

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEIDSON VITORIO KURPEL

UM MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE  
MÚLTIPLOS CONTÊINERES

CURITIBA

2015

DEIDSON VITORIO KURPEL

UM MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE  
MÚLTIPLOS CONTÊINERES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin

CURITIBA

2015

---

K96m

Kurpel, Deidson Vitorio

Um modelo matemático para o problema de carregamento de múltiplos contêineres/ Deidson Vitorio Kurpel. – Curitiba, 2015.

86 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia e Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2015.

Orientador: Cassius Tadeu Scarpin .

Bibliografia: p. 73-81.

1. Computação - Matemática. 2. Programação linear. 3. Modelos Matemáticos. 4. Otimização combinatória. 5. Administração de produto. I. Universidade Federal do Paraná. II. Scarpin, Cassius Tadeu. III. Título.

CDD: 658.78

---

## TERMO DE APROVAÇÃO

DEIDSON VITORIO KURPEL

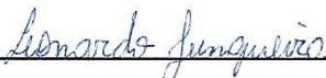
### UM MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE MÚLTIPLOS CONTÊINERES

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin

Orientador – Membro do PPGMNE/UFPR.



Prof. Dr. Leonardo Junqueira

Membro da Universidade Nove de Julho, São Paulo/SP



Prof. Dr. Leandro Magatão

Membro da UTPR



Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm

Membro do PPGMNE/UFPR

Curitiba, 27 de fevereiro 2015

À minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela força para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin, por sua disposição, atenção, ensinamentos e, sobretudo, pela amizade desenvolvida ao longo deste trabalho.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Aos professores Leandro Magatão, Leonardo Junqueira e Volmir Eugênio Wilhelm, pelas contribuições e sugestões à este trabalho.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos meus amigos, em especial Adriano, Camila, Cleder, Dayane, Josué, Larissa, Maria Cláudia, Nathália, Sandro e Sara, pela amizade e companheirismo.

Aos meus pais, Vitorio e Nadir, e à minha irmã, Sinclair, por me apoiarem em todas as etapas da minha vida.

*We are not now that strength which in old days  
Moved earth and heaven; that which we are, we are;  
One equal temper of heroic hearts,  
Made weak by time and fate, but strong in will  
To strive, to seek, to find, and not to yield.*

*Ulysses*

Lord Alfred Tennyson

## RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo de Programação Linear Inteira que visa carregar, de modo ortogonal e sem sobreposição, um subconjunto de caixas retangulares no interior de contêineres, de modo a minimizar o espaço não utilizado dos contêineres selecionados. Com base em propostas realizadas anteriormente na literatura, a formulação matemática descrita neste trabalho considera as restrições de limitação de peso do contêiner, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga, além de utilizar uma técnica heurística para realizar o pré-processamento dos dados. Tanto conjuntos de teste gerados aleatoriamente quanto da literatura foram utilizados para avaliar o desempenho computacional da formulação matemática proposta, e um *software* de otimização foi empregado para a resolução dos modelos gerados. A análise dos resultados obtidos permite concluir que a proposta gera resultados satisfatórios, com padrões de carregamento que atendem as restrições abordadas neste trabalho, dentro de um limite de tempo estabelecido para a execução dos testes.

Palavras-chave: Matemática Discreta e Combinatória. Programação Linear Inteira. Modelagem Matemática. Problemas de Corte e Empacotamento. Carregamento de Contêineres.



## **ABSTRACT**

This work presents an Integer Linear Programming model that aims loading, orthogonally and without overlap, a subset of rectangular boxes inside containers, in order to minimize the idle space of the selected containers. Based on proposals previously made in the literature, the mathematical formulation described in this work regards the restrictions of weight limit of the container, box orientation and vertical stability of the load, and also uses a heuristic technique to preprocess the data. Both randomly generated sets of trials and ones from literature were used to evaluate the computational performance of the proposed mathematical formulation, and an optimization software was employed for the resolution of the generated models. The analysis of the obtained results allow the conclusion that the proposition generates satisfactory results, with loading patterns that meet the restrictions addressed in this work within a time limit set for the tests.

Keywords: Discrete and Combinatorial Mathematics. Integer Linear Programming. Mathematical Modeling. Cutting and Packing Problems. Container Loading.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – TIPOS BÁSICOS DE PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO .....	22
FIGURA 2 – POSIÇÃO RELATIVA DE CAIXAS NO INTERIOR DE UM CONTÊINER .....	35
FIGURA 3 – CAIXA NO INTERIOR DE UM CONTÊINER .....	41
FIGURA 4 – EXEMPLO DE PILHA DE CAIXAS .....	44
FIGURA 5 – EXEMPLO DE PAREDES VIRTUAIS .....	45
FIGURA 6 – EXEMPLO DE UM CUBOIDE .....	45
FIGURA 7 – EXEMPLO DE CORTE GUILHOTINADO E CORTE NÃO GUILHOTINADO .....	46
FIGURA 8 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 28.....	61
FIGURA 9 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 35.....	63
FIGURA 10 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 10.....	65
FIGURA 11 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 8.....	67
FIGURA 12 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 8 DE IVANCIC <i>et al.</i> (1989).....	70
QUADRO 1 – PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES: MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS.....	25
QUADRO 2 – PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES: MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS.....	27
QUADRO 3 – PSEUDOCÓDIGO DO PGNU .....	49

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DESCRIÇÃO DAS EQUAÇÕES UTILIZADAS EM CADA CENÁRIO CONSIDERADO .....	59
TABELA 2 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 1 .....	60
TABELA 3 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 2 .....	62
TABELA 4 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 3 .....	64
TABELA 5 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 4 .....	66
TABELA 6 – RESULTADOS PARA OS CONJUNTOS DE TESTE DE IVANCIC <i>et al.</i> (1989).....	69
TABELA 7 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE .....	83

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO .....	15
1.1.1	Objetivo Geral .....	15
1.1.2	Objetivos Específicos .....	15
1.2	IMPORTÂNCIA DO TRABALHO.....	16
1.3	LIMITAÇÕES DO TRABALHO.....	16
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	16
<b>2</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>18</b>
2.1	LOGÍSTICA.....	18
2.2	PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO .....	20
2.3	PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES .....	22
2.3.1	Problemas de Carregamento de Contêineres: Minimização (do Valor) das Entradas .....	23
2.3.2	Problemas de Carregamento de Contêineres: Maximização (do Valor) das Saídas .....	26
2.4	CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS NOS PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES.....	27
2.4.1	Limitação de Peso do Contêiner.....	28
2.4.2	Distribuição de Peso no Contêiner .....	28
2.4.3	Prioridade de Carregamento de Itens.....	29
2.4.4	Orientação de Itens .....	29
2.4.5	Empilhamento de Itens .....	29
2.4.6	Carregamento Completo de Grupos de Itens .....	30
2.4.7	Separação de Itens.....	30
2.4.8	Agrupamento de Itens .....	31
2.4.9	Manuseio de Itens .....	31
2.4.10	Múltiplos Destinos.....	31
2.4.11	Estabilidade .....	32
2.4.12	Complexidade de Carregamento .....	32

<b>3</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS E TÉCNICAS DE SOLUÇÃO.....</b>	<b>33</b>
3.1	FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS .....	33
3.1.1	Abordagem de Chen et al. (1995).....	33
3.1.2	Abordagem de Hifi et al. (2010).....	37
3.1.3	Abordagem de Junqueira et al. (2012) .....	40
3.2	TÉCNICAS DE SOLUÇÃO.....	43
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PROPOSTA.....</b>	<b>47</b>
4.1	PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DE NÚMEROS ÚTEIS.....	47
4.2	MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR BINÁRIA PROPOSTO .....	50
4.3	CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE LIMITAÇÃO DE PESO DO CONTÊINER ...	52
4.4	CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE ORIENTAÇÃO DE ITENS .....	53
4.5	CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE ESTABILIDADE VERTICAL.....	55
<b>5</b>	<b>TESTES COMPUTACIONAIS E RESULTADOS.....</b>	<b>57</b>
5.1	CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE .....	57
5.1.1	Geração dos Conjuntos de Teste .....	57
5.1.2	Resultados dos Testes Computacionais.....	58
5.2	CONJUNTOS DE TESTE DE TRABALHOS CORRELATOS.....	68
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE 1 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE.....</b>	<b>82</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, empresas dos mais diversos portes e setores de atuação passaram a envolver-se cada vez mais em atividades de transporte e estocagem de produtos. A partir do momento em que se buscou coordenar as ações destas atividades, ao invés de conduzi-las separadamente, a logística passou a ser entendida como um processo que busca planejar, executar e supervisionar, de modo eficiente, a movimentação de mercadorias, serviços e informações, da origem até o local de consumo (BALLOU, 2006).

O *objeto de estudo* deste trabalho é um caso particular dos problemas de corte e empacotamento, denominado, no campo da Pesquisa Operacional, de problema de carregamento de contêineres. Para resolvê-lo, procura-se dispor caixas retangulares ortogonalmente e sem sobreposição no interior de dispositivos de carga, tais como caminhões, navios, trens e contêineres, de modo a arranjar as caixas otimizando o espaço utilizado e, conseqüentemente, utilizar uma quantidade mínima de contêineres. A resolução deste tipo de problema pode potencializar a máxima lucratividade através dos menores custos associados no transporte de mercadorias (CHRISTOPHER, 2007).

No entanto, o problema de carregamento de contêineres conta com uma série de exigências que podem ser levadas em conta tanto em sua formulação quanto em sua resolução. Bischoff e Ratcliff (1995) elencam uma série de doze considerações práticas que podem ser observadas ao se carregar um contêiner e, assim sendo, podem ser levadas em conta ao se propor técnicas de resolução que visam resolver problemas de carregamento de contêineres.

Este trabalho tem o interesse particular no carregamento de múltiplos contêineres tridimensionais, onde uma seleção de contêineres com dimensões conhecidas *a priori* deve ser carregada com caixas com formato de paralelepípedos, de modo que o volume não ocupado no interior de cada contêiner escolhido seja mínimo. Considerações práticas envolvendo múltiplas orientações de caixas, estabilidade vertical, e limite de peso do contêiner são discutidas e tratadas ao longo deste trabalho.

A *abordagem de pesquisa* deste trabalho é *quantitativa*, pois o mesmo realiza a “verificação de hipóteses e a descrição de relações quantitativas entre variáveis especificadas” (TRIPODI, FELLIN e MEYER, 1981, p. 48).

O *método de pesquisa* empregado foi a modelagem matemática, pois procurou-se transformar “problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Este trabalho tem como *hipótese* a possibilidade de empregar técnicas de Programação Linear Inteira para formular e resolver o problema de carregamento de contêineres.

## 1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é propor uma abordagem matemática baseada em Programação Linear Inteira para o problema de carregamento de múltiplos contêineres, levando em conta considerações práticas levantadas por Bischoff e Ratcliff (1995).

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- Apresentar um modelo de Programação Linear Inteira para o problema de carregamento de múltiplos contêineres que minimize o espaço não utilizado dos contêineres escolhidos, adaptando o modelo de Chen *et al.* (1995);
- Adaptar para o problema tratado neste trabalho as restrições de limitação de peso do contêiner, estabilidade vertical e múltiplas orientações de caixas apresentadas por Junqueira *et al.* (2012);
- Adaptar e aplicar o Procedimento de Geração de Números Úteis proposto por Carnieri *et al.* (1994) à formulação proposta, visando melhorar o desempenho computacional e possibilitar a abordagem de problemas de maior dimensão.

## 1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

A utilização de dispositivos de unitização de cargas, como contêineres e paletes, potencializa a proteção contra danos, furtos, roubos e a ação do clima, além de, sobretudo, agilizar operações de carga e descarga e reduzir custos ligados ao transporte e manuseio da carga (BALLOU, 2006). Entretanto, contêineres tem custos geralmente elevados, de modo que o uso eficiente da menor quantidade necessária para transportar a carga constitui uma preocupação constante para as empresas que utilizam esse meio de transporte. Logo, este trabalho visa contribuir com uma técnica para resolução do problema de carregamento de múltiplos contêineres, minimizando o espaço não utilizado dos contêineres.

## 1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Em virtude da natureza dos problemas abordados neste trabalho, que por vezes envolvem milhares de variáveis e restrições, limitações advêm da insuficiência de memória computacional para a resolução dos problemas propostos e do tempo gasto para atingir respostas satisfatórias. Embora não se alcance a solução ótima em todos os casos, o tempo de execução dos testes computacionais será definido *a priori* em todos os experimentos efetuados.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos. No primeiro capítulo, introduz-se o tema abordado, bem como os objetivos do estudo.

O segundo capítulo descreve detalhadamente o problema tratado, inserindo-o no campo da logística. Neste capítulo também são discutidos e classificados os diferentes tipos de problemas de corte e empacotamento de acordo com a tipologia de Wäscher *et al.* (2007). Já no âmbito dos problemas de carregamento de contêineres, as doze considerações práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995) são apresentadas.

O terceiro capítulo apresenta as formulações matemáticas para o problema de carregamento de contêineres dadas por Chen *et al.* (1995), Hifi *et al.* (2010) e



Junqueira *et al.* (2012). Diferentes técnicas de solução para o problema também são apresentadas neste capítulo.

O quarto capítulo descreve as manipulações efetuadas nas formulações de Chen *et al.* (1995) e Junqueira *et al.* (2012) para tratar do problema de carregamento de múltiplos contêineres com as restrições de limitação de peso do contêiner, estabilidade vertical e múltiplas orientações de caixas.

O quinto capítulo discute os resultados obtidos quando a formulação matemática proposta neste trabalho é testada tanto com conjuntos de caixas gerados aleatoriamente quanto descritos em trabalhos correlatos.

O sexto capítulo traça um panorama das conclusões alcançadas por meio da análise dos resultados obtidos na avaliação do modelo, além de apontar sugestões para trabalhos futuros envolvendo o problema de carregamento de contêineres.

## 2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo busca apresentar o problema estudado neste trabalho. Inicialmente, alguns conceitos de logística são abordados, seguidos por uma discussão a respeito dos problemas de corte e empacotamento e suas classificações, dando ênfase ao problema de carregamento de contêineres e às considerações práticas que podem ser abordadas ao se propor estratégias de resolução dos mesmos.

### 2.1 LOGÍSTICA

Ao abandonar o nomadismo e estabelecer as primeiras civilizações da Antiguidade, os grupos humanos procuravam assentar-se em locais férteis e com abundância de recursos naturais. Isso se deve, em parte, ao fato dos itens de maior procura não estarem disponíveis durante todo o ano e à capacidade limitada de transporte e armazenamento das sociedades da época.

Conforme aponta Ballou (2006), o aperfeiçoamento dos sistemas logísticos permitiu que, com o passar do tempo, algumas regiões se especializassem na produção de determinados tipos de produtos, fazendo um intercâmbio dos excedentes de produção para outras regiões consumidoras, obtendo em troca artigos que não eram produzidos no local.

Com o passar do tempo, as empresas passaram a se envolver cada vez mais em atividades de transporte e estocagem de produtos. A partir do momento que se buscou coordenar as ações destas atividades, ao invés de conduzi-las separadamente, a logística passou a ser entendida como um processo que busca planejar, executar e supervisionar, de modo eficiente, a movimentação de mercadorias, serviços e informações, da origem até o local de consumo, procurando atender as demandas dos clientes, potencializando a máxima lucratividade através dos menores custos associados (BALLOU, 2006; CHRISTOPHER, 2007).

A necessidade de dispor produtos e serviços no tempo e local adequado aos anseios dos clientes faz com que o manuseio, estocagem e transporte de cargas sejam elementos essenciais na estratégia logística adotada pelas empresas.

Bowersox *et al.* (2007) afirmam que o transporte de cargas, em particular, sempre apresenta elevado custo logístico, “(...) absorvendo de um a dois terços dos custos logísticos totais” (BALLOU, 2006, p.149).

De acordo com a Federação das Indústrias do Estado de São Paulo (FIESP), a *carga* é, em geral, composta por matérias-primas, produtos semiacabados ou produtos finais acondicionados em uma embalagem própria, para proteger o item e deixá-lo pronto para o transporte. As cargas costumam ser classificadas da seguinte maneira (FIESP, 2014):

- **Carga Geral.** Carga embarcada e transportada com acondicionamento, com marca de identificação e contagem de unidades. Pode ser *solta*, quando itens são embalados com dispositivos de dimensões e formas diversas (sacos, fardos, engradados, tambores, entre outros) ou *unitizada*, quando é constituída de materiais arranjados de maneira a tornar possível a movimentação e armazenagem por meios mecanizados como uma única unidade.
- **Carga a Granel.** Carga líquida ou seca embarcada e transportada sem acondicionamento, sem marca de identificação e sem contagem de unidades, tais como petróleo, milho, entre outros.
- **Carga Frigorificada.** Carga que necessita ser refrigerada ou congelada para conservar as qualidades essenciais do produto durante o transporte, como frutas frescas e carnes.
- **Carga Perigosa.** Em virtude de sua natureza, cargas que podem provocar acidentes, danificando outras cargas ou os meios de transporte e colocando em risco as pessoas que as manipulam. São exemplos de cargas perigosas líquidos explosivos e materiais radioativos.
- **Neo-Granel.** É formada por grupos homogêneos de mercadorias, de carga geral, sem acondicionamento específico, cujo volume ou quantidade possibilita o transporte em lotes, em um único embarque. Veículos constituem um tipo de carga neo-granel.

Dispositivos de unitização de carga, como contêineres, paletes, *slings* e *big-bags*, majoram a eficiência do transporte, pois, como aponta Ballou (2006), o aumento do

tamanho da carga diminui a quantidade de viagens necessárias para transportar a totalidade de produtos, possibilitando assim a redução dos custos associados ao transporte. Bowersox e Closs (2010) afirmam que a unitização diminui a possibilidade de ocorrência de danos e furtos durante o transporte, protege a carga de intempéries e reduz desperdícios, visto que, em geral, dispositivos de unitização são reutilizáveis.

## 2.2 PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO

No campo da Pesquisa Operacional, problemas de otimização combinatória que procuram determinar o melhor arranjo possível de unidades menores, denominadas itens, no interior de unidades maiores, chamadas objetos, são ditos *problemas de corte e empacotamento* (DYCKHOFF e FINKE, 1992). Aplicações destes problemas são comuns no cotidiano e surgem, por exemplo, ao efetuar corte de vidros, bobinas de papel e chapas de aço, e ao realizar o carregamento de caminhões, trens, navios e contêineres.

Embora, em essência, problemas de corte e problemas de empacotamento tenham objetivos distintos – enquanto estes procuram alocar a maior quantidade possível de itens no interior do(s) objeto(s), aqueles buscam cortar os itens de modo que a perda de material do(s) objeto(s) seja mínima – matematicamente é possível observar uma forte similaridade entre os mesmos: o arranjo de certa quantidade de itens no interior de um ou mais objetos pode ser interpretado tanto como padrão de corte quanto como padrão de empacotamento.

