Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Sociais Aplicada
Departamento de Economia

Análise do Modelo de Solow e Aplicações Macroeconômicas

Autor: Rafael Paolini
Orientador: Prof. Armando Vaz Sampaio

Curitiba-PR
Junho / 2015

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Departamento de Economia

Rafael Paolini

Análise do Modelo de Solow e Aplicações Macroeconômicas

Curitiba-PR
2015

RAFAEL PAOLINI

Análise do Modelo de Solow e Aplicações Macroeconômicas

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Economia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. ARMANDO VAZ SAMPAIO

Curitiba-PR

2015

RAFAEL PAOLINI

Análise do Modelo de Solow e Aplicações Macroeconômicas

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Economia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Economia.

Aprovada em 22 de Junho de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. ARMANDO VAZ SAMPAIO - Orientador

UFPR

Prof. Dr. MAURÍCIO VAZ LOBO BITTENCOURT

UFPR

Prof. Dr. FERNANDO MOTTA CORREIA

UFPR

Curitiba-PR

2015

Dedicatória

Dedico ao meu professor orientador Dr. Armando Vaz Sampaio, que teve paciência, incentivou-me a buscar novos conhecimentos e não poupou esforço ao me ajudar a concluir este trabalho.

Citação

"Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bussola, nunca tendo a certeza do seu destino." (Leonardo da Vinci)

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais Rogério Paolini e Viviane Riedel de Oliveira Paolini, que me ensinaram que a vida não é nada sem estudo e batalharam muito para priorizar a minha educação ao longo de toda a minha vida.

À minha irmã Jéssica Paolini e a minha tia Aurora Farias de Souza, pelo apoio incondicional e carinho.

Aos colegas de turma, pelas horas de estudo e preocupação dispendidas durantes os vários anos de curso, assim como pelos bons momentos de descontração.

Ao meu chefe e colega de trabalho João Matias Loch, que sempre incentivou os seus funcionários, concedendo dias livres para estudo em vésperas de provas.

Ao professor orientador Dr. Armando Vaz Sampaio, pelas horas de dedicação e atenção, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

À minha namorada Érica Ramos Budaruiche, que prestou o carinho e motivação indispensável na etapa final da minha graduação e na elaboração deste trabalho.

Lista de Figuras

2.1 O Modelo de Solow-Swan 10

3.1 O Modelo de Solow-Swan com Progresso Tecnológico 18

4.1 Consumo e Poupança per Capita 22
4.2 Consumo Per capita durante transição para seu nível da regra de ouro . . . 25
4.3 Crescimento Convergente 27
4.4 Crescimento Convergente Condicional 31

5.1 Política Fiscal no Modelo de Solow-Swan 42
5.2 Isóclina $k(t) = 0$ 49
5.3 Isóclina $b(t) = 0$ 51
5.4 Diagrama de fase 52
5.5 Não Verificação da Equivalência Ricardiana no Modelo de Solow-Swan . . 53

Sumário

Agradecimentos **v**

Lista de Figuras **vi**

Resumo **ix**

Abstract **x**

1 Introdução **1**

2 Modelo de Solow-Swan **4**

2.1 Principais Funções do Modelo de Solow-Swan 4

2.2 Ausência de Progresso Tecnológico 7

3 Incorporação do Progresso Tecnológico **14**

4 Propriedades do Modelo de Solow-Swan **19**

4.1 A Regra de Ouro da Acumulação de Capital 19

4.2 A Dinâmica de Transição e Convergência 26

4.3 A velocidade de Ajustamento 32

5 Aplicações Macroeconômicas **37**

5.1 Política Fiscal no modelo de Solow 37

5.2 Financiamento via Tributos 47

5.3 Não verificação de Equivalência Ricardiana 52

6 Conclusão **58**

A Primeiro Apêndice **61**

B Segundo Apêndice **64**

Referências Bibliográficas **67**

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar, de maneira formal, a importância do Modelo de Solow-Swan no estudo das diferenças de desenvolvimento econômico entre países e suas aplicações macroeconômicas. Essa demonstração se deu através da exposição e resolução das fórmulas do Modelo de Solow-Swan, do Modelo de Solow-Swan com Progresso Técnico, da regra de Ouro da Acumulação de Capital, da Dinâmica de Transição e Convergência, do Modelo de Solow-Swan com Capital Humano e das Políticas Fiscais. Através desta demonstração, é possível verificar que o Modelo de Solow-Swan responde as questões relativas às diferenças de desenvolvimento entre países e que suporta o estudo de questões macroeconômicas atuais, como o financiamento do gasto do governo via tributos ou via endividamento.

Palavras-chave: Modelo de Solow-Swan, teoria do crescimento, polútica fiscal.

Abstract

The aim of this study is to formally demonstrate the importance of the Solow-Swan Model in the assessment of the differences in economic development among countries and its macroeconomic applications. This demonstration is achieved through the presentation and solution of the Solow-Swan Model, the Solow-Swan Model with Technological Progress, the Golden Rule of Capital Accumulation, the Transitional Dynamics and Convergence, the Solow-Swan Model with Human Capital and Fiscal Policy in the Solow Model formulas. Though this analysis, it is possible to demonstrate the Solow-Swan Model answers questions related to the differences in development among countries and assists in the study of current macroeconomic issues, such as the financing of government expenses through taxes or running into debt.

Keywords: Solow-Swan Model, growth theory, fiscal policies.

Capítulo 1

Introdução

No ano de 2013, o país que apresentava o maior Produto Interno Bruto (PIB) per capita, ajustado pela Paridade do Poder de Compra (PPC), foi o Qatar. O valor do PIB per capita (PPC) apresentado pelo Qatar foi de $136.727.. Neste mesmo ano, o PIB per capita (PPC) da Nigéria foi de apenas $916. Observa-se, então, que o PIB per capita (PPC) da Nigéria representou apenas 0,67 % do PIB per capita (PPC) do Qatar no ano de 2013 (THE WORLD BANK, 2015).

A primeira impressão observada, ao analisar dados apresentados no parágrafo acima, é o questionamento do porquê há essa grande variação entre a renda dessas economias. Através desta curiosidade natural ao deparar-se com tais dados, percebe-se que, como afirmado por Jones (2000, p. 3), as questões mais importantes do crescimento e do desenvolvimento econômico se manifestam naturalmente.

Desta forma, as questões relacionadas ao crescimento e ao desenvolvimento econômico dos países sempre preocuparam os economistas. Essa preocupação deve-se à grande ambição humana de melhorar o seu padrão de vida atual e à correlação entre altos padrões de renda e altos índices de qualidade de vida (Acemoglu, 2009, p. 7).

De acordo com Acemoglu (2009, p. 8), entender o porquê de alguns países serem tão ricos e outros tão pobres é um dos mais importantes, senão o mais importante desafio no campo da ciência social. Este estudo é importante porque as diferenças de renda têm grandes consequências no bem-estar da população em geral, assim como para o entendimento de como funcionam as economias das diferentes nações e as suas falhas.

Ainda, Jones (2000, p. 3) afirma que um pré-requisito para melhores políticas econômicas é um melhor entendimento econômico. Desta forma, observa-se que com o entendimento das diferenças nas economias dos países, passamos a entender de que forma estas funcionam, e assim, podemos conduzir melhores políticas a fim de se obter uma melhor condição de bem-estar social.

Desta maneira, Robert Solow publicou, em 1956, um artigo sobre crescimento e desenvolvimento econômico, intitulado "A Contribution to the Theory of Economic Growth". Neste artigo, Solow apresenta um modelo para explicar os diversos fatos estilizados observados a respeito dos dados referentes ao crescimento e desenvolvimento de diversos países.

Ressalta-se que, como afirmado por Jones (2000, p. 2), os economistas não podem executar experiências controladas para os seus estudos. Desta forma, a abordagem econômica é uma sucessão de observações de fatos reais, e então há a teoria que busca a explicação de tais fatos. O próprio Solow afirmou:

> "Toda teoria depende de hipóteses que não são totalmente verdadeiras. É isso que a faz teoria. A arte de bem teorizar é fazer as inevitáveis hipóteses simplificadoras de tal maneira que os resultados finais não sejam muito sensíveis". (Solow, 1956, p. 65).

Deste modo, o modelo desenvolvido por Solow apresenta diversas hipóteses simplificadoras e a princípio aparenta ser simples. Entretanto, este modelo é a base para os mais modernos modelos de crescimento sustentável de longo prazo conhecidos atualmente.

Ainda, observa-se que o Modelo de Solow apresentou diversas explicações de como as variáveis de crescimento econômico interagiam no longo prazo. Há, inclusive, sustentação empírica para grande parte dessas explicações, conforme verificar-se-á no decorrer deste trabalho.

Assim, de posse do entendimento de como as variáveis econômicas interagem em uma trajetória de crescimento econômico, pode-se então estudar os efeitos de políticas macroeconômicas nestas variáveis. Ainda, através do entendimento de como funcionam as políticas macroeconômicas, há então a possibilidade de ajustá-las de acordo com os objetivos do policy-maker, com a finalidade de um aumento no bem-estar da população, através de um aumento da renda daquela população.

O objetivo deste estudo é analisar formalmente o modelo sugerido por Robert Solow de crescimento sustentável de longo prazo dos países, assim como as consequências de políticas fiscais de acordo com o modelo. Objetiva-se, também, através da análise de políticas fiscais, testar a equivalência ricardiana neste modelo. Pretende-se, desta forma, responder às seguintes questões: de que forma as taxas de crescimento dos países se comportam, segundo o Modelo de Sollow ? Quais as variáveis que alteram as taxas de crescimento dos países, de acordo com o Modelo de Sollow ? Quais são as aplicações do Modelo de Solow em políticas macroeconômicas ? A equivalência ricardiana é verificada no modelo de Solow?

Para atingir estes objetivos, as equações pertencentes ao Modelo de Solow-Swan serão estudadas, de maneira formal, refazendo-se todos os passos e deduções utilizadas, para possibilitar uma análise de todas as definições do modelo. Serão apresentamos, também, desdobramentos do primeiro modelo proposto, acrescentando-se o progresso tecnológico e as contas do governo.

Desta forma, este trabalho será dividido em quatro partes. A primeira parte tratará das deduções do Modelo de Solow-Swan básico. Já no segundo capítulo, será acrescentado o progresso tecnológico. Haverá um terceiro capítulo tratando sobre as propriedades mais importante verificadas. No quarto e último capítulo serão discutidas as aplicações macroeconômicas do modelo, assim como a verificação da equivalência ricardiana no Modelo de Solow-Swan.

Capítulo 2

Modelo de Solow-Swan

O modelo de crescimento neoclássico foi desenvolvido independentemente; por Solow (1956) e Swan (1956). Esse modelo foi proposto em contrapartida ao modelo de Harrod-Domar (1939), no qual acreditava-se haver crescimento em um único equilíbrio.

O modelo de Solow-Swan rompeu essa característica de equilíbrio único, ao não considerar, como seu predecessor, uma função de produção do tipo Leontief, caracterizada por proporções fixas de capital e trabalho.

Assim, veremos no decorrer do capítulo, as funções utilizadas por Solow para explicar as variáveis macroeconômicas de crescimento, assim como para romper com o conceito de crescimento "no fio da navalha", previsto pelo modelo anterior.

2.1 Principais Funções do Modelo de Solow-Swan

O elemento central dessa teoria diz respeito a função de produção agregada, que possui a seguinte forma geral:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), t] \tag{2.1}$$

onde:

Y(t) representa o produto no período t;

K(t) representa capital no período t;

L(t) representa trabalho no período t.

Observa-se que o índice t, que aparece separadamente na função, tem o objetivo de indicar que a tecnologia é constante ao longo do tempo.

Supõe-se que a empresa atua em mercado competitivo, o que implica que a função de produção apresenta retornos de escala constantes. Desta forma, ao identificar a apresentação de retornos de escala, podemos classificar a função de produção utilizada no modelo como uma função linear e homogênea. Assim, observa-se a primeira propriedade da tecnologia (P1):

$$F[\lambda K(t), \lambda L(t), t] = \lambda F[k(t), L(t), t], \qquad \lambda > 0 \tag{P1}$$

Assume-se, também, que as famílias consumem uma fração constante do produto e poupam o restante. Desta forma, a poupança agregada da economia é:

$$S(t) = sY(t) \qquad 0 < s < 1 \tag{2.2}$$

Observa-se que "s" representa a propensão a poupar, que é constante e assumida como exógena. Considera-se, ainda, que a economia é fechada, ou seja, o produto é alocado entre consumo, $C(t)$, e investimento , $I(t)$, conforme demonstrado abaixo:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{2.3}$$

Assume-se, por enquanto, que o consumo do governo é zero. Assim, o investimento bruto agregado é a soma do investimento voltado para a substituição do capital depreciado, $\delta K(t)$, onde δ representa uma taxa de depreciação constante, e a variação líquida do estoque de capital, $\dot{K}(t)$:

$$I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t) \tag{2.4}$$

Considera-se que a oferta de trabalho é exógena, mas a população apresenta uma taxa de crescimento exponencial constante e igual a n_L:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L \Leftrightarrow L(t) = L(0)e^{n_L t} \tag{2.5}$$

Onde pode-se normalizar L(0)=1.

Observa-se, então, que Solow apresentou uma função de produção em que os coeficientes técnicos não são fixos, de modo que a relação produto-capital é endógena ao sistema. Essa definição garante que, diferentemente do modelo de crescimento proposto anteriormente por Harrod e Domar, houvesse crescimento em infinitas possibilidades de equilíbrio.

Esse foi um grande avanço quanto a teoria de Harrod-Domar, que considerava coeficientes de capital e trabalho fixos, desta forma a relação produto-capital seria constante. Seguindo esse pressuposto, o crescimento só ocorreria em equilíbrio a uma determinada e única taxa. A função de produção e as definições do Modelo de Solow romperam com essa visão e assim, abriram a possibilidade de crescimento em infinitas taxas.

