Ao professor
Camil Gemael, com os
agradecimentos do autor,
pela sua colaboração dada
a este trabalho,
Curitiba, 20/12/74
[illegible]

INPE-568-LAFE

ESTUDO DA MÉTRICA NO CAMPO
GRAVITACIONAL TERRESTRE

Dezembro de 1974

cc.: 35

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

ESTUDO DA MÉTRICA NO CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE

Este trabalho foi apresentado ao Instituto de Geociências da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências, pelo Sr. Edson Aurélio Barcellos Stédile, deste Instituto, e a presente publicação foi autorizada pelo abaixo assinado,

Fernando de Mendonça
Diretor Geral

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS

Tese para obtenção do grau de "Mestre em Ciências"

"ESTUDO DA MÉTRICA NO CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE"

Edson Aurélio Barcellos Stédile

Curitiba, Maio de 1974

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Camil Gemael, Coordenador Geral do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pelo incentivo e apoio recebidos para à elaboração deste trabalho.

Agradeço aos professores do Departamento de Física, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas da Guanabara, pelos esclarecimentos que me proporcionaram, e, também, ao Prof. Dr. Rogério Lopez Garcia do Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, pela atenção e colaboração que me dispensou, na execução do mesmo.

Agradeço, ainda ao Conselho Nacional de Pesquisas e às pessoas que, de maneira direta ou indireta, me auxiliaram na realização deste trabalho.

O AUTOR

RESUMO

Procuramos mostrar a importância da Teoria da Relatividade Geral para as Ciências Geodésicas, estudando a geometria aplicável ao campo gravitacional terrestre, mediante a análise da métrica no mesmo campo, com base na Teoria Gravitacional de A. Einstein.

Esta tese se constitui, em parte, numa monografia, abordando o problema da métrica em várias situações, e, finalmente, num estudo da referida métrica no campo gravitacional de uma distribuição material esquema fluído-perfeito.

Concluindo, determinamos as equações das geodésicas do campo em questão, mostrando que o aspecto relativista apresenta pequenas correções em relação ao caso Clássico, e salientamos que tais geodésicas são as trajetórias de massas no campo gravitacional considerado, podendo vir a contribuir para o estudo de órbitas de satélites terrestres artificiais.

ABSTRACT

In this thesis we intend to show the importance of the General Theory of Relativy in Geodesy studying the geometry suited to the gravitational field of the Earth by means of analysing the metric in this field, according to Einstein's gravitational theory.

Partly it is a monography analysing the problem of the metric in various cases and finally a view of the metric of the gravitational field of a perfect-fluid distribution of matter.

Finnally we determine the geodesics equations for this field demonstrating that the relativistic aspect shows small corrections compared to the classic case, pointing out that such geodesics are the trajectories of masses gravitating in the same field, which is a fact of great interest for the study of orbits of artificial terrestrial satellites, in Geodesy.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O campo gravitacional terrestre é estudado na Teoria Clássica com base na geometria Euclidiana, sendo os resultados obtidos satisfatórios no que se refere a aplicações práticas, tais como movimentos de satélites artificiais.

Todavia, olhando o mesmo problema sob um aspecto mais rigoroso, deve-se empregar a Teoria Gravitacional de Albert Einstein, na qual a geometria depende do movimento e distribuição de matéria, esta responsável pelo campo, de modo que há uma interdependência de geometria e campo, expressa pelas equações gravitacionais do mesmo autor.

Em 1915, A. Einstein |2| propôs uma solução aproximada para a métrica do campo gravitacional de uma partícula material e, em 1916, Schwarschild |3| estudou o mesmo problema, introduzindo a conhecida métrica de Schwarschild.

No mesmo ano De Sitter |11| demonstrou, como o movimento de um satélite é influenciado pela rotação do corpo primário, consideração feita dentro do quadro relativista.

Ainda em 1916, Thirring e Lense |12| estudaram o mesmo problema usando um método de aproximação linear |10| na mesma teoria, considerando como os autores precedentes um espaço levemente curvo, nas condições de campo gravitacional fraco.

Todos os trabalhos citados negligenciaram termos proporcionais ao quadrado da velocidade angular da distribuição material criadora do campo.

O estudo da métrica no campo gravitacional terrestre, dentro do quadro da Relatividade Geral, apresenta atualmente grande interesse para as Ciências Geodésicas devido às determinações dos parâmetros dos elipsóides terrestres (modelos da forma da Terra), através de satélites artificiais, e o estudo em questão permite determinar as equações das geodésicas ou trajetórias destes satélites.

Apesar de as correções relativistas serem ainda negligenciáveis, existem trabalhos, já publicados, mostrando a importância teórica deste problema que, para o futuro, virá a ter significado e dentre estes trabalhos citamos:

The Earth External Gravity Field, Vaynrot, V.I. |14|
Relativistic Perturbation Theory, Krause, G.L. |6|

Nosso trabalho se propõe a estudar o problema da métrica, nas condições de campo fraco e espaço levemente curvo, supondo a Terra descrita por um esquema fluído-perfeito e, após a determinação das componentes do tensor métrico, apresentar as equações das geodésicas do espaço em questão.

1 - IDENTIDADES DE BIANCHI

As identidades de Bianchi são de fundamental importância no estudo da geometria generalizada. Elas apresentam uma relação entre as componentes do tensor de curvatura, de Riemann, permitindo também a determinação das equações de Einstein, que são de importância vital na Relatividade Geral.

Iniciando o estudo da métrica, vamos considerar um ponto do campo gravitacional de uma distribuição material, onde se constrói um referencial natural $(M_0, \vec{e}_\alpha)$, sendo M_0 a origem e $\vec{e}_\alpha$ os vetores de base deste sistema. Admitimos também que M_0 é o ponto de uma variedade V_n diferenciável até uma ordem desejada, sendo ε_η o espaço euclidiano tangente à mesma em M_0, de tal maneira que os $\vec{e}_\alpha$ estejam nesse espaço.

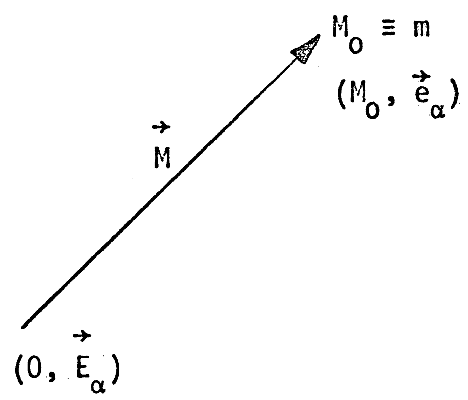

Fig. 1

O ponto M_0 é definido pela função vetorial de posição $\vec{M} = \vec{M}(y^\alpha)$, onde y^α são suas coordenadas relativas ao sistema $(0, \vec{E}_\alpha)$, e o ponto m às coordenadas (z^{α}), do mesmo sistema.

Efetuemos sobre as variáveis y^{α} uma mudança para as coordenadas z^{α}, tal que em uma representação de segunda ordem |8|, ε_n esteja referido ao sistema $(m, \vec{e}_{\alpha})$.

Obviamente os dois referenciais em m e M_0 coincidem e, portanto, as componentes de um mesmo tensor nos dois sistemas são idênticas |8|.

A métrica euclidiana é dada por |9|

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dy^{\alpha}\, dy^{\beta}, \qquad 1.1$$

onde <u>ds</u> é o comprimento elementar de arco no espaço euclidiano e $g_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor métrico, definidas pelo produto escalar dos vetores de base, |9|

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} \qquad 1.2$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie, que são definidos por |13|

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\rho}\, (\partial_{\beta}\, g_{\gamma\rho} + \partial_{\gamma}\, g_{\beta\rho} - \partial_{\rho} g_{\beta\gamma}\,), \qquad 1.3$$

onde |8|

$$g^{\alpha\rho} = \frac{\text{cofator } g_{\alpha\rho}}{\det g_{\alpha\rho}} \qquad 1.4$$

e

$$\partial_\alpha \, g_{\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \, y^2} \qquad 1.5$$

serão nulos, mas suas derivadas não o serão |7|.