Dyckhoff (1990) foi quem primeiro procurou organizar e classificar os problemas de corte e empacotamento. No entanto, além da tipologia de Dyckhoff (1990) não ter sido amplamente aceita junto à comunidade científica internacional (WÄSCHER *et al.*, 2007), o avanço nas pesquisas fizeram com que deficiências dessa proposta fossem evidentes, em especial a dificuldade em incluir e classificar determinados problemas.

Ainda assim, os esforços de Dyckhoff (1990) serviram de base para que Wäscher *et al.* (2007) apresentassem uma tipologia aperfeiçoada para os problemas de corte e empacotamento. Inicialmente, cinco critérios são estabelecidos para

definir os tipos de problemas: dimensão, tipo de designação, diversidade de itens, diversidade de objetos e forma dos itens.

O critério *dimensão* divide os problemas em unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Problemas que abordam mais de três dimensões, como Lins *et al.* (2002), são tratados como variações do caso tridimensional.

Por meio do *tipo de designação*, os problemas são classificados como de *maximização (do valor) das saídas*, nos quais um subconjunto de itens será arranjado no interior de um número limitado de objetos (insuficiente para acomodar todos os itens) de modo a maximizar o “valor” (comprimento, área, volume, preço, lucro, entre outros) dos itens carregados, e problemas de *minimização (do valor) das entradas*, onde um subconjunto de objetos de “valor” mínimo será escolhido para acomodar a totalidade dos itens.

Quanto a *diversidade de itens*, distinguem-se três casos: itens *idênticos*, isto é, itens cujas dimensões e forma são iguais; itens *fracamente heterogêneos*, ou seja, itens que podem ser agrupados em um número relativamente pequeno (em relação aos total de itens) de subconjuntos nos quais as dimensões dos itens são idênticas; e itens *fortemente heterogêneos*, onde poucos (ou mesmo nenhum) itens possuem dimensões idênticas.

A *diversidade de objetos* diz respeito à quantidade de objetos disponíveis para corte/empacotamento: um *único* objeto, que pode ter dimensões fixas ou uma ou mais dimensões variáveis, ou *múltiplos* objetos, com dimensões fixas e que, a exemplo dos itens, podem ser agrupados de acordo com suas dimensões em objetos *idênticos*, *fracamente heterogêneos* e *fortemente heterogêneos*.

Por fim, o critério *forma dos itens* diz respeito exclusivamente a problemas de duas e três dimensões, onde os itens podem ter formato *regular*, como esferas, prismas, retângulos e círculos, e itens *irregulares*, como poliedros e polígonos não convexos.

A combinação dos critérios tipos de designação e diversidade dos itens permite aos autores definir seis tipos de *problemas básicos*. Três categorias de problemas do tipo básico visam minimizar o valor das entradas: *Bin Packing Problem*, caracterizado por itens fortemente heterogêneos; *Cutting Stock Problem*, nos quais os itens são fracamente heterogêneos; e *Open Dimension Problem*, onde um conjunto de itens deve ser acomodado em um ou mais objetos que possuem ao

menos uma dimensão variável. As três categorias de problemas básicos restantes são reservadas a casos que buscam maximizar o valor das saídas: *Identical Item Packing Problem*, que visa colocar o máximo de itens idênticos no interior do(s) objeto(s); *Placement Problem*, no qual os itens são fracamente heterogêneos; e *Knapsack Problem*, caracterizado pela forte heterogeneidade dos itens.

A FIGURA 1 expõe os tipos de problemas básicos apresentados pela tipologia de Wäscher *et al.* (2007).

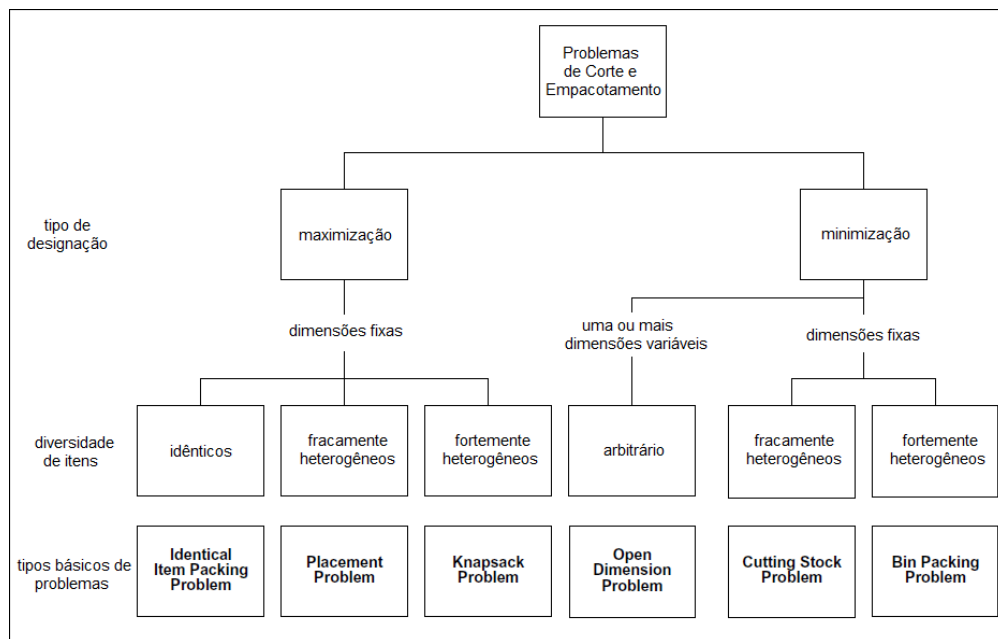


FIGURA 1 – TIPOS BÁSICOS DE PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO.

FONTE: Adaptado de Wäscher *et al.* (2007).

Ao também levar em conta o critério diversidade de objetos, Wäscher *et al.* (2007) descrevem os chamados *problemas intermediários* que, ao serem considerados juntamente com os critérios dimensão e forma dos itens, dão origem aos *problemas refinados*, que serão abordados com maior riqueza de detalhes na próxima seção, já na esfera do problema de carregamento de contêineres.

### 2.3 PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES

Os problemas de carregamento de contêineres podem ser vistos como um caso particular dos problemas de empacotamento. Para resolvê-los, procura-se

dispor, sem sobreposição, itens regulares (também chamados, neste trabalho, de caixas) ortogonalmente (isto é, os lados dos itens devem ser paralelos aos lados do objeto) no interior de um dispositivo de carga de formato regular, tais como caminhões, trens, navios e contêineres.

Bortfeldt e Wäscher (2013) afirmam que os problemas de carregamento de contêineres também podem ser vistos como problemas de designação tridimensional, onde pequenos itens, chamados de *carga*, devem ser designados (carregados) no interior de grandes objetos tridimensionais com forma de paralelepípedo, chamados de *contêineres*, de tal modo que dada função objetivo seja otimizada e duas condições de factibilidade sejam respeitadas: primeiro, que os itens que compõem a carga sejam designados de modo que sua totalidade esteja no interior do contêiner e, em seguida, que não exista sobreposição de itens. Um arranjo de itens no interior de um contêiner que respeita as condições de factibilidade acima é denominado *padrão de carregamento*.

A utilização máxima do espaço de cada contêiner, bem como o uso de uma quantidade mínima de contêineres para acondicionar todos os itens pode reduzir substancialmente o preço do transporte de mercadorias, com reflexos no preço final dos produtos e no balanço das empresas, visto que o transporte de cargas constitui um elemento crucial em termos de custos logísticos em boa parte das companhias (BALLOU, 2006).

Na sequência, a classificação proposta por Wäscher *et al.* (2007) para os chamados *problemas de corte e empacotamento refinados* é apresentada e brevemente discutida, já no âmbito do problema de carregamento de contêineres, considerando apenas itens regulares tridimensionais.

### 2.3.1 Problemas de Carregamento de Contêineres: Minimização (do Valor) das Entradas

Problemas deste tipo caracterizam-se pela disponibilidade de um número suficiente de contêineres para acomodar todos os itens; assim, o objetivo genérico dos mesmos é minimizar a quantidade de contêineres necessários para efetuar o carregamento. Na sequência, são descritos os sete tipos de problemas desta categoria, de acordo com a classificação de Wäscher *et al.* (2007).

Problemas do tipo *Single Stock-Size Cutting Stock Problem* (SSSCSP) consistem em empacotar um conjunto de itens *fracamente heterogêneos* (isto é, existem muitos itens de relativamente poucos tipos) em um número mínimo de contêineres *idênticos*. Estudos sobre este tipo de problema foram feitos, entre outros, por Ivancic *et al.* (1989), Bischoff e Ratcliff (1995), Terno *et al.* (2000), Eley (2002), Moura e Oliveira (2009) e Ren *et al.* (2011).

No *Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem* (MSSCSP), procura-se acondicionar um conjunto de itens *fracamente heterogêneos* no interior de contêineres *fracamente heterogêneos* (isto é, existem muitos contêineres de relativamente poucos tipos), visando minimizar o total de contêineres necessários para alocar as caixas. Este problema foi tratado, entre outros, por Ivancic *et al.* (1989), Eley (2003), Brunetta e Gregoire (2005) e Che *et al.* (2011).

O *Residual Cutting Stock Problem* (RCSP) é caracterizado pela necessidade de alocar um conjunto de itens *fracamente heterogêneos* dentro de uma seleção de contêineres *fortemente heterogêneos* (isto é, existem relativamente muitos tipos de contêineres, mas cada tipo tem pouca disponibilidade), de modo a minimizar o total de contêineres necessários para posicionar todas as caixas. Este tipo de problema foi abordado por Andrade *et al.* (2014).

No *Single Bin-Size Bin Packing Problem* (SBSBPP), busca-se posicionar um conjunto de itens *fortemente heterogêneos* (isto é, existem relativamente muitos tipos de itens, mas cada tipo tem pouca disponibilidade) no interior de um número mínimo de contêineres *idênticos*. Este problema foi tratado por Arenales e Morabito (1997), Martello *et al.* (2000), Lim e Zhang (2005), Hifi *et al.* (2010) e Parreño *et al.* (2010).

O intuito de problemas do tipo *Multiple Bin-Size Bin Packing Problem* (MBSBPP) é empacotar um conjunto de itens *fortemente heterogêneos* no interior de uma seleção de contêineres *fracamente heterogêneos*, visando minimizar o total de contêineres necessários para alocar o total de caixas. Este problema foi abordado por Fraser e George (1994), Arenales e Morabito (1997), Brunetta e Gregoire (2005) e Ceschia e Schaefer (2013).

O *Residual Bin Packing Problem* (RBPP) é caracterizado pela necessidade de acondicionar um conjunto de itens *fortemente heterogêneos* no interior de uma seleção de contêineres *fortemente heterogêneos*, de modo a minimizar o total de



contêineres usado para abrigar as caixas. Este problema foi tratado por Arenales e Morabito (1997), Jin *et al.* (2003), Lin *et al.* (2006) e Almeida e Figueiredo (2010).

Problemas do tipo *Open Dimension Problem* (ODP) consistem em colocar um conjunto de itens dentro de um *único* contêiner com uma ou mais dimensões variáveis, de modo que o volume do contêiner seja minimizado. É possível ainda diferenciar problemas do tipo ODP entre aqueles com *fraca heterogeneidade de carga* (ODP/W) e aqueles com *forte heterogeneidade de carga* (ODP/S). Problemas do tipo ODP/W foram estudados por Bischoff e Marriott (1990) e Bortfeldt e Gehring (1999); abordagens para problemas do tipo ODP/S estão presentes nos trabalhos de Bortfeldt e Gehring (1999) e Miyazawa e Wakabayashi (1997; 1999; 2007; 2009), entre outros.

No QUADRO 1 é traçado um panorama dos problemas discutidos até este ponto.

características dos contêineres		diversidade dos itens	
		fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
dimensões fixas	idênticos	Single Stock Size Cutting Stock Problem SSSCSP	Single Bin Size Bin Packing Problem SBSBPP
	fracamente heterogêneos	Multiple Stock Size Cutting Stock Problem MSSCSP	Multiple Bin Size Bin Packing Problem MBSBPP
	fortemente heterogêneos	Residual Cutting Stock Problem RCSP	Residual Bin Packing Problem RBPP
único contêiner com uma ou mais dimensões variáveis		Open Dimension Problem ODP	

QUADRO 1 – PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES: MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS

FONTE: Adaptado de Wäscher *et al.* (2007).

### 2.3.2 Problemas de Carregamento de Contêineres: Maximização (do Valor) das Saídas

Em problemas deste tipo, apenas um subconjunto de caixas pode ser carregado, visto que existe um número limitado de contêineres disponíveis; assim, o objetivo genérico dos mesmos é efetuar a seleção ótima de itens a serem embarcados. Wäscher *et al.* (2007) descrevem sete tipos de problemas nesta categoria.

O *Identical Item Packing Problem* (IIPP) procura carregar um *único* contêiner com a quantidade máxima possível de itens *idênticos*. O mesmo foi tratado, entre outros, por Liu e Hsiau (1997), Padberg (2000), Lins *et al.* (2002), He e Huang (2010) e Junqueira *et al.* (2012).

No *Single Large Object Placement Problem* (SLOPP), procura-se carregar um *único* contêiner com um conjunto de itens *fracamente heterogêneos*, de modo que o volume (ou valor) total dos itens alocados seja máximo. Este problema foi estudado, entre outros, por George e Robinson (1980), Eley (2002), Araújo e Armentano (2007), Christensen e Rousøe (2009), Fanslau e Bortfeldt (2010) e Junqueira *et al.* (2012).

Problemas do tipo *Multiple Identical Large Object Placement Problem* (MILOPP) são caracterizados pela necessidade de alocar uma seleção de itens *fracamente heterogêneos* dentro de um número limitado de contêineres *idênticos*, fazendo com que o volume (ou valor) total dos itens dispostos seja máximo. Este problema foi abordado por Hifi (2002).

No *Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem* (MHLOPP), busca-se posicionar um conjunto de itens *fracamente heterogêneos* no interior de um número limitado de contêineres (*fracamente ou fortemente*) *heterogêneos*, maximizando o volume (ou valor) total dos itens carregados. Estudos acerca deste problema foram efetuados por Mohanty *et al.* (1994), Eley (2003) e Ren *et al.* (2011).

O intuito do *Single Knapsack Problem* (SKP) é carregar um *único* contêiner com um conjunto de itens *fortemente heterogêneos*, tal que o volume (ou valor) total dos itens escolhidos seja máximo. Este problema foi abordado por Arenales e Morabito (1997), Padberg (2000), Pisinger (2002), Lim e Zhang (2005), Dereli e Das (2010) e Junqueira *et al.* (2012).

O *Multiple Identical Knapsack Problem* (MIKP) é caracterizado pela necessidade de alocar uma seleção de itens *fortemente heterogêneos* no espaço interno de um número limitado de contêineres *idênticos*, fazendo com que o volume (ou valor) total dos itens escolhidos seja máximo. Este problema foi tratado por Koloch e Kaminski (2010).

No *Multiple Heterogeneous Knapsack Problem* (MHKP), deve-se posicionar um conjunto de itens *fortemente heterogêneos* no interior de um número limitado de contêineres (*fracamente ou fortemente*) *heterogêneos*, maximizando o volume (ou valor) total dos itens carregados. Abordagens de problemas do tipo MHKP estão presentes nos trabalhos de Fraser e George (1994) e Ceschia e Schaerf (2013).

O QUADRO 2 faz um resumo dos problemas discutidos na seção 2.3.2.

		diversidade dos itens		
		idênticos	fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
dimensões fixas	único contêiner	Identical Item Packing Problem IIPP	Single Large Object Placement Problem SLOPP	Single Knapsack Problem SKP
	idênticos	X	Multiple Identical Large Object Placement Problem MILOPP	Multiple Identical Knapsack Problem MIKP
	heterogêneos		Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem MHLOPP	Multiple Heterogeneous Knapsack Problem MHKP

QUADRO 2 – PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES: MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS

FONTE: Adaptado de Wäscher *et al.* (2007).

## 2.4 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS NOS PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES

Como observado na Seção 2.3 deste trabalho, qualquer padrão de carregamento obtido como solução do problema de carregamento de contêineres deve garantir que todas as caixas estejam completamente contidas no interior dos

contêineres, sem sobreposição de itens. De fato, os primeiros trabalhos que tratavam deste tema, como Gilmore e Gomory (1965), buscavam soluções que respeitassem apenas estas duas restrições de factibilidade.

À medida que as pesquisas sobre esse tema prosseguiram e, sobretudo, graças ao avanço computacional vivido nas últimas décadas do século XX, permitiu-se que mais exigências fossem acrescentadas aos problemas estudados. Bischoff e Ratcliff (1995) elencaram doze considerações práticas que, ao serem contempladas no estudo de problemas de carregamento de contêineres, levam à construção de padrões de carregamento mais realistas.

Na sequência, são abordadas as considerações práticas apresentadas por Bischoff e Ratcliff (1995), seguidas de uma breve descrição das mesmas.

#### 2.4.1 Limitação de Peso do Contêiner

Ao efetuar o processo de carregamento de um contêiner, o peso da totalidade de itens carregados não deve ultrapassar o peso máximo que o contêiner pode suportar. A consideração prática de limitação de peso pode ser modelada como uma restrição do tipo mochila, na qual a soma dos pesos dos itens carregados não ultrapassa o peso máximo suportável do contêiner. Esta consideração prática foi abordada, entre outros, por Terno *et al.* (2000), Gendreau *et al.* (2006) e Dereli e Das (2010).

#### 2.4.2 Distribuição de Peso no Contêiner

Esta consideração prática requer que o peso da carga seja distribuído de modo uniforme sobre o piso do contêiner. Junqueira *et al.* (2010) interpretam esta consideração como a exigência de aproximar, tanto quanto possível, o centro de gravidade da carga do centro geométrico do piso do contêiner. O balanceamento da carga diminui o risco dos itens movimentarem-se quando o contêiner é transportado. Bischoff e Ratcliff (1995) notam que cargas sem balanceamento podem inviabilizar operações de manuseio dos contêineres. Estudos acerca dessa consideração prática foram realizados por Chen *et al.* (1995) e Eley (2002; 2003).

### 2.4.3 Prioridade de Carregamento de Itens

A consideração prática de prioridade de carregamento de itens ocorre apenas em problemas cuja função objetivo busca maximizar o valor das saídas, uma vez que, nesses casos, o espaço total disponível para o padrão de carregamento não é suficiente para estocar todos os itens. É necessário decidir, então, quais itens devem ser carregados e quais devem ser deixados de lado, de acordo com a prioridade de embarque de cada item, tais como a data de entrega da caixa ou prazo de validade do produto. Esta consideração prática foi tratada por Bortfeldt e Gehring (1999) e Ren *et al.* (2011).

