

MARCOS ANTONIO FLORCZAK

**FRAGMENTOS DE ASTERÓIDES QUE CRUZAM  
A ÓRBITA DA TERRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA  
1993

MARCOS ANTONIO FLORCZAK

FRAGMENTOS DE ASTERÓIDES QUE CRUZAM A ÓRBITA DA TERRA

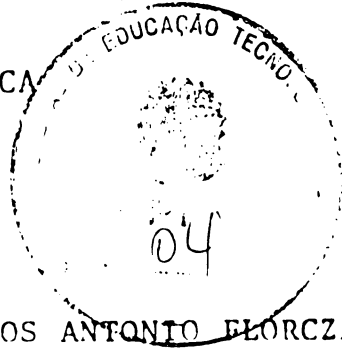
Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA

1.993



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA




ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. MARCOS ANTONIO FLORCZAK


TÍTULO DA TESE: "Fragmentos de Asteróides que Cruzam a Órbita da Terra"

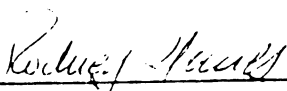
Em sessão pública de defesa de tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir o Conceito A.

Curitiba, 21 de dezembro de 1993.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. GERMANO BRUNO AFONSO  
Presidente/Orientador  
Depto. de Física/UFPR

  
\_\_\_\_\_  
Profa. DANIELA LAZZARO  
Observatório Nacional/CNPq

  
\_\_\_\_\_  
Prof. RODNEY DA SILVA GOMES  
Observatório Nacional/CNPq

Dedico este trabalho ao meu pai.

## Agradecimentos

Ao meu orientador Germano Bruno Afonso.

Ao meu co-orientador Rodney da Silva Gomes.

Ao professor Sergio Luiz Meister Berleze.

Ao meu amigo Arandi.

As minhas amigas Claudinha, Sandra, Gi, Joselanda e Sônia.

À Capes pelo apoio financeiro.

## Resumo

Desenvolvemos uma nova dedução para o efeito Yarkovsky. Estudamos numericamente o problema de 3-corpos com as perturbações não-gravitacionais devidas à pressão de radiação, ao efeito Poynting-Robertson e ao efeito Yarkovsky, próximo as ressonâncias com Júpiter. Acrescentamos a perturbação gravitacional de Saturno e integramos numericamente o problema de 4-corpos com a perturbação não gravitacional devido ao efeito Yarkovsky. Mostramos qualitativamente que em uma integração de longo período idealizada, fragmentos de um metro de diâmetro de asteróides oriundos do cinturão de asteróides podem assumir órbitas altamente excentrica tornando-se cruzador da órbita da Terra.

## Sumário

<b>Introdução</b>	01
<b>Capítulo 1 - Pressão de Radiação e Efeito Poynting-Robertson</b>	03
1.1. Pressão de Radiação e Efeito Poynting-Robertson	05
1.2. Perturbação no Problema de 2-Corpos	06
1.3. Efeito Poynting-Robertson com as Equações de Gauss	11
1.4. Comparação do Resultado Analítico com o Numérico	15
<b>Capítulo 2 - Efeitos de Inércia Térmica</b>	18
2.1. Modelo Térmico	18
2.2. Arrasto Térmico	23
2.3. Ângulo de Atraso	24
2.4. Efeito Yarkovsky no Plano	26
2.5. Efeito Inverno-Verão	27
2.6. Perturbação Yarkovsky no Problema de 2-Corpos	29
<b>Capítulo 3 - Problema de 3-Corpos Perturbado por Forças Não-Gravitacionais</b>	34
3.1. Pressão de radiação e Efeito Poynting-Robertson no Problema de 3-Corpos	34
3.2. Problema Restrito de 3-Corpos sem Dissipação	35
3.3. Problema Restrito de 3-Corpos com Dissipação	38
3.4. Perturbação Yarkovsky no Problema de 3-Corpos	38
<b>Capítulo 4 - Problema de 4-Corpos Perturbado pelo Efeito Yarkovsky</b>	44
4.1 Exemplos Dissipativos	44
4.2 Exemplos Antidissipativos	48
<b>Conclusão</b>	51
<b>Apêndice i</b>	52
i.1) Elementos Orbitais	52
i.2) Passagem de Elementos Osculadores para Coordenadas Cartesianas	53
i.3) Passagem de Coordenadas Cartesianas a Elementos Osculadores	55
<b>Referências Bibliográficas</b>	57

## Introdução

Os recentes estudos observacionais têm possibilitado a descoberta de muitos objetos próximo à Terra. A origem destes objetos é usualmente associada com o cinturão de asteróides. Atualmente o estudo do transporte destes objetos para posições próximas à Terra tem sido intenso mas as explicações não são ainda conclusivas.

Colisões físicas entre asteróides geram fragmentos ocasionando um fluxo destes objetos em direção ao interior do sistema solar. Parte deste fluxo é obtido pela projeção direta de fragmentos em órbitas de excentricidade elevada. Outra parte deste fluxo pode ser obtida pela diminuição do momento angular orbital destes fragmentos devido a efeitos dissipativos tais como o efeito Poynting-Robertson ou efeito Yarkovsky. Todavia, durante o decréscimo do semi-eixo maior estes fragmentos atingem zonas de ressonâncias mudando a evolução orbital destes fragmentos.

Para pequenas partículas no sistema solar, o efeito Poynting-Robertson contribui de forma dissipativa, resultando em um decréscimo secular no semi-eixo maior e uma circularização da órbita. Para pequenos fragmentos de asteróides (aproximadamente 1m de diâmetro), o efeito Yarkovsky pode ter uma contribuição na sua evolução orbital (Peterson, 1976), podendo ter um efeito dissipativo ou anti-dissipativo, ocasionando uma queda ao Sol ou uma ejeção para fora do sistema solar. Para estes fragmentos o efeito Poynting-Robertson pode ser negligenciado (Burns et al., 1979). Uma diferença também importante entre estes dois efeitos é que o efeito Poynting-Robertson é sempre tangencial a órbita da partícula, e o efeito Yarkovsky é sobre o plano normal ao eixo de rotação do corpo.

O objetivo deste trabalho é estudar como estas forças não-gravitacionais podem afetar a evolução orbital de pequenos corpos no sistema solar transportando-os para as regiões de ressonância, fazendo com que eles eventualmente cruzem a órbita da Terra.



No capítulo 1 estudaremos a dinâmica orbital de uma partícula sujeita a pressão de radiação e ao efeito Poynting-Robertson, utilizando a expressão desenvolvida por Angeli (1991). Apresentaremos uma dedução das perturbações nos elementos orbitais devido a estes efeitos, utilizando inicialmente a equação do movimento e resolvendo-a em uma primeira aproximação e posteriormente com o auxílio das equações de Gauss encontraremos os valores médios das perturbações. Faremos uma comparação numérica destes resultados com a integração direta da equação do movimento.

No capítulo 2 apresentaremos uma nova dedução da equação do modelo de reemissão de radiação eletromagnética proposto por Afonso e Foryta (1989) e obteremos então o efeito Yarkovsky e o efeito inverno-verão. Estudaremos a evolução orbital de um pequeno corpo sob a influência do efeito Yarkovsky e encontraremos uma equação semi-analítica para a evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para órbitas de pequena excentricidade.

No capítulo 3 estudaremos o problema de 3-corpos com as perturbações não-gravitacionais devido a pressão de radiação, ao efeito Poynting-Robertson e ao efeito Yarkovsky próximo das ressonâncias com Júpiter.

No capítulo 4 introduzimos o efeito gravitacional de Saturno conjuntamente com o do corpo central (Sol) e Júpiter perturbado pelo efeito Yarkovsky.

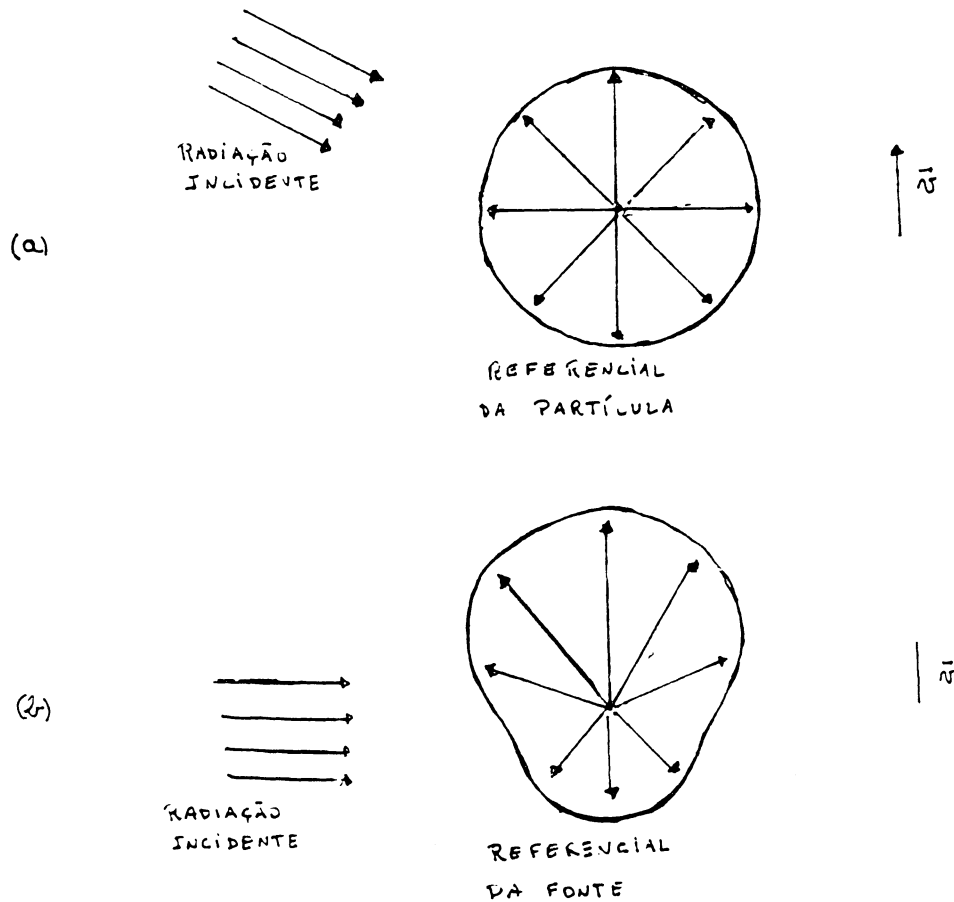
As características físico-químicas do corpo teste utilizado ao longo deste estudo, são valores típicos para asteróides como pode ser visto em Peterson (1976).

## Capítulo 1

### Pressão de Radiação e Efeito Poynting–Robertson

Quando um fluxo de onda eletromagnética incide sobre a superfície de um corpo ela exerce uma força resultante na direção de propagação deste fluxo. Logo um corpo que é iluminado pelo Sol, não será apenas atraído gravitacionalmente, mas também repellido deste pela força cuja origem é a *Pressão de Radiação*.

Um corpo em movimento orbital em relação a uma fonte de radiação eletromagnética, no seu próprio referencial absorve o fluxo de radiação e reemite isotropicamente mas por outro lado o corpo recebe este fluxo desviado de um certo ângulo, causando uma força contrária ao seu movimento (figura 1a). Por sua vez, no referencial da fonte encontramos esta mesma força pois a reemissão de radiação se dá preferencialmente na direção frontal e por conservação de momento linear o corpo é impulsionado de forma contrária ao movimento (figura 1b). Este fenômeno induz uma correção a pressão de radiação, conhecida como *Efeito Poynting-Robertson* e cuja principal característica é ser uma força de arrasto. A expressão para este efeito pode ser obtida tanto através de um ponto de vista “clássico”, onde as radiações luminosas são consideradas como partículas, ou através do uso das transformações de Lorentz. Este efeito foi inicialmente estudado por Poynting (1903), que ainda levou em consideração o efeito resistivo do “éter”, encontrando o valor de  $Rv/3c^2$  para esta força, onde  $R$  é a taxa de energia incidente sobre o corpo,  $v$  sua velocidade através do “éter” e  $c$  a velocidade da luz. Assim de acordo com Poynting, um corpo esférico de raio  $1\text{ cm}$  e densidade  $5,5\text{ g cm}^{-3}$ , a  $1\text{ U.A.}$  do Sol com velocidade orbital igual a terrestre faria  $10^8$  revoluções antes de cair ao Sol. Robertson (1937), utilizando a teoria da relatividade deduziu a expressão desta força como sendo proporcional a velocidade orbital e inversamente ao quadrado da distância a fonte. Devido ao trabalho destas duas pessoas este efeito leva seus nomes.



**Figura (1.1)** Efeito Poynting-Robertson. Diagrama mostrando que (a) a reemissão de radiação eletromagnética é isotrópica no referencial da partícula mas a direção do fluxo de radiação é desviada de um certo ângulo. (b) Visto no referencial da fonte de radiação a partícula reemite a radiação preferencialmente na direção frontal.

As forças de radiação sobre pequenas partículas no sistema solar foram estudadas por Burns et al. (1979) que nos apresenta uma expressão para a pressão de radiação e o efeito Poynting-Robertson, a qual é utilizada como referência nos trabalhos da emissão e reemissão de radiação por partículas orbitando uma fonte de radiação. Burns et al. leva em consideração a eficiência na absorção e no espalhamento da radiação incidente.

### 1.1. Pressão de Radiação e o Efeito Poynting–Robertson

A força de radiação sobre uma partícula que orbita uma fonte de radiação pode ser dada pela seguinte expressão (Angeli, 1991):

$$\vec{F} = \frac{Q_o \pi s^2}{c} \left(1 + \frac{4}{9} \alpha_d\right) \left[ \left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right) \hat{r} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.1),$$

onde  $Q_o$  é a energia incidente por unidade de área e tempo,  $s$  é o raio do corpo,  $\alpha_d$  é o coeficiente de espalhamento difuso,  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula,  $\dot{r}$  a velocidade radial e  $\hat{r}$  o vetor unitário na direção radial.

Substituindo  $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$  na equação (1.1), onde  $\hat{\theta}$  é um vetor unitário normal a direção radial situado no plano orbital, obtemos:

$$\vec{F} = \frac{Q_o \pi s^2}{c} \left(1 + \frac{4}{9} \alpha_d\right) \left[ \left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) \hat{r} - \frac{r\dot{\theta}}{c} \hat{\theta} \right] \quad (1.2)$$

Usualmente chamamos a parte dependente da velocidade como arrasto Poynting–Robertson e a constante radial a pressão de radiação; outros convencionam que a pressão de radiação é o termo radial desta expressão e o termo transversal o arrasto Poynting–Robertson; ainda utiliza-se dizer que o termo na direção  $\hat{r}$  da equação (1.1) é a pressão de radiação e o termo proporcional a velocidade,  $\vec{v}$ , é o arrasto Poynting–Robertson (ver Burns et al., 1979). Neste trabalho utilizaremos a primeira convenção citada.

Substituindo  $Q_o = \frac{E_o}{4\pi r^2}$  na equação (1.2), onde  $E_o$  é a energia por unidade de tempo, e dividindo pela massa  $\frac{4}{3}\pi\rho s^3$ , onde  $\rho$  é a massa específica da partícula, obtemos:

$$\vec{a} = \frac{3E_o}{16\pi c \rho s r^2} \left(1 + \frac{4}{9} \alpha_d\right) \left[ \left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right) \hat{r} - \frac{r\dot{\theta}}{c} \hat{\theta} \right]. \quad (1.3)$$

Se definimos  $\alpha = \frac{3E_o}{16\pi c^2 \rho s} \left(1 + \frac{4}{9} \alpha_d\right)$  podemos escrever a equação acima na forma:

$$\vec{a} = (c - 2\dot{r})\alpha \frac{\hat{r}}{r^2} - \alpha \frac{\dot{\theta}}{rc} \hat{\theta}. \quad (1.4)$$

## 1.2. Perturbação no Problema de 2–Corpos

A forma dissipativa do efeito Poynting–Robertson, causa em uma partícula que orbita o Sol uma perturbação nos elementos orbitais. Neste item encontraremos os valores desta perturbação.

Consideremos uma partícula sob o campo gravitacional solar, sujeito a ação da pressão de radiação e do efeito Poynting–Robertson. A partir da equação (1.4), obtemos a equação do movimento,

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\hat{r}}{r^2} = (c - 2\dot{r})\alpha r^2 \hat{r} - \frac{\alpha \dot{\theta}}{rc} \hat{\theta}, \quad (1.5)$$

onde  $\mu = (M + m)K$  sendo  $M$  a massa solar,  $m$  a massa da partícula e  $K$  a constante gravitacional. Como a pressão de radiação solar tem um efeito repulsivo, que diminui efetivamente a atração solar, podemos então escrever a equação (1.5) na forma:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu' \frac{\hat{r}}{r^2} = -2\alpha \dot{r} \frac{\hat{r}}{r^2} - \frac{\alpha \dot{\theta}}{rc} \hat{\theta}, \quad (1.6)$$

onde  $\mu' = \mu - c\alpha$ .