2.2 Ausência de Progresso Tecnológico

No modelo de Solow sem progresso tecnológico, considera-se que a tecnologia seja fixa ao longo do tempo. Portanto, a função de produção (2.1) não irá depender diretamente do tempo, e será representada da seguinte forma:

$$Y(t) = F[K(t), L(t)] \tag{2.6}$$

Além da homogeneidade linear (P1), que garante retornos constantes à escala, a função de produção também cresce a taxas decrescentes com relação aos dois fatores de produção. Desta forma, observa-se a segunda propriedade adotada (P2):

$$F_K,\ F_L > 0;\ F_{KK}, F_{LL} < 0,\ F_{KL} > 0 \tag{P2}$$

Ainda, a suposição mais polêmica é de que $F(.)$ obedece a chamada condição de Inada, que assegura uma boa propriedade a respeito da curvatura próxima a origem (quando K ou L são iguais a zero), e no limite (quando K ou L tendem ao infinito):

$$\lim_{k\to 0} F_K = \lim_{L\to 0} F_L = +\infty,\ \lim_{k\to\infty} F_K = \lim_{L\to\infty} F_L = 0 \tag{P3}$$

Desta forma, o modelo de Solow consiste das equações (2.2) a (2.5,) mais a identidade entre poupança e investimento, $S(t) = I(t)$.

Como a força de trabalho cresce ao longo do tempo, é impossível alcançar um equilíbrio com relação ao produto e capital. Mas esse problema é resolvido facilmente ao considerar que todas as variáveis sejam medidas em termos per capita, também denominada de "forma intensiva". Considera-se o seguinte exemplo: definimos, $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$, $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, etc.

Assim, o modelo pode ser condensado a partir de uma única equação diferencial em relação ao estoque de capital per capita, cuja dedução é apresentada a seguir:

$$I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t) \tag{2.7}$$

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) \tag{2.8}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = \frac{S(t)}{L(t)} - \delta \frac{K(t)}{L(t)} \tag{2.9}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = \frac{sY(t)}{L(t)} - \delta \frac{K(t)}{L(t)} \tag{2.10}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = sy(t) - \delta k(t) \tag{2.11}$$

Sabe-se que a função de produção na forma intensiva, poderá ser expressa como:

$$Y(t) = F[K(t), L(t)] \tag{2.12}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = F[\frac{K(t)}{L(t)}, 1] \tag{2.13}$$

$$y(t) = f(k(t)) \tag{2.14}$$

Dessa forma, é possível expressar a equação (2.11), da seguinte forma:

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = sf(k(t)) - \delta k(t) \tag{2.15}$$

É necessário, então, deixar o lado esquerdo da equação (2.15) em termos de variáveis per capita. Para isso, tem-se que:

$$\frac{d\frac{K(t)}{L(t)}}{dt} = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} \tag{2.16}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{2.17}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)n_L \tag{2.18}$$

Dessa forma:

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = \dot{k}(t) + k(t)n_L \tag{2.19}$$

Substituindo a equação (2.19) na equação (2.15), tem-se que:

$$\dot{k}(t) + k(t)n_L = sf(k(t)) - \delta k(t) \tag{2.20}$$

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \delta k(t) - k(t)n_L \tag{2.21}$$

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n_L)k(t) \tag{2.22}$$

A partir da equação (2.22), é possível fazer um diagrama de fase em relação a $k(t)$ e analisar diversas propriedades do modelo.

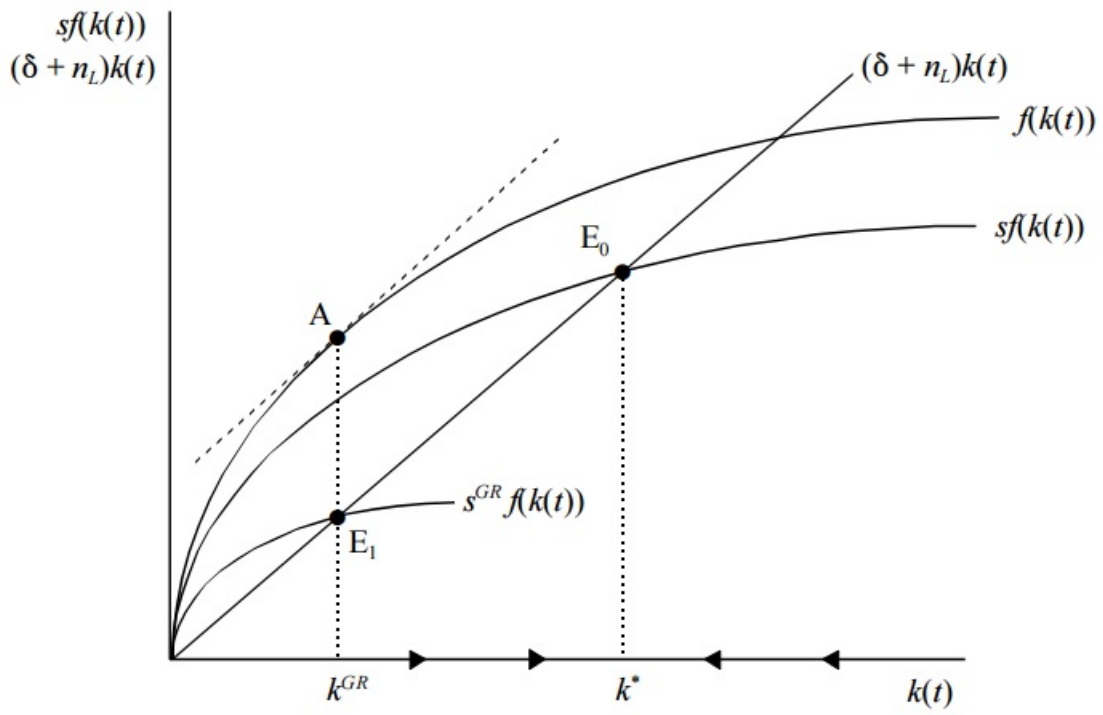

Figura 2.1: O Modelo de Solow-Swan
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002)

Na Figura 2.1 é apresentada uma função linear, representado por $(\delta + n_L)k(t)$, que informa a quantidade de investimento necessário para substituir o capital já exaurido e dotar cada trabalhador com a mesma quantidade de capital. Observa-se que esta função é linear e positiva pois o termo n_L cresce a uma taxa exógena e constante.

Ainda em relação à Figura 2.1, observa-se que a curva que representa a função de produção, $f(k(t))$, apresenta este formato devido às propriedades P1, P2 e P3. A propriedade P1 garante retornos de escala. A propriedade P2 demonstra que há retornos decrescentes de escala, ou seja, retornos positivos, porém cada vez menores. Já as

condições de Inada, propriedade P3, garante que quando $f(k(t))$ é próxima de zero, a curva apresenta o aspecto vertical, tem aspecto côncavo, e quando tende ao infinito torna-se achatada.

Desta forma, como a taxa de poupança é uma constante "s", a curva de poupança per capita tem a mesma forma que a função de produção da forma intensiva, conforme demonstrado na Figura 2.1, acima.

Assim, o equilíbrio é obtido quando $\dot{k}(t) = 0$, representado no ponto E_0 da Figura 2.1. Constata-se que esse equilíbrio é estável e único, sendo que a magnitude do capital no equilíbrio é representado por $k(t) = k^*$.

Ressalta-se, então, algumas das propriedades desse equilíbrio E_0, onde o $k(t)$ é constante e igual a k^*:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \tag{2.23}$$

Fazendo-se a transformação logarítmica e a diferencial em relação ao tempo, da equação (2.23), observa-se que:

$$ln(k(t)) = ln(K(t)) - Ln(L(t)) \tag{2.24}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{2.25}$$

Portanto, tem-se que em E_0, na figura 2.1:

$$0 = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \quad ou \quad \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L \tag{2.26}$$

Desta forma, a expressão (2.26) informa que, no equilíbrio, o estoque de capital deve crescer na mesma taxa que a força de trabalho.

Ainda, a partir da função de produção na forma intensiva, no equilíbrio tem-se que: $y^* = f(k^*)$, onde y^* será constante e terá a seguinte propriedade:

$$y^* = \frac{Y(t)}{L(t)} \tag{2.27}$$

Fazendo-se a transformação logarítmica e a diferencial da equação (2.27):

$$ln(y^*) = ln(Y(t)) - ln(L(t)) \tag{2.28}$$

$$\frac{\dot{y}^*}{y^*} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = 0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L \tag{2.30}$$

Desta forma, a equação (2.30) demonstra que a taxa de crescimento do produto é igual a taxa de crescimento da força de trabalho.

É possível, ainda, analisar como é o crescimento da poupança e investimento no ponto de equilíbrio, E_0 da figura 2.1. Sabe-se que:

$$S(t) = sY(t), \qquad 0 < s < 1 \tag{2.31}$$

Fazendo-se a transformação logarítmica e a diferencial da expressão (2.31):

$$ln(S(t)) = ln(s) - ln(Y(t)) \tag{2.32}$$

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \tag{2.33}$$

Sabendo-se que $S(t) = I(t)$, constata-se que:

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = n_L \tag{2.34}$$

Assim, a trajetória de crescimento balanceado ("balanced growth") no ponto de equilíbrio E_0, a partir das equações (2.26), (2.30) e (2.34), será:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L \tag{2.35}$$

Como a taxa de crescimento da população é exógena, a taxa de crescimento de longo prazo da economia é determinada exogenamente e portanto não pode ser influenciada pela política governamental ou pelo comportamento do governo.

Ressalta-se, ainda, que nesta forma do modelo não há crescimento da renda per capita, tendo em vista que a taxa de crescimento da renda é igual a taxa de crescimento da população. Assim, o produto que será gerado a mais, será totalmente utilizado para satisfazer o aumento da população, para que a renda per capita não se altere.

No próximo capítulo apresenta-se a primeira extensão do modelo de Solow-Swan, a incorporação do progresso tecnológico.

Capítulo 3

Incorporação do Progresso Tecnológico

Primeiramente, observa-se que a mudança técnica pode ser "embodied" ou "disembodied". Mudança técnica "embodied" somente é relevante para adquirir novos equipamentos ou trabalhadores, portanto não afeta a produtividade dos fatores de produção existentes. Já a mudança técnica "disembodied" está presente independentemente da mudança dos fatores de produção, de modo que as isoquantas da função de produção se deslocam, afastando-se da origem à medida em que o tempo avança (Heijdra e Ploeg, 2002).

A razão para esse deslocamento diz respeito à melhoria das técnicas ou organização, que faz crescer a produtividade dos novos ou antigos fatores de produção. Deste modo, este trabalho irá focar-se no progresso técnico "disembodied".

Pode-se representar diferentes casos de mudanças técnicas 'disembodied", que aumentam os fatores, escrevendo-se a função de produção (2.1) da seguinte forma:

$$Y(t) = F[A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)] \tag{3.1}$$

Onde $A_K(t)$ e $A_L(t)$ dependem somente do tempo, e $A_K(t)K(t)$ e $A_L(t)L(t)$, são conhecidos como "capital efetivo" e "trabalho efetivo", respectivamente.

Com relação ao progresso técnico, poderá haver três situações:

(a) Devido ao aumento da produtividade do trabalho: $\dot{A}_K(t) = 0$ e $\dot{A}_L(t) > 0$

(b)Devido ao aumento da produtividade do capital: $\dot{A}_K(t) > 0$ e $\dot{A}_L(t) = 0$

(c) Devido ao aumento da produtividade dos dois insumos: $\dot{A}_K(t) = \dot{A}_L(t) > 0$

Observa-se que há três conceitos de neutralidade no processo de avanço tecnológico existente na literatura. A mudança técnica pode ocorrer na seguinte forma:

(a) Neutralidade de Harrod ocorre se a participação relativa dos insumos, $\frac{F_K K}{F_L L}$, é constante ao longo do tempo, para uma dada razão capital-produto, $\frac{K}{Y}$;

(b) Neutralidade de Hicks ocorre se essa participação é constante ao longo do tempo, para uma dada razão capital-trabalho, $\frac{K}{L}$; e

(c) Neutralidade de Solow ocorre se essa participação é constante ao longo do tempo, para uma dada razão trabalho-produto $\frac{L}{Y}$.

Em termos da equação (3.1), os três casos correspondem respectivamente a: $A_K(t) = 1$, $A_K(t) = A_L(t)$ e $A_L(t) = 1$.

Quando a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, os três conceitos de neutralidade são iguais (Heijdra e Ploeg, 2002). Para o caso de uma função de produção que não seja do tipo Cobb-Douglas, os diferentes conceitos de neutralidade tem diferentes implicações para o crescimento balanceado (”balanced growth”).

Por exemplo, o progresso técnico deve apresentar neutralidade de Harrod ($A_K(t) = 1$ *e* $A_L(t) > 1$, aumento do trabalho) para que o modelo tenha um equilíbrio com uma taxa de crescimento constante.

No equilíbrio deve-se ter uma razão capital-produto, $\frac{K}{Y}$, constante, e é possível mostrar que para formas de progresso técnico que não apresentem a neutralidade de Harrod, a participação de um dos fatores tende a zero se a razão capital-produto for constante (Heijdra e Ploeg, 2002).

Portanto, se deseja-se um crescimento balanceado e considera-se uma elasticidade de substituição não unitária entre capital e trabalho, deve-se assumir que o progresso técnico apresente neutralidade de Harrod. Para fins deste trabalho, assume-se tal tipo de neutralidade.

A função de produção pode ser escrita como:

$$Y(t) = F([K(t), N(t)]) \tag{3.2}$$

Onde N(t) mede o trabalho efetivo ($N(t) \equiv A(t)L(t)$).

