

JOSÉ DANILO SZEZECH JR

**DINÂMICA NÃO LINEAR DO MODELO DA INTERAÇÃO
DE QUATRO ONDAS CONSERVATIVA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

CURITIBA

2004

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do estudante José Danilo Szezech Júnior são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é **Dinâmica não Linear da Interação de Quatro ondas Conservativas**.

Curitiba, 18 de fevereiro de 2004.

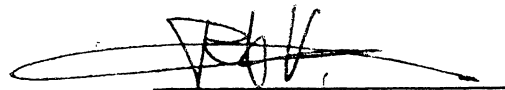
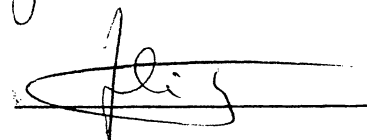
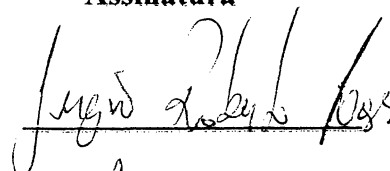
Banca Examinadora

**Prof. Sergio Roberto Lopes
(Orientador/Presidente) (UFPR)**

**Prof. Felipe Barbedo Rizzato
(UFRGS)**

**Prof. Ricardo Luiz Viana
(UFPR)**

Assinatura



Resumo

Interações onda-onda envolvendo ondas não lineares de alta frequência são fenômenos comuns em uma variedade de circunstâncias. Tais processos podem ser vistos ocorrendo em diversas situações físicas. Exemplos disto podem ser encontrados em ótica não linear, plasmas espaciais e experimentos de plasma em laboratórios. Uma das interações onda-onda mais estudadas é o bem conhecido acoplamento tripleto-tripletto, chamado de processo de quatro ondas, onde cada tripleto compartilha dois modos em comum. Em um regime fracamente não linear, devido as interações não-lineares, as amplitudes das ondas desenvolvem lentas modulações no espaço/tempo tal que são mais lentas do que as altas frequências das ondas envolvidas. Neste caso podemos obter equações simplificadas descrevendo a dinâmica da lenta variação das amplitudes das ondas. A dinâmica apresentada pelas equações das amplitudes das interações tripleto-tripletto é o tópico desta dissertação. Aqui consideramos o caso da interação conservativa. Para o caso de condições de perfeita ressonância a dinâmica é integrável. Quando é suposto uma pequena frequência de descasamento do caso ressonante, a dinâmica para as equações de amplitude podem ser caóticas e o sistema apresenta o caso bem conhecido do problema de sistemas Hamiltonianos caóticos com dois graus de liberdade. Um dos tópicos estudados aqui é o caso onde a condição de ressonância varia com o tempo. Neste caso o cenário apresentado por um problema conservativo com dois graus de liberdade não é mais válido. De fato a presença da variação temporal na frequência de descasamento leva o sistema apresentar comportamento difusivo no espaço de fase. A difusão ocorre porque neste caso, as superfícies KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) não separam mais as regiões regulares das caóticas, isto é devido elas unirem-se em uma teia de estocasticidade - a teia de Arnold. Nós fornecemos evidências do comportamento difusivo quando o sistema tem mais do que dois graus de liberdade.

ABSTRACT

Wave-wave interaction processes involving high-frequency nonlinear waves are common phenomena in a variety of circumstances. Such processes can be seen to occur in a wide range of physical situations. Examples of that can be found in nonlinear optical physics, space plasmas and laboratory plasmas experiments. One of the most studied wave-wave interactions is the well known triplet-triplet wave coupling, namely the four wave process, where each triplet shares two common modes. In a weak nonlinear regime, due to nonlinear interactions, the wave amplitudes develop slow modulations in space and/or time that are slower than the high frequencies of the waves involved. In this case one can obtain simplified equations describing the dynamics of the slowly varying amplitudes of the wave. The dynamics presented by such amplitude equations for the triplet-triplet interactions is the topic of the present dissertation. Here we consider the conservative case of the interaction. For perfect resonant conditions the dynamics is integrable. When a small time independent mismatch for the resonant frequency condition is supposed, the dynamics for the amplitude equations can be chaotic and the system presents the well known case of the two degrees of freedom Hamiltonian chaotic problem. The main topic analyzed here is the case where the resonant condition varies in time. In this case the scenario presented by the two degrees of freedom conservative problem is not valid anymore. In fact the presence of time varying frequency mismatch leads the system to present diffusion behavior in phase space. The diffusion occurs because in this case, KAM surfaces do not separate regular trajectories from chaotic ones, such that they are united into a web of stochasticity - the Arnold web. We provide numerical evidences of the diffusive behavior when the system has more than two degrees of freedom.

Conteúdo

Lista de figuras	3
1 Introdução	6
2 Fundamentos	9
2.1 Sistemas dinâmicos e integrabilidade	9
2.1.1 Sistemas dinâmicos	9
2.1.2 Sistemas conservativos e não conservativos	11
2.1.3 Transformação canônica de coordenadas	12
2.1.4 Sistemas integráveis	13
2.1.5 Perturbação de sistemas integráveis	15
2.1.6 Sistemas com mais de dois graus de liberdade	23
2.2 A interação	24
2.2.1 Plasma	24
2.2.2 O modelo de quatro ondas	26
2.3 Conceitos de dinâmica não linear	29
2.3.1 Expoentes de Lyapunov	29
2.3.2 Cortes de Poincaré	30
2.3.3 Espectro de potência	31
2.3.4 Dimensão de contagem de caixas	32
2.3.5 Estabilidade linear e classificação dos pontos fixos em duas dimensões para sistemas conservativos	33
3 Resultados e discussões	36
3.1 Frequência de descasamento constante	36
3.1.1 Cortes de Poincaré	36
3.1.2 Séries temporais e espectros de potência	40
3.1.3 Expoentes de Lyapunov	45
3.2 Frequência de descasamento não constante	51
3.2.1 Amplitude do termo oscilatório	53

3.2.2	Frequência do termo oscilatório	60
3.3	Dimensão de contagem de caixas	64
4	Conclusões e trabalhos futuros	70
	Bibliografia	72

Lista de Figuras

2.1	Representação de uma órbita tri-dimensional no espaço de fase.	10
2.2	Representação de um toro bi-dimensional.	14
2.3	Superfície de seção de um sistema integrável.	18
2.4	Representação de uma trajetória levemente perturbada no mapa de torção.	19
2.5	Representação da trajetória r_ϵ e sua imagem $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$	20
2.6	Ilustração do pontos fixos elípticos e hiperbólicos de $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$	20
2.7	Representação da seção de um toro com ressonâncias $q=3$ e $q=4$ para os casos (a) não perturbado (b) perturbado.	21
2.8	Representação de um ponto fixo hiperbólico.	22
2.9	Esticamento das trajetórias com a proximidade do ponto fixo hiperbólico.	22
2.10	Em (a) a superfície bi-dimensional de energia (plano) e dividido em região interna e externa por linhas (b) para o caso onde a superfície de energia é tridimensional não é mais separado por linhas.	23
2.11	A interação de quatro ondas eletromagnéticas.	27
2.12	Evolução temporal de uma esfera bidimensional de condições iniciais.	30
2.13	Interpretação geométrica de um corte de Poincaré.	31
2.14	Ilustração da contagem de caixas para os seguintes conjuntos: (a) dois pontos, (b) um segmento de uma curva e (c) uma área no interior de uma curva.	33
2.15	Ilustração de trajetórias ao redor do ponto fixo hiperbólico.	35
2.16	Ilustração de trajetórias ao redor do ponto fixo elíptico.	35
3.1	Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,001$	37
3.2	Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,02$	38
3.3	Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,03$	39
3.4	Ampliação do corte de Poincaré para $\delta_- = 0,03$	40
3.5	Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,3$	41
3.6	Série temporal de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$	42
3.7	Espectro de potência de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$	42

3.8	Série temporal de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,02$.	43
3.9	Espectro de potência de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$.	44
3.10	Série temporal de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,3$.	44
3.11	Espectro de potência de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,3$.	45
3.12	Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial regular para $\delta_- = 0,02$.	46
3.13	Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial irregular para $\delta_- = 0,02$.	47
3.14	Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial irregular para $\delta_- = 0,3$.	48
3.15	Maior expoente de Lyapunov versus frequência de descasamento.	49
3.16	Cortes de Poincaré para $\eta = 0,13$ (pontos pretos), $\eta = 0,14$ (pontos vermelhos) e $\eta = 0,15$ (pontos verdes) (a) $\delta_- = 0,01$ (b) $\delta_- = 0,03$ (c) $\delta_- = 0,05$ (d) $\delta_- = 0,07$.	50
3.17	Maior expoente de Lyapunov para diversas condições iniciais para frequência de descasamento $\delta_- = 0,05$.	51
3.18	Surgimento de difusão de Arnold no corte de Poincaré: pontos vermelhos representam o caso $\gamma = 0$, pontos pretos caso para $\gamma = 0,004$, $\omega = 2,85$ e $\delta_- = 0,05$.	52
3.19	Tempo de escape para diferentes valores de γ , $\omega = 1,34$ e $\delta_- = 0,05$.	53
3.20	Representação no corte das condições iniciais e da fronteira na análise do tempo de escape.	54
3.21	Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,155$ e $\omega = 1,34$.	55
3.22	Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,155$ e $\omega = 1,34$.	55
3.23	Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,170$ e $\omega = 1,34$.	56
3.24	Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,170$ e $\omega = 1,34$.	56
3.25	Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,186$ e $\omega = 1,34$.	57
3.26	Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,186$ e $\omega = 1,34$.	57
3.27	Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,200$ e $\omega = 1,34$.	58
3.28	Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,200$ e $\omega = 1,34$.	58
3.29	Gráfico log-log das distribuições para valores distintos de γ .	59
3.30	Gráfico log-log do valor γ versus o tempo médio de escape.	60
3.31	Espaço de parâmetros da condição inicial $\eta = 0,095$.	61
3.32	Espectro de Fourier da condição inicial $\eta = 0,095$ para $\gamma = 0$.	62
3.33	Ampliação do espaço de parâmetros da condição inicial $\eta = 0,095$.	63
3.34	Ampliação do espectro de Fourier da condição inicial $\eta = 0,095$ para $\gamma = 0$.	63
3.35	Representação 3D do espaço de parâmetros versus tempo de escape da condição inicial $\eta = 0,095$.	64

3.36	Corte de Poincaré do caso de frequência de descasamento constante para uma condição inicial regular e outra caótica ($\delta_- = 0,05$).	65
3.37	Contagem de caixas para uma condição inicial regular.	66
3.38	Contagem de caixas para uma condição inicial caótica.	67
3.39	Corte de Poincaré do caso de frequência de descasamento não constante ($\gamma = 0,004$, $\omega = 2,85$ e $\delta_- = 0,05$).	68
3.40	Contagem de caixas para o caso da frequência de descasamento não constante.	69

Capítulo 1

Introdução

Em muitos sistemas físicos que ocorrem em nossos cotidianos, pequenas alterações nas condições iniciais geram pequenas alterações nos resultados. Como por exemplo se dirigimos um carro e alteramos levemente a sua direção, a trajetória do carro irá diferir apenas levemente da trajetória caso a direção não fosse alterada. Entretanto para certos casos isto nem sempre é verdade, como no caso de lançarmos uma moeda ao alto e esperarmos ver a face com que a moeda cai ao chão. Pequenas alterações de como a moeda é lançada são suficientes para determinar qual será a face, isto faz que se torne impossível de determinarmos precisamente o resultado ao lançarmos a moeda.

Quando Isaac Newton escreveu o livro Principia em 1687 [1], foi capaz de descrever sistemas físicos através de um conjunto de leis, que por sua vez tornou possível escrever um conjunto equações, que a princípio, determinavam a dinâmica de tais sistemas. Este livro influenciou muitas pessoas de sua época, que através de técnicas de linearização e perturbação, concluíram que sistemas físicos eram genericamente estáveis e predizíveis.

O primeiro trabalho que contestou esta idéia é devido a Henri Poincaré no final do século XIX [2]. Poincaré motivado pelo problema de três corpos sob interação mútua de gravidade, foi capaz de mostrar através de técnicas topológicas, que um conjunto inicialmente periódico de condições iniciais quando perturbadas levemente geravam trajetórias complicadas, que hoje são chamadas caóticas. Após o trabalho de Poincaré foram desenvolvidos vários trabalhos matemáticos sobre dinâmica caótica. Porém, muitas vezes, os artigos escritos eram de difícil leitura para pessoas fora do campo da matemática, e os teoremas provados não eram fortes suficientes para convencer os pesquisadores de outras áreas a aplica-los em seus sistemas. Tudo isto fez que muitos cientistas não acreditassem na possibilidade da existência de caos em sistemas físicos reais.

Esta situação mudou drasticamente através do uso de computadores, que tornaram possível a análise numérica de sistemas dinâmicos onde não é possível obter uma solução analítica. O primeiro a encontrar caos em um sistema de equações diferenciais com o uso de computadores, é devido ao meteorologista E.N. Lorenz em 1963 [3]. O sistema

estudado por Lorenz era um problema simplificado de previsão meteorológica para tempos longos. Ele constatou que apenas pequenas alterações nas condições iniciais geravam soluções completamente diferentes e chamou de dependência sensitiva as condições iniciais. Atualmente, com os avanços dos computadores na velocidade de processamento e na capacidade de armazenamento de informação, além de sistemas operacionais e linguagens de programação cada vez mais acessíveis, têm permitido pesquisadores encontrar caos em sistemas dinâmicos nas mais diversas áreas, como por exemplo: biologia, economia e engenharia.

Na área de caos em sistemas conservativos, houveram grandes desenvolvimentos com a descoberta do teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [4, 5]. Este teorema relata a situação de sistemas Hamiltonianos integráveis de baixa dimensionalidade quando é acrescentado uma perturbação. Para o caso de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade inicialmente integráveis, o acréscimo de perturbação cria um espaço de fase que contém simultaneamente a presença de regiões regulares e regiões caóticas. Estas regiões regulares formam barreiras e proibem as regiões caóticas de preencherem todo espaço de fase. Por sua vez nos sistemas com mais de dois graus de liberdade, regiões regulares não separam mais o espaço de fase, e regiões caóticas passam a estar interconectadas através da chamada teia de Arnold. A presença de comportamento caótico em sistemas Hamiltonianos de baixa dimensionalidade têm atraído teorias e diversas aplicações na física. Exemplos disto são encontrados em física de plasma, mecânica estatística e astronomia.

O sistema dinâmico apresentado nesta dissertação é um caso de sistema Hamiltoniano de baixa dimensionalidade. O sistema é um caso de interação ressonante que ocorre entre onda-onda. Tais interações podem ser encontradas em diversas situações físicas como por exemplo em ótica não linear, plasmas espaciais e experimentos de plasmas em laboratório. Dentre as inúmeras possíveis interações é analisada a interação não linear de quatro ondas com duas delas participando simultaneamente em dois tripletos de ondas. Sobre esta interação é considerado um meio ionizado fracamente não linear, devido a interações não lineares. Mais especificamente é analisada a interação conservativa de quatro ondas, com um termo de frequência de descasamento em cada um dos tripletos. O termo de frequência de descasamento tem um efeito de quebra da integrabilidade na interação, onde o aumento do valor de descasamento faz a interação apresentar uma transição de comportamento regular para caótico. Isto ocorre através do cenário típico de sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade. Para este caso, são usadas ferramentas comuns em dinâmica não linear como cortes de Poincaré, análise de espectros de potência de Fourier e expoentes de Lyapunov, para distinguir as soluções regulares das caóticas. Em seguida é analisado o caso quando o termo de frequência de descasamento deixa de ser constante e apresenta uma pequena oscilação periódica no seu valor. A oscilação periódica cria uma dependência temporal, tal que a interação passa a ter $2 + \frac{1}{2}$ graus de liberdade, e o espaço

de fase esteja conectado através da teia de Arnold. O papel da amplitude e da frequência de oscilação do termo de descasamento são analisados no aparecimento de difusão.

A divisão dos capítulos desta dissertação estão na seguinte maneira: o capítulo 02 contém conceitos do teorema KAM, do modelo de quatro ondas e de dinâmica não linear; no capítulo 03 são apresentados os resultados obtidos para o modelo de quatro ondas e uma discussão para o caso de frequência de descasamento constante e não constante; e no capítulo 04 é feita uma conclusão dos resultados obtidos.

Todas as simulações computacionais contidas nesta dissertação foram realizadas em ambiente Linux no laboratório computacional do departamento de Física da UFPR. Foram utilizados processadores Athlon e linguagem de programação FORTRAN 77. Para a resolução de equações diferenciais foi utilizado o integrador LSODA (*Livermore Solver for Ordinary Differential Equations, with automatic method switching for stiff and nonstiff problems*). Este integrador desenvolvido por Linda Petzold e Alan Hindmarsh ([6] e [7]) possui uma habilidade especial, que é de variar o passo e a ordem de integração de acordo com a dificuldade da integração das equações.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Sistemas dinâmicos e integrabilidade

Antes de apresentarmos o modelo de quatro ondas que será tratado nesta dissertação, usaremos esta seção para introduzir alguns conceitos sobre sistemas dinâmicos que serão importantes para a análise do modelo. Uma das questões importantes abordadas é a transição de sistemas integráveis que apresentam apenas soluções regulares, para os chamados sistemas quasi-integráveis, que apresentam soluções regulares e caóticas. Apresentaremos também os resultados do chamado teorema KAM que fornecem as condições necessárias para um sistema quasi-integrável apresentar soluções regulares.

2.1.1 Sistemas dinâmicos

O movimento de corpos materiais sempre foi um assunto que fascinou e motivou a pesquisa dos pioneiros da Física [1]. O objetivo comum destes pioneiros era de encontrar expressões matemáticas que fossem capazes de (ao menos aproximadamente) descrever o movimento de corpos, tanto no presente como no futuro. Ao conjunto de expressões matemáticas que descrevem o movimento de corpos materiais chamaremos de sistemas dinâmicos.

Em muitos sistemas dinâmicos é possível fazer uma importante simplificação, que é a possibilidade de tratar corpos como sendo uma partícula (ponto material)[8]. Esta simplificação é sempre possível quando a dimensão do corpo é desprezível com relação ao seu movimento descrito. Um exemplo clássico é a possibilidade de descrever um planeta como uma partícula quando estamos interessados no seu movimento ao redor do sol.

Um exemplo de sistema dinâmico em que o tempo é uma variável contínua, é um sistema de N equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomas (que não dependem explicitamente do tempo). Este sistema pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \quad (2.1)$$

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \quad (2.2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx^{(N)}}{dt} = F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \quad (2.3)$$

estas equações podem ser reescritas de forma compacta através do uso de notação vetorial, ficando na seguinte forma:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \quad (2.4)$$

onde $\vec{x}(t)$ é um vetor N -dimensional, e \vec{F} representa um conjunto de funções nas variáveis $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$. Uma característica importante de sistemas dinâmicos é o fato de serem determinísticos [9]. Isto implica que escolhida uma condição inicial $\vec{x}(0)$ e conhecido o conjunto de funções \vec{F} que regem a dinâmica do sistema, a princípio, sempre é possível resolver as equações de movimento (2.4) e determinar o futuro $\vec{x}(t)$ para qualquer instante de tempo.

O conjunto das soluções $\vec{x}(t)$ geradas com o decorrer do tempo são chamadas trajetórias ou órbitas. Estas soluções são representadas no espaço de fase. Na figura (2.1) está representado um exemplo de uma trajetória tridimensional evoluindo temporalmente no espaço de fase. Devido as semelhanças entre o caminho das trajetórias no espaço de fase com o caminho descrito por uma partícula imersa num fluido, sistemas dinâmicos com tempo contínuo são frequentemente chamados de fluxos [10].

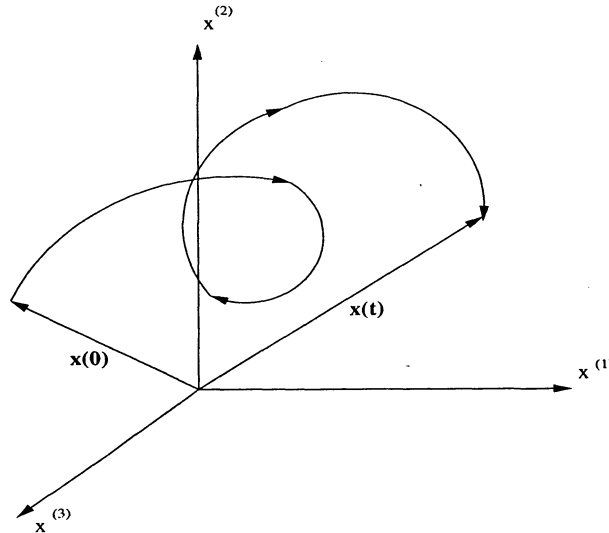


Figura 2.1: Representação de uma órbita tri-dimensional no espaço de fase.

Sistemas dinâmicos em que o tempo pode ser tratado como uma variável discreta são chamados de mapas [11]. A evolução temporal para mapas é fornecida através de uma equação de diferenças. Se o tempo for representado pela variável n com valores inteiros

positivos, tem-se que:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{M}(\vec{x}_n), \quad (2.5)$$

onde $\vec{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$. Dado um estado inicial \vec{x}_0 , obtém-se o estado $n = 1$ por $\vec{x}_1 = \vec{M}(\vec{x}_0)$, o estado $n = 2$ por $\vec{x}_2 = \vec{M}(\vec{x}_1)$ e assim sucessivamente. Sendo que o conjunto dos estados fornece as órbitas com tempo discreto: $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

2.1.2 Sistemas conservativos e não conservativos

Na natureza encontramos, em diversos sistemas dinâmicos, quantidades físicas que são conservadas. A estas quantidades chamamos de constantes de movimento ou vínculos [8]. A invariância destas quantidades estão diretamente ligadas com propriedades de simetria do sistema [12]. Exemplos clássicos de quantidades físicas conservadas relacionados a simetria são: a conservação do momento linear em sistemas invariantes a translação e a conservação do momento angular em sistemas invariantes a rotação [12].

No caso da energia pode-se classificar sistemas dinâmicos em duas categorias: os sistemas conservativos e os sistemas não conservativos. Sendo conservativo todo o sistema que não apresenta termos dissipativos. Definido um sistema conservativo surge a dúvida sobre a existência de tais sistemas. A primeira vista imaginamos que sistemas conservativos se limitam somente a sistemas mecânicos sem fricção, mas existem outros exemplos como as linhas de campo magnético de um plasma, mistura de um fluido ou a interação de ondas eletromagnéticas [9]. Além do mais, mesmo em um sistema dissipativo é possível imaginar um sub-sistema em que não ocorra troca de energias com as fronteiras, de tal forma que o sub-sistema possa ser tratado como um sistema conservativo. Assim a compreensão da dinâmica conservativa nos fornece uma base para a compreensão da dinâmica dissipativa.

Uma das principais vantagens de trabalhar com sistemas conservativos é que estes podem ser tratados através do chamado formalismo Hamiltoniano. Neste formalismo o estado do sistema é descrito pelo conjunto de N coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_N) e de N momentos generalizados (p_1, p_2, \dots, p_N) ; onde N está relacionado com o número de graus de liberdade do sistema [13]. A evolução temporal deste formalismo é obtida através das equações de Hamilton [13] dadas por:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{q}}, \quad (2.7)$$

sendo que $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ é a chamada função Hamiltoniana. Qualquer conjunto de variáveis \vec{p}, \vec{q} tal que as suas evoluções temporais são dadas por equações da forma (2.6) e (2.7) são chamadas de canônicas [14]. Uma consequência direta das equações de Hamilton para

sistemas que não dependem explicitamente do tempo $H(\vec{q}, \vec{p})$ é que:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (2.8)$$

ou seja se identificarmos H com a energia E do sistema, vemos que a energia é uma quantidade conservada para sistemas autônomos, $E = H(\vec{q}, \vec{p}) = \text{constante}$.

2.1.3 Transformação canônica de coordenadas

As equações de Hamilton espessas em (2.6) e (2.7) nem sempre são fáceis de serem resolvidas. Para contornar este problema é possível realizar uma transformação de coordenadas tal que, devido a simetrias do sistema transformado, tornem as novas equações de Hamilton mais fáceis de serem resolvidas [9]. Porém, para continuarmos usando o formalismo Hamiltoniano, não podemos realizar uma transformação qualquer, é necessário realizar uma transformação que preserve a forma das equações de Hamilton. As transformações que satisfazem esta condição são as chamadas transformações canônicas [13]. Considerando um par canônico \vec{p} e \vec{q} satisfazendo as equações de Hamilton, realizando uma transformação canônica obtemos um novo par canônico \vec{p}' e \vec{q}' que são funções com a seguinte forma [9]:

$$\vec{p}' = f(\vec{p}, \vec{q}, t), \quad (2.9)$$

$$\vec{q}' = g(\vec{p}, \vec{q}, t), \quad (2.10)$$

as equações de evolução temporal para \vec{p}' e \vec{q}' são escritas por:

$$\frac{d\vec{q}'}{dt} = \frac{\partial \bar{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{q}}, \quad (2.12)$$

onde \bar{H} é a nova Hamiltoniana transformada. As coordenadas originais estão relacionadas com as novas através da chamada função geradora $S(\vec{p}', \vec{q}', t)$ [9]. Assim temos a transformação de variáveis em termos de $S(\vec{p}', \vec{q}', t)$ dadas por [9]:

$$\vec{q}' = \frac{\partial S(\vec{p}', \vec{q}', t)}{\partial \vec{p}'}, \quad (2.13)$$

$$\vec{p}' = \frac{\partial S(\vec{p}', \vec{q}', t)}{\partial \vec{q}'}, \quad (2.14)$$

e a Hamiltoniana transformada é dada por:

$$\bar{H}(\vec{p}', \vec{q}', t) = H(\vec{p}, \vec{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.15)$$

2.1.4 Sistemas integráveis

Vimos anteriormente que para um sistema Hamiltoniano autônomo a sua energia é uma quantidade conservada. Se considerarmos uma partícula no formalismo Hamiltoniano, que é representado pelo conjunto de N coordenadas e N momentos generalizados, as trajetórias desta partícula são representadas em um espaço de fase $2N$ dimensional. Porém, devido a restrição da conservação de energia as trajetórias estão restritas a uma superfície de energia $2N - 1$ dimensional [14].

Um sistema com N graus de liberdade é dito integrável, se este possuir N constantes de movimento [14]. Sendo assim temos que para um sistema integrável, inicialmente representado num espaço de fase $2N$ dimensional, devido as N constantes de movimento as suas trajetórias estão restritas a uma superfície N dimensional.

Dado um sistema integrável é possível encontrar uma transformação canônica de variáveis $(\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{p}', \vec{q}')$. Assim se escolhermos as novas variáveis \vec{p}' como sendo as N constantes de movimento temos de (2.12) que: $\frac{d\vec{p}'}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{q}} = 0$ e a nova Hamiltoniana pode ser escrita como $\bar{H} = \bar{H}(\vec{p}')$, que não depende explicitamente de \vec{q}' [9, 14, 15].

A escolha de uma transformação em que os novos momentos tornam-se as constantes de movimento é arbitrária. Dentre as inúmeras possíveis transformações é escolhida a transformação ação-ângulo [9], onde as suas variáveis transformadas são denotadas por $(\vec{I}, \vec{\theta})$ e \vec{I} é definido por:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i. \quad (2.16)$$

A transformação de variáveis $(\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{I}, \vec{\theta})$ em termos da função geradora é escrita por:

$$\vec{\theta} = \frac{\partial S(\vec{I}, \vec{q})}{\partial \vec{I}}, \quad (2.17)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial S(\vec{I}, \vec{q})}{\partial \vec{q}}. \quad (2.18)$$

Realizando a integração da equação (2.18) e usando (2.16), temos que:

$$\Delta S_i = \oint p_i dq_i = 2\pi I_i, \quad (2.19)$$

aplicando (2.17) na equação (2.19):

$$\Delta \vec{\theta} = \frac{\partial \Delta S_i}{\partial \vec{I}} = 2\pi \frac{\partial I_i}{\partial \vec{I}}, \quad (2.20)$$

ou

$$\Delta_i \theta_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad (2.21)$$

sendo que δ_{ij} é a delta de Kronecker que vale 1 para $i = j$ e 0 para $i \neq j$. Assim da expressão obtida em (2.21), obtemos que um ciclo completo variáveis θ_i equivale a 2π [9].

Construindo a nova Hamiltoniana em termos das variáveis ação-ângulo independente do ângulo, temos os seguintes resultados para as equações de Hamilton:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}(\vec{I})}{\partial \vec{I}} \equiv \vec{\omega}(\vec{I}), \quad (2.23)$$

onde as soluções de (2.22) e (2.23) são respectivamente:

$$\vec{I}(t) = \vec{I}(0), \quad (2.24)$$

$$\vec{\theta}(t) = \vec{\theta}(0) + \vec{\omega}(\vec{I})t, \quad (2.25)$$

sendo $\vec{\omega}(\vec{I})$ o vetor N -dimensional das componentes de velocidade angular. As soluções de (2.24) e (2.25) podem ser representadas através de um toro N dimensional, sendo a variável ação os raios constantes e a variável ângulo sendo uma variável cíclica que evolui temporalmente. Na figura (2.2) é representado um exemplo de uma trajetória que reside num toro bidimensional(T^2):

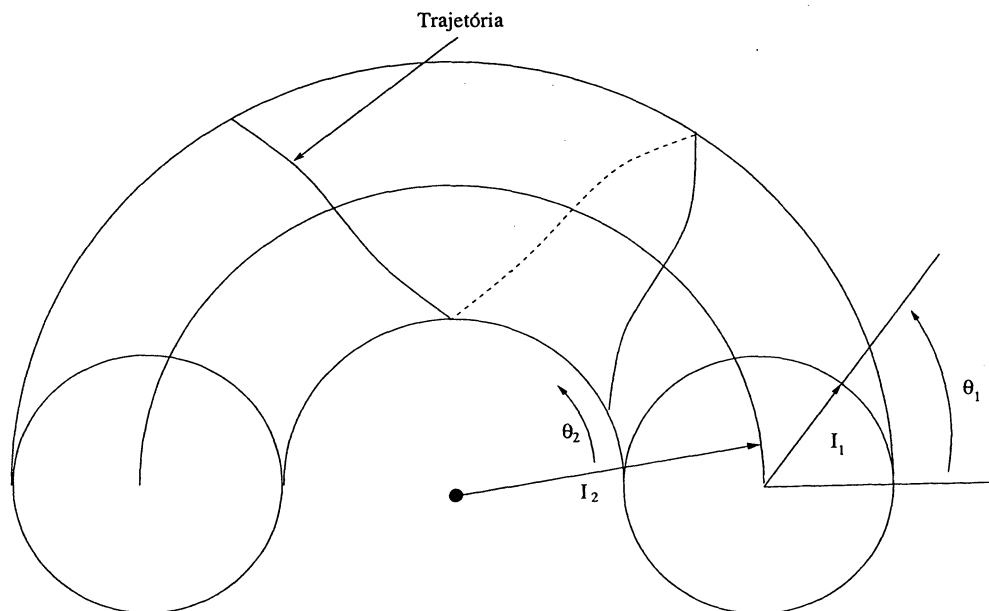


Figura 2.2: Representação de um toro bi-dimensional.