Podemos decompor a equação (1.6), em duas equações escalares, uma na direção radial e outra na direção tangencial, onde a aceleração em coordenadas polares planas é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} \quad (1.7)$$

Substituindo  $\ddot{\vec{r}}$  na equação (1.6), obtemos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu'}{r^2} - 2\alpha \frac{\dot{r}}{r^2}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\alpha\dot{\theta}. \quad (1.9)$$

O momento angular por unidade de massa ( $H$ ) é definido como:  $H = r^2\dot{\theta}$ .

Levando esta expressão na equação (1.9) e integrando, temos:

$$H = h - \alpha\theta, \quad (1.10)$$

onde  $h$  é uma constante de integração. A equação (1.10) mostra que o momento angular orbital não é uma constante do movimento, mas difere desta por um decréscimo linear na variável angular. A não conservação do momento angular evidencia o efeito dissipativo do efeito Poynting–Robertson.

Fazendo uma mudança de variável, onde:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r}, \\ \dot{r} &= -H \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -Hu^2 \frac{d}{d\theta} \left( H \frac{du}{d\theta} \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

podemos então reescrever a equação (1.8), com o auxílio das equações (1.11), na forma:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{\alpha}{H} \frac{du}{d\theta} + u = \frac{\mu'}{H^2}. \quad (1.12)$$

Expandindo  $H^{-1}$  e  $H^{-2}$  em série de potências de  $\alpha$ , temos:

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \frac{1}{h} + \frac{\alpha\theta}{h^2} + \dots, \\ H^{-2} &= \frac{1}{h^2} + \frac{2\alpha\theta}{h^3} + \dots, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde negligenciamos potências de  $\alpha$  maiores ou iguais a dois. O que é justificável pois os valores de  $\alpha$  são muito pequenos, por exemplo se considerarmos um corpo com raio igual a  $10^{-5} m$  e densidade de  $2 g cm^{-3}$  recebendo um fluxo de energia de  $3.83 \times 10^{26} J s^{-1}$  teremos  $\alpha = 1,81 \times 10^{-5} A.U.^2 ano^{-1}$ .

Substituindo  $H^{-1}$  e  $H^{-2}$  na equação (1.12), obtemos:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{\alpha}{h} \frac{du}{d\theta} + u = \frac{\mu'}{h^2} \left( 1 + \frac{2\alpha\theta}{h} \right), \quad (1.14)$$

cuja solução em primeira aproximação é:

$$u = \frac{1}{p} \left[ 1 + \frac{2\alpha\theta}{h} + e \left( 1 - \frac{\alpha\theta}{2h} \right) \cos(\theta - w) \right], \quad (1.15)$$

onde  $e$ ,  $w$  são constante de integração e  $p$  é igual a  $\frac{h^2}{\mu'}$ .

Esta solução pode ser verificada se a substituimos na equação (1.9), considerando apenas os termos em primeira potência de  $\alpha$ .

Fazendo  $\alpha = 0$  na equação (1.15), o que significa eliminar as forças de radiação, obtemos:

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - w)], \quad (1.16)$$

que é a solução clássica do problema de 2-corpos. As constantes  $e$ ,  $w$  e  $p$ , são a excentricidade, o periélio e o parâmetro da cônica, respectivamente.

A perturbação não-gravitacional causa uma variação nos elementos orbitais, que podemos determinar supondo que a perturbação cesse em um dado ponto  $P_1$ , e o corpo continue em uma órbita kepleriana com posição e velocidade dados por  $u_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\left(\frac{du}{dt}\right)_1$  e  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1$ . Para órbita osculadora em  $P_1$ , onde  $\alpha = 0$ , temos:

$$u = \frac{1}{p_1} [1 + e_1 \cos(\theta - \omega_1)]. \quad (1.17)$$

O momento angular no ponto  $P_1$ ,  $h_1$ , deve ser igual a  $r_1^2 \dot{\theta}_1$ , ou da equação (1.10),

$$h_1 = h - \alpha \theta_1.$$

O parâmetro  $p$ , torna-se então:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{h_1^2}{\mu'} = \frac{(h - \alpha \theta_1)^2}{\mu'} \\ &= p \left(1 - \frac{\alpha}{h} \theta_1\right)^2 \\ &= p \left(1 - 2 \frac{\alpha}{h} \theta_1\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

No ponto  $P_1$ ,  $u$  e  $\frac{du}{d\theta}$  são dados tanto pela equação (1.15) quanto pela equação (1.16). Igualando estas equações em  $\theta = \theta_1$ , obtemos:

$$\frac{1}{p_1} [1 + e_1 \cos(\theta_1 - \omega_1)] = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{2\alpha\theta_1}{h} + e \left(1 - \frac{\alpha\theta_1}{2h}\right) \cos(\theta_1 - \omega)\right], \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{p_1}[-e_1 \sin(\theta_1 - \omega_1)] = \frac{1}{p} \left[ \frac{2\alpha}{h} - e \left( 1 - \frac{\alpha\theta_1}{2h} \right) \sin(\theta_1 - \omega) - \frac{\alpha e}{2h} \cos(\theta_1 - \omega) \right]. \quad (1.20)$$

Substituindo  $p_1$  pela equação (1.18), nas equações (1.19) e (1.20), respectivamente, obtemos:

$$e_1 \cos(\theta_1 - \omega_1) = e \left( 1 - \frac{5\alpha\theta_1}{2h} \right) \cos(\theta_1 - \omega), \quad (1.21)$$

$$e_1 \sin(\theta_1 - \omega_1) = e \left( 1 - \frac{5\alpha\theta_1}{2h} \right) \sin(\theta_1 - \omega) - \frac{2\alpha}{h} + \frac{\alpha e}{2h} \cos(\theta_1 - \omega). \quad (1.22)$$

Multiplicando a equação (1.21) por  $\cos(\theta_1 - \omega)$  e a equação (1.22) por  $\sin(\theta_1 - \omega)$  e somando-as, encontramos:

$$e_1 \cos(\omega_1 - \omega) = e \left( 1 - \frac{5\alpha\theta}{2h} \right) - \frac{2\alpha}{h} \sin(\theta_1 - \omega) + \frac{\alpha e}{4h} \sin 2(\theta_1 - \omega). \quad (1.23)$$

Multiplicando a equação (1.21) por  $\sin(\theta_1 - \omega)$  e a equação (1.22) por  $\cos(\theta_1 - \omega)$ , e subtraindo-as, encontramos:

$$e_1 \sin(\omega_1 - \omega) = \frac{2\alpha}{h} \cos(\theta_1 - \omega) - \frac{\alpha e}{4h} \cos^2(\theta_1 - \omega). \quad (1.24)$$

Definindo:

$$e_1 - e = \delta e_1 \quad \text{e} \quad \omega_1 - \omega = \delta \omega_1, \quad (1.25)$$

e considerando:

$$\sin(\omega_1 - \omega) = (\omega_1 - \omega) \quad \text{e} \quad \cos(\omega_1 - \omega) = 1, \quad (1.26)$$

temos então:

$$\delta e_1 = -\frac{5\alpha e \theta_1}{2h} - \frac{2\alpha}{h} \sin(\theta_1 - \omega) + \frac{\alpha e}{4h} \sin 2(\theta_1 - \omega), \quad (1.27)$$

$$\delta \omega_1 = \frac{2\alpha}{h e_1} \cos(\theta_1 - \omega) - \frac{\alpha}{4h} \cos^2(\theta_1 - \omega). \quad (1.28)$$

Vemos que a variação em  $e_1$  correspondente a sucessivas órbitas osculadoras, consiste em três partes: a primeira representa um decréscimo constante (perturbação



secular), enquanto que a segunda e a terceira são periódicas e não contribuem ao longo do tempo (perturbação periódica), sendo seu efeito acumulativo nulo. O efeito perturbativo em uma revolução,  $\theta_1 = 2\pi$ , diminui o valor da excentricidade em  $5\pi\frac{\alpha}{h}$ .

Definindo  $\Delta p$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta e$ , e  $\Delta n$  como sendo as perturbações no parâmetro da cônica, no semi-eixo maior, na excentricidade e no movimento médio, respectivamente, sobre uma revolução e considerando apenas o caso onde a cônica seja uma elipse, da equação (1.18) obtemos a perturbação no parâmetro:

$$\frac{\Delta p}{p} = -4\pi\frac{\alpha}{h}. \quad (1.29)$$

Da equação (1.27), obtemos a perturbação na excentricidade:

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{-5\pi\alpha}{h}. \quad (1.30)$$

Para a órbita osculadora podemos relacionar o parâmetro ( $p$ ) com o semi-eixo maior e a excentricidade através da expressão:  $p = a(1 - e^2)$ . Logo a variação no semi-eixo maior pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a} &= \frac{\Delta p}{p} - \frac{2e\Delta e}{(1 - e^2)} \\ &= -\frac{2\pi\alpha}{h} \frac{(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Através da terceira lei de Kepler:  $n^2 a^3 = \mu'$ , encontramos a variação no movimento médio:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3\pi\alpha}{h} \frac{(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)}, \quad (1.32)$$

a constante  $h$  é dada por:

$$h = (r^2\dot{\theta})_1 = \sqrt{\mu'a(1 - e^2)}, \quad (1.33)$$

onde  $H^2 = \mu'a(1 - e^2)$ , que é o valor do momento angular orbital em elementos orbitais.

Substituindo o valor de  $h$ , dado pela equação (1.33), nas equações (1.31), (1.30) e (1.32), obtemos respectivamente as variações no semi-eixo maior, excentricidade e movimento médio:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{-2\pi\alpha(2 + 3e^2)}{\sqrt{\mu'a}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{-5\pi\alpha}{\sqrt{\mu'a}(1 - e^2)}, \quad (1.35)$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3\pi\alpha(2 + 3e^2)}{\sqrt{\mu'a}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.36)$$

As perturbações em primeira ordem na elipse osculadora, dado pelas equações acima, são as mesmas obtidas por Robertson (1937).

### 1.3. Efeito Poynting–Robertson com as Equações de Gauss

As perturbações nos elementos orbitais podem ser também obtidas das equações de Gauss, que fornecem a evolução temporal destes elementos quando submetidos a uma perturbação radial  $R$  e uma transversal ao plano orbital  $T$ . Para a variação no semi-eixo maior e da excentricidade as equações de Gauss são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} [T(1 + e \cos f) + R e \sin f], \quad (1.37)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{na} [R \sin f + T(\cos f + \cos E)] \quad (1.38)$$

A perturbação radial e transversal para a pressão de radiação e efeito Poynting-Robertson pode ser obtida da equação (1.4), onde:

$$R = \alpha \left( \frac{c}{r^2} - \frac{2\dot{r}}{r^2} \right), \quad (1.39)$$

$$T = -\frac{\alpha \dot{f}}{r}, \quad (1.40)$$

onde consideramos  $\theta \approx f$ , sendo  $f$  a anomalia verdadeira e  $\dot{f}$  sua derivada temporal.

Os valores médios da variação do semi-eixo maior e excentricidade são:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [\langle Re \sin f \rangle + \langle T(1+e \cos f) \rangle], \quad (1.41)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\langle R \sin f \rangle + \langle T(\cos f + \cos E) \rangle]. \quad (1.42)$$

Para tirarmos a média em um período de uma função  $M$  temos que considerar:

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T M dt \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \frac{df}{f} \\ &= \frac{n}{2\pi H} \int_0^{2\pi} r^2 M df \end{aligned} \quad (1.43)$$

A média nos termos radiais é:

$$\langle Re \sin f \rangle = \alpha c \left\langle \frac{e \sin f}{r^2} \right\rangle - 2\alpha \left\langle \frac{\dot{r} e \sin f}{r^2} \right\rangle, \quad (1.44)$$

onde

$$\left\langle \frac{e \sin f}{r^2} \right\rangle = \frac{ne}{2\pi H} \int_0^{2\pi} \sin f df = 0, \quad (1.45)$$

e

$$\left\langle \frac{\dot{r} e \sin f}{r^2} \right\rangle = \frac{ne}{2\pi H} \int_0^{2\pi} \dot{r} \sin f df = -\frac{ne^2}{2a(1-e^2)}, \quad (1.46)$$

onde ainda usamos  $\dot{r} = \frac{He \sin f}{a(1-e^2)}$ . Obtemos então:

$$\langle Re \sin f \rangle = \frac{-ne^2 \alpha}{a(1-e^2)}. \quad (1.47)$$

De forma análoga:

$$\langle R \sin f \rangle = \frac{-ne\alpha}{a(1-e^2)}. \quad (1.48)$$

A média nos termos transversais é:

$$\begin{aligned} \langle T(1+e \cos f) \rangle &= \langle T \rangle + e \langle T \cos f \rangle \\ &= -\frac{n\alpha}{2\pi H} \int_0^{2\pi} r \dot{f} df + \int_0^{2\pi} r \dot{f} \cos f df \\ &= -\frac{\alpha n}{a(1-e^2)} - \frac{\alpha e^2 n}{2a(1-e^2)}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde  $f = \frac{H}{r^2}$  e  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$ .

De forma análoga temos:

$$\langle T \cos f \rangle = -\frac{\alpha en}{2a(1 - e^2)}, \quad (1.50)$$

utilizando  $\cos E = \frac{a - r}{ae}$  obtemos:

$$\langle T \cos E \rangle = \frac{1}{e} \langle T \rangle - \frac{1}{ae} \langle rT \rangle, \quad (1.51)$$

mas:

$$\langle rT \rangle = -\alpha \langle \dot{f} \rangle = -\alpha n, \quad (1.52)$$

logo

$$\langle T \cos E \rangle = -\frac{\alpha n}{ae(1 - e)} + \frac{\alpha n}{ae} = -\frac{\alpha ne}{a(1 - e^2)}. \quad (1.53)$$

Substituindo as equações (1.47) e (1.49) em (1.41) e as equações (1.48), (1.50) e (1.53) em (1.42), obtemos, respectivamente:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{\alpha(2 + 3e^2)}{a(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.54)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{5\alpha e}{2a^2\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.55)$$

A variação temporal média no semi-eixo maior e excentricidade, dada pelas equações acima, foram obtidas por Wyatt e Whipple (1949).

Podemos analisar o decréscimo em uma revolução do semi-eixo-maior e da excentricidade fazendo  $\int dt = T$ , onde  $T$  é o período de uma revolução,  $\int da = \Delta a$  e  $\int de = \Delta e$ . Considerando constantes os elementos orbitais em uma revolução, as equações (1.54) e (1.55) tomam a forma:

$$\Delta a = -\frac{\alpha(2 + 3e^2)T}{a(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.56)$$

$$\Delta e = -\frac{5\alpha e T}{2a^2\sqrt{1-e^2}}, \quad (1.57)$$

no cujo período  $T$  é dado pela 3.<sup>a</sup> lei de Kepler:

$$T = 2\pi n = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu'}}. \quad (1.58)$$

Substituindo o período nas equações (1.56) e (1.57), temos:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2\pi\alpha(2+3e^2)}{\sqrt{\mu'a}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.59)$$

$$\frac{\Delta e}{e} = -\frac{5\pi\alpha}{\sqrt{\mu'a}(1-e^2)}, \quad (1.60)$$

$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{3\Delta a}{2a} = \frac{3\pi\alpha}{h} \frac{(2+3e^2)}{(1-e^2)}. \quad (1.61)$$

Estas equações, que mostram uma variação secular nos elementos da elipse osculadora, são as mesmas obtidas anteriormente, quando resolvemos em primeira aproximação a equação do movimento.

