemos atividade algébrica algorítmica nos alunos, mas não atividade algébrica conceitual, uma vez que muitos alunos resolveram o problema geometricamente, utilizando a área do retângulo como ponto de partida para a solução.

Na equação 5 e no problema 5, os alunos não apresentaram atividade algébrica algorítmica, pois a maioria errou a equação e também não apresentaram atividade algébrica conceitual, pois a maioria não resolveu o problema conforme o esperado, ou seja, utilizando a equação polinomial de 2º grau correspondente. Ficou evidenciado nas resoluções que algumas interpretações do enunciado do problema aconteceram de maneira bem diferente do esperado, pois alguns alunos interpretaram a parte do enunciado "é igual a cinco vezes o número aumentado de oito" como 5 (x+8) em vez de 5x + 8, fato talvez ocorrido pelo próprio modo em que o enunciado foi escrito.

Ao não compreender o que o enunciado do problema 5 sugere, fica aparente que os significados que os alunos atribuem às equações de 2º grau são distintos, uma vez que nem todos resolveram o problema do modo esperado, e ao não conseguirem solucionar também a equação 5 da lista de atividades algorítmicas, que seria a solução do problema, se evidencia a não compreensão da circularidade e linearidade que compõe os conceitos matemáticos.

Assim, podemos perceber que os alunos apresentam aprendizagem algébrica algorítmica e conceitual principalmente nos conceitos referentes às equações de 1º grau, mas quando se trata de equações de 2º grau o aprendizado algébrico conceitual não ocorre. Podemos relacionar estes fatos à aprendizagem significativa de Ausubel, pois devido ao aluno não relacionar a parte com o todo, no caso o algoritmo com o conceito de equação de 2º grau, ele não possui conceitos subsunçores que o auxiliem a compreender de fato o que acontece quando é necessário lidar com esse tipo de equação.

6.3.4 Análise da entrevista individual com os alunos selecionados

A seguir apresentamos a análise a partir das falas dos alunos nas entrevistas.

Esta análise acontece ao tomarmos o referencial teórico da pesquisa, essencialmente o explicitado no capítulo 4, que refere-se a Aprendizagem Significativa de Ausubel, os elementos do Pensamento Complexo de Morin, o conceito de experiência de Larrosa, e os relacionarmos, coerentemente e sem fugir dos dados obtidos, com a fala dos alunos.

Como descrito na metodologia da pesquisa, a entrevista ocorreu em dois momentos, que na verdade não foram planejados, mas aconteceram porque a escola só liberou a sala de provas de segunda chamada, anexa à sala da pedagoga, para a realização das conversas e os alunos acabaram ficando todos na sala ao mesmo tempo. No primeiro momento, apenas os alunos entrevistados relataram o processo utilizado nas suas resoluções. Já no segundo momento, que ocorreu imediatamente após o relato individual, todos os alunos participaram ao mesmo tempo, expondo suas opiniões às questões levantadas pela pesquisadora

Havia a princípio oito alunos selecionados para a entrevista, porém destes somente quatro retornaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para autorizar a participação na pesquisa, assinado pelos pais. Então após a apresentação do documento, os alunos A01, A02, A06 e A25 foram selecionados para entrevista. No dia da entrevista, A01 não compareceu, pois tinha a liberdade garantida de desistir da participação na pesquisa a qualquer tempo.

.

ALUNO A02

Resoluções apresentadas e uma breve análise

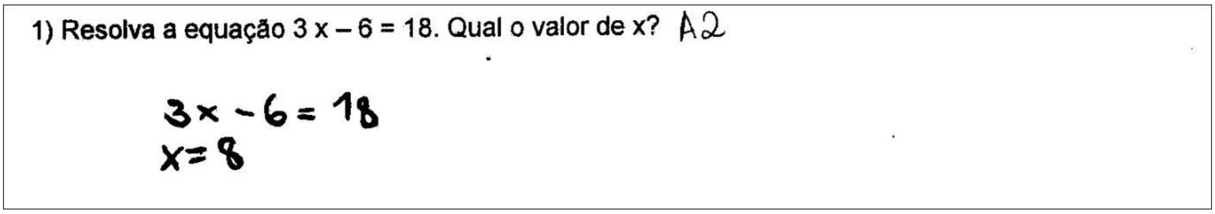
Nas atividades algorítmicas, na atividade 1, parece ter resolvido direto, chegou imediatamente a x = 8. Na atividade 2, fez 4y + 2, então y=1 e 13 – y com y = 29. Ou seja, não mostrou a resolução. Na atividade 3, colocou direto o resultado x = 75, sem cálculo algum. Na atividade 4, de novo, somente x = 60, sem cálculos. Na atividade 5, fez - 8 = - x² + 2x + 5x, chegando a – 8 = 7x (onde foi parar o – x²?), com x = - 8 / 7, com x = -1.

Nos problemas, nos três primeiros (que seriam resolvidos por uma equação de 1º grau), acertou os resultados, porém respondeu todos desenvolvendo as tabuadas. No primeiro fez a tabuada do três até chegar em 3 X 8 = 24. Dai como 24 – 6 = 18, respondeu que o número é 8. No problema 2, fez a mesma coisa, desenvolvendo a tabuada do 4 (número de rodas do carro) inteira, com 4 X 10 = 40 e a tabuada do 2 (número de rodas da moto) até 2 X 7 = 14. Então deduziu que são 10 carros e 3 motos. No problema 3, fez várias contas: somou 40 quatro vezes, 25 quatro vezes, 50 quatro vezes, 30 quatro vezes e 75 quatro vezes, que resultou o 300 esperado. Dai escreveu que cada bola pesava 75 gramas. Não resolveu os problemas 4 e 5, deixou em branco.

Parece não possuir nem atividade algébrica algorítmica, nem atividade algébrica conceitual (mas pelo referencial teórico, poderia ter resolvido os três problemas referentes a equações de 1º grau pelo método de gerar e avaliar). Ou não tem nenhuma compreensão do que seja uma equação.

O diálogo da pesquisadora com o aluno 02

P: Então **A02**, essas são as atividades e depois tem os problemas, você fez essa conta de cabeça?



1) Resolva a equação 3 x – 6 = 18. Qual o valor de x? A2

$3x - 6 = 18$
$x = 8$

Figura 5 – Resolução do aluno A02 – Equação 1
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Mais ou menos, né, eu meio que inventei.

P: Mas daí você conseguiu, você percebeu que o x aqui teria que ser oito porque é o número que multiplicado por três que menos seis dá dezoito?

A02: É, mas tá certa a resposta?

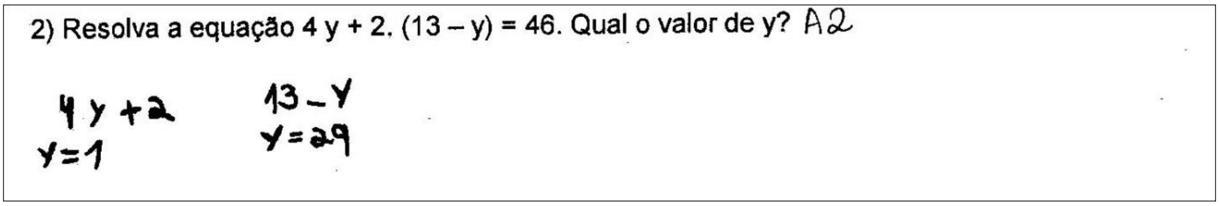
P: Tá certa!

A02: Eu inventei a conta.

P: Você inventou a conta?

A02: Sim.

P: E aqui, o que você pensou aqui quando você começou a resolver? (Questão 2: 4 y = 2. (13 – y) = 46)


2) Resolva a equação 4 y + 2. (13 – y) = 46. Qual o valor de y? A2

4 y + 2
y = 1

13 – y
y = 29

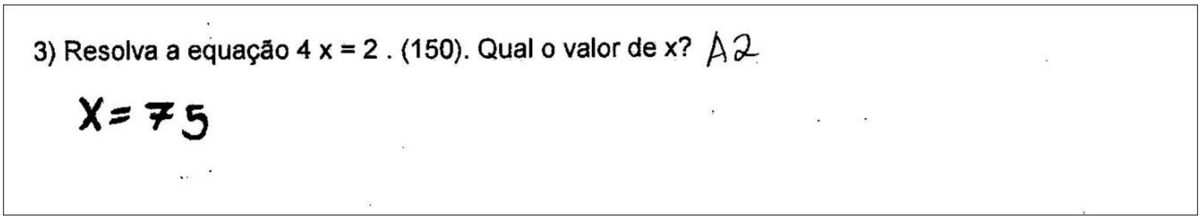
Figura 6 – Resolução do aluno A02 – Equação 2
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Eu também inventei.

P: Você não sabia fazer, é isso?

A02: É que eu nunca aprendi direito esses negócios, ai, dai eu sempre deixava em branco nas provas dai como eu não queria deixar em branco eu inventei qualquer coisa.

P: Ah é? E aqui? Como você chegou direto na resposta certa?


3) Resolva a equação 4 x = 2 . (150). Qual o valor de x? A2

X = 75

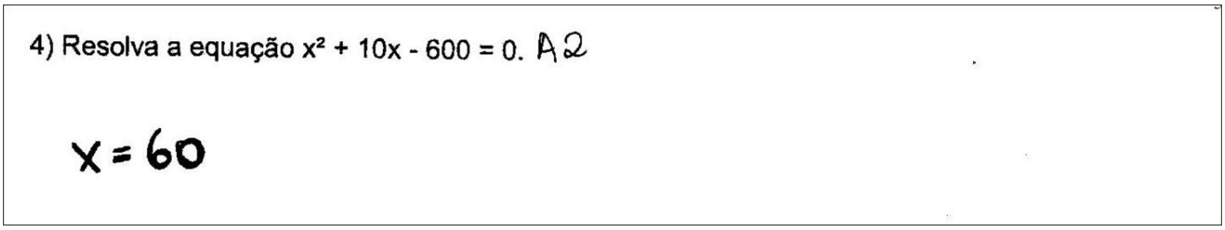
Figura 7 – Resolução do aluno A02 – Equação 3
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Nem eu sei o que eu fiz para falar a verdade.

P: Ah, então tá.

A02: Mas eu sei que eu inventei.

P: É, porque aqui também, ó, você não fez a resolução e chegou numa resposta, mas aqui não está certo, então você “chutou” o número, vamos dizer, é isso?



4) Resolva a equação $x^2 + 10x - 600 = 0$. A2

$x = 60$

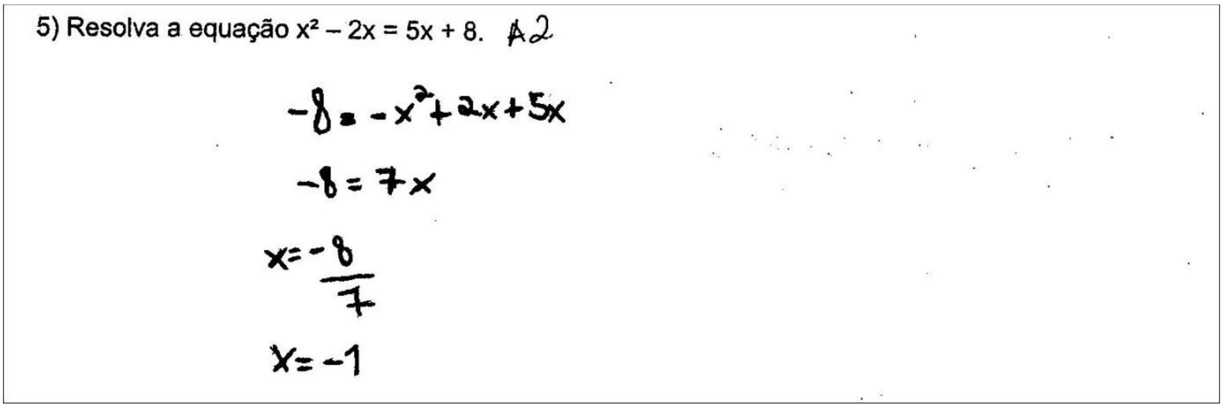
Figura 8 – Resolução do aluno A02 – Equação 4
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Não, eu fiz uma lógica na minha cabeça...

