ROGÉRIO RIBEIRO DUARTE

GRAVITAÇÃO COMO TEORIA DE GAUGE DO GRUPO CONFORME EM 2+1 DIMENSÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Edson Stédile

CURITIBA
1995

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE PÓS -GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. ROGÉRIO RIBEIRO DUARTE

TÍTULO DA TESE: "GRAVITAÇÃO COMO TEORIA DE GAUGE DO GRUPO CONFORME EM 2+1 DIMENSÕES"

Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A

Curitiba, 29 de setembro de 1995.

Banca Examinadora:

Prof. Edson Stedile
Presidente/Orientador-UFPR

Prof. George Emanuel Avraam Matsas
Inst. de Fís.Teórica/UNESP

Prof. Ricardo Luiz Viana
Dept. de Física/UFPR

Para
Álison Karina,
minha dedicada esposa,
por estar sempre presente ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Edson Stédile, pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho, e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.

À Universidade Federal do Paraná pelos recursos técnicos e ao CNPq pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

RESUMO

Mostramos aqui que a teoria geral da relatividade, apesar de ter predito alguns resultados, apresenta problemas estruturais importantes do ponto de vista físico. Visando obter uma teoria completa em 2+1 dimensões com limite Newtoniano, desenvolvemos uma teoria de gauge para grupo conforme em (2+1) dimensões dentro da estrutura de espaço fibrado. Aqui o potencial gravitacional é representado pelas triadas, pelo potencial de Lorentz e pelos potenciais adicionais de dilatação e conforme. Através de uma quebra espontânea de simetria por uma realização não linear, obtemos potenciais aplicáveis ao problema físico. A densidade de lagrangeana utilizada é a densidade quadrática mais geral, podendo ser obtida com o grupo conforme. As equações de campo são resolvidas para campo fraco, sem spin e circularmente simétrico, onde obtemos o limite Newtoniano.

ABSTRACT

We point out that the general theory of relativity, in spite of predicting some results, it contains some structure problems, from the physical point of view. With the purpose to develop a complete framework in 2+1 dimensions and with a Newtonian limit, we study a gauge approach for the conformal group in 2+1 dimensions, within a fibre bundle structure. The gravitational potential is represented by triads, Lorentz potential and also by additional potentials related to dilatations and conformal transformations. By means of a breaking of symmetry through a non-linear realization, we derive the potentials related to the physical problem. The Lagrangian density we employ is the most general quadratic form we can obtain with the conformal group. The field equations are solved for a spinless and circularly symmetric weak-field. The Newtonian theory is also obtained as a solution.

1-Introdução

Modelos para a gravitação com dimensões menores que quatro tem recebido considerável atenção nos últimos anos. A teoria de Einstein (2+1)-dimensional não tem limite Newtoniano nem graus dinâmicos de liberdade, mas tem uma estrutura global não trivial, pois apresenta defeitos topológicos. Este interesse também tem se mostrado em outras teorias gravitacionais em (2+1) dimensões, pois tais modelos são úteis para examinar conceitos básicos e explorar mais a fundo os aspectos de quantização em teorias gravitacionais.

Analogias entre teorias de Yang-Mills a nível clássico e a relatividade geral (RG) sobre suas bases geométricas, há muito tempo têm sido estudadas. Em particular, os modelos desenvolvidos em teorias de gauge 4-dimensionais em geral obtêm a teoria de Einstein como sub-teoria, e a partir disto o limite Newtoniano é então obtido. Entretanto, em (2+1) dimensões este limite pode ser desprezado, pois o limite Newtoniano aparece em um setor separado daquele que origina o limite Einsteniano. A análise da teoria de gauge para o grupo de Poincaré em (2+1) dimensões feita por Kawai [1] mostra ainda que para obtermos o limite Newtoniano devemos, eliminar o setor do qual é obtido o modelo de Einstein na teoria.

O estudo de teorias alternativas à Relatividade Geral tem sua principal motivação nas deficiências da própria RG. Assim, no capítulo 2 exploramos suas principais falhas e descrevemos pontos, cujos resultados não são satisfatórios do ponto de vista físico. Como as teorias de gauge tipo Yang-Mills têm apresentado importantes resultados na física, tais como renormalização, resultados observados e unificação de campos, convém estudarmos a gravitação como uma teoria de gauge. No capítulo 3 apresentamos os fundamentos das teorias de gauge e o modelo de Yang para a gravitação como um exemplo de uma teoria de gauge para a gravitação

O modelo de gravitação com o grupo de Poincaré em (2+1) dimensões é apresentado no capítulo 4, que apesar de apresentar bons resultados, carece de uma boa fundamentação teórica, pois este grupo não admite métrica e não tem justificativa formal para a utilização de

[1] KAWAI, Toshiharu. Poincaré gauge theory of (2+1)-dimensional gravity. **Physical Review D**, v.49, n.6, p.2862-2871. 1994.

triadas como potenciais, apesar de terem estas uma natureza matemática diferente. O grupo conforme surge assim como o grupo mais natural para atacar os problemas acima, pois admite métrica de Cartan, e a utilização de triadas como potenciais pode ser justificada a partir de uma realização não linear do próprio grupo conforme. Com esta escolha quebramos a simetria deixando o grupo como grupo de invariância de rotações e translações. A fundamentação do grupo conforme, bem como a determinação das formas conexão e curvatura, são feitas no capítulo 5. O capítulo 6 é dedicado a uma explicação da realização não linear e depois sua aplicação no modelo conforme, bem como a projeção dos resultados no espaço-tempo.

O capítulo 7 apresenta um modelo simplificado de interação gravitacional usando o grupo conforme, no qual obtemos o limite Newtoniano e o fenômeno do desvio da luz por um string cósmico. O mesmo resultado é obtido na RG, mas lá se conclui que o string não desvia a trajetória da luz; apenas quando dois raios de luz passam em lados opostos do string, convergem para um mesmo ponto. Do ponto de vista de observação , ambos modelos levam à mesma previsão, porém, o modelo aqui apresenta atração gravitacional, embora independa da distância do raio de luz ao string.

No capítulo 8 construímos uma densidade de Lagrangeana e obtemos as equações de campo para a teoria de gauge para a gravitação com o grupo conforme. O limite de campo fraco, bem como a solução das equações linearizadas para o caso circularmente simétrico, estático e sem spin, e ainda as sub-teorias obtidas do modelo, são dados no capítulo 9.

2-Questionamentos sobre a Relatividade Geral

2.1-A Relatividade Geral-Conceitos Básicos

A teoria da Relatividade Geral[1-3] (RG) de Einstein tem sido considerada como uma das mais belas teorias físicas existentes, do ponto de vista matemático. Sua idéia inicial está no princípio da equivalência, expressando a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, que também pode ser colocado como a afirmação de que todas as partículas submetidas à mesma condição inicial seguem as mesmas trajetórias. A validade deste princípio permite-nos supor que a gravitação seria apenas um efeito no espaço-tempo, no qual as partículas se deslocam. Assim, a métrica plana de Minkowski da Relatividade Restrita (RR)

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.1}$$

é generalizada para uma métrica mais geral, na forma

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad g_{ij} = g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{2.2}$$

Em consequência, o princípio da mínima ação $\delta S = 0$ dado pela RR $S = \int mcds$ leva-nos a uma nova equação de movimento

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{2.3}$$

que representa geodésicas numa variedade de Riemann, onde

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) \tag{2.4}$$

---

[1] LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics**. 4. ed. New York: Pergamon Press Inc.,1989.

[2] MISNER,C.W.; THORNE,K.S.; WHEELER,J.A.; **Gravitation**. USA: W.H.Freeman and Company, 1973.

[3] ADLER,R.; BAZIN,M.;SCHIFFER,M.**Introduction to General Relativity**. McGraw-Hill Book Co. New York, 1965

são os símbolos de Christoffel. A inexistência de um campo gravitacional será então dada por um sistema geométrico, onde por meio de uma transformação de coordenadas todos os símbolos de Christoffel possam ser anulados. Como a lei de transformação dos símbolos de Christoffel é

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma'^l{}_{mn} \frac{\partial x'^m}{\partial x^j} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} - \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}, \tag{2.5}$$

uma transformação tal que,

$$x'^i = \phi^l(x^j) \tag{2.6}$$

levará a símbolos de Christoffel nulos apenas se as equações

$$\Gamma^i{}_{jk} \left(\frac{\partial \phi^l}{\partial x^i} \right) = \frac{-\partial^2 \phi^l}{\partial x^j \partial x^k}, \tag{2.7}$$

permitirem uma solução não trivial para as funções ϕ^l. Esta é uma questão em geometria diferencial com solução bem conhecida[4]. A condição de integrabilidade para a equação (2.7) é que o tensor de Riemann seja nulo

$$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m{}_{jl}\Gamma^i{}_{km} - \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^i{}_{lm} = 0 \tag{2.8}$$

e a anulação do tensor de Riemann é condição necessária e suficiente para a solução de (2.7). Isto significa que o campo gravitacional é representado geometricamente pelo tensor de Riemann. Resta-nos apenas saber como determinar $R^i{}_{jkl}$ a partir de uma fonte gravitacional. Isto foi respondido por Einstein na chamada equação de Einstein,

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}, \tag{2.9}$$

que vincula o lado geométrico da teoria com o lado físico. Nesta equação R_{ij} é o tensor de Ricci, uma contração do tensor de Riemann, e R é a curvatura escalar, dados por

$$R_{ij} = R^l{}_{ilj} \qquad R = R^i_i. \tag{2.10}$$

Em (2.9) T_{ij} é o tensor energia-momentum da fonte, tal que o vetor energia-momentum seja

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ij} dS_j. \tag{2.11}$$

[4] CHANDRASEKHAR, S. On the Derivation of Einstein's Field Equations. **American Journal of Physics**, v.40, p.224-234, Feb. 1972.

A Relatividade Geral pode ser então dividida em 2 partes:

1) Parte geométrica: interpretação do espaço físico como sendo uma variedade Riemanniana com curvatura diferente de zero, na qual partículas seguem geodésicas;

2) Parte Física: equação de Einstein que estabelece como a matéria modifica o espaço-tempo, gerando curvatura.

Neste capítulo poderemos constatar que os grandes problemas da R.G. não estão no aspecto geométrico da mesma, e sim no lado físico, pois a equação de Einstein apresenta problemas difíceis de serem solucionados. No restante deste capítulo faremos uma breve explanação sobre os problemas mais importantes da Relatividade Geral.

2.2-A constante cosmológica e a falta de uma derivação rigorosa

Apesar de intuitivamente ser uma bela teoria matemática, tem sido mostrado que a R.G. carrega alguns problemas e algumas características indesejáveis do ponto de vista de uma teoria de campos. A primeira dúvida e o primeiro impasse entre os pesquisadores em RG, é sobre a necessidade ou não da introdução de um termo de constante cosmológica na equação de Einstein (2.9). Um argumento utilizado para a inclusão deste termo baseia-se na dedução da equação de Einstein por meio de uma Lagrangeana. Dentro do formalismo da RG as únicas exigências que se fariam a esta Lagrangeana é que a ação correspondente fosse um escalar, e com derivadas de no máximo primeira ordem em g_{ij}. Esta última exigência baseia-se na necessidade de obtermos em primeira aproximação $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ e portanto uma equação de segunda ordem no potencial Newtoniano ϕ. A escolha mais natural seria $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, que difere do termo

$$\sqrt{-g}g^{ik}({\Gamma^l}_{mk}{\Gamma^m}_{il} - {\Gamma^l}_{ml}{\Gamma^m}_{ik}), \tag{2.12}$$

pois este contém apenas derivadas em primeira ordem através de uma divergência. A inclusão do termo $\sqrt{-g}$ vem da necessidade de exigirmos uma ação invariante por transformações de coordenadas, uma vez que o elemento de linha invariante é $\sqrt{-g}d^4x$. As equações de Einstein podem então ser obtidas de

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0. \tag{2.13}$$

A adição do termo de fonte leva-nos à seguinte equação variacional

$$\delta \int \sqrt{-g}(R - kM)d^4x = 0, \tag{2.14}$$

onde $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de Einstein e M é a densidade de lagrangeana do campo de materia. Desta forma a ação (2.14) leva-nos diretamente à equação de Einstein. No entanto, o tensor métrico g_{ij} desempenha um papel fundamental na teoria, de forma que é de se argumentar que as densidades $\sqrt{-g}$ e $\sqrt{-g}R$ poderiam ser tratadas da mesma forma no princípio variacional. Isto resultaria em

$$\delta \int \sqrt{-g}(R + \lambda - kM)d^4x = 0, \tag{2.15}$$

onde λ é a chamada "constante cosmológica". A equação de Einstein ficaria então

$$G^{ij} + \frac{1}{2}\lambda g^{ij} = kT^{ij}. \tag{2.16}$$

Historicamente a introdução da constante cosmológica foi feita por Einstein em 1917, dois anos após a apresentação da R.G. No modelo original por ele apresentado verificou-se que o universo não poderia ser estático, o que era a suposição da época e a inclusão da constante cosmológica passaria a dar soluções de universo estático[5], desde que a constante λ tivesse o valor apropriado. Após a proposta de expansão do universo por Hubble, a constante cosmológica deixou de ser necessária, e Einstein a chamou de *"... a maior tolice da minha vida..."*. Para muitos pesquisadores[6] a introdução da constante cosmológica é necessária para uma formulação consistente da própria RG. Sua nulidade só poderá ser decidida com base em evidências experimentais ou teóricas. Desta forma surgem duas questões:

1) É necessária a introdução da constante cosmológica?

2) Existe afinal alguma dedução rigorosa para as equações de Einstein?

A resposta à primeira questão ainda está em aberto e, devido a isto, alguns autores consideram que não existe e não poderá ser dada uma dedução rigorosa para as equações de Einstein[4].

Tais questões mostram que apesar da RG ser uma bela teoria e de ter predito alguns resultados, existem ainda algumas características na formulação da mesma que a colocam como uma teoria deficiente.

---

[5] FRIEDMANN,A. Über die Krümmung des Raumes, **Z.Phys.**, v.10, p.377-386, 1922.

[6] ANDERSON, James L.; FINKELSTEIN, David. **American Journal of Physics**, v.39, p.901-, 1971.

[4] CHANDRASEKHAR, S. On the Derivation of Einstein's Field Equations. **American Journal of Physics**, v.40, p.224-234, Feb. 1972

2.3-Problemas com a Energia

O conceito de energia tem um ponto central em física teórica, onde as leis de conservação da própria energia, do momentum linear e do momentum angular, são consequências da homogeneidade no tempo, no espaço e na isotropia no espaço respectivamente. Desta forma o conceito de energia é associado à própria estrutura do espaço-tempo, e não pode ser tratado com indiferença dentro de uma teoria física completa. Uma propriedade característica da energia é o fato de ser sempre positiva, ou mais rigorosamente de ter um limite inferior, refletindo a estabilidade de um sistema físico, uma vez que as partículas tendem a ficar no estado de menor energia possível.

A generalização da equação de conservação da energia para a RG conforme o princípio da equivalência é

$$T_i{}^k{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T_i{}^k\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}T^{kl} = 0. \tag{2.17}$$

Por outro lado, para que o 4-vetor energia-momentum representado pela integral

$$P_i = \frac{1}{c}\int T_i{}^k\sqrt{-g}dS_k \tag{2.18}$$

seja conservado, a equação diferencial

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}T_i{}^k)}{\partial x^k} = 0 \tag{2.19}$$

deve ser satisfeita, e não a equação (2.17). Desta forma a equação (2.17) não leva a nenhuma lei de conservação. Isto é natural, pois esperamos que o campo gravitacional possua energia-momentum e que a energia-momentum total seja conservada.

Uma forma padrão de obtermos o tensor energia-momentum de um sistema é variarmos sua Lagrangeana em relação ao tensor métrico, ou seja,

$$T^{ik} + t^{ik} = -2\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} \tag{2.20}$$

onde t^{ik} seria o tensor energia-momentum do campo gravitacional. Mas como na RG o campo gravitacional é o próprio tensor métrico, a variação da ação em relação a este será necessariamente nula

$$0 = \frac{\delta S}{\delta g_{ik}} = \frac{\delta\int Ldt}{\delta g_{ik}} = \int\frac{\delta L}{\delta g_{ik}}dt, \tag{2.21}$$

e daí concluímos que a energia-momentum total também será nula

$$T^{ik} + t^{ik} = 0, \tag{2.22}$$

o que mostra que na RG tal definição de energia-momentum é inútil.

A melhor escolha para o tensor energia-momentum do campo gravitacional seria então a explicada abaixo. Impondo

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} = 0 \tag{2.23}$$

que, de outra forma, significa

$$R^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}. \tag{2.24}$$

A equação de Einstein pode então ser posta na forma

$$(-g) T^{ik} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}, \tag{2.25}$$

onde

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \frac{c^4}{16\pi k} (-g)(g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km}) \right\} \tag{2.26}$$

ficando evidenciada a antisimetria em kl. Derivando (2.25) em relação a x^k obtemos a equação (2.19) para a conservação do tensor energia-momentum.

Em geral, quando $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \neq 0$, a diferença

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} - (-g) T^{ik} \tag{2.27}$$

não é nula e a denotaremos por $(-g)t^{ik}$. Desta forma

$$(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{2.28}$$

Na forma explícita t^{ik} é dado por[1]

$$t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} (2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) +$$

[1] LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics**. 4. ed. New York: Pergamon Press Inc.,1989.

$$g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np})+$$

$$g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np})+ \tag{2.29}$$

$$g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}).$$

Concluímos então que as quantidades

$$P^l = \frac{1}{c}\int (-g)(T^{ik} + t^{ik})dS_k \tag{2.30}$$

são conservadas. Isto sugere que $(-g)t^{ik}$ seja a energia-momentum do campo gravitacional. Todavia, de (2.30) vemos que t^{ij} não é um tensor, pois da mesma maneira que os $\Gamma^i{}_{jk}$ podem ser anulados em qualquer ponto do espaço-tempo por uma simples transformação de coordenadas, assim também acontece com os t^{ij}. Por este motivo esta grandeza é chamada de pseudo-tensor energia-momentum.

O fato de termos um pseudo-tensor na lei de conservação da energia cria por si só um problema na própria teoria. Aqui, uma das mais importantes e estabelecidas leis da física não está na forma covariante e, além disso, a energia não surge como uma grandeza covariante. Dentro de uma teoria que exige toda lei física colocada na forma covariante, isto constitui um problema grave. Tal fato certamente pode levar a resultados patológicos para a RG, o que é facilmente percebido quando utilizamos um sistema de coordenadas esféricas no espaço de Minkowski sem gravitação , onde

$$g^{00} = 1, \qquad g^{rr} = -1, \qquad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}, \qquad g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{2.31}$$

e

$$R^i{}_{klm} = 0. \tag{2.32}$$

Para este caso temos

$$t^0_0 = \frac{1}{4\pi}\sin\theta \tag{2.33}$$

e assim a "energia total" do campo gravitacional torna-se infinita. Além do mais a densidade de energia resultaria negativa

$$(-g)t^0_0 = -\frac{r^2}{8\pi}[1 + 4\sin^2\theta] \tag{2.34}$$

e em consequência o campo teria uma energia total negativa e infinita.

Além disto, Schrödinger mostrou[7] que com uma escolha apropriada de coordenadas para um sistema esfericamente simétrico, todas as componentes t^i_j do pseudo-tensor energia-momentum são nulas fora da distribuição de matéria. Em relação a isto Einstein escreveu: *"...Schrödinger estava, é claro, surpreso por este resultado, que também se mostra estranho para nós. Ele estava particularmente interessado na questão se t^i_j pode ser considerado como componentes de energia. Aos argumentos de Schrodinger, eu gostaria de adicionar mais dois:*

1) Se as componentes T^i_j da energia de matéria formam um tensor, as quantidades t^i_j compreendidas como "componente de energia" do campo gravitacional, não formam um tensor.

b) As quantidades $T_{ij} = g_{ia}T^a_j$ são simétricas em relação aos índices i e j, enquanto o análogo $t_{ij} = g_{ia}t^a_j$ não é simétrico.

Lorentz e Levi-Civita, em face do primeiro argumento, também concluiram que as quantidades t^i_j não podem ser consideradas como componente de energia do campo gravitacional. Embora eu também tenha essa opinião, eu estou convencido que uma melhor definição das componentes de energia do campo gravitacional é impossível ...", conforme citado por Denisov e Logunov[8].

Isto mostra que até mesmo Einstein estava convencido que tal fato era um problema interno da propria RG, e não apenas da forma proposta para t^{ij}.

Da equação de conservação de P^l podemos ainda ver que, se a matéria estiver concentrada somente no volume V, a relação de conservação de P_i pode ser expressa na forma

$$\frac{d}{dx^0}\int (T^0_i + t^0_i)\, dV = -\int t^\alpha_i \, dS_\alpha \quad . \tag{2.35}$$

Para uma solução exata das equações de Einstein, onde se faz $t^\alpha_0 = 0$, segue então que

$$\frac{d}{dx^0}\int (T^0_0 + t^0_0)\, dV = 0, \tag{2.36}$$

ou seja, a energia da matéria e do campo gravitacional no volume V é conservada. Isto significa que não existe fluxo de energia para fora do volume V, e portanto, partículas fora deste volume não podem ser influenciadas pela gravitação.

---

[7] SCHRÖDINDER, E. **Phys. Z.**, v.19, p.4-, 1918.

[8] DENISOV, V. I.; LOGUNOV, A.A. Gravitational Radiation exist in the General Theory of Relativity, **Theory Math. Fiz.**, v.43, n.2, p.187-201, May 1980.

Entretanto, soluções exatas da equação de Einstein para ondas com $t_0^n = 0$, levam a $R^i_{klm} \neq 0$, o que implica em

$$\frac{\delta^2 n^i}{\delta s^2} + R^i_{mln} u^n u^m n^l = 0, \tag{2.37}$$

onde u^i são as componentes do quadrivetor tangente à linha de universo da partícula, e n^i são as componentes do quadrivetor que une pontos de mesmo valor de s(comprimento de arco ao longo da linha de universo) em geodésicas muito próximas. Concluímos de (2.37) que ondas de curvatura afetam partículas-teste fora do volume V, alterando portanto suas energias.

Temos assim duas relações diferentes, embora exatas em R.G., e que nos levam a conclusões mutuamente exclusivas. Para eliminar tal contradição devemos concluir que em RG a energia é criada, e consequentemente não é conservada. Podemos chegar a um resultado ainda mais surpreendente, utilizando-nos das conclusões já descritas, onde o cálculo da energia e do momentum de um sistema através de um pseudo-tensor energia-momentum, não leva a resultados com significado físico.

Denisov e Logunov afirmam: *"...na teoria de Einstein não existem leis de conservação relacionando diretamente a variação na energia e momentum de matéria à existência de ondas de curvatura..."*. Assim até mesmo a fórmula obtida para a perda de energia devida à emissão de ondas gravitacionais

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} D'''^2_{\alpha\beta}$$

não seria válida, e também não seria originada da própria RG[8].

2.4-A defesa de Faddeev[9]

Os problemas do tensor energia-momentum foram discutidos por Faddeev, mostrando que uma formulação adequada da energia pode ser feita se admitirmos:

1) a energia do campo gravitacional não é localizada, ou seja, não existe uma densidade de energia univocamente definida;

[8] DENISOV, V. I.; LOGUNOV, A.A. Gravitational Radiation exist in the General Theory of Relativity, **Theory Math. Fiz.**, v.43, n.2, p.187-201, May 1980.

[9] FADDEEV, L.D. The energy problem in Einstein theory of gravitation. **Sov. Phys. Usp.**, v.25, n.3, p.130-142, March 1982.

2) a energia do campo gravitacional interagindo com um sistema de massas e campos de matéria pode ser introduzida, se o espaço- tempo é assintoticamente plano, ou seja, soluções de universo fechado são inadmissíveis.

Basicamente o processo seguido para obter uma forma bem definida para a energia é o exposto a seguir: definir as quantidades

$$h^{ij} = \sqrt{-g}g^{ij} \tag{2.38}$$

$$q^{\alpha\beta} = h^{0\alpha}h^{0\beta} - h^{00}h^{\alpha\beta} \tag{2.39}$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{h^{00}}\Gamma^{0}_{\alpha\beta} \tag{2.40}$$

portanto, a Lagrangeana do campo em função destas novas grandezas torna-se

$$L = \int (\Pi_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}q^{\alpha\beta} + \pi^{\alpha}\frac{d}{dt}\varphi_{\alpha} - \lambda^{0}C_{0} - \lambda^{\alpha}C_{\alpha} - H)\; d^{3}x, \tag{2.41}$$

onde φ_α é o campo externo e π^α é o momentum associado a este campo e

$$\begin{aligned} C_0 &= q^{\alpha\beta}q^{\mu\nu}(\Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\mu\nu}) + \gamma R - T^{00} \\ C_\beta &= 2\nabla_\beta(q^{\alpha\lambda}\Pi_{\alpha\lambda}) - 2\nabla_\lambda(q^{\alpha\lambda}\Pi_{\alpha\beta}) - T_{0\beta} \\ \lambda^0 &= \frac{1}{h^{00}} + 1 \\ \lambda^\alpha &= \frac{h^{0\alpha}}{h^{00}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ainda,

$$H = -C_0 - \partial_\alpha\partial_\beta q^{\alpha\beta} \tag{2.43}$$

é a Hamiltoniana que pode ser posta na forma

$$H = \int H(x)\; d^3x = \int [q^{\alpha\beta}q^{\lambda\mu}(\Pi_{\alpha\lambda}\Pi_{\beta\mu} - \Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\lambda\mu}) + Q + T_{00}]\; d^3x, \tag{2.44}$$

onde

$$Q = -\gamma R - \partial_\alpha\partial_\beta q^{\alpha\beta}\ . \tag{2.45}$$

Para obtermos a energia a partir de H, fazemos a restrição

$$C_k(x) = 0 \;\; e \;\; C_0(x) = 0 \tag{2.46}$$

e supondo que

$$q^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + 2\chi^{\alpha\beta}$$

onde χ e Π são pequenos e não há campos de matéria, a restrição (2.46) fica

$$\partial_0 \partial_\beta \chi^{\alpha\beta} = 0$$

$$\partial^\alpha \Pi_{\alpha\beta} = \partial_\beta \Pi^\alpha_\alpha. \tag{2.47}$$

Expandindo agora os termos $\chi^{\alpha\beta}$ e $\Pi_{\alpha\beta}$

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi^T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \chi_\beta + \partial_\beta \chi_\alpha) - \delta^\lambda_\beta \partial_\alpha \chi_\lambda + \partial_\alpha \partial_\beta \chi$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi^T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Pi_\beta + \partial_\beta \Pi_\alpha) - \delta^\lambda_\beta \partial_\alpha \Pi_\lambda + \partial_\alpha \partial_\beta \Pi$$

e impondo que

$$\nabla^4 \chi = 0 \quad , \quad \nabla^2 \Pi_\alpha + 3\partial_\alpha \partial_\beta \Pi^\beta = 0, \tag{2.48}$$

as condições limite

$$\chi = 0 \quad , \quad \Pi_\alpha = 0 \tag{2.49}$$

levam a

$$H = \int [\partial_\alpha \chi^T_{\beta\lambda}\, \partial^\alpha \chi^{T\beta\lambda} + \Pi^T_{\alpha\beta}\, \Pi^{T\alpha\beta}]\, d^3x. \tag{2.50}$$

Em consequência a energia fica assintoticamente bem definida e positiva. O mesmo se aplica aos momenta linear e angular.

Mesmo assim não temos todos os problemas da energia resolvidos, como por exemplo, o problema da energia de ondas gravitacionais discutido no final da seção anterior. Além do mais, o resultado acima só pode ser obtido quando fizermos uma suposição de campo fraco como em (2.46).

2.5-A Relatividade Geral em 2+1 dimensões

Certos modelos reais em 4 dimensões podem ser reduzidos a um número menor de dimensões, devido a alguma propriedade de simetria do problema em questão. Um exemplo é o de uma fonte gravitacional reta e infinita, chamada de string cósmico, gerando um campo gravitacional. Segundo a teoria de Newton, onde o potencial gravitacional ϕ satisfaz à equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\lambda \tag{2.51}$$

onde λ é a densidade linear de massa do string. Utilizando as propriedades de simetria do problema obtemos a solução

$$\phi = 2G\lambda \ln\left\{\frac{a}{r}\right\}, \tag{2.52}$$

onde a é uma constante de integração. Para que a RG tenha limite Newtoniano necessitamos obter o elemento g_{00} da métrica na forma

$$g_{00} = 1 - \frac{4G\lambda}{c^2}\ln\left\{\frac{a}{r}\right\}, \tag{2.53}$$

porém, não é este o resultado que obtemos a partir da RG.

Das equações de Einstein (2.9) vemos que só poderemos ter um espaço plano ($R^i{}_{jkl} = 0$) quando a distribuição de matéria no ponto é nula. Em quatro dimensões o inverso não vale, pois $T^{ik} = 0$ implica apenas em $R^{ik} = 0$, restando 10 componentes de R^i_{jkl} livres para serem ajustadas conforme as condições de contorno, permitindo-nos obter o campo gravitacional fora da distribuição de matéria. Entretanto em 2+1 dimensões $R^{\alpha\beta} = 0$ representa 6 equações, e como $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ tem apenas 6 componentes independentes, não ficamos com nenhuma componente livre para ajustarmos às nossas condições de contorno. Os valores de $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ podem ser determinados a partir de $R_{\alpha\beta}$ conforme a equação

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma})R, \tag{2.54}$$

de forma que fora da distribuição de matéria obtemos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{2.55}$$

Portanto concluímos que a matéria não gera curvatura fora da distribuição de massa e, em consequência, não existe nenhuma atração fora de sua localização.

As equações de Einstein em (2+1) dimensões foram primeiramente analizadas por Staruszkiewicz[10] e discutidas posteriormente por Jackiw[11], mostrando que a métrica seria

[10] STARUSZKIEWICZ, A. Gravitation theory in three-dimensional space. **Acta Physica Polonica**, v.XXIV, n.6, p.735-741, 1963.

[11] JACKIW, R. **Topics in Planar Physics**, DIAS Workins Seminar (1989: Dublin, Ireland).

dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \tag{2.56}$$

onde

$$0 \leq \phi \leq e^{-N} 2\pi < 2\pi, \tag{2.57}$$

ou seja, o espaço-tempo é uma superfície cônica com déficit angular $2\pi(1 - e^{-N})$. Posteriormente esta equação foi resolvida para casos mais complexos, envolvendo teorias de campos. Vemos assim de (2.56) que a métrica Einsteniana não tem o termo g_{00} na forma desejada (2.53), e sim na forma plana

$$g_{00} = 1. \tag{2.58}$$

Isto completa a comprovação que a teoria de Einstein não tem limite Newtoniano em 2+1 dimensões.

Apesar de não ter limite Newtoniano, a teoria de Einstein em 2+1 dimensões tem despertado considerável interesse pela topologia não trivial do espaço-tempo, pois, apesar do espaço-tempo ser localmente plano, o formato cônico leva à convergência de trajetórias de raios de luz, quando originados de lados opostos do string. Isto sugeriu a hipótese da existência de quasares duplos. Em outras palavras, poderíamos dizer que segundo a RG o string atrai as trajetórias de luz, desde que haja uma outra do outro lado, mas não afeta trajetórias individuais.

Como todos os resultados dinâmicos da teoria vêm do aspecto global do espaço-tempo, concluímos que todos os fenômenos relacionados a strings na RG são de natureza puramente topológica. Vale lembrar que estes resultados são devidos à forma da equação de Einstein e não à formulação do espaço curvo, uma vez que poderíamos obter uma teoria de espaço curvo com a condição (2.53) satisfeita.

2.6-Inconsistências no tratamento de partículas com spin

A nível semi-clássico geralmente é admitido que a consideração de partículas com spin em gravitação exige a inclusão de torção , a qual é nula em RG, pois variedades de Riemann não contêm torção.

Salientamos que a derivada covariante em um espaço de Riemann-Cartan é dada por

$$D_l A_i = \partial_l A_i - \Gamma^k_{il} A_k \tag{2.59}$$

o que resulta $D_k A_i - D_i A_k$ em um tensor

$$D_k A_i - D_i A_k = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}. \tag{2.60}$$

Para um vetor $A_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$, temos que a diferença

$$T^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki} \tag{2.61}$$

é um tensor geralmente não nulo, chamado de tensor torção , com o qual partículas com spin interagem. Porém, em uma teoria onde a métrica representa um campo gravitacional, como na Relatividade Geral, a métrica plana num ponto exigiria que a derivada covariante fosse a derivada ordinária e, portanto,

$$\Gamma^k_{il} = 0 \tag{2.62}$$

de forma que a equação (2.61) em coordenadas cartesianas nos levaria a uma torção nula

$$T^l_{ik} = 0. \tag{2.63}$$

Como a torção é um tensor, concluímos que a torção é nula na RG.

Entretanto, da fórmula de Tetrode

$$T_{[\mu\lambda]} = \partial^\nu S_{\lambda\mu\nu} \tag{2.64}$$

onde $S_{\lambda\mu\nu}$ é o tensor de spin, vemos que partículas com spin em geral levam a $T_{\mu\nu}$ antissimétrico, mas da equação de Einstein (2.9) como R_{ik} é simétrico para uma teoria sem torção , então T_{ik} deverá também ser simétrico, contradizendo a equação (2.64).

Isto pode ser exemplificado para partículas com spin 2, como por exemplo, um núcleo atômico: que campo gravitacional este criará? A resposta da RG é dada pela equação de Einstein, onde o campo h_{ik} da partícula obedece à equação

$$D^k D_j h_{ik} + D^k D_i h_{jk} - D^k D_k h_{ij} - D_i D_j g^{ab} h_{ab} + m^2 h_{ij} = 0 \tag{2.65}$$

onde D^i é a derivada covariante. Porém, a condição de integrabilidade (2.65) é $R_{ik} = 0$, que pelas equações de Einstein leva a $T_{ik} = 0$. O cálculo de T_{ik} a partir de sua definição leva, por outro lado, a um tensor energia-momentum não nulo, de onde podemos concluir que partículas de spin 2 não ocasionam um campo gravitacional compatível com a Relatividade Geral. Vale salientar que tal fato também ocorre com partículas de spin $\frac{3}{2}$.

