

SÉRGIO LUIZ MEISTER BERLEZE

EFEITO POSTERIOR EM DIELETRICOS: UM MODELO COMBINADO

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. René Robert

CURITIBA

2002

FICHA CATALOGRÁFICA

Berzeze, Sérgio Luiz Meister
Efeito posterior em dielétricos: um modelo combinado / Sérgio Luiz
Meister Berzeze. — Curitiba, 2002.
xv, 119 f. : il.; grafs.; tabs.

Orientador: René Robert
Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor
de Ciências Exatas.

1. Dielétricos. I. Robert, René. II. Título.


CDD 20. 537.24

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
SERGIO LUIZ MEISTER BERLEZE

TÍTULO : "EFEITO POSTERIOR EM DIELÉTRICOS: UM MODELO COMBINADO"

Em sessão pública, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto de sua tese sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato conceito global A.

Banca Examinadora:	Assinatura	Conceito
Prof. RENE ROBERT (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Prof. JOSÉ ARRUDA DE OLIVEIRA FREIRE (UFPR)		<u>A</u>
Dr. MAURÍCIO PEREIRA CANTÃO (LACTEC)		<u>A</u>
Prof. JOSÉ ALBERTO GIACOMETTI (UNESP)		<u>A</u>
Prof. ROBERTO MENDONÇA FARIA (USP-São Carlos)		<u>A</u>

Curitiba, 25 de fevereiro de 2002

Dedico este trabalho
aos meus pais
Arildo Berleze (*in memoriam*)
e
Clarice Meister Berleze (*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Em particular agradeço:

Ao Professor Renê Robert, pela forma dedicada e segura com que me orientou, transmitindo seus conhecimentos e também a motivação necessária para que cada etapa fosse vencida. Em especial, devo registrar minha gratidão pela sua amizade e consideração.

Ao colega Paulo Cesar do Nascimento Scarpa (*in memoriam*), precursor no LACTEC dos estudos sobre o efeito posterior em dielétricos, pela amizade, pelos questionamentos profícuos e pela constante vontade de ajudar; também pela colaboração no fornecimento de dados e de material bibliográfico.

Aos colegas Professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, pela colaboração com sugestões e comentários, bem como pelo encorajamento para a concretização deste trabalho.

Ao colega Elinton Luiz Leguenza, pelas sugestões e comentários, bem como pela preparação das amostras de polietileno e realização de medidas.

Aos colegas do Grupo de Dielétricos do LACTEC, pelas sugestões e comentários construtivos.

Aos meus familiares, de forma especial, pelo apoio e pelo incentivo em todos os momentos; sua presença e suas palavras constituíram valiosa contribuição para que este ideal fosse alcançado.

A todos aqueles que, embora não relacionados aqui, sempre nos dirigiram palavras de estímulo e consideração.

*It is arguable that dielectric relaxation
represents one of the more difficult
unresolved problems of Physics To-day.*

A.K. Jonscher, 1995

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	ix
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
INTRODUÇÃO	1
1 CONCEITOS BÁSICOS	3
1.1 Efeito Posterior	3
1.2 Tensão de Descarga Interna e de Recuperação	4
1.3 Hipóteses Utilizadas	6
2 REVISÃO DA LITERATURA	8
3 MODELO DA POLARIZAÇÃO	11
3.1 Análise no Domínio do Tempo	11
3.2 Análise no Domínio da Frequência	14
3.3 Alguns Modelos para a Relaxação Dielétrica	16
3.4 Comparação entre os Modelos de Jonscher e de Dissado-Hill ...	19
3.5 Equação Integral para o Campo Elétrico	23
3.6 Casos em que Há Solução Analítica	27
4 MODELO DA CARGA ESPACIAL	29
4.1 Fenômenos e Equações Fundamentais	29
4.2 Variáveis e Equações Adimensionais	34
4.3 Equação Diferencial Parcial para o Campo Elétrico	36
4.4 Um dos Casos em que Há Solução Analítica Exata	38
5 MODELO COMBINADO	42
5.1 Conjunto de Equações Simultâneas	42
6 SOLUÇÃO NUMÉRICA	46
6.1 Modelo da Polarização	46
6.2 Modelo da Carga Espacial	49
6.3 Modelo Combinado	55
6.4 Condições Iniciais para o Campo Elétrico e para a Polarização .	61

7 ANÁLISE DE RESULTADOS	64
7.1 Montagem Experimental	64
7.2 Amostras e Propriedades Físicas dos Materiais Utilizados	65
7.3 Resultados Obtidos com Base no Modelo da Polarização	73
7.4 Resultados Obtidos com Base no Modelo Combinado	84
7.5 Comparação entre os Resultados Obtidos com os Modelos da Polarização, da Carga Espacial e Combinado	94
CONCLUSÕES	98
SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	100
APÊNDICE 1 - Distribuição da Carga Espacial no Estado Estacionário	101
APÊNDICE 2 - O Método Implícito para Solução de Equações Diferenciais Parciais	108
APÊNDICE 3 - O Método de Newton-Raphson para Sistemas de Equações Não-lineares	111
REFERÊNCIAS	114

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Comportamento de D em função de E nos efeitos: (a) posterior e (b) histerese, considerando um campo elétrico harmônico	3
Figura 1.2 - Circuito utilizado para o estudo do efeito posterior	4
Figura 1.3 - Tensão de descarga interna em função do tempo	5
Figura 1.4 - Tensão de recuperação em função do tempo	5
Figura 1.5 - Forma geométrica do dielétrico e sistema de coordenadas utilizado ...	6
Figura 3.1 - Variação da polarização quando é aplicado ao material um campo elétrico em forma de função degrau	13
Figura 3.2 - Gráficos típicos para $\epsilon'(\omega)$ e $\epsilon''(\omega)$ em função da frequência para um material polar	15
Figura 3.3 - Função resposta de Jonscher para dois valores diferentes do parâmetro m , com n mantido constante ($n = 0,577$)	21
Figura 3.4 - Função resposta de Jonscher para dois valores diferentes do parâmetro n , com m mantido constante ($m = 0,309$)	21
Figura 3.5 - Função resposta de Dissado-Hill para dois valores diferentes do parâmetro m , com n mantido constante ($n = 0,660$)	22
Figura 3.6 - Função resposta de Dissado-Hill para dois valores diferentes do parâmetro n , com m mantido constante ($m = 0,410$)	22
Figura 3.7 - Estabelecimento da polarização lenta no dielétrico ao ser aplicado um campo elétrico em forma de função degrau, com base nos dados do polietileno. A linha pontilhada refere-se ao valor final da polarização	23
Figura 3.8 - Campo elétrico genérico aplicado ao dielétrico em instantes $t \leq 0$..	24
Figura 4.1 - Configuração da carga espacial devido à ação de um campo elétrico, considerando a injeção de cargas e a migração de cargas livres presentes no dielétrico em direção aos eletrodos	30
Figura 4.2 - Distribuição inicial de carga espacial em forma de função “caixa”: (a) ilustração da nuvem de carga no interior do dielétrico e (b) função $\rho(x, 0)$ correspondente	37

Figura 4.3 - Distribuição de cargas no dielétrico: (a) no instante inicial $t = 0$ e (b) num instante $t > 0$. Em ambos os casos a distribuição é uniforme. Observa-se em (b) o avanço de frente de portadores em direção ao eletrodo em $x = 1$ e o alargamento da região contendo carga espacial, porém, com uma diminuição no valor da densidade de carga	39
Figura 4.4 - Tensão de recuperação calculada com a equação (4.32) para uma amostra de polietileno. A curva está normalizada em relação ao seu valor máximo	41
Figura 6.1 - Subdivisão do eixo dos tempos em intervalos iguais para a solução numérica da equação integral	46
Figura 6.2 - Contribuição de cada integral na equação (6.8), considerando uma função resposta genérica f . Por definição, $t_A < 0$ e $t_B < 0$	49
Figura 6.3 - Diagrama $x - t$ das variáveis discretizadas para a solução pelo método das diferenças finitas. O dielétrico é subdividido em camadas de espessura h e as grandezas são calculadas a cada intervalo de tempo k	50
Figura 6.4 - Nós envolvidos nas equações (6.10) e (6.11) para o método completamente regressivo no tempo	51
Figura 6.5 - Relação entre valores incógnitos e conhecidos para o sistema de $(N - 1)$ equações representadas na equação (6.13)	52
Figura 6.6 - Comparação entre resultados obtidos com a aproximação das condições de contorno e com a expressão exata da equação (4.30)	53
Figura 6.7 - Diagrama de nós para o problema combinado, mostrando que a solução no instante t_{j+1} depende dos valores das grandezas nos instantes anteriores	58
Figura 6.8 - Campo elétrico e função resposta numa posição x , interna ao dielétrico, no problema da descarga interna	62
Figura 7.1 - Circuito elétrico para medir: (a) a corrente de carga ou do capacitor e (b) a tensão entre os eletrodos do capacitor	64
Figura 7.2 - Representação tridimensional simplificada de uma parte da molécula do polietileno	66
Figura 7.3 - Representação tridimensional simplificada de uma parte da molécula do PVC na configuração isotática	66
Figura 7.4 - Parte da rede cristalina da mica muscovita. Acima do íon de potássio está representada uma lâmina com suas três camadas, abaixo dele aparece apenas a primeira camada da lâmina adjacente	67

Tabela 7.1 - Características geométricas dos capacitores utilizados	68
Tabela 7.2 - Propriedades elétricas dos materiais	68
Tabela 7.3 - Parâmetros para a função de Dissado-Hill	71
Tabela 7.4 - Parâmetros para a função de Jonscher	72
Tabela 7.5 - Parâmetros para a função de von Schweidler	72
Tabela 7.6 - Características da polarização	72
Figura 7.5 - Tensão de descarga interna para o polietileno, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas	74
Figura 7.6 - Tensão de recuperação para o polietileno, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	74
Figura 7.7 - Tensão de descarga interna para o PVC, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	75
Figura 7.8 - Tensão de recuperação para o PVC, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	76
Figura 7.9 - Tensão de descarga interna para a mica, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas	77
Figura 7.10 - Tensão de recuperação para a mica, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	77
Figura 7.11 - Tensão de descarga interna para o papel impregnado, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	78
Figura 7.12 - Tensão de recuperação para o papel impregnado, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação	78
Figura 7.13 - Tensão de descarga interna para diferentes valores da condutividade de um material, considerando-se o modelo da polarização com a função de Dissado-Hill	79
Figura 7.14 - Tensão de recuperação para diferentes valores da condutividade de um material, considerando-se o modelo da polarização com a função de Dissado-Hill. As curvas estão normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho	80

Figura 7.15 - Tensão de descarga interna para um material não-polar com condutividade desprezível	81
Figura 7.16 - Tensão de descarga interna para um material polar com condutividade desprezível	81
Figura 7.17 - Tensão de recuperação para um material não-polar com condutividade desprezível	82
Figura 7.18 - Tensão de recuperação para um material polar com condutividade desprezível	82
Figura 7.19 - Influência do tempo de relaxação dipolar sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado	85
Figura 7.20 - Influência do tempo de relaxação dipolar sobre a tensão de recuperação no modelo combinado	85
Figura 7.21 - Influência da densidade de carga espacial sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado	86
Figura 7.22 - Influência da densidade de carga espacial sobre a tensão de recuperação no modelo combinado	87
Figura 7.23 - Influência da condutividade sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado	87
Figura 7.24 - Influência da condutividade sobre a tensão de recuperação no modelo combinado. As curvas estão normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho	88
Figura 7.25 - Tensão de descarga interna no polietileno segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação	89
Figura 7.26 - Tensão de descarga interna no PVC segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação	90
Figura 7.27 - Tensão de descarga interna para a mica segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas	91
Figura 7.28 - Tensão de recuperação para o polietileno segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação	92
Figura 7.29 - Tensão de recuperação para o PVC segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação	93

Figura 7.30 - Tensão de recuperação para a mica segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação	93
Figura 7.31 - Tensão de descarga interna para o polietileno, calculada com os diferentes modelos	94
Figura 7.32 - Tensão de descarga interna para o PVC, calculada com os diferentes modelos	95
Figura 7.33 - Tensão de descarga interna para a mica, calculada com os diferentes modelos	95
Figura 7.34 - Tensão de recuperação para o polietileno, calculada com os diferentes modelos	96
Figura 7.35 - Tensão de recuperação para o PVC, calculada com os diferentes modelos	97
Figura 7.36 - Tensão de recuperação para a mica, calculada com os diferentes modelos	97
Figura A1.1 - Densidade de carga espacial no dielétrico no estado estacionário, para diferentes valores da condutividade. A curva representada por + indica o regime da lei do quadrado, e refere-se ao modelo em que a condutividade é desprezada	105
Figura A1.2 - Campo elétrico no dielétrico no estado estacionário, para diferentes condutividades. A curva representada por + indica o regime da lei do quadrado, e refere-se ao modelo em que a condutividade é desprezada	106
Figura A1.3 - Densidade de carga espacial no dielétrico no estado estacionário, para diferentes tensões aplicadas	107
Figura A1.4 - Campo elétrico no dielétrico no estado estacionário, para diferentes tensões aplicadas	107
Figura A2.1 - Variáveis x_i e t_j na forma discretizada	108
Figura A3.1 - Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson para a obtenção da raiz de $f(x)$	111

RESUMO

É apresentado um modelo combinado para calcular as tensões de descarga interna e de recuperação em dielétricos, considerando simultaneamente os efeitos da polarização dipolar lenta e da carga espacial. As expressões desenvolvidas permitem aplicar qualquer função de relaxação dielétrica e diferentes formas para a distribuição inicial de carga espacial. Propõe-se um procedimento numérico simples e eficiente para a solução do sistema de equações. São analisados diferentes modelos para a relaxação dielétrica. São estudados materiais amorfos e cristalinos, polares e não-polares. Os resultados teóricos são comparados com os experimentais para avaliar a aplicabilidade do modelo combinado. Discute-se a influência da condutividade elétrica sobre as tensões de descarga interna e de recuperação.

Palavras-chave: Dielétricos; Efeito posterior; Relaxação dielétrica; Carga espacial.

ABSTRACT

A combined model to compute the internal discharge and the recovery voltages was developed. The effects of the delayed electric polarization and the space charge are supposed to act simultaneously. The equations presented allow to use any dielectric relaxation function and any initial condition for the space charge distribution. A numerical procedure to solve the set of equations was proposed. Different solid materials were considered, among them amorphous and crystalline, polar and non-polar. Comparisons were made between theoretical and experimental results and the applicability of the combined model was checked. The importance of the electrical conductivity on the internal discharge and the recovery voltages was also examined.

Key words: Dielectrics; After-effect; Dielectric relaxation; Space charge.

Introdução

A produção e a utilização da energia elétrica são fundamentais para o desenvolvimento de uma região ou de um país. Diariamente surgem novas aplicações industriais e comerciais. Ao mesmo tempo aumentam as exigências com relação à segurança das pessoas, bem como o interesse pela produção de componentes e sistemas compactos. Materiais dielétricos, especialmente os dielétricos sólidos, são necessários na constituição de equipamentos e sistemas elétricos. Isto ocorre desde a geração até a utilização da energia.

Do ponto de vista do projeto de equipamentos elétricos, é interessante dispor de métodos e equações que permitam simular o comportamento dos isolantes, com o objetivo de otimizar a sua aplicação. Isto é motivado pela existência de diversos materiais, cada qual com propriedades dielétricas típicas, e pela necessidade de melhor aproveitá-los por razões econômicas.

Por outro lado, deseja-se que os sistemas elétricos existentes operem de forma segura e confiável. Para isto é importante a existência de técnicas para avaliar a degradação do dielétrico ao longo de sua vida útil e indicar, de forma preventiva, uma eventual substituição.

Neste trabalho estuda-se o efeito posterior em dielétricos sólidos com base nos fenômenos da tensão de descarga interna e tensão de recuperação. Justifica-se a sua importância técnica considerando que estas tensões são grandezas facilmente mensuráveis e que, com base nestas medidas, são feitos ensaios periódicos em transformadores de potência, capacitores e cabos visando acompanhar de forma não destrutiva o envelhecimento do material isolante [1, 2]. Os fenômenos de degradação elétrica e de *breakdown* num material dielétrico têm sido associados, em parte, à distribuição de cargas e ao campo elétrico em seu interior [3, 4]. Daí o interesse por um modelo mais preciso para calcular estas grandezas. Também deve ser considerado que, com um bom modelo teórico, é possível fazer simulações computacionais do comportamento dielétrico de materiais. Assim, atribuindo-se valores para suas propriedades físicas pode-se avaliar qual seria sua resposta. Isto é útil para a escolha dos materiais na etapa de desenvolvimento de equipamentos elétricos.

A palavra dielétrico refere-se a um material que, ao ser submetido a um campo elétrico, apresenta simultaneamente efeitos de indução e de condução. Supõe-se ainda que este material seja absorptivo, ou seja, à aplicação de um campo elétrico seguem-se duas respostas: uma rápida e outra lenta, que origina o efeito posterior.

Propõe-se um modelo que leve em conta simultaneamente a influência da polarização dipolar lenta e o movimento da carga espacial livre. A motivação para este estudo combinado se deve a evidências experimentais da presença

simultânea dos fenômenos da relaxação dielétrica e da carga espacial, conforme descrito por Das-Gupta [5], Jonscher [6] e Yoshino [7]. As expressões apresentadas permitem aplicar qualquer função de relaxação dielétrica e qualquer distribuição inicial de carga espacial. Despreza-se o efeito da difusão dos portadores livres. Neste estudo não foram considerados os efeitos das interfaces metal-dielétrico nos eletrodos nem a presença de armadilhas (*traps*). As equações estão expressas em função do campo elétrico.

No capítulo 1 é apresentada uma breve descrição do efeito posterior e de suas características, bem como dos problemas da tensão de descarga interna e de recuperação. Neste capítulo também estão reunidas as hipóteses utilizadas ao longo do trabalho.

No capítulo 2 é feito um resumo da evolução histórica das teorias desenvolvidas para descrever o efeito posterior em dielétricos.

No capítulo 3 é apresentado um estudo sobre o modelo da polarização dipolar. Descrevem-se alguns modelos e dá-se ênfase aos de Jonscher e de Dissado-Hill. Obtém-se uma equação integral para o campo elétrico.

No capítulo 4 estuda-se o modelo da carga espacial. Partindo-se de equações básicas do eletromagnetismo, obtém-se uma equação diferencial parcial para o campo elétrico.

No capítulo 5 faz-se uma combinação dos modelos dos capítulos 3 e 4, de maneira a considerar a ação simultânea dos fenômenos da polarização lenta e da evolução da carga espacial livre. Resulta um sistema de equações a ser resolvido.

No capítulo 6 propõem-se procedimentos para a solução numérica das equações.

No capítulo 7 são mostrados resultados da solução numérica das equações e são feitas comparações com resultados experimentais. Diferentes tipos de materiais são analisados. Faz-se uma discussão da influência das propriedades físicas e dos parâmetros do material.

1 Conceitos Básicos

1.1 Efeito Posterior

Ao iniciar o estudo do efeito posterior é oportuno distinguí-lo do efeito de histerese que ocorre nos materiais ferroelétricos [8]. Para isto serão usadas as grandezas da teoria de campo: campo elétrico $\vec{E}(t)$ e deslocamento elétrico $\vec{D}(t)$.

O efeito posterior em dielétricos foi observado inicialmente para o estado transitório. Quando um material é submetido repentinamente a um campo elétrico \vec{E} , o deslocamento elétrico \vec{D} apresenta uma variação inicial muito rápida seguida de uma variação lenta, até que a nova condição de equilíbrio seja atingida.

A comparação entre estes efeitos pode ser feita mais facilmente considerando-se o material sujeito a um campo elétrico harmônico.

No efeito posterior as grandezas \vec{D} e \vec{E} apresentam uma diferença de fase que depende da frequência mas independe do tempo [9, 10] e o gráfico de D em função de E é uma elipse, conforme a figura 1.1(a). No efeito de histerese a diferença de fase entre \vec{D} e \vec{E} varia com o tempo e a relação entre elas é representada graficamente por uma curva chamada de “laço de histerese”, conforme a figura 1.1(b). Em ambos os casos, a área interior às curvas está associada com a perda de energia por ciclo.

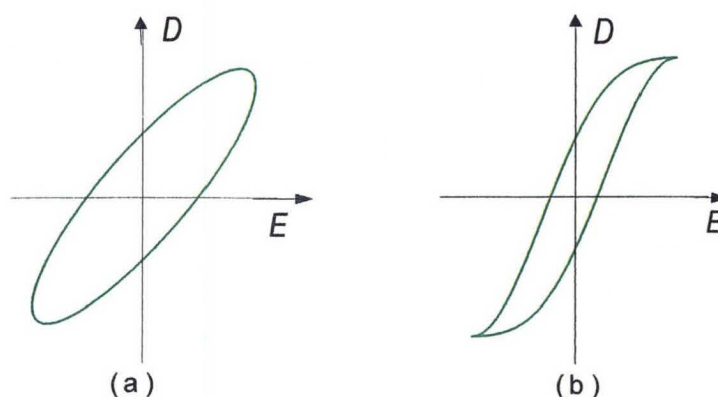


Figura 1.1 - Comportamento de D em função de E nos efeitos: (a) posterior e (b) histerese, considerando um campo elétrico harmônico.

Segundo Snoek e du Pré [11] os dois efeitos também diferem entre si pelos seguintes comportamentos: quando a amplitude do campo \vec{E} é reduzida, a elipse e o “laço” se tornam menores, porém, a elipse mantém suas proporções originais enquanto que o “laço” se deforma; quando a frequência do campo \vec{E} é variada, a elipse se torna mais larga ou mais estreita enquanto que o “laço” permanece inalterado.

Para campos alternados que não sejam harmônicos, o gráfico de D em função de E deixa de ser uma elipse no efeito posterior, mas mantém a forma de “laço” no efeito de histerese.

1.2 Tensão de Descarga Interna e de Recuperação

Para descrever os fenômenos relacionados com o efeito posterior estudados neste trabalho utiliza-se as grandezas da teoria de circuitos: tensão elétrica $V(t)$ e corrente elétrica $I(t)$. Deve ser destacado que as abordagens de campo e de circuito são equivalentes [12]. O circuito da figura 1.2 é composto pelos seguintes elementos:

V: fonte de tensão contínua

E: eletrômetro

S: chave comutadora

C: capacitor contendo a amostra do dielétrico a ser estudado.

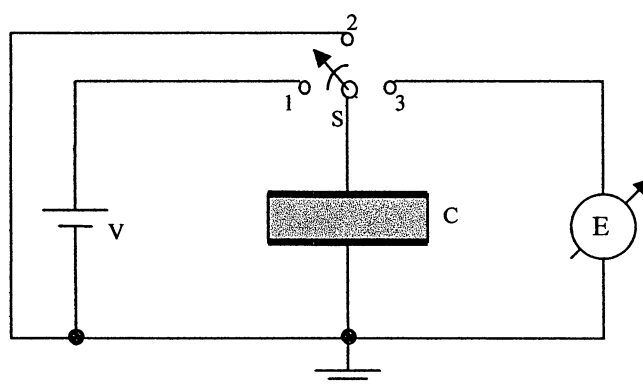


Figura 1.2 - Circuito utilizado para o estudo do efeito posterior.

Para observar o fenômeno da descarga interna pode ser utilizado o seguinte procedimento: com a chave S na posição 1 polariza-se o dielétrico durante um intervalo de tempo muito grande; em seguida passa-se a chave S diretamente para a posição 3, no instante $t = 0$, e mede-se com o eletrômetro a

tensão entre as placas do capacitor, a qual é chamada de tensão de descarga interna. Seu comportamento está representado na figura 1.3. Os resultados experimentais mostram que o decaimento da tensão de descarga interna depende do tipo de material, da temperatura, do valor da tensão aplicada e da duração do processo de carga.

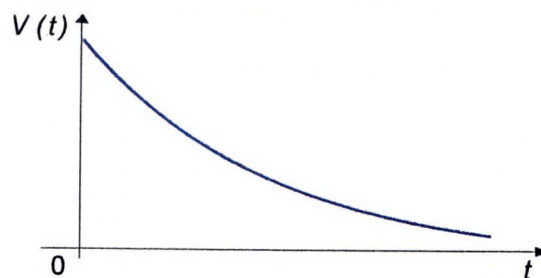


Figura 1.3 - Tensão de descarga interna em função do tempo.

O fenômeno da tensão de recuperação pode ser observado com o seguinte procedimento: com a chave S na posição 1 polariza-se o dielétrico durante um intervalo de tempo muito grande; em seguida, com a chave S na posição 2 provoca-se um curto-circuito momentâneo entre as placas do capacitor; finalmente, com a chave S na posição 3, abre-se o circuito no instante $t = 0$ e mede-se com o eletrômetro a tensão entre as placas do capacitor. Esta tensão é originada no dielétrico e é chamada de tensão de recuperação. Seu comportamento está ilustrado na figura 1.4. Verifica-se experimentalmente que o valor máximo da tensão de recuperação depende do tipo de material dielétrico, do valor da tensão aplicada durante a carga e dos intervalos de tempo de carga e de curto-circuito.

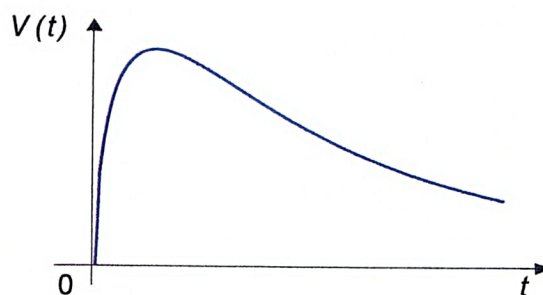


Figura 1.4 - Tensão de recuperação em função do tempo.

O modelo da polarização elétrica procura explicar estes fenômenos com base na relaxação da polarização. Enquanto há um campo elétrico aplicado, os dipolos permanentes moleculares e as configurações de cargas que se comportam como dipolos, tendem a se alinhar com ele. Quando cessa a ação do campo aplicado estes dipolos reorientam-se lentamente segundo direções aleatórias.

O modelo da carga espacial justifica o efeito posterior com base no movimento das cargas livres, que tendem a se distribuir uniformemente através do dielétrico. Este movimento ocorre sob influência do campo elétrico da distribuição de carga espacial.

Ambas abordagens prevêm o decaimento lento de $V(t)$. Na primeira, devido a um tempo de relaxação dielétrica grande e, na segunda, porque a mobilidade dos portadores de carga geralmente é muito pequena em materiais dielétricos.

1.3 Hipóteses Utilizadas

Na realização deste trabalho foram consideradas as seguintes hipóteses:

- a) O dielétrico tem geometria plana, conforme mostra a figura 1.5.

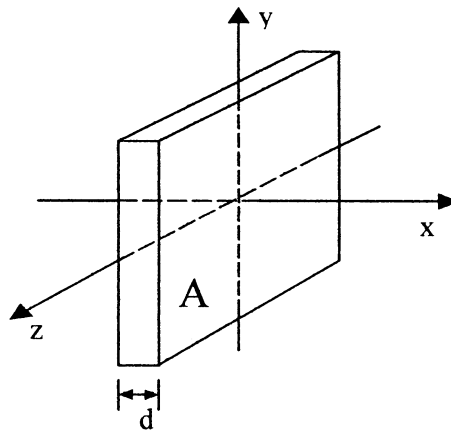


Figura 1.5 - Forma geométrica do dielétrico e sistema de coordenadas utilizado.

Supondo que A seja a área da face lateral, considera-se que $d \ll \sqrt{A}$ com o intuito de desprezar os efeitos das bordas. Assim, as grandezas físicas que variam espacialmente dependerão apenas da coordenada x . As grandezas

de caráter vetorial, como por exemplo o campo elétrico e a densidade de corrente, terão apenas as componentes ao longo do eixo Ox , permitindo que as equações sejam escritas sob forma escalar;

b) o contato entre um dos eletrodos metálicos e o material dielétrico é perfeitamente ôhmico. Neste caso, o potencial de contato é constante e independente do sentido e da intensidade da corrente. O contato entre o outro eletrodo e o dielétrico é bloqueante;

c) só há uma espécie de portadores de carga;

d) só há injeção de carga em um dos eletrodos;

e) os processos são isotérmicos;

f) a condutividade e a mobilidade não dependem do campo elétrico;

g) as equações na forma dimensional estão expressas no SI.

2 Revisão da Literatura

O efeito posterior em dielétricos foi descrito na literatura, talvez pela primeira vez, por Kohlrausch e Weber em 1854 com relação às garrafas de Leyden [13]. Em 1877, por orientação de Maxwell, Hopkinson [14, 15] estudou alguns tipos de vidros usados naqueles dispositivos e formulou um tratamento matemático para a resposta retardada de um dielétrico; ele fez uma analogia com a teoria que Boltzmann desenvolveu em 1874 para o comportamento de corpos elásticos. Estas pesquisas também foram realizadas por J. Curie [16], cujo trabalho foi publicado em 1889. Von Schweidler [17] deu prosseguimento a estes estudos e, em 1907, apresentou um trabalho tratando dos fenômenos hereditários em dielétricos. Neste trabalho ele cita que a hipótese de um único tempo de relaxação nem sempre é adequada para explicar o comportamento da relaxação e propôs, então, uma teoria que considerasse mais de um tempo de relaxação. Em 1913, Wagner [10] apresentou um trabalho estendendo a distribuição discreta de tempos de relaxação para uma distribuição contínua. De acordo com os seus estudos, em certos casos esta distribuição é gaussiana. Uma distribuição contínua de tempos de relaxação permite uma boa descrição matemática do comportamento dielétrico, porém, encontra resistência entre muitos pesquisadores porque não possui uma interpretação física plausível.

Em 1929, Debye [18] deu uma grande contribuição ao desenvolver um modelo que considerava moléculas esféricas, com dipolo elétrico permanente, suspensas num meio viscoso e capazes de girar sob a ação de um campo elétrico externo. É feita a hipótese que as moléculas não interajam entre si. Posteriormente, Fröhlich [19] sugeriu uma modificação neste modelo, ao considerar que a orientação molecular ocorresse aos saltos entre duas posições de equilíbrio, invés de um movimento contínuo; para isso foi usado o conceito de barreira de potencial para a rotação.

Em 1937, Gross e Rocha [20, 21, 22] lançaram as bases de uma teoria fenomenológica para o comportamento dielétrico, numa aproximação linear. Isto originou um estudo intensivo do fenômeno da relaxação dielétrica, fazendo com que diferentes grupos de pesquisadores propusessem uma série de modelos macroscópicos para a relaxação [10]. Foram propostos os modelos de Cole-Cole e Fuoss-Kirkwood em 1941, Havriliak-Negami em 1966 e Williams-Watts em 1970, entre outros.

Em 1977, Jonscher [23] apresentou um modelo para a relaxação dielétrica, baseado na análise experimental e sistemática de um grande número de materiais e condições. Neste modelo é feita uma generalização da função resposta utilizada por von Schweidler.

Um outro modelo, com forte fundamentação teórica, foi apresentado por Dissado e Hill [24] em 1983. Empregando os conceitos da mecânica estatística

e da mecânica quântica, foi desenvolvido um modelo que leva em conta a interação entre muitos corpos e também a reorientação aos saltos.

Outra abordagem para descrever a polarização orientacional foi apresentada por Weron [25] em 1991 e está baseada na teoria dos fenômenos estocásticos. Por sua própria natureza, estes resultados só são aplicáveis a materiais amorfos.

Paralelamente, outros pesquisadores trataram do problema da injeção de cargas e da dinâmica da carga espacial em dielétricos [26]. Mott e Gurney propuseram, em 1940, um modelo para as correntes limitadas por carga espacial. Em 1953, Schokley, Prim e Dacey estenderam o estudo anterior considerando também a contribuição do fenômeno da difusão. Nestes trabalhos não foi considerada a presença de armadilhas. Rose e Smith, em 1955, e Lampert [27], em 1956, estudaram o efeito das armadilhas sobre as correntes limitadas por carga espacial. Em 1962, Many e Rakavy [26] publicaram um artigo fundamental sobre o assunto, com ênfase nas técnicas matemáticas para solução. Neste artigo é estudado com detalhes o regime transitório da corrente.

Seguiram-se muitos trabalhos, dentre eles, de Beaumont e Jacobs [28] em 1967, e de Meaudre e Mesnard [29] em 1972. Belmont, Maskel e Duller [30], em 1985, aplicaram o formalismo de Lagrange, que é utilizado para resolver problemas não-lineares de transporte, ao caso da carga espacial.

Os estudos iniciais consideravam o dielétrico e os eletrodos planos. Com a aplicação prática de isolantes sólidos em cabos, as equações foram também desenvolvidas para a simetria cilíndrica [31]. O desenvolvimento de soluções para eletrodos com formas geométricas mais complexas, como agulha-plano e esfera-plano, foi motivado pela observação que a carga espacial está relacionada com o fenômeno de *breakdown*.

Tendo em vista que num dielétrico real as cargas se movem na presença de armadilhas localizadas aleatoriamente e com diferentes energias, os trabalhos fundamentais mais recentes se concentram nos estudos de aprisionamento múltiplo, *hopping* e percolação em sistemas amorfos [32].

Para a solução do problema teórico da carga espacial é necessário fornecer as condições iniciais. Isto pode ser feito a partir de hipóteses ou a partir de medidas que dêem uma indicação da distribuição inicial de cargas. Este é um dos motivos pelo qual as técnicas experimentais para a caracterização da carga espacial apresentaram grande evolução. Na década de 70, os métodos da corrente termo-estimulada (TSC) e da termoluminescência foram bastante utilizados, porém, fornecem pouca informação sobre a discriminação espacial e alteram ou eliminam a distribuição de cargas sob estudo. Os desenvolvimentos mais recentes concentram-se nos métodos não destrutivos. Eles são baseados na propagação de uma perturbação, a qual gera um deslocamento

temporário da carga espacial na amostra que, por sua vez, provoca a variação da carga induzida nos eletrodos que é detectada pelo sistema de medida. Existem técnicas térmicas e acústicas [33, 34]. As técnicas térmicas envolvem o aquecimento da amostra. Citam-se: a modulação da intensidade do laser (LIMM), desenvolvida por Das-Gupta e colaboradores e o método do pulso térmico. As técnicas acústicas empregam ondas sonoras longitudinais. Dentre elas citam-se: a propagação do pulso de pressão (PWP), desenvolvida por Eisenmenger e seu grupo em 1982, o pulso de pressão induzido por laser (LIPP), desenvolvido paralelamente por Sessler e seu grupo na Alemanha, e por Lewiner e seus colaboradores na França em 1982, e também o método do pulso eletroacústico (PEA), desenvolvido no Japão por Takada e sua equipe em 1983.