Para pequenas excentricidades as variações no semi-eixo maior e na excentricidade podem ser escritas a partir das equações (1.54) e (1.55), como:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle &= -\frac{2\alpha}{a}, \\ \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= -\frac{5\alpha e}{2a^2}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Integrando as equações acima, obtemos:

$$a = a_o \left[ 1 - \frac{2\alpha(t-t_o)}{a_o^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.63)$$

$$e = e_o \left[ 1 - \frac{5\alpha(t-t_o)}{2a_o^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.64)$$

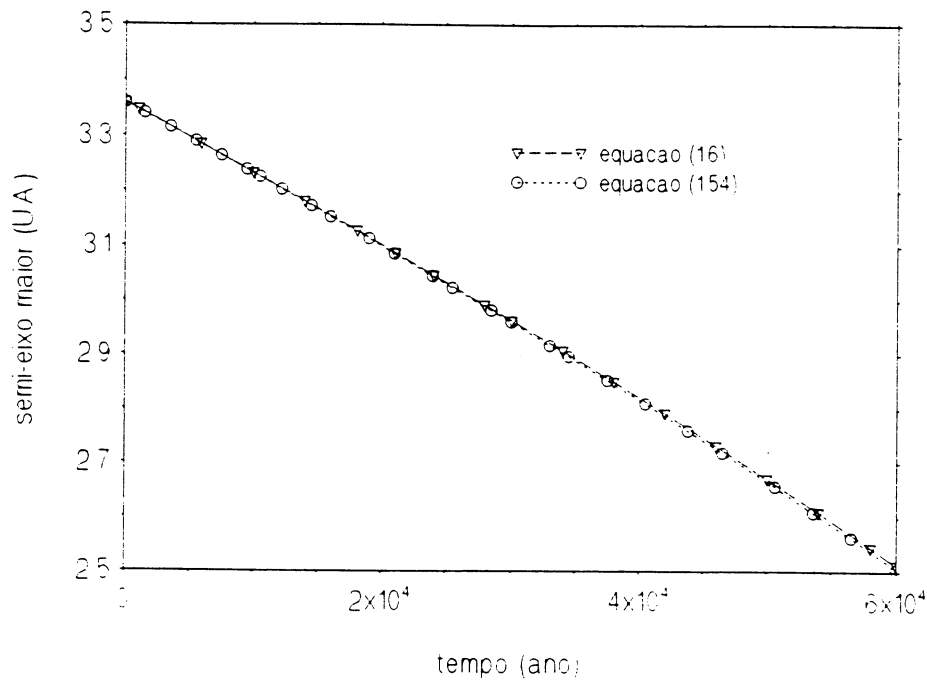
Estas equações nos mostram que uma partícula em órbita, tem seu semi-eixo maior reduzido e uma tendência de circularização da órbita.

#### 1.4. Comparação do Resultado Analítico com o Numérico

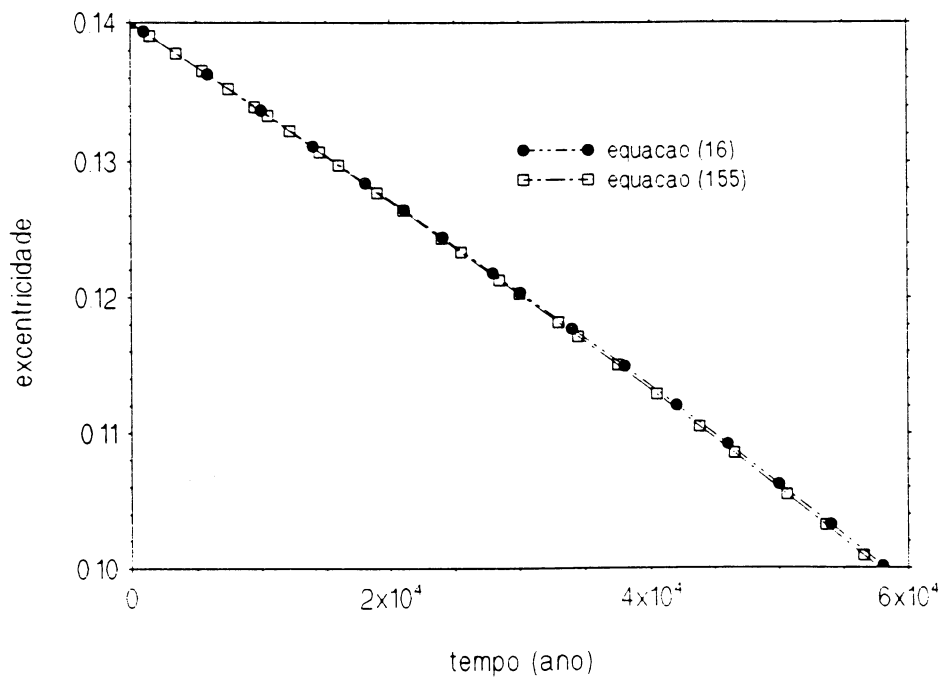
Consideremos uma partícula de raio igual a  $10^{-3}$  cm, densidade volumétrica igual a  $2 \text{ g cm}^{-3}$  orbitando o Sol e sendo perturbada pela pressão de radiação e pelo efeito Poynting–Robertson, onde  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ U.A.}^2 \text{ ano}^{-1}$ . Seu movimento é descrito pela equação (1.5). Integrando numericamente \* esta equação na forma retangular, sendo então convertidos os resultados de coordenadas retangulares para elementos orbitais (ver apêndice i) com condições iniciais para o semi-eixo maior igual a  $3.36 \text{ U.A.}$  e excentricidade igual a  $0.14$ , obtemos uma variação igual a  $1,8 \text{ U.A.}$  e  $0,04$  para o semi-eixo maior e excentricidade, respectivamente, em  $6 \times 10^4 \text{ anos}$ . Integrando numericamente as equações (1.54) e (1.55) para as mesmas condições iniciais anteriores, obtemos os mesmos resultados. Os resultados destas integrações podem ser vistos na figura (1.2), onde temos a variação do semi-eixo maior com o tempo, e na figura (1.3), que mostra a variação da excentricidade com o tempo, ambos com a perturbação devido a pressão de radiação e ao efeito Poynting–Robertson.

---

\* As integrações numéricas que são realizadas neste trabalho, são feitas com o método Runge-Kutta de Fehlberg, código RK45 (Shampine et al., 1976)



**Figura (1.2)** Variação temporal do semi-eixo maior para uma partícula no campo gravitacional do Sol e perturbada pela pressão de radiação e efeito Poynting-Robertson. Comparação dos resultados obtidos através das equações (1.5) e (1.54).



**Figura (1.3)** *Varição temporal da excentricidade para uma partícula no campo gravitacional do Sol e perturbada pela pressão de radiação e pelo efeito Poynting-Robertson. Comparação dos resultados obtidos através das equações (1.5) e (1.55).*



## Capítulo 2

### Efeitos de Inércia Térmica

O efeito Yarkovsky foi utilizado por Peterson (1976) para explicar que o cinturão de asteróide pode ser a origem de meteoritos. A idéia central deste efeito é que a reemissão de radiação de um corpo que possui rotação sobre si mesmo é maior no hemisfério que está “anoitecendo” do que no hemisfério que está “amanhecendo” (figura 2.1), desta forma uma força resultante age na direção oposta ao hemisfério mais quente. Se este corpo orbita a fonte de radiação, esta força poderá ser tanto contrária ao movimento orbital quanto oposta dependendo do sentido de rotação, conseqüentemente o efeito Yarkovsky poderá ser um efeito dissipativo ou anti-dissipativo. Uma outra característica importante deste efeito é que ele age no plano normal ao eixo de rotação do corpo.

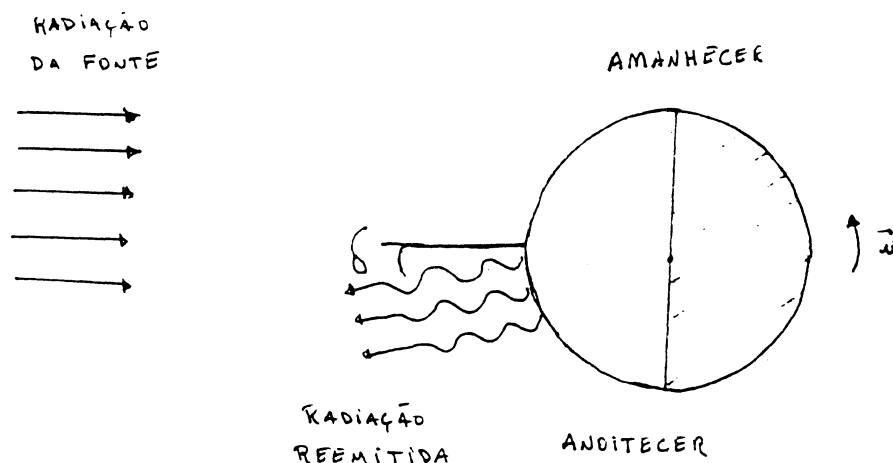
Um outro efeito análogo é o efeito inverno-verão que é muito utilizado para explicar as perturbações orbitais em satélites artificiais (Afonso et al., 1989; Rubincam, 1987). Este efeito surge quando consideramos a rotação de um corpo entorno de uma fonte de radiação. Se o hemisfério do corpo voltado para a fonte não reemite a radiação absorvida instantaneamente, surgirá uma força desviada da direção radial. A figura (2.2) descreve este efeito para um corpo em órbita circular resultando em uma contribuição nula para um período orbital, mas em uma órbita elíptica a força resultante é diferente de zero.

Naturalmente estes efeitos dependem do ângulo que o eixo de rotação faz com o plano orbital e de suas características físico-químicas.

#### 2.1. Modelo Térmico

Considere um corpo esférico iluminado por uma fonte de radiação. A distribuição de temperatura pode ser encontrada resolvendo a equação de condução de calor, ou seja:

$$\nabla^2 T = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.1)$$



**Figura (2.1)** Efeito Yarkovsky. O hemisfério que está “anoitecendo” irradia energia e momento linear extra porque ele está mais quente que o hemisfério que está “amanhecendo”. O sentido da força é contrário ao sentido da reemissão de radiação.

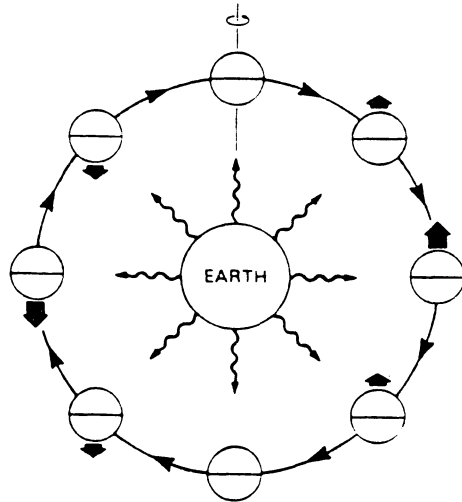
Onde  $T$  é a temperatura,  $\rho$  é a densidade de massa,  $C_p$  é o calor específico a pressão constante e  $k$  é a condutividade térmica.

A condição de contorno é o balanço do fluxo de energia entre a radiação recebida e a emitida e a energia gasta no gradiente de temperatura corpo, que é dado por:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} + \epsilon \sigma T^4 = \alpha I. \quad (2.2)$$

Onde  $\epsilon$  é a emissividade superficial,  $\alpha$  a absorvidade superficial,  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann,  $I$  a irradiação recebida pelo corpo,  $r$  a coordenada radial centrada no corpo de raio  $R$ .

Podemos linearizar a equação acima se considerarmos que a temperatura tenha uma variação pequena em relação a um valor constante; ou seja  $T = T_0 + \Delta T$ , onde  $\Delta T \ll T_0$ , logo  $T^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T$  se desconsiderarmos termos de ordem maior ou



**Figura (2.2)** Diagrama esquemático mostrando o efeito inverno-verão para um satélite artificial quando o eixo de rotação está no plano orbital. O hemisfério que está voltado para a Terra é aquecido mas não emite a radiação absorvida instantaneamente, no diagrama a emissão máxima ocorre a  $90^\circ$  (Rubincam, 1987).

igual a dois em  $\Delta T$ . Se uma irradiação  $I_o$  é responsável por um aquecimento  $T_o$ , então  $I = I_o + \Delta I$ , resultando em duas equações:

$$\nabla^2(\Delta T) = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$k \frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\epsilon\sigma T_o^3(\Delta T) = \alpha\Delta I. \quad (2.4)$$

A solução das equações acima fornecem uma variação harmônica no tempo:

$$\Delta T(d, r, \theta, \phi, t) = \Delta \hat{T}(d, r, \theta, \phi) e^{i\nu t} \quad (2.5.1)$$

$$\Delta I(d, \theta, \phi, t) = \hat{I}(d, \theta, \phi) e^{i\nu t} \quad (2.5.2)$$

Onde  $d$  é a distância da fonte de radiação,  $\nu$  é a frequência de rotação do corpo e  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas esféricas do corpo.

Substituindo as equações (2.5.1) e (2.5.2) nas (2.3) e (2.4), respectivamente, obtemos:

$$\nabla^2(\Delta \hat{T}) = -\kappa^2(\Delta \hat{T}), \quad (2.6.1)$$

$$k \frac{\partial(\Delta \hat{T})}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\epsilon\sigma T_o^3(\Delta \hat{T}) = \alpha \hat{I}, \quad (2.6.2)$$

onde:

$$\kappa^2 = \frac{-i\nu\rho C_p}{k} \quad (2.7)$$

Em coordenadas esféricas a equação (2.6.1), torna-se:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta \hat{T}}{\partial \phi^2} = -\kappa^2 \Delta \hat{T} \quad (2.8)$$

Podemos resolver a equação (2.8) supondo a função  $\Delta \hat{T}$  possa ser escrita como o produto de três funções, que dependam cada uma de uma variável, ou seja,  $\Delta \hat{T} = A(r)B(\theta)C(\phi)$ , logo:

$$\frac{d^2 C}{d\phi^2} + m^2 C = 0 \quad (2.8.1)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) B = 0 \quad (2.8.2)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + (\kappa^2 r^2 - l(l+1)) A = 0 \quad (2.8.3)$$

onde  $m$  e  $l$  são constantes inteiras, sendo:  $l = 0, 1, 2 \dots$  e  $-l < m < l$ .

Resolvendo as equações acima (ver Butkov, 1978), obtemos:

$$\Delta \hat{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos \theta) j_l(\kappa r) e^{im\phi}. \quad (2.9)$$

Onde  $P_l^m(\cos \theta)$  são os polinômios associados de Legendre,  $j_l(\kappa r)$  são as funções esféricas de Bessel e  $C_{l,m}$  são as constantes de integração.

Os coeficientes  $C_{l,m}$  podem ser obtidos modelando a variação da irradiação como sendo dependente dos polinômios associados de Legendre e de uma variação harmônica na coordenada angular  $\phi$ :

$$I(d, \theta, \phi) = I_o \left( \frac{d_o}{d} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (2.10)$$

Onde  $d_o$  corresponde a distância do corpo a fonte onde a irradiação é  $I_o$ .  $f_{l,m}$  são os coeficientes da expansão.  $T_o$  também apresenta dependência com a distância do corpo a fonte, de forma que  $T_o^3 = T_o^3 \left( \frac{d_o}{d} \right)^3$ .