Nestas considerações o sistema (z^α) é chamado de sistema de coordenadas normais, relativas a M_o, |8|.

Vamos analisar as componentes do tensor de Riemann em um sistema de coordenadas normais.

Este tensor tem componentes dadas por, |7|

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \, \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}, \qquad 1.6$$

mas, no sistema em questão, considerando que os símbolos de Christoffel são nulos, estas assumirão a forma

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \, \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}. \qquad 1.7$$

Derivando a expressão 1.7 em relação às coordenadas y^{δ} vem

$$\nabla_{\delta} R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\beta\delta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma\delta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \qquad 1.8$$

Derivando agora a mesma expressão em relação a y^{γ} temos

$$\nabla_{\gamma} R^{\lambda}_{\alpha\delta\beta} = \partial_{\gamma\delta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_{\beta\gamma} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta}; \qquad 1.9$$

e, finalmente, em relação a y^{β}, obtemos

$$\nabla_{\beta} R^{\lambda}_{\alpha\gamma\delta} = \partial_{\beta\gamma} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta} - \partial_{\beta\delta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} \qquad 1.10$$

Somando membro a membro as expressões 1.8, 1.9 e 1.10, resulta

$$\nabla_{\delta} R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_{\gamma} R^{\lambda}_{\alpha\delta\beta} + \nabla_{\beta} R^{\lambda}_{\alpha\gamma\delta} = 0. \qquad 1.11$$

Multiplicando agora a expressão 1.11 por $g_{\lambda\mu}$ e lembrando que |13|,

$$g_{\lambda\mu} \nabla_{\beta} R^{\lambda}_{\alpha\gamma\delta} = \nabla_{\beta} R_{\mu\alpha\gamma\delta} \qquad 1.12$$

temos finalmente

$$\boxed{\nabla_{\beta} R_{\alpha\delta\varepsilon\gamma} + \nabla_{\varepsilon} R_{\alpha\delta\gamma\beta} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\delta\beta\varepsilon} = 0} \qquad 1.13$$

As expressões 1.11 e 1.13 são as identidades de Bianchi |8|, que nos permitirão obter as equações de Eintein a seguir.

2 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações propostas por A. Einstein apresentam grande importância na Teoria da Relatividade Geral pelo fato de estabelecerem um vínculo entre grandezas geométricas e físicas, quando se trata do comportamento da métrica no campo gravitacional de uma distribuição material.

Para obter tais equações multipliquemos a identidade 1.13 por $g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}$, resultando

$$g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\beta\, R_{\alpha\delta\varepsilon\gamma} + g^{\alpha\beta}\, g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\varepsilon\; R_{\alpha\delta\gamma\beta} + g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\gamma R_{\alpha\delta\beta\varepsilon} = 0 \qquad 2.1$$

A primeira parcela de 2.1 pode ser colocada na forma, |13|

$$g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\beta\; R_{\alpha\delta\varepsilon\gamma} = -\; g^{\alpha\beta}\; \nabla_\beta\; R_{\alpha\gamma}; \qquad 2.2$$

e, a segunda, na forma

$$g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\varepsilon\; R_{\alpha\delta\gamma\beta} = g^{\alpha\beta}\; g^{\delta\varepsilon}\; \nabla_\beta\; R_{\alpha\delta\gamma\varepsilon}\,. \qquad 2.3$$

O tensor de Riemann apresenta antissimetria em relação aos índices, γ e ε, logo,

$$R_{\alpha\delta\gamma\varepsilon} = - \quad R_{\alpha\delta\varepsilon\gamma}. \qquad 2.4$$

Por esta razão, 2.3 pode ser escrita como

$$g^{\alpha\beta} g^{\delta\varepsilon} \nabla_\beta R_{\alpha\delta\gamma\varepsilon} = -g^{\alpha\beta} g^{\delta\varepsilon} \nabla_\beta \; R_{\alpha\delta\varepsilon\gamma}. \qquad 2.5$$

Por contração, 2.5 ficará

$$g^{\alpha\beta} g^{\delta\varepsilon} \nabla_\beta R_{\alpha\delta\gamma\varepsilon} = -g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \; R_{\alpha\gamma}. \qquad 2.6$$

e a última parcela de 2.1 resulta

$$g^{\alpha\beta} g^{\delta\varepsilon} \nabla_\gamma \; R_{\alpha\delta\beta\varepsilon} = \nabla_\gamma R . \qquad 2.7$$

Desta maneira, observando 2.2, 2.6 e 2.7, 1.13 assumirá a forma

$$- g^{\alpha\beta} \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} - g^{\alpha\beta} \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} + \nabla_\gamma R = 0. \qquad 2.8$$

Multiplicando 2.8 por $g_{\alpha\gamma}$ e lembrando que, |13|

$$g_{\alpha\gamma} g^{\alpha\beta} = \delta^\beta_\gamma = \begin{cases} 1 \text{ se } \beta = \gamma \\ 0 \text{ se } \beta \neq \gamma, \end{cases} \qquad 2.9$$

sendo δ^β_γ as componentes do tensor de Kronecker, temos para a 2.8,

$$- \delta^{\beta}_{\gamma} \nabla_{\beta} R_{\alpha\gamma} - \delta^{\beta}_{\gamma} \nabla_{\beta} R_{\alpha\gamma} + \nabla_{\gamma} g_{\alpha\gamma} R = 0. \qquad 2.10$$

A 2.10 terá significado para $\beta = \gamma$, devido às condições mostradas por 2.9, resultando então

$$2 \nabla_{\beta} R_{\alpha\gamma} - \nabla_{\beta} g_{\alpha\gamma} R = 0. \qquad 2.11$$

Finalmente, a 2.11 pode ser escrita na forma

$$\nabla_{\beta} (R_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} R) = 0. \qquad 2.12$$

Observa-se na expressão 2.12 que os termos entre parênteses correspondem às componentes de um tensor covariante de segunda ordem, que é chamado tensor de Einstein, sendo representado por $G_{\alpha\gamma}$. |3|

Portanto, concluímos que, de acordo com 2.12,

$$\nabla_{\beta} G_{\alpha\gamma} = 0, \qquad 2.13$$

mostrando-nos que a divergência do tensor de Einstein é nula; salientamos também que este tensor apresenta características exclusivamente geométricas, não sendo, portanto, grandeza física.

Quando se considera uma distribuição material esquema fluído-perfeito, tem-se um tensor descritivo da mesma, chamado tensor impulsão-energia e que se apresenta, na forma covariante, como, |3|

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + \frac{P}{c^2})\, v_\alpha \; v_\beta \; - g_{\alpha\beta} \frac{P}{c^2}, \qquad 2.14$$

onde ρ é a densidade da distribuição, ν_α a velocidade, P a pressão e c a velocidade da luz.

Admitindo que a pressão seja nula sobre as partículas desta distribuição, a 2.14 ficará

$$T_{\alpha\beta} = \rho \, v_\alpha \; v_\beta . \qquad 2.15$$

Sabe-se também que o tensor impulsão-energia apresenta divergência nula, |3|, isto é,

$$\nabla_\beta \; T_{\alpha\gamma} = 0. \qquad 2.16$$

Temos agora dois tensores conservativos como mostram 2.13 e 2.16. Procurando uma generalização das equações de Poisson, A.Einstein estabeleceu |3| uma proporcionalidade entre os tensores $G_{\alpha\beta}$ e $T_{\alpha\beta}$, através da constante K, chamada de constante de Einstein, de valor

$$K = \frac{8 \pi G}{c^2}, \qquad 2.17$$

onde G é a constante gravitacional de Newton.