Nas últimas décadas alguns autores têm aplicado um tratamento que combina o estudo da relaxação dielétrica com a dinâmica da carga espacial para estudar o problema do efeito posterior [35, 36], porém, usam o modelo de Debye para a relaxação dielétrica.

Deve ser destacado o trabalho desenvolvido no Brasil pelo Grupo de Polímeros “Professor Bernhard Gross”, estudando de maneira intensiva e sistemática a física dos dielétricos.

3 Modelo da Polarização

3.1 Análise no Domínio do Tempo

Quando um material dielétrico é submetido à ação de um campo elétrico, por exemplo produzido por dois eletrodos, ocorre uma orientação dos dipolos permanentes e um deslocamento microscópico das cargas nas moléculas e átomos.

Um observador externo pode descrever o fenômeno da polarização, mesmo sem conhecer a estrutura microscópica do material, usando as grandezas: deslocamento elétrico D , que no caso de um capacitor plano representa a densidade superficial total de carga sobre cada eletrodo; intensidade de campo elétrico macroscópico E devido às cargas livres na superfície de cada eletrodo e da polarização elétrica P , que é uma densidade volumar de momento de dipolo.

A relação entre essas grandezas é dada por:

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (3.1)$$

sendo ε_0 a permissividade elétrica do vácuo.

Quanto mais intenso for o campo elétrico maior será a formação e o alinhamento dos dipolos, aumentando a densidade de carga nos eletrodos. Por este motivo usa-se a relação:

$$P = \varepsilon_0 \chi(E) E \quad (3.2)$$

onde $\chi(E)$ é chamada de susceptibilidade elétrica do material. A equação (3.2) é válida para campos elétricos estáticos ou quase-estáticos.

No caso de materiais dielétricos lineares $\chi(E) = \chi = \text{constante}$, então:

$$P = \varepsilon_0 \chi E \quad (3.3)$$

Esta não é a única maneira de relacionar P e E , porém é a forma mais comum [8, 37]. Uma vantagem desta expressão é que χ apresenta-se adimensional.

Para materiais cristalinos anisotrópicos ou parcialmente cristalinos a polarização pode ter uma orientação diferente daquela do campo. Neste caso a susceptibilidade elétrica é representada por um tensor.

No modelo da polarização o campo elétrico e a polarização no material são considerados uniformes, por isso as equações deste capítulo não dependem da coordenada x .

Sob um ponto de vista microscópico, a polarização pode ser dividida em duas partes: lenta $P_s(t)$ e rápida $P_i(t)$.

Esta classificação visa sistematizar o estudo porque, na realidade, diversos fenômenos microscópicos contribuem para o comportamento dielétrico observado. Por exemplo, citam-se [10, 38]: existência de dipolos permanentes nas moléculas; polarização atômica, eletrônica e iônica; defeitos iônicos do tipo dipolar; injeção de cargas induzindo o efeito de carga espacial; salto de portadores de carga de um estado localizado para outro (*hopping*); polarização interfacial nos eletrodos e nas vizinhanças de regiões não homogêneas e tunelamento de portadores de carga para armadilhas. Alguns destes processos envolvem o deslocamento ou orientação de portadores ligados, enquanto que outros são produzidos pelo deslocamento de portadores livres. Alguns processos são lentos e outros são rápidos, sendo que estes últimos podem ser considerados instantâneos sob um ponto de vista prático.

Em forma matemática pode-se escrever [10, 39]:

$$P(t) = P_s(t) + P_i(t) \quad . \quad (3.4)$$

As moléculas polares, quando submetidas a um campo elétrico, tendem a se alinhar com a direção deste campo. Esta polarização também é chamada de polarização orientacional e pode apresentar um efeito inercial significativo, contribuindo para a polarização lenta. A polarização atômica ocorre pelo deslocamento de átomos carregados ou grupos de átomos uns em relação aos outros, quando as moléculas ficam sujeitas a um campo elétrico. De forma semelhante, a polarização eletrônica ocorre devido a um pequeno deslocamento da nuvem de elétrons em relação ao núcleo atômico.

Para os processos considerados instantâneos utiliza-se a relação:

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \chi_i E(t) \quad (3.5)$$

onde χ_i é a susceptibilidade elétrica para a polarização instantânea.

Neste trabalho estamos interessados no comportamento transitório, de forma que a polarização lenta será considerada com mais ênfase.

Como ilustração, quando é aplicado ao dielétrico um campo elétrico em forma de função degrau,

$$E(t) = E_0 S(t - t')$$

a polarização varia conforme o gráfico da figura 3.1.

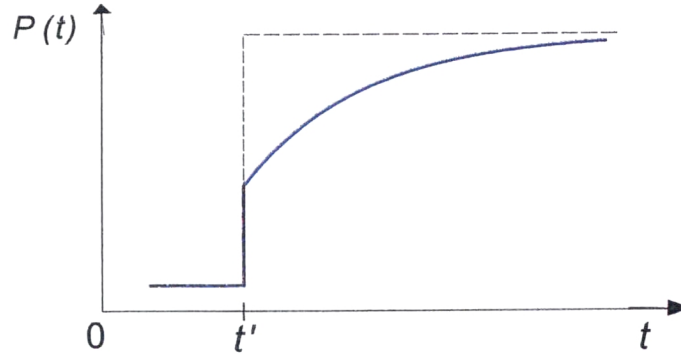


Figura 3.1 - Variação da polarização quando é aplicado ao material um campo elétrico em forma de função degrau.

Observa-se que a polarização não acompanha de maneira instantânea o campo elétrico. É necessário um intervalo de tempo para que $P(t)$ atinja um novo valor de equilíbrio, representado na figura 3.1 com linha tracejada. A parcela correspondente à polarização lenta pode ser representada por [10]:

$$P_s(t) = \varepsilon_0 \chi_s E_0 [1 - F(t - t')] \quad (3.6)$$

onde χ_s é uma constante e $F(t - t')$ é conhecida como função resposta ao degrau para a polarização. Existem diversos modelos estabelecendo formas funcionais para $F(t)$.

Um campo elétrico que varie de forma arbitrária no tempo pode ser representado como uma sucessão de impulsos. Neste caso, os princípios da superposição e da causalidade permitem expressar a polarização lenta na forma [10]:

$$P_s(t) = \varepsilon_0 \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

onde $f(t - \tau)$ é a função resposta ao impulso para a polarização, também chamada de função resposta dielétrica, função de relaxação dielétrica ou função hereditária. As funções $f(t)$ e $F(t)$ estão relacionadas entre si através de:

$$f(t) = -\frac{dF(t)}{dt} .$$

A equação (3.7) implica que a polarização no instante t depende da superposição dos efeitos do campo elétrico em instantes anteriores a t , ou seja, há uma dependência do passado.

A função $f(t)$ deve satisfazer as seguintes condições:

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1 \quad (3.8)$$

Impõe-se a condição da equação (3.8) para possibilitar comparações entre diferentes formas funcionais de $f(t)$.

Após um intervalo de tempo muito grande sob ação de um campo elétrico constante E_0 , a polarização deve tender para o valor estacionário. Então, a condição da equação (3.8) aplicada à equação (3.7) permite escrever:

$$P_s(\infty) = \varepsilon_0 \chi_s E_0 \int_0^{\infty} f(t) dt = \varepsilon_0 \chi_s E_0 \quad . \quad (3.9)$$

3.2 Análise no Domínio da Frequência

Neste trabalho os problemas são tratados exclusivamente no domínio do tempo. Entretanto, é interessante fazer uma breve apresentação da análise no domínio da frequência. Com isto será estabelecida uma relação entre a função resposta $f(t)$ e a permissividade elétrica complexa $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, a qual é especificada em alguns modelos de relaxação.

No processo de polarização ocorrem movimentos de partículas microscópicas, os quais possuem tempos característicos. Por exemplo [10, 38], para a polarização orientacional de moléculas e íons este tempo é maior que 10^{-12} s, para a polarização atômica é da ordem de 10^{-14} s e para a polarização eletrônica é da ordem de 10^{-16} s.

Quando o dielétrico é submetido a um campo elétrico estático, a polarização varia durante o período transitório até atingir um novo valor de equilíbrio, porém, quando o campo elétrico é variável no tempo, a polarização não necessariamente estará em equilíbrio com este campo.

Se o campo aplicado varia com períodos próximos dos tempos característicos, o movimento das partículas microscópicas não é suficientemente rápido

para que a polarização atinja o equilíbrio. Ela sofre um defasamento em relação ao campo elétrico. Caso a variação do campo seja extremamente rápida, como em frequências da região do infra-vermelho, o movimento dos dipolos permanentes deixa de ocorrer, restando unicamente a polarização rápida.

Este comportamento dinâmico é estudado mais facilmente com o uso de campos elétricos harmônicos. É necessário então definir a permissividade elétrica dependente da frequência $\tilde{\epsilon}(\omega)$, a qual é complexa e expressa por $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)$, sendo i a unidade imaginária. As partes real e imaginária podem ser medidas em função da frequência usando-se técnicas experimentais adequadas. A figura 3.2 ilustra a forma geral das funções $\epsilon'(\omega)$ e $\epsilon''(\omega)$ para materiais polares no estado condensado. Observa-se os patamares em $\epsilon'(\omega)$ e os picos em $\epsilon''(\omega)$.

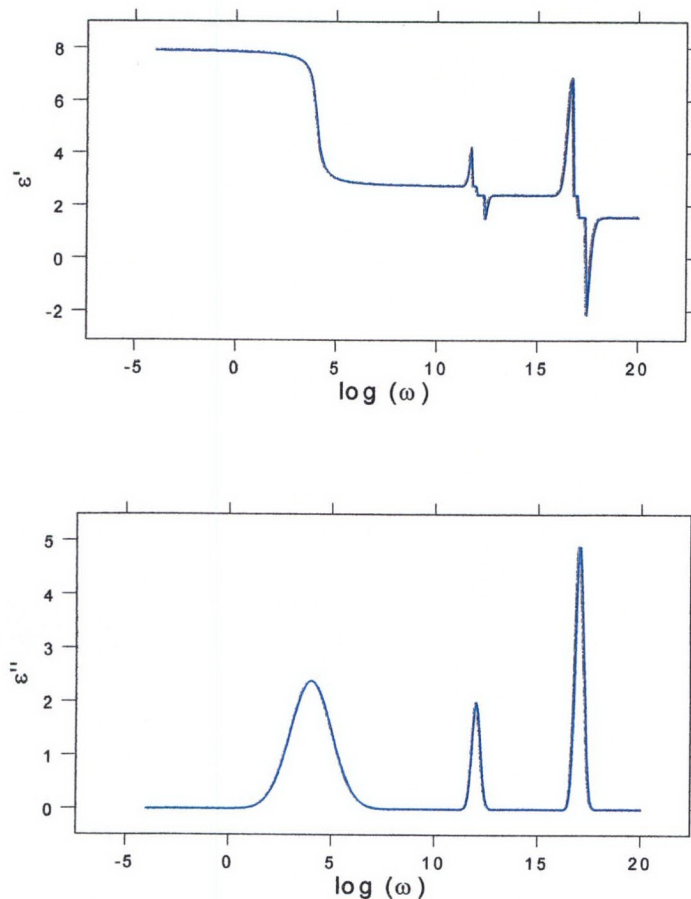


Figura 3.2 - Gráficos típicos para $\epsilon'(\omega)$ e $\epsilon''(\omega)$ em função da frequência para um material polar.

No gráfico de $\varepsilon''(\omega)$ o primeiro pico está associado à polarização orientacional, enquanto que o segundo pico corresponde à polarização atômica e o terceiro à polarização eletrônica.

As partes real e imaginária estão vinculadas entre si através das relações de Kramers-Kronig [10]:

$$\varepsilon'(\omega_0) = \varepsilon_\infty + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (3.10)$$

$$\varepsilon''(\omega_0) = -\frac{2}{\pi} \omega_0 \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\varepsilon'(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (3.11)$$

onde o símbolo \mathcal{P} representa o valor principal de Cauchy da integral e ε_∞ é a permissividade em altas frequências, a qual está relacionada com a susceptibilidade χ_i através de:

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_0(1 + \chi_i) \quad . \quad (3.12)$$

Por sua vez, a permissividade complexa está relacionada com a função resposta por:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon - \varepsilon_\infty) \mathcal{L}_{i\omega} \{ f(t) \} \quad (3.13)$$

de forma que os parâmetros da função resposta podem também ser obtidos a partir da determinação experimental de $\tilde{\varepsilon}(\omega)$. Na equação (3.13) o operador $\mathcal{L}_{i\omega} \{ \}$ é a transformada de Laplace para argumento imaginário, que é igual à transformada unilateral de Fourier.

3.3 Alguns Modelos para a Relaxação Dielétrica

Existem diversos modelos para descrever a resposta não instantânea da polarização [10]. Alguns especificam a função resposta $f(t)$ e outros a permissividade elétrica $\tilde{\varepsilon}(\omega)$. Como neste trabalho estuda-se a evolução temporal da polarização, é necessário o conhecimento da função resposta $f(t)$. Usando a equação (3.13) é possível obter $f(t)$ para os modelos que especificam $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, desde que a transformada inversa de Laplace possa ser calculada.

Um dos primeiros modelos, e também o mais simples, para descrever a resposta não instantânea dos dipolos permanentes em relação às variações do campo aplicado é o modelo de Debye [18]. Supõe-se que os dipolos não

interajam entre si e que todos apresentem um único tempo de relaxação τ_0 . Segundo este modelo, a função resposta é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (3.14)$$

A hipótese de se desprezar a interação entre dipolos faz com que este modelo não seja o mais adequado para sólidos.

Uma outra função resposta de natureza empírica é a de Curie-Hopkinson-von Schweidler [14, 16, 17], cuja equação é :

$$f(t) = \beta t^{-\alpha} \quad (3.15)$$

onde α e β são constantes para cada material. A partir daqui, neste trabalho, este modelo será citado como modelo de von Schweidler, para simplificar a terminologia.

Seguiu-se a estes modelos a teoria de von Schweidler, devido à observação experimental de que alguns sistemas apresentam mais de um pico relativo à polarização lenta. Esta teoria considera que diferentes partes da polarização lenta decaem com tempos de relaxação diferentes. O comportamento do dielétrico é descrito por um conjunto finito de tempos de relaxação.

Posteriormente Wagner propôs uma teoria usando uma distribuição contínua de tempos de relaxação. Seguindo a teoria de Wagner foram desenvolvidos diversos modelos fenomenológicos.

Dentre os modelos que especificam $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ cita-se o de Havriliak-Negami, cujas referências na literatura indicam uma concordância razoável com as medidas em dielétricos poliméricos. Ele estabelece que [10]:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon - \varepsilon_\infty) \frac{1}{[1 + (i\omega\tau_0)^{1-\alpha}]^\beta} \quad (3.16)$$

sendo que α , β e τ_0 são parâmetros do dielétrico. A função resposta $f(t)$ pode ser obtida pela equação (3.13), mas apenas em forma de série e válida em restritos domínios de t .

Outra descrição importante é a de Kohlrausch-Williams-Watts, a qual especifica a função resposta ao degrau para a polarização lenta [10]:

$$F_p(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\beta\right] \quad (3.17)$$

cuja função resposta é:

$$f(t) = \frac{\beta}{\tau_0} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\beta\right] \quad (3.18)$$

onde β e τ_0 são parâmetros típicos para cada material.

Um modelo empírico importante foi proposto por Jonscher [6] dentro da denominada “teoria universal da relaxação”. Seu objetivo é descrever de maneira geral o comportamento dos materiais dielétricos. A formulação deste modelo envolveu um grande número de medidas. Ele estabelece que:

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{A_J}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-m} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-n}} \quad (3.19)$$

onde ω_0 , m e n são parâmetros que caracterizam o material, sendo que ω_0 é a frequência onde ocorre o máximo da função $\varepsilon''(\omega)$. Os parâmetros m e n estão no domínio $0 < (m, n) < 1$.

A função resposta é dada por [6]:

$$f(t) = \frac{A_J}{(\omega_0 t)^n + (\omega_0 t)^{m+1}} \quad (3.20)$$

O fator A_J é calculado tal que a equação (3.8) seja satisfeita. Neste caso,

$$A_J = \omega_0 \frac{(1+m-n)}{\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{(1-n)\pi}{1+m-n} \right] \quad (3.21)$$

A influência de m e n sobre a função $f(t)$ será estudada com detalhes na seção 3.4.

Uma formulação mais recente, com fundamentação teórica refinada, é a de Dissado e Hill [24]. Este modelo utiliza conceitos da mecânica estatística e da mecânica quântica e leva em consideração a interação de muitos corpos. Considera-se que a orientação dipolar ocorre aos saltos, e não de maneira contínua. A expressão para $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ é a seguinte [6]:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \omega_p^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \zeta^{-n} N d \frac{[M'(0)]}{E} \frac{\Gamma(1+m-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(1+m)} \times \quad (3.22)$$

$$\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{n-1} {}_2F_1(1-n, 1-m; 2-n; (1 + i\frac{\omega}{\omega_p})^{-1})$$

onde ζ é uma frequência característica, da ordem de 10^{12} Hz, $M'(0)$ é a taxa de variação da polarização em $t = 0$, N é o número de dipolos por unidade de volume, d é o momento de cada dipolo e E é o campo elétrico aplicado. Os parâmetros m , n e ω_p têm valores característicos para cada material, e ω_p pode ser interpretada como a frequência onde ocorre o máximo da função $\varepsilon''(\omega)$. O símbolo ${}_2F_1$ representa a função hipergeométrica. Embora os símbolos m e n sejam iguais nas equações (3.19) e (3.22), seus valores numéricos podem ser diferentes em cada um dos modelos.

A forma funcional para a função resposta é [6]:

$$f(t) \propto -\omega_p \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \zeta^{-n} M'(0) \frac{\Gamma(1+m-n)}{\Gamma(2-n)\Gamma(1+m)} \times \quad (3.23)$$

$$(\omega_p t)^{-n} \exp(-\omega_p t) {}_1F_1(1-m; 2-n; \omega_p t) .$$

O símbolo ${}_1F_1$ denota a função hipergeométrica confluyente. Na seção 3.4 será mostrada a influência dos parâmetros m e n em $f(t)$.

Um outro modelo recente com base teórica deve-se a Weron. Seu desenvolvimento está baseado na teoria dos processos estocásticos. A função resposta é dada pela expressão [25, 40]:

$$f(t) = \phi_0 \alpha \omega_p (\omega_p t)^{\alpha-1} [1 + k (\omega_p t)^\alpha]^{-(1+k)/k} \quad (3.24)$$

onde ϕ_0 é uma constante de normalização, ω_p é a frequência onde ocorre o pico de perdas e α e k são constantes que caracterizam cada material.

3.4 Comparação entre os Modelos de Jonscher e de Dissado-Hill

Os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill apresentam resultados satisfatórios para o comportamento dielétrico da maioria dos materiais. É interessante então estudar estas funções resposta e suas conseqüências.

Nesta seção serão consideradas as funções $f(t)$ de cada um dos modelos e analisada a influência dos seus parâmetros m e n . Serão usados os sub-índices J e D para indicar as funções relacionadas com os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill, respectivamente.

Foram usadas as equações (3.20) e (3.21) para a função resposta do modelo de Jonscher.

Com relação ao modelo de Dissado-Hill, a partir da equação (3.23) foi calculado um fator para transformar a proporcionalidade numa igualdade, tal que a condição dada pela equação (3.8) fosse satisfeita.

Definiu-se a função $A_D(m, n, \omega_p)$ e expressou-se $f_D(t)$ como:

$$f_D(t) = A_D(m, n, \omega_p) (\omega_p t)^{-n} \exp(-\omega_p t) {}_1F_1(1-m; 2-n; \omega_p t) . \quad (3.25)$$

Para o cálculo da integral

$$\int_0^\infty (\omega_p t)^{-n} \exp(-\omega_p t) {}_1F_1(1-m; 2-n; \omega_p t) dt \quad (3.26)$$

a função hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ foi substituída pela sua representação em série de Kummer [41] e a integração foi feita termo a termo. Após manipulações algébricas e simplificações, obteve-se:

$$A_D(m, n, \omega_p) = \omega_p \frac{\Gamma(1 + m - n)}{\Gamma(m)\Gamma(1 - n)\Gamma(2 - n)} \quad . \quad (3.27)$$

O procedimento usado para determinar $A_D(m, n, \omega_p)$ foi direto, sendo que é possível aplicar a função resposta sem conhecermos os valores de $M'(0)$ e ζ . Isto foi possível pelo uso da condição da equação (3.8). Assim, a função resposta para o modelo de Dissado-Hill pode ser expressa por:

$$f_D(t) = \omega_p \frac{\Gamma(1 + m - n)}{\Gamma(m)\Gamma(1 - n)\Gamma(2 - n)} (\omega_p t)^{-n} \exp(-\omega_p t) {}_1F_1(1 - m; 2 - n; \omega_p t) \quad (3.28)$$

A comparação das equações (3.23) e (3.28) sugere uma maneira de avaliar os parâmetros microscópicos do modelo de Dissado-Hill a partir do conhecimento de m , n e ω_p determinados experimentalmente.

Para os gráficos a seguir foram usados os dados referentes a um filme de polietileno (LDPE), em que os parâmetros foram obtidos pelo ajustamento da curva da corrente de descarga em função do tempo, conforme está descrito no capítulo 7. Para o modelo de Jonscher obteve-se: $m = 0,309$, $n = 0,577$ e $\omega_0 = 4,61 \times 10^{-3}$ rad/s. Para o modelo de Dissado-Hill obteve-se: $m = 0,410$, $n = 0,660$ e $\omega_p = 2,14 \times 10^{-3}$ rad/s. Incluiu-se a curva referente ao modelo de Debye para comparação, por ser um modelo simples e bastante citado. No cálculo do tempo de relaxação foi considerado que $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_p}$.

É interessante fazer uma análise da influência dos parâmetros m e n sobre o comportamento das funções resposta.

Na figura 3.3, n é mantido constante no valor correspondente ao modelo de Jonscher e são considerados dois valores extremos para m . Deste gráfico vê-se que variações em m afetam $f_J(t)$ principalmente para grandes intervalos de tempo.

A figura 3.4 ilustra o que acontece quando m é mantido constante e n varia. Vê-se que estas variações em n afetam $f_J(t)$ principalmente nos instantes iniciais.

Nas figuras 3.5 e 3.6 o estudo é repetido para a função de Dissado-Hill $f_D(t)$ e as conclusões são análogas.

Deve ser enfatizado que o intervalo de tempo analisado é muito maior que o tempo característico $\frac{1}{\zeta}$, onde $f_D(t)$ apresenta um comportamento peculiar [6].

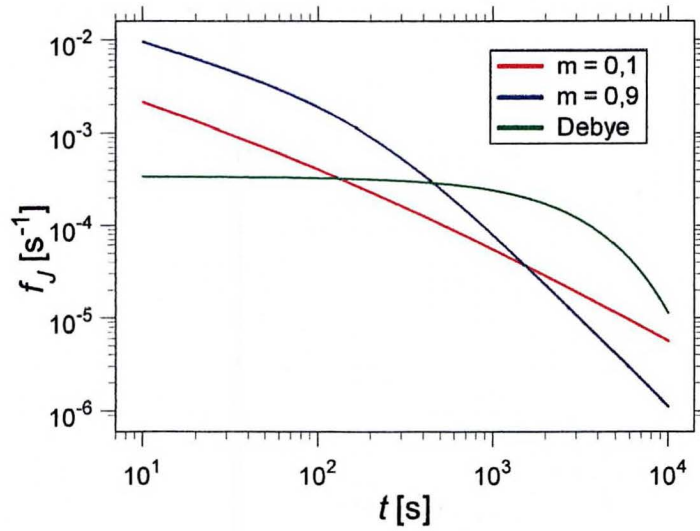


Figura 3.3 - Função resposta de Jonscher para dois valores diferentes do parâmetro m , com n mantido constante ($n = 0,577$).

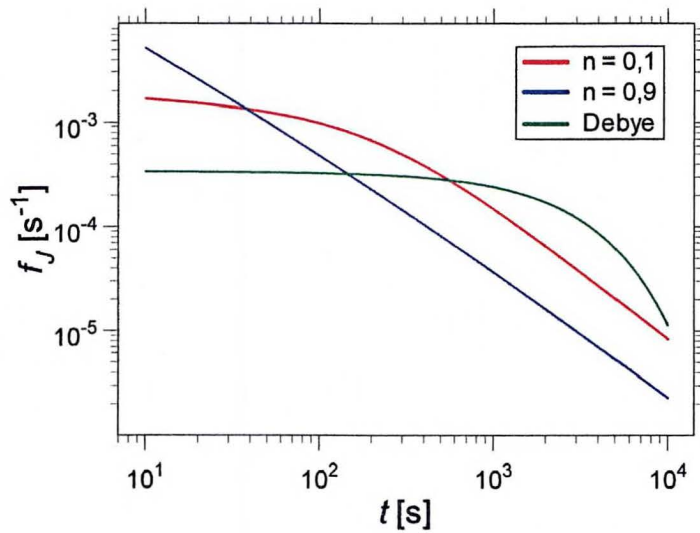


Figura 3.4 - Função resposta de Jonscher para dois valores diferentes do parâmetro n , com m mantido constante ($m = 0,309$).

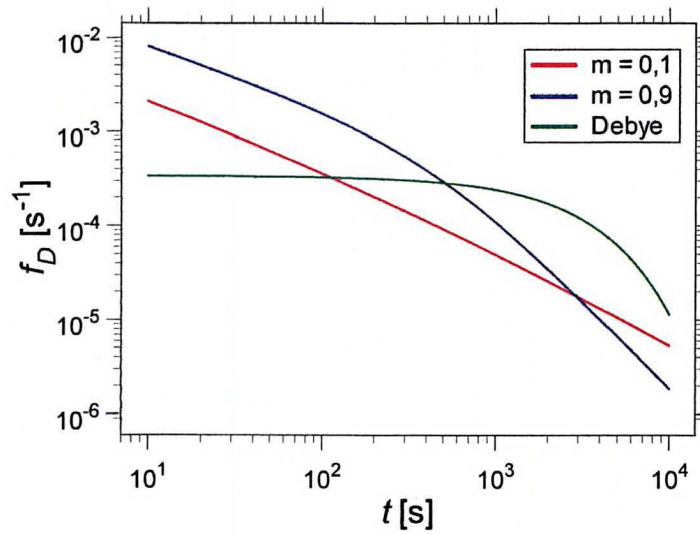


Figura 3.5 - Função resposta de Dissado-Hill para dois valores diferentes do parâmetro m , com n mantido constante ($n = 0,660$).

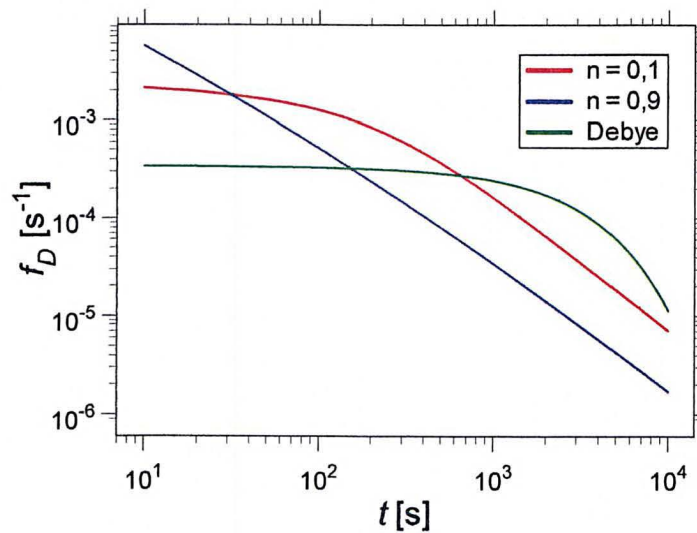


Figura 3.6 - Função resposta de Dissado-Hill para dois valores diferentes do parâmetro n , com m mantido constante ($m = 0,410$).

Na figura 3.7 é mostrado o comportamento transitório da polarização, para diferentes modelos de relaxação, quando o dielétrico é submetido a um campo elétrico em forma de função degrau. Nesta figura a linha pontilhada representa o valor final da polarização. A integral da equação (3.7) foi calculada numericamente utilizando-se os dados já descritos para o polietileno.

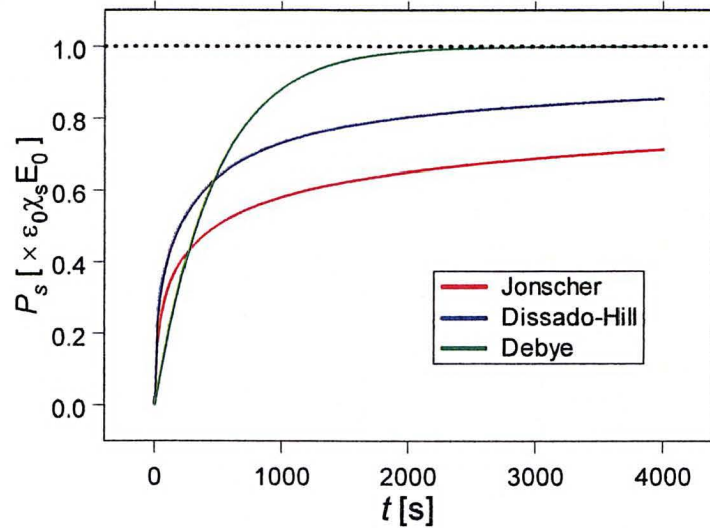


Figura 3.7 - Estabelecimento da polarização lenta no dielétrico ao ser aplicado um campo elétrico em forma de função degrau, com base nos dados do polietileno. A linha pontilhada refere-se ao valor final da polarização.

3.5 Equação Integral para o Campo Elétrico

A seguir será deduzida uma equação integral cuja solução fornece o campo elétrico macroscópico no interior do dielétrico para os fenômenos da descarga interna e da recuperação. Uma vez conhecido este campo elétrico é possível calcular a tensão entre os eletrodos.

Escrevendo a polarização na forma:

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi_i E(t) + \varepsilon_0 \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.29)$$

onde o primeiro termo corresponde à parcela instantânea da polarização e o segundo à parcela lenta, e usando a equação (3.1) para o deslocamento elétrico resulta:

$$D(t) = \varepsilon_\infty E(t) + \varepsilon_0 \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.30)$$

A densidade de corrente total pode ser expressa por:

$$J(t) = \sigma E(t) + \varepsilon_{\infty} \frac{dE}{dt} + \varepsilon_0 \chi_s f(0) E(t) + \varepsilon_0 \chi_s \int_{-\infty}^t \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} E(\tau) d\tau \quad (3.31)$$

onde o primeiro termo representa a contribuição da corrente de condução e os demais se devem à corrente de deslocamento.

Para os fenômenos da tensão de descarga interna e de recuperação, que ocorrem com o circuito aberto, impõe-se a condição:

$$J(t) = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad . \quad (3.32)$$

Considera-se o campo elétrico representado na figura 3.8 para instantes $t \leq 0$, lembrando que $t_A < t_B \leq 0$:

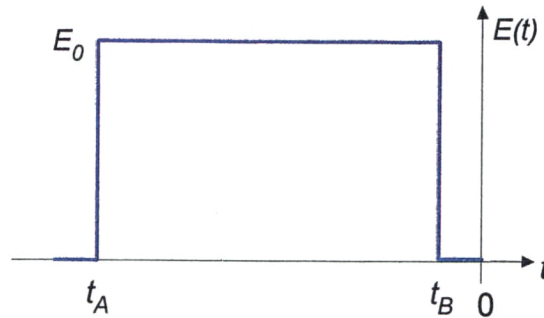


Figura 3.8 - Campo elétrico genérico aplicado ao dielétrico em instantes $t \leq 0$.

O dielétrico é polarizado durante o intervalo $t_A < t < t_B$ pela aplicação de um campo constante com intensidade E_0 . Eventualmente aplica-se um curto-circuito entre os eletrodos no intervalo $t_B < t < 0$. Este procedimento é genérico e pode ser particularizado para os dois casos: no problema da descarga interna faz-se $t_B = 0$ e $E(0) = E_0$ e no problema da recuperação faz-se $E(0) = 0$.

A equação (3.31) ficará:

$$\sigma E(t) + \varepsilon_{\infty} \frac{dE}{dt} + \varepsilon_0 \chi_s f(0) E(t) + \varepsilon_0 \chi_s E_0 \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} d\tau + \varepsilon_0 \chi_s \int_0^t \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} E(\tau) d\tau = 0 \quad (3.33)$$

Considerando que

$$\frac{\partial f(t - \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial f(t - \tau)}{\partial \tau}$$

a equação (3.33) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma E(t) + \varepsilon_\infty \frac{dE}{dt} + \varepsilon_0 \chi_s f(0) E(t) + \varepsilon_0 \chi_s E_0 [f(t - t_A) - f(t - t_B)] - \\ \varepsilon_0 \chi_s \int_0^t \frac{\partial f(t - \tau)}{\partial \tau} E(\tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

a qual é uma equação integro-diferencial em $E(t)$, que será transformada a seguir numa equação integral em $\frac{dE}{dt}$. Integrando por partes a última integral na equação (3.34) e considerando que

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma E(t) + \varepsilon_\infty \frac{dE}{dt} + \varepsilon_0 \chi_s E_0 [f(t - t_A) - f(t - t_B)] + \varepsilon_0 \chi_s f(t) E(0) + \\ \varepsilon_0 \chi_s \int_0^t f(t - \tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + \int_0^t \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_\infty} + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} f(t - \tau) \right] \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 [f(t - t_B) - f(t - t_A)] - \\ \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_\infty} + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} f(t) \right] E(0) \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

A equação (3.36) está na forma de uma equação integral de Volterra de 2ª espécie em $\frac{dE}{dt}$.

