

**CARLOS EDUARDO STEINSTRASSER**

**MÉTODO DIFUSIVO DE LAX APLICADO NA SOLUÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DE SAINT VENANT**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Recursos Hídricos, pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.**

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Miriam R. M. Mine**

**Co-orientador: Prof. Eloy Kaviski**

**CURITIBA**

2005

## AGRADECIMENTOS

*Aos professores e colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental.*

*À professora Miriam Rita Moro Mine, pela orientação e ajuda na conclusão deste trabalho.*

*Ao professor Eloy Kaviski, pela amizade, apoio e orientação segura.*

*Aos demais amigos que muito contribuíram para a execução deste trabalho, em especial a: André Fabiani, Laertes Munhoz da Cunha, Dalton B. Pereira Filho, Maurício Muller, Giancarlo Castanharo, Marcelo Bessa, José Jungi Ota, Gilberto Bobko e Irani dos Santos.*

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	
<b>RESUMO</b> .....	
<b>ABSTRACT</b> .....	
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....
1.1	GERAL..... 1
1.2	OBJETIVOS..... 3
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO..... 4
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> ..... 5
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DE SAINT VENANT</b> .....
3.1	GERAL..... 11
3.2	EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE..... 14
3.3	EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO..... 15
3.4	FÓRMULAS NÃO-CONSERVATIVAS..... 22
3.5	CANAL RETANGULAR DE GRANDE LARGURA..... 23
3.6	EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS..... 24
<b>4</b>	<b>ESQUEMA DIFUSIVO DE LAX</b> .....
4.1	GERAL..... 26
4.2	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE DE COURANT..... 29
<b>5</b>	<b>ESTUDOS DE CASOS</b> .....
5.1	GERAL..... 30
5.2	CALHA DE GRANDES DIMENSÕES..... 34
5.3	VERTEDOR LATERAL EM BARRAGENS..... 38
5.4	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL DE GRANDE LARGURA..... 43
5.5	RUPTURA DE BARRAGEM..... 46
5.6	FECHAMENTO INSTANTÂNEO DE COMPORTA..... 49
5.7	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO IGUAÇU..... 52
5.8	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO CHOPIM..... 58
5.9	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL CIRCULAR..... 62
5.10	REDE DE CANAIS DE IRRIGAÇÃO..... 67
5.11	RESSALTO HIDRÁULICO..... 72
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> ..... 74
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> ..... 80
	<b>APÊNDICE - PROGRAMAS EM MATLAB</b> ..... 83

## LISTA DE TABELAS

5.2.1	CALHA DE BARRACÃO INDUSTRIAL.....	37
5.3.1	VERTEDOR LATERAL .....	42
5.4.1	VAZÕES AO LONGO DO CANAL.....	45
5.6.1	FECHAMENTO DE COMPORTA .....	51
5.7.1	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO IGUAÇU.....	57
5.8.1	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM ÁGUAS DO VERÊ.....	61
5.9.1	PROFUNDIDADES NO INTERIOR DO TUBO.....	66

## LISTA DE FIGURAS

3.1	VOLUME DE CONTROLE EM TRECHO ELEMENTAR DE CANAL.....	11
3.2	ILUSTRAÇÃO DE FORÇAS ATUANTES EM TRECHO DE CANAL .....	12
4.1.1	PLANO DE DISCRETIZAÇÃO.....	29
5.2.1	VAZÕES NA SEÇÃO FINAL.....	36
5.2.2	PERFIL DE PROFUNDIDADES NA CALHA.....	36
5.2.3	VELOCIDADES AO LONGO DA CALHA.....	36
5.3.1	VOLUME DE CONTROLE .....	38
5.3.2	VAZÕES NA SEÇÃO FINAL.....	40
5.3.3	NÚMERO DE FROUDE .....	40
5.3.4	PERFIL DE PROFUNDIDADES APÓS 25 SEGUNDOS.....	41
5.3.5	VELOCIDADES APÓS 25 SEGUNDOS.....	41
5.4.1	PROPAGAÇÃO DE VAZÕES.....	44
5.5.1	RUPTURA DE BARRAGEM .....	46
5.5.2	NÚMERO DE FROUDE .....	47
5.5.3	SOLUÇÃO PROPOSTA .....	48
5.5.4	RUPTURA DE BARRAGEM – OUTRAS SOLUÇÕES .....	48
5.6.1	PROP. DA ONDA NEGATIVA NO FECHAMENTO DE COMPORTA.....	50
5.7.1	VAZÕES MEDIDAS E CALCULADAS EM FLUVIÓPOLIS E U.V.....	55
5.8.1	PREVISÃO DE VAZÕES EM ÁGUAS DO VERÊ.....	59
5.9.1	PROFUNDIDADES NA SEÇÃO INICIAL.....	63
5.9.2	PROFUNDIDADES NA SEÇÃO 12 M .....	63
5.9.3	PROFUNDIDADES NA SEÇÃO 16 M .....	64
5.9.4	PROFUNDIDADES NA SEÇÃO 20 M .....	64
5.9.5	PERFIL DE PROFUNDIDADES NO INSTANTE INICIAL .....	65
5.10.1	REDE DE CANAIS .....	67
5.10.2	VAZÕES NAS SEÇÕES INICIAL E FINAL AO LONGO DE 5 HORAS .....	70
5.10.3	PROFUNDIDADES NOS NÓS 2, 3 E 4 AO LONGO DAS 5 HORAS .....	71
5.11.1	PERFIL DE ALTURAS.....	72
5.11.2	NÚMERO DE FROUDE .....	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\beta$	coeficiente de correção da quantidade de movimento (adimensional)
$\gamma$	peso específico ( $\text{N.m}^{-3}$ )
$\theta$	ângulo formado pelo fundo do canal com a horizontal ( $^{\circ}$ )
$\rho$	densidade da água ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\tau$	tensão tangencial ( $\text{N.m}^{-2}$ )
$A$	área da seção transversal do canal ( $\text{m}^2$ )
$B$	largura da seção transversal na superfície livre (m)
$b$	largura do canal em função da cota (m)
$B$	largura do canal na cota da superfície livre (m)
$C_f$	coeficiente de forma (adimensional)
$D$	coeficiente da equação da continuidade definido por A/B (m)
$F_a$	força de resistência tangencial ao escoamento (N)
$F_g$	força da gravidade (N)
$F_{pd}$	força hidrostática atuante no escoamento (N)
$F_{pe}$	força hidrostática atuante no escoamento (N)
$F_{pm}$	força hidrostática atuante no escoamento (N)
$F_w$	força devida ao vento (N)
$F_p$	força hidrostática atuante no escoamento (N)
$F_e$	força devido à expansão brusca da seção transversal (N)
$Fr$	número de Froude $V/c$ (adimensional)
$c$	celeridade ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$g$	aceleração da gravidade ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$h$	cota da superfície livre do escoamento (m)
$i$	índice representativo de uma linha de $x$ constante da malha “x-t” (adimensional)
$j$	índice representativo de uma linha de tempo da malha “x-t” (adimensional)
$L$	comprimento do talvegue principal da bacia hidrográfica (Km)
$n$	coeficiente de rugosidade de Manning ( $\text{m}^{1/3}.\text{s}$ )
$P$	perímetro molhado (m)
$q$	contribuição lateral ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$q$	vazão lateral por unidade de comprimento do canal ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$Q$	vazão genérica no canal ( $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ )
$R$	raio hidráulico (m)
$QF$	vazão na seção final do canal ( $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ )
$S_0$	declividade do fundo do canal (m/m ou m/Km)
$S_f$	declividade da linha de energia (m/m)
$V$	velocidade média (na notação original das equações de Saint-Venant) ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$B(x)$	largura da superfície livre na seção $x$ (m)
$V_v$	velocidade média do escoamento ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$\forall$	volume ( $\text{m}^3$ )
$v_x$	projeção da velocidade da contribuição lateral na direção positiva do eixo do canal ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$w$	distância em relação ao fundo do canal (m)
$W_f$	efeito de resistência do vento ( $\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ )
$x$	distância longitudinal ao longo do canal, positiva no sentido de jusante (m)
$y$	profundidade do escoamento (m)
$z$	cota da superfície livre (m)
$\Delta t$	intervalo de tempo (s)
$\Delta x$	intervalo de discretização do espaço (m)

## RESUMO

O estágio de desenvolvimento dos computadores está intimamente associado ao desenvolvimento dos métodos numéricos. Neste ambiente, é possível que desponham novos processos de resolução de equações diferenciais parciais, e que métodos descartados no passado possam ser reavaliados. Este trabalho propõe-se a verificar esta possibilidade. Um método explícito de diferenças finitas – Método Difusivo de Lax – foi escolhido para solucionar problemas modelados pelas equações completas de Saint Venant. O método provou ser estável, convergente e suficientemente preciso para aplicações práticas, se: a condição de Courant for atendida; as condições iniciais e de contorno estiverem perfeitamente definidas; as premissas usadas na derivação das equações de Saint Venant não forem ultrapassadas e a solução não apresentar ondas de choque.

Para o caso de propagação de vazões em rios com largura variável, foi desenvolvido um procedimento de avaliação da contribuição lateral que, nos dois casos estudados, determinou um erro médio, entre as vazões calculadas e medidas no campo, da ordem de 6%. Com pequenas adaptações no programa computacional básico, o método mostrou ser igualmente eficiente no cálculo de uma rede de canais interligados. Vários problemas encontrados em publicações técnicas foram recalculados e os resultados comparados.

Palavras-chave: método difusivo de Lax; modelos hidrodinâmicos; equações de Saint Venant.

## ABSTRACT

In the last decade computers had their processing capacity improved to unforeseeable possibilities. Processes to solve partial differential equations will certainly be impacted by their ever-increasing speed and storage capacity. As a consequence, simpler numerical methods may be devised and old forgotten ones revived. This work experiments on this possibility. A very basic explicit numerical method – Lax diffusive method – was chosen to solve the complete Saint Venant's equations. The method proved to be stable and convergent, provided that: time step is slightly stricter than the Courant condition; initial and boundary conditions are perfectly defined; Saint Venant's basic assumptions are not trespassed; and shock waves are not present in the solution.

The same method also demonstrated to be equally efficient to solve a network of interconnected channels. It was also suggested a procedure to estimate the lateral inflow in flood routing based on historical river data. It was tested in two case studies with promising results.

Key-words: Lax diffusive method; hydrodynamic models; Saint Venant equations; river hydraulics.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GERAL

Na natureza qualquer alteração no regime ou na morfologia de rios, lagos e oceanos tem um impacto no meio ambiente e na sociedade. Desta forma, toda atividade que possa afetar o equilíbrio natural é motivo de cuidado e preocupação.

Devido à complexidade dos fenômenos naturais e à dificuldade de repeti-los em laboratório, recorre-se a modelos que, aproximadamente, propõem-se a representar o mundo real. Quando o fenômeno observado tem propriedades mensuráveis utilizam-se modelos matemáticos.

A maioria dos modelos matemáticos no campo da engenharia de recursos hídricos destina-se a prever impactos ambientais de projetos específicos. Aplicações típicas envolvem propagação de vazões, rupturas de barragens, prevenção de inundações, transporte de sedimentos e reabilitação de rios e lagos.

Os modelos matemáticos usados para simular propagação de vazões em rios e canais variam desde modelos unidimensionais com as equações de Saint Venant até modelos tridimensionais com as equações de Navier-Stokes aproximados para fluidos incompressíveis e com superfície livre. Devido à dificuldade de solução, mesmo para o caso unidimensional, são utilizadas inúmeras simplificações como a onda cinemática e o modelo difusivo (CROSSLEY, 1999).

Todavia, as equações Saint Venant são capazes de prever resultados práticos importantes e muitos dos programas comerciais existentes não vão além do modelo unidimensional.

Por outro lado, a geometria irregular dos rios, transições de regime supercrítico para subcrítico e vice-versa, com formação de ondas de choque, podem levar a resultados incorretos, instabilidade e não-convergência do sistema de equações.



Visto por essa ótica, a simulação de problemas de propagação de vazões em rios e canais, através da solução das equações de Saint-Venant, não tem sido uma tarefa simples. Os caminhos são diversos: diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, elementos de contorno, métodos espectrais e método das características.

Somente no campo das diferenças finitas explícitas ZOPPOU (2003) analisou a eficiência de 20 métodos diferentes na solução de problemas de ruptura de barragens.

A história dos métodos numéricos, para a solução de equações diferenciais parciais, inicia-se pela utilização de diferenças finitas explícitas. Em geral, estes processos são apresentados como métodos ingênuos, instáveis e antiquados, principalmente quando comparados aos métodos importados da engenharia estrutural e aeronáutica.

Nesta dissertação, com o auxílio do programa MATLAB, foram programados alguns problemas encontrados na literatura especializada e verificou-se que o método de diferenças finitas explícitas é estável, desde que se atenda a condição de Courant e a rotina de programação seja adequada.

A possibilidade de se utilizar as equações completas de Saint Venant (modelo hidrodinâmico unidimensional) permite que transientes hidráulicos complexos sejam avaliados com precisão.

Bons resultados dependem fundamentalmente da definição precisa dos contornos e condições iniciais, e não do método em si. A convergência dos resultados obtida nos estudos de casos deve-se, principalmente, aos contornos bem resolvidos.

Após a definição do núcleo do programa e alguma proficiência na configuração dos contornos, pode-se transitar por problemas com estruturas físicas diversas (inclusive redes de canais) conforme estudos de casos apresentados nesta dissertação.

## 1.2 OBJETIVOS

Neste trabalho pretende-se demonstrar, através da comparação de resultados medidos ou apresentados na literatura especializada, que as equações unidimensionais de Saint Venant (modelo hidrodinâmico) podem ser resolvidas com simplicidade e precisão, utilizando-se um método de diferenças finitas explícito.

A aplicação do método de Lax às equações completas de Saint Venant apresenta uma dificuldade na extrapolação de valores internos para os contornos. Os procedimentos para realizar estas extrapolações são vários e o resultado desta operação é essencial para a convergência dos resultados finais. O desenvolvimento de um procedimento confiável para a maioria das situações foi um dos objetivos deste trabalho.

Outro objetivo foi o desenvolvimento de um procedimento de avaliação da contribuição lateral em rios de largura variável, com base em dados históricos de vazões, que fosse suficientemente simples para aplicações práticas.

Finalmente, procurou-se desenvolver programas específicos para os casos estudados, na linguagem residente do MATLAB, que podem ser adaptados para novas aplicações.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, conclusão e apêndice com listagem de programas computacionais.

O capítulo 1 refere-se a esta introdução.

O capítulo 2 é uma revisão bibliográfica com o intuito de situar o método de Lax entre os inúmeros métodos numéricos utilizados na solução das equações de Saint Venant.

O capítulo 3 apresenta a demonstração das equações de Saint Venant com a inclusão de formas não-conservativas utilizadas neste trabalho.

O capítulo 4 apresenta o método de Lax.

O capítulo 5 é dedicado aos estudos de casos que incluem dois problemas reais de propagação de vazões em rios e um problema de rede de canais.

A seguir são apresentadas as conclusões finais, recomendações para pesquisas relacionadas com o tema escolhido e um apêndice com a listagem dos principais programas desenvolvidos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo ZIENKIEWICZ (1983), equações diferenciais parciais representam uma descrição quantitativa de fenômenos encontrados na natureza. O pesquisador estabelece um conjunto de equações válidas em uma certa região e impõe a este sistema condições iniciais e condições de contorno. A isto chamamos de modelo matemático e, nas aplicações práticas, é suficiente que se encontre uma solução particular para um conjunto dados. Paradoxalmente, é precisamente neste estágio que começam as dificuldades, pois somente as formas mais simples de equações diferenciais, com contornos triviais, podem ser resolvidas por métodos analíticos.

Uma equação diferencial parcial é chamada de quase-linear se for linear nas diferenciais parciais de maior ordem. Uma equação diferencial parcial quase-linear de segunda ordem, com variáveis dependentes  $x$  e  $y$ , pode ser representada por (KREYSZIG, 1993):

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

onde  $a, b, e c$  são funções de  $(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ .

Segundo esta equação genérica, que engloba a maioria das equações importantes da física, as equações diferenciais parciais de segunda ordem podem ser classificadas em três grandes grupos:

elípticas	$4ac - b^2 > 0$	(exemplo: Equação de Laplace)
parabólicas	$4ac - b^2 = 0$	(exemplo: Equação do calor)
hiperbólicas	$4ac - b^2 < 0$	(exemplo: Equação da onda)

Pode-se demonstrar que as equações de Saint Venant pertencem ao grupo das equações hiperbólicas.

A solução de equações diferenciais parciais mais complexas somente foi possível a partir da criação dos métodos numéricos que se desenvolveram paralelamente à capacidade de processamento dos computadores. Nos métodos numéricos o espaço contínuo é discretizado em intervalos finitos, dando origem a equações algébricas, que podem ser resolvidas pelo computador. Das inúmeras formas de discretização possíveis, a mais simples - o que não significa menos eficiente – é o processo de diferenças finitas.

A solução do problema numérico é sempre uma aproximação da solução do problema analítico, e vários conceitos foram desenvolvidos na tentativa de quantificar como as soluções numéricas se comparam às soluções ‘exatas’.

Três causas principais determinam erros em soluções numéricas:

(a) Erro de discretização: é devido à satisfação incompleta à equação analítica e seus contornos, e é introduzido pela dimensão da discretização, no caso de diferenças finitas, e pelas funções de aproximação no caso de métodos espectrais e elementos finitos.

(b) Erro de arredondamento: é introduzido a cada operação devido à impossibilidade do computador trabalhar com um número de discretização de tamanho infinito. Este erro tem sido continuamente minimizado pelos computadores modernos.

(c) Erro de aproximação: é devido ao modelo matemático ao qual é aplicado um método numérico para solucionar um problema real.

Existem inúmeras técnicas utilizadas para a simulação de problemas físicos modelados por equações diferenciais parciais. Segundo CROSSLEY (1999), para problemas de dinâmica dos fluidos, pode-se agrupar estes métodos em quatro grandes grupos:

- (a) método das diferenças finitas
- (b) método dos elementos finitos
- (c) métodos espectrais

(d) métodos dos volumes finitos

De maneira geral, um método de diferenças finitas representa o problema através de uma série de valores em pontos particulares. Expressões para as incógnitas são encontradas pela substituição das derivadas parciais nas equações do modelo por valores truncados da série de Taylor. Os primeiros esquemas numéricos estão baseados nesta idéia e são conceitualmente os métodos mais intuitivos e mais fáceis de implementar. O método de Lax aplicado às equações de Saint Venant é um exemplo desses métodos. Porém, quando vistos globalmente, sabe-se que o sucesso desses esquemas está associado a uma certa regularidade dentro da malha e isso limita um pouco a sua aplicação para problemas complexos. Mesmo assim, pela facilidade de implementação, é aconselhável que se experimente estes métodos antes de optar-se por esquemas mais complexos (SMITH, 1984).

A fundamentação do método dos elementos finitos está em dividir o domínio da função em elementos, tais como triângulos ou outras figuras geométricas, e localizar dentro deles nodos onde a solução numérica é determinada. A solução em uma posição genérica é determinada por uma expansão em séries dos valores nodais na vizinhança deste ponto. As contribuições nodais são multiplicadas por funções base (também conhecidas como funções de aproximação, funções de forma, funções de tentativa ou de interpolação), e a maneira particular como as funções são definidas determina a variante do método de elementos finitos escolhido. Originalmente o método dos elementos finitos foi desenvolvido para a análise de tensões e deformações em estruturas e, neste campo, sua utilidade é incontestável (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983).

Os métodos espectrais podem ser considerados como um subconjunto do método dos elementos finitos nos quais as funções base são definidas globalmente, em oposição à abordagem utilizada no método dos elementos finitos, onde estas funções são válidas dentro do elemento, e nulas fora deles (CROSSLEY, 1999).

As principais aplicações dos métodos espectrais concentram-se na área de dinâmica dos fluidos, com ênfase na solução de problemas que envolvem turbulência e transição, previsão do tempo, aerodinâmica e dinâmica oceanográfica. Os métodos espectrais também podem ser vistos como um desenvolvimento extremo do método de resíduos ponderados (CANUTO e al.,1988).

O método dos volumes finitos caracteriza-se pela discretização do domínio em volumes finitos, a partir de um modelo codificado em equações integrais, ao invés de equações diferenciais. Dentro de cada volume, as relações integrais são aplicadas no local e, desta forma, as leis de conservação são mantidas exatas dentro de cada célula. As expressões resultantes para as incógnitas são semelhantes às encontradas nos métodos de diferenças finitas e, dependendo do método escolhido, podem ser consideradas como um caso especial de diferenças finitas ou elementos finitos. Como os princípios de conservação estão presentes em praticamente todos os modelos da mecânica dos fluidos, o método dos volumes finitos tornou-se um dos mais promissores na abordagem de problemas que envolvam fluxo de fluidos (CROSSLEY, 1999).

No contexto da propagação de vazões em canais, a maioria dos trabalhos publicados utiliza diferenças finitas. Recentemente, a opinião dos especialistas parece apontar na direção de métodos com base em volumes finitos. Em situações específicas, elementos finitos e métodos espectrais também são empregados com sucesso.

Para que se quantifique a performance de uma determinada técnica na solução de um problema existem quatro critérios – precisão, consistência, estabilidade e convergência. Estes conceitos podem ser aplicados para comparar diferentes métodos (MALISKA, 1995). Teoricamente esses critérios aplicam-se a qualquer método embora sua formulação seja mais simples no campo das diferenças finitas.

Precisão é a medida de como a solução discretizada representa a solução exata do problema. Existem duas grandezas para quantificar a precisão, a primeira é o erro de truncamento que compara a equação discretizada com a equação diferencial original, a segunda é o erro global que reflete o erro total obtido quando a solução exata é conhecida. Comparando-se o esquema de Lax com a série truncada de Taylor, verifica-se que a discretização espacial conduz a um erro de segunda ordem, e a discretização temporal a um erro de primeira ordem.

Intuitivamente percebe-se que com a diminuição da malha de discretização todos os erros devem ser reduzidos. O conceito de consistência deriva desta idéia. Matematicamente, para que um método seja consistente, o erro de truncamento deve decrescer à medida que o tamanho da malha diminua, o que equivale a dizer:

Se  $\Delta t$  e  $\Delta x$  tendem a zero a equação discretizada tende para a equação diferencial original.

Formalmente, um esquema é considerado estável se o valor absoluto de qualquer erro na solução estiver limitado por um valor finito. Quando se usa um método instável a solução tende para o infinito. A maioria dos métodos utilizados tem limites de estabilidade que impõem restrições às dimensões das malhas. Condições de estabilidade são definidas por vários métodos - a escolha adequada depende do problema. Por exemplo, o método de Lax, aplicado às equações de Saint Venant, deve responder à condição de estabilidade de Courant.

Por definição, convergência significa que a solução deve tender para a solução exata quando a malha de discretização tende a zero. Nos casos práticos não se conhece a solução exata, logo é muito difícil provar a convergência de um esquema para um problema real. Neste caso usa-se o teorema da equivalência de Lax que estabelece o seguinte (CROSSLEY, 1999):

“Para um problema de valores iniciais, bem colocado, e um método consistente, estabilidade implica em convergência para o caso de sistemas



lineares”.

A expressão “problema bem colocado” significa que:

- (a) a solução deve existir;
- (b) a solução deve ser única;
- (c) a solução deve, de alguma forma, depender linearmente dos dados.

Para equações não-lineares, estabilidade e consistência são condições necessárias, porém não suficientes para a convergência.

A adequação de um esquema para resolver um problema específico depende do conjunto desses critérios.

### 3 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT

#### 3.1 GERAL

Saint Venant em 1871 (CANALI et al., 2003), equacionou o problema de escoamento não-permanente em canais, com as seguintes simplificações:

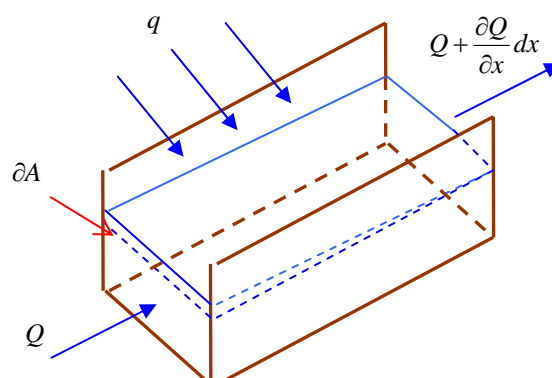
- (a) velocidade variável na direção longitudinal; em cada seção utiliza-se a velocidade média;
- (b) a distribuição de pressões, ao longo da vertical, na seção transversal é hidrostática;
- (c) as acelerações verticais não são consideradas;
- (d) o escoamento é unidimensional (1D);
- (e) o fluido é considerado incompressível e homogêneo;
- (f) a declividade do leito do canal é suficientemente pequena para que se possa aproximar o seno pela tangente; perdas de energia podem ser estimadas pela equação de Manning ou similar; o canal deve ser aproximadamente retilíneo, com pequena declividade e leito estável.