Definido $\vec{\omega}(\vec{I})$, podemos analisar a periodicidade das trajetórias sobre o toro, que pode ser de dois tipos: periódico ou quase-periódico [14]. No caso periódico as velocidades angulares sempre satisfazem a seguinte condição:

$$\vec{m} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (2.26)$$

sendo que \vec{m} é um vetor de valores inteiros. Esta condição para caso periódico é também conhecida como condição de ressonância [9]. Para uma melhor visualização considere o caso onde $N = 2$, a condição de ressonância (2.26) fica escrita na seguinte forma:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \quad (2.27)$$

Como as componentes de \vec{m} só podem assumir valores inteiros, a razão entre as velocidades angulares é um número racional, e por este motivo os toros que satisfazem a condição de ressonância são denominados toros racionais [9]. A consequência direta desta condição é que após uma órbita completar m_1 ciclos em θ_1 e m_2 ciclos em θ_2 , a órbita fecha sobre ela mesma. Por este motivo os casos de ressonância são chamados de periódicos [9].

Por sua vez, o caso quasi-periódico é quando a condição (2.26) nunca é satisfeita, com exceção do caso trivial onde todas componentes do vetor \vec{m} são nulas. Isto implica que ao contrário do caso periódico, não é possível escrever a razão entre velocidades angulares como a razão de números inteiros. Temos que o valor da razão entre as velocidades angulares é um número irracional e a órbita gerada preenche todo toro nunca fechando sobre ela mesma [9]. Para este caso quasi-periódico os toros são chamados de toros irracionais [9].

Assumindo uma variação suave de \bar{H} com \vec{I} , as soluções que satisfazem a condição de ressonância (2.26) formam um conjunto contável [9]. Logo pode-se concluir que a probabilidade de escolher aleatoriamente um toro irracional é muito maior que escolher um toro racional [9]. Temos então que o espaço de fase para sistemas integráveis é quase completamente ocupado por toros irracionais [9].

2.1.5 Perturbação de sistemas integráveis

Na seção anterior foi visto que sistemas integráveis podem ser representados por toros e que apresentam comportamentos regulares do tipo periódico ou quasi-periódico. A dúvida que naturalmente surge é quão robusta é a integrabilidade destes sistemas quando é acrescentada uma perturbação. Além disto, em alguns sistemas nem sempre é possível encontrar as N constantes de movimento necessárias para garantir a integrabilidade de um sistema com N graus de liberdade. Uma possível abordagem para este problema é através da teoria perturbativa [9, 14, 15], que consiste basicamente em supormos uma Hamiltoniana integrável qualquer acrescida de uma pequena perturbação.

Escrevendo uma Hamiltoniana perturbada como sendo a soma de uma Hamiltoniana não perturbada (H_0) e uma perturbação (H_1) multiplicada por uma constante ε , temos que:

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{I}, \vec{\theta}). \quad (2.28)$$

A principal pergunta é sobre quais condições a Hamiltoniana perturbada (2.28) as trajetórias permanecem confinadas a toros N dimensionais. Para o caso em que os toros existam, com o uso das tranformações canônicas é possível reescrever a Hamiltonina perturbada para um novo par de coordenadas ação-ângulo $(\vec{I}', \vec{\theta}')$, tal que a nova Hamiltoniana dependa apenas da nova ação [14]:

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H'(\vec{I}'), \quad (2.29)$$

em termos da função geradora, temos que:

$$\vec{I} = \frac{\partial S(\vec{I}', \vec{\theta}')}{\partial \vec{\theta}'}, \quad (2.30)$$

$$\vec{\theta}' = \frac{\partial S(\vec{I}', \vec{\theta}')}{\partial \vec{I}'}. \quad (2.31)$$

Uma primeira aproximação para resolver (2.29) é escrever a função geradora como uma série de potências em ε ,

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots, \quad (2.32)$$

onde S_0 é definido como sendo $S_0 = \vec{I}' \cdot \vec{\theta}'$, para quando for substituído em (2.30) e (2.31) forneça o resultado $\vec{I} = \vec{I}'$ e $\vec{\theta} = \vec{\theta}'$, que corresponde as variáveis ação-ângulo originais para o caso não perturbado. Substituindo a série de S em (2.28):

$$H_0(\vec{I}' + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\theta}'} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \vec{\theta}'} + \dots) + \varepsilon H_1(\vec{I}' + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\theta}'} + \dots, \vec{\theta}') = H'(\vec{I}'), \quad (2.33)$$

onde para pequenos ε pode-se expandir (2.33) e considerando apenas os termos de primeira ordem, tem-se que:

$$H_0(\vec{I}') + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \vec{I}'} \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\theta}'} + \varepsilon H_1(\vec{I}', \vec{\theta}') = H'(\vec{I}'). \quad (2.34)$$

Para resolver a equação (2.34) expande-se S_1 e H_1 (ambos periódicos em θ) na seguinte série de Fourier:

$$H_1 = \sum_m H_{1,m}(\vec{I}') \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta}'), \quad (2.35)$$

$$S_1 = \sum_m S_{1,m}(\vec{I}') \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta}'), \quad (2.36)$$

onde \vec{m} é uma das N componentes do vetor de inteiros. Substituindo as séries (2.35) e (2.36) em (2.34) temos que:

$$S_1 = i \sum_m \frac{H_{1,m}(\vec{I}')}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{I}')} \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta}'), \quad (2.37)$$

usando que $\vec{\omega}_0(\vec{I}') \equiv \frac{\partial H_0(\vec{I}')}{\partial \vec{I}'}$, é a frequência do toro N dimensional não perturbado. Deste último resultado pode-se concluir que quando a condição de ressonância é satisfeita (2.26),

o denominador se anula e a série (2.32) diverge [9]. Assim para os casos de ressonância o sistema não pode ser integrado via teoria da perturbação. Porém para os toros irracionais a condição de ressonância não é satisfeita, a série em ε converge e o sistema pode ser integrado [9].

Usaremos as duas seguintes sub-seções para tratar sobre o que acontece com o toro racional e o irracional quando é acrescentada a perturbação εH_1 .

TORO ESTÁVEL E O TEOREMA KAM

A questão sobre o comportamento do toro irracional quando é acrescentada uma pequena perturbação só foi respondida pelo teorema de Kolmogorov (1954), Arnold (1963), Moser (1967), e por isso, o nome de teorema KAM. A validade deste teorema assegura a existência do toro diante a perturbação [9, 14, 15]. O método que foi mostrado anteriormente no qual S é expandido em uma série de ε é muito simples. O método usado no teorema KAM é muito mais sofisticado no qual através de sucessivas aproximações o sistema adquire propriedades de convergência mais rápidas [9]. A prova deste teorema é extensa e esta contido nas referências [4, 5], nesta dissertação apenas indicaremos quais condições são necessárias para este teorema ser válido. As condições a serem satisfeitas são:

1. a independência linear das frequências [14]

$$\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{I}) \neq 0, \quad (2.38)$$

2. a perturbação deve ser suave (suficiente número de derivadas contínuas de H_1) [14]
3. condições iniciais suficientemente afastadas da ressonância, tal que satisfaça

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| \geq \gamma |\vec{m}|^{-\tau}, \quad (2.39)$$

para todos \vec{m} , a variável τ é dependente do número de graus de liberdade do sistema e da suavidade de H_1 , e γ é dependente da perturbação ε [14]. Quando estas três condições são satisfeitas os toros sobrevivem a perturbação, estes são os chamados toros KAM [14].

Para uma perturbação ε suficientemente grande todos toros são destruídos. Da condição 3 temos que o último toro KAM a ser destruído é o qual a razão de frequências é o número “mais irracional” [14].

Para compreender o que é o número mais irracional é necessário usar alguns resultados da teoria de números. Um número irracional R pode ser representado pela seguinte fração infinita contínua [9],

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}, \quad (2.40)$$

onde os a_i são inteiros. Se truncarmos a fração em um determinado a_n , obtemos um valor racional próximo do número irracional. Assim, o número “mais irracional” é definido como sendo o qual é mais lentamente aproximado por truncamentos da fração (2.40) [9]. O número que converge mais lentamente a fração é a chamada razão áurea e o seu valor é $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [9].

TORO INSTÁVEL E O TEOREMA DE POINCARÉ-BIRKOFF

O teorema KAM nos assegura a sobrevivência dos toros irracionais sob a ação de uma pequena perturbação. Porém, os toros racionais são destruídos quando é acrescentada uma pequena perturbação [9]. Para visualizar o que acontece com estes toros, analisaremos a superfície de seção de um sistema Hamiltoniano autônomo integrável com dois graus de liberdade ($N = 2$). Neste caso o toro é representado pelas variáveis ângulo $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ e ação $\vec{I} = (I_1, I_2)$, onde é tomada a seção para $\theta_2 = \text{constante}$, este sistema está ilustrado na figura (2.3).

As trajetórias que interceptam a superfície podem ser representados por um mapa

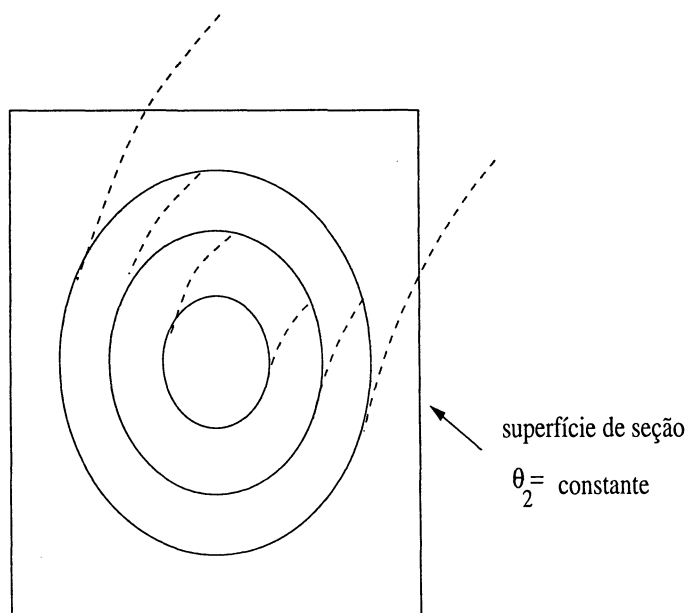


Figura 2.3: Superfície de seção de um sistema integrável.

bidimensional que preserva a área. Este mapa, que representa uma seção de toros integráveis, geram círculos concêntricos e podem ser representados através de coordenadas polares (r, θ) [9, 15]. O mapa possui a seguinte forma:

$$M_0 = \begin{cases} r_{n+1} = r_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi R(r_n). \end{cases} \quad (2.41)$$

Este par de equações é o chamado mapa de torção, representaremos este mapa numa forma mais compacta através de $(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = M_0(r_n, \theta_n)$. Onde $R(r)$ representa a razão entre as frequências $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ do toro não perturbado. Para o caso do toro ressonante o número $R(r)$ é racional, ou seja

$$R = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}. \quad (2.42)$$

Sendo p e q números inteiros. Se tomarmos um ponto no círculo de raio r_0 e θ_0 , e aplicarmos q vezes o mapa temos que:

$$M_0^q = \begin{cases} r_q = r_0 \\ \theta_q = \theta_0 + 2\pi \frac{p}{q} \cdot q = \theta_0 + 2\pi p, \end{cases} \quad (2.43)$$

onde o mapa M_0^q retorna ao ponto original do círculo, ou seja, θ_0 é um ponto fixo de M_0^q . Acrescentando a perturbação εH_1 sobre H_0 ao mapa de torção temos que:

$$M_\varepsilon = \begin{cases} r_{n+1} = r_n + \varepsilon f(r_n, \theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi R(r_n) + \varepsilon g(r_n, \theta_n). \end{cases} \quad (2.44)$$

Agora estamos interessados em saber o que acontece com os pontos fixos quando a perturbação é acrescentada. Para isso consideremos um círculo de raio r com $R = \frac{p}{q}$ que esta localizado entre dois círculos r_+ e r_- . O círculo r_+ com $R > \frac{p}{q}$ e o círculo r_- com $R < \frac{p}{q}$, portanto temos que o mapa M_0^q para r_+ gira no sentido anti-horário, e para r_- no sentido horário [9].

Se considerarmos o mapa perturbado M_ε^q para um ε suficientemente pequeno, o

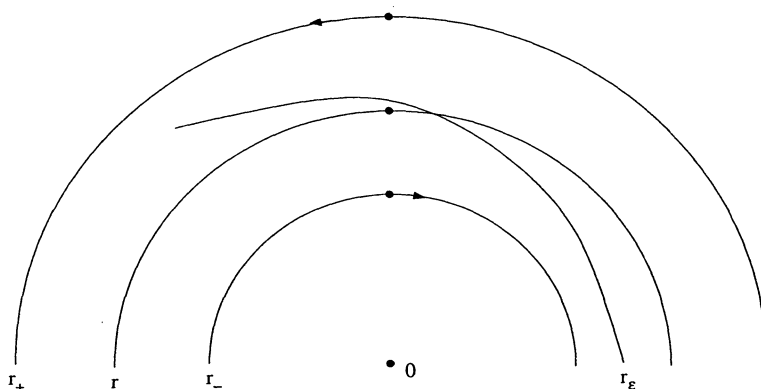


Figura 2.4: Representação de uma trajetória levemente perturbada no mapa de torção.

mapa continua gerando torções [9]. Assim, para um raio qualquer deve existir um ponto tal que a coordenada angular permaneça inalterado com o acréscimo da perturbação. Este mapa gera uma curva r_ε próxima a r , como está representado na figura (2.4).

Sobre a curva r_ε aplicamos o mapa $M_\varepsilon^q(r_\varepsilon)$, obtendo uma nova curva que intercepta

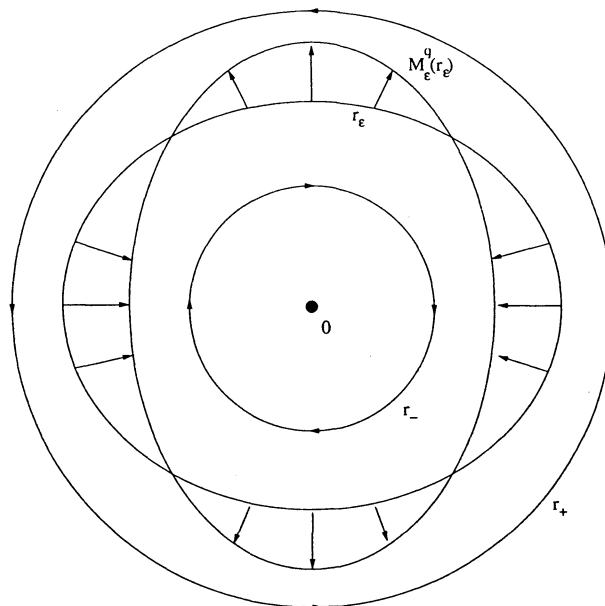


Figura 2.5: Representação da trajetória r_ϵ e sua imagem $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$.

um número par de vezes a curva r_ϵ [9]. Devido a propriedade de preservação de área para sistemas conservativos, a área definida entre as curvas r_ϵ e $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$ devem ser iguais, como mostra a figura (2.5) [14].

Os pontos onde r_ϵ e $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$ se interceptam são os novos pontos fixos do mapa de torção perturbado. Estes pontos fixos são originados em uma sequência alternante de elípticos e hiperbólicos [14], como está ilustrado na figura (2.6).

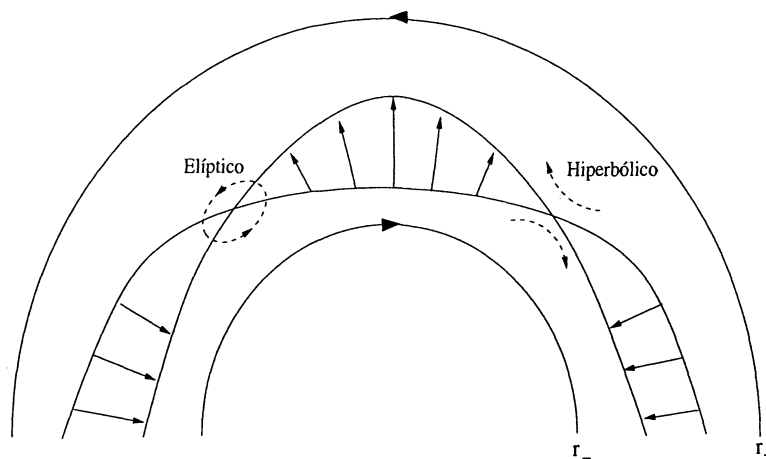


Figura 2.6: Ilustração do pontos fixos elípticos e hiperbólicos de $\mathbf{M}_\epsilon^q(r_\epsilon)$.

Isto significa que o toro racional não é totalmente destruído, mas permanece um número par de pontos fixos, este resultado é o chamado teorema de Poincaré-Birkoff.

Assim com base neste teorema podemos ilustrar na figura (2.7), a transição de um toro racional com valor $q=3$ e $q=4$ do caso não perturbado para perturbado.

Os toros suficientemente afastados da ressonância sobrevivem ao acréscimo da perturbação. Porém, os toros que estão próximos a ressonância tem suas curvas detruídas quando é acrescentada a perturbação e passam a formar curvas ao redor dos pontos fixos elípticos [9]. Agora os pontos fixos elípticos com acréscimo da perturbação passam a ter curvas KAM ao seu redor, e se ampliarmos um destes pontos fixos vemos um processo semelhante em menor escala de criação de toros.

Agora resta esclarecer qual é a influência dos pontos fixos hiperbólicos sobre a

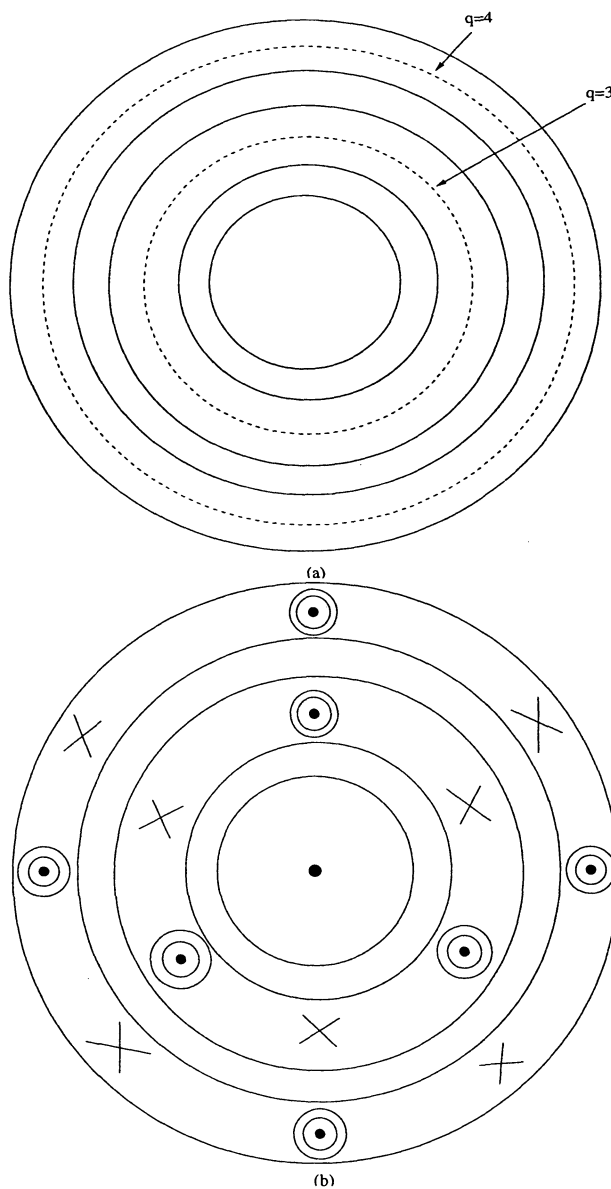


Figura 2.7: Representação da seção de um toro com ressonâncias $q=3$ e $q=4$ para os casos (a) não perturbado (b) perturbado.

dinâmica do sistema fracamente perturbado. Um ponto fixo hiperbólico é caracterizado por uma direção estável (W^s), onde as trajetórias são atraídas, e uma direção instável (W^u), onde as trajetórias são repelidas.

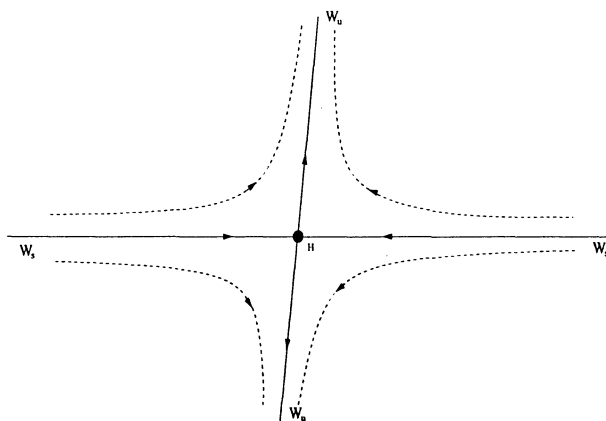


Figura 2.8: Representação de um ponto fixo hiperbólico.

Para visualizar o que acontece ao redor deste ponto fixo, considere uma trajetória que intercepta primeiramente a linha estável (W^s) em um ponto X , em seguida X' , e depois X'' conforme a figura (2.9). Devido a preservação da área definida entre o cruzamento da trajetória com a linha estável, e ao esticamento das trajetórias devido a linha instável, têm-se que a distância entre os pontos X'' e X' deve ser menor que entre X' e X [14]. A consequência dos pontos estarem cada vez mais próximos, é que a trajetória oscila cada vez mais violentamente com a proximidade do ponto fixo hiperbólico, gerando uma trajetória irregular [14]. Sendo esta trajetória irregular responsável ao surgimento de comportamento caótico em sistemas conservativos.

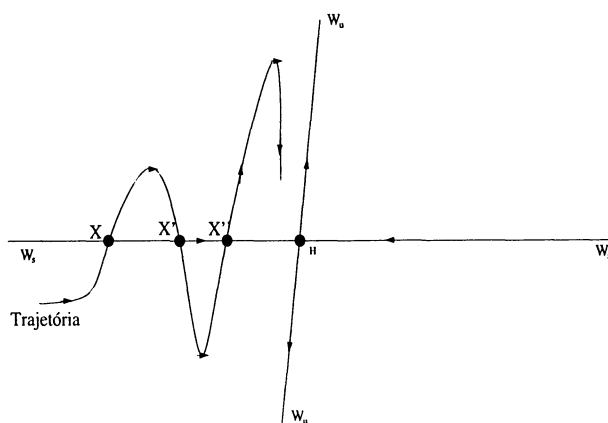


Figura 2.9: Esticamento das trajetórias com a proximidade do ponto fixo hiperbólico.

2.1.6 Sistemas com mais de dois graus de liberdade

Todos os efeitos descritos nas sub-seções anteriores para sistemas com dois graus de liberdade são válidos para sistemas com mais de dois graus de liberdade. Porém, existe uma distinção topológica básica entre estes dois sistemas. Para um caso genérico de um sistema com N graus de liberdade, as suas trajetórias são representadas num espaço de fase $2N$ dimensional. Entretanto, devido a conservação de energia, as trajetórias estão restritas a uma superfície de $2N - 1$ dimensões. Supondo uma superfície fechada que divida o espaço em uma região interna e externa, esta superfície deve obrigatoriamente ser de uma dimensão menor que a do espaço. Assim para o caso conservativo de um sistema com N graus de liberdade uma superfície que divida o espaço deve necessariamente ter dimensão $2N - 2$ [9]. Se aplicarmos este raciocínio para um sistema com $N = 2$ graus de liberdade as suas trajetórias estão confinadas num espaço tridimensional, assim para este caso um toro bi-dimensional separa o espaço em uma região interna e externa, como uma linha divide o plano ilustrado na figura (2.10.a) [14]. Então uma condição inicial no interior de uma região caótica para o caso $N = 2$ que esteja entre dois toros KAM permanecerá confinada entre os toros [9]. Agora para o caso de um sistema conservativo com $N = 3$ as trajetórias permanecem em uma superfície de cinco dimensões, temos então que toros tridimensionais não separam mais o espaço em duas regiões, assim como linhas não separam um espaço tridimensional em uma região interna e externa, como ilustrado na figura (2.10.b) [14]. Logo para o caso $N = 3$, regiões caóticas não são mais separadas por toros, assim uma condição inicial no interior da região caótica, eventualmente, para um tempo suficientemente longo pode preencher todo espaço, este movimento é conhecido como difusão de Arnold [9, 14, 15].

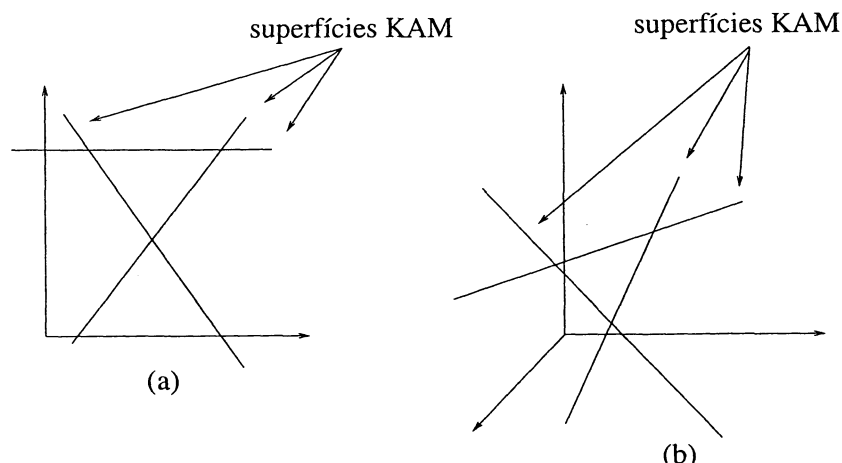


Figura 2.10: Em (a) a superfície bi-dimensional de energia (plano) e dividido em região interna e externa por linhas (b) para o caso onde a superfície de energia é tridimensional não é mais separado por linhas.

2.2 A interação

Após a exposição de conceitos básicos sobre dinâmica, passaremos agora a exposição do exemplo físico que serve de motivação para o nosso estudo, a interação de quatro ondas eletromagnéticas. Tais interações são processos que ocorrem em plasmas frios, por este motivo, no início desta seção é feita uma breve descrição de plasma e em seguida a interação de quatro ondas.

2.2.1 Plasma

O termo plasma é usado para definir um gás eletricamente carregado, onde os seus átomos estão dissociados em íons (cargas positivas) e elétrons (ou átomos eletricamente negativos) [16]. Devido ao fato de ser eletricamente carregado, o plasma possui certas características distintas de um gás constituído por moléculas neutras (sem carga). Em um gás neutro as interações se devem exclusivamente a colisões que ocorrem entre moléculas. Já para o caso de um plasma é necessário considerar o efeito da interação coulombiana que ocorrem entre íons e elétrons. Uma forma simples de estimar a quantidade de gás ionizado em um gás em equilíbrio térmico é através da chamada equação de Saha que possui a seguinte forma [16]:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \cdot 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{\frac{-U_i}{k_B T}}, \quad (2.45)$$

onde n_i e n_n , são respectivamente a densidade do número de átomos ionizados e átomos neutros, T é a temperatura do gás, k_B é a constante de Boltzmann, e U_i é a energia de ionização do gás que corresponde a quantidade de energia necessária para remover o elétron mais externo do átomo. Como exemplo considere o ar a temperatura ambiente, temos que $n_n \approx 3 \times 10^{25}$, $T \approx 300 K$, e $U_i = 14,5 eV$ (para o nitrogênio), onde $1eV = 1,6 \times 10^{-19} J$, fornece o seguinte resultado:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 10^{-122}. \quad (2.46)$$

A razão de densidade entre átomos neutros e átomos ionizados resulta em um valor extremamente baixo para o ar comum, e seu grau de ionização permanece baixo até que U_i tenha valores próximos a $k_B T$. Através da equação de Saha (2.45) pode-se concluir que em qualquer gás sempre há um pequeno grau de gás ionizado, assim é necessário definir um critério mais específico para caracterizar um gás como sendo plasma. Em livros sobre plasma são utilizados os seguintes critérios para definir um plasma [16, 17].

- **Neutralidade macroscópica**

Na ausência de perturbação externa um plasma é macroscopicamente neutro. Isto deve ser válido para um plasma com um número suficientemente grande de partículas,

neste caso os campos microscópicos espaciais de carga devido a íons e elétrons se anulam mutuamente e a rede espacial de carga é nula [16].

- **Blindagem de Debye**

A blindagem de Debye está relacionada com uma propriedade fundamental do comportamento de um plasma, que é a sua habilidade de blindar potenciais que são aplicados sobre ele. Para compreender a propriedade de blindagem suponha que seja inserida uma esfera negativamente carregada dentro do plasma, imediatamente os íons positivamente carregados são atraídos e formam uma nuvem ao redor da esfera. Assim supondo um plasma frio, onde os movimentos devido a agitação térmica são desconsiderados, a nuvem forma uma blindagem tal que nenhum campo elétrico é sentido no exterior da nuvem. É conveniente definir a quantidade λ_D chamada de comprimento de Debye, que é a medida do comprimento da blindagem. O comprimento de Debye é dado por [16]:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.47)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo, n_e é a densidade de elétrons e e é a carga do elétron. Definido o comprimento de Debye λ_D e considerando um sistema com dimensão L , podemos estabelecer o primeiro critério para um gás ionizado ser plasma [16], que é L ser muito maior que λ_D , deixando a maior parte do plasma livre de grandes potenciais elétricos. Assim temos que:

$$L \gg \lambda_D. \quad (2.48)$$

Considerando que a nuvem de partículas carregadas devido ao efeito de blindagem estão contidas no interior de uma esfera de raio λ_D , e n a densidade de partículas no interior da nuvem, o número de partículas carregadas N_D é dado por [16]:

$$N_D = n \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 = 1,38 \times 10^6 T^{3/2} / n^{1/2}. \quad (2.49)$$

Se pensarmos em termos estatísticos é obvio que o efeito de blindagem não é válido para uma nuvem composta por um número pequeno de partículas. Assim podemos estabelecer um segundo critério para um plasma que deve ser [16]:

$$N_D \gg 1. \quad (2.50)$$

- **Frequência de plasma**

Considere que uma força perturbadora externa é adicionada sobre um plasma, e que esta cause em média um deslocamento entre íons e elétrons. Quando esta força é removida, instantaneamente surge um campo elétrico que tende retornar os elétrons

e íons as suas posições originais. Porém, devido a inércia dos elétrons, quando estes são acelerados por este campo elétrico restaurador ultrapassam a sua posição original, gerando um novo campo elétrico com sentido contrário. Este processo se repete, fazendo que o elétron fique oscilando em torno da posição original. Devido ao fato dos íons posuírem uma inércia muito maior que a dos elétrons, a frequência de oscilação dos elétrons é muito maior que a dos íons. A oscilação coletiva dos elétrons é chamada de frequência de plasma e é dada por [16]:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (2.51)$$

Agora podemos definir um terceiro critério para um gás ionizado ser um plasma, que é devido as colisões [16]. Colisões entre partículas neutras e carregadas tendem amortecer as oscilações, fazendo as amplitudes diminuírem gradativamente. Quando isto ocorre, temos um gás onde as interações devido a colisões não podem ser ignoradas, e este gás passa a ser melhor tratado como sendo um gás neutro do que um gás ionizado. Se temos que ω é a frequência do plasma e τ o tempo médio de colisões entre partículas neutras e carregadas, o terceiro critério para um plasma é dado por [16]:

$$\omega\tau > 1. \quad (2.52)$$

2.2.2 O modelo de quatro ondas

Considerando uma interação coerente entre quatro ondas eletromagnéticas, envolvendo o acoplamento de dois conjuntos de três ondas, ocorrendo sempre que os vetores e frequências de ondas satisfaçam as seguintes relações de casamento de fase [18]:

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_3 + \vec{k}_2, \quad (2.53)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_4 - \vec{k}_2, \quad (2.54)$$

$$\omega_1 = \omega_3 + \omega_2 + \delta_-, \quad (2.55)$$

$$\omega_1 = \omega_4 - \omega_2 + \delta_+, \quad (2.56)$$

onde δ_- e δ_+ são frequências de descasamentos para cada um dos dois tripletos de ondas. A representação esquemática do modelo de quatro ondas está mostrado na figura (2.11), podemos ver o triplete formado pelas ondas 1, 3 e 2 e o triplete formado pelas ondas 1, 4 e 2. O triplete das ondas 1, 3 e 2 estão relacionados com processos de decaimento ou conversão de frequência para baixo, enquanto o triplete das ondas 1, 4 e 2 estão relacionados com processos de fusão ou conversão de frequência para cima.