Além disto, sabe-se que partículas de spin $\frac{1}{2}$ se acoplam à tetradas, enquanto que na RG o campo fundamental é a métrica. Uma vez que a métrica contém menos informações que as tetradas, concluímos que a RG também não descreve adequadamente o campo e o movimento de partículas de spin $\frac{1}{2}$.

2.7-Problemas com o limite Newtoniano

Mesmo em quatro dimensões já se mostrou[13] que a teoria geral da relatividade não tem bom limite Newtoniano. Embora não haja dúvidas que a equação de Poisson possa ser obtida no limite adequado, há uma crescente impressão de que o mesmo não ocorre com outros aspectos da teoria, mais precisamente, as integrais de movimento não são as mesmas.

Na teoria Newtoniana temos

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho. \tag{2.66}$$

A equação de movimento de um fluido ideal

$$\rho(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}) = g^{\alpha\beta}(-\rho\frac{\partial U}{\partial x^\beta} + \frac{\partial p}{\partial x^\beta}) \tag{2.67}$$

associada à equação da continuidade para este fluido

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\rho v^\beta) = 0 \tag{2.68}$$

nos permite obter a equação para a energia interna específica Π, na forma

$$\rho(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial \Pi}{\partial x^\beta}) = -p\partial_\alpha v^\alpha \tag{2.69}$$

com a condição que o processo é barotrópico, i.e.,

$$\rho = \rho(p). \tag{2.70}$$

[13] DENISOV, V. I.; LOGUNOV, A.A. Does the General theory of Relativity have a Classical Newtonian Limit ?. **Theor. Math. Fiz.**, v.45, n.3, p.291-301, December 1980.

Multiplicando a equação (2.67) por - v^α e somando à equação da continuidade multiplicada por c^2 temos agora

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho c^2 + \rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{v^2}{2} + \rho + v^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{v^2}{2}) = \rho v^\alpha\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} - v^\alpha\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - c^2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha) \tag{2.71}$$

e usando (2.68), (2.69) e (2.70) obtemos

$$c^2\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+\frac{a-1}{2}U\right)\right]+\frac{a}{8\pi Gc^2}\partial_\alpha U\partial^\alpha U\right\} =$$

$$= -c^2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\rho v^\alpha\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+3U\right)\right]+\frac{\rho v^\alpha}{c^2}+\frac{1}{8\pi Gc^2}\left[(1-a)\frac{\partial U}{\partial t}\partial^\alpha U-(1+a)U\partial^\alpha\frac{\partial U}{\partial t}\right]\right\} \tag{2.72}$$

onde a é um parâmetro arbitrário.

Integrando a (2.72) sobre todo o espaço e levando em conta que quando $v \to \infty$ temos

$$\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \qquad U\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha\partial t} = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{2.73}$$

o que resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}I = 0 \tag{2.74}$$

onde I é a integral de movimento da teoria Newtoniana

$$I = \int dV\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi-\frac{1}{2}U\right)\right]. \tag{2.75}$$

Em R.G., pela equação de Einstein

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ij} \tag{2.9}$$

e pela condição de harmonicidade

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{G}^{ij} = 0 \qquad \mathcal{G}^{ij} = \sqrt{-g}g^{ij} \tag{2.76}$$

obtemos no limite Newtoniano

$$\mathcal{G}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}U \qquad \mathcal{G}^{0\alpha} = \frac{4}{c^3}U^\alpha \tag{2.77}$$

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta}c \qquad \sqrt{-g} = c + \frac{2u}{c}, \tag{2.78}$$

onde o potencial U satizfaz às equações

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho \qquad \nabla^2 U_\alpha = -4\pi G\rho v_\alpha \tag{2.79}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{2.80}$$

Considerando ainda a equação da continuidade (2.68), a equação de movimento de um fluido ideal (2.67), e a equação da energia interna específica (2.69), concluímos que as componentes do tensor energia-momentum deverão ser

$$c^2 T^{00} = \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U\right)\right\} \tag{2.81}$$

$$c^2 T^{0\alpha} = \rho v^\alpha\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U\right)\right\} + \frac{p v^\alpha}{c^2} \tag{2.82}$$

$$c^2 T^{\alpha\beta} = \rho v^\alpha v^\beta + p\delta^{\alpha\beta}. \tag{2.83}$$

A expressão pós-Newtoniana para $\mathcal{G}$ nos leva a

$$\mathcal{G}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}U + \frac{4}{c^5}S \qquad \mathcal{G}^{0\alpha} = \frac{4U^\alpha}{c^3} + \frac{4S^\alpha}{c^5} \tag{2.84}$$

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} = -c\delta^{\alpha\beta} + \frac{4S^{\alpha\beta}}{c^3} \tag{2.85}$$

que é solução da equação de Einstein na aproximação pós-Newtoniana

$$\frac{1}{2c}\left[\nabla^2\mathcal{G}^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{G}^{\alpha\beta}\right] + N^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} g T^{\alpha\beta},$$

onde

$$N^{00} = \frac{7}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \tag{2.86}$$

$$N^{0\alpha} = \frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c^6}\left(\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial U}{\partial x_\beta}. \tag{2.87}$$

Procedendo como no caso Newtoniano obtemos também a equação

$$c^2\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{a-1}{2}U\right)\right] - \frac{a}{8\pi G c^2}\partial_\alpha U \partial^\alpha U\right\} =$$

$$= -c^2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\rho v^\alpha\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{p v^\alpha}{c^2} - 4\rho v^\alpha\frac{U}{c^2} - \right.$$

$$-\frac{1}{8\pi Gc^2}\left[(1-a)\frac{\partial U}{\partial t}\partial^\alpha U-(1+a)U\partial^\alpha\frac{\partial U}{\partial t}\right]\bigg\}. \tag{2.88}$$

Rescrevendo agora a (2.86) na forma

$$-c^2gT^{ij}=\frac{c^6}{8\pi G}\left[-N^{ij}-\frac{1}{2c}\left(\nabla^2\mathcal{G}^{ij}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathcal{G}^{ij}\right)\right] \tag{2.89}$$

concluímos que para $N=0,\beta=1$ pode ser expressa por

$$c^2\left\{\rho v_\alpha\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+3U\right)\right]+\frac{pv_\alpha}{c^2}\right\}=$$

$$-\frac{3}{4\pi G}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}+\frac{1}{\pi G}\left(\frac{\partial U^\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial U^\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial U}{\partial x^\beta}-\frac{c^5}{16\pi G}\left[\nabla^2\mathcal{G}^{0\alpha}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\mathcal{G}^{0\alpha}\right] \tag{2.90}$$

e para a componente (0 0)

$$c^2\rho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+3U\right)\right\}=\frac{7}{8\pi G}\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}-\frac{c^5}{16\pi G}\left\{\nabla^2 g_{00}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g^{00}\right\}. \tag{2.91}$$

Desta forma a integral de movimento é

$$I=c^2\int dV\left\{\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+3U\right)\right]-\frac{7}{8\pi Gc^2}\frac{\partial U}{\partial x_s}\frac{\partial U}{\partial x^s}+\frac{c^3}{16\pi G}\left(\nabla^2 g_{00}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g^{00}\right)\right\}=cte. \tag{2.92}$$

Todavia, da componente (0 0) da equação de Einstein (2.9) obtemos

$$I=0, \tag{2.93}$$

o que está em plena discordância com o limite Newtoniano. Denisov e Logunov ainda mostraram que as soluções exatas da equação de Einstein também levam a integrais de movimento nulas[14].

2.8-Incompatibilidades com as teorias de gauge

Um ponto interessante a salientar é a existência de inconsistências da RG com as teorias de gauge. As teorias de gauge são as mais bem sucedidas dentro do estudo de campos, pois diversos resultados, tais como renormalização , unificação de campos e até mesmo a própria simplicidade, as colocaram no estágio atual. Por esta razão seria interessante termos uma

[14] DENISOV, V. I.; LOGUNOV, A. A. **Theor. Math. Fiz.**, v.43, p.187-, 1980.

teoria de gravitação consistente com as teorias de gauge. No entanto, a Relatividade Geral difere destas teorias em alguns aspectos, como por exemplo, na própria equação de campo, pois enquanto as teorias de gauge têm equações de campo ditas dinâmicas(equações de Yang-Mills), onde a derivada covariante do dual do campo é igualada ao termo de fonte

$$D * F = d * F + [A, *F] = *j$$

sendo A o potencial de gauge e F o campo de gauge, a teoria geral da relatividade tem uma equação estática

$$G = 8\pi T,$$

o que evidencia diferenças estruturais entre elas.

Além disto, a RG é indubitavelmente uma teoria não renormalizável. t'Hooft e Veltman mostraram que ela não é renormalizável em ordem superior a um loop[15] e havendo interação com partículas escalares, o método empregado para eliminar algumas divergências não elimina nem mesmo as divergências de primeira ordem.

[15] T'HOOFT,G.,VELTMAN,M. One-loop divergences in the theory of gravitation. **Ann. Inst.Henri Poincaré**,Section A, v.XX, n.1, p.69-94, 1974.

3-Teorias de Gauge

3.1-Conceitos fundamentais

As teorias de gauge, incluindo nesta categoria as teorias de Yang-Mills, partem de um conceito conhecido que se refere às transformações de gauge. O conceito clássico de transformações de gauge[1] surgiu no eletromagnetismo a partir do primeiro par de equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3.2}$$

Estas equações permitem-nos interpretar os campos **E** e **B** como sendo derivados de um potencial eletromagnético mais fundamental

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{3.4}$$

uma vez que para quaisquer grandezas **A** e ϕ temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{3.5}$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0. \tag{3.6}$$

As formas de ϕ e **A** não podem ser univocamente determinadas, pois transformações do tipo

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f \tag{3.7}$$

$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.8}$$

---

[1] LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics.** 4.ed. Vol 2. *The Classical Theory of Fields.* New York: Pergamon Press Inc., 1989.

para qualquer função f, não modificam os valores dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, estes dotados de significados físicos. As transformações (3.7) e (3.8) são chamadas no eletromagnetismo de transformações de gauge, e a invariância da teoria perante estas transformações é chamada de invariância de gauge. Isto sempre foi o fato principal de serem as grandezas $\mathbf{A}$ e ϕ consideradas sem importância física, todavia, a importância destas grandezas começa a ser percebida quando a equação de Lorentz

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.9}$$

pode ser substituída por relações mais genéricas para o acoplamento minimal entre energia e momentum

$$E \to E + e\phi \tag{3.10}$$

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P} + e\mathbf{A}, \tag{3.11}$$

nos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano.

Na física moderna o conceito de gauge é um pouco mais genérico. Aqui a matéria é descrita através de funções de onda, ou mais genericamente através de campos de matéria, que podem ser funções escalares, vetoriais, espinoriais ou tensoriais. Os principais tipos de campos de matéria são[2]:

a) Campo escalar: É descrito por funções escalares $\phi(x^\mu)$ das coordenadas do espaço-tempo x^μ, que quando não interagem, obedecem à equação de Klein-Gordon

$$\Box\phi(x^\mu) + m^2\phi(x^\mu) = 0 \tag{3.12}$$

que é derivável da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*. \tag{3.13}$$

O campo escalar descreve propriedades das partículas de spin 0, como por exemplo píons, Π^0, Π^+ e Π^-, mésons escalares, etc...

b) Campo espinorial: É representado relativisticamente por meio de bispinores de Dirac

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x^\mu) \\ \phi_2(x^\mu) \\ \phi_3(x^\mu) \\ \phi_4(x^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

[2] LURIÉ,D. **Particles and Fields**. London: Interscience Publishers,1968.

englobando um conjunto de 4 funções escalares, cuja interpretação depende da representação utilizada, e que no caso livre obedece à equação de Dirac

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0 \tag{3.15}$$

sendo $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ e γ^μ as matrizes de Dirac, estas tendo a propriedade

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

O campo espinorial descreve partículas de spin 1/2 como elétrons, prótons e nêutrons, e também pode ser representado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\partial\!\!\!/ - m)\Psi \tag{3.17}$$

com $\bar{\Psi}$ dado por $\Psi^\dagger\gamma^0$.

c) Campo vetorial massivo: É descrito por vetores $A_\mu(x^\nu)$, que descrevem campos de spin 1. No caso livre estes obedecem à equação de campo

$$\partial^\lambda F_{\lambda\nu} = \mu^2 A_\nu \tag{3.18}$$

$$F_{\lambda\nu} = \partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda, \tag{3.19}$$

onde μ é a massa do campo. A Lagrangeana que leva às equações de campo (3.18) é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A^\mu. \tag{3.20}$$

d) Campo vetorial sem massa:Campo de Maxwell: Campos de partículas de spin 1 sem massa não interagindo, são representados pelas equações de Maxwell

$$\partial^\lambda F_{\lambda\nu} = 0 \tag{3.21}$$

$$F_{\lambda\nu} = \partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda \tag{3.22}$$

ou pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.23}$$

A equação (3.21) leva às seguintes equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3.25}$$

enquanto que o outro par de equações de Maxwell vem da identidade de Bianchi(Ver Identidade de Bianchi no apêndice A.8)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \tag{3.26}$$

que leva a

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.27}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3.28}$$

Os campos de matéria têm valores adicionais que descrevem o próprio campo. Por exemplo: o campo escalar real tem a intensidade de campo em cada ponto do espaço-tempo, enquanto o campo escalar complexo tem a intensidade de campo e uma fase complexa. Dependendo do tipo de valor, sua alteração pode modificar ou não os resultados da teoria. No exemplo acima, se fizermos uma troca global

$$\phi(x^\mu) \to g\phi(x^\mu), \tag{3.29}$$

onde g é uma constante, os resultados da teoria são modificados, pois para uma lagrangeana do tipo ϕ^4

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 - k\phi^4 \tag{3.30}$$

de um modelo de auto-interação , a troca (3.29) representaria uma alteração no valor da constante de interação k, que por sua vez modificaria a intensidade da interação ϕ^4.

Por outro lado, para o campo complexo uma mudança global de fase

$$\phi(x^\mu) \to e^{i\theta}\phi(x^\mu) \tag{3.31}$$

não modifica os valores da teoria e, este tipo de grandeza, cuja alteração global não altera os resultados da teoria, é chamado de gauge.

3.2-Transformações de gauge

Transformações globais que não modificam uma teoria são chamadas de transformação de gauge de primeira espécie. A invariância da teoria, segundo um determinado tipo de transformações , pode ser determinada a partir das densidades de Lagrangeana da teoria. Por exemplo, o campo escalar complexo tem a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \tag{3.32}$$

de forma que, fazendo a transformação (3.31), vemos que a densidade de Lagrangeana não se modifica. Similarmente, a densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\not{\partial} - m)\Psi \tag{3.33}$$

não é afetada pela transformação

$$\Psi(x^\mu) \to e^{i\theta}\Psi(x^\mu). \tag{3.34}$$

Da mesma forma as equações não são modificadas por transformações de Lorentz e translações. Enfim, existem diversos tipos de transformações que não modificam a forma das equações de campo. Estas transformações obedecem a certas propriedades, que a caracterizam matematicamente como grupos de Lie. Por exemplo, as transformações de gauge são tais que uma transformação finita pode ser decomposta numa sucessão de transformações infinitesimais, sendo cada uma na forma

$$g_\varepsilon \approx 1 + \theta^a J_a, \tag{3.35}$$

onde θ^a são parâmetros infinitesimais e J_a são os geradores infinitesimais do grupo de simetria. Matematicamente g_ε pertence a um grupo de Lie G, e $\theta^a J_a$ é um vetor na álgebra de Lie g do grupo G. No caso do campo escalar complexo, as transformações (3.31) na forma infinitesimal são

$$g_\varepsilon = 1 + i\theta, \tag{3.36}$$

onde θ é o coeficiente e i é o gerador infinitesimal do grupo $U(1)$, grupo de transformações que preserva o modelo das funções de onda. Os grupos e álgebras mais comuns são[3]:

[3] WYBOURNE,B.G. Classical Groups for Physicists John Wiley & Sons, New York, 1973.

GL(n,C) $\rightarrow$ grupo de matrizes inversíveis $n \times n$ complexas

$\rightarrow$ Álgebra gl(n,C) $\rightarrow$ matrizes $n \times n$ complexas

$\rightarrow$ dimensão $2n^2$;

GL(n,R) $\rightarrow$ grupo de matrizes inversíveis $n \times n$ reais

$\rightarrow$ Álgebra gl(n,R) $\rightarrow$ matrizes $n \times n$ reais

$\rightarrow$ dimensão n^2;

SL(n,C) $\rightarrow$ grupo de matrizes complexas $n \times n$ de determinante 1

$\rightarrow$ Álgebra sl(n,C) $\rightarrow$ matrizes complexas X com $trX = 0$

$\rightarrow$ dimensão $2n^2 - 2$;

SL(n,R) $\rightarrow$ grupo de matrizes reais $n \times n$ de determinante 1

$\rightarrow$ Álgebra sl(n,R) $\rightarrow$ matrizes reais X com $trX = 0$

$\rightarrow$ dimensão $n^2 - 1$;

SO(n) $\rightarrow$ grupo de matrizes reais $n \times n$ que preservam o produto interno em um espaço euclidiano

$\rightarrow$ Álgebra so(n) $\rightarrow$ matrizes reais X com $X^T = -X$

$\rightarrow$ dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$;

SO(p,q) $\rightarrow$ idem a SO(p+q), mas preservando o produto interno $g(X_1, X_2)$ com g dado por:

$$g = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$$

onde I_q é uma matriz identidade de ordem q e I_p é uma matriz identidade de ordem p;

U(n) $\rightarrow$ grupo de matrizes complexas $n \times n$ que preservam o produto interno $X^\dagger X$

$\rightarrow$ Álgebra u(n) $\rightarrow$ matrizes complexas X com $X^\dagger = -X$

$\rightarrow$ dimensão n^2;

SU(n) $\rightarrow$ grupo de matrizes complexas $n \times n$ que preservam o produto interno $X^\dagger X$ e tem det=1

$\rightarrow$ Álgebra su(n) $\rightarrow$ matrizes complexas X com $X^\dagger = -X$ e $trX = 0$

$\rightarrow$ dimensão $n^2 - 1$;

As transformações de gauge na função de onda mostradas até aqui, fazem parte do grupo $U(1)$, pois preservam o produto $\phi^*\phi$. O gerador do grupo, que em outras palavras é uma base na álgebra, pode ser determinado a partir da forma da álgebra que tem

$$X^* + X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X = \theta i \tag{3.37}$$

onde, escolhendo θ como coordenada, obtemos o gerador

$$J_{U(1)} = i. \tag{3.38}$$

Transformações finitas são então dadas por

$$S = e^{\theta^a J_a} = e^{\theta i} \tag{3.39}$$

com θ finito. Formando uma base no espaço da álgebra, a forma dos geradores dependerá da representação escolhida para a mesma.

Valores geralmente citados em teorias de gauge e espaços fibrados em geral são as constantes de estrutura $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ do grupo, estas expressas pelas regras de comutação do grupo

$$[X_\beta, X_\gamma] = C^\alpha{}_{\beta\gamma} X_\alpha. \tag{3.40}$$

Como vimos, a teoria escalar e a teoria espinorial não se modificam por transformações do grupo $U(1)$. Porém, se fizermos θ função das coordenadas do espaço-tempo, ou seja, se fizermos

$$\phi(x^\mu) \to e^{i\theta(x^\mu)}\phi(x^\mu) \tag{3.41}$$

e

$$\Psi(x^\mu) \to e^{i\theta(x^\mu)}\Psi(x^\mu) \tag{3.42}$$

veremos que as Lagrangeanas (3.32) e (3.33) serão modificadas, pois

$$\partial_\mu\phi \to e^{i\theta}\partial_\mu\phi + ie^{i\theta}\phi\partial_\mu\theta \tag{3.43}$$

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* \to \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + i(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\theta + (\partial_\mu\theta)^2\phi\phi^* \tag{3.44}$$

o que significa que a teoria não é invariante pelas transformações (3.41) e (3.42). Este tipo de transformação de gauge, onde os parâmetros são dependentes de coordenadas, constitui as transformações de gauge de segunda espécie.

Se exigirmos a invariância pelas transformações (3.41) e (3.42), algo deve ser modificado na teoria para suportar esta nova propriedade. Como a alteração na Lagrangeana é devida ao termo contendo a derivada, devemos buscar uma estrutura matemática que tenha uma nova definição de derivada covariante por transformações do tipo (3.41). Esta estrutura é o espaço fibrado.

Basicamente, um espaço fibrado é um espaço base, no caso o espaço-tempo de Minkowski, no qual são projetados todos os objetos geométricos para obtermos a interpretação física, acrescido de dimensões adicionais tais que a alteração nas coordenadas adicionais é feita pela ação de um grupo de Lie. Estas transformações representam transformações de gauge e são tais que podem ser diferentes ponto a ponto. Na realidade a definição de espaço fibrado é uma generalização do espaço produto, uma vez que a estrutura matemática de um espaço fibrado é bastante rica, e permite-nos obter novos resultados como a definição de uma derivada covariante pela ação do grupo de Lie no próprio espaço fibrado. A escolha ou fixação de um gauge particular na teoria é representada matematicamente pela escolha de uma seção no espaço fibrado, de forma que a cada ponto do espaço base corresponde um único ponto na seção.

3.3-Derivada covariante e forma-conexão

Fisicamente, a substituição do espaço de Minkowski por um espaço fibrado tem como principal alteração a substituição da derivada ordinária pela derivada covariante[4]

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - A^a{}_\mu J_a, \tag{3.45}$$

onde $A^a{}_\mu$ são as componentes da forma-conexão e J_a são os geradores de um grupo de Lie contido no próprio fibrado. A fórmula da derivada covariante pode também ser posta na forma:

$$\Psi(x+dx) = \Psi(x) + \Psi(x) A_\mu{}^a J_a dx^\mu \tag{3.46}$$

ou seja, o fator de fase devido a um deslocamento infinitesimal é então

$$\varphi = I + A_\mu{}^a J_a dx^\mu \tag{3.47}$$

para funções que tenham componentes no espaço da álgebra do grupo.

[4] DANIEL, M.; VIALLET, C. M. The geometrical settings of gauge theories of Yang-Mills type. **Reviews on Modern Physics**, v.52, n.1, p.175-197, January 1980.

Para o espaço fibrado do grupo $U(1)$ temos

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iA_\mu. \tag{3.48}$$

A fórmula (3.48) é geralmente obtida em textos de matemática, mas em física costuma-se definir a forma-conexão mediante

$$A^a{}_\mu \to gA^a{}_\mu, \tag{3.49}$$

onde g é uma constante. Esta redefinição deve-se à forma da Lagrangeana, conforme veremos na próxima seção. Desta maneira, para o grupo $U(1)$ teremos

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{3.50}$$

onde usamos o fato que para o grupo $U(1)$ costuma-se representar g por e(carga elementar). Pela relação $P_\mu = i\partial_\mu$ concluímos que para o grupo $U(1)$

$$P_\mu \to P_\mu + eA_\mu \tag{3.51}$$

que é a relação de acoplamento minimal já discutida em (3.10) e (3.11). Isto significa que podemos interpretar a forma-conexão como um potencial em uma teoria de gauge e, em geral teremos

$$P_\mu \to P_\mu - igA^a{}_\mu J_a. \tag{3.52}$$

Para confirmar a associação da forma-conexão com o potencial da teoria devemos ter a mesma lei de transformação para ambos. De fato, a forma conexão sobre a ação de um elemento g do grupo se transforma mediante

$$\mathbf{A}_\mu \to g^{-1}\mathbf{A}_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g \tag{3.53}$$

que, no caso do grupo $U(1)$, se reduz a

$$\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu \theta \tag{3.54}$$

onde usamos $\mathbf{A}_\mu = A^a{}_\mu J_a = A_\mu i$ e $g = e^{i\theta}$ e o fato que o grupo é Abeliano.

A Lagrangeana das teorias escalar e espinoral ficam então, respectivamente,

$$\mathcal{L}_{escalar} = -(\partial_\mu - A^a_\mu J_a)\phi(\partial^\mu - A^{a\mu}J_a)\phi^* - m^2\phi\phi^* \tag{3.55}$$

$$\mathcal{L}_{espinorial} = -\bar{\Psi}(\partial_\mu - A^a_\mu J_a - m)\Psi. \tag{3.56}$$

3.4-Forma-curvatura, campo e equação de campo

Como a forma-conexão não se transforma covariantemente e sim segundo a equação (3.53), não podemos utilizá-la diretamente na Lagrangeana de campo. A grandeza matemática covariante que é função do potencial (forma-conexão) é a curvatura, dada pela derivada exterior covariante da própria conexão

$$\mathbf{F} = \mathbf{DA} = \mathbf{dA} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}, \tag{3.57}$$

onde $\mathbf{d}$ é a derivada exterior e $\wedge$ é o produto exterior. A primeira impressão que temos é que como o produto exterior é anticomutativo o termo $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$ deve ser nulo, mas como estamos em um espaço fibrado $\mathbf{A}$ também tem componentes no grupo, de forma que

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} A^a{}_\mu A^b{}_\nu [J_a, J_b] dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{3.58}$$

e como em geral $[J_a, J_b] \neq 0$ temos que o produto $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$ é em geral não nulo. Para grupos Abelianos fazemos então

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} \tag{3.59}$$

como é o caso do eletromagnetismo que, em componentes, fica

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.60}$$

e usando a representação

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

e ainda com $A_\mu = (-\phi, A_1, A_2, A_3)$ obtemos de (3.60)

$$B = \nabla \times A \tag{3.61}$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \tag{3.62}$$

o que nos leva a interpretar a forma-curvatura com o campo na teoria.

A ação utilizada pelas teorias de Yang-Mills que mantém o carácter escalar no espaço-tempo é

$$S = \frac{1}{4}\int F \wedge *F \tag{3.63}$$

ou seja, a densidade de Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{a} F_{a}{}^{\mu\nu}, \tag{3.64}$$

onde os índices latinos representam as coordenadas no espaço do grupo e os índices gregos as coordenadas no espaço-tempo. É importante lembrar que uma Lagrangeana na forma (3.64) só pode ser construída para grupos que admitem métrica, ou seja, apenas para grupos semi-simples. Para grupos não semi-simples como o grupo de Poincaré costuma-se utilizar outros métodos para a obtenção de invariantes da teoria.

Quando temos a interação do campo de gauge com um campo de matéria obtemos em geral

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}{}^{a} F_{\mu\nu}{}^{a} + \mathcal{L}_M \tag{3.65}$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a Lagrangeana do campo de matéria e g é uma constante de acoplamento. Por simplicidade costumamos inserir esta constante no próprio potencial, fazendo

$$A_\mu{}^a \to g A_\mu{}^a \tag{3.66}$$

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + \frac{1}{2} g A_\mu{}^b A_\nu{}^c [J_b, J_c]^a \tag{3.67}$$

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - g A_\mu{}^a J_a \tag{3.68}$$

e ficamos com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{a} F_{a}{}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M. \tag{3.69}$$

A Lagrangeana (3.64) leva em geral às equações de Yang-Mills

$$\delta F + g *^{-1} [A, *F] = 0 \tag{3.70}$$

o que significa em componentes

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}{}^c + g A^{\nu a} F_{\mu\nu}{}^b C^c_{ab} = 0. \tag{3.71}$$

No caso do eletromagnetismo que tem um grupo Abeliano como grupo de simetria

$$\partial^{\nu} F_{\mu\nu} = 0 \tag{3.72}$$

e usando a representação usual obtemos as equações de Maxwell

$$\nabla \times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{3.73}$$

$$\nabla \cdot E = 0. \tag{3.74}$$

Para a Lagrangeana (3.69) com interação teremos a seguinte equação de Yang-Mills

$$\delta F + g *^{-1} [A, *F] = 4\pi j \tag{3.75}$$

ou, em componentes,

$$\partial^{\nu} F_{\mu\nu}{}^{c} + g A^{\nu a} F_{\mu\nu}{}^{b} [J_a, J_b]^c = 4\pi j_{\mu}{}^{c} \tag{3.76}$$

onde $j_{\mu}{}^{c}$ é a chamada corrente do campo de matéria. Para o eletromagnetismo, em especial, temos

$$\partial^{\nu} F_{\mu\nu} = j_{\mu}, \tag{3.77}$$

o que nos leva a

$$\nabla \times B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j \tag{3.78}$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho. \tag{3.79}$$

O outro par das equações de Maxwell pode ser obtido a partir da relação matemática

$$\mathbf{dF} = \mathbf{ddA} = 0, \tag{3.80}$$

que em componentes fica

$$\partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\rho} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} = 0 \tag{3.81}$$

ou, usando a representação usual

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.82}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3.83}$$

Apesar de as teorias de Yang-Mills serem bastante utilizadas, a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{a} F_{a}{}^{\mu\nu} \tag{3.84}$$

constitui um caso particular de Lagrangeana. Podemos assim ter qualquer forma de Lagrangeana sempre mantendo o carácter escalar e covariante por transformações do grupo.

3.5-Teoria de Yang para a gravitação

Em qualquer variedade Riemanniana o conceito de deslocamento paralelo define ao longo de qualquer trajetória AB uma relação linear entre qualquer vetor V_A e seu vetor paralelo V_B em B. Isto significa que o deslocamento paralelo é definido por uma matriz $n \times n$ real M_{AB}, a qual é uma representação do grupo $GL(4, R)$.

Yang propôs[5] uma teoria de gauge onde, no formalismo de espaços fibrados, teríamos:

a) Espaço base: Espaço de Riemann com dimensão 4 e métrica $g_{\mu\nu}$ com signatura +2;

b) Grupo de Lie: $GL(4, R)$;

c) Fibra típica: Espaço vetorial tangente a um ponto no espaço de Riemann;

d) Como o relacionamento de 2 vetores paralelamente transportados no espaço de Riemann é

$$X'^{\mu} = X^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}{}^{\mu} X^{\nu} dx^{\rho} \tag{3.85}$$

podemos por comparação com (3.46) dizer que a forma-conexão será dada por

$$A_{\mu}{}^{a} \rightarrow \Gamma^{\alpha\beta}{}_{\mu}, \tag{3.86}$$

onde as componentes no espaço do grupo são os elementos da própria matriz do grupo.

A forma-curvatura será expressa como

$$F^{(\alpha\beta)}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha\beta}{}_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha\beta}{}_{\mu} + \Gamma^{\varepsilon\delta}{}_{\mu}\Gamma^{\lambda\pi}{}_{\nu} C^{(\alpha\beta)}{}_{(\varepsilon\delta)(\lambda\pi)}, \tag{3.87}$$

onde os $C^{(\alpha\beta)}{}_{(\varepsilon\delta)(\lambda\pi)}$ são as constantes de estrutura do grupo $GL(4, R)$

$$C^{(\alpha\beta)}{}_{(\varepsilon\delta)(\lambda\pi)} = \delta_{\delta\pi}\delta^{\alpha}{}_{\varepsilon}\delta^{\beta}{}_{\pi} - \delta_{\varepsilon\pi}\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\delta} \tag{3.88}$$

de forma que

$$F^{(\alpha\beta)}{}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\pi}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\pi\nu}. \tag{3.89}$$

---

[5] YANG, C. N. Integral Formalism for gauge Fields. **Physical Review Letters**. v.13, n.7, p.445-447, 12 August 1974.

Reconhecemos na fórmula anterior a definição do tensor de Riemann, ou seja, a forma-curvatura(ou o campo) na teoria de Yang é o próprio tensor de curvatura de Riemann. As equações de campo, segundo a teoria de Yang-Mills com fonte, são

$$D^{\nu} F^{a}{}_{\mu\nu} = J_{\mu}{}^{a} \tag{3.90}$$

e usando os valores encontrados temos

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}{}^{;\nu} = J^{\alpha}{}_{\beta\mu}. \tag{3.91}$$

No vácuo teremos

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}{}^{;\nu} = 0, \tag{3.92}$$

e a identidade de Bianchi fica neste caso

$$D_{\lambda} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + D_{\mu} R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda} + D_{\nu} R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} = 0. \tag{3.93}$$

Fazendo $\lambda = \alpha$ e lembrando as propriedades de simetria de $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = -R^{\beta\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{3.94}$$

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = -R^{\alpha\beta}{}_{\nu\mu} \tag{3.95}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\nu\beta\mu\alpha}, \tag{3.96}$$

obtemos a chamada equação de Yang para o campo gravitacional no vácuo

$$R_{\beta\mu;\nu} = R_{\beta\nu;\mu}, \tag{3.97}$$

de onde facilmente percebemos que a teoria de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.98}$$

é obtida como solução particular.

Algumas soluções específicas da solução de Yang são[6]:

[6] THOMPSON, A. H. Yang's Gravitational Field Equations. **Physical Review Letters**, v.34, n.8, p.507-508, 24 February 1975.

a) Universo de Einstein: conforme pode ser verificado a solução de Einstein

$$ds^2 = -(1 - r^2/k^2)^1 dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2 \tag{3.99}$$

com $k = constante$ é uma solução da equação de Yang (3.97);

b) A solução esfericamente simétrica

$$ds^2 = -A^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + A^{-2} dt^2 \tag{3.100}$$

com

$$A = 1 + \frac{k}{r} \tag{3.101}$$

e k constante, também é solução da equação de Yang.

Calculando o avanço do perihélio de Mercúrio com a solução (3.100), obtemos 1/6 do valor observado e em sentido oposto, i.e., o perihélio atrasa em vez de avançar.

Concluímos que a teoria de Yang, mesmo sendo uma teoria de Yang-Mills, não se mostra como boa teoria para este resultado.

4-Teoria de Poincaré em 2+1 Dimensões

4.1-Potenciais e Campos

Uma teoria para o campo gravitacional com o grupo de Poincaré em 2+1 dimensões, tendo a teoria Newtoniana como sub-teoria, foi tratada por Kawai[1], que obtém além disso a teoria de Einstein como caso particular.

O espaço-tempo tridimensional M é suposto como uma variedade diferenciável com métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$ relacionada às triadas e^k_μ por

$$g_{\mu\nu} = e^k{}_\mu \eta_{kl} e^l{}_\nu, \tag{4.1}$$

sendo η_{kl} uma métrica plana.