As equações de Saint Venant podem ser deduzidas a partir das equações da continuidade e conservação da quantidade de movimento, aplicadas a um volume de controle no interior do fluido em movimento.

No presente capítulo encontram-se a demonstração das equações de Saint Venant e de algumas fórmulas não-conservativas utilizadas nos estudos de casos. Uma demonstração sumária do método das características foi incluída no item 3.5, embora esta técnica não tenha sido utilizada nos estudos de casos.

A figura 3.1 ilustra um volume de controle em trecho elementar de canal.

**FIGURA 3.1 – VOLUME DE CONTROLE EM TRECHO ELEMENTAR DE CANAL**



Fonte: CASTANHARO (2003)

Onde:

$A$  - área da seção transversal do canal;

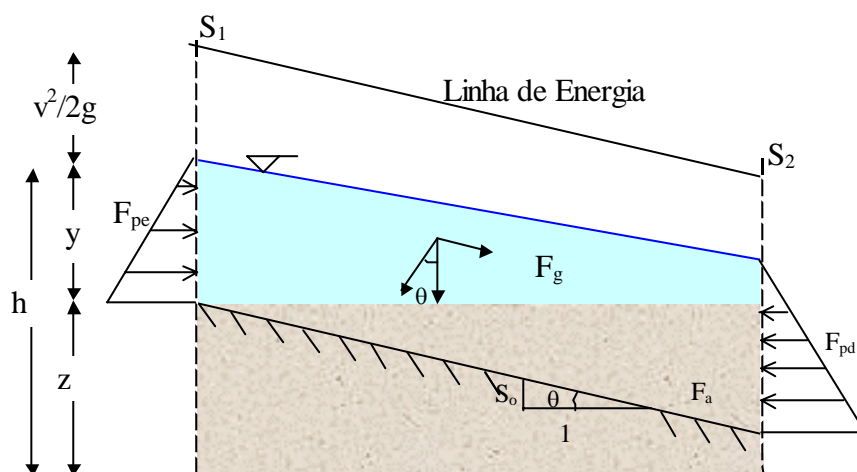
$Q$  - vazão do escoamento;

$q$  - contribuição lateral;

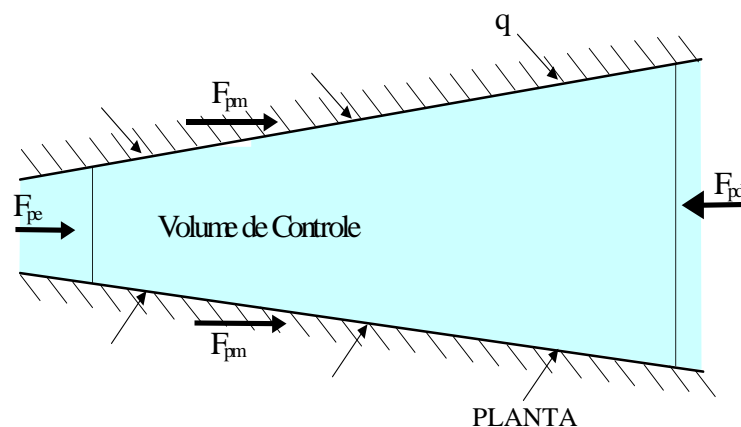
$dx$  - comprimento do trecho elementar de canal;

A figura 3.2 apresentada a seguir, ilustra as principais variáveis utilizadas na demonstração das equações de Saint Venant.

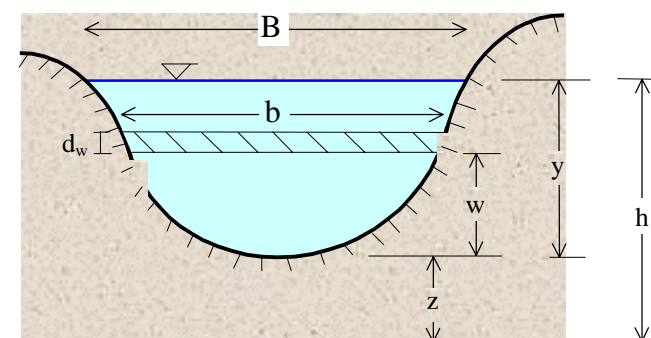
**FIGURA 3.2 – FORÇAS APLICADAS NO VOLUME DE CONTROLE**



## ELEVAÇÃO



## SEÇÃO TRANSVERSAL



Fonte: MULLER (2000)

Onde:

$b, B$  - largura do canal em função da cota e na superfície livre, respectivamente;

$q$  - contribuição lateral;

$y$  - profundidade do escoamento;

$z, h$  - elevação do fundo do canal e da superfície livre, respectivamente;

$V$  - velocidade média do escoamento;

$g$  - aceleração da gravidade;

$F_{pm}, F_{pd}, F_{pe}$  - forças hidrostáticas atuantes no escoamento;

$F_g$  ,  $F_a$  - força da gravidade e de resistência tangencial ao escoamento, respectivamente;

$\theta$  - ângulo formado entre o plano horizontal e o fundo do canal;

$S_0$  - declividade do fundo do canal;

### 3.2 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da continuidade para um escoamento não-permanente através de um volume de controle pode ser expresso pela equação (DAILY e HARLEMAN, 1966):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho dV = \iint_{s.c} \rho V dA, \quad (3.1)$$

O fluxo afluente ao volume de controle (sinal positivo) é representado por:

$$\iint_{entrada} \rho V dA = \rho(Q + q dx) \quad (3.2)$$

O fluxo defluente (sinal negativo) é expresso por:

$$\iint_{saída} \rho V dA = -\rho(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) \quad (3.3)$$

A variação da massa armazenada dentro do volume de controle é expressa por:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho dV = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} \quad (3.4)$$

Substituindo ( 3.2 ), ( 3.3 ) e ( 3.4 ) em ( 3.1 ), obtêm-se:

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} = \rho(Q + q dx) - \rho(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) \quad (3.5)$$

Se admitirmos que a densidade é constante, a equação (3.5) pode ser simplificada para a forma conservativa da equação da continuidade:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q. \quad (3.6)$$

### 3.3 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A equação da continuidade pode ser expressa por (DAILY e HARLEMAN, 1966):

$$\sum F = \frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} V \rho dV + \iint_{s.c.} V \rho V \cdot dA \quad (3.7)$$

A soma das forças aplicadas ao volume de controle é igual à variação da quantidade de movimento armazenada dentro volume de controle, mais a variação de quantidade de movimento através das superfícies de controle. A figura 3.2 ilustra a ação das forças atuando no volume e superfície de controle.

As forças atuantes no volume de controle são:

$$\sum F = F_g + F_a + F_e + F_w + F_p \quad (3.8)$$

onde:

$F_g$  - Força da gravidade na direção do fluxo

$F_a$  - Forças de resistência no fundo e laterais do volume de controle

$F_e$  - Força de contração ou expansão causada por mudança abrupta na seção do canal

$F_w$  - Força de atrito do vento sobre a superfície da água

$F_p$  - Forças de pressão

A componente da força de gravidade na direção do fluxo é expressa por:

$$F_g = \rho g A dx \sin \theta \approx \rho g A S_0 dx \quad (3.9)$$

onde:

$$S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad S_0 = \sin \theta \quad \text{para pequenas declividades no canal.}$$

As forças de resistência no fundo e laterais do volume de controle, podem ser representadas por (HENDERSON, 1966):

$$F_a = -\tau_0 P dx$$

onde:

$P$  - perímetro molhado

$\tau_0$  - tensão tangencial

$R = \frac{A}{P}$  raio hidráulico

$$\tau_0 = \gamma R S_f = \rho g \left(\frac{A}{P}\right) S_f .$$

Resultando:

$$F_a = -\rho g A S_f dx \quad (3.10)$$

Uma contração ou expansão abrupta no canal causa perda de energia devido à formação de vórtices. A quantificação destas perdas está relacionada à variação da energia cinética ( $V^2/2g$ ) ao longo do trecho de canal que causa estas perdas. As forças que geram estas perdas podem ser representadas por:

$$F_e = -\rho g A S_e dx \quad (3.11)$$

onde  $S_e$  é declividade da perda de carga por vórtices, e é expressa por:

$$S_e = \frac{K_e}{2g} \frac{\partial(V^2)}{\partial x} \quad \text{onde} \quad V = \frac{Q}{A} \quad (3.12)$$

e  $K_e$  é um coeficiente adimensional, negativo para expansão e positivo para contração.

A força de cisalhamento devida ao atrito causado pelo vento sobre a superfície da água é dada por:

$$F_w = \tau_w B dx \quad (3.13)$$

A tensão de cisalhamento que o vento exerce sobre um fluido pode ser representada por:

$$\tau_w = \frac{-\rho C_f V_r |V_r|}{2} \quad (3.14)$$

onde  $V_r$  é a velocidade relativa do fluido e  $C_f$  um coeficiente de forma. A velocidade relativa é calculada por:

$$V_r = \frac{Q}{A} - V_w \cos w \quad (3.15)$$

Logo, a força devido ao vento,  $F_w$  resulta:

$$F_w = \frac{-\rho C_f V_r |V_r|}{2} B dx = -W_f B \rho dx \quad (3.16)$$

A força de pressão é a resultante das forças que atuam a montante e a jusante do volume de controle, além da pressão exercida pelas superfícies laterais sobre o fluido:

$$F_p = F_{pe} - F_{pd} + F_{pm} \quad (3.17)$$

Sendo  $F_{pe}$  a força hidrostática que atua na seção de montante do volume de controle:

$$F_{pe} = \int_0^y \rho g (y-w) b dw \quad (3.18)$$

Sendo  $F_{pd}$  a força hidrostática que atua na seção de jusante do volume de controle:

$$F_{pd} = F_{pe} + \frac{\partial F_{pe}}{\partial x} dx \quad (3.19)$$



Sendo  $F_{pm}$  a força devida à pressão exercida pelas margens sobre o fluido:

$$F_{pm} = \left[ \int_0^y \rho g (y-w) \frac{\partial b}{\partial x} dw \right] dx \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.19) em (3.17), resulta:

$$F_p = F_{pe} - \left( F_{pe} + \frac{\partial F_{pe}}{\partial x} \right) + F_{pm} \quad (3.21)$$

onde  $(\partial F_{pe} / \partial x)$  é determinada pela utilização da regra de Leibnitz para diferenciação de uma integral:

$$\frac{\partial F_{pe}}{\partial x} = \int_0^y \rho g \frac{\partial y}{\partial x} b dw + \int_0^y \rho g (y-w) \frac{\partial b}{\partial x} dw = \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} + \int_0^y \rho g (y-w) \frac{\partial b}{\partial x} dw \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.20) e (3.22) em (3.21), resulta em:

$$F_p = -\rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx . \quad (3.23)$$

A soma das cinco forças em (3.8) pode ser escrita como:

$$\sum F = \rho g A S_0 dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad (3.24)$$

A quantidade de movimento que entra no volume de controle é:

$$\iint_{se} V \rho V \cdot dA = -\rho (\beta V Q + \beta v_x q dx) \quad (3.25)$$

onde  $\rho \beta V Q$  é a quantidade de movimento que entra a montante do volume de controle, e  $\rho \beta v_x q dx$  é a quantidade de movimento que incide lateralmente, com uma velocidade cuja componente na direção do eixo do canal é representada por  $v_x$ . O parâmetro  $\beta$  ou coeficiente de Boussinesq, representa a não uniformidade da velocidade na seção transversal, no cálculo da quantidade de

movimento, sendo representado por:

$$\beta = \frac{1}{V^2 A} \iint v^2 dA, \quad (3.26)$$

onde  $v$  é a velocidade através de um elemento infinitesimal de área, na seção transversal do canal.

A quantidade de movimento que sai do volume de controle é definida por:

$$\iint_{ss} V \rho V \cdot dA = \rho \left[ \beta V Q + \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} dx \right]. \quad (3.27)$$

A variação total da quantidade de movimento através da superfície de controle é a soma das equações (3.25) e (3.27):

$$\iint_{s.c.} V \rho V \cdot dA = -\rho \left[ \beta v_x q - \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} \right] dx \quad (3.28)$$

A variação da quantidade de movimento no interior do volume de controle é:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} V \rho d\forall = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx. \quad (3.29)$$

Substituindo a equação (3.24), (3.28), e (3.29) na equação (3.7), resulta:

$$\begin{aligned} & \rho g A S_0 dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} = \dots \\ & \dots = \rho \left[ \beta v_x q - \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} \right] dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dividindo a equação (3.30) por  $\rho dx$  e substituindo  $V$  por  $(Q/A)$  obtém-se a forma conservativa da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/A)}{\partial x} + g A \left( \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + S_f + S_e \right) - \beta q v_x + W_f B = 0. \quad (3.31)$$

No presente trabalho utilizaram-se formas mais simplificadas das equações de Saint Venant, com coeficiente de Boussinesq igual à unidade, efeito do vento e efeitos de contração/expansão abrupta desprezados em casos ordinários. Estes termos podem, e devem, ser utilizados em problemas onde estes esforços sejam importantes.

As equações utilizadas derivam de (3.6) e (3.31), pela substituição de  $Q=VA$  e considerando:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = B \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = B \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (3.33)$$

onde  $B$  é a largura do canal na superfície, se a seção for retangular ou trapezoidal. Caso contrário, deve-se calcular  $(dA/dy)$  para cada seção específica. (Seção trapezoidal 1 (V) : m (H):  $A=(b+my)y$  e ,  $\frac{dA}{dy}=b+2my=B$ )

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q, \quad (3.34)$$

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (3.35)$$

Se houver variações importantes na largura da seção ao longo do eixo do canal, considera-se  $A=A(y,b)$  onde  $b$  é uma largura genérica. Logo,

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (3.35a)$$

Substituindo (3.35a) em (3.35):

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \left[ b \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} = q. \quad (3.35b)$$

Re-ordenando (3.35b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + bV \frac{\partial y}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} &= q, \\ b \frac{\partial y}{\partial t} + bV \frac{\partial y}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} &= q, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{b} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{b} \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{q}{b}, \end{aligned} \quad (3.35c)$$

Se a variação da largura não for importante a terceira parcela pode ser anulada e, para o caso de canais retangulares ou trapezoidais, a largura genérica  $b$  é igual à largura na superfície ( $B$ ), logo a equação da continuidade pode ser escrita na forma usual:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q}{B}. \quad (3.36)$$

De maneira análoga, para a equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(AV)}{\partial t} + \frac{\partial(V^2 A)}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + S_f \right) - qv_x &= 0, \\ A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial t} + V^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2AV \frac{\partial V}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + S_f \right) - qv_x &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{B}{A} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} \right] + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} &= g(S_0 - S_f) + \frac{q}{A} v_x. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A expressão entre colchetes é equivalente à  $\frac{q}{B}$  conforme equação (3.36) :

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{B}{A} \left[ \frac{q}{B} \right] + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} &= g(S_0 - S_f) + \frac{q}{A} v_x, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} &= g(S_0 - S_f) + \frac{q}{A} (v_x - V). \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.4 FÓRMULAS NÃO-CONSERVATIVAS

Chamam-se formas conservativas ou formas divergentes quando na equação diferencial os fluxos aparecem dentro do sinal de derivada. Nos estudos de casos somente formas não-conservativas, derivadas de formas conservativas, são utilizadas.

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{B} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=const.} = \frac{q}{B} \quad \text{onde } D = \frac{A}{B} \text{ e } B = \frac{dA}{dy} \quad (3.39)$$

Equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f) + \frac{q}{A}(v_x - V) \quad (3.40)$$

Se a projeção da velocidade lateral na direção do eixo do canal for equivalente à velocidade no canal, a equação (3.40) pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (3.41)$$

### 3.5 CANAL RETANGULAR DE GRANDE LARGURA

Para o caso particular de um canal retangular de grande largura, com largura variável ao longo do percurso, pode-se escrever:

$$A = B(x) y ,$$

Substituindo em (3.35):

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial [B(x) y]}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q ,$$

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \left\{ y \frac{\partial [B(x)]}{\partial x} + B(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right\} + \frac{\partial A}{\partial t} = q ,$$

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V y \frac{\partial [B(x)]}{\partial x} + V B(x) \frac{\partial y}{\partial x} + B(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q ,$$

$$B(x) y \frac{\partial V}{\partial x} + V y \frac{\partial [B(x)]}{\partial x} + V B(x) \frac{\partial y}{\partial x} + B(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q ,$$

O que resulta na equação da continuidade para canais retangulares com largura variável:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{V}{B(x)} \frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{q}{B(x)} . \quad (3.42)$$

A equação da continuidade, na forma (3.42), foi utilizada nos dois casos de propagação em rios apresentados neste trabalho. Para o caso de rios de grande largura e seção retangular, esta formulação é mais eficiente do que a fórmula usual (3.39).

### 3.6 EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

O método das características tem sua origem em um procedimento gráfico criado por Monge em 1789 para a integração de equações diferenciais parciais. Segundo CHAUDHRY (1993) o método das características tornou-se um método padrão para a análise de transientes em condutos fechados e sua aplicação para canais com superfície livre tem seu uso limitado ao desenvolvimento de condições de contorno para métodos de diferenças finitas. O conceito de curvas características é importante para a compreensão da propagação de ondas. A seguir, é apresentada uma demonstração sumária do método com o intuito de esclarecer aspectos teóricos da propagação de vazões.

Se multiplicarmos a equação (3.39), com contribuição lateral nula, por um multiplicador  $\lambda$  e a adicionarmos à equação (3.41):

$$\lambda \left( \frac{\partial y}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

Re-ordenando os termos:

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (V + \lambda D) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + \left( V + \frac{g}{\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = g(S_0 - S_f) \quad (3.43)$$

Se definirmos o multiplicador  $\lambda$  como:

$$V + \lambda D = \frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda} \quad (3.44)$$

Uma vez que  $D = \frac{A}{B}$ , a equação (3.44) determina o valor de  $\lambda$ :

$$\lambda = + / - \sqrt{\frac{g B}{A}}$$

A celeridade de uma onda superficial é dada por:

$$c = + / - \sqrt{\frac{g A}{B}}$$

Definindo  $\lambda = + \frac{g}{c}$  pode-se escrever :

$$\frac{dx}{dt} = V + c \quad (3.45)$$

A equação (3.43) representa as derivadas totais de  $V$  e  $y$ , logo:

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (V + c) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{g}{c} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + (V + c) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = g (S_0 - S_f) ,$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dy}{dt} = g (S_0 - S_f) \quad . \quad (3.46)$$

Da mesma forma, definindo  $\lambda = -\frac{g}{c}$  :

$$\frac{dx}{dt} = V - c , \quad (3.47)$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dy}{dt} = g (S_0 - S_f) . \quad (3.48)$$

As equações diferenciais ordinárias (3.45) e (3.46) definem as equações características positivas das equações de Saint Venant para as condições válidas para as fórmulas de origem. As equações (3.47) e (3.48) definem as equações características negativas (CHAUDHRY, 1993) .



## 4 ESQUEMA DIFUSIVO DE LAX

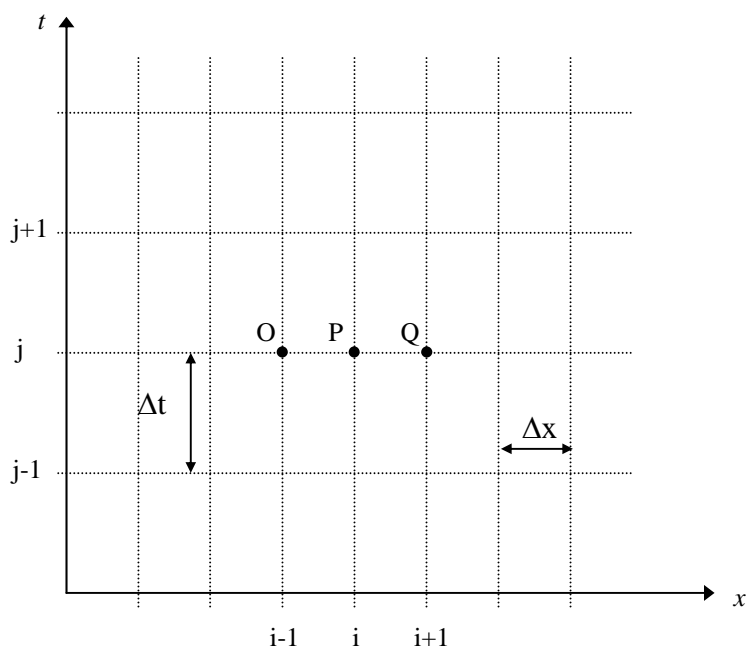
### 4.1 GERAL

A aplicação de um método de diferenças finitas para a solução aproximada de um sistema de equações diferenciais está fundamentada no conceito de discretização das variáveis independentes. No presente trabalho, as variáveis dependentes são a profundidade e a velocidade média nas seções do canal. As variáveis independentes são o espaço e o tempo, discretizadas no plano “ $x-t$ ”. Este plano consiste num conjunto de pontos discretos que representam o domínio da solução das equações diferenciais parciais, definido pelas variáveis independentes  $x$  e  $t$ . Linhas paralelas ao eixo  $x$  são denominadas “linhas de tempo” e são espaçadas por  $\Delta t$  (discretização temporal). A figura 4.1 ilustra o plano “ $x-t$ ”.

Desta forma as funções  $y = y(x, t)$  e  $v = v(x, t)$  podem ser representadas por:

$$y_i^j = y(i \Delta x, j \Delta t) \text{ e } v_i^j = v(i \Delta x, j \Delta t).$$

**FIGURA 4.1 – PLANO “ $x-t$ ” DE DISCRETIZAÇÃO**



Fonte: CASTANHARO (2003)

No esquema difusivo de Lax as diferenciais parciais são substituídas pelas seguintes aproximações em diferenças finitas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{y_i^{j+1} - y^*}{\Delta t}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{v_i^{j+1} - v^*}{\Delta t}, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}y^* &= \frac{1}{2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j), \\ v^* &= \frac{1}{2}(v_{i-1}^j + v_{i+1}^j),\end{aligned}\tag{4.1}$$

substituindo em (3.40) e (3.42); e definindo:

$$\begin{aligned}D_i^* &= \frac{1}{2}(D_{i-1}^j + D_{i+1}^j), \\ S_{fi}^* &= \frac{1}{2}(S_{fi-1}^j + S_{fi+1}^j), \\ r &= \frac{\Delta t}{\Delta x},\end{aligned}$$

obtem-se:

$$y_i^{j+1} = y_i^* - \frac{1}{2}r D_i^* (v_{i+1}^j - v_{i-1}^j) - \frac{1}{2}r v_i^* (y_{i+1}^j - y_{i-1}^j) + \frac{\Delta t q_i^j}{B_i^j} - \frac{1}{2} \frac{y^* v_i^* r (B_{i+1}^j - B_{i-1}^j)}{B_i^j},\tag{4.2}$$

$$v_i^{j+1} = v_i^* - \frac{1}{2}r g (y_{i+1}^j - y_{i-1}^j) - \frac{1}{2}r v_i^* (v_{i+1}^j - v_{i-1}^j) + \frac{\Delta t q_i^j (V_x - v_i^*)}{A_i^j} + \Delta t g (S_o - S_{fi}^*)$$

(4.3)

As equações (4.2) e (4.3) calculam os pontos internos  $i = 2, 3, \dots, N$ .

Os contornos (pontos  $i = 1$  e  $i = N+1$ ), assim como as condições iniciais, dependem de cada caso estudado e necessitam de tratamento especial.

Em geral, pelo menos uma das variáveis extremas ( $y$  ou  $v$ ), precisa ser estimada com base em valores adjacentes internos. A solução mais simples, e menos precisa, consiste em transferir para ( $i = 1$ ) o valor da variável calculado em ( $i = 2$ ), assim como igualar para ( $i = N+1$ ) o valor calculado da variável em ( $i = N$ ).

Pode-se melhorar os resultados, se os valores estimados no contorno forem extrapolados com auxílio de uma reta de mínimos quadrados, com base em três pontos adjacentes internos. Este procedimento é bastante simples de ser realizado com auxílio de funções residentes do MATLAB.