A genial intuição de Einstein levou-o a escrever

$$G_{\alpha\beta} = - K\, T_{\alpha\beta} \qquad 2.18$$

ou,

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = - K\, T_{\alpha\beta}} \qquad 2.19$$

A 2.19 apresenta as equações de Einstein, que interligam grandezas geométricas a físicas e permitem relacionar a geometria aplicável a um campo gravitacional de uma distribuição material, às características físicas desta distribuição, impostas pelo tensor impulsão-energia, mostrando também que este espaço é deformado pela presença de matéria.

Na mesma equação 2.19 temos |7| o tensor de Ricci dado pela contração do tensor de Riemann,

$$R_{\alpha\beta} = g^{\delta\rho}\, \bar{R}_{\delta\alpha\rho\beta}, \qquad 2.20$$

ou pela forma |7|

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\lambda\mu}, \qquad 2.21$$

sendo suas componentes simétricas, i.é,

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \qquad 2.22$$

A curvatura escalar do espaço, que aparece em 2.19, é dada por |7|.

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \qquad 2.23$$

3 - A MÉTRICA DE SCHWARSCHILD

Vamos estudar a métrica no campo de uma distribuição material rigorosamente simétrica, nas condições de caso estático.

Adotaremos como consideração de çaso estático o seguinte:

O tensor métrico é dito estático se suas componentes não dependem do tempo |3|, ou seja,

$$\partial_t \, g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \qquad 3.1$$

e, ainda,

$$g_{oi} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Considerando a métrica dada por 1.1 e admitindo um sistema ortogonal de referência, teremos

$$ds^2 = g_{oo}(dx^o)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2, \qquad 3.2$$

pois,

$$g_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{se} \qquad \alpha \neq \beta \qquad 3.3$$

Como sabemos, de acordo com as equações de Einstein, o espaço é deformado pela matéria e a métrica no campo gravitacional em questão não será euclidiana. Por esta razão, admitiremos que o coeficiente g_{oo} seja um valor V^2, a determinar, e colocaremos a parte espacial com os coeficientes $a_{\sigma\lambda}$, também a determinar. Com isto, a 3.2 assume a forma

$$ds^2 = V^2\, dt^2 - a_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma, \qquad \rho, \sigma = 1, 2, 3, \tag{3.4}$$

onde

$$x^o = t. \tag{3.5}$$

Em um sistema de coordenadas esféricas com $\bar{x}^1 = r$, $\bar{x}^2 = \theta$ e $\bar{x}^3 = \phi$, teremos

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = r\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\phi \\ x^2 = r\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\phi \\ x^3 = r\cos\theta \end{array}\right. \quad \mathrm{e} \quad \left\{\begin{array}{l} x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \\ x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \\ x^3 = x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3). \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Colocando a parte espacial de 3.4 na forma

$$d\ell^2 = F^2\, dr^2 + \rho^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2), \tag{3.7}$$

teremos, V F e ρ como funções apenas de r, a determinar.

Comparando a parte espacial de 3.4 com 3.7, encontramos

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= F^2 \\ a_{22} &= \rho^2 \\ a_{33} &= \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad 3.8$$

sendo que

$$a_{\rho\sigma} = 0, \qquad \text{se} \quad \rho \neq \sigma. \qquad 3.9$$

Na forma matricial teremos, observando 3.8 e 3.9,

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{vmatrix}, \qquad 3.10$$

cujas componentes contravariantes são dadas por

$$a^{\rho\sigma} = \frac{\text{cofator } a_{\rho\sigma}}{\text{determinante } a_{\rho\sigma}}, \qquad 3.11$$

resultando

$$a^{11} = \frac{1}{F^2}, \; a^{22} = \frac{1}{\rho^2}, \; a^{33} = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta} \qquad 3.12$$

Utilizando a 1.3, podemos determinar os símbolos de Ch-ristoffel de segunda espécie

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} a^{\alpha\sigma} (\partial_{\beta} a_{\gamma\sigma} + \partial_{\gamma} a_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma} a_{\beta\gamma}), \qquad 3.13$$

onde fazemos $\alpha = \sigma$, porque o sistema é ortogonal.

Usando a notação de 1.5, teremos abaixo os símbolos de 3.13, que são diferentes de zero, indicando com ' derivação em relação a r e fazendo

$$\partial_1 = \partial_r \, , \quad \partial_2 = \partial_\theta \quad e \quad \partial_3 = \partial_\phi : \qquad 3.14$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Gamma^{1}_{22} = \dfrac{1}{2\, a_{11}} \partial_r \; a_{22} = - \dfrac{\rho\,\rho'}{F^2} \\[2ex]
\Gamma^{1}_{33} = \dfrac{1}{2\, a_{11}} \partial_r \; a_{33} = - \dfrac{\rho\,\rho' \operatorname{sen}^2\theta}{F^2} \\[2ex]
\Gamma^{2}_{33} = \dfrac{1}{2\, a_{22}} \partial_\theta \; a_{33} = - \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\[2ex]
\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \dfrac{1}{2} \partial_r \, \ell_n \, a_{22} = \dfrac{\rho'}{\rho} \\[2ex]
\Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \dfrac{1}{2} \partial \; \ell_n \, a_{33} = \dfrac{\rho'}{\rho} \\[2ex]
\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \dfrac{1}{2} \partial_\theta \, \ell_n \, a_{33} = \operatorname{cotg}\theta
\end{array}\right\} \qquad 3.15$$

O caso estacionário, que estamos admitindo, nos permite escrever |3|

$$V(R_{\alpha\beta}) + L_{\alpha\beta} = 0, \qquad 3.16$$

onde V é função apenas de r, $R_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor de Ricci dadas por 2.21 e $L_{\alpha\beta}$ por |3|

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial x^\gamma} , \qquad 3.17$$

com

$$L_{\alpha\beta} = 0, \qquad \text{se} \qquad \alpha \neq \beta. \qquad 3.18$$

Observando as 3.15 e 3.17, escrevemos

$$L_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \Gamma^1_{11} \partial_r V = V'' - \frac{F' V'}{F} \qquad 3.19$$

e, analogamente,

$$L_{22} = \frac{\rho\rho' V'}{F^2} \qquad 3.20$$

e

$$L_{33} = \frac{\rho\rho'\mathrm{sen}^2\theta\ V'}{F^2} \qquad 3.21$$

Utilizando a 2.21, podemos calcular as componentes R_{11} e R_{22} do tensor de Ricci, que têm significado em nosso problema,

$$R_{11} = \frac{2F}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho'}{F}\right)$$

e $\qquad 3.22$

$$R_{22} = \frac{\rho}{F}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho'}{F}\right) + \frac{\rho'^2}{F^2} - 1$$

Devido às 3.19, 3.20 e 3.22, a 3.16 permite escrever

$$\frac{2VF}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right) + V'' - \frac{F'\ V'}{F} = 0 \qquad 3.23$$

e

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho'\ V}{F}\right) - V\ F = 0, \qquad 3.24$$

onde o símbolo ∂ foi substituído por d porque F e ρ são funções apenas de r.

Subtraindo a 3.24 da 3.23 e dividindo ambos os membros por 2VF obtemos,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho'}{F}\right) - \frac{\rho'}{V}\frac{V'}{F} = 0, \qquad 3.25$$

donde concluimos que

$$\frac{\rho'}{VF} = C_1, \qquad 3.26$$

sendo C_1 uma constante.