O potencial de gauge de Lorentz se transforma de acordo com

$$A'^{kl}{}_\mu(x) = A^{kl}{}_\mu(x) + \omega^k{}_m(x) A^{ml}{}_\mu(x) + \omega^l{}_m(x) A^{km}{}_\mu(x) - \partial_\mu \omega^{kl}(x) \tag{4.2}$$

e as triadas conforme

$$e'^k{}_\mu(x) = e^k{}_\mu(x) + \omega^k{}_l(x) e^l{}_\mu(x), \tag{4.3}$$

onde ω^{kl} é uma função real infinitesimal e antisimétrica em kl. A derivada covariante $D_k\varphi$ de um campo φ pertencendo à representação σ do grupo de Lorentz tridimensional é dada por

$$D_k\varphi = e^\mu{}_k \left(\partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} A^{lm}{}_\mu M_{lm} \varphi \right), \tag{4.4}$$

onde $M_{kl} = -i\sigma_*(\bar{M}_{kl})$. Aqui $\bar{M}_{kl}$ são geradores da álgebra de Lie do grupo de Lorentz, satisfazendo às relações

$$[\bar{M}_{kl}, \bar{M}_{mn}] = -\eta_{km}\bar{M}_{ln} - \eta_{ln}\bar{M}_{km} + \eta_{km}\bar{M}_{lm} - \eta_{lm}\bar{M}_{kn} \tag{4.5}$$

---

[1] KAWAI, Toshiharu. Poincaré gauge theory of (2+1)-dimensional gravity. **Physical Review D**, v.49, n.6, p.2862-2871. 1994.

$$\bar{M}_{kl} = -\bar{M}_{lk}. \tag{4.6}$$

Os campos devidos a cada um dos potenciais são a curvatura de Riemann e a torção

$$R^{kl}{}_{mn} = e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n}(\partial_{\mu}A^{kl}{}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{kl}{}_{\mu} - A^{k}{}_{\gamma\mu}A^{l\gamma}{}_{\nu} + A^{k}{}_{\gamma\mu}A^{l\gamma}{}_{\mu}) \tag{4.7}$$

$$T^{k}{}_{lm} = e^{\mu}{}_{l}e^{\nu}{}_{m}(\partial_{\mu}e^{k}{}_{\nu} - \partial_{\nu}e^{k}{}_{\mu}) + e^{\mu}{}_{l}A^{k}{}_{m\mu} - e^{\mu}{}_{m}A^{k}{}_{l\mu}. \tag{4.8}$$

Em 3 dimensões temos a seguinte relação satisfeita

$$R_{klmn} = \eta_{km}R_{ln} - \eta_{kn}R_{lm} - \eta_{lm}R_{kn} + \eta_{ln}R_{km} - \frac{1}{2}(\eta_{km}\eta_{ln} - \eta_{kn}\eta_{lm})R; \tag{4.9}$$

onde definimos $R_{kl} = R^{m}{}_{kml}$ e $R = R^{k}{}_{k}$. A derivada covariante no espaço-tempo é então dada por

$$D_{\nu}V^{\mu} = \partial_{\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}V^{\lambda}. \tag{4.10}$$

Como a derivada covariante do tensor métrico é nula, temos que

$$g^{\alpha\beta}D_{\mu}(g_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}D_{\mu}(e^{a}{}_{\alpha}a^{b}{}_{\beta}\eta_{ab}) \tag{4.11}$$

$$g^{\alpha\beta}[(D_{\mu}e^{a}{}_{\alpha})e_{a\beta} + e_{b\alpha}D_{\mu}e^{b}{}_{\beta}] = 2e^{\alpha}{}_{a}D_{\mu}e^{a}{}_{\alpha} = 0 \tag{4.12}$$

ou seja,

$$D_{\mu}e^{a}{}_{\alpha} = 0, \tag{4.13}$$

de forma que temos a relação

$$D_{l}V^{k} = e^{\nu}{}_{l}e^{k}{}_{\mu}D_{\nu}V^{\mu} \tag{4.14}$$

que, de outra forma, afirma que

$$A^{k}{}_{l\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}e^{k}{}_{\nu}e^{\lambda}{}_{l} + e^{k}{}_{\nu}\partial_{\mu}e^{\nu}{}_{l}. \tag{4.15}$$

Definindo agora

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{\lambda}{}_{k}T^{k}{}_{\mu\nu} \tag{4.16}$$

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = e^{\lambda}{}_{k}e^{l}{}_{\rho}R^{k}{}_{l\mu\nu} \tag{4.17}$$

obtemos

$$T^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \tag{4.18}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\tau\lambda}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\tau\rho}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda}. \tag{4.19}$$

Das fórmulas (4.15) e (4.18) obtemos

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{4.20}$$

onde o símbolo de Christoffel é definido por

$$\{^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\xi}(\partial_\mu g_{\xi\nu} + \partial_\nu g_{\xi\mu} - \partial_\xi g_{\mu\nu}) \tag{4.21}$$

e o tensor contorção por

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} - T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} - T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}). \tag{4.22}$$

4.2-Densidade de Lagrangeana e equações de campo

A Lagrangeana da teoria escolhida é a mais geral possível, sendo quadrática nos campos na torção , e na curvatura:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}[L_G + L_M(\varphi, D_k\varphi)] \tag{4.23}$$

$$L_G = L_T + L_R \tag{4.24}$$

$$L_T = \alpha t^{klm} t_{klm} + \beta v^k v_k + \gamma a^{klm} a_{klm} + \delta \tag{4.25}$$

$$L_R = a_1 E^{kl} E_{kl} + a_2 I^{kl} I_{kl} + a_3 R^2 + aR. \tag{4.26}$$

Aqui $L_M(\varphi, D_k\varphi)$ é a Lagrangeana do campo de matéria e t_{klm}, v_k e a_{klm} são as componentes irredutíveis de T_{klm}, definidas por

$$t_{klm} = \frac{1}{2}(T_{klm} + T_{lkm}) + \frac{1}{4}(\eta_{mk} v_l + \eta_{ml} v_k) - \frac{1}{2}\eta_{kl} v_m \tag{4.27}$$

$$v_k = T^{l}{}_{lk} \tag{4.28}$$

$$a_{klm} = \frac{1}{3}(T_{klm} + T_{mkl} + T_{lmk}) \tag{4.29}$$

onde E_{kl}, I_{kl} e R são as componentes irredutíveis de R_{klmn}

$$E_{kl} = \frac{1}{2}(R_{kl} - R_{lk}) \tag{4.30}$$

$$I_{kl} = \frac{1}{2}(R_{kl} + R_{lk}) - \frac{1}{3}\eta_{kl}R \tag{4.31}$$

$$R = R^k{}_k \tag{4.32}$$

e $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a_1, a_2, a_3$ e a são parâmetros constantes e reais.

A primeira equação de campo que daí obtemos é

$$2aR_{ji} + 4J_{[ik][jl]}R^{kl} + 4J^{[kl]}{}_{[jl]}R_{ki} - 2J_{[i}{}^{k]}{}_{[jk]}R - 2D^kF_{ijk} + 2v^kF_{ijk} + 2H_{ij} - \eta_{ij}L_G = T_{ij} \tag{4.33}$$

onde definimos

$$J_{ijkl} = 2a_3R\eta_{ik}\eta_{jl} + 2\eta_{ik}(a_1E_{jl} + a_2I_{jl}) \tag{4.34}$$

$$D^kF_{ijk} = e^{\mu k}(\partial_\mu F_{ijk} + A_i{}^m{}_\mu F_{mjk} + A_j{}^m{}_\mu F_{imk} + A_k{}^m{}_\mu F_{ijm}) \tag{4.35}$$

$$F_{ijk} = \alpha(t_{ijk} - t_{ikj}) + \beta(\eta_{ij}v_k - \eta_{ik}v_j) + 2\gamma_{aijk} = -F_{ikj} \tag{4.36}$$

e

$$H_{ij} = T_{kli}F^{kl}{}_j - \frac{1}{2}T_{jkl}F_i{}^{kl} \tag{4.37}$$

sendo o tensor energia-momentum expresso por T_{ij} e dado pela relação

$$\sqrt{-g}T_{ij} = e_{j\mu}\frac{\delta L_M}{\delta e^i{}_\mu}. \tag{4.38}$$

A outra equação de campo é

$$2D^lJ_{[ij][kl]} + \left(\frac{4}{3}t_k{}^{[lm]} - \delta_k{}^{[l}v^{m]} + a_k{}^{lm}\right)J_{[ij][lm]} - H_{ijk} = S_{ijk} \tag{4.39}$$

com

$$D^lJ_{[ij][kl]} = e^{\mu l}\partial_\mu J_{[ij][kl]} + A_i{}^m{}_\mu J_{[mj][kl]} + A_j{}^m{}_\mu J_{[im][kl]} + A_k{}^m{}_\mu J_{[ij][ml]} + A_l{}^m{}_\mu J_{[ij][km]} \tag{4.40}$$

$$H_{ijk} = -\left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)(t_{kij} - t_{kji}) - \left(\beta - \frac{a}{2}\right)(\eta_{ki}v_j - \eta_{kj}v_i) + (4\gamma - a)a_{ijk} = -H_{jik} \tag{4.41}$$

onde S_{ijk} é o tensor de spin definido por

$$\sqrt{-g}S_{ijk} = -e_{k\mu}\frac{\delta L_M}{\delta A^{ij}{}_\mu}. \tag{4.42}$$

4.3-Formas alternativas para as equações gravitacionais de campo

Reescrevendo o potencial Lorentziano como

$$A_{ij\mu} = \Delta_{ij\mu} + K_{ij\mu}, \tag{4.43}$$

onde $K_{ij\mu}$ é o tensor contorção e $\Delta_{ij\mu}$ são os coeficientes de rotação de Ricci

$$\Delta_{ij\mu} = \frac{1}{2} e^k{}_\mu (C_{ijk} - C_{jik} - C_{kij}), \tag{4.44}$$

Uma vez que

$$C_{ijk} = e^\nu{}_j e^\lambda{}_k (\partial_\nu e_{i\lambda} - \partial_\lambda e_{i\nu}) \tag{4.45}$$

podemos obter as equações de campo de forma a separar as partes devidas à curvatura e à torção . Por exemplo, o tensor de Riemann fica

$$R_{ij\mu\nu} = R_{ij\mu\nu}(\{\}) + R_{ij\mu\nu}(K) \tag{4.46}$$

com

$$R_{ij\mu\nu} = \partial_\mu \Delta_{ij\nu} - \partial_\nu \Delta_{ij\mu} - \Delta_i{}^k{}_\mu \Delta_{jk\nu} + \Delta_i{}^k{}_\nu \Delta_{jk\mu} =$$

$$e_{i\lambda} e^\rho{}_j \left(\partial_\mu \{{}^\lambda_{\rho\nu}\} - \partial_\nu \{{}^\lambda_{\rho\mu}\} + \{{}^\lambda_{\tau\mu}\}\{{}^\tau_{\rho\nu}\} - -\{{}^\lambda_{\tau\nu}\}\{{}^\tau_{\rho\mu}\} \right) =$$

$$= e_{i\lambda} e^\rho{}_j R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}(\{\}), \tag{4.47}$$

onde $R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}(\{\})$ é o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

Isto significa que as partes irredutíveis de $R^i{}_{j\mu\nu}$ também serão separadas em duas partes, de forma a termos

$$J_{ijkl} = J_{ijkl}(\{\}) + J_{ijkl}(K). \tag{4.48}$$

Em particular,

$$J_{ijkl}(\{\}) = 2a_2 \eta_{ik} R_{jl}(\{\}) + 2\left(a_3 - \frac{a_2}{3}\right) \eta_{ik}\eta_{jl} R(\{\}), \tag{4.49}$$

onde $R_{ij}(\{\})$ e $R(\{\})$ são o tensor de Ricci e a curvatura escalar devidos ao tensor de Riemann-Christoffel

$$R_{ij}(\{\}) = e^\mu{}_i e^\nu{}_j R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}(\{\}) \tag{4.50}$$

$$R(\{\}) = \eta^{ij} R_{ij}(\{\}). \tag{4.51}$$

A Lagrangeana gravitacional pode ser reescrita como

$$L_G = a_2 R^{kl}(\{\})R_{kl}(\{\}) + \left(a_3 - \frac{a_2}{3}\right)[R(\{\})]^2 + aR(\{\}) + L'_T + L'_R - \frac{2a}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}v^\mu) \quad (4.52)$$

$$L'_T = \left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)t^{klm}t_{klm} + \left(\beta - \frac{a}{2}\right)v^k v_k + \left(\gamma - \frac{a}{4}\right)a^{klm}a_{klm} + \delta \quad (4.53)$$

$$L'_R = L_R - a_2 R^{kl}(\{\})R_{kl}(\{\}) - \left(a_3 - \frac{a_2}{3}\right)[R(\{\})]^2 - aR, \quad (4.54)$$

onde usamos a relação

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}R(\{\}) - \sqrt{-g}\left(-\frac{2}{3}t^{klm}t_{klm} + \frac{1}{2}v^k v_k + \frac{1}{4}a^{klm}a_{klm}\right) - 2\partial_\mu(\sqrt{-g}v^\mu). \quad (4.55)$$

As equações de campo ficam então

$$2aG_{ij}(\{\}) + \frac{1}{3}(5a_2 + 12a_3)R_{ij}(\{\})R(\{\}) - 2a_2 R_i{}^k(\{\})R_{jk}(\{\}) +$$

$$+\eta_{ij}\left\{a_2 R^{kl}(\{\})R_{kl}(\{\}) - \left(\frac{2a_2}{3} + a_3\right)[R(\{\})]^2\right\} + a_2\eta_{ij}\{2R^{kl}(\{\})R_{kl}(K) - R(\{\})R(K)\} +$$

$$+a_2 R_{ij}(\{\})R(K) + \frac{2}{3}(a_2 + 6a_3)R(\{\})R_{ji}(K) - 2a_2 R_i{}^k(\{\})R_{jk}(K) + 4J_{[ik][jl]}(K)R^{kl} +$$

$$+4J^{[kl]}{}_{[jl]}(K)R_{ki} - 2J_{[i}{}^{k]}{}_{[jk]}(K)R - 2D^k F'_{ijk} + 2v^k F'_{ijk} + 2H'_{ij} - \eta_{ij}(L'_T + L'_R) = T_{ij} \quad (4.56)$$

e

$$-2a_2\Delta_{[i}G_{j]}(\{\}) - 8\left(a_3 + \frac{a_2}{6}\right)\eta_{k[i}\partial_{j]}G(\{\}) + 2(D^l - \Delta^l)J_{[ij][kl]}(\{\}) + 2D^l J_{[ij][kl]}(K) +$$

$$+\left(\frac{4}{3}t_k{}^{[lm]} - \delta_k{}^{[l}v^{m]} + a_k{}^{lm}\right)J_{[ij][lm]} - H_{ijk} = S_{ijk}, \quad (4.57)$$

onde

$$G_{ij}(\{\}) = R_{ij}(\{\}) - \frac{1}{2}\eta_{ij}R(\{\}) \quad (4.58)$$

$$R_{kl}(K) = R^m{}_{kml}(K), \qquad R(K) = R^k{}_k(K) \quad (4.59)$$

$$F'_{ijk} = \left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)(t_{ijk} - t_{ikj}) + \left(\beta - \frac{a}{2}\right)(\eta_{ij}v_k - \eta_{ik}v_j) + 2\left(\gamma - \frac{a}{4}\right)a_{ijk} = -F'_{ikj} \quad (4.60)$$

$$H'_{ij} = T_{kli}F'^{kl}{}_j - \frac{1}{2}T_{jkl}F'^{kl}{}_i. \quad (4.61)$$

4.4-Equações Linearizadas

Examinaremos agora as equações (4.56) e (4.57) na situação de campo fraco na qual

$$a^i{}_\mu = e^i{}_\mu - \delta^i{}_\mu \tag{4.62}$$

e $A^{ij}{}_\mu$ são suficientemente pequenos para que possamos manter apenas os termos lineares em $a^i{}_\mu$ e $A^{ij}{}_\mu$. Nesta aproximação os índices gregos e latinos não precisam ser distinguidos, e usaremos apenas os índices de espaço-tempo. Usaremos também a relação

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{4.63}$$

com

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}. \tag{4.64}$$

Nas equações a seguir faremos $\delta = 0$, pois $\delta \neq 0$ não estaria em harmonia com a aproximação de campo fraco. As equações de campo ficam

$$2aG_{\mu\nu}{}^{(1)} - 2\partial^\lambda F_{\mu\nu\lambda}{}'^{(1)} = T_{\mu\nu} \tag{4.65}$$

e

$$Z_{\lambda\mu\nu}{}^{(1)} = -S_{\lambda\mu\nu}. \tag{4.66}$$

Aqui definimos

$$G_{\mu\nu}{}^{(1)} = \partial_\lambda \partial_{(\mu} h^\lambda{}_{\nu)} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho} - \Box h) \tag{4.67}$$

$$F_{\mu\nu\lambda}{}'^{(1)} = \left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)(t_{\mu\nu\lambda} - t_{\mu\lambda\nu}) + \left(\beta - \frac{a}{2}\right)(\eta_{\mu\nu}v_\lambda - \eta_{\mu\lambda}v_\nu) + 2\left(\gamma - \frac{a}{4}\right)a_{\mu\nu\lambda} = -F'^{(1)}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} Z^{(1)}_{\lambda\mu\nu} = {} & a_2\left(\partial_\lambda G^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu G^{(1)}_{\lambda\nu}\right) + 8\left(a_3 + \frac{a_2}{6}\right)\eta_{\nu[\lambda}\partial_{\mu]}G^{(1)} + (a_1 + a_2)\eta_{\nu[\mu}\partial_\rho\partial_\sigma t^{\rho\sigma}{}_{\lambda]} + \\ & + \frac{1}{3}[\partial_\mu\partial_\sigma\{2a_1 t^\sigma{}_{[\lambda\nu]} + 3a_2 t_{\lambda\nu}{}^\sigma\} - \partial_\lambda\partial_\sigma\{2a_1 t^\sigma{}_{[\mu\nu]} + 3a_2 t_{\mu\nu}{}^\sigma\}] + \\ & + \frac{1}{6}(3a_1 + a_2 - 48a_3)\eta_{\nu[\mu}\partial_\sigma v^\sigma + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\{\partial_\nu\partial_{[\mu}v_{\lambda]} + \eta_{\nu[\lambda}\Box v_{\mu]}\} + \\ & + a_1\partial_\sigma\partial_{[\mu}a_{\lambda]\nu}{}^\sigma + H^{(1)}_{\lambda\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$H^{(1)}_{\lambda\mu\nu} = -\left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)(t_{\nu\lambda\mu} - t_{\nu\mu\lambda}) - \left(\beta - \frac{a}{2}\right)(\eta_{\nu\lambda}v_\mu - \eta_{\nu\mu}v_\lambda) + (4\gamma - a)a_{\lambda\mu\nu} = -H^{(1)}_{\mu\lambda\nu}. \tag{4.70}$$

Definindo ainda

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{4.71}$$

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{4.72}$$

obtemos

$$G_{\mu\nu}{}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu}. \tag{4.73}$$

Decompondo a equação (4.65) em partes simétrica, antisimétrica e traço

$$2aG^{(1)}_{\mu\nu} - 3\left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)\partial^{\lambda}t_{\mu\nu\lambda} - 2\left(\beta - \frac{a}{2}\right)\left(\eta_{\mu\nu}\partial^{\lambda}v_{\lambda} - \partial_{(\mu}v_{\nu)}\right) = T_{(\mu\nu)} \tag{4.74}$$

$$2\left(\alpha + \frac{2a}{3}\right)\partial^{\lambda}t_{\lambda[\mu\nu]} + 2\left(\beta - \frac{a}{2}\right)\partial_{[\mu}v_{\nu]} - 4\left(\gamma - \frac{a}{4}\right)\partial^{\lambda}a_{\mu\nu\lambda} = T_{[\mu\nu]} \tag{4.75}$$

$$2aG^{(1)} - 4\left(\beta - \frac{a}{2}\right)\partial^{\lambda}v_{\lambda} = T \tag{4.76}$$

e tomando a parte simétrica e a divergência de (4.66)

$$\partial^{\lambda}Z_{\lambda(\mu\nu)}{}^{(1)} = -\partial^{\lambda}S_{\lambda(\mu\nu)} \tag{4.77}$$

obtemos a equação de primeira ordem para $\bar{H}_{\mu\nu}$

$$A\Box\bar{h}_{\mu\nu} + B\Box^2\bar{h}_{\mu\nu} + C(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\Box\bar{h} = T^{(eff)}_{\mu\nu} \tag{4.78}$$

com

$$A = -a \tag{4.79}$$

$$B = -\frac{3\alpha a_2}{3\alpha + 2a} \tag{4.80}$$

$$C = \frac{1}{6(2\beta - a)}\{8\beta(a_2 + 6a_3) - 3aa_2\} - \frac{aa_2}{3\alpha + 2a} \tag{4.81}$$

e

$$T^{(eff)}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - 2\partial^{\lambda}S_{\lambda(\mu\nu)} - \frac{a_2 + 24a_3}{6(2\beta - a)}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})T -$$

$$-\frac{2a_2}{3\alpha + 2a}\left(\Box T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})T + 2\partial^{\lambda}\partial^{\rho}\partial_{(\mu}S_{\nu)\lambda\rho}\right). \tag{4.82}$$

4.5-Termo em h_{00} devido a uma fonte puntual sem spin e estática

Neste caso teremos a fonte de campo gravitacional descrita como

$$S_{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{4.83}$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} Mc^2\delta^2(r) & \mu = \nu = 0; \\ 0 & \text{outros casos.} \end{cases} \tag{4.84}$$

Para este caso, ${T_{\mu\nu}}^{(eff)}$ tem a forma

$$T_{00}^{(eff)} = Mc^2\{\delta^2(r) + (P+Q)\Delta\delta^2(r)\}$$

$$T_{0\alpha}^{(eff)} = T_{\alpha 0}^{(eff)} = 0 \tag{4.85}$$

$$T_{\alpha\beta}^{(eff)} = Mc^2(P-Q)(\partial_\alpha\partial_\beta - \delta_{\alpha\beta}\Delta)\delta^2(r),$$

onde $(\alpha\beta = 1,2)$, $\Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2$ e

$$P = -\frac{a_2 + 24a_3}{6(2\beta - a)}, \qquad Q = -\frac{a_2}{3\alpha + 2a}. \tag{4.86}$$

Tomando os traços de (4.78) e (4.82) obtemos

$$A\Box\bar{h} + (B+2C)\Box^2\bar{h} = T^{(eff)} \tag{4.87}$$

$$T^{(eff)} = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{(eff)} = -Mc^2\delta^2(r) - 2Mc^2P\Delta\delta^2(r). \tag{4.88}$$

Impondo agora $a = 0$ e $\alpha\beta a_2(a_2 + 24a_3) \neq 0$ e fazendo a integração de Fourier das equações (4.87) e (4.88) obtemos

$$h_{00}(r) = \frac{Mc^2(3\alpha + 4\beta)}{24\pi\alpha\beta}\ln r - \frac{Mc^2(a_2 + 6a_3)}{4\pi a_2(a_2 + 24a_3)}r^2\ln r + C_1r^2 + C_2, \tag{4.89}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração .

4.6-Relação com a teoria Newtoniana

O movimento clássico de partículas sem spin na teoria de Newton é dado pelas equações

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}}, \tag{4.90}$$

onde U está relacionado à curvatura do espaço-tempo por $U = -c^2 h_{00}/2e$, sendo que o potencial gravitacional satisfaz à equação de Newton

$$\Delta U = 4\pi G M \delta(r). \tag{4.91}$$

Esta solução é facilmente obtida observando as condições

$$3\alpha + 4\beta = -\frac{96\alpha\beta\pi G}{c^4} \tag{4.92}$$

$$a_2 + 6a_3 = 0, \tag{4.93}$$

e quanto à constante de integração C_1, esta é escolhida como sendo nula. Porém, devemos notar que as equações para h_{00} são de quarta ordem no presente modelo.

5-Grupo Conforme em 2+1 Dimensões

5.1-Introdução

A teoria restrita da relatividade presume a invariância do elemento de arco

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 = ds'^2 \tag{5.1}$$

para mostrar que a transformação de coordenadas entre referenciais inerciais se dá por meio de transformações de Lorentz adicionadas de translações . Isto conduz ao Grupo de Poincaré, onde

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \delta^{\mu}. \tag{5.2}$$

Ao estendermos a condição (5.1) para $ds^2 = ds'^2 = 0$ vemos que os seguintes tipos de transformações também são possíveis:

a) dilatações

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon x^{\mu} \tag{5.3}$$

b) transformações conformes especiais, geradas por uma inversão ($x'^{\mu} = k^2 x^{\mu}/x^2$), uma translação e uma nova inversão

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \alpha^{\mu} x^2 - 2x^{\mu} \alpha x. \tag{5.4}$$

A generalização do grupo de Poincaré incluindo as transformações (5.3) e (5.4) forma o grupo conforme. A invariância conforme foi inicialmente introduzida na física em 1909 quando Cunningham e Bateman[1] mostraram que as equações de Maxwell são covariantes não apenas com o grupo de Lorentz, mas também com um grupo mais geral a 15 parâmetros: o grupo conforme. Logo foi mostrado que partículas massivas não são invariantes sob transformações

[1] CUNNINGHAM, E. **Proc. London Math. Soc.**, v.8, p.77-, 1909; BATEMAN, H. **ibid**, v.8, p.223-, 1910.

conformes, e em 1972 Barut e Haugen[2] elaboraram um teoria mais geral introduzindo conceitos de invariantes conformes de massa e carga. Também foi mostrado por Wess[3] que o tensor energia-momentum é invariante sob transformações conformes. A principal característica deste grupo é ser o grupo de transformações mais geral que preserva a velocidade da luz[4], e que em 2+1 dimensões compõe-se de apenas 10 parâmetros (3 rotações , 3 translações , 3 transformações conformes e 1 dilatação).

5.2-Relação com grupos ortogonais e geradores de grupo

As transformações de coordenadas vistas anteriormente podem ser linearizadas com a introdução de uma quarta coordenada: a escala (κ) que fisicamente representa a escala dos equipamentos de medida. Commo o espaço 4-dimensional é homeomorfo a uma 4-superfície inserida num espaço 5-dimensional $(\eta^{\mu}, \kappa, \lambda)$, então podemos fazer

$$\begin{aligned} \eta^{a} &= \kappa x^{a} \\ \lambda &= \kappa x^{2} \\ \eta^{a}\eta_{a} - \kappa\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

As transformações conforme ficam então

$$\begin{aligned} T_3 : \eta'^{a} &= \eta^{a} + A^{a}\kappa \\ \kappa' &= \kappa \\ \lambda' &= 2A^{a}\eta^{a} + A^{2}\kappa + \lambda \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} L_3 : \eta'^{a} &= L^{a}_{b}\eta^{b}, \\ \kappa' &= \kappa \\ \lambda' &= \lambda \end{aligned} \tag{5.7}$$

[2] BARUT, A. O.; HAUGEN, H. B., Theory of Conformally Invariant Mass. **Annals of Physics**, v.71, p.519-541, 1972.

[3] WESS, J. Conformal Invariance and the Energy-Momentum Tensor. **Springer Tracts in Modern Physics**, n.60, 1971.

[4] FULTON, T.; ROHRLICH, F.; WITTEN, L., Conformal Invariance in Physics, **Reviews of Modern Physics**, v.34, n.3, July 1962.

$$
\begin{aligned}
D_1 : \eta'^a &= \eta^a, \\
\kappa' &= D^{-1}\kappa, \qquad (5.8)\\
\lambda' &= D\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3 : \eta'^a &= \eta^a - C^a\lambda, \\
\kappa' &= \kappa - 2C^a\eta^a + C^2\lambda, \qquad (5.9)\\
\lambda' &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Uma transformação adicional de coordenadas leva-nos a interpretar as equações (5.5) como equações de um hiper-cone nulo

$$
\begin{aligned}
\kappa &= l_0^{-1}(\eta^0 - \eta^6) \\
\lambda &= l(\eta^4 - \eta^6) \qquad (5.10)\\
\eta^A\eta_A &= 0 \qquad (A = 0,1,2,4,6).
\end{aligned}
$$

Neste espaço 5-dimensional nossas transformações , na forma infinitesimal, ficam

$$
\begin{aligned}
T^3 : \eta'^a &= \eta^a + l_0^{-1}a^a\eta^4 - l_0^{-1}a^a\eta^6 \\
\eta'^4 &= \eta^4 + l_0^{-1}a^a\eta^a \qquad (5.11)\\
\eta'^6 &= \eta^6 - l_0^{-1}a^a\eta^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3 : \eta'^a &= \eta^a + \epsilon^a_b\eta^b \\
\eta'^4 &= \eta^4 \qquad (5.12)\\
\eta'^6 &= \eta^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 : \eta'^a &= \eta^a \\
\eta'^4 &= \eta^4 + \rho\eta^6 \qquad (5.13)\\
\eta'^6 &= \eta^6 - \rho\eta^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3 : \eta'^a &= \eta^a - c^a l\eta^4 - c^a l\eta^6 \\
\eta'^4 &= \eta^4 - 2lc^a\eta^a \qquad (5.14)\\
\eta'^6 &= \eta^6 + 2lc^a\eta^a,
\end{aligned}
$$

ou simplesmente

$$\eta'^A = \Lambda^A_B\eta^B \qquad (5.15)$$

com Λ^A_B sendo os geradores de rotação do grupo SO(3,2). Significa que nosso espaço interno é homeomorfo a um espaço 5-dimensional que se transforma segundo o próprio SO(3,2).

Os geradores diferenciais do grupo são dados por

$$M_{AB} = -i(\eta_A \partial_B - \eta_B \partial_A) \qquad (A, B = 0, 1, 2, 4, 6) \tag{5.16}$$

no espaço 5-dimensional η^A. Para obtermos os geradores no espaço físico, fazemos as identificações

$$\begin{aligned} p_a &= M_{a6} + M_{a4} \qquad (a, b = 0, 1, 2) \\ l_{ab} &= M_{ab} \\ d &= M_{64} \\ k_a &= M_{a6} - M_{a4}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p_a &= -i\partial_a \\ l_{ab} &= x_b p_a - x_a p_b \\ d &= x^a p_a \\ k_a &= (2x_a x^b - x^2 \delta^b_a) p_b. \end{aligned} \tag{5.18}$$

A ação dos geradores de transformações em um campo de matéria $\Psi(x^a)$ são obtidas pela exigência da invariância das equações de campo de matéria pelo grupo de transformações

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \qquad \text{onde} \qquad x' = \Lambda x, \tag{5.19}$$

sendo que $S(\Lambda)$ deve ser determinado por esta exigência de invariância, o que significa uma característica do tipo de campo(espinorial,vetorial,escalar,etc). Concluímos então que a ação dos operadores é em geral dada por

$$G\Psi(x) = \Psi'(x) - \Psi(x) = g\Psi(x) + S(\Lambda)\Psi(x), \tag{5.20}$$

sendo g o gerador de transformações para um campo escalar (sem simetria interna) e G o gerador de transformações para um campo qualquer. Assim, para nosso caso, as ações dos operadores de transformações ficam

$$
\begin{aligned}
P_a\Psi &= p_a\Psi \\
L_{ab}\Psi &= l_{ab}\Psi + \Sigma_{ab}\Psi \\
D\Psi &= d\Psi + \Delta\Psi \\
K_a\Psi &= k_a\Psi + \kappa_a\Psi - 2x^b(g_{ab}\Delta - \Sigma_{ab})\Psi,
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

onde Σ_{ab}, Δ, and κ_a representam $S(\Lambda)$ para cada setor no grupo conforme.