Para modelar esta interação entre ondas usaremos uma das aproximações mais comuns, que consiste em utilizar do sistema de equações formado pelos momentos da equação

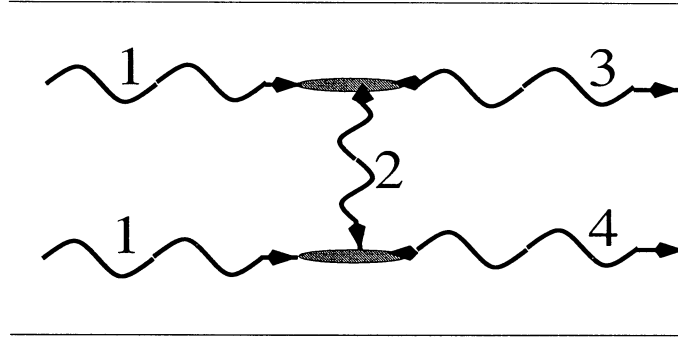


Figura 2.11: A interação de quatro ondas eletromagnéticas.

de Boltzmann (teoria magnetohidrodinâmica e teoria de dois fluidos), onde é considerada a força como sendo a força de Lorentz e termos que representam possíveis colisões entre as partículas, juntamente com as equações de Maxwell, e usando uma análise de perturbações [18, 19, 20]. Assim, as equações da interação são derivadas do seguinte sistema de equações [16]:

- equação de movimento

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nu \mathbf{V}_\alpha - \frac{\gamma k_B T_\alpha}{m_\alpha} \nabla \ln n_\alpha, \quad (2.57)$$

- equação da continuidade

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0, \quad (2.58)$$

- equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.60)$$

sendo $\alpha = (e, i)$, $q_e = -e$, $q_i = e$, k_B é a constante de Boltzmann, T_α , m_α e \mathbf{V}_α são respectivamente a temperatura, massa e as velocidades das partículas da espécie α , ν é a frequência de colisão entre as partículas, γ é a razão de calores específicos, \mathbf{E} é a soma dos campos elétricos das ondas, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4$, \mathbf{B} é o campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$ onde \mathbf{B}_0 é o campo magnético ambiental, μ_0 e ϵ_0 são respectivamente a permeabilidade e permissividade do vácuo. As equações de Maxwell (2.59) e (2.60) podem ser combinadas, formando a equação de onda [21]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \quad (2.61)$$

Escrevendo os campos elétricos da interação em notação modulacional $\mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\epsilon_i \exp i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega_\alpha t) + c.c.$, e através de um extenso cálculo analítico onde é considerado fracas não-linearidades, é possível escrever a interação como sendo o seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem [18]:

$$\dot{A}_1(t) = A_2(t)A_3(t) - rA_2^*(t)A_4(t) + \nu_1 A_1(t), \quad (2.62)$$

$$\dot{A}_2(t) = -A_1(t)A_3^*(t) - rA_1^*(t)A_4(t) + \nu_2 A_2(t), \quad (2.63)$$

$$\dot{A}_3(t) = -A_1(t)A_2^*(t) - i\delta_- A_3(t) + \nu_3 A_3(t), \quad (2.64)$$

$$\dot{A}_4(t) = rA_1(t)A_2(t) + i\delta_+ A_4(t) + \nu_4 A_4(t), \quad (2.65)$$

sendo A_s as amplitudes complexas normalizadas da modulação $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ das ondas. Os termos $\nu_{1,2,3,4}$ representam a injeção ou dissipação de energia (dependendo do sinal de ν). Neste trabalho será estudado a interação conservativa e os ν_s serão nulos [19]. Devido ao fato das amplitudes serem complexas, com componente reais e imaginárias, as soluções da interação de quatro ondas é representada num espaço de oito dimensões (quatro reais e quatro imaginárias). Introduzindo a transformação de variáveis $A_{(1,2,3,4)} = F_{(1,2,3,4)}^{1/2} e^{i\phi_{(1,2,3,4)}}$ as equações (2.62)-(2.65) podem ser analisadas numa forma mais conveniente:

$$\dot{F}_1 = 2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_- - 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.66)$$

$$\dot{F}_2 = -2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_- - 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.67)$$

$$\dot{F}_3 = -2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_-, \quad (2.68)$$

$$\dot{F}_4 = 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.69)$$

$$\dot{\phi}_- = 1/2(H + \delta_- F_3 + \delta_+ F_4)(1/F_2 - 1/F_1) + (F_1 F_2 / F_3)^{1/2} \text{sen}(\phi_-) - \delta_-, \quad (2.70)$$

$$\dot{\phi}_+ = 1/2(H + \delta_- F_3 + \delta_+ F_4)(-1/F_2 - 1/F_1) - r(F_1 F_2 / F_4)^{1/2} \text{sen}(\phi_+) - \delta_+, \quad (2.71)$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema e é dada por:

$$H = 2(F_1 F_2)^{1/2} (F_3^{1/2} \text{sen} \phi_- - r F_4^{1/2} \text{sen} \phi_+) - \delta_- F_3 - \delta_+ F_4, \quad (2.72)$$

e $\phi_- \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$, $\phi_+ \equiv \phi_1 + \phi_2 - \phi_4$. No formalismo Hamiltoniano acima $F_{(1,2,3,4)}$ e $\phi_{(1,2,3,4)}$ são os momentos e as coordenadas canônicas respectivamente, tal que temos uma interação com quatro graus de liberdade. Além da Hamiltoniana, o conjunto de equações (2.66)-(2.71) admite outras duas constantes de movimento, conhecidas como relações de Manley-Rowe expressas na seguinte forma [22]:

$$F_1 + F_3 + F_4 = c_1, \quad (2.73)$$

$$F_2 - F_3 + F_4 = c_2. \quad (2.74)$$

Uma quarta constante de movimento para o sistema de equações (2.62)-(2.65) e a consequente integrabilidade da interação de quatro ondas conservativa, foi apresentada

para o caso $\delta_- = \delta_+ = 0$ por Romeiras [23]. Para o caso onde $\delta_- \neq 0$ ou $\delta_+ \neq 0$, a quarta constante não permanece válida [18], permanecendo apenas a Hamiltoniana e as relações de Manley-Rowe como constantes de movimento. Assim, tem-se um sistema com mais graus de liberdade do que constantes de movimento, sendo aplicada a teoria de sistemas Hamiltonianos quasi-integráveis.

Devido as constantes de movimento, é necessário encontrar um conjunto de condições iniciais que satisfaça simultaneamente a Hamiltoniana e as constantes de movimento c_1 e c_2 . Para a análise ficar simplificada, é escolhida a Hamiltoniana com valor $H=0$, assim obtemos o seguinte conjunto de condições iniciais que preenche estes requisitos:

$$\begin{aligned} F_1(t=0) &= c_1 - \eta, & F_2(t=0) &= c_2 - \eta, \\ F_3(t=0) &= 0, & F_4(t=0) &= \eta, & \phi_-(t=0) &= \pi, & \phi_+(t=0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

com η sendo um parâmetro que define diferentes condições iniciais.

2.3 Conceitos de dinâmica não linear

Durante esta seção apresentaremos alguns conceitos de dinâmica não linear. Muitos destes conceitos que serão abordados, são importantes para a compreensão e a análise dos resultados que foram obtidos para o modelo de interação de quatro ondas conservativo, que serão apresentados no próximo capítulo.

2.3.1 Expoentes de Lyapunov

Uma característica comum em sistemas caóticos é a imprevisibilidade. Esta característica está relacionada com a chamada dependência sensível às condições iniciais, na qual dada duas condições arbitrariamente próximas, após um período suficientemente longo levam a soluções totalmente diferentes. Uma forma de medir a dependência às condições iniciais é através do chamado expoente de Lyapunov [11, 24].

Para definirmos o expoente de Lyapunov, considere inicialmente um sistema contínuo descrito por um conjunto de n equações diferenciais ordinárias. Sobre este sistema é escolhida uma trajetória onde é fixado um ponto inicial x_0 . Em torno do ponto inicial x_0 é monitorado uma esfera infinitesimal de condições iniciais de raio $\varepsilon_0(x_0)$. Após evoluir temporalmente o ponto inicial x_0 , a esfera de condições iniciais se deforma, tornando-se um elipsóide com eixos principais $\varepsilon_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ (ver figura (2.12)).

Assim definimos o expoente de Lyapunov como sendo a medida do crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_i(t)$ que é escrito por [24]:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}. \quad (2.76)$$

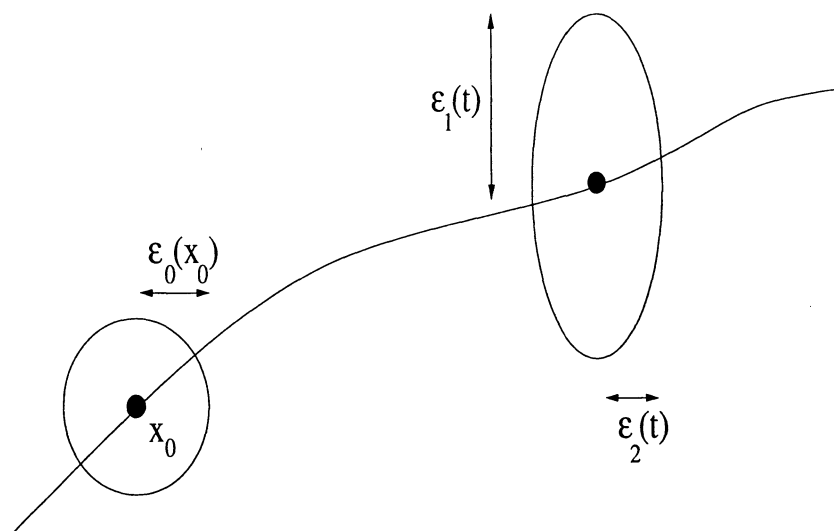


Figura 2.12: Evolução temporal de uma esfera bidimensional de condições iniciais.

Desta última equação temos que:

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) \exp(\lambda_i t). \quad (2.77)$$

Pode-se concluir então que a existência de pelo menos um expoente Lyapunov positivo está associado com a divergência de trajetórias, que é uma característica de soluções caóticas [24].

Em um instante de tempo qualquer t o elemento de volume n -dimensional é dado por:

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i(t), \quad (2.78)$$

substituindo a equação (2.77) em (2.78) temos que:

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp \sum_{i=1}^n \lambda_i t. \quad (2.79)$$

Deste último resultado podemos distinguir dois casos: (a) o primeiro é quando $\delta V(t) = \delta V(0)$, ou seja, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ neste caso o elemento de volume se preserva e o sistema é conservativo (b) o segundo caso é quando $\delta V(t) < \delta V(0)$, ou seja $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$, estes sistemas onde ocorrem a contração do elemento de volume são chamados de dissipativos [11].

2.3.2 Cortes de Poincaré

Uma ferramenta muito usada na análise de sistemas dinâmicos é o chamado corte de Poincaré. O nome Poincaré é devido a ele ser o primeiro a utilizar esta ferramenta (1899)

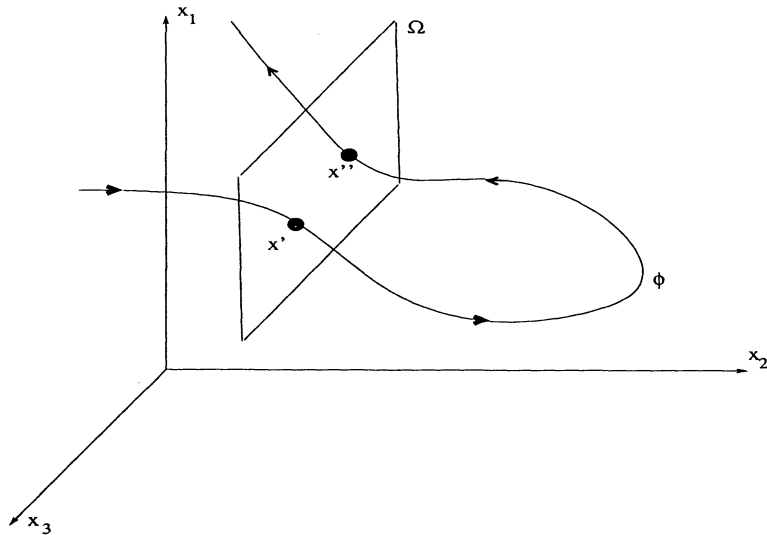


Figura 2.13: Interpretação geométrica de um corte de Poincaré.

em seus estudos de problema de três corpos [25]. A idéia deste corte é basicamente reduzir o estudo de um sistema com tempo contínuo para um sistema com tempo discreto. As vantagens em estudar o corte que podemos citar são as seguintes:

- Redução dimensional- A utilização do corte elimina uma das variáveis do sistema, fazendo que o sistema analisado seja de uma dimensão menor que a do sistema original [25].
- Dinâmica global- Problemas de baixa dimensionalidade (menor que 4 por exemplo) onde são computados numericamente o corte de Poincaré, expõem numa forma simples a dinâmica global do sistema [25].
- Clareza conceitual- Conceitos que são incômodos no estudo de equações diferenciais se tornam claros quando é analisado o corte de Poincaré [25].

Para se construir um corte de Poincaré considere um fluxo ϕ n -dimensional de equações diferenciais $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$, e sobre este espaço é construído uma hipersuperfície Ω de dimensão $(n - 1)$ transversal ao fluxo. Assim, definimos o corte de Poincaré como sendo a hipersuperfície Ω que intercepta os pontos do fluxo [11]. Na figura (2.13) mostramos a idéia geométrica do corte de Poincaré para um fluxo tridimensional.

2.3.3 Espectro de potência

Movimentos caóticos são caracterizados por sinais irregulares e aperiódicos [15]. Porém, em certos casos a distinção entre sinais multiplamente periódicos e sinais caóticos nem

sempre é óbvia [11]. Uma forma conveniente de medir a periodicidade de um certo sinal $x(t)$ é através da transformada de Fourier:

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt e^{i\omega t} x(t), \quad (2.80)$$

onde $x(\omega)$ indica o peso relativo com que a frequência ω esta presente no sinal $x(t)$. O espectro de potência $P(\omega)$ é dado por:

$$P(\omega) = |x(\omega)|^2. \quad (2.81)$$

A análise de sinais temporais através dos espectros de potências são caracterizados por certos comportamentos característicos. Por exemplo um sinal periódico quando é analisado através do espectro de potência, além do pico em T correspondente ao período do sinal, há a presença de picos menores que correspondem aos harmônicos do período T , ou seja, $4\pi/T, 6\pi/T, \dots, 2n\pi/T$ [11].

Para o caso onde o sinal é composto por duas frequências incomensuráveis (a razão entre as frequências é um número irracional) fornecem um espectro ainda mais complicado, que além dos picos relativos aos seus períodos apresentam picos nas seguintes frequências [11]:

$$\omega_i = |m_1\omega_1 + m_2\omega_2|, \quad (2.82)$$

onde m_1 e m_2 são inteiros arbitrários e ω_1 e ω_2 que são as duas frequências do sinal.

Já o caso de um sinal caótico (que é aperiódico) corresponde a um espectro de potência ruidoso e com bandas largas, não havendo picos definidos [11].

2.3.4 Dimensão de contagem de caixas

A dimensão de contagem de caixas que também é conhecida como “capacidade” de um conjunto, é um modo relativamente simples e prático para atribuir uma dimensão a um conjunto [9]. Para o cálculo desta dimensão considere um conjunto contido num espaço n -dimensional, e este espaço é dividido por cubos n -dimensionais com lados de comprimento ε . Se contarmos $N^*(\varepsilon)$ como sendo número de cubos necessários para cobrir o conjunto, e realizarmos este processo sucessivamente para cubos cada vez menores, temos que a dimensão de contagem de caixas nos fornece [9]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N^*(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}. \quad (2.83)$$

Como exemplos considere alguns simples conjuntos geométricos bi-dimensionais ilustrados na figura (2.14), no caso (a) dois pontos, no caso (b) um pedaço de uma curva e (c) uma curva fechada representando uma área. Para o caso (a) temos que $N^* = 2$ independente de ε , através da equação (2.83) obtemos $D = 0$. Para o caso (b) temos

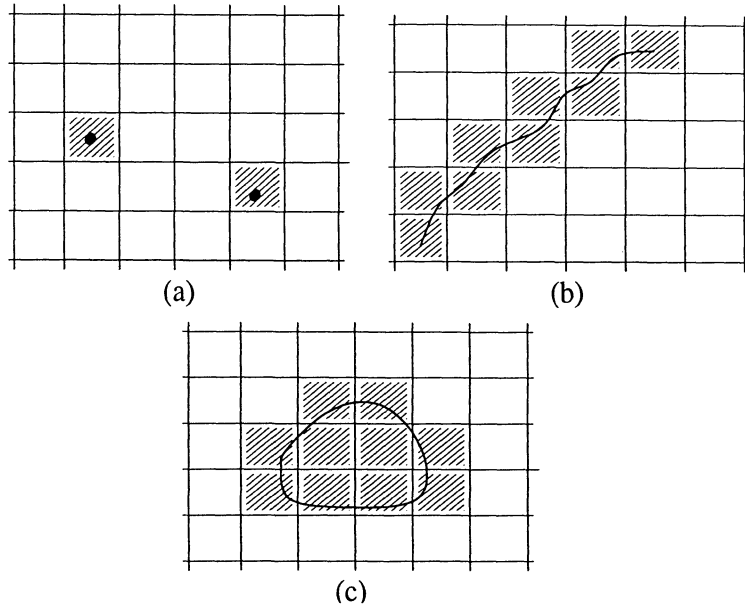


Figura 2.14: Ilustração da contagem de caixas para os seguintes conjuntos: (a) dois pontos, (b) um segmento de uma curva e (c) uma área no interior de uma curva.

que $N^*(\varepsilon) \approx l/\varepsilon$ para pequenos valores de ε , onde l é o comprimento da curva, através de (2.83) obtemos $D = 1$. Já para o caso (c) temos que $N^*(\varepsilon) \approx A/\varepsilon$, onde A é a área, a equação (2.83) fornece $D = 2$. Assim temos que a contagem de caixas nos fornece corretamente os valores de dimensão destes simples objetos geométricos com dimensão inteira. O método de contagem de caixas também nos fornece informações importantes sobre conjuntos mais complicados em que a dimensão nem sempre assume valores inteiros.

2.3.5 Estabilidade linear e classificação dos pontos fixos em duas dimensões para sistemas conservativos

Considere um sistema de equações diferenciais de primeira ordem $d\vec{x}/dt = \vec{F}(\vec{x})$. Uma solução de equilíbrio \vec{x}^* é um ponto tal que o sistema seja:

$$\vec{F}(\vec{x}^*) = 0, \quad (2.84)$$

ou seja, a solução não varia no tempo, este são os chamados pontos fixos [25]. Para analisar a estabilidade destes pontos fixos usaremos o procedimento de linearização, que consiste em analisar as soluções próximas a \vec{x}^* , assim temos:

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{\mu}(t), \quad (2.85)$$

para um pequeno valor de $\vec{\mu}(t)$. Substituindo a equação (2.85) em $d\vec{x}/dt = \vec{F}(\vec{x})$, e expandindo em Taylor em torno de \vec{x}^* temos que:

$$\vec{F}(\vec{x}^* + \vec{\mu}(t)) = \vec{F}(\vec{x}^*) + D\vec{F}(\vec{x}^*) \cdot \vec{\mu} + O(\mu^2), \quad (2.86)$$

onde \vec{x}^* é o ponto fixo, $\vec{F}(\vec{x}^*) = 0$, e $D\vec{F}$ é a matriz Jacobiana das derivadas parciais de \vec{F} , que é escrita na seguinte maneira:

$$D\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(n)}} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(n)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(n)}} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Assim obtemos a seguinte equação dependente do tempo para a vizinhança do ponto fixo:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = D\vec{F}(\vec{x}^*) \cdot \vec{\mu} + O(|\mu|^2), \quad (2.88)$$

onde na análise de estabilidade linear podemos ignorar os termos de μ^2 de (2.88) e reescrever da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \mathbf{A} \cdot d\vec{Y}, \quad (2.89)$$

onde \vec{Y} é um vetor N dimensional e \mathbf{A} é uma matriz $N \times N$. Se procurarmos por soluções do tipo $\vec{Y}(t) = \hat{e} \exp(st)$ a equação (2.89) se torna a seguinte equação de auto-valores:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{e} = s \hat{e}, \quad (2.90)$$

para haver soluções não triviais de s temos a seguinte equação polinomial:

$$\det[\mathbf{A} - s\mathbf{I}] = 0, \quad (2.91)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $N \times N$. Este procedimento do cálculo de auto-valores é válido para casos N dimensionais, porém aplicaremos para o caso de interesse nesta dissertação, que é o caso bi-dimensional de sistemas conservativos. Usando o fato que sistemas para conservativos, o valor do determinante da matriz Jacobiana é igual a um [14], temos que a equação (2.91) para o caso bi-dimensional fornece o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - s & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - s \end{bmatrix} = 0, \quad (2.92)$$

ou

$$s^2 - sTr\mathbf{A} + 1 = 0, \quad (2.93)$$

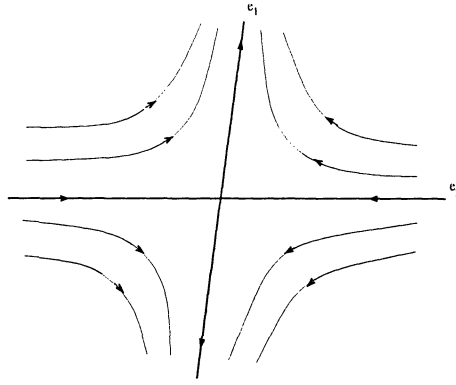


Figura 2.15: Ilustração de trajetórias ao redor do ponto fixo hiperbólico.

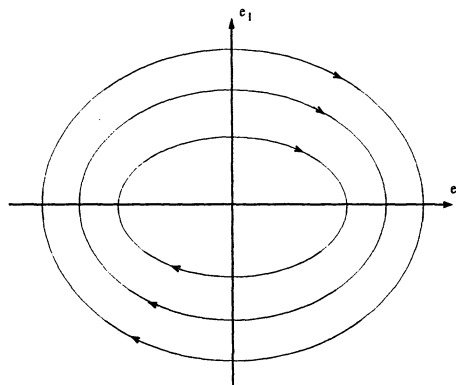


Figura 2.16: Ilustração de trajetórias ao redor do ponto fixo elíptico.

onde $Tr\mathbf{A} = A_{11} + A_{22}$ as soluções de s são:

$$s_{1,2} = \frac{Tr\mathbf{A}}{2} \pm \left[1 - \left(\frac{Tr\mathbf{A}}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.94)$$

Assim temos que $s_1 \cdot s_2 = 1$, isto implica em dois tipos possíveis de pontos fixos [15]:

- Pontos fixos hiperbólicos: Para o caso em que os auto-valores são reais e $s_1 > 1$, temos $s_2 = 1/s_1$, isto implica em ponto fixo instável ao longo do auto-vetor \hat{e}_1 e estável ao longo de \hat{e}_2 , como ilustrado na figura (2.15).
- Pontos fixos elípticos: Para o caso dos auto-valores serem complexos conjugados podemos escrever na seguinte forma:

$$s_{1,2} = e^{\pm i\phi}. \quad (2.95)$$

Este conjunto de auto-valores geram um conjunto de auto-vetores que correspondem a uma rotação, mostrado na figura (2.16). Isto implica em trajetórias estáveis que orbitam ao redor do ponto fixo.

Capítulo 3

Resultados e discussões

3.1 Frequência de descasamento constante

3.1.1 Cortes de Poincaré

Nesta sub-seção usaremos o corte de Poincaré para analisar a dinâmica do modelo de quatro ondas. A principal vantagem de utilizar o corte de Poincaré para o sistema de quatro ondas, é que devido a transformação de variáveis reduzir o conjunto de oito equações diferenciais para seis e associado com as duas constantes de movimento de Manley-Rowe (2.73) e (2.74), mais a Hamiltoniana (2.72), fazem que o sistema permaneça restrito a uma superfície de energia tridimensional. Assim, quando realizamos o corte as trajetórias são analisadas num espaço bidimensional. O corte escolhido das trajetórias geradas pelo modelo, é a posição em que a variável F_1 atinge um valor mínimo. Quando esta condição de corte é satisfeita, é feito um gráfico da variável F_2 versus a combinação da variáveis cíclicas ϕ_+ e ϕ_- na forma $(\phi_+ - \phi_-)$. Na figura (3.1) é mostrado um corte para um pequeno valor de frequência de descasamento(δ_-).

O corte da figura (3.1) é construído através de um conjunto de condições iniciais evoluindo temporalmente até um tempo $t = 10000$ que satisfazem as constantes de movimento de Manley-Rowe e a Hamiltoniana. Os valores destas constantes e de alguns parâmetros serão mantidos fixos durante todo este capítulo que são os seguintes:

$$c_1 = 3,2 \quad c_2 = 1,0 \quad H = 0 \quad \delta_+ = 0 \quad r = 1. \quad (3.1)$$

Cada curva gerada no corte representa uma condição inicial, para valores de frequência de descasamento pequeno podemos observar um comportamento predominantemente regular, onde quase todas as condições iniciais geram curvas suaves com exceção de uma condição inicial que preenche próxima ao centro do corte. O fato de quase todas condições iniciais apresentarem comportamento regular é devido ao modelo de quatro ondas conservativo ser integrável para o caso $\delta_- = 0$ [23]. Assim temos que para valores pequenos

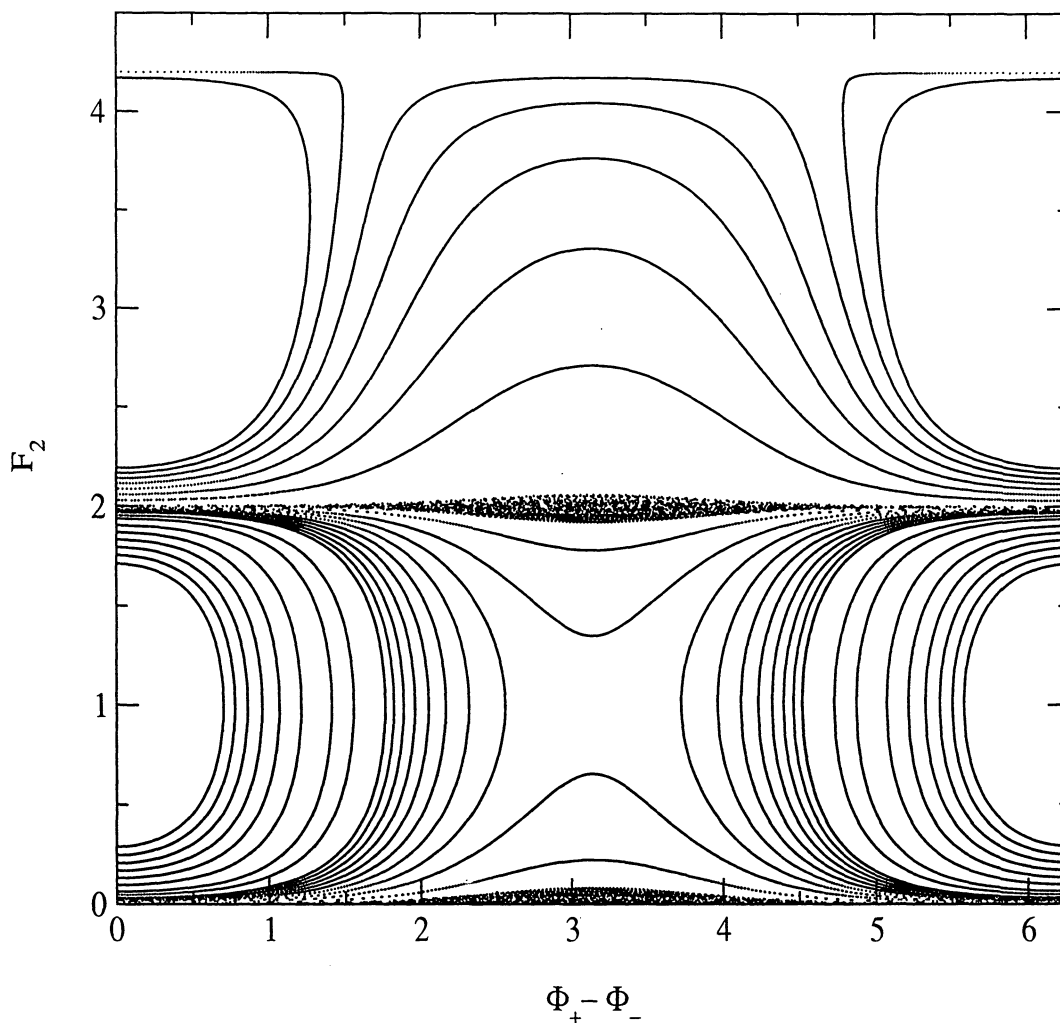


Figura 3.1: Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,001$.

de δ_- , um comportamento muito próximo de sistemas integráveis onde todas condições iniciais geram comportamentos regulares. Para o caso $\delta_- \neq 0$ o modelo de quatro ondas inicialmente é um sistema com quatro graus de liberdade, porém devido as duas constante de Manley-Rowe, o modelo recai no caso de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade. Vimos no capítulo anterior que o caso de sistemas de Hamiltonianos quasi-integráveis são caracterizados por regiões regulares e irregulares, onde as regiões regulares (caso integrável) são representadas por toros. Assim podemos associar as regiões regulares para o caso quasi-integrável do modelo conservativo de quatro ondas como sendo um corte de um toro T^2 com duas frequências, e este corte gera as curvas que são observadas na figura (3.1). O fato das curvas serem densamente preenchidas no corte é devido a irracionalidade entre as duas frequências do toro.