P: Ah, é?

A02: Inventei de um jeito que eu achei que pudesse estar certo.

P: Que pudesse estar certo, ah, então tá bom. E aqui? Porque você resolveu dessa maneira esta questão aqui, é uma equação de 2º grau e você resolveu assim como se fosse de 1º grau, pelo que eu entendi, se eu estiver errada você me corrige. (Questão 5)



5) Resolva a equação $x^2 - 2x = 5x + 8$. A2

$-8 = -x^2 + 2x + 5x$

$-8 = 7x$

$x = \frac{-8}{7}$

$x = -1$

Figura 9 – Resolução do aluno A02 – Equação 5
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Mas tá certo ou tá errado?

P: Não, essa está errada.

A02: É que eu não aprendi direito a de 2º grau também, e a única que eu consegui me lembrar bem é a de 1º grau e eu tentei resolver como se fosse de 1º grau.

P: Ah, você tentou chegar em alguma solução. Tem alguma coisa que você queira dizer, o que você lembrou ou alguma coisa na hora de resolver?

A02: Não.

P: Não vem nada na sua cabeça?

A02 balançou negativamente a cabeça.

P: Legal. Agora aqui A02, eu percebi por esse exercício aqui que talvez você não tivesse muita firmeza na hora de resolver, mas pelo teu raciocínio, você conseguiu (problema 1). Você foi desenvolvendo a tabuada. Me explique mais ou menos como você fez.

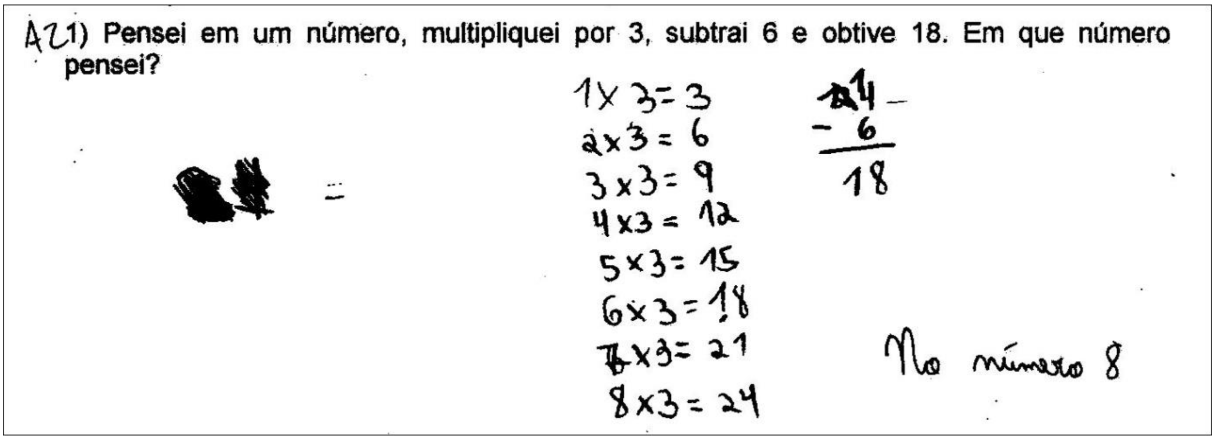


Figura 10 – Resolução do aluno A02 – Problema 1
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Eu só peguei a tabuada e fiz a lógica do que dava, assim, o resultado.

P: E nesse aqui (problema 2)? Que você desenvolveu as duas tabuadas? Você lembra? Que tinha 13 veículos...

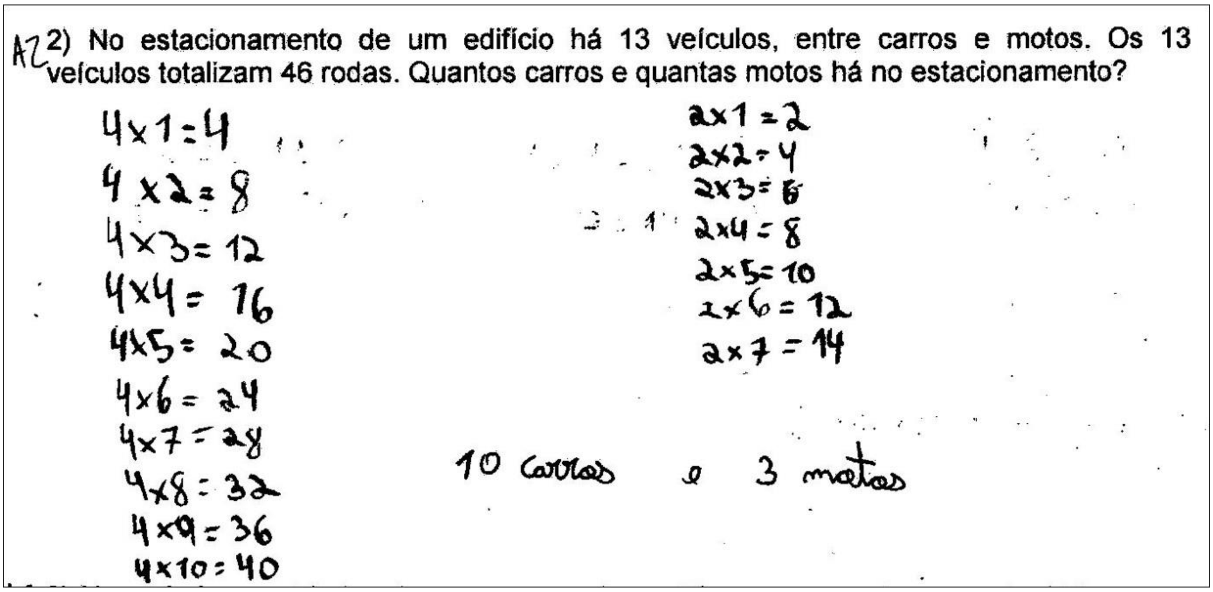


Figura 11 – Resolução do aluno A02 – Problema 2
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Eu só contei quantos tinha.

P: Então você foi desenvolvendo a tabuada até onde dava mais ou menos o resultado, é isso?

A02: Sim.

P: E aqui também (Problema 3), você foi vendo onde você conseguiria o resultado, é isso mesmo?

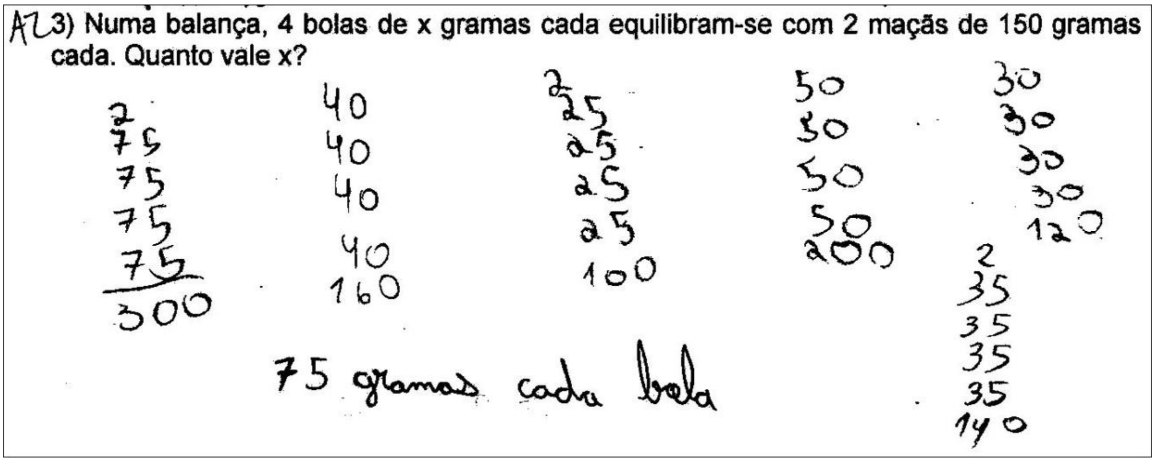


Figura 12 – Resolução do aluno A02 – Problema 3
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A02: Eu sempre vou fazendo assim até eu chegar no resultado porque eu não consigo fazer de cabeça.

P: Jóia! Você se vira muito bem. E aqui (nos problemas que envolvem equações de 2º grau)...

A02: Esses eu não conseguia fazer.

P: Tem mais alguma coisa que você queria falar, que você lembrou?

A02: Não.

A02 e a matemática

O aluno A02 se diz péssimo em matemática. Ele mesmo reconhece não saber resolver equações de 1º e de 2º graus, que não tem nenhuma das habilidades algorítmicas necessárias para resolver as equações. Se não consegue fazer, copia as respostas das questões dos colegas, as resoluções algorítmicas de outra pessoa, pois diz que tem uma "lógica na cabeça" que serve para a resolução, porém não diz qual é.

A02 não conseguiu desenvolver em sua estrutura cognitiva a resolução algorítmica de equações de 1º e 2º graus, tampouco o pensamento algébrico, o pensar algebricamente. No momento da resolução das listas, o conceito de equações estava separado do restante dos saberes matemáticos, fragmentado em meio ao todo que compõe esse conhecimento, nada se relacionava entre si.

Mas vejamos... Que interessante! Sem ter noção, nem atividade algébrica alguma, acaba por resolver os problemas que envolvem nas suas resoluções equações de 1º grau pelo método de gerar e avaliar, uma vez que desenvolve os cálculos que acha necessários, no caso utilizando seu conhecimento sobre tabuadas, até chegar a uma resposta que resolva o problema pedido, ou seja, tem noções conceituais da álgebra envolvida nas equações de 1º grau, mas ele não sabe que tem essas noções, pois diz que não aprendeu e que deixava as respostas em branco nas provas.

A partir da sua fala, identificamos que seu conhecimento é mutilado, quando por exemplo diz que não sabe nada de equações, mas demonstra ter alguma atividade algébrica conceitual ao resolver problemas pelo método de gerar e avaliar, que ele não percebe a matemática como uma totalidade, não percebe as inter-relações e inter-retro-ações entre os conteúdos que aprendeu até hoje. Para ele o que importa é o resultado. A02 se preocupa o tempo todo se o resultado está certo ou errado, demonstrando que o acerto tem muita importância ao se resolver um exercício matemático, não importando o método utilizado para chegar ao resultado ou a compreensão do conteúdo. A pergunta que não calava enquanto conversávamos é: mas está certo?

Quando declara, nos problemas, que [...]“eu sempre faço as contas do jeito assim mais longo, mas para mim é mais fácil, eu entendo melhor desse jeito que eu faço” demonstra que ainda não concebeu o conhecimento necessário para a resolução de exercícios e problemas referentes a equações, ou seja, não construiu vínculo entre diversos saberes, não compreendeu os conhecimentos algébricos, que possibilitariam o reconhecimento dos conceitos matemáticos necessários para a resolução dos problemas. Para ele a matemática é complicada mesmo.