As relações de comutação para o grupo conforme são no espaço η^A as relações usuais para grupos ortogonais

$$
-i[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{AD}J_{BC} - \eta_{AC}J_{BD} - \eta_{BD}J_{AC} + \eta_{BC}J_{AD} \tag{5.22}
$$

e usando (5.17) obtemos relações no espaço-tempo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{i}[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{ad}L_{bc} - \eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bd}L_{ac} + \eta_{bc}L_{ad} \\
&\frac{1}{i}[L_{ab},\ D\ ] = 0 \quad ; \quad \frac{1}{i}[D, D] = 0 \\
&\frac{1}{i}[L_{ab}, P_c\ ] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\
&\frac{1}{i}[L_{ab}, K_c\ ] = \eta_{bc}K_a - \eta_{ac}K_b \\
&\frac{1}{i}[P_a\ , K_b\ ] = -2(\eta_{ab}D + L_{ab}) \\
&\frac{1}{i}[P_a\ ,\ D\ ] = -P_a \quad ; \quad \frac{1}{i}[K_a, D] = K_a \\
&\frac{1}{i}[P_a\ , P_b\ ] = 0 \quad ; \quad \frac{1}{i}[K_a, K_b] = 0.
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

5.3-Forma-conexão e forma-curvatura a valores na álgebra do grupo

Ao generalizarmos as propriedades de invariância para transformações de gauge de segunda espécie somos levados a generalizar a derivada ordinária para

$$
D_\mu = \partial_\mu + i\mathbf{A}_\mu, \tag{5.24}
$$

onde $\mathbf{A}_\mu$ é a forma-conexão, que com a ação de um elemento g do grupo transforma-se mediante

$$
\mathbf{A}_\mu \rightarrow g^{-1}\mathbf{A}_\mu g + ig^{-1}\partial_\mu g. \tag{5.25}
$$

Para o grupo conforme na representação ortogonal temos

$$\mathbf{A}_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^{AB} J_{AB} \tag{5.26}$$

sendo J_{AB} os geradores do grupo. Para obtermos $\mathbf{A}$ no espaço-tempo fazemos as identificações

$$\begin{aligned} A_\mu^{ab}[P] &= l(A_\mu^{a5} + A_\mu^{a6}) \qquad (a,b = 0,1,2) \\ A_\mu^{ab}[L] &= A_\mu^{ab} \\ A_\mu[D] &= A_\mu^{56} \\ A_\mu^{a}[K] &= l^{-1}(A_\mu^{a5} - A_\mu^{a6}), \end{aligned} \tag{5.27}$$

de forma que

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^{ab}[L] L_{ab} + A_\mu^a[P] P_a + A_\mu^a[K] K_a + A_\mu[D] D. \tag{5.28}$$

A derivada covariante para o grupo conforme fica então

$$D_\mu \Psi = [\partial_\mu + i(\frac{1}{2} A_\mu^{ab}[L] L_{ab} + A_\mu^a[K] K_a + A_\mu^a[P] P_a + A_\mu[D] D)]\Psi. \tag{5.29}$$

A forma-conexão se transforma segundo (5.25), ou infinitesimalmente, para $g = (1 + i\epsilon^{AB} J_{AB})$, mediante

$$\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu + \frac{\epsilon^{AB}}{2i}[J_{AB}, J_{CD}] A_\mu^{CD} - J_{AB}\partial_\mu \epsilon_{AB} \tag{5.30}$$

Para transformações de Lorentz temos

$$\begin{aligned} \delta_L A_\mu^a[P] &= -\delta\omega_c^a A_\mu^c[P] \\ \delta_L A_\mu^{ab}[L] &= -\delta\omega_c^a A_\mu^{cb}[L] + A_\mu^{ad}[L]\delta\omega_d^b - \partial_\mu \delta\omega^{ab} \\ \delta_L A_\mu[D] &= 0 \\ \delta_L A_\mu^a[K] &= -\delta\omega_c^a A_\mu^c[K], \end{aligned} \tag{5.31}$$

para translações

$$\begin{aligned} \delta_P A_\mu^a[P] &= A_\mu^{ac}[L]\delta a_c - \delta a^a A_\mu[D] - \partial_\mu \delta a^a \\ \delta_P A_\mu^{ab}[L] &= 2(\delta a^b A_\mu^a[K] - \delta a^a A_\mu^b[K]) \\ \delta_P A_\mu[D] &= -2\delta a_a A_\mu^a[K] \\ \delta_P A_\mu^a[K] &= 0, \end{aligned} \tag{5.32}$$

para transformações conformes especiais

$$\begin{aligned}
\delta_K A^a_\mu[P] &= 0 \\
\delta_K A^{ab}_\mu[L] &= 2(\delta c^a A^b_\mu[P] - \delta c^b A^a_\mu[P]) \\
\delta_K A_\mu[D] &= 2\delta c^a A_{a\mu}[P] \\
\delta_K A^a_\mu[K] &= A^{ac}_\mu[L]\delta c_c - \delta c^a A_\mu[D] - \partial_\mu \delta c^a
\end{aligned} \tag{5.33}$$

e para dilatações

$$\begin{aligned}
\delta_D A^a_\mu[P] &= -\delta\rho A^a_\mu[P] \\
\delta_D A^{ab}_\mu[L] &= 0 \\
\delta_D A_\mu[D] &= -\partial_\mu \delta\rho \\
\delta_D A^a_\mu[K] &= \delta\rho A^a_\mu[K].
\end{aligned} \tag{5.34}$$

A forma-curvatura é dada pela derivada exterior da forma-conexão

$$\mathbf{G} = \mathbf{dA} + [\mathbf{A}, \mathbf{A}] \tag{5.35}$$

que, sob a ação de um elemento g do grupo, se transforma mediante

$$\mathbf{G} \to g^{-1}\mathbf{G}g. \tag{5.36}$$

Na representação ortogonal

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} G^{AB}_{\mu\nu} J_{AB} \\
G^{AB}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^{AB}_\nu - \partial_\nu A^{AB}_\mu - (A^A_{C\mu} A^{CB}_\nu - A^A_{C\nu} A^{CB}_\mu)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

e no espaço-tempo

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = G^{ab}_{\mu\nu}[L] L_{ab} + G^a_{\mu\nu}[P] P_a + G^a_{\mu\nu}[K] K_a + G_{\mu\nu}[D] D \tag{5.38}$$

com

$$\begin{aligned}
G^a_{\mu\nu}[P] &= \partial_\mu A^a_\nu[P] - \partial_\nu A^a_\mu[P] - (A^a_{c\mu}[L] A^c_\nu[P] - A^a_{c\nu}[L] A^c_\mu[P]) \\
&\quad + (A^a_\mu[P] A_\nu[D] - A^a_\nu[P] A_\mu[D]) \\
G^{ab}_{\mu\nu}[L] &= \partial_\mu A^{ab}_\nu[L] - \partial_\nu A^{ab}_\mu[L] - (A^a_{c\mu}[L] A^{cb}[L] - A^a_{c\mu}[L] A^{cb}_\mu[L]) \\
&\quad + 2(A^a_\mu[P] A^b_\nu[K] - A^b_\mu[P] A^a_\nu[K]) - 2(A^a_\nu[P] A^b_\mu[K] - A^b_\nu[P] A^a_\mu[K]) \\
G_{\mu\nu}[D] &= \partial_\mu A_\nu[D] - \partial_\nu A_\mu[D] + 2(A^a_\mu[P] A_{a\nu}[K] - A^a_\nu[P] A_{a\mu}[K]) \\
G^a_{\mu\nu}[K] &= \partial_\mu A^a_\nu[K] - \partial_\nu A^a_\mu[K] - (A^a_{c\mu}[L] A^c_\nu[K] - A^a_{c\nu}[L] A^c_\mu[K]) \\
&\quad + (A^a_\mu[K] A_\nu[D] - A^a_\nu[K] A_\mu[D]).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

As transformações de gauge ficam finalmente

$$
\begin{aligned}
\delta_L G^a_{\mu\nu}[P] &= -\delta w^a_c G^c_{\mu\nu}[P] \\
\delta_L G^{ab}_{\mu\nu}[L] &= -\delta w^a_c G^{cb}_{\mu\nu}[L] + G^{ac}_{\mu\nu}[L]\delta w^a_c \\
\delta_L G_{\mu\nu}[D] &= 0 \\
\delta_L G^a_{\mu\nu}[K] &= -\delta w^a_c G^c_{\mu\nu}[K] \\
\delta_P G^a_{\mu\nu}[P] &= G^{ac}_{\mu\nu}[l]\delta a_c + \delta a^a G_{\mu\nu}[D] \\
\delta_P G^{ab}_{\mu\nu}[L] &= 2(\delta a^b G^a_{\mu\nu}[K] - \delta a^a G^b_{\mu\nu}[k]) \\
\delta_P G_{\mu\nu}[D] &= -2\delta a_a G^a_{\mu\nu}[K] \\
\delta_P G^a_{\mu\nu}[K] &= 0 \\
\delta_K G^a_{\mu\nu}[P] &= 0 \\
\delta_K G^{ab}_{\mu\nu}[L] &= 2(\delta^a_c G^b_{\mu\nu}[P] - \delta^b_c G^a_{\mu\nu}[P]) \\
\delta_K G_{\mu\nu}[D] &= 2\delta c^a G_{a\mu\nu}[P] \\
\delta_K G^a_{\mu\nu}[K] &= G^{ac}_{\mu\nu}[L]\delta c_c - \delta c^a G_{\mu\nu}[D] \\
\delta_D G^a_{\mu\nu}[P] &= -\delta\rho G^a_{\mu\nu}[P] \\
\delta_D G^{ab}_{\mu\nu}[L] &= 0 \\
\delta_D G_{\mu\nu}[D] &= 0 \\
\delta_D G^a_{\mu\nu}[K] &= \delta\rho G^a_{\mu\nu}[K].
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

6-Realização Não Linear e Relação do Grupo com o Espaço-Tempo

6.1-Triadas

As teorias de gauge gravitacionais diferem das teorias usuais de Yang-Mills por apresentarem uma forte relação com o espaço-tempo, ou seja, o espaço interno é isomorfo ao espaço tangente ao espaço-tempo. Este isomorfismo é representado pela forma-solder

$$\mathbf{S} = I_a h_i^a dx^\mu, \tag{6.1}$$

cujas componentes são as triadas (no espaço-tempo 4-dimensional são tetradas). Quando o espaço interno não passa de uma simples transformação de coordenadas do espaço tangente $T_x M$ do espaço-tempo M, as triadas são dadas por

$$h_\mu^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} = \partial_\mu x^a. \tag{6.2}$$

Nestes casos não temos um campo gravitacional verdadeiro gerado por este "campo" de triadas, e sim forças fictícias como a centrífuga e a de Coriolis. Entretanto, quando os h_μ^a não são integráveis, podemos definir um campo gravitacional verdadeiro que não se anula com nenhuma escolha de coordenadas. Estas triadas, e suas inversas

$$h_\mu^a h_a^\nu = \delta_\mu^\nu \qquad ; \qquad h_\mu^a h_b^\mu = \delta_b^a \tag{6.3}$$

nos permitem uma classificação dual das quantidades físicas, uma vez que existem dois tipos de índices relacionados entre si. Em outras palavras, a partir de qualquer tensor de gauge podemos construir um tensor no espaço-tempo mediante

$$v^\mu = h_a^\mu v^a \qquad ; \qquad v_\mu = h_\mu^a v_a. \tag{6.4}$$

Da mesma forma, a métrica η_{ab} é projetada no espaço-tempo por meio de triadas, ou seja, a métrica $g_{\mu\nu}$ é expressa por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b. \tag{6.5}$$

O campo associado a estas triadas é a torção , que é dada em componentes por

$$T^k_{lm} = h^\mu_l h^\nu_m(\partial_\mu h^k_\nu - \partial_\nu h^k_\mu) - h^\mu_l A^k_{ml} + h^\mu_m A^k_{l\mu}, \tag{6.6}$$

onde A^{kl}_μ é o potencial de Lorentz da teoria.

Porém, introduzir tal campo e tal potencial em uma teoria de Lorentz é um tanto fora do convencional para as teorias de gauge, onde definimos os potenciais pelas relações

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\to \partial_\mu + i\mathbf{A}_\mu \\ \mathbf{A}_\mu &\xrightarrow{g} g^{-1}\mathbf{A}_\mu g + ig^{-1}\partial_\mu g \end{aligned} \tag{6.7}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\to \partial_\mu \\ h_\mu &\to g^{-1}h_\mu g, \end{aligned} \tag{6.8}$$

de modo que o campo em geral

$$\mathbf{G} = D_{\mathbf{A}}\mathbf{A} \tag{6.9}$$

fica para as triadas

$$\mathbf{T} = D_{\mathbf{A}}\mathbf{S} \qquad \text{(e não} \quad D_{\mathbf{S}}\mathbf{S}), \tag{6.10}$$

onde D_A é a derivada covariante para o potencial A. Um argumento utilizado para tal escolha é o fato que em uma teoria de gauge para o grupo das translações a triada seria expressa pela prescrição de acoplamento minimal

$$h^a_\mu = \delta^a_\mu + B^a_\mu, \tag{6.11}$$

onde B^a_μ é o potencial (componente da forma-conexão) da teoria, e as propriedades dinâmicas das triadas seriam as mesmas do potencial. Assim assumiríamos um potencial do tipo

$$\Gamma = A + S \tag{6.12}$$

e teríamos para o campo

$$G = T + R = D_\Gamma\Gamma = D_A A + D_A S. \tag{6.13}$$

Entretanto, a melhor forma de introduzirmos triadas na teoria é por meio de uma realização não linear de uma teoria mais completa, como a teoria de gauge do grupo conforme. Neste caso generalizamos a definição (6.2) para

$$h^a_\mu = D_\mu x^a, \tag{6.14}$$

onde D_μ é a derivada covariante para o grupo conforme.

6.2-Realização não linear

Uma das razões para a utilização da realização não linear é que ela permite a redução de uma simetria de gauge G para uma sub-simetria H, mediante uma quebra espontânea de simetria. Aqui a utilizaremos também para obter uma representação na qual alguns potenciais se transformam covariantemente.

Vamos supor que um campo de matéria $\Psi(x)$ se transforme linearmente sob a ação do grupo conforme segundo

$$\Psi \to D(g)\Psi \tag{6.15}$$

com $g \in G$ e $D(g)$ sendo uma representação matricial de dimensão finita de G.

O primeiro passo para a resolução do problema da realização é a definição de uma matriz $(L_\phi)_{\alpha\beta}$, cujos elementos são variáveis de campo[1]. Esta matriz, que chamaremos de matriz redução , estará sujeita a um número de restrições algébricas:

a) a matriz L_ϕ deve pertencer ao grupo G, i.e., a sua auto-representação . Isto objetiva, para qualquer representação de dimensão finita, obter um funcional $D(L_\phi)$ bem definido. O número de campos independentes, ϕ_a, necessário para parametrizar L_ϕ é portanto menor ou igual à dimensão de G;

b) sob a ação do grupo G os campos que constituem a matriz redução transformam-se de acordo com

$$L_\phi \to gL_\phi h^{-1}(\phi, g) \tag{6.16}$$

onde $g \in G$ e $h(\phi, g) \in H$;

c) sob a ação do subgrupo H, a matriz redução se transforma como

$$L_\phi \to hL_\phi h^{-1}. \tag{6.17}$$

[1] SALAM, A.; STRATHDEE, J. **Phys. Rev.**, v.184, p.1750-1969.

Segue então, de (6.16) que o funcional $D(L_\phi)$ se transforma para

$$D(L_\phi) \to D(gL_\phi h^{-1}) = D(g)D(L_\phi)D(h^{-1}), \tag{6.18}$$

de forma que o campo definido por

$$\psi = D({L_\phi}^{-1})\Psi \tag{6.19}$$

se transforma como

$$\psi = D(h)\psi, \tag{6.20}$$

onde $h = h(\phi, g)$ é, em geral, uma estrutura não linear que depende dos campos ϕ_a que parametrizam L_ϕ.

A mais simples forma de se obter L_ϕ é a adotada por Coleman, Wess e Zumino e anteriormente por Kibble[2]

$$L_\phi = e^{\phi \cdot A}, \tag{6.21}$$

onde A_a representa os geradores de G que não estão contidos na álgebra de H.

Consideremos agora o problema de definir um operador de derivada covariante para a realização não linear (6.19), pois é evidente que a derivada ordinária não é covariante

$$\partial_\mu \psi \to D(h)\partial_\mu \psi + \partial_\mu D(h)\psi. \tag{6.22}$$

A fim de sermos capazes de construir equações de campo covariantes é essencial que possamos definir um operador covariante assemelhando-se à derivada.

Vamos inserir ψ em alguma representação linear $D(g)$

$$\psi = D(L_\phi^{-1})\Psi \tag{6.23}$$

e definir o operador $\triangle_\mu$

$$\triangle_\mu \psi = D(L_\phi^{-1})\partial_\mu \Psi, \tag{6.24}$$

o qual é claramente covariante. Entretanto não podemos adotar $\triangle_\mu$ como sendo o operador desejado, pois ele depende da representação $D(g)$. Escrevendo então

$$\triangle_\mu \psi = \partial_\mu \psi + D(L_\phi^{-1})\partial_\mu D(L_\phi)\psi. \tag{6.25}$$

[2] KIBBLE, T.W.B. Symmetry Breaking in Non Abelian Gauge Theories, **Phys. Rev.**, v.155, p.1554-, 1969.

A matriz $D^{-1}\partial_\mu D$ pode ser simplificada se usarmos a restrição $L_\phi \in G$ para todo x. Em particular,

$$L_\phi^{-1}(x)L_\phi(x+\delta x) = 1 + \delta x_\mu L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi + ... \tag{6.26}$$

é uma transformação infinitesimal de G. Segue então, que as matrizes $L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi$ pertencem à álgebra de G. Daí podem ser expandidas na forma

$$L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi = (L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi)_i s_i, \tag{6.27}$$

onde as matrizes s_i constituem a base da álgebra. Na representação $D(g)$, onde os geradores infinitesimais s_i são representados por S_i, a expansão (6.27) toma a forma

$$D(L_\phi^{-1})\partial_\mu D(L_\phi) = (L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi)_i S_i. \tag{6.28}$$

De acordo com (6.16) encontramos que (6.27) se transforma pela regra

$$L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi \to h(L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi)h^{-1} + h\partial_\mu h^{-1}. \tag{6.29}$$

Neste ponto já podemos ver a presença de um termo não homogêneo pertencendo à álgebra de H. Isto significa que os campos $(L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi)_i$ podem ser divididos em dois conjuntos: um transformando-se covariantemente enquanto o outro contém a não homogeneidade.

Vamos supor que a base algébrica s_i seja escolhida de forma tal que se divida em duas componentes m_a e n_b, que se transformam independentemente sob H. Vamos supor ainda que m_a constitua a base da sub-álgebra de H. Assim

$$L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi = \Gamma_{\mu a}m^a + \lambda D_\mu\phi_b n^b \tag{6.30}$$

o que deve ser encarada como a definição dos campos $\Gamma_{\mu a}$ e $D_\mu\phi_b$. Os termos de não homogeneidade afetam apenas $\Gamma_{\mu a}$; os campos $D_\mu\phi_a$ serão interpretados como a derivada covariante dos campos ϕ_a em termos das quais a matriz redução é parametrizada. O parâmetro real λ será fixado pela normalização do termo cinético associado a ϕ_a.

Correspondente à transformação (6.30) nós temos na representação $D(g)$

$$D(L_\phi^{-1})\partial_\mu D(L_\phi) = \Gamma_{\mu a}M^a + \lambda D_\mu\phi_b N^b, \tag{6.31}$$

a qual substituída em (6.25) nos dá

$$\triangle_\mu\psi = \partial_\mu\psi + i\Gamma_{\mu a}M^a\psi + i\lambda D_\mu\phi_b N^b\psi. \tag{6.32}$$

Disso podemos definir a derivada covariante independente da representação

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i\Gamma_{\mu a} M^a \psi. \tag{6.33}$$

Consideremos agora o caso de um grupo de gauge G do tipo Yang-Mills tal que

$$\Psi(x) \to D(g)\Psi(x), \qquad g = g(x) \in G. \tag{6.34}$$

Já sabemos que a derivada ordinária em uma teoria de gauge é generalizada para

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iA_{\mu i} S^i)\Psi, \tag{6.35}$$

sendo $A_{\mu i}$ os potenciais de gauge e S^i os geradores do grupo de simetria.

Desta forma a derivada covariante deve estar contida no operador

$$\triangle_\mu \psi = D(L_\phi^{-1})(\partial_\mu + iA_{\mu i} S^i)\Psi, \tag{6.36}$$

o qual pode ser simplificado para

$$\triangle_\mu \psi = (\partial_\mu + iB_{\mu i} S^i)\psi, \tag{6.37}$$

onde $B_{\mu i}$ é o potencial modificado e definido por

$$B_\mu = L_\phi^{-1} A_\mu L_\phi + \frac{1}{i} L_\phi^{-1} \partial_\mu L_\phi, \tag{6.38}$$

que se transforma por

$$B_\mu \to h B_\mu h^{-1} + \frac{1}{i} h \partial_\mu h^{-1}. \tag{6.39}$$

Esta regra de transformação significa que o operador $\triangle_\mu$ pode ser separado em duas partes covariantes

$$\triangle_\mu \psi = D_\mu \psi + i\lambda (D_\mu \phi_b) N^b \psi \tag{6.40}$$

sendo $D_\mu \psi$ a derivada covariante não linear

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + iB_{\mu a} M^a)\psi \tag{6.41}$$

e $D_\mu \phi_a$ a derivada covariante dos campos ϕ_a

$$\lambda D_\mu \phi_a = B_{\mu a}. \tag{6.42}$$

Seguindo a sugestão de Salam e Strathdee[3], utilizaremos para o grupo conforme

$$L_\phi = e^{ix\cdot P + i\phi\cdot K - i\sigma D} \tag{6.43}$$

de forma que definindo os novos potenciais

$$\omega^{ij}{}_\mu = L_\phi^{-1} A^{ij}{}_\mu[L] L_\phi - i L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi \tag{6.44}$$

$$\omega^i_\mu = L_\phi^{-1} A^a_\mu[P] L_\phi - L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi \tag{6.45}$$

$$\bar{\omega}^i_\mu = L_\phi^{-1} A^a_\mu[K] L_\phi - i L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi \tag{6.46}$$

$$\omega_\mu = L_\phi^{-1} A_\mu[D] L_\phi - i L_\phi^{-1}\partial_\mu L_\phi. \tag{6.47}$$

Teremos a derivada covariante dada por

$$D_\mu\psi = [\partial_\mu + \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu[L] L_{ab}]\psi \tag{6.48}$$

e a derivada dos campos mediante

$$D_\mu x^a = \omega^a_\mu \tag{6.49}$$

$$D_\mu \phi^a = \bar{\omega}^a_\mu \tag{6.50}$$

$$D_\mu \sigma = -\omega_\mu. \tag{6.51}$$

As leis de transformação ficam agora

$$\omega^{ij}{}_\mu \to h\omega^{ij}{}_\mu h^{-1} - ih\partial_\mu h^{-1} \cdot L^{ij} \tag{6.52}$$

$$\omega^i_\mu \to h\omega^i_\mu h^{-1} \tag{6.53}$$

$$\bar{\omega}^i_\mu \to h\bar{\omega}^i_\mu h^{-1} \tag{6.54}$$

$$\omega_\mu \to h\omega_\mu h^{-1}, \tag{6.55}$$

ou seja, os potenciais $\omega^i_\mu, \bar{\omega}^i_\mu$ e ω_μ se transformam covariantemente. Além disto, identificamos nas relações (6.49) e (6.53) a definição de uma triada, de forma que as triadas em nossa representação ficam

$$h^a_\mu \equiv \omega^a_\mu. \tag{6.56}$$

[3] SALAM, A.; STRATHDEE, J. **Phys. Rev.**, v.184, p.1760-1969.

Os novos campos são agora definidos por

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = L_{\phi}^{-1} G_{\mu\nu} L_{\phi} \tag{6.57}$$

ou, em termos dos novos potenciais,

$$f^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^{ab}_\nu - \partial_\nu \omega^{ab}_\mu - (\omega^a_{c\mu}\omega^{cb}_\nu - \omega^a_{c\nu}\omega^{cb}_\mu) + 2(\omega^a_\mu \bar{\omega}^b_\nu - \omega^b_\mu \bar{\omega}^a_\nu - \omega^a_\nu \bar{\omega}^b_\mu + \omega^b_\nu \bar{\omega}^a_\mu) \tag{6.58}$$

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_\nu - \partial_\nu \omega^a_\mu - (\omega^a_{c\mu}\omega^c_\nu - \omega^a_{c\nu}\omega^c_\mu) + (\omega^a_\mu \omega_\nu - \omega^a_\nu \omega_\mu) \tag{6.59}$$

$$t^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\omega}^a_\nu - \partial_\nu \bar{\omega}^a_\mu - (\omega^a_{c\mu}\bar{\omega}^c_\nu - \omega^a_{c\nu}\bar{\omega}^c_\mu) - (\bar{\omega}^a_\mu \omega_\nu - \bar{\omega}^a_\nu \omega_\mu) \tag{6.60}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + 2(\omega^a_\mu \bar{\omega}_{a\nu} - \omega^a_\nu \bar{\omega}_{a\mu}). \tag{6.61}$$

6.3-Relações com o espaço-tempo

Conforme já havíamos visto, o tensor métrico no espaço-tempo é a projeção do tensor métrico no espaço de grupo por meio das triadas

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab}\omega^a_\alpha \omega^b_\beta. \tag{6.62}$$

A fórmula $D_\mu g_{\alpha\beta}$ em coordenadas locais cartesianas com $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ fica então

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{6.63}$$

e como $D_\rho g_{\mu\nu}$ é um tensor, concluímos que a derivada covariante do tensor métrico deve ser nula

$$D_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.64}$$

Usando a relação (6.62) concluímos que,

$$D_\mu \omega^a_\alpha = 0 \tag{6.65}$$

ou, de outra forma,

$$D_l V^k = \omega^\nu_l \omega^k_\mu D_\nu V^\mu. \tag{6.66}$$

Como a conexão afim $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ é definida por

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda \tag{6.67}$$

então, das relações (6.66) e (6.67) concluímos que

$$A^{k}{}_{l\mu} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\omega^{k}_{\nu}\omega^{\lambda}_{l} - \omega^{k}_{\nu}\partial_{\mu}\omega^{\nu}_{l}, \tag{6.68}$$

ou

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = -A^{k}{}_{l\mu}\omega^{l}_{\lambda}\omega^{\nu}_{k} - \omega^{l}_{\lambda}\partial_{\mu}\omega^{\nu}_{l}. \tag{6.69}$$

Definindo agora

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \omega^{\lambda}_{k}T^{k}{}_{\mu\nu} \tag{6.70}$$

obtemos

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\omega_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\omega_{\mu}, \tag{6.71}$$

a qual reconhecemos como uma generalização do tensor torção. Temos ainda

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + D^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{6.72}$$

onde o primeiro termo representa os símbolos de Christoffel

$$\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\xi}(\partial_{\mu}g_{\xi\nu} + \partial_{\nu}g_{\xi\mu} - \partial_{\xi}g_{\mu\nu}), \tag{6.73}$$

o segundo o tensor contorção

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} - T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} - T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}), \tag{6.74}$$

e o terceiro um tensor adicional relativo às dilatações

$$D_{\lambda\mu\nu} = g_{\mu\nu}\omega_{\lambda} - g_{\lambda\nu}\omega_{\mu}. \tag{6.75}$$

Definindo ainda a projeção do tensor $f^{ab}_{\mu\nu}$ mediante

$$\begin{aligned} f^{\lambda\rho}_{\mu\nu} &= \omega^{\lambda}_{a}\omega^{\rho}_{b}f^{ab}_{\mu\nu} \\ &= R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} + (\delta^{\lambda}_{\mu}\omega^{\rho}_{b}\bar{\omega}^{b}_{\nu} - \delta^{\rho}_{\mu}\omega^{\lambda}_{a}\bar{\omega}^{a}_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\omega^{\rho}_{b}\bar{\omega}^{b}_{\mu} + \delta^{\rho}_{\nu}\omega^{\lambda}_{a}\bar{\omega}^{a}_{\mu}), \end{aligned} \tag{6.76}$$

obtemos no primeiro termo acima o tensor de Riemann

$$R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}, \tag{6.77}$$

acrescido de termos devidos às transformações conformes especiais.

7-Modelo de Interação Gravitacional com o Grupo Conforme

7.1-Introdução

O movimento de partículas em um campo gravitacional Newtoniano em 2+1 dimensões, segundo a teoria clássica, é determinado pela equação

$$\ddot{r} = \frac{F}{m} = -\nabla\phi, \tag{7.1}$$

onde ϕ é o potencial gravitacional determinado pela equação de Newton.

Podemos generalizar a equação acima considerando o grupo conforme, e impondo que o campo gravitacional interaja com partículas, realizando transformações conformes nas coordenadas do espaço-tempo. Teremos assim uma métrica na forma

$$ds^2 = f(x^\sigma)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{7.2}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico Minkowskiano e $f(x^\sigma)$ é uma função das coordenadas do espaço-tempo x^σ. A aproximação para campo fraco no modelo é dada pela métrica

$$ds^2 = (1+\varepsilon\varphi)(c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2), \tag{7.3}$$

onde ε é um número pequeno e φ é uma função das coordenadas de espaço-tempo. Para um potencial circularmente simétrico e estático, devido à simetria do problema, obteremos

$$\varphi = 2\phi(r), \tag{7.4}$$

onde o fator 2 objetiva identificarmos o campo $\phi(r)$ com o potencial Newtoniano, e sendo o parâmetro ε dado por

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2}. \tag{7.5}$$

A métrica (7.3) fica então na forma

$$ds^2 = \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)(c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2), \tag{7.6}$$

onde ϕ deve ser o potencial gravitacional Newtoniano, como veremos adiante. Podemos utilizar a forma (7.6) mesmo para campos fortes, pois em geral teremos

$$\phi = \frac{c^2(f-1)}{2}. \tag{7.7}$$

O potencial Newtoniano para o caso de simetria circular e campo estático é obtido a partir da equação

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda(r), \tag{7.8}$$

onde $\lambda(r)$ é a densidade linear de massa. Na forma integral temos

$$\oint \nabla\phi \cdot \hat{n} dl = -4\pi G\lambda. \tag{7.9}$$

A solução da equação (7.8) é

$$\phi = 2G\lambda \ln\left(\frac{a}{r}\right), \tag{7.10}$$

de forma que para este caso obtemos

$$ds^2 = \left[1 + \frac{4G\lambda}{c^2}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right](c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2). \tag{7.11}$$

7.2-Grandezas dinâmicas

A ação do movimento de uma partícula segundo a relatividade restrita é

$$S = -m_0 c \int ds, \tag{7.12}$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula e ds é o elemento de arco. Podemos estender esta definição para o caso gravitacional usando o elemento de arco (7.6) a Lagrangeana será então dada por

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.13}$$

e o momentum generalizado fica

$$\vec{P} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m_0\gamma\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{v} \tag{7.14}$$

ou, em componentes,

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \gamma m_0 \dot{r}\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}} \tag{7.15}$$

$$P_\theta = \Lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \gamma L\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}}, \tag{7.16}$$

onde $L = m_0 r^2 \dot{\theta}$ é o momentum angular Newtoniano e a energia é dada pela transformação de Legendre

$$\mathcal{E} = \vec{P}.\vec{v} - \mathcal{L} = m_0 c^2 \gamma \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.17}$$

Esta é a energia relativística total de uma partícula em um campo estático, conforme Landau e Lifichitz[2].

A Hamiltoniana pode ser obtida a partir das equações (7.15), (7.16) e (7.17)

$$H = \frac{c^2 {P_r}^2}{\mathcal{E}} + \frac{c^2\Lambda^2}{\mathcal{E}r^2} + \frac{{m_0}^2 c^4}{\mathcal{E}}\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) \tag{7.18}$$

e como o sistema é conservativo temos que

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{7.19}$$

Assim podemos escrever a ação S na forma separável

$$S = -\mathcal{E}t + W(r,\Lambda,\mathcal{E}) + \Lambda\theta, \tag{7.20}$$

onde W é uma função de r e das constantes de movimento Λ e $\mathcal{E}$. Lembrando que

$$P_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{dW}{dr} \tag{7.21}$$

$$\Lambda = P_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} \tag{7.22}$$

obtemos

$$\frac{c^2}{\mathcal{E}}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 + \frac{c^2}{\mathcal{E}r^2}\Lambda^2 + \frac{{m_0}^2c^4}{\mathcal{E}}\left(1+\frac{2\phi(r)}{c^2}\right) - \mathcal{E} = 0, \tag{7.23}$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi para o movimento de uma partícula em um campo estático e circularmente simétrico. A equação (7.23) pode ser resolvida e nos leva a

$$W = \int \sqrt{\frac{\gamma^2{\mathcal{E}_0}^2}{c^2} - \left({m_0}^2c^2 + \frac{\gamma^2 L^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)}dr \tag{7.24}$$

[2] LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics**. 4. ed. New York: Pergamon Press Inc.,1989.

e finalmente a uma ação

$$S = \int \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left({m_0}^2c^2 + \frac{\gamma^2L^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)} dr + \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}\gamma L\theta - \mathcal{E}t. \tag{7.25}$$

7.3-Limites Newtoniano e Relativístico

Supondo que $\frac{\phi}{c^2}$ seja um número pequeno, podemos expandir as expressões (7.13) a (7.17) de forma a obtermos o limite Newtoniano. Neste caso obteremos os momenta

$$P_r = rm_0\dot{r}\left(1 + \frac{\phi}{c^2} + ...\right) \approx \gamma m_0\dot{r} \tag{7.26}$$

$$P_\theta = \gamma L\left(1 + \frac{\phi}{c^2} + ...\right) \approx \gamma L$$

que são os momenta da teoria relativística. Para a energia obtemos

$$\mathcal{E} = m_0c^2\gamma\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right). \tag{7.27}$$

No limite de baixas velocidades temos que

$$P_r \approx m_0\dot{r}, \qquad P_\theta \approx L \tag{7.28}$$

$$\mathcal{E} \approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + m_0\phi, \tag{7.29}$$

que são os valores da energia-momentum da teoria de interação gravitacional Newtoniana, confirmando a interpretação de ϕ como um potencial Newtoniano. A Lagrangeana, a menos de uma constante, fica

$$\mathcal{L} = \frac{m_0v^2}{2} - m_0\phi = K - U, \tag{7.30}$$

onde K é a energia cinética da Mecânica Clássica e U é a energia potencial gravitacional na teoria de Newton. Esta Lagrangeana leva-nos à equação de trajetória (7.1)

$$\ddot{r} = -\nabla\phi. \tag{7.31}$$

Similarmente, no limite $\phi \to 0$, obtemos

$$P_r = \gamma m_0\dot{r}, \qquad P_\theta = \gamma L \tag{7.32}$$

ou, em geral

$$\vec{P} = \gamma m_0 \vec{v} \tag{7.33}$$

e

$$\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2 \tag{7.34}$$

que são os valores previstos pela Relatividade Restrita. A Lagrangeana neste limite fica

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -m_0 c^2 \frac{ds}{dt} \tag{7.35}$$

o que é o resultado reconhecido como a Lagrangeana da Relatividade Restrita. Na ausência da gravidade a ação por sua vez é

$$S = \int \sqrt{\frac{\gamma^2 {\mathcal{E}_0}^2}{c^2} - {m_0}^2 c^2 + \frac{\gamma^2 L^2}{r^2}} dr + \gamma L\theta - \gamma \mathcal{E}_0 t. \tag{7.36}$$

7.4-Desvio da luz em um campo circular estático

A trajetória de uma partícula com a ação dada em (7.36) pode ser obtida a partir da condição

$$\frac{\partial S}{\partial L} = 0, \tag{7.37}$$

originada do princípio que a ação não varia se for modificada uma das constantes de movimento. A equação daí obtida é

$$\theta = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{{\mathcal{E}_0}^2/c^2 - ({m_0}^2 c^2 \gamma^{-2} + L^2/r^2)}}, \tag{7.38}$$

e usando agora o novo momentum angular $\Lambda = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma L$ e usando apenas o termos de mais alta ordem no numerador obtemos

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{{\mathcal{E}_0}^2}{L^2 c^2} - \frac{{m_0}^2 c^2 \gamma^{-2}}{L^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)}}. \tag{7.39}$$

Com o fato que $L = bP_0 = \frac{b v_0 \mathcal{E}_0}{c^2}$ onde b é o parâmetro de impacto e v_0 é a velocidade da partícula no ponto mais próximo à fonte, obtemos $\frac{{\mathcal{E}_0}^2}{c^2 L^2} = \frac{c^2}{b^2 {v_0}^2}$ e a equação (7.39) fica

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{c^2}{b^2 {v_0}^2} - \frac{{m_0}^2 c^2 \gamma^{-2}}{L^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)}}. \tag{7.40}$$

Aplicando esta equação para a trajetória da luz temos

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)}{r^2}}}, \tag{7.41}$$

resultado que em 4 dimensões leva ao light-bending do sol[2].