O gráfico da figura (3.2) é gerado a partir das mesmas condições iniciais e parâmetros do corte anterior, só sendo alterado o valor da frequência de descasamento que foi aumen-

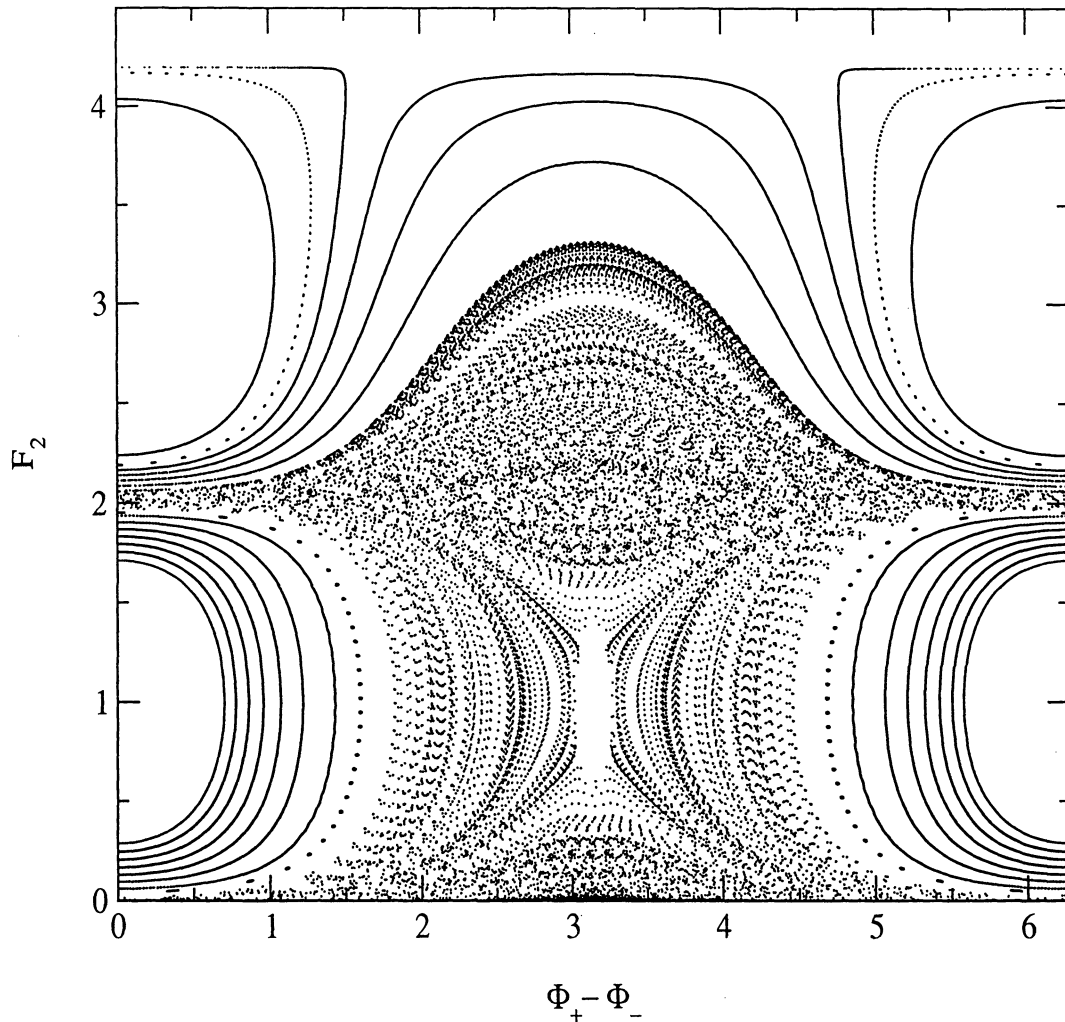


Figura 3.2: Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,02$.

tado para $\delta_- = 0,02$. Podemos ver que as curvas geradas no centro da figura (3.1) foram substituídas por regiões irregulares no qual os pontos preenchem uma área finita do corte. Na figura (3.2) também podemos observar que as regiões irregulares são limitadas por regiões regulares, ou seja uma condição inicial no interior de uma região irregular não pode atravessar uma região regular. Isto é uma consequência do teorema KAM para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, onde os toros que sobrevivem a perturbação, dividem o espaço em sub-espacos que confinam as regiões caóticas. O aparecimento das regiões irregulares são devidos aos toros que se quebraram com o acréscimo da perturbação. No caso do modelo de quatro ondas conservativo a perturbação é introduzida através da frequência de descasamento. O fato do comportamento irregular surgir no centro do corte, é devido a curva separatriz cruzar o centro do corte onde está localizado um ponto fixo hiperbólico. Como foi discutido no capítulo anterior, o acréscimo da perturbação faz que as trajetórias próximas ao ponto fixo hiperbólico passem por um

complexo processo de esticamento e contração, originando a trajetória caótica que é observada no centro do corte de Poincaré da figura (3.2).

No corte de Poincaré da figura (3.3) é feito um incremento na frequência de des-

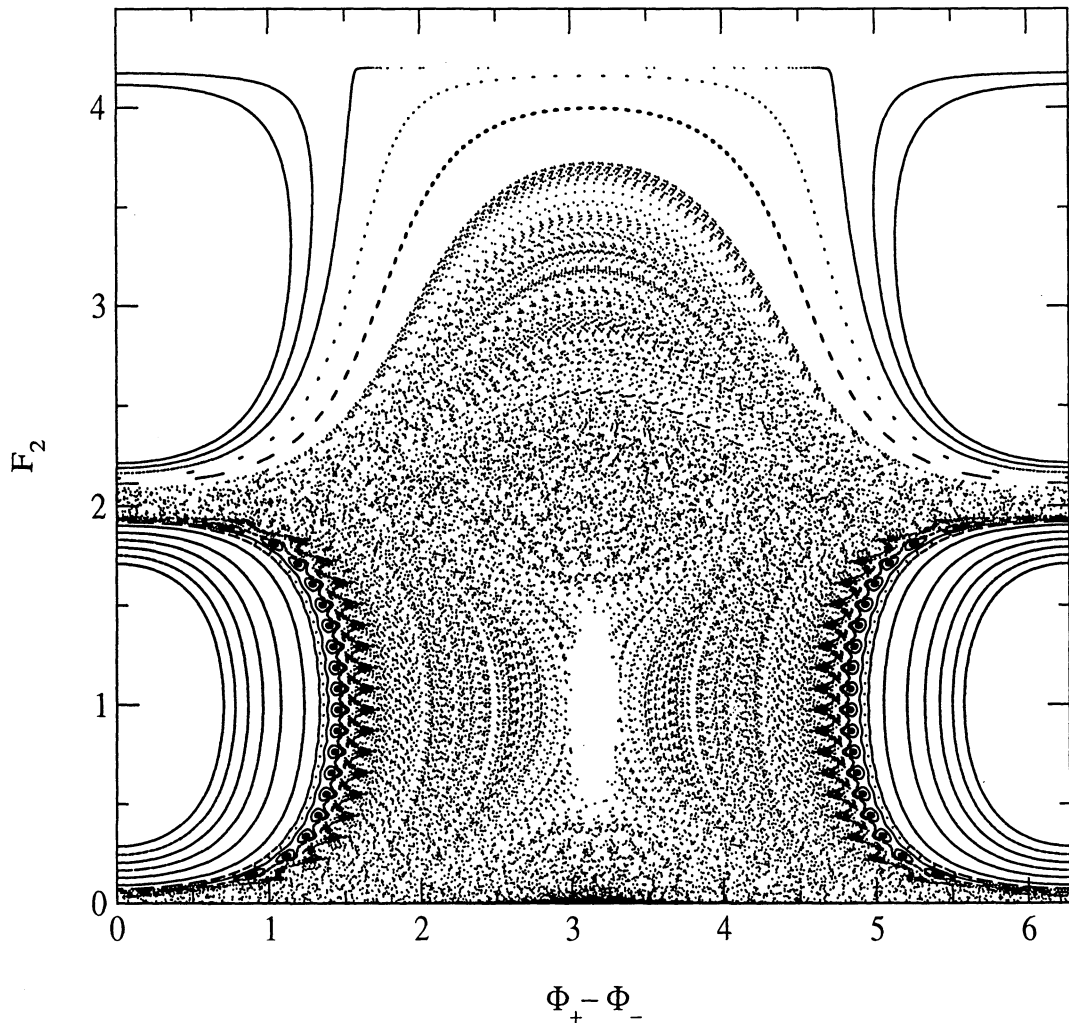


Figura 3.3: Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,03$.

casamento para $\delta_- = 0,03$, observamos um aumento da região irregular com relação ao caso de $\delta_- = 0,02$. Além disso, podemos observar que próximo as regiões regulares há a formação de pequenas ilhas. Isto é uma consequência do teorema de Poincaré-Birkoff, no qual os toros racionais com um acréscimo de uma perturbação formam um conjunto de pontos fixos elípticos e hiperbólicos. Assim temos que condições iniciais próximas aos toros racionais que foram quebrados com o acréscimo do descasamento da frequência, formam trajetórias em torno dos pontos fixos elípticos dos toros racionais.

Na figura (3.4) mostramos uma ampliação das ilhas para o caso de frequência de descasamento $\delta_- = 0,03$, onde no interior de cada ilha há um ponto fixo elíptico devido a um toro racional. Podemos ver desta figura como os toros mais próximos da separatriz

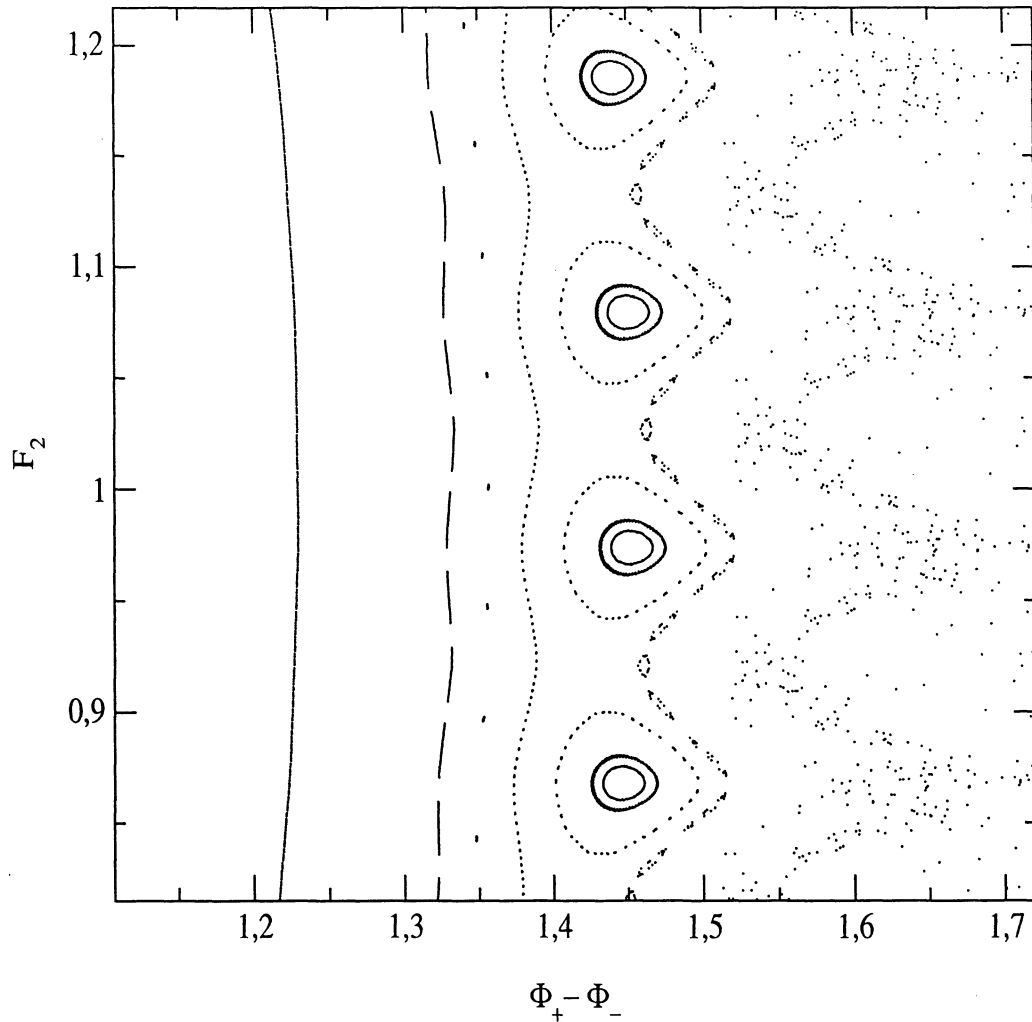


Figura 3.4: Ampliação do corte de Poincaré para $\delta_- = 0,03$.

são mais perturbados até finalmente serem quebrados. Além disto, temos que os toros racionais formam ilhas maiores em regiões onde os toros estão mais próximos da separatriz.

Na figura (3.5) é contruído um corte para um grande valor de frequência descasamento ($\delta_- = 0,3$). Através deste corte podemos ver que as regiões regulares praticamente desaparecem. Porém, as regiões caóticas preenchem quase todo corte com excessão de pequenas regiões que são habitadas por ilhas e do ponto hiperbólico no centro do corte que repele as trajetórias.

3.1.2 Séries temporais e espectros de potência

Nesta sub-seção é feita uma análise da série temporal gerada pelas amplitudes das ondas, e sobre as séries é utilizado uma análise de Fourier para determinar as frequências de oscilação das amplitudes.

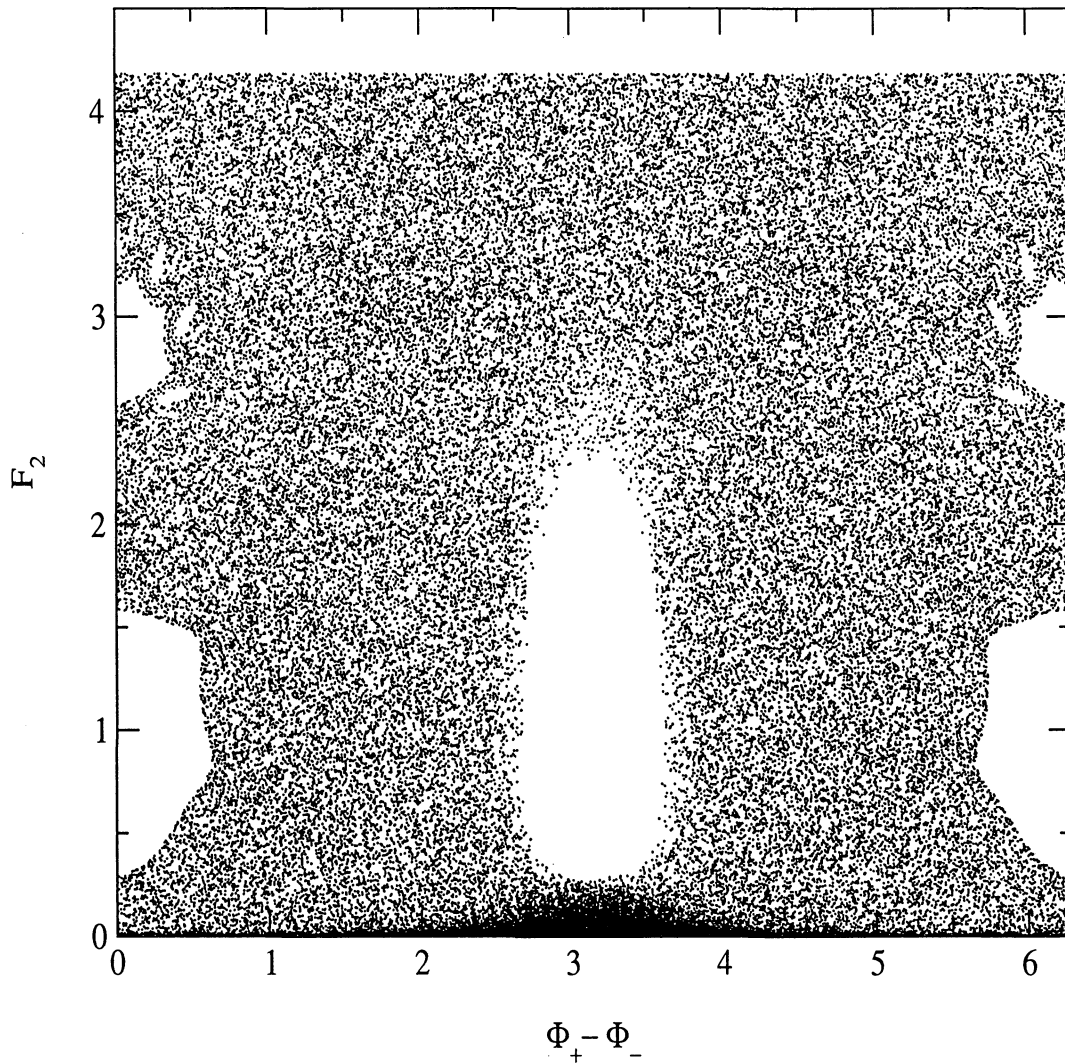


Figura 3.5: Corte de Poincaré para $\delta_- = 0,3$.

As amplitudes das ondas eletromagnéticas geradas pelo modelo de quatro ondas são compostas por partes real e imaginária, assim para analisarmos a frequência destas amplitudes usaremos o módulo quadrado destas amplitudes. Na figura (3.6) mostramos um corte da série temporal para o caso de uma condição inicial regular do corte mostrado na figura (3.2).

Através destas séries podemos observar um comportamento aparentemente periódico. Podemos ver também que cada amplitude é composta por duas frequências uma lenta e outra rápida, que estão relacionadas com as duas frequências do toro T^2 . Além disto, podemos concluir que estas frequências são na verdade quasi-periódicas devido ao fato desta condição inicial gerar um toro irracional que preenche uniformemente a curva representada no corte. Na figura (3.7) é mostrada uma análise de espectro de Fourier sobre a série temporal da amplitude da onda dois da figura (3.6).

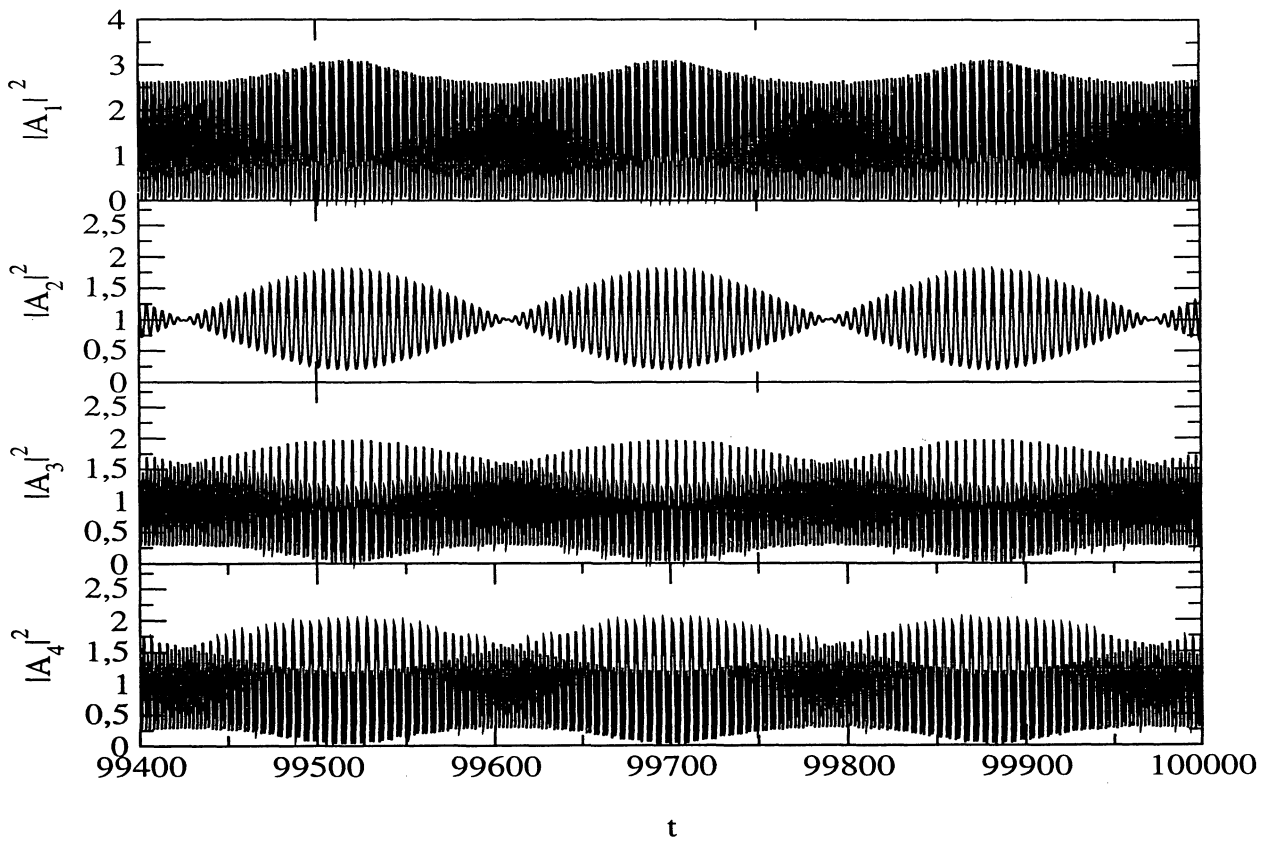


Figura 3.6: Série temporal de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$.

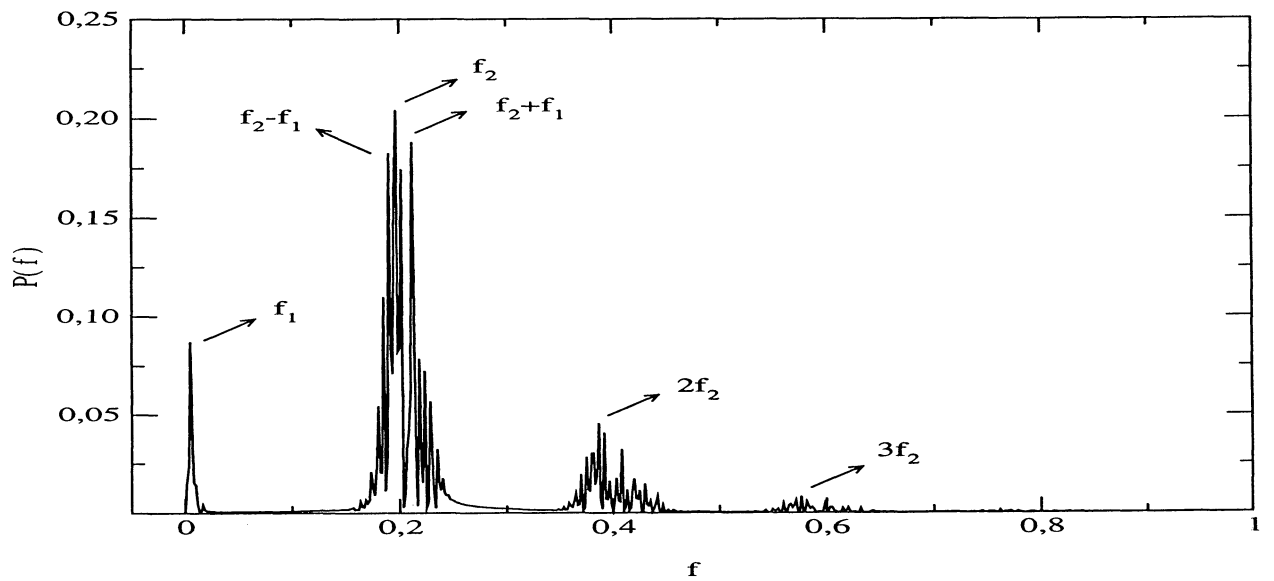


Figura 3.7: Espectro de potência de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$.

Na figura (3.7) mostramos uma análise de espectro de potência de Fourier que nos fornece as duas frequências que compoem a série temporal e as suas possíveis combinações lineares. As duas frequências são determinadas como sendo às com valores de frequência linearmente independentes e com os maiores picos de amplitude no espectro de potência. Na figura (3.7) apontamos as duas frequências que satisfazem estes requisitos e as suas combinações lineares, as duas frequências possuem um valor de: $f_1 \approx 0,005$ e $f_2 \approx 0,197$.

No gráfico da figura (3.8) é mostrado uma série temporal para um mesmo valor

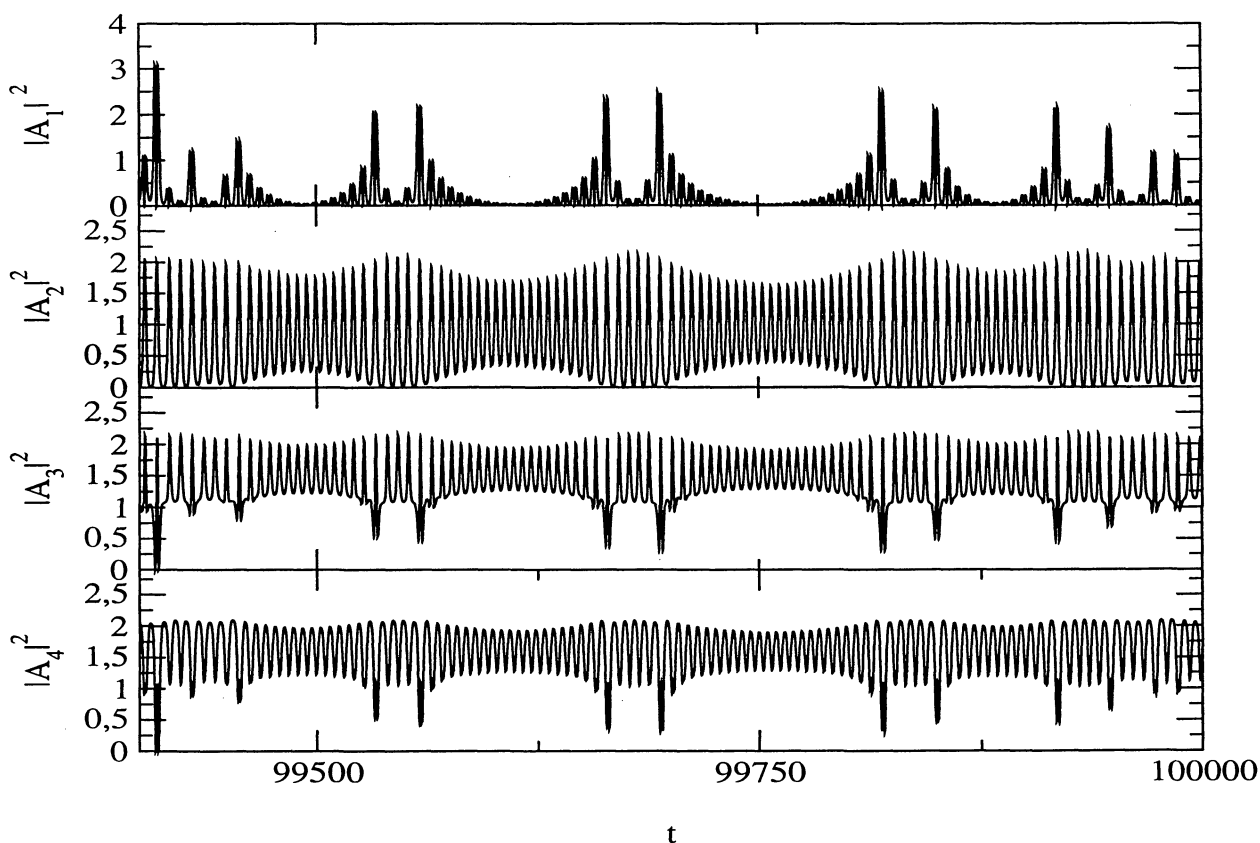


Figura 3.8: Série temporal de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,02$.

de frequência de descasamento do caso anterior ($\delta_- = 0,02$), só que agora é usada uma condição inicial em uma região caótica do corte. Podemos ver que as oscilações das amplitudes perderam o comportamento periódico presente no caso de uma condição inicial regular.

Realizando uma análise do espectro de potência de Fourier na série temporal da onda dois, mostrada na figura (3.8), podemos ver que os picos já não são tão bem definidos como no caso para uma condição inicial regular. O fato do espectro apresentar picos largos é devido a perda da periodicidade da série temporal.

Na figura (3.10) apresentamos uma série temporal de uma condição inicial de uma

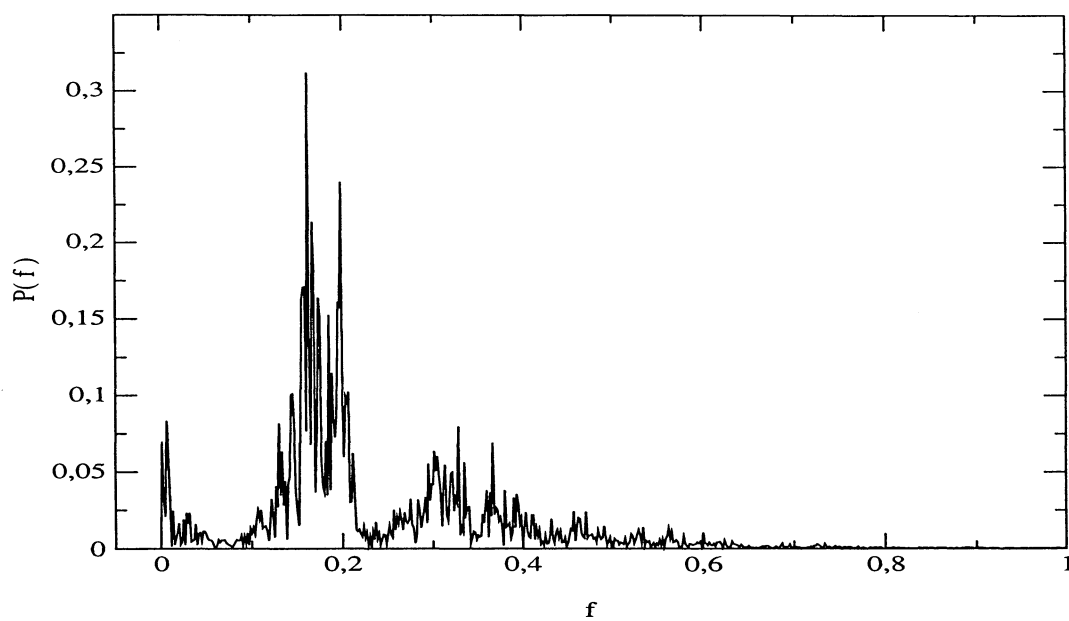


Figura 3.9: Espectro de potência de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_- = 0,02$.