Diz, enfaticamente, que não gosta de Matemática, mas não gostar pode significar que ao ter dificuldades no aprendizado teve sim uma experiência, senão não seria tão vigoroso ao dizer que não gosta, poderia ser indiferente. Algo nas aulas de matemática o marcou e deixou cicatrizes doloridas que não estão sarando. Ah, como seria bom se pudéssemos ler pensamentos!

ALUNO A25

Resoluções apresentadas e uma breve análise

Acertou todas as equações.
Acertou os problemas 1 e 3. O problema 2 resolveu por tentativa, acertou. No problema 4, escreveu a largura como x e a altura como x – 10. Montou a seguinte equação: x (x – 10) = 600 => 2x – 10x = 600 (engano na distributiva), mas calculou o delta com os dados corretos, obtendo delta = 4900. Fatorou o 4900 para chegar numa raiz aproximada. Utilizou corretamente a fórmula de Bhaskara, mas por causa do delta, não chegou às raízes esperadas. Acertou o problema 5. Não escreveu as respostas dos problemas 4 e 5.

Possui atividade algébrica algorítmica e conceitual. Tem excelente interpretação dos problemas, marcando no enunciado tudo o que é importante, só não usou equações no problema 2.

Diálogo da pesquisadora com o aluno A25

P: **A25**, vamos pela ordem de chegada. O que eu percebo, você resolveu todas as equações. Resolveu todos os problemas, uma coisa que me chamou muito a atenção, que quando você chegou no delta de 2500 (equação 4), você fatorou (para achar o valor da raiz de delta). Por quê?
A25: Porque eu provavelmente não lembrava, daí eu fatorei porque sei que dá para cortar (os fatores com a raiz) e facilita.
P: Dai você fatorou, colocou aqui, substituiu e quando você divide por 2, você não se perde? (O aluno só mostra a divisão por dois no último elemento do termo)
A25: Acostuma.

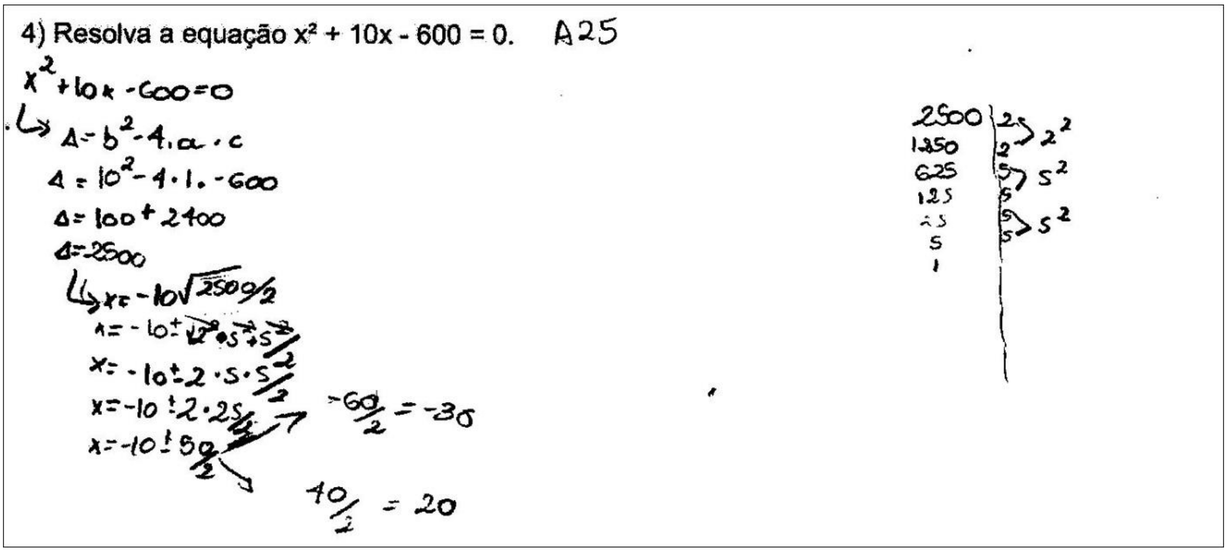


Figura 13 – Resolução do aluno A25 – Equação 4
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

P: E aqui o delta deu 81 (equação 5) e você não fatora...

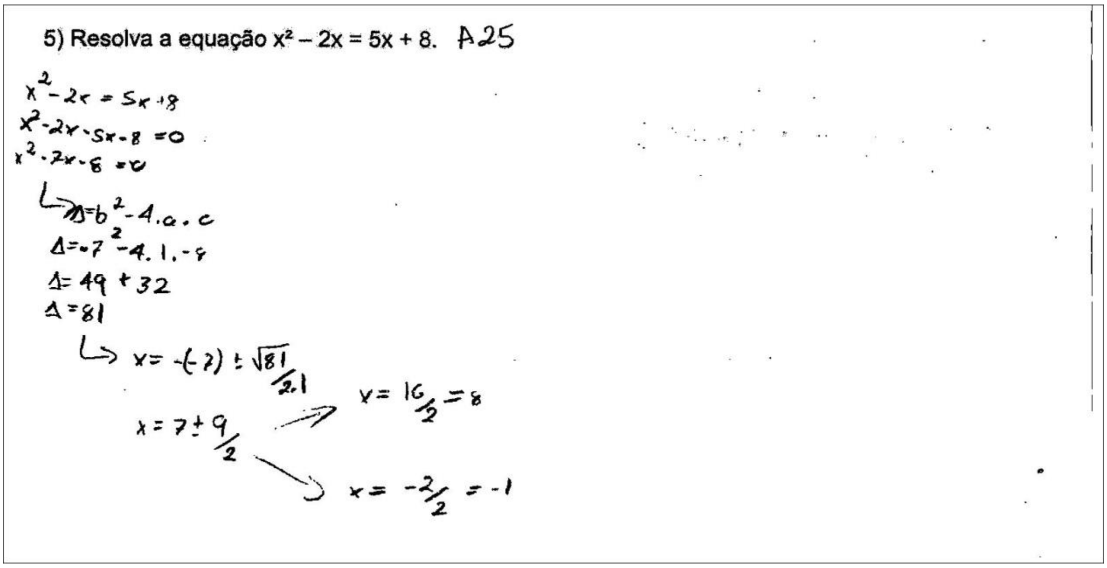


Figura 14 – Resolução do aluno A25 – Equação 5
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A25: Porque já é automático.

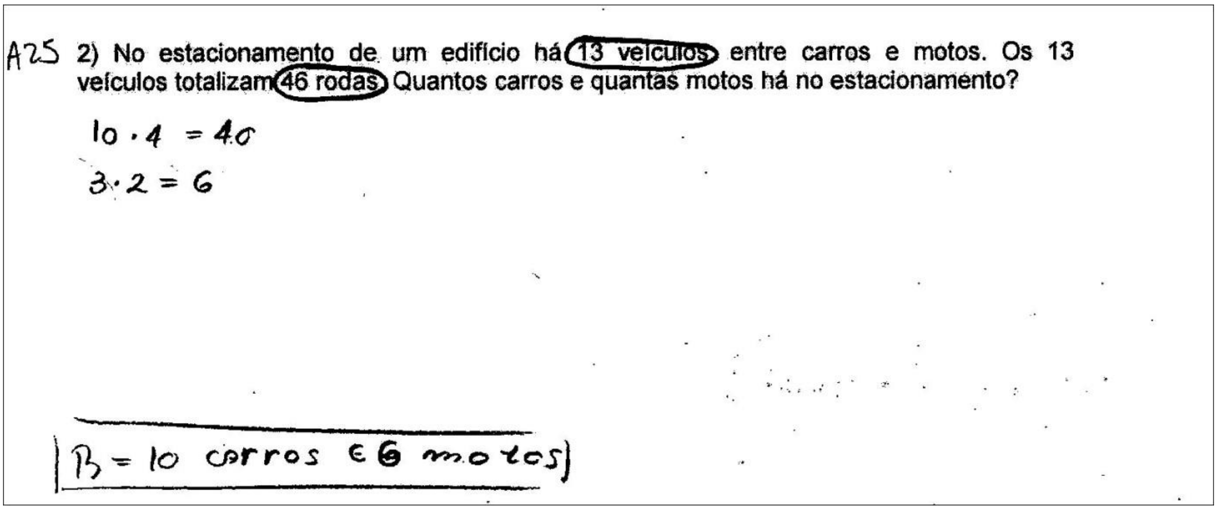
P: Eu achei interessante que todos escreveram a fórmula do delta e de Bhaskara sem escrever os termos, vai direto. Isso vai direto por quê? Você é acostumado a fazer assim?

A25: Aqui assim eu não faço o passo a passo assim, fiz assim mais para você entender mais meu raciocínio porque, por exemplo, eu já teria feito, pulado direto para essa linha, já ter feito, já teria feito b² etc, mas eu fiz assim para você entender o que era.

P: Eu achei muito bacana que você pega e já vai marcando os dados, já vai montando a equação em cima, você sempre faz assim?

A25: Sim.

P: Aqui o problema 2, você foi por dedução?


A25 2) No estacionamento de um edifício há 13 veículos entre carros e motos. Os 13 veículos totalizam 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

$10 \cdot 4 = 40$

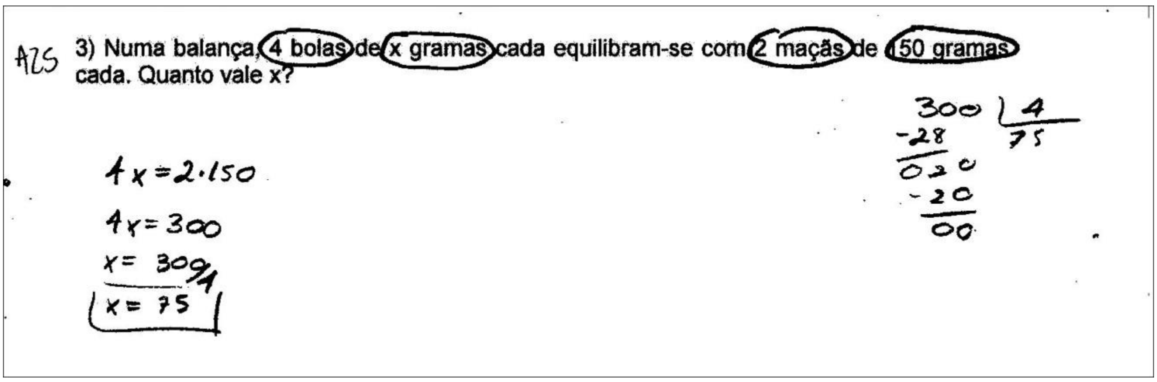
$3 \cdot 2 = 6$

R = 10 carros e 6 motos

Figura 15 – Resolução do aluno A25 – Problema 2
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A25: Não, tipo eu percebi que como são quatro (rodas) e dava 40, então era só multiplicar por 10 mesmo, na verdade, 10 X 4, 2 X 3, foi em questão de segundos, bem rápido mesmo. Tanto é que na verdade eu nem fiz conta, eu só fiz aqui para demonstrar.

P: Aqui dá para perceber certinho como você fez também (problema 3), que você marcou (os termos no problema) e dai já montou a equação. Dai, olha só...


A25 3) Numa balança, 4 bolas de x gramas cada equilibram-se com 2 maçãs de 150 gramas cada. Quanto vale x?