Substituindo a equação (2.10) na (2.6.2), obtemos:

$$C_{l,m} = \frac{\alpha I_o d_o^2 f_{l,m}}{4\epsilon\sigma d^2 T_o^3 j_l(\kappa R) + d^2 k \frac{\partial j_l(\kappa r)}{\partial r} \Big|_{r=R}} \quad (2.11)$$

Logo a solução final da distribuição de temperatura na superfície do corpo é:

$$\Delta T(d, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\alpha I_o d_o^2 f_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\nu t}}{4\epsilon\sigma d^2 T_o^3 + \frac{k d^2}{j_l(\kappa r)} \frac{\partial j_l(\kappa r)}{\partial r} \Big|_{r=R}}. \quad (2.12)$$

Reescrevendo as funções esféricas de Bessel na forma:

$$\frac{1}{j_l(\kappa R)} \frac{\partial j_l(\kappa r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = X_l + i Y_l. \quad (2.13)$$

Temos:

$$\Delta T(d, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m} \alpha I_o d_o^2 P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\nu t}}{(4\epsilon\sigma d^2 T_o^3 + d^2 k X_l) \left( 1 + \frac{k Y_l i}{4\epsilon\sigma T_o^3 + k X_l} \right)}. \quad (2.14)$$

Definindo:

$$\xi = \frac{k Y_l i}{4\epsilon\sigma T_o^3 + k X_l} \quad (2.15)$$

onde:

$$\delta = \arctan \xi. \quad (2.16)$$

Obtemos então a distribuição de temperatura no corpo:

$$\Delta T(d, R, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m} \alpha I_o d_o^2 P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\nu t} e^{-i\delta}}{(4\epsilon\sigma d^2 T_o^3 + d^2 k X_l)(1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.17)$$

## 2.2. Arrasto térmico

Se um corpo com elemento de área  $d\vec{A}$  e temperatura  $T$  emitir radiação de acordo com a lei de Lambert (Brown, 1965), então os fótons transportarão momento linear a uma taxa de:

$$\vec{F} = \frac{-2\epsilon\sigma}{3c} T^4 d\vec{A}. \quad (2.18)$$

Substituindo  $T^4$ , temos:

$$\vec{F}(d, t) = \frac{-2\epsilon\sigma}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (T_o^4 + 4T_o^3 \Delta T)(\sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) R^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

A integral em  $T_o$  é nula, restando:

$$\vec{F}(d, t) = \frac{-8\epsilon\alpha\sigma I_o d_o^2 T_o^3 R^2 e^{i(\nu t - \delta)}}{3c d^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m}}{(4\epsilon\sigma T_o^3 + k X_l)(1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} (\sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.19)$$

Resolvendo a integral:

$$\vec{F}(d, t) = \frac{-8d_o^2 \alpha I_o R^2 \pi e^{i(\nu t - \delta)}}{9d^2 c \left(1 + \frac{k X_l}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left( f_{1,1} (\hat{i} + i\hat{j}) + f_{1,0} \hat{k} \right). \quad (2.20)$$

Os valores possíveis de  $l$  é 1, e de  $m$  é 0 ou 1, pois todos os outros valores anulam a integral da equação (2.19). Considerando apenas estes valores para  $l$  e  $m$  na equação (2.10), a fonte irradiará segundo a expressão:

$$I(d, \theta, \phi, t) = \frac{I_o d_o^2}{d^2} (f_{1,0} \cos \theta \cos \phi + f_{1,1} \sin \theta \cos(\nu t + \phi)). \quad (2.21)$$

Considerando apenas a parte real da força de arrasto térmico, temos:

$$\vec{F}(d, t) = \frac{-8d_o^2 \alpha I_o R^2 \pi}{9d^2 c \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left[ f_{1,1} (\cos(\nu t - \delta)\hat{i} - \sin(\nu t - \delta)\hat{j}) + f_{1,o} \cos(\nu t - \delta)\hat{k} \right]. \quad (2.22)$$

Dividindo pela massa ( $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ ), encontramos a aceleração sofrida por um corpo que absorve radiação e a emite desviada de um ângulo de atraso  $\delta$ .

$$\vec{a} = \frac{-2d_o^2 \alpha I_o}{3d^2 \rho c R \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left[ f_{1,1} (\cos(\nu t - \delta)\hat{i} - \sin(\nu t - \delta)\hat{j}) + f_{1,o} \cos(\nu t - \delta)\hat{k} \right] \quad (2.23)$$

### 2.3. Ângulo de Atraso

Da equação (2.16) vemos que  $\delta$  é uma variável angular, que representa o ângulo entre a direção da absorção de radiação e sua reemissão.  $\delta$  depende da condutividade térmica do corpo, calor específico e sua frequência de rotação, através dos valores de X e Y. Como o único valor para  $l$  é 1, temos:

$$\delta = \arctan\left(\frac{kY_1}{4\pi\sigma T_o^3 + kX_1}\right) \quad (2.24)$$

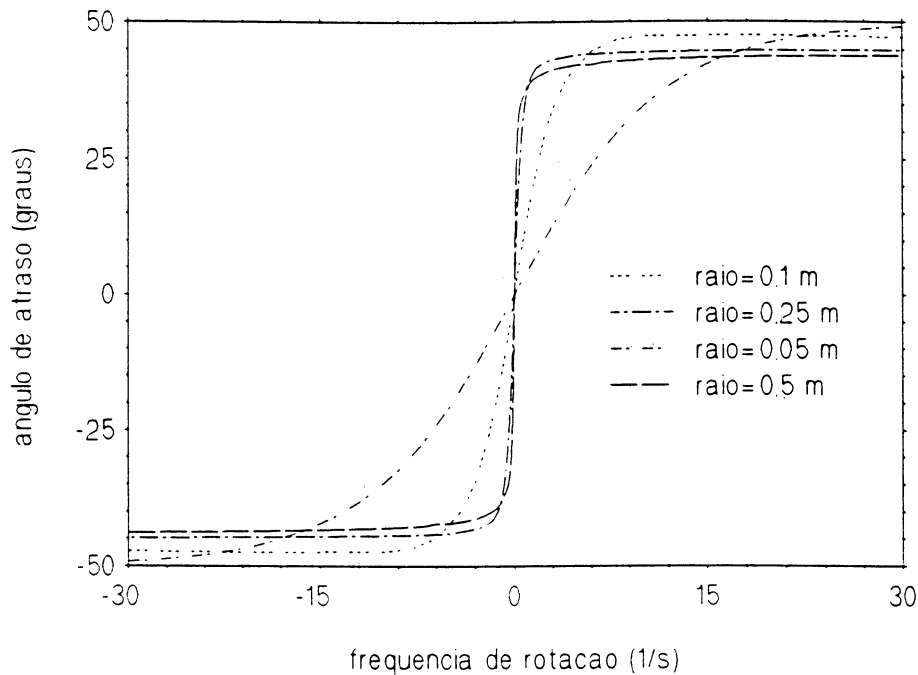
onde:

$$X_1 + iY_1 = \frac{1}{j_1(\kappa R)} \frac{\partial j_1(\kappa r)}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (2.25)$$

sendo:

$$j_1(\kappa r) = \frac{\sin(\kappa r)}{(\kappa r)^2} - \frac{\cos(\kappa r)}{(\kappa r)} \quad (2.26)$$

Resolvendo a equação (2.24) para um corpo de temperatura média de 298 K, calor específico a pressão constante de  $10^3 Jkg^{-1}K^{-1}$ , densidade de  $2500 kgm^{-3}$  e

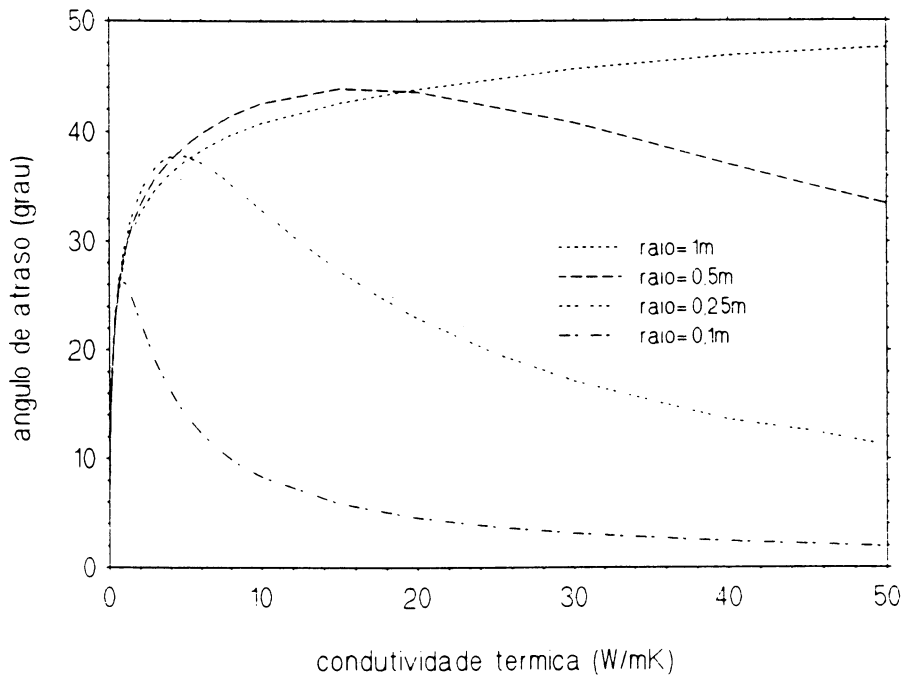


**Figura (2.3)** Variação do ângulo de atraso com a frequência de rotação para corpos esféricos de raios iguais a 0,05 m, 0,1 m, 0,25 m e 0,5 m. Estes corpos possuem  $C_p = 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\rho = 2500 \text{ kgm}^{-3}$  e  $k = 1,34 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

condutividade térmica igual a  $1,34 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , obtemos a variação do ângulo de atraso com a frequência de rotação. A figura (2.3) mostra este resultado considerando quatro diferentes corpos de raios iguais a 0,05 m, 0,1 m, 0,25 m e 0,5 m.

A figura (2.4) mostra a variação do ângulo de atraso com a condutividade térmica, para corpos esféricos de raios iguais a 0,1 m, 0,25 m e 0,5 m, onde a frequência de rotação é  $\nu = 3,5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , e os demais grandezas iguais a da figura (2.3). A figura (2.4) mostra que corpos esféricos muito pequenos com grande quantidade de metais tem





**Figura (2.4)** Variação do ângulo de atraso com a condutividade térmica para corpos esféricos de raios iguais a 0,1 m, 0,25 m e 0,5 m. Estes corpos possuem  $\nu = 3,5 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ,  $C_p = 10^3 \text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}$  e  $\rho = 2500 \text{kgm}^{-3}$ .

constante a temperatura superficial, conseqüentemente o ângulo de atraso é praticamente nulo não ocorrendo nenhum efeito de inércia térmica. Para corpos maiores, da ordem de 1 m de diâmetro, possuem uma distribuição de temperatura não uniforme, acarretando um ângulo de atraso diferente de zero ocorrendo efeitos de inércia térmica.

## 2.4. Efeito Yarkovsky no Plano

Considerando um corpo que orbita uma fonte de radiação e que tenha o

eixo de rotação sobre si mesmo, com frequência angular  $w$  na direção do eixo cartesiano, numa direção perpendicular ao plano orbital e o eixo  $x$  na direção da fonte de radiações (ou seja o sistema de eixos  $(x,y,z)$  coincide com o sistema  $(R,S,W)$ ), podemos modelar a irradiação da fonte sobre a superfície do corpo como:

$$I = \frac{I_o d_o^2}{4d^2} \sin \theta \cos(\omega t + \phi) \quad (2.27)$$

Onde  $1/4$  é o fator de normalização, pois em  $d = d_o$ :

$$\int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I_o}{4} \sin \theta \cos(\omega t + \phi) d\theta d(\omega t + \phi) = I_o.$$

Comparando esta expressão com a equação (2.21) vemos que  $f_{1,1} = \frac{1}{4}$ ,  $f_{1,0} = 0$  e  $\nu = \omega$ . A expressão para o efeito Yarkovsky é:

$$\vec{a} = \frac{-d_o^2 \alpha I_o}{6d^2 \rho c R \left(1 + \frac{kx}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} [\cos(\omega t - \delta) \hat{r} - \sin(\omega t - \delta) \hat{s}]. \quad (2.28)$$

Tirando o módulo desta equação, temos a expressão da aceleração na direção da emissão, que é desviada de um ângulo  $\delta$ . Projetando nos eixos radial e transversal temos:

$$\vec{a} = \frac{-d_o^2 \alpha I_o}{6d^2 \rho c R \left(1 + \frac{kx}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} [\cos(\delta) \hat{r} - \sin(\delta) \hat{s}]. \quad (2.29)$$

## 2.5. Efeito Inverno-Verão

Considerando um corpo que orbita uma fonte de radiação e que tenha o eixo de rotação sobre si mesmo contido no plano orbital, apresentando uma simetria axial, a irradiação da fonte sobre a superfície do corpo pode ser dado por:

$$I = \frac{I_o d_o^2}{4d^2} \cos \theta \cos nt. \quad (2.30)$$

Onde  $n$  é o movimento médio, e  $1/4$  o fator de normalização, pois em  $d = d_o$ :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I_o}{2} \cos \theta \cos nt d\theta d(nt) = I_o.$$

Comparando esta expressão com a equação (2.21) vemos que  $f_{1,1} = 0$ ,  $f_{1,0} = \frac{1}{4}$  e  $\nu = n$ . Então a expressão da aceleração sofrida pelo corpo devido a distribuição assimétrica de temperatura é:

$$\bar{a} = \frac{-d_o \alpha I_o \cos(nt - \delta) \hat{k}}{6d^2 \rho c R \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.31)$$

Um caso particular desta equação acontece quando eliminamos a dependência temporal, que seria análogo a resolver a equação de Laplace da distribuição de temperatura. Neste caso a fonte irradia segundo a expressão:

$$I = \frac{I_o d_o^2}{2d^2} \cos \theta. \quad (2.32)$$

Onde em  $d = d_o$ :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I_o}{2} \cos \theta = I_o.$$

Comparando esta expressão com a equação (2.21) obtemos que  $f_{1,1} = 0$  e  $f_{1,0} = \frac{1}{2}$ .

Para eliminarmos a dependência temporal da equação da aceleração, basta fazer  $\nu = 0$  e obtemos  $X_1 = \frac{1}{R}$  e  $Y_1 = 0$ , logo  $\xi = \delta = 0$ , resultando a expressão:

$$\bar{a} = \frac{-d_o^2 \alpha I_o \hat{k}}{3d^2 \rho c R \left(1 + \frac{k}{4\epsilon\sigma R T_o^3}\right)}. \quad (2.33)$$

Que concorda com o trabalho de Afonso et al. (1989).

## 2.6. Perturbação Yarkovsky no Problema de 2-Corpos

A equação do problema de 2-corpos com uma perturbação pode ser escrita na forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_p \quad (2.34)$$

onde  $\vec{a}_p$  é a perturbação.

Para resolver o problema em coordenadas cartesianas, necessitamos da matriz de Euler para transformar o sistema osculador  $(R, S, W)$ , no sistema cartesiano  $(X, Y, Z)$  (ver figura 2.5), onde a equação da perturbação Yarkovsky é dado pela equação (2.26) que apresenta uma perturbação radial ( $a_r$ ) e uma transversal ( $a_s$ ), mas não apresenta, neste caso especial, perturbação na direção perpendicular ao plano orbital  $a_w = 0$ .

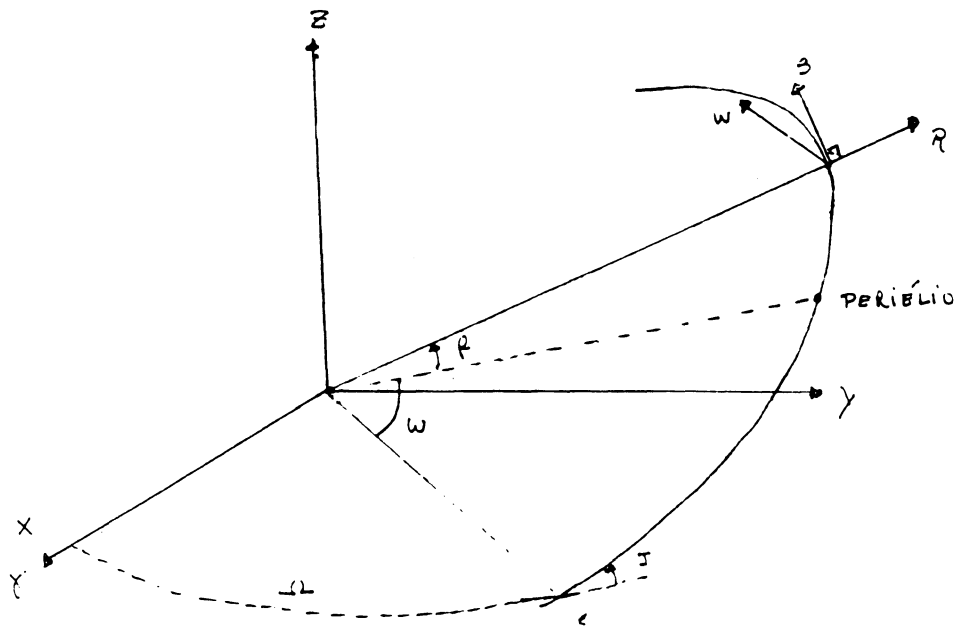
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_s \\ a_w \end{pmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + f) \\ P_y &= \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + f) \\ P_z &= \sin i \sin(\omega + f) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -\sin(\omega + f) \cos \Omega - \cos(\omega + f) \sin \Omega \cos i \\ Q_y &= -\sin(\omega + f) \sin \Omega + \cos \Omega \cos i \cos(\omega + f) \\ Q_z &= \sin i \cos(\omega + f) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} R_x &= \sin i \sin(\omega + f) \\ R_y &= -\sin i \cos \Omega \\ R_z &= \cos i \end{aligned} \quad (2.37)$$



**Figura (2.5)** Figura esquemática do sistema de coordenadas cartesianas (X,Y,Z) e o sistema osculador (R,S,W).

A equação (2.34) pode ser integrada numericamente e a perturbação Yarkovsky poderá ser ajustada na forma:

$$\vec{a} = \frac{\gamma}{r^{\frac{7}{2}}} \cos \delta \hat{r} - \frac{\gamma}{r^{\frac{7}{2}}} \sin \delta \hat{s}. \quad (2.38)$$