Para transformá-la numa equação integral em $E(t)$, integra-se a equação (3.35) em t termo a termo e utiliza-se a seguinte identidade apresentada por Moraes e Schönberg [42]:

$$\int_0^T dt \int_0^t f(t - \tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau = -E(0) \int_0^T f(t) dt + \int_0^T f(T - t) E(t) dt \quad (3.37)$$

Tem-se então,

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_\infty} + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} f(t - \tau) \right] E(\tau) d\tau + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \int_0^t [f(\tau - t_B) - f(\tau - t_A)] d\tau \quad (3.38)$$

Definindo-se o núcleo da equação integral

$$K(t - \tau) = - \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_\infty} + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} f(t - \tau) \right] \quad (3.39)$$

e a função

$$F(t) = E(0) + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \int_0^t [f(\tau - t_B) - f(\tau - t_A)] d\tau \quad (3.40)$$

é possível escrever:

$$E(t) = F(t) + \int_0^t K(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.41)$$

A equação (3.41) é uma equação integral em $E(t)$ de caráter geral que permite o uso de qualquer função resposta $f(t)$, bem como é aplicável tanto para o problema da descarga interna quanto para a recuperação, bastando particularizá-la conforme descrito anteriormente. Para as funções resposta dos modelos de Debye e de von Schweidler é possível resolver analiticamente esta equação, porém, para outras formas de $f(t)$ a solução só é possível através do cálculo numérico. Na seção 6.1 é apresentado um procedimento numérico.

Na avaliação das equações (3.39) e (3.40) é conveniente usar a relação:

$$\frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty}$$

pois os valores da permissividade estática ε e da permissividade em altas frequências ε_∞ são obtidos mais facilmente na literatura.

Gross [43] demonstrou, com base no princípio da superposição aplicado à equação integral de Volterra, que existe uma relação entre as soluções da equação (3.41) para os problemas da descarga interna e de recuperação, envolvendo diferentes intervalos de tempo de polarização.

Será utilizada a seguinte notação: $V_1(t)$ para a tensão de descarga interna após a polarização por um período T muito longo, $V_2(t)$ para a tensão

de descarga interna após a polarização durante um intervalo de tempo t_0 ($t_0 \ll T$) e $V_3(t)$ para a tensão de recuperação após a polarização por um período T e um curto-circuito com duração igual a t_0 . É possível escrever:

$$V_2(t) = V_1(t) - V_3(t) \quad .$$

Esta expressão obtida por Gross é geral, admitindo a aplicação de diferentes funções resposta.

3.6 Casos em que Há Solução Analítica

É possível resolver analiticamente a equação (3.41) quando a função resposta $f(t)$ corresponde ao modelo de Debye ou de von Schweidler. Uma descrição detalhada dos métodos de solução para estes casos é apresentada no trabalho de Scarpa [12]. As soluções estão mostradas a seguir de forma resumida, e foram usadas para testar o método numérico proposto na seção 6.1. Os artigos originais utilizam as variáveis de circuito. Para que as grandezas e as equações fossem comparáveis com a notação usada neste trabalho, as soluções foram reescritas usando-se as variáveis de campo.

Para a função resposta de Debye na forma:

$$f(t) = A \exp(-\mu t) \quad .$$

Gross [21] obteve a seguinte expressão para o problema da descarga interna ($t_B = 0$):

$$E(t) = \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \frac{A}{(\nu_2 - \nu_1)} \times \left\{ \left[\frac{1}{\frac{\mu}{\nu_1} - 1} + \exp(\mu t_A) \right] \exp(-\nu_2 t) + \left[\frac{1}{1 - \frac{\mu}{\nu_2}} - \exp(\mu t_A) \right] \exp(-\nu_1 t) \right\} \quad (3.42)$$

e para o problema da recuperação do campo quando o dielétrico é polarizado durante um intervalo de tempo muito grande ($t_A \rightarrow -\infty$):

$$E(t) = \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \frac{A}{(\nu_2 - \nu_1)} \exp(\mu t_B) [\exp(-\nu_1 t) - \exp(-\nu_2 t)] \quad (3.43)$$

onde ν_1 e ν_2 são as raízes da equação:

$$\nu^2 - \nu \left(\mu + \frac{A}{\varepsilon_\infty} + \frac{\sigma}{\varepsilon_\infty} \right) + \frac{\sigma \mu}{\varepsilon_\infty} = 0 \quad . \quad (3.44)$$

Considerando a função resposta de von Schweidler na forma:

$$f(t) = \beta t^{-\alpha}$$

Gross [17] apresentou uma solução aproximada para o problema da descarga interna. Posteriormente, Oliveira Castro [44] desenvolveu uma solução exata usando mudança de variáveis e o método dos núcleos iterados. Esta solução é aplicável ao problema da descarga interna, para casos onde o dielétrico é polarizado por um intervalo de tempo $(t_B - t_A)$ finito ou infinito, e também para o problema da recuperação do campo quando o dielétrico é polarizado durante um intervalo de tempo infinito ($t_A \rightarrow -\infty$). Usa-se o parâmetro γ para especificar o tipo de problema, tal que:

- $\gamma = 0$: descarga interna, polarização num intervalo de tempo infinito;
- $\gamma = 1$: descarga interna, polarização num intervalo de tempo finito t_0 ;
- $\gamma = -1$: recuperação, polarização num intervalo de tempo infinito e curto-circuito durante o intervalo t_0 .

A solução obtida por Oliveira Castro é a seguinte:

$$E(t) = E(0) + \int_0^t G(s, t) f(s) ds \quad (3.45)$$

na qual:

$$G(s, t) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} \frac{\zeta^\nu (t-s)^{h-\nu+\nu p}}{\Gamma(h-\nu+\nu p+1)} \quad (3.46)$$

sendo que:

$$p = 1 - \alpha$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon_\infty}$$

$$\zeta = \frac{\beta}{\sigma} \Gamma(p)$$

e

$$f(s) = - \left[\lambda E(0) + \gamma \frac{E_0}{\varepsilon_\infty} f(s + t_0) \right] .$$

Se α e β são conhecidos para um material, é possível calcular $E(t)$ na equação (3.45) usando-se o cálculo numérico. O somatório na série dupla converge e os resultados da solução teórica concordam com os resultados experimentais. No trabalho de Robert e Berleze [45] são apresentadas fórmulas que permitem o cálculo numérico das tensões de descarga interna e de recuperação e também comparações entre resultados teóricos e experimentais.

4 Modelo da Carga Espacial

4.1 Fenômenos e Equações Fundamentais

Usa-se o termo carga espacial para designar uma distribuição volumar de cargas cuja extensão seja muito grande em relação às dimensões atômicas ou moleculares. Esta distribuição é formada por portadores não-ligados que podem se deslocar através do material por distâncias macroscópicas. Pode-se dizer que estes portadores estão na banda de condução, segundo a terminologia da teoria de bandas. Os efeitos da carga espacial são bastante significativos em materiais com baixa condutividade. Para explicar a sua formação serão utilizados alguns conceitos da mecânica quântica.

Um material pode conter carga espacial por sua própria natureza, devido a defeitos e impurezas. Ela também pode ser formada pela ação de agentes externos, que provocam a separação de cargas positivas e negativas no interior do dielétrico ou a injeção de portadores através das interfaces.

O estabelecimento e a evolução da carga espacial resulta do fornecimento de energia ao dielétrico, que pode ser de origem interna ou externa. Como fontes internas tem-se a agitação térmica, a difusão e o campo elétrico criado pelos próprios portadores. A energia fornecida externamente pode ser mecânica, térmica, elétrica ou radiante [31]. Casos em que a energia mecânica e a energia térmica produzem carga espacial são, respectivamente, os efeitos piezoelétrico e piroelétrico, os quais podem ocorrer em alguns materiais dielétricos.

Os dielétricos são caracterizados por um *gap* acentuado entre as bandas de valência e de condução. Num dielétrico cristalino as bandas consistem de estados não-localizados que se estendem através da amostra. A descrição da condução em dielétricos amorfos é mais complexa do que nos materiais cristalinos ou nos metais. Num sólido polimérico, por exemplo, as cadeias moleculares se justapõem e se entrelaçam. Em algumas regiões pode ocorrer uma ordenação local das cadeias, formando os cristalitos. Estes cristalitos têm dimensões limitadas e estão dispersos no material amorfo. Os portadores na banda de condução apresentam um comportamento semelhante ao da condução em cristais semi-condutores ou metais. Nos dielétricos sob ação de um campo elétrico externo pode ocorrer também o transporte de portadores por saltos (*hopping*). Supõe-se que os portadores saltem entre sítios, permanecendo em cada sítio durante certo intervalo de tempo. Os estados são ditos localizados, pois o portador somente poderá ocupar determinados sítios. A probabilidade de um portador saltar de um sítio a outro depende da distância entre eles e da barreira de potencial. A transição pode ocorrer por tunelamento ou por ativação térmica. O transporte de elétrons geralmente

se dá pelo primeiro processo, enquanto que o de íons ocorre provavelmente pelo segundo [46].

A condução pode gerar vários efeitos, entre eles a polarização interfacial (efeito Maxwell-Wagner) e a polarização iônica. A polarização interfacial consiste na acumulação de portadores na interface de duas regiões com condutividades diferentes [8], formando carga espacial próxima das superfícies ou no interior do dielétrico quando este é heterogêneo.

Eletrodos metálicos em contato com o dielétrico permitem a injeção e a ejeção de portadores neste material pelo processo de tunelamento. No cátodo ocorre a injeção de elétrons nos sítios aceitadores do dielétrico, e no ânodo ocorre a ejeção de elétrons dos sítios doadores do dielétrico. A transferência de portadores pode ser reforçada pela aplicação de um campo elétrico na interface. No cátodo o campo reduz a energia dos estados aceitadores do dielétrico em relação à energia de Fermi do cátodo, e no ânodo ele eleva a energia dos estados doadores do dielétrico em relação à energia de Fermi do ânodo [47]. A injeção de elétrons num dielétrico sólido pode ser descrita pelo modelo de Schottky [6, 46] ou, quando o campo elétrico aplicado é muito intenso ($\approx 10^9$ V/m), pelo modelo de Fowler-Nordheim [46]. A configuração da carga espacial originada pela injeção de portadores está esquematizada na figura 4.1. Nesta figura vê-se também alguns portadores livres do interior

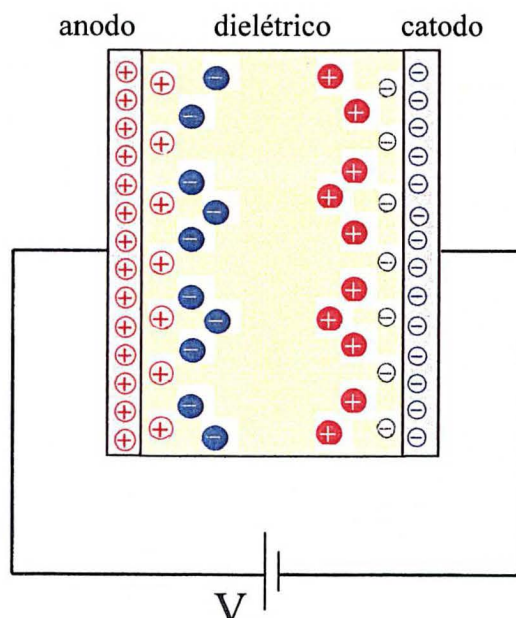


Figura 4.1 - Configuração da carga espacial devido à ação de um campo elétrico, considerando a injeção de cargas e a migração de cargas livres presentes no dielétrico em direção aos eletrodos.

do dielétrico que migraram em direção aos eletrodos.

Na prática, nem o eletrodo nem o dielétrico sólido têm as superfícies com condições uniformes. A presença de impurezas ou defeitos nas interfaces pode modificar bastante a transferência de cargas em cada ponto de contato.

Cabe lembrar que num dielétrico provido de carga espacial existem regiões onde não há neutralidade elétrica e, portanto, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ nestes pontos.

Um material dielétrico pode conter imperfeições em sua estrutura ou impurezas em seu interior, originando as chamadas armadilhas (*traps*). Estas armadilhas representam níveis discretos de energia situados entre as bandas de valência e de condução. Alguns portadores que formam a carga espacial podem ser capturados por armadilhas que estejam vazias. Estes portadores capturados passam a formar uma carga espacial persistente dentro do material, podendo ser reemitidos pela ação do campo elétrico ou da elevação da temperatura e voltar à banda de condução. A carga espacial persistente pode reforçar localmente o campo elétrico, sendo um fator importante no envelhecimento do material. A captura de portadores nas armadilhas e a sua reemissão para a banda de condução formam um processo dinâmico. As armadilhas podem ser classificadas como rasas ou profundas, de acordo com a posição do seu nível de energia E_t em relação ao nível de Fermi [48].

Uma descrição simples considera que todas as armadilhas têm a mesma energia E_t e estão distribuídas com densidade N_t . Porém, este modelo só é adequado para monocristais com alto grau de pureza. Nos materiais semicristalinos e amorfos há uma desordem estrutural, de forma que as vizinhanças das armadilhas não são todas exatamente iguais. Assim, invés de uma única energia E_t , ocorre uma distribuição de estados com energias em torno de E_t . Isto justifica o desenvolvimento de modelos mais elaborados.

A seguir serão relacionadas, na forma unidimensional, as equações que governam o fluxo de portadores no dielétrico. As grandezas poderão depender da coordenada espacial x e do tempo t .

a) lei da condução:

$$J_c(x, t) = \mu \rho(x, t) E(x, t) + \sigma E(x, t) - \mathcal{D} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (4.1)$$

onde $J_c(x, t)$ é a densidade de corrente de condução, $\rho(x, t)$ é a densidade volumar de carga espacial livre, $E(x, t)$ é o campo elétrico, σ é a condutividade elétrica do material, μ é a mobilidade dos portadores e \mathcal{D} é o seu coeficiente de difusão. O primeiro e o segundo termo do membro direito representam a densidade de corrente de deriva dos portadores, originada pelo movimento médio destes quando sujeitos à ação do campo elétrico. O

terceiro termo refere-se à densidade de corrente de difusão, a qual pode ocorrer quando a concentração de portadores livres é diferente em cada região do dielétrico. Supõe-se que os portadores relacionados com a condutividade sejam do mesmo tipo dos portadores que constituem a carga espacial.

A condutividade está relacionada com portadores livres, intrínsecos ao material, com densidade ρ_i . Sua origem se deve a processos de ionização devido à agitação térmica. Deve ser enfatizado que isto não gera um excesso de cargas, pois supõe-se que uma carga de sinal contrário permanece nas vizinhanças do sítio ionizado. Assim, ρ_i contribui para a condução mas não contribui para o campo elétrico. O produto $\mu\rho_i$ pode representar a condutividade σ , de forma que a equação (4.1) também pode ser escrita como

$$J_c(x, t) = \mu [\rho(x, t) + \rho_i] E(x, t) - \mathcal{D} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} .$$

Tendo em vista que manuais e trabalhos experimentais geralmente fornecem os valores de σ e μ , invés de ρ_i , é preferível utilizar a forma da equação (4.1).

b) equação da continuidade:

$$\frac{\partial J_c(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \rho_t(x, t)}{\partial t} \quad (4.2)$$

onde $\rho_t(x, t)$ é a densidade volumar de cargas capturadas nas armadilhas. Esta equação estabelece que o fluxo líquido de portadores através do contorno do dielétrico deve ser igual à taxa de variação da densidade volumar de carga no material.

c) lei de Gauss:

$$\frac{\partial D(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) + \rho_t(x, t)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} [\rho(x, t) + \rho_t(x, t)] \quad (4.3)$$

onde ε é a permissividade elétrica do material. Na equação (4.3) supõe-se que a polarização responda instantaneamente às variações do campo elétrico; isto fica implícito ao se utilizar a relação constitutiva $D(x, t) = \varepsilon E(x, t)$. Outra hipótese presente nesta equação é que as armadilhas estejam descarregadas quando vazias.

d) equação para a cinética de captura e reemissão:

Para considerar o efeito das armadilhas na carga espacial precisamos de uma equação relacionando a variação temporal das densidades de cargas livres e capturadas. Para iniciar o estudo é conveniente partir de um modelo mais simples, como por exemplo o apresentado por Wintle [49]:

$$\rho(x, t) = \rho_t(x, t) \frac{N_V}{N_t} \exp \left[- \frac{(E_t - E_V)}{kT} \right] \quad (4.4)$$

onde N_V é a densidade efetiva de estados na banda de valência, N_t é a densidade de armadilhas com nível de energia E_t , E_V é a energia do topo da banda de valência, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta. Esta expressão considera que todas as armadilhas estejam num mesmo nível de energia.

Acrescenta-se ainda uma equação para a densidade de corrente total $J(t)$, em planos paralelos aos eletrodos:

$$J(t) = J_c(x, t) + \varepsilon \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

na qual a primeira parcela do membro direito representa o termo de condução e a segunda parcela o termo de deslocamento. É fácil mostrar que esta densidade independe da posição dentro dielétrico. Derivando a equação (4.3) em relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_t(x, t)}{\partial t} \right] .$$

Permutando a ordem de derivação no membro esquerdo e considerando a equação (4.2), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(J_c(x, t) + \varepsilon \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right) = 0$$

significando que o termo entre parênteses não depende explicitamente de x . Este termo é exatamente a densidade de corrente total $J(t)$ da equação (4.5).

Para resolver o sistema de equações (4.1) a (4.5) é necessário especificar as condições iniciais $E(x, 0)$ e de contorno $E(0, t)$ e $E(d, t)$ para o campo elétrico.

A constante de difusão \mathcal{D} e a mobilidade μ estão ligadas através da relação de Nernst-Einstein [50]:

$$\mathcal{D} = \frac{kT}{q} \mu \quad (4.6)$$

onde q é a carga do portador. A razão $\frac{kT}{q}$ é chamada de tensão térmica V_T , e seu valor à temperatura ambiente é aproximadamente 0,025 V.

No estudo que se segue não será considerado o efeito das armadilhas.

4.2 Variáveis e Equações Adimensionais

As variáveis nas equações apresentadas até aqui têm unidades do SI, mas é possível transformá-las de modo que se tornem adimensionais. Com este procedimento as equações ficam independentes do sistema de unidades e adquirem um aspecto mais simples. Outra vantagem está na redução do domínio dos valores numéricos que cada variável pode assumir, ou seja, há maior uniformidade nos valores envolvidos, evitando-se operar com números muito grandes e muito pequenos. Isto reduz os erros durante o cálculo numérico.

Para evitar confusão e ao mesmo tempo manter uma notação mais simples ao longo do trabalho, as equações de interesse para o estudo da carga espacial serão transcritas a seguir com as variáveis dimensionais indicadas por um asterisco superior.

$$J_c^*(x^*, t^*) = \mu^* \rho^*(x^*, t^*) E^*(x^*, t^*) + \sigma^* E^*(x^*, t^*) - \mathcal{D}^* \frac{\partial \rho^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} \quad (4.1^*)$$

$$\frac{\partial J_c^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = - \frac{\partial \rho^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (4.2^*)$$

$$\frac{\partial E^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = \frac{1}{\varepsilon} \rho^*(x^*, t^*) \quad (4.3^*)$$

$$J^*(t^*) = J_c^*(x^*, t^*) + \varepsilon \frac{\partial E^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} . \quad (4.5^*)$$

Serão usadas as equações de transformação propostas por Almeida e Leal Ferreira [51], nas quais as grandezas sem asterisco representam agora as variáveis adimensionais.

$$x = \frac{x^*}{d} \quad (4.7)$$

onde d é a espessura do dielétrico. Desta forma as coordenadas dos pontos no dielétrico estarão no domínio $0 \leq x \leq 1$.

$$t = \frac{\mu^* \rho_0}{\varepsilon} t^* \quad (4.8)$$

A constante ρ_0 tem unidade de densidade volumar de carga, sendo possível atribuir-lhe qualquer valor desejável tal que as variáveis adimensionais tenham ordens de grandeza próximas.

$$E(x, t) = \frac{\varepsilon}{\rho_0 d} E^*(x^*, t^*) \quad (4.9)$$

$$J(x, t) = \frac{\varepsilon}{\mu^* \rho_0^2 d} J^*(x^*, t^*) \quad (4.10)$$

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\rho_0} \rho^*(x^*, t^*) \quad (4.11)$$

$$V(t) = \frac{\varepsilon}{\rho_0 d^2} V^*(t^*) \quad (4.12)$$

O coeficiente de difusão fica:

$$\mathcal{D} = \frac{\varepsilon}{\mu^* \rho_0 d^2} \mathcal{D}^* \quad (4.13)$$

a condutividade é dada por:

$$\sigma = \frac{1}{\mu^* \rho_0} \sigma^* \quad (4.14)$$

e a mobilidade se torna unitária:

$$\mu = 1 \quad .$$

Deve ser enfatizado que daqui até o final deste capítulo as variáveis sem o asterisco superior são consideradas adimensionais. As equações na forma adimensional apresentam-se como:

$$J_c(x, t) = \rho(x, t) E(x, t) + \sigma E(x, t) - \mathcal{D} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial J_c(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) \quad (4.17)$$

$$J(t) = J_c(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \quad . \quad (4.18)$$

4.3 Equação Diferencial Parcial para o Campo Elétrico

Substituindo $\rho(x, t)$ da equação (4.17) na equação (4.15) e aplicando este resultado na equação (4.18) obtém-se:

$$J(t) = E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) - \mathcal{D} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} . \quad (4.19)$$

Impondo a condição de circuito aberto, $J(t) = 0$ para $t > 0$, resulta a equação diferencial para o campo elétrico:

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) - \mathcal{D} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0 . \quad (4.20)$$

Nos problemas envolvendo carga espacial em dielétricos, o termo de difusão geralmente é desprezado. Uma vantagem imediata desta hipótese é a simplificação do modelo, que permite a obtenção de solução analítica exata para algumas situações. Quando este termo é mantido, a solução da equação (4.20) usualmente é obtida com procedimentos numéricos.

É interessante analisar em que casos esta simplificação pode ser adotada e quais as suas conseqüências. Supondo que haja injeção de cargas, a corrente da difusão é predominante sobre a corrente de deriva nas vizinhanças dos eletrodos. Por exemplo, próximo a $x = 0$ tem-se $\rho(x, t) \rightarrow \infty$ e $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \rightarrow -\infty$. A região adjacente a um eletrodo injetor foi denominada por Lampert [48] como “região de acomodação”, pois nesta região ocorre a transição entre as condições de contorno impostas pelo eletrodo e o comportamento de deriva dos portadores, que predomina no interior do material.

Em muitos problemas a densidade de corrente $J(t)$ é pouco influenciada pela densidade de portadores no eletrodo injetor, justificando a omissão do termo de difusão. Entretanto, há casos em que esta simplificação pode levar a resultados incorretos. Tredgold [52] apresenta alguns exemplos e propõe um procedimento a ser seguido para verificar se a difusão pode realmente ser desprezada.

Uma simples inspeção da equação (4.20) não é suficiente para avaliar se o termo de difusão pode ser omitido. O cálculo detalhado dos erros cometidos só pode ser obtido pela comparação entre as soluções exata e aproximada. Shockley e Prim [53] resolveram de forma rigorosa este problema para um dielétrico suposto sem armadilhas e com condutividade desprezível. Os seus resultados mostraram que neste caso o erro na avaliação do potencial é menor que $\frac{kT}{q} = V_T$.

No presente trabalho foi feito um estudo numérico comparativo e observou-se que a contribuição da difusão é desprezível. Para as condições e materiais utilizados, as tensões de descarga interna e de recuperação resultaram

praticamente as mesmas, quer considerássemos quer omitíssemos o termo de difusão.

Quando o termo devido à difusão é desprezado, a equação diferencial (4.20) fica na forma:

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.21)$$

Para resolver esta equação é necessário conhecer a distribuição inicial de cargas para, a partir dela, determinar-se a condição inicial $E(x, 0)$. As formas funcionais para a densidade $\rho(x, 0)$ encontradas freqüentemente na literatura são:

a) função “caixa”, definida como:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_1 & 0 < x < s_0 \\ 0 & s_0 < x < 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

onde s_0 é a largura da região que contém carga com densidade ρ_1 , no instante $t = 0$. Os valores de ρ_1 e s_0 ($0 < s_0 < 1$) caracterizam a distribuição de cargas, conforme mostrado na figura 4.2.

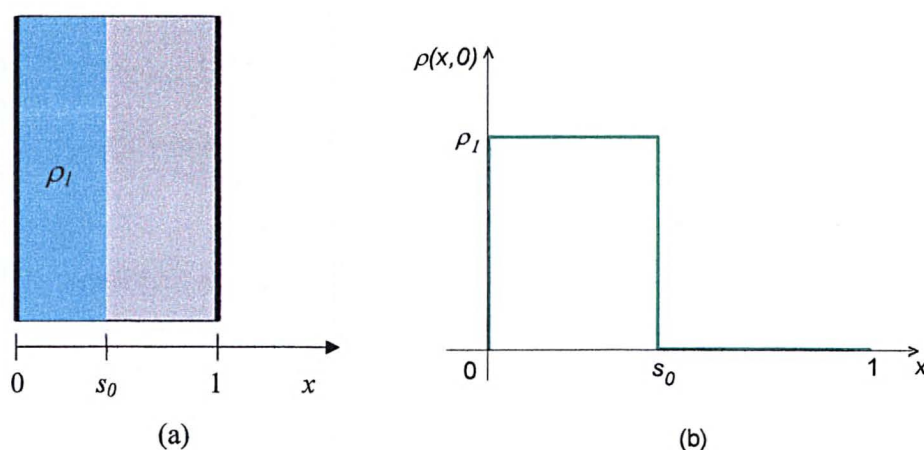


Figura 4.2 - Distribuição inicial de carga espacial em forma de função “caixa”: (a) ilustração da nuvem de carga no interior do dielétrico e (b) função $\rho(x, 0)$ correspondente.

- b) função linear;
- c) função gaussiana, que é observada experimentalmente [54];
- d) função de estado estacionário, a qual corresponde ao caso da corrente limitada por carga espacial que está apresentada com detalhes no apêndice 1.

4.4 Um dos Casos em que Há Solução Analítica Exata

Quando os efeitos da difusão e das armadilhas são desprezíveis, e a distribuição inicial de carga espacial tem a forma de função caixa, pode ser obtida uma solução exata para o problema da tensão de recuperação. Esta solução foi usada para testar o procedimento numérico proposto na seção 6.2.

Os resultados serão mostrados de forma sucinta nesta seção. Eles foram obtidos com base no formalismo apresentado por Monsanto [55]. Leva-se em conta a condutividade intrínseca do dielétrico.

As equações adimensionais consideradas são:

$$J_c(x, t) = \rho(x, t) E(x, t) + \sigma E(x, t)$$

$$\frac{\partial J_c(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t)$$

e

$$J(t) = J_c(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}$$

com as condições $V(0) = 0$, $J(t) = 0$ para $t > 0$ e a densidade $\rho(x, 0)$ definida pela equação (4.22).

Para resolver este problema pode ser empregado o “método das características” [56]. Determina-se a posição $x(t)$ dos portadores num dado instante t e, então, calcula-se a densidade de carga e o campo elétrico nesta posição. Isto justifica a notação $\rho[x(t), t]$ e $E[x(t), t]$ utilizada, respectivamente, para a densidade de carga e para o campo elétrico. A única variável independente é t . A solução analítica é facilitada pela simetria plana do sistema e por se tratar de um problema a circuito aberto.

A equação característica [26] para este problema é:

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x, t) \tag{4.23}$$

a qual indica que a velocidade dos portadores é proporcional ao campo elétrico. A mobilidade não está representada explicitamente nesta equação porque, nas equações adimensionais, ela é unitária.

A figura 4.3(a) ilustra a distribuição de carga espacial no instante $t = 0$. Tem-se uma distribuição uniforme na região $0 < x < s_0$. Os portadores

localizados no extremo direito da nuvem de carga têm coordenada inicial s_0 e formam uma frente de portadores. À medida que o tempo passa, a nuvem de carga espacial se dispersa através do dielétrico e a frente de portadores avança em direção ao eletrodo em $x = 1$. Os resultados apresentados nesta seção são válidos até o instante imediatamente anterior à nuvem atingir este eletrodo. Na figura 4.3(b) está mostrada a distribuição de cargas num instante t . Tem-se uma distribuição uniforme ocupando a região $0 < x < s(t)$.

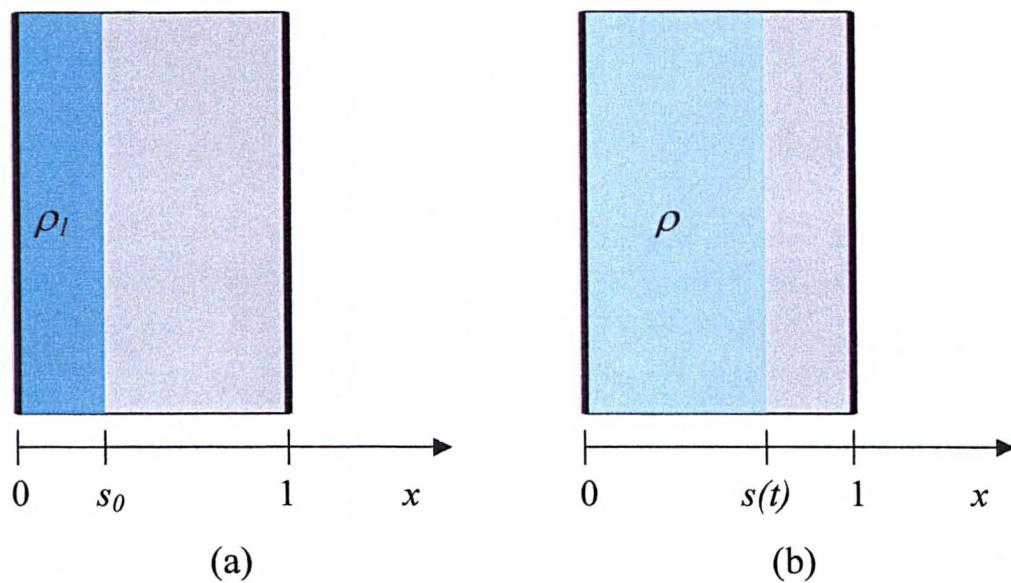


Figura 4.3 - Distribuição de cargas no dielétrico: (a) no instante inicial $t = 0$ e (b) num instante $t > 0$. Em ambos os casos a distribuição é uniforme. Observa-se em (b) o avanço de frente de portadores em direção ao eletrodo em $x = 1$ e o alargamento da região contendo carga espacial, porém, com uma diminuição no valor da densidade de carga.

A posição x de cada portador no instante t é dada por:

$$x(t) = x_0 + \rho_1 \left[x_0 - \frac{s_0}{2}(2 - s_0) \right] \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \quad (4.24)$$

onde x_0 é a sua posição inicial. Conforme mostrado na figura 4.3(a), x_0 pode assumir valores no domínio $0 < x_0 < s_0$.

Da equação (4.24) obtém-se a posição s da frente de portadores no instante t :

$$s(t) = s_0 + \frac{1}{2}\rho_1 s_0^2 \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} . \quad (4.25)$$

Dependendo dos valores de σ , ρ_1 e s_0 haverá um instante em que $s(t) = 1$. A partir daí a carga espacial passa a tocar os dois eletrodos e as equações apresentadas deixam de valer.

O campo elétrico na região que contém a carga espacial é dado por:

$$E[x(t), t] = \rho_1 \left[x_0 - \frac{s_0}{2}(2 - s_0) \right] e^{-\sigma t} \quad (4.26)$$

enquanto que na região sem carga espacial ele é uniforme e é expresso por:

$$E(x, t) = \frac{1}{2}\rho_1 s_0^2 e^{-\sigma t} \quad s(t) < x < 1 \quad (4.27)$$

A densidade de carga na região que contém carga espacial é dada por:

$$\rho[x(t), t] = \frac{\rho_1}{e^{\sigma t} - \frac{(1 - e^{\sigma t})}{\sigma} \rho_1} . \quad (4.28)$$

Da equação (4.28) conclui-se que a densidade de carga diminui com o tempo, porém, constitui ainda uma função caixa porque $\rho[x(t), t]$ não depende de x_0 . Assim, a forma inicial da distribuição é mantida ao longo do movimento. Isto só ocorre quando $\rho(x, 0)$ é uma função caixa. Nesta situação a densidade de carga pode também ser escrita como:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{e^{\sigma t} - \frac{(1 - e^{\sigma t})}{\sigma} \rho_1} & 0 < x < s(t) \\ 0 & s(t) < x < 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

Quando a condutividade é suficientemente alta, a densidade de carga pode tender a zero antes que a frente de portadores chegue no eletrodo em $x = 1$. Isto pode ser verificado com simulações do comportamento das equações (4.25) e (4.29).

O campo elétrico na interface esquerda do dielétrico varia com o tempo na forma:

$$E(0, t) = -\frac{\rho_1 s_0 (2 - s_0) e^{-\sigma t}}{2 \left\{ 1 + \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho_1 \right\}} \quad (4.30)$$

e na interface direita de acordo com:

$$E(1, t) = \rho_1 s_0 - \frac{1}{2} \left[e^{-\sigma t} + \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho_1 \right] \frac{\rho_1 s_0 (2 - s_0)}{\left\{ 1 + \frac{(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \rho_1 \right\}} \quad (4.31)$$

A tensão de recuperação é dada por:

$$V(t) = \frac{1}{8} \rho_1^2 s_0^2 \left(\frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \right) e^{-\sigma t} \left[\frac{4 - 4s_0 - \rho_1 s_0^2 \left(\frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \right)}{1 + \rho_1 \left(\frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} \right)} \right] \quad (4.32)$$

Para ilustrar o comportamento de $V(t)$ da equação (4.32) considerou-se uma amostra de polietileno com: $d = 60 \mu\text{m}$, $\varepsilon = 2,30$, $\sigma = 4 \times 10^{-14} \text{ S/m}$ e $\mu = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$. Adotou-se para a carga espacial, como exemplo, $\rho_1 = 0,1 \text{ C/m}^3$ e $s_0 = 0,2 d$. O resultado está mostrado na figura 4.4.