Para um ponto infinitamente afastado da distribuição material devemos ter a métrica euclidiana

$$ds^2 = c^2 \; dt^2 - dr^2 - r^2 \,(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \;\; d\phi^2), \qquad 3.27$$

de maneira que as condições de contorno nos permitem avaliar a constante C_1 da expressão 3.26. Desta forma,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\rho}{r} = 1. \qquad 3.28$$

Logo, no limite,

$$\rho' = 1, \qquad F = 1 \qquad e \qquad V = c \tag{3.29}$$

e, ainda,

$$c\rho' = VF. \tag{3.30}$$

Substituindo a 3.30 na 3.24, vem,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho\rho' V}{F}\right) - c\rho' = 0 \tag{3.31}$$

e, integrando,

$$\frac{\rho\rho' V}{F} - c\rho = C_2 \tag{3.32}$$

Como devido, à 3.30,

$$\rho' = \frac{VF}{c}, \tag{3.33}$$

resulta então para a 3.32, após algumas transformações algébricas,

$$\rho\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = C_3. \tag{3.34}$$

Multiplicando ambos os membros da 3.34 por c^2 e explicitando V^2, obtemos

$$V^2 = c^2 - \frac{C_4}{\rho}. \qquad 3.35$$

Fazendo, agora, na 3.35 $C_4 = 2GM$, onde G é a constante de Newton e M a massa da Terra, teremos

$$V^2 = c^2 - \frac{2GM}{\rho}, \qquad 3.36$$

satisfazendo à condição de que, no infinito, V = c. Ainda a 3.30 nos permite escrever

$$F = \frac{c}{V}\frac{d\rho}{dr} \qquad 3.37$$

ou

$$F^2\, dr^2 = \frac{c^2}{V^2}\, d\rho^2 \qquad 3.38$$

Observando as 3.4, 3.7 e 3.38, teremos, finalmente,

$$\boxed{ds^2 = V^2\, dt^2 - \frac{c^2}{V^2}\, d\rho^2 - \rho^2\,(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2),} \qquad 3.39$$

que é a métrica de Schwarschild.

4 - SOLUÇÃO RIGOROSA PARA O CASO ESTÁTICO

Como estamos admitindo à parte espacial da métrica na forma mostrada em 3.7 e considerando ainda que são harmônicas as coordenadas do ponto do campo gravitacional em estudo deverá ser nulo, o operador de D'Alembert aplicado às coordenadas x^{α}, ou seja, |3|

$$\Box\, \bar{x}^{\alpha} = 0, \qquad 4.1$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \bar{x}^{\alpha}}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{VF}\,\partial_r\left(\frac{V\rho^2}{F}\,\partial_r\,\bar{x}^{\alpha}\right) + \nabla^2\,\bar{x}^{\alpha}\right] = 0, \qquad 4.2$$

sendo ∇^2 o operador de Laplace, em coordenadas esféricas, de valor,

$$\nabla^2\ \bar{x}^{\alpha} = -\,2\,\bar{x}^{\alpha} = -\,2r, \qquad \text{para } \alpha = 1. \qquad 4.3$$

Desta maneira, a 4.2 ficará:

$$\frac{1}{VF}\,\partial_r\left(\frac{V\,\rho^2}{F}\right) - 2r = 0, \qquad 4.4$$

pois no caso estático

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^{\alpha}}{\partial t^2} = 0 \qquad 4.5$$

Da 3.30 temos

$$VF = c\,\frac{d\rho}{dr}\,, \qquad 4.6$$

que, colocada na 4.4, resulta

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{dr}{d\rho}\left(\frac{V^2\rho^2}{c^2}\right)\right] - 2\,r = 0. \qquad 4.7$$

A 4.7, em face da 3.36, ficará:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{dr}{d\rho}\left(\rho^2 - \frac{2GM\,\rho}{c^2}\right)\right] - 2\,r = 0, \qquad 4.8$$

onde se observa que o termo $\frac{GM}{c^2}$ é o raio gravitacional |6|, que denotaremos por α.

A 4.8, após uma mudança de variáveis do tipo

$$\rho = \alpha + \alpha z, \qquad 4.9$$

ficará

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{dr}{dz}(z^2 - 1)\right] - 2\,r = 0, \qquad 4.10$$

que é uma equação de Legendre, con n = 1.

A solução da equação 4.10 é do tipo

$$r = C_o\, P_1\,(z) + C_1\, Q_1\,(z), \qquad 4.11$$

onde C_o e C_1 são constantes a determinar e P_1 (z) e Q_1 (z) são os polinômios de Legendre de primeira e segunda espécies, respectivamente, sendo |5|

$$P_1\,(z) = z \qquad 4.12$$

e

$$Q_1\,(z) = \frac{1}{2}\; z\ell_n \frac{z+1}{z-1} \qquad 4.13$$

Como, para z = 1, a 4.13 apresenta discontinuidade, a solução da equação 4.10 será

$$r = C_o\, z. \qquad 4.14$$

Fazendo $C_0 = \alpha$, a 4.14 fica

$$r = \alpha z, \tag{4.15}$$

o que, em face da 4.9, resulta

$$\rho = \alpha + r.$$

Desta forma, a 3.36 ficará

$$V^2 = c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha}\right). \tag{4.16}$$

Finalmente, a métrica dada pela 3.39 será

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha}\right) dt^2 - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha}\right) d\rho^2 - (r + \alpha)^2 \left[d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2 \right], \tag{4.17}$$

que se reduz à métrica clássica para um ponto infinitamente afastado da distribuição material.

5 - SOLUÇÃO LINEAR PARA O CASO ESTÁTICO

É possível encontrar soluções para as equações 2.19 no caso estático. Tais soluções foram propostas por A. Einstein em um método aplicável a campos, de massas com velocidades arbitrárias, onde se admite que as componentes do tensor métrico diferem pouco de seus valores relativos ao caso caso clássico. Admitiremos que tais componentes sejam da forma |10|.

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}, \tag{5.1}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ foi definido pela 2.9 e os $\gamma_{\alpha\beta}$ são pequenos, de tal forma que podemos omitir os termos do tipo

$$\gamma_{\alpha\beta}\ \partial\gamma_{\alpha\beta},$$

sendo os $\gamma_{\alpha\beta}$ independentes do tempo.

Tomando as equações 2.19, multiplicando-as por $g^{\alpha\gamma}$ e lembrando que |6|

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\gamma=0}^{3} g^{\alpha\gamma}\ g_{\alpha\gamma} = 4, \tag{5.2}$$

vem

$$R - \frac{1}{2} 4\ R = -\ KT. \tag{5.3}$$

De 5.3 concluímos que,

$$R = KT \qquad 5.4$$

e, substituindo na equação 2.19, encontramos

$$R_{\alpha\gamma} = - K(T_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} T). \qquad 5.5$$

Para uma determinação da métrica fora da distribuição material devemos ter |7|

$$R = 0 \qquad 5.6$$

e a 5.5 mostra-nos que, nestas condições,

$$T = 0 \qquad 5.7$$

resultando para a 5.5

$$R_{\alpha\gamma} = - K\, T_{\alpha\gamma}. \qquad 5.8$$

Introduzindo a coordenada

$$x^0 = ict, \qquad 5.9$$

onde i é a unidade imaginária, a métrica do espaço-tempo assumirá a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = c^2\, dt^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

A partir da 5.1 podemos obter as componentes contravariantes do tensor métrico, que serão |10|

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}. \tag{5.11}$$

Para encontrar uma solução aproximada das equações 5.8, vamos considerar o tensor de Ricci, em um sistema de coordenadas normais na forma,

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta\, \Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \partial_\rho\, \Gamma^\rho_{\alpha\beta}. \tag{5.12}$$

Calculando os símbolos de Christoffel de segunda espécie e lembrando a 5.1, temos,

$$\Gamma^\rho_{\alpha\rho} = \frac{1}{2}\, (\delta^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}) \left[\partial_\alpha\, \gamma_{\rho\sigma} + \partial_\rho\, \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma\, \gamma_{\alpha\rho}\right] \tag{5.13}$$

e

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, (\delta^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}) \left[\partial_\alpha\, \gamma_{\beta\sigma} + \partial_\beta\, \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma\, \gamma_{\alpha\beta}\right]. \tag{5.14}$$