Assume-se que o progresso técnico ocorre a uma taxa exponencial constante: [1]

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_A; \qquad A(t) = A(0)e^{n_A t} \tag{3.3}$$

Como a força de trabalho cresce a taxa exponencial constante, n_L, de acordo com a equação (2.30), o trabalho efetivo cresce a taxa exponencial constante de $n_L + n_A$. Desta forma, tem-se que:

$$N(t) \equiv A(t)L(t) \tag{3.4}$$

[1] $A(t) = A(0)e^{n_A t}$
$lnA(t) = lnA(0) + n_A t$
$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_A$

Aplicando-se a transformação logarítmica e a diferencial da equação (3.4):

$$lnN(t) = lnA(t) + lnL(t) \tag{3.5}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{3.6}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = n_A + n_L \tag{3.7}$$

Medindo o produto e o capital por unidade de trabalho efetivo, respectivamente, $y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}$ e $k(t) = \frac{K(t)}{N(t)}$.

Seguindo o procedimento padrão, apresentado no Apêndice 1, a equação diferencial fundamental em relação a $k(t)$ é representada por:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n_L + n_A)k(t) \tag{3.8}$$

Analogamente ao modelo de Solow sem progresso tecnológico, o equilíbrio é determinado quando $\dot{k}(t) = 0$. Assim, o capital por unidade de trabalho efetivo, no equilíbrio, é obtido da seguinte maneira:

$$k^* = \frac{sy^*}{\delta + n_L + n_A} \tag{3.9}$$

Portanto, o produto e o estoque de capital crescem a mesma taxa que o insumo trabalho efetivo. Assim, altera-se a equação (3.8) para a seguinte forma:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_L + n_A \tag{3.10}$$

Denota-se, então, que são obtidas exatamente as mesmas conclusões qualitativas do modelo sem avanço tecnológico, de acordo com a Figura 3.1, abaixo. O crescimento balanceado de longo prazo simplesmente depende de fatores exógenos, n_L e n_A. observa-se que a dedução da equação (3.10) resta apresentada no Apêndice 2.

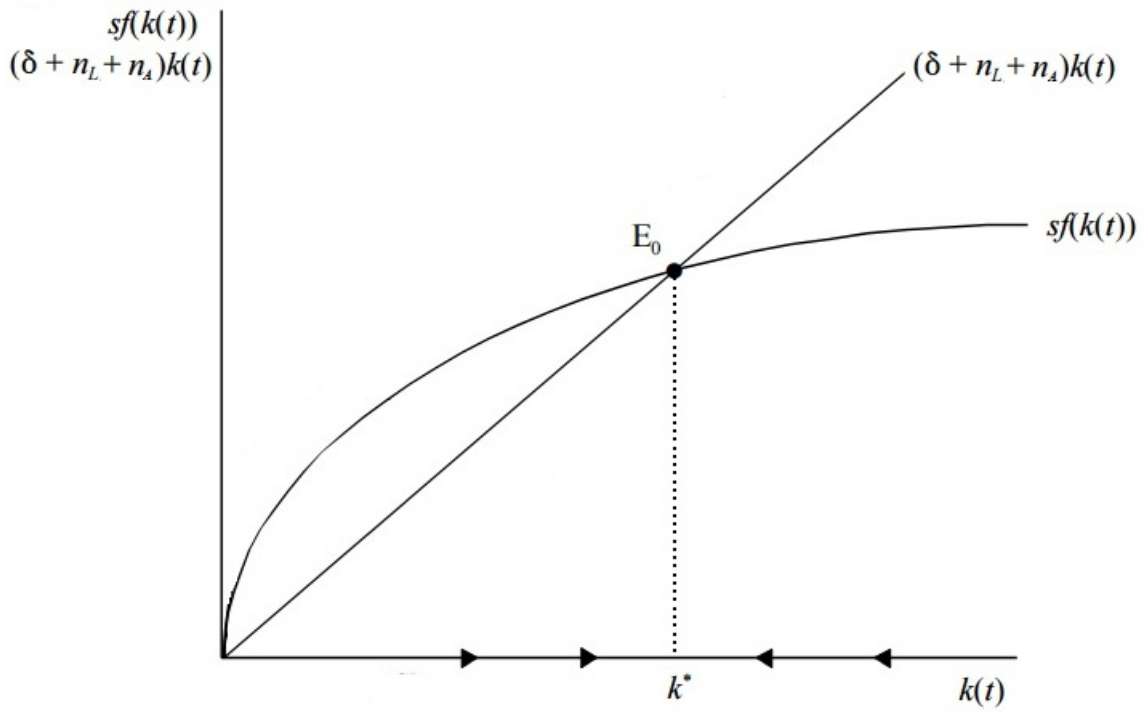

Figura 3.1: O Modelo de Solow-Swan com Progresso Tecnológico
Fonte: Elaboração Própria.

Assim, do mesmo modo que na Figura 2.1, a Figura 3.1 apresenta a função linear $(\delta + n_L + n_a)k(t)$ determinada por variáveis exógenas e que crescem a uma taxa constante. Ainda, a Figura 2.1 apresenta a curva $sf(k(t))$ com a mesma forma do modelo de Solow sem progresso tecnológico.

Ressalta-se, entretanto, que o grande avanço conquistado neste modelo com progresso tecnológico é a possibilidade de crescimento da renda per capita, devido ao aumento exógeno da técnologia. Entretanto, a tecnologia aumenta a uma taxa exógena, desta forma, não pode ser verificada no modelo.

No próximo capítulo serão analisadas algumas importantes propriedades verificadas no modelo de Solow.

Capítulo 4

Propriedades do Modelo de Solow-Swan

Neste capítulo serão estudadas algumas propriedades importantes do modelo de Solow-Swan, que dizem respeito aos seguintes temas: (a) a regra de ouro ("golden rule") e a questão de excesso de poupança; (b) a dinâmica de transição do modelo que está relacionada com o conceito de convergência absoluta e convergência condicional; e (c) a velocidade do ajuste dinâmico.

4.1 A Regra de Ouro da Acumulação de Capital

Uma das implicações obtidas pelo modelo nos capítulos anteriores diz respeito ao crescimento balanceado de longo prazo (igual a $n \equiv n_L + n_A$), onde o nível de produto, do capital e do consumo são criticamente afetados pelo nível de poupança. Assim, mesmo que "s" não afete a taxa de crescimento de longo prazo, irá afetar a trajetória de crescimento da economia, pois modificará o nível de renda per capita durante a transição para o estado estacionário.

Este fato sugere questões relativas a um ranking de bem-estar para essas diferentes trajetórias, fazendo com que os "policy makers" possam escolher "s" de forma que selecionem uma trajetória satisfatória para a economia chegar ao equilíbrio ("steady-state").

O equilíbrio é obtido a partir da equação (3.9), que é reproduzida como equação (4.1):

$$k^* = \frac{sy^*}{\delta + n_L + n_A} = \frac{sy^*}{\delta + n} = \frac{sf(k^*(s))}{\delta + n} \tag{4.1}$$

Implica-se, desta forma, que há uma relação única entre a taxa de poupança e a razão capital-trabalho, que pode ser expressa como:

$$k^* = k^*(s) \tag{4.2}$$

A partir de (4.2), obtém-se que:

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{f(k^*(s)) + sf^{'}(k^*)k^{'}(s)}{\delta + n}, \qquad \frac{dk^*}{ds} = k^{'}(s) \tag{4.3}$$

$$\frac{dk^*}{ds}(\delta + n) - sf^{'}(k^*)\frac{dk^{*}}{ds} = y^* \tag{4.4}$$

$$\frac{dk^*}{ds}(\delta + n - sf^{'}(k^*)) = y^* \tag{4.5}$$

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{y^*}{[\delta + n - sf^{'}(k^*)]} > 0 \tag{4.6}$$

Onde: $y^* > 0$, $0 < \delta < 1$, $n > 0$, $0 < s < 1$. $f^*(k^*) > 0$ e $(\delta + n > 1)$.

Supõe-se que o "policy maker" esteja interessado no consumo per-capita, no equilíbrio, e mantendo-se as coisas simples, assume-se que não há progresso técnico ($n_A = 0$ e $n = n_L$). O consumo per-capita pode-se então ser escrito como:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{4.7}$$

$$Y(t) = C(t) + sY(t) \tag{4.8}$$

$$\frac{C(t)}{L(t)} = (1 - s)\frac{Y(t)}{L(t)} \tag{4.9}$$

$$c(t) = (1 - s)f(k^*(t)) \tag{4.10}$$

$$c(t) = f(k^*(t)) - sf(k^*(t)) \tag{4.11}$$

Sabe-se que no equilíbrio $\dot{k}(t) = 0$, portanto, a partir da equação (3.8), teremos:

$$sf(k) = (\delta + n)k(t) \tag{4.12}$$

Assim, a equação (4.11) terá a seguinte forma:

$$c(s) = f(k^*(s)) - (\delta + n)k^*(s) \tag{4.13}$$

A expressão acima pode ser apresentada graficamente como na Figura 2.1, apresentada no capítulo 2, cujo consumo per-capita está representado pela distância entre a função de produção per-capita, $sf(k(t))$, e a linha que representa a necessidade de capital per-capita no equilíbrio, $(\delta + n_L)k(t)$, para k^*.

A figura 4.1, abaixo, representa o consumo per-capita para diferentes taxas de poupança. Qualquer produto que não seja alocado para substituir o capital per-capita existente no equilíbrio pode ser consumido.

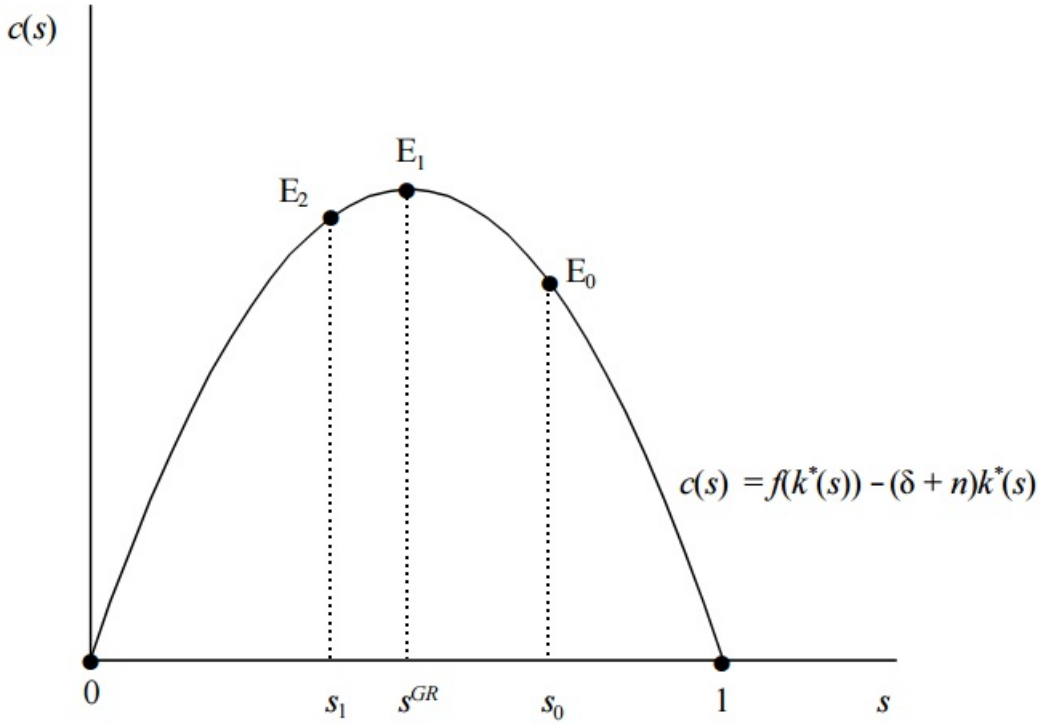

Figura 4.1: Consumo e Poupança per Capita
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002)

O consumo per-capital é maximado se a taxa de poupança satisfizer $\frac{dc(s)}{ds} = 0$, ou:

$$\frac{dc(s)}{ds} = [f^{'}(k^*(s)) - (\delta + n)]\frac{dk^*(s)}{dk^*(s)} = 0 \tag{4.14}$$

Em termos da figura 2.1, o consumo per-capita é maximizada no ponto A, onde a inclinação da função de produção é igual a inclinação da função de capital requerida no equilíbrio k^{GR}. Partindo-se da equação (4.14), a taxa de poupança que representa a regra de ouro, s^{GR}, deve satisfazer:

$$f^{'}[k^{*}(s^{SR})] = \delta + n \tag{4.15}$$

A taxa de poupança na regra de ouro está associada com o ponto E_1 na figura 4.1, acima. A partir da equação (4.15) é possível obter a seguinte intuição: o ativo produzido (o estoque de capital físico) leva a uma taxa de retorno igual a $f^{'} - \delta$, onde o bem primário não produzido (trabalho) pode ser interpretado como gerando uma taxa de retorno igual a $n_L = n$. Dessa forma, o resultado eficiente ocorre se a taxa de retorno dos dois ativos forem iguais.

Notar que a expressão (4.15), a partir da equação (2.22) no ponto de equilíbrio,pode ser reescrita como:

$$\dot{k}(s) = sf(k(s)) - (\delta + n)k(s) \tag{4.16}$$

$$\dot{k}(s) = 0 \tag{4.17}$$

$$sf(k(s)) = (\delta + n)k(s) \tag{4.18}$$

$$s^{GR} = \frac{(\delta + n)k^{*}(s^{GR})}{f(k(s))} \tag{4.19}$$

A partir da equação (4.15) obtemos:

$$s^{GR} = \frac{k^{*}(s^{GR})f^{'}[k^{*}(s^{GR})]}{f(k^{*}(s^{GR}))} \tag{4.20}$$

A equação (4.20) mostra que a taxa de poupança na regra de ouro (GR) deve ser igual a participação do capital na renda nacional (que em geral depende da própria taxa de poupança na regra de ouro).

Para o caso de uma função de produção intensiva do tipo Cobb-Douglas, $f(.) = k(t)^{\alpha}$, a taxa de poupança na regra de ouro será:

$$s^{GR} = \frac{k(t)\alpha k(t)^{\alpha-1}}{k(t)^{\alpha}} \tag{4.21}$$

$$s^{GR} = k(t)\alpha k(t)^{-1} = \alpha \tag{4.22}$$

Assim, a participação do capital na renda é igual a α.