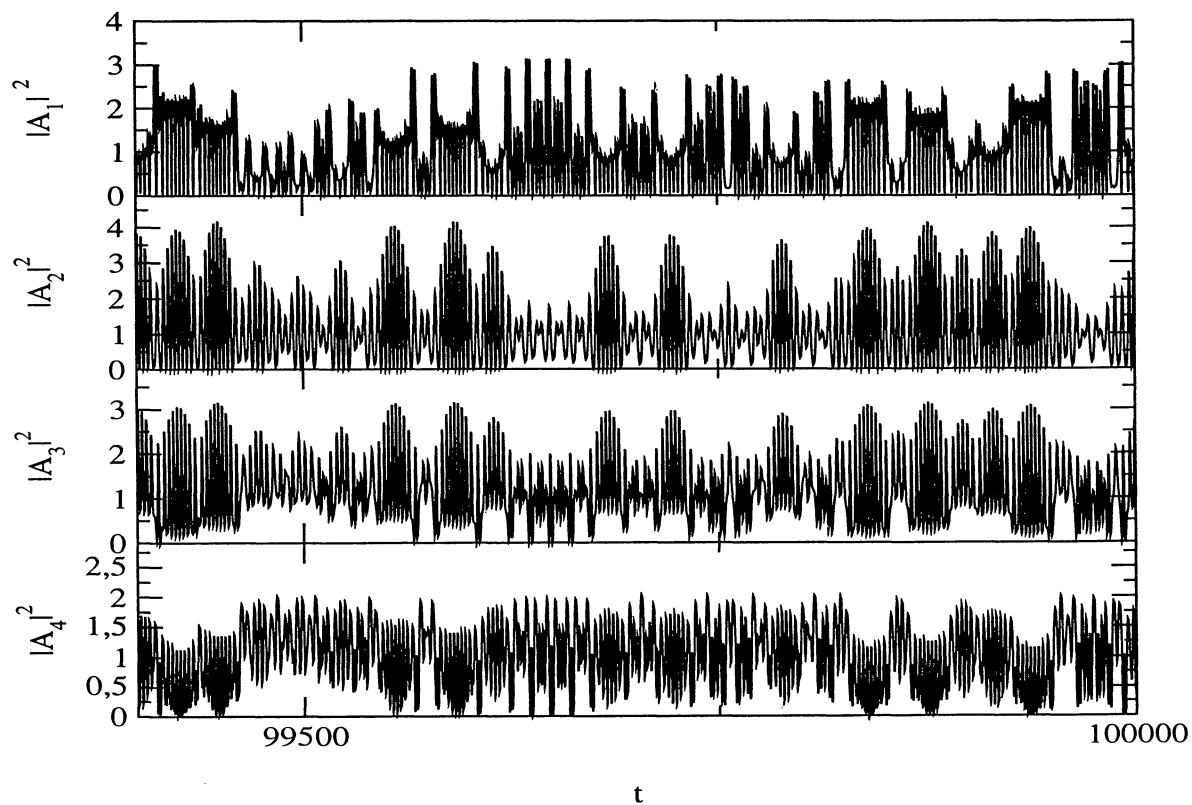


Figura 3.10: Série temporal de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,3$.

região caótica para o caso do corte apresentado na figura (3.5) (frequência de descasamento $\delta_- = 0,3$). Da série temporal podemos ver um padrão totalmente aperiódico das oscilações das amplitudes e a perda de sincronia entre as ondas 3 e 4, que corresponde no corte as regiões irregulares.

Fazendo a análise de espectro de potência da série temporal da onda dois, mostrado na figura (3.11), podemos ver que o seu comportamento aperiódico é caracterizado por um espectro com bandas largas e ruidosas, não havendo pico definido. Tal fato é um indicativo da presença de caos na série temporal que foi gerada.

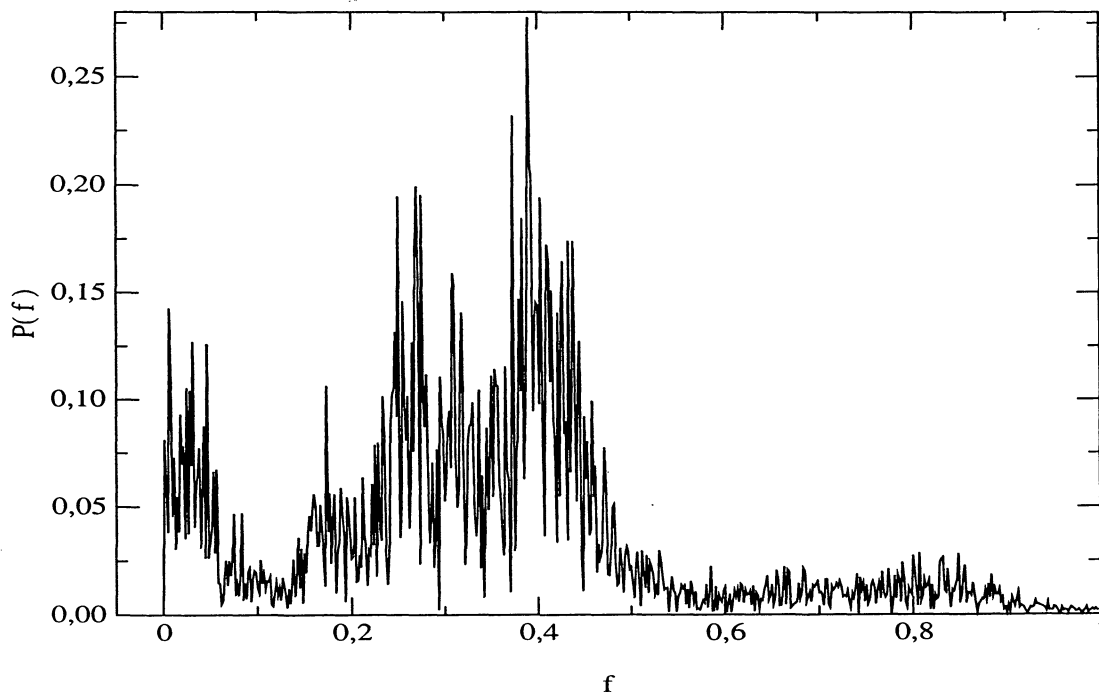


Figura 3.11: Espectro de potência de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_- = 0,3$.

3.1.3 Expoentes de Lyapunov

Nesta sub-seção aplicaremos os expoentes de Lyapunov como diagnóstico na identificação das soluções regulares e caóticas mostrados nas sub-seções anteriores. Na prática o cálculo do valor do expoente de Lyapunov para um tempo infinito é impossível. Ao invés disso, tomaremos o expoente de Lyapunov como sendo o valor assintótico para um tempo suficientemente grande, tal que o seu valor não oscile.

Na figura (3.12) é mostrado seis valores de expoentes de Lyapunov contra o tempo,

o valor seis é devido ao conjunto de oito equações diferenciais que regem o modelo de quatro ondas são transformadas, ficam reduzidas a um conjunto de seis equações diferenciais (2.66-2.71), assim o fluxo se restringe a seis direções possíveis de expansão e contração. A condição inicial escolhida para o cálculo do expoente de Lyapunov é a mesma da região regular usada na série da figura (3.6), que por sua vez foi retirada do corte mostrado na figura (3.2). Podemos ver no gráfico da figura (3.12) que todos os valores do expoente de Lyapunov convergem para zero, ou seja nas regiões regulares não há presença de caos.

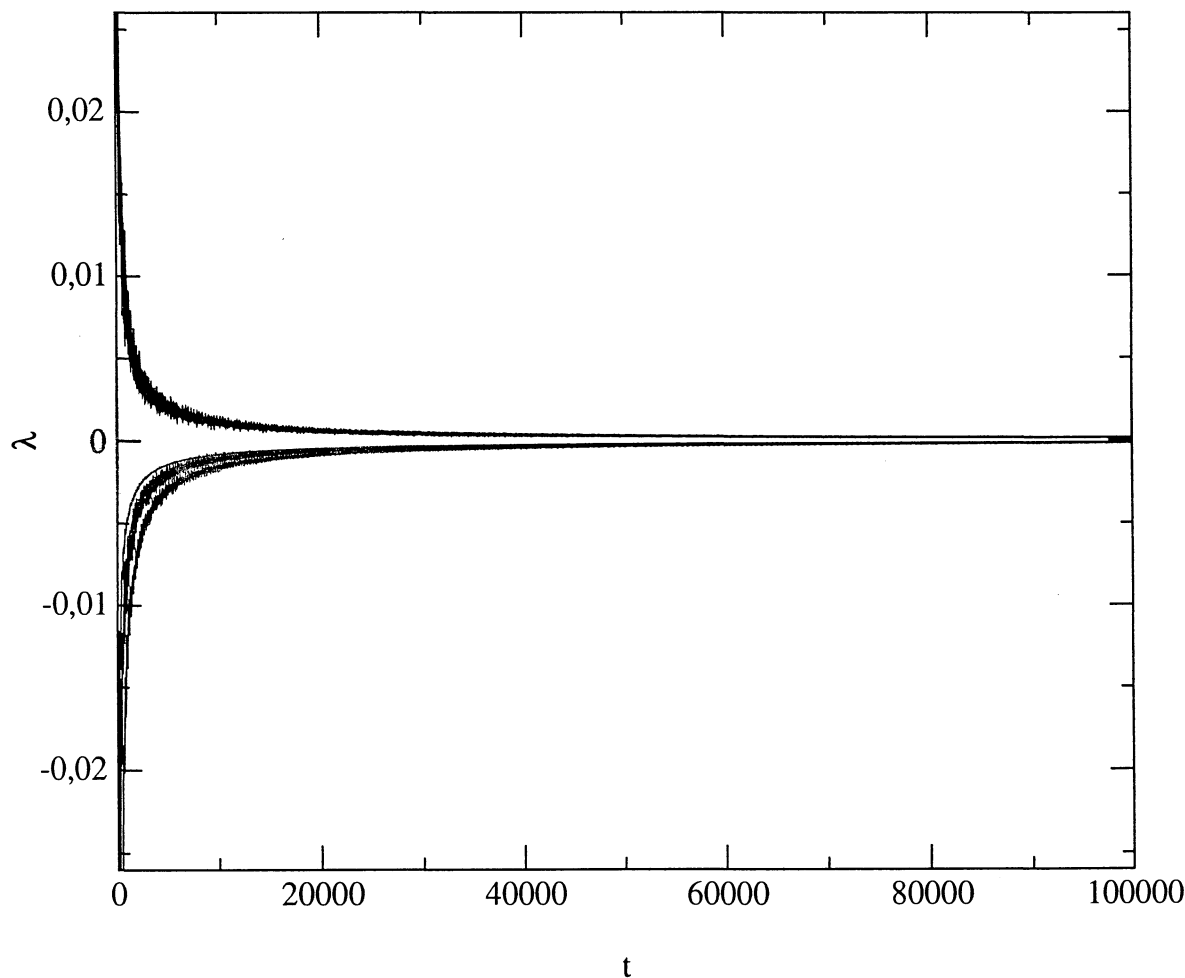


Figura 3.12: Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial regular para $\delta_- = 0,02$.

No gráfico da figura (3.13) mostramos o expoente de Lyapunov para a condição inicial irregular usada na série mostrada na figura (3.8). Para este caso podemos ver que um dos expoentes converge para um valor positivo, quatro para zero e um para um valor negativo. Três valores nulos do expoente de Lyapunov são devidos as duas constantes de Manley-Rowe mais a Hamiltoniana, que reduzem o espaço de seis dimensões para uma superfície de energia com três dimensões. O quarto expoente nulo é devido o cálculo do

expoente na direção tangente do fluxo [26]. O expoente positivo caracteriza a irregularidade da condição inicial e conseqüentemente a presença de caos, isto explica falta de peridodicidade apresentada na série temporal mostrada na figura (3.8). Podemos ver da figura (3.13), que o expoente positivo e negativo são simétricos. Isto é devido a propriedade dos sistemas conservativos conservarem o seu volume, implicando que a soma dos expoentes deve ser nula.

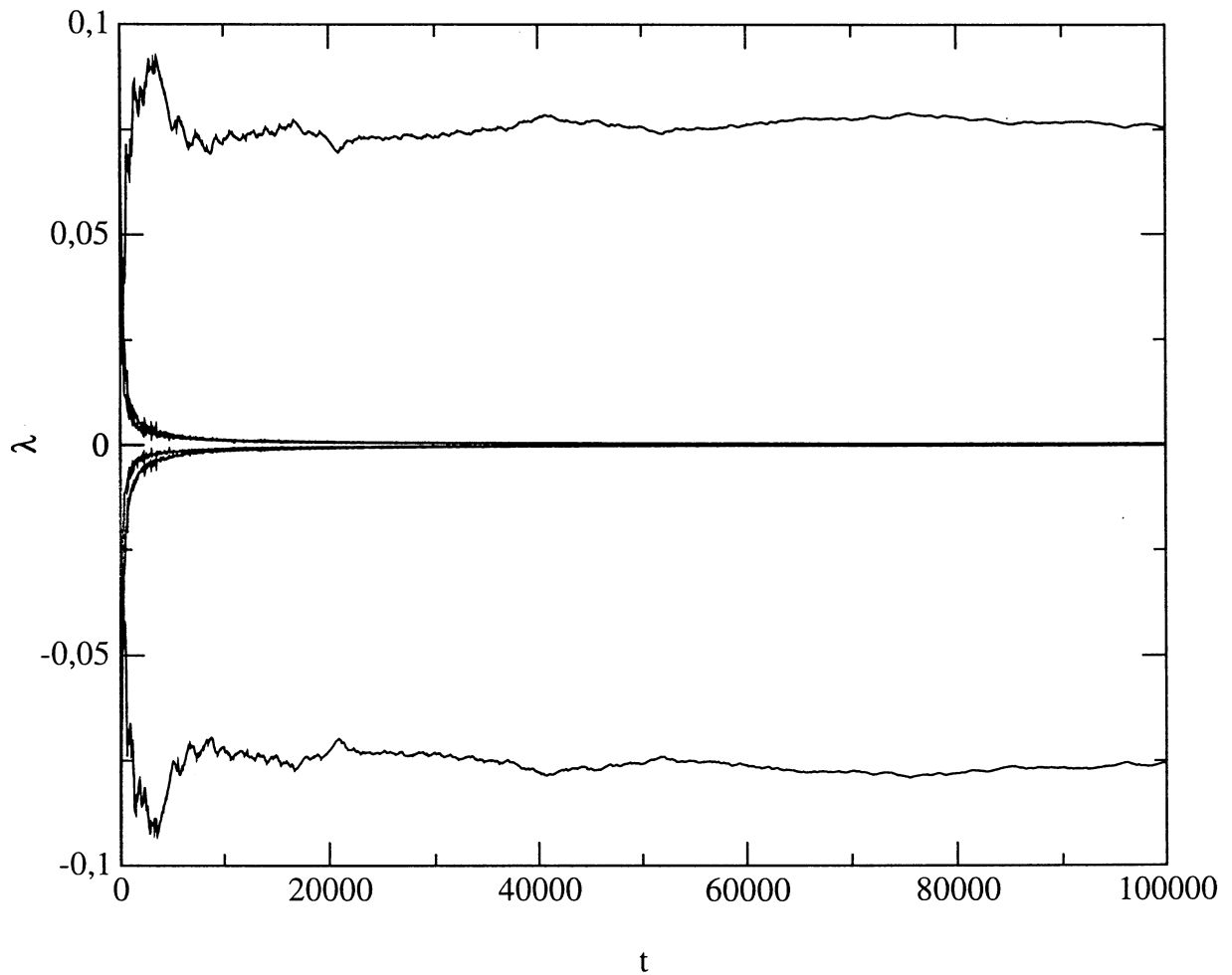


Figura 3.13: Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial irregular para $\delta_- = 0,02$.

Na figura (3.14) é mostrado o expoente de Lyapunov para condição inicial irregular que foi utilizada na série mostrada na figura (3.10). Podemos ver a presença do expoente positivo como no caso anterior, porém o sistema com uma frequência de descasamento maior apresenta um valor de expoente maior. O fato do expoente ser maior esta relacionado com a região caótica para $\delta_- = 0,3$ mostrado no corte da figura (3.5) ser maior que a região caótica para $\delta_- = 0,02$ mostrado no corte da figura (3.2).

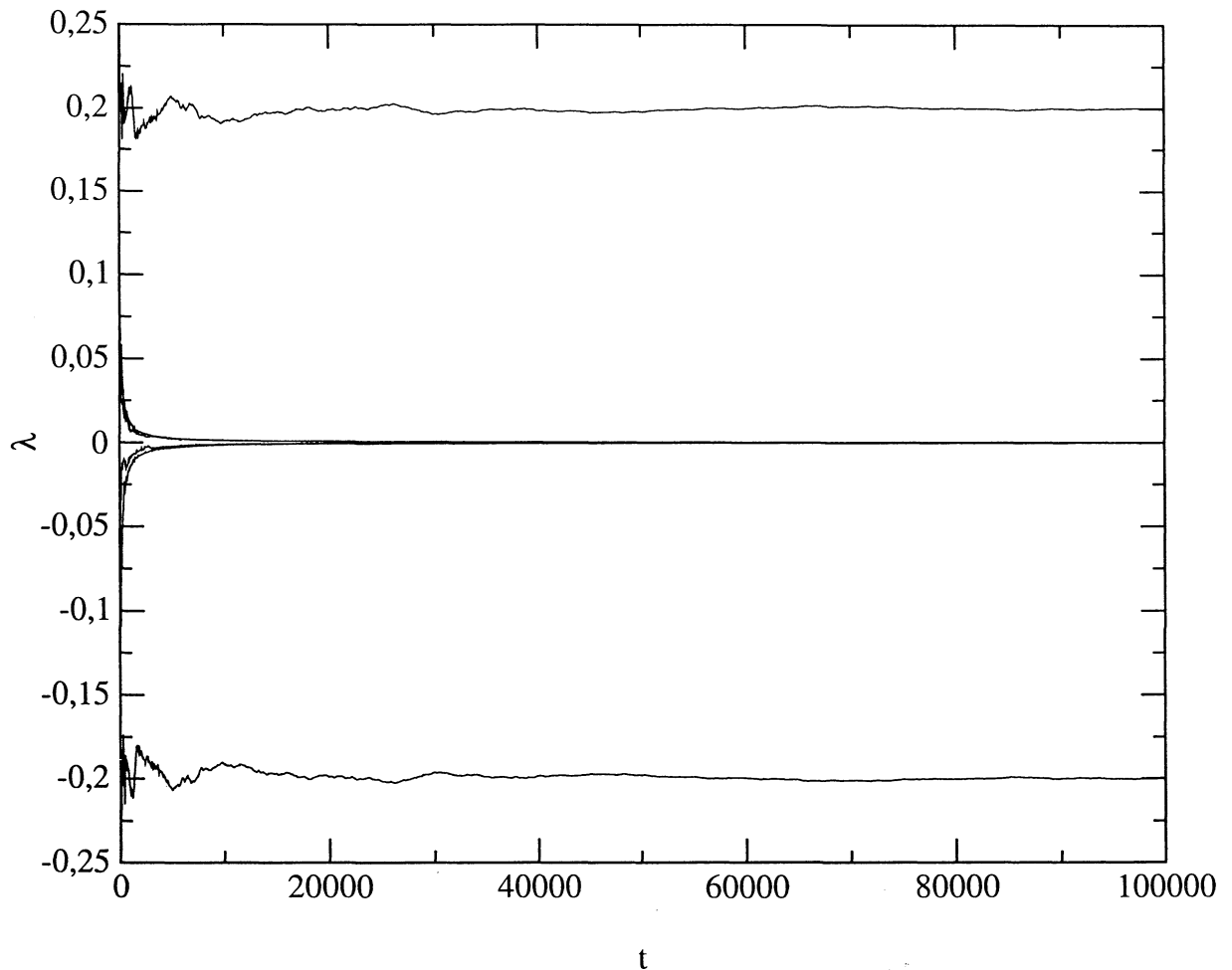


Figura 3.14: Expoentes de Lyapunov para uma condição inicial irregular para $\delta_- = 0,3$.

No gráfico da figura (3.15) mostramos o valor do maior expoente de Lyapunov para $t = 100000$, versus a frequência de descasamento para três condições iniciais distintas. As condições iniciais usadas são escolhidas através do parâmetro η que foi definido nas equações (2.75). Na figura (3.16) mostramos os cortes para as três condições iniciais, sendo a condição inicial $\eta = 0,13$ (pontos pretos) a mais afastada da separatriz, a com $\eta = 0,15$ (pontos verdes) a mais próxima e $\eta = 0,14$ (pontos vermelhos) sendo intermediária entre as duas. Podemos ver que para valores pequenos de frequência de descasamento mostrados na figura (3.16.a) todas condições iniciais apresentam comportamento regular que corresponde a valores nulos do maior expoente de Lyapunov mostrado na figura (3.15). Para frequência de descasamento $\delta_- = 0,03$ a condição inicial mais próxima da separatriz ($\eta = 0,15$) deixa de ser regular e passa a ter um valor do maior expoente de Lyapunov maior que zero. Para $\delta_- = 0,05$ somente a condição inicial mais afastada da separatriz ($\eta = 0,13$) continua regular com o maior expoente de Lyapunov nulo. Quando a frequência de descasamento é aumentada para $\delta_- = 0,07$ todas condições ini-

cias apresentam comportamento irregular correspondendo todas a um valor positivo do maior expoente de Lyapunov.

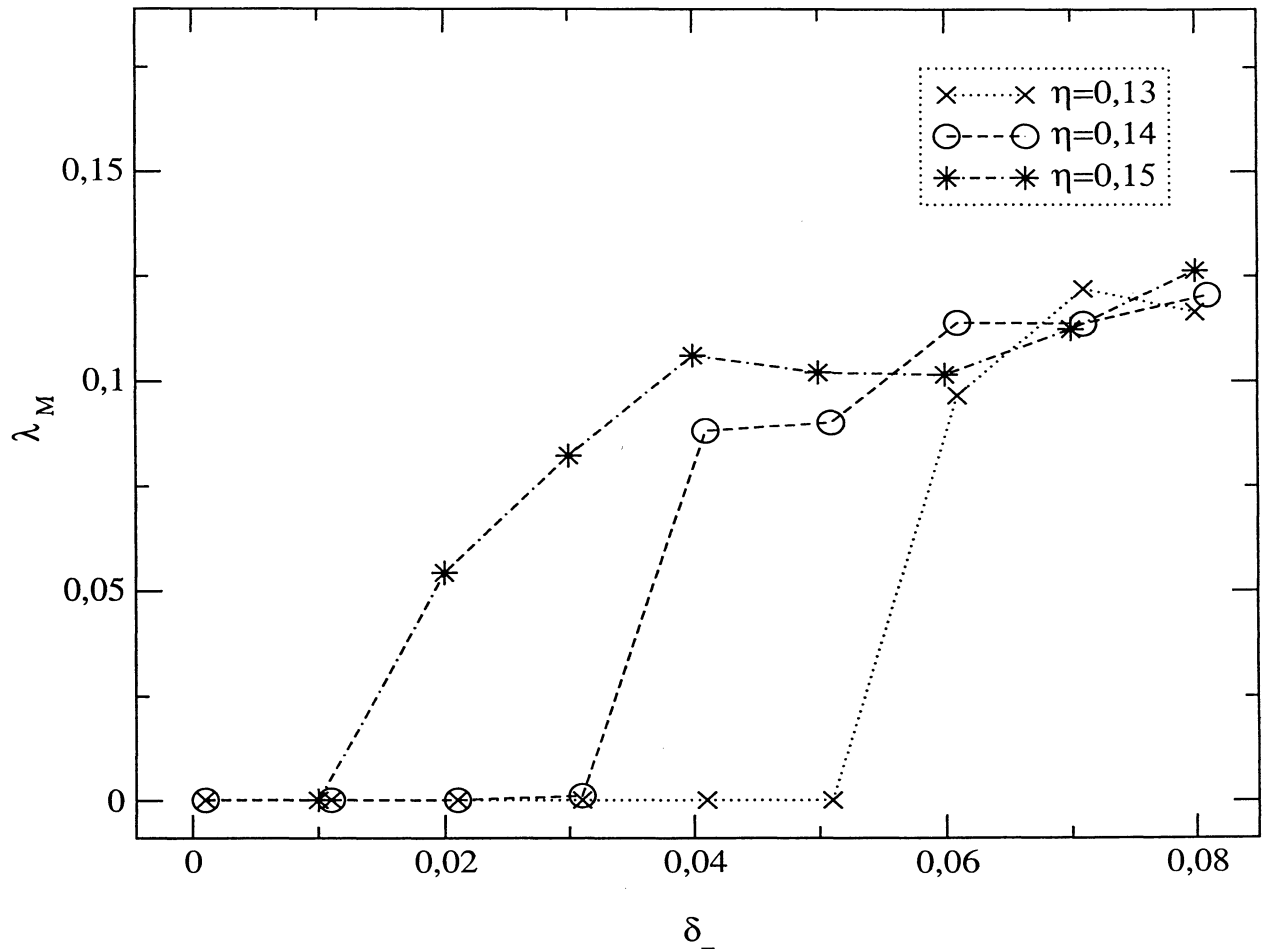


Figura 3.15: Maior expoente de Lyapunov versus frequência de descasamento.

Na figura (3.17) é fixado o valor de frequência de descasamento $\delta = 0,05$ e é mostrado um gráfico do maior expoente de Lyapunov para $T = 100000$ para diversas condições iniciais controlados pelo parâmetro η que foi definido na equação (2.75). Para valores pequenos de η o expoente de Lyapunov é nulo que corresponde as curvas nos cantos inferiores do corte, mostrados na figura (3.3). Para valores intermediários de η os expoentes são positivos que são as condições iniciais contidas na região caótica. Valores grandes de η o expoente volta a ser nulo que corresponde as curvas nos cantos superiores do corte.

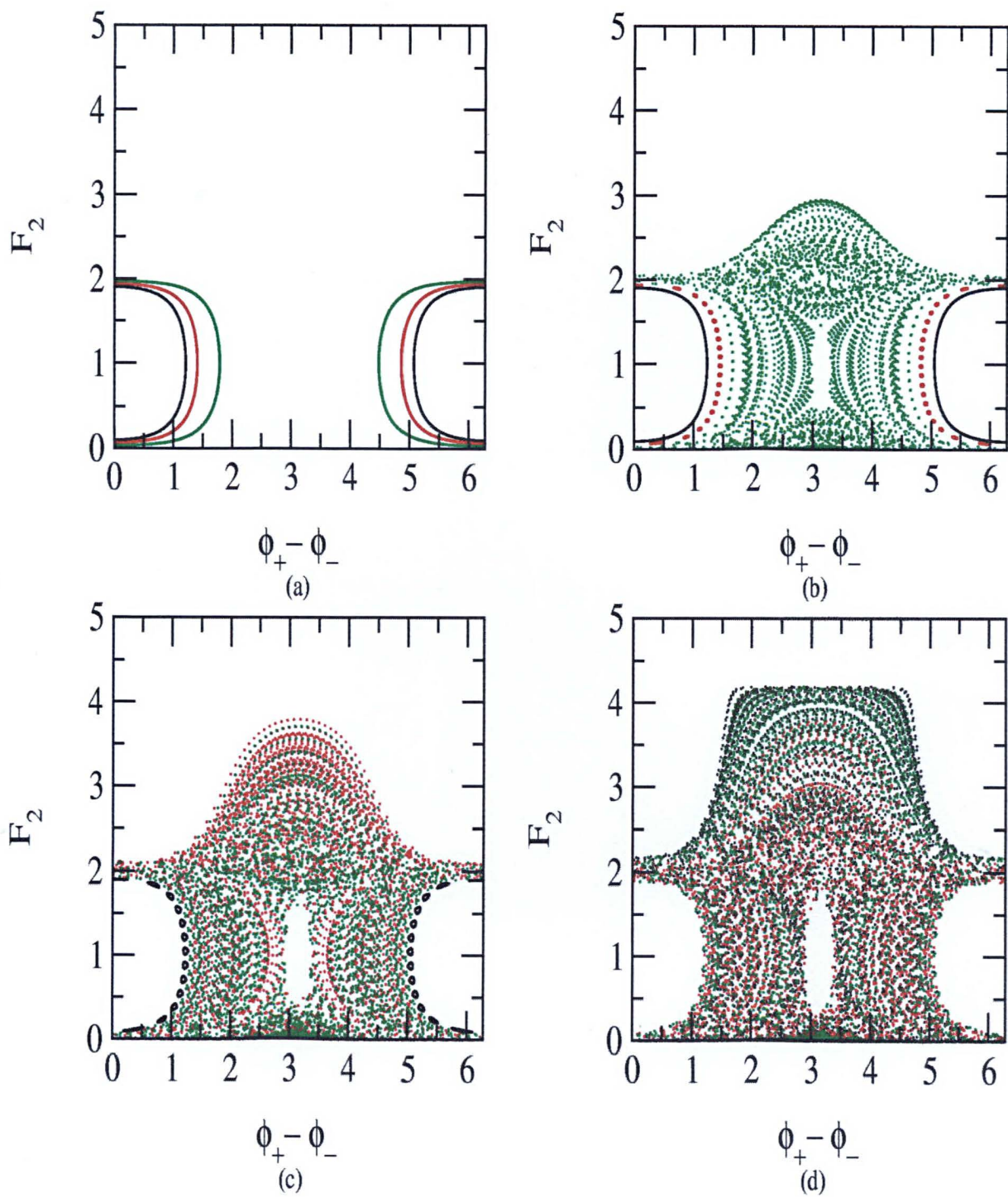


Figura 3.16: Cortes de Poincaré para $\eta = 0,13$ (pontos pretos), $\eta = 0,14$ (pontos vermelhos) e $\eta = 0,15$ (pontos verdes) (a) $\delta_- = 0,01$ (b) $\delta_- = 0,03$ (c) $\delta_- = 0,05$ (d) $\delta_- = 0,07$

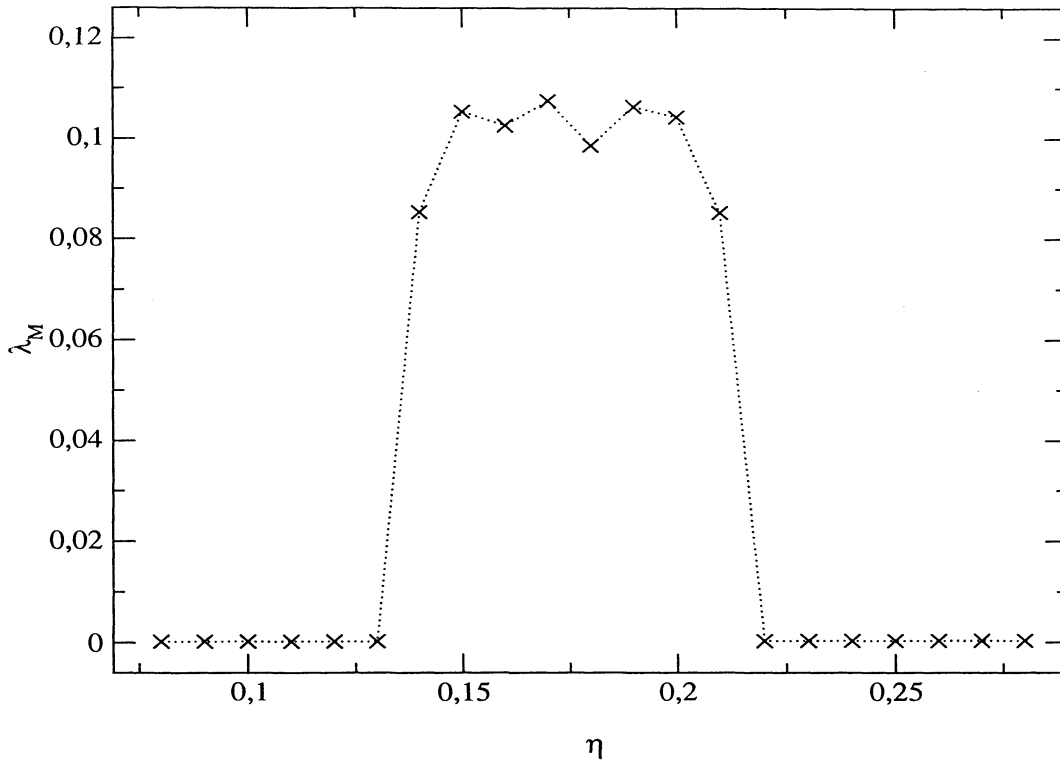


Figura 3.17: Maior expoente de Lyapunov para diversas condições iniciais para frequência de descasamento $\delta_- = 0,05$.