Como é usual em Relatividade Geral, vamos considerar o delta de Kronecker na forma

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} -1, & \text{se } \alpha = \beta, \\ & \text{e} \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta, \end{vmatrix} \qquad 5.15$$

o que nos leva a impor a condição $\rho = \sigma$ nas 5.13 e 5.14 e ainda, negligenciando os termos da forma $\gamma^{\rho\sigma}\, \partial_\alpha\, \gamma_{\rho\sigma}$, teremos para estas expressões

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2}\, \partial_\alpha\, \gamma_{\rho\rho} \qquad 5.16$$

e

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, (\partial_\alpha\, \gamma_{\beta\rho} + \partial_\beta\, \gamma_{\alpha\rho} - \partial_\rho\, \gamma_{\alpha\beta}). \qquad 5.17$$

Escreveremos 5.8 na forma |10|:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} + \sum_{\rho=0}^{3} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{(\partial x^\rho)^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta\, \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 \gamma_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha\, \partial x^\rho} - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial^2 \gamma}{(\partial x^\rho)^2} - \sum_{\varepsilon} \frac{\partial^2 \gamma_{\rho\varepsilon}}{\partial x^\rho\, \partial x^\varepsilon} \right] \delta_{\alpha\beta} \right\} = -\, 2\, K\, T_{\alpha\beta}, \qquad 5.18$$

onde,

$$\gamma = \sum_{\rho=0}^{3} \gamma\rho\rho. \qquad 5.19$$

Introduzindo agora as quantidades |10|

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \gamma, \qquad 5.20$$

com

$$\gamma' = -\gamma, \qquad 5.21$$

teremos,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}\gamma' = \gamma'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \gamma. \qquad 5.22$$

Substituindo as 5.21 e 5.22 na 5.18, vem

$$- \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \sum_{\rho=0}^{3} \left\{ \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\beta}}{(\partial x^\rho)^2} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \gamma'}{(\partial x^\rho)^2} - \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta \partial x^\rho} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\rho} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x^\beta \partial x^\rho} - \right.$$

$$- \frac{\partial^2 \gamma'_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} + \frac{1}{2} \delta_{\beta\rho} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} - \left[\frac{\partial^2 \gamma'_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} - \sum_{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \gamma'_{\rho\varepsilon}}{\partial x^\rho \partial x^\varepsilon} + \frac{1}{2} \delta_{\rho\varepsilon} \frac{\partial^2 \gamma'_{\rho\varepsilon}}{\partial x^\rho \partial x^\varepsilon} \right) \right]$$

$$\left. \delta_{\alpha\beta} \right\} = - 2 K T_{\alpha\beta} \qquad 5.23$$

e, considerando 5.15, temos

$$\sum_{\rho=0}^{3}\left[\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\beta}}{(\partial x^\rho)^2}-\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta\,\partial x^\rho}-\frac{\partial^2\gamma'_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\rho}+\delta_{\alpha\beta}\sum_\varepsilon\frac{\partial^2\gamma'_{\rho\varepsilon}}{\partial x^\rho\,\partial x^\varepsilon}\right]=$$

$$=-2KT_{\alpha\beta} \qquad 5.24$$

A 5.24 pode ser simplificada considerando-se um sistema de coordenadas normais, no qual as quantidades a seguir sejam nulas, em face da aproximação considerada |10|

$$\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta\,\partial x^\rho}=\frac{\partial^2\gamma'_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\rho}=\frac{\partial^2\gamma'_{\rho\varepsilon}}{\partial x^\rho\,\partial x^\varepsilon}=0. \qquad 5.25$$

Desta forma, a 5.24 ficará

$$\sum_{\rho=0}^{3}\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\beta}}{(\partial x^\rho)^2}=-2KT_{\alpha\beta}, \qquad 5.26$$

ou, utilizando o operador de D'Alembert, |10|

$$\Box\gamma'_{\alpha\beta}=-2KT_{\alpha\beta}, \qquad 5.27$$

que são equações de ondas gravitacionais, |7|.

Para realizarmos a integração de 5.27, devemos considerar o seguinte |13|:

Dada uma função escalar ϕ, cujo D'Alembertiano é da forma

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = - C\lambda, \qquad 5.28$$

então esta função é dada por

$$\phi = - \frac{C}{4\pi}\int_{V'} \frac{\lambda\, d\, V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \qquad 5.29$$

como solução da 5.28.

Na 5.29 tem-se C como uma constante e λ como uma função do tipo

$$\lambda = \lambda\ (\vec{r}', t'), \qquad 5.30$$

onde

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \qquad 5.31$$

A integração realizada se baseia nas considerações de potencial retardado |3|.

Voltando à 5.27, temos

$$\gamma'_{\alpha\beta} = - \frac{K}{2\pi} \int_{V'} \frac{T_{\alpha\beta} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.32}$$

ou, observando a 2.17,

$$\gamma'_{\alpha\beta} = - \frac{4G}{c^2} \cdot \int_{V'} \frac{T_{\alpha\beta}\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \tag{5.33}$$

Em face das 5.19, 5.22 e 5.33, a 5.1 ficará:

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4G}{c^2} \int_{V'} \frac{T_{\alpha\beta}\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\rho=0}^{3} \gamma_{\rho\rho} ,} \tag{5.34}$$

que é a solução linear para determinar as componentes do tensor métrico no campo de uma distribuição material. Este método é válido para campo fraco e espaço levemente curvo.

Salientamos que a 5.33 e a 5.34 são válidas para determinação da métrica em pontos <u>exteriores</u> à distribuição material.

6 - ESTUDO DA MÉTRICA NO CAMPO DE UMA DISTRIBUIÇÃO MATERIAL EM ROTAÇÃO

Objetivando uma conclusão significativa da importância da Relatividade Geral para movimentos de satélites terrestres artificiais, vamos estudar a métrica no campo de uma distribuição material esquema fluído-perfeito, dotada de rotação uniforme.

Usando um sistema de referência geocêntrico, teremos

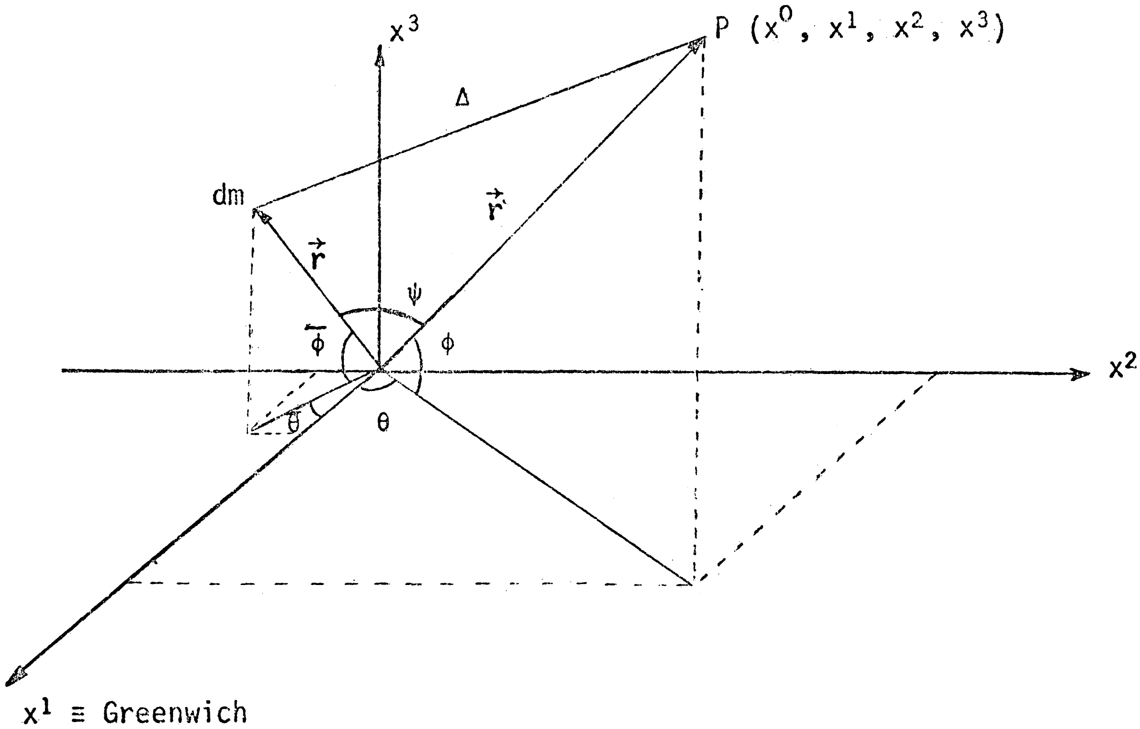

Fig. 2

sendo dm um elemento de massa da distribuição e P um ponto do campo onde se está estudando a métrica. Estes têm coordenadas no espaço-tempo, respectivamente