$4x = 2 \cdot 150$

$4x = 300$

$x = 300/4$

$\boxed{x = 75}$

$300 \div 4 = 75$; -28; 020; -20; 00

Figura 16 – Resolução do aluno A25 – Problema 3
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A25: Você se perdeu (na bagunça da resolução)?

P: Não, não me perdi, eu achei bem interessante, lembra que eu falei no final (depois da aplicação das listas)? Que o resultado do problema era a equação que vocês tinham resolvido na lista anterior, aqui (na lista de equações) você fez certinho, daí aqui (no problema 4), deu um problema. Por que virou 2x aqui? (na propriedade distributiva).

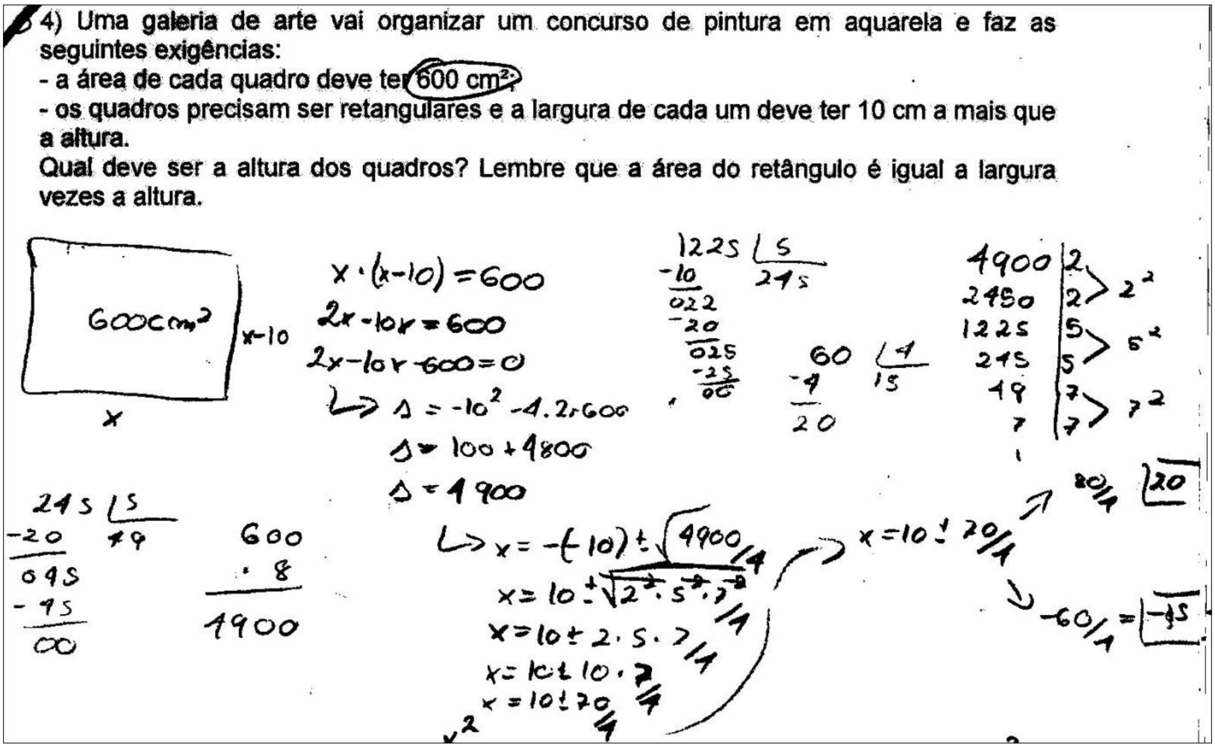

4) Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:
- a área de cada quadro deve ter 600 cm².
- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.
Qual deve ser a altura dos quadros? Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.

Figura 17 – Resolução do aluno A25 – Problema 4
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A25: Ah, é x², agora que eu me toquei.

P: Então foi só falta de atenção? A partir do momento que o x² virou 2x aqui, mudou todo o resultado, o delta que era 2500 virou 4900...

A25: O pior é que eu refiz essa conta na carteira e fiz o mesmo erro, 2 x e x vezes x é x².

P: Eu achei interessante, porque a gente vê que você sabe só que aqui daí foi falta de atenção. Tem mais alguma coisa que você queria dizer, ou o que você lembrou quando estava resolvendo, alguma coisa assim?

A25: Eu percebi na primeira questão (problema) e tive certeza a partir da segunda questão (problema) que eram bem parecidas as questões e que eu achei que eu tinha ido bem mal porque, por falta de atenção mesmo, tipo eu tava bem, eu lembro que eu

tava muito tenso porque eu não tava em uma situação muito boa em matemática em relação a logaritmo, agora já tô melhor. Ai, eu não sei o porquê, mas quando eu tava estudando logaritmo parece que travou toda a matemática na minha cabeça, parecia que eu tava fazendo tudo errado, daí tipo eu fiz tudo isso ai, só que eu não tava colocando confiança em nada, porque eu tava errando tudo, tipo eu estava fazendo o que eu achava que era mais certo mas na minha cabeça eu tava errando tudo por causa do logaritmo. Até achei que eu vinha pra cá só pra ganhar bronca.
P: Não, imagina! A intenção não é dar bronca, pelo contrário, vocês estão aqui porque a resolução de vocês foi muito diferente e chamou a atenção. Não estou julgando nada.

A25 e a matemática

A25 demonstra ter uma compreensão muito clara sobre certos conhecimentos matemáticos, como por exemplo, fatorar um número grande para encontrar sua raiz, ou seja, ele tem domínio dos conteúdos necessários para resolver equações e problemas referentes a equações. O interessante é que a raiz de 2500, por exemplo, é relativamente "fácil" se relacionarmos o fato que a raiz de 25 é 5 e a raiz de 100 é 10, como 2500 = 25.100, a raiz seria 5.10=50. Mas para A25 não foi tão simples, ele se garante fazendo a fatoração do número.

Já quando a raiz a ser encontrada é de um número pequeno, a resposta dele é que o valor desta raiz é automático, ou seja, fruto da memorização desta parte do conteúdo.

Ao marcar os dados importantes no enunciado do problema, A25 demonstra que faz uma organização na sua estrutura cognitiva voltada a facilitar a resolução do problema, não que ele realmente precisasse disso.

Já quando se trata de responder um problema cuja resolução não é direta, como o problema 2, A25 demonstrou claramente o quanto se apropriou mentalmente do conceito envolvido, no momento em que liga imediatamente o número de veículos com o número de rodas e usa uma estratégia para resolver o problema rapidamente.

A25 se mostra surpreso ao verificar que se enganou ao multiplicar x por x no problema 4, dizendo que inclusive refez a conta na carteira (rabiscando) e deu o mesmo resultado. Percebemos que ele realmente se enganou, pois imediatamente ao verificar a conta que tinha feito, exclamou que deveria ser x^2, não 2x.

Ele já tem um método de resolução da fórmula de Bhaskara tão mecanizado que ele não precisa nem descrever a fórmula, faz as contas mentalmente e conta que só escreveu algo para que pudéssemos entender o que ele estava fazendo, para não nos perdermos na sua resolução.

Percebeu que os problemas seriam solucionados pelas mesmas equações que resolveu antes, isso num momento anterior ao final das atividades, quando mostramos a eles que as equações da primeira lista resolveriam os problemas da segunda lista. O interessante é que o objetivo do aluno era resolver os problemas, não dar a resposta ao questionamento colocado no enunciado do problema.

A preocupação em “levar bronca” caso tivesse “ido mal” na resolução dos exercícios, mostra que provavelmente é muito cobrado pelo seu desempenho escolar.

Interessante quando A25 relata seu “bloqueio”, como se fosse uma perda da sua habilidade matemática, a partir da dificuldade do aprendizado de logaritmos, diz não tinha confiança nas resoluções que estava apresentando, mas depois relata que ao compreender logaritmos passou a gostar ainda mais da matéria. Como aprender logaritmos deixou uma “marca”, foi uma experiência a princípio dolorosa, pois fez o aluno não ter certeza de seu conhecimento e finalmente se transforma numa experiência que faz o aluno gostar ainda mais da matemática, embora ele pareça perceber esse conteúdo como um assunto separado da disciplina, evidenciando a não existência da relação parte-todo e como a fragmentação dos conteúdos prejudica o aluno nessa percepção.

Em outro momento, ele é enfático ao dizer que o conteúdo de equações de 1º e 2º graus é básico para um estudante do Ensino Médio, que todos que estão nesse nível de ensino devem saber esse conteúdo.

ALUNO A06

Resoluções apresentadas e uma breve análise

Acertou todas as atividades algorítmicas.

O problema 1 foi resolvido corretamente pela equação. Fez o problema 2 por tentativa e acertou a resposta. Errou o problema 3 (fez regra de três) e resolveu o problema 4 encontrando dois números que multiplicados resultaram em 600, no caso 20 e 30, respondendo corretamente que a altura é 20 cm. Utilizou equação e acertou o problema 5. Respondeu todos os problemas.

Possui atividade algébrica algorítmica. Nos problemas, usou as equações correspondentes somente em dois, um referente à equação de 1º grau e um referente à equação de 2º grau.

Diálogo da pesquisadora com o aluno A06

P: Então, **A06**, aqui tudo ok (lista de atividades algorítmicas). Achei muito legal que você escreveu multiplicação primeiro (Problema 1) e você foi exatamente lendo o problema e colocando os dados conforme você lia, como o **A25**. E aqui no 2?

A06: Fui pela lógica mesmo. Tipo cada carro possui quatro rodas e cada moto possui duas, então não podia ser outro número.

P: Agora aqui (problema 3), por quê regra de três?