O desvio da luz no campo com simétria circular em 2+1 dimensões pode ser obtido usando o potencial dado em (7.10), de forma que

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left[1 + \frac{2K\ln(a/r)}{c^2}\right]}}. \tag{7.42}$$

Diferenciando a equação acima em relação a $u(\theta) = \frac{1}{r}$ obtemos

$$(u')^2 = \frac{1}{b^2} - u^2\left[1 + \frac{2K}{c^2}\ln(au)\right], \tag{7.43}$$

e após nova diferenciação em θ chegamos a

$$u'\left\{u'' + u + \frac{2k}{c^2}\left[u\ln(au) + \frac{u}{2}\right]\right\} = 0.$$

Nesta equação podemos descartar a solução $u' = 0$ uma vez que ela leva a $r = constante$, e como fótons têm energia total positiva, concluímos que esta solução não tem sentido físico, pois resulta numa trajetória circular. Ficamos assim com a equação

$$u'' + u + \frac{2K}{c^2}\left[u\ln(au) + \frac{u}{2}\right] = 0. \tag{7.44}$$

Procuramos uma solução aproximada na forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \tag{7.45}$$

onde $u_0 = \frac{\cos\theta}{A}$, A é constante e $u = u_0$ é a solução clássica de trajetória retilínea e ainda $\varepsilon = \frac{2K}{c^2}$ é um parâmetro pequeno. A equação para o termo em u_1 fica

$$u_1'' + u_1 = \frac{\cos\theta}{A}\ln\cos\theta + \frac{\cos\theta}{A}, \tag{7.46}$$

[2] LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics**. 4. ed. New York: Pergamon Press Inc.,1989.

cuja solução é

$$u_1 = \frac{1}{2A}\left[\theta \sin\theta + \cos\theta \ln\cos\theta - \sin\theta L(\theta)\right], \tag{7.47}$$

onde $L(\theta)$ é a função de Lobatchefsky dada por

$$L(\theta) = \theta \ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n\theta)}{n^2}. \tag{7.48}$$

Para aplicar os resultados obtidos a uma corda cósmica (string), observamos que trajetórias assintóticas são dadas por $r \to \infty (u \to 0)$ e como o ângulo de desvio dos raios de luz em um lado do string é $\delta = \frac{\pi}{2} - \theta$, teremos em primeira aproximação

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \delta \ln\delta - \frac{\pi}{2}\ln 2\right], \tag{7.49}$$

onde usamos o fato que para δ pequeno $\sin\delta \approx \delta$ e $L(\frac{\pi}{2} - \delta) \approx \pi/2 \ln 2$. Obtemos então

$$\delta_1 = \frac{\pi\varepsilon(1 - \ln 2)}{4}. \tag{7.50}$$

Para um raio luminoso que passa no lado oposto ao primeiro, fazemos $\delta = \frac{\pi}{2} + \theta$, e obtemos da mesma forma

$$\delta_2 = \frac{\pi\varepsilon(1 + \ln 2)}{4} \tag{7.51}$$

de modo que a deflexão total é

$$D = \delta_1 + \delta_2 = \frac{K\pi}{c^2}. \tag{7.52}$$

O déficit angular causado por esta deflexão será então

$$\Delta = \frac{2K\pi}{c^2} = \frac{4G\lambda\pi}{c^2}. \tag{7.53}$$

Do resultado acima vemos que a deflexão independe da distância ao string com que o raio de luz passa. O mesmo resultado é obtido pela Relatividade Geral. Por outro lado, o valor da deflexão dado em (7.53) é metade do valor previsto pela RG. Além disso, a métrica (7.6) não é solução das equações de Einstein em (2+1) dimensões.

Vale salientar que utilizando a métrica (7.6) podemos obter os três principais testes da RG: o desvio gravitacional para o vermelho, o desvio da luz por um campo gravitacional e o avanço do perihélio de Mercúrio[1].

---

[1] STÉDILE, E.; LUCINDA, J. Relativistic Flat Space-time Approach for gravity , **Physics Essays**. v.8, n.2, p.225. 1995.

8-Equações de Campo

8.1-Lagrangeana

Nosso objetivo agora é estabelecer uma teoria de gauge do grupo conforme mais geral possível, de forma que possamos identificar um limite de aproximação igual à solução da teoria de Newton. Devemos manter a ação invariante por transformações do grupo. Um tipo de densidade de Lagrangeana invariante é

$$\mathcal{L} = F^{\mu\nu}_{ab} F^{ab}_{\mu\nu} \tag{8.1}$$

que é utilizada em teorias de Yang-Mills. Entretanto, em uma teoria invariante conforme temos que os diversos setores são linearmente independentes entre si, de forma que uma densidade de Lagrangeana mais geral na forma (8.1) é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_D \tag{8.2}$$

com $\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_P, \mathcal{L}_K, \mathcal{L}_D$ quadráticas nos potenciais f,T,t e F, respectivamente.

Para o setor rotacional temos uma relação muito útil que modifica o formato da Lagrangeana neste setor. Da definição de $f^{ab}_{\mu\nu}$ em (6.58) temos evidente a antisimetria em a, b e μ, ν. Assim, há 9 componentes independentes em $f^{ab}_{\mu\nu}$. Por outro lado, a contração $f^b_\nu = \omega^\mu_a f^{ab}_{\mu\nu}$ tem também 9 componentes, de forma que $f^{ab}_{\mu\nu}$ pode ser expressa em termos de f^b_ν. De fato, utilizando as propriedades de simetria de $f^{ab}_{\mu\nu}$ e o fato que f^b_ν é a contração de $f^{ab}_{\mu\nu}$ obtemos

$$f^{ab}_{\mu\nu} = \omega^a_\mu f^b_\nu - \omega^a_\nu f^b_\mu - \omega^b_\mu f^a_\nu + \omega^b_\nu f^a_\mu - \frac{1}{2}(\omega^a_\mu \omega^b_\nu - \omega^a_\nu \omega^b_\mu) f \tag{8.3}$$

com $f = \omega^\rho_c f^c_\rho$. Assim uma Lagrangeana mais geral será dada em termos de f^b_ν, e não em termos de $f^{ab}_{\mu\nu}$.

Além disso, como a métrica $g_{\mu\nu} = \omega^a_\mu \omega^b_\nu \eta_{ab}$ é dependente do potencial ω^a_μ, e como só obteremos as componentes irredutíveis se todos os índices estiverem no mesmo espaço, expressaremos todos os campos no espaço do grupo. Assim teremos os campos

$$P^{kl} = \omega^{\sigma l} \omega^\rho_a (\partial_\rho \omega^{ak}_\sigma - \partial_\sigma \omega^{ak}_\rho - \omega^a_{c\rho} \omega^{ck}_\sigma + \omega^a_{c\sigma} \omega^{ck}_\rho) + 2(\omega^{\sigma l} \bar{\omega}^k_\sigma + \omega^\sigma_a \bar{\omega}^a_\sigma \eta^{kl}) \tag{8.4}$$

$$T^k{}_{lm} = \omega_l^\alpha \omega_m^\beta (\partial_\alpha \omega_\beta^k - \partial_\beta \omega_\alpha^k) - \omega^k{}_{m\alpha}\omega_l^\alpha + \omega^k{}_{l\alpha}\omega_m^\alpha + \delta_l^k \omega_m^\alpha \omega_\alpha - \delta_m^k \omega_l^\alpha \omega_\alpha \qquad (8.5)$$

$$t^k{}_{lm} = \omega_l^\alpha \omega_m^\beta [\partial_\alpha \bar{\omega}_\beta^k - \partial_\beta \bar{\omega}_\alpha^k - (\omega_{c\alpha}^k \bar{\omega}_\beta^c - \omega^k{}_{c\beta}\bar{\omega}_\alpha^c) - (\bar{\omega}_\alpha^k \omega_\beta - \bar{\omega}_\beta^k \omega_\alpha)] \qquad (8.6)$$

$$F_{kl} = \omega_k^\rho \omega_l^\sigma (\partial_\rho \omega_\sigma - \partial_\sigma \omega_\rho) + 2(\omega_l^\rho \bar{\omega}_{k\rho} - \bar{\omega}_{l\rho}\omega_k^\rho). \qquad (8.7)$$

As densidades parciais de Lagrangeana ficam agora

$$\mathcal{L}_L = a_1 E^{kl} E_{kl} + a_2 I^{kl} I_{kl} + a_3 P^2 \qquad (8.8)$$

$$\mathcal{L}_P = \alpha f^{klm} f_{klm} + \beta v^k v_k + \gamma a^{klm} a_{klm} \qquad (8.9)$$

$$\mathcal{L}_K = \mu g^{klm} g_{klm} + \nu u^k u_k + \rho b^{klm} b_{klm} \qquad (8.10)$$

$$\mathcal{L}_D = b F^{kl} F_{kl}, \qquad (8.11)$$

onde definimos as componentes simétrica sem traço, o traço e a antisimétrica de T por

$$f^{klm} = \frac{1}{2}(T^{klm} + T^{klm}) + \frac{1}{4}(\eta^{mk} v^l + \eta^{ml} v^k) - \frac{1}{2}\eta^{kl} v^m$$

$$v_k = T^l{}_{lk} \qquad (8.12)$$

$$a_{klm} = \frac{1}{3}(T_{klm} + T_{mkl} + T_{lmk})$$

o mesmo para t

$$g^{klm} = \frac{1}{2}(t^{klm} + t^{lkm}) + \frac{1}{4}(\eta^{mk} u^l + \eta^{ml} u^k) - \frac{1}{2}\eta^{kl} u^m$$

$$u^k = t^l{}_{lk} \qquad (8.13)$$

$$b_{klm} = \frac{1}{3}(t_{klm} + t_{mkl} + t_{lmk})$$

e, finalmente para P,

$$I^{kl} = \frac{1}{2}(P^{kl} + P^{lk}) - \frac{1}{3}\eta^{kl} P$$

$$E^{kl} = \frac{1}{2}(P^{kl} - P^{lk}) \qquad (8.14)$$

$$P = P_k^k.$$

A ação total é agora dada por

$$I = \int \sqrt{g}(\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_D) + \sqrt{g}\mathcal{L}_M d^3x, \qquad (8.15)$$

onde g=det($g_{\mu\nu}$), $\mathcal{L}_M$ é a densidade de Lagrangeana do campo de matéria e a integral se estende sobre todo o espaço-tempo 3-dimensional.

8.2-Equação de Campo $\frac{\delta I}{\delta \omega^i_\mu} = 0$

As equações de campo são obtidas conforme o procedimento usual em teorias Lagrangeanas, ou seja minimizando a ação I

$$\delta I = 0 \tag{8.16}$$

o que equivale a fazer

$$\partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial[\partial_\nu A_\mu]} - \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial A_\mu} = 0, \tag{8.17}$$

onde A_μ é cada um dos potenciais da teoria. Teremos assim 4 equações de campo, uma para cada potencial. A equação (8.17) para ω^i_μ fica

$$\omega_{\mu j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\omega^i_\mu}\mathcal{L}_c + \omega_{\mu j}\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\omega_i} - \omega_{\mu j}\frac{\partial_\nu\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu\omega^i_\mu)} - \omega_{\mu j}\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu\omega^i_\mu)} = -T_{ij}, \tag{8.18}$$

onde definimos o tensor energia-momentum por

$$T_{ij} = \omega_{\mu j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta\sqrt{g}\mathcal{L}_M}{\delta\omega^i_\mu} \tag{8.19}$$

e usamos $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_D$. As derivadas de $\sqrt{g}$ podem ser determinadas lembrando que a diferencial do determinante é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} d\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\frac{dg}{\sqrt{g}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}} g g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Assim o primeiro termo de (8.18) fica

$$\begin{aligned} \omega_{\mu j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\omega^i_\mu} &= \frac{1}{2}\omega_{\mu j} g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\omega^i_\mu} \\ &= \eta_{ij}, \end{aligned} \tag{8.21}$$

onde usamos o fato que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab}\omega^a_\alpha\omega^b_\beta. \tag{8.22}$$

O terceiro termo simplifica-se usando novamente (8.20) e (8.22)

$$\frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta}$$
$$= \omega^\alpha_a \partial_\nu \omega^a_\alpha. \tag{8.23}$$

a) Termos em $\mathcal{L}_P$:

Para determinarmos os termos em L_P na equação de campo precisaremos dos seguintes resultados:

$$\frac{\partial T^k_{lm}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = (\omega^\nu_l \omega^\mu_m \delta^k_i - \omega^\nu_m \omega^\mu_l \delta^k_i) \tag{8.24}$$

$$\frac{\partial T^k_{lm}}{\partial \omega^i_\mu} = -\omega^\alpha_i \omega^\nu_l \omega^\beta_m (\partial_\alpha \omega^k_\beta - \partial_\beta \omega^k_\alpha) - \omega^\alpha_l \omega^\beta_i \omega^\mu_m (\partial_\alpha \omega^k_\beta - \partial_\beta \omega^k_\alpha)$$
$$+ \omega^\alpha_i \omega^\mu_l \omega^k{}_{m\alpha} - \omega^\alpha_i \omega^\mu_m \omega^k{}_{l\alpha} - \delta^k_l \omega^\mu_m \omega_i + \delta^k_m \omega^\mu_l \omega_i. \tag{8.25}$$

Por simplicidade trataremos inicialmente o termo em $\alpha : \mathcal{L} = f^{klm} f_{klm}$. Temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 2 f^{klm} \frac{\partial f_{klm}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)}$$
$$= 2 f^{klm} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} [T_{klm} + \frac{1}{2}\eta^{mk} v^l - \frac{1}{2}\eta^{kl} v^m]$$
$$= 2 f^{klm} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} T_{klm}, \tag{8.26}$$

onde usamos o fato que a contração em quaisquer índices de f é nula

$$f^{kkm} = f^{kmk} = f^{mkk} = 0. \tag{8.27}$$

Usamos ainda o fato que se $\mathcal{T}_{ij}$ é um tensor simétrico em ij e S é a simetrização em ij, então, para um tensor qualquer A_{ij}

$$\mathcal{T}_{ij} S(A_{ij}) = \mathcal{T}_{ij} A_{ij}. \tag{8.28}$$

Outras relações semelhantes que utilizaremos são

$$A_{ij} S(B_{ij}) = S(A_{ij}) S(B_{ij}) = S(A_{ij}) B_{ij} \tag{8.29}$$

$$A_{ij} A(B_{ij}) = A(A_{ij}) A(B_{ij}) = A(A_{ij}) B_{ij} \tag{8.30}$$

onde A_{ij}, B_{ij} são tensores arbitrários, A é a operação de antisimetrização e S a de simetrização.

Utilizando agora a (8.24) e a (8.30) em (8.26) ficamos com

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 2\bar{F}_k{}^{lm}(\omega^\nu_l \omega^\mu_m \delta^k_i), \tag{8.31}$$

onde fizemos

$$\bar{F}_k{}^{lm} = f_k{}^{lm} - f_k{}^{ml} \tag{8.32}$$

e temos daí

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 2\omega^\nu_l \omega^\mu_m \delta_\nu \bar{F}_i{}^{lm} + 2\bar{F}_i{}^{lm}\omega^\nu_l \delta_\nu \omega^\mu_m + 2\bar{F}_i{}^{lm}\omega^\mu_m \partial_\nu \omega^\nu_l . \tag{8.33}$$

Com as propriedades (8.27),(8.28), e (8.30) e usando a (8.25) obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^i_\mu} = 2\bar{F}_k{}^{lm}[-\omega^\alpha_i \omega^\mu_l \omega^\beta_m(\partial_\alpha \omega^k_\beta - \partial_\beta \omega^k_\alpha) + \omega^\alpha_i \omega^\mu_l \omega^k{}_{m\alpha} + \delta^k_m \omega^\mu_l \omega_i]. \tag{8.34}$$

Reunindo as equações (8.34),(8.33),(8.31),(8.23) e (8.21) obtemos:

$$-\omega_{\mu j}(\omega^\alpha_n \partial_\nu \omega^n_\alpha)(2\bar{F}_i{}^{lm}\omega^\nu_l \omega^\mu_m) - \omega_{\mu j}(2\omega^\nu_l \omega^\mu_m \partial_\nu \bar{F}_i{}^{lm} + 2\bar{F}_i{}^{lm}\omega^\nu_l \partial \nu \omega^\mu_m + 2\bar{F}_i{}^{lm}\omega^\mu_m \partial \nu \omega^\nu_l)$$

$$+2\omega_{\mu j}\bar{F}_k{}^{lm}[-\omega^\alpha_i \omega^\mu_l \omega^\beta_m(\partial_\alpha \omega^k_\beta - \partial_\beta \omega^k_\alpha) + \omega^\alpha_i \omega^\mu_l \omega^k{}_{m\alpha}] + \eta_{ij}\mathcal{L}_c - 2\bar{F}^k{}_{kj}\omega_i = -T_{ij} \tag{8.35}$$

ou, reagrupando os termos

$$2\bar{F}_i{}^l{}_j(v_l + \omega^\alpha_a \omega^a_{l\alpha} - 2\omega_l) - 2\omega^\nu_l \partial_\nu \bar{F}_i{}^l{}_j + \bar{F}_i{}^{lm}(T_{jlm} + 2\omega^\alpha_l \omega^j{}_{m\alpha} + 2\delta_{jm}\omega_l) - 2\bar{F}_{kj}{}^m(T^k{}_{lm} + \omega^\alpha_i \omega^k{}_{m\alpha}$$

$$-\omega^k{}_{i\alpha}\omega^\alpha_m - \eta_{ki}\omega_m + \eta_{km}\omega^i) + 2\bar{F}_{kj}{}^m \omega^\alpha_i \omega^k{}_{m\alpha} + \eta_{ij}\mathcal{L}_c - 2\bar{F}^k{}_{kj}\omega_i = -T_{ij}, \tag{8.36}$$

ou simplesmente

$$-2D^k \bar{F}_{ijk} + 2v^k \bar{F}_{ijk} + 2H_{ij} - 4\bar{F}_{ijl}\omega^l - \eta_{ij}\mathcal{L}_c = T_{ij}, \tag{8.37}$$

onde definimos a derivada covariante

$$D^k \bar{F}_{ijk} = \omega^{\mu k}\partial_\mu \bar{F}_{ijk} + \omega^m{}_{j\mu}\bar{F}_{imk} + \omega^m{}_{k\mu}\bar{F}_{ijm} + \omega^m{}_{i\mu}\bar{F}_{mjk} \tag{8.38}$$

e o tensor

$$H_{ij} = \bar{F}_{kj}{}^m T^k{}_{im} - \frac{1}{2}\bar{F}_i{}^{lm}T_{jlm}. \tag{8.39}$$

O termo em β na lagrangeana (8.9) segue de uma derivação análoga à anterior, considerando que

$$\frac{\partial(v_k v^k)}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 2v^m \frac{\partial v_m}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 2\eta^{kl} v^m \frac{\partial T_{klm}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} \tag{8.40}$$

$$\frac{\partial(v_k v^k)}{\partial(\omega^i_\mu)} = 2\eta^{kl} v^m \frac{\partial T_{klm}}{\partial(\omega^i_\mu)} \tag{8.41}$$

e temos assim a mesma equação de campo (8.38), modificando apenas

$$\bar{F}_{klm} = \eta_{kl} v_m - \eta_{km} v_l. \tag{8.42}$$

Com a contração em quaisquer dois índices em a_{klm} e a propriedade (8.30) generalizada para três índices obtemos a mesma equação de campo (8.38) considerando que

$$\bar{F}_{klm} = 2a_{klm} \tag{8.43}$$

e seguindo a mesma dedução do termo em α das equações (8.26) a (8.37).

b) Termos em $\mathcal{L}_L$:

Os termos de $\mathcal{L}_L$ são auxiliados pelas equações :

$$\frac{\partial P^{kl}}{\partial \omega^i_\mu} = -(\omega^\sigma_i \omega^{l\mu} \omega^\rho_a + \omega^\rho_i \omega^\mu_a \omega^{\sigma l})(\partial_\rho \omega^{ak}{}_\sigma - \partial_\sigma \omega^{ak}{}_\rho - \omega^a{}_{c\rho} \omega^{ck}_\sigma$$

$$+\omega^a{}_{c\sigma} \omega^{ck}_\rho) - 2\omega^\sigma_i \omega^{l\mu} \bar{\omega}^k_\sigma - 2\omega^\sigma_i \omega^\mu_a \bar{\omega}^a_\sigma \eta^{kl} \tag{8.44}$$

$$\frac{\partial P^{kl}}{\partial(\partial_\nu \omega^i_\mu)} = 0. \tag{8.45}$$

Utilizando as propriedades de simetria (8.29) obtemos para o termo em a_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^i_\mu} = 2E_{kl} \frac{\partial \rho^{kl}}{\partial \omega^i_\mu} \tag{8.46}$$

e usando (8.44) chegamos a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^i_\mu} = -2E_{kl}[(\omega^\sigma_i \omega^{l\mu} \omega^\rho_a + \omega^\rho_i \omega^\mu_a \omega^{\sigma l})(\partial_\rho \omega^{ak}_\sigma - \partial_\sigma \omega^{ak}_\rho - \omega^a_{c\rho} \omega^{ck}_\sigma + \omega^a_{c\rho} \omega^{ck}_\rho)$$

$$+2(\omega^a_\mu \bar{\omega}^k_\mu - \omega^k_\mu \bar{\omega}^a_\nu - \omega^a_\nu \bar{\omega}^k_\mu + \omega^k_\nu \bar{\omega}^a_\mu) - 2(\omega^{\sigma l} \omega^\mu_i \bar{\omega}^k_\sigma - \omega^{\mu l} \omega^\sigma_i \bar{\omega}^k_\sigma + \delta^k_i \bar{\omega}^a_\sigma \omega^\sigma_a \omega^{\mu l} - \delta^k_i \bar{\omega}^a_\sigma \omega^\mu_a \omega^{\sigma l})]$$

$$= -2E_{kl}\{P^k_i \omega^{l\mu} + P^{\mu k}{}_{il} - 2[\omega^{\sigma l} \omega^\mu_i \bar{\omega}^k_\sigma + \delta^k_i \bar{\omega}^a_\sigma \omega^\sigma_a \omega^{\mu l} - \omega^{\mu l} \omega^\sigma_i \bar{\omega}^k_\sigma - \delta^k_i \bar{\omega}^a_\sigma \omega^\mu_a \omega^{\sigma l}]\}. \tag{8.47}$$

A equação para o termo em a_1 fica

$$2E_{kl}[P^k{}_i\eta^l_j + P_j{}^k{}_{il} - 2(\eta_{ij}\omega^{\sigma l}\bar{\omega}^k_\sigma - \eta^l_j\omega^\sigma_i\bar{\omega}^k_\sigma + \delta^k_i\eta^l_j\omega^\sigma_j\bar{\omega}^a_\sigma - \delta^k_i\omega^{\sigma l}\bar{\omega}_{j\sigma})] - \eta_{ij}\mathcal{L}_c = T_{ij}. \quad (8.48)$$

Agora a equação (8.23) no espaço do grupo é representada por

$$P_{klmn} = \eta_{km}P_{ln} - \eta_{kn}P_{lm} - \eta_{lm}P_{kn} + \eta_{ln}P_{km} - \frac{1}{2}(\eta_{km}\eta_{ln} - \eta_{kn}\eta_{lm})P \quad (8.49)$$

e a equação (8.48) é modificada para

$$T_{ij} = -\eta_{ij}\mathcal{L}_c + 2E^{kl}[P_{ki}\eta_{lj} + \eta_{ji}P_{kl} - \eta_{jl}P_{ki} - \eta_{ki}P_{jl} + \eta_{kl}P_{ji}$$

$$-2(\eta_{ij}\omega^{\sigma l}\bar{\omega}^k_\sigma - \eta^l_j\omega^\sigma_i\bar{\omega}^k_\sigma + \delta^k_i\eta^l_j\omega^\sigma_a\bar{\omega}^a_\sigma - \delta^k_i\omega^{\sigma l}\bar{\omega}_{j\sigma})] - E^l_k(\eta_{ji}\eta_{kl} - \eta_{jl}\eta_{ki})P. \quad (8.50)$$

Um melhor agrupamento dos termos leva-nos a

$$4J_{[ik][jl]}P^{kl} + 4J^{[lk]}{}_{[lj]}P_{ki} - 2J^{[il]}{}_{[jl]}P + 4J^{[ik]}{}_{[jl]}\omega^\sigma_l\bar{\omega}_{k\sigma} - \eta_{ij}\mathcal{L}_c = T_{ij}, \quad (8.51)$$

onde fizemos

$$J_{ijkl} = 2\eta_{ik}E_{jl}. \quad (8.52)$$

Esta dedução é idêntica à utilizada para I_{kl}, de forma que o termo em a_2 leva à mesma equação de campo (8.51) se admitirmos que

$$J_{ijkl} = 2\eta_{ik}I_{jl}, \quad (8.53)$$

onde utilizamos a contração $I^k_k = 0$ e as propriedades de simetria (8.30).

O termo em a_3 também tem a mesma equação (8.51), modificando apenas o termo

$$J_{ijkl} = 2\eta_{ik}\eta_{jl}P, \quad (8.54)$$

onde usamos um raciocínio análogo ao considerado para obter a (8.40).

c) Termos em L_k

Os termos em L_k baseiam-se nos resultados abaixo

$$\frac{\partial t^{klm}}{\partial\omega^i_\mu} = -(\omega^\rho_i\omega^\mu_l\omega^\sigma_m + \omega^\rho_l\omega^\sigma_i\omega^\mu_m)t^k_{\rho\sigma} \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial t^{klm}}{\partial(\partial_\nu\omega^i_\mu)} = 0. \quad (8.56)$$

Assim, o termo em μ

$$\mathcal{L} = g^{klm} g_{klm} \tag{8.57}$$

fica

$$T_{ij} = -\eta_{ij}\mathcal{L}_c + 2\bar{f}_k{}^{lm}\eta_{jl}t^k{}_{im} = -\eta_{ij}\mathcal{L}_c + 2\bar{f}_k{}^{jm}t^k{}_{im}, \tag{8.58}$$

onde

$$\bar{f}_{klm} = t_{klm} - t_{kml}. \tag{8.59}$$

Usando o mesmo raciocínio empregado para obter (8.40) e (8.43), chegamos à mesma equação para os termos em ν e ρ, tendo respectivamente

$$\bar{f}_{klm} = \eta_{kl}u_m - \eta_{km}u_l \tag{8.60}$$

$$\bar{f}_{klm} = 2a_{klm}. \tag{8.61}$$

d) Termo em L_D

Uma vez que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^i_\mu} = -2F^{kl}[\omega^\rho_i \omega^\mu_k \omega^\sigma_l(\partial_\rho\omega_\sigma - \partial_\sigma\omega_\rho) + \omega^\rho_k\omega^\sigma_i\omega^\mu_l(\partial_\rho\omega_\sigma - \partial_\sigma\omega_\rho) + 2(\omega^\rho_i\omega^\mu_l\bar{\omega}_{k\rho} - \omega^\rho_i\omega^\mu_k\bar{\omega}_{l\rho})]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\omega^i_\mu)} = 0 \tag{8.62}$$

a equação em b fica

$$T_{ij} = -\eta_{ij}\mathcal{L}_c + 4F^{jl}F_{il} - 3F^{jl}\omega^\rho_l\bar{\omega}_{i\rho} \tag{8.63}$$

Assim, agrupando todos os termos, obtemos a seguinte equação para $\frac{\partial I}{\delta\omega^i_\mu} = 0$

$$-2D^k\bar{F}_{ijk} + 2v^k\bar{F}_{ijk} + 2H_{ij} + 4\bar{F}_{ilj}\omega^l + 4J_{[ik][jl]}P^{kl} + 4J^{[lk]}{}_{[lj]}P_{ki} - 2J^{[il]}{}_{[jl]}P$$

$$+4J^{[ik]}{}_{[jl]}\omega^\sigma_l\bar{\omega}_{k\sigma} + 2\bar{f}_{kj}{}^m t^k{}_{im} + 4F_j{}^lF_{il} - 3F^{jl}\omega^\rho_l\bar{\omega}_{i\rho} - \eta_{ij}\mathcal{L}_c = T_{ij} \tag{8.64}$$

onde

$$D^k\bar{F}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{\mu k}\partial_\mu\bar{F}_{ijk} + \omega^m{}_{j\mu}\bar{F}_{imk} + \omega^m{}_{k\mu}\bar{F}_{ijm} + \omega^m{}_{i\mu}\bar{F}_{mjk} \tag{8.38}$$

$$\bar{F}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(f_{ijk} - f_{ikj}) + \beta(\eta_{ij}v_k - \eta_{ik}v_j) + 2\gamma a_{ijk} \tag{8.65}$$

$$H_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}_{kj}{}^m T^k{}_{im} - \frac{1}{2}\bar{F}_i{}^{lm}T_{jlm} \tag{8.39}$$

$$J_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} 2a_3\eta_{ik}\eta_{jl}P + 2a_1\eta_{ik}E_{jl} + 2a_2\eta_{ik}I_{jl} \tag{8.66}$$

$$\bar{f}_{klm} \stackrel{\text{def}}{=} \mu(g_{klm} - g_{kml}) + \nu(\eta_{kl}u_m - \eta_{km}u_l) + 2\rho b_{klm}. \tag{8.67}$$

Uma vez que os campos se transformam covariantemente, a única derivada que temos é a derivada covariante e como os potenciais $\bar{\omega}_{kj}$ e ω_l também se transformam covariantemente, concluímos que a equação (8.64) é invariante por transformações do grupo conforme, como desejado.