$$\begin{cases} x^0 = i\ c\ t \\ \bar{x}^1 = \bar{r} \cos \bar{\phi} \cos \bar{\theta} \\ \bar{x}^2 = \bar{r} \cos \bar{\phi} \operatorname{sen} \bar{\theta} \\ \bar{x}^3 = \bar{r} \operatorname{sen} \bar{\phi} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x^1 = r \cos \phi \cos \theta \\ x^2 = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ x^3 = r \operatorname{sen} \phi \end{cases} \qquad 6.1$$

onde consideramos a parte espacial em coordenadas esféricas.

A distância Δ entre P e dm pode ser determinada com a utilização dos polinômios de Legendre |4|

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^n P_n (\cos \psi), \qquad 6.2$$

onde

$$\cos \psi = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \bar{\phi} + \cos \phi \cos \bar{\phi} \cos (\theta - \bar{\theta}). \qquad 6.3$$

Tomando o comprimento de arco s como parâmetro de derivação, podemos escrever o elemento de volume $d\bar{V}$ como |6|

$$d\bar{V} = i \frac{dx^0}{ds} dV' = i \frac{dx^0}{ds} d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2\, d\bar{x}^3 = i \frac{dx^0}{ds} \bar{r}^2\, d\bar{r} \cos \bar{\phi}\, d\bar{\phi}\, d\bar{\theta}, \qquad 6.4$$

sendo $d\bar{V}$ o elemento do quadrivolume da expressão 5.32 e dV' o elemento de volume em coordenadas esféricas, que, pela integração, proporcionará o volume da distribuição material.

Sendo ainda Ω a velocidade angular de rotação da distribuição, podemos calcular as componentes da quadrivelocidade tangencial mediante

$$v_{\cdot} = \frac{d\overline{x}^{\alpha}}{dx^{o}}\,, \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \qquad 6.5$$

o que resulta |6|

$$\left\{\begin{array}{l} v_o = 1 \\ \\ v_1 = \dfrac{d\overline{x}^1}{icdt} = -\dfrac{i}{c}\,(-\,\Omega\overline{x}^2) = \dfrac{i\Omega}{c}\,\overline{r}\cos\overline{\phi}\,\mathrm{sen}\,\overline{\theta} \\ \\ v_2 = -\dfrac{i}{c}\,\Omega\overline{x}^1 = -\dfrac{i\Omega}{c}\,\overline{r}\cos\overline{\phi}\cos\overline{\theta} \\ \\ v_3 = 0 \text{ (eixo de rotação).} \end{array}\right. \qquad 6.6$$

Podemos agora escrever as componentes do tensor impulsão-energia, mediante a 2.15

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, v_{\alpha}\, v_{\beta} = \rho\,\frac{d\overline{x}^{\alpha}}{dx^{o}}\,\frac{d\overline{x}^{\beta}}{dx^{o}}\left(\frac{dx^{o}}{ds}\right)^2, \qquad 6.7$$

onde vamos admitir que a densidade ρ seja função apenas de $\bar{r}$ e $\bar{\phi}$,

$$\rho = \rho\,(\bar{r}, \bar{\phi}). \qquad 6.8$$

Observando as 6.6 e 6.7, teremos

$$\left.\begin{aligned}
T_{11} &= -\frac{\rho\Omega^2}{c^2}\,\bar{r}^2 \cos^2\bar{\phi}\ \mathrm{sen}\ \bar{\theta} \\
T_{12} = T_{21} &= \frac{\rho\Omega^2}{c^2}\,\bar{r}^2 \cos^2\bar{\phi}\ \mathrm{sen}\ \bar{\theta}\cos\bar{\theta} \\
T_{10} = T_{01} &= \frac{\rho i\Omega}{c}\,\bar{r}\cos\bar{\phi}\ \mathrm{sen}\ \bar{\theta} \\
T_{22} &= -\frac{\rho\Omega^2}{c^2}\,\bar{r}^2 \cos^2\bar{\phi}\cos^2\bar{\theta} \\
T_{20} = T_{02} &= -\frac{\rho i\Omega}{c}\,\bar{r}\cos\bar{\phi}\cos\bar{\theta} \\
T_{00} &= \rho,
\end{aligned}\right\} \qquad 6.9$$

sendo nulos todos os restantes. Observa-se também que o determinante principal da matriz formada pelas componentes deste tensor, é nulo, o que era de se esperar.

Tomando a 5.33, devemos considerar que:

a) dV' é o quadrivolume que será substituído por $d\overline{V}$, dado por 6.4;

b) $|\vec{r} - r'|$ é a distância entre P e dm, figura 2, que representamos por Δ.

Desta forma, a 5.33 resulta,

$$\gamma'_{\alpha\beta} = - \frac{4G}{c^2} \int_{\overline{V}} \frac{T_{\alpha\beta}\, d\overline{V}}{\Delta} , \qquad 6.10$$

sendo

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}\,(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, t - \frac{\Delta}{c}), \qquad 6.11$$

em face das considerações de potencial retardado. Observando as 6.2, 6.4 e 6.7, a 6.10 fica:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = - \frac{i4G}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\overline{V}} \rho \left(\frac{dx^0}{ds}\right) \frac{d\overline{x}^\alpha}{dx^0} \frac{d\overline{x}^\beta}{dx^0} \frac{1}{r} \left(\frac{\overline{r}}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)\overline{r}^2\, d\overline{r} \cos\overline{\phi}\, d\overline{\phi}\, d\overline{\theta} \qquad 6.12$$

Fazendo

$$\frac{ds}{dx^0} = i, \qquad 6.13$$

a 6.12 fica:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \frac{4G}{c^2 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \int_{V} \rho \, v_\alpha v_\beta P_n \, (\cos \psi) \bar{r}^{n+2} \, d\bar{r} \, \cos\bar{\phi} \, d\bar{\phi} \, d\bar{\theta}. \qquad 6.14$$

Os harmônicos aparentes, $P_n(\cos\psi)$, podem ser determinados pelo teorema da adição |5|, utilizando-se as funções associadas de Ferrer e Legendre,

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\text{sen } \phi) \, P_n(\text{sen } \bar{\phi}) + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\text{sen } \phi) P_n^m(\text{sen } \bar{\phi}) \cos m(\theta - \bar{\theta}), \qquad 6.15$$

onde

$$P_n^m(\text{sen } \phi) = \cos^m \phi \, \frac{d^m P_n \, (\text{sen } \phi)}{d(\text{sen } \phi)^m} \qquad 6.16$$

e

$$P_n^m(\text{sen } \bar{\phi}) = \cos^m \bar{\phi} \, \frac{d^m P_n \, (\text{sen } \bar{\phi})}{d(\text{sen } \bar{\phi})^m} . \qquad 6.17$$

Consideraremos apenas os primeiros termos da 6.15, fazendo, portanto, n = 1, o que não é proibido pelo fato de os termos seguintes serem negligenciáveis e lembrando ainda que as correções que estamos introduzindo às componentes do tensor métrico são pequenas. Por es tas considerações, a 6.14 ficará, em face das 6.15, 6.16 e 6.17,

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \frac{4G}{c^2 r} \left[\int_V \rho v_\alpha v_\beta \bar{r}^3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\bar{\phi} \cos\bar{\phi}\, d\bar{r}\; d\bar{\phi}\, d\bar{\theta} \; + \right.$$

$$\left. + \int_V \rho\, v_\alpha v_\beta \bar{r}^3 \cos\phi \cos^2\bar{\phi}\; \cos(\theta - \bar{\theta})\, d\bar{r}\; d\bar{\phi}\, d\bar{\theta} \right], \qquad 6.18$$

onde observamos que os únicos valores não nulos para esta expressão são aqueles para os quais α, β = 0, 1, 2, em virtude da 6.6.

