UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VIVIANE FERREIRA

MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES: A COMPREENSÃO MATEMÁTICA DE ESTUDANTES

CURITIBA

2015

VIVIANE FERREIRA

MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES: A COMPREENSÃO MATEMÁTICA DE ESTUDANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Linha de Pesquisa Educação Matemática, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Leônia Gabardo Negrelli

CURITIBA

2015

Ferreira, Viviane
F383
Materiais didáticos manipuláveis e registros de representações: a compreensão matemática de estudantes / Viviane Ferreira. - Curitiba, 2015.

101f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientadora: Leônia Gabardo Negrelli
Bibliografia: p. 73-74

1. Ensino-aprendizagem de matemática. 2. Material Didático Manipulável. 3. Registros de Representações Semióticas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Negrelli, Leônia Gabardo. III. Título.

CDD - 510.7
CDD - 510.208

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

PARECER

Defesa de Dissertação de **VIVIANE FERREIRA,** intitulada **"MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES: A COMPREENSÃO MATEMÁTICA DE ESTUDANTES",** para obtenção do Título de Mestra em Educação em Ciências e em Matemática.

De acordo com o Protocolo aprovado pelo Colegiado do Programa, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo-assinados arguiu, nesta data, a candidata acima citada. Procedida à arguição, a Banca Examinadora é de Parecer que a candidata está **apta ao Título** de **MESTRA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA**, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Profª. Drª. Leônia Gabardo Negrelli (orientadora)	Leônia G. Negrelli	Aprovada
Profª. Drª. Célia Finck Brandt	CBrandt	Aprovada
Prof. Dr. Emerson Rolkouski		APROVADA

Curitiba, 28 de Agosto de 2015.

Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Educação em Ciências e em Matemática.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

O estudo da gramática não faz poetas.

O estudo da harmonia não faz compositores.

O estudo da psicologia não faz pessoas equilibradas.

O estudo das “ciências da educação” não faz educadores.

Educadores não podem ser produzidos.

Educadores nascem.

O que se pode fazer é ajuda-los a nascer.

(Rubem Alves)

Aos meus irmãos.

Aos meus pais, José e Margarida.

Por me ensinarem a ser a pessoa que sou e

por permitirem meu nascimento como educadora.

AGRADECIMENTOS

Não poderia iniciar meus agradecimentos de forma diferente. Agradeço ao "Mestre" dos mestres, por ter me ensinados que "tudo posso naquele que me fortalece". Obrigada Deus, pela vida, benção, proteção e discernimento nos momento de dúvida.

Meus pais, José e Margarida, por estarem ao meu lado, por todo amor, carinho e compreensão. Por terem me dado o maior tesouro que poderia ganhar a Educação. Ao escrever estas palavras, meus olhos encontram-se marejados, pelo único motivo de saber que fizeram o impossível para que pudesse chegar aonde cheguei.

A aqueles que sabem todos meus temperamentos, meus irmãos. Pela amizade e cumplicidade de uma vida. Pela paciência, e por me aceitarem assim como sou, meio chata e exigente.

Aos amigos que fiz durante esse período, por toda parceria, apoio, risadas, conversas especialmente a Viviane Aparecida Bagio. Você me mostrou o quanto é importante à dedicação e o esforço, sua companhia deixou minha caminhada alegre e me levantou quando mais precisei.

A Mara Motin, Mariana Candéa, Diego Machado e Diane Felippi. Vocês alegraram minhas noites por um importante período, a graduação, e permaneceram ao meu lado mesmo quando parecia que cada um adotaria um caminho e caminharia solitário. Apoiaram-me e incentivaram-me a novas buscas. Agradeço Em especial a Poliana Galta, foram necessários dois anos para descobrirmos que tínhamos muito mais do que a matemática em comum. Nossa parceria nos momentos mais difíceis da graduação me mostrou o quão leve fica um fardo quando temos alguém que caminha a nosso lado.

A minha amiga Juliana Tavares. Ju, a primeira a me puxar pelo braço e me apoiar nessa aventura que é a matemática. Obrigada por todo o seu apoio. Você me mostrou o que é ter determinação e nunca desistir de um sonho. Sou muito grata por ter você como amiga.

A meu amigo João Muzzi, por acreditar em mim, me apoiar e estar sempre à disposição. Não tenho palavras para agradecer sua amizade.