Passa-se a discutir, então, o conceito de **ineficiência dinâmica**. Considera-se ineficiência dinâmica econômica quando é possível melhorar a situação de todos ou pelo menos não piorar a situação de alguns, ao reduzir o estoque de capital.

Considera-se a situação na Figura 4.1, e assume-se que a taxa de poupança no equilíbrio é representada por s_0, dessa forma, a economia econtra-se no ponto E_0. Como essa taxa de poupança excede a taxa de poupança na regra de ouro ($s_0 > s^{GR}$), o consumo per-capita no equilíbrio é menor que o consumo na regra de ouro.

Dessa forma o ponto E_0, é dinamicamente ineficiente no sentido que um maior consumo per-capita pode ser obtido ao reduzir a taxa de poupança. A Figura 4.2 mostra que ao reduzir a taxa de poupança de s_0 para s^{GR}, o equilíbrio irá se movimentar de E_0 para E_1 e levará a um maior consumo per-capita no novo equilíbrio.

A Figura 4.2 mostra o que acontece com o consumo per-capita durante a fase de transição, de E_0 para E_1. A economia inicialmente se encontra em E_0, onde a razão capital trabalho no equilíbrio é k_0^*. Ao reduzir a taxa de poupança (de s_0 para s^{GR}), provoca-se uma rotação anti-horária e a economia irá se deslocar de E_0 para A. Como a transição em direção a razão capital-trabalho na regra de ouro, k^{GR}, é estável, a economia se movimenta do ponto A para o novo ponto de equilíbrio localizado em E_1 à medida que o $k(t)$ diminui para k^{Gr} durante essa fase de transição.

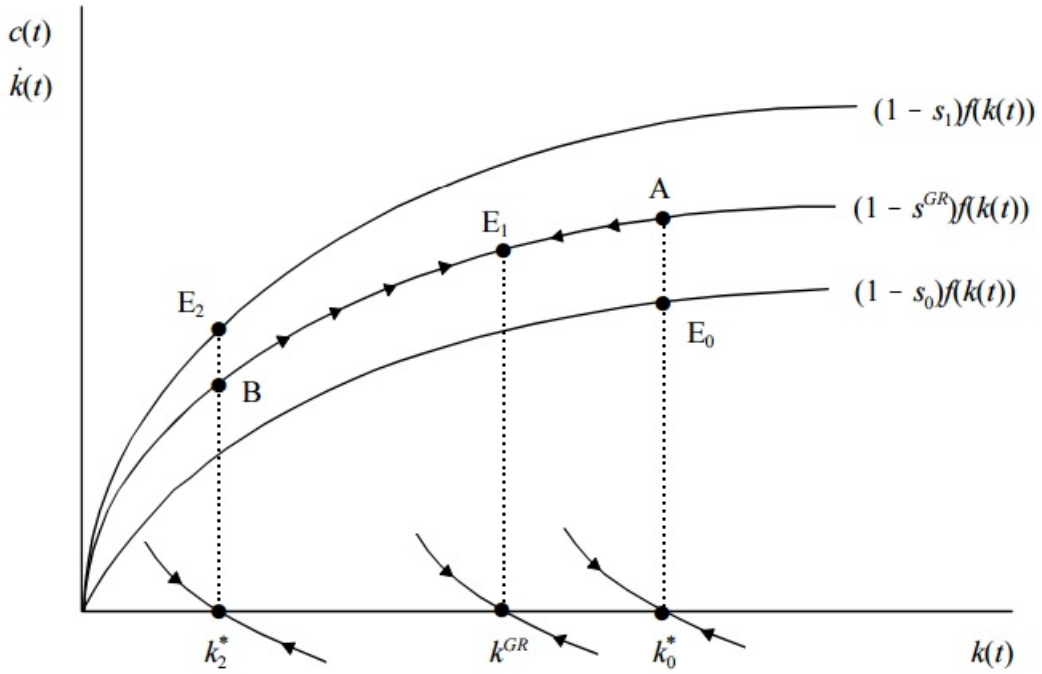

Figura 4.2: Consumo Per capita durante transição para seu nível da regra de ouro
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002)

Portanto, como resultado da diminuição da taxa de poupança, o consumo será maior em relação ao período de transição e no novo equilíbrio, exemplo, a redução de s é portanto progresso de Pareto. Podemos concluir que quando a taxa de poupança excede s^{GR} haverá uma ineficiência dinâmica.

A mesma conclusão não poderá ser feita se a taxa de poupança for menor que s^{GR}, isto é a propriedade de ótimo de Pareto não é respeitada. Considera-se uma economia na qual a taxa de poupança é muito baixa, exemplo, $s_1 < s^{GR}$. Em termos das Figura 4.1 e 4.2 a economia inicialmente está no ponto E_2. Um aumento da taxa de poupança de s_1 para s^{GR} ainda que leve a um aumento do consumo per-capita no equilíbrio. Durante a transição, entretanto, o consumo per-capita irá cair, antes de começar a aumentar e chegar ao novo ponto de equilíbrio descrito na regra de ouro.

Em termos da figura 4.2 o impacto na economia é descrito como um deslocamento de E_2 para B à medida que a poupança aumenta. Durante parte dessa transição, o consumo será menor do que seria na ausência do choque. Como não temos uma função de Bem-Estar para avaliar a trajetária desigual do consumo per-capita, não podemos determinar se o aumento de "s" é um progresso de Pareto, para esse caso.

4.2 A Dinâmica de Transição e Convergência

Até agora a atenção foi focada nas questões relacionadas ao equilíbrio. Agora vamos retornar ao modelo com mudança técnica exógena (com $n = n_A + n_L$), e a equação fundamental vista na seção anterior (4.1), é agora representada pela expressão (4.23).

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n_L + n_A)k(t) \tag{4.23}$$

A partir da definição da taxa de crescimento do $k(t)$, representada por $\gamma_k(t) \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$, podemos derivar a partir de (4.23):

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + n) \tag{4.24}$$

$$\gamma_k(t) = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + n) \tag{4.25}$$

Na figura 4.3, abaixo, essa taxa de crescimento é representada pela diferença vertical entre as duas linhas. Uma implicação imediata de (4.25), ou Figura 4.3, é que países com pouco capital (em unidades eficiente) terão um crescimento mais rápido, do que países com muito capital. De outra forma, países pobres e ricos deveriam convergir.

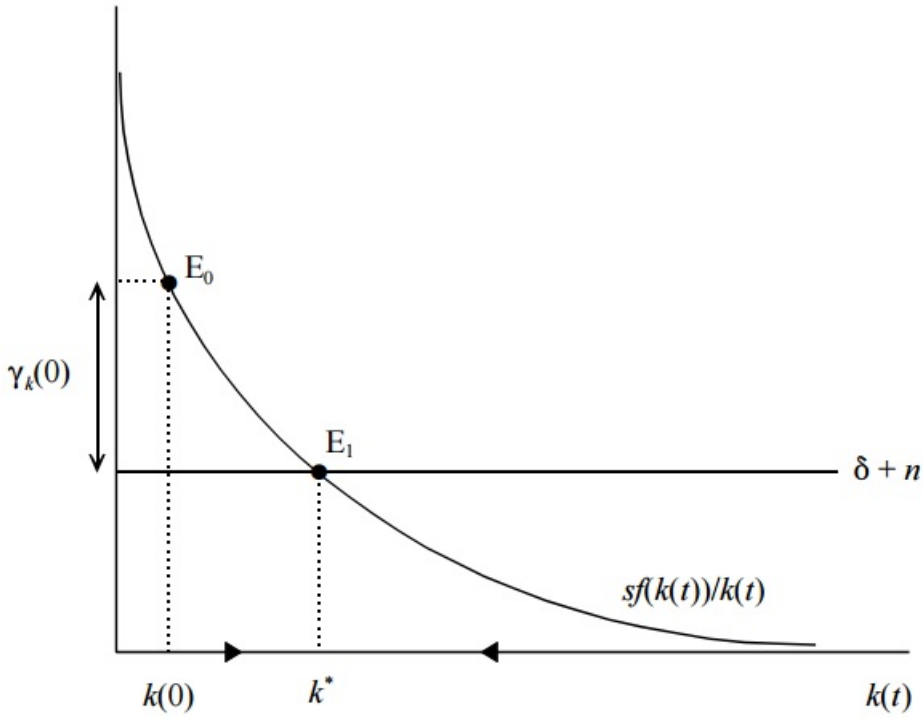

Figura 4.3: Crescimento Convergente
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002)

Expressando esse conceito de outra maneira, derivar a expressão (4.25) em relação a $k(t)$, obtemos:

$$\frac{d\gamma_k(t)}{dk(t)} = \frac{sf^{'}(k(t)) - sf(k(t))}{k(t)^2} < 0 \tag{4.26}$$

Onde $f^{'}(k(t)) < 0$; $f(k(t)) > 0$ e $k(t) > 0$.

Dessa forma quanto maior o capital por trabalho eficiente do país, menor será a sua taxa de crescimento.

Notar que a taxa de crescimento do produto em unidades eficiente de trabalho, $\gamma_y(t)$, está relacionada com $\gamma_k(t)$:

$$\gamma_y(t) \equiv \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \tag{4.27}$$

$$y(t) = f(k(t)) \tag{4.28}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{df(k(t))}{dk(t)}\frac{dk(t)}{dt} \tag{4.29}$$

$$\dot{y}(t) = f^{'}(k(t))\dot{k}(t) \tag{4.30}$$

Dessa forma:

$$\gamma_y(t) = \frac{f^{'}(k(t))\dot{k}(t)}{y(t)} \tag{4.31}$$

$$\gamma_y(t) = \frac{f^{'}(k(t))k(t)\dot{k}(t)}{y(t)k(t)} = \frac{f^{'}(k(t))k(t)}{y(t)}\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{4.32}$$

$$\gamma_y(t) \equiv \omega_k(t)\gamma_k(t) \tag{4.33}$$

Onde $\omega_k(t)$, representa a participação do capital na renda nacional.

Para o caso de uma função de produção intensiva, $y(t) = k(t)^{\alpha}$, esse parâmetro será:

$$\omega_k(t) \equiv \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1} k(t)}{y(t)} = \alpha \tag{4.34}$$

Mas isso não é respeitado se a substituição entre capital e trabalho não for unitária.

Para o caso de uma função de produção do tipo CES (”constant elasticity substitution”), sua forma intensiva é apresentada abaixo:

$$F[k(t), N(t)] \equiv [\alpha K(t)^{\frac{\sigma_{KL}-1}{\sigma_{KL}}} + (1-\alpha) N(t) \frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}]^{\frac{\sigma_{KL}}{(\sigma_{KL}-1)}} \tag{4.35}$$

$$F(\frac{K(t)}{N(t}, 1) \equiv \frac{[\alpha K(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}} + (1-\alpha) N(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}}]^{\frac{\sigma_{KL}}{(\sigma_{KL}-1)}}}{N(t)} \tag{4.36}$$

$$f(k(t)) \equiv [\frac{\alpha K(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}} + (1-\alpha) N(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}}}{N(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}}}]^{\frac{\sigma_{KL}}{(\sigma_{KL}-1)}} \tag{4.37}$$

$$f(k(t)) \equiv [1 - \alpha + \alpha k(t)^{\frac{(\sigma_{KL}-1)}{\sigma_{KL}}}]^{\frac{\sigma_{KL}}{(\sigma_{KL}-1)}} \tag{4.38}$$

Onde $\sigma_{KL} > 0$, representa elasticidade de substituição entre capital e trabalho.

A participação do capital a partir de (4.33) é apresentada abaixo segundo (Heijdra e Ploeg, 2002):

$$\omega_K(t) = \alpha [\frac{f(k(t))}{k(t)}]^{\frac{(1-\alpha_{KL})}{\sigma_{KL}}} \tag{4.39}$$

Observa-se que a equação (4.39) depende de $k(t)$, de acordo com:

$$\frac{d\omega_K(t)}{\omega_K(t)} = (\frac{\sigma_{KL} - 1}{\sigma_{KL}}) - [1 - \omega_K(t)](\frac{dk(t)}{k(t)}) \tag{4.40}$$

Segue que para $\sigma_{KL} > 1$ (< 1), um aumento em $k(t)$ resulta em um aumento (diminuição) da participação do capital na renda nacional,

Usando (4.33) e (4.40) é obtido o resultado que faz a ligação entre o crescimento do produto e o nível de produto em unidade eficiente do trabalho:

$$d\gamma_y(t) = -(1 - \omega_K(t))[\frac{\gamma_k(t)}{\sigma_{KL}} + n + \delta](\frac{dy(t)}{y(t)}) \tag{4.41}$$

Para uma economia com crescimento positivo em $k(t)$ (no qual $\gamma_k(t) > 0$), o termo entre colchete no lado direito de (4.41), é garantido que seja positivo, portanto um maior nível de produto em unidade eficiente de trabalho está associado com uma menor taxa de produto. Ocorre o mesmo para um declínio da economia (no qual $\gamma_K(t) < 0$), operando na posição a direita do seu ponto de equilíbrio, onde $\gamma_k(t)$ não deverá ser negativo.

Isto sugere que há um teste empírico do modelo de Solow-Swan no qual é baseado na propriedade de convergência do produto em seção transversal para vários diferentes países. Considerando-se um grupo de economia fechada e assumindo-se que possuem os mesmos parâmetros estruturais, s, n, δ, e a mesma função de produção, portanto pela teoria, os países terão o mesmo equilíbrio. A chamada hipótese de convergencia absoluta (ACH) então sugere que os países pobres deveriam crescer mais rápido do que os países ricos.

Barro e Sala-i-Martin (1995) e Barro (1998), através da técnica de regressão em sistemas de equações com dados em seções transversais, com dados de 138 países entre os anos de 1965 a 1975 e 1975 a 1985, demonstraram que o resultado da regressão de $\gamma_y(t)$ em relação a ln(y(t)), foram pêssimos: em vez de encontrar um efeito negativo como previa ACH, foi encontrado um efeito ligeiramente positivo, exemplo, inicialmente os países ricos crescem mais rápido do que os países pobres.