As integrações devem obedecer aos seguintes limites:

- para o raio r da distribuição, de 0 a R, sendo R o raio médio da Terra;
- para a latitude $\bar{\phi}$, desde $-\pi/2$ a $+\pi/2$;
- para a longitude $\bar{\theta}$, de 0 a 2π.

Para $\alpha = \beta = 0$, a 6.18, em face dos valores da 6.6, fica,

$$\gamma'_{00} = \frac{4G}{c^2 r^2} \left[\int_V \rho \bar{r}^3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\bar{\phi} \cos\bar{\phi}\, d\bar{r}\; d\bar{\phi}\, d\bar{\theta} \; + \right.$$

$$\left. + \int_V \rho\, \bar{r}^3 \cos\phi \cos^2\bar{\phi}\; \cos(\theta - \bar{\theta})\, d\bar{r}\; d\bar{\phi}\, d\bar{\theta} \right]. \qquad 6.19$$

Observando a 6.8, podemos realizar de imediato, a integração em $\bar{\theta}$, o que dá

$$\gamma'_{00} = \frac{4G}{c^2 r^2} \operatorname{sen}\phi \int_0^M \bar{r} \operatorname{sen}\bar{\phi} \; dm, \qquad 6.20$$

lembrando que

$$\rho \, \bar{r}^2 \cos\bar{\phi} \, d\bar{r} \; d\bar{\phi} \, d\bar{\theta} = dm \qquad 6.21$$

e onde M é a massa da Terra.

Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ temos, pela 6.18, após a primeira integração,

$$\gamma'_{10} = \gamma'_{01} = \frac{i \; 2 \; G \; \Omega}{c^3 r^2} \operatorname{sen}\theta \cos\phi \int_0^M \bar{r}^2 \cos^2\bar{\phi} \; dm. \qquad 6.22$$

Analogamente, determinamos os outros valores que são

$$\gamma'_{02} \doteq \gamma'_{20} = \frac{i \; 2 \; G}{c^3 r^2} \cos\theta \cos\phi \int_0^M \bar{r}^2 \cos^2\bar{\phi} \; dm \qquad 6.23$$

e

$$\gamma'_{11} = - \frac{2 \; G \; \Omega}{c^3 r^2} \operatorname{sen}\phi \int_0^M \bar{r}^3 \operatorname{sen}\bar{\phi} \cos^2\bar{\phi} \; dm = \gamma'_{22}. \qquad 6.24$$

Vamos agora considerar as seguintes integrais |6|:

$$A_n = \frac{1}{MR^{n+2}} \int_0^M \bar{r}^{n+2} \cos^2 \bar{\phi} \operatorname{sen}\bar{\phi}\, dm = \begin{cases} 0, & \text{se } n=1, \\ -2/35, & \text{se } n=2. \end{cases} \qquad 6.25$$

$$B_n = \frac{1}{MR^{n+1}} \int_0^M \bar{r}^{n+1} \cos^2 \bar{\phi}\, dm = \begin{cases} 2/5, & \text{se } n=1, \\ 0, & \text{se } n=2, \end{cases} \qquad 6.26$$

sendo R o raio médio da Terra (6.371.229 m) e considerada agora uma distribuição material homogênea e rigorosamente simétrica. Uma vez que estamos a admitir apenas n = 1, as 6.22, 6.23 e 6.24 ficarão, respectivamente, mediante introdução do raio gravitacional |6|

$$\alpha = \frac{GM}{c^2};$$

$$\gamma'_{10} = \frac{i\, 4\, \alpha\, \Omega\, R^2}{5\, c\, r^2} \operatorname{sen}\theta \cos\phi = -\gamma'_{20} \qquad 6.27$$

e

$$\gamma'_{11} = \gamma'_{22} = 0. \qquad 6.28$$

Finalmente, observando a 5.34, determinamos as componentes do tensor métrico, utilizando os resultados obtidos. Tais componentes são:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = -1 \qquad 6.29$$

e

$$g_{10} = g_{01} = -g_{20} = -g_{02} = \frac{i\ 4\ \alpha\ \Omega\ \ R^2}{5\ c\ r^2}\ \text{sen}\theta\ \ \cos\phi, \qquad 6.30$$

sendo as restantes todas nulas.

Escrevendo na forma matricial as componentes deste tensor, temos

$$g = \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon\ \text{sen}\theta\ \ \cos\phi & -\ \varepsilon\ \text{sen}\theta\ \ \cos\phi & 0 \\ \varepsilon\ \text{sen}\theta\ \ \cos\phi & -1 & 0 & 0 \\ -\ \varepsilon\ \text{sen}\theta\ \ \cos\phi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad 6.31$$

onde fizemos

$$\varepsilon\ = i\ \frac{4\ \alpha\ \Omega\ \ R^2}{5\ c\ r^2}\ . \qquad 6.32$$

As já determinadas componentes do tensor métrico nos permitem encontrar as equações das geodésicas para o campo gravitacional em estudo, mediante |13|

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \qquad 6.33$$

onde os símbolos de Christoffel, de segunda espécie, são dados por 1.3.

O valor do determinante da matriz 6.31 é

$$g = 1 - 2\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \ \cos^2\phi$$

e podemos determinar as componentes contravariantes do tensor métrico mediante |13|

$$g^{\alpha\beta} = \frac{\text{cofator } g_{\alpha\beta}}{g}, \qquad 6.34$$

o que nos conduz a

$$\left.\begin{aligned}
g^{00} &= \frac{1}{2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi - 1}\\
g^{01} &= g^{10} = \frac{\varepsilon\,\text{sen}\theta\,\cos\phi}{2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi - 1}\\
g^{02} &= g^{20} = \frac{\varepsilon\,\text{sen}\theta\,\cos\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}\\
g^{11} &= \frac{1 - \varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}{2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi - 1}\\
g^{12} &= g^{21} = \frac{\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}\\
g^{22} &= \frac{1 - \varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}{2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi - 1}\\
g^{33} &= \frac{1 - \varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\phi}\\
g^{03} &= g^{30} = g^{13} = g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Calculando os símbolos de Christoffel de segunda espécie, encontramos

$$\Gamma^{o}_{01} = \Gamma^{o}_{10} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{2 - 4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}$$

$$\Gamma^{o}_{02} = \Gamma^{o}_{20} = -\frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi$$

$$\Gamma^{o}_{03} = \Gamma^{o}_{30} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}$$

$$\Gamma^{o}_{12} = \Gamma^{o}_{21} = \frac{-\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^{o}_{13} = \Gamma^{o}_{31} = \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^{o}_{22} = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}$$

$$\Gamma^{o}_{23} = \Gamma^{o}_{32} = \frac{-\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{1}_{10} = \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi}{2 - 4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}$$

$$\Gamma^{1}_{02} = \Gamma^{1}_{20} = \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi - 1}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = \frac{-\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30} = \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{2\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \frac{-\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10} = \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi - \varepsilon \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2 - 4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{4\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{1 - 2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}$$

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 2}$$

$$\Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{10} = \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \cos^3\phi - \varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2 - 4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}$$

$$\Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} = \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi - \varepsilon^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \cos^3\phi}{2 - 4\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi},$$

sendo os restantes todos nulos.