8.3-Equação de Campo $\frac{\delta I}{\delta \omega^{ij}{}_{\mu}} = 0$

A equação (8.17) para o potencial $\omega^{ij}{}_{\mu}$ é agora

$$\omega_{\mu k'}\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega^{ij}{}_{\mu}} - \omega_{\mu k'}\frac{\partial_\nu\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu \omega^{ij}{}_{\nu})} - \omega_{\mu k'}\partial_\nu\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu \omega^{ij}{}_{\mu})} = S_{ijk'}, \tag{8.68}$$

onde $S_{ijk'}$ é a densidade de spin definida por

$$S_{ijk'} = \frac{-\omega_{\mu k'}}{\sqrt{g}}\frac{\delta\sqrt{g}\mathcal{L}_M}{\delta \omega^{ij}{}_{\mu}} \tag{8.69}$$

a) Termos em $\mathcal{L}_L$

Os termos em $\mathcal{L}_L$ baseiam-se em

$$\frac{\partial P_{kl}}{\partial(\partial_\nu \omega^{ij}{}_{\mu})} = \omega^{\mu l}\omega_i^\nu\delta_j^k - \omega^{\nu l}\omega_i^\mu\delta_j^k \tag{8.70}$$

e

$$\frac{\partial P_{kl}}{\partial \omega^{ij}{}_{\mu}} = \omega_{jk\rho}\omega_i^\rho\omega_l^\mu + \omega^a{}_{i\sigma}\omega_l^\sigma\omega_a^\mu\eta_{jk} - \omega_{jk\sigma}\omega_l^\sigma\omega_i^\mu - \omega^a{}_{i\rho}\omega_l^\mu\omega_a^\rho\eta_{jk}. \tag{8.71}$$

Como modelo utilizaremos o termo em $a_1 : \mathcal{L} = E_{kl}E^{kl}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu \omega^{ij}{}_{\mu})} = 2E^{kl}(\omega_l^\mu\omega_i^\nu\eta_{jk} - \omega_l^\nu\omega_i^\mu\eta_{jk}) \tag{8.72}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega^{ij}{}_{\mu}} = 2E^{kl}(\omega_i^\rho\omega_l^\mu\omega_{jk\rho} + \omega_a^\mu\eta_{jk}\omega_l^\sigma\omega^a{}_{i\sigma} - \omega_l^\sigma\omega_i^\mu\omega_{jk\sigma} - \eta_{jk}\omega_l^\mu\omega_a^\rho\omega^a{}_{i\rho}) \tag{8.73}$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial(\partial_\nu \omega^{ij}{}_{\mu})} &= 2(\omega_l^\mu\omega_i^\nu - \omega_l^\nu\omega_i^\mu)\partial_\nu E_j{}^l + 2\omega_l^\mu E_j{}^l\partial_\nu\omega_i^\nu + 2E_j{}^l\omega_i^\nu\partial_\nu\omega_l^\mu \\ &\quad -2E_j{}^l\omega_l^\nu\partial_\nu\omega_i^\mu - 2E_j{}^l\omega_i^\mu\partial_\nu\omega_l^\nu\end{aligned} \tag{8.74}$$

$$-2\omega_{\mu k'}\omega^{\alpha}_{n}\partial_{\nu}\omega^{n}_{\alpha}(\omega^{\mu}_{l}\omega^{\nu}_{i}\delta^{k}_{j}-\omega^{\nu l}\omega^{\mu}_{i}\delta^{k}_{j})E^{kl}-2(\eta_{k'l}\omega^{\nu}_{i}-\omega^{\nu}_{l}\eta_{k'i})\partial_{\nu}E^{jl}$$

$$+2E^{j}_{k'}\omega^{\nu}_{a}\omega^{\rho}_{i}\partial_{\nu}\omega^{a}_{\rho}+2E^{jl}\omega^{\nu}_{i}\omega_{\mu k'}\omega^{\mu}_{a}\omega^{\rho}_{l}\partial_{\nu}\omega^{a}_{\rho}-2E^{jl}\omega^{\nu}_{l}\omega_{\mu k'}\omega^{\mu}_{a}\omega^{\rho}_{i}\partial_{\nu}\omega^{a}_{\rho}-2E^{jl}\eta_{k'i}\omega^{\nu}_{a}\omega^{\rho}_{l}\partial_{\nu}\omega^{a}_{\rho}$$

$$+2E^{kl}(\eta_{lk'}\omega^{\rho}_{i}\omega_{jk\rho}+\eta_{ak'}\delta_{jk}\omega^{\sigma}_{l}\omega^{a}{}_{i\sigma}-\omega^{\sigma}_{l}\eta_{ik'}\omega_{jk\sigma}-\eta_{jk}\eta_{ik'}\omega^{\rho}_{a}\omega^{a}{}_{i\rho})=S_{ijk'} \qquad (8.75)$$

e reagrupando os termos obtemos

$$2(\partial_{\mu}J_{ij[kl]}+\omega_{j}{}^{m}{}_{\mu}\eta_{ik'}E_{ml}\omega^{\mu l}-\omega_{j}{}^{m}{}_{\mu}\omega^{\mu l}\eta_{il}E_{mk'}-\omega^{\mu l}\omega_{k'}{}^{m}{}_{\mu}\eta_{il}E_{jm}$$

$$+\omega_{l}{}^{m}{}_{\mu}\omega^{\mu l}\eta_{ik'}E_{jm})+2E_{jm}\eta_{il}[-\eta^{l}_{k'}v_{m}+\eta^{m}_{k'}v_{l}+2\eta^{l}_{k'}\omega_{m}-2\eta^{m}_{k'}\omega_{l}]+2E^{j}_{l}\eta^{i}_{m}(T^{k'}{}_{ml}$$

$$-\delta^{k'}_{m}\omega_{l}+\eta\delta^{k'}_{l}\omega_{m})=S_{ijk'}, \qquad (8.76)$$

onde J_{ijkl} é dado em (8.52). Utilizando ainda o fato que $\omega^{ij}{}_{\mu}$ é antisimétrico em ij, obtemos

$$2D^{l}J_{[ij][kl]}+(\frac{4}{3}t_{k}{}^{[lm]}-\delta_{k}{}^{[l}v^{m]}+a_{k}{}^{lm})J_{[ij][lm]}+2\delta_{k}{}^{[l}\omega^{m]}J_{[ij][lm]}=S_{ijk}, \qquad (8.77)$$

onde consideramos que

$$T_{klm}=\frac{4}{3}t_{k[lm]}+a_{klm}+\eta_{k[l}v_{m]} \qquad (8.78)$$

e usamos a definição

$$D^{l}J_{[ij][kl]}\stackrel{\text{def}}{=}e^{\mu l}(\partial_{\mu}J_{[ij][kl]}+\omega^{m}{}_{i\mu}J_{[mj][kl]}+\omega^{m}{}_{j\mu}J_{[im][kl]}+\omega^{m}{}_{k\mu}J_{[ij][ml]}+\omega^{m}{}_{l\mu}J_{[ij][km]}). \qquad (8.79)$$

O mesmo resultado é obtido para o termo em a_2, uma vez que não utilizamos o fato que E_{kl} é antisimétrico. Temos então a mesma equação (8.79) com J_{ijkl} dado em (8.53). O termo em a_3, utilizando o mesmo raciocínio empregado para obter (8.40), chegamos à equação (8.79) com J_{ijkl} dado em (8.54).

b) Termos em $\mathcal{L}_P$

Os elementos fundamentais para estes termos são

$$\frac{\partial T^{k}{}_{lm}}{\partial(\partial_{\nu}\omega^{ij}{}_{\mu})}=0 \qquad (8.80)$$

e

$$\frac{\partial T^{k}{}_{lm}}{\partial\omega^{ij}{}_{\mu}}=\delta^{k}_{i}\eta_{lj}\delta^{\mu}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{m}-\delta^{k}_{i}\eta_{jm}\delta^{\mu}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{l}=2\omega^{\mu}_{[m}\delta^{k}_{i}\eta_{l]j} \qquad (8.81)$$

e assim o termo em α fica

$$\begin{aligned}\omega_{\mu k'}\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega^{ij}{}_{\mu}} &= S_{ijk'} \\ &= 2t_{ijk'} - t_{ik'j}.\end{aligned} \tag{8.82}$$

Usando ainda a antisimetria em i, j concluímos que

$$(t_{kji} - t_{kij}) = S_{ijk}. \tag{8.83}$$

Os termos em β e γ seguem a mesma dedução , utilizando apenas o raciocínio empregado para obter a (8.82), resultando respectivamente as equações

$$(\eta_{jk'}v_i - \eta_{ik'}v_j) = S_{ijk} \tag{8.84}$$

$$4a_{ijk'} = S_{ijk'}. \tag{8.85}$$

c) Termos em $\mathcal{L}_k$

A equação para μ é

$$\begin{aligned}S_{ijk'} &= 2\omega_{\mu k'}g^{k}{}_{lm}(\bar{\omega}^{\mu m}\eta_{ik}\delta^l_j - \bar{\omega}^{\mu l}\eta_{ik}\delta^m_j) \\ &= \omega_{\mu k'}\bar{\omega}^{\mu m}(g_{mji} - g_{mij}) = \delta_{ijk'}\end{aligned} \tag{8.86}$$

e os termos em ν e ρ ficam, respectivamente,

$$\omega_{\mu k'}\bar{\omega}^{\mu m}(\eta_{jm}u_i - \eta_{im}u_j) = S_{ijk'}. \tag{8.87}$$

$$4b_{ijm}\omega^{\mu}_{k'}\bar{\omega}^{m}_{\mu} = S_{ijl'} \tag{8.88}$$

d) Termos em $\mathcal{L}_P$

Como $F_{\mu\nu}$ não é função do potencial $\omega^{ij}{}_{\mu}$ vemos que não há contribuição de $\mathcal{L}_D$.

Portanto, a equação de campo $\frac{\delta I}{\delta \omega^{ij}{}_{\mu}} = 0$ fica forma

$$2D^l J_{[ij][kl]} + (\frac{4}{3}t_k{}^{[lm]} - \delta_k{}^{[l}v^{m]} + a_k{}^{lm})J_{[ij][lm]} + H_{ijk} + 2(\eta_k{}^{[l}\omega^{m]})J_{[ij][kl]} + G_{ijk} = S_{ijk} \tag{8.89}$$

onde

$$D^l J_{[ij][kl]} = e^{\mu l}(\partial_\mu J_{[ij][kl]} + \omega^m{}_{i\mu}J_{[mj][kl]} + \omega^m{}_{j\mu}J_{[im][kl]} + \omega^m{}_{k\mu}J_{[ij][ml]} + \omega^m{}_{l\mu}J_{[ij][km]}) \tag{8.90}$$

$$H_{ijk} = \alpha(t_{kji} - t_{kij}) + \beta(\eta_{jk}v_i - \eta_{ik}v_j) + 4\gamma a_{ijk} \tag{8.91}$$

$$G_{ijk} = \mu\omega_{\mu k}\bar{\omega}^{\mu m}(g_{mji} - g_{mij}) + \nu\omega_{\mu k}\bar{\omega}^{\mu m}(\eta_{jm}u_i - \eta_{im}u_j) + 4\rho b_{ijm}\omega^{\mu}_{k}\bar{\omega}^{m}_{\mu} \tag{8.92}$$

$$J_{ijkl} = a_1\eta_{ik}E_{jl} + a_2\eta_{ik}I_{jl} + a_3\eta_{ik}\eta_{jl}P. \tag{8.66}$$

Por inspeção direta vemos que a equação (8.89) também é invariante por transformações de gauge do grupo conforme.

8.4-Equação de Campo $\frac{\delta I}{\delta\bar{\omega}^i_\mu} = 0$

A equação (8.17) para o potencial $\bar{\omega}^i_\mu$ é

$$\omega_{\mu j}\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\bar{\omega}^i_\mu} - \omega_{\mu j}\frac{\partial_\nu\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\partial_\nu\bar{\omega}^j_\mu} - \omega_{\mu j}\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar{\omega}^i_\mu})) = -K_{ij} \tag{8.93}$$

onde

$$K_{ij} = \frac{\omega_{\mu j}}{\sqrt{g}}\frac{\delta\mathcal{L}\sqrt{g}}{\delta\bar{\omega}^i_\mu} \tag{8.94}$$

a) Termos para $\mathcal{L}_K$

As derivadas fundamentais para o cálculo dos termos em μ são

$$\frac{\partial t^k{}_{lm}}{\partial(\partial_\nu\bar{\omega}^i_\mu)} = \omega^\nu_l\omega^\mu_m\delta^k_i - \omega^\nu_m\omega^\mu_l\delta^k_i \tag{8.95}$$

$$\frac{\partial t^k{}_{lm}}{\partial\bar{\omega}^i_\mu} = -\omega^\rho_l\omega^\mu_m\omega^k{}_{i\rho} + \omega^\mu_l\omega^\rho_m\omega^k{}_{i\rho} - \delta^k_i\omega^\mu_l\omega_m + \delta^k_i\omega^\mu_m\omega_l \tag{8.96}$$

e a equação para μ é

$$-\omega_{\mu j}(\omega^\alpha_n\partial_\nu\omega^n_\alpha) - \omega_{\mu j}(2\omega^\nu_l\omega^\mu_m\partial_\nu\bar{f}_i{}^{lm} + 2\bar{f}_i{}^{lm}\omega^\nu_l\partial_\nu\omega^\mu_m + 2\bar{f}_i{}^{lm}\omega^\mu_m\partial_\nu\omega^\nu_l)$$

$$+2\omega_{\mu j}\bar{f}^{lm}_k(\omega^\mu_l\omega^\rho_m\omega^k{}_{i\rho} + \delta^k_i\omega^\mu_m\omega_l) = -K_{ij}, \tag{8.97}$$

onde

$$\bar{f}_{ijk} = g_{ijk} - g_{ikj}. \tag{8.98}$$

Usando agora (8.5),(8.12) e (8.78) obtemos a equação na forma

$$-2D^k\bar{f}_{ijk} + 2v^k\bar{f}_{ijk} - \bar{f}^{lm}_i(\frac{4}{3}t_{j[lm]} + a_{jlm} + \eta_{j[l}v_{m]}) = K_{ij}, \tag{8.99}$$

onde

$$D^k \bar{f}_{ijk} = \omega^{\mu k}(\partial_\mu \bar{f}_{ijk} + \omega^m{}_{j\mu} \bar{f}_{imk} + \omega^m{}_{k\mu} \bar{f}_{ijm} + \omega^m{}_{i\mu} \bar{f}_{mjk}). \tag{8.100}$$

O termo em ν é facilmente obtido, utilizando o fato que

$$2u_k \partial u_k = 2u_m \eta_{kl} \partial t^{klm}, \tag{8.101}$$

de forma que obtemos a mesma equação (8.98) com $\bar{f}_{ijk}$ definido em (8.60). Quanto ao termo em ρ, usando a propriedade (8.30) somos levados à mesma equação (8.98), com $\bar{f}_{ijk}$ dado em (8.61).

b) Termos em $\mathcal{L}_L$

Os termos em $\mathcal{L}_L$ são auxiliados por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial(\partial_\nu \bar{\omega}^i_\mu)} = 0 \tag{8.102}$$

$$\frac{\partial P^{kl}}{\partial \bar{\omega}^i_\mu} = (2\omega^{\sigma l} \delta^k_i \delta^\mu_\sigma + 2\omega^\sigma_a \eta^{kl} \delta^a_i \delta^\mu_\sigma). \tag{8.103}$$

Desta forma o termo em a_1 fica

$$4J^{[ki]}{}_{[kj]} = K^i_j \tag{8.104}$$

com J definido em (8.52). Os termos em a_2 e a_3 levam à mesma equação (8.98), com J definido em (8.53) e (8.54) respectivamente.

c) Termos em $\mathcal{L}_P$

Os termos em $\mathcal{L}_P$ não dependem de $\bar{\omega}^i_\mu$, e desta forma não contribuem para esta equação de campo.

d) Termos em $\mathcal{L}_D$

Temos diretamente que

$$8F_{ji} = K_{ij} \tag{8.105}$$

logo, a equação de campo $\frac{\delta I}{\delta \bar{\omega}^i_\mu}$ fica então

$$-2D^k \bar{f}_{ijk} + 2v^k \bar{f}_{ijk} - \bar{f}_i{}^{lm}(\frac{4}{3} t_{k[lm]} + a_{jlm} + \eta_{j[l} v_{m]}) + 4J^{[ik]}{}_{[kj]} + 8F_{ji} = K_{ij}, \tag{8.106}$$

onde

$$D^k \bar{f}_{ijk} = \omega^{\mu k}(\partial_\mu \bar{f}_{ijk} + \omega^m{}_{j\mu} \bar{f}_{imk} + \omega^m{}_{k\mu} \bar{f}_{ijm} + \omega^m{}_{i\mu} \bar{f}_{mjk}) \tag{8.99}$$

$$\bar{f}_{ilm} = \mu(g_{ilm} - g_{iml}) + \nu(\eta_{il}u_m - \eta_{im}u_l) + \rho b_{ilm} \tag{8.67}$$

$$J_{ijkl} = a_1\eta_{ik}E_{jl} + a_2\eta_{ik}I_{jl} + a_3\eta_{ik}\eta_{jl}P. \tag{8.66}$$

8.5-Equação de Campo $\frac{\delta I}{\delta\omega_\mu} = 0$

a) Termos $\mathcal{L}_D$

Os elementos básicos destes termos são

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial(\partial_\nu\omega_\mu)} = \omega^\nu_m\omega^\mu_l - \omega^\nu_l\omega^\mu_m \tag{8.107}$$

e

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial\omega_\mu} = 0 \tag{8.108}$$

e a equação de campo fica

$$-2D^kF_{jk} + 2v^kF_{jk} - F^{lm}(\frac{4}{3}t_{j[lm]} + a_{jlm} + \eta_{j[l}v_{m]}) - 2F^l{}_j\omega_l = D_j \tag{8.109}$$

com D_j definido por

$$D_j = \frac{\omega_{\mu j}}{\sqrt{g}}\frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{g})}{\delta\omega_\mu} \tag{8.110}$$

e

$$D^kF_{jk} = \omega^{\mu k}(\partial_\mu F_{jk} + \omega^m{}_{j\mu}F_{mk} + \omega^m{}_{k\mu}F_{jm}). \tag{8.111}$$

b) Termos em $\mathcal{L}_L$

Como $\mathcal{L}_L$ não depende de ω_μ, logo não contribui para a equação de campo.

c) Termos em $\mathcal{L}_P$

A equação para α fica

$$D_j = 2f^k{}_{lm}\frac{\partial T^k{}_{lm}}{\partial\omega_\mu} = 2(f^k{}_{kj} - f^k{}_{jk}) = 2H_j{}^k{}_k \tag{8.112}$$

logo, para β e γ teremos a mesma equação acima, com H dado na forma geral, já definida em (8.91).

d) Termos em $\mathcal{L}_K$

Temos a seguinte equação para os termos em $\mathcal{L}_K$

$$G_{jk}{}^k = D_j. \tag{8.113}$$

A equação de campo para $\frac{\delta I}{\delta \omega_\mu} = 0$ fica então

$$-2D^k F_{jk} + 2v^k F_{jk} - F^{lm}(\frac{4}{3}t_{j[lm]} + a_{jlm} + \eta_{j[l}v_{m]}) - 2F^l{}_j\omega_l + H_{kj}{}^k + G_{jk}{}^k = D_j \quad (8.114)$$

com

$$D^k F_{jk} = \omega^{\mu k}\partial_\mu F_{jk} + \omega^m{}_{j\mu}F_{mk} + \omega^m{}_{k\mu}F_{jm} \quad (8.110)$$

$$H_{ijk} = \alpha(t_{kji} - t_{kij}) + \beta(\eta_{jk}v_i - \eta_{ik}v_j) + 4\gamma a_{ijk} \quad (8.91)$$

$$G_{ijk} = \mu\omega_{\mu k}\bar{\omega}^{\mu m}(g_{mji} - g_{mij}) + \nu\omega_{\mu k}\bar{\omega}^{\mu m}(\eta_{jm}u_i - \eta_{im}u_j) + 4\rho b_{ijm}\omega^\mu_k\bar{\omega}^m_\mu. \quad (8.92)$$

9-Equações Linearizadas e Soluções

9.1-Equações linearizadas

Examinaremos agora as equações gravitacionais de campo (8.64), (8.89), (8.105) e (8.113), na situação de campo fraco, onde admitimos que

$$a^i_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \omega^i_\mu - \delta^i_\mu \tag{9.1}$$

e $\omega^{ij}{}_\mu$, $\bar{\omega}^i_\mu$ e ω_μ são tão pequenos que é suficiente considerar apenas os termos lineares em a^i_μ, $\omega^{ij}{}_\mu$, $\bar{\omega}^i_\mu$ e ω_μ. Nesta aproximação podemos ignorar a distinção entre os índices gregos e latinos, e projetarmos os objetos geométricos no espaço-base. Para este caso temos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{9.2}$$

com $h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$. A equação de campo (8.64) fica então

$$-2\partial^\lambda F_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\nu} \tag{9.3}$$

e as equações (8.89), (8.105) e (8.113) ficam na forma

$$2\partial^\rho J_{[\lambda\mu][\nu\rho]} + H_{\lambda\mu\nu} = S_{\lambda\mu\nu} \tag{9.4}$$

$$-2\partial^\rho \bar{f}_{\mu\nu\rho} + 4J^{[\mu\rho]}{}_{[\rho\nu]} + 8F_{\nu\mu} = K_{\mu\nu} \tag{9.5}$$

$$-2\partial^\nu F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}{}^\nu = D_\mu. \tag{9.6}$$

Visando isolar a contribuição do tensor métrico em nossas equações, convém separar as nossas equações de campo em partes baseadas em

$$-A_{ij\mu} = \triangle_{ij\mu} + K_{ij\mu} + D_{ij\mu}, \tag{9.7}$$

onde $\triangle_{ij\mu}$ são os coeficientes de rotação de Ricci

$$\triangle_{ij\mu} = \frac{1}{2}\omega^k_\mu(C_{ijk} - C_{jik} - C_{kij}) \tag{9.8}$$

$$C_{ijk} = \omega_j^\nu \omega_k^\lambda (\partial_\nu \omega_{i\lambda} - \partial_\lambda \omega_{i\nu}) \tag{9.9}$$

$K_{ij\mu}$ é a contorção e $D_{ij\mu}$ é um termo adicional relativo às dilatações

$$D_{ij\mu} = \omega_{j\mu}\omega_{\nu i}\omega^\nu - \omega_{i\mu}\omega_{\nu j}\omega^\nu. \tag{9.10}$$

Temos então a relação

$$-f_{ij\mu\nu} = R_{ij\mu\nu}(\{\}) + f_{ij\mu\nu}(K) + f_{ij\mu\nu}(D) \tag{9.11}$$

com

$$R_{ij\mu\nu}(\{\}) = \partial_\mu \triangle_{ij\nu} - \partial_\nu \triangle_{ij\mu} - \triangle_i{}^k{}_\mu \triangle_{jk\nu} + \triangle_i{}^k{}_\nu \triangle_{jk\mu} = \omega_{i\lambda}\omega_j^\rho R^\lambda_{\rho\mu\nu}(\{\}) \tag{9.12}$$

$$f_{ij\mu\nu}(K) = \nabla_\mu K_{ij\nu} - \nabla_\nu K_{ij\mu} - K_i{}^k{}_\mu K_{jk\nu} + K_i{}^k{}_\nu K_{jk\mu} \tag{9.13}$$

$$f_{ij\mu\nu}(D) = \bar{\nabla}_\mu D_{ij\nu} - \bar{\nabla}_\nu D_{ij\mu} - D_i{}^k{}_\mu D_{jk\nu} + D_i{}^k{}_\nu D_{jk\mu} \tag{9.14}$$

sendo que $\triangle_\mu K_{ij\nu}$ representa a derivada covariante em relação aos coeficientes de Ricci, quando o índice é latino, e em relação à conexão de Levi-Civita $\{{}^{\,i}_{jk}\}$ quando o índice é grego e ainda $\bar{\nabla}_\mu D_{ij\nu}$ representa a derivada covariante em relação à

$$\triangle_{ij\mu} + K_{ij\mu} \tag{9.15}$$

quando o índice é latino, e em relação à conexão de Levi-Civita quando o índice é grego. Vemos ainda que cada parte irredutível de P_{kl} é dividida em três partes, de forma que J_{ijkl} pode ser expresso na forma

$$J_{ijkl} = J_{ijkl}(\{\}) + J_{ijkl}(K) + J_{ijkl}(D) \tag{9.16}$$

ou, em particular,

$$J_{ijkl}(\{\}) = 2a_2\eta_{ik}R_{jl}(\{\}) + 2(a_3 - \frac{a_2}{3})\eta_{lk}\eta_{jl}R(\{\}). \tag{9.17}$$

Temos ainda

$$\partial^\rho J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(\{\}) = \partial^\rho[a_2(\eta_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} - \eta_{\lambda\rho}R_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} + \eta_{\mu\rho}R_{\lambda\nu}) + (a_3 - \frac{a_2}{3})(\eta_{\lambda\nu}\eta_{\mu\rho}$$

$$-\eta_{\lambda\rho}\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\lambda\nu})R(\{\})] \tag{9.18}$$

e considerando a equação de Einstein

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}R \qquad ; \qquad G = -\frac{R}{2} \tag{9.19}$$

e ainda a identidade de Bianchi

$$\triangle^{\rho} G_{\mu\rho} = 0 \tag{9.20}$$

que, em primeira aproximação fica

$$\partial^{\rho} G_{\mu\rho} = 0 \tag{9.21}$$

obtemos finalmente

$$2\partial^{\rho} J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(\{\}) = -a_2(\partial_\lambda G_{\mu\nu} - \partial_\mu G_{\lambda\nu}) - 8(a_3 + \frac{a_2}{6})\eta_{\nu[\lambda}\partial_{\mu]}G. \tag{9.22}$$

A componente em K na equação (9.11) em primeira aproximação fica

$$f_{ij\mu\nu}(K) = \partial_\mu K_{ij\nu} - \partial_\nu K_{ij\mu} \tag{9.23}$$

e disso resulta

$$f_{\mu\nu}(K) = \partial_\rho K^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu v_\mu. \tag{9.24}$$

Da fórmula (9.24) obtemos

$$E_{\mu\nu}(K) = -\frac{2}{3}\partial_\sigma t^{\sigma}{}_{[\mu\nu]} - \frac{1}{2}\partial_\sigma a^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{[\nu} v_{\mu]} \tag{9.25}$$

$$I_{\mu\nu}(K) = \frac{2}{3}\partial_\sigma t^{\sigma}{}_{(\mu\nu)} - \frac{2}{3}\partial_\sigma t_{\mu\nu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}\partial_{(\nu} v_{\mu)} + \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma v^{\sigma}, \tag{9.26}$$

onde utilizamos a equação (8.78), sendo que os colchetes indicam antisimetrização e os parênteses simetrização . Temos também

$$P(K) = -2\partial_\rho v^{\rho}. \tag{9.27}$$

Com um pouco de manipulação algébrica obtemos para o termo em a_1

$$\begin{aligned} -2\partial^{\rho} J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(K) = {}& \eta_{\nu[\mu}\partial_\rho\partial_\sigma t^{\rho\sigma}{}_{\lambda]} + \frac{2}{3}\partial_\mu\partial_\sigma t^{\sigma}{}_{[\lambda\nu]} - \frac{2}{3}\partial_\lambda\partial_\sigma t^{\sigma}{}_{[\mu\nu]} + \frac{1}{2}\eta_{\nu[\mu}\partial_{\lambda]}\partial_\sigma v^{\sigma} \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_{[\mu} v_{\lambda]} + \eta_{\nu[\lambda}\Box v_{\mu]}) + \partial_\sigma\partial_{[\mu} a_{\lambda]\nu}{}^{\sigma}, \end{aligned} \tag{9.28}$$

onde usamos ainda as propriedades

$$t_{\sigma\mu\nu} + t_{\nu\sigma\mu} + t_{\mu\nu\sigma} = 0 \tag{9.29}$$

e

$$t_{\sigma(\mu\nu)} = -\frac{1}{2}t_{\mu\nu\sigma}. \tag{9.30}$$

Para o termo em a_2

$$-2\partial^\rho J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(K) = \eta_{\nu[\mu}\partial_\rho\partial_\sigma t^{\rho\sigma}{}_{\lambda]} + \partial_\mu\partial_\sigma t_{\lambda\nu}{}^\sigma - \partial_\lambda\partial_\sigma t_{\mu\nu}{}^\sigma + \frac{1}{6}\eta_{\nu[\mu}\partial_{\lambda]}\partial_\sigma v^\sigma$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_{[\mu}v_{\lambda]} + \eta_{\nu[}\Box v_{\mu]}). \tag{9.31}$$

A componente em D da equação (9.11) fica, em primeira aproximação ,

$$f_{ij\mu\nu}(D) = \partial_\mu D_{ij\nu} - \partial_\nu D_{ij\mu} \tag{9.32}$$

e disso resulta

$$f_{\mu\nu}(D) = \partial_\rho D^\rho{}_{\mu\nu} + 2\partial_\nu\omega_\mu. \tag{9.33}$$

As componentes irredutíveis de (9.33) ficam agora

$$E_{\mu\nu}(D) = \partial_{[\nu}\omega_{\mu]} \tag{9.34}$$

$$I_{\mu\nu}(D) = \partial_{(\nu}\omega_{\mu)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\omega_\rho \tag{9.35}$$

$$P(D) = 4\partial_\rho\omega^\rho. \tag{9.36}$$

Para o termo em a_1 obtemos

$$2\partial^\rho J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(D) = (\eta_{\nu[\lambda}\Box\omega_{\mu]} + \eta_{\nu[\mu}\partial_{\lambda]}\partial^\rho\omega_\rho + \partial_\nu\partial_{[\mu}\omega_{\lambda]}) \tag{9.37}$$

e para o termo em a_2 ficamos com

$$2\partial^\rho J_{[\lambda\mu][\nu\rho]}(D) = (\eta_{\nu[\lambda}\Box\omega_{\mu]} + \frac{1}{3}\eta_{\nu[\mu}\partial_{\lambda]}\partial^\rho\omega_\rho + \partial_\nu\partial_{[\mu}\omega_{\lambda]}). \tag{9.38}$$

As equações de campo são agora

$$-2\partial^\lambda F_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\nu} \tag{9.39}$$

$$Z_{\lambda\mu\nu} = -S_{\lambda\mu\nu} \tag{9.40}$$

$$W_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} \tag{9.41}$$

$$X_\mu = D_\mu, \tag{9.42}$$

onde

$$Z_{\lambda\mu\nu} = a_2(\partial_\lambda G_{\mu\nu} - \partial_\mu G_{\lambda\nu}) + 8(a_3 + \frac{a_2}{6})\eta_{\nu[\lambda}\partial_{\mu]}G + (a_1 + a_2)\eta_{\nu[\mu}\partial_\rho\partial_\sigma t^{\rho\sigma}{}_{\lambda]}$$

$$+\frac{1}{3}[\partial_\mu\partial_\sigma\{2a_1 t^\sigma{}_{[\lambda\nu]} + 3a_2 t_{\lambda\nu}{}^\sigma\} - \partial_\lambda\partial_\sigma\{2a_1 t^\sigma{}_{[\mu\nu]} + 3a_2 t_{\mu\nu}{}^\sigma\}] + \frac{1}{6}(3a_1 + a_2 - 48a_3)\eta_{\nu[\mu}\partial_{\lambda]}\partial_\sigma v^\sigma$$

$$+\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\{\partial_\nu\partial_{[\mu}v_{\lambda]} + \eta_{\nu[\lambda}\Box v_{\mu]}\} + a_1\partial_\sigma\partial_{[\mu}a_{\lambda]\nu}{}^\sigma + (a_1 + a_2)(\eta_{\nu[\mu}\Box\omega_{\lambda]} + \partial_\nu\partial_{[\lambda}\omega_{\mu]})$$

$$+\frac{1}{3}(3a_1 + a_2 - 48a_3)\eta_{\nu[\lambda}\partial_{\mu]}\partial^\rho\omega_\rho + H_{\lambda\mu\nu} \tag{9.43}$$

$$W_{\mu\nu} = -2\partial^\rho\bar{f}_{\mu\nu\rho} + 8F_{\nu\mu} + J^{[\mu\rho]}{}_{[\rho\nu]} \tag{9.44}$$

$$X_\mu = -2\partial^\nu F_{\mu\nu} + \bar{F}^\nu{}_{\mu\nu}. \tag{9.45}$$

9.2-Equações relacionais entre fontes gravitacionais

Fontes gravitacionais estão sujeitas a certas leis de conservação e a um relacionamento entre si. Tais relações determinam o grau máximo de liberdade que temos na escolha de nossas fontes, e nos permitem tirar importantes conclusões no presente modelo.

Se diferenciarmos a equação (9.39) em relação a ν e se usarmos o fato que $F_{\mu\nu\lambda}$ é antisimétrico em $(\nu\lambda)$ obteremos

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0, \tag{9.46}$$

que é a conhecida lei de conservação do tensor energia-momentum na forma plana ou linearizada para campo gravitacional fraco. Similarmente, diferenciando (9.40) em relação a ν e lembrando ainda que $H_{\lambda\mu\nu} = F_{\nu\mu\lambda}$ chegamos a

$$\partial^\nu F_{\nu\mu\lambda} = T_{[\mu\lambda]} = \partial^\nu S_{\lambda\mu\nu}, \tag{9.47}$$

o que relaciona o tensor de spin com o tensor energia-momentum(Fórmula de Tetrode).

A teoria conforme nos traz ainda equações para o campo conforme

$$\partial^\nu K_{\mu\nu} = 2S_{\mu\rho}{}^\rho + 4D_\mu \tag{9.48}$$

e para o campo de dilatação

$$\partial^\mu D_\mu = T. \tag{9.49}$$

Estas equações nos permitem ver que em primeira aproximação:

a) para fontes gravitacionais com tensor energia-momentum não simétrico o spin é necessariamente diferente de zero;

b) para fontes gravitacionais com o traço do tensor energia-momentum não nulo a fonte de dilatação é necessariamente diferente de zero;

c) se o campo tem spin ou o campo de dilatação é diferente de zero a fonte conforme também permanece diferente de zero;

d) disso concluímos que a única forma de anular a fonte conforme é obter um tensor energia-momentum simétrico sem traço;

e) além disso, se o traço do tensor energia-momentum for diferente de zero ambas as fontes conforme e de dilatações não se anulam;

f) a lei de conservação do tensor energia-momentum e a fórmula de Tetrode não são alteradas pelas simetrias adicionais;

g) a eliminação da simetria de dilatação não assegura a possibilidade de eliminarmos o campo conforme, e da mesma forma, a eliminação do setor conforme não assegura a possibilidade de eliminarmos a fonte de dilatação .

9.3-Equação para $h_{\mu\nu}$

Para que posteriormente possamos determinar o efeito deste modelo no espaço- tempo precisamos obter uma equação isolada para as perturbações $h_{\mu\nu}$ na métrica. Convém, inicialmente, simplificar algumas equações, definindo uma nova quantidade $\bar{h}_{\mu\nu}$ mediante

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{9.50}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{9.51}$$

de tal forma que o tensor de Einstein fica

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu}. \tag{9.52}$$

É conveniente ainda decompormos a equação (9.39) em partes simétrica e antisimétrica

$$-3\alpha\partial^{\lambda}t_{\mu\nu\lambda} - 2\beta(\eta_{\mu\nu}\partial^{\lambda}v_{\lambda} - \partial_{(\mu}v_{\nu)}) = T_{(\mu\nu)} \tag{9.53}$$

e

$$2\alpha\partial^{\lambda}t_{\lambda[\mu\nu]} + 2\beta\partial_{[\mu}v_{\nu]}) - 4\gamma\partial^{\lambda}a_{\mu\nu\lambda} = T_{[\mu\nu]}. \tag{9.54}$$

Tomando agora o traço de (9.53)

$$-4\beta\partial^{\lambda}v_{\lambda} = T \tag{9.55}$$

poderemos ainda obter uma equação isolada para os $h_{\mu\nu}$ ao simetrizarmos a equação (9.40) em $(\mu\nu)$ e tomarmos a divergência em λ

$$\partial^{\lambda}Z_{\lambda(\mu\nu)} = -\partial^{\lambda}S_{\lambda(\mu\nu)}. \tag{9.56}$$

Usando agora as fórmulas

$$\partial^{\lambda}\left(\eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}t^{\rho\sigma}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\partial_{\rho}\sigma t^{\rho\sigma}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}t^{\rho\sigma}{}_{\nu}\right) = 0 \tag{9.57}$$

$$\partial^{\lambda}\left(\partial_{\sigma}\partial_{(\mu}t_{\nu)\lambda}{}^{\sigma} - \Box\partial_{\sigma}t_{\mu\nu}{}^{\sigma}\right) = \frac{1}{3\alpha}\left(\Box T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})T + 2\partial^{\lambda}\partial^{\rho}\partial_{(\mu}S_{\nu)\lambda\rho}\right) \tag{9.58}$$

$$\partial^{\lambda}\left(\frac{1}{12}(3a_1 + a_2 + 48a_3)(\eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}v^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\sigma}v^{\sigma}) + \frac{1}{4}(a_1 + a_2)(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\partial_{\sigma}v^{\sigma}\right) =$$
$$\frac{a_2 + 24a_3}{24\beta}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})T \tag{9.59}$$

$$\partial^{\lambda}\left(\frac{1}{12}(3a_1 + a_2 + 48a_3)(\eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\omega^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\sigma}\omega^{\sigma}) + \frac{1}{4}(a_1 + a_2)(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\partial_{\sigma}\omega^{\sigma}\right) =$$
$$\frac{a_2 + 24a_3}{6\beta}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\partial^{\sigma}\omega_{\sigma} \tag{9.60}$$

poderemos simplificar ainda mais as formas de nossas equações, se escolhermos um gauge para ω_{σ} análogo ao gauge de Lorentz

$$\partial^{\sigma}\omega_{\sigma} = 0. \tag{9.61}$$

Neste caso a equação (9.56) fica

$$-a_2\Box^2\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{2(a_2 + 6a_3)}{3}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu})\Box\bar{h} = T^{(ef)}_{\mu\nu}, \tag{9.62}$$

onde $T^{(ef)}_{\mu\nu}$ representa um tensor energia-momentum efetivo

$$T^{(ef)}_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} - 2\partial^{\lambda} S_{\lambda(\mu\nu)} - \frac{a_2 + 24a_3}{12\beta}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu)T -$$

$$-\frac{2a_2}{3\alpha}\left(\Box T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)T + 2\partial^\lambda \partial^\rho \partial_{(\mu} S_{\nu)\lambda\rho}\right). \tag{9.63}$$

É importante mencionar que os parâmetros a_1 e γ, bem como os setores conforme e de dilatação , não aparecem na equação acima. Isto nos mostra que, *em primeira aproximação* , o setor de dilatação e o setor conforme não interferem na estrutura do espaço-tempo.