Essa rejeição do ACH, não necessariamente significa que o modelo de Solow-Swan deve ser refutado, porque um das hipóteses a respeito dos resultados da regressão poderá ser falso. Por exemplo, Se um país rico tem uma taxa de poupança maior do que os países pobres, estará mais distante do seu ponto de equilíbrio em relação aos países pobres. como sugere o trabalho empírico de Barro e Sala-i-Martin (1995).

Esse resultado é demonstrado na figura 4.4 onde s_p e s_R são taxas de poupança dos países pobres e ricos, respectivamente, e $(k^*)^P$ e $(k^*)^R$ são os respectivos equilíbrios. Se o país pobre inicialmente em $k^P(0)$ e o país rico em $k^R(0)$, o primeiro irá crescer mais lento do que o último país (a distancia vertical CD é maior do que AB).

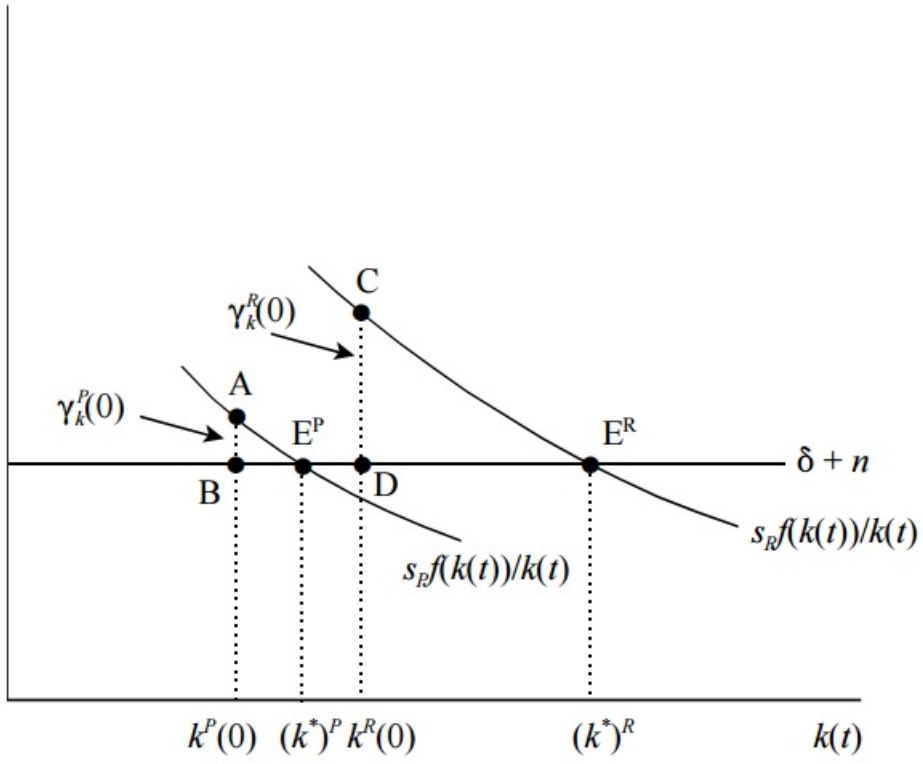

Figura 4.4: Crescimento Convergente Condicional
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002)

Um teste mais refinado do modelo de Solow-Swan é conhecido como hipótese de convergência condicional (CCH), onde países similares deveriam convergir. Barro e Sala-i-Martin (1995), mostram que a convergência ocorre nos 20 países da OECD, considerados similares.

4.3 A velocidade de Ajustamento

A propriedade de convergência não é o único ponto a ser testável no modelo de Solow-Swan. Além de testar se as economias convergem, outra questão diz respeito a velocidade dessa convergência. Considerando o caso de uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, $f(.) = k(t)^{\alpha}$ e a equação diferencial fundamental (4.42)=(3.8) terá a seguinte forma:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n_L + n_A)k(t) \tag{4.42}$$

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (\delta + n)k(t) \tag{4.43}$$

Uma solução exata para essa equação diferencial pode ser obtida usando uma transformação de variáveis, exemplo, reescrever (4.43) em termos da razão capital-produto, $x(t) \equiv \frac{k(t)}{y(t)} = k(t)^{1-\alpha}$:

$$\frac{\dot{k}(t)}{y(t)} = s - \frac{(\delta + n)k(t)}{k(t)^{\alpha}} \tag{4.44}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{y(t)} = s - (\delta + n)k(t)^{1-\alpha} \tag{4.45}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{y(t)} = s - (\delta + n)x(t) \tag{4.46}$$

Onde:

$$x(t) = k(t)^{1-\alpha} \tag{4.47}$$

Fazer a transformação logarítimica e calcular a sua derivada na expressão (4.47), acima:

$$ln(x(t)) = (1-\alpha)ln(k(t)) \tag{4.48}$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = (1-\alpha)\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{4.49}$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{\frac{k(t)}{y(t)}} = (1-\alpha)\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{4.50}$$

$$\frac{\dot{x}(t)y(t)}{k(t)} = (1-\alpha)\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{4.51}$$

$$\dot{x}(t) = (1-\alpha)\frac{\dot{k}(t)}{y(t)} \tag{4.52}$$

Portanto:

$$\frac{\dot{k}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{x}(t)}{(1-\alpha)} \tag{4.53}$$

Unindo a expressão (4.46) com (4.53), chegamos na expressão abaixo:

$$\dot{x}(t) = (1-\alpha)[s - (\delta + n)x(t)] \tag{4.54}$$

A solução de (4.54) é obtido pelos métodos padrões:

Ponto de equilíbrio: $\dot{x}(t) = 0$

Dessa forma:

$$(1-s)[s - (\delta + n)x(t)] = 0 \tag{4.55}$$

$$\bar{x} = \frac{s}{(\delta + n)} \tag{4.56}$$

A expressão (4.56) representa o ponto de equilíbrio.

É preciso encontrar a solução da equação homogênea, que é representada pela expressão abaixo:

$$\dot{x}(t) = (1-\alpha)(\delta + n)x(t) \tag{4.57}$$

Solução da equação homogênea:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \quad onde \quad \beta = (1-\alpha)(\delta + n) \quad e \quad A = x(0) \tag{4.58}$$

Solução geral:

$$x(t) = \frac{s}{\delta + n} + x(0)e^{-\beta t} \tag{4.59}$$

O parâmetro β mede a velocidade de convergência no longo prazo. A interpretação de β é o seguinte: ζ x 100% de divergência entre x(t) e $\bar{x}$ é eliminado depois do intervalo de tempo t_ζ (onde o intervalo é normalizando entre 0 e 1:

Fazendo a transformação logaritmica da expressão (4.59), teremos:

$$ln(x(t)) = ln(x(0)) - \beta t \tag{4.60}$$

$$\beta t = ln(x(0)) - ln(x(t)) \tag{4.61}$$

No tempo , t=1, x=x(0) e no tempo ζ, x=x(t), dessa forma teremos:

$$\beta t = ln(1 - \zeta) \tag{4.62}$$

Como o tempo deve ser positivo, isso justifica a introdução do sinal negativo na expressão (4.63), de acordo com (Heijdra e Ploeg, 2002).

$$t_\zeta \equiv -(\frac{1}{\beta})ln(1 - \zeta) \tag{4.63}$$

Portanto a meia vida de divergência ($\zeta = \frac{1}{2}$) é igual a :

$$t_{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{\beta})(ln(0.5)) = \frac{0.693}{\beta} \tag{4.64}$$

Considerando o seguinte exemplo: $n_L = 0.01$ (por ano), $n_A = 0.02$, $\delta = 0.05$ e $\alpha = \frac{1}{3}$, chegamos ao valor de $\beta = 0.0533$ (5.33 % por ano) e a estimativa da meia vida será $t_{\frac{1}{2}} = 13$ anos. A transição é portanto relativamente rápida, da perspectiva do crescimento. Segundo Barro e Sala-i-Martin (1995), essa estimativa é baixa, eles estimaram que β é aproximadamente igual a 2%. Portanto isso é um problema real enfrentado pelo modelo de Solow-Swan.

Para que o modelo de Solow-Sawan seja mais realístico e se aproxime das evidências empíricas, para uma dada magnitude de δ e n, seria necessário que a participação do capital (α), fosse muito alta, se afastando dos dados empíricos, para que β seja igual a 0.02, é necessário qeu α fosse igual a $\frac{3}{4}$. Um maneira de tornar o modelo de Solow-Swan mais realístico é assumir uma maior medida de capital, onde é incluído além do capital físico, o capital humano. Essa abordagem foi apresentado por Mankiw,Romer e Weil (1992) e Lucas (2002).

Capítulo 5

Aplicações Macroeconômicas

O modelo de Solow-Swan pode ser usado para estudar questões macroeconômicas tradicionais, tais como: o efeito da política fiscal, o financiamento via imposto ou via endividamento e a equivalência ricardiana. Para deixar o modelo simples, vamos retornar ao modelo de Solow-Swan padrão onde há apenas um único capital físico.

5.1 Política Fiscal no modelo de Solow

Supor que o consumo do governo seja representado por $G(t)$ unidades do produto, portanto a demanda agregada no mercado de bens é expressa como:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) \tag{5.1}$$

A poupança agregada é proporcional a renda disponível (descontada o imposto), portanto a equação (2.2) é modificada:

$$S(t) = s[Y(t) - T(t)] \tag{5.2}$$

Onde $T(t)$, representa o imposto "lump-sum", esse tipo de imposto representa um imposto fixo per-capita, independe do nível do produto (PIB).

Como $S(t) \equiv Y(t) - C(t) - T(t)$, qualquer deficit governamental primário deve ser compensado por um excesso de poupança privada sobre o investimento, exemplo: $G(t) - T(t) = S(t) - I(t)$. A identidade orçamentária do governo é dado por:

$$\dot{B}(t) = r(t)B(t) + G(t) - T(t) \tag{5.3}$$

onde $B(t)$ representa a dívida do governo e $r(t)$ representa a taxa de juros reais, onde sob condições competitivas assumidas no modelo de Solow-Swan, é igual a produtividade marginal liquida do capital, segundo Heijdra e Ploeg, 2002.

$$r(t) = f^{'}(k(t)) - \delta \tag{5.4}$$

Escrevendo as variáveis em termos de unidade de trabalho efetivo, o modelo pode ser condensado a partir das duas equações (5.17) e (5.25) que são encontradas abaixo:

$$I(t) = Y(t) - C(t) - G(t) \tag{5.5}$$

$$Y(t) - C(t) - G(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t) \tag{5.6}$$

$$Y(t) - C(t) = S(t) + T(t) \tag{5.7}$$

$$Y(t) - C(t) = s[Y(t) - T(t)] + T(t) \tag{5.8}$$

$$Y(t) - C(t) = sY(t) + (1-s)T(t) \tag{5.9}$$

Dessa forma temos:

$$sY(t) + (1-s)T(t) - G(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t) \tag{5.10}$$

$$\dot{K}(t) = sY(t) + (1-s)T(t) - G(t) - \delta K(t) \tag{5.11}$$

Dividindo a equação (5.11) por N(t).

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = sy(t) + (1-s)\tau(t) - g(t) - \delta k(t) \tag{5.12}$$

É preciso deixar o termo a esquerda da equação acima em termos de trabalho efetivo:

$$\frac{d(\frac{K(t)}{N(t)})}{dt} = \frac{\dot{K}(t)N(t) - K(t)\dot{N}(t)}{N(t)^2} \tag{5.13}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{N(t)} - k(t)n \tag{5.14}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = \dot{k}(t) + k(t)n \tag{5.15}$$

Substituindo a equação (5.15) na equação (5.12), teremos:

$$\dot{k}(t) + nk(t) = sy(t) + (1-s)\tau(t) - g(t) - \delta k(t) \tag{5.16}$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t) + (1-s)\tau(t) - g(t) \tag{5.17}$$

Agora será encontrado a segunda equação do modelo.

Temos (5.18) que é igual a (5.3)

$$\dot{B}(t) = r(t)B(t) + G(t) - T(t) \tag{5.18}$$

A partir de (5.4) obtemos:

$$\dot{B}(t) = (f^{'}k(t) - \delta)B(t) + G(t) - T(t) \tag{5.19}$$

Deixando a equação acima em termos de trabalho efetivo, teremos:

$$\frac{\dot{B}(t)}{N(t)} = \frac{(f^{'}k(t) - \delta)B(t) + G(t) - T(t)}{N(t)} \tag{5.20}$$

$$\frac{\dot{B}(t)}{N(t)} = (f^{'}(k(t)) - \delta)b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.21}$$

É preciso deixar o lado esquerda da equação acima em termos de trabalho efetivo.

$$\frac{d(\frac{B(t)}{N(t)})}{d(t)} = \frac{\dot{B}(t)N(t) - B(t)\dot{N}(t)}{N(t)^2} \tag{5.22}$$

$$\dot{b}(t) = \frac{\dot{B}(N)}{N(t)} - nb(t) \tag{5.23}$$

Substituindo a equação (5.23) na equação (5.21) teremos:

$$\dot{b}(t) + nb(t) = (f^{'}(k(t)) - \delta)b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.24}$$

$$\dot{b}(t) = (f^{'}(k(t)) - \delta - n)b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.25}$$

Considerando um financiamento via imposto puro e ausência de divida governamental inicial ($\dot{b}(t) = b(t)) = 0$), então a identidade do orçamento do governo se reduz a $g(t) \equiv \tau(t)$. Substituindo essa expressão em (5.17) obtemos:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) + (1 - s)g(t) - g(t) \tag{5.26}$$

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) - sg(t) \tag{5.27}$$

A economia pode ser analisada com a ajuda da expressão (5.27) juntamente com a Figura 5.1. Na ausência do consumo do governo, o único (e estável) equilíbrio é representado pelo ponto E_0. Um aumento no consumo do governo altera o investimento líquido para baixo resultando ($S_1 < S_0$) em múltiplos equilíbrios (ou mesmo ausência de equilíbrio) Um desses equilíbrio é representado pelo ponto A, que é instável e o outro equilíbrio é representado pelo ponto E_1 que é estável. Quando é introduzido o governo no modelo do consumo (C), é dividido entre consumo privado C_p e consumo do governo C_t.