### 2.4.4 Orientação de Itens

Ao selecionar uma caixa, qualquer uma das três dimensões pode ser escolhida como a altura da mesma. Feita essa escolha, define-se uma *orientação vertical* para a caixa. O item pode, então, ser alinhado às paredes do contêiner através de duas *orientações horizontais* (BORTFELDT e WÄSCHER, 2013). Assim, uma caixa pode ser colocada ortogonalmente no interior de um contêiner com seis orientações distintas. Entretanto, na prática, o número de orientações pode ser restrito – Martello *et al.* (2000) e Junqueira *et al.* (2012) apresentam formulações com orientação fixa das caixas, enquanto Haessler e Talbot (1990) e Gendreau *et al.* (2006) estipulam apenas a orientação vertical dos itens, permitindo rotações de 90° no plano horizontal. Já Padberg (2000), Brunetta e Gregoire (2005) e Che *et al.* (2011) permitem que os itens sejam rotacionados livremente, assumindo a orientação mais conveniente dentre as seis possíveis.

### 2.4.5 Empilhamento de Itens

Esta consideração prática limita a quantidade de itens que podem ser colocados acima de uma caixa já posicionada no interior do contêiner, de modo a impedir que a caixa sofra deformações. Junqueira *et al.* (2010) afirmam que a

pressão exercida sobre a face superior de uma caixa não deve ultrapassar um limite determinado previamente. Já Bischoff e Ratcliff (1995) dizem que a pressão máxima que cada item pode suportar é frequentemente determinada pela resistência das paredes laterais da caixa, isto é, o peso necessário para esmagar a caixa quando uma força é aplicada, de cima para baixo, nas arestas da caixa. Trabalhos que tratam dessa consideração prática foram realizados por Christensen e Rousøe (2009), Junqueira *et al.* (2010; 2012) e Ceschia e Schaerf (2013).

#### 2.4.6 Carregamento Completo de Grupos de Itens

Em determinadas situações práticas, deve-se garantir que um subconjunto de itens esteja presente no carregamento, mesmo que isso acarrete no desperdício de parte do espaço interno do contêiner. A consideração prática de carregamento completo de grupos de itens ocorre apenas em problemas cuja função objetivo busca maximizar o valor das saídas, uma vez que, nesses casos, o espaço total disponível para o padrão de carregamento não é suficiente para estocar todos os itens.

Segundo Eley (2003), a restrição de carregamento completo pode ser dividida em quatro tipos diferentes: (i) um grupo composto por um único tipo de caixas deve ser completamente empacotado; (ii) uma combinação de caixas de diferentes tipos constitui um grupo que deve fazer parte (ou não) do padrão de carregamento; (iii) o número de caixas de um dado tipo deve ser múltiplo de determinado número; (iv) uma combinação de caixas de tipos distintos deve ser múltipla de um determinado número. Estudos acerca dessa consideração prática foram realizados por Eley (2003).

#### 2.4.7 Separação de Itens

Exigências de separação de itens ocorrem, geralmente, em problemas de carregamento de múltiplos contêineres. Tais exigências demandam que certos itens não sejam carregados no mesmo contêiner, ou sejam colocados afastados no

interior de um mesmo contêiner. Esta consideração prática foi abordada por Eley (2003).

#### 2.4.8 Agrupamento de Itens

Também chamada de *restrição de conectividade* (BORTFELDT e WÄSCHER, 2013), esta consideração prática requer que um subconjunto de itens seja obrigatoriamente carregado no mesmo contêiner. Exigências de agrupamento de itens ocorrem apenas em problemas de carregamento de múltiplos contêineres. Um exemplo é apresentado por Terno *et al.* (2000), Gendreau *et al.* (2006) e Moura e Oliveira (2009).

#### 2.4.9 Manuseio de Itens

Em virtude das características dos itens embarcados, como as dimensões e o peso das caixas, e visando agilizar os processos de embarque e desembarque, deve-se procurar dispor certos itens em posições pré-estabelecidas no interior do contêiner. Estudos de problemas de carregamento de contêineres envolvendo manuseio de itens foram apresentados por Haessler e Talbot (1990) e Bortfeldt e Gehring (1999).

#### 2.4.10 Múltiplos Destinos

A restrição prática de múltiplos destinos é, em geral, decorrente da combinação do problema de carregamento de contêineres com o problema de roteamento de veículos, onde procura-se efetuar a alocação da carga de modo a facilitar o desembarque da mesma. Tal restrição foi tratada por Gendreau *et al.* (2006), Christensen e Rousøe (2009), Junqueira *et al.* (2011) e Ceschia e Schaerf (2013).

#### 2.4.11 Estabilidade

A estabilidade do padrão de carregamento é, além da ocupação do espaço interno do contêiner, uma das mais importantes considerações práticas levadas em conta no problema de carregamento de contêineres, visto que a carga pode sofrer danos em virtude da falta de estabilidade. A restrição de estabilidade pode ser dividida em *estabilidade vertical*, que exige um percentual mínimo da base das caixas com apoio de outros itens ou do piso do contêiner, de modo que os itens resistam a ação da força de gravidade, e em *estabilidade horizontal*, que estabelece um percentual de adjacência das laterais das caixas com outros itens ou com as paredes do contêiner, de maneira que movimentos significativos quando o contêiner é movimentado sejam impedidos. Problemas envolvendo estabilidade vertical foram estudados por Eley (2002), Araújo e Armentano (2007), Junqueira *et al.* (2012) e Ceschia e Schaerf (2013); abordagens de problemas envolvendo estabilidade horizontal estão presentes nos trabalhos de Parreño *et al.* (2010) e Junqueira *et al.* (2012), entre outros.

#### 2.4.12 Complexidade de Carregamento

De acordo com Bischoff e Ratcliff (1995), restrições de complexidade de carregamento estão ligadas às limitações de recursos humanos e tecnológicos necessários para efetuar o processo de carregamento/descarregamento de itens. Arranjos de caixas muito complexos podem tomar muito tempo para serem executados pelos responsáveis pelo carregamento e, além disso, nem sempre podem ser efetuados com facilidade por dispositivos automatizados (BORTFELDT e WÄSCHER, 2013). Trabalhos que abordam a complexidade de carregamento foram realizados por Hifi (2002; 2004).



### 3 MODELOS MATEMÁTICOS E TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

Este capítulo busca traçar um panorama das formulações matemáticas apresentadas na literatura de problemas de carregamento de contêineres, bem como analisar e discutir alguns métodos propostos para a resolução de tais problemas.

#### 3.1 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS

Esta seção apresenta detalhadamente uma revisão de algumas formulações matemáticas que estão diretamente relacionadas com os problemas de carregamento de contêineres.

A seguir, as formulações matemáticas propostas por Chen *et al.* (1995), Hifi *et al.* (2010) e Junqueira *et al.* (2012) serão apresentadas e discutidas. A notação originalmente proposta pelos autores será mantida ao longo da apresentação dos modelos nas próximas seções.

##### 3.1.1 Abordagem de Chen *et al.* (1995)

A formulação matemática apresentada por Chen *et al.* (1995) trata do problema de carregamento de múltiplos contêineres de dimensões distintas, no qual um subconjunto de contêineres deve ser escolhido para acomodar todas as caixas disponíveis. O modelo de programação linear inteira mista proposto visa minimizar o espaço não utilizado de cada contêiner selecionado. Testes computacionais foram realizados para validar o modelo proposto, com considerações práticas de orientação e distribuição de peso tendo sido abordadas. De acordo com Bortfeldt e Wäscher (2013), a formulação proposta por Chen *et al.* (1995) pode ser usada para descrever problemas de carregamento de contêineres do tipo SSSCSP, MSSCSP, RCSP, SBSBPP, MBSBPP, RBPP e ODP.

Os parâmetros e variáveis usados na formulação são definidos da seguinte maneira:

$N$ : Número total de caixas para serem empacotadas.

$m$ : Número total de contêineres disponíveis.

$M$ : Número arbitrariamente grande.

$s_{ij}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  é carregada no contêiner  $j$ ; caso contrário, assume valor 0.

$n_j$ : Assume valor 1 se o contêiner  $j$  é usado; caso contrário, assume valor 0.

$(p_i, q_i, r_i)$ : Comprimento, largura e altura da caixa  $i$ , respectivamente.

$(L_j, W_j, H_j)$ : Comprimento, largura e altura do contêiner  $j$ , respectivamente.

$(x_i, y_i, z_i)$ : Variáveis contínuas que indicam a localização do vértice frontal esquerdo inferior da caixa  $i$ .

$(l_{xi}, l_{yi}, l_{zi})$ : Variáveis binárias que indicam se o comprimento da caixa  $i$  é paralelo ao eixo  $X, Y$  ou  $Z$ . Se, por exemplo,  $l_{xi}$  possui valor 1, então o comprimento da caixa  $i$  é paralelo ao eixo  $X$ ; caso contrário, possui valor 0.

$(w_{xi}, w_{yi}, w_{zi})$ : Variáveis binárias que indicam se a largura da caixa  $i$  é paralela ao eixo  $X, Y$  ou  $Z$ . Se, por exemplo,  $w_{xi}$  possui valor 1, então a largura da caixa  $i$  é paralela ao eixo  $X$ ; caso contrário, possui valor 0.

$(h_{xi}, h_{yi}, h_{zi})$ : Variáveis binárias que indicam se a altura da caixa  $i$  é paralela ao eixo  $X, Y$  ou  $Z$ . Se, por exemplo,  $h_{xi}$  possui valor 1, então a altura da caixa  $i$  é paralela ao eixo  $X$ ; caso contrário, possui valor 0.

As variáveis abaixo indicam a posição relativa de caixas distintas:

$a_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se à esquerda da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

$b_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se à direita da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

$c_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se atrás da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

$d_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se à frente da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

$e_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se abaixo da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

$f_{ik}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  encontra-se acima da caixa  $k$ ; caso contrário, assume valor 0.

Chen *et al.* (1995) observam que as variáveis que tratam da posição relativa das caixas são necessárias apenas quando  $i < k$ . A FIGURA 2 mostra um contêiner, com seu canto inferior frontal esquerdo posicionado na origem do sistema cartesiano de coordenadas, carregado com duas caixas  $i$  e  $k$ . Assim, os indicadores de designação  $s_{ij}$  e  $s_{kj}$  tem valor 1. Uma vez que a caixa  $i$  foi colocada à esquerda e atrás da caixa  $k$ , apenas as posições relativas  $a_{ik}$  e  $c_{ik}$  são iguais a 1. Observe que a caixa  $i$  tem comprimento, largura e altura paralelos, respectivamente, aos eixos  $X$ ,  $Z$  e  $Y$ . Logo, os indicadores de orientação  $l_{xi}$ ,  $w_{zi}$  e  $h_{yi}$  da caixa  $i$  assumem valor 1.

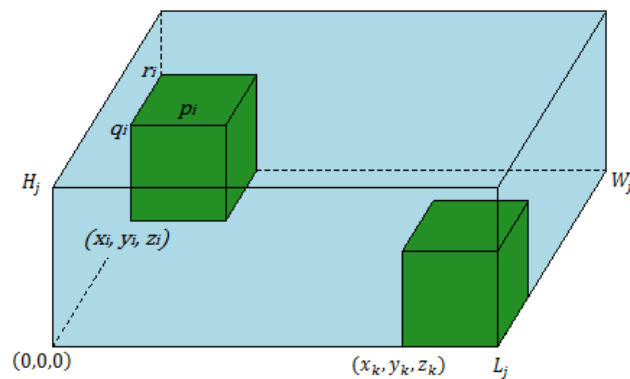


FIGURA 2 – POSIÇÃO RELATIVA DE CAIXAS NO INTERIOR DE UM CONTÊINER.

FONTE: Adaptado de Chen *et al.* (1995).

Os autores formulam sua proposta de resolução para o problema de carregamento de contêineres de acordo com o seguinte modelo:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^m L_j \cdot W_j \cdot H_j \cdot n_j - \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i \cdot r_i \quad (1)$$

Sujeito a

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (2)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot w_{xk} + r_k \cdot h_{xk} \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (3)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (4)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot l_{yk} + r_k \cdot h_{yk} \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (5)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq z_k + (1 - e_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (6)$$

$$z_k + r_k \cdot h_{zk} + q_k \cdot w_{zk} + p_k \cdot l_{zk} \leq z_i + (1 - f_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (7)$$

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} + e_{ik} + t_{ik} \geq s_{ij} + s_{kj} - 1, \quad \forall i, k, i < k \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m s_{ij} = 1, \quad \forall i \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N s_{ij} \leq M \cdot n_j, \quad \forall j \quad (10)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq L_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (11)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq W_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (12)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq H_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (13)$$

$$l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}, h_{xi}, h_{yi}, h_{zi}, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, e_{ik}, f_{ik}, s_{ij}, n_j \in \{0,1\} \quad (14)$$

$$x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$$

No modelo acima, a função objetivo (1) procura minimizar a perda de volume não utilizado dos contêineres selecionados. As restrições (2) – (8) impedem a sobreposição de caixas designadas para um mesmo contêiner. A restrição (9) garante que uma caixa seja armazenada em apenas um dos contêineres disponíveis, enquanto a expressão (10) assegura que, se uma caixa qualquer é designada a um contêiner  $j$ , tal contêiner está em uso. As restrições (11) – (13) garantem que todas as caixas são alocadas dentro do contêiner. Por fim, as expressões em (14) definem o domínio das variáveis do modelo.

As variáveis binárias  $l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}, h_{xi}, h_{yi}$  e  $h_{zi}$  são dependentes e relacionam-se da seguinte maneira:

$$l_{xi} + l_{yi} + l_{zi} = 1 \quad (15)$$

$$w_{xi} + w_{yi} + w_{zi} = 1 \quad (16)$$

$$h_{xi} + h_{yi} + h_{zi} = 1 \quad (17)$$

$$l_{xi} + w_{xi} + h_{xi} = 1 \quad (18)$$

$$l_{yi} + w_{yi} + h_{yi} = 1 \quad (19)$$

$$l_{zi} + w_{zi} + h_{zi} = 1 \quad (20)$$

Baseados pelas relações descritas acima, Chen *et al.* (1995) reescrevem as restrições (2) – (7) e (11) – (13) do modelo da seguinte maneira:

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot (l_{zi} - w_{yi} + h_{zi}) + r_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi} + w_{yi} - h_{zi}) \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M \quad (21)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot (l_{zk} - w_{yk} + h_{zk}) + r_k \cdot (1 - l_{xk} - l_{zk} + w_{yk} - h_{zk}) \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M \quad (22)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi}) + r_i \cdot (l_{xi} + l_{zi} - w_{yi}) \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M \quad (23)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot (1 - l_{xk} - l_{zk}) + r_k \cdot (l_{xk} + l_{zk} - w_{yk}) \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M \quad (24)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot (1 - l_{zi} - h_{zi}) + p_i \cdot l_{zi} \leq z_k + (1 - e_{ik}) \cdot M \quad (25)$$

$$z_k + r_k \cdot h_{zk} + q_k \cdot (1 - l_{zk} - h_{zk}) + p_k \cdot l_{zk} \leq z_i + (1 - f_{ik}) \cdot M \quad (26)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot (l_{zi} - w_{yi} + h_{zi}) + r_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi} + w_{yi} - h_{zi}) \leq L_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad (27)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi}) + r_i \cdot (l_{xi} + l_{zi} - w_{yi}) \leq W_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad (28)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot (1 - l_{zi} - h_{zi}) + p_i \cdot l_{zi} \leq H_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (29)$$

As restrições (21) – (29) apresentadas acima diferem das suas respectivas expressões definidas no modelo (1) – (14) unicamente pela eliminação das variáveis  $l_{yi}, w_{xi}, w_{zi}, h_{xi}$  e  $h_{yi}$ . O modelo revisado, definido pelas expressões (1), (8) – (10), (14) e (21) – (29) possui  $\frac{1}{2}mN(N - 1) + 3N(N + m - 1) + N + m$  restrições e  $(3N + m + 4)N + m$  variáveis, sendo  $(3N + m + 1)N + m$  variáveis binárias e  $3N$  variáveis contínuas.

Chen *et al.* (1995) ainda fornecem algumas modificações no modelo proposto, de modo a considerar outros casos especiais do problema de carregamento de contêineres. São apresentadas sugestões de adaptação do modelo para tratar situações onde deseja-se minimizar o comprimento de um contêiner, com o objetivo de armazenar um dado conjunto de caixas, adaptações que levem em conta a distribuição de peso no interior dos contêineres e, por último, adaptações para selecionar apenas um contêiner do conjunto disponível para alocar um dado conjunto de caixas. Por simplicidade, a apresentação dessas formulações será omitida deste trabalho.

### 3.1.2 Abordagem de Hifi *et al.* (2010)

Hifi *et al.* (2010) apresentam uma formulação matemática de programação linear inteira mista para abordar o problema de carregamento de contêineres, procurando minimizar o número de contêineres idênticos usados para carregar certo conjunto de caixas. Os autores apresentam desigualdades com a finalidade de melhorar o limitante inferior relaxado da abordagem proposta. Testes computacionais realizados mostram performance satisfatória em relação a alguns trabalhos da literatura, como Berkey e Wang (1987) e Martello *et al.* (2000). De acordo com Bortfeldt e Wäscher (2013), a formulação proposta por Hifi *et al.* (2010)

pode ser usada para descrever problemas de carregamento de contêineres do tipo SBSBPP.

Abaixo são definidos os parâmetros e as variáveis de decisão do modelo:

$n$ : Número de caixas.

$(w_i, h_i, d_i)$ : Largura, altura e comprimento, respectivamente, de cada caixa  $i$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

$(W, H, D)$ : Largura, altura e comprimento dos contêineres.

$\bar{\gamma}$ : Número inicial suficiente (limite superior) de contêineres capaz de empacotar as caixas disponíveis (onde  $n \geq \bar{\gamma}$ ).

$(x_i, y_i, z_i)$ : Coordenadas do canto inferior esquerdo posterior da caixa  $i$ , onde  $x_i \geq 0, y_i \geq 0, z_i \geq 0$  e  $i = 1, \dots, n$ .

$(0,0,0)$ : coordenadas do canto inferior esquerdo posterior do contêiner.

$\gamma_i$ : Rótulo do contêiner ao qual a caixa  $i$  foi designada ( $i = 1, \dots, n$ ). O objetivo é minimizar o maior rótulo do contêiner usado  $\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \{\gamma_i\}$ .

$l_{ij}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  está posicionada à esquerda da caixa  $j$ ; caso contrário, assume valor 0.

$u_{ij}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  está posicionada abaixo da caixa  $j$ ; caso contrário, assume valor 0.

$b_{ij}$ : Assume valor 1 se a caixa  $i$  está posicionada atrás da caixa  $j$ ; caso contrário, assume valor 0.

$c_{ij}$ : Assume valor 1 se  $\gamma_i < \gamma_j$ ; caso contrário, assume valor 0.