9.4-Soluções geométricas

Consideremos agora o campo produzido por uma fonte puntual e sem spin, localizada na origem do sistema de coordenadas e com $T_{\mu\nu}$ dado por

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} Mc^2\delta^2(\mathbf{r}) & ,\mu = \nu = 0 \\ 0 & ,\text{outros casos,} \end{cases} \tag{9.64}$$

onde $\mathbf{r} = (x^1, x^2)$. Para este caso, $T^{(ef)}_{\mu\nu}$ tem a forma

$$T^{(ef)}_{00} = Mc^2\{\delta^2(\mathbf{r}) + (P+Q)\Delta\delta^2(\mathbf{r})\} \tag{9.65}$$

$$T^{(ef)}_{0\alpha} = T^{(ef)}_{\alpha 0} = 0 \tag{9.66}$$

$$T^{(ef)}_{\alpha\beta} = Mc^2(P - Q)(\partial_\alpha\partial_\beta - \delta_{\alpha\beta}\Delta)\delta^2(\mathbf{r}) \qquad (\alpha = 1, 2), \tag{9.67}$$

onde $\Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2$ e

$$P = -\frac{a_2 + 24a_3}{12\beta} \quad , \quad Q = -\frac{a_2}{3\alpha}. \tag{9.68}$$

A equação para $\bar{h}$ fica então

$$(B + 2C)\Box^2 \bar{h} = -Mc^2\delta^2(\mathbf{r}) - 2Mc^2 P \Delta\delta^2(\mathbf{r}), \tag{9.69}$$

onde $B = -a_2$ e $C = 2(a_2 + 6a_3)/3$. Esta equação pode ser resolvida pelo método de integração de Fourier, o que nos leva a

$$\bar{h}(\mathbf{k}) = -\frac{(2\pi)Mc^2}{(B+2C)k^4} - \frac{(4\pi)Mc^2 P}{(B+2C)k^2} \tag{9.70}$$

$$\bar{h}(\mathbf{r}) = -\frac{Mc^2}{(B+2C)}\left(\frac{r^2 \ln r}{4\pi}\right) - \frac{2Mc^2P}{(B+2C)}\left(\frac{\ln r}{2\pi}\right) + C_1 r^2 + C_2, \tag{9.71}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. A equação para $\bar{h}_{00}$ fica

$$B\Box^2\bar{h}_{00} = -\frac{Mc^2C}{(B+2C)}\delta^2(\mathbf{r}) - \frac{2Mc^2CP}{(B+2C)}\Delta\delta^2(\mathbf{r}) + Mc^2\delta^2(\mathbf{r}) + Mc^2P\Delta\delta^2(\mathbf{r}) + Mc^2Q\Delta\delta^2(\mathbf{r}) \tag{9.72}$$

e nos leva à solução

$$\bar{h}_{00}(\mathbf{k}) = \left[-\frac{Mc^2C}{(B+2C)B} + \frac{Mc^2}{B}\right]\frac{2\pi}{k^4} + \left[-\frac{2Mc^2PC}{(B+2C)B} + \frac{Mc^2P}{B} + \frac{Mc^2Q}{B}\right]\frac{2\pi}{k^2}. \tag{9.73}$$

Como $h_{00} = \bar{h}_{00} + \bar{h}$ obtemos

$$h_{00}(\mathbf{r}) = \frac{Mc^2(3\alpha+4\beta)}{24\pi\alpha\beta}\ln r - \frac{Mc^2(a_2+6a_3)}{4\pi a_2(a_2+24a_3)}r^2\ln r + C_3r^2 + C_4 \tag{9.74}$$

para $\alpha\beta a_2(a_2+24a_3) \neq 0$.

Se assumirmos que $a_2 \to \infty, a_3 \to \infty$, ou de outra forma,

$$a_i = \frac{\bar{a}_i}{f} \qquad (i = 2,3) \tag{9.75}$$

com f sendo uma constante real tal que $f \to 0$, obteremos uma forma particular para a (9.74)

$$h_{00}(\mathbf{r}) = \frac{Mc^2(3\alpha+4\beta)}{24\pi\alpha\beta}\ln r + C_5r^2 + C_6. \tag{9.76}$$

9.5-Relações com outras teorias

a) Relação com a teoria Newtoniana

Se considerarmos o movimento clássico de uma partícula sem spin e uma fonte gravitacional também sem spin, veremos em primeira aproximação que o movimento é dado pela equação de trajetória

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \tag{9.77}$$

com $U = -c^2h_{00}/2$. Assim, com uma escolha adequada de parâmetros em nossa teoria poderemos obter a solução de Newton. A solução (9.74) com a escolha de parâmetros

$$3\alpha + 4\beta = -\frac{96\alpha\beta\pi G}{c^4}$$

$$a_2 + 6a_3 = 0 \tag{9.78}$$

$$C_3 = 0$$

satizfaz à equação de Newton para a fonte proposta em (9.64)

$$\Delta U = 4\pi G M \delta^2(\mathbf{r}). \tag{9.79}$$

Similarmente, podemos obter o limite Newtoniano com $a_2 \to \infty, a_3 \to \infty$, $C_3 = 0$ se usarmos a condição (9.78).

Neste limite a equação para $\bar{h}$ pode ainda ser colocada na forma

$$\triangle[(B + 2C)\triangle\bar{h} + 2Mc^2 P\delta^2(\mathbf{r})] = 0 \tag{9.80}$$

ou

$$(B + 2C)\triangle\bar{h} + 2Mc^2 P\delta^2(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \tag{9.81}$$

com $\triangle\psi(\mathbf{r}) = 0$. A equação para $\bar{h}_{00}$ fica então

$$\triangle[B\triangle\bar{h}_{00} + \frac{2Mc^2 CP}{B + 2C}\delta^2(\mathbf{r}) - Mc^2(P + Q)\delta^2(\mathbf{r})] = 0 \tag{9.82}$$

ou

$$B\triangle\bar{h}_{00} + \frac{2Mc^2 CP}{B + 2C}\delta^2(\mathbf{r}) - Mc^2(P + Q)\delta^2(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \tag{9.83}$$

com $\triangle\phi(\mathbf{r}) = 0$. Escolhendo a solução particular $\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) = 0$, obtemos a equação gravitacional de Newton

$$\Delta U = 4\pi G M \delta^2(\mathbf{r}), \tag{9.84}$$

onde

$$3\alpha + 4\beta = \frac{-96\alpha\beta\pi G}{c^4}. \tag{9.85}$$

b) Relação com a teoria de Poincaré

Das conclusões obtidas na seção 3.2 e da equação de campo para $F_{\mu\nu}$ vemos que não podemos obter a teoria de Poincaré apenas com uma escolha apropriada de fontes, campos e de constantes de integração , pois em geral T é diferente de zero no limite de Poincaré, o que nos leva a $D_\mu, F_{\mu\nu}$ e ω_μ diferentes de zero. Como a derivada covariante é expressa em termos de $A^{ij}{}_{\mu}$(e em consequência também em termos de ω_μ) a teoria completa de Poincaré não aparece como limite natural da teoria conforme.

Entretanto, fora da matéria, podemos ter todas as fontes nulas de forma que da equação (3.38) obtemos como solução particular $\bar{f}_{ilm} = 0$ e consequentemente $G_{ijk} = 0$. Substituindo tais resultados em (3.42) conseguimos ainda como solução particular $F^{lm} = 0$. A teoria de Poincaré no vácuo pode ser obtida a partir da escolha de gauge

$$\omega_\mu = \bar{\omega}^i_\mu = 0 \tag{9.86}$$

levando às equações de campo

$$-2D^k \bar{F}_{ijk} + 2v^k \bar{F}_{ijk} + 2H_{ij} + 4\bar{F}_{ilj}\omega^l + 4J_{[ik][jl]}P^{kl} + 4J^{[lk]}{}_{[lj]}P_{ki} - 2J^{[il]}{}_{[jl]}P - \eta_{ij}\mathcal{L}_c = T_{ij} \tag{9.87}$$

$$2D^l J_{[ij][kl]} + (\frac{4}{3}t_k{}^{[lm]} - \delta_k{}^{[l}v^{m]} + a_k{}^{lm})J_{[ij][lm]} + H_{ijk} + 2(\eta_k{}^{[l}\omega^{m]})J_{[ij][kl]} = S_{ijk} \tag{9.88}$$

anteriormente obtidas no capítulo 4.

c) Comentários sobre limite Einsteniano

A teoria de Eintein para a gravitação não é obtida aqui como sub-teoria. Isto se deve ao fato que este limite só poderia ser obtido com a inclusão de termos lineares nos campos na densidade de lagrangeana. Entretanto, tais termos, bem como a própria teoria geral da relatividade, não são invariantes por transformações conformes[1]. O limite Einsteniano, portanto, não pode ser obtido de uma teoria conforme para a gravitação .

[1] STÉDILE, E.; DUARTE, R., Yang Mills Gauge Theory and Gravitation, **International Journal of Theoretical Physics**. v.34, n.6, p.965-970. 1995.

10-Conclusões

Podemos concluir do presente trabalho que a relatividade geral não é uma boa teoria em (2+1) dimensões, uma vez que não obtém o limite clássico e apresenta diversos problemas estruturais. As teorias de gauge têm obtido bons resultados em diversas áreas, de forma que elas se apresentam como as melhores candidatas para a elaboração de uma teoria de gravitação em (2+1) dimensões. Vimos ainda que uma teoria de gravitação que pretenda dar um tratamento adequado para partículas de spin diferente de zero deverá envolver torção não nula, de forma que no presente trabalho desenvolveu-se uma teoria de gauge com o grupo conforme em um espaço fibrado tendo como espaço base o espaço de Minkowski e o grupo sendo o grupo conforme em (2+1) dimensões SO(3,2). A álgebra deste grupo é a soma direta dos setores de rotações , translações , dilatações e transformações conforme especiais. Como o mundo real não é invariante por transformações conformes, foi utilizada uma realização não linear para obtermos uma quebra de simetria e um modelo aplicável ao espaço-tempo físico, com triadas como potenciais no setor de translações . Assumimos uma densidade de Lagrangeana quadrática nos campos a fim de mantermos a invariância destes campos sob transformações conformes e também para verificar uma similaridade deste modelo com as teorias de gauge tipo Yang-Mills.

No modelo apresentado diversas grandezas físicas no espaço tempo são generalizadas, como por exemplo a conexão afim que fica $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + D^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, onde $D_{\lambda\mu\nu} = g_{\mu\nu}\omega_{\mu} - g_{\lambda\nu}\omega_{\mu}$ é definida no setor das dilatações . Obtivemos as equações de campo do modelo, eqs.(8.64), (8.89), (8.106) e (8.114) e linearizamos as mesmas no caso de campo fraco, obtendo as equações linearizadas (9.39) a (9.45). Destas equações pudemos ainda concluir que se o traço do tensor energia-momentum não é nulo, as fontes conforme e de dilatações serão também diferentes de zero. Além disto, se o campo tem spin ou se a fonte de dilatação é diferente de zero, a fonte conforme também será diferente de zero. Disto concluímos que a única forma de anularmos a fonte conforme é considerar um tensor energia-momentum simétrico e sem traço. Ainda da análise das equações linearizadas concluímos que a lei de conservação do tensor energia-momentum e a fórmula de Tetrode não são alteradas pelas simetrias adicionais introduzidas com o grupo conforme e em primeira aproximação os setores de dilatação e conforme não afetam a estrutura do espaço-tempo.

A teoria de Newton é obtida como sub-teoria, conforme pode ser visto em (8.5a) bem como a teoria de Poincaré no vácuo. Entretanto, dentro da matéria os setores de dilatação e conforme não se anulam, levando a diferença de resultados entre os modelos conforme e de Poincaré. Uma vez que a relatividade geral não é invariante conforme, ela não é aqui obtida como uma sub-teoria do grupo conforme.

Trabalhos Futuros

O presente trabalho pode ainda ser complementado com uma quantização do modelo e a verificação se este é renormalizável, com a análise do movimento de partículas no campo, com a generalização do presente modelo para 4 dimensões e a verificação se este modelo leva aos resultados já observados e ainda uma ánalise do efeitos das simetrias adicionais na interação com outros campos, como o campo escalar, espinorial, eletromagnético, etc.

Apêndice A-Tópicos sobre Análise Matemática e Variedades

O espaço físico tem um número tão grande de propriedades e uma estrutura tão complexa que poucos físicos são capazes de enumerá-las. Entretanto, o entendimento destas estruturas é importante para um bom entendimento da física e sua estrutura formal. Para isto estudam-se a topologia, a álgebra, a geometria diferencial, etc... que podem nos dar respostas sobre a estrutura do espaço-tempo físico. No decorrer deste apêndice poderá ser visto como se evolui de um conjunto qualquer, sem estrutura alguma, para o espaço-tempo físico, dotado de uma completa estrutura matemática. Além disso, poderemos ver um pouco da estrutura matemática que dá o embasamento para a física usual. Este apêndice foi baseado nas referencias 5,7,29.

A.1-Preliminares sobre a teoria dos conjuntos

A matemática se utiliza de diversas expressões da teoria dos conjuntos para axiomatizar uma teoria. No entanto, não precisamos ter pleno conhecimento de uma teoria axiomática de conjuntos para entender a axiomatização de outras teorias, uma vez que a aplicação da teoria intuitiva de conjuntos é suficiente para o desenvolvimento de uma axiomatização . Assim mesmo alguns termos merecem uma definição mais precisa:

Relação : Uma Relação R entre conjuntos X e Y é um subconjunto R de $X \times Y$,onde x e y são ditos relatados se $(x, y) \in R$.

função : Uma função f de X em Y é uma relação tal que $\forall x \in X, \exists \mid y((x,y) \in f)$.Denota-se $f : X \to Y$ ou $y = f(x)$.

Injetiva : Se $\forall y \in f(X) \exists \mid x \in X(f(x) = y)$, então f tem um função inversão f^{-1} e é dita ser injetiva.

Surjetiva : A função f é dita surjetiva se $f(X) = Y$.

Bijeção : Uma função f é uma bijeção se ela é surjetiva e injetiva.

Isomorfismo : Dois espaços são isomorfos se existe um função bijetiva entre eles, sendo que esta função se chama isomorfismo.

O isomorfismo é a forma mais elementar de comparar dois conjuntos e de dizer que ambos tem a mesma forma.

Relação de Equivalência : Uma relação $R \in X \times X$ é uma relação de equivalência em X se for:

a) reflexiva : $(x,x) \in R, \forall x \in X$;

b) simétrica : $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R, \forall x,y \in X$;

c) transitiva : $(x,y) \in Re(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \forall x,y,z \in X$.

Operação interna Uma operação interna em um conjunto X é uma função de $X \times X$ em X;

Operação externa Sejam A e X conjuntos. Uma função de $A \times X$ em X é chamada uma operação externa se os elementos de A são chamados operadores em X.

A.2-Estruturas Algébricas

Quanto mais simples for uma estrutura matemática, mais geral poderá ser e mais casos poderá abranger. Assim, definem-se algebricamente estruturas de grupo, anel, campo, módulo, álgebra e espaço vetorial. Conceitualmente temos:

a) GRUPO : qualquer estrutura matemática que possua uma operação de produto com inversa e elemento identidade bem definidos;

b) ANEL : qualquer estrutura matemática que possua operações de soma e produto associativo em relação à soma, sendo que esta ainda possua o elemento identidade e a inversa;

c) CAMPO : Qualquer estrutura matemática com operações de soma e produto, com todas as regras válidas para números reais, menos a comutatividade da multiplicação ;

d) MÓDULO : Qualquer grupo com produto comutativo com operação de multiplicação por "escalar"(não necessariamente com inversa e identidade);

e) ÁLGEBRA : É uma estrutura com operações de soma, multiplicação e multiplicação por escalar;

f) ESPAÇO VETORIAL : Qualquer grupo Abeliano com multiplicação por escalar, onde o escalar tem inversa e identidade;

Formalmente temos:

Grupo Um grupo é um conjunto X junto com um operação interna $X \times X \to X$ por $(x,y) \mapsto x.y$ tal que:

a) A operação é associativa: $(x.y).z = x.(y.z), \forall x, y, z \in X$;

b) Existe um elemento $e \in X$ chamado identidade de grupo tal que: $x.e = e.x = x, \forall x \in X$;

c) Para cada $x \in X$, existe um elemento de X chamado a inversa de x, escrito x^{-1}, tal que $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$. A operação de grupo frequentemente é chamada de multiplicação .

Grupo Abeliano Um grupo é Abeliano se $x.y = y.x \forall x, y \in X$. A operação neste caso é chamada adição .

Anel Um anel é um conjunto X junto com duas operações internas $(x,y) \mapsto x.y$ e $(x,y) \mapsto x+y$, chamadas respectivamente multiplicação e adição , tal que:

a) X é um grupo Abeliano sobre a adição ;

b) A multiplicação é associativa e distributiva em relação a adição , i.e.,

* $(x.y).z = x.(y.z)$
* $x.(y+z) = x.y + x.z$
* $(y+z).x = y.x + z.x \qquad \forall x, y, z \in X.$

Anel com identidade Seja R um anel. Se ele possuir um elemento $e \in R$ tal que $e.x = x.e = x, \forall x \in R$,então o anel é um anel com identidade.

Regular Seja X um anel com identidade. Se um elemento $x \in X$ tem uma inversa, x é dito ser regular.

Campo Um anel X com identidade é dito ser um campo se todos os seus elementos, exceto o 0 (o elemento identidade da adição), forem regulares.

Módulo Um módulo X sobre um anel R é um grupo Abeliano X junto com uma operação externa chamada multiplicação escalar, $R \times X \to X$ por $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ tal que:

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \forall \alpha, \beta \in R$ e $x, y \in X$.

e se o anel tiver uma identidade, então $ex = x, \forall x \in X$.

Álgebra Uma álgebra A é um módulo sobre um anel R com identidade e com uma operação interna associativa, usualmente chamada multiplicação , tal que:

A é um anel;

A operação externa $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ é tal que $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Espaço vetorial Um espaço linear ou vetorial é um módulo para o qual o anel dos operadores é um campo.

Vetores Os elementos de um espaço vetorial são chamados vetores.

É importante que se saiba o significado dos conceitos acima, pois eles aparecem frequentemente na matemática sem necessariamente serem iguais aos conceitos usualmente conhecidos, como por exemplo o conceito de espaço vetorial em $\Re^n$.

A.3-Elementos de Topologia

É no estudo da topologia que se definem as classes mais gerais de ESPAÇOS em matemática. Conceitos como vizinhança, espaços métricos, norma, Espaços de Hausdorff e paracompacticidade são desenvolvidos no estudo da topologia.

Topologia Um sistema $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um conjunto X define uma topologia se $\mathcal{U}$ contém:

a) O conjunto vazio e o próprio conjunto X;

b) A união de todos os seus subsistemas;

c) A intersecção de todos os seus subsistemas finitos;

Espaço Topológico O par $(X,\mathcal{U})$ é chamado um espaço topológico.

Conjuntos Abertos Os conjuntos de $\mathcal{U}$ são chamados conjuntos abertos do espaço topológico $(X,\mathcal{U})$

Conjuntos Fechados $A \subseteq X$ é fechado se $A' = X - A$ é aberto.

As topologias mais simples e mais amplas que temos para um dado conjunto são as topologias trivial e discreta, respectivamente:

Topologia trivial Seja X um conjunto não vazio. O sistema $\{\emptyset, X\}$ forma a topologia trivial.

Topologia discreta Seja X um conjunto não vazio e sejam os conjuntos abertos consistidos de todos os subconjuntos de X, inclusive $\emptyset$ e X. Esta topologia é chamada de topologia discreta.

Para classificarmos o grau de detalhamento de uma topologia precisamos de uma forma de comparação . Assim define-se:

Topologia mais fina Se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são duas topologias de X tal que $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2$ é dito mais fina que $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_1$ mais grosseira que $\mathcal{U}_2$.

Uma definição geral de vizinhança, válida para qualquer espaço topológico, e tendo o conceito usual como caso especial é:

Vizinhança Uma vizinhança de um ponto x(ou de um conjunto A) em X é um conjunto $N(x)$, contendo um conjunto aberto no qual x(ou A) esteja.

Esta definição nos permite definir uma classe especial de espaços topológicos: os espaços de Hausdorff:

Hausdorff Um espaço é de Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos possuírem vizinhanças distintas(disjuntas).

Ao definirmos ponto limite e operações como fechamento, poderemos também definir um tipo ainda mais especial de espaços, os espaços normais:

Ponto Limite Um ponto $x \in X$ é um ponto limite ou ponto de acumulação de $A \subseteq X$ se toda vizinhança $N(x)$ de x contém ao menos um ponto $a \in A$ diferente de x : $(N(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall N(x)$.

Fechamento O fechamento $\bar{A}$ de A em X é a união de A e todos os seus pontos limites.

Normal Um espaço é normal se é Hausdorff e se qualquer par de conjuntos fechados disjuntos F_1 e F_2 têm vizinhanças abertas disjuntas U_1 e U_2.

Conceitos como recobrimento, refinamento, etc., permitem-nos definir mais uma propriedade topológica; a compacticidade:

Recobrimento Um sistema $\{\mathcal{U}_i\}$ de subconjuntos (abertos) de X é um recobrimento se cada elemento em X pertence a no mínimo um $\mathcal{U}_i$.

Sub-recobrimento Um sub-recobrimento de um recobrimento $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$ o qual também é um recobrimento.

Refinamento Um recobrimento $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_i\}$ é um refinamento do recobrimento $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}$, se para todo $\mathcal{V}_i$ existe um $\mathcal{U}_i$ tal que $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$.

Localmente finito Um recobrimento $\mathcal{U}$ é localmente finito se para todo ponto x existe uma vizinhança $N(x)$, a qual tem uma intersecção não vazia com apenas um número finito de membros de $\mathcal{U}$.

Compacto Um subconjunto $A \subseteq X$ é compacto se é Hausdorff e se todo recobrimento de A tem um sub-recobrimento finito.

Paracompacto Um espaço Hausdorff é paracompacto se todo recobrimento tem um refinamento localmente finito.

A continuidade de funções para um espaço topológico qualquer é generalizada para :

Função contínua Uma função f de um espaço topológico X para um espaço topológico Y

é contínua em $x \in X$, se dada qualquer vizinhança $N \subseteq Y$ de f(x) existe uma vizinhança M de $x \in X$ tal que $f(M) \subseteq N$. Assim f é contínua em X se é contínua em todos os pontos x de X.

A generalização de isomorfismo é a de homeomorfismo [†], que preserva a continuidade de funções .

Homeomorfismo Um homeomorfismo é uma bijeção f bicontínua, isto é, f e f^{-1} são contínuas.

Um resultado importante da Topologia é que propriedades como conectividade, compacticidade, etc. são preservadas por homeomorfismos. Assim, se um espaço é compacto todos os espaços homeomorficos a ele serão compactos, ou em outras palavras, deformações feitas em um espaço por um homeomorfismo mantêm as propriedades topológicas.

Outras importantes definições em topologia são também:

Espaço métrico Um espaço métrico é um conjunto X dotado de uma função $d : X \times X \to R$ tal que:

$$d(x,y) \geq 0$$

$$d(x,y) = 0, \text{ se e somente se } x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \qquad d(x,y) \text{ é chamado de distância entre } x \text{ e } y.$$

Norma A função $x \mapsto \| x \|$ de um espaço vetorial X em $\Re$ é uma norma se para todo $x \in X$ e $\lambda \in \Re$:

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|;$$

$$\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|;$$

$$\| x \| = 0 \text{ se e somente se } x = 0.$$

A.4-Variedades Diferenciáveis

Os espaços de interesse para a física não são simplesmente os espaços $\Re^n$, pois encontramos espaços nos mais diversos formatos na natureza. A superfície de uma esfera é um exemplo: é um espaço bi-dimensional que não é $\Re^2$. Superfícies mais complexas como a superfície de uma pedra ou de um planeta são espaços bidimensionais mas não são $\Re^2$. Porém,

[†] Não confundir com homomorfismo, que é um relacionamento entre grupos(Ver homomorfismo na seção de grupos)

estes espaços de interesse para a física têm uma estrutura mais complexa que um espaço topológico qualquer e uma característica em comum: para distâncias suficientemente pequenas, tais espaços podem ser considerados $\Re^n$, ou em outras palavras, todos os pontos têm vizinhanças homeomórficas a $\Re^n$. O estudo de espaços "localmente" Euclidianos contitui o estudo de variedades.

Variedade Topológica Uma variedade topológica é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto tem uma vizinhança homeomórfica a $\Re^n$.

Carta Seja M uma variedade topológica. Uma carta c em M é uma tripla $c = (U, \varphi, n)$ tal que:

a) $U \in M$ é aberto;

b) $\varphi : U \to \varphi(U) \in \Re^n$, é aberto e φ é um homeomorfismo;

c) $n \in Z$ e $n \geq 0$ é a dimensão de c.

Esta definição é muito ampla para o interesse físico, pois propriedades como diferenciação são fundamentais para o estudo da física. Precisamos assim de um tipo de espaço que garanta propriedades como esta:

Cartas C^k-compatíveis Seja $c_1 = (U_1, \varphi_1, n_1)$ e $c_2 = (U_2, \varphi_2, n_2)$ duas cartas em M. Então c_1 e c_2 são ditas C^k-compatíveis se:

a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou

b) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e os mapas $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_2 \cap U_1) \to \varphi_2(U_2 \cap U_1)$ são de classe C^k.

$\to$ Se c_1 e c_2 são C^k-compatíveis então para qualquer $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, a derivada $(\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)$ é um mapa linear bijetivo, i.e., $(\varphi_2 \circ \varphi_1)' \in \mathcal{L}(\Re^{n_1}, \Re^{n_2})$. Daí $n_1 = n_2$.

Atlas Um C^k-Atlas $\mathcal{U}$ em uma variedade topológica M é uma família de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ (I : conjunto de índices) o qual cobre M:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$$

tal que as cartas na família são C^k-compatíveis.

C^k-compatibilidade de Atlas Dois C^k-atlas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ são C^k compatíveis se

a) $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ é um C^k-atlas, ou

b) Se $c \in \mathcal{U}$ e $c' \in \mathcal{U}'$, então c e c' são C^k-compatíveis.

$\to$ C^k-compatibilidade de atlas é uma relação de equivalência.

Estrutura de Variedade Uma estrutura diferenciável de uma variedade de classe C^k em M é uma classe de equivalência de C^k-atlas compatíveis em M.

A definição de estrutura de variedade e o seu uso em lugar de atlas na definição de variedade diferenciável, visam representar a independência em relação a uma escolha de um atlas específico.

Variedade Diferenciável Uma variedade topológica X junto com uma estrutura diferenciável de variedade é uma C^k-variedade diferenciável.

A definição geral de função diferenciável e o teorema que a C^k- diferenciabilidade é independente da carta são fundamentais para a definição de vetores na variedade:

Função diferenciável Uma função $f : M \to \Re^n$ é diferenciável em x em uma variedade diferenciável se, em uma carta em x, $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(x)$.

Teorema: A diferenciabilidade de funções em uma variedade é independente da carta: se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(x)$ para uma carta (U, φ) em x, então em uma outra carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ teremos :

$$f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})$$

como $(f \circ \varphi^{-1})$ é diferenciável por suposição e $(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})$ é diferenciável devido ao fato que as cartas $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ e (U, φ) são C^k- compatíveis, e usando a regra da cadeia teremos que $f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ também será diferenciável.

C^r-diferenciável Uma função $f : M_1 \to M_2$ é C^r diferenciável se :

a) $r \leq k_1$ e $r \leq k_2 (M_1$ é uma C^{k_1}-variedade e M_2 é uma C^{k_2}-variedade);

b) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é C^r diferenciável em $\varphi(x)$.

A generalização de homeomorfismo para variáveis diferenciáveis e que preserva a C^k-diferenciabilidade de funções é o C^k- difeomorfismo:

Difeomorfismo f é um C^k-difeomorfismo, se f é uma bijeção e se f e f^{-1} são continuamente C^k-diferenciáveis.

A definição de vetores em uma variedade diferenciável é baseada em derivadas de funções. Assim, os conceitos de germ, curva parametrizada e derivada direcional são utilizados na definição de vetores tangentes ao espaço:

Germ Duas funções f_1 e f_2 em X e diferenciáveis em x têm o mesmo germ em x, se existe uma vizinhança de x onde elas coincidem. A classe de equivalência de funções diferenciáveis em x que têm o mesmo germ de uma função f é chamada de $germ f$.

Curva parametrizada Uma curva parametrizada C em X é uma função de $I \subset \Re$ em X por $t \in I \mapsto C(t) \in X$. Seja C uma curva diferenciável, i.e., uma função diferenciável de $I \subset \Re$ em X, tal que $C(0) = x_0$ e seja f uma função em X diferenciável em x. A função composição $f \circ C$ é uma função em $\Re$ diferenciável em $t = 0$.

Derivada direcional A derivada direcional à curva C em x_0 é uma função $f \mapsto v_{x_0}^C(t)$ do espaço dos germs de C^r-funções em x_0 em $\Re$:

$$v_{x_0}^C(t) = \frac{d}{dt}(f \circ C)(t) \mid_{t=0},$$

sendo que $v_{x_0}^C(t)$ é algumas vezes designado por $C(t)$.

Vetor tangente Um vetor tangente v_x em x é uma classe de equivalência de curvas tangentes a x. Dado um vetor tangente v_{x_0} é sempre possível encontrar uma curva diferenciável através de x_0 para o qual v_{x_0} é o vetor tangente.

Esta definição , embora bastante diferente da definição usual que temos em $\Re^n$, conserva as propriedades básicas de um vetor:módulo, direção e sentido.

Espaço vetorial tangente É um espaço $T_x(X)$ de vetores tangentes a X em x munido das operações de multiplicação escalar e soma, definidas por :

$$(\alpha U_x + \beta V_x)(f) = \alpha U_x(f) + \beta V_x(f),$$

onde $\alpha, \beta \in \Re^n$ e $U_x, V_x \in T_x(X)$ e f é uma função diferenciável.

Dual Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $L(X, \Re)$ de funções lineares em X é chamado o dual algébrico de X e é denotado por X^* ou $\tilde{X}$.

Espaço vetorial cotangente O dual $T_x^*(X)$ do espaço vetorial tangent $T_x(X)$ é chamado de espaço vetorial cotangente.

Covetores, Formas diferenciais Os elementos de $T_x^*(X)$ são ditos vetores covariantes, covetores ou formas diferenciais.

Produto tensorial O produto cartesiano $\otimes^p T_x^* \otimes^q T_x$ de p espaços cotangentes e q espaços tangentes a x é o espaço vetorial de todas as formas multilineares no produto cartesiano:

$$\underbrace{T_x \times ... \times T_x}_{qvezes} \times \underbrace{T_x^* \times T_x^* \times ... \times T_x^*}_{pvezes}$$

e o espaço $\otimes^p T_x^* \otimes^q T_x$ é de dimensão n^{p+q} onde n é a dimensão do espaço X.

A.5-Grupos de Lie

Diversas simetrias do mundo físico são descritas por variedades diferenciáveis com estrutura algébrica de grupo. Estas variedades são chamadas de grupos de Lie.

Grupo de Lie Um grupo de Lie é um grupo que é também uma variedade diferenciável, tal que a estrutura diferenciável é compatível com a estrutura de grupo, i.e., a operação $G \times G \to G$ por $(x, y) \mapsto x.y^{-1}$ é uma função diferenciável.

A comparação entre grupos é feita pelo seguinte:

Grupo isomórficos Dois grupos de Lie são isomórficos se existe um difeomorfismo entre eles o qual preserva a estrutura de grupo.

Os grupos de Lie de maior interesse para a física são os grupos de transformações . Eles são tais que a transformação realizada pelo grupo mantém a estrutura de grupo:

Grupo de Lie de transformações O conjunto $\{\sigma_g\}$ é um grupo de Lie de transformações se a função :

$$\sigma : G \times X \to X \text{ por } (g, x) \mapsto \sigma(g, x)$$

é diferenciável e se o conjunto de transformações $\{\sigma_g : X \times X; \sigma_g(x) = \sigma(g, x)\}$ munido da função composição , segue as propriedades de grupo:

$$\begin{cases} \sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h \\ \sigma_e \text{ é a transformação identidade} \end{cases}$$

efetivamente G opera efetivamente em X se $\sigma_g(x) = x$ para todo $x \in X$ implica $g = e$.

Isto significa que a ação de um elemento do grupo altera certamente a posição na variedade. Operadores de rotação entre $[0, 2\pi]$ não agem efetivamente em $\Re^2$ porque uma rotação de 2π não altera a posição na variedade.

transitivamente G opera transitivamente em X se para todo $x, y \in X$ existe um $g \in G$ tal que $\sigma_g(x) = y$.

Em outras palavras, partindo de qualquer elemento da variedade podemos atingir qualquer outro elemento por uma ação do grupo.

Translação à esquerda A transformação de G em si próprio definida por

$$L_g : G \to G \text{ por } L_g(h) = gh,$$

chama-se translação à esquerda.

Translação à direita A transformação de G em si próprio definida por

$$R_g : G \to G \text{ por } R_g(h) = hg,$$

chama-se translação à direita.

Translação à esquerda de campos vetoriais Como L_g é um difeomorfismo, a diferencial dL_g é um isomorfismo entre os espaços tangentes $T_h(G)$ e $T_{gh}(G)$. Assim cada vetor em $T_h(G)$ é transportado para $T_{gh}(G)$ pela função dL_g, isto é, se $v \in T_h(G)$, então $dL_g v \in T_{gh}(G)$.