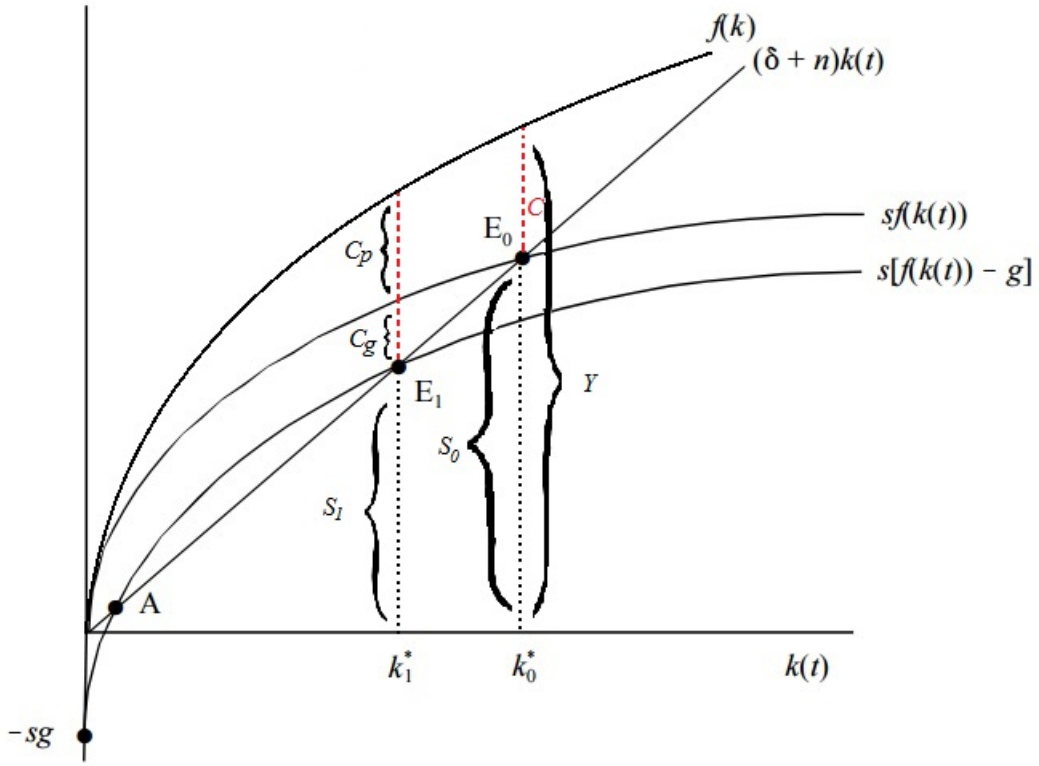

Figura 5.1: Política Fiscal no Modelo de Solow-Swan
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002).

A política fiscal força a saída (”crowds out”) do estoque de capital físico no longo prazo, de k_0^* para k_1^*. Com o impacto da introdução do governo, o estoque de capital é predeterminado ($k(0) = k_0^*$), o consumo privado e o investimento liquido (em unidade efetiva do trabalho) diminuem, $\frac{dc(0)}{dg} = -(1-s) < 0$ e $\frac{\dot{k}(0)}{dg} = -s < 0$, mas o produto não é alterado $\frac{dy(0)}{dg} = 0$.

Ao longo do tempo, como o estoque de capital gradualmente irá cair em direção ao seu novo valor de equilíbrio, k_1^*, o produto e o consumo privado por unidade de trabalho efetivo irá cair. O efeito de longo prazo é dado pela expressão (5.47) e (5.53) que são deduzidas abaixo.

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) - sg(t); \qquad e \qquad g(t) = \tau(t) \tag{5.28}$$

$$\dot{k}(t) = s(f(k(t)) - g(t)) - (\delta + n)k(t) \tag{5.29}$$

Fazendo a diferenciação da expressão acima, teremos:

$$d\dot{k}(t) = s(f^{'}(k(t))dk(t) - dg(t)) - (\delta + n)dk(t) \tag{5.30}$$

Como $f^{'}(k(t)) < 0$; $0 < s < 1$ e $(\delta + n) > 0$, portanto $d\dot{k}(\infty) < 0$, quando $t \to \infty$.

Observa-se que, conforme constatado acima, a nomenclatura (∞) significa que consideraremos o longo prazo, ou seja, a tendência ao infinito.

Da mesma forma analisamos o consumo no ponto de equilíbrio:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + n)k(t) - c(t) - g(t) \qquad e \qquad \dot{k}(t) = 0 \tag{5.31}$$

$$c(t) = f(k(t)) - (\delta + n)k(t) - g(t) \tag{5.32}$$

Fazendo a diferencial de 5.32 chegamos:

$$dc(t) = f^{'}(k(t))dk(t) - (\delta + n)dk(t) - dg(t) \tag{5.33}$$

Temos: $f^{'}(k(t)) < 0$ e $(\delta + n) > 0$, portanto $dc(\infty) < 0$, quando $t \to \infty$.

Conforme já destacado, o símbolo (∞) refere-se ao longo prazo, ou seja, tendência ao infinito.

Ao longo do tempo, como o estoque de capital diminui, o produto e o consumo privado por unidade trabalho efetivo diminui, dessa forma é obtido as expressões (5.47) e (5.53):

Temos:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) + (1 - s)\tau(t) - g(t) \tag{5.34}$$

$$\dot{b}(t) = [f^{'}k(t) - \delta - n]b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.35}$$

Considerando $\dot{k}(t) = 0$; $\dot{b}(t) = 0$ e $\tau(t) = g(t)$, teremos:

$$sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) - sg(t) = 0 \tag{5.36}$$

$$\left[f^{'}(k(t)) - \delta - n\right] b(t) = 0 \tag{5.37}$$

Fazendo a diferenciação das equações acima com relação a dk, db e dg:

$$sf^{'}dk + (\delta + n)dk - sdg = 0 \tag{5.38}$$

$$(f'dk - \delta - n)db + bf^{''}dk = 0 \tag{5.39}$$

Escrevendo as equações acima na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} sf^{'} - (\delta + n) & 0 \\ bf^{''} & (f^{'} - \delta - n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk \\ db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sdg \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Aplicando a regra de Cramer na equacção (5.40):

$$dk = \frac{\begin{vmatrix} sdg & 0 \\ 0 & (f^{'} - \delta - n) \end{vmatrix}}{|J|} \tag{5.41}$$

Onde:

$$|J| = (sf^{'} - (\delta + n))(f^{'} - \delta - n) \tag{5.42}$$

Teremos:

$$dk = \frac{sdg(f^{'} - \delta - n)}{[sf^{'} - (\delta + n)][f^{'} - \delta - n]} \tag{5.43}$$

Portanto:

$$\frac{dk(\infty)}{dg} = \frac{s}{[sf^{'} - (\delta + n)]} \tag{5.44}$$

Conhecemos a função de produção intensiva:

$$y(t) = f(k(t)) \tag{5.45}$$

Fazendo a diferenciação da expressão acima e dividindo a expressão por dg, teremos:

$$\frac{dy(\infty)}{dg} = \frac{f^{'}(k(t))dk(\infty)}{dg} \tag{5.46}$$

Como já conhecemos $\frac{dk(\infty)}{dg}$, a expressão (5.44) terá a seguinte forma:

$$\frac{dy(\infty)}{dg} = \frac{sf^{'}}{sf^{'} - (\delta + n)} < 0 \tag{5.47}$$

Onde: $0 < s < 1$; $f^{'} > 0$; $0 < n < 1$; $0 < \delta < 1$ e $sf^{'} < (\delta + n)$.

Agora é analisado o impacto do consumo do governo sobre o consumo privado ao longo do tempo:

Temos:

$$c(t) = (1-s)[f(k(t)) - g(t)] \tag{5.48}$$

$$c(t) = (1-s)y(t) - (1-s)g(t) \tag{5.49}$$

$$\frac{dc(t)}{dg} = (1-s)\frac{dy(t)}{dg(t)} - (1-s) \tag{5.50}$$

$$\frac{dc(\infty)}{dg} = (1-s)[\frac{dy(\infty)}{dg} - 1] \tag{5.51}$$

$$\frac{dc(\infty)}{dg} = (1-s)[\frac{sf^{'}}{sf^{'} - (\delta+n)} - 1] \tag{5.52}$$

$$\frac{dc(\infty)}{dg} = (1-s)[\frac{(\delta+n)}{sf^{'} - (\delta+n)}] < 0 \tag{5.53}$$

Onde: $0 < s < 1$; $f^{'} < 0$ e $(\delta+n) < 0$ e $sf^{'} < (\delta+n)$.

Dessa forma, o primeiro impacto da entrada do governo no modelo é uma diminuição do consumo privado, e do investimento. Observa-se que neste primeiro impacto, ou seja, no curto prazo, o produto não muda. Entretanto, com o passar do tempo a economia desloca-se para seu novo estado estacionário, que foi alterado pelas variação do consumo e da poupança, e o produto diminui no longo prazo, assim como o consumo, o investimento, o estoque de capital e a poupança.

5.2 Financiamento via Tributos

Vamos agora considerar o financimanto via tributação. Se o governo aumenta seu consumo sem ao mesmo tempo aumentar $\tau(t)$, na mesma magnitude, a divida primária de acordo com (5.25)=(5.54) irá aumentar a partir de um processo explosivo, pois $r > n$ por suposição.

$$\dot{b}(t) = (f^{'}(k(t)) - \delta - n)b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.54}$$

Considerando a equação (5.4). teremos:

$$\dot{b}(t) = (r(t) - n)b(t) + g(t) - \tau(t) \tag{5.55}$$

Para evitar essa possibilidade, é introduzido uma regra de estabilização da dívida, uma variação sugerida por Buiter (1988,p.288), citado por Heijdra e Ploeg, 2002.

$$\tau(t) = \tau_0 + \xi b(t) \qquad \xi > r - n \tag{5.56}$$

Substituindo (5.56) em (5.55) obtemos um processo de dívida estável, é estável porque o coeficiente do termo b(t) que é igual a $(r - n) - \xi$ é negativo.

$$\dot{b}(t) = [f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi]b(t) + g(t) - \tau_0 \tag{5.57}$$

$$\dot{b}(t) = [r - n - \xi]b(t) + g(t) - \tau_0 \tag{5.58}$$

A propriedade dinâmica da economia pode ser ilustrada com a ajuda do diagrama de fase no espaço (k, b), representada pelas Figuras 5.2 a 5.4, abaixo. Combinando (5.59)=(5.17) com (5.60)=(5.56) obtemos a isóclina $\dot{k}(t)$:

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t) + (1 - s)\tau(t) - g(t) \tag{5.59}$$

$$\tau(t) = \tau_0 + \xi b(t) \qquad \xi > r - n \tag{5.60}$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t) + (1 - s)[\tau_0 + \xi b(t)] - g(t) \tag{5.61}$$

É preciso encontrar a inclinação da isóclina, $\dot{k}(t) = 0$:

$$sy(t) - (\delta + n)k(t) + (1 - s)[\tau_0 + \xi b(t)] - g(t) = 0 \tag{5.62}$$

$$(1 - s)[\tau_0 + \xi b(t)] = (\delta + n)k(t) - sf(k(t)) - g(t) \tag{5.63}$$

$$(1 - s)\xi b(t) = (\delta + n)k(t) - sf(k(t)) - g(t) - (1 - s)\tau_0 \tag{5.64}$$

$$b(t) = \frac{(\delta + n)k(t) - sf(k(t)) - g(t) - (1 - s)\tau_0}{(1 - s)\xi} \tag{5.65}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{k}(t)=0} = \frac{(\delta + n) - sf'}{(1 - s)\xi} \tag{5.66}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{k}(t)=0} = [\frac{(1-s)\xi}{\delta+n-sf'}]^{-1} > 0 \tag{5.67}$$

Pois $\xi > 0$, $0 < s < 1$, $0 < \delta < 1$, $n > 0$ e $f' < 0$.

Dessa forma a inclinação da isóclina, $\dot{k}(t)$, é positiva (crescente), conforme demonstrado no gráfico abaixo:

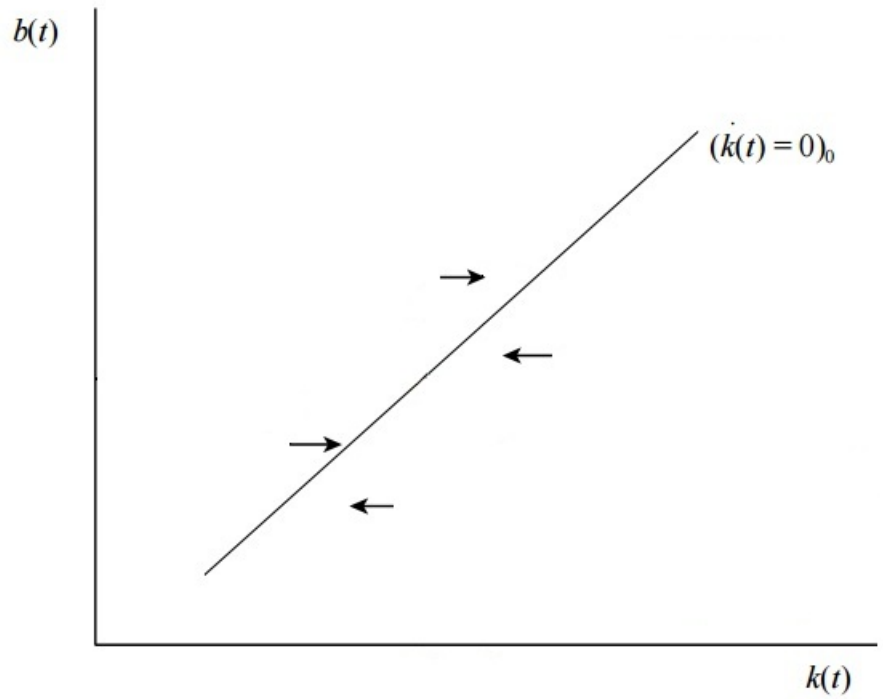

Figura 5.2: Isóclina $k(t) = 0$
Fonte: Elaboração Própria.