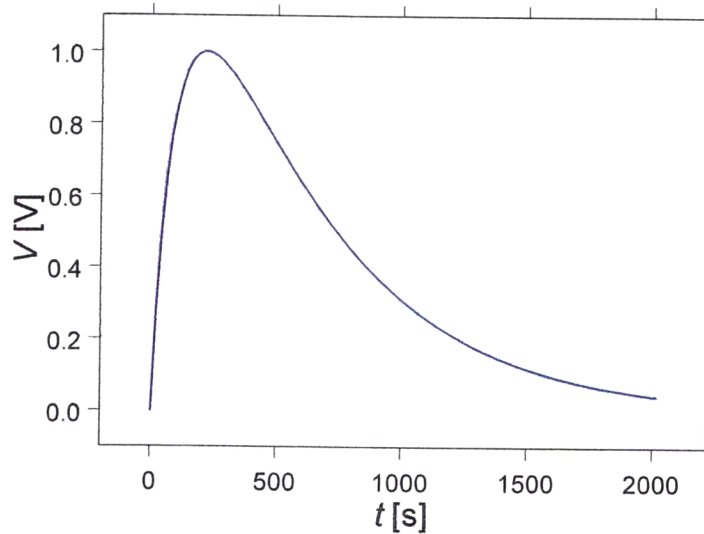


Figura 4.4 - Tensão de recuperação calculada com a equação (4.32) para uma amostra de polietileno. A curva está normalizada em relação ao seu valor máximo.

5 Modelo Combinado

5.1 Conjunto de Equações Simultâneas

Nesta seção considera-se que o material dielétrico tenha em seu interior uma distribuição de cargas livres formando carga espacial, e que também apresente um comportamento de polarização dipolar que não responda instantaneamente ao campo elétrico.

Não se pode tratar esta combinação como uma superposição simples dos resultados obtidos pelos modelos da polarização e da carga espacial. Adamec e Calderwood [57] inicialmente seguiram este procedimento. Posteriormente, usando um modelo de multi-camadas para o dielétrico, Ongaro [58] mostrou que as cargas ligadas e as cargas livres não se comportam de maneira completamente independente. Qualitativamente pode-se dizer que o campo local nas posições dos átomos e moléculas é bastante modificado pela presença da carga espacial, que afeta o processo de relaxação; por outro lado, a carga espacial encontra-se no interior de um material polarizável, ficando sujeita também ao campo elétrico dos dipolos permanentes e induzidos deste meio.

Fazendo uma comparação com os capítulos 3 e 4, é possível interpretar esta combinação como uma generalização do problema da carga espacial para um meio onde a polarização não responde instantaneamente ao campo elétrico, ou também como uma generalização do problema da polarização dielétrica para um meio onde o campo elétrico não é uniforme. Nesta situação duas funções devem ser determinadas: o campo elétrico $E(x, t)$ e a polarização $P(x, t)$.

Nas equações que se seguem, as grandezas dimensionais estão representadas com um asterisco.

Com base nas equações (3.4) e (3.7) a polarização elétrica pode ser expressa na forma:

$$P^*(x^*, t^*) = P_i^*(x^*, t^*) + P_s^*(x^*, t^*) = \varepsilon_0 \chi_i E^*(x^*, t^*) + \varepsilon_0 \chi_s \int_{-\infty}^{t^*} f(t^* - \tau^*) E^*(x^*, \tau^*) d\tau^* \quad (5.1)$$

onde o primeiro termo representa os processos praticamente instantâneos e o segundo termo refere-se à resposta lenta da polarização. O deslocamento elétrico é dado por:

$$D^*(x^*, t^*) = \varepsilon_0 E^*(x^*, t^*) + P^*(x^*, t^*) \quad (5.2)$$

Para estudar a carga espacial são necessárias as seguintes relações:

a) densidade de corrente de condução, omitindo-se o termo devido à difusão:

$$J_c^*(x^*, t^*) = \mu^* \rho^*(x^*, t^*) E^*(x^*, t^*) + \sigma^* E^*(x^*, t^*) \quad (5.3)$$

b) equação da continuidade, desprezando-se o efeito das armadilhas:

$$\frac{\partial J_c^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = - \frac{\partial \rho^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (5.4)$$

c) lei de Gauss, desprezando-se a carga aprisionada nas armadilhas:

$$\frac{\partial D^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = \rho^*(x^*, t^*) \quad (5.5)$$

d) equação para a densidade de corrente total:

$$J^*(t^*) = J_c^*(x^*, t^*) + \frac{\partial D^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (5.6)$$

Para este caso também é possível mostrar que a densidade de corrente total depende unicamente do tempo. Derivando-se a equação (5.5) em relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial D^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} \right) = \frac{\partial \rho^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} .$$

Permutando-se a ordem de derivação do membro esquerdo e relacionando-se o membro direito com a equação (5.4), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(J_c^*(x^*, t^*) + \frac{\partial D^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \right) = 0 .$$

A igualdade a zero implica que o termo entre parênteses não depende explicitamente da coordenada x^* . Comparando-se com a equação (5.6) vê-se que este termo é a densidade de corrente total $J^*(t^*)$.

Aplicando-se as equações (5.1) a (5.5) na equação (5.6), é possível escrever após algumas manipulações algébricas:

$$J^*(t^*) = \mu^* \varepsilon_\infty E^*(x^*, t^*) \frac{\partial E^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} + \mu^* E^*(x^*, t^*) \frac{\partial P_s^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} + \sigma^* E^*(x^*, t^*) + \varepsilon_\infty \frac{\partial E^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial P_s^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (5.7)$$

As equações (4.7) a (4.14) são utilizadas no procedimento de adimensionalização, apenas que a permissividade elétrica ε deve ser substituída por ε_∞ . Cabe lembrar que as grandezas adimensionais são aquelas sem o asterisco superior. Deve ser usada a seguinte expressão para adimensionalizar a polarização:

$$P(x, t) = \frac{1}{\rho_0 d} P^*(x^*, t^*) \quad . \quad (5.8)$$

Para a função resposta $f^*(t^*)$ utiliza-se a relação:

$$f(t) = \frac{\varepsilon_0}{\mu \rho_0} f^*(t^*) \quad . \quad (5.9)$$

Para simplificar a notação, nas próximas expressões o símbolo P será usado para representar a parcela lenta da polarização, pois a parcela instantânea já está incorporada nos demais termos através do uso da permissividade ε_∞ .

Transformando as equações (5.1) e (5.7) para a forma adimensional e impondo a condição de circuito aberto $J(t) = 0$ para $t > 0$, obtém-se:

$$P(x, t) = \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau \quad (5.10)$$

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + E(x, t) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.11)$$

Ao analisar estas duas equações fica clara a interdependência entre o campo elétrico $E(x, t)$ e a polarização $P(x, t)$ descrita qualitativamente no início deste capítulo. Na equação (5.10) a polarização depende do campo elétrico e na equação (5.11) o campo elétrico depende da polarização.

Uma vantagem de trabalhar com as equações nesta forma é a possibilidade de se aplicar vários modelos para a função resposta, assim como diferentes condições iniciais para a distribuição da carga espacial. Neste trabalho os resultados foram obtidos a partir da solução numérica deste par de equações.

No caso particular em que é usado o modelo de Debye para descrever o comportamento da polarização, a equação (5.10) pode ser transformada numa equação diferencial. Derivando a equação (5.10) em relação ao tempo e aplicando $f(t)$ da equação (3.14) na forma adimensional, tem-se:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \chi_s f(0) E(x, t) + \chi_s \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\tau_0} \exp \left[-\frac{(t - \tau)}{\tau_0} \right] \right\} E(x, \tau) d\tau$$

que resulta em:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\chi_s}{\tau_0} E(x, t) - \frac{1}{\tau_0} P(x, t) \quad (5.12)$$

onde τ_0 é o tempo de relaxação adimensional. Esta é a equação diferencial equivalente à equação (5.10). O procedimento numérico para resolver o sistema das duas equações diferenciais (5.11) e (5.12) é mais simples, porém, só é aplicável à função resposta de Debye.

As equações (5.10) e (5.11) podem ser expressas como uma única equação. Considerando-se que:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) \frac{\partial E(x, \tau)}{\partial x} d\tau \quad (5.13)$$

e

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \chi_s f(0) E(x, t) + \chi_s \int_{-\infty}^t \frac{\partial f(t - \tau)}{\partial t} E(x, \tau) d\tau \quad (5.14)$$

na qual foi usada a regra de Leibnitz para derivar integrais definidas. Aplicando-se na equação (5.11) resulta a seguinte equação integro-diferencial em $E(x, t)$:

$$\begin{aligned} E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + \\ \chi_s E(x, t) \int_{-\infty}^t f(t - \tau) \frac{\partial E(x, \tau)}{\partial x} d\tau + \chi_s f(0) E(x, t) + \\ \chi_s \int_{-\infty}^t \frac{\partial f(t - \tau)}{\partial t} E(x, \tau) d\tau = 0 \quad (5.15) \end{aligned}$$

6 Solução Numérica

Deseja-se, como resultado final dos cálculos, a tensão $V(t)$ entre os eletrodos. Para a configuração geométrica tratada neste trabalho, o campo elétrico $E(x, t)$ está sempre orientado na direção do eixo Ox . Se $E(x, t)$ é conhecido em pontos internos ao dielétrico, a tensão $V(t)$ pode ser calculada por:

$$V(t) = \int_0^d E(x, t) dx \quad (6.1)$$

onde d é a espessura do dielétrico.

Na solução usando o modelo da polarização, o campo $E(x, t)$ é uniforme e o cálculo da integral na equação (6.1) é imediato; neste caso será utilizada a notação simplificada $E(t)$. Na solução com os modelos da carga espacial e combinado, o campo elétrico depende da posição x ; nestes casos a integral na equação (6.1) deve ser avaliada numericamente.

6.1 Modelo da Polarização

A solução numérica da equação integral

$$E(t) = F(t) + \int_0^t K(t - \tau) E(\tau) d\tau$$

permite que se utilize várias formas funcionais para a função resposta $f(t)$, onde $K(t - \tau)$ é dado pela equação (3.39) e $F(t)$ pela equação (3.40).

Nesta seção todas as equações estão na forma dimensional.

O campo elétrico é avaliado em instantes de tempo discretos t_j ($j = 1, 2, \dots, M$), separados por intervalos de tempo k , conforme a figura 6.1.

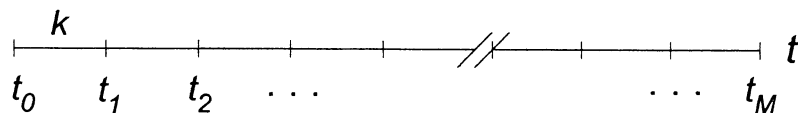


Figura 6.1 - Subdivisão do eixo dos tempos em intervalos iguais para a solução numérica da equação integral.

A diferença de potencial entre os eletrodos pode ser calculada para estes instantes e é dada por:

$$V(t_j) = E(t_j) d \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (6.2)$$

A integral na equação (3.41) é substituída por uma expressão aproximada do cálculo numérico. Neste trabalho foi usada a regra do trapézio estendida, aberta no extremo superior. Esta fórmula considera a seguinte aproximação para avaliar a integral no instante t_j :

$$E(t_j) = E(t_{j-1}) \quad .$$

Empregando a notação usual do cálculo numérico, com as variáveis discretizadas representadas com letras minúsculas, tem-se:

$$\begin{aligned} \kappa_{j\ell} &= K(t_j - \tau_\ell) \\ f_j &= F(t_j) \\ e_j &= E(t_j) \end{aligned} \quad (6.3)$$

que resulta em:

$$\int_0^{t_j} K(t - \tau) E(\tau) d\tau = k \left[\frac{1}{2} \kappa_{j0} e_0 + \sum_{\ell=1}^{j-1} \kappa_{j\ell} e_\ell + \frac{1}{2} \kappa_{j j-1} e_{j-1} \right] + \mathcal{O}(k^3) \quad (6.4)$$

O símbolo $\mathcal{O}(\)$ indica a ordem do erro de aproximação.

Foi escolhida a regra do trapézio porque ela apresenta um comportamento estável. Deve ser citado que outras regras, embora estáveis para a avaliação numérica de integrais, podem produzir resultados instáveis quando aplicadas à solução de equações integrais [59].

Foi utilizada uma expressão aberta no extremo superior para permitir o uso de qualquer função resposta. Caso contrário, para aqueles modelos em que $f(0) \rightarrow \infty$ ocorreria $\kappa_{jj} \rightarrow \infty$ o que inviabilizaria a solução numérica. Isto ocorre, por exemplo, nos modelos de von Schweidler e de Jonscher. O desvio cometido com esta aproximação é desprezível tendo em vista que o intervalo de tempo k é pequeno.

Devem ser resolvidas as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 e_0 &= E(0) \\
 e_1 &= f_1 + k[2\kappa_{10} e_0] \\
 e_2 &= f_2 + k \left[\frac{1}{2}\kappa_{20} e_0 + \frac{3}{2}\kappa_{21} e_1 \right] \\
 &\vdots \\
 e_j &= f_j + k \left[\frac{1}{2}\kappa_{j0} e_0 + \sum_{\ell=1}^{j-1} \kappa_{j\ell} e_\ell + \frac{1}{2}\kappa_{j\ j-1} e_{j-1} \right] \quad j = 3, 4, \dots, M
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Não é necessário resolver um sistema de equações lineares pois nas equações (6.5) o campo e_j só depende dos campos $\{e_0, e_1, \dots, e_{j-1}\}$. Assim, a solução é obtida por substituições progressivas. Isto é uma característica da equação integral de Volterra e do uso de uma expressão numérica aberta.

As integrais em $F(t)$ podem ser resolvidas analiticamente para alguns modelos de relaxação e, então, os seus resultados são utilizados no cálculo de f_j . Para o modelo de Debye, com $f(t)$ dada pela equação (3.14) obtém-se:

$$F(t) = E(0) - \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \left\{ \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) - 1 \right] \left[\exp\left(\frac{t_B}{\tau_0}\right) - \exp\left(\frac{t_A}{\tau_0}\right) \right] \right\} \tag{6.6}$$

Para o modelo de von Schweidler, com $f(t)$ dada pela equação (3.15), a expressão de $F(t)$ é a seguinte:

$$F(t) = E(0) - \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \frac{\beta}{(1-\alpha)} \left[(t-t_A)^{1-\alpha} - (t-t_B)^{1-\alpha} - (-t_A)^{1-\alpha} + (-t_B)^{1-\alpha} \right] \tag{6.7}$$

Para outras funções resposta as integrais devem ser calculadas numericamente. Nos cálculos realizados foi utilizada a regra do trapézio estendida.

As funções f_j são calculadas a partir de $F(t)$ dada pela equação (3.40) e que pode ser expressa na forma:

$$F(t) = E(0) + \frac{\varepsilon_0 \chi_s}{\varepsilon_\infty} E_0 \left\{ \int_0^t f(\tau - t_B) d\tau - \int_0^t f(\tau - t_A) d\tau \right\} \tag{6.8}$$

com as integrais separadas. Deve ser lembrado que $t_A < 0$ e $t_B < 0$, conforme foi definido na seção 3.5. Se $|t_A| \gg |t_B|$ a contribuição da segunda integral é desprezível em relação à da primeira. Isto pode ser justificado com base na interpretação geométrica destas integrais mostrada na figura 6.2, onde tais contribuições estão indicadas por \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 , respectivamente. Como a duração do processo de carga é muito maior que os intervalos de tempo de curto-circuito e de observação dos fenômenos, as condições $|t_A| \gg |t_B|$ e $|t_A| \gg t$ são satisfeitas.

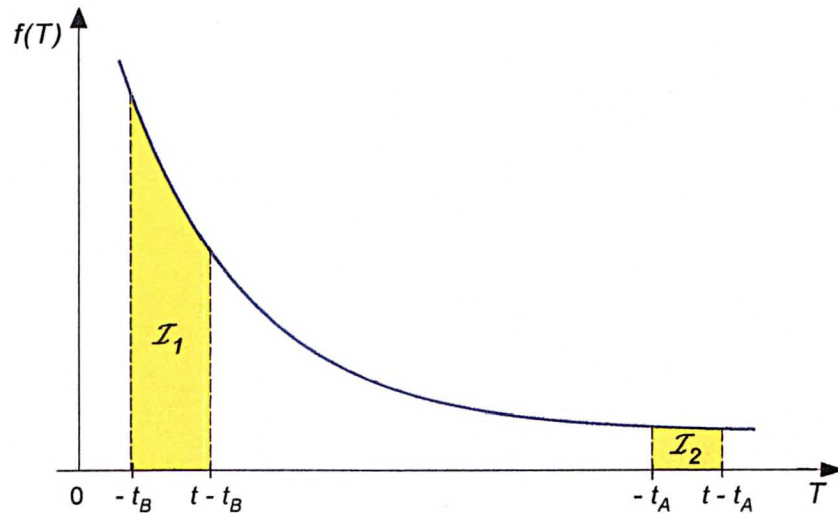


Figura 6.2 - Contribuição de cada integral na equação (6.8), considerando uma função resposta genérica. Por definição, $t_A < 0$ e $t_B < 0$.

6.2 Modelo da Carga Espacial

A equação diferencial parcial dada pela equação (4.21)

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0$$

está na forma adimensional e não leva em consideração o efeito da difusão nem a presença de armadilhas. Com estas hipóteses, o “método das características” é um dos procedimentos possíveis para resolver esta equação. Dependendo da forma funcional para a condição inicial $E(x, 0)$ é possível obter uma solução analítica para $E(x, t)$. Outra maneira de resolvê-la é o método numérico das diferenças finitas, o qual foi utilizado neste trabalho por permitir o uso de diferentes formas para $E(x, 0)$.

No modelo da carga espacial o campo elétrico depende do tempo e da posição, de modo que é necessário trabalhar com duas variáveis discretizadas. O dielétrico é dividido em N partes na direção $O x$. O campo elétrico é calculado nos instantes t_j ($j = 1, 2, \dots, M$) para cada ponto x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). Isto pode ser representado num diagrama em forma de grade, conforme a figura 6.3, onde o eixo horizontal indica as posições x_i através do dielétrico e o eixo vertical os instantes de tempo t_j em que o campo é avaliado. A largura de cada subdivisão é dada por $h = \frac{1}{N}$ e o passo de avanço no tempo é representado por k .

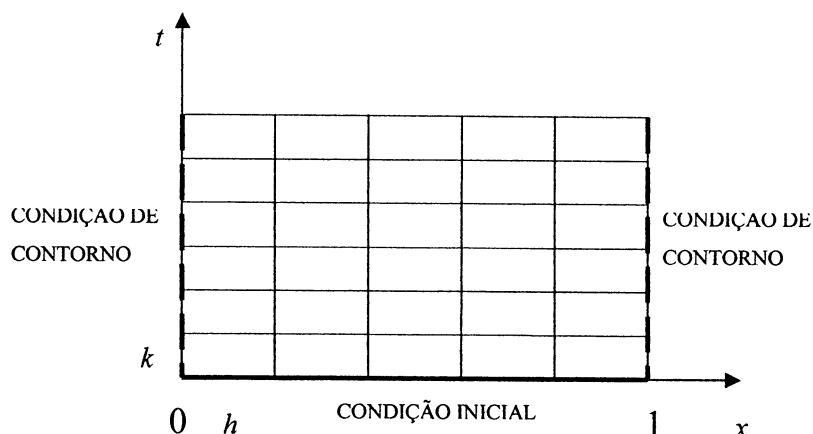


Figura 6.3 - Diagrama $x - t$ das variáveis discretizadas para a solução pelo método das diferenças finitas. O dielétrico é subdividido em camadas de espessura h e as grandezas são calculadas a cada intervalo de tempo k .

O método das diferenças finitas pode ser aplicado de duas formas: explícita e implícita. A forma explícita é mais fácil de ser implementada, porém, para que a solução seja numericamente estável deve ser satisfeita a condição $\frac{k}{h} < 1$. Como em geral $h \ll 1$, isto impõe que o passo de avanço no tempo k seja pequeno, exigindo um grande número de etapas sucessivas para que a solução avance uma unidade de tempo. Esta forma de solução não é recomendável.

Na implementação da forma implícita, o cálculo dos valores incógnitos para o instante t_j envolve a solução de um sistema de equações. Não há uma condição relacionando h e k para que a solução seja numericamente estável. Os passos h e k são escolhidos de acordo com a precisão desejada, levando-se em conta a magnitude dos termos de resto na aproximação utilizada para as derivadas.

Existem diferentes maneiras de implementar a forma implícita. Tendo em vista que a equação a ser resolvida é não-linear, foi adotada neste trabalho a forma implícita completamente regressiva no tempo, a qual é estável e convergente conforme relatado por Wintle [35] e na literatura sobre cálculo numérico [59]. No apêndice 2 são mostrados os fundamentos do método implícito usado nesta seção.

O campo elétrico no ponto x_i e no instante t_j pode ser indicado pela notação:

$$E(x_i, t_j) = E(i \cdot h, j \cdot k) = e_{i,j} \quad (6.9)$$

comumente encontrada na literatura sobre métodos de diferenças finitas.

Na forma completamente regressiva no tempo, a derivada espacial no ponto x_i é expressa usando-se a aproximação por diferenças centrais no instante t_{j+1} :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{e_{i+1, j+1} - e_{i-1, j+1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad . \quad (6.10)$$

Nesta mesma situação a derivada temporal é expressa pela aproximação de diferenças progressivas:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = \frac{e_{i, j+1} - e_{i, j}}{k} + \mathcal{O}(k) \quad . \quad (6.11)$$

O símbolo $\mathcal{O}(\)$ indica a ordem do erro de aproximação.

A figura 6.4 ilustra os nós da grade $x - t$ envolvidos nesta aproximação.

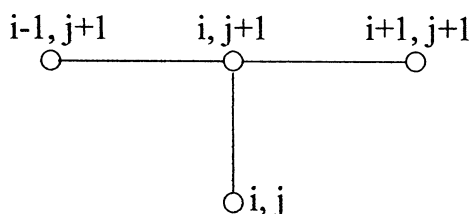


Figura 6.4 - Nós envolvidos nas equações (6.10) e (6.11) para o método completamente regressivo no tempo.

Usando-se as equações (6.10) e (6.11) é possível escrever a equação diferencial parcial numa forma conhecida como equação de diferenças. Para $i = 1, 2, \dots, N - 1$ tem-se:

$$e_{i, j+1} \frac{(e_{i+1, j+1} - e_{i-1, j+1})}{2h} + \sigma e_{i, j+1} + \frac{(e_{i, j+1} - e_{i, j})}{k} = 0 \quad . \quad (6.12)$$

Deste ponto em diante é conveniente adotar a notação simplificada proposta por Smith [56], já que estão envolvidos diretamente apenas dois instantes de tempo: t_j no qual o campo é conhecido e t_{j+1} em que o campo é ainda incógnito. Considera-se a notação:

$$\begin{aligned} e_{i, j+1} &\rightarrow e_i && \text{(valor incógnito)} \\ e_{i, j} &\rightarrow \bar{e}_i && \text{(valor conhecido)} \end{aligned}$$

ou seja, é suprimido o segundo subíndice e adicionada a barra superior para as grandezas referentes ao instante t_j . Assim, a equação (6.12) pode ser escrita na forma:

$$e_i \left[\frac{k}{2h} (e_{i+1} - e_{i-1}) + k\sigma + 1 \right] = \bar{e}_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.13)$$

e representa uma relação entre três valores incógnitos $\{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\}$ e um valor conhecido $\{\bar{e}_i\}$. Esta equação é não-linear.

Analisando-se a figura 6.5 observa-se que há $(N+1)$ incógnitas, porém, na equação (6.13) tem-se apenas $(N-1)$ equações.

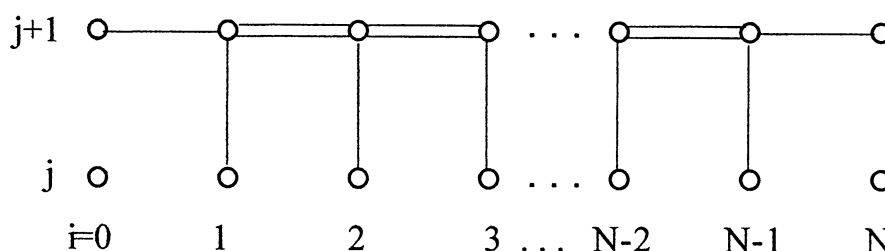


Figura 6.5 - Relação entre valores incógnitos e conhecidos para o sistema de $(N-1)$ equações representadas na equação (6.13).

As duas equações complementares, necessárias para resolver o sistema, virão das condições de contorno em $x = 0$ e $x = 1$.

No caso particular em que a distribuição inicial de carga espacial tem a forma da função caixa, existem expressões exatas para o campo elétrico $E(0, t)$ e $E(1, t)$, conforme foi apresentado na seção 4.4.

A equação diferencial na equação (4.21) deve ser satisfeita no interior do dielétrico. Nas fronteiras em $x = 0$ e $x = 1$ deve ser especificado o campo elétrico ou a sua derivada [60].

Tentou-se utilizar uma aproximação para a derivada nas fronteiras com base num polinômio interpolador de Gregory-Newton [61]. Tentou-se também a extrapolação linear e não-linear [56]. Os resultados numéricos não foram satisfatórios quando comparados com a solução analítica. Então, com base nos gráficos do campo elétrico e da sua derivada em relação a x , em

função da posição, propôs-se a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=0} &\approx \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=0+h} \\ \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=1} &\approx \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=1-h} \end{aligned} \quad (6.14)$$

nas vizinhanças de $x = 0$ e $x = 1$, para um passo h pequeno.

Aplicando-se estas expressões para $i = 0$ e $i = N$ na equação diferencial parcial, é possível então escrever duas equações de diferenças:

$$e_0 \left[\frac{k}{2h} (e_2 - e_0) + k\sigma + 1 \right] = \bar{e}_0 \quad i = 0 \quad (6.15)$$

$$e_N \left[\frac{k}{2h} (e_N - e_{N-2}) + k\sigma + 1 \right] = \bar{e}_N \quad i = N \quad (6.16)$$

Estas expressões foram aplicadas a problemas com distribuição inicial de cargas em forma de função caixa e seus resultados comparados com aqueles calculados pela expressão exata. Como exemplo, a figura 6.6 mostra os valores do campo elétrico $E(0, t)$ na face esquerda do dielétrico, calculados pela equação (4.30) e pelo conjunto de equações (6.13) a (6.16) no caso da tensão de recuperação.

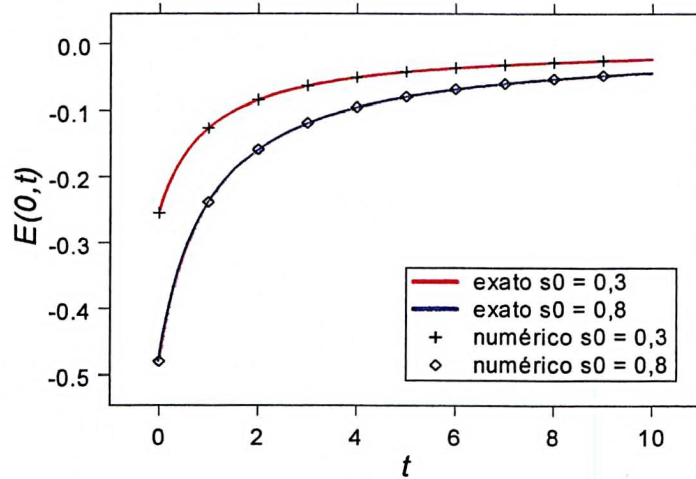


Figura 6.6 - Comparação entre resultados obtidos com a aproximação das condições de contorno e com a expressão exata da equação (4.30).

As equações (6.13), (6.15) e (6.16) formam um sistema de equações algébricas não-lineares. Sua solução numérica foi obtida usando-se o método iterativo de Newton-Raphson para sistemas de equações. No apêndice 3 faz-se uma breve apresentação deste método. Para calcular a solução, é necessário conhecer a matriz Jacobiana do sistema, cujos elementos são dados por:

$$\begin{aligned}
 J_{0,0} &= \frac{k}{2h}(e_2 - 2e_0) + k\sigma + 1 & (6.17) \\
 J_{0,1} &= 0 & J_{0,2} &= \frac{k}{2h}e_0 \\
 J_{i,i} &= \frac{k}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) + k\sigma + 1 \\
 J_{i,i-1} &= -\frac{k}{2h}e_i & J_{i,i+1} &= \frac{k}{2h}e_i \\
 J_{N,N} &= \frac{k}{2h}(2e_N - e_{N-2}) + k\sigma + 1 \\
 J_{N,N-2} &= -\frac{k}{2h}e_N & J_{N,N-1} &= 0
 \end{aligned}$$

Também é necessário fornecer os valores de partida para o processo iterativo. Para a solução no instante t_{j+1} adotou-se como valores de partida o campo elétrico já calculado no instante t_j . Considerando que o passo k geralmente é pequeno, os valores adotados para partida estão próximos da solução procurada e a convergência é rápida.

Foi escolhido o método de Newton-Raphson porque é simples e apresentou bons resultados.

O sistema de $(N + 1)$ equações pode também ser escrito como uma única equação matricial. Isto é útil para uso com *softwares* matemáticos que operem diretamente com matrizes. Considera-se as definições das matrizes:

$$\bar{\mathbb{E}}^T = [\bar{e}_0 \quad \bar{e}_1 \quad \cdots \quad \bar{e}_{N-1} \quad \bar{e}_N] \quad (6.18)$$

$$\mathbb{U}^T = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1] \quad (6.19)$$

$$\mathbb{E}^T = [e_0 \quad e_1 \quad \cdots \quad e_{N-1} \quad e_N] \quad (6.20)$$

e

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

sendo que os elementos não indicados são nulos. Esta é uma matriz banda diagonal.

A equação matricial equivalente às equações (6.13), (6.15) e (6.16) é:

$$diag(\mathbb{E}) \left[\frac{k}{2h} \mathbb{C} \mathbb{E} + (k\sigma + 1)\mathbb{U} \right] = \bar{\mathbb{E}} \quad (6.22)$$

onde $diag()$ é um operador que produz uma matriz quadrada a partir de uma matriz coluna, segundo a definição:

$$diag(\mathbb{E}) = \begin{bmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_N \end{bmatrix} .$$

Neste trabalho as equações foram resolvidas pelos dois procedimentos: o conjunto de equações simultâneas e a equação matricial. Os resultados foram equivalentes.

6.3 Modelo Combinado

Na solução das equações (5.10) e (5.11)

$$P(x, t) = \chi_s \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau$$

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \sigma E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + E(x, t) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0$$

as variáveis x e t assumem valores discretos da mesma forma que na seção anterior. Porém, agora será necessário armazenar todos os valores prévios do campo elétrico, tendo em vista que a polarização depende do campo elétrico no passado.

Na integral da equação (5.10) é conveniente fazer a separação:

$$P(x, t) = \chi_s \int_{-\infty}^0 f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau + \chi_s \int_0^t f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau \quad (6.23)$$

onde a primeira integral leva em conta o campo elétrico existente quando o circuito estava fechado. Define-se então a função:

$$\Phi(x, t) = \chi_s \int_{-\infty}^0 f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau \quad (6.24)$$

tal que:

$$P(x, t) = \Phi(x, t) + \chi_s \int_0^t f(t - \tau) E(x, \tau) d\tau \quad (6.25)$$

Na seção 6.4 é discutido em detalhes o cálculo de $\Phi(x, t)$ para os fenômenos da tensão de descarga interna e de recuperação.

A equação diferencial parcial da carga espacial e a integral da polarização serão discretizadas de forma separada e, então, as expressões resultantes serão acopladas. Da mesma forma que na seção anterior, para a solução da equação diferencial será empregado o método das diferenças finitas na forma implícita completamente regressiva no tempo.

Supondo o dielétrico dividido em N partes, haverão $2(N + 1)$ incógnitas para cada instante de tempo: $(N + 1)$ valores para o campo elétrico e $(N + 1)$ para a polarização.

Usando-se a aproximação por diferenças centrais para a derivada espacial, tem-se $(N - 1)$ equações de diferenças; as condições de contorno em $x = 0$ e $x = 1$ fornecem mais duas equações de diferenças; o cálculo numérico da integral na equação (6.25) fornece uma equação para cada ponto x_i ($i = 0, 1, \dots, N$), tendo-se então mais $(N + 1)$ equações. Assim, o número total de equações é igual ao número de incógnitas.

Usa-se a mesma notação simplificada apresentada na seção 6.2, acrescentando-se ainda as grandezas:

$$\begin{aligned} p_{i, j+1} &\rightarrow p_i && \text{(valor incógnito)} \\ p_{i, j} &\rightarrow \bar{p}_i && \text{(valor conhecido)} \end{aligned}$$

O método das diferenças finitas aplicado à equação (5.11) fornece o seguinte conjunto de equações de diferenças:

$$\begin{aligned}
 e_i \left[\frac{k}{2h} (e_{i+1} - e_{i-1} + p_{i+1} - p_{i-1}) + k\sigma + 1 \right] + p_i &= \bar{e}_i + \bar{p}_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\
 e_0 \left[\frac{k}{2h} (e_2 - e_0 + p_2 - p_0) + k\sigma + 1 \right] + p_0 &= \bar{e}_0 + \bar{p}_0 \quad i = 0 \\
 e_N \left[\frac{k}{2h} (e_N - e_{N-2} + p_N - p_{N-2}) + k\sigma + 1 \right] + p_N &= \bar{e}_N + \bar{p}_N \quad i = N
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Na obtenção das equações para $i = 0$ e $i = N$ foi usada a mesma aproximação discutida na seção 6.2 para a derivada espacial.

Deste ponto em diante a solução poderá seguir dois procedimentos diferentes, conforme o comportamento da função resposta para argumentos nulos.