A seguir tem-se o modelo de programação linear inteira mista proposto:

$$\text{Minimizar } \gamma \quad (30)$$

Sujeito a

$$l_{ij} + l_{ji} + u_{ij} + u_{ji} + b_{ij} + b_{ji} + c_{ij} + c_{ji} = 1, \quad i < j = 1, \dots, n \quad (31)$$

$$x_i - x_j + W(l_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq W - w_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (32)$$

$$y_i - y_j + H(u_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq H - h_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (33)$$

$$z_i - z_j + D(b_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq D - d_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (34)$$

$$(\bar{\gamma} - 1)(l_{ij} + l_{ji} + u_{ij} + u_{ji} + b_{ij} + b_{ji}) + \gamma_i - \gamma_j + \bar{\gamma}c_{ij} \leq \bar{\gamma} - 1, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (35)$$

$$l_{ij}, u_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (36)$$

$$0 \leq x_i \leq W - w_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (37)$$

$$0 \leq y_i \leq H - h_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (38)$$

$$0 \leq z_i \leq D - d_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (39)$$

$$0 \leq \gamma_i \leq \gamma \leq \bar{\gamma}, \quad i = 1, \dots, n \quad (40)$$

No modelo dado por (30) – (40), as restrições (31) – (34) impedem a sobreposições de caixas; a expressão (35) diz que, se  $c_{ij}$  ou  $c_{ji}$  assumem valor 1, as caixas  $i$  e  $j$  estão localizadas em contêineres distintos e, se alguma das variáveis de posição relativa  $l_{ij}, l_{ji}, u_{ij}, u_{ji}, b_{ij}, b_{ji}$  assume valor 1, as caixas  $i$  e  $j$  ocupam o mesmo contêiner, enquanto as expressões (36) – (40) definem o domínio das variáveis do modelo. O parâmetro  $\bar{\gamma}$  é um limite superior para o número de contêineres. George e Robinson (1980) apresentam uma heurística de construção de paredes virtuais que permite obter tal parâmetro.

O método de resolução empregado por Hifi *et al.* (2010) consiste em determinar uma solução factível para o problema e, em seguida, buscar a solução ótima partindo de um nó inicial.

Hifi *et al.* (2010) apontam que os limites inferiores (*lower bounds*) obtidos por meio da resolução do modelo relaxado implicam na geração de uma quantidade grande e desnecessária de nós ao aplicar o método *branch and bound*, afetando a qualidade da solução. Para superar essa limitação, os autores apresentam desigualdades válidas adaptadas da literatura para resolver o modelo (30) – (40). Tais expressões foram adaptadas de Eastman *et al.* (1964), que apresentaram limitantes inferiores para o problema de sequenciamento de  $n$  trabalhos em  $m$  máquinas idênticas, e de Bekrar e Kacem (2009), que ajustaram estes limitantes para o problema de empacotamento de itens retangulares a partir de uma faixa de comprimento fixo e altura infinita. Hifi *et al.* (2010) generalizaram as desigualdades para o caso tridimensional, conforme as expressões a seguir:

$$W - w_i - \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot l_{ij})}{HD} \geq x_i \geq \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot l_{ji})}{HD} \quad (41)$$

$$H - h_i - \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot u_{ij})}{WD} \geq y_i \geq \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot u_{ji})}{WD} \quad (42)$$

$$D - d_i - \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot b_{ij})}{WH} \geq z_i \geq \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot b_{ji})}{WH} \quad (43)$$

$$\gamma - \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot c_{ij})}{WHD} \geq \gamma_i \geq \frac{\sum_{j \neq i} (w_j \cdot h_j \cdot d_j \cdot c_{ji})}{WHD} + 1 \quad (44)$$

A expressão (41) implica que o volume total de itens localizados à esquerda de um item do tipo  $i$  não pode ser maior do que o volume total remanescente após a alocação de tal item no interior do contêiner; as expressões (42) e (43) tem interpretação semelhante, dizendo respeito ao volume total localizado abaixo e atrás do item  $i$ . Os autores mostram que as inequações expostas acima são válidas devido a uma série de similaridades entre os problemas envolvidos, que, por simplicidade, não serão abordadas neste trabalho. Ao serem adicionadas ao modelo (30) – (40), as desigualdades (41) – (44) geram um limite inferior para o problema.

### 3.1.3 Abordagem de Junqueira *et al.* (2012)

O modelo de programação linear inteira binária apresentado por Junqueira *et al.* (2012) procura maximizar o volume ocupado de um único contêiner, levando em conta algumas considerações práticas descritas por Bischoff e Ratcliff (1995). Esta seção apresenta apenas o modelo base, com restrição de não-sobreposição, limitação do número de caixas e a restrição adicional de estabilidade vertical. Em Junqueira *et al.* (2010; 2011) e Yamashita e Morabito (2015), demais considerações práticas (estabilidade horizontal, empilhamento máximo, orientação de caixas e múltiplos destinos) são abordadas. Experimentos computacionais, com conjuntos de teste da literatura e gerados aleatoriamente, mostram que o modelo é coerente e descreve de modo satisfatório as condições abordadas. De acordo com Bortfeldt e Wäscher (2013), a formulação proposta por Junqueira *et al.* (2012) pode ser usada para descrever problemas de carregamento de contêineres do tipo IIPP, SLOPP e SKP.

Os índices, parâmetros e variáveis utilizados por Junqueira *et al.* (2012) em sua formulação matemática são os seguintes:

$(L, W, H)$ : Comprimento, largura e altura do contêiner, respectivamente.

$m$ : Quantidade de tipos de caixas disponíveis.

$(l_i, w_i, h_i)$ : Comprimento, largura e altura do contêiner, respectivamente, de uma caixa do tipo  $i$ , com  $i = 1, \dots, m$ .

$b_i$ : Quantidade de caixas do tipo  $i$  disponíveis, com  $i = 1, \dots, m$ .

$v_i$ : Volume de uma caixa do tipo  $i$ , com  $i = 1, \dots, m$ .



$\alpha$ : Coeficiente de estabilidade vertical, onde  $\alpha \in [0; 1]$ .

Citado em trabalhos correlatos, como Eley (2002; 2003), o coeficiente de estabilidade vertical indica a porcentagem da área da base de cada caixa que deve estar apoiada. Assim, se  $\alpha = 0$ , as caixas podem estar parcialmente apoiadas ou mesmo “flutuando” no interior do contêiner, ao passo que, se  $\alpha = 1$ , exige-se que 100% da área das faces inferiores das caixas estejam apoiadas pelas faces superiores das demais caixas ou pelo piso do contêiner.

Junqueira *et al.* (2012) assumem que tanto as caixas quanto o contêiner possuem dimensões inteiras e a orientação das caixas é fixa, embora os autores afirmem que essa exigência pode ser relaxada.

Tomando por base o sistema cartesiano de coordenadas, no qual a origem dos eixos coincide com o vértice inferior frontal esquerdo do contêiner, os autores descrevem, nos conjuntos (45) – (47), as possíveis posições  $(p, q, r)$  que o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa pode assumir no interior do contêiner (FIGURA 3).

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L - \min_i l_i, p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (45)$$

$$Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W - \min_i w_i, q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (46)$$

$$Z = \{r \mid 0 \leq r \leq H - \min_i h_i, r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (47)$$

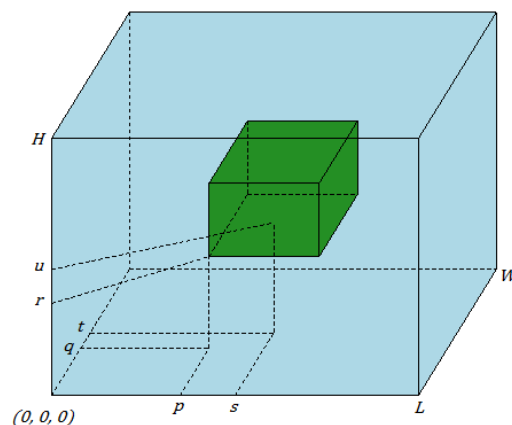


FIGURA 3 – CAIXA NO INTERIOR DE UM CONTÊINER.

FONTE: Adaptado de Junqueira *et al.* (2012).

Junqueira *et al.* (2012) notam que a utilização dos chamados *padrões normais* (ou *combinações cônicas*), definidos por Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), permitem reduzir os conjuntos definidos em (45) – (47) para:

$$X = \{p \mid p = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot l_i, 0 \leq p \leq L - \min_i l_i, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (48)$$

$$Y = \{q \mid q = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot w_i, 0 \leq q \leq W - \min_i w_i, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (49)$$

$$Z = \{r \mid r = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot h_i, 0 \leq r \leq H - \min_i h_i, 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (50)$$

Dados também os seguintes conjuntos:

$$X_i = \{p \in X \mid 0 \leq p \leq L - l_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (51)$$

$$Y_i = \{q \in Y \mid 0 \leq q \leq W - w_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (52)$$

$$Z_i = \{r \in Z \mid 0 \leq r \leq H - h_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (53)$$

As variáveis de decisão do modelo foram definidas como:

$$x_{ipqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice frontal inferior} \\ & \text{esquerdo no ponto } (p, q, r) \text{ do contêiner, tal que} \\ & 0 \leq p \leq L - l_i, 0 \leq q \leq W - w_i \text{ e } 0 \leq r \leq H - h_i \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (54)$$

O modelo proposto por Junqueira *et al.* (2012) para o problema de carregamento de um único contêiner com restrição de estabilidade vertical é dado por:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} v_i \cdot x_{ipqr} \quad (55)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_i \mid s - l_i + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i \mid t - w_i + 1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i \mid u - h_i + 1 \leq r \leq u\}} x_{ipqr} \leq 1, \quad (56)$$

onde  $s \in X$ ,  $t \in Y$  e  $u \in Z$

$$\sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ipqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (57)$$

$$\sum_{\{i|r'-h_i \geq 0\}}^m \sum_{\{p \in X_i | p' - l_i + 1 \leq p \leq p' + l_j - 1\}} \sum_{\{q \in Y_i | q' - w_i + 1 \leq q \leq q' + w_j - 1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot x_{ipq(r'-h_i)} \geq \alpha \cdot l_j \cdot w_j \cdot x_{jp'q'r'}$$

onde  $j = 1, \dots, m$ ,  $p' \in X_j$ ,  $q' \in Y_j$  e  $r' \in Z_j - \{0\}$  (58)

$$\text{com } \begin{cases} L_{ij} = \min(p + l_i, p' + l_j) - \max(p, p') \\ W_{ij} = \min(q + w_i, q' + w_j) - \max(q, q') \end{cases}$$

$$x_{ipqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in X_i, \quad q \in Y_i, \quad r \in Z_i \quad (59)$$

Na formulação matemática acima, a função objetivo (55) busca maximizar o volume utilizado do contêiner. A expressão (56) evita que um ponto  $(s, t, u)$  localizado no interior de uma caixa cujo vértice inferior frontal esquerdo é o ponto  $(p, q, r)$  seja ocupado por outra caixa. A restrição (57) não permite o carregamento de caixas do tipo  $i$  além da disponibilidade máxima; (58) garante que um percentual  $\alpha$  da área da base de uma caixa está apoiada pelo piso do contêiner ou pela face superior de uma ou mais caixas. Finalmente, as expressões (59) definem os domínios das variáveis do modelo.

### 3.2 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

De acordo com Pisinger (2002) e Bortfeldt e Wäscher (2013), problemas de carregamento de contêineres são classificados como problemas de otimização combinatória de nível *NP-hard*, isto é, particularmente difíceis de se resolver, o que justifica o fato de existirem poucos algoritmos exatos abordando esse problema.

Martello *et al.* (2000) apresentaram um algoritmo baseado no método *branch and bound* para problemas de carregamento de um único contêiner do tipo SKP e, baseado neste algoritmo, um método *branch and bound* para o problema de carregamento de múltiplos contêineres do tipo SBSBPP. Os dois algoritmos assumem caixas com orientação fixa e nenhuma restrição prática é considerada. Testes computacionais com instâncias de até 90 caixas foram efetuados, com resultados ótimos num limite de tempo razoável obtidos apenas em conjuntos de testes com até 20 caixas.

Hifi (2004) utiliza um algoritmo de busca em profundidade e um algoritmo de programação dinâmica para resolver problemas do tipo SLOPP. Restrições envolvendo a orientação das caixas são abordadas. A análise dos resultados obtidos

em um total de 64 conjuntos de testes, com até 50 caixas cada, mostrou que a proposta de Hifi (2004) fornece a solução ótima na maioria dos problemas testados.

Fekete *et al.* (2007) fornecem um algoritmo exato de busca em árvore para resolver problemas de carregamento de contêiner. Experimentos computacionais com 150 problemas do tipo SKP com até 80 caixas foram efetuados, e em 70% dos casos a solução ótima foi obtida.

Pisinger (2002) aponta que, devido à natureza complexa dos problemas, é comum recorrer à métodos heurísticos de resolução. Pilhas (ou torres) de caixas, paredes virtuais e cuboides são as estratégias mais comumente empregadas para resolução do problema de carregamento de contêineres.

O método de *pilhas de caixas* (FIGURA 4) consiste em escolher uma caixa para compor a base da pilha, que será posicionada no piso do contêiner, em seguida, as demais caixas devem ser dispostas sobre as caixas da pilha. Por último, com todas as caixas arranjadas em pilhas, deve-se alocar estas pilhas no piso do contêiner. Uma vez que esta técnica permite a construção de pilhas de modo independente, sua utilização favorece a abordagem de considerações como fragilidade e estabilidade vertical. Contudo, os padrões de carregamento obtidos em geral possuem pouca estabilidade horizontal e baixa ocupação de volume, sobretudo quando as caixas são fortemente heterogêneas. Essa técnica é utilizada por Haessler e Talbot (1990), Morabito e Arenales (1997) e Gehring e Bortfeldt (1997).

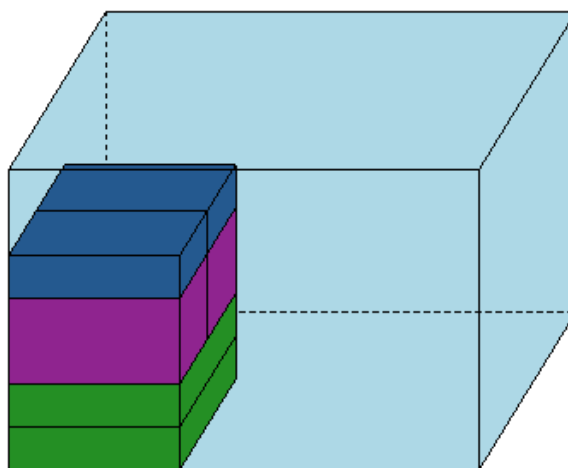


FIGURA 4 – EXEMPLO DE PILHA DE CAIXAS.

FONTE: O autor (2015).

A construção de *paredes virtuais* (FIGURA 5) consiste em construir camadas horizontais ou verticais paralelas a um dos lados do contêiner. As camadas verticais são construídas a partir de uma parede lateral do contêiner que progride em direção a parede oposta do mesmo. Por outro lado, as camadas horizontais são tomadas a partir do piso do contêiner em direção a parte superior do mesmo. Esta heurística é empregada por George e Robinson (1980), Bischoff e Ratcliff (1995), Terno *et al.* (2000), Pisinger (2002) e Lim e Zhang (2005).

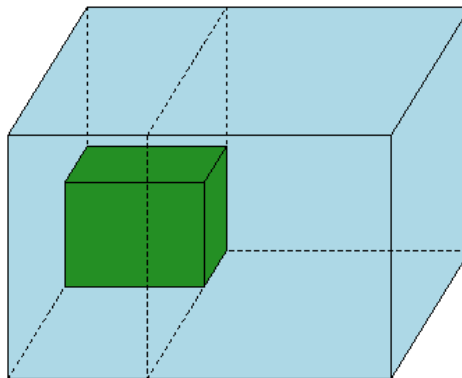


FIGURA 5 – EXEMPLO DE PAREDES VIRTUAIS.

FONTE: O autor (2015).

*Cuboides* (FIGURA 6) são blocos homogêneos formados por caixas de um mesmo tipo e alocadas com mesma orientação e de modo ortogonal no interior de um contêiner. Pisinger (2002) nota que cuboides sempre fornecem suporte suficiente para a base das caixas. Esse método de resolução é utilizado por Eley (2002), Araújo (2006) e Araújo e Armentano (2007).

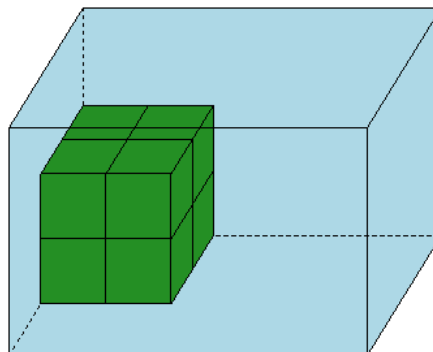


FIGURA 6 – EXEMPLO DE UM CUBOIDE.

FONTE: O autor (2015).

A técnica de *cortes guilhotinados* permite obter o padrão de carregamento do contêiner por meio de uma série de cortes realizados de uma face até a face oposta de uma caixa, originando duas caixas menores e adjacentes. Cortes guilhotinados são empregados nos trabalhos de Morabito e Arenales (1997) e Hassamontr (2003). Na FIGURA 7 são ilustrados padrões de corte guilhotinado (à esquerda) e não-guilhotinado (à direita).

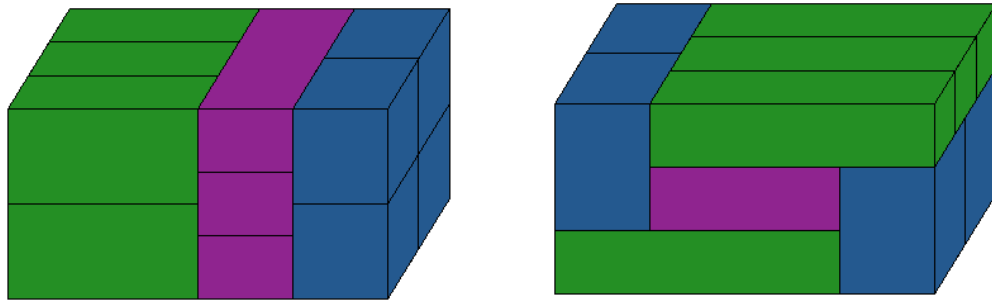


FIGURA 7 – EXEMPLO DE CORTE GUILHOTINADO E CORTE NÃO GUILHOTINADO.  
FONTE: O autor (2015).

Bortfeldt e Wäscher (2013) afirmam que meta-heurísticas são amplamente utilizadas para a resolução de problemas de carregamento de contêineres. Bortfeldt e Gehring (2001), He e Cha (2002) e Lin *et al.* (2006) apresentam técnicas de resolução baseadas no Algoritmo Genético; a Busca Tabu é empregada por Lodi *et al.* (2002), Iori (2004) e Gendreau *et al.* (2006); Otimização por Nuvem de Partículas (*Particle Swarm Optimization – PSO*) foi utilizada por Domingo *et al.* (2012); Yap *et al.* (2012) utilizam Otimização por Colônia de Formigas; procedimentos de busca adaptativa aleatória gulosa (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures – GRASP*) são utilizados por Moura e Oliveira (2005) e Araújo e Armentano (2007), enquanto Jin *et al.* (2004) e Dereli e Das (2010) fazem uso de *Simulated Annealing*.