A equação da energia é outro procedimento eficiente para transferir valores internos para os contornos embora a estimativa de uma das variáveis também seja necessária.

Os programas apresentados no apêndice ilustram a definição de contornos e condições iniciais em situações reais.

## 4.2 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE DE COURANT

Segundo CHAUDHRY (1993), atualmente não existem procedimentos rigorosos para determinar a estabilidade de sistemas não-lineares, porém a estabilidade pode ser estudada se os termos não-lineares forem submetidos a um processo de linearização.

A demonstração da estabilidade para o caso específico do sistema difusivo de Lax aplicado às equações linearizadas de Saint Venant, segundo o procedimento de von Neumann ou análise de Fourier, está detalhado em (CHAUDHRY, 1993).

A definição dos valores de  $\Delta t$  e  $\Delta x$  está limitada pela condição de estabilidade Courant apresentada a seguir:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|v| + c}; \quad (4.4)$$

onde:

$$c = \sqrt{g y}$$

$c$  = celeridade da onda.

A condição de Courant, também conhecida como condição CFL (Courant, Friedrichs e Lax) é fundamental para a estabilidade e convergência do método. Nas aplicações práticas, algumas vezes é necessário que se utilize um  $\Delta t$  ainda menor do que o limite superior sugerido pela fórmula (4.4) devido às simplificações utilizadas na sua demonstração.

Por ocasião dos estudos iniciais, é importante que esta condição seja calculada dentro do *loop* de tempo.

## 5 ESTUDO DE CASOS

### 5.1 GERAL

O princípio da parcimônia, atribuído ao filósofo e teólogo britânico William de Occam (1285-1349), pode ser enunciado como:

*One should not increase, beyond what is necessary, the number of entities required to explain anything* ou, o número de entidades necessárias para explicar qualquer evento não deve ser aumentado além do estritamente necessário.

*It is vain to do with more what can be done with fewer* ou, é improfícuo fazer-se com mais o que pode ser feito com menos.

*Pluralitas non est ponenda sine necessitate* ou, pluralidades não devem ser postas sem necessidade.

*Entia non sunt multiplicanda preaeter necessitatem* ou, as entidades não devem ser multiplicadas além do necessário (HERGENHAHN, 2001).

Este princípio filosófico está presente em todas as hipóteses adotadas neste trabalho cujo objetivo maior é a simplificação do uso das equações de Saint Venant para fins práticos.

Os problemas seguintes têm por objeto a apresentação de um método numérico de solução das equações de Saint Venant e esclarecer a formação de contornos e condições iniciais, incluindo situações reais de previsão de vazões.

Na solução dos problemas utilizou-se um computador PC com processador Celeron 1.8 GHZ e 384 MB de memória RAM. Os programas foram codificados na linguagem própria do MATLAB e os tempos de processamento variam de poucos segundos a 12 min.

Devido a limitações de memória a maioria dos problemas tem duas versões. A primeira utiliza uma matriz bidimensional que preserva todas as variáveis desde o instante inicial, o que produz um detalhamento de resultados importante para verificar erros na programação. A segunda versão utiliza duas

matrizes unidimensionais ou vetores, que representam pontos da discretização espacial nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ . Após cada *loop*, o vetor recentemente calculado é redefinido como vetor base para o próximo intervalo de tempo. Desta forma os dois vetores se alternam e somente o resultado final é preservado. Valores intermediários de profundidades e velocidades são eliminados e o processamento é acelerado. Este procedimento é importante quando o tempo de processamento é muito longo e a discretização temporal muito pequena.

Nos casos apresentados a variável  $y$  representa a profundidade,  $v$  representa a velocidade média na seção considerada, e  $N+1$  representa a última seção.

Uma regra prática para definir a discretização espacial ( $\Delta x$ ) consiste em dividir-se o comprimento total do canal em comprimentos compatíveis com o problema estudado. A grosso modo, o resultado desta divisão deve manter-se abaixo de 1000 para as condições de memória especificadas acima. A discretização temporal ( $\Delta t$ ) é limitada pela condição de Courant que é testada em cada etapa do programa. Como ponto de partida, pode-se usar a relação de  $(\Delta t / \Delta x) = 0,1$  s/m, para iniciar o processo.

Um escoamento é subcrítico ou fluvial quando o  $Fr < 1$ . O número de Froude ( $Fr$ ) é definido pela razão ( $V/c$ ) entre a velocidade média na seção e a celeridade ( $c = \sqrt{g y}$ ).

Quando o escoamento é subcrítico, nos contornos de entrada ou saída, é necessário que uma das variáveis ( $v$  ou  $y$ ) seja estimada a partir de valores adjacentes internos e a outra deve ser calculada com auxílio da vazão.

Se o escoamento for supercrítico  $v$  e  $y$  são especificadas no contorno de entrada e, no contorno de saída, as duas variáveis são extrapoladas de pontos internos.

No esquema difusivo de Lax esta situação pode ser resolvida de várias maneiras onde a mais simples consiste na repetição dos valores adjacentes para as

extremidades, que pode levar a resultados convergentes ou não. Nos exemplos apresentados foram sugeridas algumas maneiras de resolver esta dificuldade. O procedimento que produziu melhores resultados consiste na utilização da tendência apresentada pelos três valores adjacentes às extremidades que são extrapolados para os contornos, via uma reta de mínimos quadrados. Exemplificando, para estimar-se a profundidade no contorno de jusante (seção  $N+1$ ), o procedimento consiste em estabelecer-se uma reta de mínimos quadrados para as profundidades calculadas pelo método de Lax, no instante considerado, nos pontos  $N-2$ ,  $N-1$ , e  $N$ . A função *polyfit* do MATLAB define a reta onde o valor referente ao ponto  $N+1$  é calculado pela função *polyval*.

Pode-se verificar a eficiência deste procedimento nos casos 5.2 e 5.3, onde a vazão final, partindo de um canal sem água, estabiliza em um valor que está a menos de 1.5 % do valor teórico. Porém, no caso de propagação de vazões no rio Chopim, o procedimento mais simples de repetir o valor adjacente calculado para o contorno produziu melhores resultados.

Outro procedimento auxiliar, para melhorar a convergência dos resultados, consiste na aplicação da equação de conservação de energia para cada extremidade e ponto adjacente.

Uma vez estimada uma das variáveis no contorno de jusante, a outra deve ser calculada com auxílio da vazão conhecida na seção adjacente. Quando houver contribuição lateral esta deve ser adicionada à vazão.

Dados de entrada, apresentados em forma de tabelas (pares ordenados) são ajustados aos intervalos de tempo utilizados na programação com auxílio da função de interpolação *interp1* do MATLAB. Esta função permite escolher o processo de interpolação – linear, parabólica, cúbica ou *spline*. Em geral foi utilizada a interpolação linear.

Como orientação geral, pode-se dizer: problemas em rios ou canais que envolvam escoamento subcrítico ( $Fr < 1$ ) com pequena declividade podem ser

resolvidos com precisão.

Alguns dos casos estudados (ruptura de barragens, ressalto hidráulico e vertedor lateral com grande declividade) estão fora dos limites de segurança na utilização das equações de Saint Venant e seus resultados precisam de investigação adicional. Dependendo da intensidade das ondas de choque os resultados podem ser muito atenuados pela “viscosidade numérica” existente no método de Lax ou pelas hipóteses simplificadoras presentes nas equações de Saint Venant. O correto equacionamento destes casos está fora do escopo deste trabalho.

Os programas referentes aos estudos de casos constantes do apêndice, codificados na linguagem residente do MATLAB, devem ser consultados para o entendimento de detalhes de programação.

Os estudos de casos realizados são os seguintes:

- (1) calha de grandes dimensões;
- (2) vertedor lateral em barragens;
- (3) propagação de vazões em canal de grande largura;
- (4) ruptura de barragem;
- (5) fechamento instantâneo de comporta;
- (6) propagação de vazões no rio Iguaçu;
- (7) propagação de vazões no rio Chopim;
- (8) propagação de vazões em canal circular;
- (9) rede de canais de irrigação;
- (10) ressalto hidráulico.



## 5.2 CALHA DE GRANDES DIMENSÕES

O problema consiste em definir as dimensões de uma calha central em barracão industrial com área de contribuição de 80 m x 20 m. A precipitação é de 200 mm/h, a resistência ao escoamento é representada por  $n$  (Manning) igual a  $0,011 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ , a declividade da calha é de 0,01 m/m, e sua largura é de 0,40 m. O objetivo é obter-se o perfil de profundidades e o hidrograma na entrada do condutor.

Embora este problema possa ser resolvido analiticamente, sua solução é importante para esclarecer o efeito da contribuição lateral nas equações de Saint Venant. Para solucionar este problema foi definido o programa *calha*, adequado para resolver calhas de grandes dimensões em barracões industriais; valas de drenagem em aeroportos e estacionamentos de supermercados. Esses problemas caracterizam-se por possuir alimentação lateral.

Sempre que existir alimentação constante, pode-se arbitrar as condições iniciais com valores compatíveis com o problema e, após algum tempo de processamento, os efeitos das condições iniciais desaparecem (transiente hidráulico) e o canal entra em regime permanente definindo a solução desejada.

Neste caso, como condições iniciais, admite-se que a lâmina d'água seja de 0,01m ao longo da calha e velocidade nula em toda a sua extensão (20 m). A altura inicial da lâmina d'água deve ser diferente de zero para evitar divisão por zero na equação de Manning. Na programação, esta situação pode ser contornada pela inclusão de uma condição que anula a parcela de resistência ao escoamento  $S_f$  quando a profundidade  $y$  for igual a zero.

No contorno de entrada, a velocidade na seção inicial é sempre nula. A altura no ponto inicial será definida a partir de pontos internos adjacentes.

No contorno de saída, como a entrada na caixa de ligação ao condutor vertical é em queda livre, foi adotado o seguinte procedimento: Calcula-se a vazão

na seção  $N$ , onde o método de Lax fornece os valores de altura e velocidade; a seguir calcula-se a profundidade crítica e velocidade crítica na seção  $N+1$ , com fórmulas do movimento permanente.

$$\text{Profundidade crítica: } y_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/B)^2}{g}}$$

$$\text{Velocidade crítica: } v_c = \sqrt{g y_c}$$

Este estudo de caso é importante para esclarecer particularidades da equação da quantidade de movimento.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (S_0 - S_f) + \frac{q}{A} (v_x - V) \quad (3.40)$$

$v_x$  representa a componente do vetor velocidade do fluxo lateral na direção  $x$  (eixo do canal).

$V$  representa a velocidade média na seção do canal

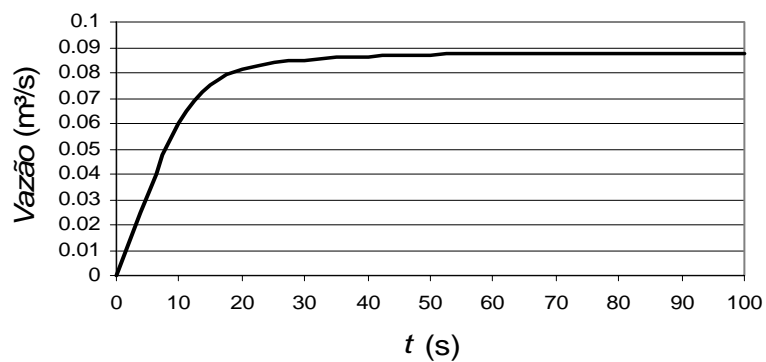
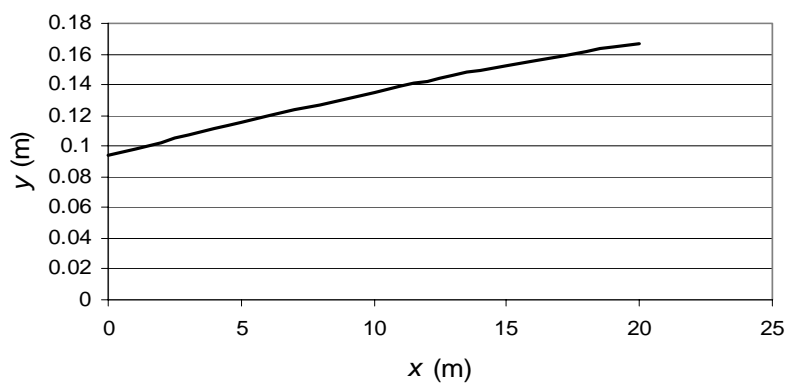
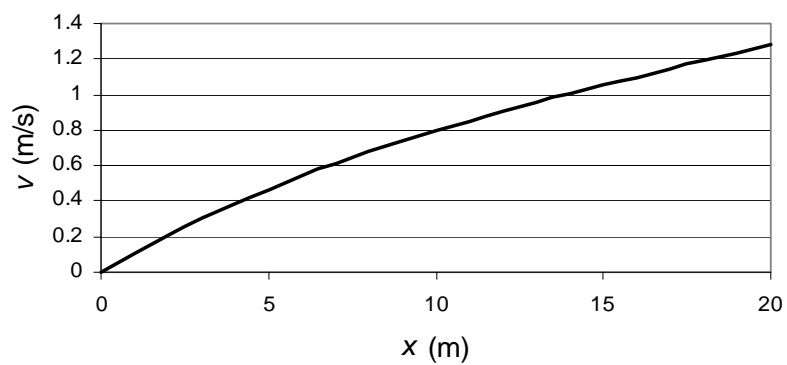
Se as duas velocidades acima tiverem valores positivos e da mesma ordem de grandeza este termo se anula.

A vazão calculada pelo programa *calha*, após estabilização, difere de menos de 1,5 % em relação à vazão teórica obtida em regime permanente.

Nas figuras seguintes é apresentado um resumo dos resultados obtidos:

A figura 5.2.1 apresenta o hidrograma de vazões na seção  $N+1$ .

As figuras 5.2.2 e 5.2.3 apresentam o perfil de alturas e velocidades ao longo da calha para a condição de regime permanente, no caso caracterizado pela vazão constante que ocorre para  $t$  maior que 60 s.

**FIG. 5.2.1 – HIDROGRAMA DE VAZÕES NO FINAL DO CANAL.****FIG. 5.2.2 – PERFIL DE ALTURAS NA CALHA****FIG. 5.2.3 – VELOCIDADES MÉDIAS AO LONGO DA CALHA.**

A tabela 5.2.1 apresenta valores numéricos de vazões, profundidades e velocidades na seção  $N+I$ , ao longo do tempo.

**TABELA 5.2.1 – RESULTADOS NA SEÇÃO DE JUSANTE**

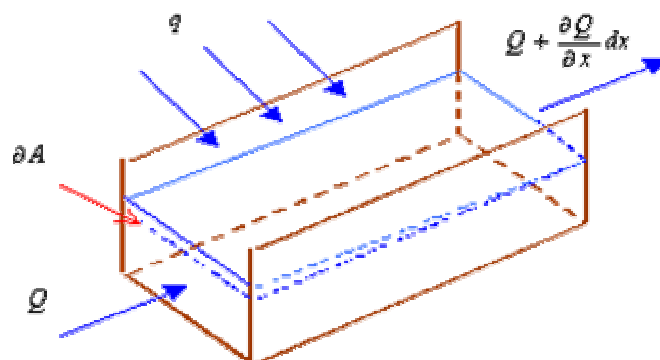
Tempo s	Vazões m <sup>3</sup> /s	Profundidades m	Velocidades m/s
0	0.000	0.010	0.000
5	0.032	0.087	0.925
10	0.060	0.132	1.136
15	0.076	0.154	1.228
20	0.081	0.162	1.259
25	0.084	0.165	1.271
30	0.085	0.166	1.278
35	0.086	0.168	1.282
40	0.087	0.168	1.285
45	0.087	0.169	1.287
50	0.087	0.169	1.288
55	0.087	0.169	1.289
60	0.087	0.169	1.289
65	0.087	0.170	1.289
70	0.088	0.170	1.290
75	0.088	0.170	1.290
80	0.088	0.170	1.290
85	0.088	0.170	1.290
90	0.088	0.170	1.290
95	0.088	0.170	1.290
100	0.088	0.170	1.290

### 5.3 VERTEDOR LATERAL EM BARRAGENS

Este estudo de caso tem por objetivo definir o perfil de alturas e velocidades para vertedor em canal lateral com seção trapezoidal, com base menor de 10m, lados com inclinações de H:V (1:4) e declividade de fundo 20%. Vertedor lateral com 100 m de extensão e lâmina d'água de 2,5 m. A resistência ao escoamento é representada por  $n$  (Manning) igual a  $0,013 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ .

Como a declividade de 20% ultrapassa as premissas das equações de Saint Venant os resultados obtidos devem ser comparados com soluções obtidas por outros métodos ou com resultados obtidos em modelos reduzidos. Para declividades que produzam um número de Froude  $<1$  em toda a extensão do canal, não há restrições para a aplicação do método.

**FIGURA 5.3.1 – ILUSTRAÇÃO DE VOLUME DE CONTROLE EM CANAL LATERAL**



Vertedores laterais caracterizam-se pela alimentação transversal ao canal principal, disposto paralelamente às curvas de nível, em um dos encontros da barragem. Basicamente, é um canal com alimentação lateral e o modelo matemático é semelhante ao apresentado no caso 5.2.

As condições iniciais podem ser arbitrárias porque a alimentação é constante e, após algum tempo, os efeitos das condições iniciais desaparecem (transiente hidráulico) e o canal entra em regime permanente definindo a solução desejada.

Neste problema considerou-se um canal vazio, ou seja, velocidade nula em todas as seções e lâmina d'água de 0,001 m. No contorno de montante a velocidade é sempre nula e a altura é estimada a partir de pontos internos.

Como não há um controle bem definido na seção de jusante, calcula-se a vazão na seção anterior ( $N$ ); estima-se o valor da profundidade  $y$  na seção de jusante ( $N+1$ ) conforme tendência de três pontos anteriores adjacentes (ajuste feito com a função *polyfit* do MATLAB). Calcula-se  $v$  na seção ( $N+1$ ) com a vazão em ( $N$ ) acrescida da contribuição lateral no segmento final, conforme pode ser observado no programa *vertl*.

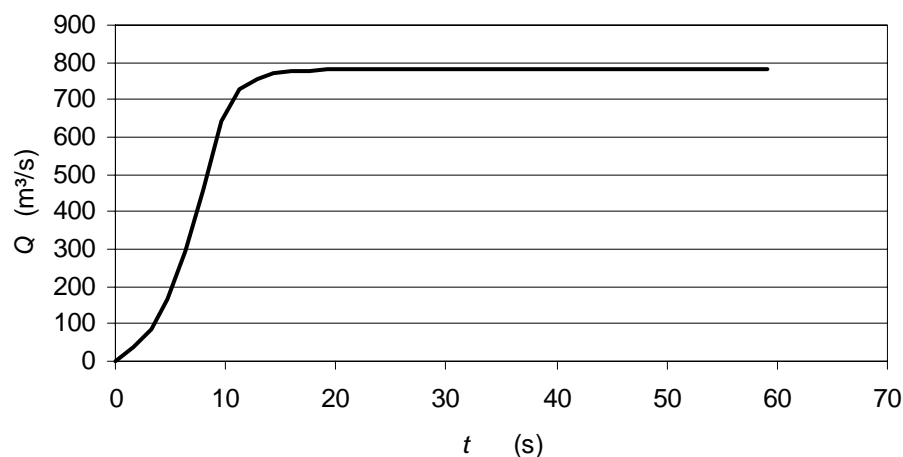
Uma forma alternativa de definir o contorno de jusante seria a aplicação da equação de conservação de energia para os pontos  $N$  e  $N+1$ . No ponto  $N$  todos os valores são conhecidos, porém, no ponto  $N+1$  a profundidade pode ser estimada conforme procedimento anterior e a velocidade calculada pela equação de conservação de energia.

A solução clássica deste problema, em regime permanente, está baseada no artigo de Hinds (1926). Este problema também pode ser resolvido analiticamente conforme solução proposta por KAVISKI (1987).

A vazão calculada pelo programa *vertl*, após estabilização, difere de menos de 1.5% em relação à vazão teórica obtida em regime permanente. Isto demonstra estabilidade do método mas não garante convergência para a solução real.

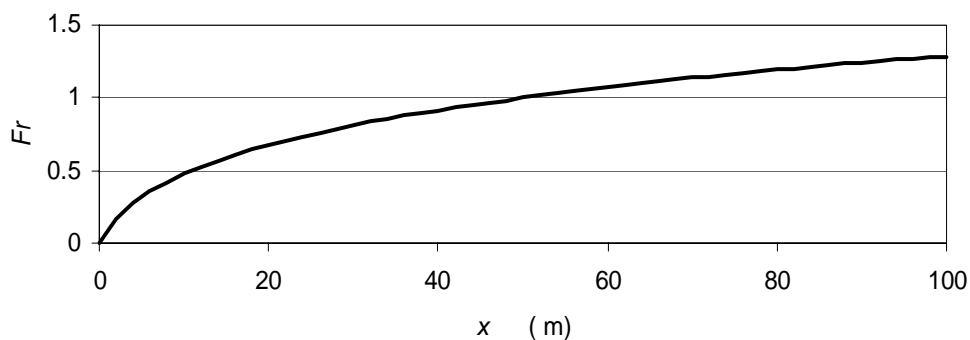
Na figura 5.3.2 as vazões na seção de jusante estabilizam após 25 segundos para as condições iniciais propostas. O número de Froude é definido pela razão entre a velocidade média na seção e a celeridade ( $c = \sqrt{g y}$ ).

**FIG. 5.3.2– VAZÕES NA SEÇÃO FINAL (100 M).**

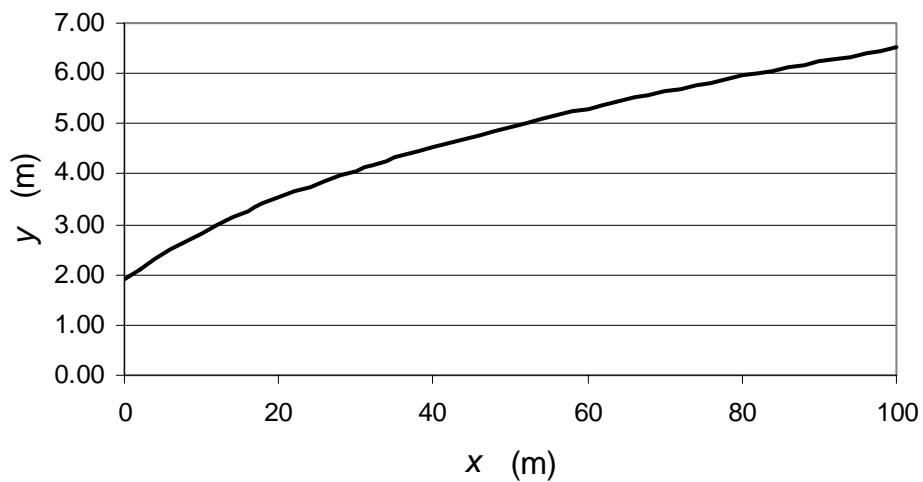


A figura 5.3.3 ilustra a variação do número de Froude após a estabilização da vazão. As figuras 5.3.4 e 5.3.5 apresentam profundidades e velocidades para a mesma condição de escoamento (movimento permanente).

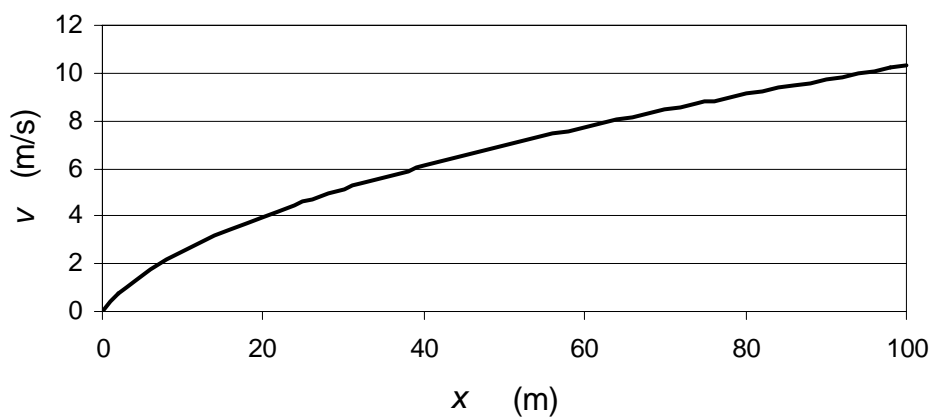
**FIG. 5.3.3 – NÚMERO DE FROUDE (MOVIMENTO PERMANENTE).**



**FIG. 5.3.4 – PERFIL DE ALTURAS APÓS 25 SEGUNDOS (MOVIMENTO PERMANENTE).**



**FIG. 5.3.5 – VELOCIDADES MÉDIAS NAS SEÇÕES NO MOVIMENTO PERMANENTE.**





A tabela 5.3.1 apresenta a variação da vazão, profundidade e velocidade em relação ao tempo, para a seção localizada a 100 m da origem do canal lateral, coincidente com a extremidade final do vertedor lateral.