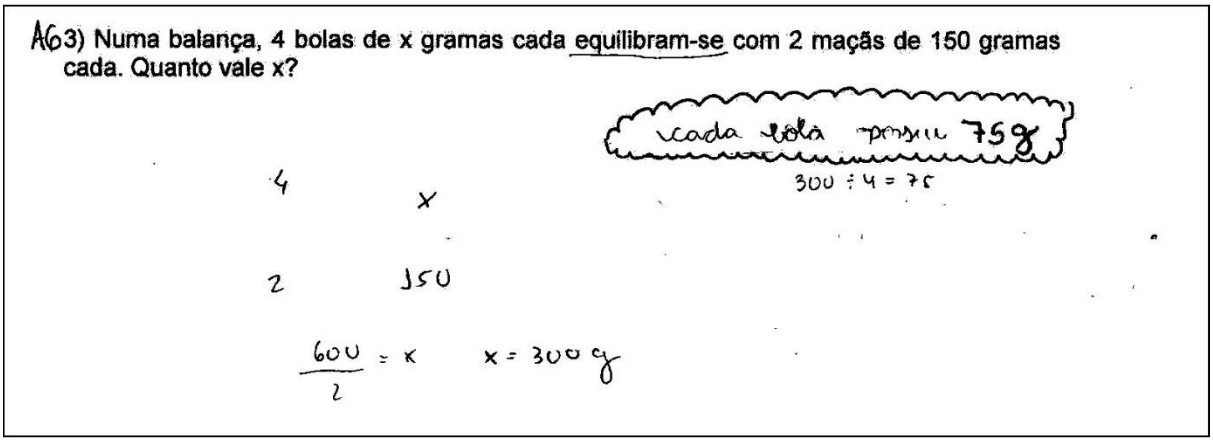
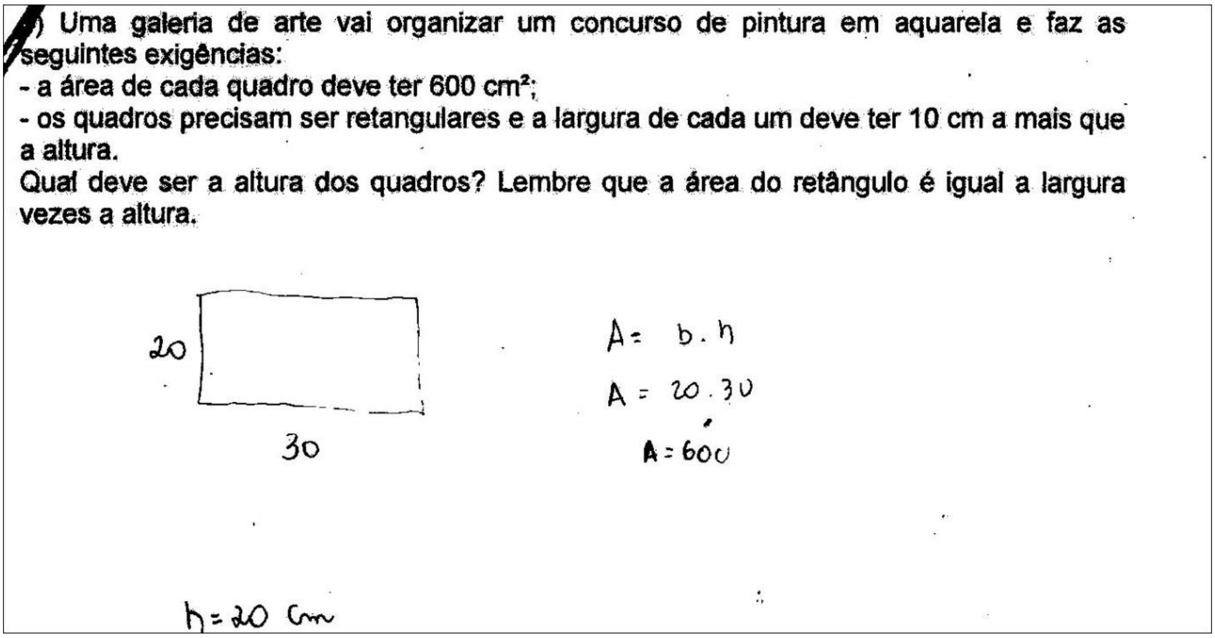


Figura 18 – Resolução do aluno A06 – Problema 3
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A06: Não, acho que tipo aí eu, era só para ver se dava certo, depois eu peguei e dividi por quatro.

P: E aqui? (Problema 4)

A06: Nossa, nem lembro o que eu fiz aí.



4) Uma galeria de arte vai organizar um concurso de pintura em aquarela e faz as seguintes exigências:
- a área de cada quadro deve ter 600 cm²;
- os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.
Qual deve ser a altura dos quadros? Lembre que a área do retângulo é igual a largura vezes a altura.

20

30

$A = b \cdot h$

$A = 20 \cdot 30$

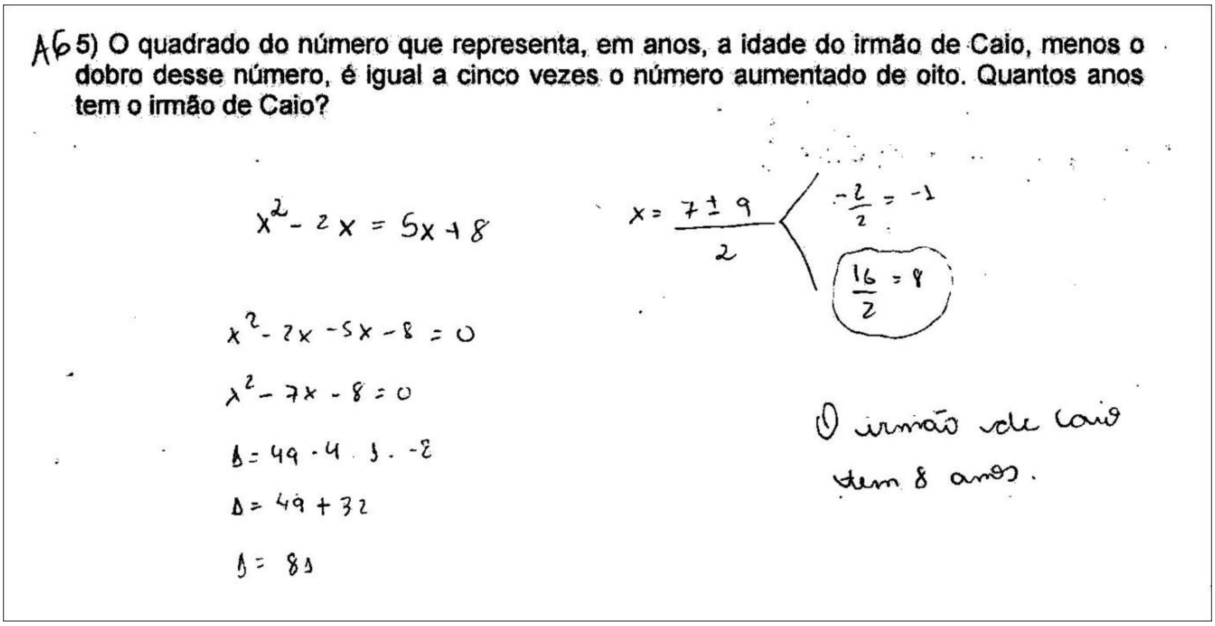
$A = 600$

$h = 20$ cm

Figura 19 – Resolução do aluno A06 – Problema 4
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A25: Você me explicou o que você fez, ele falou que ele fez direto 20 X 30, ele falou lá que ele tentou achar um número que a multiplicação desse seis no começo.

P: E aqui, você fez toda a conta e escreveu que o irmão de Caio tem oito anos. O que você pensou?



A6 5) O quadrado do número que representa, em anos, a idade do irmão de Caio, menos o dobro desse número, é igual a cinco vezes o número aumentado de oito. Quantos anos tem o irmão de Caio?

$x^2 - 2x = 5x + 8$

$x^2 - 2x - 5x - 8 = 0$

$x^2 - 7x - 8 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot -8$

$\Delta = 49 + 32$

$\Delta = 81$

$x = \frac{7 \pm 9}{2}$; $\frac{-2}{2} = -1$; $\frac{16}{2} = 8$

O irmão de Caio tem 8 anos.

Figura 15 – Resolução do aluno A06 – Problema 5
Fonte: extratos das resoluções dos alunos – Fase 2

A06: É porque ele não pode ter idade negativa.

A06 e a matemática

A06 é mais calado, não tem muita conversa com quem ele não conhece. Demonstra ter excelente atividade algébrica algorítmica de equações de 1º e 2º graus quando resolve as equações.

Ao resolver os problemas, já no problema 2, quando percebe que com aquele número de pneus não poderiam ser outros números de carros e motos para ter 13 veículos, mas preferiu ir pela lógica do que usar uma equação para chegar à solução.

A06 usa regra de três no problema 3, mas alega que foi só para testar se dava certo, pois dividiu esse resultado por quatro para chegar ao resultado correto. Provavelmente lembrou do resultado da equação que resolveu anteriormente e percebeu que para ter a resposta 75 precisaria dividir por quatro. Parece não estabelecer sentido com o sinal de igualdade ao grifar a palavra “equilibram-se” e por não ter visualizado uma resolução mais simples, testando a regra de três.

Embora não se lembrasse do modo como resolveu o problema 4, o colega A25 lembrou que ele tinha comentado que encontrou um número que no começo da multiplicação desse o seis para conseguir o 600. Então o resultado foi obtido por dedução lógica e pela resolução percebemos que o aluno tem os conceitos de área, largura e altura bem formados, tanto que chegou à resposta correta, e assim não precisou associar essas informações para chegar a uma equação de 2º grau que lhe fornecesse a resposta.

Quando o aluno responde, no problema 5, que a idade do irmão de Caio não poderia ser negativa, percebemos que ele possui uma interpretação correta do problema.

A06 é um ótimo aluno de matemática, mas é um aluno treinado, é habituado a ter um conteúdo em sala de aula e em seguida resolver vários exercícios referentes àquele conteúdo. Quando o problema a ser resolvido sai um pouco do que é acostumado, não demonstrando claramente que conteúdo deve ser utilizado, ele faz relação com outros conhecimentos matemáticos para resolvê-lo. Foi o que aconteceu nos problemas 2 e 4.

É o típico caso do aluno que mecaniza os procedimentos resolutivos, mas consegue ter uma aprendizagem significativa, pois estabelece relações entre os conceitos que aprende. Porém não percebe, como veremos adiante, a relação parte-todo nem a circularidade-linearidade entre os tópicos da matemática, pois sua aprendizagem é fragmentada, como a dos outros entrevistados.

6.3.5 Análise das questões que todos os alunos entrevistados responderam coletivamente

A entrevista coletiva foi primordial para nossa análise, uma vez que entre as soluções dos problemas, estavam as equações resolvidas pelos alunos anteriormente, e isso nos auxiliaria a perceber se o aluno tem o conhecimento algébrico ou somente mecanizou o procedimento resolutivo das equações.

Pela fala dos alunos, conseguimos verificar quais são algumas das suas concepções sobre a álgebra e a matemática, bem como suas dificuldades.

Diálogo da entrevistadora com todos os alunos após a entrevista individual

P: Achei o máximo vocês irem direto pro delta, eu escrevia tudo quando ia resolver uma fórmula. (Pois os alunos não escreviam a fórmula de Bhaskara nas suas resoluções, resolvendo direto o delta de depois desenvolvendo os cálculos.)

A06: É minha matéria preferida.

P: E qual é a matéria que vocês mais gostam?

A02: Biologia. Eu não gosto muito de matemática.

A25: Acho que é o logaritmo, que agora eu sei fazer.

P: E quando vocês estudam matemática e vocês estão resolvendo um problema, o que vem na cabeça de vocês? Vem alguma coisa que a professora falou, alguma coisa que vocês decoraram?

A6: É que a professora passa um monte de lista para a gente fazer, a gente faz, eu faço, pelo menos um monte de exercício.

A25: Eu sempre tento, tipo, liga um exercício que eu estou fazendo com algum exercício que eu fiz na sala, tipo, eu tento, por exemplo, uma conta que eu tenho que fazer aqui (nas listas) eu tento ligar com uma conta que a professora já fez no quadro. Às vezes a mesma conta 2X2 eu tento ligar quando ela fez 2X2, daí tipo mesmo você fazendo muito errado acaba percebendo, por mais que eu ache que esteja certo, se der muita diferença vou perceber que fiz alguma coisa errada.