Supondo $f(t)$ definida para $t = 0$, a solução da integral na equação (6.25) foi aproximada pela regra do trapézio, resultando na seguinte expressão para a polarização no ponto x_i e no instante t_{j+1} :

$$p_{i,j+1} = \chi_s \left[\frac{1}{2} k f(t_{j+1} - t_0) e_{i,0} + k \sum_{\ell=1}^j f(t_{j+1} - t_\ell) e_{i,\ell} + \frac{1}{2} k f(0) e_{i,j+1} \right] + \varphi_{i,j+1} \tag{6.27}$$

Considerando que a função φ já leva em conta o campo elétrico em instantes anteriores a $t = 0$, faz-se $t_0 = 0$. Usando-se a notação simplificada apresentada na seção 6.2, resulta:

$$p_i = \chi_s \left[\frac{1}{2} k f(t_{j+1}) \bar{e}_{i,0} + k \sum_{\ell=1}^j f(t_{j+1} - t_\ell) \bar{e}_{i,\ell} + \frac{1}{2} k f(0) e_i \right] + \varphi_i \tag{6.28}$$

$i = 0, 1, \dots, N$

Foi usado o segundo subíndice para o campo elétrico porque, embora a barra superior denote valores já conhecidos, anteriores a t_{j+1} , é necessário especificar precisamente qual é esse instante. O diagrama de nós na figura 6.7 ilustra a situação.

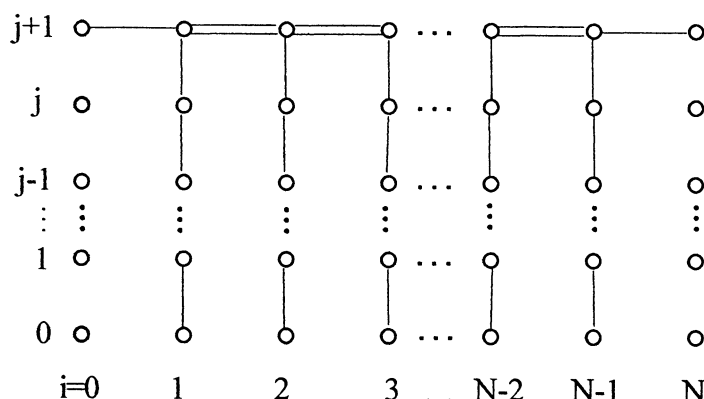


Figura 6.7 - Diagrama de nós para o problema combinado, mostrando que a solução no instante t_{j+1} depende dos valores das grandezas nos instantes anteriores.

Todas as parcelas na equação (6.28), exceto a terceira, independem do campo elétrico no instante t_{j+1} . Deve ser observado que a função φ_i depende do instante t_{j+1} através da função resposta f , mas independe do campo elétrico neste instante. São definidas as funções:

$$\xi = \chi_s \frac{1}{2} k f(0) \quad (6.29)$$

e

$$\eta_i = \chi_s \left[\frac{1}{2} k f(t_{j+1}) \bar{e}_{i,0} + k \sum_{\ell=1}^j f(t_{j+1} - t_\ell) \bar{e}_{i,\ell} \right] + \varphi_i \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (6.30)$$

A equação (6.28) ficará:

$$p_i = \xi e_i + \eta_i \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (6.31)$$

que representa a polarização no ponto x_i e no instante t_{j+1} , a qual é uma das incógnitas do problema.

Aplicando p_i da equação (6.31) nas equações de diferenças da equação (6.26) obtém-se um sistema de $(N+1)$ equações algébricas não lineares, onde as únicas incógnitas são os campos elétricos e_i . As equações de diferenças

ficarão:

$$e_i \left\{ \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(e_{i+1} - e_{i-1}) + \eta_{i+1} - \eta_{i-1}] + k\sigma + 1 + \xi \right\} + \eta_i = \bar{e}_i + \bar{p}_i \quad (6.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$e_0 \left\{ \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(e_2 - e_0) + \eta_2 - \eta_0] + k\sigma + 1 + \xi \right\} + \eta_0 = \bar{e}_0 + \bar{p}_0 \quad i = 0$$

$$e_N \left\{ \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(e_N - e_{N-2}) + \eta_N - \eta_{N-2}] + k\sigma + 1 + \xi \right\} + \eta_N = \bar{e}_N + \bar{p}_N$$

$$i = N$$

A solução deste sistema também foi realizada usando-se o método iterativo de Newton-Raphson. Para isso foi necessário determinar a matriz Jacobiana, cujos elementos são dados por:

$$J_{0,0} = \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(e_2 - 2e_0) + \eta_2 - \eta_0] + k\sigma + 1 + \xi \quad (6.33)$$

$$J_{0,1} = 0 \quad J_{0,2} = \frac{k}{2h} (1 + \xi) e_0$$

$$J_{i,i} = \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(e_{i+1} - e_{i-1}) + \eta_{i+1} - \eta_{i-1}] + k\sigma + 1 + \xi$$

$$J_{i,i-1} = -\frac{k}{2h} (1 + \xi) e_i \quad J_{i,i+1} = \frac{k}{2h} (1 + \xi) e_i$$

$$J_{N,N} = \frac{k}{2h} [(1 + \xi)(2e_N - e_{N-2}) + \eta_N - \eta_{N-2}] + k\sigma + 1 + \xi$$

$$J_{N,N-1} = 0 \quad J_{N,N-2} = -\frac{k}{2h} (1 + \xi) e_N$$

Devem ser fornecidos os valores de partida para as iterações. Para calcular o campo elétrico e_i no instante t_{j+1} foi usado como valor de partida o campo elétrico no instante t_j , conforme foi feito na seção 6.2.

Neste caso também é possível representar o sistema de equações por uma única equação matricial. Além das matrizes já definidas na seção 6.2, é necessário definir as matrizes:

$$\mathbb{P}^T = [p_0 \quad p_1 \quad \cdots \quad p_N] \quad (6.34)$$

$$\bar{\mathbb{P}}^T = [\bar{p}_0 \quad \bar{p}_1 \quad \cdots \quad \bar{p}_N] \quad (6.35)$$

e

$$\mathbb{N}^T = [\eta_0 \quad \eta_1 \quad \cdots \quad \eta_N] \quad (6.36)$$

Tem-se então:

$$\text{diag}(\mathbb{E}) \left\{ \frac{k}{2h} \mathbb{C} [(1 + \xi)\mathbb{E} + \mathbb{N}] + (k\sigma + 1 + \xi)\mathbb{U} \right\} + \xi\mathbb{E} = \bar{\mathbb{E}} + \bar{\mathbb{P}} \quad (6.37)$$

A solução destas equações fornece o campo elétrico e_i no instante t_{j+1} . Aplicando-se estes resultados na equação (6.31) obtém-se a polarização p_i neste instante.

Quando a função resposta utilizada não é definida para argumento nulo, ou seja, $f(0) \rightarrow \infty$, o procedimento descrito até aqui deve ser modificado. A expressão numérica usada para a integral da equação (6.25) deve usar a regra do trapézio aberta no extremo superior, a exemplo do que foi feito na seção 6.1. O erro cometido nesta aproximação é desprezível. Resulta a seguinte expressão para a polarização:

$$p_i = \chi_s \left[\frac{1}{2} k f(t_{j+1} - t_0) \bar{e}_{i,0} + k \sum_{\ell=1}^j f(t_{j+1} - t_\ell) \bar{e}_{i,\ell} + \frac{1}{2} k f(t_{j+1} - t_j) \bar{e}_{i,j} \right] + \varphi_i$$

ou ainda,

$$p_i = \chi_s \left[\frac{1}{2} k f(t_{j+1}) \bar{e}_{i,0} + k \sum_{\ell=1}^j f(t_{j+1} - t_\ell) \bar{e}_{i,\ell} + \frac{1}{2} k f(k) \bar{e}_{i,j} \right] + \varphi_i \quad (6.38)$$

onde foi considerado $t_0 = 0$ e $t_{j+1} - t_j = k$.

Calcula-se a polarização pela equação (6.38) e aplica-se os resultados no sistema de equações não lineares da equação (6.26), obtendo-se o campo elétrico no instante t_{j+1} . Este procedimento é possível porque nesta aproximação o cálculo de p_i no instante t_{j+1} só depende do campo elétrico até o instante t_j .

A matriz Jacobiana tem seus elementos dados por:

$$\begin{aligned} J_{0,0} &= \frac{k}{2h} (e_2 - 2e_0 + p_2 - p_0) + k\sigma + 1 & (6.39) \\ J_{0,1} &= 0 & J_{0,2} &= \frac{k}{2h} e_0 \\ J_{i,i} &= \frac{k}{2h} (e_{i+1} - e_{i-1} + p_{i+1} - p_{i-1}) + k\sigma + 1 \\ J_{i,i-1} &= -\frac{k}{2h} e_i & J_{i,i+1} &= \frac{k}{2h} e_i \\ J_{N,N} &= \frac{k}{2h} (2e_N - e_{N-2} + p_N - p_{N-2}) + k\sigma + 1 \\ J_{N,N-1} &= 0 & J_{N,N-2} &= -\frac{k}{2h} e_0 \end{aligned}$$

Para esta forma de solução também devem ser fornecidos os valores de partida para iniciar as iterações.

Outra possibilidade neste caso consiste em utilizar uma aproximação para $f(t)$, proposta por Gross [22] para evitar a singularidade em $t = 0$, e aplicar o procedimento descrito para casos em que $f(0)$ é definida. Ele propôs que:

$$f(t) \cong f(t + a)$$

onde a é uma quantidade pequena.

Esta forma de solução foi empregada no presente trabalho e seus resultados foram praticamente iguais àqueles obtidos com a solução das equações (6.38) e (6.39).

No capítulo 7 são analisadas as soluções destas equações para diferentes funções resposta e diferentes condições iniciais, bem como comparações com resultados experimentais.

6.4 Condições Iniciais para o Campo Elétrico e para a Polarização

O estudo das tensões de descarga interna e de recuperação inicia-se em $t = 0$, porém, ao se considerar o efeito de memória, é necessário levar em conta o campo elétrico existente em instantes anteriores a $t = 0$. Se a polarização respondesse de maneira instantânea e fosse considerada apenas a dinâmica da carga espacial, bastaria conhecer a condição inicial em $t = 0$.

Quando se emprega isoladamente o modelo da polarização ou o modelo da carga espacial, as condições iniciais para E e P podem ser obtidas facilmente. No caso do modelo combinado a situação é mais complexa.

É mais simples estudar inicialmente o problema da descarga interna. Considera-se que o dielétrico seja polarizado durante um período muito grande em relação ao intervalo de observação. Na figura 6.8 tem-se $t_A \rightarrow -\infty$, de forma que o estabelecimento da polarização e da carga espacial ocorre nos instantes iniciais deste período, tal que o estado estacionário é atingido muito antes de $t = 0$.

Supõe-se que a carga espacial tenha atingido uma distribuição de estado estacionário e que a polarização esteja em equilíbrio com o campo elétrico em cada ponto do dielétrico, sendo dada na forma adimensional por:

$$P(x, 0) = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} \right) E(x, 0) \quad . \quad (6.40)$$

Assim, as condições iniciais estão definidas.

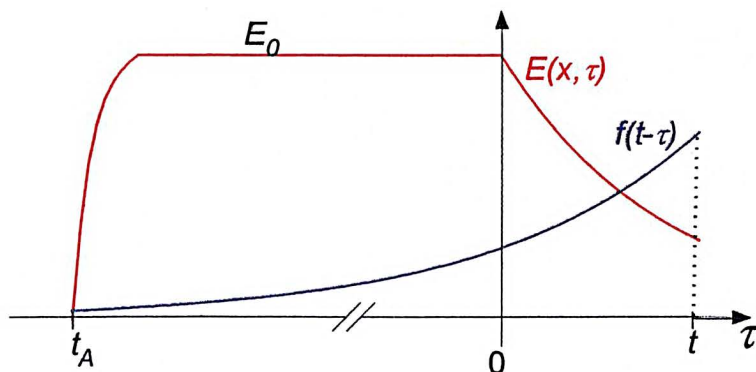


Figura 6.8 - Campo elétrico e função resposta numa posição x , interna ao dielétrico, no problema da descarga interna.

O campo elétrico anterior a $t = 0$ é levado em conta através do desenvolvimento mostrado nas equações (6.23) a (6.25), em particular através da função $\Phi(x, t)$. O cálculo da integral na equação (6.24) pode ser simplificado assumindo-se que o campo elétrico seja constante nos instantes $t \leq 0$, em cada ponto x . Logo adiante esta hipótese será justificada. Assim,

$$\Phi(x, t) = \chi_s E(x, 0) \int_{-\infty}^0 f(t - \tau) d\tau . \quad (6.41)$$

Efetuada uma mudança de variáveis e sabendo que:

$$\int_0^{\infty} \dots = \int_0^t \dots + \int_t^{\infty} \dots$$

é possível escrever:

$$\Phi(x, t) = \chi_s E(x, 0) [1 - F(t)] \quad (6.42)$$

onde $F(t)$ é definida como:

$$F(t) = \int_0^t f(T) dT . \quad (6.43)$$

Esta integral tem solução exata para os modelos de Debye e de von Schweidler. Para outras funções resposta é necessário calculá-la numericamente.

A hipótese usada supõe que o campo elétrico seja constante antes de $t = 0$, pelo menos durante um grande intervalo de tempo. Isto é válido porque as variações ocorridas no início do processo de carga darão uma contribuição pequena, pois a função resposta tende a zero quando seu argumento é grande, conforme está ilustrado na figura 6.8.

Com relação ao problema da recuperação do campo, é importante lembrar que durante o curto-circuito o sistema encontra-se fora do equilíbrio. A análise deste problema pode ser feita em duas etapas distintas e em seqüência.

Durante a polarização do dielétrico, até o instante imediatamente antes do curto-circuito, tem-se um processo análogo ao descrito para o problema da descarga interna. Utilizou-se este raciocínio para calcular $E(x, t_B)$ e $P(x, t_B)$.

Para estudar a evolução da polarização e da carga espacial durante o curto-circuito é necessário desenvolver um modelo combinado para a situação de circuito fechado, que permita usar qualquer modelo para a função resposta. Isto se constitui num novo trabalho. Com o intuito de resolver esta etapa de forma simplificada, fez-se uma aproximação ao considerar que os efeitos da polarização e da dinâmica da carga espacial ocorressem de forma independente. Deve ser enfatizado que, para ser coerente com a idéia principal deste trabalho, esta aproximação precisa ser substituída por um tratamento rigoroso no prosseguimento dos estudos. A polarização em $t = 0$ pode ser expressa como:

$$P(x, 0) = \chi_s E(x, t_B) \int_{-t_B}^{\infty} f(T) dT \quad (6.44)$$

onde foi considerado que no intervalo $t_B < t < 0$ o campo elétrico aplicado é nulo. A função $\Phi(x, t)$ da equação (6.24) ficará:

$$\Phi(x, t) = \chi_s E(x, t_B) [1 - F(t - t_B)] \quad (6.45)$$

Uma primeira aproximação para a distribuição da carga espacial ao final do curto-circuito é a distribuição uniforme. Alguns trabalhos [62, 49] mostram que à medida que o tempo passa, durante o curto-circuito, a carga espacial tende a se distribuir quase uniformemente através do dielétrico. Uma alternativa melhor consiste em aplicar o formalismo apresentado por Camargo e Leal Ferreira [62], o qual fornece a distribuição de carga exata em função do tempo. Porém, deve ser lembrado que isto ainda representa uma aproximação, pois está se considerando que os efeitos ocorram de forma independente.

7 Análise de Resultados

Neste capítulo são comparados os resultados teóricos, obtidos a partir do cálculo numérico, com os resultados experimentais.

O cálculo das expressões teóricas utilizou os procedimentos numéricos propostos no capítulo 6. Uma parte dos resultados foi obtida com o *software* Mathcad[®] e a outra parte com programas desenvolvidos em C++.

A preparação das amostras e a obtenção das medidas foi feita no Laboratório de Dielétricos do LACTEC.

Foram analisados materiais de diferentes naturezas, com o objetivo de detectar diferenças no comportamento dielétrico e verificar a aplicabilidade dos diferentes modelos. Algumas amostras foram polarizadas durante um longo período e outras durante um curto período. Com isto é possível avaliar, usando-se o modelo combinado, se a injeção de carga espacial pelos eletrodos foi significativa.

Inicialmente fez-se um estudo comparando os resultados experimentais com aqueles previstos pelo modelo da polarização. Foram considerados diferentes modelos de relaxação. Em seguida, repetiu-se as comparações aplicando-se o modelo combinado, que leva em conta a ação simultânea do movimento da carga espacial.

7.1 Montagem Experimental

Foram utilizadas duas montagens distintas, conforme a necessidade de se medir a corrente ou a tensão. Os circuitos estão apresentados na figura 7.1.

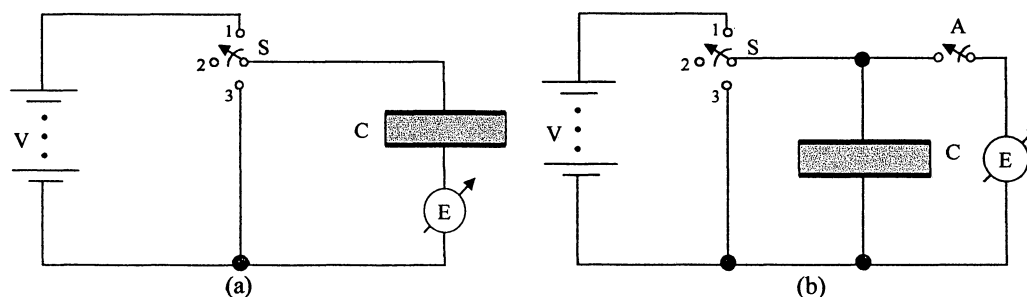


Figura 7.1 - Circuito elétrico para medir: (a) a corrente de carga ou descarga do capacitor e (b) a tensão entre os eletrodos do capacitor.

Utilizou-se um eletrômetro (E) marca Keithley, modelo 617, acoplado a um computador para registrar os valores medidos.

Um conjunto de baterias alcalinas (V) forneceu a alimentação ao sistema. Com isto minimizou-se o problema da introdução de ruídos nas medidas.

A chave (S) utilizada era do tipo “faca” com base de cerâmica. Para as tensões aplicadas, este tipo de chave apresenta correntes de fuga desprezíveis.

O capacitor (C) continha o material dielétrico a ser analisado. Suas características estão descritas na seção 7.2.

As ligações do capacitor e do eletrômetro ao restante do circuito foram as mais curtas possíveis, tendo poucos centímetros. Procurou-se evitar que o comportamento dos cabos de conexão afetasse de maneira significativa os valores medidos. Este cuidado foi necessário porque, conforme a tabela 7.2, para a maioria das amostras o capacitor C tinha uma pequena capacitância. Cabos e fios longos introduziriam capacitâncias da mesma ordem de grandeza ou maiores. Assim, a resposta dielétrica observada não seria devida exclusivamente ao dielétrico sob análise.

Para medir a corrente de descarga, com base na figura 7.1(a), procedeu-se da seguinte forma: com a chave S na posição 1 a amostra era polarizada durante um intervalo de tempo muito grande; colocava-se então a chave na posição 3 e registrava-se a corrente de descarga.

Para medir as tensões de descarga interna e de recuperação, com a montagem da figura 7.1(b), realizava-se os seguintes passos: com a chave S na posição 1 a amostra era polarizada; para registrar a tensão de descarga interna a chave era passada simplesmente para a posição 2; para registrar a tensão de recuperação, a chave era colocada na posição 3, aplicando-se um curto-circuito entre os eletrodos e, em seguida, passada para a posição 2. Nestes casos, a chave A era fechada no instante em que se desejava iniciar o registro das tensões.

7.2 Amostras e Propriedades Físicas dos Materiais Utilizados

Os materiais utilizados foram:

- a) polímero semi-cristalino com moléculas não-polares
→ **Polietileno (LDPE):**

Este material apresentou densidade igual a 0,921 e não continha negro de fumo.

A figura 7.2 mostra um trecho da molécula do polietileno representada, por simplicidade, na forma de uma cadeia linear. Na realidade as moléculas

apresentam curvaturas e dobras porque as ligações entre os átomos de carbono não estão necessariamente num mesmo plano. Neste material existem regiões cristalinas distribuídas através do material amorfo.

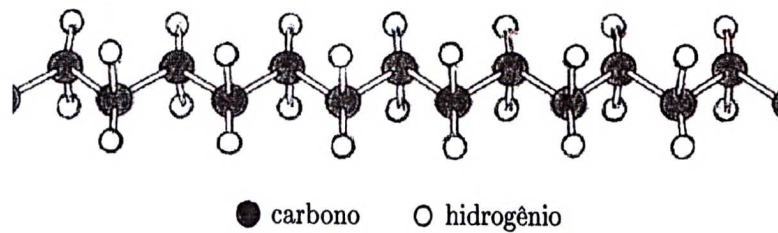


Figura 7.2 - Representação tridimensional simplificada de uma parte da molécula do polietileno.

b) polímero amorfo com moléculas polares

→ **Poli(cloreto de vinila) (PVC):**

Na figura 7.3 está representada uma parte da molécula do PVC em forma de cadeia linear e na configuração isotática. No material real, além da configuração exemplificada, coexistem moléculas com as configurações sindiotática e atática; ocorrem também curvaturas conforme citado para o polietileno. Comparando com a molécula do polietileno da figura 7.2 observa-se que, em cada *mero*, um dos átomos de hidrogênio é substituído por um átomo de cloro. Como consequência, há a formação de dipolos elétricos que dão ao PVC um caráter polar.

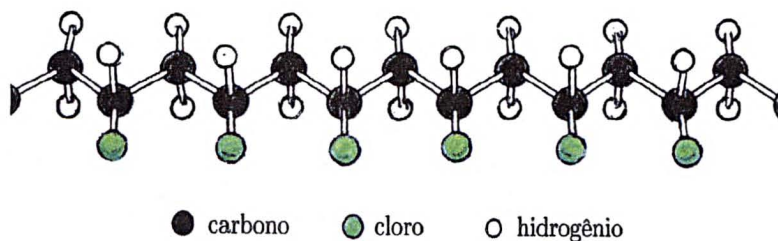


Figura 7.3 - Representação tridimensional simplificada de uma parte da molécula do PVC na configuração isotática.

c) material cristalino→ **Mica muscovita:**

A mica é um material constituído por lâminas de silicatos. Cada lâmina, por sua vez, é formada por três camadas, conforme ilustrado na figura 7.4 na região acima do íon de potássio. A primeira camada é formada por tetraedros de sílica, a segunda por átomos de alumínio e grupos OH^- , e a terceira novamente por tetraedros de sílica, invertidos em relação aos da primeira camada. Nesta camada estão presentes íons de potássio. As ligações entre os átomos no interior das lâminas são do tipo covalente ou iônica. As ligações entre lâminas adjacentes são do tipo iônica.

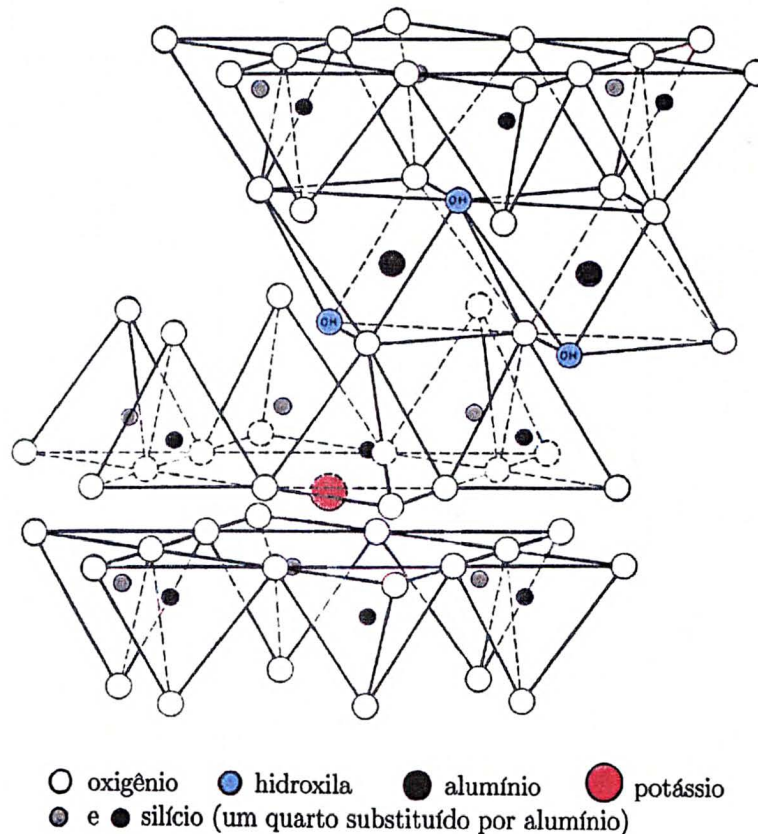


Figura 7.4 - Parte da rede cristalina da mica muscovita. Acima do íon de potássio está representada uma lâmina com suas três camadas, abaixo dele aparece apenas a primeira camada da lâmina adjacente.

d) material amorfo impregnado com líquido isolante
 → **Papel Kraft[®] impregnado com bifenila policlorada:**

Foram utilizados filmes de polietileno e de PVC, sobre os quais foram depositados em alto vácuo eletrodos circulares metálicos, formando capacitores. Para a mica e o papel impregnado foram usados capacitores comerciais, nos quais estes materiais constituíam o dielétrico. Nos capacitores de mica os eletrodos eram de prata depositada em vácuo, e no de papel impregnado eram de alumínio apenas justapostos ao dielétrico. A tabela 7.1 mostra a capacitância geométrica C_g de cada capacitor utilizado.

Tabela 7.1 - Características geométricas dos capacitores utilizados:

DIELÉTRICO	eletrodo		espessura (μm)	C_g
	material	diâmetro (mm)		
Polietileno	alumínio	35	60	0,142 nF
PVC	alumínio	55	206	0,102 nF
Mica	prata	–	17	0,190 nF
Papel e líq. isolante	alumínio	–	15	6,45 μF

Os valores das propriedades físicas foram obtidos da literatura [63, 64], sendo que a permissividade em alta frequência foi calculada a partir do índice de refração n utilizando-se a relação de Maxwell $\epsilon_\infty = n^2$. Na tabela 7.2 são apresentadas algumas propriedades para cada material considerado. Os valores de ϵ e ϵ_∞ representam permissividades relativas, sendo ϵ a permissividade estática.

Tabela 7.2 - Propriedades elétricas dos materiais:

DIELÉTRICO	ϵ	ϵ_∞	$\sigma(\text{S/m})$
Polietileno	2,22 a 2,35	2,28	10^{-15} a 10^{-14}
PVC	2,70 a 3,20	2,37	10^{-15} a 10^{-14}
Mica	5,25	2,52 a 2,55	$\cong 9 \times 10^{-14}$
Papel e líq. isolante	6	5,2	$\cong 2 \times 10^{-16}$

Os parâmetros das funções de relaxação foram obtidos a partir de medidas da corrente de descarga. As amostras foram polarizadas previamente durante um período muito longo.

É possível escrever uma equação integro-diferencial análoga à equação (3.31) usando as grandezas da teoria de circuitos:

$$I_d(t) = \frac{V(t)}{R} + C_g \frac{dV}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} f(t - \tau) d\tau$$

cuja solução para a descarga é:

$$I_d(t) = -V_0 C_g \delta(t) - V_0 f(t)$$

onde $I_d(t)$ é a corrente elétrica de descarga, V_0 é a tensão aplicada durante a carga, C_g é a capacitância geométrica do conjunto e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. O primeiro termo corresponde à descarga capacitiva e o segundo à contribuição da resposta lenta da polarização. Considerando que a corrente de descarga é registrada para instantes $t > 0$ resulta, em módulo:

$$I_d(t) = V_0 f(t) \quad . \quad (7.1)$$

Utilizando-se gráficos de $\ln[I_d(t)]$ em função de $\ln(t)$ ou em função de potências de t , faz-se o ajustamento das funções. Algumas funções resposta permitem a transformação da equação (7.1) para uma forma mais adequada ao ajustamento matemático dos dados experimentais. As funções a serem ajustadas são as seguintes:

a) Para a função de von Schweidler da equação (3.15) tem-se:

$$\ln[I_d(t)] = \ln(V_0 \beta) - \alpha \ln(t) \quad (7.2)$$

b) A partir da função de Jonscher dada pela equação (3.20) obtém-se:

$$\ln[I_d(t)] = \ln(V_0 A_J \omega_0^{-n}) - n \ln(t) - \ln\{1 + \omega_0^{m+1-n} \exp[(m+1-n) \ln(t)]\}$$

Definindo-se as constantes:

$$A = V_0 A_J \omega_0^{-n} \quad (7.3a)$$

$$B = \omega_0^{m+1-n} \quad (7.3b)$$

$$C = m + 1 - n \quad (7.3c)$$

resulta:

$$\ln[I_d(t)] = A - n \ln(t) - \ln[1 + Be^{C \ln(t)}] . \quad (7.4)$$

O ajustamento fornece n , A , B e C . Com a equação (7.3c) determina-se m e com a equação (7.3b) determina-se ω_0 .

c) A partir da função de Dissado-Hill dada pela equação (3.25) obtém-se:

$$\ln[I_d(t)] = \ln V_0 A_D - n \ln(\omega_p t) - \omega_p t + \ln {}_1F_1(1 - m; 2 - n; \omega_p t) .$$

Uma aproximação para $\ln {}_1F_1(\dots)$ é obtida expandindo-se ${}_1F_1$ em série de Kummer até o termo em $(\omega_p t)^2$. Considerando a aproximação dada pela série de Taylor,

$$\ln(1 + x) \cong x - \frac{x^2}{2} \quad |x| < 1$$

resulta:

$$\ln {}_1F_1(1 - m; 2 - n; \omega_p t) = \frac{(1 - m)}{(2 - n)} \omega_p t + \frac{(1 - m)(1 - n + m)}{2(2 - n)^2(3 - n)} (\omega_p t)^2 .$$

Assim,

$$\ln[I_d(t)] = \ln \left(\frac{V_0 A_D}{\omega_p^n} \right) - n \ln(t) - \frac{(1 + m - n)}{(2 - n)} \omega_p t + \frac{(1 - m)(1 + m - n)}{2(2 - n)^2(3 - n)} \omega_p^2 t^2$$

Definindo-se as constantes:

$$A = \ln \left(\frac{V_0 A_D}{\omega_p^n} \right) \quad (7.5a)$$

$$B = \frac{1 + m - n}{2 - n} \omega_p \quad (7.5b)$$

$$C = \frac{(1 - m)(1 + m - n)}{2(3 - n)(2 - n)^2} \omega_p^2 \quad (7.5c)$$

é possível escrever:

$$\ln[I_d(t)] = A - n \ln(t) - B t + C t^2 . \quad (7.6)$$

O ajustamento fornece n , A , B e C . Das equações (7.5b) e (7.5c) é possível expressar m como:

$$m = \frac{B^2 - 2C(1 - n)(3 - n)}{B^2 + 2C(3 - n)} . \quad (7.7)$$

Com esta equação calcula-se m e com a equação (7.5b), por exemplo, calcula-se ω_0 . Foi desenvolvida também uma aproximação considerando termos até $(\omega_p t)^3$, porém, os coeficientes calculados permaneceram praticamente os mesmos. Assim, uma aproximação até $(\omega_p t)^2$ é suficiente para os problemas estudados neste trabalho.

Para os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill, as incertezas foram calculadas aplicando-se a lei de propagação da incerteza [65] às equações (7.3b), (7.3c), (7.5b) e (7.5c). Levou-se em conta o desvio padrão de cada coeficiente obtido pelo ajustamento com o método dos mínimos quadrados.

Com relação ao modelo de von Schweidler, dispunha-se de um conjunto de 24 ensaios relativos à corrente de descarga com o ajustamento correspondente, para o mesmo capacitor. Para aproveitar estes resultados, os coeficientes α e β foram calculados pela média do conjunto e as suas incertezas a partir do desvio padrão amostral.

A seguir são apresentados os valores dos parâmetros para cada amostra e para cada modelo de relaxação. Quando necessário, o número da amostra é indicado ao lado do nome do material.

Tabela 7.3 - Parâmetros para a função de Dissado-Hill:

DIELÉTRICO	m	n	ω_p (rad/s)
Polietileno 1 e 2	$0,41 \pm 0,06$	$0,660 \pm 0,004$	$(2,1 \pm 0,3) \times 10^{-3}$
PVC1	$0,55 \pm 0,08$	$0,53 \pm 0,03$	$(1,1 \pm 0,4) \times 10^{-3}$
PVC2	$0,57 \pm 0,09$	$0,52 \pm 0,01$	$(1,1 \pm 0,4) \times 10^{-3}$
Papel e líquido isolante	$0,36 \pm 0,06$	$0,856 \pm 0,003$	$(1,1 \pm 0,6) \times 10^{-4}$
Mica1	$0,37 \pm 0,02$	$0,630 \pm 0,009$	$(5 \pm 1) \times 10^{-4}$
Mica2	$0,33 \pm 0,02$	$0,621 \pm 0,009$	$(7 \pm 1) \times 10^{-4}$

Tabela 7.4 - Parâmetros para a função de Jonscher:

DIELÉTRICO	m	n	$\omega_0(\text{rad/s})$
Polietileno 1 e 2	$0,31 \pm 0,04$	$0,58 \pm 0,03$	$(5 \pm 1) \times 10^{-3}$
PVC1	$0,30 \pm 0,02$	$0,42 \pm 0,02$	$(3,6 \pm 0,8) \times 10^{-3}$
PVC2	$0,23 \pm 0,03$	$0,38 \pm 0,02$	$(5 \pm 1) \times 10^{-3}$
Papel e líq. isolante	$0,057 \pm 0,004$	$0,694 \pm 0,002$	$(9,3 \pm 0,6) \times 10^{-3}$
Mica1	$0 \pm 0,07$	$0,33 \pm 0,02$	$(4,22 \pm 0,06) \times 10^{-2}$
Mica2	$0 \pm 0,07$	$0,30 \pm 0,02$	$(7,51 \pm 0,06) \times 10^{-2}$

Tabela 7.5 - Parâmetros para a função de von Schweidler:

DIELÉTRICO	α	β
Papel e líquido isolante	$0,90 \pm 0,03$	$(8 \pm 2) \times 10^{-7}$

Para as medidas das tensões de descarga interna e de recuperação, as amostras foram polarizadas durante diferentes intervalos de tempo e com diferentes tensões, conforme mostrado na tabela 7.6. Na última coluna desta tabela está indicado o campo elétrico macroscópico médio de polarização; este campo é calculado a partir da tensão aplicada aos eletrodos e da espessura da amostra.