**TABELA 5.3.1 – RESULTADOS NA SEÇÃO DE JUSANTE  
(MOVIMENTO PERMANENTE).**

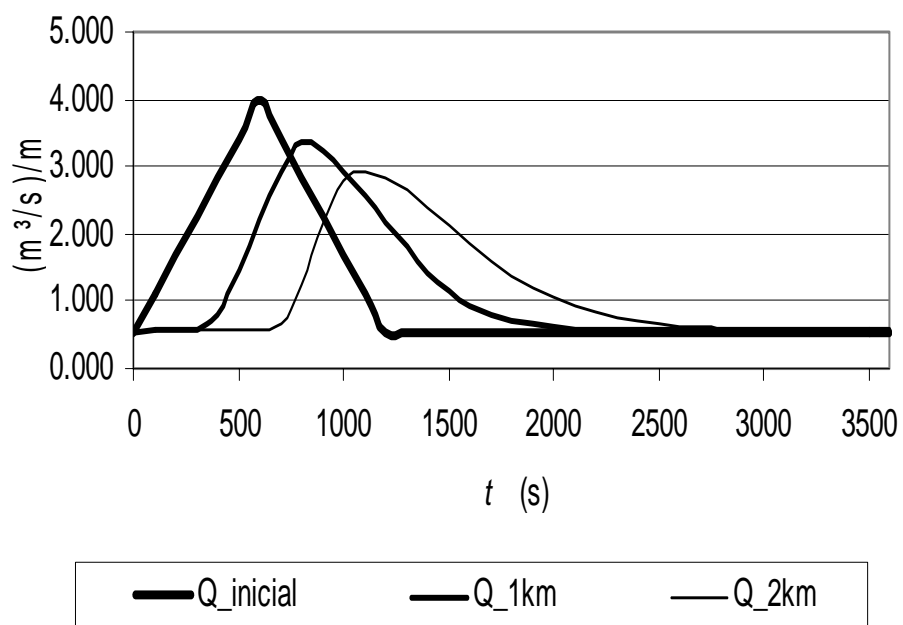
Tempo (s)	Vazões (m <sup>3</sup> /s)	Profundidades (m)	Velocidades (m/s)
0.0	0.00	0.00	0.00
2.0	48.07	0.45	8.60
4.0	121.71	0.99	8.40
6.0	258.35	1.84	8.75
8.0	462.27	2.92	9.39
10.0	672.34	4.11	10.20
12.0	746.05	5.26	10.76
14.0	767.04	5.94	10.67
16.0	775.32	6.24	10.50
18.0	778.81	6.38	10.40
20.0	780.17	6.45	10.35
22.0	780.58	6.49	10.33
24.0	780.59	6.50	10.31
26.0	780.46	6.51	10.31
28.0	780.31	6.51	10.31
30.0	780.17	6.51	10.30
32.0	780.06	6.51	10.31
34.0	779.98	6.51	10.31
36.0	779.92	6.51	10.31
38.0	779.88	6.51	10.31
40.0	779.86	6.51	10.31
42.0	779.84	6.51	10.31
44.0	779.83	6.51	10.31
46.0	779.82	6.51	10.31
48.0	779.82	6.51	10.31
50.0	779.81	6.51	10.31
52.0	779.81	6.51	10.31
54.0	779.81	6.51	10.31
56.0	779.81	6.51	10.31
58.0	779.81	6.51	10.31
60.0	779.81	6.51	10.31

## 5.4 PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL DE GRANDE LARGURA

Análise da propagação de vazões em canal de grande largura, com 20 km de extensão; declividade uniforme do fundo  $S_0 = 0,00193$ ; e rugosidade definida por  $n$  (Manning) =  $0,020 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ . Condições iniciais definidas por movimento uniforme com  $y = 0,5 \text{ m}$  e velocidade correspondente à  $Fr = 0,5$ . O contorno de montante está definido por uma onda triangular (vazão por metro de largura do canal) que varia linearmente de 0,553 a 4  $\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$  em 600 s, e decresce novamente até 0,553 em 600 s. O contorno de jusante tem altura constante. Este problema foi proposto por VENUTELLI (2002).

A figura 5.4.1 apresenta um hidrograma de forma triangular, referente ao contorno de entrada do canal, e hidrogramas propagados em pontos situados a 1000 m e 2000 m, referentes à mesma escala de tempo.

**FIG. 5.4.1 – HIDROGRAMA DE ENTRADA NO CANAL (TRIANGULAR);  
HIDROGRAMAS A 1000 M E 2000 M.**



Na tabela 5.4.1 encontram-se os valores numéricos das vazões no início do trecho, a 1 km e 2 km, que deram origem à figura 5.4.1.

Q\_inicial - vazões no contorno de entrada com forma triangular;

Q\_1km - vazões propagadas a 1 km do início do canal;

Q\_2 km - vazões propagadas a 2 km do início do canal.

TABELA 5.4.1 – VAZÕES NO INÍCIO, A 1 KM E A 2 KM DO INÍCIO

Tempo s	Q_inicial (m <sup>3</sup> /s)/m	Q_1km (m <sup>3</sup> /s)/m	Q_2km (m <sup>3</sup> /s)/m
0	0.553	0.553	0.553
100	1.128	0.554	0.554
200	1.702	0.554	0.554
300	2.277	0.577	0.554
400	2.851	0.816	0.554
500	3.426	1.441	0.554
600	4.000	2.195	0.563
700	3.426	2.930	0.666
800	2.851	3.368	1.217
900	2.277	3.229	2.160
1000	1.702	2.931	2.781
1100	1.128	2.566	2.929
1200	0.553	2.178	2.848
1300	0.553	1.793	2.651
1400	0.553	1.427	2.398
1500	0.553	1.129	2.122
1600	0.553	0.940	1.845
1700	0.553	0.810	1.588
1800	0.553	0.722	1.372
1900	0.553	0.662	1.195
2000	0.553	0.622	1.050
2100	0.553	0.597	0.933
2200	0.553	0.580	0.840
2300	0.553	0.570	0.767
2400	0.553	0.564	0.711
2500	0.553	0.560	0.667
2600	0.553	0.557	0.635
2700	0.553	0.556	0.611
2800	0.553	0.555	0.593
2900	0.553	0.554	0.581
3000	0.553	0.554	0.572
3100	0.553	0.554	0.566
3200	0.553	0.554	0.562
3300	0.553	0.553	0.559
3400	0.553	0.553	0.557
3500	0.553	0.553	0.556
3600	0.553	0.553	0.555

## 5.5 RUPTURA DE BARRAGEM

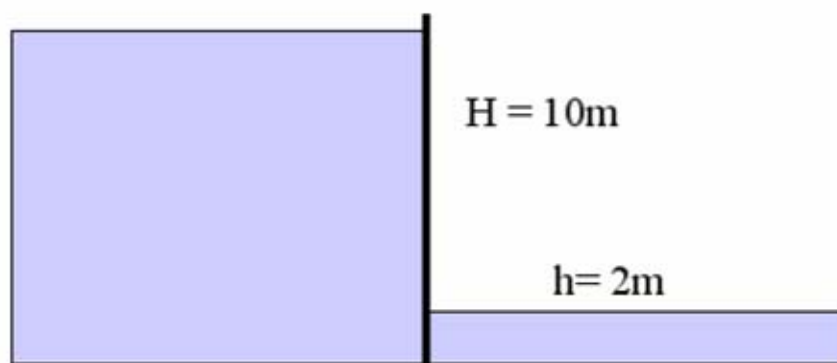
Este estudo caso refere-se à ruptura de uma barragem com 10 m de altura, situada em um canal retangular com 20 m de largura, com rugosidade representada por  $n$  (Manning) =  $0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ . No instante da ruptura existe uma lâmina de água imóvel, com altura de 2 m, a jusante da barragem. Este problema está detalhado em FABIANI (1995).

Durante o tempo estudado (194 segundos) o escoamento mantém-se subcrítico em todos os pontos e, como não há ondas de choque, as equações de Saint Venant modelam bem o problema.

A solução adotada, conforme descrição a seguir, torna o problema muito simples e com resultados muito próximos dos obtidos por outros métodos.

Considera-se um longo canal com a barragem no ponto central. Desta forma, as condições iniciais resumem-se a um degrau no centro do canal e condições de contorno com alturas fixas de 10 m (montante) e 2 m (jusante). As velocidades têm origem na barragem, localizada no centro do trecho. A figura 5.5.1 ilustra as condições iniciais do problema.

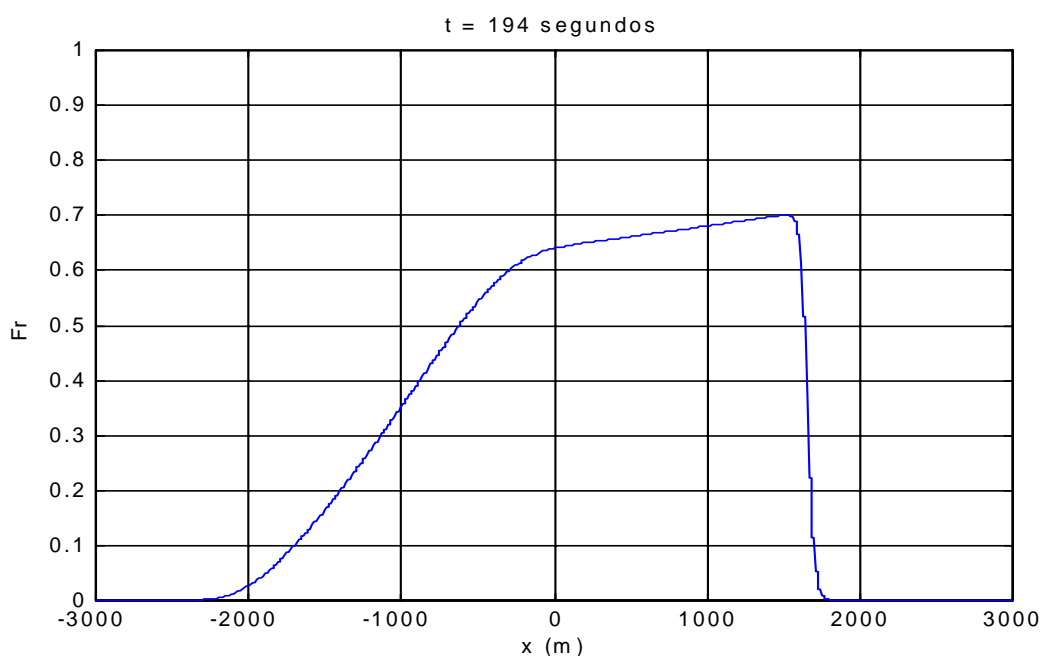
**FIGURA 5.5.1 – CONDIÇÕES INICIAIS.**



Como a propagação se dará do centro para os contornos, o comprimento do canal deve ser escolhido de forma que a velocidade nos contornos permaneça nula durante todo o transiente estudado, neste caso 194s.

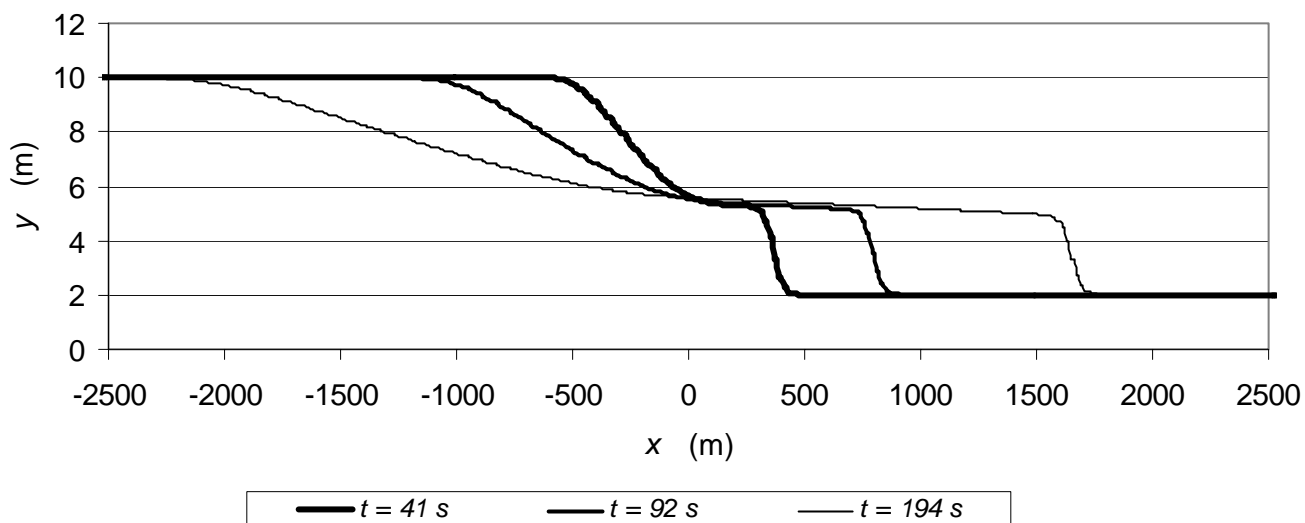
Na figura 5.5.2 pode-se observar que aos 194 s, em toda a extensão do canal, o escoamento permanece subcrítico.

**FIGURA 5.5.2 – NÚMERO DE FROUDE**

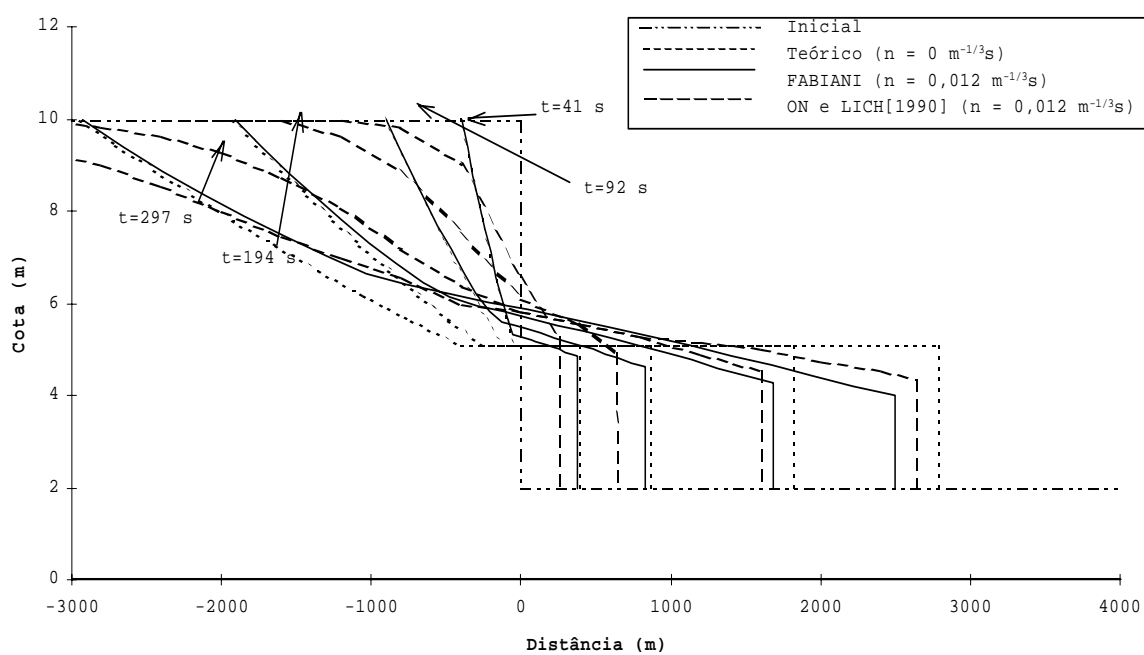


A figura 5.5.3 apresenta perfis de alturas para os tempos especificados segundo o método de Lax, e a figura 5.5.4 apresenta soluções de vários autores para este problema (FABIANI, 1995).

**FIG. 5.5.3 – BARRAGEM INICIALMENTE NO PONTO DE ABCISSA 0 .  
CONFIGURAÇÃO DA SUPERFÍCIE PARA 41, 92 E 194 SEGUNDOS.**



**FIG. 5.5.4 – SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA (FABIANI, 1995).**



## 5.6 FECHAMENTO INSTANTÂNEO DE COMPORTA

Este estudo de caso tem por objetivo analisar a propagação de uma onda, provocada pelo fechamento instantâneo de uma comporta em um canal trapezoidal com paredes inclinadas na razão 2(H):1(V). A vazão afluente é de 110 m<sup>3</sup>/s, a inclinação do fundo 0,0001, e a constante  $n$  (Manning) é 0,013 m<sup>-1/3</sup> s. A altura inicial no canal é de 3,069 m. Este problema foi proposto por ROBERSON et al. (1988).

Neste problema existe um fluxo constante que é interrompido pelo fechamento de uma comporta, o que é matematicamente equivalente à colocação instantânea de uma parede no fim do canal onde a velocidade permanece nula. Embora no momento do choque o movimento seja muito complexo – na mesma seção podem existir velocidades com sinais opostos - as equações da continuidade e da quantidade de movimento, usando velocidades médias nas seções, modelam com propriedade a formação da onda negativa.

Nesse caso, as condições iniciais e de contorno se tornam muito simples.

Como condições iniciais, as profundidades e velocidades são constantes em toda a extensão do canal.

No contorno de montante pode-se manter a profundidade constante, definida pelo nível do reservatório, e a velocidade é calculada a partir de pontos internos.

Neste exemplo não há interesse prático na continuidade do estudo após a onda negativa ser dissipada no reservatório. Caso contrário, seria necessário estabelecer um contorno que simulasse a oscilação na entrada do reservatório.

No contorno de jusante, imagina-se uma parede que surge no instante inicial, definindo velocidades nulas na extremidade final durante todo o processo.

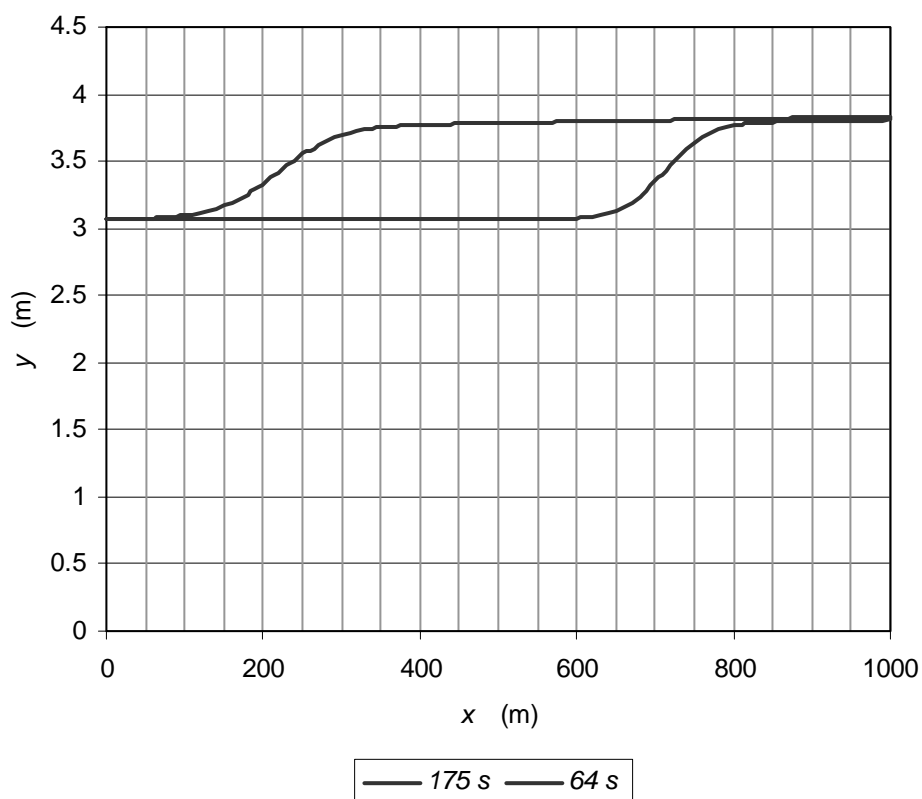


As profundidades neste ponto são estimadas a partir de pontos internos, utilizando-se a tendência de três pontos adjacentes conforme explicado no item 5.1.

ROBERSON et al. (1988), alternativamente, utilizam o método das características para estimar a profundidade a jusante.

Embora para a estimativa dos contornos de jusante tenham sido utilizados conceitos diferentes, os resultados finais são muito semelhantes conforme pode ser verificado na figura 5.6.1 e no problema proposto por ROBERSON et al. (1988).

**FIG. 5.6.1 – PROPAGAÇÃO DA ONDA NEGATIVA PARA 64 S E 175 S, APÓS O FECHAMENTO DA COMPORTA**



A tabela 5.6.1 apresenta valores numéricos de profundidades e velocidades ao longo do canal para tempos de 64 s e 175 s após o fechamento da comporta. Embora a onda se desloque para a esquerda a partir dos instantes iniciais, as velocidades médias negativas nas seções começam a aparecer após 175 segundos. Aos 386 segundos todas as seções apresentam velocidades médias negativas.

**TABELA 5.6.1 – RESUMO DE RESULTADOS**

Distâncias (m)	Profundidades		Velocidades		
	t = 64 s (m)	t = 175 s (m)	t = 64 s (m/s)	t = 175 s (m/s)	t = 386 s (m/s)
0	3.065	3.065	1.373	1.370	-1.254
50	3.065	3.072	1.373	1.358	-1.248
100	3.065	3.098	1.373	1.307	-1.243
150	3.065	3.174	1.373	1.160	-1.237
200	3.065	3.356	1.373	0.811	-1.232
250	3.065	3.563	1.373	0.424	-1.226
300	3.065	3.703	1.373	0.170	-1.219
350	3.065	3.753	1.373	0.084	-1.208
400	3.065	3.771	1.373	0.055	-1.189
450	3.065	3.779	1.373	0.046	-1.158
500	3.065	3.785	1.373	0.041	-1.110
550	3.066	3.790	1.372	0.037	-1.044
600	3.075	3.795	1.354	0.033	-0.960
650	3.146	3.800	1.215	0.029	-0.861
700	3.368	3.805	0.788	0.025	-0.752
750	3.662	3.810	0.241	0.020	-0.636
800	3.770	3.815	0.049	0.016	-0.515
850	3.792	3.820	0.014	0.012	-0.392
900	3.798	3.825	0.008	0.008	-0.265
950	3.803	3.830	0.004	0.004	-0.136
1000	3.808	3.835	0.000	0.000	0.000

## 5.7 PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO IGUAÇU

O rio Iguaçu nasce na Região Metropolitana de Curitiba e percorre todo o estado do Paraná até a cidade de Foz do Iguaçu, onde encontra o rio Paraná após percorrer 1100 km e drenar uma área de 68700 km<sup>2</sup>.

O trecho do rio Iguaçu compreendido entre Fluviópolis e União da Vitória foi objeto de inúmeros estudos e possui uma considerável base de dados para estudos de propagação de vazões. As principais características da bacia hidrográfica do rio Iguaçu, além de extenso detalhamento de propagação de vazões para eventos de enchentes importantes podem ser encontradas em MULLER (2000).

No presente estudo de caso, após análise das seções no trecho: Fluviópolis – União da Vitória optou-se pela utilização de um modelo com seção retangular e largura variável.

O estudo da declividade ao longo do trecho afeta sensivelmente os resultados finais. Declividades variáveis ao longo do trecho são importantes quando se buscam resultados mais precisos em pontos intermediários. Quando o objeto de estudo é a previsão de vazões no ponto extremo do trecho, a menos que existam grandes variações de declividade, o uso de uma declividade média é compatível com as múltiplas hipóteses simplificadoras inerentes ao modelo. No presente caso utilizou-se uma declividade média de 0,00009 m/m.

No início do programa principal *fluvppp*, são chamadas duas sub-rotinas *fluv1990* e *fluvd2*. A primeira ajusta os dados de vazão em Fluviópolis e União da Vitória, com auxílio do programa *interp1*, para o intervalo de tempo utilizado na discretização. A segunda sub-rotina ajusta as curvas de descarga nos dois contornos.