P: Deixa eu só fazer mais uma pergunta para todos: eu percebi, não com vocês, mas muitas pessoas que resolveram, quando chegavam num delta, vamos supor, num valor bem absurdo, que às vezes dá de um errinho de conta, você não consegue resolver direto, nem por fatoração, nem nada, eles paravam a conta ali. Tipo, eles não voltavam pra ver o que aconteceu para dar um valor daquele, para ver se não erraram nada antes. O que vocês acham disso? É um costume para vocês?
A06: Eu sempre reviso a conta.
A25: Eu nem sei porque eu errei aquela ali do 2x.
P: O que vocês acharam de fazer os exercícios?
A25: Ah, tava tranquilo.
A06: Eu achei bem fácil, é o que todo aluno do Ensino Médio tem que saber.
A25: É o básico na verdade.
A02: Ah, eu acho difícil, né? Eu sempre faço as contas do jeito assim mais longo, mas para mim é mais fácil, eu entendo melhor desse jeito que eu faço.
P: Eu queria saber o que vocês sabem sobre raiz de equação de 2º grau. O que é uma raiz? Porque quando a gente calcula uma raiz de 2º grau, nesse caso que era uma equação completa (na forma $ax^2 + bx + c = 0$), tem duas raízes. Vocês sabem o que são as raízes?
A25: É o resultado. É o expoente, que é elevado a dois (x^2 da equação) daí dá duas raízes. Ou é no plano cartesiano, não é? Que você marca.
A06: Que dá a parábola.
P: Mas vocês concordariam comigo que a partir do momento que eu substituo o x da equação por uma raiz, o que acontece na igualdade?
A06: Vai dar igual a zero.
A06: É igual raiz de quatro que é 2 e -2.
P: Vocês não têm nada mais que queiram dizer?
A06: Achei que estava super fácil.
A25: Apesar de tudo eu achei que estava super fácil, a do quadro que eu estava me batendo, eu consegui, eu achei que isso era obrigação saber, achei que você ia me bater aqui.
P: Tanto não é que você visualizou qual foi o problema aqui. Talvez se você tivesse voltado no começo, para ver o que tinha acontecido, você ia perceber.

Reflexões após a entrevista coletiva

Percebemos após a fala dos alunos que até os que têm bom desempenho na disciplina não têm consciência da complexidade da Matemática, pois não conseguem conceber sua totalidade, não percebem que os conteúdos que teriam que ser acionados por sua estrutura cognitiva são interligados, inter-relacionados e inter-retroagem todo o tempo entre si quando tentam resolver as equações e problemas. Verificamos que os conceitos formados nas estruturas cognitivas dos alunos são separados, fragmentados, que conceitos subsunçores não foram ancorados a novos conceitos, ficam perdidos, sem formar relações efetivas e duradouras.

A mecanização dos procedimentos algorítmicos é constante em ambas as listas, tendo como exemplo as fórmulas resolutivas das equações de 2º grau que são escritas exatamente do mesmo modo pela grande maioria dos alunos. Na entrevista essa mecanização ficou ainda mais evidente, pois um dos entrevistados expôs que tinha êxito na disciplina porque fazia todas as listas de exercícios que a professora entregava para serem resolvidas após a explicitação de um conteúdo.

Outro aluno já apresentou na sua fala a importância da relação do que está resolvendo no momento com outras resoluções vistas anteriormente nas aulas, que ele saberia solucionar um problema por já ter visto algo semelhante antes, juntando a isso a importância da verificação do resultado, ou seja, averiguar se os resultados obtidos na sua resolução estão compatíveis com o que o problema apresenta como indagação.

Verificamos também, nas respostas dos alunos, como o saber da experiência está implícito no seu discurso, o quanto fatos que o marcaram e transformaram podem modificar o que ele pensa. Enquanto dois dos entrevistados, os que afirmam categoricamente que alunos do 1º ano do Ensino Médio têm a obrigação de saber o conteúdo de equações de 1º e 2º graus, seu colega não tem, pelo menos na sua visão, noção de como se resolvem essas equações e consegue solucionar os problemas referentes a equações do 1º grau pelo método de gerar e avaliar, que consiste em atribuir valores diversos, ou seja, valores que o aluno considera que solucionem a equação, até que se consiga resolver a equação ou o problema pedido e, assim, se torna um método mais longo de resolução.

Ao serem indagados sobre o que seria a raiz da equação de 2º grau, percebemos que os alunos entrevistados não têm muita ideia do que as raízes da equação significam, confundindo até mesmo com radiciação e conseguem responder com a nossa ajuda, quando indicamos que raízes são os valores de x na equação, evidenciando a linearidade do processo de aprendizagem. Observamos então como as nossas categorias de análise se estabelecem no discurso dos alunos, como se fez presente a fragmentação dos conhecimentos matemáticos no momento da resolução das listas de exercícios, ao notarmos como os alunos têm dificuldades em estabelecer relações entre os conteúdos que já aprenderam e compreender a relação parte-todo que permeia toda a matemática, bem como a linearidade e complementaridade.

Quanto aos alunos de 9º ano, os resultados sinalizam, em grande parte, resoluções por evocação de conteúdo “do dia”, já que a fórmula que estavam aprendendo naquele momento tinha como objetivo à imediata resolução algorítmica. Já com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, em considerável proporção, os resultados sinalizam ausência de percepção algébrica, e quando há sinalização de sua ocorrência, é ofuscada por erros aritméticos.

.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomamos, neste momento, os questionamentos iniciais desta pesquisa, sendo o primeiro: os alunos da Educação Básica compreendem o conceito matemático de equações de 1º e 2º graus ou memorizam o algoritmo para chegar ao resultado pretendido?

Após analisarmos os dados coletados, observamos que os alunos memorizam os passos resolutivos do algoritmo e não compreendem efetivamente o conceito matemático de equações polinomiais de 1º e 2º graus.

De acordo com os dados obtidos, verificamos que a maioria dos alunos apresentou atividade algébrica algorítmica, ou seja, a maioria conseguiu resolver as atividades algorítmicas da lista de exercícios com equações, especialmente as de 1º grau onde o percentual de acertos foi considerável.

Já quando observamos os resultados dos exercícios com equações de 2º grau, verificamos que o número de soluções corretas diminui. Porém, ao analisarmos os procedimentos resolutivos, observamos que os erros cometidos pelos alunos são na maioria aritméticos ou provindos de compreensões incompletas, como dificuldades ao lidar com os termos das equações e erros de sinal, que indicam dificuldades no conteúdo referente ao conjunto dos números inteiros e suas propriedades, ou seja, eles demonstram sabem operar mecanicamente os algoritmos das equações de 2º grau, mas cometem enganos ao manipulá-los.

Grande parte dos alunos não apresentou atividade algébrica conceitual ao resolver a lista de problemas, ou seja, não compreendem o conceito matemático envolvido nas equações de 1º e 2º graus, pois obtiveram êxito na resolução somente nos problemas cujos enunciados levavam a uma resolução imediata por uma equação, como os problemas 1, 3 e 5.

Assim sendo, respondendo à questão norteadora da pesquisa apresentada acima, os alunos, em geral, não compreendem o conceito matemático de equações polinomiais de 1º e 2º graus e mecanizam a resolução algorítmica para obter êxito neste tipo de equações.

Agora, em relação ao objetivo geral dessa pesquisa que é identificar se ocorreu a aprendizagem do conceito matemático escolar de equações polinomiais do 1º e 2º graus pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio, verificamos que a aprendizagem do conceito matemático de equações não ocorreu, pelos motivos descritos acima, uma vez que a maioria dos alunos não percebeu que as resoluções dos problemas poderiam partir de uma equação polinomial e utilizaram outros métodos para solucioná-los.

Ao identificar como os alunos do Ensino Médio resolvem algoritmos ou problemas envolvendo equações do 1º grau, observamos que nas listas de atividades algorítmicas os alunos resolveram as equações utilizando os métodos esperados. Já na lista de problemas, o método de gerar e avaliar também foi utilizado, indicando, pelo nosso referencial teórico, que os alunos que usaram este método possuem alguma atividade algorítmica conceitual.

Já ao resolverem algoritmos ou problemas envolvendo equações do 2º grau, percebemos uma mecanização do algoritmo, pois praticamente todos os alunos escreveram a fórmula resolutiva do mesmo modo e na entrevista um dos alunos citou que a professora passava listas de exercícios para que eles resolvessem e memorizassem os modos de resolução dos conteúdos matemáticos. Já nos problemas, muitas respostas nos levaram a perceber que quando o problema não indica uma equação de 2º grau já no seu enunciado, os alunos utilizam outros tipos de resoluções, geralmente não partindo de uma equação.

Quanto à natureza matemática dos erros que os alunos cometeram na resolução de equações do 1º e do 2º graus, percebemos que ocorrem erros algébricos, referentes à transposição de elementos do primeiro membro para o segundo (transposição de termos independentes, de termos em x e em ambos com origem em dificuldades na compreensão de conhecimentos prévios dos mais variados (números inteiros, concepção de operações etc) e erros de procedimento com origens na falta de compreensão do conceito de variáveis, como a adição de termos que não são semelhantes.

Foram identificados erros puramente aritméticos, como ao desenvolver a propriedade distributiva, erros com sinais e erros de divisão, por exemplo. Erros por falta de atenção também ocorreram com frequência, como por exemplo, ao copiar a equação a ser resolvida e erros de substituição dos termos na fórmula do delta e na fórmula de Bhaskara.

Observamos também que os alunos não identificam o conceito matemático de equações do 1º e do 2º grau como possibilidade de resolução dos problemas, a não ser naqueles cuja resolução por equações parte imediatamente do enunciado.

Ao comparar os resultados das duas fases da pesquisa, conseguimos perceber como os alunos compreendem o conceito solicitado num momento escolar em que o mesmo não estava sendo ministrado, ou seja, em que a atividade matemática solicitada não era diretamente vinculada ao conteúdo que estava sendo aprendido naquela ocasião.

Os alunos do 9º ano, cujas resoluções das listas serviram para validação dos instrumentos de coleta de dados, estavam aprendendo o conteúdo relativo a equações polinomiais de 2º grau quando as listas foram aplicadas. Já os alunos participantes efetivamente da pesquisa, do 1º ano do Ensino Médio, estavam aprendendo conteúdo de forma alguma vinculado às equações de 1º e 2º graus.

Ao compararmos as resoluções dos alunos nas duas fases, verificamos que fatos semelhantes ocorrem, com a maioria dos alunos, nas duas fases, ambos os grupos têm atividade algébrica algorítmica das equações polinomiais de 1º grau.

Já quanto à atividade algébrica algorítmica das equações polinomiais de 2º grau, nas duas fases aparecem compreensões incompletas e, especificamente na segunda fase, há um menor percentual de acertos, o que nos leva a crer que a mecanização da resolução dos algoritmos é maior quando se está aprendendo este conteúdo específico.

Ao resolverem os problemas, percebemos que os alunos das duas fases tiveram mais facilidade em utilizar equações de 1º e 2º graus quando a resolução partia imediatamente do enunciado. Já quando os problemas exigiam um grau maior de elaboração, como os problemas 2 e 4, os alunos da primeira fase não conseguiram solucionar algebricamente e os alunos da segunda fase, na sua maioria, empregaram outras resoluções e não as equações esperadas, sendo muito usado no problema 2 o método de gerar e avaliar, o que nos indicaria atividade algébrica conceitual. No problema 4 muitos chegaram à resposta correta pela fórmula geométrica da área do retângulo, mas não utilizando a equação de 2º grau e sim definindo valores que multiplicados teriam como resultado a área do quadro.

Ou seja, a maioria dos alunos não possui atividade algébrica conceitual de equações de polinomiais de 1º grau nem de equações polinomiais de 2º grau.

Os resultados da pesquisa caminham ao encontro de um pensamento pedagógico de superação da visão dicotômica e fragmentada dos conteúdos, visão que induz a uma prática também fragmentada, fundada em momentos escolares de aprendizagem sem inter-relação dos conteúdos programáticos presentes nos programas escolares.