Considerando o estoque de capital fixo, um aumento do nível da dívida, leva a um aumento do imposto (via 5.60), reduz o consumo e levará a um investimento liquido positivo, (k(t) é fixo,$\uparrow \dot{b}(t) \Rightarrow \uparrow \tau(t) \Rightarrow \downarrow c(t) \Rightarrow \uparrow \dot{k}(t)$). Como resultado, o novo estoque de capital no equilíbrio é representado por um maior estoque de capital. As formas dinâmicas são indicadas nas Figuras 5.2 a 5.4.

A isóclina $\dot{b}(t) = 0$ é obtida a partir de (5.68)=(5.57) que é novamente apresentada abaixo:

$$\dot{b}(t) = [f'k(t) - \delta - n - \xi]b(t) + g(t) - \tau_0 \tag{5.68}$$

$$b(t) = \frac{\tau_0 - g(t)}{f'k(t) - \delta - n - \xi} \tag{5.69}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{b}(t)=0} = \frac{-(\tau_0 - g(t))f''(k(t))}{(f'k(t) - \delta - n - \xi)^2} \tag{5.70}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{b}(t)=0} = \frac{-(\tau_0 - g(t))f''(k(t))}{(f'k(t) - \delta - n - \xi)(f'k(t) - \delta - n - \xi)} \tag{5.71}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t}})_{\dot{b}(t)=0} = \frac{-bf''(k(t))}{(f'k(t) - \delta - n - \xi)} \tag{5.72}$$

A partir da equação (4.4): $r(t) = f'(k(t)) - \delta$, dessa forma

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{b}(t)=0} = \frac{-bf''(k(t))}{(r - n - \xi)} \tag{5.73}$$

$$(\frac{db(t)}{dk(t)})_{\dot{b}(t)=0} = \frac{bf''(k(t))}{(\xi - (r - n))} < 0 \tag{5.74}$$

Onde: $\xi > (r - n)$; $f'' < 0$; $\xi > 0$ e $b > 0$.

Assim, a inclinação da isóclina $\dot{b}(t)$ é negativa, ou seja, descrescente, conforme observa-se no diagrama abaixo:

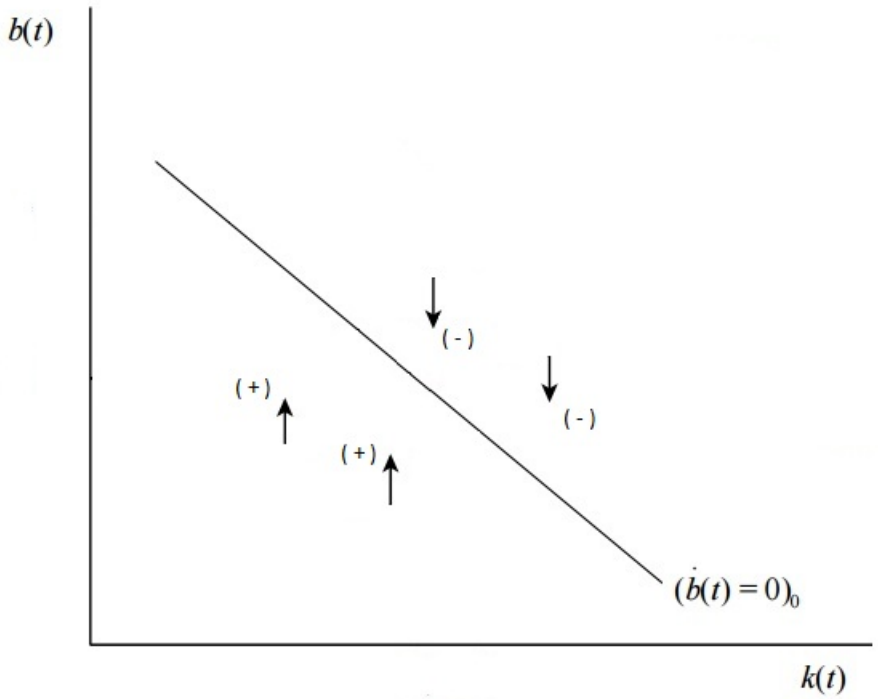

Figura 5.3: Isóclina $b(t) = 0$
Fonte: Elaboração Própria.

Desta forma, a partir da equação (5.74) e (5.75)= (5.68), e das Figuras 5.2 a 5.4, podemos chegar aos seguintes resultados:

$$\dot{b}(t) = [f^{'}k(t) - \delta - n - \xi]b(t) + g(t) - \tau_0 \tag{5.75}$$

Na ausência de financiamento e dívida do governo, $(\dot{b}(t) = b(t) = 0)$, isso implica que $g(t) = \tau_0$, dessa forma o gasto do governo é igual a receita tributária.

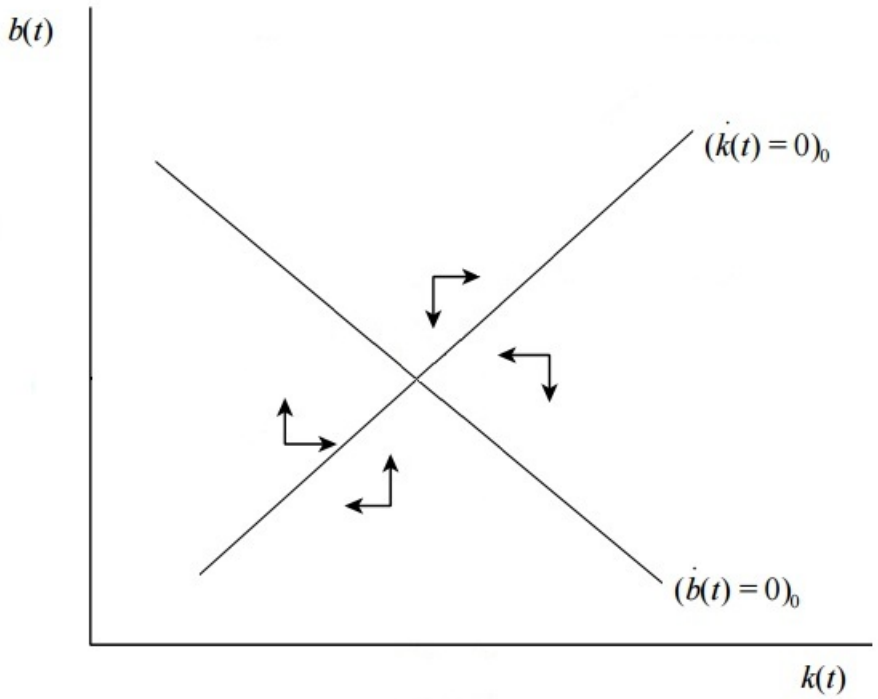

Figura 5.4: Diagrama de fase
Fonte: Elaboração Própria.

Assim, em termos da Figura 5.4, acima, que representa a junção das Figuras 5.2 e 5.3, tem-se que, quando $\dot{b}(t) > 0$, o serviço da dívida e o gasto do governo é maior que a receita tributária. Para os pontos acima (abaixo) da isóclina $\dot{b} = 0$, há um excedente do governo (déficit), portanto a dívida irá cair (aumentar). Isso é indicado pela setas verticais nas Figura 5.3 e 5.4. A regra de Buiter de estabilização da dívida (5.56), assegura que a economia segue uma ajustamento estável, como pode ser verificado pelas Figuras 5.2 a 5.4.

5.3 Não verificação de Equivalência Ricardiana

Agora considere um experimento do tipo equivalência ricardiana, que consiste em um adiamento da tributação. No modelo essa quantidade diz respeito a redução em τ_0. Isso irá criar um déficit primário de impacto ($g(t) > \tau_0$), portanto a dívida do governo começa a aumentar, $\dot{b} > 0$.

Em termos da Figura 5.5, abaixo, tanto a isóclina $\dot{k} = 0$, como a isóclina $\dot{b} = 0$, se desloca para cima, o último irá se deslocar mais que o primeiro. No longo prazo, a dívida do governo, o estoque de capital, e o produto (todos medidos em unidade eficiente de trabalho), aumentam, como resultado da diminuição do imposto.

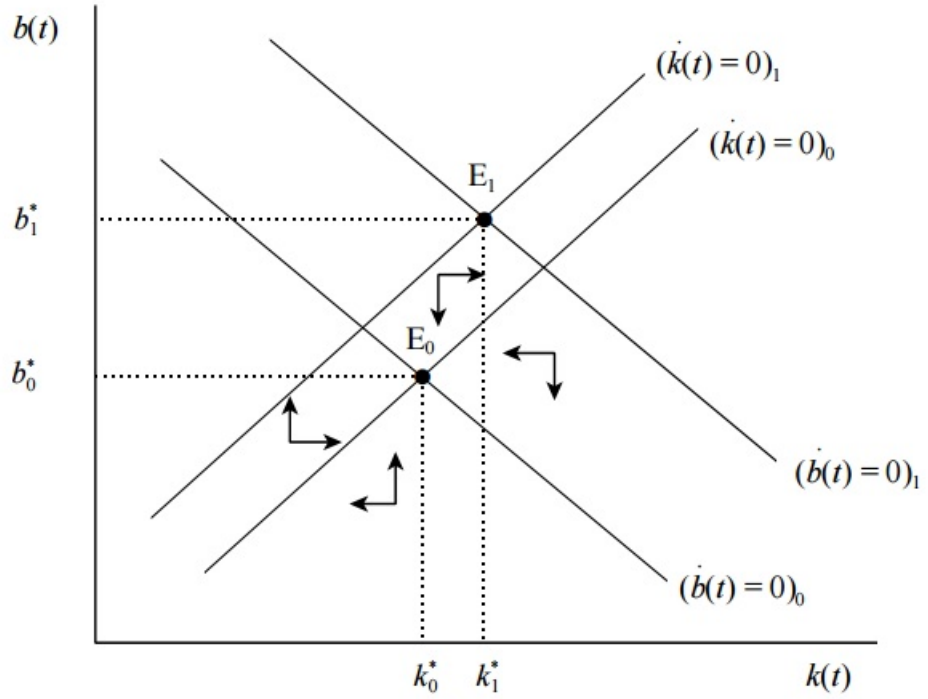

Figura 5.5: Não Verificação da Equivalência Ricardiana no Modelo de Solow-Swan
Fonte: Heijdra e Ploeg (2002).

Isso pode ser apresentando mais formalmente a partir da forma matricial das equações (5.61) e (5.75) que possibilita chegar as equações (5.79) e (5.80).

$$\begin{bmatrix} \dot{b}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f'(k(t)) - \delta - n - \xi) & 0 \\ (1-s)\xi & -(\delta + n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(t) - \tau_0 \\ sf(k(t)) + (1-s)\tau_0 - g(t) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Sabemos que $r(t) = f^{'}(k(t)) - \delta$ (5.4).

$$\begin{bmatrix} \dot{b}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r-n-\xi) & 0 \\ (1-s)\xi & -(\delta+n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(t)-\tau_0 \\ sf(k(t)) + (1-s)\tau_0 - g(t) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Onde:

$$|A| = \begin{vmatrix} (f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi) & 0 \\ (1-s)\xi & -(\delta+n) \end{vmatrix}; \quad |A| > 0 \quad (5.78)$$

Como $|A| > 0$; $tr[A] < 0$ e $tr[A]^2 > 2det(A)$, então o equilíbrio é estável, conforme está descrito nas Figuras 5.2 a 5.5.

$$\frac{dy(\infty)}{d\tau_0} = \frac{f^{'}dk(\infty)}{d\tau_0} = -\frac{(1-s)(r-n)f^{'}}{|\Delta|} < 0 \quad (5.79)$$

$$\frac{db(\infty)}{d\tau_0} = \frac{sf^{'} - (\delta+n) + (1-s)bf^{''}}{|\Delta|} < 0 \quad (5.80)$$

Onde, $|\Delta| = [(r-n)-\xi][-(n+\delta)+sf^{''}] - (1-s)b\xi f^{''} > 0$, que representa o determinante da matriz jacabiana do sistema de equações diferenciais com duas equações, e o $tr(|\Delta|) = -[\xi-(r-n)] - [n+\delta-sf^{''}]$. Abaixo é apresentado a matriz jacobiana e a dedução de (5.79) e (5.80).