Técnicas de busca em árvore, decomposição e relaxação são empregadas por Eley (2002), Pisinger (2002), Iori (2004), Christensen e Rousøe (2009), Fanslau e Bortfeldt (2010) e Ren *et al.* (2011).

## 4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PROPOSTA

Este capítulo descreve uma proposta para resolução do problema de carregamento de múltiplos contêineres com base nos trabalhos de Chen *et al.* (1995) e Junqueira *et al.* (2012). Considerações práticas de estabilidade vertical, orientação de itens e limitação de peso do contêiner serão tratadas neste capítulo, além de um procedimento heurístico para determinar as posições que uma caixa pode ocupar no interior dos contêineres, visando melhorar a performance do modelo.

### 4.1 PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DE NÚMEROS ÚTEIS

Tomando o sistema de coordenadas cartesiano, seja  $(p, q, r)$  o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa qualquer no interior de um contêiner (FIGURA 3). Os conjuntos (45) – (47) e (51) – (53), definidos por Junqueira *et al.* (2012), indicam todas as possíveis localizações que a caixa pode assumir ao longo do comprimento  $L$ , largura  $W$  e altura  $H$  do contêiner. Ao se considerar um problema no qual existem  $C$  tipos de contêineres, com um total de  $T_c$  contêineres do tipo  $k$ , onde  $k = 1, \dots, C$ , os conjuntos (45) – (47) podem ser adaptados da seguinte maneira:

$$X_k = \{p \mid 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_i), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (60)$$

$$Y_k = \{q \mid 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_i), \quad q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (61)$$

$$Z_k = \{r \mid 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_i), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (62)$$

Ajustes semelhantes devem ser feitos nos conjuntos definidos em (51) – (53):

$$X_{ik} = \{p \in X_k \mid 0 \leq p \leq L_k - l_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (63)$$

$$Y_{ik} = \{q \in Y_k \mid 0 \leq q \leq W_k - w_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (64)$$

$$Z_{ik} = \{r \in Z_k \mid 0 \leq r \leq H_k - h_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (65)$$

Em sua abordagem ao problema de carregamento de contêineres, Junqueira *et al.* (2012) notam que, mesmo considerando as combinações cônicas definidas em (48) – (50) para diminuir a quantidade de elementos dos conjuntos definidos em (45) – (47), que contêm todas as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo de uma dimensão do contêiner, apenas problemas de tamanho bastante moderado podem ser resolvidos otimamente.

Quando considera-se o carregamento de múltiplos contêineres, a grande quantidade de restrições e variáveis dos modelos fazem com que limitações do modelo fiquem ainda mais acentuadas, visto que ainda mais posições, em diferentes contêineres, deverão ser analisadas, acarretando na criação de seis conjuntos como os definidos em (60) – (65) para cada tipo diferente de contêiner que está disponível para carregamento.

Visando superar esta limitação, este trabalho apresenta uma proposta para determinar as posições que cada caixa pode ocupar utilizando o Procedimento de Geração dos Números Úteis (PGNU), elaborado com base no algoritmo proposto inicialmente por Carnieri *et al.* (1994) para resolução do problema de corte bidimensional guilhotinado de chapas de madeira. O algoritmo apresentado pelos autores permite a geração de apenas um grupo potencialmente útil de valores que podem ser avaliados como possível ponto de corte, descartando uma grande quantidade cuja avaliação é desnecessária na busca da solução do problema.

Carnieri *et al.* (1994) não estabelecem a posição dos possíveis resíduos na chapa de madeira inicial, visto que sua metodologia de resolução permite que a peça seja cortada em qualquer posição, independente de um ponto de referência. Como o modelo proposto por Junqueira *et al.* (2012) estabelece que o vértice inferior frontal esquerdo de um contêiner qualquer coincida com a origem do sistema cartesiano de coordenadas, uma adaptação ao PGNU original foi proposta, baseada no trabalho de Arce (2000).

Para compreender como são determinadas as possíveis posições que um conjunto de caixas pode ocupar no interior de um contêiner através do PGNU, considere um contêiner com dimensões  $(L, W, H)$  e  $m$  tipos distintos de caixas de comprimento  $l_i$ , largura  $w_i$  e altura  $h_i$ , com  $i = 1, \dots, m$ . Determina-se o menor comprimento  $\beta$  dentre as caixas disponíveis para carregamento, definindo, assim, o primeiro número útil. A partir de cada número útil encontrado, devem ser calculados pontos de corte ao longo de  $L$  para cada tipo de caixa  $i$ , extraindo dele  $\gamma$  comprimentos de caixa ( $\gamma = 1, 2, \dots$ ), desde que o tamanho remanescente do comprimento do contêiner seja suficiente para posicionar uma caixa de menor comprimento. Os números úteis encontrados nessa etapa são adicionados ao conjunto já existente, removendo possíveis elementos repetidos. O procedimento é



repetida até que reste um único tipo de caixa, concluindo assim a geração de números úteis referentes ao comprimento do contêiner, conforme QUADRO 3.

**Etapa 1.** Calcule  $\beta = \min\{l_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ . Defina  $X^{(m+1)} = U^{(m+1)} = \{0\}$ , e faça  $k = m$ .

**Etapa 2.** Calcule  $U^{(k)} = \{a + \gamma \cdot l_k; a \in X^{(k+1)}, \gamma = 1, 2, \dots, \text{e } L - (a + \gamma \cdot l_k) \geq \beta\}$ .

**Etapa 3.** Faça  $X^{(k)} = U^{(k)} \cup X^{(k+1)}$ . Remova quaisquer números equivalentes de  $X^{(k)}$ .

**Etapa 4.** Se  $k > 1$ , faça  $k \leftarrow k - 1$  e retorne a Etapa 2. Caso contrário, pare. O conjunto  $X = X^{(1)}$  contém a lista dos números úteis gerados.

QUADRO 3 – PSEUDOCÓDIGO DO PGNU.

FONTE: Adaptado de Arce (2000).

Note que o procedimento descrito acima descreve apenas as posições que as caixas podem ocupar ao longo do comprimento  $L$  do contêiner; o processo deve ser repetido também para as demais dimensões do contêiner. Logo, a ordem de escolha das dimensões do contêiner para a aplicação do PGNU é arbitrária.

Para ilustrar a utilização do PGNU, considere um contêiner de dimensões  $(L, W, H) = (21, 20, 23)$  e 3 tipos caixas distintas com dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (8, 6, 8)$ ,  $(l_2, w_2, h_2) = (7, 9, 8)$  e  $(l_3, w_3, h_3) = (6, 5, 7)$ . A aplicação do PGNU gera os conjuntos abaixo, que contém respectivamente, 8, 9 e 6 elementos:

$$X = \{0, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15\} \quad (66)$$

$$Y = \{0, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15\} \quad (67)$$

$$Z = \{0, 7, 8, 14, 15, 16\} \quad (68)$$

Para efeito de comparação, a geração de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  por meio de (45) – (47) fornece os seguintes conjuntos, com respectivamente 15, 15 e 16 elementos:

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \quad (69)$$

$$Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \quad (70)$$

$$Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \quad (71)$$

O exemplo acima deixa clara a redução de pontos a serem avaliados como vértice de uma determinada caixa quando o PGNU é empregado, podendo gerar significativos ganhos ao resolver-se os modelos. Vale salientar, no entanto, que o

PGNU obterá os mesmos conjuntos de (45) – (47) se avaliar uma caixa com uma ou mais dimensões iguais a 1 ao longo dos eixos do contêiner.

#### 4.2 MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR BINÁRIA PROPOSTO

A formulação matemática proposta neste trabalho utiliza conjuntos construídos através da heurística PGNU, considerando  $m$  tipos distintos de caixas em cada aplicação do algoritmo, para adaptar o modelo de Junqueira *et al.* (2012) de modo a considerar problemas de carregamento de contêineres do tipo minimização do valor das entradas. Tendo como objetivo minimizar o espaço ocioso no interior de cada contêiner utilizado para carregamento, a função objetivo descrita por Chen *et al.* (1995) é alterada de modo considerar os  $C$  tipos distintos de contêineres, bem como sua disponibilidade  $T_k$ .

Os conjuntos definidos em (72) – (74) indicam as possíveis posições que as caixas podem assumir ao longo dos eixos de um contêiner do tipo  $k$  ( $k = 1, \dots, C$ ), cujo comprimento, largura e altura são, respectivamente,  $L_k$ ,  $W_k$  e  $H_k$ .

$$\bar{X}_k = \{p \mid p \text{ é um número útil do comprimento do contêiner do tipo } k, \quad p \in \mathbb{Z}\} \quad (72)$$

$$\bar{Y}_k = \{q \mid q \text{ é um número útil da largura do contêiner do tipo } k, \quad q \in \mathbb{Z}\} \quad (73)$$

$$\bar{Z}_k = \{r \mid r \text{ é um número útil da altura do contêiner do tipo } k, \quad r \in \mathbb{Z}\} \quad (74)$$

Dos conjuntos acima, derivam:

$$\bar{X}_{ik} = \{p \in \bar{X}_k \mid 0 \leq p \leq L_k - l_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (75)$$

$$\bar{Y}_{ik} = \{q \in \bar{Y}_k \mid 0 \leq q \leq W_k - w_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (76)$$

$$\bar{Z}_{ik} = \{r \in \bar{Z}_k \mid 0 \leq r \leq H_k - h_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (77)$$

A variável binária que indica se uma caixa será carregada em um dos contêineres disponíveis passa a ser definida como se segue:

$$x_{ijkpqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice frontal inferior} \\ & \text{esquerdo no ponto } (p, q, r) \text{ do } j\text{-ésimo contêiner do tipo } k, \\ & \text{tal que } 0 \leq p \leq L_k - l_i, 0 \leq q \leq W_k - w_i \text{ e } 0 \leq r \leq H_k - h_i \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (78)$$

$$k = 1, \dots, C \text{ e } j = 1, \dots, T_k$$

A variável binária que indica se um dos contêineres disponíveis será utilizado no carregamento é dada por:

$$e_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{Se o } j\text{-ésimo contêiner do tipo } k \text{ é utilizado} \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (79)$$

$k = 1, \dots, C$  e  $j = 1, \dots, T_k$

Assim, o modelo de programação linear binária proposto neste trabalho é definido da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} L_k \cdot W_k \cdot H_k \cdot e_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot b_i \quad (80)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in \bar{Z}_{ik} \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq e_{jk} \quad (81)$$

$$s \in \bar{X}_k, t \in \bar{Y}_k, u \in \bar{Z}_k, \forall k = 1, \dots, C, \text{ e } j = 1, \dots, T_k$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (82)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, C, \quad j = 1, \dots, T_k, \quad p \in \bar{X}_{ik}, \quad (83)$$

$$q \in \bar{Y}_{ik}, \quad r \in \bar{Z}_{ik}, \quad e_{jk} \in \{0,1\}$$

A função objetivo (80) procura minimizar o volume não utilizado do conjunto de contêineres selecionados para acomodar as caixas. O somatório em (81) garante que não há sobreposição entre caixas no interior do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , caso o mesmo tenha sido selecionado. A restrição (82) exige que todas as caixas do tipo  $i$  façam parte do padrão de carregamento, enquanto (83) apresenta o domínio das variáveis de decisão.

Embora o modelo acima trate de problemas de carregamento de múltiplos contêineres distintos, se tomarmos  $C = 1$ , isto é, se considerarmos que existe um único tipo de contêiner disponível para carregamento, com disponibilidade  $T_k$ , é possível fazer uma nova adaptação da formulação, desta vez para considerar problemas de carregamento de múltiplos contêineres idênticos. Visto que assumir  $C = 1$  torna alguns somatórios redundantes, o modelo (80) – (83) pode ser reescrito do seguinte modo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{T_k} L \cdot W \cdot H \cdot e_j - \sum_{i=1}^m v_i \cdot b_i \quad (84)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in \bar{X}_i \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_i \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in \bar{Z}_i \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijpqr} \leq e_j \quad (85)$$

$$s \in \bar{X}, t \in \bar{Y}, u \in \bar{Z}, \forall j = 1, \dots, T_k$$

$$\sum_{j=1}^{T_k} \sum_{p \in \bar{X}_i} \sum_{q \in \bar{Y}_i} \sum_{r \in \bar{Z}_i} x_{ijpqr} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (86)$$

$$x_{ijpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, T_k, \quad p \in \bar{X}_i, \quad q \in \bar{Y}_i \quad (87)$$

$$r \in \bar{Z}_i, \quad e_j \in \{0,1\}$$

Na formulação acima, os conjuntos  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{X}_i$ ,  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{Z}_i$  são construídos como os conjuntos de (72) – (77). A interpretação da função objetivo e das restrições do modelo são semelhantes àquelas em (80) – (83).

Alternativamente, tanto a formulação (80) – (83) quanto o modelo (84) – (87) podem ser manipulados de modo a considerar problemas de maximização do valor das saídas, bastando redefinir a função objetivo de modo a maximizar o volume (ou valor) das caixas carregadas e efetuar alterações pontuais nas restrições. Esta manipulação é apresentada com maiores detalhes em Kurpel *et al.* (2014), Scarpin *et al.* (2014) e Schnekenberg *et al.* (2014).

#### 4.3 CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE LIMITAÇÃO DE PESO DO CONTÊINER

Ao realizar a alocação de caixas no interior de um contêiner, o peso da totalidade de itens carregados não deve ultrapassar o peso máximo que o contêiner pode suportar. Conforme citado na seção 2.4.1, a consideração prática de limitação de peso pode ser modelada como uma restrição do tipo mochila, de um modo similar ao proposto por Junqueira (2009), na qual a soma dos pesos  $p_i$  das caixas do tipo  $i$  carregadas deve ser menor ou igual ao peso máximo suportável por um contêiner do tipo  $k$ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} p_i \cdot x_{ijkpqr} \leq P_{jk}, \quad \forall k = 1, \dots, C \text{ e } j = 1, \dots, T_k \quad (88)$$

Onde  $P_{jk}$  é o peso máximo que o  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$  foi projetado para suportar.

#### 4.4 CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE ORIENTAÇÃO DE ITENS

Ao efetuar o carregamento de um caixa no interior de um contêiner, qualquer uma das três dimensões da mesma pode ser escolhida como sua altura – esta escolha define a orientação vertical da caixa. Visto que apenas o posicionamento de forma ortogonal é permitido, o alinhamento da caixa em relação as paredes do contêiner pode ocorrer através de duas orientações horizontais (BORTFELDT e WÄSCHER, 2013). Assim, três casos de orientação de caixas podem ser admitidos: fixa, horizontais e múltiplas.

Quando a orientação das caixas é *fixa*, uma única orientação é permitida para cada tipo de caixa, eliminando a possibilidade de rotação em torno dos eixos da caixa para alocação em espaços ociosos do contêiner. Os modelos definidos nas equações (80) – (83) e (84) – (87) assumem que as caixas possuem orientação fixa.

Situações onde a *orientação horizontal* é permitida surgem quando a altura da caixa é fixa, mas a base da caixa pode sofrer rotações de 90°. Tais situações ocorrem quando, visando proteger o conteúdo, existe uma instrução do tipo “este lado para cima” em uma das superfícies da caixa.

Pode-se manipular os modelos apresentados na seção 4.2, de maneira similar ao proposto por Junqueira (2009), para permitir rotações horizontais, considerando cada orientação de uma caixa do tipo  $i$  como um tipo distinto de caixa; assim, enquanto uma caixa tem dimensões originais  $(l_i, w_i, h_i)$ , sua rotação horizontal é encarada como uma caixa distinta, cujas medidas são  $(w_i, l_i, h_i)$ . Logo, o modelo terá  $2m$  tipos de caixas distintas, e pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} L_k \cdot W_k \cdot H_k \cdot e_{jk} - \sum_{i=1}^{2m} v_i \cdot b_i \quad (89)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{2m} \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in \bar{Z}_{ik} \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq e_{jk} \quad (90)$$

$$s \in \bar{X}_k, t \in \bar{Y}_k, u \in \bar{Z}_k, \forall k = 1, \dots, C, j = 1, \dots, T_k$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} \sum_{i=2a-1}^{2a} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = b_a, \quad a = 1, \dots, m \quad (91)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 2m, \quad k = 1, \dots, C, \quad j = 1, \dots, T_k, \quad a = 1, \dots, m \quad (92)$$

$$p \in \bar{X}_{ik}, \quad q \in \bar{Y}_{ik}, \quad r \in \bar{Z}_{ik}, \quad e_{jk} \in \{0,1\}$$

Enquanto nas expressões (89), (90) e (92)  $i$  varia até  $2m$ , em (91) o índice  $a$  varia até  $m$ ; além disso, há um somatório extra em relação à (82). Esta diferenciação se faz necessária por que a caixa  $i$  só pode ser colocada com uma dentre as duas orientações permitidas, respeitando ainda o total de caixas disponíveis.

Por fim, as caixas podem assumir múltiplas orientações quando nenhuma dimensão particular de uma caixa é estabelecida *a priori* como altura, isto é, rotações são permitidas em todos os seus eixos.

Similar à formulação (89) – (92) e ao exposto por Junqueira (2009), as rotações de uma caixa do tipo  $i$  cujas medidas são  $(l_i, w_i, h_i)$  podem ser consideradas como caixas distintas de dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$ ,  $(l_i, h_i, w_i)$ ,  $(w_i, l_i, h_i)$ ,  $(w_i, h_i, l_i)$ ,  $(h_i, l_i, w_i)$  e  $(h_i, w_i, l_i)$ , e o modelo é adaptado como segue:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} L_k \cdot W_k \cdot H_k \cdot e_{jk} - \sum_{i=1}^{6m} v_i \cdot b_i \quad (93)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{6m} \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in \bar{Z}_{ik} \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq e_{jk} \quad (94)$$

$$s \in \bar{X}_k, t \in \bar{Y}_k, u \in \bar{Z}_k, \forall k = 1, \dots, C, j = 1, \dots, T_k$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} \sum_{i=6a-5}^{6a} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = b_a, \quad a = 1, \dots, m \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 6m, \quad k = 1, \dots, C, \quad j = 1, \dots, T_k, \quad a = 1, \dots, m \\
p \in \bar{X}_{ik}, \quad q \in \bar{Y}_{ik}, \quad r \in \bar{Z}_{ik}, \quad e_{jk} \in \{0,1\}
\end{aligned} \tag{96}$$

A interpretação da formulação acima é análoga a (89) – (92).