Podemos escrever a equação 6.33, para $\alpha = 0$, assim

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} = - \Gamma^0_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\gamma}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \qquad 6.36$$

e ainda, observando a 6.33, seu primeiro termo como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right) = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{(dx^0)^2} + \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{d^2 x^0}{ds^2} \qquad 6.37$$

Observando a 6.36 temos, finalmente

$$\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \frac{d^2\, x^\alpha}{(dx^0)^2} + \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{d^2 x^0}{ds^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\gamma}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \qquad 6.38$$

ou, ainda,

$$\frac{d^2\, x^\alpha}{(dx^0)^2} + \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{dx^\alpha}{dx^0} \Gamma^0_{\beta\gamma}\right) \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^\gamma}{dx^0} = 0 \qquad 6.39$$

Usando a notação de Newton e lembrando que

$$x^0 = i\, c\, t,\ x^1 = r,\ x^2 = \phi \text{ e } x^3 = \theta,$$

temos,

$$\boxed{\ddot{x}^\alpha + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \dot{x}^\alpha \Gamma^0_{\beta\gamma})\, \dot{x}^\beta\ \dot{x}^\beta = 0 \qquad \alpha = 1, 2, 3.} \qquad 6.40$$

A 6.40 nos permite determinar as equações das geodésicas do campo gravitacional em estudo. Considerando um satélite em movimento no campo gravitacional terrestre, sendo a Terra descrita por um esquema fluido-perfeito, temos as equações de trajetória dadas pelas equações das geodésicas deste espaço.

Tais equações são apresentadas a seguir:

$$\Big[\ddot{r} + \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi}{1 - 2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}\dot{r} + \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi - 1}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{\phi} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{\theta} + \frac{2\varepsilon^4 \operatorname{sen}^4\theta \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi - 2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r}\dot{\phi} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r}\dot{\theta} - \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{1 - 2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}(\dot{r})^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}(\dot{r})^2\dot{\phi} - \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}(\dot{r})^2\dot{\theta} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{\phi}\dot{\theta} - \frac{2\varepsilon \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r}(\dot{\phi})^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r}\dot{\phi}\dot{\theta} = 0$$

$$\Big[\ddot{\phi} + \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi - \varepsilon \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r} - \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3\theta \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{\phi} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{1 - 2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}\dot{\theta} + \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{2\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1}\dot{r}\dot{\phi} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \cos\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi} (\dot{\phi})^2 + \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}\theta \ \cos\theta \ \cos^2\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi \ - 1} \dot{\phi}\,\dot{\theta} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \cos\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi} \dot{r}\dot{\phi} + \varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \cos\phi \ (\dot{\phi})^2 -$$

$$- 2 \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}\theta \ \cos\theta \ \cos^2\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi \ - 1} \dot{\phi}\,\dot{\theta} + \frac{\varepsilon \ \cos\theta \ \cos\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi \ - 1} \dot{r}\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \dot{r} \ (\dot{\phi})^2}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi - 1} - \frac{\varepsilon \ \ \mathrm{sen}\theta \ \ \mathrm{sen}\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi - 1} (\dot{\phi})^3 + \frac{\varepsilon \ \cos\theta \ \ \cos\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi - 1} (\dot{\phi})^2\dot{\theta} = 0$$

$$\Bigg[\ddot{\theta} + \frac{\varepsilon^3 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos\theta \ \cos^3\phi \ - \varepsilon \ \cos\theta \ \cos\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi} \dot{r} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \ \cos\theta \ \cos\phi \ - \varepsilon^3 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos\theta \ \cos^3\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi} \dot{\phi} - \frac{\varepsilon^2 \ \ \mathrm{sen}^2\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \cos\phi}{1 - 2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi} \dot{r}\,\dot{\theta} +$$

$$+ \varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \mathrm{sen}\phi \ \cos\phi \ \dot{\phi}\,\dot{\theta} - \frac{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}\theta \ \cos\theta \ \cos^2\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi \ - 1} (\dot{\theta})^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}\theta \ \mathrm{sen}\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \cos^2\phi \ - 1} \dot{r}\,\dot{\phi}\,\dot{\phi} - \frac{\varepsilon \ \ \cos\theta \ \cos\phi}{2\,\varepsilon^2 \ \mathrm{sen}^2\theta \ \ \cos^2\phi \ - 1} \dot{r}\,(\dot{\theta})^2 -$$

$$- \frac{\varepsilon \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{2\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1} (\mathring{\phi})^2 . \mathring{\theta} + \frac{\varepsilon \cos\theta \cos\phi}{2\,\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi - 1} \mathring{\phi} (\mathring{\theta})^2 = 0$$

CONCLUSÃO

Para o caso Clássico, devemos ter as componentes do tensor métrico iguais ao delta de Kronecker ($g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$) quando se utiliza um sistema de coordenadas cartesianas.

O estudo da métrica, do ponto-de-vista da Relativididade Geral, mostra-nos então que há uma diferença entre as componentes do tensor métrico em relação às do caso Clássico e que tais discrepâncias são pequenas, fato que deu origem a um outro aspecto nas equações das geodésicas do campo gravitacional terrestre, mesmo supondo, na hipótese simplificativa, que a Terra é descrita por um esquema fluido-perfeito.

O passo seguinte a este trabalho seria o de escrever as componentes do tensor impulsão-energia de maneira mais realista e determinar as equações das geodésicas, considerando perturbações que aqui foram negligenciadas, pois tais equações expressam a trajetória de corpos no campo gravitacional terrestre, e isto pode ser aplicado a satélites artificiais, assunto de grande interesse para as Ciências Geodésicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

|01| ARFKEN, G, Mathematical Methods for Physicists, N. York, Academic Press.

|02| EINSTEIN,. A., Die Feldgeichungen der Gravitation, Berlin Sitzungsber, 1915.

|03| FOCK, V, The Theory of Space, Time and Gravitation, N. York, Pergamon Press, 1959.

|04| GEMAEL, C., Spherical Harmonics in Geodesy, Curitiba, Boletim da Universidade Federal do Paraná, Geodésia, 12, 1970.

|05| HOBSON, E.W., Spherical and Ellipsoidal Harmonics, N. York, Chelsea 1965.

|06| KRAUSE, H.G.L., Relativistic Perturbation Theory of an Artificial Satellite in an Arbitrary Orbit about the Rotating Oblated Earth Spheroid and the Time Dilatation Effect for this Satellite. In: Veis, G. ed. The Use of Artificial Satellites for Geodesy (69 - 107).

|07|. LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. Théorie du Champ. Moscou, La Paix, 1967.

|08| LICHNEROWICZ, A., Elements de Calcul Tensoriel. Paris, Armand Colin, 1950.

|09| MAVRIDÈS, S. Algèbre et Analyse Tensoriel; Structure des Varietés à Conexion Affine. Paris, C.E.M.A., 1959.

|10| PAULI, W. Theory of Relativity, London, Pergamon, 1958.

|11| SITTER, W. de Planetary Motion and the Motion of the Moon According to Einstein's Theory. Amsterdan, Proc.Acad.Sci., 1916.

|12| THIRRING, H. & LENSE, J. Über den Einfluse der Eigen-rotation der Zentralkorper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitations Theorie. Phys.Zs, 1918.

|13| TONNELAT, M.A. Les Principes de la Theorie Electromagnetique et de la Relativitē. Paris, Masson, 1959.

|14| VAYNROT, V.I., The Earth External Gravity Field. Geodesy and Aerophotography, 6: 386 - 387, 1968.