A minha amiga-irmã Ana Paula Cabral. A pessoa que convida uma desconhecida para formatura. Não precisou mais do que poucos segundos para nos tornarmos grandes amigas. Não é por acaso que Deus cruzou nosso caminho e sou grata a ele por isso, obrigada por estar sempre ao meu lado, pelas lágrimas, risos e histórias compartilhadas. Ao Diogo, por me emprestar essa menina tão querida.

À Nila, João e Thais Bonin por ter me apresentando uma grande família chamada EMAPA, onde aprendi que sou um ser humano em continua construção. O meu muito obrigado, a todos que fazem parte desse movimento e que acreditam em um amanhã melhor.

A Roseli Laurindo, quem foi que disse que "o pessoal das letras não se dá com o pessoal das exatas?". Estamos aqui para provar que isso é um mito. Obrigada pelas palavras de incentivo e por me acompanhar no dia a dia.

A Cristiane Jamus Madi Andrioli e Adriane Wendling meus primeiros referenciais na escola. Obrigada por acreditarem no meu potencial, por me incentivarem e me levar além do que eu acreditava.

Ao professor Gil Marcos Jess e Rosi Mari Portugal grandes incentivadores ainda na graduação.

A minha orientadora Leônia Gabardo Negrelli. Faltam-me palavras para descrever tamanha gratidão. Sempre acreditei que não é por acaso que as pessoas cruzam nosso caminho, agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de trabalhar com uma pessoa como você. Meu referencial durante essa trajetória. Obrigada pelo carinho, pelo companheirismo e principalmente por não me deixar esmorecer. Agradeço a sua Família, Marcelo, Marcela e Dante, que me receberam com grande afeto, em especial as crianças que deram um toque de alegria nas nossas tarde de trabalho. Que Deus continue iluminando a cada um de vocês.

Ao PPGECM/UFPR pela vivência e aprendizado neste período, em especial aos professores da Linha de Educação Matemática.

À professora Célia Finck Brandt e ao professor Emerson Rolkouski por terem aceitado participar tanto da branca de qualificação quanto da defesa e pelos direcionamentos propostos em minha dissertação. Suas contribuições foram de grande valia.

Por fim, a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste projeto.

RESUMO

A presente dissertação resultou do propósito de investigar o potencial de atividades elaboradas para o ensino de matemática nas quais são utilizados materiais didáticos manipuláveis e registros de representações semióticas. Foram propostas atividades manipulativas com o uso de uma folha de papel quadrada e uma sequência de dobraduras, entrelaçadas a atividades de registro, de modo a promover a conceitualização de objetos matemáticos, concomitante à produção de registros representações destes. Tais atividades foram distribuídas em cinco momentos no decorrer dos quais o estudante que as realiza se desprende gradativamente de argumentos e recursos visuais e táteis e passa a tratar uma situação no âmbito das representações matemáticas. Também foram interpretadas à luz da teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e em seguida foram realizadas, em ocasiões diferentes, por três estudantes, com 14, 15 e 16 anos de idade, que cursam o nono ano do Ensino Fundamental, o primeiro e o terceiro anos do Ensino Médio, respectivamente, com o propósito de testar a viabilidade de seu uso no ensino de matemática. Dados foram coletados por meio de gravações de áudio e vídeo e utilizados na produção de relatos que permitiram conhecer o potencial das atividades propostas, algumas de suas limitações, além de incitar novos questionamentos acerca da temática abordada.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de matemática; Material Didático Manipulável; Registros de Representações Semióticas.

ABSTRACT

This dissertation resulted on the purpose of investigating the potential of developed activities for the mathematics teaching, in which manipulable didactic material had been used and Semiotic representations recording were also used. Manipulable activities were suggested with a squared sheet of paper and a sequence of folding were interlinked to the recorded activity, in a way they promote the evaluation of mathematics objects concomitant to the production of the recordings of those. Such activities were shared in five moments, and in these moments, students who accomplished the suggested activities became gradually disengaged of argumentation and visual resources and tactile, and started to face the situation as the Mathematical Representation range. The situations were represented using Raymond Duval's Semiotic Representations and then they were accomplished in different situations by three students ages, 14, 15 and 16 of the third grade (High School) "Ensino Medio", respectively with the purpose of testing the viability of its use in mathematics teaching. All resulted information was collected and recorded in audio and video devices and used in reports. That allowed us to recognize the potential of suggested activity, some of its limitations and the beginning of new questions about the approached themes.