Todos os dados devem estar disponíveis anteriormente ao processamento nos *loops* principais. Este cuidado diminui bastante o tempo de processamento no MATLAB.

Existem inúmeros processos para a avaliação da vazão incremental, alguns se baseiam na área de contribuição da bacia, outros na transposição de dados medidos em bacias vizinhas, ou ainda pela simulação de modelos chuva-vazão. Segundo MULLER (2000), no projeto HG-79 desenvolvido no CEHPAR – Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza, adotou-se o critério de considerar a vazão lateral como a diferença das vazões em União da Vitória e Fluvópolis, defasadas de 24 horas que implica na transposição indeformada da enchente deslocada em 24 horas.

O método adotado neste trabalho também utiliza a diferença de vazões nos pontos extremos do trecho, porém utilizando o modelo de Saint Venant para definir, por tentativas, um valor hipotético da vazão incremental que ajusta o modelo de Saint Venant para os pontos extremos do trecho. Este ajuste, com base em vazões máximas e mínimas, permite a avaliação de valores intermediários da vazão incremental em função da vazão no início do trecho.

Devido à importância deste item para a pequena dispersão entre vazões medidas e calculadas em União da Vitória, um procedimento detalhado do método proposto é apresentado a seguir:

Primeiramente estabelece-se, por tentativas, uma contribuição lateral média para a vazão mínima ocorrida em Fluvópolis para o evento de enchente considerado. Processa-se o programa e calcula-se a vazão em União da Vitória para valores arbitrados para a contribuição lateral, até que se obtenha a vazão medida em União da Vitória.

Repete-se o procedimento, utilizando-se as vazões máximas em Fluvópolis e União da Vitória.

Desta forma obtém-se os limites máximo e mínimo da contribuição lateral média.

Para valores intermediários de  $q$ , pode-se adotar uma proporcionalidade entre a contribuição lateral e a vazão afluente no início do trecho conforme a expressão:

$$\frac{q(t) - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} = \frac{Q(t) - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \quad (5.7.1)$$

onde,

$q(t)$  - contribuição lateral no tempo  $t$ ;

$Q(t)$  - vazão em Fluvópolis no tempo  $t$ ;

$Q_{\max}$  - vazão máxima em Fluvópolis para a cheia de 1990;

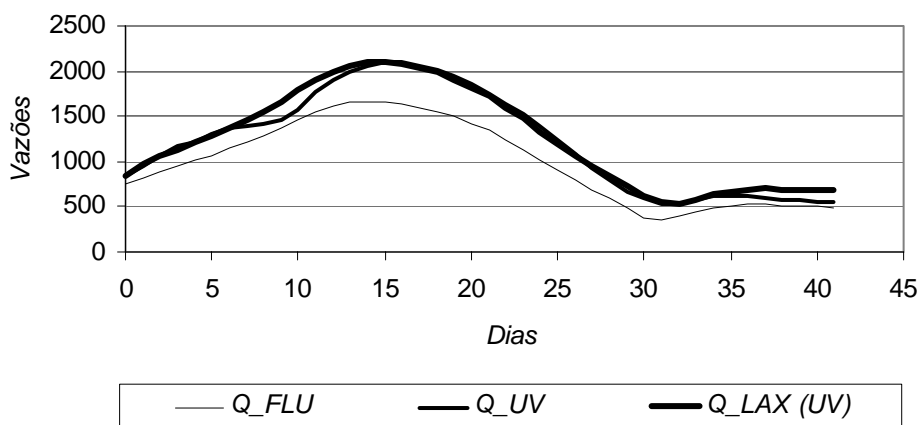
$Q_{\min}$  - vazão mínima em Fluvópolis;

$q_{\max}$  - contribuição lateral máxima, calculada por tentativas (programa *fluv\_max*), para vazão de pico entre Fluvópolis e União da Vitória;

$q_{\min}$  - contribuição lateral mínima, calculada por tentativas (programa *fluv\_min*), para vazão mínima em Fluvópolis e União da Vitória;

Na figura 5.7.1 encontram-se os hidrogramas medidos em Fluviópolis e União da Vitória para o evento de enchente de 1990, e o hidrograma calculado pelo método de Lax.

**FIG. 5.7.1 – VAZÕES MEDIDAS EM FLUVIÓPOLIS E UNIÃO DA VITÓRIA. VAZÕES ESTIMADAS PELO MÉTODO DE LAX EM UNIÃO DA VITÓRIA**



O procedimento adotado para a estimativa da vazão incremental (afluxo lateral) é um método bastante eficiente desde que a forma do hidrograma da vazão afluente guarde alguma semelhança com a vazão defluente. No presente caso existe um período de aproximadamente seis dias onde a precipitação parece ter-se mantido em um valor elevado a montante do início do trecho e diminuído muito dentro do trecho considerado. O ajuste da contribuição lateral, com base em dados históricos, tem uma tendência à média de precipitações já ocorridas na bacia de contribuição e situações deste tipo causam desvios nos resultados.

No estudo de caso referente à propagação de vazões no rio Chopim,

apresentado a seguir, o erro calculado é menor porque existe mais regularidade entre as vazões nos contornos de montante e jusante, além da bacia ser menor.

Para previsões de curto prazo, com melhores informações meteorológicas, pode-se diminuir o erro de estimativa de propagação.

A seguir, a tabela 5.7.1 apresenta os resultados de cálculo do erro médio obtido na previsão de vazões em União da Vitória com auxílio do Método de Lax.

$Q_{FLU}$  representa vazões medidas em Fluvópolis para o evento de enchente de 1990;

$Q_{UV}$  representa vazões medidas em União da Vitória para o evento de enchente de 1990;

$Q_{LAX}$  representa vazões calculadas pelo método de Lax em União da Vitória, com base nos dados medidos no contorno de entrada (Fluvópolis) e contribuição lateral calculada conforme método proposto.

TABELA 5.7.1 – RESUMO DE RESULTADOS

Tempo dias	Q_FLU m³/s	Q_UV m³/s	Q_LAX m³/s	$ Q\_LAX - Q\_UV  / Q\_UV$ %
0	748.7	849.0	849.0	0.0
1	815.2	941.9	974.9	3.5
2	879.6	1067.7	1051.2	1.5
3	949.4	1171.0	1131.6	3.4
4	1010.6	1224.0	1214.1	0.8
5	1063.3	1302.2	1283.4	1.4
6	1145.9	1371.5	1361.8	0.7
7	1218.8	1404.1	1469.1	4.6
8	1282.3	1424.2	1554.4	9.1
9	1376.2	1457.6	1653.4	13.4
10	1465.0	1570.3	1783.0	13.5
11	1543.3	1762.9	1892.7	7.4
12	1604.2	1901.8	1987.6	4.5
13	1649.4	1988.9	2058.2	3.5
14	1665.1	2059.9	2098.8	1.9
15	1661.6	2100.4	2102.3	0.1
16	1639.0	2093.1	2083.1	0.5
17	1603.3	2054.3	2040.6	0.7
18	1554.6	2012.8	1981.9	1.5
19	1494.5	1938.8	1907.1	1.6
20	1426.7	1847.8	1821.3	1.4
21	1341.4	1750.5	1721.9	1.6
22	1243.1	1646.5	1601.6	2.7
23	1131.9	1530.0	1471.8	3.8
24	1021.6	1392.7	1333.7	4.2
25	906.5	1249.7	1201.3	3.9
26	799.5	1089.5	1071.6	1.6
27	696.4	935.4	955.3	2.1
28	595.9	794.9	844.8	6.3
29	482.6	670.3	738.5	10.2
30	381.2	591.3	629.6	6.5
31	344.4	539.0	545.7	1.2
32	388.3	532.1	526.6	1.0
33	445.6	580.5	575.5	0.9
34	491.8	612.7	631.0	3.0
35	516.6	621.0	674.1	8.6
36	525.9	619.1	695.0	12.3
37	522.8	607.1	701.2	15.5
38	516.6	584.7	696.2	19.1
39	510.4	565.4	689.8	22.0
40	504.2	550.8	683.3	24.1
41	488.6	542.3	675.1	24.5
Erro médio %				6.0



## 5.8 PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO CHOPIM ENTRE PORTO PALMEIRINHA E ÁGUAS DO VERÊ

O procedimento para a solução do problema é idêntico ao usado no caso anterior referente ao rio Iguaçu. Os dados necessários para o estudo de propagação são:

- (a) vazões em Porto Palmeirinha e Águas do Verê;
- (b) curvas de descarga nestas duas estações;
- (c) declividade média no trecho;
- (d) larguras médias do rio nas duas estações;
- (e) extensão do trecho;
- (f)  $n$  (Manning) médio no trecho.

Este problema foi apresentado por KAVISKI et al. (2005).

Estes dados foram salvos no arquivo *chopimdados* e o programa utilizado no caso 5.6 foi adaptado para a nova discretização. Devido à falta de informações geométricas no trecho considerou-se seções retangulares com largura variável - variando linearmente entre os dois extremos.

Este problema é resolvido em três estágios:

No primeiro estágio, após a adaptação do programa, faz-se uma cópia do mesmo para estimar, por tentativas, um valor mínimo para a contribuição lateral média, com auxílio da vazão mínima em Porto Palmeirinha, determinando, por tentativas, o valor de  $q_{min}$  que produz uma vazão calculada em Águas do Verê igual à vazão medida neste ponto.

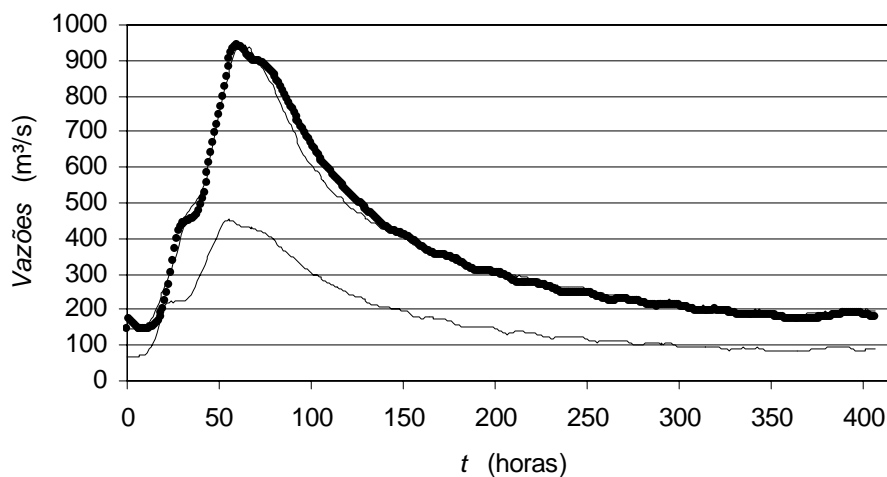
No segundo estágio, altera-se o contorno de entrada para um valor constante igual à vazão máxima em Porto Palmeirinha e, por tentativas, determina-se uma contribuição lateral que resulte numa vazão calculada em Águas do Verê idêntica à vazão máxima medida neste local. A seguir, estes valores ( $q_{min}$  e  $q_{max}$ ) são transferidos para o programa principal (*chopim*).

No terceiro estágio processa-se o programa com a contribuição lateral definida pela fórmula (5.7.1):

$$\frac{q(t) - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} = \frac{Q(t) - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}}$$

A figura 5.8.1 mostra o gráfico das vazões medidas em Porto Palmeirinha e Águas do Verê comparadas às vazões calculadas em Águas do Verê - em negrito no gráfico.

**FIG. 5.8.1 – PREVISÃO DE VAZÕES EM ÁGUAS DO VERÊ**



Conforme a tabela 5.8.1, verifica-se que as vazões calculadas diferem no máximo em 11% das vazões medidas em Águas do Verê. O erro médio observado é de 4,7 %. É importante observar que não se dispõem de seções transversais detalhadas, nem informações sobre a declividade ao longo do trecho.

A seguir, a tabela 5.8.1 apresenta os resultados de cálculo do erro médio obtido na previsão de vazões em Águas do Verê com auxílio do Método de Lax.

$Q_{PP}$  representa vazões medidas em Porto Palmeirinha;

$Q_{AV}$  representa vazões medidas em Águas do Verê;

$Q_{LAX}$  representa vazões calculadas pelo método de Lax em Águas do Verê, com base nos dados medidos no contorno de entrada (Porto Palmeirinhas) e contribuição lateral calculada conforme método proposto.

A aderência do resultado, mesmo na ausência de informações detalhadas sobre seções transversais e variações de declividade ao longo do trecho, deve-se à consideração de larguras variáveis e ao procedimento proposto de avaliação da contribuição lateral com base em dados históricos de vazão no local. A parcimônia dos procedimentos utilizados, compatíveis com o modelo matemático e a dificuldade de obtenção de dados detalhados, torna este procedimento bastante viável para aplicações práticas.

TABELA 5.8.1 – RESUMO DE RESULTADOS

TEMPO h	Q_PP m <sup>3</sup> /s	QLAX m <sup>3</sup> /s	QAV m <sup>3</sup> /s	(QAV-QLAX)/QAV %
0	67.8	145.5	145.5	0.00
12	89.4	148.0	164.8	10.15
24	222.0	304.3	309.0	1.53
36	250.3	456.2	493.7	7.60
48	395.3	694.0	695.7	0.24
60	438.2	941.1	931.6	1.02
72	421.5	896.7	895.6	0.12
84	373.9	826.6	774.1	6.78
96	318.7	706.2	637.0	10.86
108	279.9	605.7	556.5	8.84
120	248.0	532.4	493.7	7.83
132	218.0	474.4	451.2	5.15
144	204.0	423.1	419.5	0.86
156	182.0	393.8	383.5	2.69
168	174.0	355.8	361.0	1.45
180	158.0	339.0	339.1	0.02
192	152.0	307.0	321.9	4.62
204	138.0	299.3	304.7	1.78
216	136.0	272.5	291.8	6.60
228	122.7	266.8	274.6	2.84
240	122.7	245.7	266.0	7.63
252	112.2	244.9	253.7	3.48
264	112.2	226.1	241.4	6.36
276	103.4	225.1	233.2	3.49
288	105.1	210.6	225.0	6.41
300	94.6	211.0	220.9	4.47
312	98.1	196.2	208.6	5.94
324	89.4	197.3	204.5	3.53
336	91.1	183.7	196.3	6.43
348	84.2	185.9	196.3	5.28
360	84.2	174.5	188.1	7.23
372	87.7	175.0	192.2	8.96
384	92.8	183.1	196.3	6.74
396	85.9	191.0	196.3	2.71
Desvio médio				4.69

## 5.9 PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL CIRCULAR

Este estudo de caso refere-se a um canal circular com 2 m de diâmetro, extensão de 20 m e declividade de 0,0005 m/m. A constante de Manning é de  $0,010 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ . Na seção de jusante a descarga é em queda livre. Na seção de montante um hidrograma trapezoidal é superposto a uma vazão uniforme de  $0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Este problema foi proposto por SIVALOGANATHAN (1978).

Sempre que existir um hidrograma superposto a uma condição de movimento permanente é necessário resolver o problema em dois estágios. No primeiro processa-se o problema para a situação de movimento permanente, onde são definidas as velocidades e profundidades que servirão de condições iniciais para o segundo estágio.

Desta forma, após a adaptação do programa básico para seções circulares, é necessário que ele seja processado para uma vazão de entrada constante de  $0,8 \text{ m}^3/\text{s}$  e condições iniciais arbitrárias. Após algum tempo o perfil de profundidades e de alturas estabiliza definindo os dados de entrada para o instante inicial do segundo estágio.

O contorno de montante é definido como:

$$Q(0, t) = 0.8; \rightarrow 0 \leq t < 5;$$

$$Q(0, t) = 0.8 + 0.048(t - 5); \rightarrow 5 \leq t < 30;$$

$$Q(0, t) = 2.0; \rightarrow 30 \leq t < 55;$$

$$Q(0, t) = 2.0 - 0.0048(t - 55); \rightarrow 55 \leq t < 80;$$

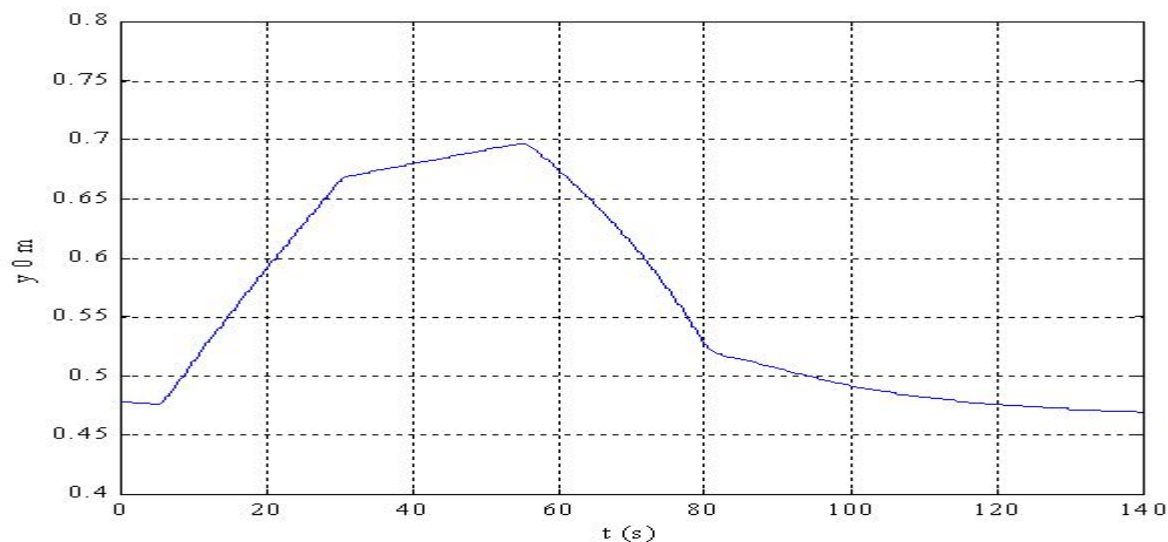
$$Q(0, t) = 0.8; \rightarrow 80 \leq t;$$

No contorno de jusante determinam-se altura e velocidade crítica para vazão calculada na seção  $N$ . A determinação da altura crítica na seção final ( $N+1$ ) foi bastante facilitada por funções de interpolação do MATLAB.

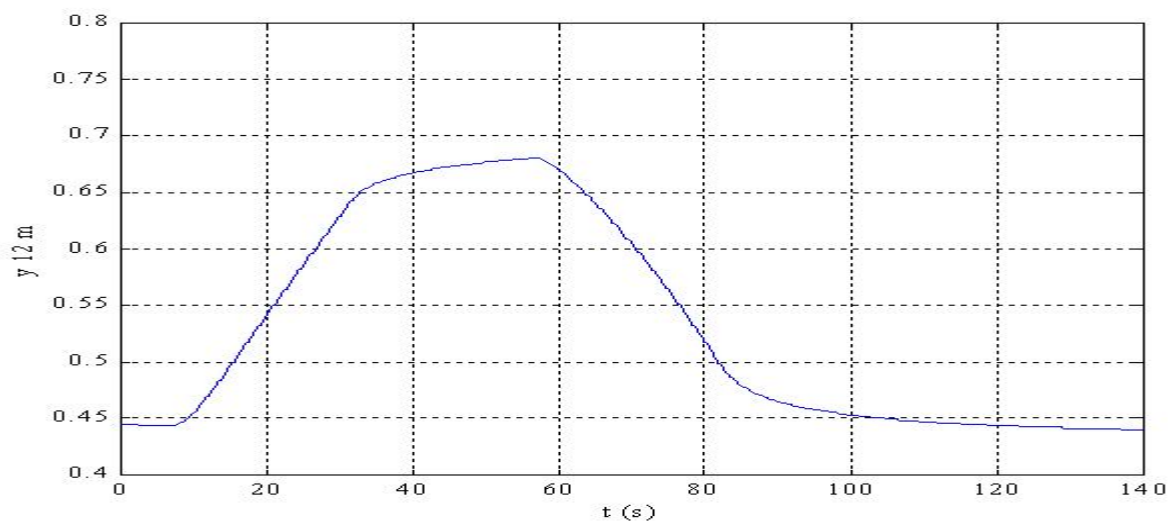
Verificar detalhes na listagem do programa *sivaf*.

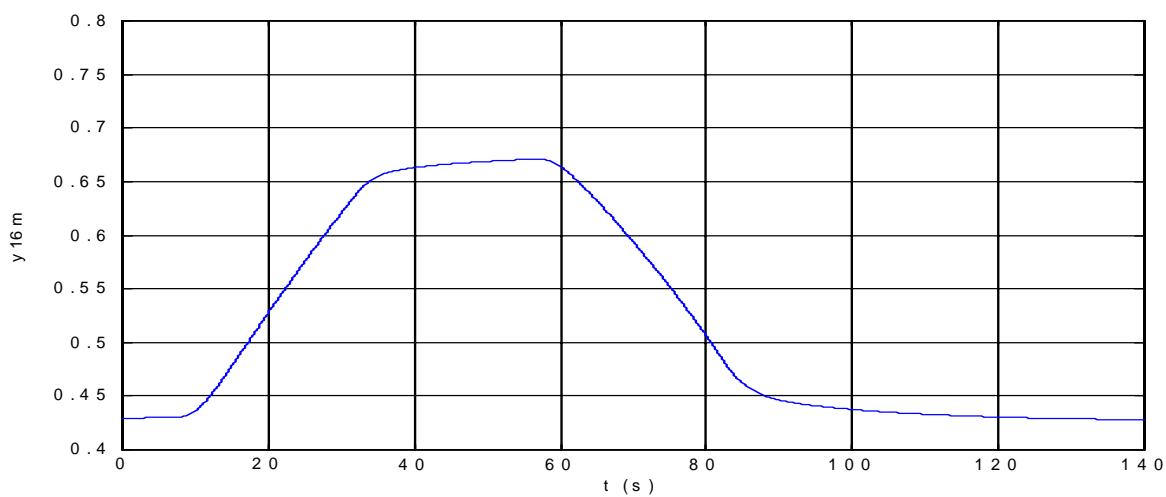
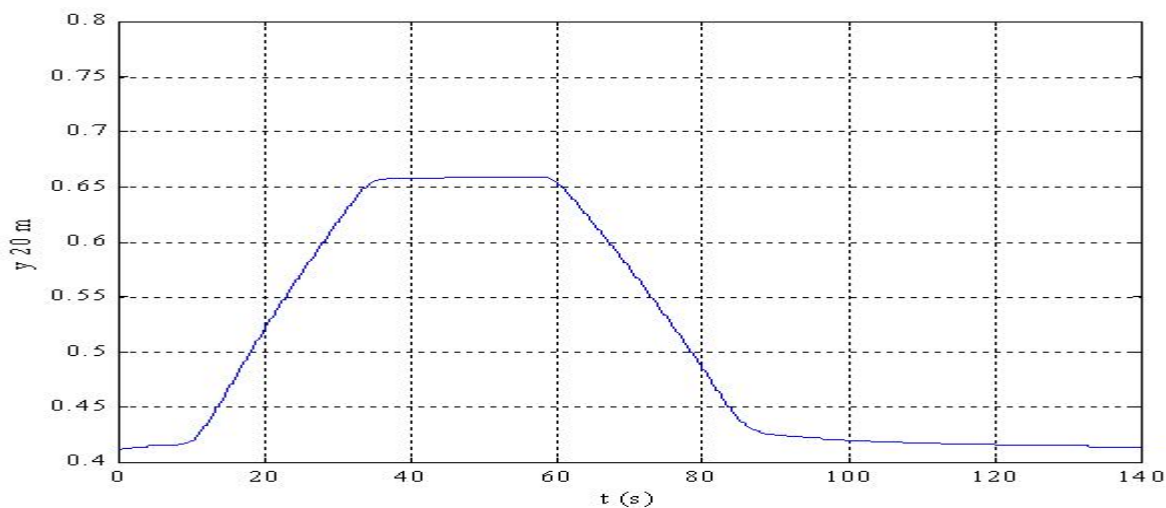
Nas figuras 5.9.1 a 5.9.4 estão representados os perfis de profundidades para seções localizadas no início do trecho; a 12 m; 16 m e 20 m, obtidas pelo método de Lax.