A variação no semi-eixo maior e na excentricidade devido a esta perturbação pode ser encontrado substituindo  $R = \frac{\gamma}{r^{\frac{7}{2}}} \cos \delta$  e  $S = \frac{-\gamma}{r^{\frac{7}{2}}} \sin \delta$  nas equações de Gauss. Temos então:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{-\gamma \sin \delta}{r^{\frac{7}{2}}} (1 + e \cos f) + \frac{\gamma \cos \delta}{r^{\frac{7}{2}}} e \sin f \right]. \quad (2.39)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{na} \left[ \frac{\gamma \cos \delta}{r^{\frac{3}{2}}} \sin f - \frac{\gamma \sin \delta}{r^{\frac{3}{2}}} (\cos f + \cos E) \right]. \quad (2.40)$$

onde :

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f}. \quad (2.41)$$

Para encontrarmos a média destas equações, utilizamos a equação (1.43), obtendo:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{-\gamma \sin \delta}{\pi \sqrt{\mu} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} a^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos f)^{\frac{5}{2}} df, \quad (2.42)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{-\gamma \sin \delta}{2\pi \sqrt{\mu} a^3 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + e \cos f} (2 \cos f + \cos f^2 + e) df. \quad (2.43)$$

Expandindo os integrandos em série, e integrando as equações, temos:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{-\gamma \sin \delta}{\sqrt{\mu} a^2} \left[ \frac{6865}{512} e^4 + \frac{55}{8} e^2 + 2 \right], \quad (2.44)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{-\gamma \sin \delta}{2\sqrt{\mu} a^3} \left[ \frac{1915}{256} e^5 - \frac{3}{16} e^4 + 6e^3 - \frac{1}{8} e^2 + 4e \right]. \quad (2.45)$$

Para pequenas excentricidades:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{-2\gamma \sin \delta}{\sqrt{\mu} a^2}, \quad (2.46)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{-2\gamma e \sin \delta}{\sqrt{\mu} a^3}. \quad (2.47)$$

Integrando as equações acima, temos:

$$a(t) = a_o \left[ 1 - \frac{6\gamma \sin \delta (t - t_o)}{\sqrt{\mu} a_o^3} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.48)$$

$$e(t) = e_o \left[ 1 - \frac{6\gamma \sin \delta (t - t_o)}{\sqrt{\mu} a_o^3} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.49)$$

Peterson (1976) obteve as seguintes expressões para as variações; considerando pequenas excentricidades:

$$a(t) = a_o \left( 1 - \frac{6Qt}{\sqrt{\mu} a_o^3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.50)$$

$$e(t) = e_o \left( 1 - \frac{6Qt}{\sqrt{\mu}a_o^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.51)$$

onde  $Q = \frac{0.606\alpha I_o}{cP\rho R}$  que é a aceleração que um corpo esférico possui devido ao efeito Yarkovsky a 1 *U.A.*, sendo  $P = \frac{\pi T_o}{\alpha I_o} \left( \frac{1}{2} \rho C_p k \omega \right)^{\frac{1}{2}}$ .

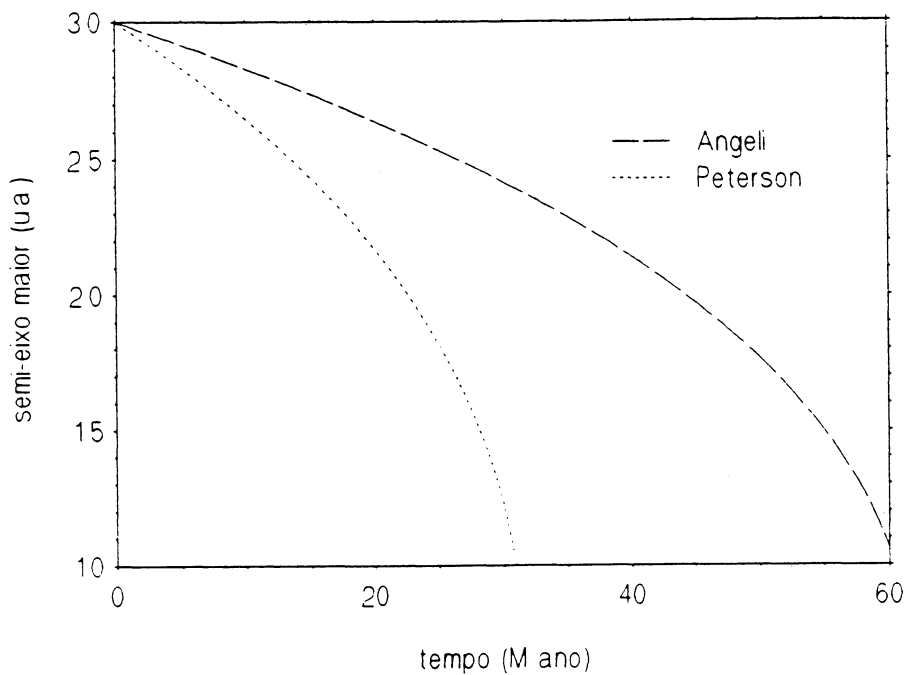
Tomando o raio da esfera  $R$  igual a 50 *cm*,  $\rho$  igual a 2,5 *g cm<sup>-3</sup>* e  $P$  igual a 17,1 e  $I_o$  igual 1400 *Wm<sup>-2</sup>* a 1 *U.A.*, Peterson obteve para a variação do semi-eixo maior a seguinte expressão:

$$a(t) = a_o \left( 1 - \frac{0,84t}{a_o^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.52)$$

Peterson (1976) chegou a conclusão que um meteorito de 1 m de diâmetro sobre a influência do efeito Yarkovsky, partindo de 3 *U.A.* alcançaria 1 *U.A.* em 30 *Mano*. Angeli (1991) integrando nas equações de Gauss este efeito com seu modelo do efeito Yarkovsky obteve um tempo de 60 *Mano*, que equivale a uma equação ajustada na forma:

$$a(t) = a_o \left( 1 - \frac{0,43t}{a_o^3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.53)$$

A figura (2.6) mostra a comparação do resultado de Peterson (1976) e de Angeli (1991).



**Figura (2.6)** *Possível evolução orbital de um corpo esférico de 1 m de diâmetro sob a influência do efeito Yarkovsky. Comparação do resultado obtido por Peterson (1976) e Angeli (1991). Semi-eixo maior inicial igual a 3 U.A..*



## Capítulo 3

### Problema de 3-Corpos Perturbado por Forças Não-Gravitacionais

Nos capítulos anteriores vimos que forças dissipativas devido ao efeito Poyntig-Robertson e efeito Yarkovsky causam um decréscimo secular no semi-eixo maior e na excentricidade da órbita, fazendo com que um corpo sob a influência destas forças caiam em direção ao Sol. Conseqüentemente este corpo atingirá zonas de ressonância gravitacional com os planetas do sistema solar, o que significa que a razão entre o movimento médio do planeta,  $n_p$ , e do corpo,  $n_c$ , são números inteiros.. Esta razão elevada ao quadrado corresponde através da terceira lei de Kepler a uma razão do semi-eixo maior do planeta,  $a_p$ , e do corpo,  $a_c$ , elevado ao cubo, ou seja:  $\left(\frac{n_p}{n_c}\right)^2 = \left(\frac{a_p}{a_c}\right)^3$ .

#### 3.1. Pressão de Radiação e Efeito Poyting-Robertson no Problema de 3-Corpos

Gonczi et al. (1982), estudou os efeitos da perturbação gravitacional de Júpiter sob uma partícula, conjuntamente com o efeito Poynting-Robertson, onde neste artigo é considerado apenas o termo  $\alpha \frac{\vec{v}}{r^2}$ . Neste item faremos de forma análoga ao trabalho de Gonczi et al. (1982), a integração numérica de 3- corpos sujeito a perturbação da pressão de radiação e efeito Poynting-Robertson.

Consideremos uma partícula no campo gravitacional do Sol (massa  $m_1$ ) e Júpiter (massa  $m_j$ ), orbitando seu centro de massa comum. As distâncias da partícula a estes pontos são respectivamente denotadas por  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r$ .

A unidade de tempo é ano, a unidade de massa é a massa solar e a unidade de comprimento é a unidade astronômica, logo o valor numérico da constante gravitacional ( $K$ ) é  $4\pi^2$ .

A equação do movimento da partícula, considerando a pressão de radiação e o efeito Poynting–Robertson devido ao Sol, é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -K' m_1 \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) - K m_j \left( \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) - \alpha \dot{r}_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\alpha \vec{v}}{r_1^2}, \quad (3.1)$$

onde  $\dot{r}_1 = \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1}$  e  $K' = K - c\alpha$ .

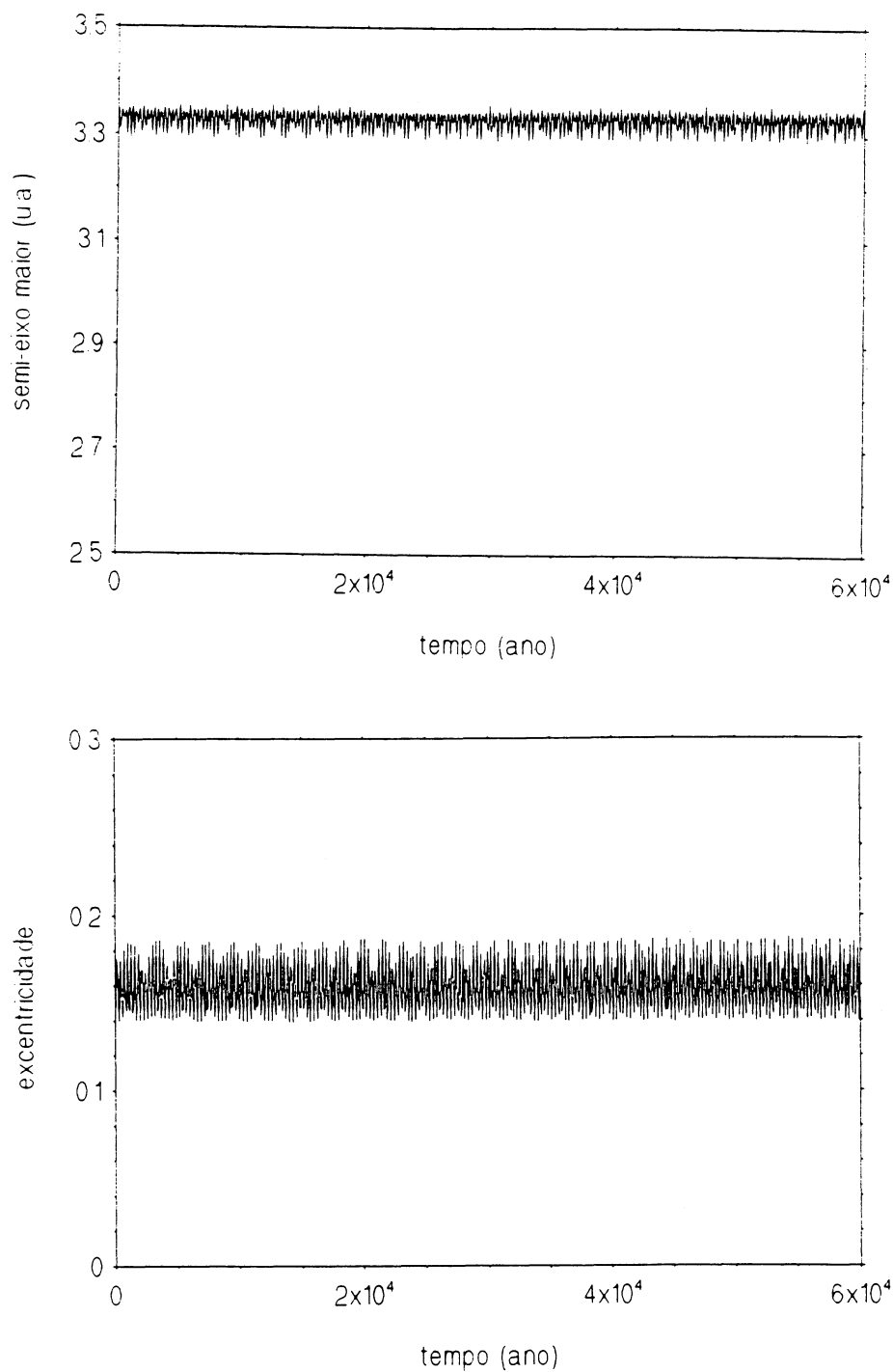
Para a integração escolhemos uma partícula com raio de  $10^{-3} \text{ cm}$  e massa específica igual a  $2 \text{ g cm}^{-3}$ , então o valor de  $\alpha$  é igual a  $2 \times 10^{-5} \text{ A.U.}^2 \text{ ano}^{-1}$ . Como a massa da partícula é muito pequena comparada com a de Júpiter e Sol, trataremos o caso restrito de 3-corpos onde a influência gravitacional da partícula sob o Sol e Júpiter é negligenciável.

### 3.1.1 Problema Restrito de 3-Corpos sem Dissipação

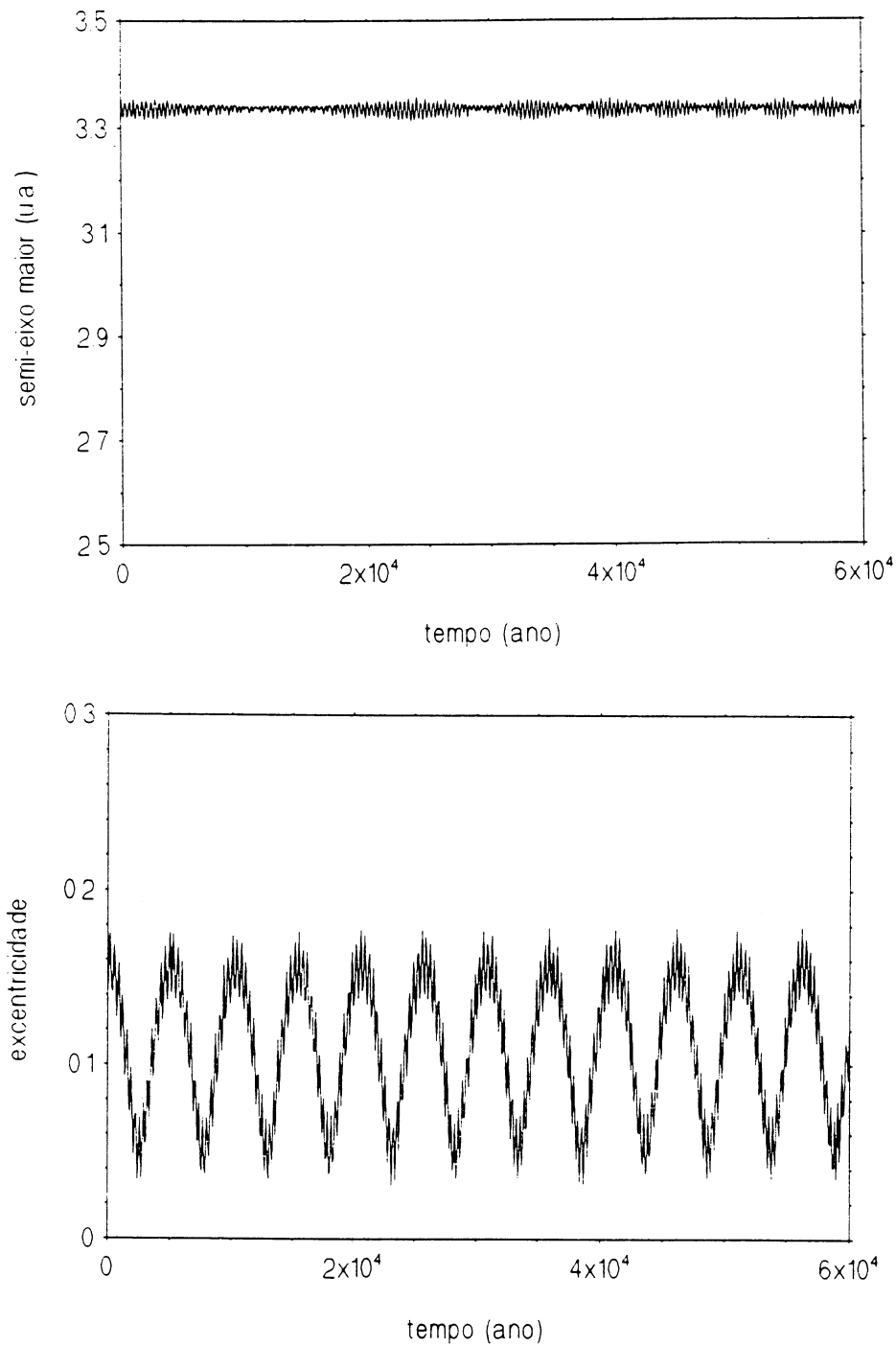
Para destacar o efeito da dissipação não-gravitacional no problema de 3-corpos (Sol-Júpiter-asteróide), integraremos a equação (3.1) sem a pressão de radiação e o efeito Poynting–Robertson, fazendo  $\alpha = 0$ .