Tabela 7.6 - Características da polarização:

DIELÉTRICO	t polarização	$V_{apl}(\text{V})$	t curto-circ.(s)	$E_{apl}(\text{kV/m})$
Polietileno 1	60 min	38,1	–	635
Polietileno 2	30 min	38,1	5	635
PVC1	30 min	16,7	–	81
PVC2	24 h	26,7	10	130
Papel e líq. isolante	15 h	20	–	1330
Papel e líq. isolante	17 h 49 min	9,3	6	620
Mica1	18 h 55 min	9,53	–	561
Mica2	19 h 34 min	142,8	5	8400

7.3 Resultados Obtidos com Base no Modelo da Polarização

Os resultados mostrados a seguir foram obtidos com o procedimento numérico proposto na seção 6.1, considerando-se exclusivamente o efeito da polarização elétrica. Esta análise é oportuna porque, a partir dos seus resultados, é possível tirar algumas conclusões ainda não exploradas na literatura. Inicialmente será feita uma comparação entre resultados experimentais e teóricos. Serão aplicados alguns modelos de relaxação. Os valores utilizados para os parâmetros são aqueles indicados nas tabelas 7.1 a 7.5. Para o modelo de Debye, cuja função resposta é dada pela equação (3.14), considerou-se $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_p}$, onde ω_p é um dos parâmetros da função de Dissado-Hill.

As tabelas e manuais normalmente fornecem uma faixa de valores para a condutividade elétrica de cada material. Esta faixa em geral é de duas ordens de grandeza. Por exemplo, para o polietileno e o PVC a condutividade está compreendida entre 10^{-15} S/m e 10^{-14} S/m. Observa-se, pelo experimento numérico, que a condutividade exerce grande influência nos resultados da tensão de descarga interna e tensão de retorno. Assim, pequenas variações no valor da condutividade provocam modificações significativas na forma das curvas. Neste trabalho ajustou-se o valor da condutividade de cada amostra, dentro da faixa citada, tal que as curvas teóricas ficassem próximas do resultado experimental. Isto sugere um procedimento para a determinação experimental da condutividade.

Serão mostrados os resultados das tensões de descarga interna e de recuperação para cada material. Todos os gráficos estão normalizados para facilitar a comparação entre os resultados. A maioria das curvas foi normalizada em relação ao seu respectivo valor máximo. Nos casos em que foi utilizado outro valor de referência, há uma indicação explícita no texto.

a) Polietileno:

Para a tensão de descarga interna foi usada a amostra Polietileno-1 e a condutividade mais adequada foi de $6,10 \times 10^{-14}$ S/m. Utilizou-se a permissividade ϵ igual a 2,30. Observa-se na figura 7.5 que, para os modelos de relaxação estudados, as curvas estão praticamente superpostas.

Para a tensão de recuperação foi usada a amostra Polietileno-2. A condutividade utilizada foi $6,00 \times 10^{-14}$ S/m. Na figura 7.6 vê-se que o resultado predito pelo modelo de Debye é bastante diferente dos valores medidos.

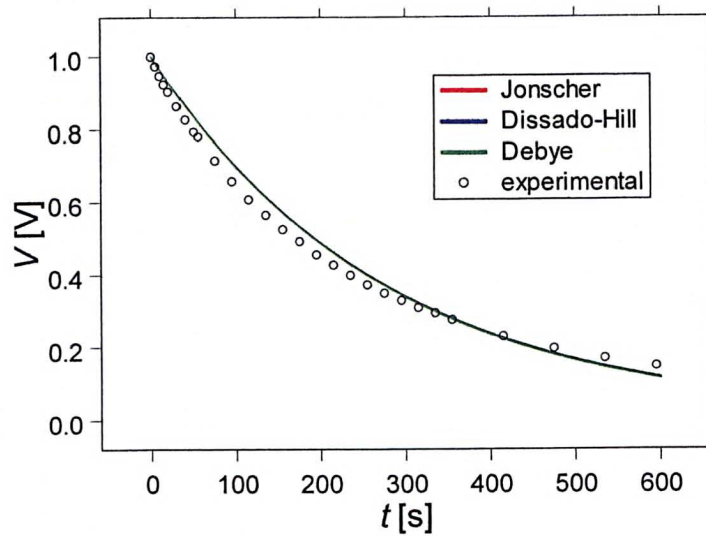


Figura 7.5 - Tensão de descarga interna para o polietileno, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas.

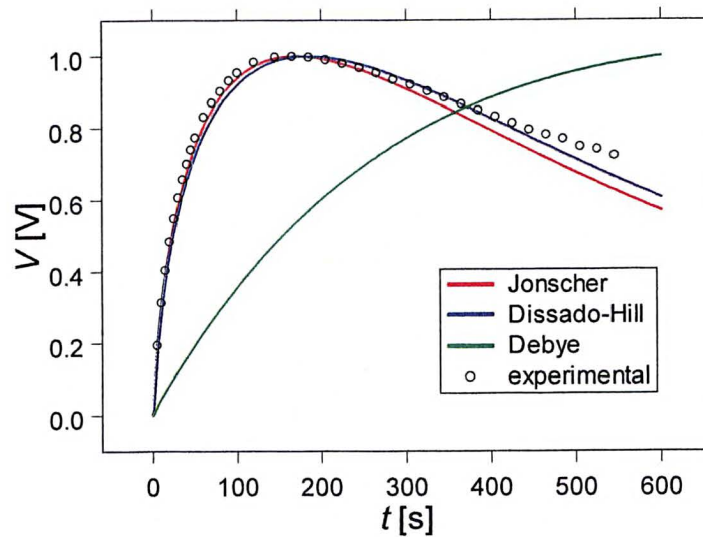


Figura 7.6 - Tensão de recuperação para o polietileno, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

b) PVC:

Para a tensão de descarga interna foi utilizada a amostra PVC-1. A condutividade mais adequada foi de $2,50 \times 10^{-14}$ S/m e a permissividade ϵ foi considerada igual a 3,00. O resultado está mostrado na figura 7.7.

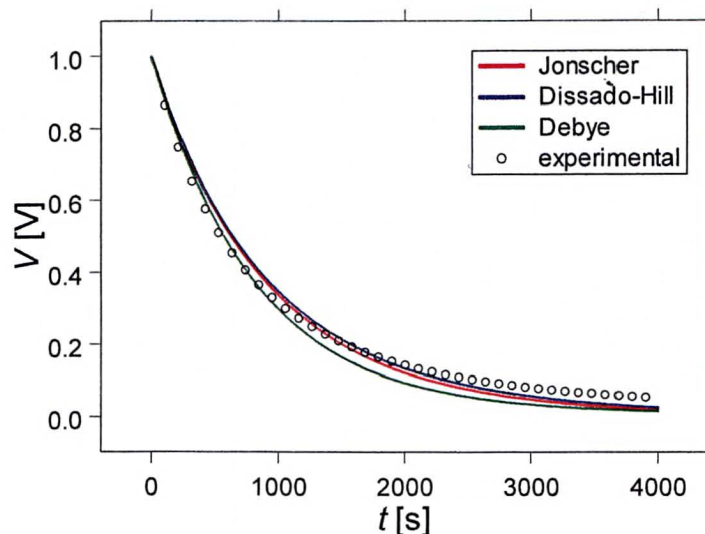


Figura 7.7 - Tensão de descarga interna para o PVC, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

No caso da tensão de recuperação foi utilizada a amostra PVC-2. A condutividade utilizada foi $2,00 \times 10^{-14}$ S/m e a permissividade ϵ igual a 3,00. Neste caso, observa-se na figura 7.8 que os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill são razoáveis para os instantes iniciais, porém, seus resultados apresentam grande diferença para os instantes de tempo maiores. Não é possível obter concordância para todo o intervalo de tempo. Uma justificativa é o fato do PVC possuir propriedades piroelétricas e piezoelétricas [66]. Durante o curto-circuito ocorre o aquecimento da amostra. Também, na montagem experimental a amostra estava pressionada. Estes dois efeitos podem ocasionar, no PVC, um deslocamento de cargas.

Experimentos realizados por Wintle [67] mostraram que o efeito piroelétrico afeta as medidas de correntes de descarga quando os eletrodos estão em curto-circuito, pois nesta situação o material sofre um aquecimento. Em seu

artigo, Wintle estudou o comportamento do poli(tereftalato de etileno) (PET). Considerando que o coeficiente piroelétrico do PVC é maior que o do PET, é válido atribuir parte do desvio observado na figura 7.8 a este efeito.

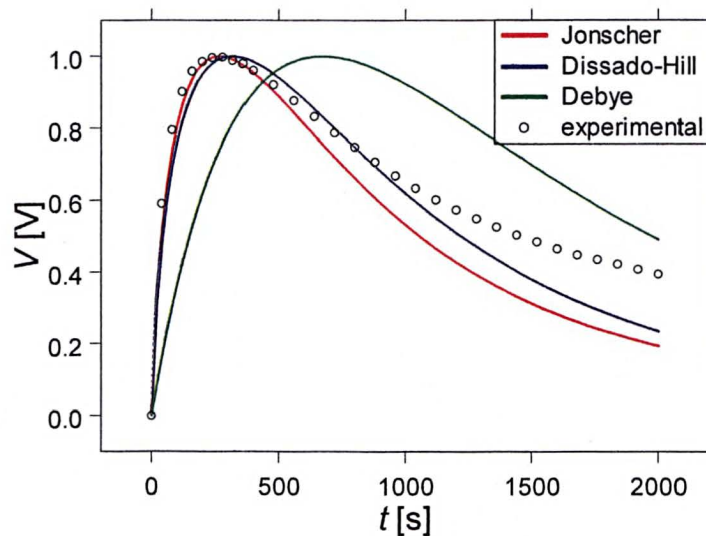


Figura 7.8 - Tensão de recuperação para o PVC, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

c) Mica:

No problema da descarga interna foi utilizada a amostra Mica-1. A condutividade usada foi $8,50 \times 10^{-14}$ S/m. Há uma excelente concordância entre os modelos estudados e a curva experimental, conforme a figura 7.9.

Para o problema da tensão de recuperação foi utilizada a amostra Mica-2, com condutividade $9,00 \times 10^{-14}$ S/m. O resultado está apresentado na figura 7.10. Os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill apresentaram bons resultados para esta amostra em instantes até 800 s. Entretanto, para muitas amostras de mica o modelo de Jonscher não pôde ser aplicado para descrever o comportamento dielétrico. O seu parâmetro m em geral resultou negativo ou nulo.

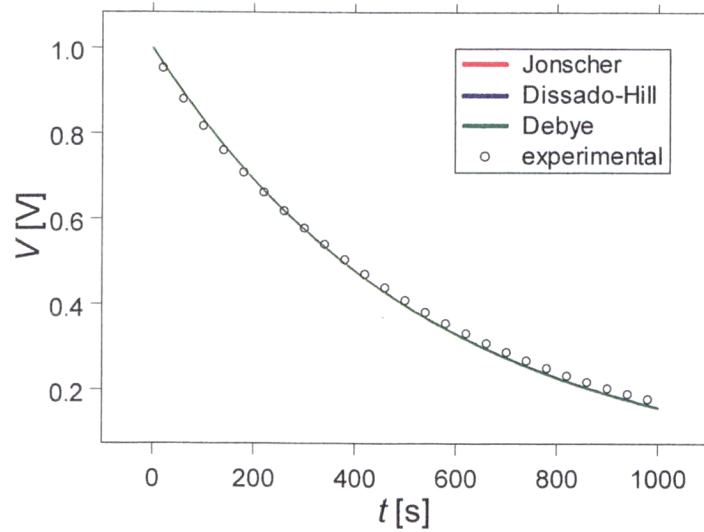


Figura 7.9 - Tensão de descarga interna para a mica, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas.

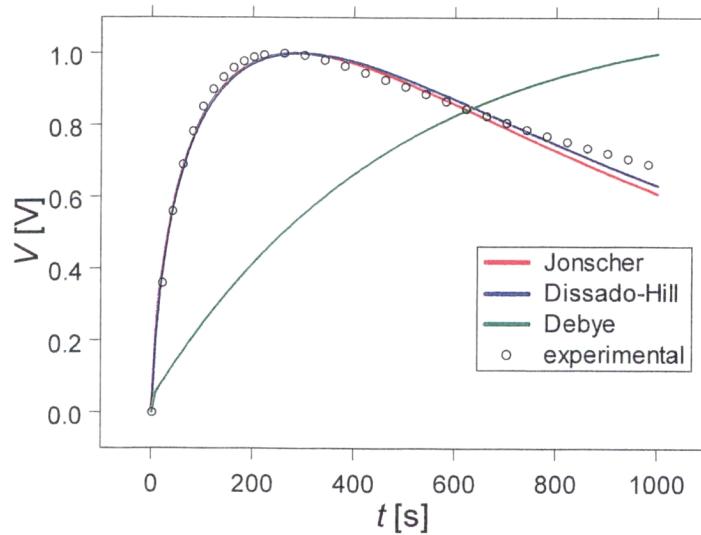


Figura 7.10 - Tensão de recuperação para a mica, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

d) Papel impregnado com líquido isolante:

Para a tensão de descarga interna utilizou-se uma amostra com condutividade $5,75 \times 10^{-17}$ S/m. Os resultados estão na figura 7.11.

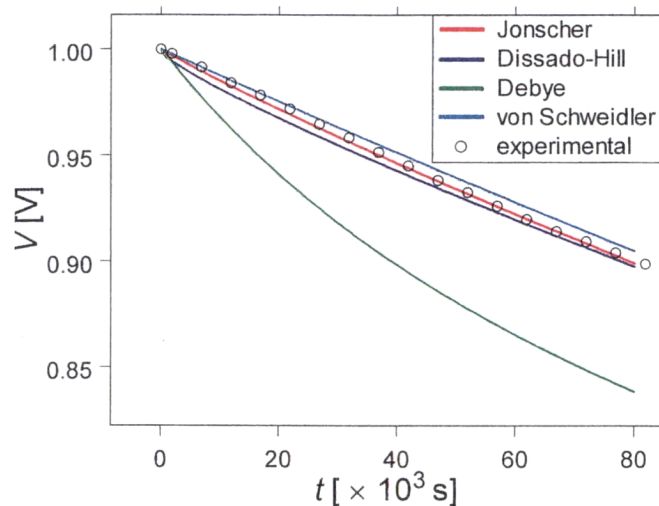


Figura 7.11 - Tensão de descarga interna para o papel impregnado, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

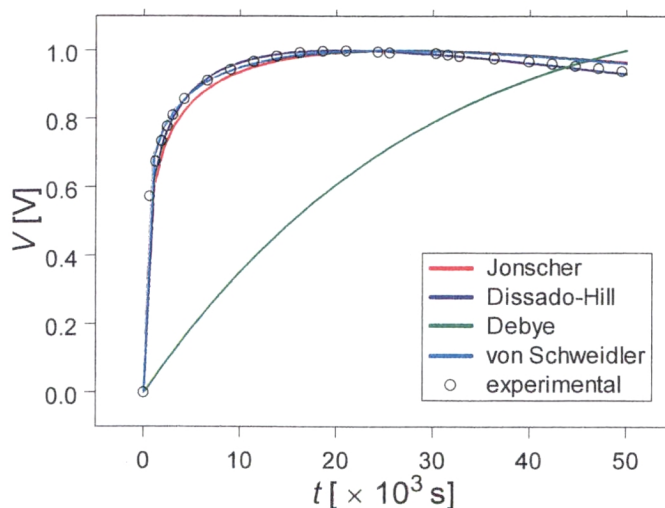


Figura 7.12 - Tensão de recuperação para o papel impregnado, utilizando o modelo da polarização com diferentes funções de relaxação.

Para a tensão de recuperação, utilizou-se uma amostra com condutividade $2,50 \times 10^{-16} \text{ S/m}$. Os resultados obtidos estão na figura 7.12.

Observa-se nas figuras 7.11 e 7.12 que todos os modelos, exceto o de Debye, mostram uma boa concordância com os resultados experimentais em todo o intervalo de tempo analisado, mesmo em grandes intervalos.

De forma geral, a partir dos gráficos 7.5 a 7.12, é possível afirmar que os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill apresentam resultados teóricos próximos entre si, para todos os materiais estudados. Todos os modelos, exceto o de Debye, prevêem de forma satisfatória o comportamento da tensão de descarga interna. Com relação ao problema da tensão de recuperação, excluindo-se o modelo de Debye, os demais apresentam boa concordância para um intervalo de tempo restrito, não sendo possível ajustá-los aos resultados experimentais para intervalos pequenos e grandes simultaneamente. Uma exceção a esta afirmação foi o papel impregnado, no qual a concordância foi observada num grande intervalo.

É interessante citar que a condutividade é um parâmetro que afeta significativamente a forma dos resultados teóricos. As figuras 7.13 e 7.14 ilustram isto ao considerar, como exemplo, as amostras de polietileno e o modelo de Dissado-Hill, para casos em que este material, por hipótese, tivesse diferentes valores de condutividade. No caso da tensão de descarga interna, ao aumentar a condutividade observa-se um decaimento mais rápido na tensão.

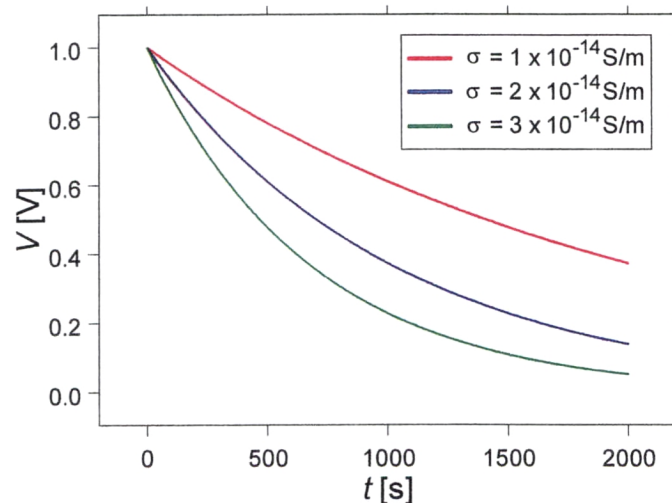


Figura 7.13 - Tensão de descarga interna para diferentes valores da condutividade de um material, considerando-se o modelo da polarização com a função de Dissado-Hill.

No problema da tensão de recuperação, com o aumento da condutividade observa-se que o valor máximo é atingido antes e que, após atingido este máximo, a tensão decai mais rapidamente. Ocorre também uma diminuição no valor máximo, de acordo com a figura 7.14. Nesta figura as curvas foram normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho. Fica evidente a redução no valor máximo da tensão de recuperação à medida que a condutividade aumenta.

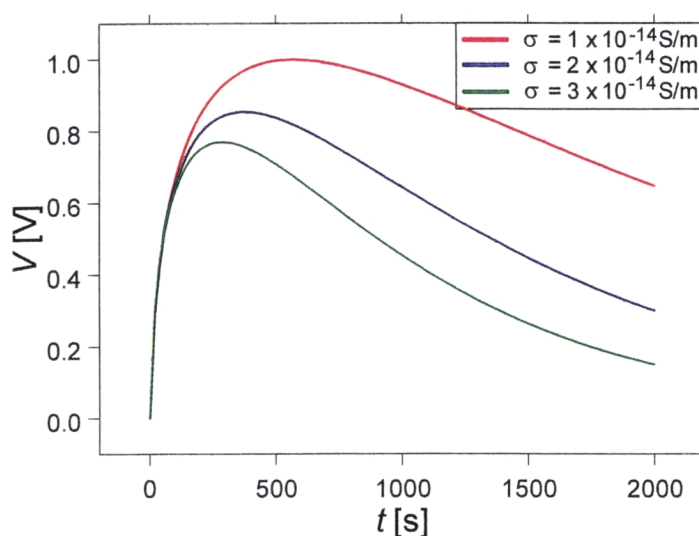


Figura 7.14 - Tensão de recuperação para diferentes valores da condutividade de um material, considerando-se o modelo da polarização com a função de Dissado-Hill. As curvas estão normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho.

Embora neste exemplo tenha sido usado um material e um modelo particular, as mesmas conclusões foram verificadas para os outros materiais e outros modelos de relaxação.

No caso limite em que a condutividade é desprezível, o experimento numérico mostra que o comportamento depende do tipo de material. Nos materiais não-polares a tensão de descarga interna permanece praticamente constante, conforme está mostrado na figura 7.15. Este gráfico foi obtido usando-se os dados do polietileno já especificados e considerando-se $\sigma = 0$. Nos materiais polares esta tensão decai lentamente no início e, após atingir um certo valor, permanece constante, como na figura 7.16. Para este caso foram utilizados os dados do PVC, assinalando-se $\sigma = 0$.

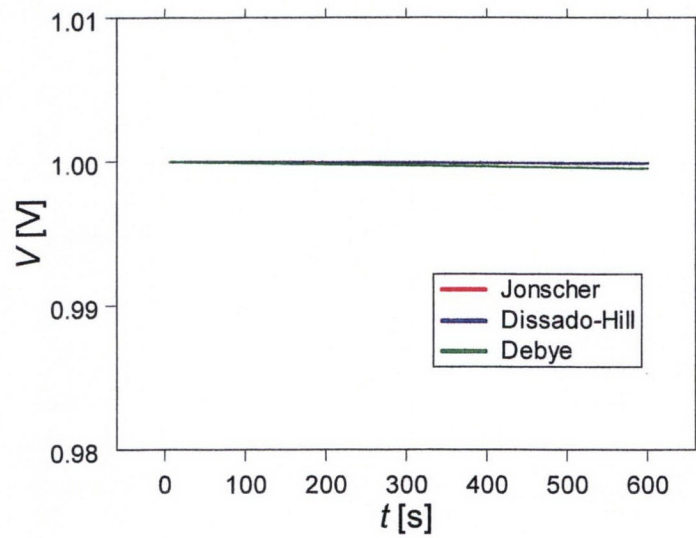


Figura 7.15 - Tensão de descarga interna para um material não-polar com condutividade desprezível.

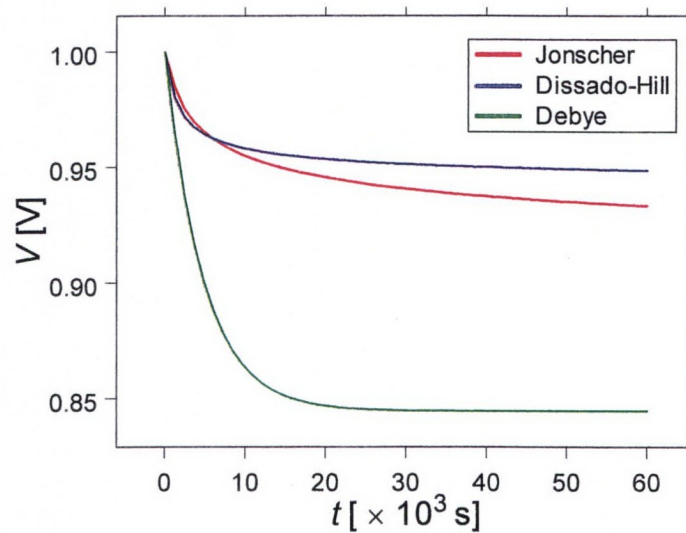


Figura 7.16 - Tensão de descarga interna para um material polar com condutividade desprezível.

A tensão de recuperação também apresenta um comportamento peculiar quando a condutividade do material é desprezível. A tensão cresce até um

valor máximo e permanece constante. Isto ocorre tanto para os materiais não-polares quanto para os polares, conforme as ilustrações nas figuras 7.17 e 7.18. Nestes gráficos as curvas estão normalizadas em relação à tensão aplicada durante a polarização.

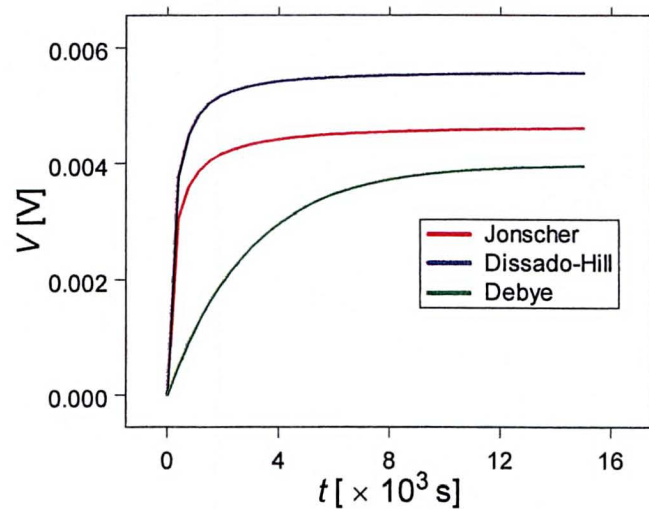


Figura 7.17 - Tensão de recuperação para um material não-polar com condutividade desprezível.

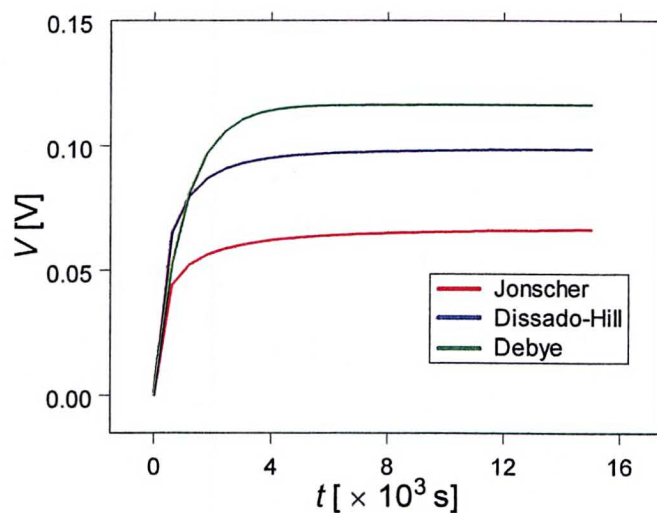


Figura 7.18 - Tensão de recuperação para um material polar com condutividade desprezível.

Na figura 7.17 foram usados os dados do polietileno e na figura 7.18 os do PVC, com $\sigma = 0$ em ambos os casos.

É interessante interpretar estes resultados. A seguir será dada uma explicação com base nos processos que possam ocorrer no interior do dielétrico.

O material pode apresentar um comportamento macroscópico dipolar devido à existência de dipolo permanente em suas moléculas, ou também devido a outros efeitos, já descritos na seção 3.1. Quando as moléculas têm dipolo permanente, geralmente $\varepsilon > \varepsilon_\infty$ e o efeito da relaxação dipolar é bastante notado. Quando as moléculas não apresentam dipolo permanente, em geral $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_\infty$ e o comportamento dipolar se deve unicamente aos demais efeitos enumerados na seção 3.1.

No caso em que $\sigma = 0$, os portadores livres terão dificuldade para se mover por distâncias macroscópicas, permanecendo em suas posições. Por este motivo, os efeitos de despolarização relacionados com processos de condução deixam de ocorrer. A sua contribuição para o campo elétrico macroscópico no dielétrico e para a tensão externa medida será nula. Por sua vez, os efeitos de despolarização que têm origem na orientação de dipolos induzidos e permanentes podem ocorrer, pois não envolvem transferência de cargas internas. Há somente um rearranjo geométrico, porque as cargas já estão ligadas à molécula. Assim, a tensão externa medida segue a variação normal esperada, até cessar a reorientação.

Desta forma é possível explicar porque, num material cujas moléculas não têm dipolo permanente, a tensão de descarga interna permanece praticamente constante e igual ao valor inicial, como mostra a figura 7.15. Por outro lado, nos materiais cujas moléculas têm dipolo permanente, a tensão de descarga interna apresenta uma variação inicial enquanto houver a reorientação destes dipolos e, em seguida, estabiliza-se num valor constante. Este comportamento está ilustrado na figura 7.16.

No problema da recuperação do campo, durante o curto-circuito as cargas dos eletrodos são removidas. Num material com dipolo permanente nas suas moléculas, estes tendem a se orientar aleatoriamente durante o curto-circuito devido ao efeito térmico, assim como as cargas aprisionadas tendem a se deslocar por pequenas distâncias, em relação às suas posições de equilíbrio. Quando o circuito é aberto, as cargas aprisionadas se distribuem, tendendo a voltar para suas posições iniciais, e seus campos elétricos tendem a realinhar os dipolos permanentes. Isto demanda certo tempo, devido à inércia do movimento destes dipolos. Para materiais sem dipolo permanente em suas moléculas, somente as cargas aprisionadas se deslocam tendendo a voltar para suas posições de equilíbrio. O valor máximo atingido pela tensão neste caso é menor que o correspondente para os materiais com dipolo permanente, conforme está mostrado nas figuras 7.17 e 7.18.

7.4 Resultados Obtidos com Base no Modelo Combinado

Os resultados mostrados a seguir foram obtidos com o procedimento numérico descrito na seção 6.3 e com a utilização dos dados da seção 7.2. Todas as curvas estão normalizadas em relação ao seu valor máximo, exceto quando houver indicação de outro valor. Tendo em conta que as equações da seção 6.3 estão na forma adimensional, antes de efetuar os próximos cálculos fez-se a conversão dos dados para a forma adimensional. Após a obtenção dos resultados procedeu-se à transformação inversa, tal que os valores representados nos gráficos estão no SI.

A solução numérica das equações envolve um processo de discretização: o dielétrico é subdividido em N partes. Para todos os cálculos efetuados nesta seção adotou-se $N = 100$ partes. A forma dos resultados permaneceu a mesma quando a subdivisão foi aumentada. Isto justifica-se porque, ao trabalhar com variáveis adimensionais, $0 \leq x \leq 1$ tal que o passo h é igual a 0,01 e o erro na aproximação da derivada espacial é da ordem de 10^{-4} .

Antes de estudar o comportamento dos materiais é conveniente analisar as previsões do modelo combinado para dois casos limites. Para um material que contenha carga espacial, e no qual a polarização responda de forma instantânea, os resultados do modelo combinado devem ser semelhantes àqueles do modelo da carga espacial. Por outro lado, para um material que não contenha carga espacial, mas que apresente polarização com resposta lenta, o modelo combinado deve prever um resultado igual àquele do modelo da polarização. Para testar o modelo combinado com relação a estas afirmações, considera-se um material hipotético no qual a polarização é descrita pelo modelo de Debye, e a carga espacial está distribuída inicialmente em forma de função caixa, conforme a equação (4.22) que está na forma adimensional. Esta escolha é útil porque permite que se trabalhe com dois parâmetros de controle: o tempo de relaxação e a densidade de carga. Variando-se a largura ou o valor máximo da função caixa é possível modificar a quantidade de carga espacial no interior do dielétrico, e variando-se o tempo de relaxação é possível alterar a velocidade da resposta da polarização.

Utilizou-se como exemplo os dados do PVC, com $\sigma = 2,5 \times 10^{-14}$ S/m e $\varepsilon = 3,00$. Na transformação para a forma adimensional considerou-se a mobilidade dos portadores da ordem de 10^{-12} m²/(s·V), conforme a referência [63] e o trabalho de Wintle [35], e adotou-se o valor de 10^{-2} C/m³ para o parâmetro ρ_0 .

Se o tempo de relaxação da polarização tender a zero, deve predominar o comportamento da carga espacial. As figuras 7.19 e 7.20 ilustram as respostas do modelo combinado para este caso. Foi fixado ρ_1 e s_0 . Vê-se que à medida

que $\tau \rightarrow 0$, as curvas tendem para aquela do modelo da carga espacial, calculada conforme a seção 6.2. Embora o circuito esteja aberto para $t > 0$ e o campo aplicado seja nulo, os dipolos ainda estão sujeitos ao campo elétrico da carga espacial.

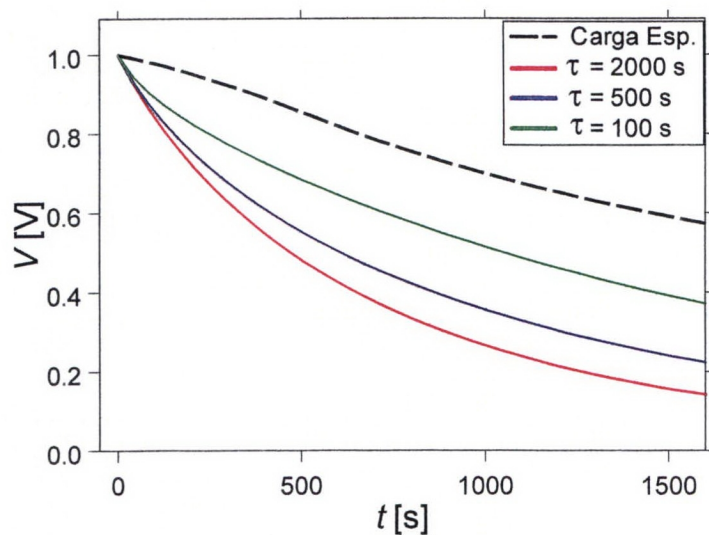


Figura 7.19 - Influência do tempo de relaxação dipolar sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado.

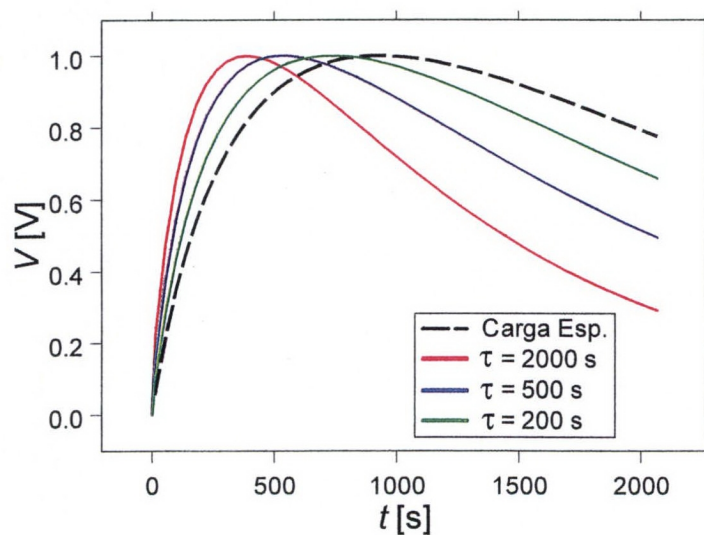


Figura 7.20 - Influência do tempo de relaxação dipolar sobre a tensão de recuperação no modelo combinado.