**FIG. 5.9.1– PROFUNDIDADES PARA X = 0 M - SEÇÃO DE MONTANTE.**



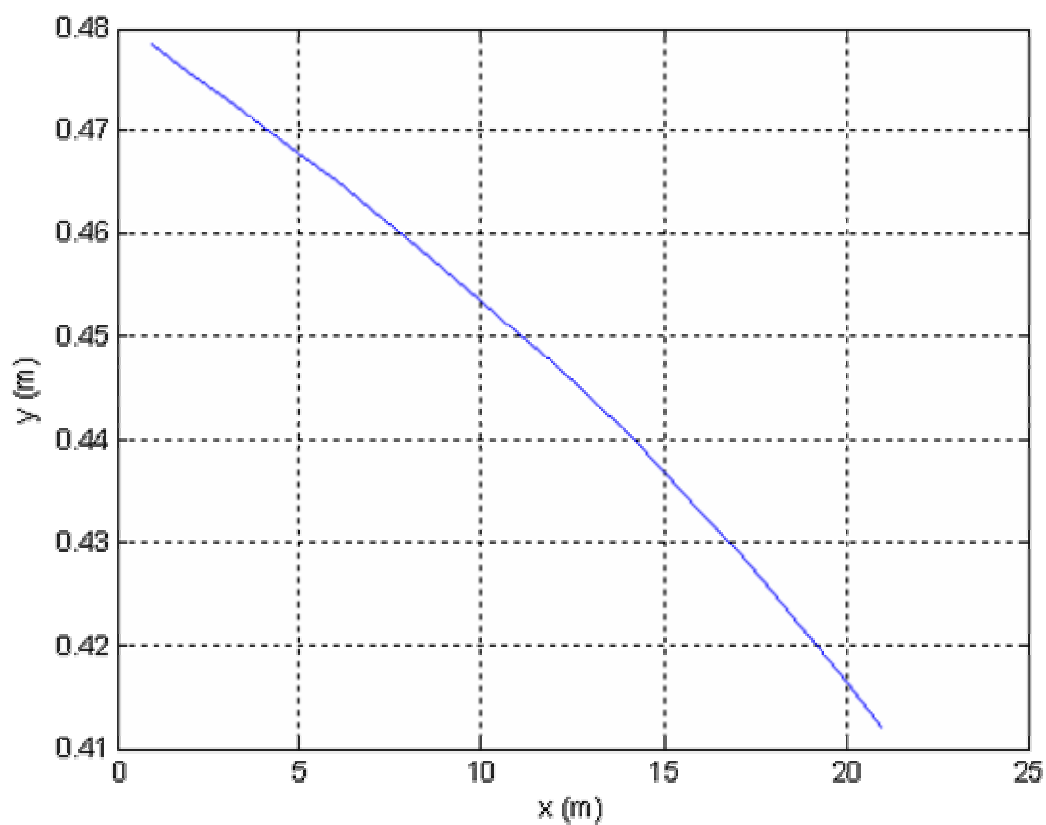
**FIG. 5.9.2– PROFUNDIDADES PARA X = 12 M DO INÍCIO.**



**FIG. 5.9.3– PROFUNDIDADES PARA X = 16 M DO INÍCIO.****FIG. 5.9.4– PROFUNDIDADES PARA X = 20 M DO INÍCIO.**

A figura 5.9.5 apresenta o perfil da superfície da água para o instante inicial correspondente ao movimento permanente.

**FIG. 5.9.5 - PERFIL INICIAL**





A tabela 5.9.1 apresenta valores numéricos das profundidades ao longo do tempo, calculadas pelo método de Lax, nas seções: inicial, a 12 m, a 16 m e final, representadas por  $y_{0m}$ ,  $y_{12m}$ ,  $y_{16m}$  e  $y_{20m}$  respectivamente.

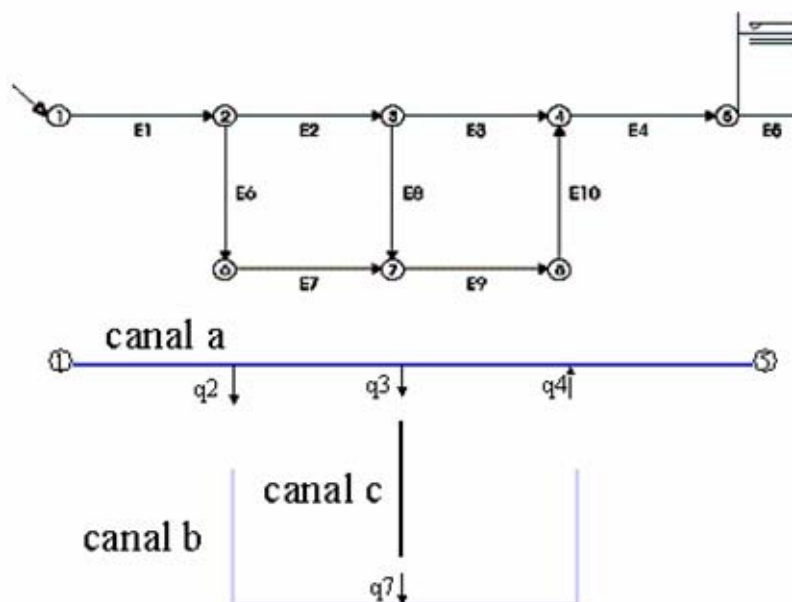
**TABELA 5.9.1 - RESUMO DE RESULTADOS**

tempo s	$y_{0m}$ m	$y_{12m}$ m	$y_{16m}$ m	$y_{20m}$ m
0	0.479	0.444	0.429	0.412
5	0.476	0.444	0.430	0.415
10	0.513	0.455	0.437	0.420
15	0.553	0.497	0.478	0.467
20	0.592	0.542	0.528	0.522
25	0.629	0.586	0.576	0.572
30	0.665	0.629	0.621	0.619
35	0.674	0.658	0.655	0.655
40	0.680	0.667	0.663	0.658
45	0.686	0.673	0.667	0.659
50	0.691	0.676	0.669	0.659
55	0.697	0.679	0.671	0.660
60	0.674	0.670	0.664	0.653
65	0.645	0.640	0.632	0.617
70	0.611	0.604	0.594	0.575
75	0.573	0.563	0.552	0.532
80	0.527	0.517	0.506	0.485
85	0.514	0.479	0.462	0.438
90	0.507	0.465	0.447	0.425
95	0.499	0.458	0.441	0.422
100	0.492	0.453	0.438	0.420
105	0.486	0.450	0.435	0.419
110	0.482	0.447	0.433	0.418
115	0.479	0.445	0.432	0.417
120	0.476	0.444	0.431	0.416
125	0.474	0.442	0.430	0.415
130	0.472	0.442	0.429	0.415
135	0.471	0.441	0.429	0.415
140	0.470	0.440	0.428	0.414

## 5.10 REDE DE CANAIS DE IRRIGAÇÃO.

A abordagem proposta para a solução de problemas que envolvem redes de canais é bastante eficiente quando comparam-se os resultados da aplicação do método de Lax aos resultados encontrados em BASTOS (1997) e JOLIFFE (1984). A idéia básica consiste em subdividir-se a rede de canais em um canal principal e canais secundários ligados entre si. Os contornos iniciais e finais de cada canal secundário são ligados à rede principal com auxílio do conceito de contribuição lateral  $q$ . Cada canal está conectado aos canais adjacentes por vazões laterais  $q$ . Uma vez estabelecido o conjunto de canais, para cada intervalo de tempo, calcula-se a propagação das vazões de cada canal individual para os canais a ele conectados, lembrando que ao terminar o *loop*, as alturas devem permanecer niveladas. A figura 5.10.1 ilustra este procedimento.

FIG. 5.10.1 - REDE DE CANAIS



A solução deste problema é realizada em dois estágios. No primeiro, a condição de movimento permanente é obtida a partir de uma vazão constante e de uma condição inicial arbitrária em todo o sistema. (no exemplo: vazão na entrada de  $0,17 \text{ m}^3/\text{s}$  e todos os canais com lâmina de água constante de  $0,05 \text{ m}$  e velocidade nula). Processa-se o programa até que a vazão no canal de saída aproxime-se da vazão de entrada ( $0,17 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Esta é a condição de movimento permanente.

No exemplo, um hidrograma de forma triangular é adicionado a condição de movimento permanente. No segundo estágio, processa-se o programa principal utilizando-se as profundidades e velocidades obtidas no primeiro estágio como condições iniciais e o hidrógrafo triangular como contorno de início.

Esta abordagem tem uma limitação importante na discretização do espaço. Como os canais são interligados pela contribuição lateral  $q$ , a seção de entrada do canal lateral define o comprimento máximo de  $\Delta x$ . No caso de emissários de esgoto, comprimentos muito longos com derivações laterais de pequeno diâmetro podem inviabilizar o procedimento, por limitações de memória.

Embora a solução do problema neste caso tenha sido muito simples, com resultados próximos dos encontrados por JOLIFFE (1984) e BASTOS (1997) o procedimento pode se tornar muito lento para redes com canais muito longos e com derivações de pequena largura.

Redes de emissários de esgoto podem ser dimensionadas por este sistema desde que o número de canais individuais seja limitado e os condutores permaneçam na condição de canais (superfície livre).

O presente problema consiste em um sistema de canais conforme a figura 5.10.1, todos com comprimento de  $1000 \text{ m}$  e mesma seção trapezoidal com base de  $5 \text{ m}$  e taludes  $1:1$ . Os canais E6, E8 e E10 têm declividade do fundo nula e os demais possuem declividade  $0,0001 \text{ m/m}$ . Todos os canais possuem a mesma rugosidade representada por  $n$  (Manning) igual a  $0,020 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ . O canal de jusante

E4 desemboca em um reservatório que define uma altura constante de 0,20 m na seção final. Este problema foi proposto por JOLIFFE (1984).

A partir dos valores do regime permanente inicial, simulou-se uma condição de escoamento transiente, a partir do nó número 1. A vazão inicial de 0,17 m<sup>3</sup>/s aumenta linearmente até 4,83 m<sup>3</sup>/s em 60 min e decresce novamente até 0,17 m<sup>3</sup>/s em 60 min, conforme hidrograma apresentado na FIG. 5.10.2. O tempo total de simulação é de 5 h.

Os dados que caracterizam o regime permanente inicial são obtidos conforme procedimento de primeiro estágio descrito acima: ou seja, com auxílio do programa principal, adaptado para a condição de contorno de montante com uma vazão constante de 0,17 m<sup>3</sup>/s e condições iniciais arbitrárias. Após um processamento relativamente longo, a vazão de jusante estabiliza em 0,17 m<sup>3</sup>/s. Esta situação define a condição de movimento permanente em todo o sistema.

O contorno de montante do programa principal é definido pelo hidrograma em forma triangular descrito no enunciado do problema.

O contorno de jusante é definido pela cota da superfície do lago  $y = 0.20$  m e a velocidade é calculada internamente pelo programa.

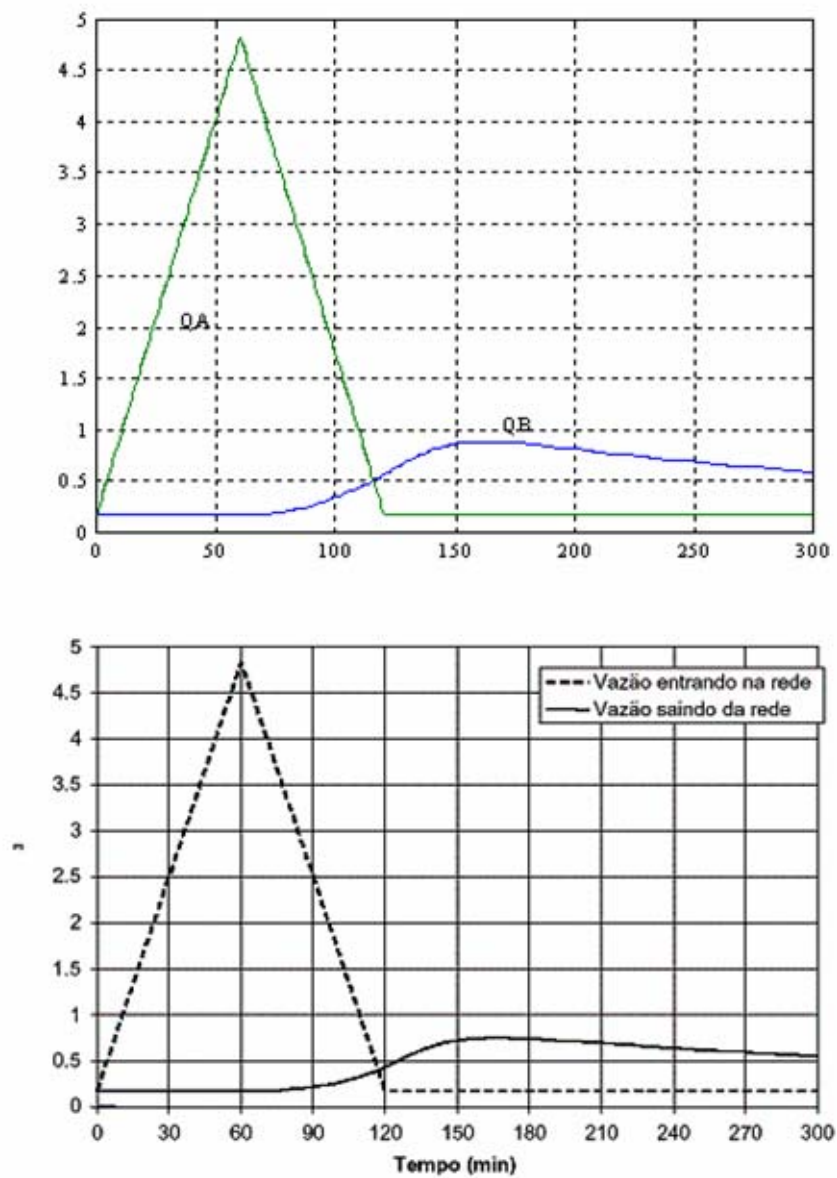
A figura 5.10.2 apresenta hidrogramas na entrada e saída da rede de canais. No gráfico superior estão os resultados calculados segundo o procedimento descrito acima e, no gráfico inferior, os resultados apresentados por BASTOS (1997) que utiliza uma técnica com base no método das características partindo de uma solução pré-definida para movimento permanente.

A figura 5.10.3 apresenta as profundidades nos nós 2, 3 e 4 ao longo das 5 horas de simulação. O gráfico inferior apresenta resultados obtidos por BASTOS (1997).

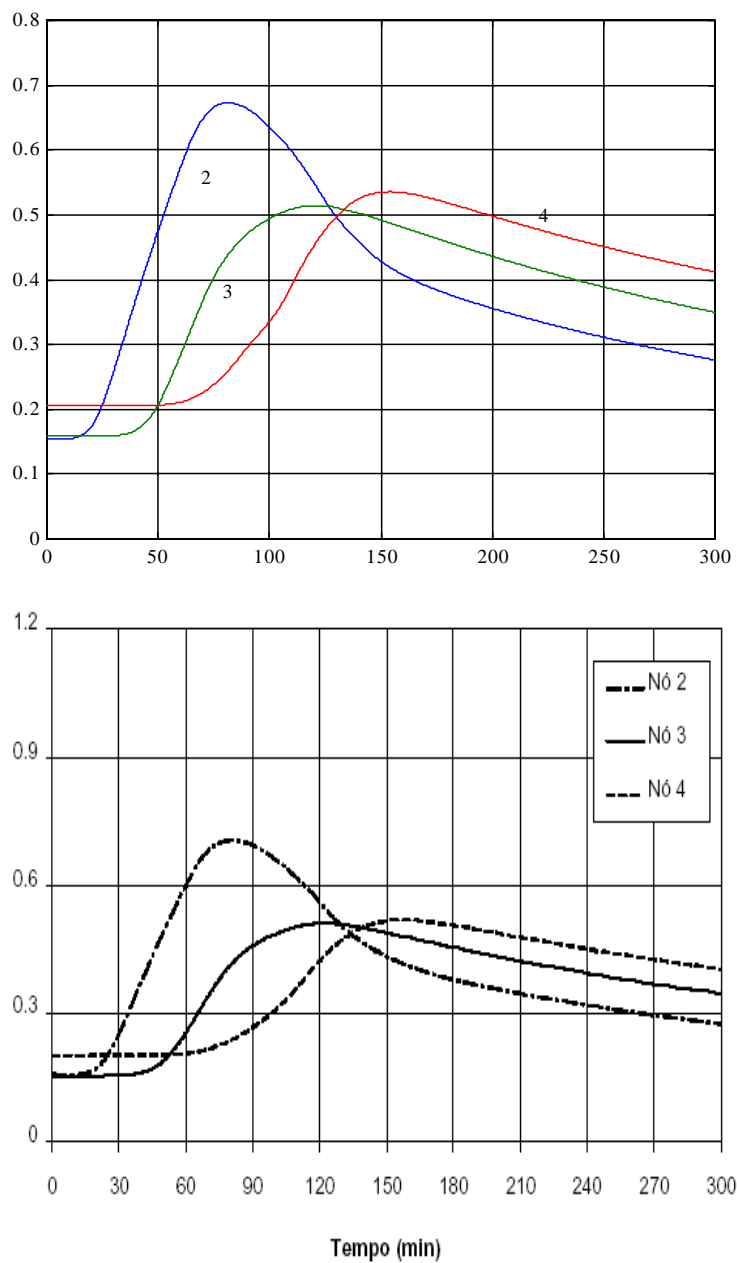
A concordância entre os resultados obtidos pelas duas abordagens indica que o procedimento de resolução proposto neste trabalho converge para a solução correta, além de solucionar a situação de movimento permanente com a mesma

técnica.

**FIG. 5.10.2- VAZÕES NA SEÇÃO INICIAL E FINAL AO LONGO DAS CINCO HORAS**



**FIG. 5.10.3 - PROFUNDIDADES NOS NÓS 2, 3 E 4 AO LONGO DAS 5 H DE SIMULAÇÃO.**



## 5.11 RESSALTO HIDRÁULICO

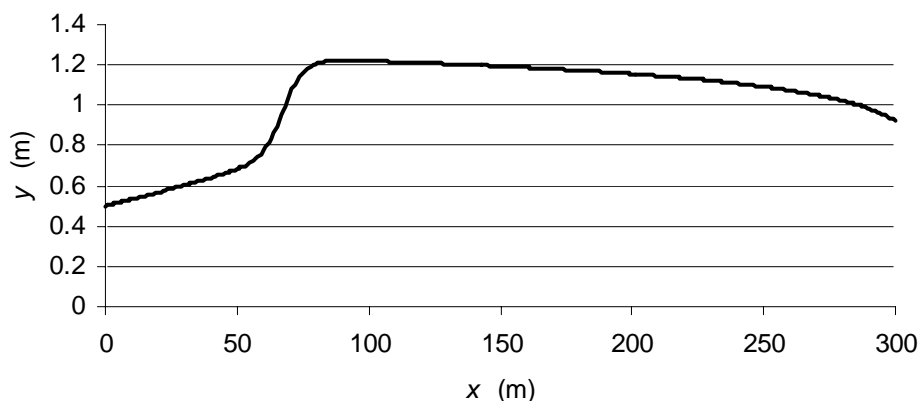
Embora no momento do choque apareçam desacelerações verticais, pressões com diagramas não-triangulares, vórtices e misturas água-ar, com as equações de Saint Venant consegue-se uma razoável aproximação para ressaltos com número de Froude inferior a 2,0.

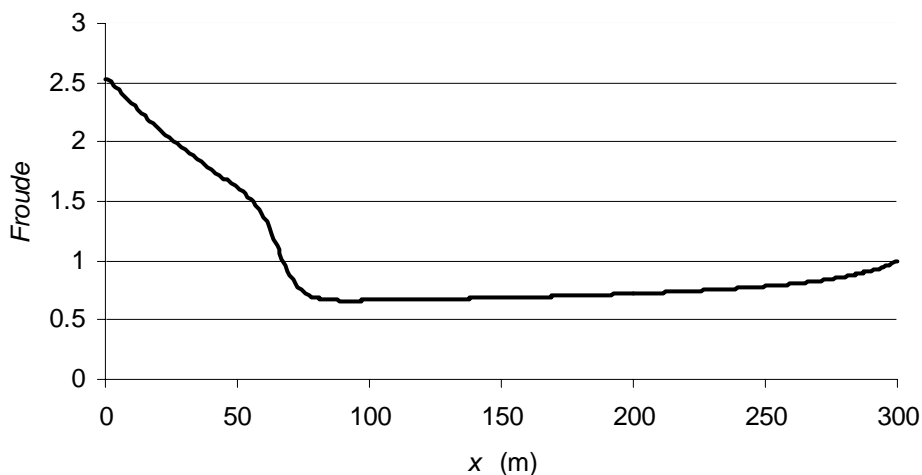
O problema analisado consiste em um canal retangular com 6 m de largura, com  $n$  (Manning) igual a  $0,014 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ , executado com uma declividade de 0,001 que termina em queda livre. A 300 m a montante da queda livre há uma comporta plana que produz uma profundidade de 0,5 m imediatamente a jusante. O objeto deste problema é calcular o perfil da superfície livre para uma vazão de  $17 \text{ m}^3/\text{s}$ .

O resultado deste problema com os procedimentos usuais localiza o ressalto a 53 m.

Embora o número de Froude na saída da comporta seja elevado (2,5), a aplicação da equação de Saint Venant produz os resultados a seguir apresentados.

**FIG. 5.11.1 – PERFIL DE ALTURAS**



**FIG. 5.11.2 – NÚMERO DE FROUDE**

Embora neste caso particular os resultados sejam razoáveis, não há nenhuma garantia que isto ocorra em todas as ocasiões. As hipóteses simplificadoras, presentes na formulação das equações de Saint Venant, não modelam a complexidade das ondas de choque e a estabilidade do método de Lax – associada a uma possível viscosidade numérica - podem produzir resultados muito atenuados do fenômeno físico em estudo. Para aplicações práticas, é importante lembrar que além dos limites do escoamento subcrítico existe uma zona de risco crescente que culmina na onda de choque.



## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1 CONCLUSÕES

#### 6.1.1 ESQUEMA DIFUSIVO DE LAX

De acordo com os resultados apresentados no estudo de casos, o esquema difusivo de Lax, aplicado às equações de Saint Venant, mostrou-se preciso, consistente, estável, e convergente, sempre que a discretização for orientada pela condição de Courant e as condições de contorno e condições iniciais definam claramente a situação física real.

Nos casos práticos, as premissas usadas na derivação das equações de Saint Venant devem ser respeitadas, e cuidado especial deve ser tomado com a forma da equação não-conservativa utilizada.

Para escoamento subcrítico ( $Fr < 1$ ) não há restrições para a aplicação do método.

O teorema de HOU e LEFLOCH (1994) delimita com precisão campo de aplicação do método: “se um método não-conservativo for usado e a solução contiver uma onda de choque, esta solução estará errada” (TORO, 2001).

#### 6.1.2 RESISTÊNCIA AO ESCOAMENTO

A fórmula de Manning é muito eficaz para representar as características de resistência ao escoamento, principalmente para valores de  $n$  compreendido entre os limites 0,010 e 0,030, independente das dimensões e discontinuidades do problema. Em nenhum dos casos apresentados ela foi origem de problemas de estabilidade numérica.

### 6.1.3 CALIBRAÇÃO PELA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LATERAL

No caso de escoamento em rios, quando a contribuição lateral é importante em relação à vazão do rio, verificou-se que o modelo pode ser calibrado pelo ajuste da parcela de quantidade de movimento lateral. Deste modo, preserva-se a constante  $n$  da fórmula de Manning dentro de valores compatíveis com a rugosidade do leito do rio.

### 6.1.4 MÉTODOS SIMPLES PODEM PRODUZIR RESULTADOS EQUIVALENTES A MÉTODOS COMPLEXOS

Em casos reais de propagação de vazões, MAHMOOD e YEVJEVICH (1975), relatam que: “provavelmente, a formulação e determinação da geometria, características de resistência e condições de contorno têm mais influência na validade dos resultados calculados do que a técnica de solução utilizada, desde que o critério de estabilidade tenha sido observado”. Logo, um esquema explícito pode produzir resultados equivalentes a esquemas implícitos, ou mesmo, a métodos matematicamente mais complexos, fundamentados na teoria das aproximações. É inegável que quanto melhores forem os dados relativos à configuração geométrica do leito – declividade, largura, curvas, conformação do fundo etc – melhores serão os resultados. Porém, cabe ao projetista perceber até onde esse refinamento é necessário. É importante ter presente as inúmeras simplificações inerentes ao modelo concebido por Saint Venant para evitar excessos no detalhamento. Seções transversais muito detalhadas, por exemplo, não compensam a omissão de meandros ao longo do rio, nem calibrações do modelo apoiadas no coeficiente de rugosidade, nem vazões incrementais irrealistas.