Key Words: Mathematics teaching and learning process; Manipulable Didactic Material, Semiotic Representations recording.

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
MDM	Materiais Didáticos Manipuláveis
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática
PUCPR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
UFPR	Universidade Federal do Paraná

ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 DELIMITAÇÃO DA QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E OBJETIVOS

Ao cursar Licenciatura em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR) tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID), um grande laboratório real que me proporcionou um intenso contato com a rotina de uma escola, com alunos e com professores, não apenas como graduanda, mas principalmente como futura professora. Nesse período tive a oportunidade de participar de minicursos, palestras, congressos na área da Educação Matemática e nesses eventos algo que sempre despertava meu interesse e me levava a novas leituras e investigações eram os trabalhos relacionados a Materiais Didáticos Manipuláveis (MDM). De modo especial, interessei-me por materiais didáticos elaborados a partir de dobraduras para o ensino de matemática, uma vez que a execução de dobraduras em folhas de papel envolve aspectos visuais e táteis, aguça e desperta a criatividade, demanda esforço, persistência e paciência - elementos esses também presentes no estudo e na aprendizagem de matemática.

Já licenciada, a motivação para a elaboração do projeto de pesquisa cujo desenvolvimento resultou nesta dissertação decorreu de minha atividade profissional, como professora de atletas de alto rendimento[1] que demandava, devido ao calendário escolar adaptado aos frequentes compromissos na rotina das atletas, formas diferenciadas de trabalho, o que fez com que eu recorresse a MDM para propor atividades de ensino naquelas condições de trabalho excepcionais: turmas de 2 a 3 alunos, com aulas distribuídas em horários variados em função da participação das atletas em competições. Após participar de um minicurso sobre Matemática e Origami passei a investigar o

[1] A pesquisadora durante aproximadamente um ano e meio lecionou a disciplina de matemática em turmas formadas somente por atletas de alto rendimento da ginastica artística. Um atleta de alto rendimento é aquele especialista em uma modalidade, com intensas horas de treinamento e participante de competições de nível internacional, geralmente com patrocinadores.

potencial de certas atividades com dobraduras para atender a minhas demandas profissionais daquele momento. Tal interesse levou-me a ingressar no Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e em Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Paraná como mestranda na linha de pesquisa Educação Matemática.

Durante o primeiro ano de elaboração do projeto dessa pesquisa, o foco da investigação estava voltado a um estudo de caso que visava, além de contribuir na formação continuada de uma professora investigadora de sua própria prática, atender demandas de uma turma diferenciada de alunos (atletas de alto rendimento que tinham aulas do ensino regular no local onde passavam a maior parte do dia, em treinamento), conhecer e explorar o potencial de alguns MDM com o objetivo de otimizar o ensino de alguns conteúdos matemáticos já determinados para as turmas/anos escolares aos quais eu lecionava.

Com a extinção das atividades de ensino nas referidas condições [2], foi necessário o redirecionamento dos objetivos específicos deste estudo a partir de mudanças significativas no cenário inicial desta pesquisa. Passei então a considerar o uso de MDM para o ensino de matemática independente do ambiente em que ele seja ministrado, ou algum conteúdo específico, porém, com o pressuposto de que compreender matemática envolve compreender o seu modo dedutivo de funcionamento e não se reduz a conhecer fatos aceitos no âmbito de suas teorias, como definições, teoremas, propriedades. Desse modo passei a me interessar pelas possibilidades do MDM contribuir no desenvolvimento de atividades com o propósito de estudar e ensinar aos estudantes da Educação Básica, sobre o modo de proceder em matemática, a forma dedutiva de argumentação por meio da qual resultados importantes são aceitos como válidos. A presença de deduções em atividades de ensino de matemática é frequente, mas percebe-se que a atenção a elas como um objeto matemático a ser apreendido ainda é pequena. Assim, da necessidade de alteração dos sujeitos da pesquisa, o trabalho voltou-se para a forma como um estudante compreende a matemática, mais precisamente, como ele trabalha com deduções a partir de atividades com MDM.