Consideremos inicialmente o problema circular, onde assumimos a órbita de Júpiter circular ( $e_j = 0$ ). A figura (3.1) mostra o resultado da integração numérica para a variação temporal do semi-eixo maior e da excentricidade, onde inicializamos com valores para o semi-eixo maior ( $a_o$ ) igual a  $3,36 \text{ U.A.}$ , excentricidade  $e_o$  igual a  $0,14$ , para o argumento do pericentro ( $w_o$ ) e anomalia verdadeira ( $f_o$ ) o valor de  $\frac{\pi}{3}$  e os demais elementos osculadores nulos.

A figura (3.2) fornecem a variação temporal do semi-eixo maior e da excentricidade, respectivamente, considerando na integração, as mesmas condições iniciais anteriores, mas agora assumindo a órbita excêntrica de Júpiter.



**Figura (3.1)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de uma partícula no campo gravitacional do Sol e Júpiter, considerando a órbita de Júpiter circular. As condições iniciais são  $a_o = 3,36 U.A.$ ,  $e_o = 0,14$ ,  $w_o = f_o = \frac{\pi}{3}$*



**Figura (3.2)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de uma partícula no campo gravitacional do Sol e Júpiter, com as mesmas condições iniciais da figura (3.1), considerando a órbita excêntrica de Júpiter*

### 3.1.2 Problema Restrito de 3-Corpos com Dissipação

Consideremos que a partícula esteja sendo perturbada pela pressão de radiação e o efeito Poynting-Robertson. A figura (3.3), mostra a variação do semi-eixo maior e excentricidade desta partícula, considerando a órbita circular de Júpiter, com as mesmas condições iniciais anteriores.

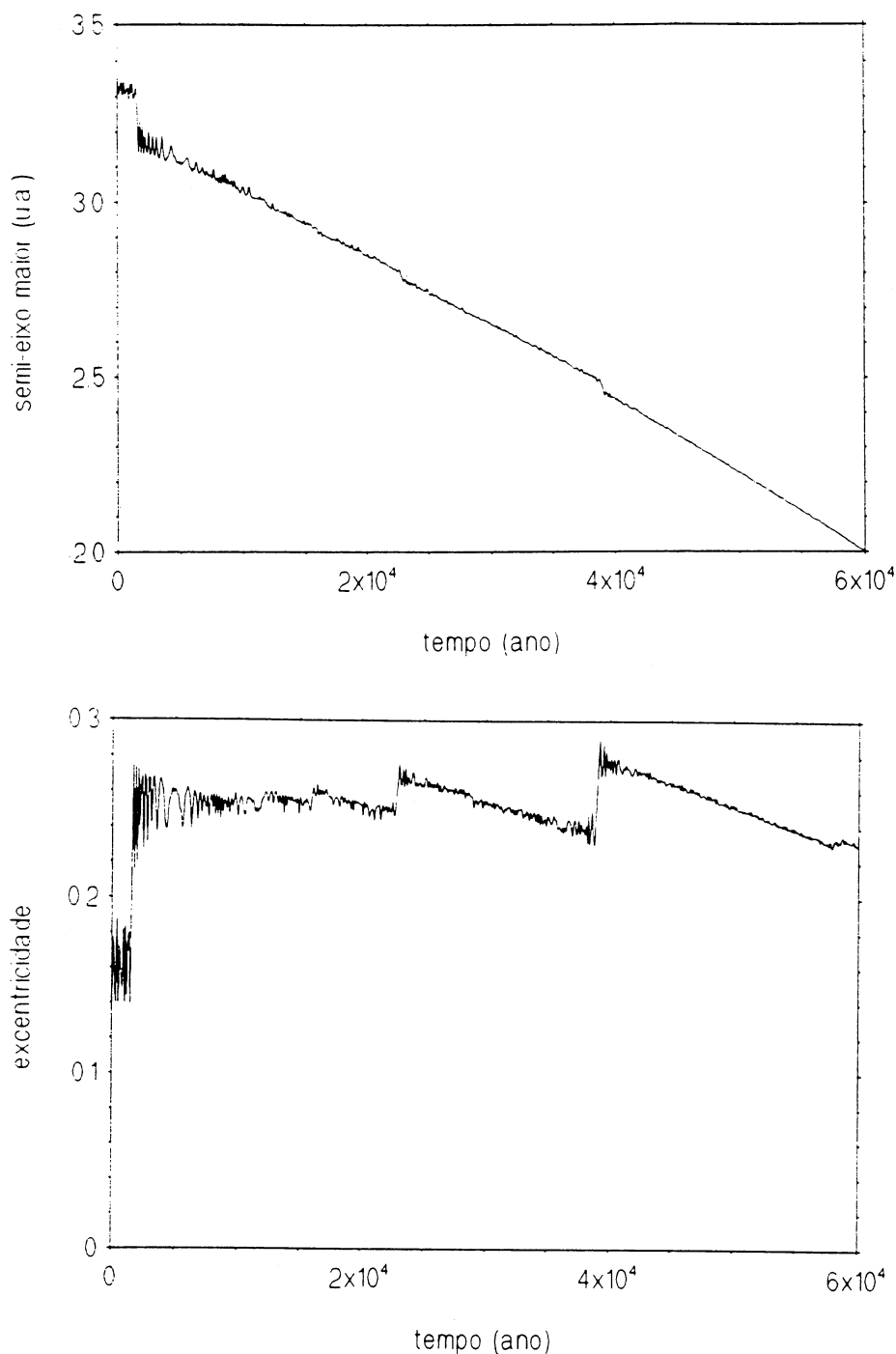
Considerando a excentricidade de Júpiter obtemos para a variação do semi-eixo maior e excentricidade desta partícula os resultados descritos na figura (3.4). Estes resultados mostram que o efeito Poynting-Robertson causa um decréscimo no semi-eixo maior fazendo com que a partícula seja conduzida para as regiões de ressonância. Inicialmente a partícula atravessa a região de ressonância 2:1 ( $a = 3,28 U.A.$ ) com um decréscimo rápido do semi-eixo maior e um aumento rápido da excentricidade, podemos também observar este efeito nas ressonâncias 5:2 ( $a = 2,8 U.A.$ ) e 3:1 ( $a = 2,5 U.A.$ ).

A perturbação devido ao efeito Poynting-Robertson se mostra eficaz para explicar a presença de partículas próximo à órbita da Terra, oriundas de regiões do cinturão de asteróides. Sendo um efeito importante para partículas micro-métricas e negligenciável para pequenos corpos da ordem de 1  $m$  de diâmetro, como fragmentos de asteróides, ele não é eficiente para explicar a presença destes fragmentos próximo à Terra. Um outro efeito não-gravitacional prevalece para estes pequenos corpos, o efeito Yarkovsky.

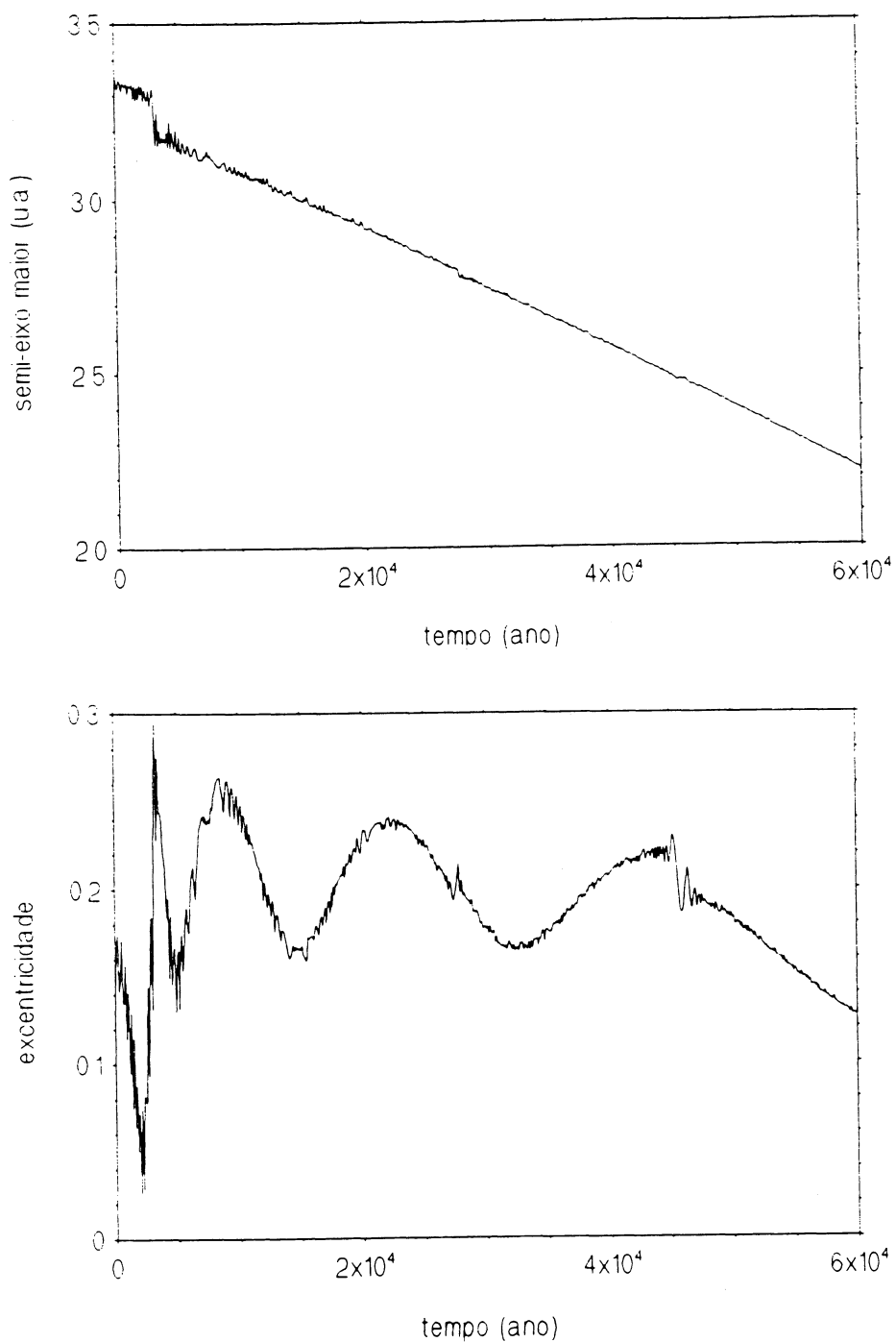
### 3.2. Perturbação Yarkovsky no Problema de 3- Corpos

Consideremos um corpo no campo gravitacional do Sol e Júpiter e perturbado pelo efeito Yarkovsky. A massa do corpo é negligenciável quando comparada com a do Sol e Júpiter. Com as mesmas notações anteriores, a equação do movimento é dada por:

$$\vec{r} = -K m_1 \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) - K m_J \left( \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) + \vec{a}_Y. \quad (3.2)$$



**Figura (3.3)** *Varição temporal do semi-eixo maior e excentricidade de uma partícula no campo gravitacional do Sol e Júpiter e perturbada pela pressão de radiação e efeito Poynting-Robertson, considerando a órbita de Júpiter circular. As condições iniciais são as mesmas da figura (3.1).*



**Figura (3.4)** *Varição temporal do semi-eixo maior e excentricidade de uma partícula no campo gravitacional do Sol e Júpiter, sob a perturbação da pressão de radiação e efeito Poynting-Robertson, com as mesmas condições iniciais da figura (3.1).*

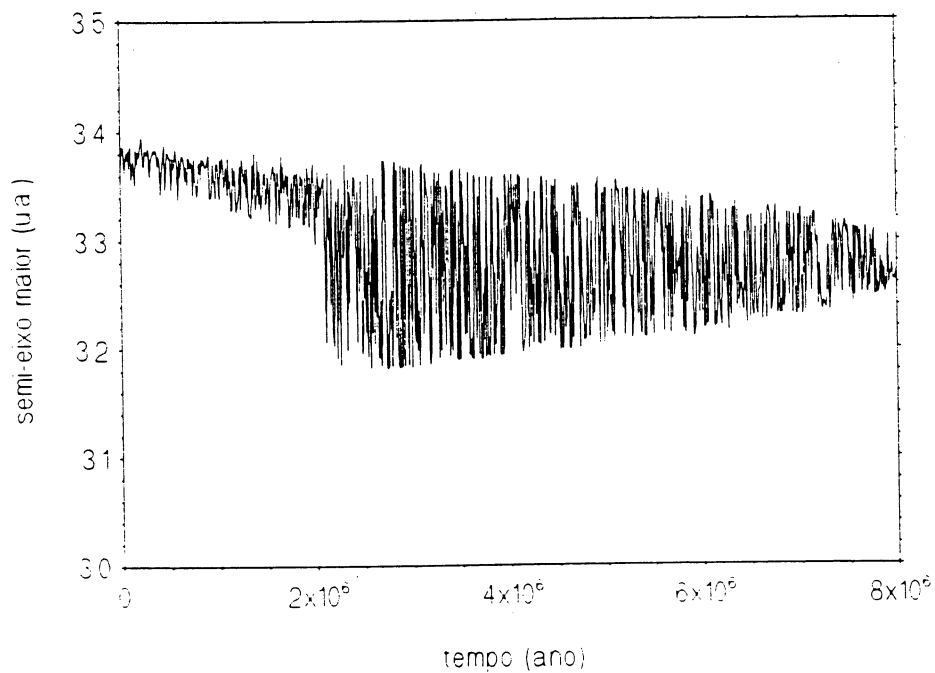
onde  $a_Y$  é a aceleração devido ao efeito Yarkovsky.

A integração numérica é a mesma feita no caso do efeito Poyting-Robertson, com a diferença de que a força não gravitacional é dado pela equação (2.26), logo para obtemos o efeito Yarkovsky em coordenadas cartesianas necessitamos da matriz de transformação de Euler, equações (2.32).

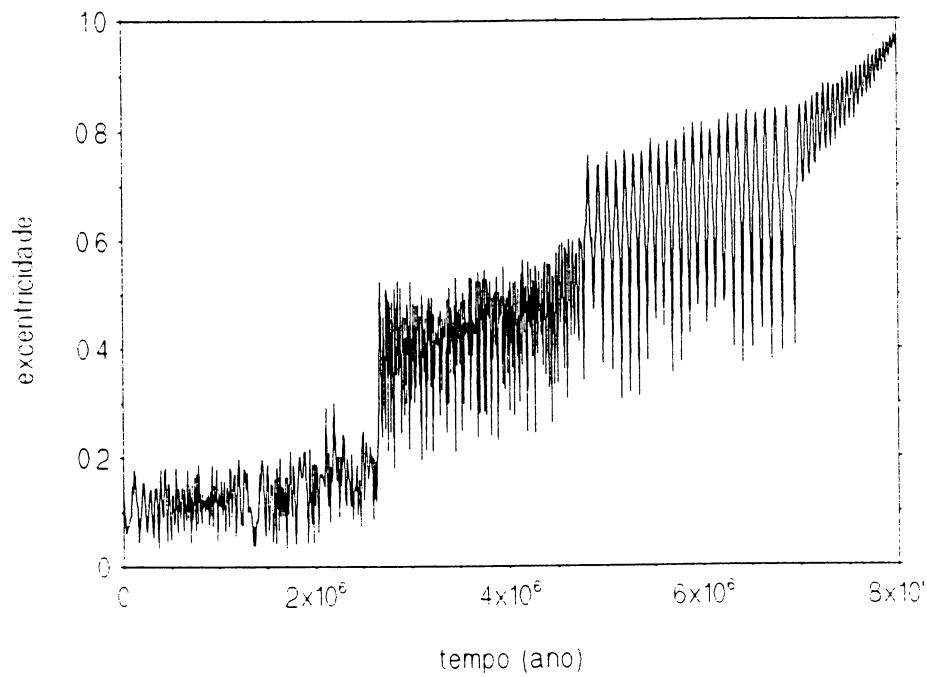
O corpo que iremos estudar possui como características a absorvidade e a emissividade iguais a 0,9, a densidade absoluta igual a  $2500\text{kgm}^{-3}$ , raio igual  $0,5\text{m}$ , temperatura média de  $298\text{K}$ , calor específico a pressão constante a  $10^3\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ , a frequência angular de  $3,5 \times 10^{-4}$  e condutividade térmica igual a  $1,34\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . O fluxo solar a 1 U.A. igual a  $1400\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ .

A figura (3.5) mostra a variação do semi-eixo maior com o tempo, onde o corpo é aprisionado na ressonância 2:1 com Júpiter. A figura (3.6) mostra a variação da excentricidade com o tempo, onde há um aumento do valor da excentricidade até que a órbita se torne hiperbólica.





**Figura (3.5)** *Varição temporal do semi-eixo maior de um corpo esférico de 1 m de diâmetro sob a influência do efeito Yarkovsky e a perturbação gravitacional de Júpiter. As condições iniciais são:  $a_0 = 3,36 U.A.$ ,  $e_0 = 0,17$  e os demais elementos orbitais nulos.*



**Figura (3.6)** *Varição temporal da excentricidade de um corpo esférico de 1 m de diâmetro sob a influência do efeito Yarkovsky e a perturbação gravitacional de Júpiter. As condições iniciais são as mesmas da figura (3.5).*

## Capítulo 4

### Problema de 4-Corpos Perturbado pelo Efeito Yarkovsky

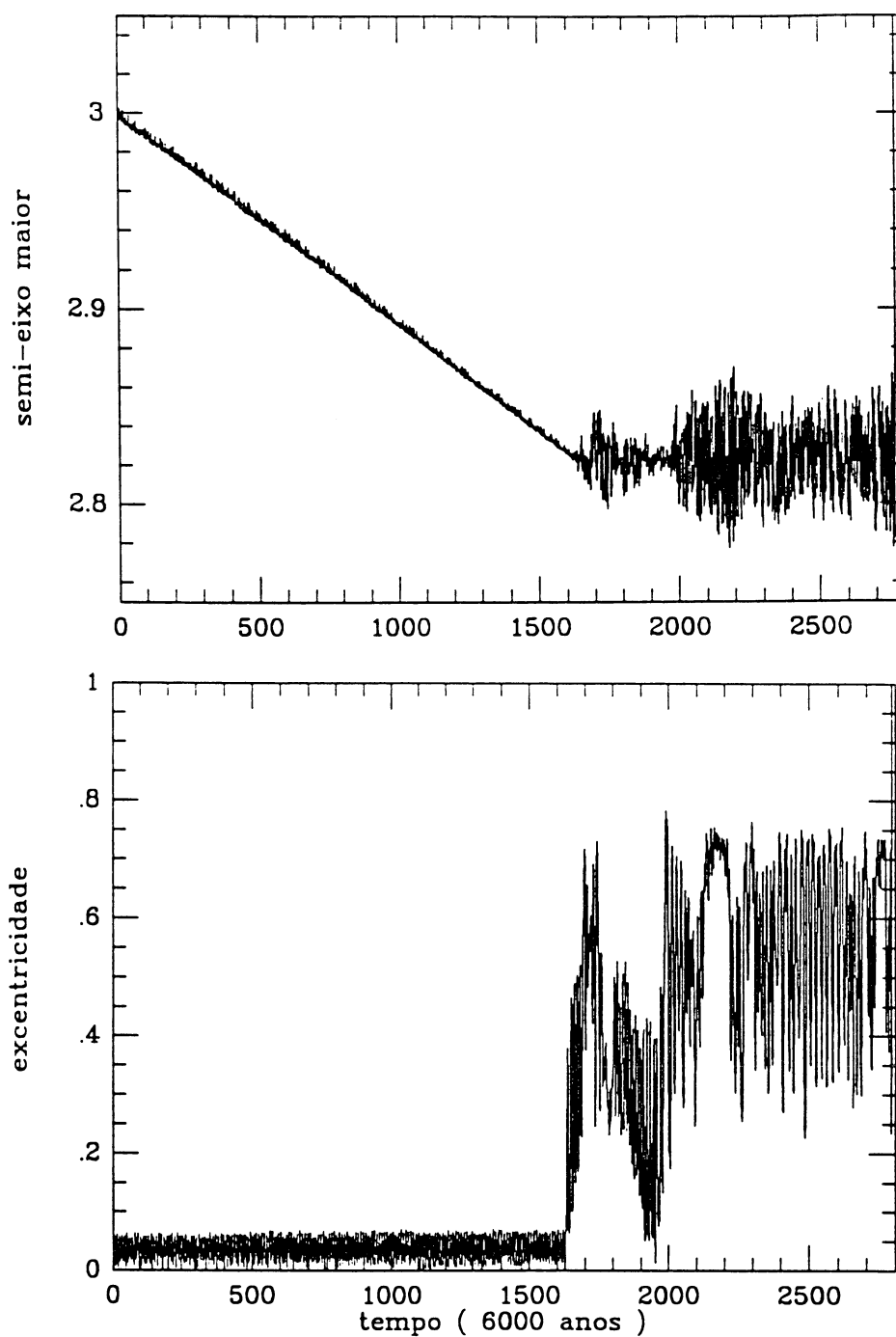
Neste capítulo faremos integrações numéricas do problema de um corpo de diâmetro com as mesmas características físico-químicas descritas no capítulo anterior, sujeito a atração gravitacional do corpo central (Sol), dos planetas Júpiter e Saturno e sujeito ao efeito Yarkovsky.

#### 4.1. Exemplos Dissipativos

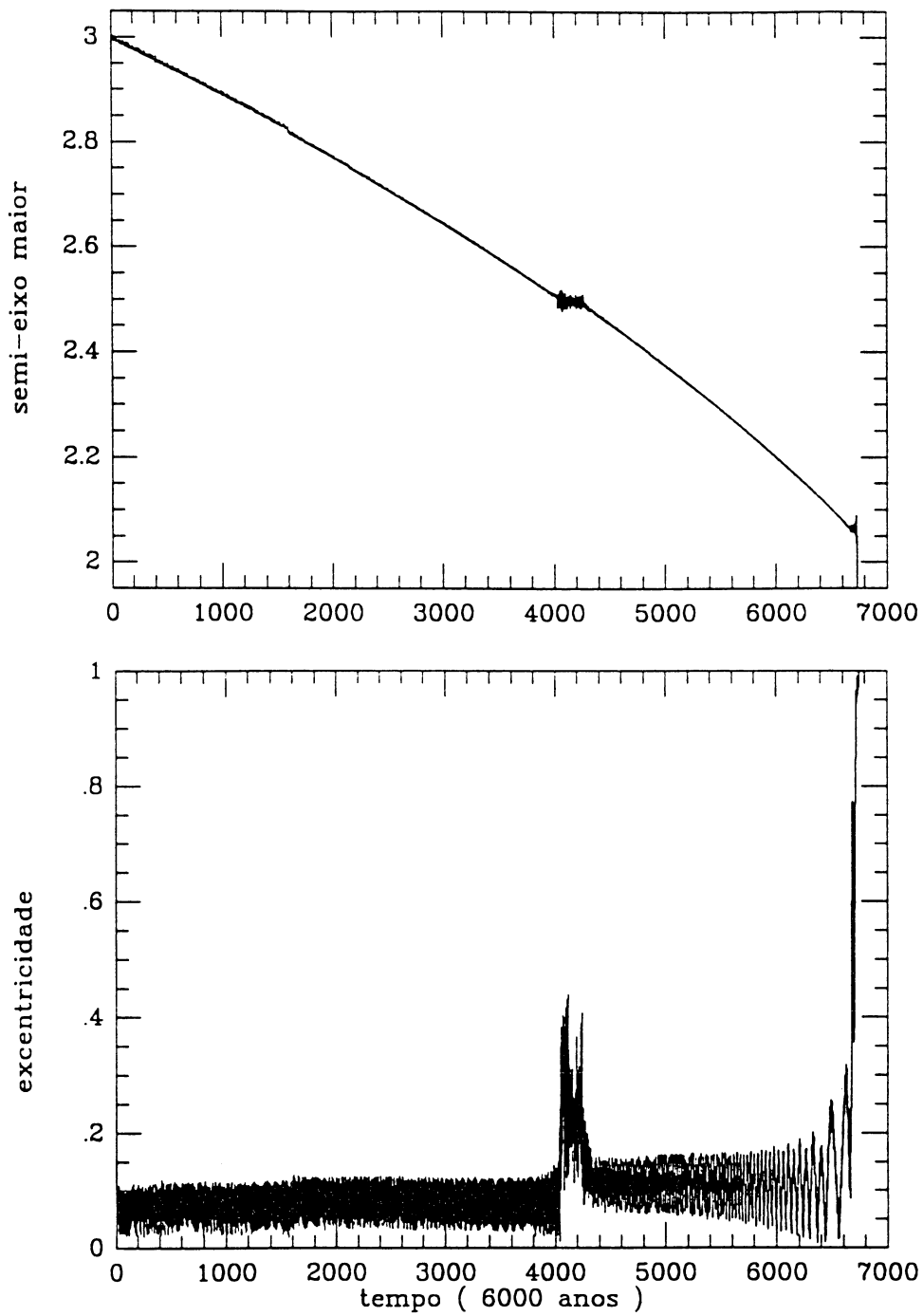
Iniciamos com corpo teste em 3 U.A. com as perturbações de Júpiter e Saturno com excentricidade e inclinação inicial pequenas sujeito ao efeito Yarkovsky. A figura 4.1 mostra este caso, onde o corpo é capturado na ressonância 5:2 com Júpiter entorno de 2,82 U.A.. Esta captura é muito instável e ocasiona um aumento na excentricidade até 1 (órbita hiperbólica) depois de 5 Mano. Durante algum tempo este corpo se torna um cruzador da órbita da Terra ( em uma excentricidade alta em 0,64). O exemplo da figura 4.1 é o de uma captura instável, comumente conhecida como captura temporária.

A figura 4.2 mostra o mesmo corpo teste utilizado na figura 4.1 mas com condições iniciais um pouco diferente para a excentricidade. Este corpo escapa da ressonância 5:2 mas é capturado na 4:1 com Júpiter entorno de 2,06 U.A.. Um caso típico de captura temporária. O corpo entra em órbita hiperbólica de pois de 0,3 Mano.

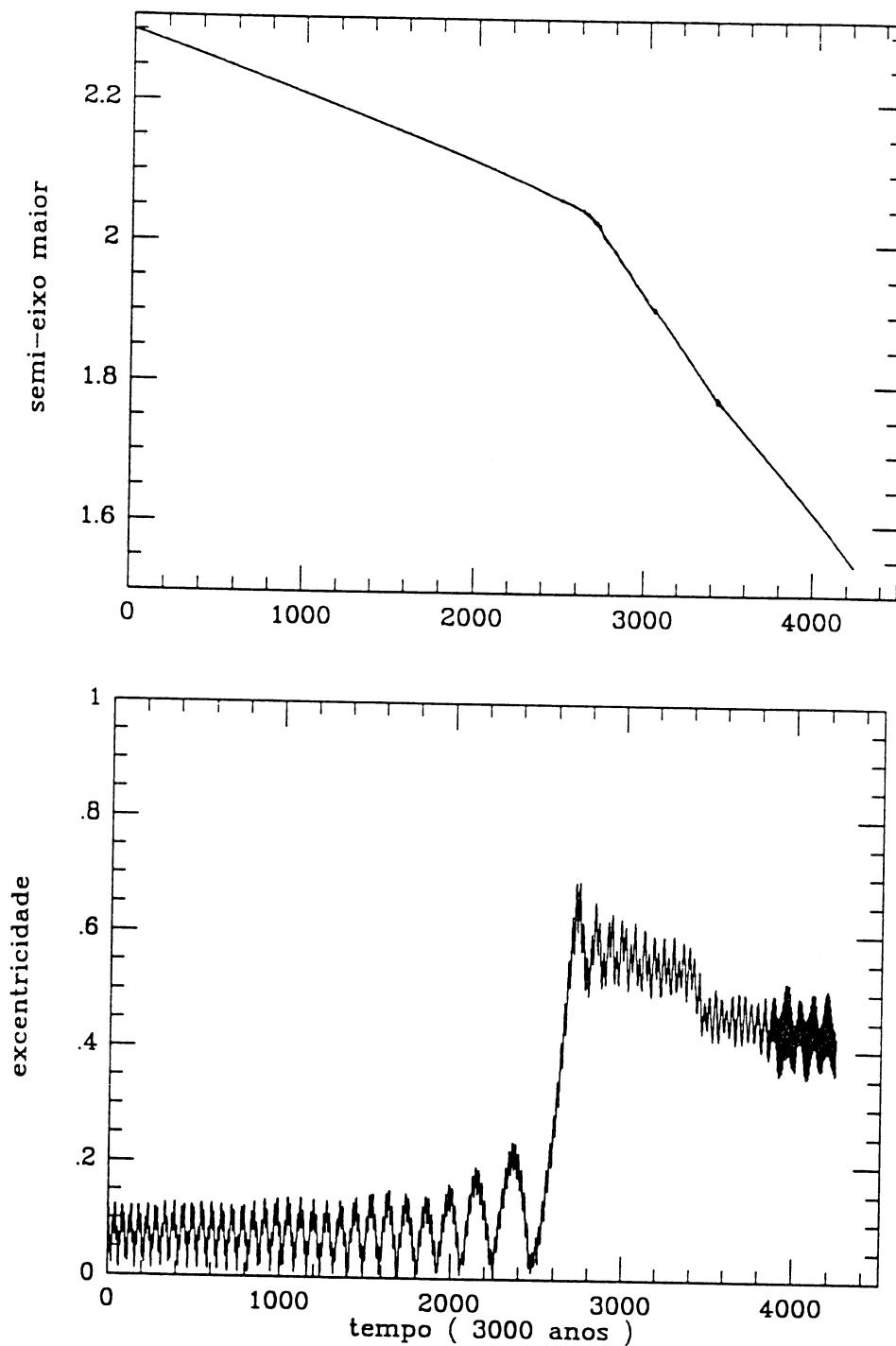
Iniciando o corpo teste a 2,3 U.A. como na figura 4.3, observamos que o corpo escapa da ressonância 4:1 e não é ejetado para fora do Sistema Solar. Este é mais um exemplo de cruzador da órbita terrestre.



**Figura (4.1)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de um corpo no campo gravitacional do Sol, Júpiter e Saturno, sujeito ao efeito Yarkovsky dissipativo. Observamos uma captura do corpo na ressonância 5:2 com Júpiter*



**Figura (4.2)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de um corpo no campo gravitacional do Sol, Júpiter e Saturno, sujeito ao efeito Yarkovsky dissipativo. Observamos uma captura do corpo na ressonância 4:1 com Júpiter*



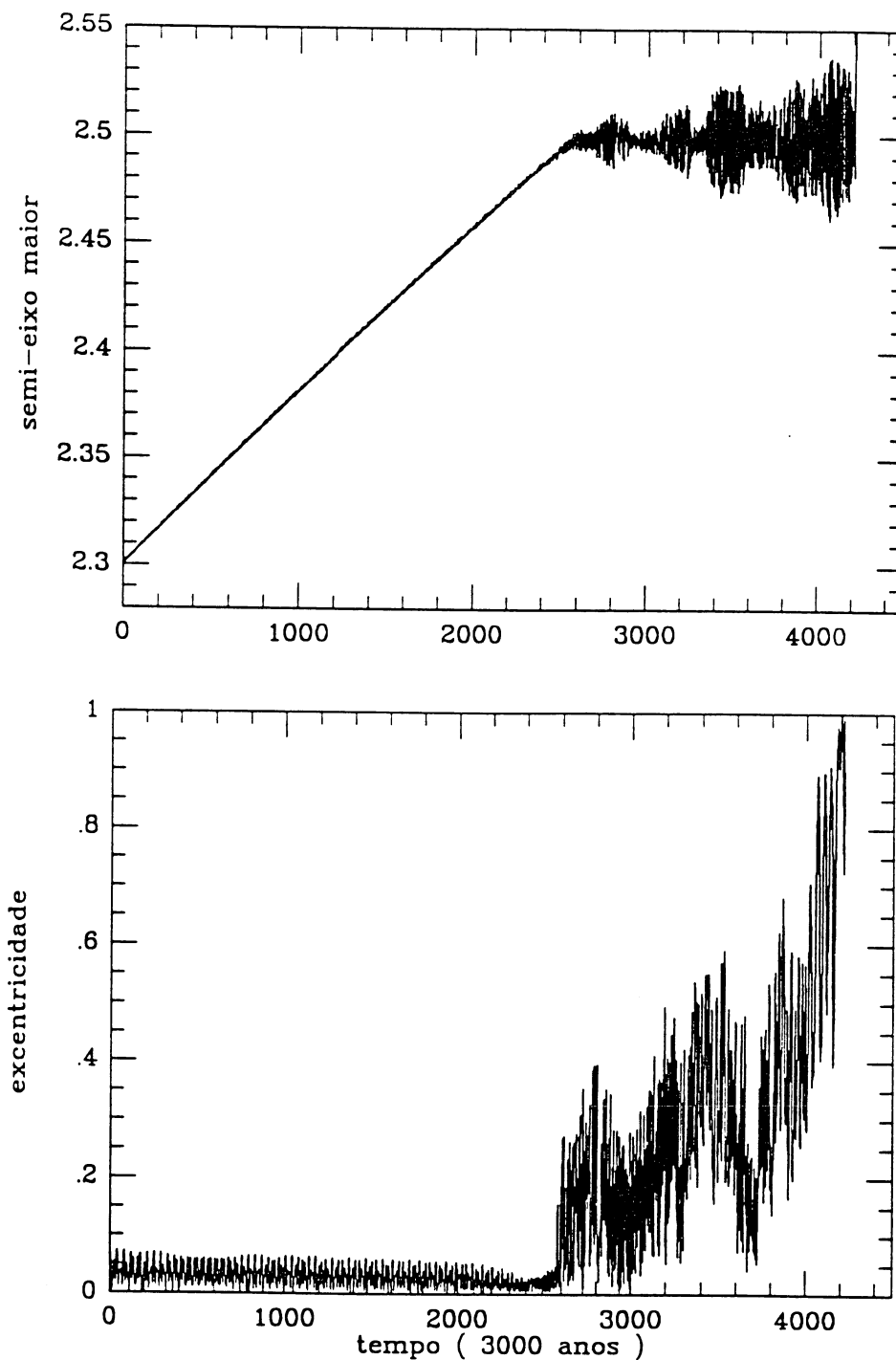
**Figura (4.3)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de um corpo no campo gravitacional do Sol, Júpiter e Saturno, sujeito ao efeito Yarkovsky dissipativo. Observamos que não há captura em ressonância*

## 4.2 Exemplos Antidissipativos

O efeito Yarkovsky nos possibilita analisar tanto o efeito dissipativo como o antidissipativo, que ocorre quando o sentido da força tangencial e no sentido do movimento orbital.