Neste trabalho, os passos, as tentativas, as soluções, os erros e os acertos evidenciaram a dimensão em que o fragmento do conhecimento escolar desconectado e descontextualizado (Morin, 2010) colabora para a ausência de significado (Ausubel, 2003) na aprendizagem conceitual de matemática.

A resolução algorítmica, se realizada dissociada do conceito que lhe diz respeito, nada mais é do que a resolução mecânica desprovida de significado para os alunos.

Não negamos a importância da resolução algorítmica dos alunos, seja em álgebra, objeto desta pesquisa, ou não. O que nos preocupa é o que o resultado de nossa pesquisa evidenciou que os alunos da Educação Básica, tendem a memorizar e mecanizar algoritmos resolutivos em detrimento de compreender conceitualmente o conhecimento matemático.

EPÍLOGO

Esta pesquisa nos estimulou a realizar um ensaio reflexivo durante os procedimentos metodológicos para coleta de dados e a respectiva análise amparada pelo referencial teórico adotado. Foi então que um olhar não fragmentado para a construção do conhecimento pelo aluno, que passou por uma análise circunstanciada, possibilitou compreender também algumas raízes do que denominamos por não-aprendizagem.

Embora nossa pesquisa não tenha como foco os professores que ensinam matemática, não pudemos evitar reflexões sobre a ação docente. Por isso acreditamos que a relevância desta pesquisa está não só no resultado de que os alunos mecanizam o algoritmo para resolver equações de 1º e 2º graus e não compreendem os conceitos matemáticos envolvidos nestes tópicos, mas também se constituem em colaboração para uma mudança do olhar dos professores quanto ao processo de ensino-aprendizagem. Um olhar que distinga operações algorítmicas e conceitos em um contexto matemático e, por consequência, identifique quando a aprendizagem se dá pela mecanização de procedimentos resolutivos ou pela compreensão conceitual. Um olhar que considere os modos próprios do aprender e os contextualize matematicamente em uma perspectiva não fragmentada tanto dos processos do aprender quanto do próprio conhecimento. Um olhar que considere a subjetividade do aluno, visto que lhe é constitutiva e não pode lhe ser extirpada na sala de aula.

Enfim, que resulte numa ação pedagógica que busque a superação de sintomas indicativos de aprendizagem problemática, tal, como a mecanização dos procedimentos resolutivos associados à fragmentação dos conteúdos matemáticos, propiciando que os alunos produzam relações entre conceitos e algoritmos resolutivos, como também, entre diferentes conceitos envolvidos em uma mesma situação matemática e consigam então, junto aos professores, construir um conhecimento significativo.

Sendo professores de matemática, não temos como não nos preocuparmos com o aprendizado do aluno, mas com um aprendizado efetivo, um aprendizado significativo, não fruto de memorização ou mecanização de procedimentos resolutivos e fórmulas.

Nós professores, ao nos tornarmos conscientes da nossa importância e do significado da nossa profissão, não devemos aceitar ser apenas menos transmissores do conhecimento. Mais do que isso, somos agentes ativos que colaboram para a aprendizagem significativa pelos alunos e, portanto, seria interessante se conseguíssemos perceber as peculiaridades complexas do processo de aprender para fundamentar o de ensinar.

Após estas considerações, percebemos que não há como se pensar em uma sala de aula como conjuntos disjuntos. Professores, alunos e conteúdo precisam ser pensados juntos, associados ainda com ensino, aprendizagem e método. Uma das grandes dificuldades que perpassa pelo cotidiano do professor é em relação ao aprendizado dos seus alunos, pois a certeza da compreensão do conteúdo, ainda mais em matemática, se perde devido ao fato do aluno poder ter somente mecanizado a resolução de determinado exercício, sem realmente entendê-lo. Ou seja, os alunos na realidade muitas vezes não aprendem, só decoram como fazer o passo a passo, como se seguissem uma "receita de bolo".

Percebemos que a compreensão dos alunos e a prática pedagógica dos professores não podem, de maneira alguma, ser consideradas de maneira fragmentada. São parte do todo, que juntas promovem algo maior, maior que o todo por si só, pois se relacionamos prática docente com aprendizagem, mais a escola e a sociedade, percebemos que o processo do ensinar e do aprender faz parte de um sistema complexo, pois um não pode existir sem o outro, uma vez que todas as partes são interligadas, sofrem retroações, uma vez que alunos, professores, escola e sociedade são "tecidos juntos"!

Professores não podem mais ser vistos como "os que iam lá com aquelas folhinhas que há muito tempo usavam e repassavam tudo no quadro [...]" (GUÉRIOS, 2002, p. 166), ou seja, não podem apenas ditar seu conhecimento para os alunos, repetindo este ato por anos e anos, sempre se utilizando do mesmo repertório. Precisamos conceber na nossa prática que induzir o conhecimento é diferente de produzir o conhecimento, pois o conhecimento construído não é mutilado e a experiência produz conhecimento uma vez que não há indução e sim compreensão do que está sendo ensinado.

Nas aulas de matemática muitas vezes os alunos são condicionados a pensar de uma maneira só, pois os professores não aceitam respostas diferentes das esperadas ou programadas. Os professores não estão preparados para o novo, para o incerto, para Morin (2010) e Guérios (2002). Para Larrosa (2013), há uma dimensão mecânica e limitante quando o professor é apenas um transmissor de conhecimento.

Mas não podemos culpá-los, não raras vezes, eles também foram treinados para agir desta maneira, foram acostumados a apenas receber o conhecimento durante suas aulas no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Curso de Graduação. Foram condicionados pelo exemplo dos seus mestres. Daí a necessidade de uma nova pedagogia, uma Pedagogia Complexa (SÁ, 2015).

Para Guérios (2002), se o professor não se transforma durante sua vida como docente, se ele não aprende a viver pedagogicamente em um mundo docente construído por ele e que só ele pode construir estabelecido em práticas da sua experiência, ele vai continuar estático e engessado, fazendo sempre o mesmo, do mesmo jeito e não vai evoluir, ou seja, não vai se movimentar, sair do lugar e ir em frente. Morin (2010) mostra que para alterar este cenário é necessária uma mudança de perspectiva, uma mudança de foco, uma mudança de olhar.

Porém, não podemos deixar que a experiência se converta em método estático, tampouco resumi-la à nossa vivência, à nossa prática do cotidiano. O nosso conhecimento precisa ser constantemente reelaborado, além disso, precisa ser mutável. (GUÉRIOS, 2002)

Não é fácil saber o caminho correto para o exercício docente (Guérios, 2002, p. 169), mas a experiência que modifica o professor, que modifica seu modo de pensar e de agir, que modifica seu modo de ensinar, que modifica seu modo de conceber o mundo. “A experiência é o que nos passa... e nos transpassa... e nos faz evoluir. Os caminheiros se fazem ao caminhar, muitas vezes por espaços desconhecidos [...]”. (GUÉRIOS, 2002, p. 173).

As aulas não podem ser simplificadoras. A matemática precisa ser transposta, não deixando de lado o fato de ser uma ciência, ou seja, a transposição deverá acontecer de maneira séria e competente e a matemática será mostrada então como ferramenta útil que é, também, ao estudo das demais matérias. Percebemos que por ser mutilada ao ser ensinada, é preciso que o ensino dos conteúdos da matemática seja repensado, num efeito multidisciplinar. Assim, a vida e o movimento do ensino são revitalizados. E lembrando de Larrosa e Guérios, acreditamos que este movimento produz ação, que produz transformação!

E os alunos? Ah, os alunos... É por eles que escrevemos estas linhas!

Os alunos não podem mais ser meros executores de tarefas ou reprodutores de modelos, eles precisam ter a experiência da aprendizagem, mas uma experiência, como diz Guérios (2002), “que os passem, que os transpassem”. A experiência com a matemática o levaria à autonomia, sendo ultrapassado o mecanicismo tão presente nas aulas: conteúdo-exemplos-exercícios. Ao ter autonomia os alunos sabem o que devem fazer, qual escolha devem tomar, teriam liberdade e saberiam qual caminho devem percorrer, mesmo que o caminho seja incerto.

Mas para isso eles deverão compreender a pluralidade e a multiplicidade que compõe a matemática, pois uma mera opinião sobre a disciplina, ou uma visão míope, pode dificultar a experiência de estudar e entender, de compreender o conteúdo. Ao viver a experiência da matemática, os alunos acabam deixando para trás os obstáculos e compreensões incompletas que muitas vezes os acompanham por muito tempo.

A experiência auxilia os alunos na extração do abstrato do que eles têm por concreto, pois os alunos conseguem enxergar além, perdem a visão míope adquirida nos anos de ensino simplificado e mutilado. E resgatando Morin (2010) e Guérios (2002), eles conseguem enxergar o todo como a articulação e integração das partes, relacionando-as, interligando-as, e mais ainda, percebem que o todo sofre retroações e inter-retro-ações entre as partes que fazem o todo ser maior do que originalmente ele seria.

Ao integrarmos a ciência com o conhecimento objetivo e com o ser subjetivo que todo sujeito é, compreendemos a complexidade do que é ensinar, como diz Morin (2012). E por Larrosa (2012) e Guérios (2002), percebemos que o aluno não está na sala de aula apenas para aprender algo, mas também para produzir saberes ao aprender. Ele também pode ensinar aos outros ao ter vez e voz durante as aulas. O professor pode dar vez e voz ao aluno, ouvi-lo, verificar quais são as suas necessidades e quais são as dificuldades que ele porventura está encontrando e ajudá-lo. (GUÉRIOS, 2002; LARROSA, 2012)

Quando falamos em dar vez e ouvir, queremos dizer também prestar atenção em como o aluno resolve as questões nos exercícios ou problemas que lhe são pedidos. Prestar atenção na resolução do aluno é ouvir o que ele tem a dizer. Analisar a resolução e ajudar no que for necessário pode ser o ponto inicial de uma metodologia que dá certo, que auxilia o aluno na sua compreensão. A resolução de problemas possibilita esta interação.

É necessário lembrar que o aluno, como ser subjetivo que é, é único. Não podemos esperar que todos raciocinem da mesma maneira, que todos compreendam um tópico imediatamente. Precisamos perceber que os alunos não são apenas seres computantes, que seguem um programa e nos dão o retorno esperado, eles são seres pensantes, logo são produtos de sua cultura, de seus aprendizados fora da escola, de seus conhecimentos prévios.

Finalmente, consideramos aluno – professor – conhecimento como uma tríade, tríade como circuito, conceito que Morin (2010, 2011) nos apresenta, como conceito circular com suas relações, recursividades, retroatividades, inter-retro-ações, não podendo mais serem vistos, definitivamente, como partes isoladas no cotidiano escolar. Professores devem procurar a comunicação entre a esfera do conhecimento e como os alunos o concebem e se incluir nessa esfera.