### 6.1.5 ESTIMATIVA DE VALORES NOS CONTORNOS

O procedimento de estimativa de valores nos contornos, proposto neste trabalho (reta de mínimos quadrados que passa por três pontos adjacentes ao contorno considerado) melhora efetivamente os resultados finais. Isso pode ser verificado com facilidade no caso do canal lateral onde a vazão de estabilização é conhecida. Pode-se alterar o procedimento de estimativa de valores no contorno e comparar as vazões finais.

### 6.1.6 ESTIMATIVA DA CONTRIBUIÇÃO LATERAL

Em rios com grande bacias de contribuição, a propagação de vazões de um ponto A para um ponto B depende do conhecimento da contribuição lateral. Durante o percurso, a contribuição lateral dependerá da precipitação - que poderá existir ou não-, do escoamento superficial, do estado de saturação do solo, do escoamento subterrâneo, e da evaporação que variam continuamente. Desta forma, a determinação da contribuição lateral por meios indiretos parece se justificar. O procedimento proposto neste trabalho consiste em analisar hidrógrafos, no início e final do trecho, para várias enchentes conhecidas. Para cada enchente, processa-se o programa para a vazão mínima em A, e por tentativas se estabelece um valor de  $q_{min}$  que proporcione uma vazão calculada em B igual à vazão medida em B. Da mesma forma, processa-se o programa para a vazão máxima em A e estimam-se valores para  $q_{máx}$  até que o valor calculado da vazão em B coincida com a vazão máxima do hidrógrafo em B. Desta forma são estabelecidos dois limites de variação para  $q$ . O próximo passo será o estabelecimento de uma proporcionalidade entre  $q$  e o valor da vazão no início do trecho.

Repetindo o procedimento para cada cheia observada, pode-se plotar curvas (Vazão afluente  $\times q$ ), superpor os gráficos e verificar a dispersão de  $q$  para cada valor da vazão em A.

Com esse procedimento, dada uma vazão em A será possível prever-se uma vazão em B, assimilando ocorrências do passado em um ambiente físico semelhante.

### 6.1.7 ÁREAS DE ALAGAMENTO LATERAL PARA CONTROLE DE INUNDAÇÕES

O efeito produzido pela inclusão de áreas de alagamento lateral, ao longo do leito do rio, para a redução de inundações a jusante, pode ser avaliado com um procedimento semelhante ao utilizado no caso de rede de canais.

Em resumo, a solução consiste em avaliar-se a vazão lateral associada a um mecanismo hidráulico (canal lateral, vertedor, comporta etc); equacionamento do volume efluente do canal principal com o volume de água retido no canal lateral (relação cota  $\times$  volume). A diferença de nível entre o canal principal e o reservatório lateral define a direção do fluxo transversal ao longo do tempo.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES E SUGESTÕES

### 6.2.1 DIFERENÇAS FINITAS E VOLUMES FINITOS

Diferenças finitas e, principalmente, volumes finitos são técnicas bastante adequadas à solução de problemas de escoamento em oceanos, rios e canais. A relativa facilidade de implementação desses processos, associada ao desenvolvimento dos computadores, recomenda uma atenção especial para essas técnicas na área de recursos hídricos.

## 6.2.2 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM 2D

Pode-se dar continuidade a este trabalho utilizando-se um modelo das equações de Saint Venant em 2D para solucionar problemas de escoamento com duas dimensões espaciais.

## 6.2.3 ADIÇÃO DE ACELERAÇÕES VERTICAIS PROVENIENTES DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ

As equações de Boussinesq representam um sistema mais abrangente de equações diferenciais parciais onde fluxos rapidamente variáveis e os efeitos da aceleração vertical não podem ser desprezados. Quando, neste sistema, as acelerações verticais são eliminadas, as equações de Saint Venant são reproduzidas (ABBOTT e MINNS,1998).

No cálculo de ruptura de barragens e ressaltos hidráulicos, pode-se experimentar a adição de acelerações verticais provenientes das equações de Boussinesq para melhor simular estas aplicações.

## 6.2.4 DISCRETIZAÇÃO COM $\Delta x$ VARIÁVEL

Outro ponto a ser explorado, segundo CROSSLEY (1999), seria a adoção de um esquema de discretização espacial com  $\Delta x$  variável. Esta técnica pode ser útil em alguns casos, principalmente, em redes de canais ou esgotos.

### 6.2.5 RIOS COM CALHA E ÁREA DE INUNDAÇÃO

Nos dois casos estudados, o leito dos rios estava razoavelmente encaixado o que permitiu que se utilizasse uma seção retangular com largura variável ao longo do trecho. Se o rio for suscetível a inundações será necessário que se adote uma seção mista. Após o estudo das seções reais pode-se adotar duas seções retangulares superpostas para simular o efeito da inundação de forma simplificada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, M. B. **Computacional Hydraulics**: Elements of the Theory of Free Surface Flows. Austin: Ed Pitman, 1979. 324 p.
- ABBOTT, M. e MINNS, A. **Computational Hydraulics**, Ashgate Publishing Ltd, 1998.
- BASTOS, E. R. **Modelo matemático para análise de fluxo transiente em rede de canais**, Lavras: UFLA. Dissertação de mestrado, 1997.
- CANALI, G. C., CABRAL, J. J. S. P., AZEVEDO, J. R. G., MONTENEGRO, S. M. G. L. **Hidráulica aplicada**, ABRH, P. Alegre, 2003.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A., ZANG, T.A. **Spectral Methods in Fluid Dynamics**. Springer-Verlag, 1988.
- CASTANHARO, G. **Aplicação de modelos hidrodinâmicos no contexto de previsão de aflúências a reservatórios**. Curitiba: UFPR, CEHPAR. Dissertação de mestrado, 2003.
- CHAUDHRY, M. H. **Open-channel flow**. Prentice Hall, Inc., 1993, 483 p.
- CHOW, V. T. **Open-Channel Hydraulics**. Ed Mc Graw-Hill, 1959. 680 p.
- CHOW, V.T., MAIDMENT, D.R., MAYS, L.W. **Applied Hydrology**. Ed McGraw-Hill, 1988. 572 p.
- CROSSLEY, A. J. **Accurate and efficient numerical solutions for the Saint Venant equations of open channel flow**, Thesis submitted to the University of Nottingham for the degree of PhD, 1999.
- CUNGE, J. A., HOLLY, F. M., VERWEY, A. **Practical Aspect of Computational River Hydraulics**. Marshfield: Pittman, 1980.
- DAILY, J. W. e HARLEMAN, D. R. F. **Fluid Dynamics**. Ed. Addison-Wesley, 1966.
- FABIANI, A. L. T. **Contribuição ao estudo das ondas geradas pela ruptura de barragens**. Curitiba: UFPR, CEHPAR. Dissertação de mestrado. 132 p, 1995.
- FRAZÃO, S.S. e ZECH, Y. **Dam break in channels with 90 degrees bend**. J. of the Hydraulics Div., v. 128, n. 11, p. 956-968, 2002.
- HENDERSON, F. M. **Open Channel Flow**, New York: MacMillan, 1966.
- HERGENHAHN, B. R. **An introduction to the history of psychology**, Wadsworth, 2001.
- HINDS, J. **Side channel spillways**, Transactions ASCE, v. 89, 1926.
- HOU, T. Y. e LEFLOCH, P. **Why non-conservative schemes converge to the wrong solutions: Error Analysis**. Math. Of Comput., n.62, p. 497-530, 1994.

JOLIFFE, I. B. **Computation of dynamic waves in channel networks.** J. of the Hydraulics Div., v. 110, n. 10, p. 1358-1370, 1984.

KAVISKI, E. **Notas de aula da disciplina Escoamento não-permanente em canais.** 1987

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics.** John Wiley and Sons, 1993.

LIGGETT, J.A. Basic Equations of Unsteady Flow. In: MAHMOOD, K., YEVJEVICH, V. **Unsteady Flow in Open Channels.** Fort Collins: Water Resources Publications, 1975. p. 29-62

LIGGETT, J.A., CUNGE, J. A. Numerical Methods of Solution of the Unsteady Flow Equations. In: MAHMOOD, K., YEVJEVICH, V. **Unsteady Flow in Open Channels.** Fort Collins: Water Resources Publications, 1975. p. 29-62

MACCHIONE, F. e MORELLI, M. A. **Practical aspects in comparing shock-capturing schemes for dam break problems.** J. of the Hydraulics Div., v. 129, n. 3, p. 187-195, 2003.

MAHMOOD K., e YEVJEVICH V. **Unsteady flow in open channels.** Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications, v. 1, 1975.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional,** Rio de Janeiro: LTC Editora, 1995.

MÜLLER, M. **Investigação da aplicabilidade do uso de modelos hidrológicos e redes neurais na propagação de vazões.** Curitiba: UFPR, CEHPAR. Dissertação de mestrado. 145 p, 2000.

ROBERSON, J. A., CASSIDY, J. J., CHAUDRY, M. H. **Hydraulic engineering.** Boston: Houghton Mifflin Company, 1998.

SAKKAS, J. G., STRELKOFF, T. **Dam-break flood in a prismatic dry channel,** J. of the Hydraulics Div., v. 99, n. HY12, p. 2195-2216, 1973.

SIVALOGANATHAN, K. **Flood routing by characteristic methods.** J. of the Hydraulics Div., v. 104, p. 1075-1091, 1978.

SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations,** 1984.

TORO, E. F. **Shock-capturing methods for free-surface shallow flows.** John Wiley & Sons, England, 2001.

TSENG, M.H., Hsu C.A., Chu C.R. **Channel routing in open-channel flows with surges** J. of the Hydraulics Div., v. 127, n. 2, p. 115-122, 2001.

TUCCI, C. E. M. **Modelos hidrológicos.** Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1998. 669 p.

VENUTELLI, M. **Stability and accuracy of weighted four-point implicit finite difference schemes for open channel flow.** J. of the Hydraulics Div., v. 128, n. 3, p. 281-288, 2002.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics.** New York: McGraw-Hill, Inc., 1994.



YEVJEVICH, V. Introduction. In: MAHMOOD, K., YEVJEVICH, V. **Unsteady Flow in Open Channels**. Fort Collins: Water Resources Publications, 1975. p. 1-28

ZIENKIEWICZ, O. C., Morgan K., **Finite elements and approximation**, New York: John Wiley & Sons, 1983.

ZOPPOU, C., M. ASCE, Roberts, S. **Explicit schemes for dam-break simulations**. J. of the Hydraulics Div., v. 129, n. 1, p. 11-34, 2003.

**APÊNDICE – PROGRAMAS COMPUTACIONAIS PARA OS ESTUDOS DE  
CASOS, DESENVOLVIDOS NA LINGUAGEM RESIDENTE DO MATLAB**

## CALHA DE GRANDES DIMENSÕES

```

%PROGRAMA calha.m
clear;
%Dados de entrada
Q=0.20*80*20/3600;
q=Q/20.0;
g=9.81;
So=0.01;
n=0.011;
B=0.40
%Condições iniciais para t=0. (valores arbitrários)
y(1,1:21)=0.01;
v(1,1:21)=0.0;
Rh(1,1:21)=B*y(1,1)/(B+2*y(1,1));
Sf(1,1:21)=0.0;
%Discretização
dt=0.1;
dx=1;
r=dt/dx;
%Cálculo das profundidades e velocidades pelo método de Lax;
for k=1:1001
    k
    %os valores para os pontos i=1 e i+2 são calculados na saída do segundo
loop
    for i=2:20
        yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
        vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
        SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));
        D=yy;
        y(k+1,i)=yy-0.5*r*D*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1))+dt*q/B;
        v(k+1,i)=vv-0.5*r*9.81*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-
0.5*r*vv*(v(k,i+1)-v(k,i-1))+0.0*(dt*q*vv)/(B*y(k+1,i))+9.818*dt*(So-
SSf);
        Rh(k+1,i)=B*y(k+1,i)/(B+2*y(k+1,i));
        Rh(k+1,1)=Rh(k+1,2);
        Sf(k+1,i)=(n*n*abs(v(k+1,i))*v(k+1,i))/(Rh(k+1,i)^(4/3));
        Sf(k+1,1)=Sf(k+1,2);
    end
    %Contorno de entrada
    %Extrapolação de valores internos (i=[2,3,4])para estimar valor em
i=1;
        ix=[2 3 4];
        iy=[y(k+1,2) y(k+1,3) y(k+1,4)];
        p=polyfit(ix,iy,1);
        y(k+1,1)=polyval(p,1);
        v(k+1,1)=0.0;
    %Cálculo da vazão para i=20
        Qc=v(k+1,20)*B*y(k+1,20);
    %Contorno de saída
        y(k+1,21)=((((Qc+q*dx)/B)^2)/g)^(1/3);
        v(k+1,21)=sqrt(g*y(k+1,21));
        Rh(k+1,21)=B*y(k+1,21)/(B+2*y(k+1,21));
        Sf(k+1,21)=(n*n*abs(v(k+1,21))*v(k+1,21))/(Rh(k+1,21)^(4/3));
    %Cálculo da vazão na seção final
        QF(k+1)=v(k+1,21)*B*y(k+1,21);
    %Condição de Courant
        C(k)=dx/(abs(v(k+1,21))+sqrt(g*y(k+1,21)));
    %Teste de consistência

```

```

        if y(k,i)<0.0 | v(k,i)<0.0 | dt>C(k)
            break
        end
    end
end

```

### VERTEDOR LATERAL EM BARRAGENS

```

%PROGRAMA vertl.m
clear;
%Dados de entrada
h=2.5;
q=2.0*1.0*h^(3/2);
g=9.81;
So=0.20;
n=0.013;
bo=10;
%Condições iniciais
y(1,1:101)=0.001;
v(1,1:101)=0.0;
Rh(1,1:101)=(y(1,1)+40)/((40/y(1,1))+2*sqrt(17));
Sf(1,1:101)=0.0;
%Discretização
dt=.04;
dx=1;
r=dt/dx;
QF(1)=0.0;
for k=1:1501
    k
    for i=2:100
        yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
        vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
        SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));
        B=bo+yy/2.0;
        D=yy*((yy/4)+bo)/B;
        y(k+1,i)=yy-0.5*r*D*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1))+dt*q/B;
        v(k+1,i)=vv-0.5*r*9.81*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-0.5*r*vv*(v(k,i+1)-
v(k,i-1))+g*dt*(So-SSf)-(dt*q*vv)/(B*y(k+1,i));
        Rh(k+1,i)=(y(k+1,i)+40)/((40/y(k+1,i))+2*sqrt(17));
        Rh(k+1,1)=Rh(k+1,2);
        Sf(k+1,i)=(n*n*abs(v(k+1,i))*v(k+1,i))/(Rh(k+1,i)^(4/3));
        Fr(k+1,i)=v(k+1,i)/sqrt(g*y(k+1,i));
    end
    %Contorno de montante
        Fr(k+1,1)=0.0;
        Fr(k+1,101)=Fr(k+1,100);
        ix=[2 3 4];
        iy=[y(k+1,2) y(k+1,3) y(k+1,4)];
        p=polyfit(ix,iy,1);
        y(k+1,1)=polyval(p,1);
        v(k+1,1)=0.0;
        Sf(k+1,1)=0.0;
    %Contorno de jusante
        QA(k)=v(k+1,100)*(bo+y(k+1,100)/4)*y(k+1,100);
        fx=[98 99 100];
        fy=[y(k+1,98) y(k+1,99) y(k+1,100)];
        w=polyfit(fx,fy,1);
        y(k+1,101)=polyval(w,101);
        v(k+1,101)=(QA(k)+q*dx)/((bo+y(k+1,101)/4)*y(k+1,101));
        Rh(k+1,101)=(y(k+1,101)+40)/((40/y(k+1,101))+2*sqrt(17));
    end
end

```

```

Sf(k+1,101)=(n*n*abs(v(k+1,101))*v(k+1,101))/(Rh(k+1,101)^(4/3));
%Vazão no contorno de jusante
QF(k+1)=v(k+1,101)*y(k+1,101)*((y(k+1,101)/4)+bo);
C(k)=dx/(abs(v(k+1,101))+sqrt(g*y(k+1,101)));
if y(k,i)<0.0 | dt>C(k)
    break
end
end

```

### PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL DE GRANDE LARGURA

```

%PROGRAMA asce.m
clear;
%Dados de entrada
g=9.81;
So=0.00193;
n=0.025;
%Condições iniciais
y1(1:201)=0.5;
v1(1:201)=1.106;
Sf1(1:201)=(n*n*v1(1)*abs(v1(1)))/(y1(1)^(4/3));
%Discretização
dt=10;
dx=100;
r=dt/dx;
q1(1)=0.553;
q2(1)=0.553;
qw(1)=0.553;
for k=1:351
    k
    yi(k)=y1(1);
    vi(k)=v1(1);

    for i=2:200
        yy=0.5*(y1(i-1)+y1(i+1));
        vv=0.5*(v1(i-1)+v1(i+1));
        SSf=0.5*(Sf1(i-1)+Sf1(i+1));
        y2(i)=yy-0.5*r*yy*(v1(i+1)-v1(i-1))-0.5*r*vv*(y1(i+1)-y1(i-1));
        v2(i)=vv-0.5*r*g*(y1(i+1)-y1(i-1))-0.5*r*vv*(v1(i+1)-v1(i-1))+g*dt*(So-SSf);
        Sf2(i)=(n*n*v2(i)*abs(v2(i)))/(y2(i)^(4/3));
        Sf2(1)=Sf2(2);

    end

%Contorno de entrada

    if k<=61
        q=0.553+(3.447*10/600)*(k-1);
        y2(1)=y2(2);
        v2(1)=q/y2(1);
    elseif k<=121
        q=0.553+3.447+(3.447*10/600)*(61-k);
        y2(1)=y2(2);
        v2(1)=q/y2(1);
    else
        y2(1)=0.5;
        v2(1)=1.106;
    end
    qw(k)=y2(1)*v2(1);
end

```

```

%Contorno de saída
y2(201)=0.5;
v2(201)=v2(200);
Sf2(201)=(n*n*v2(201)*abs(v2(201)))/(y2(201)^(4/3));

yf(k)=y2(201);
vf(k)=v2(201);
qf(k)=v2(201)*y2(201)*1;

q1(k)=v2(10)*y2(10)*1;
q2(k)=v2(20)*y2(20)*1;
%Redefinição das variáveis
v1=v2;
y1=y2;
Sf1=Sf2;
%Condição de Courant
C(k)=dx/(abs(v2(200))+sqrt(g*y2(200)));
if y2(200)<0.0 | dt>C(k)
    break
end

end
t(1)=0.0;
t(2:351)=(2:351-1)*dt;
plot(t,qw,t,q1,t,q2)
axis([1 3600 0 5])
grid on

```

## RUPTURA DE BARRAGEM

```

%%PROGRAMA db.m
clear;
%Dados de entrada
g=9.81;
So=0.0;
n=0.012;
B=20.0;
%Condições iniciais
y(1,1:301)=10.0;
y(1,302:601)=2.0;
v(1,1:601)=0.0;
Rh(1,1:301)=y(1,1)/(1+2*y(1,1)/B);
Rh(1,302:601)=y(1,601)/(1+2*y(1,601)/B);
Sf(1,1:601)=0.0;
D=y;
%Discretização
dt=0.5;
dx=10;
r=dt/dx;
for k=1:391
    k
    for i=2:600
        yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
        vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
        DD=0.5*(D(k,i-1)+D(k,i+1));
        SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));
    end
end

```

```

        y(k+1,i)=yy-0.5*r*DD*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1));
        D(k+1,i)=y(k+1,i);
        v(k+1,i)=vv-0.5*r*g*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-0.5*r*vv*(v(k,i+1)-
v(k,i-1))+g*dt*(So-SSf);
        Rh(k+1,i)=y(k+1,i)/(1+2*y(k+1,i)/B);
        Sf(k+1,i)=(n*n*v(k+1,i)*abs(v(k+1,i)))/(Rh(k+1,i)^(4/3));
        Fr(k+1,i)=v(k+1,i)/sqrt(g*y(k+1,i));
    end
    Fr(k+1,1)=Fr(k+1,2);
    Fr(k+1,601)=Fr(k+1,600);
%Contorno de montante;
    v(k+1,1)=v(k+1,2);
    y(k+1,1)=10.0;
    D(k+1,1)=y(k+1,1);
    Rh(k+1,1)=y(k+1,1)/(1+2*y(k+1,1)/B);
    Sf(k+1,1)=(n*n*v(k+1,1)*abs(v(k+1,1)))/(Rh(k+1,1)^(4/3));
%Contorno de jusante;
    y(k+1,601)=2.0;
    Rh(k+1,601)=y(k+1,601)/(1+2*y(k+1,601)/B);

Sf(k+1,601)=(n*n*v(k+1,600)*abs(v(k+1,600)))/(Rh(k+1,601)^(4/3));
    v(k+1,601)=v(k+1,600);
    D=y;
%Condição de Courant
    C(k)=dx/(v(k+1,302)+sqrt(g*y(k+1,302)));
    if y(k+1,302)<0 | v(k+1,302)<0 | dt>C(k)
        break
    end
    plot(1:601,y(k,1:601))
    pause(0.2)
end

```

## FECHAMENTO INSTANTÂNEO DE COMPORTA

```

clear;
%PROGRAMA fc.m
%Dados de entrada
So=0.0001;
n=0.013;
g=9.81;
Q=110.0;
B=20.0;
h=3.065;
%Condições iniciais
y(1,1:101)=h;
v(1,1:101)=Q/(20*h+2*h^2);
%Discretização
dt=1;
dx=10;
r=dt/dx;
%Função utilizada para calcular D, Rh e Sf. Listada após este programa.
[D,Rh,Sf]=TRPZ(B,y,v,n);
for k=1:181

```

```

k
  for i=2:100
      yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
      vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
      DD=0.5*(D(k,i-1)+D(k,i+1));
      y(k+1,i)=yy-0.5*r*DD*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1));
      SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));
      v(k+1,i)=vv-0.5*r*9.81*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-
0.5*r*vv*(v(k,i+1)-v(k,i-1))+9.818*dt*(So-SSf);
      [D(k+1,i),Rh(k+1,i),Sf(k+1,i)]=TRAPZ(B,y(k+1,i),v(k+1,i),n);
      D(k+1,1)=D(k+1,2);
      Rh(k+1,1)=Rh(k+1,2);
      Sf(k+1,1)=Sf(k+1,2);
  end
%Contorno de entrada
y(k+1,1)=3.065;
ix=[2 3 4];
iy=[v(k+1,2) v(k+1,3) v(k+1,4)];
p=polyfit(ix,iy,1);
v(k+1,1)=polyval(p,1);
%Contorno de saída
kx=[98 99 100];
ky=[y(k+1,98) y(k+1,99) y(k+1,100)];
q=polyfit(kx,ky,1);
y(k+1,101)=polyval(q,101);
D(k+1,101)=D(k+1,100);
Rh(k+1,101)=Rh(k+1,100);
Sf(k+1,101)=0.0;
%Condição de Courant
C(k)=dx/(abs(v(k+1,50))+sqrt(g*y(k+1,50)));
  if y(k,i)<0.0 | dt>C(k)
      break
  end
  plot(1:101,y(k,1:101))
  pause(0.2)
end

```

## FUNÇÃO TRAPZ

```

%ARQUIVO TRAPZ.m
function[D,Rh,Sf]=TRAPZ(B,h,v,n)
%Seção trapezoidal 2H:1V;

D=(B+2*h)./( (20./h)+4 );

Rh=((B/2)+h)./( ((B/2)./h)+2.236 );
Sf=(n*n*abs(v).*v)./(Rh.^(4/3));

return