A partir das equações (5.75)=(5.81) e (5.61)=(5.82), é determinado $\frac{dy(\infty)}{d\tau_0}$ e $\frac{db(\infty)}{d\tau_0}$.

$$\dot{b}(t) = [f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi]b(t) + g(t) - \tau_0 \quad (5.81)$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (\delta+n)k(t) + (1-s)[\tau_0 + \xi b(t)] - g(t) \quad (5.82)$$

Considerando $\dot{b}(t) = 0$ e $\dot{k}(t) = 0$, fazer a diferencial com relação a k(t) e b(t):

$$(f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi)db + bf^{''}(k(t))dk - d\tau_0 = 0 \tag{5.83}$$

$$(1-s)\xi db + sf^{'}(k(t))dk - (\delta + n)dk + (1-s)d\tau_0 = 0 \tag{5.84}$$

Fazendo a forma matricial das equações acima:

$$\begin{bmatrix} (f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi) & bf^{''}(k(t)) \\ (1-s)\xi & sf^{'}(k(t)) - (\delta + n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} db(t) \\ dk(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\tau_0 \\ -(1-s)d\tau_0 \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

Onde a matriz jacobiana é representada abaixo:

$$\mid J \mid = \begin{bmatrix} (f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi) & bf^{''}(k(t)) \\ (1-s)\xi & sf^{'}(k(t)) - (\delta + n) \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

Aplicando a regra de Cramer chegamos:

$$db = \frac{\begin{vmatrix} d\tau_0 & bf^{''}(k(t)) \\ -(1-s)d\tau_0 & sf^{'}(k(t)) - (\delta + n) \end{vmatrix}}{|J|} \tag{5.87}$$

$$db = \frac{d\tau_0(sf^{'} - (\delta + n)) + d\tau_0(1-s)bf^{''}}{|J|} \tag{5.88}$$

$$\frac{db(\infty)}{d\tau_0} = \frac{sf^{'} - (\delta + n) + (1-s)bf^{''}}{|J|} < 0 \tag{5.89}$$

Dessa forma, a equação (5.89)=(5.80)

É preciso ainda determinar, $\frac{dy(\infty)}{d\tau_0}$:

Sabemos que:

$$y(k(t)) = f(k(t)) \tag{5.90}$$

$$dy(k(t)) = f^{'}(k(t))dk(t) \tag{5.91}$$

$$\frac{dy(k(t))}{d\tau_0} = \frac{f^{'}(k(t))dk(t)}{d\tau_0} \tag{5.92}$$

Pela regra de Cramer:

$$dk \;\; = \frac{\begin{vmatrix} (f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi) & d\tau_0 \\ (1-s)\xi & -(1-s)d\tau_0 \end{vmatrix}}{|J|} \tag{5.93}$$

$$dk \;\; = \frac{-(f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi)(1-s)d\tau_0 - (1-s)\xi d\tau_0}{|J|} \tag{5.94}$$

$$\frac{dk}{d\tau_0} \;\; = \frac{-(f^{'}(k(t)) - \delta - n - \xi)(1-s) - (1-s)\xi}{|J|} \tag{5.95}$$

$$\frac{dk}{d\tau_0} \;\; = \frac{-(r-n)(1-s) + (1-s)\xi - (1-s)\xi}{|J|} \tag{5.96}$$

$$\frac{dk(\infty)}{d\tau_0} \;\; = \frac{-(r-n)(1-s)}{|J|} \tag{5.97}$$

Dessa forma teremos:

$$\frac{dy(\infty)}{d\tau_0} = \frac{f^{'}dk(\infty)}{d\tau_0} = -\frac{(1-s)(r-n)f^{'}}{|J|} < 0 \tag{5.98}$$

Onde a equação (5.98)=(5.79)

Dessa forma, observa-se que a equivalência ricardiana não é verificada no modelo de Solow. Denota-se este fato, pois de acordo com as deduções demonstradas neste capítulo e as Figuras 5.2 a 5.5, um corte temporário do imposto irá estimular o consumo, diminuir o investimento, $\frac{d\dot{k}(0)}{d\tau_0} = -\frac{dc(0)}{d\tau_0} = 1 - s > 0$, e portanto afeta economia real. Desse modo, a dinâmica verificada no modelo de Solow é contrária a ideologia de que um corte temporário do imposto não afetará a economia real, oferecida pela equivalência ricardiana.

Capítulo 6

Conclusão

O Modelo de Solow ajuda a esclarecer a dinâmica das variáveis macroeconômicas em um ambiente de crescimento econômico sustentado. Apesar de formulação simples, o modelo apresentado é consistente e receptível a variações para adaptar-se às situações verificadas através de estudos empíricos.

A principal conclusão do Modelo de Solow é a de que a poupança não afeta a taxa de crescimento no longo prazo, entretanto, afeta o nível de renda de longo prazo. O modelo também assumiu um estado estacionário, onde a variação na taxa de crescimento econômico acompanhará a taxa de crescimento da mão-de-obra, sendo esta uma variável exógena, o que acarretará em uma estagnação na taxa de crescimento em termos per capita.

Posteriormente, o modelo foi estendido com a finalidade de que fosse observada a produtividade do trabalho. Foi acrescentado a variável exógena relativa ao progresso técnico, que melhora a produtividade da mão-de-obra. No estado estacionário do Modelo de Solow com Progresso Técnico poderá ocorrer um aumento na taxa de crescimento por unidade efetiva do trabalho, porém, o progresso técnico, responsável por este crescimento, é exógeno ao modelo.

O Modelo de Solow apresentou duas conclusões quanto a diferenças entre as taxas de crescimentos dos países. Na Hipótese de Convergência Absoluta (HCA), o modelo demonstrou que os países pobres estavam afastados do estado estacionário e, desta forma, iriam apresentar taxas de crescimento elevadas em relação aos países ricos, que se encontravam próximos ao estado estacionário. Após a HCA não ser confirmada pelos estudos empíricos, foi formulada a Hipótese de Convergência Condicional (HCC),

no qual cada país apresenta taxa de poupança diferente, e assim, um estado estacionário diferente. A HCC convencionou que a convergência entre os países se daria entre países características econômicas semelhantes, e explicou em parte a variação nas taxas de crescimento entre os países.

Como a taxa de crescimento da mão-de-obra e o progresso técnico são obtidos de forma exógena ao modelo, conclui-se que, para o Modelo de Solow, a taxa de crescimento de longo prazo da economia, em termos per capita, não será influenciada pela política governamental. Entretanto, políticas fiscais podem afetar o nível das variáveis macroeconômicas na transição ao estado estacionário.

Entretanto, o Modelo de Solow permite estudar políticas macroeconômicas que visem o aumento do bem-estar da população. O modelo prevê que há um nível de poupança ótimo, denominado Golden Rule, no qual o consumo por unidade efetiva do trabalho é maximizado, otimizando o bem-estar dos agentes, sem alterar a taxa de crescimento da renda por unidade efetiva do trabalho nesta economia.

O Modelo de Solow pode ser usado para estudar questões macroeconômicas como o efeitos de políticas fiscais, o financiamento dos gastos públicos via impostos ou via endividamento e a equivalência ricardiana.

O modelo estudado prevê que uma política fiscal de financiamento dos gastos públicos via impostos apresenta um impacto inicial, no qual o consumo privado e o investimento líquido (em unidade efetiva do trabalho) diminuem, porém o produto não é alterado. Ao longo do tempo o estoque de capital por unidade de trabalho efetivo irá diminuir gradualmente, alterando os níveis das variável macroeconômicas do modelo.

Para uma política fiscal de financiamento de gasto público via endividamento, o Modelo de Solow prevê que quando há um excedente do governo, a dívida pública irá cair. Do mesmo modo, quando há um déficit do governo, a dívida pública irá aumentar. Desta modo, a economia segue um ajustamento estável.

A equivalência ricardiana não é verificada no Modelo de Solow. De acordo com o modelo, uma diminuição temporária de impostos afeta a economia real, pois irá estimular o consumo e diminuir o investimento.

Conclui-se, então, que o Modelo de Solow, apesar de não oferecer todas as respostas, é uma ferramenta consistente no estudo do crescimento econômico. O modelo apresenta características da dinâmica entre as variáveis macroeconômicas no longo prazo e permite o estudo de questão macroeconômicas atuais. Desta forma, e por apresentar grande aceitabilidade à adaptações, o Modelo de Solow é importante para o desenvolvimento de estudos referentes ao crescimento econômico e políticas macroeconômicas.

Entretanto, embora o Modelo de Solow tenha explicado grande parte do que se propôs, ele não endogeneizou no modelo as variáveis que definem a taxa de crescimento da economia. Assim, diversos outros célebres trabalhos foram elaborados com a finalidade de endogeneizar as variáveis responsáveis pela variação na taxa de crescimento de longo prazo, como o Modelo de Romer, a Economia das Idéias, o Modelo de Schumpeter e as teorias alternativas de crescimento endógeno. Observa-se, desta forma, que diversas teorias foram voltadas e relaxar as hipóteses simplificadoras de Solow, assim como para considerar fundamentos microeconômicos no modelo de crescimento.

Desta forma, uma análise formal das novas teorias de crescimento, como as citadas acima, e uma comparação com o Modelo de Solow, são assuntos quem podem ser tratados futuramente. Há também que se considerar o estudo da influência das expectativas dos agentes no modelo de Solow e a determinação da origem da não verificação da equivalência ricardiana, temas que também podem ser tratados em trabalhos futuros.

Apêndice A

Primeiro Apêndice

Determinação da equação diferencial fundamental do modelo de Solow com presença de progresso tecnolgíco.

$$I(t) = \delta k(t) + \dot{K}(t) \tag{A.1}$$

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) \tag{A.2}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = \frac{S(t)}{N(t)} - \delta \frac{K(t)}{N(t)} \tag{A.3}$$

onde $N(t) = A(t)L(t)$, que representa trabalho efetivo

Sabemos que $S(t) = sY(t)$, portanto teremos:

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = \frac{sY(t)}{N(t)} - \delta \frac{K(t)}{N(t)} \tag{A.4}$$

A função de produção tem a seguinte forma: $Y(t) = F(K(t), N(t))$

A função de produção na forma intensiva, poderá ser expresso como:

$$\frac{Y(t)}{N(t)} = F(\frac{K(t)}{N(t)}, 1) \tag{A.5}$$

$$y(t) = f(k(t)) \tag{A.6}$$

Equação (A.6) está na forma intensiva.

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = sy(t) - \delta k(t) \tag{A.7}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = sf(k(t)) - \delta k(t) \tag{A.8}$$

É preciso deixar o termo da esquerda da expressão (A.8) (A1.7) na forma de variável por trabalho efeito. Para isso é preciso fazer a diferencial em relação a t.

$$\frac{d(\frac{K(t)}{N(t)})}{dt} = \frac{d(\frac{K(t)}{A(t)L(t)})}{dt} = \frac{\dot{K}(t)A(t)L(t) - K(t)\dot{A}(t)L(t) - k(t)A(t)\dot{L}(t)}{(A(t)L(t))^2} \tag{A.9}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)l(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\frac{L(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{A.10}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{N(t)} - k(t)n_A - k(t)n_L \tag{A.11}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = \dot{k}(t) + k(t)n_A + k(t)n_L \tag{A.12}$$

Substituir (A.12) em (A.8) e (A1.11) em (A1.7), podemos chegar em (A.14) que é igual a (3.8)

$$\dot{k}(t) + k(t)n_A + k(t)n_L = sf(k(t)) - \delta k(t) \tag{A.13}$$

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n_L + n_A)k(t) \tag{A.14}$$

Apêndice B

Segundo Apêndice

Determinação da taxa de crescimento do produto e do estoque de capital no ponto de equilíbrio no modelo de Solow com presença de progresso tecnolǵico.

$$k(t) = \frac{K(t)}{N(t)} = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{B.1}$$

Fazer a transformação de (B.1) (A2.1) em logaritmico e sua diferencial:

$$Ln(k(t)) = ln(K(t)) - Ln(A(t)L(t)) \tag{B.2}$$

$$Ln(k(t)) = ln(K(t)) - Ln(A(t)) - Ln(L(t)) \tag{B.3}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{B.4}$$

Como no ponto de equilíbrio, $k(t)$ é uma constante, então sua taxa de crescimento é zero, dessa forma.

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{B.5}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = n_A + n_L \tag{B.6}$$

Temos:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)} = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \tag{B.7}$$

Fazer a transformação logaritmica e sua diferencial da expressão (B.7):

$$ln(y(t)) = ln(Y(t)) - ln(A(t)) - ln(L(t)) \tag{B.8}$$

O produto no ponto de equilíbrio $y^*(0)$, é fixo, dessa forma sua taxa de crescimento é zero.

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = 0 \tag{B.9}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = n_A + n_L \tag{B.10}$$

Temos: $S(t) = sY(t)$ e $I(t) = S(t)$

$$Ln(S(t)) = Ln(s) + Ln(Y(t)) \tag{B.11}$$

Fazer a diferencial da equação (B.11) (A2.10)

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \quad e \quad \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \tag{B.12}$$

Temos, $N(t) = A(t)L(t)$

Fazer a transformação em logartimico e sua diferencial da expressão acima

$$Ln(N(t)) = Ln(A(t)) + Ln(L(t)) \tag{B.13}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{A}}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{B.14}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = n_A + n_L \tag{B.15}$$

Unindo as seguintes informações: (B.6),(B10),(B12) e (B.15) ; (A2.6), (A2.9), (A2.11) e (A2.14), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_L + n_A \tag{B.16}$$

que é igual a equação (3.10).

Referências Bibliográficas

[1] Acemoglu, D. ***Introduction to Modern Economic Growth***, Princeton University Press, 2009, 999pp.

[2] Barro, Robert, J e Sala-i-Martin, Xavier. ***Economic Growth***, The MIT Press, 2004, 2a ed., 654pp.

[3] Barro, Robert, ***Determinants of Economic Growth: A Cross-Country Empirical Study***, The MIT Press, 1998, 160pp.

[4] Buiter, Willem, H. *Death, Birth, Productivity Growth and Debt Neutrality,* ***The Economic Journal***, Vol. 98, N.391, 1992, pp. 279-293.

[5] Heidra, J. Heidra e Van Der Ploeg, Frederick. ***Foundations of Modern Macroeconomics***, Oxford University Press, 2002, 751pp.

[6] Jones, Charles, I. ***Introdução à Teoria do Crescimento Econômico***, Editora Campus, 2000, 179pp.

[7] Jones, Charles, I. ***Macroeconomics***, W.W. Norton & Company Press, 2008, 475pp.

[8] Lucas, Jr., Robert, E.. ***Lectures on Economic Growth***, Harvard University Press, 2002, 204pp.

[9] Mankiw, Gregory, N., Romer, David, e Weil, David, N. *A Contribution to the Empirics of the Economic Growth,* ***The Quarterly Journal of Economics***, Vol. 107, N.2, 1992, pp. 407-437.

[10] Solow, Robert M. *A Contribution to the theory of Economic Growth,* ***The Quartely Journal of Economics****, vol.70, N.1, 1956, pp.65-94*

[11] Swan, T. W. *Economic Growth and Capital Accumulation,* ***Economic Record****, vol.32, 1956, pp.334-361*

[12] The World Bank, *GDP per capita, PPP (current internacional $).2015. Disponível em:* , <http://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.CD?order=wbapi_data_value_ _data_value+wbapi_data_value-last sort=desc>. Acesso em: 12 jun. 2015.