Junqueira (2009) discute ainda outro modo de manipular o modelo (55) – (59) para considerar múltiplas orientações de caixas, que consiste na inserção de um índice  $g$  às variáveis (54) do modelo. O mesmo indica a orientação escolhida para uma caixa do tipo  $i$  dentre as seis possíveis posições que o item pode assumir, isto é,  $g \in \Omega_i \neq \emptyset$ , onde  $\Omega_i \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Quando implementada à formulação (80) – (83), tal manipulação resulta no seguinte modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} L_k \cdot W_k \cdot H_k \cdot e_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot b_i \tag{97}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{g \in \Omega} \sum_{\{p \in X_{ik} \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{igjkpqr} \leq e_{jk} \tag{98}$$

$$s \in X_k, t \in Y_k, u \in Z_k, \forall k = 1, \dots, C, j = 1, \dots, T_k$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{j=1}^{T_k} \sum_{g \in \Omega} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{igjkpqr} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, C, \quad j = 1, \dots, T_k \\
\Omega_i \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad g \in \Omega_i, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik} \\
e_{jk} \in \{0,1\}
\end{aligned} \tag{100}$$

A interpretação do modelo dado acima é idêntica as expressões em (93) – (96).

#### 4.5 CONSIDERAÇÃO PRÁTICA DE ESTABILIDADE VERTICAL

A estabilidade do padrão de carregamento é, além da ocupação do espaço interno do contêiner, uma das mais importantes restrições possíveis de serem abordadas no problema de carregamento de contêineres, visto que a carga pode

sofrer danos em virtude da falta de estabilidade. Este trabalho adaptará, para problemas de carregamento de múltiplos contêineres, a restrição de estabilidade vertical proposta por Junqueira *et al.* (2012). Por simplicidade, apenas a estabilidade vertical da carga é abordada. Mais informações a respeito da componente horizontal da estabilidade, bem como uma interpretação geométrica da estabilidade de caixas, podem ser obtidas em Junqueira *et al.* (2012).

$$\sum_{\{i|r'-h_i \geq 0\}}^m \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} \mid p' - l_i + 1 \leq p \leq p' + l_i - 1\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} \mid q' - w_i + 1 \leq q \leq q' + w_i - 1\}} L_{i\hat{i}} \cdot W_{i\hat{i}} \cdot x_{ijkpq(r'-h_i)} \geq \alpha \cdot l_i \cdot w_i \cdot x_{ip'q'r'} \quad (101)$$

onde  $\hat{i} = 1, \dots, m$ ,  $p' \in \bar{X}_{\hat{i}}$ ,  $q' \in \bar{Y}_{\hat{i}}$  e  $(r' - h_i) \in \bar{Z}_{\hat{i}} - \{0\}$

$$\text{com } \begin{cases} L_{i\hat{i}} = \min(p + l_i, p' + l_i) - \max(p, p') \\ W_{i\hat{i}} = \min(q + w_i, q' + w_i) - \max(q, q') \end{cases}$$

$$x_{ijkpq(r'-h_i)} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, C, \quad j = 1, \dots, T_k, \quad (102)$$

$$p \in \bar{X}_{ik}, \quad q \in \bar{Y}_{ik}, \quad r \in \bar{Z}_{ik}$$

A restrição (101) garante que uma porcentagem mínima  $\alpha$  da base de uma caixa do tipo  $\hat{i}$  esteja apoiada pela face superior de uma ou mais caixas de um tipo  $i$  qualquer. Já as expressões em (102) descrevem o domínio das variáveis da restrição.



## 5 TESTES COMPUTACIONAIS E RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na avaliação da performance computacional da formulação proposta no capítulo anterior. Implementados através de um código em linguagem de programação *Microsoft Visual Studio Ultimate 2012*©, os modelos foram resolvidos pelo *software* de otimização *CPLEX*© *Interactive Optimizer*, versão 12.6.0.0, com parâmetros padrão. Os modelos foram avaliados tanto com conjuntos de teste gerados aleatoriamente quanto com instâncias da literatura de carregamento de contêineres.

### 5.1 CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

#### 5.1.1 Geração dos Conjuntos de Teste

O processo empregado para geração aleatória dos conjuntos de teste é baseado na metodologia apresentada por Junqueira *et al.* (2012), consistindo em determinar valores inteiros que irão compor as dimensões, a quantidade e os tipos de caixas e contêineres de cada instância a ser avaliada.

Um total de 40 instâncias foram criadas visando testar os modelos definidos no Capítulo 4. Inicialmente, a quantidade de tipos de contêineres disponíveis para carregamento corresponde a um valor inteiro escolhido por meio da distribuição uniforme no intervalo de um a três, ou seja,  $C \in [1, 3]$ ,  $C \in \mathbb{Z}$ . As dimensões  $(L_k, W_k, H_k)$  de um contêiner do tipo  $k$ ,  $k = 1, \dots, C$ , são valores inteiros uniformemente escolhidos no intervalo  $[10, 25]$ .

Quatro tipos distintos de caixas foram considerados para construção dos conjuntos de teste, ou seja,  $m = 1, 2, 3, 4$ . Visando criar conjuntos tanto com caixas fracamente heterogêneas quanto fortemente heterogêneas, duas estratégias distintas foram empregadas para determinar a dimensão das caixas.

Em vinte conjuntos de testes, as dimensões das caixas foram determinadas por meio da distribuição uniforme nos seguintes conjuntos:  $l_i \in [0,25 \cdot \mathbb{L}; 0,75 \cdot \mathbb{L}]$ ,  $w_i \in [0,25 \cdot \mathbb{W}; 0,75 \cdot \mathbb{W}]$ ,  $h_i \in [0,25 \cdot \mathbb{H}; 0,75 \cdot \mathbb{H}]$ , onde  $\mathbb{L} \leq L_k$ ,  $\mathbb{W} \leq W_k$  e  $\mathbb{H} \leq H_k$ ,  $\forall k$ . Para cada valor de  $m$ , cinco instâncias foram construídas. As caixas geradas por

meio desse procedimento constituem o chamado *Grupo 1* de conjuntos de teste deste trabalho (conjuntos de teste 1 a 20).

As caixas das vinte instâncias remanescentes tiveram suas dimensões uniformemente escolhidas nos seguintes conjuntos:  $l_i \in [0,10 \cdot \mathbb{L}; 0,50 \cdot \mathbb{L}]$ ,  $w_i \in [0,10 \cdot \mathbb{W}; 0,50 \cdot \mathbb{W}]$ ,  $h_i \in [0,10 \cdot \mathbb{H}; 0,50 \cdot \mathbb{H}]$ , onde  $\mathbb{L} \leq L_k$ ,  $\mathbb{W} \leq W_k$  e  $\mathbb{H} \leq H_k$ ,  $\forall k$ . Para cada valor de  $m$ , foram criados cinco conjuntos de teste. As caixas geradas por meio desse procedimento constituem o *Grupo 2* de instâncias (conjuntos de teste 21 a 40).

Como, por simplicidade, considera-se que as dimensões das caixas devem ser valores inteiros, ambas as estratégias citadas acima consideram apenas a parte inteira de números fracionários escolhidos aleatoriamente.

Vale a pena ressaltar que, de modo geral, o PGNU, mesmo considerando as múltiplas orientações, gera uma menor quantidade de pontos candidatos a vértice inferior frontal esquerdo quando aplicado às caixas do Grupo 1. Isso significa que os problemas deste grupo apresentam menor quantidade de variáveis e restrições e, conseqüentemente, tendem a possuir menor complexidade de resolução.

A disponibilidade  $b_i$  de cada tipo de caixa,  $i = 1, \dots, m$ , foi obtida escolhendo uniformemente um valor inteiro no intervalo  $[10, 200]$  tanto para as instâncias do Grupo 1 quanto do Grupo 2.

Por fim, a quantidade de contêineres disponíveis para carregamento foi definida como o dobro da quantidade do contêiner de menor volume necessário para estocar todo o volume das caixas disponíveis.

As instâncias podem ser consultadas no APÊNDICE 1 deste trabalho.

### 5.1.2 Resultados dos Testes Computacionais

Os conjuntos de teste discutidos na seção anterior foram testados em quatro cenários distintos: no primeiro, considerou-se apenas a não sobreposição de caixas com orientação fixa; no segundo, levou-se em conta a não sobreposição de caixas com orientação fixa e com estabilidade vertical; no terceiro, considerou-se a não sobreposição de caixas com até seis orientações permissíveis; por fim, o quarto cenário levou em conta a não sobreposição de caixas com até seis orientações

permissíveis e estabilidade vertical. As equações utilizadas em cada cenário são apresentadas na TABELA 1.

TABELA 1 – DESCRIÇÃO DAS EQUAÇÕES UTILIZADAS EM CADA CENÁRIO CONSIDERADO

Cenário	Equações do Modelo
1	(80) – (83)
2	(80) – (83) e (101) – (102)
3	(93) – (96)
4	(93) – (96) e (101) – (102)

FONTE: O autor (2015)

Um limite de tempo de 3600 segundos (1 hora) foi estabelecido para a execução dos testes. Quatro tipos de solução podem ser encontrados:

- Solução ótima, com *gap* de otimalidade nulo;
- Solução não ótima, com *gap* de otimalidade não nulo e tempo de resolução excedido pelo *CPLEX*;
- Solução não ótima, com *gap* de otimalidade não nulo e insuficiência de memória do computador para resolver o problema;
- Sem solução, sem *gap* de otimalidade e com insuficiência de memória do computador para resolver o modelo pelo *CPLEX*.

Um *gap* de otimalidade é dado por:

$$gap = \frac{(\text{melhor valor obtido} - \text{melhor limitante obtido})}{(\text{melhor valor obtido})} \cdot 100\% \quad (103)$$

Para os modelos que possuem restrição de estabilidade vertical, a constante de estabilidade foi definida em  $\alpha = 1$ , isto é, a face inferior de cada caixa carregada deve estar totalmente apoiada nas demais caixas ou no piso do contêiner. Esse valor é comumente encontrado na literatura, sendo utilizado, por exemplo, por Eley (2003) e Junqueira *et al.* (2012).

As tabelas 2 a 5, apresentadas na sequência, mostram o *gap* de otimalidade, a quantidade contêineres utilizados, a ocupação mínima, máxima e média dos contêineres e o tempo computacional obtidos na execução dos testes para cada cenário considerado na avaliação do modelo.

TABELA 2 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 1

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	Tempo (s)
1	0,00	4	13,85	35,73	57,60	0,31
2	0,00	4	63,92	66,05	68,18	0,30
3	0,00	12	13,66	20,49	27,31	0,02
4	0,00	18	35,03	40,87	46,70	0,05
5	0,00	3	65,28	78,72	92,16	0,50
6	0,00	11	51,32	57,49	63,65	0,08
7	0,00	55	35,79	40,38	44,97	0,03
8	0,00	5	34,36	55,43	76,50	0,80
9	0,00	3	79,80	86,57	93,33	8,48
10	0,00	5	78,11	87,54	96,97	0,53
11	0,00	7	60,22	72,03	83,84	21,08
12	0,00	9	63,21	71,75	80,28	1,27
13	0,00	7	68,90	79,64	90,38	0,42
14	0,00	60	19,24	39,23	59,21	0,05
15	0,00	14	53,86	73,99	94,12	0,08
16	0,00	9	38,29	63,69	89,09	4,42
17	0,00	6	57,97	61,72	65,47	18,27
18	0,00	72	18,55	28,64	38,73	0,08
19	0,00	52	31,58	42,44	53,29	0,14
20	0,00	10	25,67	59,42	93,16	0,56
21	0,00	2	40,00	68,00	96,00	0,17
22	0,00	1	80,77	80,77	80,77	0,39
23	0,00	4	75,63	75,63	75,63	0,03
24	0,00	9	23,15	53,24	83,33	0,23
25	0,00	2	70,40	83,20	96,00	0,31
26	0,00	4	75,00	78,95	82,89	38,88
27	0,00	3	59,88	66,01	72,14	0,11
28	0,00	4	73,59	77,69	81,79	0,77
29	0,00	1	83,80	83,80	83,80	0,80
30	0,00	13	55,62	76,30	96,97	0,05
31	0,00	7	51,13	67,24	83,34	5,63
32	0,00	7	82,42	87,77	93,12	22,01
33	0,00	7	57,76	78,88	100,00	0,47
34	0,00	7	52,51	66,64	80,77	2,56
35	0,00	4	38,19	69,10	100,00	1,26
36	0,00	16	29,76	54,07	78,38	10,59
37	0,00	14	64,10	72,05	80,00	5,91
38	0,00	9	58,19	71,52	84,85	611,13
39	0,00	7	68,61	74,53	80,45	1,41

continua

TABELA 2 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 1

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	conclusão
						Tempo (s)
40	0,00	15	41,55	58,30	75,04	1,64
Total	Grupo 1	384	45,43	58,09	70,75	
	Grupo 2	136	59,10	72,18	85,26	
	Geral	520	52,27	65,14	78,01	
Tempo Médio (s)						19,05

FONTE: O autor (2015).

O modelo apresentado neste trabalho apresenta bons resultados quando considera apenas não sobreposição de caixas com orientação fixa (Cenário 1). Os quarenta conjuntos de testes foram resolvidos otimamente, com tempo computacional médio de 19,05 segundos. Em virtude da maneira com que as dimensões das caixas foram geradas, as instâncias do Grupo 2 apresentam, de modo geral, maior utilização do volume interno dos contêineres, uma vez que as caixas que compõem estes conjuntos de teste possuem dimensões pequenas em relação aos contêineres. Entretanto, como apresentam maior número de variáveis e restrições, o tempo computacional é mais elevado para resolvê-los quando comparado com o tempo gasto para obter a solução das instâncias do Grupo 1.

A FIGURA 8 apresenta o padrão de carregamento obtido para o conjunto de teste 28.

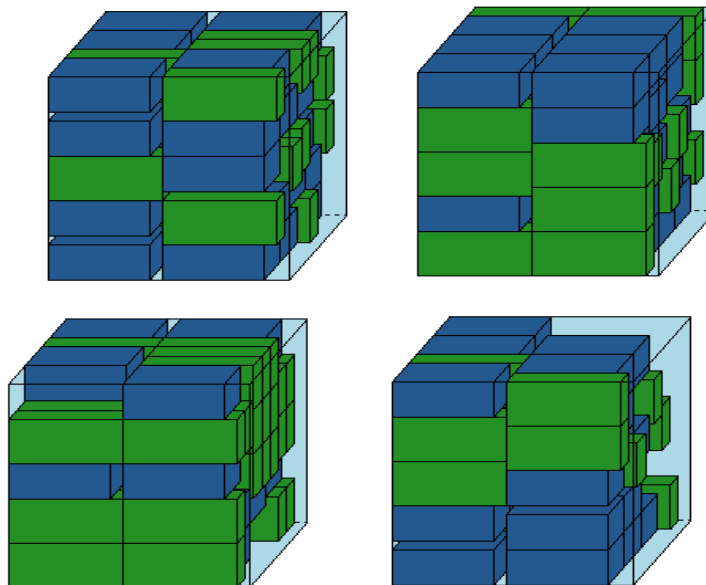


FIGURA 8 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 28.

FONTE: O autor (2015).

TABELA 3 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 2

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	Tempo (s)
1	0,00	4	43,20	50,40	57,60	0,34
2	0,00	4	63,92	66,05	68,18	0,31
3	0,00	12	13,66	20,49	27,31	0,02
4	0,00	18	35,03	40,87	46,70	0,05
5	0,00	3	65,28	78,72	92,16	0,5
6	0,00	11	51,32	57,49	63,65	0,11
7	0,00	55	35,79	40,38	44,97	0,05
8	0,00	5	49,09	63,38	77,67	3,45
9	0,00	3	87,27	89,14	91,00	86,38
10	0,00	6	72,93	79,07	85,21	1,97
11	0,00	7	59,65	70,49	81,32	388,81
12	0,00	9	63,49	73,16	82,82	243,34
13	0,00	7	68,90	77,47	86,03	4,27
14	0,00	60	19,24	39,23	59,21	0,06
15	0,00	14	50,20	62,10	73,99	0,11
16	0,00	9	71,24	76,80	82,35	22,89
17	0,00	9	52,05	56,26	60,47	13,72
18	0,00	72	18,55	28,64	38,73	0,05
19	0,00	52	31,58	42,44	53,29	0,41
20	0,00	10	41,93	60,11	78,29	6,14
21	0,00	2	40,00	68,00	96,00	0,3
22	0,00	1	80,77	80,77	80,77	0,38
23	0,00	4	75,63	75,63	75,63	0,05
24	0,00	9	23,15	53,24	83,33	0,2
25	0,00	2	70,40	83,20	96,00	0,28
26	0,00	4	71,05	76,97	82,89	397,95
27	0,00	3	59,88	70,84	81,80	0,52
28	0,00	4	75,61	79,44	83,26	219,67
29	0,00	1	83,80	83,80	83,80	1,94
30	0,00	14	61,54	73,38	85,21	0,5
31	0,00	7	67,39	75,37	83,34	442,66
32	0,00	7	82,42	87,07	91,71	145,05
33	0,00	7	17,27	58,64	100,00	4,25
34	0,00	7	51,10	64,47	77,83	17,73
35	0,00	4	41,67	69,22	96,76	22,16
36	0,00	16	55,36	69,13	82,89	72,34
37	0,00	14	60,90	70,45	80,00	76,89
38	0,00	9	62,43	73,64	84,85	2000,05
39	0,00	7	50,28	65,37	80,45	6,36

continua

TABELA 3 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 2

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	conclusão
						Tempo (s)
40	0,00	15	44,78	58,49	72,19	459,63
	Grupo 1	370	54,24	58,63	76,24	
Total	Grupo 2	137	58,77	71,85	84,94	
	Geral	507	54,24	65,24	76,24	
	Tempo Médio (s)					116,05

FONTE: O autor (2015).

Embora ao considerar a não sobreposição de caixas com orientação fixa e com estabilidade vertical acarrete no aumento do número de restrições, o modelo ainda foi capaz de resolver otimamente todos os conjuntos de teste, embora já seja possível perceber o acréscimo do tempo computacional necessário. A exigência da estabilidade vertical faz com que a quantidade total de contêineres seja maior no Cenário 2 em relação aos resultados do Cenário 1.

A FIGURA 9 apresenta o padrão de carregamento obtido para o conjunto de teste 35.