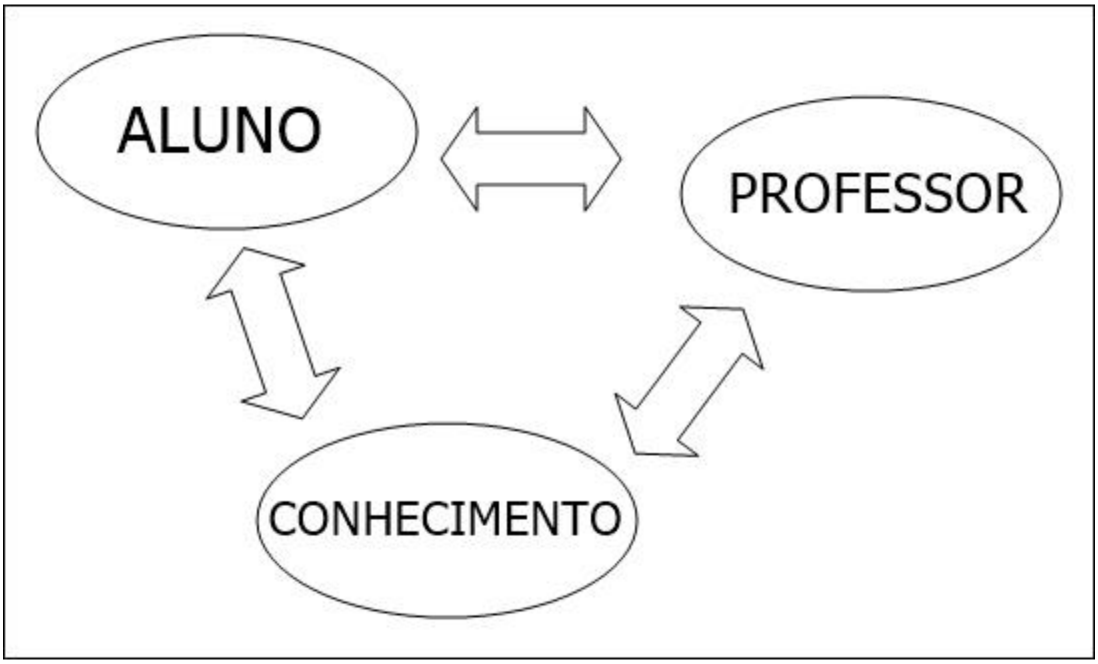


Figura 16 – Tríade Aluno-Professor-Conhecimento
Fonte: Referencial teórico da pesquisa.

O conhecimento é produto e produtor, uma vez que as interações entre aluno e professor produzem o conhecimento e o conhecimento, ao se modificar e transformar com o passar do tempo, é produtor das novas compreensões que surgem.

Aluno e professor não podem se tornar absolutos em relação ao conhecimento, bem como o conhecimento não é um elemento escravizante nessa relação, mas sim são tomados no mesmo patamar, sendo cada um deles, ao mesmo tempo, meio e fim, e é a interação dos indivíduos entre si e com o conhecimento que encaminha a sua construção.

Há uma dimensão dialógica, uma associação complexa (complementar, concorrente e antagônica), de atitudes necessárias à existência, ao funcionamento e ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, dimensão imersa na tríade aluno-professor-conhecimento.

Associação complexa porque é formada na tessitura de saberes, considerando subjetividade e objetividade das pessoas aluno e professor, que é ao mesmo tempo complementar porque os elementos formadores da tríade se completam, quando mediam, trocam e transformam seus saberes. E esta associação complexa é também concorrente, no sentido matemático, porque os sujeitos do processo ensino-aprendizagem sempre caminham juntos e é antagônica, pois como serem subjetivos que são, às vezes professor, aluno e conhecimento podem não estar em sintonia, embora se complementem.

Não podemos desconsiderar a incerteza que permeia o processo de ensino-aprendizagem e a construção do conhecimento, uma vez que os sujeitos envolvidos se encontram inseridos na realidade que pretendemos conhecer, e a objetividade absoluta, bem como a verdade absoluta se constituem enganos no nosso cotidiano escolar complexo.

Neste estudo, trabalhamos com três categorias advindas do Pensamento Complexo de Edgar Morin: fragmentação, linearidade-circularidade e relação parte-todo, que possibilitaram nossa compreensão do quão complexa é a construção do conhecimento algébrico por parte dos alunos e como os erros e equívocos encontrados nas suas resoluções podem ser considerados indicadores do nível de aprendizado dos alunos. Podemos, sim, compreender os erros e não simplesmente excluí-los do processo de ensino-aprendizagem.

O paradigma simplificador, baseado na redução e disjunção dos conceitos, domina nossa cultura nos dias de hoje, mas depende de nós a reação contra este domínio. Mas nossa batalha é incerta e não podemos ainda vislumbrar quem será o vencedor. (Morin, 2011[2])

Quiçá possamos pensar no futuro numa construção complexa do conhecimento matemático baseada no Pensamento Complexo, deixando de lado o paradigma simplificador a que estamos habituados e, numa virada paradigmática, caminhar para alcançarmos uma pedagogia complexa também para o ensino-aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas em Educação. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 77, p. 53-61, 1991.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

AUSUBEL, D. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. 1. ed. Lisboa: Plátano, 2003.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, M. R. F. Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. In: **Psicologia da educação matemática – Teoria e pesquisa**, Florianópolis: Insular, 2001. p. 69-84.

CAVALCANTE, J. L. **Resolução de problemas e formação docente: saberes e vivências no curso de Pedagogia.** 218 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 1996.

DINIZ, M.I. **O Olhar do Formador de Professores para a Pesquisa em Resolução de Problemas no Brasil.** Trabalho apresentado no II SERP – II Seminário em Resolução de Problemas – UNESP: Rio Claro, SP, 2011. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=node/134>. Acesso em 18 ago.2014.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. Competências para resolver problemas e para analisar a resolução de problemas: um estudo junto a professores, licenciandos, pedagogos e psicólogos. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)**, São Paulo, v. 13, n. 1, p.113-124, 2009.

FIORENTINI D.; MIORIN M. A.; MIGUEL, A. A. Contribuições para um repensar: a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, 1993.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONSECA, M. C. F. R. **Discurso, memória e inclusão**: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental. 2001. 443 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, 2001.

FREIRE, R. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2011. 177 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, 2011.

FREITAS, J. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática Uma (nova) Introdução**. 3. ed. rev. São Paulo: Educ, 2012. p. 77- 109.

FREITAS, M. **Equação do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

GUÉRIOS, E. C. **Espaços oficiais e intersticiais da formação docente:** histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática. 2002. 272f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, 2002.

GUÉRIOS E.; LIGESKI, A. **Resolução de problema em matemática na educação básica:** problema em matemática ou em linguagem? Anais do VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Montevideo, 2013, p.3266-3273.

JESUS, M. A. S.; FINI, L. D. T. Uma proposta significativa de matemática através de jogos. In: **Psicologia da educação matemática – Teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001. p. 129-145.

LANGER, A. **Equações de 1º grau**: Trajetória de uma análise de significados. 2004. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática) - Universidade Federal do Paraná, 2004.

LARROSA, J. Notas sobre experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira**

de Educação, Rio de Janeiro, s/v, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002.

__________. Literatura, experiência e formação. In: COSTA, M. V. **Caminhos investigativos I – Novos olhares na pesquisa em educação**. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2007. p. 130-157.

__________. Experiência e alteridade em educação. **Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul**, v.19, n.2, p. 4-27, 2011.

__________. **Pedagogia profana**: danças, piruetas e mascaradas. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

LINS R. C. E GIMEZES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. Ed. Campinas: Papirus, 2001.

LOOS H.; FALCÃO, J. T. da R.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M. A ansiedade na aprendizagem da matemática e a passagem da aritmética para a álgebra. In: **Psicologia da educação matemática – Teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001. p. 235-259.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, J. A pesquisa qualitativa. In: FAZENDA, I. (Org.). **Metodologia da Pesquisa Educacional**, 12. ed. São Paulo: Cortez, 2010. p.53-63.

MEDEIROS JR, R. J. **Resolução de problemas e ação didática em matemática no ensino fundamental**. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, 2007.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **O ensino de matemática no primeiro grau**. São Paulo: Atual, 1986.

MIGUEL, J. **O processo de formação de conceitos em matemática**: Implicações pedagógicas. 2006. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/processo.pdf> Acesso em 18 jun. 2014.

MORAIS, R. S. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de**

problemas por meio de um ensino contextualizado. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado em Metodologia do Ensino) – Universidade Federal de São Carlos, 2008.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2011.

MORIN, E. **Ciência com consciência**. 14. ed. Rio de Janeiro: Bertrand, 2010.

________. **A cabeça bem feita**. 20. ed. Rio de Janeiro: Bertrand, 2012.

_______ . **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. 2. ed. rev. São Paulo: Cortez, 2011.

________. **Educar para a era planetária**: o pensamento complexo como método de aprendizagem no erro e na incerteza humana. 1. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2003.

________. **Introdução ao pensamento complexo**. 4. Ed. Porto alegre: Sulina, 2011 [2].

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas, v.13, n. 24, p. 11-45, jul./dez. 2005.

ONUCHIC, L.R. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?** VII JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Passo Fundo, 2012. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_lonuchic.pdf>. Acesso em 10 jun. 2015.

PETRAGLIA, I. O processo de produção do conhecimento: complexidade e transdisciplinaridade. In: BEHRENS, M. A.; ENS, R. T. **Complexidade e transdisciplinaridade**: novas perspectivas teóricas e práticas para a formação de professores. Curitiba: Editora Appris, 2015. p. 75-86.

POLYA, G. **A Arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência,1995.

PONTE, J. P., BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009. Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).

pdf>. Acesso em 25 ago. 2014.

PUTI, T. C. **A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem – Avaliação de equações polinomiais**. 2011. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2011.

RIBEIRO, A. J e SILVA, T. H. I. O sinal de igualdade e seus diferentes significados: buscando rupturas na transição entre os ensinos fundamental I e II. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 75-90, 2014.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas.** São Paulo: Atlas, 1999.

SÁ, R. A. Em busca de uma pedagogia complexa. In: BEHRENS, M. A.; ENS, R. T. **Complexidade e transdisciplinaridade**: novas perspectivas teóricas e práticas para a formação de professores. Curitiba: Editora Appris, 2015. p. 61-74.

SAMPIERI, R. H. et al. **Metodologia de pesquisa.** Porto Alegre: Penso, 2013.

SAVIOLI, A. M. P. D. Origens e caracterizações acerca da álgebra e do pensamento algébrico. In: BATISTA, I.L.; SALVI, R.F. (Org.). **Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática**: perfil de pesquisas. 1. ed. Londrina: EDUEL, 2009. p. 1-14.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM & Projecto MPT. p. 61-72, 1996. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf> Acesso em 03 nov. 2014.

SEGUNDO, S. I. A. **Do ensino-aprendizagem da álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau:** representações múltiplas. 2012. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, 2012.

SILVEIRA, M. R. A. O conceito em matemática e seus contextos. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 13, n. 20/21, p. 47-58, 2006.

SPERAFICO, Y. L. S. e GOLBERT C. S. **Análise de erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau**. Trabalho apresentado no IX Seminario de Pesquisa da Regiao Sul (ANPED SUL) no Grupo GT19 – Ensino de Matematica e Ciencias. Caxias do Sul, 2012. Disponivel em:<http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino_de_Matematica_e_ciencias/Trabalho/12_34_46_35-6627-1-PB.pdf>. Acesso em 21 mar. 2015

SPINELLI, W. **A construção do conhecimento entre o abstrair e contextualizar: o caso do ensino da Matemática**. 2011. 138 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, 2011.

TRINDADE, A. F. P. **Investigações matemáticas e resolução de problemas – Que fronteiras?** 2008. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática) - Universidade Federal do Paraná, 2008.

TRIVILIN L. R. e RIBEIRO A. J. Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 38-59, abr. 2015.

ZUFFI, E. M e ONUCHIC, L. L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. In: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 11, p. 80, 2007.