Um corpo teste iniciando a 2,3 U.A. é capturado na ressonância 3:1 com Júpiter próximo a 2,5 U.A. (figura 4.4). É mais um caso de captura, onde o corpo é eventualmente ejetado para fora do Sistema Solar sob uma órbita hiperbólica. Neste caso o tempo de captura é grande comparado com sua vida média. Neste caso o corpo se torna um cruzador da órbita terrestre em 0,6 Ma.

Um segundo exemplo do efeito antidissipativo é o da figura 4.5, onde o corpo teste foi iniciado em 3 U.A.. É observado uma captura na ressonância 4:2 com Júpiter, onde a excentricidade permanece alta entorno de 0,7.



**Figura (4.4)** *Varição temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de um corpo no campo gravitacional do Sol, Júpiter e Saturno, sujeito ao efeito Yarkovsky antidissipativo. Observamos uma captura do corpo na ressonância 3:1 com Júpiter*



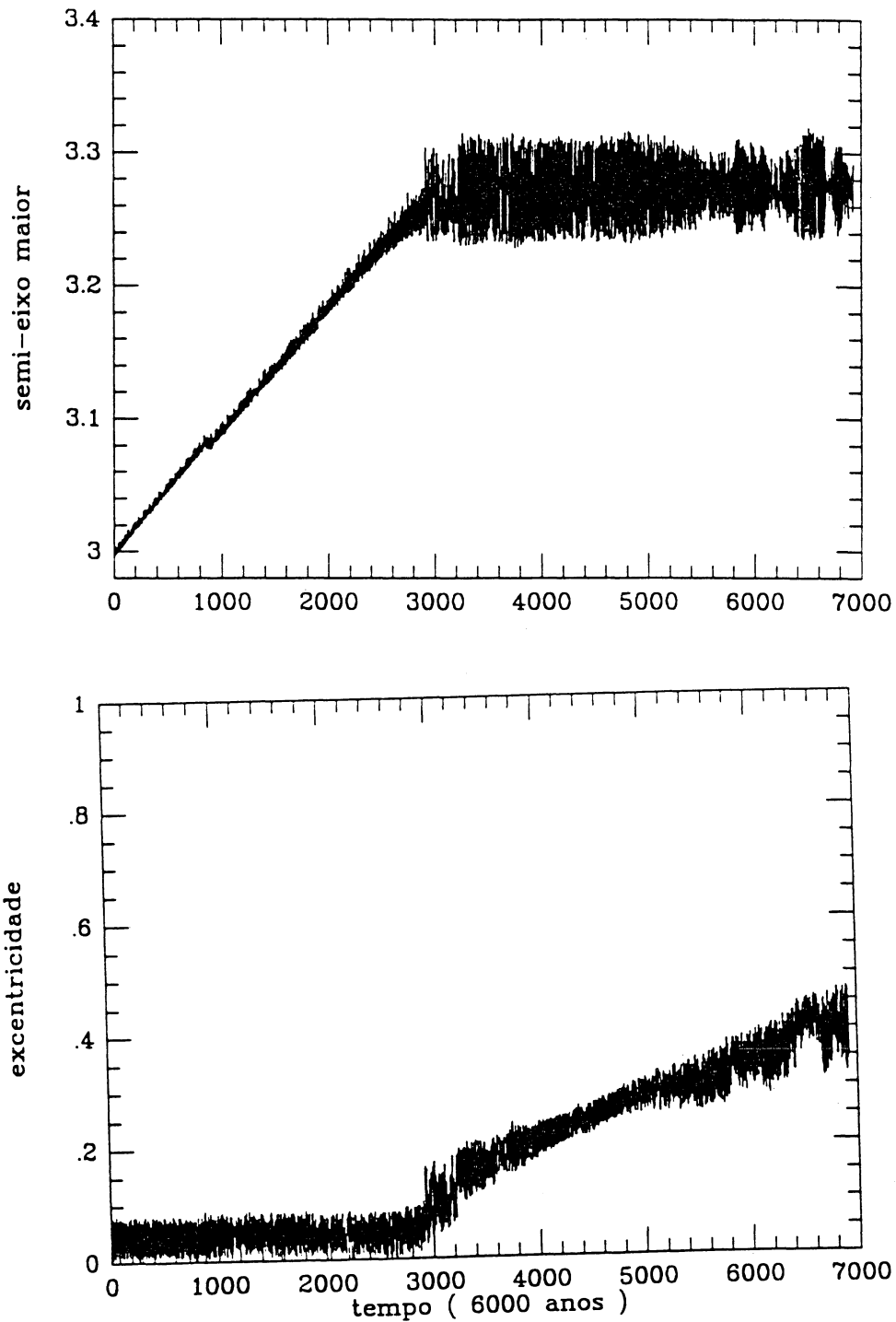


Figura (4.5) Variação temporal do semi-eixo maior e da excentricidade de um corpo no campo gravitacional do Sol, Júpiter e Saturno, sujeito ao efeito Yarkovsky antidissipativo. Observamos uma captura do corpo na ressonância 4:2 com Júpiter

## Conclusão

A característica dissipativa do efeito Poynting-Robertson permanece mesmo na presença de Júpiter. Por isso uma partícula sob a influência deste efeito e perturbada pelo campo gravitacional de Júpiter necessariamente será lançada para regiões de ressonância. Nossos resultados mostram que o semi-eixo maior decresce rapidamente e a excentricidade aumenta rapidamente nestas regiões de ressonância, eles concordam qualitativamente com os resultados obtidos por Gonczi et al (1982), mas divergem quantitativamente. Em nossos cálculos a partícula atinge mais rapidamente as regiões de ressonância, isto se deve ao fato de Gonczi et al. considerarem o efeito Poynting-Robertson como o termo dependente apenas da velocidade  $\vec{v}$  da equação (1.1), e nós consideramos esta equação completa.

Nossos cálculos mostram no capítulo 3 que o efeito Yarkovsky pode conduzir um pequeno corpo para a região de ressonância 2:1, sendo então capturado, e sua excentricidade aumenta tornando a órbita praticamente hiperbólica. Quando o corpo atinge uma excentricidade em torno de 0,7, o periélio de sua órbita encontra-se próximo de 1 *U.A.* possibilitando uma colisão deste corpo com a Terra em aproximadamente 5 *Mano*.

No capítulo 4 mostramos vários exemplos de possibilidades que um fragmento de asteróide possui de atingir a órbita da Terra, considerando o efeito Yarkovsky dissipativo e antidissipativo.

Nossos cálculos devem ser considerados de forma apenas qualitativa e não quantitativa, pois não é considerado um modelo real do Sistema Solar, mais uma idealização. No entanto queremos colaborar para tentar explicar a presença de pequenos corpos próximos a órbita da Terra.

## Apêndice i

### i.1 Elementos Orbitais

Os elementos orbitais são os seis parâmetros que especificam unicamente a posição e trajetória de um corpo celeste em sua órbita como uma função do tempo e que pode ser estabelecido por observação. A forma e o tipo da órbita são especificados pela excentricidade ( $e$ ), e pelo semi-eixo maior ( $a$ ). A orientação da órbita no espaço é especificado pela inclinação ( $i$ ), do plano orbital em relação ao plano da eclíptica; e pela longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), que é a distância angular entre o equinócio vernal  $\gamma$  e o nodo ascendente  $N$ . A orientação da órbita no plano orbital é especificado pelo argumento do periélio ( $\omega$ ), que é a distância angular entre o nodo ascendente e o periélio.

A anomalia excêntrica ( $E$ ) é usado para determinar a posição do corpo em sua órbita.

A anomalia média ( $M$ ) é definida como:

$$M = n(t - t_o) \quad (i.1)$$

onde:  $n$  é o movimento médio, ligado ao período orbital  $T$  por  $n = \frac{2\pi}{T}$  ou utilizando a terceira lei de Kepler  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ .  $t$  é o tempo de cálculo e  $t_o$  o tempo de passagem pelo periélio.

A anomalia excêntrica e a anomalia média estão relacionados pela equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E. \quad (i.2)$$

### i.2 Passagem de Elementos Osculadores para Coordenadas Cartesianas

Denotamos um sistema de eixos cartesiano  $oxyz$ , com a origem coincidente com o centro do corpo principal, ou com o centro de massa do sistema e o plano  $xoy$  sendo

o plano da eclíptica. O semi-eixo positivo  $ox$  tendo o sentido para o equinócio vernal. Obtemos o sistema cartesiano  $OXYZ$  fazendo três rotações sucessivas: i) uma rotação de um ângulo  $-\omega$  entorno de  $OZ$ ; ii) uma rotação de um ângulo  $-i$  entorno de  $ON$ ; iii) uma rotação  $-\Omega$  entorno de  $oz$ .

Podemos então relacionar os dois eixos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \cos i \cos \Omega \cos \omega \\ P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos i \cos \Omega \sin \omega \\ P_z &= \sin i \sin \omega \end{aligned} \tag{i.3.1}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \cos i \sin \Omega \cos \omega \\ Q_y &= \sin \Omega \sin \omega + \cos i \cos \Omega \cos \omega \\ Q_z &= \sin i \cos \omega \end{aligned} \tag{i.3.2}$$

As componentes em  $R$  não são necessárias pois  $Z=0$ .

A coordenada  $X, Y$  e  $Z$  são dadas pelas equações do movimento kepleriano:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) \\ X &= r \cos f = a(\cos E - e) \\ Y &= r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \tag{i.4}$$

Obtemos então as relações:

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e)P_x + a\sqrt{1 - e^2} \sin E Q_x \\ y &= a(\cos E - e)P_y + a\sqrt{1 - e^2} \sin E Q_y \\ z &= a(\cos E - e)P_z + a\sqrt{1 - e^2} \sin E Q_z \end{aligned} \tag{i.5}$$

Da equação de Kepler  $M = E - e \sin E$  e  $M = n(t - t_o)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\sin E) &= \frac{na}{r} \cos E \\ \frac{d}{dt}(\cos E - e) &= -\frac{na}{r} \sin E\end{aligned}\quad (i.5)$$

As relações das velocidades com os elementos osculadores é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{na^2}{r} \sin E P_x + \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E Q_x \\ \dot{y} &= -\frac{na^2}{r} \sin E P_y + \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E Q_y \\ \dot{z} &= -\frac{na^2}{r} \sin E P_z + \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E Q_z\end{aligned}\quad (i.6)$$

Para calcular  $E$  é necessário resolver a equação de Kepler.

### i.3 Passagem de Coordenadas Cartesianas a Elementos Osculadores

O semi-eixo maior pode ser calculado através da equação da energia:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}\quad (i.7)$$

logo:

$$a = \frac{1}{\left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)}\quad (i.8)$$

onde:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

A excentricidade está relacionada com o momento angular ( $H$ ), na forma:

$$H^2 = \mu a(1 - e^2)\quad (i.9)$$

O momento angular é dado por:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\quad (i.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_1 &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ H_2 &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ H_3 &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \quad (i.11)$$

logo:

$$e = \left(1 - \frac{H^2}{\mu a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (i.12)$$

Como  $H$  é um vetor normal ao plano orbital, podemos obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned} H_1 &= H \sin i \sin \Omega \\ H_2 &= -H \sin i \cos \Omega \\ H_3 &= H \cos i \end{aligned} \quad (i.13)$$

obtemos para a inclinação as equações:

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}{H} \\ \cos i &= \frac{H_3}{H} \end{aligned} \quad (i.13)$$

Para a longitude do nodo ascendente:

$$\begin{aligned} \sin \Omega &= \frac{H_1}{H \sin i} \\ \cos \Omega &= -\frac{H_2}{H \sin i} \end{aligned} \quad (i.14)$$

Utilizando a matriz de transformação e as equações (i.4) obtemos:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Omega \cos(\omega + f) - r \cos i \sin \Omega \sin(\omega + f) \\ y &= r \sin \Omega \cos(\omega + f) + r \cos i \cos \Omega \sin(\omega + f) \end{aligned} \quad (i.14)$$

Resolvendo este sistema obtemos:

$$\begin{aligned}\cos(\omega + f) &= \frac{x \cos \Omega + y \sin \Omega}{r} \\ \sin(\omega + f) &= \frac{y \cos \Omega - x \sin \Omega}{r \cos i}\end{aligned}\quad (i.15)$$

podemos escrever as equações acima na forma:

$$\begin{aligned}\cos(\omega + f) &= \frac{H(yH_1 - xH_2)}{r\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} \\ \sin(\omega + f) &= -\frac{H(xH_1 + yH_2)}{rH_3\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}\end{aligned}\quad (i.16)$$

E finalmente a anomalia verdadeira é dada pelas eqs.(i.4) sendo então:

$$\begin{aligned}\sin f &= \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \\ \cos f &= \frac{a}{r} (\cos E - e)\end{aligned}\quad (i.17)$$

## Referências Bibliográficas

- Afonso, G.; Barlier, F.; Carpino, M.; Farinella, P.; Mignard, F.; Milani, A. e Nobili, A. - Orbital effects of LAGEOS seasons and eclipses - *Annales Geophysicae*, 1989.
- Afonso, G. e Foryta, D. - An anisothermal emission model for small bodies - in *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects* (eds) - 73-83, 1989.
- Angeli, A. - Efeitos da reemissão da radiação solar sobre órbitas de asteróides - Dissertação de Mestrado - UFPr, 1991.
- Brown, E. - "Modern Optics" - Reinhold, New York - pág. 225 , 1965.
- Burns, J.; Lamy, P.; e Soter, S. - Radiation forces on small particles in the solar system - *Icarus* - 40, 1-48, 1979.
- Butkov, E. - "Física Matemática" - Guanabara Dois, São Paulo - pág. 336-400, 1978.
- Gonczi, R.; Froeschle, Ch; Froeschle, Cl - Poynting-Robertson drag and orbital resonance - *Icarus* - 51, 633-654, 1982.
- Peterson, C. - A source mechanism for meteorites controlled by Yarkovsky effect - *Icarus* - 29, 91-111, 1976.
- Poynting, J. - Radiation in the solar system: Its effect on temperature and its pressure on small bodies - *Proc. Roy. Soc. London* - 72, 265-267, 1903.
- Robertson, H. - Dynamical effects of radiation in the solar system - *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* - 97, 423-438, 1937.
- Shampine, L.; Watts, H.; e Davenport, S. - Solving nonstiff ordinary differential equations - the state of the art - *SIAM review* - 18, 376-411, 1976.
- Wyatt, S. e Whipple, F. - The Poynting-Robertson effect on meteor orbits - *The Astrophysical Journal* - 111, 134-141, 1950.