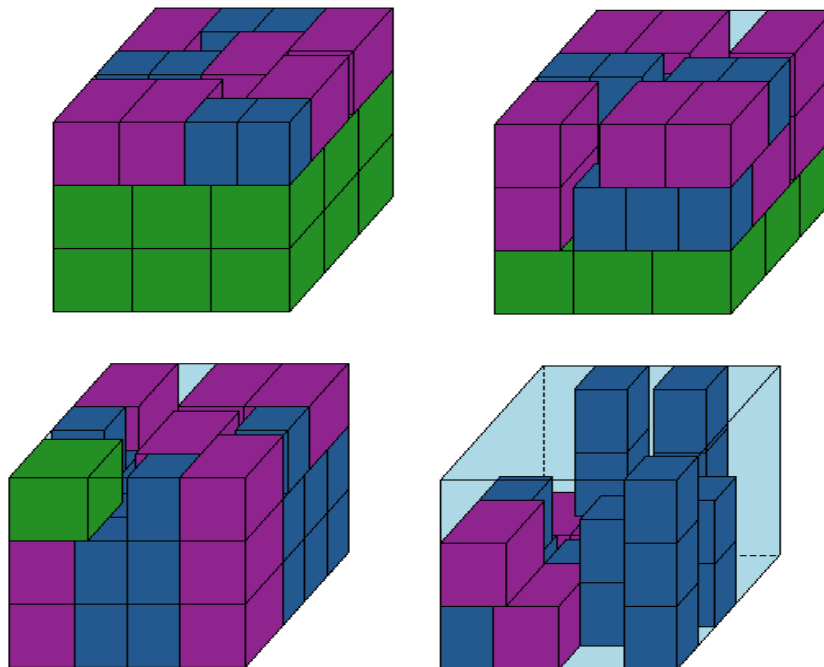


FIGURA 9 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 35.

FONTE: O autor (2015).

TABELA 4 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 3

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	Tempo (s)
1	0,00	2	62,40	69,60	76,80	0,27
2	0,00	3	86,65	88,78	90,91	5,7
3	0,00	4	68,28	75,11	81,93	0,06
4	0,00	9	81,73	87,57	93,41	8,72
5	0,00	3	83,20	91,32	99,43	69,77
6	0,00	8	76,48	80,48	84,48	3076,38
7	0,00	43	40,38	49,33	58,27	10,36
8	0,00	4	74,14	79,44	84,73	1679,69
9	10,49	3	85,40	89,37	93,33	3600,00
10	0,00	4	94,21	96,80	99,39	2881,14
11	13,75	6	63,85	77,58	91,30	3600,00
12	-	-	-	-	-	-
13	1,62	6	95,27	96,91	98,54	3600,00
14	0,00	33	38,49	51,07	63,65	0,26
15	0,00	11	59,61	79,48	99,35	1,33
16	3,51	7	73,07	84,97	96,86	3600,00
17	-	-	-	-	-	-
18	0,00	36	18,55	44,70	70,84	6,1
19	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-
21	0,00	4	98,08	98,08	98,08	148,93
22	100,00	1	33,41	33,41	33,41	3600,00
23	0,00	4	67,23	75,63	84,03	4,16
24	0,00	9	23,15	53,24	83,33	0,25
25	0,00	2	93,87	95,51	97,14	29,23
26	-	-	-	-	-	-
27	0,00	3	54,53	66,32	78,11	65,63
28	35,06	5	29,29	58,78	88,26	3600,00
29	16,20	1	83,80	83,80	83,80	3600,00
30	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	-
34	-	-	-	-	-	-
35	-	-	-	-	-	-
36	-	-	-	-	-	-
37	4,97	8	76,65	88,33	100,00	3600,00
38	-	-	-	-	-	-
39	48,69	10	3,95	42,11	80,26	3600,00

continua



TABELA 4 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 3

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	conclusão
						Tempo (s)
40	5,88	9	77,56	88,41	99,26	3600,00
Total	Grupo 1	182	68,86	77,65	86,45	
	Grupo 2	56	58,32	71,24	84,15	
	Geral	238	64,56	75,04	85,51	
Tempo Médio (s)						1629,18

FONTE: O autor (2015)

Ao considerar a não sobreposição de caixas com até seis orientações permissíveis (Cenário 3), o aumento do número de variáveis, somado ao aumento de restrições já verificado no Cenário 2, fez com que treze instâncias ultrapassassem a memória computacional; estes casos são representados pelo símbolo “-”. Além disso, dez dos conjuntos de teste avaliados apresentaram resultados com *gap* de otimalidade não nulo. Dentre estes, o conjunto de teste 22 apresentou *gap* de otimalidade de 100%, isto é, o *CPLEX* não foi capaz de encontrar o melhor limitante durante o tempo de execução.

A FIGURA 10 apresenta o padrão de carregamento obtido para o conjunto de teste 10.

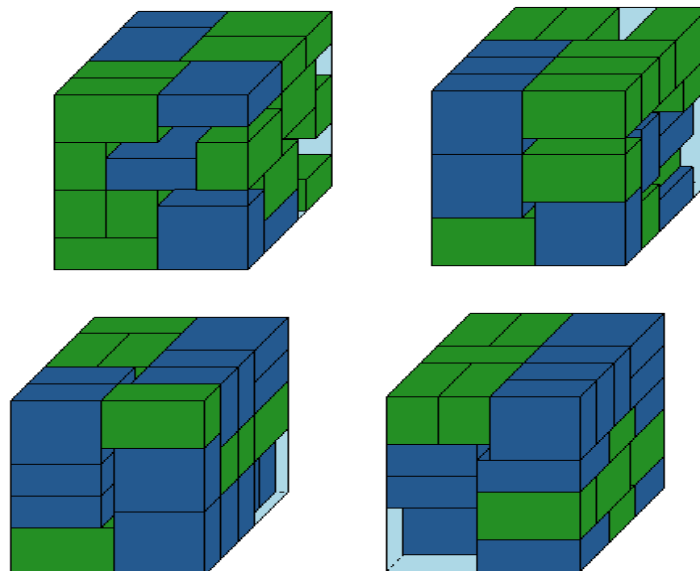


FIGURA 10 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 10.

FONTE: O autor (2015).

TABELA 5 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 4

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	Tempo (s)
1	0,00	2	62,40	69,60	76,80	0,14
2	1,56	3	86,65	88,78	90,91	3600,00
3	0,00	4	68,28	75,11	81,93	0,09
4	2,94	9	81,73	87,57	93,41	3600,00
5	0,00	3	89,60	90,88	92,16	341,80
6	3,03	8	75,99	80,24	84,48	3600,00
7	0,00	43	22,49	40,38	58,27	6,40
8	1,19	4	74,73	77,09	79,44	3600,00
9	33,42	5	60,17	64,80	69,42	3600,00
10	28,10	5	64,48	71,52	78,55	3600,00
11	14,26	6	63,63	78,56	93,48	3600,00
12	-	-	-	-	-	-
13	12,09	7	75,97	86,39	96,81	3600,00
14	0	33	38,49	51,07	63,65	0,55
15	9,19	11	75,56	82,75	89,93	3600,00
16	32,45	10	25,10	53,08	81,05	3600,00
17	-	-	-	-	-	-
18	0	36	23,48	47,16	70,84	14,19
19	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-
22	100,00	1	33,41	33,41	33,41	3600,00
23	-	-	-	-	-	-
24	0,00	9	23,15	53,24	83,33	9,00
25	0,00	2	93,87	95,51	97,14	481,28
26	-	-	-	-	-	-
27	0,00	3	57,94	69,33	80,71	688,97
28	100,00	18	5,82	31,23	56,64	3600,00
29	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	-
34	-	-	-	-	-	-
35	-	-	-	-	-	-
36	-	-	-	-	-	-
37	-	-	-	-	-	-
38	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-

continua

TABELA 5 – RESULTADOS DOS TESTES: CENÁRIO 4

#	Gap de Otimidade (%)	Quantidade de Contêineres	Ocupação Mínima (%)	Ocupação Média (%)	Ocupação Máxima (%)	conclusão
						Tempo (s)
40	-	-	-	-	-	-
	Grupo 1	189	61,80	71,56	81,32	
Total	Grupo 2	33	42,84	56,54	70,25	
	Geral	222	57,28	67,98	78,68	
	Tempo Médio (s)					2130,59

Fonte: O autor (2015).

Por fim, ao efetuar os testes considerando-se as restrições de não sobreposição e estabilidade vertical para caixas que podem assumir até seis posições (Cenário 4), as limitações do modelo ficam ainda mais acentuadas: dos quarenta conjuntos de testes, dezenove instâncias (47,5% do total) não puderam ser resolvidas em razão da carência de memória computacional. Somente seis instâncias do Grupo 1 foram resolvidas otimamente. Apenas cinco conjuntos de teste do Grupo 2 puderam ser resolvidos e, entre estes, dois apresentaram *gap* de otimalidade de 100%. Por fim, vale destacar que, como boa parte dos resultados apresentados foi obtida por que o tempo computacional estabelecido foi alcançado, este cenário apresenta o pior tempo médio de resolução dos modelos.

A FIGURA 11 apresenta o padrão de carregamento obtido para o conjunto de teste 8.

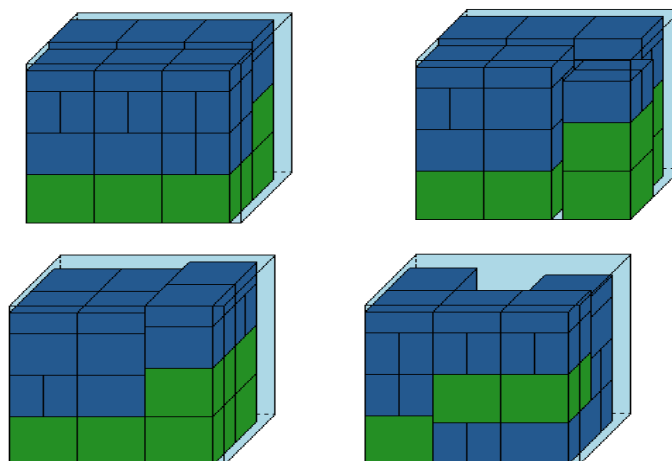


FIGURA 11 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 8.

FONTE: O autor (2015).

## 5.2 CONJUNTOS DE TESTE DE TRABALHOS CORRELATOS

As instâncias de Ivancic *et al.* (1989) são compostas por 47 conjuntos de teste, nos quais um único tipo de contêiner deve ser carregado com caixas de 2 a 5 tipos distintos que podem assumir múltiplas orientações. Vários conjuntos possuem caixas cujas dimensões são similares às do contêiner. Nos conjuntos 14 e 23, as dimensões de algumas caixas inviabilizam que determinadas rotações sejam realizadas, visto que a caixa não poderia assumir essas posições particulares por ultrapassar as dimensões do contêiner. Ivancic *et al.* (1989) estabelecem um limitante inferior para cada um dos conjuntos. Nos testes efetuados, o total de contêineres disponíveis foi estabelecido como o dobro do limitante inferior da literatura.

Os resultados obtidos pelo modelo definido pelas expressões (93) – (96) foram comparados com os seguintes algoritmos:

- IVA: heurística baseada em programação inteira de Ivancic *et al.* (1989);
- BOR: heurística proposta por Bortfeldt (2000);
- ELS: busca em árvore com estratégia sequencial de Eley (2002);
- ELP: busca em árvore com estratégia paralela de Eley (2002);
- ELY: heurística combinada à programação inteira de Eley (2003);
- LZG: meta-heurística proposta por Lim e Zhang (2005);
- CHE: técnica de geração de colunas de Che *et al.* (2011).

A quantidade de contêineres utilizada em cada abordagem está descrita na TABELA 6. O tempo médio necessário para a execução de cada algoritmo está indicado na última linha da tabela; o símbolo “–” indica que esta informação não foi reportada no artigo original. Os asteriscos na coluna “Tempo (s)” indicam que o modelo atingiu o limite de tempo estabelecido e, desse modo, a solução obtida não é ótima.

TABELA 6 – RESULTADOS PARA OS CONJUNTOS DE TESTE DE IVANCIC et al. (1989)

#	Tipos de Caixas	Total de caixas	Limitante Inferior	IVA	BOR	ELS	ELP	ELY	LZG	CHE	Modelo Proposto	Tempo (s)
1	2	70	19	26	25	27	26	25	25	25	25	1
2	2	70	7	11	10	11	10	10	10	10	9	5
3	4	180	19	20	20	21	22	20	19	19	19	21
4	4	180	26	27	28	29	30	26	26	26	26	6
5	4	180	46	65	51	55	51	51	51	51	51	575
6	3	103	10	10	10	10	10	10	10	10	10	1
7	3	103	16	16	16	16	16	16	16	16	16	1
8	3	103	4	5	4	4	4	4	4	4	4	2
9	2	110	18	19	19	19	19	19	19	19	19	29
10	2	110	47	55	55	55	55	55	55	55	55	1
11	2	110	16	18	18	17	18	17	16	16	16	973
12	3	95	45	55	53	53	53	53	53	53	53	1
13	3	95	22	27	25	25	25	25	25	25	25	6
14	3	95	28	28	28	27	27	27	27	27	27	8
15	3	95	11	11	11	12	12	11	11	11	11	39
16	3	95	21	34	26	28	26	26	26	26	26	3
17	3	95	7	8	7	8	7	7	7	7	7	414
18	3	47	2	3	2	2	2	2	2	2	3	3600*
19	3	47	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1077
20	3	47	4	5	5	5	5	5	5	5	5	354
21	5	95	17	24	21	24	26	20	20	20	20	3600*
22	5	95	8	10	9	9	9	8	9	8	9	3600*
23	5	95	17	21	20	21	21	20	20	19	20	3600*
24	4	72	5	6	6	6	6	6	5	5	6	3600*
25	4	72	4	6	5	6	5	5	5	5	6	3600*
26	4	72	3	3	3	3	3	3	3	3	3	941
27	3	95	4	5	5	5	5	5	5	5	5	3600*
28	3	95	9	10	10	11	10	10	9	10	11	3600*
29	4	118	15	18	17	18	18	17	17	17	20	3600*
30	4	118	18	24	22	22	23	22	22	22	22	3600*
31	4	118	11	13	13	13	14	13	12	12	14	3600*
32	3	90	4	5	4	4	4	4	4	4	4	41
33	3	90	4	5	5	5	5	5	4	4	5	3600*
34	3	90	7	9	8	8	9	8	8	8	8	151
35	2	84	3	3	2	2	2	2	2	2	2	623
36	2	84	11	18	14	18	14	14	14	14	11	3
37	3	102	12	26	23	26	23	23	23	23	23	9
38	3	102	26	50	45	46	45	45	45	45	45	3
39	3	102	12	16	15	15	15	15	15	15	15	3600*
40	4	85	7	9	9	9	9	8	9	8	8	1707
41	4	85	14	16	15	16	15	15	15	15	15	183
42	3	90	4	4	4	4	4	4	4	4	4	41
43	3	90	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3600*
44	3	90	3	4	3	4	4	4	3	3	4	3600*
45	4	99	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3600*
46	4	99	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3600*
47	4	99	3	4	3	3	3	3	3	3	4	3600*
Total			599	763	705	733	721	699	694	692	704	
Tempo médio (s)				–	–	–	–	30	6.43	45.94		1533

FONTE: O autor (2015).

Em 34 dos 47 conjuntos de dados abordados, o modelo (93) – (96) obteve resultados iguais aos melhores resultados da literatura, sendo que para as instâncias 2 e 36 obteve-se melhoria em relação aos resultados da literatura.

Para as instâncias 18, 21 – 25, 27 – 31, 33, 39, e 43 – 47, a aplicação do PGNU para construir os conjuntos de possíveis posições gerou resultados pouco satisfatórios, visto que as dimensões das caixas eram, em geral, números primos entre si. Isto refletiu-se na obtenção de conjuntos com quantidade de elementos similar aos conjuntos (60) – (65), não sendo possível determinar a solução ótima para estes conjuntos de teste.

O tempo computacional necessário para a resolução dos problemas é consideravelmente mais elevado do que as demais propostas da literatura; no entanto, vale destacar que Eley (2003) não faz discussões acerca do tempo computacional de cada teste efetuado e tanto Lim e Zhang (2005) quanto Che *et al.* (2011) não deixam claros os critérios de parada adotados por seus algoritmos.

Ainda assim, de modo geral, o modelo obteve resultados satisfatórios, sendo capaz de resolver otimamente 61,7% das instâncias testadas (29 de 47), ante 53,19% de resultados ótimos conseguidos por Eley (2003).

A FIGURA 12 apresenta o padrão de carregamento obtido para o conjunto de teste 8.

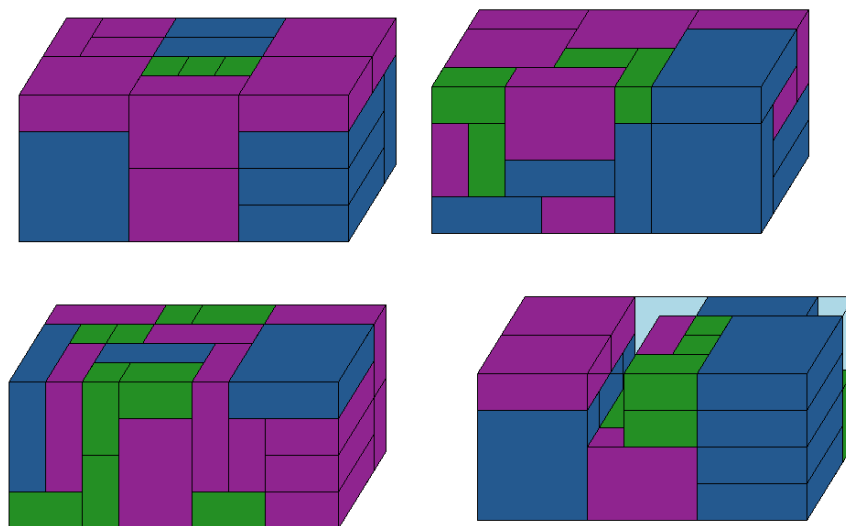


FIGURA 12 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO CONJUNTO DE TESTE 8 DE IVANCIC *et al.* (1989).

FONTE: O autor (2015).

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado um modelo de programação linear inteira 0-1, com base nas formulações de Chen *et al.* (1995) e Junqueira *et al.* (2012), para abordar o problema de carregamento de múltiplos contêineres. Este problema visa selecionar um subconjunto de contêineres para alocar todas as caixas disponíveis, de modo que o espaço não utilizado dos contêineres seja minimizado. O software *CPLEX® Interactive Optimizer* foi utilizado para efetuar testes computacionais tanto com dados da literatura quanto com dados gerados aleatoriamente, de modo a avaliar a abordagem apresentada neste trabalho.

A formulação proposta, ainda que limitada a resolver problemas relativamente pequenos, mostra ser uma alternativa que pode facilmente ser estendida de modo a considerar as exigências práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995). Neste trabalho, considerações de limitação de peso, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga foram consideradas, enquanto que em Junqueira (2009), embora modeladas para considerar um único contêiner, as formulações de múltiplos destinos, empilhamento máximo e estabilidade horizontal podem ser obtidas.

O modelo proposto no Capítulo 4 deste trabalho, embora considere apenas problemas do tipo minimização de entradas, pode ser utilizado, com pequenos ajustes, para tratar problemas do tipo maximização de saídas. Uma combinação de ajustes na função objetivo e nas restrições de não sobreposição é capaz de modelar problemas que envolvam um único contêiner disponível, múltiplos contêineres idênticos, ou até mesmo múltiplos contêineres heterogêneos.