3.2 Frequência de descasamento não constante

Nesta seção trataremos o caso em que a frequência de descasamento possui uma dependência temporal e o sistema de equações diferenciais passa a ser não-autônomo. Assim temos que a interação passa a ser um sistema com 2 graus de liberdade para o caso de frequência de descasamento constante, mais $\frac{1}{2}$ grau de liberdade correspondente ao acréscimo da dependência temporal na frequência de descasamento. Suporemos a dependência temporal da frequência de descasamento com a seguinte forma:

$$\delta'_-(t) = \delta_-(1 + \gamma \text{sen}(\omega t)), \quad (3.2)$$

onde γ é o termo da amplitude e ω é a frequência da oscilação. Uma consequência disto é o aparecimento da chamada difusão de Arnold, que é devido aos toros KAM não atuarem mais como barreiras de regiões irregulares para sistemas com mais de dois graus de liberdade. Para identificarmos o aparecimento de difusão usaremos novamente o uso dos cortes de Poincaré utilizados na seção anterior. Inicialmente, tomaremos uma condição inicial regular para o caso de frequência de descasamento constante ($\gamma = 0$), em seguida usaremos a mesma condição inicial e parâmetros, mas com acréscimo de uma pequena oscilação na frequência de descasamento representado na figura (3.18).

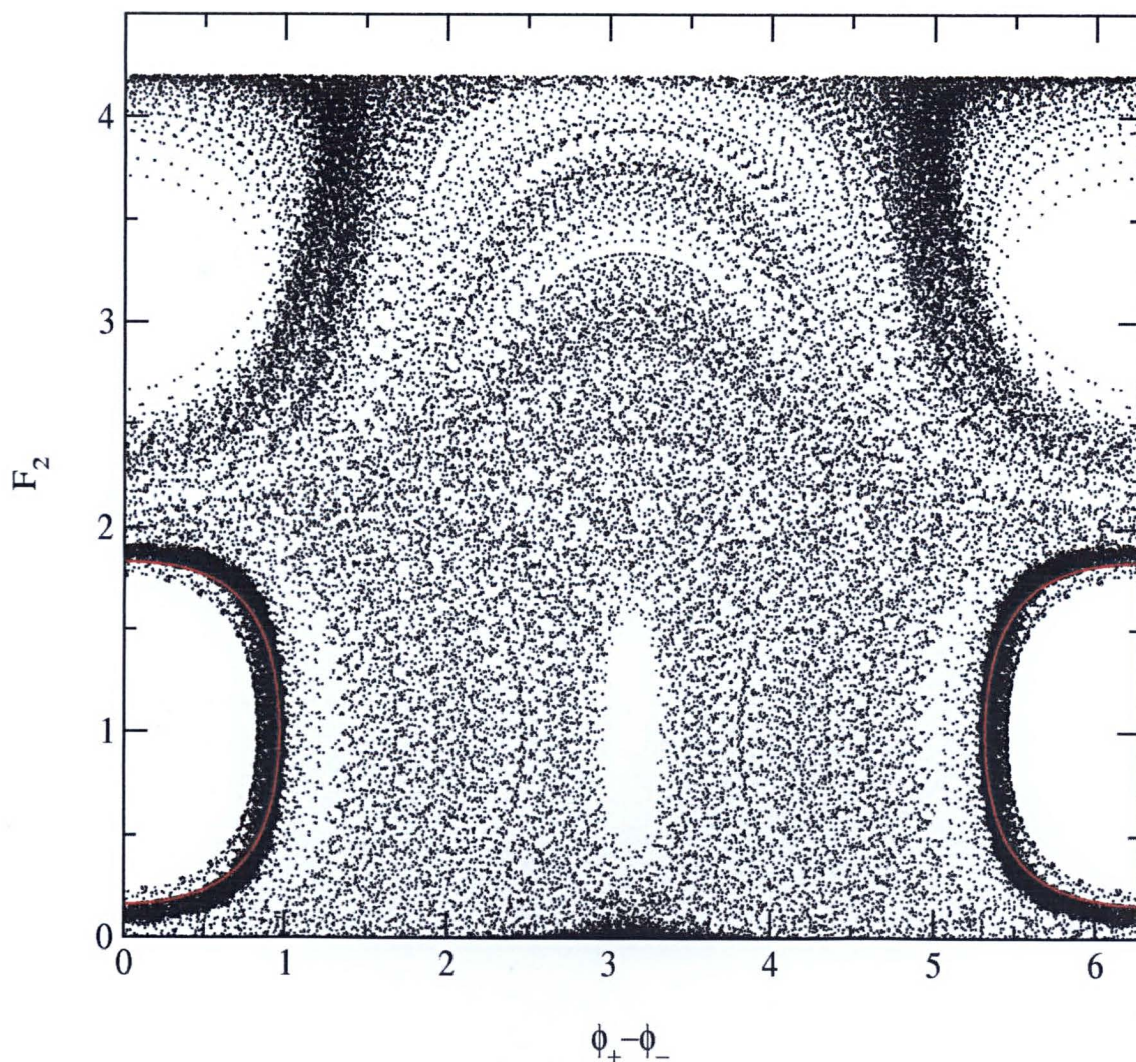


Figura 3.18: Surgimento de difusão de Arnold no corte de Poincaré: pontos vermelhos representam o caso $\gamma = 0$, pontos pretos caso para $\gamma = 0,004$, $\omega = 2,85$ e $\delta_- = 0,05$.

Podemos ver deste gráfico que uma condição inicial regular para o caso de frequência de descasamento constante, não fica mais restringida a uma curva para o caso em que a frequência de descasamento oscila periodicamente. Além disto, temos no corte uma região mais densamente preenchida próxima a condição inicial, devido ao acréscimo de meio grau de liberdade faz que os toros regulares passem a atuar como barreiras parciais das trajetórias.

3.2.1 Amplitude do termo oscilatório

Através do corte de Poincaré observa-se que quando acrescentamos uma dependência temporal no descasamento, aparece um comportamento difusivo. O objetivo desta seção é medir quanto tempo demora para as trajetórias abandonarem os toros e começarem a se difundir no corte, chamaremos este tempo de “tempo de escape” (T_E). Além do tempo de escape, analisaremos como a amplitude de forçamento γ interfere no aparecimento de difusão. Para sabermos em qual instante ocorreu a difusão usaremos o seguinte critério: definiremos uma fronteira em volta do toro inicialmente não perturbado ($\gamma = 0$), e usaremos o valor de tempo de escape, como sendo o tempo em que o toro perturbado ($\gamma \neq 0$) demorou para atravessar esta fronteira. A fronteira estipulada está mostrada na figura (3.20).

No gráfico mostrado na figura (3.19) temos o tempo de escape versus a amplitude

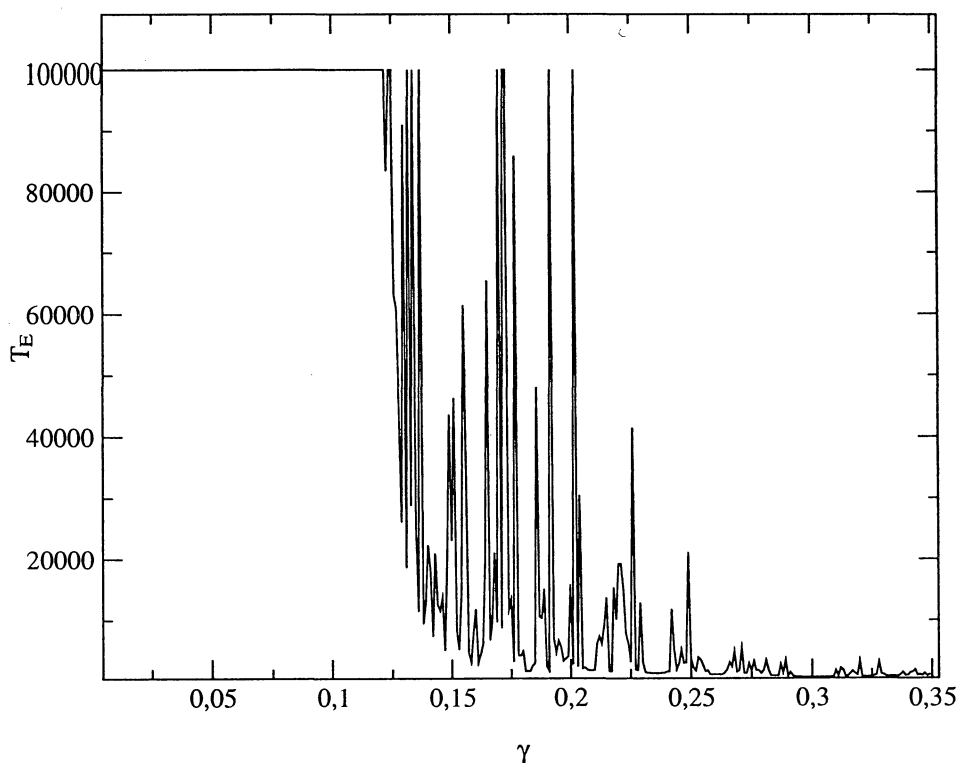


Figura 3.19: Tempo de escape para diferentes valores de γ , $\omega = 1,34$ e $\delta_- = 0,05$.

da oscilação para uma condição inicial. Para pequenos valores de γ o tempo de escape satura para $T = 100000$, que foi o tempo limite estipulado computacionalmente. Ou seja, para pequenos valores de γ o sistema recai para o caso de frequência de descasamento constante onde não há difusão e o tempo de escape tende a infinito. Já para grandes valores de γ produzem grandes oscilações na frequência de descasamento, provocando um surgimento de difusão que faz o tempo de escape decair para pequenos valores. Porém,

a região intermediária de γ onde ocorre a transição entre o rápido e lento a variação do tempo de escape é bastante irregular.

Para contornar este problema ao invés de utilizarmos uma única condição inicial, fixaremos o valor de γ e ω , e analisaremos os tempos de escape para 1500 diferentes condições iniciais no interior de uma mesma fronteira. Na figura (3.20) mostramos no corte a região onde foram tomadas as condições iniciais entre $\eta = 0,085$ (curva mais interna) até $\eta = 0,100$ (curva mais externa), e a fronteira (linha pontilhada) para o caso de frequência de descasamento constante.

Nas figuras (3.21), (3.23), (3.25) e (3.27) mostramos os valores do tempo de escape

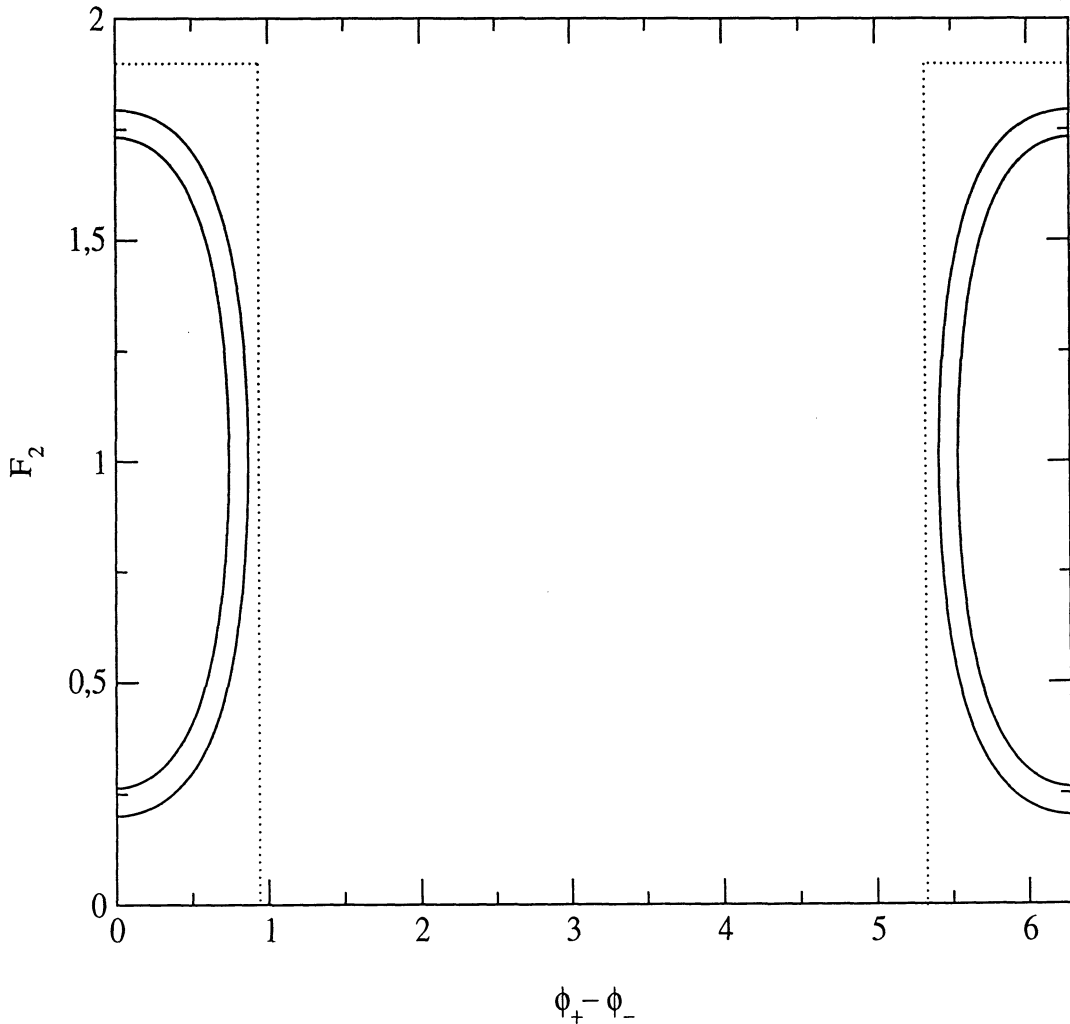


Figura 3.20: Representação no corte das condições iniciais e da fronteira na análise do tempo de escape.

das 1500 condições iniciais para quatro valores distintos de γ , e nas figuras (3.22), (3.24), (3.26) e (3.28) mostramos os seus respectivos histogramas das condições iniciais que cruzam a fronteira.

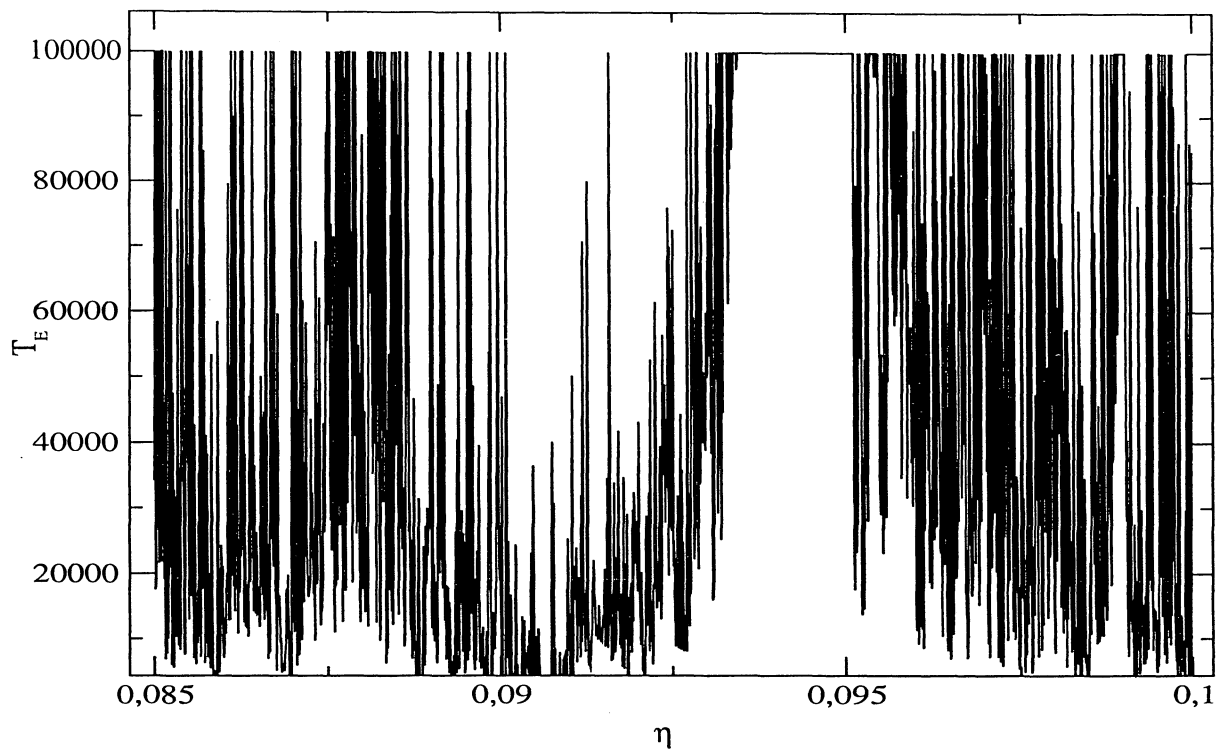


Figura 3.21: Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,155$ e $\omega = 1,34$.

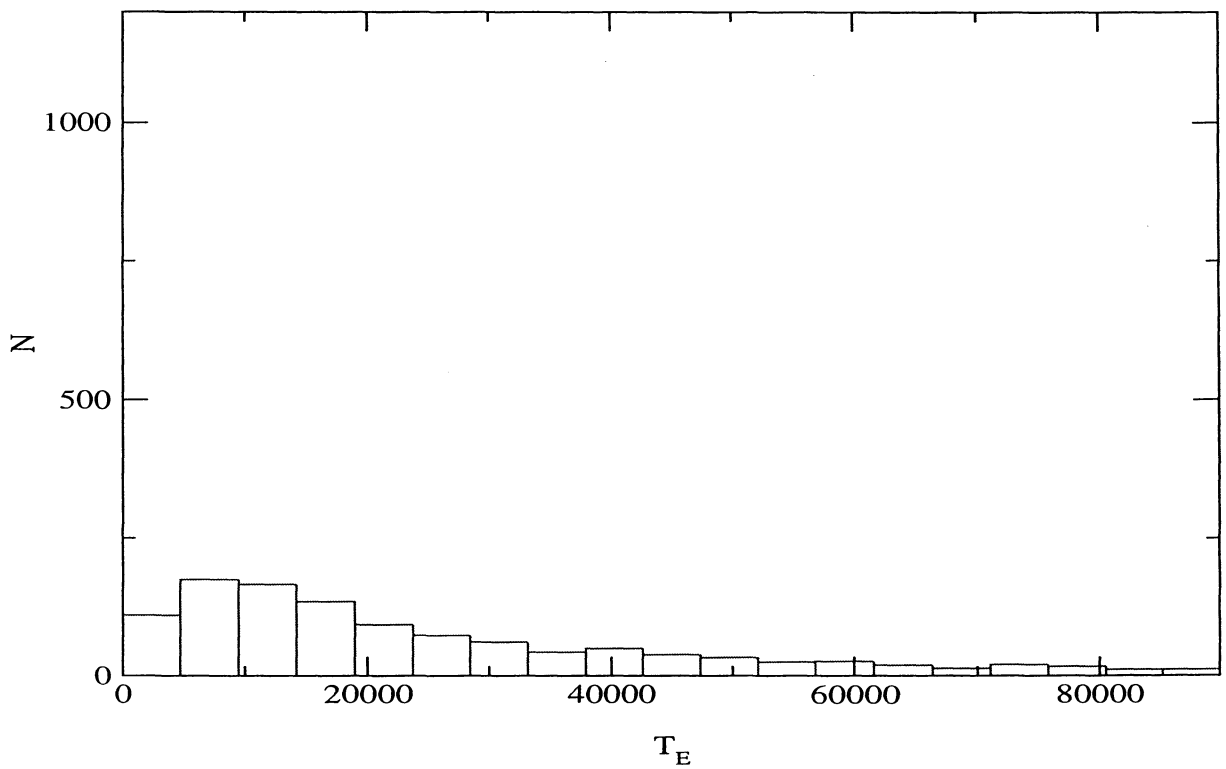


Figura 3.22: Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,155$ e $\omega = 1,34$.

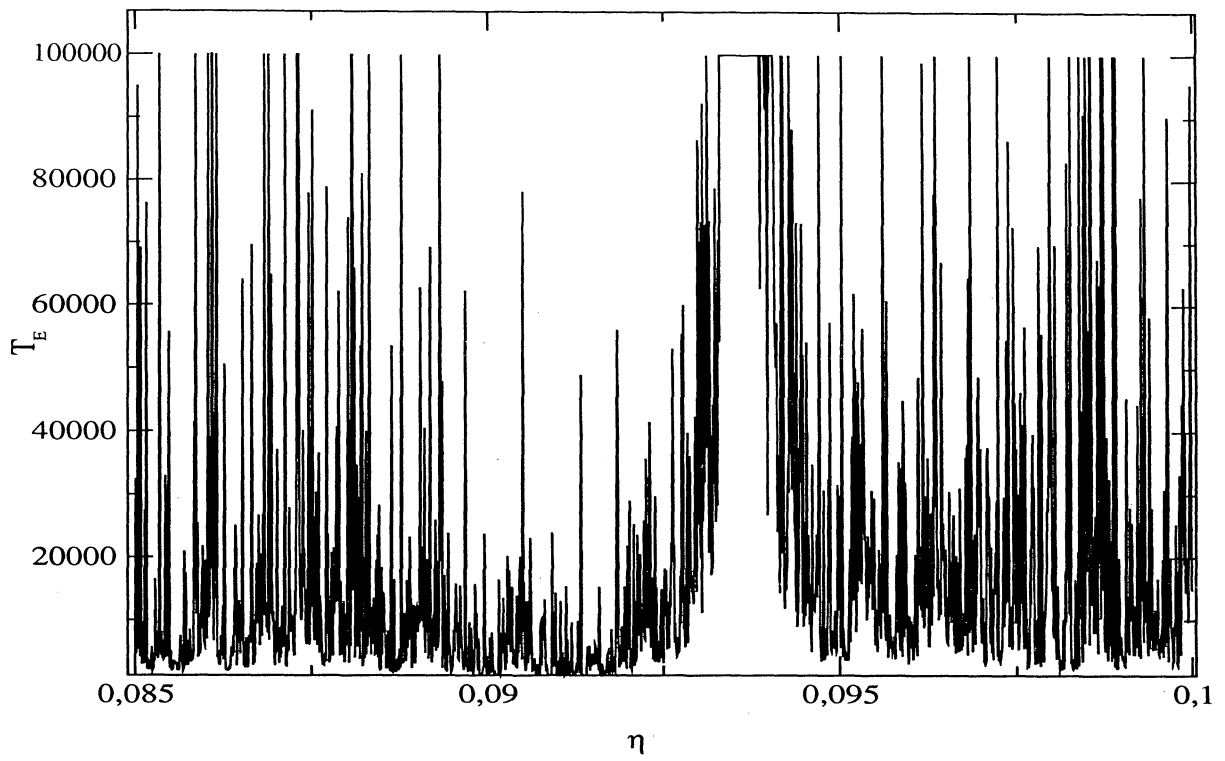


Figura 3.23: Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,170$ e $\omega = 1,34$.

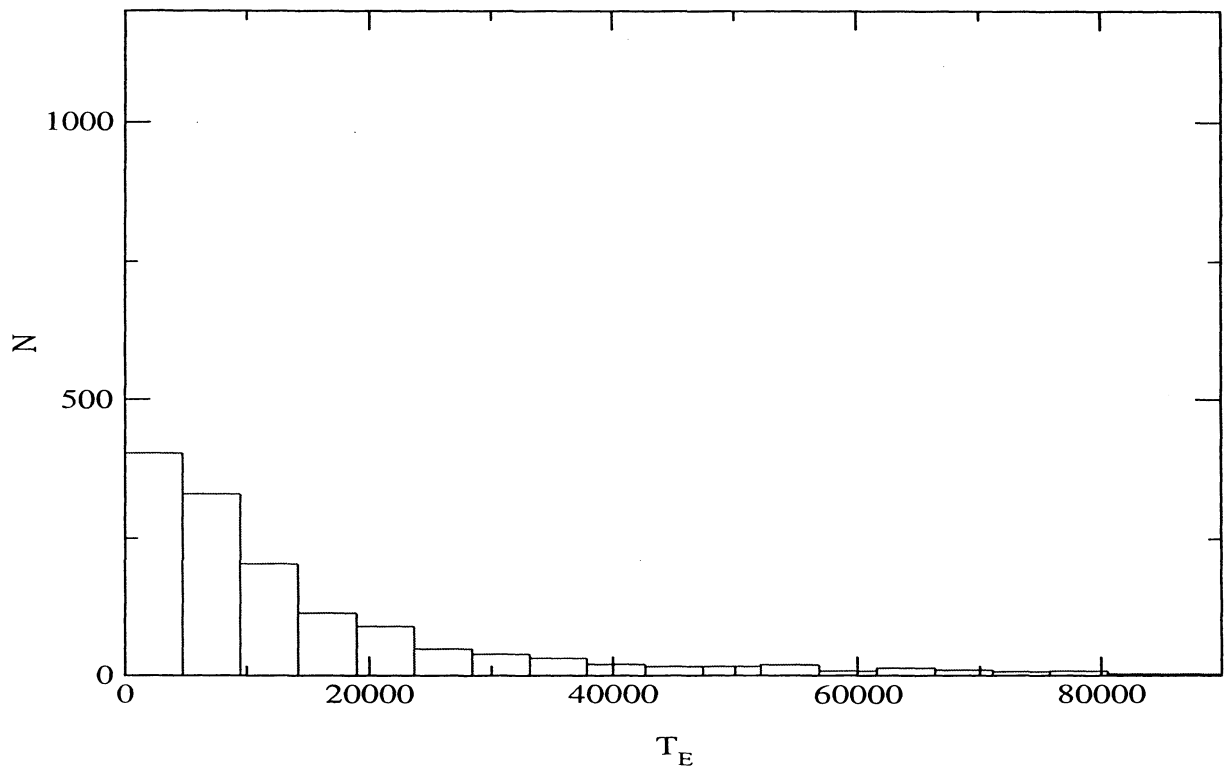


Figura 3.24: Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,170$ e $\omega = 1,34$.

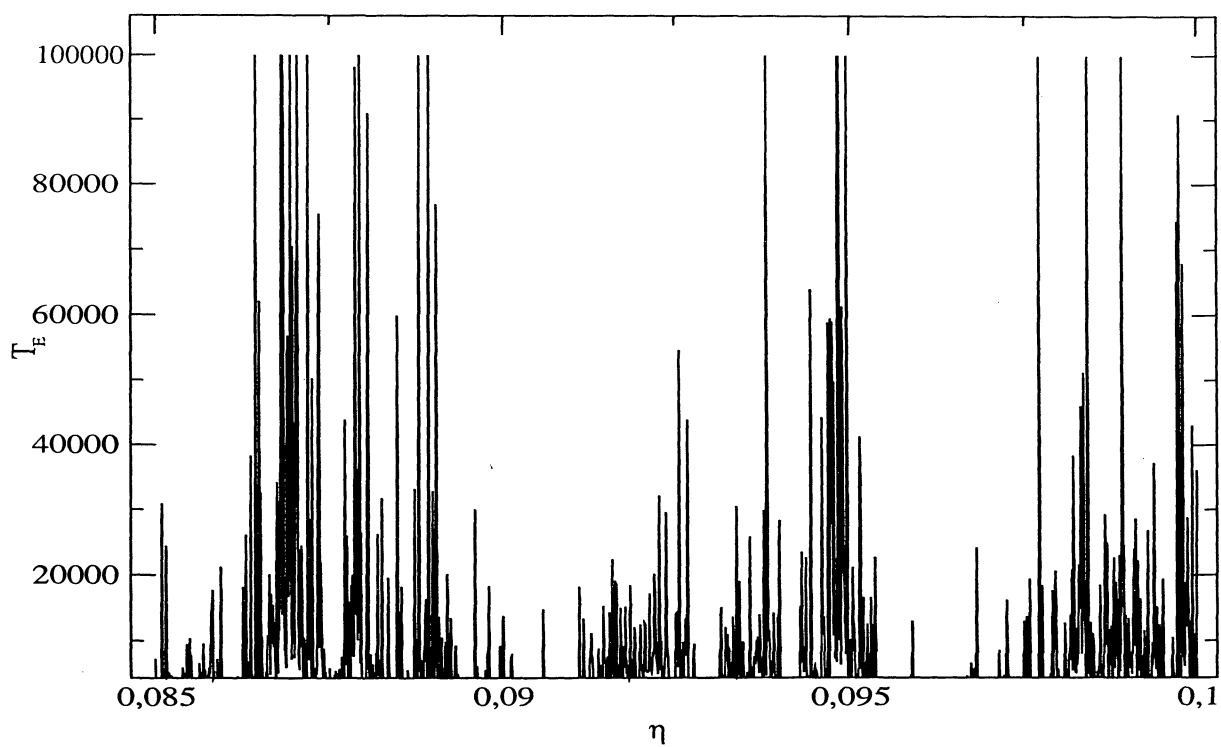


Figura 3.25: Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,186$ e $\omega = 1,34$.

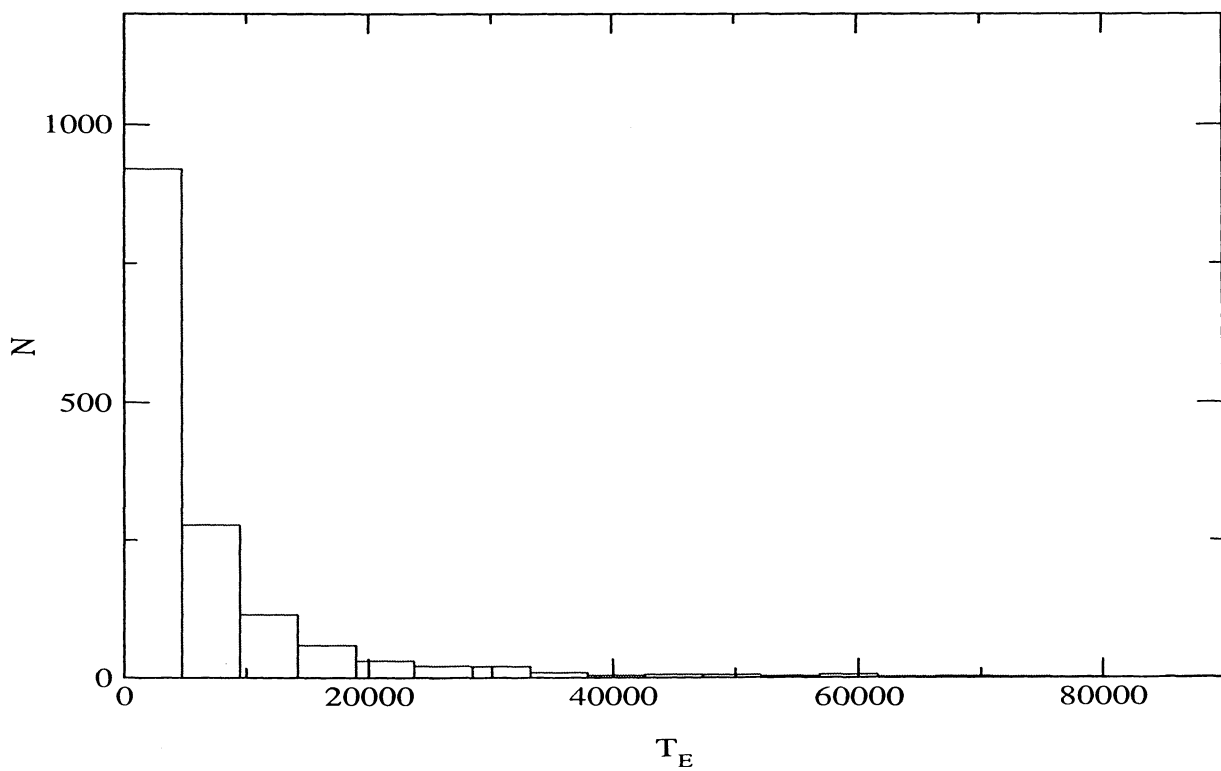


Figura 3.26: Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,186$ e $\omega = 1,34$.