Se a densidade de carga espacial tender para zero deve predominar o comportamento da polarização elétrica, pois nesta situação o campo elétrico macroscópico no interior do dielétrico é uniforme. Os resultados obtidos com o modelo combinado estão mostrados nas figuras 7.21 e 7.22 para este caso limite. Foi fixado τ e ρ_1 . Observa-se nestes gráficos que à medida que $s_0 \rightarrow 0$ as curvas tendem para aquela do modelo da polarização, calculada conforme a seção 6.1.

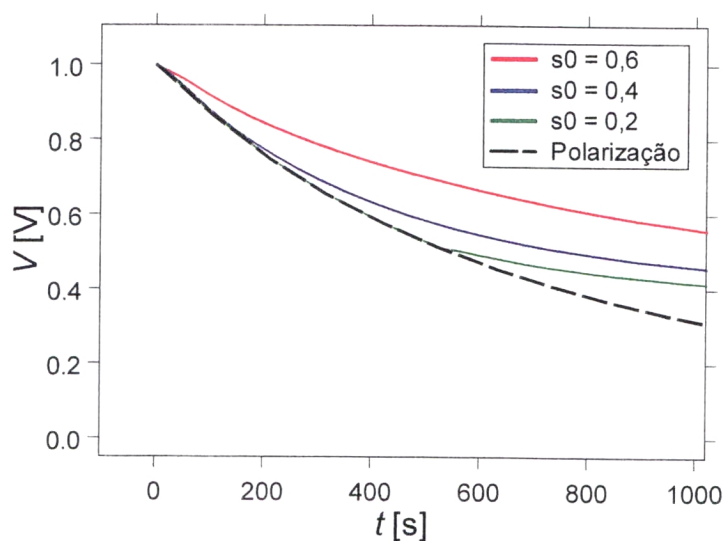


Figura 7.21 - Influência da densidade de carga espacial sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado.

No modelo combinado a condutividade elétrica também exerce uma influência significativa na resposta do material. Para ilustrar esta afirmação considerou-se os dados do polietileno, com $\varepsilon = 2,30$, $\mu = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$ e $\rho_0 = 0,01 \text{ C/m}^3$. Para o problema da descarga interna, aplicou-se a combinação do modelo de relaxação de Dissado-Hill com uma distribuição inicial estacionária de carga espacial. O resultado está mostrado na figura 7.23.

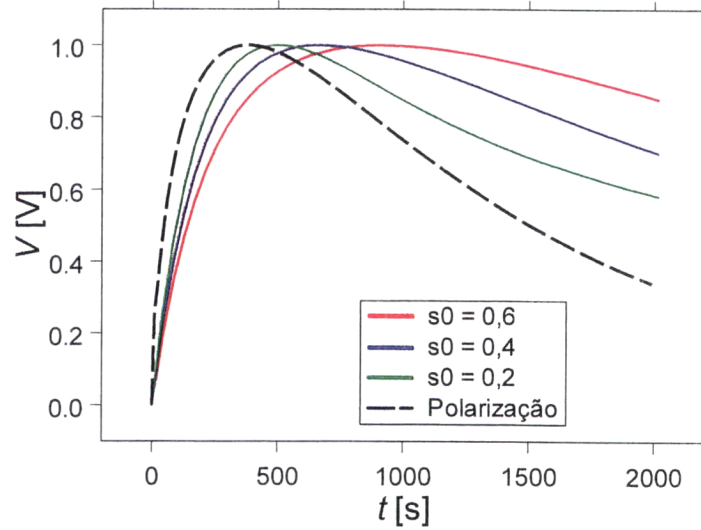


Figura 7.22 - Influência da densidade de carga espacial sobre a tensão de recuperação no modelo combinado.

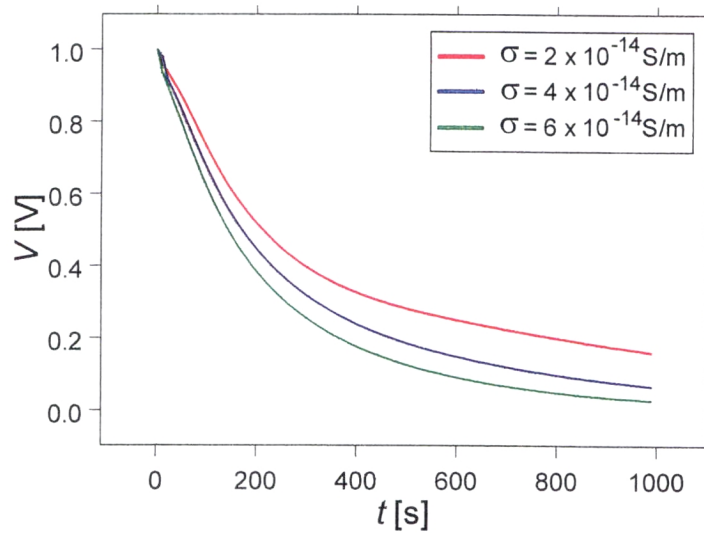


Figura 7.23 - Influência da condutividade sobre a tensão de descarga interna no modelo combinado.

Para o problema da tensão de recuperação considerou-se também a função resposta de Dissado-Hill, mas assumiu-se uma distribuição inicial de carga

em forma de função caixa. O resultado está na figura 7.24, com as curvas normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho.

A partir das figuras 7.23 e 7.24 conclui-se que ao aumentar a condutividade as tensões decaem mais rapidamente, e o valor máximo atingido pela tensão de recuperação é menor.

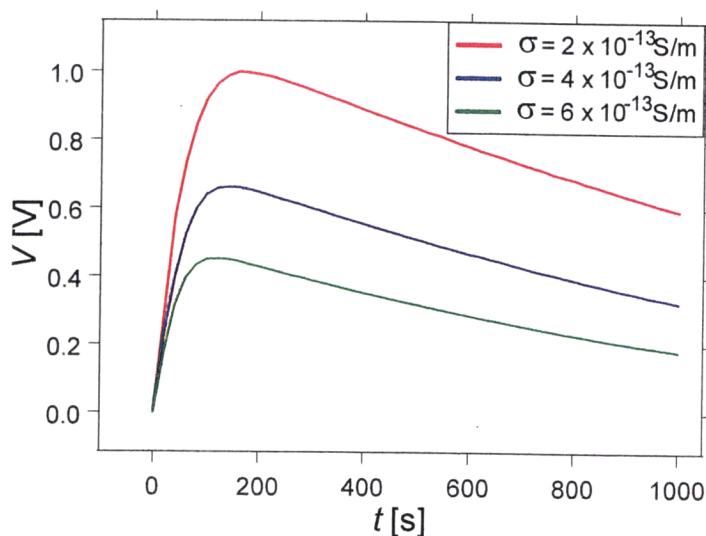


Figura 7.24 - Influência da condutividade sobre a tensão de recuperação no modelo combinado. As curvas estão normalizadas em relação ao valor máximo da curva em vermelho.

A análise dos resultados foi feita separadamente para os problemas da descarga interna e da recuperação do campo.

Inicialmente aplicaram-se os diferentes modelos de relaxação dipolar para cada material. Posteriormente fez-se uma comparação, para cada material, dos resultados obtidos com os modelos da polarização, da carga espacial e combinado.

Para adimensionalizar as grandezas utilizou-se $\mu = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$ [63, 35] e atribuiu-se os seguintes valores para o parâmetro ρ_0 : 0,01 C/m³ para o polietileno e o PVC; 1 C/m³ para a mica; 10 C/m³ para o papel impregnado.

No problema da descarga interna considerou-se, por hipótese, que o dielétrico já tivesse atingido o estado estacionário, conforme discutido na seção 6.4. Esta hipótese também é utilizada por Wintle [35]. Em cada caso a condutividade foi ajustada, dentro da faixa de valores tabelados, procurando-se uma melhor correspondência entre as curvas teóricas e experimentais.

a) Polietileno:

Para a tensão de descarga interna foi utilizada a amostra Polietileno-1, considerando-se $\varepsilon = 2,30$ e a condutividade igual a $4,30 \times 10^{-14}$ S/m. Os resultados estão apresentados na figura 7.25, na qual as curvas estão praticamente superpostas.

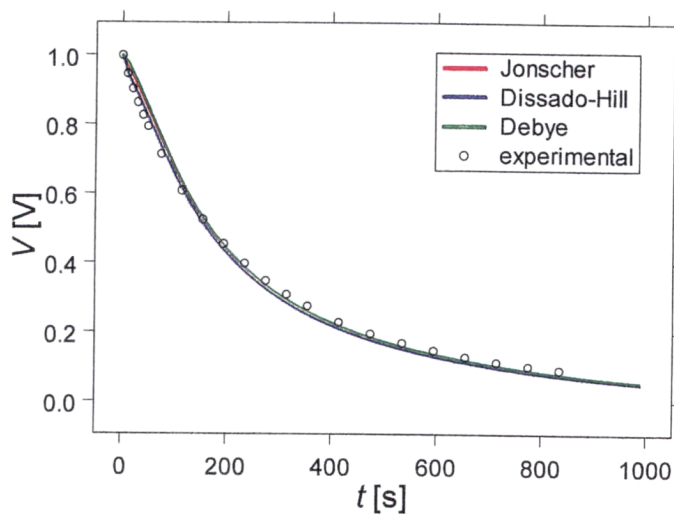


Figura 7.25 - Tensão de descarga interna no polietileno segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação.

b) PVC:

Para a descarga interna foi usada a amostra PVC-1, considerando-se $\varepsilon = 3,00$ e a condutividade igual a $2,00 \times 10^{-14}$ S/m. A figura 7.26 mostra os resultados. Para este material as curvas também resultaram superpostas.

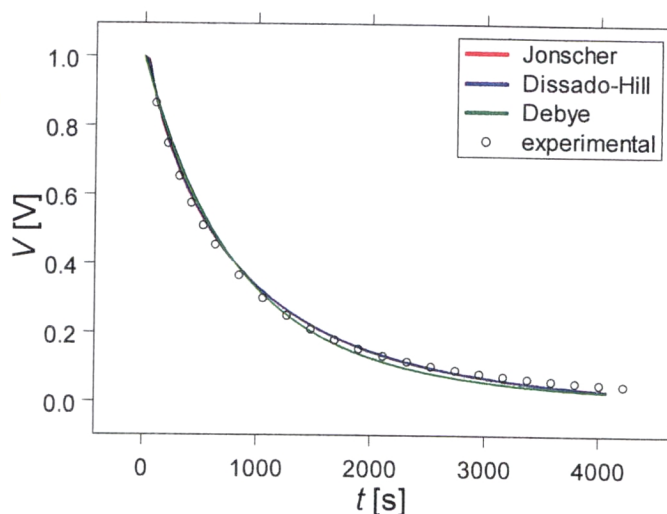


Figura 7.26 - Tensão de descarga interna no PVC segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação.

c) Mica:

Foi utilizada a amostra Mica-1, considerando-se a condutividade igual a $3,00 \times 10^{-14}$ S/m. De acordo com a figura 7.27, vê-se que os resultados teóricos e experimental são bastante diferentes. Isto não significa que o modelo combinado é inadequado. A causa está na condição inicial utilizada, baseada na distribuição de estado estacionário. Possivelmente a distribuição de carga espacial não atingiu o estado estacionário durante o período de polarização da amostra. Deve ser observado que esta amostra foi polarizada durante um período maior e com um campo mais intenso que as demais amostras, conforme a tabela 7.6. Comparando-se com os dois casos anteriores, os quais envolveram materiais poliméricos, conclui-se que o estabelecimento da carga espacial na mica ocorre de forma muito mais lenta do que naqueles materiais. Uma possível explicação está na sua estrutura cristalina. Neste caso prevalece o comportamento dipolar, cujo resultado está na figura 7.9. Este fato ficará evidenciado também na análise da tensão de recuperação.

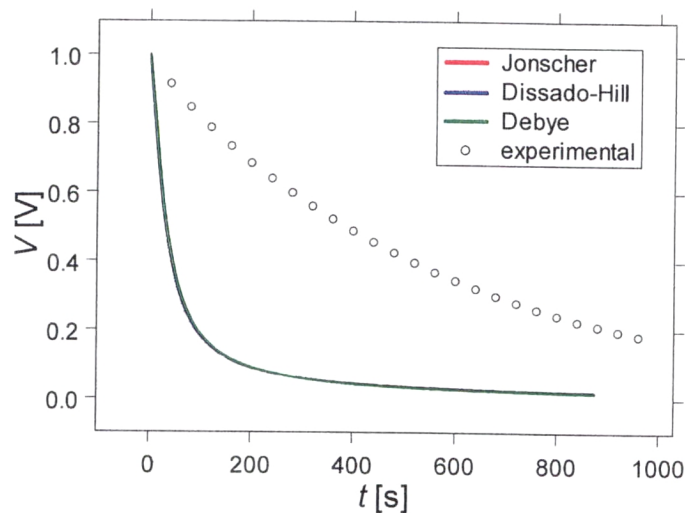


Figura 7.27 - Tensão de descarga interna para a mica segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação. As três curvas resultaram superpostas.

Os resultados obtidos para o papel impregnado apresentaram um comportamento semelhante ao da mica.

No problema da tensão de recuperação a carga espacial próxima aos eletrodos, e inicialmente em estado estacionário, tende a se neutralizar durante o curto-circuito assumindo uma nova configuração. Utilizou-se como uma aproximação a distribuição inicial de carga em forma de função “caixa”. Foram testados diferentes valores para s_0 e ρ_1 até obter-se uma melhor concordância entre os resultados teóricos e experimentais. Isto ocorre para valores bem definidos de s_0 e ρ_1 , conforme foi observado com o experimento numérico.

A seguir são mostrados os resultados para cada material.

a) Polietileno:

Foi considerada a amostra Polietileno-2 com condutividade $6,00 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $s_0 = 0,95 d$ e $\rho_1 = 0,01 \text{ C/m}^3$. Os resultados estão mostrados na figura 7.28.

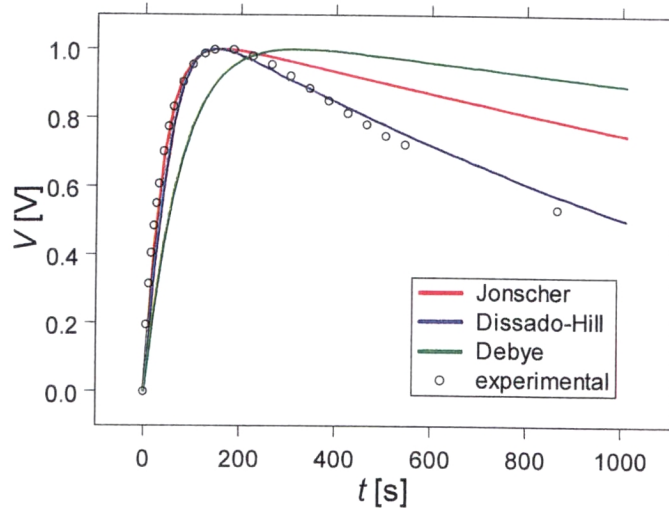


Figura 7.28 - Tensão de recuperação para o polietileno segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação.

O resultado obtido com a função de Dissado-Hill é satisfatório, inclusive para instantes maiores do que aqueles da figura 7.6, onde foi considerada só a polarização dipolar.

b) PVC:

Foi utilizada a amostra PVC-2 com condutividade de $1,80 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $s_0 = 0,95 d$ e $\rho_1 = 0,01 \text{ C/m}^3$. Também para este material a função de Dissado-Hill produziu um resultado muito próximo do experimental, conforme apresentado na figura 7.29.

c) Mica:

Considerou-se a amostra Mica-2 com condutividade $3,00 \times 10^{-14} \text{ S/m}$, $s_0 = 0,05 d$ e $\rho_1 = 1 \text{ C/m}^3$. A região com carga espacial é mais estreita do que nos outros materiais estudados. Isto sugere que que na mica há uma maior dificuldade para a injeção de cargas, possivelmente devido ao tipo do material e dos eletrodos. Os resultados estão na figura 7.30.

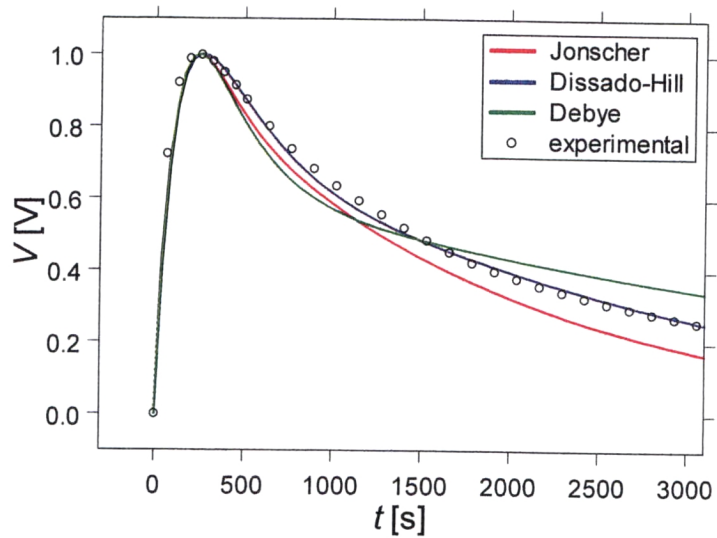


Figura 7.29 - Tensão de recuperação para o PVC segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação.

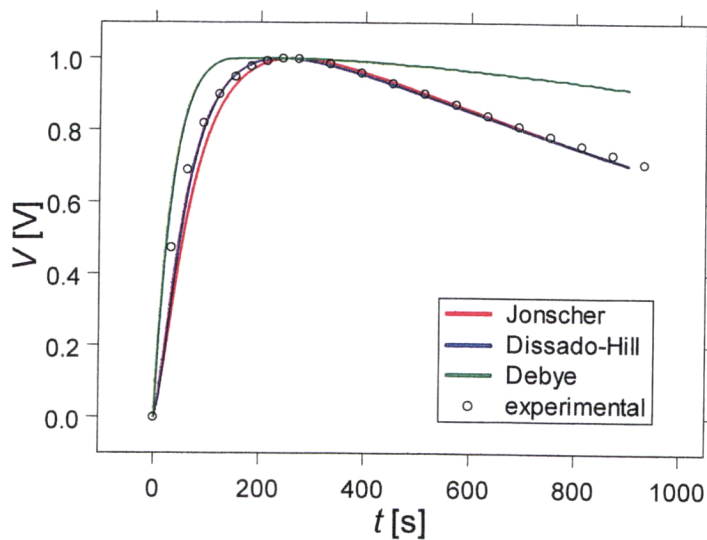


Figura 7.30 - Tensão de recuperação para a mica segundo o modelo combinado, para diferentes funções de relaxação.

7.5 Comparação entre os Resultados Obtidos com os Modelos da Polarização, da Carga Espacial e Combinado

Na seção 7.3, as tensões de descarga interna e de recuperação foram calculadas com o modelo da polarização, considerando-se três modelos de relaxação. Com os gráficos das figuras 7.5 a 7.12 foi possível comparar, para cada material, os resultados obtidos com as diferentes funções de relaxação.

Na seção 7.4 esta análise foi repetida aplicando-se o modelo combinado, conforme mostrado nas figuras 7.25 a 7.30.

Nesta seção estão reunidos alguns dos resultados das seções 7.3 e 7.4, com o objetivo de representar num mesmo gráfico os resultados obtidos a partir dos modelos da polarização, da carga espacial e combinado, permitindo compará-los entre si. A análise é feita separadamente para cada material, nos problemas da tensão de descarga interna e da tensão de recuperação. No modelo da polarização foi escolhida, em cada caso, a função de relaxação cujos resultados melhor se aproximaram dos valores experimentais. O mesmo procedimento foi utilizado para selecionar a curva representativa do modelo combinado. Com base nos gráficos das seções 7.3 e 7.4, foi escolhida a função de relaxação de Dissado-Hill para todos os casos. Os resultados do modelo da carga espacial foram calculados com o procedimento descrito na seção 6.2, utilizando-se as mesmas condições iniciais aplicadas no modelo combinado.

Obteve-se os seguintes resultados para cada material:

a) Polietileno:

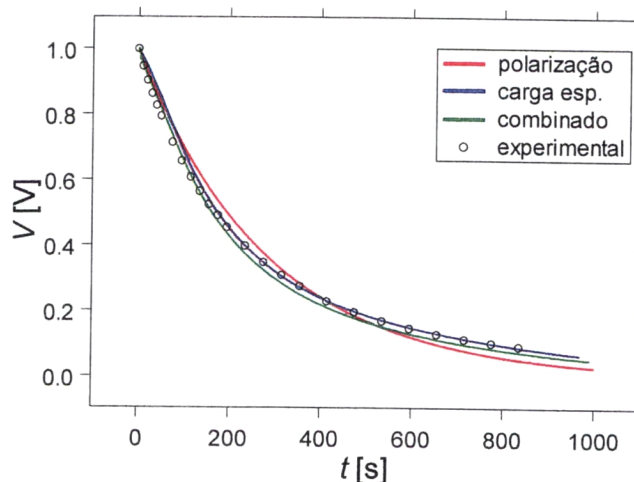


Figura 7.31 - Tensão de descarga interna para o polietileno, calculada com os diferentes modelos.

b) PVC:

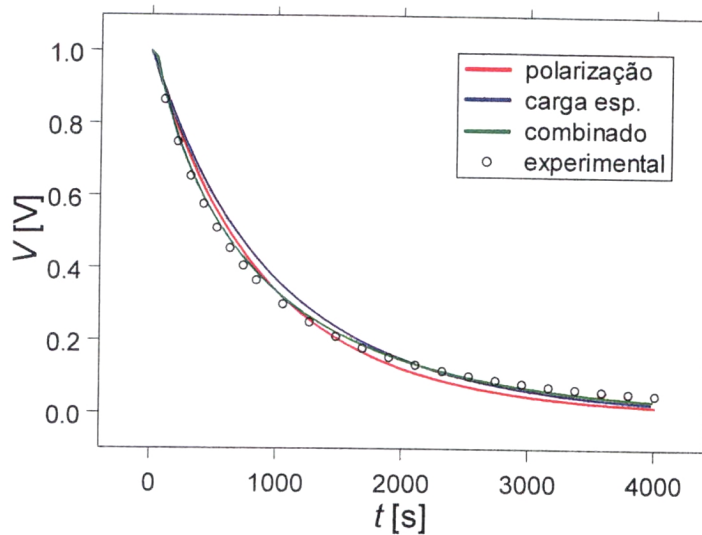


Figura 7.32 - Tensão de descarga interna para o PVC, calculada com os diferentes modelos.

c) Mica:

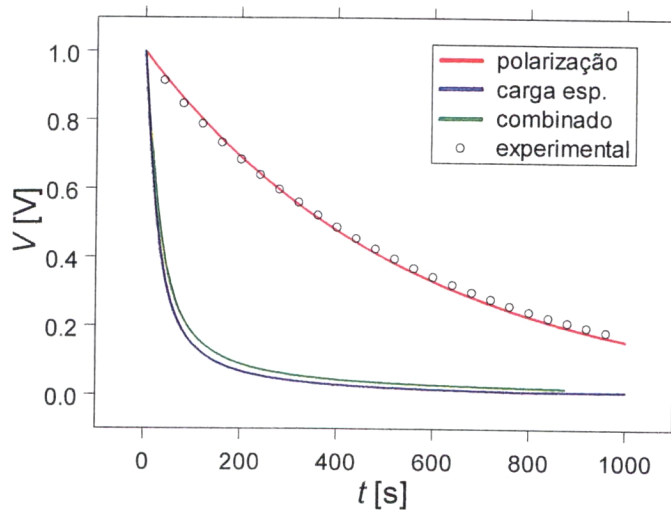


Figura 7.33 - Tensão de descarga interna para a mica, calculada com os diferentes modelos.

Observa-se nas figuras 7.31 e 7.32 que os três modelos descrevem satisfatoriamente o comportamento da tensão de descarga interna no polietileno e no PVC; as curvas dadas pelos modelos da carga espacial e combinado estão mais próximas dos valores experimentais. O resultado obtido para a mica, mostrado na figura 7.33, evidencia a predominância do fenômeno da polarização, conforme discutido na seção 7.4.

Para o problema da tensão de recuperação, observa-se que os resultados obtidos com o modelo combinado concordam com os valores experimentais dentro de intervalos de tempo maiores, conforme está ilustrado nas figuras 7.34 a 7.36.

a) Polietileno:

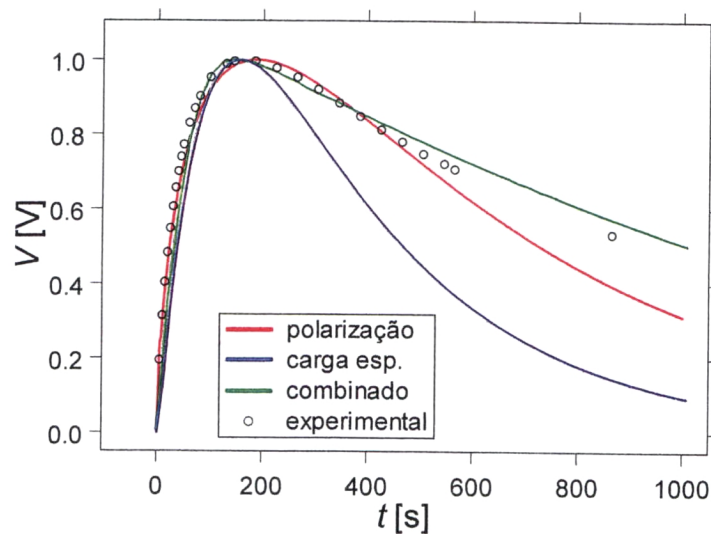


Figura 7.34 - Tensão de recuperação para o polietileno, calculada com os diferentes modelos.

b) PVC:

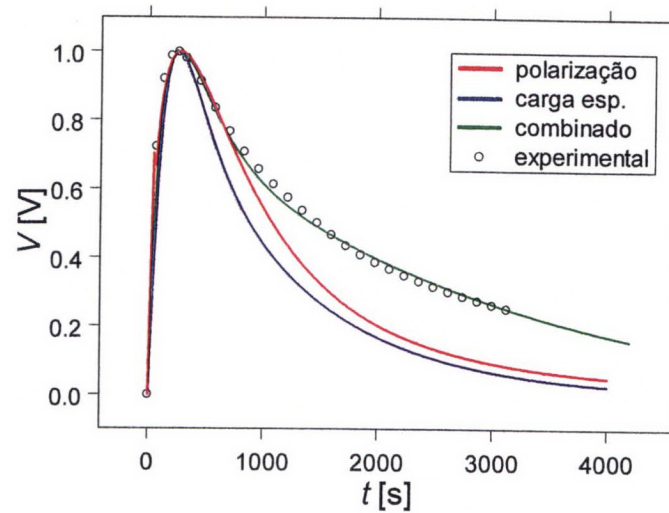


Figura 7.35 - Tensão de recuperação para o PVC, calculada com os diferentes modelos.

c) Mica:

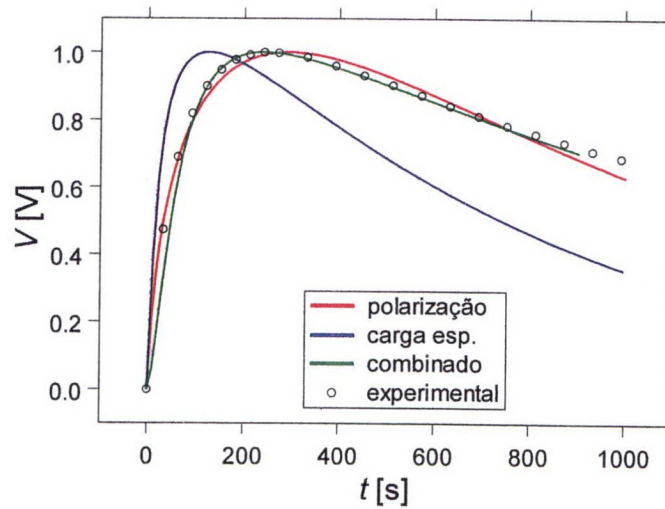


Figura 7.36 - Tensão de recuperação para a mica, calculada com os diferentes modelos.

Conclusões

Com base no desenvolvimento teórico e nos resultados apresentados na seção anterior, é possível concluir que:

O modelo de Dissado-Hill para a relaxação dielétrica apresentou bons resultados para todos os tipos de materiais, amorfos e cristalinos, polares e não polares. Já o modelo de Jonscher nem sempre pôde ser aplicado à mica. Para muitas amostras deste material o parâmetro m ajustado resultou negativo, produzindo resultados teóricos absurdos.

O modelo de Debye apresentou desvios quando aplicado a sólidos. Um dos motivos para isto são as hipóteses usadas na sua formulação.

A condutividade tem grande influência na forma das curvas da tensão de descarga interna e de recuperação, independente do modelo adotado.

Os modelos de Jonscher e de Dissado-Hill apresentaram resultados próximos entre si, para os fenômenos e condições experimentais usadas neste trabalho.

O modelo combinado pode ser reduzido adequadamente aos dois casos particulares: modelo da polarização e modelo da carga espacial.

No problema da descarga interna, o modelo combinado mostrou que a distribuição inicial de carga espacial na forma estacionária pode ser uma boa hipótese. Para o problema da recuperação do campo, ele evidenciou que, devido ao curto-circuito, a carga espacial se redistribui e que a polarização lenta passa a ser o fenômeno mais significativo.

No problema da descarga interna em materiais poliméricos, o modelo combinado forneceu resultados melhores do que o modelo da polarização.

Para o PVC, os resultados da tensão de recuperação obtidos com o modelo da polarização não foram satisfatórios. Isto foi verificado para todos os modelos de relaxação estudados. Uma justificativa para este fato pode ser a propriedade piroelétrica deste material.

Na mica, os efeitos da carga espacial são praticamente desprezíveis, predominando o comportamento da polarização. Isto está relacionado com sua estrutura microscópica.

Enumera-se a seguir algumas contribuições deste trabalho:

Comparação entre os resultados fornecidos pelos modelos de Jonscher e de Dissado-Hill.

Normalização da função de Dissado-Hill no domínio do tempo usando-se um procedimento direto.

Comparação entre resultados previstos por diferentes modelos de relaxação para as tensões de descarga interna e de recuperação.

Formulação de um modelo combinado que permite utilizar qualquer função resposta e qualquer distribuição inicial de carga espacial.

Desenvolvimento de um procedimento numérico para resolver o sistema de equações acopladas.

O formalismo desenvolvido permite simular experimentos, com aplicação no estudo do envelhecimento de dielétricos em capacitores, cabos e transformadores.

Verificação da aplicabilidade de alguns modelos de relaxação a diferentes tipos de materiais.

Estudo numérico do comportamento de materiais quando a condutividade tende a zero e apresentação de uma explicação para estes resultados.

Sugestões para Trabalhos Futuros

- 1) Implementar um critério estatístico para medir a aproximação entre as curvas teóricas das tensões, obtidas pelos diferentes modelos, e as curvas experimentais.
- 2) Estender os cálculos para outros modelos de relaxação dielétrica, por exemplo: Weron, Cole-Cole, Cole-Davidson, Havriliak-Negami, Kohlrausch-Williams-Watts e Fröhlich.
- 3) Aplicar o modelo combinado para descrever a evolução da polarização e do campo elétrico nos fenômenos que ocorrem em circuito fechado.
- 4) Aplicar, no modelo combinado, outras formas para a distribuição inicial de carga espacial. Se possível, usar distribuições determinadas experimentalmente.
- 5) Considerar com mais detalhes os efeitos do contacto entre o dielétrico e os eletrodos.
- 6) Levar em conta o efeito das armadilhas sobre a carga espacial, incluindo a equação que governa a cinética de aprisionamento e liberação de portadores.
- 7) Estabelecer um procedimento para determinação da condutividade e dos parâmetros de um material, com base na simulação numérica e na comparação com medidas da tensão de recuperação.
- 8) Estender o tratamento para casos em que há injeção de portadores nos dois eletrodos.
- 9) Usar a expressão deduzida para $A_D(m, n, \omega_p)$, na função resposta de Dissado-Hill, para avaliar o comportamento de grandezas microscópicas a partir de grandezas medidas no circuito externo.

Apêndice 1

Distribuição da Carga Espacial no Estado Estacionário

O estudo apresentado neste apêndice não considera a difusão dos portadores nem a presença de armadilhas, e supõe que os contatos são ôhmicos.

Considera-se um material dielétrico colocado entre dois eletrodos planos e sujeito à ação de um campo elétrico externo constante. Após um intervalo de tempo muito grande, o sistema atinge o estado estacionário. Neste estado as grandezas não mais variam no tempo, portanto, a única variável independente utilizada é a posição x . Assim, nas equações que governam o fluxo de portadores, os termos que contêm derivadas temporais serão nulos.

A distribuição de carga espacial e o campo elétrico no estado estacionário são importantes para estabelecer as condições iniciais para os problemas da tensão de descarga interna e de recuperação.

Para o caso particular em que a condutividade do dielétrico é desprezada, o problema tem solução analítica exata. A densidade de corrente total J é expressa como:

$$J = \mu \rho(x) E(x) \quad (\text{A1.1})$$

onde J é constante e $\rho(x)$ é a densidade de carga espacial livre. Considera-se também a lei de Gauss:

$$\varepsilon \frac{dE(x)}{dx} = \rho(x) \quad . \quad (\text{A1.2})$$

Aplicando-se a equação (A1.1) na equação (A1.2) obtém-se a equação diferencial para o campo elétrico:

$$E(x) \frac{dE(x)}{dx} = \frac{J}{\mu \varepsilon} \quad (\text{A1.3})$$

cuja solução é:

$$E(x) = \sqrt{\frac{2J}{\mu \varepsilon}} \sqrt{x} \quad . \quad (\text{A1.4})$$

Na solução da equação (A1.3) foi usada a condição de contorno $E(0) = 0$, que é necessária para que a corrente injetada seja finita, já que a densidade de portadores em $x = 0$ é suposta infinita [48].