Os resultados computacionais obtidos, descritos no Capítulo 5 deste trabalho, mostram que a abordagem proposta depende estreitamente da quantidade de tipos de caixas disponíveis, do tamanho relativo das caixas em comparação com as dimensões dos contêineres e das exigências práticas consideradas.

O emprego da heurística PGNU, como um procedimento alternativo de melhoria de desempenho, possibilitou desconsiderar pontos de vértices potencialmente desnecessários na busca pela solução ótima; desta forma, reduzindo a quantidade de elementos dos conjuntos das possíveis posições que uma determinada caixa pode assumir no carregamento, e conseqüentemente reduzindo o

número de variáveis e restrições do modelo. Além disso, representou um importante avanço às formulações matemáticas que tratam desse tipo de problema, discutidas brevemente no Capítulo 3 deste trabalho, visto que permitiu tratar problemas envolvendo maior número de contêineres e com diferentes dimensões.

Futuramente, podem ser explorados meios alternativos de geração dos conjuntos de possíveis posições das caixas, obtendo resultados melhores do que os obtidos neste trabalho pelo PGNU, propiciando, conseqüentemente, que mais considerações práticas discutidas por Bischoff e Ratcliff (1995) possam ser agregadas à formulação matemática. Pode-se também estudar a possibilidade de estender o modelo proposto para os diferentes tipos de problemas de carregamento de contêiner tratados no Capítulo 2, tais como os problemas com dimensões variáveis, além de avaliar a eficácia da formulação proposta em conjuntos de testes cujas dimensões, seja dos contêineres ou das caixas, não são valores inteiros.



## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A.; FIGUEIREDO, M. B. A particular approach for the three- dimensional packing problem with additional constraints. **Computers & Operations Research**. v. 37, 1968–1976, 2010.

ANDRADE, R.; BIRGIN, E. G.; MORABITO, R. Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover. **International Transactions in Operational Research**. No prelo, 2014.

ARAÚJO, O. C. B. **Problemas de corte e empacotamento tridimensional e integração com roteamento de veículos**. 180 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

ARAÚJO, O. C. B.; ARMENTANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. **Pesquisa Operacional**, v. 27, n. 2, p. 311-331, 2007.

ARENALES, M.; MORABITO, R. An overview of AND/OR-graph approaches to cutting and packing problems. *In*: **Mukhacheva, E.A. (Ed.), Decision Making under Conditions of Uncertainty (Cutting–Packing Problems)**. Ufa State Aviation Technical University, Ufa, p. 207–224, 1997.

ARCE, J. E. **Um sistema de análise, simulação e otimização do sortimento florestal em função da demanda por multiprodutos e dos custos de transporte**. 136 f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Setor de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos/logística empresarial**. 5.ed, Porto Alegre: Bookman, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEKRAR, A.; KACEM, I. An exact method for the 2D guillotine strip packing problem. **Advances in Operations Research**, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1155/2009/732010>>.

BERKEY, J. O.; WANG, P. Y. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. **Journal of the Operational Research Society**, v. 38, p. 423-429, 1987.

BISCHOFF, E. E.; MARRIOTT, M. D. A comparative evaluation of heuristics for container loading. **European Journal of Operational Research**. v. 44, p. 267–276, 1990.

BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. **International Journal of Management Science**, Great Britain, v. 23, n. 4, p. 377-390, 1995.

BORTFELDT, A. Eine heuristik für multiple containerladeprobleme. **OR Spectrum**, v. 22, n. 2, p. 239–261, 2000.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. Zur behandlung von restriktionen bei der stauraumoptimierung am beispiel eines genetischen algorithmus fur das containerbeladeproblem. **Logistik Management - Intelligente I+K Technologien**. p. 83-100, 1999.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**, v. 131, p. 143-161, 2001.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading – A state-of-the-art review. **European Journal of Operations Research**. v. 229, p. 1-20, 2013.

BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J. **Logística empresarial**. São Paulo: Atlas, 2010.

BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J.; COOPER, M. B. **Gestão da cadeia de suprimentos e logística**. São Paulo: Campus, 2007.

BRUNETTA, L.; GREGOIRE, P. A general purpose algorithm for three-dimensional packing. **INFORMS Journal on Computing**. v. 17, p. 328-338, 2005.

CARNIERI, C.; MENDOZA, G. A.; GAVINHO, L. G. Solution procedures for Cutting lumber into furniture parts. **European Journal of Operations Research**. v. 73, p. 495-501, 1994.

CESCHIA, S.; SCHAERF, A. Local search for multi-drop multi-container loading problem. **Journal of Heuristics**. v. 19, 275-294, 2013.

CHE, C. H.; HUANG, W.; LIM, A.; ZHU, W. The multiple container loading cost minimization problem. **European Journal of Operational Research**. v. 214, p. 501-511, 2011.

CHEN, C. S.; LEE, M. S.; SHEN, Q. S. An analytical model for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 80, p. 68-78, 1995.

CHRISTENSEN, S. G.; ROUSØE, D. M. Container loading with multi-drop constraints. **International Transactions in Operational Research**, v. 16, p. 727-743, 2009.

CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. **Operations Research**, v. 25, n. 1, p. 30-44, 1977.

CHRISTOPHER, M. **Logística e gerenciamento da cadeia de suprimentos**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2007.

DERELI, Z. T.; DAS, G. S. A hybrid simulated annealing algorithm for solving multi-objective container-loading problems. **Applied Artificial Intelligence**, v. 24, p. 463-486, 2010.

DOMINGO, B. M.; PONNAMBALAM, S. G.; KANAGARAJ, G. Particle swarm optimization for the single container loading problem. In: **IEEE International Conference on Computational Intelligence and Computing Research**, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ICCIC.2012.6510262>>

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operations Research**. v. 44, p. 145-159, 1990.

DYCKHOFF, H.; FINKE, U. **Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography**. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

EASTMAN, W. L.; EVEN, S.; ISAACS, I. M. Bounds for the optimal scheduling of n jobs on m processors. **Management Science**, v. 11, p. 268-279, 1964.

ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 393-409, 2002.

ELEY, M. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. **OR Spectrum**, v. 25, p. 45-60, 2003.

FANSLAU, T.; BORTFELDT, A. A tree-search algorithm for solving the container loading problem. **INFORMS Journal on Computing**, v. 22, p. 222–235, 2010.

FEKETE, S. P.; SCHEPERS, J. VAN DER VEEN, J. C. An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing. **Operations Research**, v. 55, n. 3, p. 569-587, 2007.

FIESP. **Natureza de carga**. Disponível em: <<http://www.fiesp.com.br/transporte-e-logistica/natureza-de-carga/>>. Acesso em: 27/10/2014.

FRASER, H. J.; GEORGE, J. A. Integrated container loading software for pulp and paper industry. **European Journal of Operational Research**, v. 77, p. 466-474, 1994.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. **Transportation Science**, v. 40, p. 342-350, 2006.

GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. **Computers and Operations Research**, v. 7, p. 147-156, 1980.

GEHRING, H.; BORTFELDT, A. A genetic algorithm for solving the container loading problem. **International Transactions in Operations Research**, v. 4, n. 5-6, p. 401-418, 1997.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. **Operations Research**, v. 13, p. 94-120, 1965

HAESSLER, R. W.; TALBOT, F. B. Load planning for shipments of low density products. **European Journal of Operational Research**, v. 44, p. 289–299, 1990.

HASSAMONTR, J. On decomposing 3D packing problems in wooden furniture industry. In: Proceedings of Computational Intelligence in Robotics and Automation, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/CIRA.2003.1222231>>

HE, D. Y.; CHA, J. Z. Research on solution to complex container loading problem based on genetic algorithm. In: Proceedings of the International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2002. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ICMLC.2002.1176713>>.

HE, K.; HUANG, W. Solving the single-container loading problem by a fast heuristic method. **Optimization Methods and Software**, v. 25, p. 263–277, 2010.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**, v. 16, n. 5, p. 462-469, 1972.

HIFI, M. Approximate algorithms for the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 9, p. 747-774, 2002.

HIFI, M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: A comparative study. **Computers & Operations Research**, v. 31, p. 657-674, 2004.

HIFI, M.; KACEM, I.; NÈGRE, S.; WU, L. A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**. v. 33, p. 993-1000, 2010.

IORI, M. **Metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems**. 138 f. Tese (Dottorato di Ricerca in Automatica e Ricerca Operativa) – Università Degli Studi di Bologna, Bolonha, 2004.

IVANCIC, N.; MATHUR, K.; MOHANTY, B. B. An integer-programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem. **Journal of Manufacturing and Operations Management**. v. 2, p. 268-289, 1989.

JIN, Z.; ITO, T.; OHNO, K. A three-dimensional bin packing problem and its practical algorithm. **JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing**. v. 46, n. 1, p. 60–66, 2003.

JIN, Z.; OHNO, K.; DU, J. An efficient approach for the three-dimensional container packing problem with practical constraints. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 21, p. 279–295, 2004.

JUNQUEIRA, L. **Modelos de programação matemática para problemas de carregamento de caixas dentro de contêineres**. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Modelos de otimização para problemas de carregamento de contêineres com considerações de estabilidade e empilhamento. **Pesquisa Operacional**, v. 30, p. 73-98, 2010.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. **Annals of Operations Research**, v. 199, p. 51-75, 2011. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-011-0942-z> >.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computers & Operations Research**, v. 39, p. 74-85, 2012.

KOLOCH, G.; KAMINSKI, B. Nested vs. joint optimization of vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints. **Engineering Letters**, v. 18, p. 193–198, 2010.

KURPEL, D. K.; SCHENEKEMBERG, C. M.; SCARPIN, C. T. Um modelo matemático para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. In: Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais, 4., 2014, Curitiba. **Anais...** 1 CD-ROM.

LIM, A.; ZHANG, X. The container loading problem. **SAC'05 ACM Symposium on applied Computing**. New York: ACM, 913-917, 2005.

LIN, J. L.; CHANG, C. H.; YANG, J. Y. A study of optimal system for multiple constraints multiple-container packing problems. **IEA/AIE**. p. 1200-1210, 2006.

LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. An n-tet graph approach for non-guillotine packings of n-dimensional boxes into an n-container. **European Journal of Operational Research**. v 141, p. 421-439, 2002.

LIU, F. H. F.; HSIAU, C. J. A three-dimensional pallet loading method for single-size boxes. **Journal of the Operational Research Society**, v. 48, p. 726-735, 1997.

LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Heuristic algorithms for the three-dimensional bin packing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 141, 410–420, 2002.

MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, v. 48, n. 2, p. 256-267, 2000.

MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis. **Algorithmica**. v. 18, p. 122–144, 1997.

MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Approximation algorithms for the orthogonal z-oriented three-dimensional packing. **SIAM Journal on Computing**. v. 29, p. 1008–1029, 1999.

MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Two- and three-dimensional parametric packing. **Computers & Operations Research**. v. 29, p. 2589–2603, 2007.

MIYAZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Three-dimensional packings with rotations. **Computers & Operations Research**. v. 36, p. 2801–2815, 2009.

MOHANTY, B. B.; MATHUR, K.; IVANCIC, N. J. Value considerations in three-dimensional packing – A heuristic procedure using the fractional knapsack problem. **European Journal of Operational Research**, v. 74, p. 143-151, 1994.

MORABITO, R.; ARENALES, M. An AND/OR-graph approach to the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 1, p. 59-73, 1994.

MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. A GRASP approach to the container-loading problem. **IEEE Computer Society**, v. 4, p. 50-57, 2005.

MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. **OR Spectrum**. v. 31, p. 775–800, 2009.

PADBERG, M. Packing small boxes into a big box. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 52, p. 1–21, 2000.

PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**, v. 141, n. 2, p. 382-392, 2002.

PARREÑO, F.; ALVAREZ-VALDEZ, R.; OLIVEIRA, J. F.; TAMARIT, J. M. A hybrid GRASP/VND algorithm for two- and three-dimensional bin packing. **Annals of Operations Research**. v. 179, n. 1, 203–220, 2010.

REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. **European Journal of Operational Research**, v. 214, p. 526-535, 2011.

SCARPIN, C. T.; SCHENEKEMBERG, C. M.; KURPEL, D. K. Um modelo matemático exato para o problema de carregamento de contêineres com restrição de carregamento completo de grupos de itens. In: Simpósio de Engenharia de Produção, 31., 2014, Bauru. **Anais...** p. 1-13.

SCHENEKEMBERG, C. M.; KURPEL, D. K.; SCARPIN, C. T. Uma proposta de resolução do problema de carregamento de contêineres com restrição de carregamento completo de grupos de itens. In: Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 35., 2014, Fortaleza. **Anais...** 1 CD-ROM.

TERNO, J.; SCHEITHAUER, G.; SOMMERWEIß, U.; RIEHME, J. An efficient approach for the multi-pallet loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 123, p. 372-381, 2000.

TRIPODI, T.; FELLIN, P.; MEYER, H. J. **Análise da pesquisa social: Diretrizes para o uso de pesquisa em serviço social e ciências sociais.** 2 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1981.

WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operations Research**. v. 183, p. 1109-1130, 2007.

YAMASHITA, D. S.; MORABITO, R. Uma nota sobre modelagem matemática de carregamento de caixas dentro de contêineres com considerações de estabilidade da carga. **Production Journal**. v. 25, n. 1, p. 113-124, 2015.



YAP, C. N.; LEE, L. S.; MAJID, H. V.; SEOW, H. V. Ant colony optimization for container loading problem. **Journal of Mathematics and Statistics**. v. 8, n. 4, p. 169-175, 2012.

## APÊNDICE 1 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

Este apêndice apresenta os conjuntos de teste obtidos com a técnica de geração descrita na seção 5.1.1

TABELA 7 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

#	Caixas					Contêineres			
	$i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$	$b_i$	$k$	$L_k$	$W_k$	$H_k$
1	1	6	6	8	29	1	10	13	16
						2	24	10	25
2	1	6	5	5	189	1	22	24	20
						2	16	13	21
						3	10	18	12
3	1	6	10	13	23	1	14	17	24
4	1	6	8	11	71	1	12	15	18
						2	14	17	19
						3	21	19	19
5	1	4	4	6	195	1	25	12	25
						2	14	20	20
6	1	9	14	11	16	1	16	19	24
	2	6	13	6	56	2	16	21	25
						3	21	22	19
7	1	9	12	7	50	1	13	25	13
	2	5	19	10	60				
8	1	7	6	6	31	1	19	14	23
	2	6	6	3	104	2	22	10	10
9	1	4	4	7	49	1	22	22	10
	2	5	7	4	75	2	20	15	20
						3	12	10	22
10	1	8	4	6	54	1	15	20	22
	2	7	4	8	59	2	18	18	13
						3	16	13	13
11	1	5	7	9	35	1	15	21	18
	2	7	14	8	19	2	21	18	23
	3	12	5	7	40				
12	1	5	7	8	47	1	15	21	18
	2	10	12	6	19				
	3	6	6	4	83				
13	1	8	7	8	36	1	20	22	19
	2	10	8	9	14	2	18	23	23
	3	9	7	10	26	3	17	18	17

continua

TABELA 7 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

continuação

#	Caixas					Contêineres			
	$i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$	$b_i$	$k$	$L_k$	$W_k$	$H_k$
14	1	10	13	11	27	1	21	20	23
	2	10	13	11	48				
	3	13	11	13	41				
15	1	8	8	12	22	1	20	18	17
	2	8	10	11	14	2	15	24	21
	3	10	9	8	40				
16	1	12	8	8	17	1	15	24	17
	2	6	4	7	30	2	19	12	23
	3	8	8	8	13				
	4	7	8	13	21				
17	1	3	5	7	35	1	15	25	12
	2	3	7	8	13	2	11	17	12
	3	4	5	8	32	3	14	24	13
	4	3	9	7	21				
18	1	9	9	13	14	1	15	15	22
	2	6	9	16	23	2	13	15	23
	3	8	8	13	25				
	4	10	9	14	32				
19	1	8	5	6	17	1	19	14	16
	2	14	11	7	40				
	3	14	6	11	21				
	4	7	8	12	64				
20	1	5	7	6	21	1	17	15	22
	2	6	8	10	39				
	3	6	7	6	30				
	4	5	6	8	26				
21	1	4	5	6	68	1	10	13	16
						2	24	10	25
22	1	3	4	2	147	1	22	24	20
						2	16	13	21
						3	10	18	12
23	1	4	5	8	108	1	14	17	24
24	1	6	5	5	149	1	12	15	18
						2	14	17	19
						3	21	19	19
25	1	5	4	8	78	1	25	12	25
						2	14	20	20

continua

TABELA 7 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

continuação

#	Caixas					Contêineres			
	$i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$	$b_i$	$k$	$L_k$	$W_k$	$H_k$
26	1	4	4	9	62	1	16	19	24
	2	3	8	6	98	2	16	21	25
						3	21	22	19
27	1	5	11	2	47	1	13	25	13
	2	6	4	6	24				
28	1	9	2	5	85	1	19	14	23
	2	8	4	4	91	2	22	10	10
29	1	2	4	3	66	1	22	22	10
	2	4	2	3	103	2	20	15	20
						3	12	10	22
30	1	8	4	6	128	1	15	20	22
	2	7	4	8	92	2	18	18	13
						3	16	13	13
31	1	7	8	8	35	1	15	23	25
	2	6	5	6	93	2	21	18	23
	3	6	5	7	68				
32	1	15	8	2	55	1	21	16	13
	2	5	4	4	37	2	20	23	10
	3	10	4	4	81	3	15	21	18
33	1	4	5	7	69	1	21	21	14
	2	8	5	6	47				
	3	7	7	7	38				
34	1	8	6	8	21	1	21	20	23
	2	7	9	8	49				
	3	6	5	7	48				
35	1	6	8	7	28	1	18	24	21
	2	4	5	7	64				
	3	5	9	7	34				
36	1	4	6	8	33	1	15	24	17
	2	5	9	10	45	2	19	12	23
	3	5	3	5	67				
	4	4	6	9	71				
37	1	5	4	5	81	1	15	25	12
	2	6	4	5	43	2	11	17	12
	3	5	8	5	61	3	14	24	13
	4	6	8	5	27				

continua

TABELA 7 – CONJUNTOS DE TESTE GERADOS ALEATORIAMENTE

conclusão

#	Caixas					Contêineres			
	$i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$	$b_i$	$k$	$L_k$	$W_k$	$H_k$
38	1	4	6	8	19	1	15	15	22
	2	5	7	10	58	2	13	15	23
	3	6	3	7	23				
	4	4	6	9	22				
39	1	6	4	7	22	1	19	14	16
	2	8	4	5	46				
	3	4	7	6	50				
	4	4	7	5	17				
40	1	10	5	8	77	1	17	15	22
	2	5	4	8	40	2	18	18	23
	3	10	5	5	61	3	18	19	19
	4	5	4	5	26				

FONTE: O autor (2015).