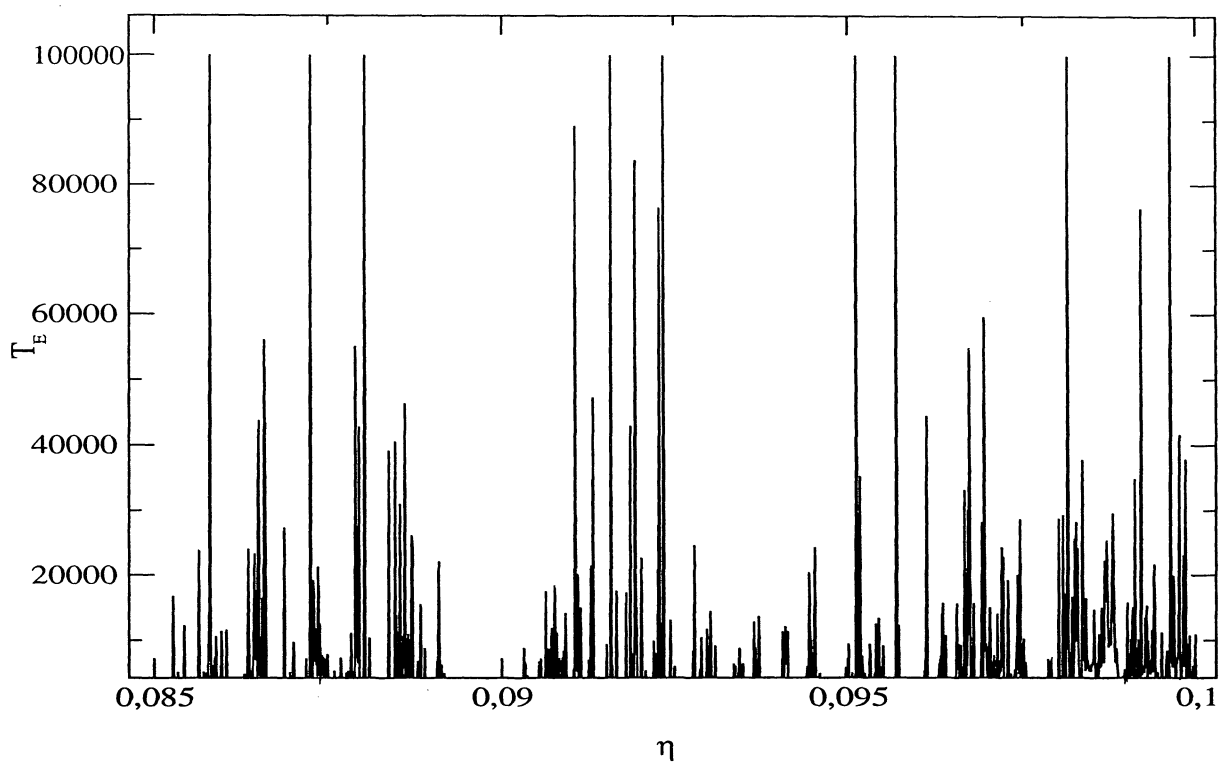


Figura 3.27: Valores de tempo de escape para $\gamma = 0,200$ e $\omega = 1,34$.

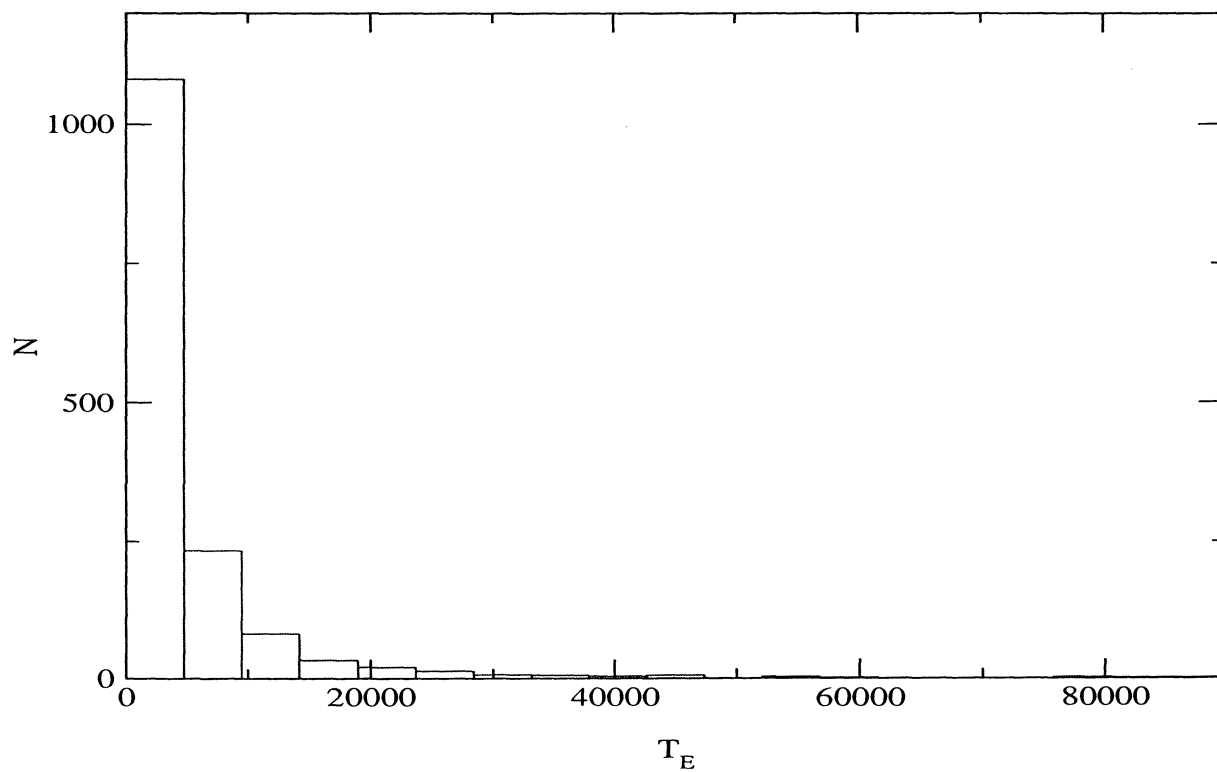


Figura 3.28: Histograma das condições iniciais para $\gamma = 0,200$ e $\omega = 1,34$.

Podemos ver que os gráficos do tempo de escape versus condição inicial apresentam um comportamento bastante irregular, tendo condições iniciais próximas com grandes diferenças nos seus valores de tempo de escape. Entretanto, podemos ver nos histogramas que as distribuições do tempo de escape apresentam um comportamento interessante, que para pequenos valores de γ a distribuição possui uma maior probabilidade de longos tempos de escape com relação a um grande valor de γ . Por sua vez, para um grande valor de γ a distribuição possui uma maior probabilidade para pequenos valores de tempo de escape.

Na figura (3.29) mostramos as distribuições para diferentes valores de γ num gráfico log-log. Podemos ver um comportamento linear das distribuições, com exceção para valores grandes de tempo de escape que devido a limitação de condições iniciais torna a estatística pobre. Temos que para maiores valores de γ a distribuição corresponde a uma maior inclinação, devido a maior probabilidade da trajetória atravessar a fronteira e iniciar um comportamento difusivo sobre o corte.

Na figura (3.30) é mostrado um gráfico log-log dos valores de γ versus a média

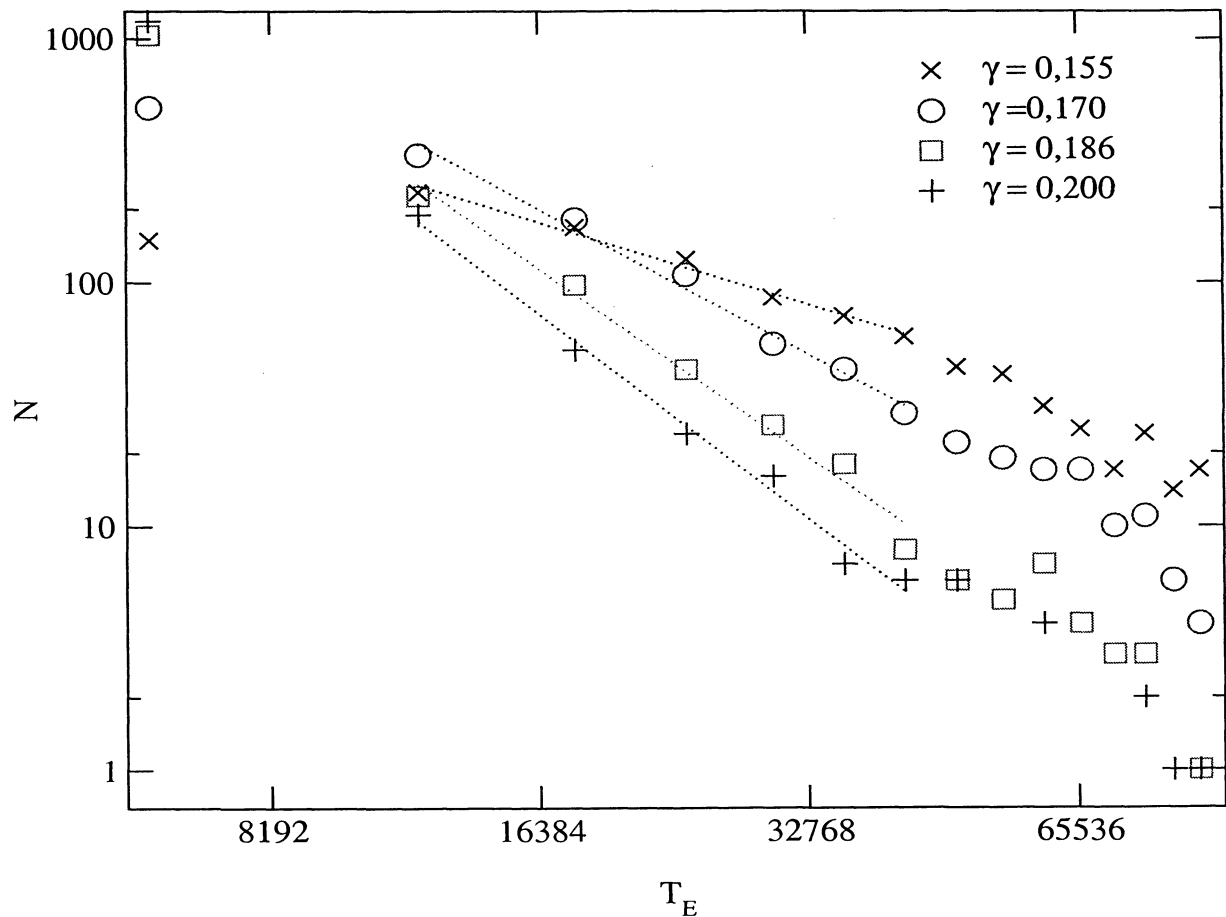


Figura 3.29: Gráfico log-log das distribuições para valores distintos de γ .

do tempo de escape para 1500 condições iniciais. Através deste gráfico é realizado uma regressão de lei de potência (linha pontilhada), podemos ver uma boa acordância entre os dados obtidos e a regressão.

Assim podemos concluir que a média do tempo de escape obedece com a amplitude

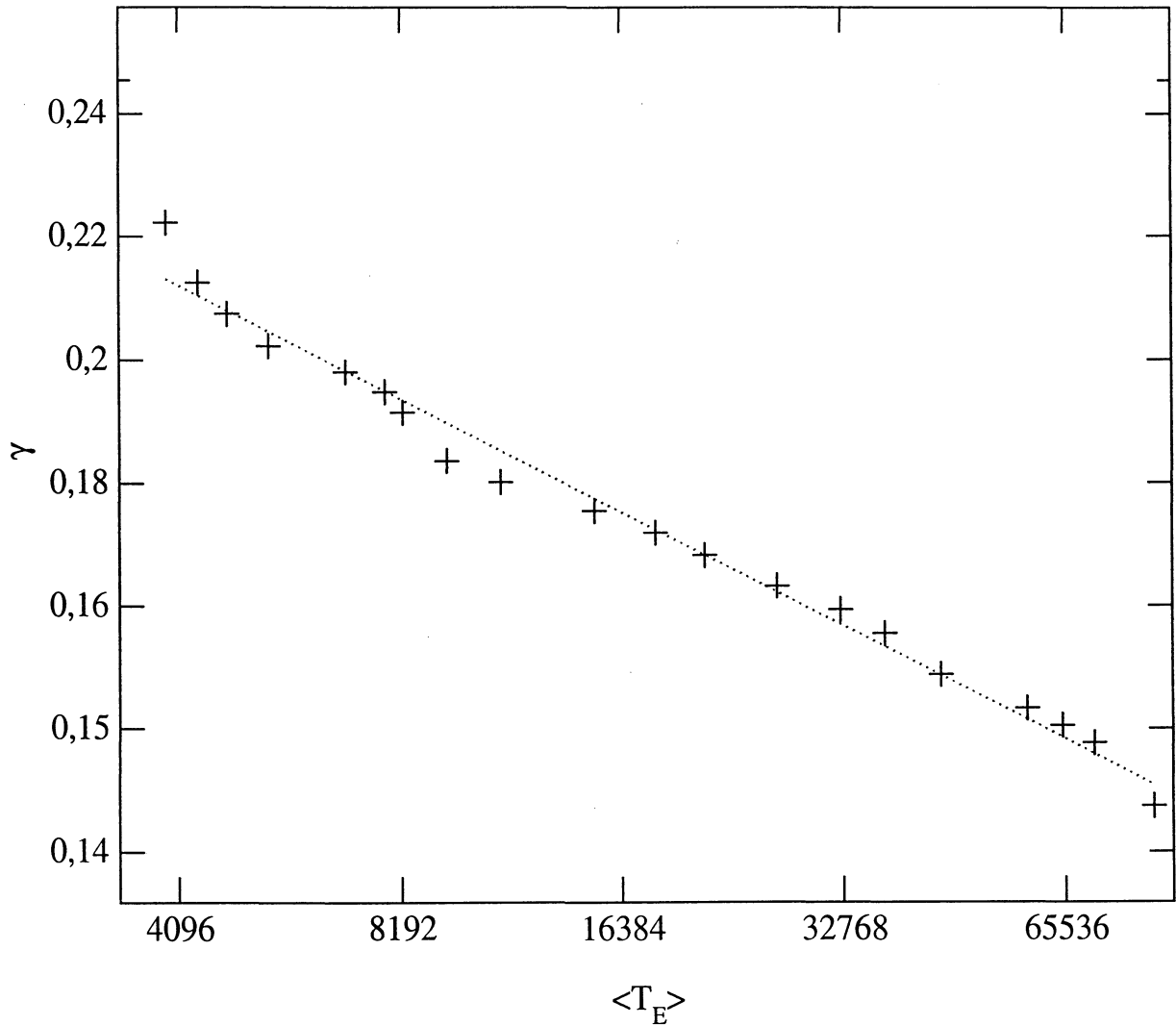


Figura 3.30: Gráfico log-log do valor γ versus o tempo médio de escape.

do termo oscilatório uma equação com a seguinte forma:

$$\langle T_E \rangle = C \gamma^\alpha, \quad (3.3)$$

onde obtemos da figura (3.30) um expoente $\alpha \approx -0.12827$.

3.2.2 Frequência do termo oscilatório

Nesta sub-seção é feita uma análise da importância da frequência de oscilação do termo de descasamento no surgimento do comportamento difusivo. Para fazer esta análise,

construímos um espaço de parâmetros da amplitude versus a frequência de oscilação do termo de descasamento da seguinte maneira, primeiro é tomado um ponto do espaço de parâmetros e é evoluída a condição inicial $\eta = 0,095$ até um tempo limite de $T = 10000$, se para este ponto do espaço de parâmetros a trajetória não atravessar a fronteira que foi definida na figura (3.20) é marcado um ponto caso contrário é deixado em branco. Assim temos um gráfico com dois casos distintos: os pontos pretos são os casos em que a trajetória não difunde e os pontos brancos são os casos que difunde, este gráfico está representado na figura (3.31).

No gráfico da figura (3.31) podemos ver que para determinados valores de frequência

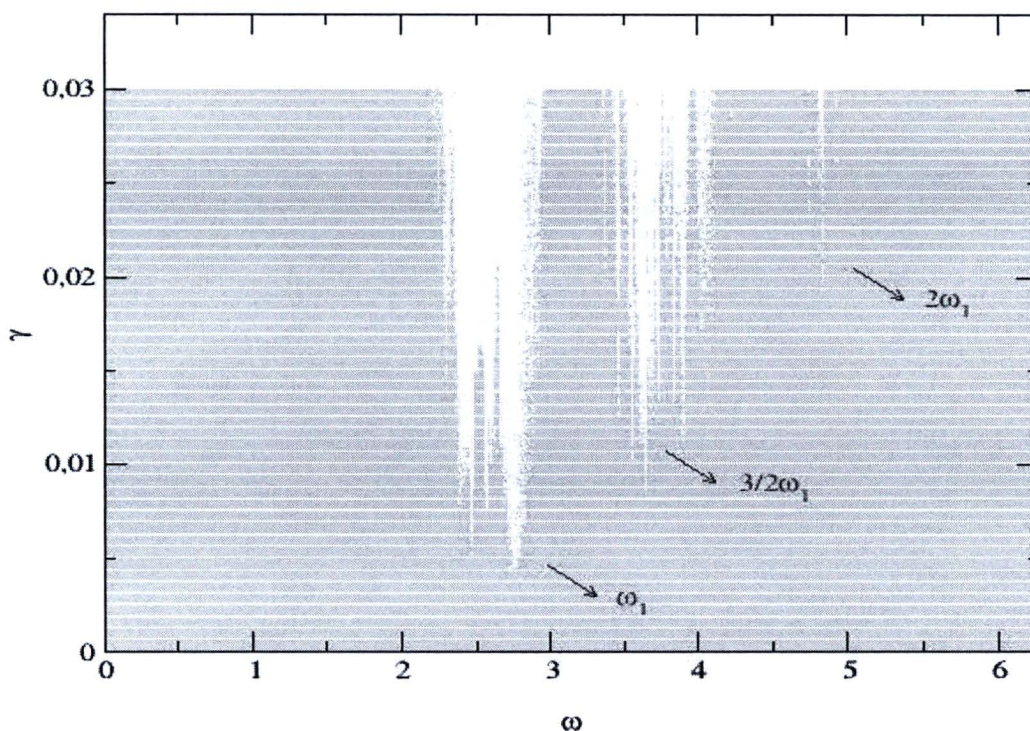


Figura 3.31: Espaço de parâmetros da condição inicial $\eta = 0,095$.

da oscilação do termo de descasamento o comportamento difusivo surge como línguas que vão crescendo com o tamanho da amplitude da oscilação. Estas línguas surgem com pequenos valores de amplitude para alguns valores de frequência. Para investigar a razão das línguas surgirem para determinadas frequências, na figura (3.32) é realizado um espectro de Fourier para o caso onde a frequência de descasamento é constante ($\gamma = 0$).

Fazendo uma comparação dos valores de frequência do espectro de Fourier da figura

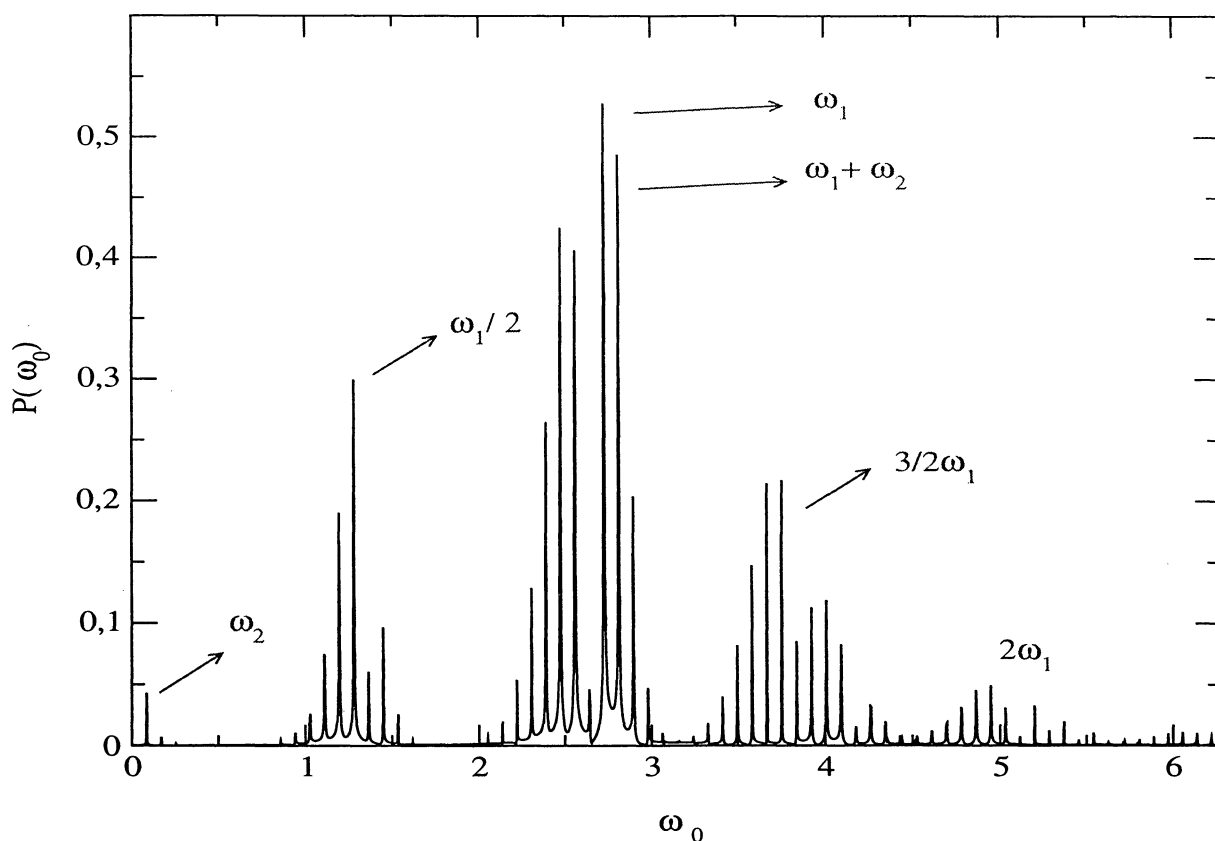


Figura 3.32: Espectro de Fourier da condição inicial $\eta = 0,095$ para $\gamma = 0$.

(3.32) e do espaço de parâmetros da figura (3.31), podemos ver uma correspondência entre o surgimento destas línguas com as frequências do sistema com descasamento constante ($\gamma = 0$). Temos um efeito de ressonância entre o sistema e a oscilação do termo de descasamento. A ressonância também explica a ausência da língua para a frequência $\frac{1}{2}\omega_1$ mostrada no espectro, pois o efeito de ressonância só aparece para múltiplos maiores da frequência fundamental, neste caso $\frac{3}{2}\omega_1$ e $2\omega_1$. Nas figuras (3.33) e (3.34) mostramos uma ampliação do espaço de parâmetros e do espectro de potências respectivamente, para a frequência lenta ω_2 mostrada na figura (3.32).

No gráfico da figura (3.35) é mostrado parte do espaço de parâmetros da figura (3.33) numa representação tri-dimensional com os tempos de escape. As regiões escuras representam valores pequenos de tempo de escape e as regiões claras um longo tempo de escape. Podemos ver que a fronteira de transição entre as regiões claras e escuras é abrupta, isto não implica que as regiões claras nunca irão difundir, eventualmente para um tempo suficientemente longo estas regiões difundirão. Porém, regiões ressonantes no interior das línguas aceleram o processo de difusão.

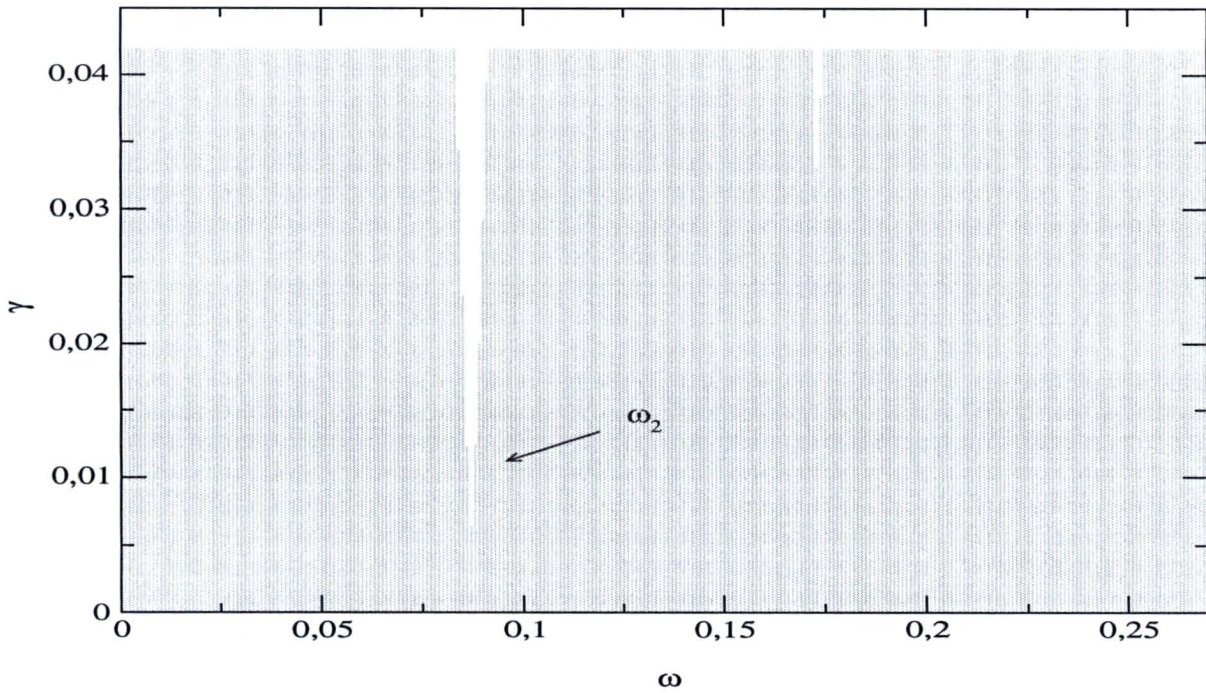


Figura 3.33: Ampliação do espaço de parâmetros da condição inicial $\eta = 0,095$.

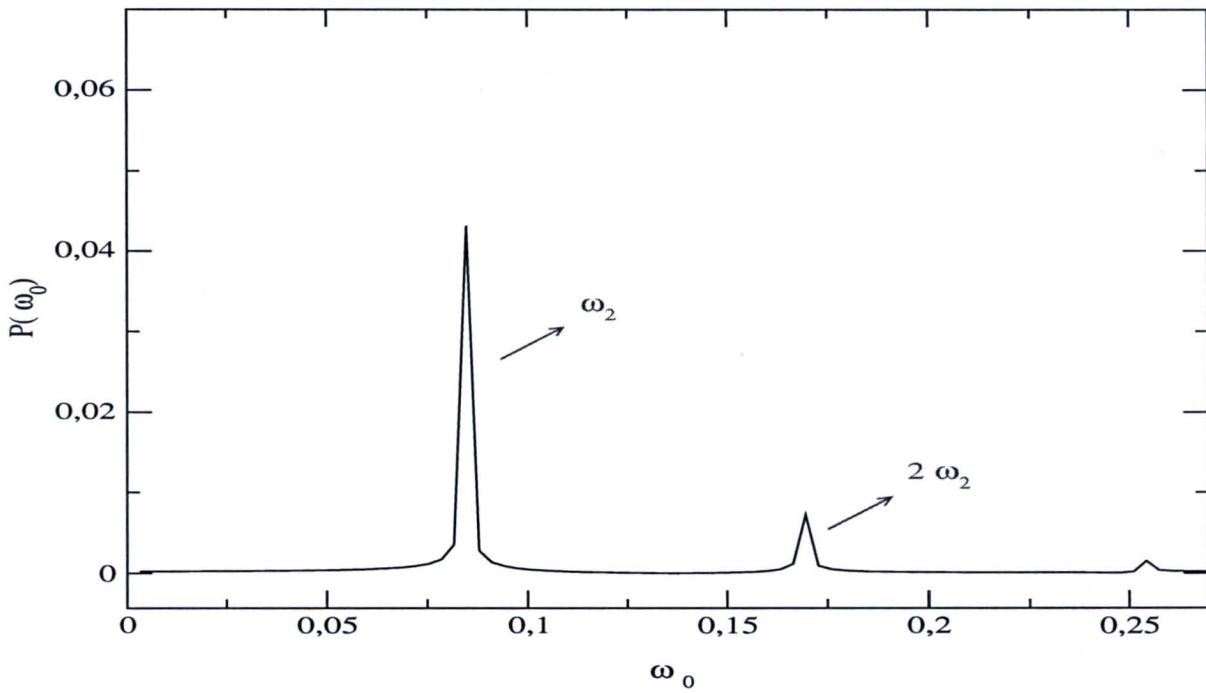


Figura 3.34: Ampliação do espectro de Fourier da condição inicial $\eta = 0,095$ para $\gamma = 0$.

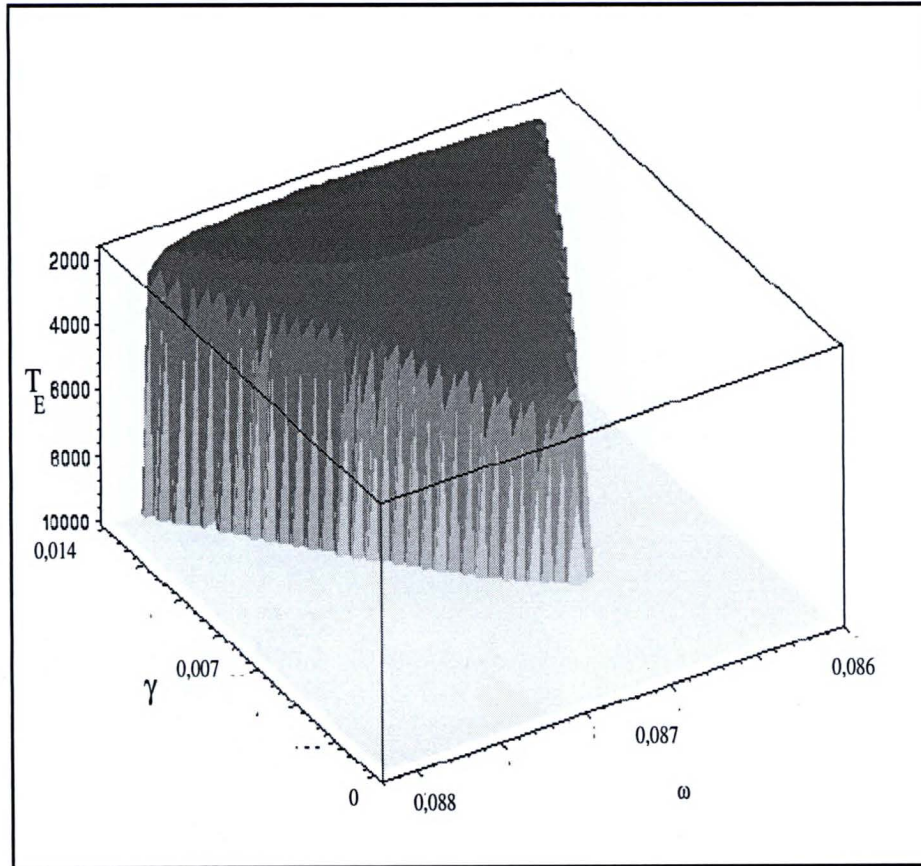


Figura 3.35: Representação 3D do espaço de parâmetros versus tempo de escape da condição inicial $\eta = 0,095$.