A densidade de carga é dada por:

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\epsilon J}{2\mu}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad . \quad (\text{A1.5})$$

A densidade de corrente no estado estacionário J ainda é uma incógnita, entretanto, pode ser calculada a partir da diferença de potencial aplicada aos eletrodos V_{apl} . Este valor é medido em cada experimento. Considerando a expressão para o potencial

$$V(x) = \int_0^x E(x') dx'$$

e sabendo-se que $V(d) = V_{apl}$, resulta:

$$J = \frac{9}{8} \frac{\mu \epsilon V_{apl}^2}{d^3} \quad . \quad (\text{A1.6})$$

Esta relação é conhecida como lei do quadrado sem armadilhas ou lei do quadrado de Mott-Gurney. O termo “lei do quadrado” se deve à relação $J \propto V_{apl}^2$ mostrada na equação (A1.6). Com as equações (A1.4), (A1.5) e (A1.6) é possível determinar $E(x)$ e $\rho(x)$.

Nas figuras A1.1 e A1.2 são mostradas as curvas representativas destas soluções.

Quando a condutividade do dielétrico é levada em conta, a análise é mais trabalhosa. O procedimento descrito a seguir está baseado nos trabalhos de Lampert e Mark [27, 48].

A densidade de corrente total J é escrita como:

$$J = \mu \rho(x) E(x) + \sigma E(x) \quad (\text{A1.7})$$

na qual o último termo representa a contribuição dos portadores livres intrínsecos ao material. Estes portadores contribuem para a condução, porém, não contribuem para a carga espacial porque não representam um excesso de cargas.

Combinando as equações (A1.7) e (A1.2) obtém-se a equação diferencial para o campo elétrico:

$$\frac{\mu \epsilon}{\sigma} \frac{dE(x)}{dx} = \frac{J}{\sigma E(x)} - 1 \quad . \quad (\text{A1.8})$$

Fazendo-se mudanças de variáveis, a equação (A1.8) fica numa forma mais simples e adimensional. Como esta transformação não corresponde àquela dos capítulos 4 a 7, serão usados outros símbolos para evitar confusão.

Definem-se as variáveis adimensionais:

$$u = \frac{\sigma}{J} E(x) \quad (\text{A1.9})$$

$$w = \frac{\sigma^2}{\mu \varepsilon J} x \quad (\text{A1.10})$$

$$v = \frac{\sigma^3}{\mu \varepsilon J^2} V(x) \quad (\text{A1.11})$$

onde u , w e v são transformações para o campo elétrico, a posição e o potencial, respectivamente. A variável adimensional u está relacionada com a densidade de carga $\rho(x)$ através de:

$$u = \frac{\sigma}{\mu \rho(x) + \sigma} \quad (\text{A1.12})$$

A equação diferencial (A1.8) pode ser escrita como:

$$\frac{du}{dw} = \frac{1}{u} - 1 \quad (\text{A1.13})$$

cuja solução é:

$$w = -u - \ell n(1 - u) \quad (\text{A1.14})$$

onde foi usada a condição de contorno $u(0) = 0$, que equivale a $E(0) = 0$.

O potencial é dado por:

$$v = \int_0^w u dw' \quad (\text{A1.15})$$

Obtendo dw da equação (A1.14), aplicando na equação (A1.15) e integrando, tem-se:

$$v = -\frac{u^2}{2} - u - \ell n(1 - u) \quad (\text{A1.16})$$

É necessário ainda especificar a condição de contorno no eletrodo em $x = d$. Para indicar o valor das variáveis adimensionais sobre esta superfície será usada a notação u_d , w_d e v_d .

Da equação (A1.11) vem,

$$V_{apl} = \frac{\mu \varepsilon J^2}{\sigma^3} v_d$$

e da equação (A1.10),

$$J = \frac{\sigma^2 d}{\mu \varepsilon} \frac{1}{w_d} \quad (\text{A1.17})$$

resultando:

$$V_{apl} = \frac{\sigma d^2}{\mu \varepsilon} \frac{v_d}{w_d^2} . \quad (\text{A1.18})$$

Para obter uma expressão analítica para o campo elétrico em função da posição, seria necessário explicitar u em função de w na equação (A1.14). Isto só pode ser feito para duas situações limites: $u_d \ll 1$ ($w_d \rightarrow 0$) que é o regime da lei do quadrado sem armadilhas, e $u_d \cong 1$ ($w_d \rightarrow \infty$) que é o regime da lei de Ohm; neste último caso é possível mostrar que $J \propto V_{apl}$. As relações indicadas entre parênteses são obtidas com a equação (A1.14). Para outras situações devem ser empregados métodos numéricos.

Substituindo as equações (A1.14) e (A1.16) na equação (A1.17) obtém-se:

$$\frac{\mu \varepsilon}{\sigma d^2} V_{apl} = \frac{-\frac{u_d^2}{2} - u_d - \ln(1 - u_d)}{[u_d + \ln(1 - u_d)]^2} . \quad (\text{A1.19})$$

O membro esquerdo envolve dados conhecidos do problema e o membro direito a incógnita u_d , que está relacionada com o campo elétrico no eletrodo em $x = d$.

É conveniente explorar as equações (A1.14) e (A1.19) antes de resolvê-las numericamente. A variável w_d está no domínio $0 < w_d < \infty$. Estes extremos aplicados à equação (A1.14) implicam que $0 < u_d < 1$. O mesmo comportamento é verificado para um par genérico w e u . Isto significa que as raízes das equações devem ser pesquisadas no intervalo $0 < (u, u_d) < 1$. Uma análise gráfica do membro direito da equação (A1.19) mostra que existe apenas uma raiz neste intervalo, para o membro esquerdo real. A mesma conclusão é obtida para a equação (A1.14). O cálculo das raízes geralmente é feito por um processo iterativo, que necessita de um valor de partida para as iterações. As conclusões mencionadas permitem que se atribua um valor qualquer no intervalo $0 < u < 1$ para o valor de partida. É necessário que se imponha uma precisão alta para a raiz, pois em certos casos a função de u ou u_d apresenta uma inclinação muito pequena próximo à raiz. A precisão usada neste trabalho foi da ordem de 10^{-8} .

A equação (A1.19) é resolvida numericamente, procurando-se o valor de u_d que a satisfaz. Com este resultado calcula-se w_d pela equação (A1.14). A densidade de corrente J pode então ser obtida com a equação (A1.17).

A variável w pode assumir valores no intervalo $0 \leq w \leq w_d$. Resolve-se a equação (A1.14) para diferentes valores de w . Obtém-se uma tabela com a função $u(w)$ na forma adimensional. Finalmente, com as equações (A1.9), (A1.10) e (A1.12) determina-se $E(x)$ e $\rho(x)$.

Para analisar a influência da condutividade, considerou-se uma amostra de polietileno com os seguintes dados: $d = 60 \mu\text{m}$, $\mu = 10^{-12} \text{ m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$ e $\varepsilon = 2,25 \varepsilon_0$, numa situação hipotética em que a condutividade tivesse diferentes valores. Durante a polarização da amostra foi aplicada uma tensão $V_{apl} = 40 \text{ V}$. A figura A1.1 mostra a distribuição de carga espacial no interior do dielétrico no estado estacionário, para diferentes valores da condutividade. Quando σ aumenta, observa-se um comportamento intermediário entre a lei do quadrado e a lei de Ohm. A curva representada com o símbolo + define o regime da lei do quadrado, e foi obtida com o modelo que não considera a condutividade. Na figura A1.2 é feita uma análise semelhante para o campo elétrico.

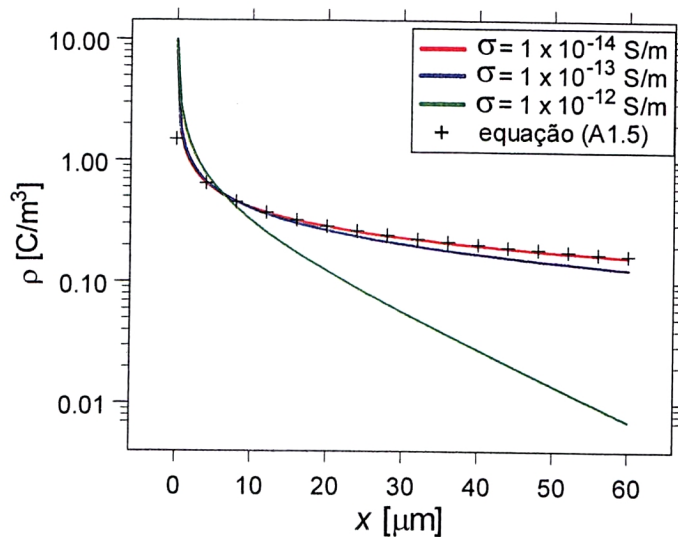


Figura A1.1 - Densidade de carga espacial no dielétrico no estado estacionário, para diferentes valores da condutividade. A curva representada por + indica o regime da lei do quadrado, e refere-se ao modelo em que a condutividade é desprezada.

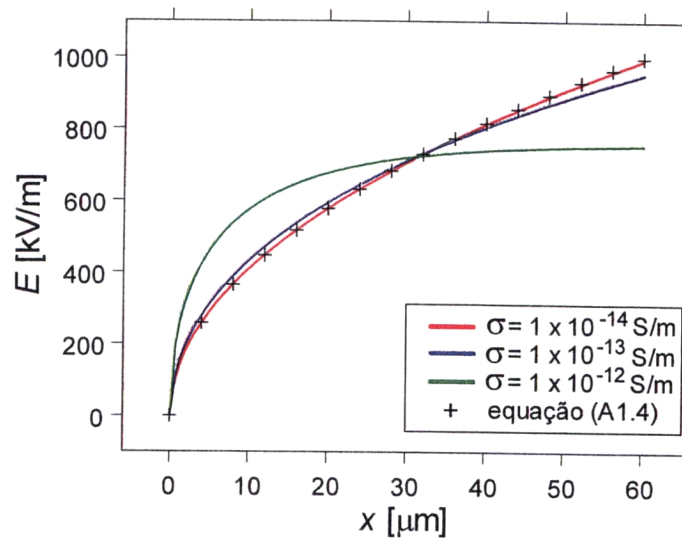


Figura A1.2 - Campo elétrico no dielétrico no estado estacionário, para diferentes condutividades. A curva representada por + indica o regime da lei do quadrado, e refere-se ao modelo em que a condutividade é desprezada.

O campo elétrico e a densidade de carga espacial dependem da condutividade, da mobilidade, da permissividade, da espessura da amostra e da tensão aplicada. Com exceção da tensão aplicada, os demais parâmetros são constantes para uma dada amostra. Assim, a aplicação de diferentes tensões durante a polarização deve produzir diferentes distribuições de carga no estado estacionário. As figuras A1.3 e A1.4 mostram os resultados para uma amostra de polietileno. A condutividade considerada foi 5×10^{-14} S/m. Observa-se que à medida que a tensão aplicada aumenta, o comportamento tende para o regime da lei do quadrado.

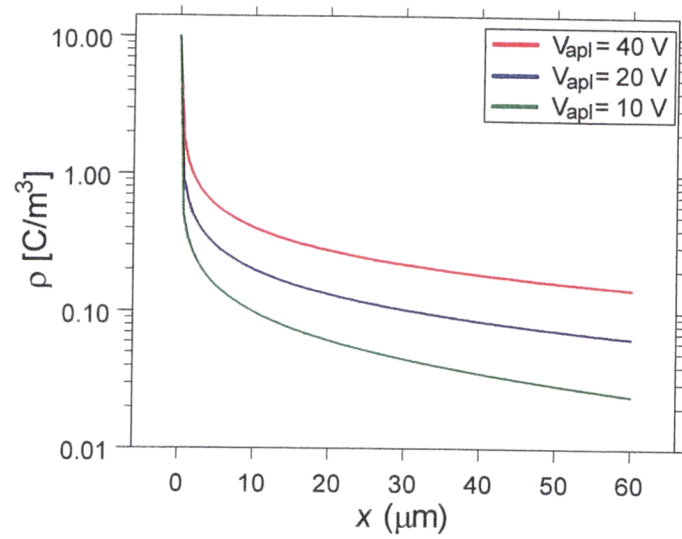


Figura A1.3 - Densidade de carga espacial no dielétrico no estado estacionário, para diferentes tensões aplicadas.

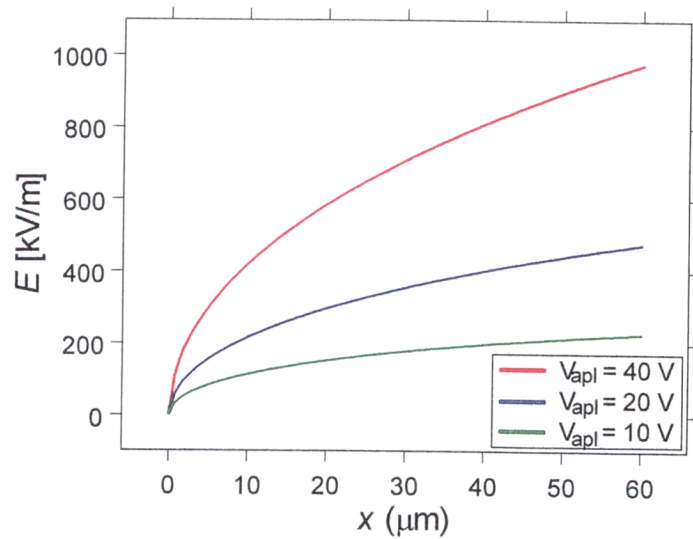


Figura A1.4 - Campo elétrico no dielétrico no estado estacionário, para diferentes tensões aplicadas.

Apêndice 2

O Método Implícito para Solução de Equações Diferenciais Parciais

O método implícito se caracteriza por fornecer simultaneamente a solução de todas as incógnitas. Este método em geral é numericamente estável.

Para apresentar o método implícito do tipo “completamente regressivo no tempo” é interessante usar uma situação prática. Iremos considerar o problema da carga espacial num dielétrico sem condutividade intrínseca.

Conforme o capítulo 4, o campo elétrico deve satisfazer a equação:

$$E(x, t) \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = 0 \quad . \quad (\text{A2.1})$$

As variáveis x e t são discretizadas e a solução da equação é obtida nos pontos x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) e nos instantes t_j ($j = 1, 2, \dots$). Usa-se a notação simplificada:

$$E(x_i, t_j) = e_{i,j}$$

e considera-se h como o comprimento da subdivisão no eixo x , e k o intervalo de tempo entre os instantes em que a solução é avaliada. A figura A2.1 ilustra isto em forma de diagrama. No método implícito não é necessário que h e k satisfaçam uma condição para garantir a estabilidade da solução.

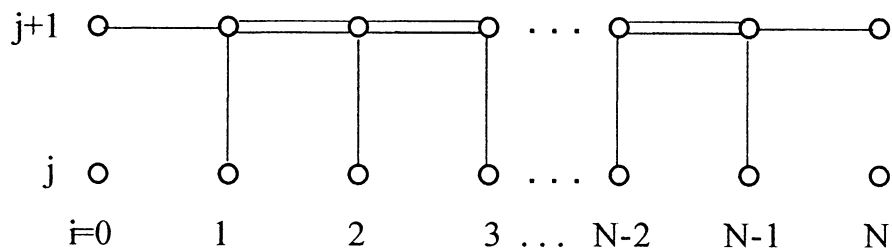


Figura A2.1 - Variáveis x_i e t_j na forma discretizada.

Supõe-se conhecidos os valores do campo elétrico no instante t_j e tem-se como incógnitas seus valores no instante t_{j+1} .

No método implícito completamente regressivo no tempo, utilizado neste trabalho, a derivada espacial no ponto x_i é substituída por uma aproximação de diferenças centrais no instante t_{j+1} :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{e_{i+1, j+1} - e_{i-1, j+1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{A2.2})$$

e a derivada temporal no ponto x_i pela aproximação de diferenças progressivas:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = \frac{e_{i, j+1} - e_{i, j}}{k} + \mathcal{O}(k) . \quad (\text{A2.3})$$

Substituindo as equações (A2.2) e (A2.3) na equação (A2.1) obtém-se uma equação conhecida como “equação de diferenças”. Usando uma notação simplificada resulta:

$$e_i \left[\frac{k}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) + 1 \right] = \bar{e}_i \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (\text{A2.4})$$

onde o símbolo \bar{e} indica o campo elétrico já calculado no instante t_j e o símbolo e indica as incógnitas para o instante t_{j+1} .

A aproximação por diferenças centrais para a derivada espacial não é aplicável para pontos sobre as fronteiras. Por exemplo, ao aplicar a equação (A2.4) para $i = 0$ seria necessário considerar o ponto com índice $i = -1$, o qual não existe na subdivisão adotada. Uma situação análoga ocorre para $i = N$. Então, para pontos em $x = 0$ e $x = d$ deve ser usada outra forma de aproximação para $\frac{\partial E}{\partial x}$. Na seção 6.2 são analisadas algumas alternativas. As equações para estes pontos são representadas aqui de forma genérica por:

$$f_0(e_0, e_1, \dots, e_N, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N) = 0$$

e

$$f_N(e_0, e_1, \dots, e_N, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N) = 0$$

onde f_0 e f_N são funções a ser especificadas.

Usando estas equações e escrevendo a equação (A2.4) para cada ponto

x_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), tem-se o conjunto:

$$\begin{aligned}
 f_0(e_0, e_1, \dots, e_N, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N) &= 0 & (A2.5) \\
 e_1 \left[\frac{k}{2h} (e_2 - e_0) + 1 \right] - \bar{e}_1 &= 0 \\
 e_2 \left[\frac{k}{2h} (e_3 - e_1) + 1 \right] - \bar{e}_2 &= 0 \\
 &\vdots \\
 e_{N-1} \left[\frac{k}{2h} (e_N - e_{N-2}) + 1 \right] - \bar{e}_{N-1} &= 0 \\
 f_N(e_0, e_1, \dots, e_N, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N) &= 0
 \end{aligned}$$

que forma um sistema de N equações não-lineares com N incógnitas, o qual pode ser resolvido por diferentes técnicas. Com a sua solução obtém-se todo o conjunto das incógnitas $\{e_0, e_1, \dots, e_N\}$. Uma sugestão para a solução é o método numérico de Newton-Raphson descrito no apêndice 3.

Para outros problemas que sejam de natureza linear, as equações (A2.5) ficam reduzidas a um sistema de equações algébricas lineares.

Apêndice 3

O Método de Newton-Raphson para Sistemas de Equações Não-Lineares

Antes de tratar de sistemas de equações, é interessante analisar o caso de uma única equação com uma incógnita. Considera-se uma variável independente x e uma função não-linear $f(x)$.

Deseja-se resolver a equação:

$$f(x) = 0 \quad (\text{A3.1})$$

ou seja, determinar as raízes de $f(x)$.

O método de Newton-Raphson exige que se conheça a expressão de $f(x)$ e de sua derivada $f'(x)$, e também um valor de partida x_0 para o processo iterativo.

Na figura A3.1 é dada uma interpretação geométrica. A função $f(x)$ está representada em vermelho. Extende-se a reta tangente que passa pelo ponto 1 até que ela cruze o eixo Ox ; a coordenada x_1 desta intersecção será uma nova aproximação para a solução; avalia-se a derivada $f'(x)$ neste ponto; estende-se a reta tangente que passa pelo ponto 2 até cruzar o eixo Ox ; e assim por diante, até atingir-se as vizinhanças da raiz.

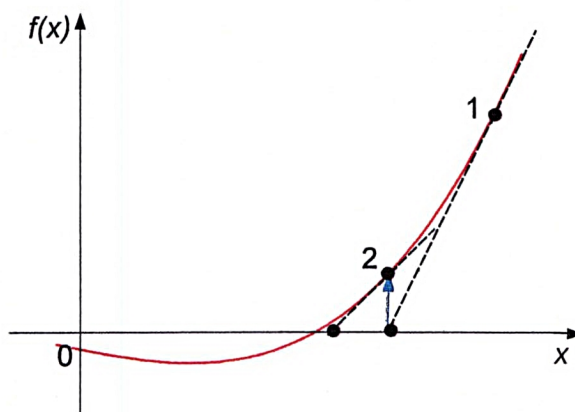


Figura A3.1 - Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson para a obtenção da raiz de $f(x)$.

O método é justificado algebricamente a partir da série de Taylor:

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x) \delta + \frac{f''(x)}{2} \delta^2 + \dots \quad (\text{A3.2})$$

se a função é bem comportada e δ é suficientemente pequeno, mantém-se apenas os termos lineares. Ao se impor que $f(x + \delta) = 0$ é possível escrever:

$$\delta = -\frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{A3.3})$$

onde δ é a correção a ser feita na aproximação inicial da solução de x .

Na implementação numérica o processo iterativo pára quando δ for menor que uma precisão ε prescrita.

Este procedimento pode ser generalizado para um conjunto de equações não-lineares na forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

onde f_i são funções conhecidas e x_i são as variáveis independentes e incógnitas do problema.

Definem-se as matrizes:

$$\mathbb{X}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]$$

$$\delta\mathbb{X}^T = [\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \dots \quad \delta x_N]$$

$$\mathbb{F}^T = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N]$$

Expandindo cada função f_i em série de Taylor tem-se:

$$f_i(\mathbb{X} + \delta\mathbb{X}) = f_i(\mathbb{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \mathcal{O}(\delta\mathbb{X}^2) \quad (\text{A3.5})$$

onde a matriz de derivadas parciais é chamada de matriz Jacobiana \mathbb{J} e seus elementos são:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad . \quad (\text{A3.6})$$

A equação (A3.5) pode ser escrita como:

$$\mathbb{F}(\mathbb{X} + \delta\mathbb{X}) = \mathbb{F}(\mathbb{X}) + \mathbb{J} \cdot \delta\mathbb{X} + \mathcal{O}(\delta\mathbb{X}^2) . \quad (\text{A3.7})$$

Desprezando-se os termos em $\delta\mathbb{X}^2$ e impondo-se que:

$$\mathbb{F}(\mathbb{X} + \delta\mathbb{X}) = 0 \quad (\text{A3.8})$$

obtém-se um conjunto de equações lineares para as correções $\delta\mathbb{X}$ que aproximam cada função em direção ao zero. Obtém-se:

$$\mathbb{J} \cdot \delta\mathbb{X} = -\mathbb{F}(\mathbb{X})$$

cuja solução é:

$$\delta\mathbb{X} = -\mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{F}(\mathbb{X}) . \quad (\text{A3.9})$$

A solução da equação (A3.9) pode ser obtida por diferentes procedimentos numéricos. Neste trabalho foi utilizado o método da decomposição LU seguida de uma substituição reversa.

As correções $\delta\mathbb{X}$ são adicionadas aos valores prévios de \mathbb{X} , na forma:

$$\mathbb{X}_{novo} = \mathbb{X}_{prev} + \delta\mathbb{X} \quad (\text{A3.10})$$

num processo iterativo. A convergência da solução pode ser detectada avaliando-se as variações em cada x_i e em cada função f_i , parando quando todas elas apresentarem uma variação menor que ε .

Referências

- [1] Bognár, A. et al. **Diagnostic test method of solid/liquid electrical insulations using polarisation spectrum in the range of long time-constants.** In: *7th International Symposium on High Voltage Engineering*. Dresden, 1991. p. 345-348.
- [2] Krivda, A.; Russell, G. **Assessment of oil impregnated paper insulated transformers using recovery voltage measurements.** In: *1998 IEEE International Conference on Conduction and Breakdown in Solid Dielectrics*. Västerås, Sweden, 1998. p. 64-68.
- [3] Dissado, L. A.; Fothergill, J. C. **Electrical Degradation and Breakdown in Polymers.** London: Peter Peregrinus, 1992.
- [4] Mazzanti, G.; Montanari, G. C.; Dissado, L. A. **A space-charge life model for ac electrical aging of polymers.** *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, v. 6, n. 6, p. 864-875, Dec. 1999.
- [5] Das-Gupta, D. K.; Doughty, J. S.; Duffy, J. S. **Non-uniform polarization effects in d.c. stressed low-density polyethylene.** *Journal of Electrostatics*, v. 14, p. 165-174, 1983.
- [6] Jonscher, A. K. **Dielectric Relaxation in Solids.** London: Chelsea Dielectric Press, 1983.
- [7] Yoshino, K. et al. **Residual voltage in polyethylene.** *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 21, n. 9, p. 1333-1336, Sept. 1982.
- [8] Hippel, A. von. **Dielectrics and Waves.** 2. ed. Boston: Artech House, 1995.
- [9] Durand, E. **Électrostatique et Magnétostatique.** Paris: Masson et Cie., 1953.
- [10] Böttcher, C. J. F.; Bordewijk, P. **Theory of Electric Polarization: dielectrics in time-dependent fields.** 2. ed. rev., v. 2. Amsterdam: Elsevier, 1992.
- [11] Snoek, J. L.; du Pré, F. K. **Several after-effect phenomena and related losses in alternating fields.** *Philips Technical Review*, v. 8, n. 2, p. 57-64, Feb. 1946.

- [12] Scarpa, P. C. N. **Efeito posterior em dielétricos sólidos**. Curitiba, 1989. 198 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.
- [13] Kohlrausch, K. W. *Annalen der Physik*, v. 91, p. 56- , 1854.
- [14] Hopkinson, J. **The residual charge of the Leyden jar**. *Philosophical Transactions*, v. 166, p. 489-494, 1876.
- [15] Hopkinson, J. **Residual charge of the Leyden jar - dielectric properties of different glasses**. *Philosophical Transactions*, v. 167, p. 599-626, 1877.
- [16] Curie, M. J. **Recherches sur la conductibilit des corps cristallisés**. *Ann. de Chimie et de Physique*, v. 18, n. 6, p. 203-269, 1889.
- [17] Schweidler, E. R. von. **Studien über die anomalien in verhalten der dielektrika**, *Annalen der Physik*, v. 24, p. 711-770, 1907.
- [18] Debye, P. **Polar Molecules**. Oxford: Clarendon Press, 1929.
- [19] Fröhlich, H. **Theory of Dielectrics**. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1958.
- [20] Gross, B.; Rocha, P. S. **Estudos sobre dielétricos**. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. IX, n. 3, p. 187-209, set. 1937.
- [21] Gross, B.; Rocha, P. S. **Estudos sobre dielétricos: II - regeneração e descarga interna**. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. IX, n. 4, p. 307-319, dez. 1937.
- [22] Gross, B.; Rocha, P. S. **Estudos sobre dielétricos: III - a capacidade de um condensador real**. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. IX, n. 4, p. 320-326, dez. 1937.
- [23] Jonscher, A. K. **The 'universal' dielectric response**. *Nature*, v. 267, p. 673-679, June 1977.
- [24] Dissado, L. A.; Hill, R. M. **A cluster approach to the structure of imperfect materials and their relaxation spectroscopy**. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 390, p. 131-180, 1983.
- [25] Weron, K. **A probabilistic mechanism hidden behind the universal power law for dielectric relaxation: general relaxation equation**. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 3, p. 9151-9162, 1991.

- [26] Many, A.; Rakavy, G. **Theory of transient space-charge-limited currents in solids in the presence of trapping.** *Physical Review*, v. 126, n. 6, p. 1980-1988, June 1962.
- [27] Lampert, M. A. **Simplified theory of space-charge-limited currents in an insulator with traps.** *Physical Review*, v. 103, n. 6, p. 1648-1656, Sept. 1956.
- [28] Beaumont, J. H.; Jacobs, P. W. M. **Polarization in potassium chloride crystals.** *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, v. 28, p. 657-667, 1967.
- [29] Meaudre, R.; Mesnard, G. **Transferts de charges dans un milieu diélectrique. Étude de courants transitoires.** *Revue de Physique Appliquée*, v. 7, n. 4, p. 213-217, déc. 1972.
- [30] Belmont, M. R.; Maskell, S. J.; Duller, G. A. **Conduction transients using a Lagrangian formulation. Part I: transients modified by their self space-charge.** *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, v. 46, n. 5, p. 589-594, 1985.
- [31] Perret, J. **Les charges d'espace dans les isolants solides: I - Généralités et méthodes d'étude.** *E. D. F. - Bulletin de la direction des études et recherches - Série B - Réseaux Électriques, Matériels Électriques*, n. 4, p. 101-130, 1968.
- [32] Wintle, H. J. **Basic physics of insulators.** *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, v. 25, n. 1, p. 27-44, Feb. 1990.
- [33] Ahmed, N. H.; Srinivas, N. N. **Review of space charge measurements in dielectrics.** *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, v. 4, n. 5, p. 644-656, Oct. 1997.
- [34] Li, Y.; Takada, T. **Progress in space charge measurement of solid insulating materials in Japan.** *IEEE Electrical Insulation Magazine*, v. 10, n. 5, p. 16-28, Sept./Oct. 1994.
- [35] Wintle, H. J. **The discharge of charged dipolar insulating materials.** *Journal of Applied Physics*, v. 63, n. 5, p. 1705-1713, Mar. 1988.
- [36] Ongaro, R. **Contribution to current transient analysis including space-charge build-up and dipolar relaxation.** *IEE Proceedings, part A*, v. 137, n. 2, p. 97-110, Mar. 1990.

- [37] Feynman, R. P. **The Feynman Lectures on Physics**. v. 2. Reading: Addison-Wesley, 1965.
- [38] Bungen, I.; Popescu, M. **Physics of Solid Dielectrics**. Amsterdam: Elsevier, 1984.
- [39] Tilley, D. E. **A phenomenological theory of dielectric response**. *Journal of Applied Physics*, v. 38, p. 2543-2546, 1967.
- [40] Jonscher, A. K. **Universal Relaxation Law**. London: Chelsea Dielectric Press, 1995.
- [41] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. Reimp. New York: Dover Publications, 1968.
- [42] Moraes, A. de; Schönberg, M. **Sobre a equação dos dielétricos reais**. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. XII, n. 2, p. 137-153, jun. 1940.
- [43] Gross, B. **On after-effects in solid dielectrics**. *Physical Review*, v. 57, p. 57-59, Jan. 1940.
- [44] Oliveira Castro, F. M. de. **On the integral-differential equation of an absorptive capacitor**. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 57, n. 3, p. 275-276, 1985.
- [45] Robert, R.; Berleze, S. L. M. **Integro-differential equation of absorptive capacitors**. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, v. 8, n. 2, p. 244-247, Apr. 2001.
- [46] Lewis, T. J. **The micro-physics of charge in solid dielectrics**. In: Fothergill, J. C.; Dissado, L. A. (Ed.). **Space Charge in Solid Dielectrics**. Leicester: The Dielectrics Society, 1998. p. 1-17.
- [47] Lewis, T. J. **Electrical effects at interfaces and surfaces**. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, v. EI-21, n. 3, p. 289-295, June 1986.
- [48] Lampert, M. A.; Mark, P. **Current Injection in Solids**. New York: Academic Press, 1970.
- [49] Wintle, H. J. **Decay of excess charge in dielectrics having shorted electrodes**. *Journal of Applied Physics*, v. 42, n. 12, p. 4724-4730, Nov. 1971.

- [50] Pathria, R. K. **Statistical Mechanics**. Reimp. Oxford: Pergamon Press, 1993. (International Series in Natural Philosophy, v. 45).
- [51] Almeida, L. E. C. de. **Carga espacial monopolar livre a voltagem constante**. São Carlos, 1974. 87 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física e Química de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [52] Tredgold, R. H. **Space Charge Conduction in Solids**. Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1966.
- [53] Shockley, W.; Prim, R. C. **Space-charge limited emission in semiconductors**. *Physical Review*, v. 90, n. 5, p. 753-758, June 1953.
- [54] Tomioka, J. **Técnica do pulso eletroacústico para medidas de perfis de carga espacial em dielétricos**. São Carlos, 1999. 113 f. Tese (Doutorado em Ciências e Engenharia de Materiais) - Área de Inter-unidades em Ciências e Engenharia de Materiais, Universidade de São Paulo.
- [55] Monsanto, S. de A. **Movimento de carga espacial sobre uma matriz de densidade uniforme - equações gerais em circuito aberto e fechado**. São Carlos, 1983. 70 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física e Química de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [56] Smith, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations - Finite Difference Methods**. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 1985.
- [57] Adamec, V.; Calderwood, J. H. **Electrical conduction and polarisation phenomena in polymeric dielectrics at low fields**. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 11, p. 781-800, 1978.
- [58] Ongaro, R. **Exact solutions for Debye-like relaxations in multilayered conducting dielectrics**, *IEE Proceedings, part A*, v. 133, n. 5, p. 275-279, July 1986.
- [59] Press, W. H. et al. **Numerical Recipes in C**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 1992.
- [60] Ida, N. **Numerical Modeling for Electromagnetic Non-Destructive Evaluation**. London: Chapman-Hall, 1995.

- [61] Hildebrand, F. B. **Introduction to Numerical Analysis**. 2. ed. reimp. New York: Dover, 1987.
- [62] Camargo, P. C.; Leal Ferreira, G. F. **One-carrier free space charge motion under applied voltage: the general solution**. *Revista Brasileira de Física*, v. 6, n. 2, p. 231-243, 1976.
- [63] Ku, C. C.; Liepins, R. **Electrical Properties of Polymers**. Berlin: Hauser Verlag, 1987.
- [64] Hippel, A. von. **Dielectric Materials and Applications**. 2. ed. Boston: Artech House, 1995.
- [65] ABNT; INMETRO; SBM. **Guia para a Expressão da Incerteza de Medição**. 2. ed. rev. Ago. 1998.
- [66] Furukawa, T. **Piezoelectricity and pyroelectricity in polymers**. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, v. 24, n. 3, p. 375-394, June 1989.
- [67] Wintle, H. J.; Turlo, J. **Pyroelectric effects and discharge currents in polyethylene terephthalate (PET)**. *Journal of Applied Physics*, v. 50, n. 11, p. 7128-7137, Nov. 1979.