A.6-Espaços fibrados

O conceito de gauge é semelhante ao de um espaço interno. A cada ponto do espaço-tempo associa-se uma propriedade que é o espaço de gauge, cujas transformaçoes de gauge mudam o valor no espaço de gauge. As transformaçoes neste espaço de gauge são elementos de um grupo de Lie de transformações e, em geral, o espaço formado pelo espaço-tempo e o espaço interno não é simplesmente um produto cartesiano. A generalização do produto cartesiano para tais situações é o que chamamos de espaço fibrado.

Feixe Um feixe é uma tripla (E, B, π) consistindo de dois espaços topológicos E e B e uma função surjetiva contínua $\pi : E \to B$.

base Em um feixe (E, B, π) o espaço topológico B é chamado de espaço base.

Fibra Caso o espaço topológico π^{-1} para todo $x \in B$ seja homeomórfico a algum espaço F, então π^{-1} é chamada fibra em x, denotada por F_x, e F é chamada de fibra típica.

Feixe de fibras ou Espaço fibrado Um espaço fibrado (E, B, π, G) é um feixe (E, B, π) munido de uma fibra típica F, um grupo topológico G de homeomorfismo de F em si mesmo, e de um recobrimento de B por uma família de conjuntos abertos $\{U_j, j \in J \subseteq N\}$, tal que:

a) localmente o feixe é um feixe trivial, isto é, é homeomórfico ao feixe produto, mais precisamente, $\pi^{-1}(U_j)$ é homeomórfico ao produto topológico $U_j \times F$ para todo $j \in J$. O homeomorfismo $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ tem a forma $\varphi_j(p) = (\pi(p), \tilde{\varphi}_j(p))$ e o seguinte

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, dash, "\pi"'] \arrow[dr, dash, "\varphi_j"] & \\ U_j \arrow[rr, dash, "\text{proj. can.}"'] & & U_j \times F \end{tikzcd}$$

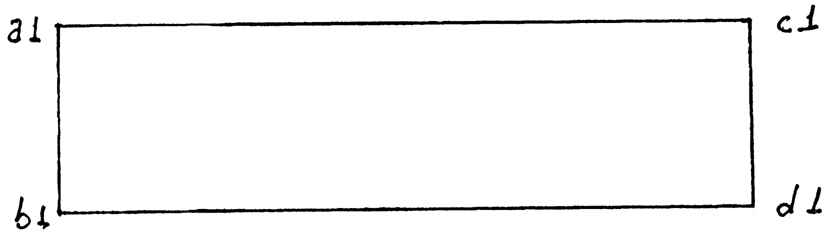
diagrama é comutativo:

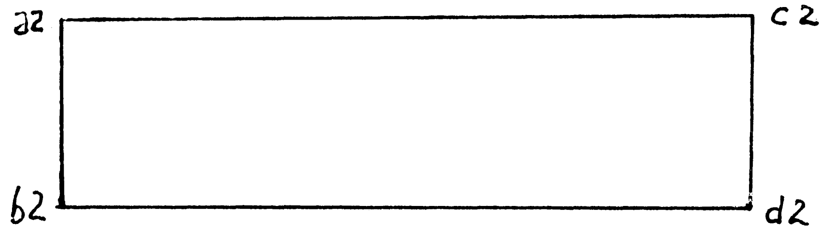
seja $x \in U_j$, percebemos que $\tilde{\varphi} \mid_{F_x}$, ou $\tilde{\varphi}_{j,x}$ é um homeomorfismo de F_x em F.

b) existe uma correlação dos subfeixes triviais definidos nos conjuntos abertos U_j cobrindo a base. Seja $x \in U_j \cap U_k$. O homeomorfismo $\tilde{\varphi}_{k,x} \circ \tilde{\varphi}_{j,x}^{-1} : F \to F$ é um elemento do grupo estrutural G para todo $x \in U_j \cap U_k$ e todo $j, k \in J$.

c) a função induzida $g_{jk} : U_j \cap U_k \to G$ por $x \mapsto g_{jk}(x) = \tilde{\varphi}_{k,x} \circ \tilde{\varphi}_{j,x}^{-1}$ é contínua.

Um exemplo onde o espaço fibrado é uma generalização do produto cartesiano, é a descrição de uma fita de Möbius. Certamente uma fita de Möbius não é o produto cartesiano da base circular pelos espaços $\Re$. Entretanto ela tem uma estrutura de espaço fibrado:





Das fitas 1 e 2 acima podemos fazer uma "colagem" de a1 com a2, b1 com b2, c1 com c2, d1 com d2, obtendo um cilindro que é o produto cartesiano do circulo com os reais. Assim se colarmos a1 com a2, b1 com b2, c1 com d2 e d1 com c2, obtemos a fita de Möbius que não é um fibrado trivial, mas que tem um espaço base(Círculo C) e uma fibra típica $G \in \Re$, tal que em torno de cada ponto da fita temos um espaço localmente trivial, ou seja, cada ponto tem uma vizinhança que é um produto cartesiano do trecho do círculo por G.

Feixe de fibras C^k-diferenciável Um feixe (E, B, π, G) é dito ser C^k-diferenciável se E, B e a fibra típica são C^k- variedades diferenciáveis, π é uma função diferenciável, G é um grupo de Lie e o recobrimento de B está no domínio do atlas admissível. Os mapas g_{jk} do ítem c da definição de um espaço fibrado são C^k-diferenciáveis.

Espaço fibrado principal Um feixe fibrado no qual a fibra típica F e o grupo estrutural G são idênticos, e no qual G age em F por translação à esquerda, é um espaço fibrado principal.

Em geral temos um espaço tangente a cada ponto no espaço tempo. Isto não inclui uma generalização de campo vetorial para um variedade qualquer. Para generalizarmos a idéia de campo vetorial precisamos do conceito de feixe tangente:

Feixe Tangente Seja $T(X)$ um espaço de pares (x, V_x) para todo x na variedade diferenciável X, e todo $V_x \in T_x(X)$. Pode ser dada uma estrutura de feixe fibrado $(T(X), X, \pi)$ como segue:

a) Fibra em x:$T_x(X)$;

b) Fibra Típica : $\Re_n$;

c) Projeção π: $(x, v_x) \mapsto x$;

d) Recobrimento de X:$\{U_j\}$($\{U_j, \psi_j\}$ é um atlas de X).

e) Homeomorfismo φ_j:φ_j é o par $(\pi, \psi'_j \circ \pi_2)$ onde $\pi_2(x, v_x) = v_x$ e $\psi'_j(v_x)$ é o representante de v_x na carta (U_j, ψ_j)

$$(\pi, \psi'_j \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \Re^n \text{ por } (x, v_x) \mapsto (x, \psi'_j(v_x))$$

e) Grupo estrutural G:$GL(n, \Re)$ o grupo de automorfismos de $\Re^n$(isomorfismo de $\Re^n$ nele próprio), cuja representação matricial é o conjunto de matrizes $n \times n$ com determinante diferente de zero. Formalmente,

$$\text{se } \psi'_{1,X} : V_X \in T_\alpha \to V \in \Re^n \text{ e } \psi'_{2,X} : V_X \in T_\alpha \to V' \in \Re^n \text{ então}$$

$$\psi'_{1,X} \circ \psi'^{-1}_{2,X} \in GL(n, \Re) : \Re^n \to \Re^n porV' \mapsto V$$

Seção Uma seção de um feixe (E, B, π) é uma função $f : B \to E$, tal que $\pi \circ f = identidade$.

Campo Vetorial Um campo vetorial v em X^n é uma seção do feixe tangente $T(X^n)$; um campo vetorial associa a cada ponto $x \in X^n$ um vetor tangente $v_x \in T_x(X^n)$ pelo mapa $v : \alpha \mapsto (x, v_x)$ frequentemente abreviado para $x \mapsto v_x$.

Feixe contangente O feixe $(T^*(X^n), X^n, \pi)$ onde $T^*(X^n)$ é o espaço de pares (x, ω_x) para todo $x \in X^n$ e todo $\omega_x \in T^*_x(X^n)$ e, é chamado feixe cotangente. Seu estudo é paralelo ao estudo do feixe contravariante(vetorial).

Feixes Tensoriais A variedade X junto com o conjunto de espaços vetoriais $\otimes^p T^*_x(X) \otimes^q T_x(X)$ para todo $x \in X$ pode ser dada uma estrutura de espaço fibrado. Ele é chamado feixe tensorial de ordem (p,q).

1-forma Um C^k campo vetorial covariante ou 1-forma é uma C^r seção do feixe covariante.

Campo tensorial Um campo tensorial de uma dada ordem em uma C^k variedade X é a C^r seção do feixe tensorial de mesma ordem.

Conjunto $\mathcal{H}(X^n)$: O conjunto $\mathcal{H}(X^n)$ é o conjunto de todos os campos C^∞ vetoriais em uma C^∞ variedade X^n.

Adição e Multiplicação em $\mathcal{H}(X^n)$ A adição em $\mathcal{H}(X^n)$ é definida por:

$$(v + w)f = vf + wf$$

e a multiplicação de $v \in \mathcal{H}(X^n)$ por $\lambda \in C^\infty(X^n)$ é definida por:

$$(\lambda v)f = \lambda(vf),$$

$\mathcal{H}(X^n)$ é um módulo no anel $C^\infty X^n)$.

Campos vetoriais invariantes esquerdos O conjunto de campos vetoriais em G invariantes sobre translações à esquerda são chamados campos vetoriais invariantes esquerdos em G.

- → Há uma correspondência um-a-um entre o conjunto de campos vetoriais invariantes esquerdos e o conjunto de vetores tangentes a G em e, nominalmente o espaço vetorial tangente $T_e(G)$. O campo vetorial v em G é invariante esquerdo se :

  $$dL_g v(h) = v(L_g h) = v(gh) \forall g, h \in G$$

  segue-se que $dL_g(\gamma) = v(g)$ com $\gamma = v(e)$. Inversamente

  $$v(L_g h) = v(gh) = dL_{gh} v(e) = d(L_g \circ L_h) v(e) = dL_g \circ dL_h v(e) = dL_g v(h).$$

Imagem recíproca ou pull-back Uma imagem recíproca sob f de uma função g é a função $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$ e é denotada por:

$$g \circ f = f^*(g).$$

A imagem recíproca de uma 1-forma sob um mapa diferenciável f é definida por:

$$(f^*\theta)v = \theta(f'v) \circ f.$$

Curva integral Seja v um campo vetorial em X e $\sigma : I \subset \Re \to X$ uma curva, tal que a tangente à curva σ em $x = \sigma(x)$ é o vetor v(x). A curva σ é chamada de curva integral do campo vetorial v.

Derivada de Lie A derivada de Lie $\mathcal{L}_v\omega$ de um campo vetorial covariante ω é o campo vetorial covariante definido por

$$\mathcal{L}_v\omega \mid_x = lim\frac{1}{t}[\sigma_t^*(\omega(\sigma_t(x))) - \omega(x)]$$

e a derivada de Lie de um campo vetorial contravariante w é

$$\mathcal{L}_v w \mid_x = lim\frac{1}{t}[\sigma_t^{-1\prime}(w(\sigma_t(x))) - w(x)].$$

$\to$ *Derivada de Lie de uma função f*

$$\mathcal{L}_v f \mid_x = lim\frac{1}{t}[f(\sigma_t(x)) - f(x)] = v(f) \mid_x .$$

$\to$ Em componentes:

$$(\mathcal{L}_v t)^i_{jk} = v^l \partial_l t^i_{jk} - t^l_{jk}\partial_l v^i + t^i_{lk}\partial_j v^l + t^i_{jl}\partial_k v^l.$$

Produto interno O produto interno de uma forma ω e um vetor v é denotado por $i_v\omega$, e é definido por:

a) $i_v f = 0$;

b) $i_v \mathbf{d}x^i = v_i$.

$\to$ $\mathbf{d}i_v + i_v\mathbf{d} = \mathcal{L}_v$

$$\mathcal{L}_v\mathbf{d}\alpha = \mathcal{L}_v(\frac{1}{p!}\epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}}\partial_k\alpha_{i_1\ldots i_p}\mathbf{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{j_{p+1}})$$

$$= \frac{1}{p!}(\epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} v^l \partial_l \partial_k \alpha_{i_1\ldots i_p} + (p+1)\epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{lj_2\ldots j_{p+1}} \partial_k \alpha_{i_1\ldots i_p} \partial_{j_1} v^k)\mathbf{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{j_{p+1}}$$

$$= \mathbf{d}\mathcal{L}_v \alpha.$$

assim $[\mathcal{L}_v, \mathbf{d}] = 0$ e como $\mathcal{L}_v f = i_v \mathbf{d} f$ e $i_v f = 0$ os operadores $\mathcal{L}$ e $di_v + i_v d$ são dois operadores derivação que comutam com $\mathbf{d}$ e coincidem em 0-formas, e em consequência são idênticos.

→ $[\mathcal{L}_v, i_w] = \mathcal{L}_v i_w - i_w \mathcal{L}_v = i_{[v,w]}$

para uma 0-forma :

$$[\mathcal{L}_v, i_w] f = 0$$

$$i_{[v,w]} f = 0$$

para uma 1-forma :

$$[\mathcal{L}_v, i_w]\alpha = \partial_l(w^i \alpha_i) v^l - w^i v^l \partial_l \alpha_i - w^l \alpha_i \partial_l v^i$$

$$= i_{[v,w]}\alpha.$$

→ $\mathbf{d}\theta(v,w) = \mathcal{L}_v \theta(w) - \mathcal{L}_w \theta(v) - \theta[v,w].$

Parênteses de Lie Os parênteses de Lie são definidos por:

$$[v,w] = vw - wv \text{ e é um campo vetorial.}$$

→ Propriedades :

$$[v,w] = -[w,v]$$

$$[v_1 + v_2, w_1 + w_2] = [v_1, w_1] + [v_2, w_2] + [v_1, w_2] + [v_2, w_1]$$

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_3, [v_1, v_2]] + [v_2, [v_3, v_1]] = 0$$

Álgebra de Lie O espaço vetorial de campos vetoriais invariantes à esquerda em G, munido da multiplicação parênteses de Lie, é chamado de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ do grupo G.

Constantes de estrutura Seja $\{v_\alpha, \alpha = 1, ..., p\}$ uma base da álgebra de Lie. Existem números $c^\gamma_{\alpha\beta}$, tais que:

$$[v_\alpha, v_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} v_\gamma.$$

Os coeficientes $c^\gamma_{\alpha\beta}$ são chamados constantes de estrutura do grupo de Lie G.

→ Propriedades:

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = -c^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta}c^{\kappa}_{\gamma\delta} + c^{\gamma}_{\beta\delta}c^{\kappa}_{\gamma\alpha} + c^{\gamma}_{\delta\alpha}c^{\kappa}_{\gamma\beta} = 0$$

esta última é consequência da identidade de Jacobi.

A.7-Formas diferenciais

p-forma Um p-campo tensorial totalmente antisimétrico é chamado p-forma diferencial exterior ou forma de grau p.

$\Lambda^p(X)$ Os espaço das p-formas de classe C^k em uma variedade contínua X é um submódulo $\Gamma^p(X)$ do módulo sobre o anel das C^k funções de todos os campos tensoriais C^k- covariantes, e antisimétricos em X. A soma de duas p-formas é uma p- forma; a multiplicação de uma função e uma p-forma é uma p-forma. O espaço das p-formas sobre um ponto x denota-se por $\Lambda^p_x(X)$.

Produto exterior, produto de Grassman, wedge product O produto exterior $\wedge$ entre uma p-forma e uma q-forma é uma função

$$\wedge : (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) \to \Lambda^{p+q}(X)$$

por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ definido por:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, ..., v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum (sign\Pi)\Pi[\alpha(v_1, ..., v_p)\beta(v_{p+1}, ..., v_{p+q})]$$

onde $v_i \in T(X)$ e Π é uma permutação de $(1, 2, ..., p+q)$.

→ Propriedades:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$$

$$f(\alpha \wedge \beta) = f\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge f\beta$$

$$(\alpha \wedge \beta) = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha \text{ se } \alpha \in \Gamma^p \text{ e } \beta \in \Gamma_q.$$

Algebra exterior ou de Grassman O módulo das formas de todos os graus em X munido do produto exterior é chamado álgebra de Grassman ou álgebra exterior, e é denotada por $\Lambda(X)$, ou simplesmente Λ. Aqui Λ_x é o espaço das formas em x.

Derivada exterior O operador de diferenciação exterior $\mathbf{d}$ mapeia uma p-forma de classe C^k em uma p+1-forma $\mathbf{d}\alpha$ de classe C^{k-1}, chamada de derivada exterior de α. Esta tem as seguintes propriedades:

a) $\mathbf{d}$ é linear: $\mathbf{d}(\alpha\beta) = \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}\beta$;

b) $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathbf{d}\beta$;

c) $\mathbf{d}^2 = 0$;

d) Se f é uma 0-forma, $\mathbf{d}f$ é a diferencial ordinária de f;

e) A operação $\mathbf{d}$ é local: se α e β coincidirem em um conjunto aberto U, então $\mathbf{d}\alpha = \mathbf{d}\beta$ em U, isto é, o comportamento de α fora de U não afeta $\mathbf{d}\alpha\mid_U$.

As propriedades (a)-(d) definem o operador $\mathbf{d}$ univocamente. Seja $\mathbf{d}'$ um operador o qual satizfaz às propriedades (a)-(d) e seja α uma p-forma diferencial

$$\alpha = \alpha_{I_1 \ldots I_p} \wedge \mathbf{d}X^{I_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}X^{I_p},$$

onde $\alpha_{I_1 \ldots I_p}$ aqui é tratada como uma 0-forma. Pelas propriedades (a) e (b) temos

$$\mathbf{d}'\alpha = \mathbf{d}'\alpha_{I_1 \ldots I_p} \wedge \mathbf{d}X^{I_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}X^{I_p} + \alpha_{I_1 \ldots I_p} \wedge \mathbf{d}'(\mathbf{d}X^{I_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}X^{I_p})$$

pela propriedade (d) temos:

$$\mathbf{d}'\alpha_{I_1 \ldots I_P} = \mathbf{d}\alpha_{I_1 \ldots I_P}, \mathbf{d}'X^i = \mathbf{d}X^i$$

e, finalmente, pelas propriedades (b) e (c) vemos que

$$\mathbf{d}'(\mathbf{d}'X^{I_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}'X^{I_p}) = 0,$$

logo $\mathbf{d}'$ é o único operador definido, i.e., $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$.

Exemplo 1:A derivada exterior de uma 0-forma f é a 1-forma:

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathbf{d}x_i$$

e as componentes de $\mathbf{d}f$ são as componentes de $gradf = \nabla f$.

Exemplo 2: A derivada exterior de uma 1-forma $\alpha = A\mathbf{d}x + B\mathbf{d}y + C\mathbf{d}z$ e um vetor V com componentes (A, B, C) é:

$$\mathbf{d}\alpha = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z})\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + (\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x})\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

onde as componentes de $\mathbf{d}\alpha$ são as componentes de $rotV = \nabla \times V$.

Exemplo 3:Derivada exterior de uma 2-forma:

$$\omega = P\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + Q\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + R\mathbf{d} \wedge \mathbf{d}z$$

$$\mathbf{d}\omega = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z.$$

Se W é um vetor de componentes (P,Q,R), então as componentes de $\mathbf{d}\omega$ são as componentes de $divW = \nabla \cdot W$.

Exemplo 4:Da propriedade $\mathbf{d}^2 = 0$ nós concluímos que:

$$\mathbf{dd}f = rot(gradf) = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$\mathbf{dd}\alpha = div(rotV) = \nabla \cdot (\nabla \times V) = 0$$

Exemplo 5: Da propriedade $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathbf{d}\beta$ podemos mostrar que:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \\ &\nabla \times (fV) = \nabla f \times V + f\nabla \times V \\ &\nabla \cdot (fV) = \nabla f \cdot V + f\nabla \cdot V \end{aligned}\right\} \text{p=0}$$

$$\nabla \cdot (V \times W) = U \cdot \nabla \times V - V \cdot \nabla \times U \text{ p = 1.}$$

Com estes exemplos podemos ver o poder das formas diferenciais no estudo da física, pois nos casos mais simples de p=0 ou 1 ela abrangre diversos resultados do cálculo vetorial.

A.8-Conexão e Curvatura

Em um espaço fibrado (E, X, π, G) cada fibra é difeomorfa a uma fibra típica G. Entretanto, o difeomorfismo não é canônico, pois depende do recobrimento $\{U_i\}$ de X e da escolha dos mapas φ_i. Uma conexão em E leva a uma correspondência canônica entre quaisquer duas fibras ao longo de uma curva C em X. Dizemos que um ponto da fibra sobre um dado ponto da curva é "transportado paralelamente" ao longo da curva por meio desta correspondência.

O transporte paralelo de um vetor é o vetor cujas componentes em relação ao referencial transportado são as mesmas do vetor original em relação ao referencial original.

Espaço vertical Os elementos do espaço tangente em p da fibra F_x, $V_p \equiv T_p(F_x), x = \pi(p)$, são chamados vetores verticais.

Mapa adjunto Consideremos o mapa $L_g R_g^{-1}$; Ele é um automorfismo interno de G:

$$L_g R_g^{-1} : h \mapsto ghg^{-1},$$

a diferencial $(L_g R_g^{-1})'$ em e, mapeia $T_e(G)$ em si próprio. O mapa $Ad(g) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é por definição o mapa que correspondente a $(L_g R_g^{-1})'_e$ no isomorfismo entre $T_e(G)$ e $\mathcal{G}$.

Forma-conexão Uma conexão em um espaço fibrado principal (E, X, π, G) é um mapa linear $\omega_p : T_p(E) \to \mathcal{G}$, isto é, é uma 1-forma em E a valores no espaço vetorial $\mathcal{G}$, tal que:

a) $\omega_p(u) = \hat{u}, \forall u \in V_p$;

b) $\omega_{\tilde{R}'_g v}(\tilde{R}'_g v) = Ad(g^{-1})\omega_p(v)$;

c) ω_p depende diferenciavelmente de p.

Espaço horizontal Os vetores v tais que $\omega(v) = 0$ são ditos vetores horizontais, e o espaço formado por eles é o espaço horizontal:

$$v \in H_p \Leftrightarrow \omega(v) = 0.$$

Existência de uma conexão Se X é paracompacto então uma conexão pode ser construída no espaço fibrado principal.

$\to$ para demonstração ver, por exemplo, Choquet-Bruhat[1]

Derivada exterior covariante Seja (E, X, π, G) um espaço fibrado principal com conexão ω e espaço horizontal H_p. Seja $h : T_p(E) \to H_p$ por $v \mapsto v_h$. A derivada exterior covariante $D\varphi$ de uma r-forma $\varphi = \varphi^\alpha \otimes e_\alpha$ em E a valores em algum espaço vetorial é definida pela relação :

$$D\varphi(v_1, ..., v_{r+1}) = \mathbf{d}\varphi(hv_1, ..., hv_{r+1})$$

Forma-curvatura A 2-forma $\Omega = D\omega$ é chamada de forma curvatura da conexão ω.

Equação estrutural de Cartan Se ω é uma conexão em E e $D\omega = \Omega$ então,

$$\Omega(v, u) = \mathbf{d}\omega(v, u) + [\omega(v), \omega(u)].$$

[1] CHOQUET-BRUHAT,Y. **Analysis, Manifolds and Physics**. Amsterdam: North Holland. 1977

Prova: Como $T_p(E) = H_p \oplus V_p$, é suficiente provar a identidade em três casos:

a) Seja $v_p, u_p \in H_p$. Então $\omega(v_p) = \omega(u_p) = 0$. Daí $hv_p = v_p$ e $hu_p = u_p$

$$D\omega(v_p, u_p) = d\omega(v_p, u_p).$$

b) Seja $v_p \in H_p$ e $u_p \in V_p$. Em uma vizinhança de p estendemos u_p para um campo vetorial u, que é um campo vetorial de Killing; estendemos v_p para um campo vetorial v, o qual é horizontal a cada ponto. Então $\omega(v) = 0$ e como $\omega(u)$ é um elemento fixo de $\mathcal{G}$, logo $v\omega(u) = 0$. Usamos as relações

$$\mathcal{L}_v i_u - \mathcal{L}_u i_v = u_{[v,u]}$$

$$\mathbf{d}\theta(v,u) = \mathcal{L}_v\theta(u) - \mathcal{L}_u\theta(v) - \theta[v,u]$$

para mostrar que

$$0 = v\omega(u) = \mathcal{L}_v i_u \omega = \mathcal{L}_u i_v \omega + i_{[v,u]}\omega$$

$$= u\omega(v) + \omega[v,u] = \omega[v,u]$$

e

$$\mathbf{d}\omega(v,u) = v\omega(u) - u\omega(v) - \omega[v,u] = 0$$

e, em adição ,

$$D\omega(v,u) = \mathbf{d}\omega(hv, hu) = \mathbf{d}\omega(hv, 0) = 0.$$

c) Sejam $v_p, u_p \in V_p$. Sejam ainda v e u campos vetoriais de Killing que coincidem com v_p e u_p na vizinhança de p. Então, uma vez que a álgebra dos vetores de Killing é isomorfa a $\mathcal{G}$:

$$\mathbf{d}\omega(v,u) = v\omega(u) - u\omega(v) - \omega[v,u] = -\omega[v,u] = -[\omega(v), \omega(u)]$$

e ainda

$$D\omega(v,u) = \mathbf{d}\omega(hv, hu) = \mathbf{d}\omega(0,0) = 0.$$

Identidades de Bianchi As identidades

$$D\Omega(v,u,w) = \mathbf{d}\Omega(hv, hu, hw) = \mathbf{dd}\omega(hv, hu, hw) = 0$$

ou

$$D\Omega = 0$$

são conhecidas como identidades de Bianchi e, por serem identidades matemáticas, qualquer teoria de campos deverá satisfazê-las.

Elemento de volume Seja g o determinante da matriz $[g_{ij}]$, isto é,

$$g = \epsilon^{i_1 \ldots i_n}_{1 \ldots n} g_{i_1 1} \ldots g_{i_n n}$$

em relação a uma base diferente $(e_{i'})$, com

$$e_{k'} = A^i_{k'} e_i.$$

Como as componentes de g se transformam mediante:

$$g_{k'l'} = A^i_{k'} A^j_{l'} g_{ij}$$

então

$$\sqrt{| g' |} = | \Delta | \sqrt{| g |},$$

onde Δ é o determinante da matriz $[A^i_{j'}]$. Assim $\sqrt{| g |}$ se transforma como a componente de uma n-forma:

$$\tau = \sqrt{| g |} \mathbf{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^n$$

$$= \frac{1}{n!} \tau_{i_1 \ldots i_n} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_n}$$

ou seja,

$$\tau_{i_1 \ldots i_n} = \epsilon^{1 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n} \sqrt{| g |},$$

onde a n-forma τ é chamada de elemento de volume.

Operador estrela ou operador de Hodge O operador estrela define um isomorfismo $\Lambda^p(X^n) \to \Lambda^{n-p}(X^n)$ por $\beta \mapsto *\beta$. O produto interno em T^*_x pode ser utilizado para definir o produto interno em Λ^p_x como

$$(\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_n} \mid (\mathbf{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{j_n}) = det[(\mathbf{d}x^{i_k} \mid \mathbf{d}x^{i_l})] = \epsilon^{i_1 \ldots i_p}_{k_1 \ldots k_p} g^{j_1 k_1 \ldots j_1 k_p},$$

onde o símbolo $*\beta$ denota a única (n-p)-forma tal que

$$\tau(\alpha \mid \beta) = \alpha \wedge *\beta, \forall \alpha \in \Lambda^p(X^n),$$

cujas componentes são

$$(*\beta)_{i_{p+1}\dots i_n} = \frac{1}{p!}\epsilon^{1\dots n}_{i_1\dots i_n}\sqrt{|\, g\,|}\beta^{i_1\dots i_p}$$

Inversa do operador estrela Em geral, para qualquer n-forma o tensor com componentes $t^{i_1\dots i_n}$ é antisimétrico e tem as componentes

$$t^{i_1\dots i_n} = \frac{1}{g}t_{i_1\dots i_n}$$

Assim nós inferimos que:

$$\tau^{i_1\dots i_n} = \frac{\sqrt{|\, g\,|}}{g}\epsilon^{i_1\dots i_n}_{1\dots n} = \frac{(-1)^{\frac{n-s}{2}}}{\sqrt{|\, g\,|}}\epsilon^{i_1\dots i_n}_{1\dots n},$$

onde s é a signatura da métrica(número de sinais positivos na diagonal principal menos número de sinais negativos) de forma que $\frac{n-s}{2}$ é o número de sinais negativos. Assim

$$(*\alpha \mid *\beta) = \frac{(-1)^{\frac{n-s}{2}}}{p!}\alpha^{i_1\dots i_p}\beta_{i_1\dots i_p} = (-1)^{\frac{n-s}{2}}(\alpha \mid \beta)$$

e

$$\tau(\beta \mid \alpha) = \beta \wedge *\alpha = (-1)^{p(n-p)} * \alpha \wedge \beta$$

$$= (-1)^{\frac{n-s}{2}}\tau(*\beta \mid *\alpha) = (-1)^{\frac{n-s}{2}}\tau(*\alpha \mid *\beta)$$

$$= (-1)^{\frac{n-s}{2}} * \alpha \wedge * * \beta$$

de modo que

$$*^{-1} = (-1)^{p(n-p)+\frac{n+s}{2}} * .$$

Co-diferencial exterior A co-diferencial exterior é o operador diferencial

$$\delta\omega = (-1)^p * -1\mathbf{d} * \omega, \forall\omega \in \Lambda^p(X^n).$$

Referências bibliográficas

1. ADLER,R.; BAZIN,M.;SCHIFFER,M.**Introduction to General Relativity**. McGraw-Hill Book Co. New York, 1965
2. ANDERSON, James L.; FINKELSTEIN, David. **American Journal of Physics**, v.39, p.901-, 1971.
3. BARUT, A. O.; HAUGEN, H. B. Theory of Conformally Invariant Mass. **Annals of Physics**, v.71, p.519-541, 1972.
4. CHANDRASEKHAR, S. On the Derivation of Einstein's Field Equations. **American Journal of Physics**, v.40, p.224-234, Feb. 1972.
5. CHOQUET-BRUHAT,Y. **Analysis, Manifolds and Physics**. Amsterdam: North Holland. 1977
6. CUNNINGHAM, E. **Proc. London Math. Soc.**, v.8, p.77-, 1909; BATEMAN, H. **ibid**, v.8, p.223-, 1910.
7. DANIEL, M.; VIALLET, C. M. The geometrical settings of gauge theories of Yang-Mills type. **Reviews of Modern Physics**, v.52, n.1, p.175-197, January 1980.
8. DENISOV, V. I.; LOGUNOV, A.A. Gravitational Radiation exist in the General Theory of Relativity, **Theory Math. Fiz.**, v.43, n.2, p.187-201, May 1980.
9. —–. Does the General theory of Relativity have a Classical Newtonian Limit ?. **Theor. Math. Fiz.**, v.45, n.3, p.291-301, December 1980.
10. —–. **Theor. Math. Fiz.**, v.43, p.187-, 1980.
11. FADDEEV, L.D. The energy problem in Einstein theory of gravitation. **Sov. Phys. Usp.**, v.25, n.3, p.130-142, March 1982.
12. FRIEDMANN,A. Über die Krümmung des Raumes, **Z.Phys.**, v.10, p.377-386, 1922.
13. FULTON, T.; ROHRLICH, F.; WITTEN, L. Conformal Invariance in Physics, **Reviews of Modern Physics**, v.34, n.3, July 1962.
14. JACKIW, R. **Topics in Planar Physics**, DIAS Workins Seminar (1989: Dublin, Ireland).
15. KAWAI, Toshiharu. Poincaré gauge theory of (2+1)-dimensional gravity. **Physical Review D**, v.49, n.6, p.2862-2871.
16. KIBBLE, T.W.B. Symmetry Breaking in Non Abelian Gauge Theories, **Phys. Rev.**, v.155, p.1554-, 1969.

17. LANDAU, L.; LIFSHITS, E. **Course of theoretical physics.** 4.ed. Vol 2.*The Classical Theory of Fields.*New York: Pergamon Press Inc., 1989.

18. LURIÉ,D. **Particles and Fields**. London: Interscience Publishers,1968.

19. MISNER,C.W.; THORNE,K.S.; WHEELER,J.A.; **Gravitation**. USA: W.H.Freeman and Company, 1973.

20. SALAM, A.; STRATHDEE, J. Nonlinear Realizations I, **Phys. Rev.**, v.184, p.1750-, 1969.

21. —. Nonlinear Realizations II, **Phys. Rev.**, v.184, p.1760-, 1969.

22. SCHRÖDINDER, E. **Phys. Z.**, v.19, p.4-, 1918.

23. STARUSZKIEWICZ, A. Gravitation theory in three-dimensional space. **Acta Physica Polonica**, v.XXIV, n.6, p.735-741, 1963.

24. STÉDILE, E.; DUARTE, R. Yang Mills Gauge Theory and Gravitation, **International Journal of Theoretical Physics**. v.34, n.6, p.965-970. 1995.

25. STÉDILE, E.; LUCINDA, J. Relativistic Flat Space-time Approach for gravity , **Physics Essays**. v.8, n.2, p.225. 1995.

26. T'HOOFT,G.,VELTMAN,M. One-loop divergences in the theory of gravitation. **Ann. Inst.Henri Poincaré**,Section A, v.XX, n.1, p.69-94, 1974.

27. THOMPSON, A. H. Yang's Gravitational Field Equations. **Physical Review Letters**, v.34, n.8, p.507-508, 24 February 1975.

28. WESS, J. Conformal Invariance and the Energy-Momentum Tensor. **Springer Tracts in Modern Physics**, n.60, 1971.

29. WYBOURNE,B.G. Classical Groups for Physicists John Wiley & Sons, New York, 1973.

30. YANG, C. N. Integral Formalism for gauge Fields.**Physical Review Letters**. v.13, n.7, p.445-447, 12 August 1974.