3.3 Dimensão de contagem de caixas

Vimos na seção anterior para o caso de frequência de descasamento não constante que as trajetórias não estão mais confinadas em regiões regulares ou caóticas. Qualquer condição inicial regular para um tempo suficientemente longo pode se tornar caótica. Nesta seção trataremos esta transição aplicando a dimensão de contagem de caixas sobre os cortes de Poincaré. O cálculo desta dimensão nos fornece uma medida de como as trajetórias estão distribuídas sobre o corte. Porém, antes de aplicarmos para o caso de frequência de descasamento não constante, usaremos a contagem de caixas para o caso constante sobre duas condições iniciais: uma regular e outra caótica. As trajetórias do corte que foram

utilizadas para a contagem de dimensão estão mostradas na figura (3.36).

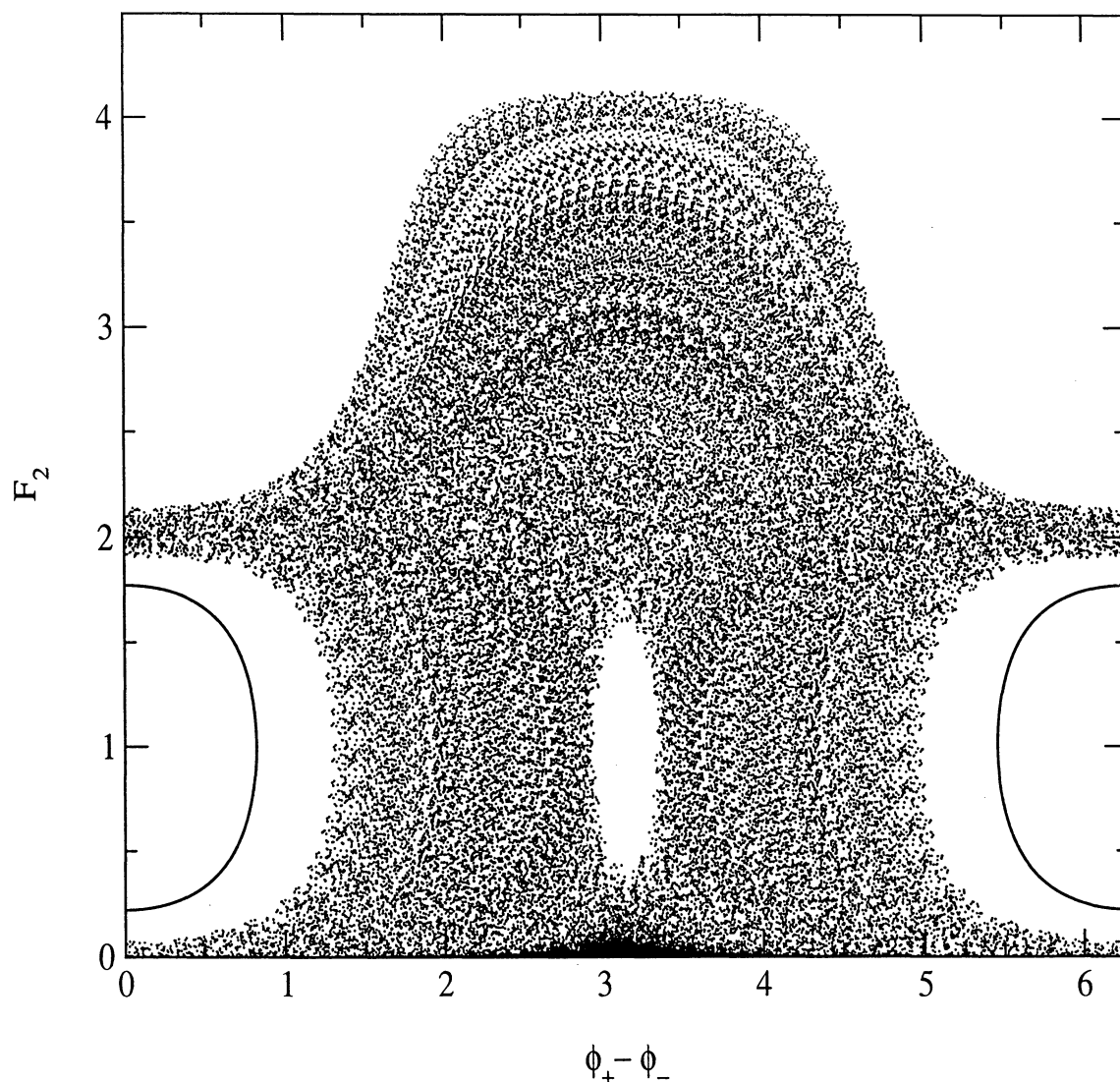


Figura 3.36: Corte de Poincaré do caso de frequência de descasamento constante para uma condição inicial regular e outra caótica ($\delta_- = 0,05$).

Na figura (3.37) é mostrado os resultados obtidos da contagem de caixa para três tempos distintos sobre a condição inicial regular da figura (3.36). Podemos ver que para os três casos os resultados convergem para valores muito próximos, a linha pontilhada é a região onde foi realizada uma regressão linear. O resultado do coeficiente angular desta regressão nos fornece o valor da dimensão, para este caso é $D \approx 0,99$. O resultado é o valor esperado devido as regiões regulares formarem toros bidimensionais que através do corte formam curvas, que são objetos de dimensão um.

Na figura (3.38) é mostrado os resultados da contagem de caixas realizada para a condição inicial caótica do corte da figura (3.36). Para este gráfico obtemos da regressão

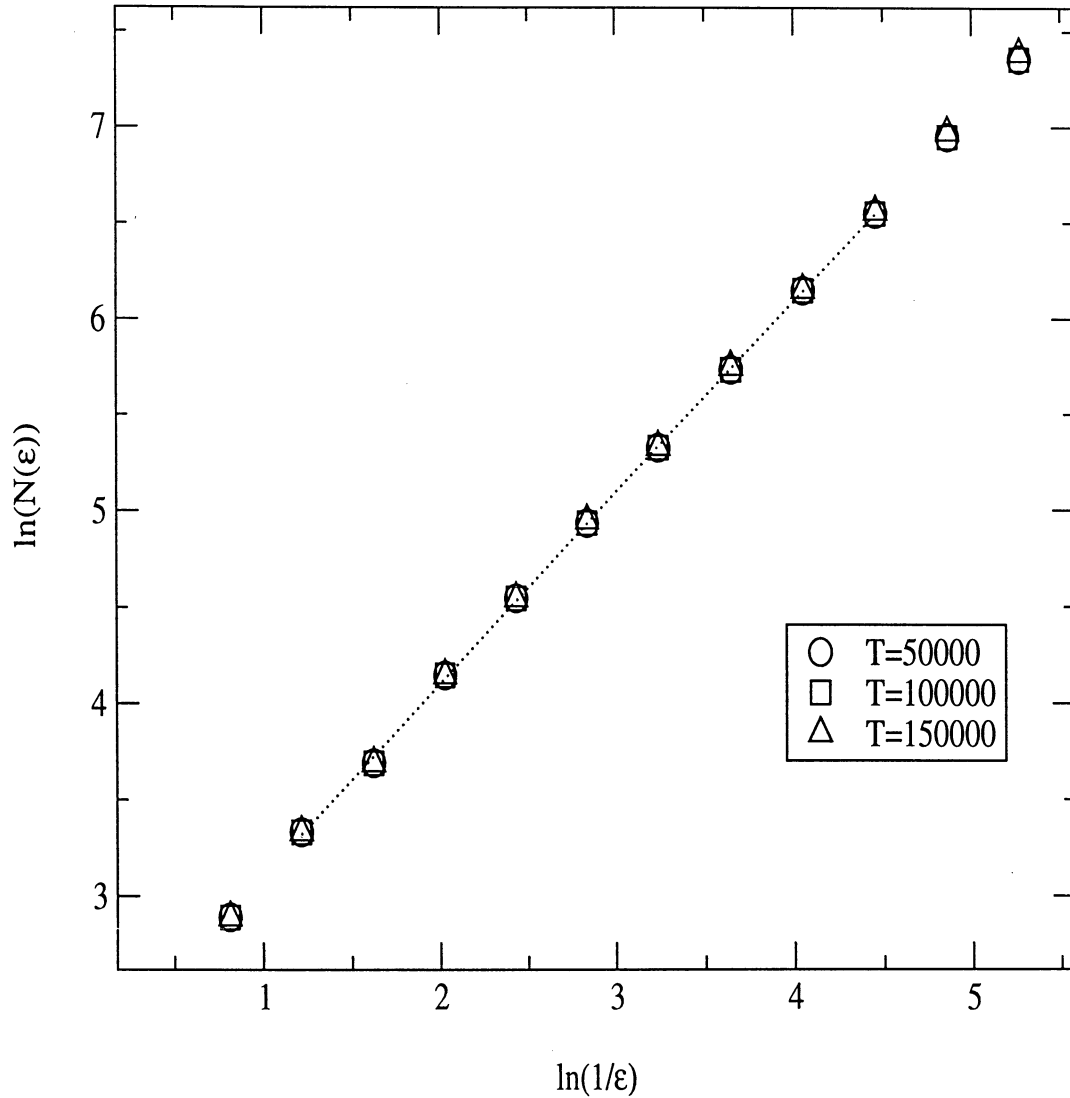


Figura 3.37: Contagem de caixas para uma condição inicial regular.

um valor de dimensão $D \approx 1,88$. Assim temos que as trajetórias para o caso caótico tem uma dimensão maior sobre o corte do que as curvas das regiões regulares, porém têm uma dimensão menor que a do plano do corte que é dois. Isto pode ser explicado pela existência de pequenas ilhas que proíbem o preenchimento sobre certas áreas do corte. Podemos ver também deste gráfico, um desvio do comportamento linear nas regiões das extremidades dos valores de $\ln(1/\epsilon)$. Para a região de pequenos valores o valor de ϵ é grande, tornando as caixas muito grandes para uma contagem precisa da dimensão. Já para a região de grandes valores de $\ln(1/\epsilon)$ podemos ver um desvio dos resultados para diferentes valores de tempo, sendo que para maiores tempos permanecem lineares para uma região maior. Isto é devido as caixas se tornarem muito pequenas, assim para fazer medida de contagem de caixas seria necessário tempos muitos longos.

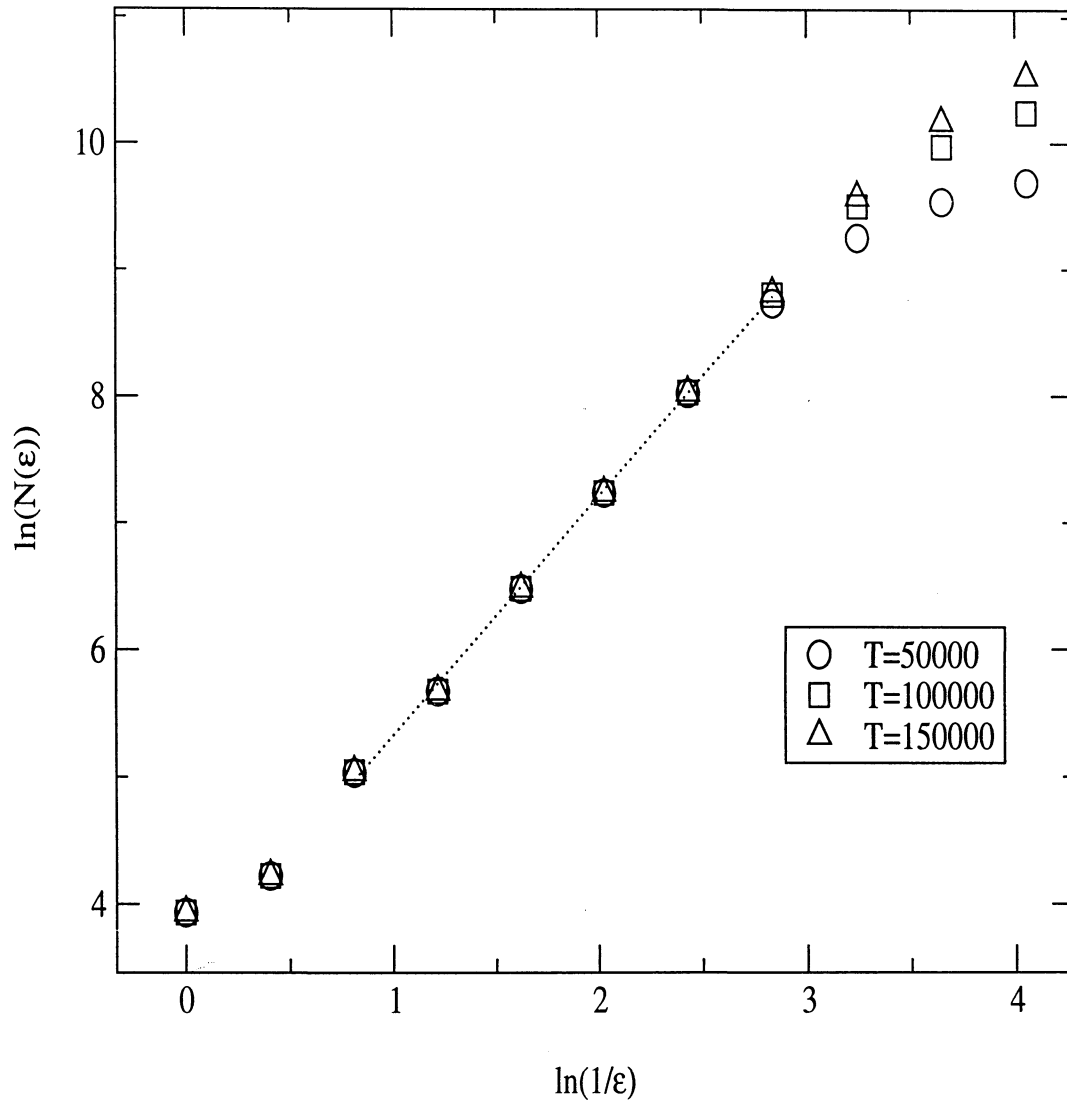


Figura 3.38: Contagem de caixas para uma condição inicial caótica.

Após termos apresentado os resultados obtidos da contagem de caixas para o caso de frequência de descasamento constante, na figura (3.39) mostramos o corte para o caso não constante que será feita a contagem de caixas.

Na figura (3.40) mostramos os resultados para o caso de frequência de descasamento não constante da figura (3.39). Podemos ver que ao contrário do caso onde a frequência de casamento era constante, os coeficientes angulares variam para tempo diferentes. Onde para o tempo $T=50000$ a dimensão é de $D \approx 1,60$, para $T=85000$ é $D \approx 1,74$, para $T=130000$ é $D \approx 1,86$ e para $T=160000$ é $D \approx 1,89$. Para $T=50000$ corresponde as regiões escuras da figura (3.39) que formam resquícios dos toros do caso de frequência de descasamento constante, estas trajetórias não formam mais um único toro fazendo que sua dimensão seja maior que um. Porém, as trajetórias permanecem aprisionadas

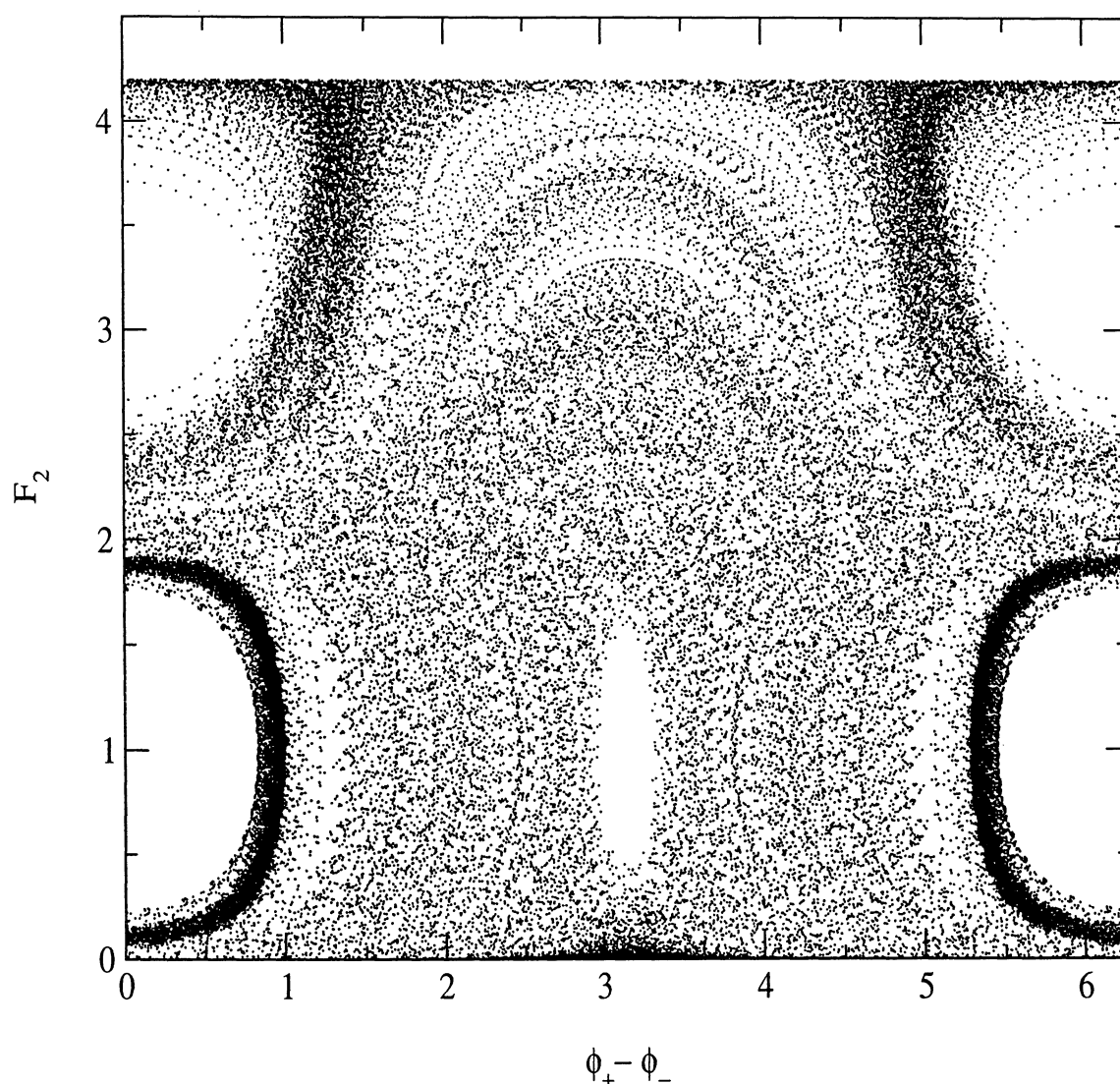


Figura 3.39: Corte de Poincaré do caso de frequência de descasamento não constante ($\gamma = 0,004$, $\omega = 2,85$ e $\delta_- = 0,05$).

durante um certo período de tempo, fazendo que sua dimensão seja menor que a do caso para uma condição inicial caótica. Para tempos maiores esta trajetória escapa das regiões de aprisionamento, e passam a preencher irregularmente o corte, fazendo que os seus valores de dimensão se aproximem para o valor de dimensão para do caso da condição inicial caótica.

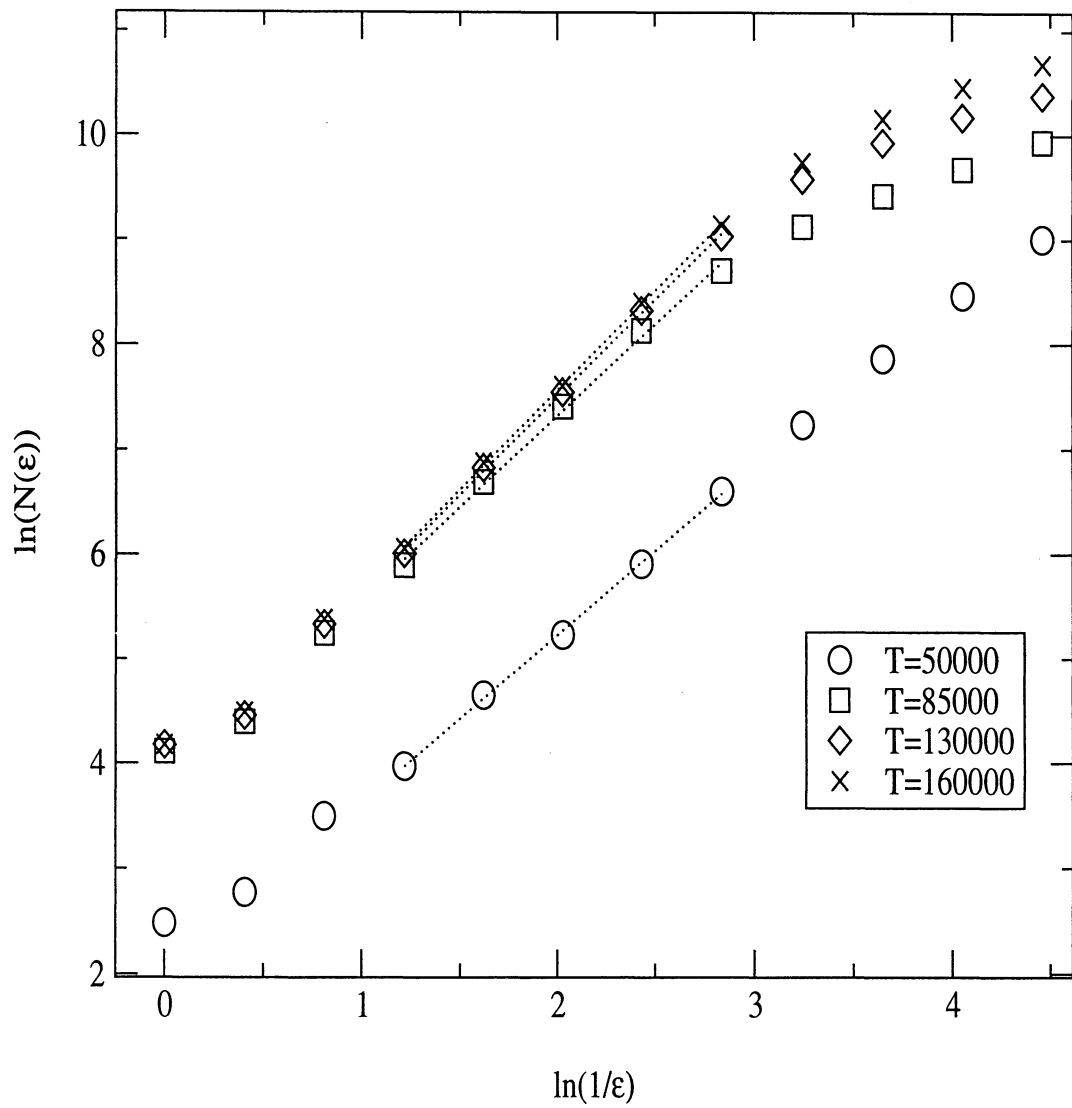


Figura 3.40: Contagem de caixas para o caso da frequência de descasamento não constante.

Capítulo 4

Conclusões e trabalhos futuros

Nesta dissertação investigamos a dinâmica não linear de uma interação ressonante onda-onda em um meio fracamente não linear. A interação analisada é chamada modelo de quatro ondas conservativo que é descrita por dois tripletos de ondas compartilhando duas ondas em comum. Sobre cada um destes tripletos é inserida uma pequena frequência de descasamento. Vimos através do corte de Poincaré que, para um pequeno valor de frequência de descasamento, grande parte de condições iniciais geram trajetórias regulares. Quando o valor de frequência de descasamento é elevado surgem camadas caóticas que crescem com o valor da frequência de descasamento. Além disto, vimos através dos cortes que as regiões regulares (toros KAM) formam barreiras que impedem as regiões das camadas caóticas preencham todo o corte. Foi observado a formação de ilhas ao redor dos toros racionais. Todos estes comportamentos são típicos de caos em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade.

Além dos cortes de Poincaré, mostramos outros diagnósticos comuns em dinâmica não linear para distinguir as soluções regulares das caóticas, como a análise de espectro de potência de séries temporais e expoentes de Lyapunov. Na análise de espectro de potência vimos que a transição de regular para caos é caracterizado de um espectro com picos definidos para um espectro com bandas largas e ruidoso. Já através do expoente de Lyapunov, vimos que as trajetórias regulares convergem para valores nulos, enquanto que as trajetórias caóticas convergem para um valor positivo. Podemos ver também através do expoente de Lyapunov que trajetórias caóticas além do aparecimento do expoente positivo, surge um expoente negativo com valor igual em módulo, devido a propriedade de preservação do volume de espaço do fase em sistemas Hamiltonianos.

Na segunda seção do capítulo de resultados foi analisado o caso em que a frequência de descasamento possui uma dependência temporal. Vimos através dos cortes de Poincaré que uma condição inicial regular, no caso de frequência de descasamento constante, quando é acrescentado uma dependência temporal, a condição inicial passa a apresentar um comportamento difusivo. Este é um cenário típico de sistemas Hamiltonianos com mais de

dois graus de liberdade, onde os toros KAM não separam mais as camadas caóticas, surgindo uma conexão entre as camadas caóticas que torna possível o movimento chamado de difusão de Arnold. Para este caso vimos que a média do tempo de escape para diversas condições iniciais contra a amplitude do termo de dependência temporal obedecem uma lei de potência. Além disto, vimos que a frequência de oscilação da dependência temporal, quando possui valores de ressonância com os valores das frequências de oscilação do caso da interação com frequência de descasamento permanece constante, os valores de tempo de escape caem bruscamente.

Na terceira seção do capítulo de resultados foi analisada a dimensão de ocupação do corte de Poincaré para os caso de frequência de descasamento constante, e o caso em que a frequência possui uma dependência temporal. Para uma condição inicial regular para o caso de frequência de descasamento constante a dimensão possui um valor próximo de um, que é devido ao corte dos toros formarem curvas que tem dimensão um. Ainda para o caso de frequência de descasamento constante, vimos que para uma condição inicial caótica a dimensão vale $D \approx 1,88$ que é um valor maior que da condição inicial regular devido a quebra dos toros KAM. Porém, a existência de ilhas faz que certas regiões do corte não sejam preenchidas, fazendo que a dimensão tenha um valor menor que dois. Já para o caso onde a frequência de descasamento possui dependência temporal, vimos que o valor da dimensão varia com o tempo. Inicialmente, as trajetórias permanecem por um tempo confinadas a um conjunto de toros no corte, até que finalmente escape dos toros e comece a difundir sobre o corte. Isto faz que o valor da dimensão cresça de $D \approx 1,60$ quando a trajetória esta confinada a um conjunto de toros, para $D \approx 1,89$ quando a trajetória escapa e difunde sobre o corte. O fato das trajetórias permanecerem confinadas, esta relacionado aos toros KAM para um sistema Hamiltoniano de $2 + \frac{1}{2}$ graus de liberdade apesar de não dividirem as camadas de caos, atuam como barreiras parciais fazendo que as trajetórias gastem um tempo até atravessar estas barreiras.

Para trabalhos futuros podemos citar: a análise do desvio quadrático, a dimensão de ocupação dos cortes, expoentes de Lyapunov a tempo finito e a análise de correlação da séries temporais como diagnósticos importantes para o estudo do comportamento difusivo e o efeito dos toros KAM se tornarem barreiras parciais. Outro trabalho futuro possível, é a análise da transição do caso coerente para o caso não coerente do modelo de quatro de ondas. Na análise não coerente ao invés de cada onda da interação oscilar com um único modo, cada onda é composta por um pente de modos.

Bibliografia

- [1] Newton, I. *Principia: princípios matemáticos da filosofia natural*. Tradução: Ricci, T ...[et al.]. EDUSP, 1990.
- [2] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Celeste*. Gauthier-Villars, 1892.
- [3] Lorenz, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos.Sci.*, v.20, p.130, 1963.
- [4] Arnold, V. I.; Avez, A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1968.
- [5] Moser, J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, 1973.
- [6] Petzold, L. R. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations, *Siam j. sci. stat. comput.*, 1983, p. 136-148.
- [7] Hindmarsh, A. C. Odepack, A systematized collection of ode solvers, *In scientific computing*, Stepleman, R. S; et al. (eds.), north-holland, amsterdam, 1983, p. 55-64.
- [8] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Pergamon Press, 1960.
- [9] Ott, E. *Chaos in dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [10] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. ABP Perseus Books, 1994.
- [11] Ferrara, N. F.; do Prado, C.P.C. *Caos uma introdução*. Edgard Blücher Ltda., 1994.
- [12] Marion, B. J. *Classical Dinamics of particles and systems*. 2ªed. Plenum Press, 1984.
- [13] Goldstein, H. *Classical mechanics*. 2ªed. Addison-Wesley, 1980.
- [14] Lichtenberg, A. J.; Lieberman, M. A. *Regular and sthocastic motion*. Springer-Verlag, 1983.
- [15] Schuster, H. G. *Deterministic Chaos: an introduction*. 3ªed.. VHD ,1995.

- [16] Chen, F. F. *Introduction to plasma physics*. Plenum Press, 1993.
- [17] Bittencourt, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. Pergamon Press, 1993.
- [18] Lopes, S. R. *Dinâmica não Linear de ondas whistlers em plasmas espaciais*. INPE (tese de doutorado), 1995.
- [19] Pakter, R.; Lopes, S. R.; Viana, R. L. Transition to chaos in the conservative four-wave parametric interactions. *Physica D*, v. 110, p. 277-288, 1997.
- [20] Coninck, J. C. P. *A dinâmica não linear do modelo de quatro ondas*. UFPR (Dissertação de mestrado), 2002.
- [21] Reitz, J. R.; Milford, F. J.; Christy, R. W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. Editora Campus, 1982.
- [22] Lashmore-Davies, C. N. *Plasma Physics and Nuclear Fusion Research*. Academic Press, 1981.
- [23] Romeiras, F. J. Integrability of double three-wave interaction. *Phys. Lett. A*, p. 227-229. 1983.
- [24] Wolf, A.; Swift, J. B; Swinney, H. L.; Vastano, J. A. Determining exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285-317, 1985.
- [25] Wiggins, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, 1990.
- [26] Alligood, K. T.; Sauer, T. D.; Yorke, J. A. *Chaos an introduction to Dynamical systems*. Springer, 1997.