```



### PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO IGUAÇU

```

%PROGRAMA fluvppp.m
clear;
%Dados de entrada
%Vazões em Fluviópolis e União da Vitória
FLUV1990;
%Curvas de descarga em FLUV e UV
FLUVD2;
g=9.81;
n=0.0198;
So=0.00009;
%Discretização
dt=100;
dx=1000;
r=dt/dx;
%Interpolação de larguras ao longo do trecho
xi=1:105;
z=x+1;
BB(1:105)=interp1(z,BI,(1:105));
QF(1)=QUi(1);
%interpola valores nas duas curvas de descarga
y1(1)=interp1(QFL,hFL,Qi(1));
y1(105)=interp1(QUV,hUV,QUi(1));
v1(1)=Qi(1)/(BB(1)*y1(1));
v1(105)=QUi(1)/(BB(105)*y1(105));
%Condições iniciais
y1(2:104)=y1(1)+(2:104).*(y1(105)-y1(1))/104;
v1(2:104)=v1(1)+(2:104).*(v1(105)-v1(1))/104;
Rh1(1:105)=y1(1:105);
Sf1(1:105)=(n*v1).^2./(Rh1.^(4/3));
D1(1:105)=y1(1:105);
%Valores calculados por tentativas com programas auxiliares
qmin=0.0033;
qmax=0.0049;
QMax=max(Qi);
QMin=min(Qi);
for k=1:35640
    k
    q=qmin+((qmax-qmin)/(QMax-QMin))*(Qi(k)-QMin);

    yi(k)=y1(1);
    vi(k)=v1(1);
    for i=2:104
        yy=0.5*(y1(i-1)+y1(i+1));
        vv=0.5*(v1(i-1)+v1(i+1));
        DD=0.5*(D1(i-1)+D1(i+1));
        SSf=0.5*(Sf1(i-1)+Sf1(i+1));
        y2(i)=yy-0.5*r*DD*(v1(i+1)-v1(i-1))-0.5*r*vv*(y1(i+1)-y1(i-1))+dt*q/BB(i)-0.5*(vv*r*yy)*(BB(i+1)-BB(i-1))/BB(i);
        D2(i)=y2(i);
        v2(i)=vv-0.5*r*9.81*(y1(i+1)-y1(i-1))-0.5*r*vv*(v1(i+1)-v1(i-1))+0.0*(dt*q*vv)/(BB(i)*y1(i))+g*dt*(So-SSf);
        Rh2(i)=y2(i);
        Rh2(i)=y2(i);
        Sf2(i)=(n*n*v2(i)*abs(v2(i)))/(Rh2(i)^(4/3));
    end
end

```

```

%Contorno de entrada
y2(1)=interp1(QFL,hFL,Qi(k+1));
D2(1)=y2(1);
v2(1)=Qi(k+1)/(BB(1)*y2(1));
Rh2(1)=y2(1);
Sf2(1)=(n*v2(1))^2/(Rh2(1)^(4/3));
%Contorno de saída
y2(105)=y2(104);
QF(k+1)=interp1(hUV,QUV,y2(105));
v2(105)=QF(k+1)/(BB(105)*y2(105));
Rh2(105)=y2(105);
Sf2(105)=(n*n*v2(105)*abs(v2(105)))/(Rh2(105)^(4/3));
D2(105)=y2(105);
yf(k)=y2(105);
vf(k)=v2(105);
%Redefinição de variáveis de entrada
y1=y2;
v1=v2;
D1=D2;
Rh1=Rh2;
Sf1=Sf2;
%Teste da condição de Courant
C(k)=dx/(abs(v2(105))+sqrt(g*y2(105)));
if y2(104)<0.0 | v2(104)<0.0 | dt>C(k)
    break
end
end

t(1:k+1)=(1:k+1-1)*(dt/3600)/24;
plot(t,QF,t,QUi), grid on
axis([0 45 0 2500])
xlabel('t (horas)')
ylabel('Q (m³/s)')
dv=abs(QF(1:k)-QUi(1:k))./QUi(1:k);
%plot(1:k,dv)
media=mean(dv)
sigma=std(dv)

```

## PROPAGAÇÃO DE VAZÕES EM CANAL CIRCULAR

```

%função CIRCLE
function [beta,B,A,D,P,Rh]=CIRCLE(dl,y1);
%circle calcula var. para Sivaloganathan
beta=acos(1-2*y1./dl);
B=dl*sin(beta);
A=(dl^2/4).*(beta-sin(beta).*cos(beta));

D=A./B;
P=dl.*beta;
Rh=A./P;
return

```

```

%Programa: sivaf1.m
%Inicialmente fazer cópia deste programa alterando as condições de
contorno de entrada para a vazão constante
%Q(k)=0.8;v(k+1,1)=Q(k)/AA;etc
%Alterar dados de entrada com valores arbitrários, por exemplo
y(1,1:21)= 0.10; v(1,1:21)= 0.0;

```

```

%Rodar o programa até a vazão de saída estabilizar com a vazão de
entrada.
%Guardar os valores em arquivo. save fname yi vi
%Processar o programa principal lendo estes valores. load fname yi vi

clear;
g=9.81;
d=2.0;
So=0.0005;
n=0.010;
load fname yi vi;
y(1,1:21)=yi;
v(1,1:21)=vi;
%função que calcula características geométricas do círculo
[beta(1,1:21),B(1,1:21),A(1,1:21),D(1,1:21),P(1,1:21),Rh(1,1:21)]=CIRCLE
(d,y(1,1:21));
Sf(1,1:21)=(n*n./(Rh(1,1:21).^(4/3))).*v(1,1:21).*abs(v(1,1:21));

dt=0.1;
dx=1;
r=dt/dx;
q=0;

for k=1:1401
    k
    for i=2:20

        yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
        vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
        DD=0.5*(D(k,i-1)+D(k,i+1));
        SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));
        y(k+1,i)=yy-0.5*r*DD*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1))+0.0*dt*q/B(k,i);
        v(k+1,i)=vv-0.5*r*g*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-0.5*r*vv*(v(k,i+1)-
v(k,i-1))+0.0*(dt*q*vv/(B(k,i)*y(k,i)))+g*dt*(So-SSf);

[beta(k+1,i),B(k+1,i),A(k+1,i),D(k+1,i),P(k+1,i),Rh(k+1,i)]=CIRCLE(d,y(k
+1,i));

        D(k+1,1)=D(k+1,2);
        Rh(k+1,1)=Rh(k+1,2);
        B(k+1,1)=B(k+1,2);

        Sf(k+1,i)=(n*n/(Rh(k+1,i)^(4/3)))*v(k+1,i)^2;
        Sf(k+1,1)=Sf(k+1,2);
        Fr(k+1,i)=v(k+1,i)/sqrt(g*A(k+1,i)/B(k+1,i));
        Fr(k+1,1)=Fr(k+1,2);

    end
%contorno de entrada
ix=[2 3 4];
iy=[y(k+1,2) y(k+1,3) y(k+1,4)];
p=polyfit(ix,iy,1);
y(k+1,1)=polyval(p,1);
bet=acos(1-2*y(k+1,1)/d);
AA=(d^2/4)*(bet-sin(bet)*cos(bet));

```

```

if k<51
    Q(k)=0.8;
    v(k+1,1)=Q(k)/AA;

elseif k<301
    Q(k)=0.8+0.048*((k-1)*dt-5);
    v(k+1,1)=Q(k)/AA;

elseif k<551
    Q(k)=2.0;
    v(k+1,1)=Q(k)/AA;
elseif k<801
    Q(k)=2.0-0.048*((k-1)*dt-55);
    v(k+1,1)=Q(k)/AA;

else k>=801
    Q(k)=0.8;
    v(k+1,1)=Q(k)/AA;

end

%contorno de saida em queda livre;
Qc=v(k+1,20)*A(k+1,20);
const=(g*d^5)/(64*Qc*Qc);
x=0.001:0.01:pi;
c=const*((x-sin(x)).*cos(x)).^3./sin(x));
beta(k+1,21)=interp1(c,x,1.0);
clear c,x;
y(k+1,21)=(d/2)*(1-cos(beta(k+1,21)));
A(k+1,21)=(d^2/4)*(beta(k+1,21)-
sin(beta(k+1,21))*cos(beta(k+1,21)));
B(k+1,21)=d*sin(beta(k+1,21));

v(k+1,21)=sqrt(g*A(k+1,21)/B(k+1,21));
Fr(k+1,21)=Fr(k+1,20);

D(k+1,21)=A(k+1,21)/B(k+1,21);
Rh(k+1,21)=(2/4)*(1-
(sin(beta(k+1,21))*cos(beta(k+1,21)))/beta(k+1,21));

Sf(k+1,21)=(n*n/(Rh(k+1,21)^(4/3)))*v(k+1,21)^2;
C(k)=dx/(abs(v(k+1,21))+sqrt(g*y(k+1,21)));
if y(k+1,21)<0.0 | v(k+1,21)<0.0 | dt>C(k)
    break
end
end

```

## RESSALTO HIDRÁULICO

```

%PROGRAMA ressalto.m
clear;
%Dados
g=9.81;
So=0.001;
n=0.014;
b=6;
Q=17;
%Condições iniciais
y(1,1:301)=0.50;

```

```

v(1,1)=Q/(b*0.5);
v(1,2:301)=0.0;
%Discretização
dt=0.1;
dx=1;
r=dt/dx;
R(1,1:301)=b*y(1,1)/(b+2*y(1,1));
Sf(1,1:301)=(n*v(1,1:301)).^2./(R(1,1:301).^(4/3));
for k=1:2001
    k
    for i=2:300
        yy=0.5*(y(k,i-1)+y(k,i+1));
        vv=0.5*(v(k,i-1)+v(k,i+1));
        SSf=0.5*(Sf(k,i-1)+Sf(k,i+1));

        y(k+1,i)=yy-0.5*r*yy*(v(k,i+1)-v(k,i-1))-0.5*r*vv*(y(k,i+1)-
y(k,i-1));
        v(k+1,i)=vv-0.5*r*9.81*(y(k,i+1)-y(k,i-1))-
0.5*r*vv*(v(k,i+1)-v(k,i-1))+9.818*dt*(So-SSf);
        R(k+1,i)=b*y(k,i)/(b+2*y(k,i));
        R(k+1,1)=R(1,1);
        Sf(k+1,i)= (n*v(k+1,i))^2/(R(k+1,i)^(4/3));
        Sf(k+1,1)=Sf(1,1);
        Fr(k+1,i)=v(k+1,i)/sqrt(g*y(k+1,i));
        Fr(k+1,1)=Fr(k+1,2);
    end

    %Contorno de montante
    y(k+1,1)=0.5;
    v(k+1,1)=Q/(b*0.5);
    Qc=v(k+1,300)*b*y(k+1,300);
    q1=Qc/b;
    %Contorno de jusante
    y(k+1,301)=((q1^2)/g)^(1/3);
    v(k+1,301)=q1/y(k+1,301);
    Rh(k+1,301)=b*y(k+1,301)/(b+2*y(k+1,301));

    Sf(k+1,301)=(n*n*abs(v(k+1,301))*v(k+1,301))/(Rh(k+1,301)^(4/3));
    Fr(k+1,301)=Fr(k+1,300);
    QF(k+1)=v(k+1,301)*b*y(k+1,301);
    %Condição de Courant
    C(k)=dx/(v(k+1,300)+sqrt(g*y(k+1,300)));
    if y(k+1,300)<0 | v(k+1,300)<0 | dt>C(k)
        break
    end
end
x(1:301)=(1:301)-1)*dx;
plot(x,y(k,1:301)),grid on
axis([0 300 0 2])
pause(0.2)
end

```

## PROPAGAÇÃO DE VAZÕES NO RIO CHOPIM

%PROGRAMA chopimdados

```

%chopMIN e chopMAX são programas auxiliares usados somente para definir
os
%valores das contribuições laterais limites (qmax e qmin)
%As matrizes de dados podem ser transferidas do excel pelo recurso de
'recortar e colar'
%Matriz A: profundidades e vazões em PP e AV de hora em hora, para o
evento de cheia escolhido.

```

```
A=[0.55 67.83 1.10 145.50
```

```
0.55 67.83 1.10 145.50
```

```
0.55 67.83 1.10 145.50
```

```
0.55 67.83 1.10 145.50
```

```
0.55 67.83 1.10 145.50
```

```
0.56 69.39 1.10 145.50
```

```
0.56 69.39 1.10 145.50
```

```
0.58 72.52 1.10 145.50
```

```
0.57 70.96 1.11 149.35
```

```
0.57 70.96 1.11 149.35
```

```
0.59 74.09 1.12 153.20
```

```
0.62 79.08 1.14 160.90
```

```
0.68 89.37 1.15 164.75
```

```
0.73 98.08 1.17 172.45
```

```
.....
```

```
.....
```

```
0.66 85.94 1.23 196.30
```

```
0.67 87.66 1.24 200.40
```

```
0.68 89.37 1.24 200.40
```

```
0.67 87.66 1.23 196.30
```

```
0.68 89.37 1.23 196.30
```

```
0.68 89.37 1.23 196.30
```

```
0.68 89.37 1.23 196.30];
```

```
t=0:3600:407*3600; %horas
```

```
%Define QP (vazões em PP) e QA (vazões em AV).
```

```
QP=A(:,2);
```

```
QA=A(:,4);
```

```
%Define dt=100 s e, ainda, define por interpolação as vazões Qi (em
Porto Palmeirinha) e QUi (em Águas do Verê) para esta discretização.
```

```
ti=0:100:1465200;
```

```
Qi=interp1(t,QP,ti);
```

```
QUi=interp1(t,QA,ti);
```

```
%Curva de descarga em Porto Palmeirinha (matriz CP);
```

```
CP=[-0.10 4.00
```

```
0.00 7.00
```

```
0.10 13.00
```

```
0.20 21.00
```

```
0.30 32.00
```

```
0.40 46.00
```

```
0.50 60.00
```

```
.....
```

```
.....
```

```
8.00 2200.00
```

```
9.00 2550.00
```

```
10.00 2950.00
```

```
11.00 3350.00
```

```
12.00 3750.00];
```

```
%Curva de descarga em Águas do Verê (matriz CA);
```

```
CA=[0.4  0
0.5   4.43
0.6   16.6
0.7   34
0.8   55.9
0.9   81.8
1.0  111
1.1  144
.....
.....
6.1  4569
6.2  4700
6.3  4834
6.4  4968
6.5  5104
6.6  5241
6.7  5380
6.8  5520
6.9  5662
7.0  5805
7.1  5949
7.2  6095
7.3  6242
7.4  6390
7.5  6540];
```

### PROGRAMA PRINCIPAL (PROP. DE VAZÕES NO RIO CHOPIM)

```
%PROGRAMA chopim.m
clear;
%Dados de entrada
chopimdados;
g=9.81;
So=0.00072;
%Larguras do rio conforme a discretização escolhida
BB(1:84)=95+(1:84).*(155-95)/84;
n=0.020;
QF(1)=QUi(1);
QP=CP(:,2);
hP=CP(:,1);
QA=CA(:,2);
hA=CA(:,1);
%Interpolação dos dados fornecidos conforme a discretização
y1(1)=interp1(QP,hP,Qi(1));
y1(84)=interp1(QA,hA,QUi(1));
v1(1)=Qi(1)/(BB(1)*y1(1));
v1(105)=QUi(1)/(BB(84)*y1(84));
%Condições iniciais
y1(2:84)=y1(1)+(2:84).*(y1(84)-y1(1))/84;
v1(2:84)=v1(1)+(2:84).*(v1(84)-v1(1))/84;
%Discretização
dt=100;
dx=1000;
```

```

r=dt/dx;
%Geometria no instante inicial
Rh1(1:84)=y1(1:84);
Sf1(1:84)=(n*v1(1:84)).^2./(Rh1(1:84).^(4/3));
D1(1:84)=y1(1:84);
%Contribuição lateral conforme procedimento descrito
%Valores de qmin e qmax devem ser definidos previamente em chopMIN e
chopMAX.
qmin=0.0018;
qmax=0.0056;
QMax=max(Qi);
QMin=min(Qi);
for k=1:14652
    k
    yi(k)=y1(1);
    vi(k)=v1(1);
    q=qmin+((qmax-qmin)/(QMax-QMin))*(Qi(k)-QMin);

    for i=2:83
        yy=0.5*(y1(i-1)+y1(i+1));
        vv=0.5*(v1(i-1)+v1(i+1));
        DD=0.5*(D1(i-1)+D1(i+1));
        SSf=0.5*(Sf1(i-1)+Sf1(i+1));
        y2(i)=yy-0.5*r*DD*(v1(i+1)-v1(i-1))-0.5*r*vv*(y1(i+1)-y1(i-
1))+dt*q/BB(i)-(vv*r*y1(i))*(BB(i)-BB(i-1))/BB(i); %B(k,i);
        D2(i)=y2(i);
        v2(i)=vv-0.5*r*9.81*(y1(i+1)-y1(i-1))-0.5*r*vv*(v1(i+1)-
v1(i-1))+ 0.0*(dt*q*vv)/(BB(i)*y1(i))+g*dt*(So-SSf);
        Rh2(i)=y2(i);
        Sf2(i)=(n*n*v2(i)*abs(v2(i)))/(Rh2(i)^(4/3));
    end
%Contorno de montante
y2(1)=interp1(QP,hP,Qi(k+1));
D2(1)=y2(1);
v2(1)=Qi(k+1)/(BB(1)*y2(1));
Rh2(1)=y2(1);
Sf2(1)=(n*v2(1))^2/(Rh2(1)^(4/3));
%Contorno de jusante
fx=[81 82 83];
fy=[y2(81) y2(82) y2(83)];
w=polyfit(fx,fy,1);
y2(84)=polyval(w,84);
QF(k+1)=interp1(hA,QA,y2(84));
v2(84)=QF(k+1)/(BB(84)*y2(84));
Rh2(84)=y2(83);
Sf2(84)=(n*n*v2(84)*abs(v2(84)))/(Rh2(84)^(4/3));
D2(84)=y2(84);

yf(k)=y2(84);
vf(k)=v2(84);

y1=y2;
v1=v2;
D1=D2;
Rh1=Rh2;
Sf1=Sf2;
%Condição de Courant
C(k)=dx/(abs(v2(84))+sqrt(g*y2(84)));
if y2(84)<0.0 | v2(84)<0.0 | dt>C(k)
    break

```



```

end
end
plot(t(1:k),QF(1:k),t(1:k),QUi(1:k)), grid on
axis([0 450 0 1000])
xlabel('t (horas)')
ylabel('Q (m³/s)')

```

## Cálculo de qmin

```

%PROGRAMA chopMIN.m
clear;
%Dados de entrada
chopimdados;
q=input('qmin = ');
g=9.81;
So=0.00072;
%Larguras do rio conforme a discretização escolhida
BB(1:84)=95+(1:84)-1.*(155-95)/83;
n=0.0200;
QF(1)=QUi(1);
QP=CP(:,2);
hP=CP(:,1);
QA=CA(:,2);
hA=CA(:,1);
%Interpolação dos dados fornecidos conforme a discretização
MINQi=min(Qi);
MINQUi=min(QUi);
y1(1)=interp1(QP,hP,MINQi);
y1(84)=interp1(QA,hA,MINQUi);
v1(1)=MINQi/(BB(1)*y1(1));
v1(84)=MINQUi/(BB(84)*y1(84));
%Condições iniciais
y1(2:84)=y1(1)+(2:84).*(y1(84)-y1(1))/84;
v1(2:84)=v1(1)+(2:84).*(v1(84)-v1(1))/84;
%Discretização
dt=100;
dx=1000;
r=dt/dx;
%Geometria no instante inicial
Rh1(1:84)=y1(1:84);
Sf1(1:84)=((n*v1(1:84)).^2)./(Rh1(1:84).^(4/3));
D1(1:84)=y1(1:84);
%Contribuição lateral conforme procedimento descrito
%t(1:14651)=(1:14651)-1)*(dt/3600);
for k=1:541
    k
    for i=2:83
        yy=0.5*(y1(i-1)+y1(i+1));
        vv=0.5*(v1(i-1)+v1(i+1));
        DD=0.5*(D1(i-1)+D1(i+1));
        SSf=0.5*(Sf1(i-1)+Sf1(i+1));
        y2(i)=yy-0.5*r*DD*(v1(i+1)-v1(i-1))-0.5*r*vv*(y1(i+1)-y1(i-1))+dt*q/BB(i)-(vv*r*y1(i))*(BB(i)-BB(i-1))/BB(i); %B(k,i);
    end
end

```

```

        D2(i)=y2(i);
        v2(i)=vv-0.5*r*9.81*(y1(i+1)-y1(i-1))-0.5*r*vv*(v1(i+1)-
v1(i-1))+ 0.0*(dt*q*vv)/(BB(i)*y1(i))+g*dt*(So-SSf);
        Rh2(i)=y2(i);
        Sf2(i)=(n*n*v2(i)*abs(v2(i)))/(Rh2(i)^(4/3));
    end
    %Contorno de montante
    % q(1)=q(2);
    y2(1)=interp1(QP,hP,MINQi);
    D2(1)=y2(1);
    v2(1)=MINQi/(BB(1)*y2(1));
    Rh2(1)=y2(1);
    Sf2(1)=(n*v2(1))^2/(Rh2(1)^(4/3));
    %Contorno de saída
    y2(84)=y2(83);
    QF(k+1)=interp1(hA,QA,y2(84));
    v2(84)=QF(k+1)/(BB(84)*y2(84));
    Rh2(84)=y2(83);
    Sf2(84)=(n*n*v2(84)*abs(v2(84)))/(Rh2(84)^(4/3));
    D2(84)=y2(84);

    y1=y2;
    v1=v2;
    D1=D2;
    Rh1=Rh2;
    Sf1=Sf2;
    %Condição de Courant
    C(k)=dx/(abs(v2(84))+sqrt(g*y2(84)));
    if y2(84)<0.0 | v2(84)<0.0 | dt>C(k)
        break
    end
    plot(1:k,QF(k)),grid on
    pause(0.1)
end

```

## Cálculo de qmax

```

%PROGRAMA chopMAX.m
clear;
%Dados de entrada
chopimdados;
q=input('qmax = ');
g=9.81;
So=0.00072;
%Larguras do rio conforme a discretização escolhida
BB(1:84)=95+(1:84)-1).*(155-95)/83;
n=0.0200;
QF(1)=QUi(1);
QP=CP(:,2);
hP=CP(:,1);
QA=CA(:,2);
hA=CA(:,1);
%Interpolação dos dados fornecidos conforme a discretização
MAXQi=max(Qi);
MAXQUi=max(QUi);
y1(1)=interp1(QP,hP,MAXQi);
y1(84)=interp1(QA,hA,MAXQUi);
v1(1)=MAXQi/(BB(1)*y1(1));
v1(84)=MAXQUi/(BB(84)*y1(84));
%Condições iniciais
y1(2:84)=y1(1)+(2:84).*(y1(84)-y1(1))/84;
v1(2:84)=v1(1)+(2:84).*(v1(84)-v1(1))/84;
%Discretização
dt=100;
dx=1000;
r=dt/dx;
%Geometria no instante inicial
Rh1(1:84)=y1(1:84);
Sf1(1:84)=(n*v1(1:84)).^2./(Rh1(1:84).^(4/3));
Dl(1:84)=y1(1:84);
%Contribuição lateral conforme procedimento descrito
%t(1:14651)=(1:14651)-1)*(dt/3600);
for k=1:541
    k
    for i=2:83
        yy=0.5*(y1(i-1)+y1(i+1));
        vv=0.5*(v1(i-1)+v1(i+1));
        DD=0.5*(Dl(i-1)+Dl(i+1));
        SSf=0.5*(Sf1(i-1)+Sf1(i+1));
        y2(i)=yy-0.5*r*DD*(v1(i+1)-v1(i-1))-0.5*r*vv*(y1(i+1)-y1(i-1))+dt*q/BB(i)-(vv*r*y1(i))*(BB(i)-BB(i-1))/BB(i); %B(k,i);
        D2(i)=y2(i);
        v2(i)=vv-0.5*r*9.81*(y1(i+1)-y1(i-1))-0.5*r*vv*(v1(i+1)-v1(i-1))+0.0*(dt*q*vv)/(BB(i)*y1(i))+g*dt*(So-SSf);
        Rh2(i)=y2(i);
        Sf2(i)=(n*n*v2(i)*abs(v2(i)))/(Rh2(i)^(4/3));
    end
    %Contorno de montante
    % q(1)=q(2);
    y2(1)=interp1(QP,hP,MAXQi);
    D2(1)=y2(1);
    v2(1)=MAXQi/(BB(1)*y2(1));
    Rh2(1)=y2(1);
    Sf2(1)=(n*v2(1))^2/(Rh2(1)^(4/3));
%Contorno de saída

```

```
y2(84)=y2(83);
QF(k+1)=interp1(hA,QA,y2(84));
v2(84)=QF(k+1)/(BB(84)*y2(84));
Rh2(84)=y2(83);
Sf2(84)=(n*n*v2(84)*abs(v2(84)))/(Rh2(84)^(4/3));
D2(84)=y2(84);
y1=y2;
v1=v2;
D1=D2;
Rh1=Rh2;
Sf1=Sf2;
%Condição de Courant
C(k)=dx/(abs(v2(84))+sqrt(g*y2(84)));
if y2(84)<0.0 | v2(84)<0.0 | dt>C(k)
    break
end
plot(1:k,QF(k)),grid on
pause(0.1)
end
```