---

[2] Devido a questões que envolviam patrocínio, o grupo de atletas, não podendo dar continuidade aos estudos naquelas condições, prosseguiu com eles em escolas regulares.

Ao estudar sobre compreensão e aprendizagem em matemática tomei conhecimento sobre o uso de registros de representações semióticas (RRS), no sentido dado a estas por Raymond Duval, que são elementos importantes quando se trata de organizar situações de aprendizagem e promover a aquisição de conhecimento matemático. Como isso ocorreu na segunda metade do curso de mestrado, o tempo para obter o conhecimento e a familiaridade com essa abordagem teórica, necessário para que sua consideração no âmbito dessa pesquisa fosse exitoso, parecia pequeno. Mesmo assim, dada à importância dessa abordagem no âmbito da Educação Matemática e à grande possibilidade de avanços teóricos e práticos que ela poderia trazer para meu projeto de pesquisa, decidi tomá-la como guia teórico, embora nesse momento tenha conseguido apenas tatear seus principais construtos. Ao tratar do ensino de algum objeto matemático, é preciso levar em conta as diferentes formas de representação a que ele se presta. Passar de uma representação a outra e fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto (quando se produz uma sequência de identidades para deduzir uma fórmula, por exemplo), além de fazer conversões entre representações de diferentes tipos (representar geometricamente uma função dada em sua forma algébrica, por exemplo) são exemplos de ações necessárias para que a aprendizagem de matemática ocorra, segundo o modelo teórico de Duval. Tais ações se revelaram possíveis em nosso entendimento de como um MDM poderia ser usado para o ensino de matemática. Por isso a opção por investigar o potencial de atividades elaboradas para o ensino de matemática nas quais são utilizados materiais didáticos manipuláveis e registros de representações semióticas.

A atuação profissional de um professor de matemática incita permanentemente questionamentos acerca da adequação de sua prática pedagógica, dos recursos didáticos nela empregados, das razões das escolhas desses recursos e das consequências dessas escolhas. Foi com foco no aperfeiçoamento dessa prática que algumas inquietações acerca do uso de MDM se intensificaram, resultando no objeto de estudo desta pesquisa. Partindo de uma problemática consolidada na prática docente como professora de matemática no Ensino Fundamental e Médio e, antes disso, instigada por atividades desenvolvidas como bolsista de um programa de iniciação à docência, no período de 3 anos durante a formação inicial, formulei as seguintes **questões** para investigação, que nortearam o estudo cujos resultados são agora apresentados.

1) Como explorar um material didático manipulável no ensino de matemática não apenas como motivador e como facilitador de visualizações, mas também de modo a trabalhar com deduções e registros de representações semióticas?

2) Como estudantes (no estágio de desenvolvimento cognitivo operatório formal) revelam sua compreensão (efetuando transformações de registros de representações) acerca de um objeto matemático no decorrer da realização de atividades envolvendo um MDM e registros de representações semióticas?

A partir destas questões formulamos os seguintes **objetivos** a serem perseguidos:

- Explicitar a compreensão dos estudantes de um objeto matemático por meio da realização de atividades com MDM e RRS.

- Apontar como uma sequência de atividades com MDM pode facilitar a visualização e permitir o trabalho com deduções e RRS.

Quanto aos encaminhamentos metodológicos adotados, foram realizados estudos bibliográficos e uma coleta de dados empíricos para uma pesquisa qualitativa, por meio de gravações de áudio e vídeo, das sessões propostas para a realização das atividades, além de registros escritos. O detalhamento das questões metodológicas é feito no capítulo 4.

Dando sequência a esta Introdução exporemos a seguir, a título de justificativa da pertinência do tema de estudo na atualidade, uma breve revisão bibliográfica acerca de MDM no ensino de matemática e na formação de professores.

1.2 JUSTIFICATIVA E BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Entendemos como MDM aqueles materiais didáticos que privilegiam aspectos visuais e táteis para o levantamento de hipóteses, a percepção de relações e propriedades, a verificação de teoremas, o favorecimento de abstrações e consequente estabelecimento de generalizações; ações que, a nosso ver, constituem um genuíno fazer matemática. O emprego de MDM que auxiliem professores na tarefa de ensinar matemática não é um tema recente. Por meio da leitura do livro *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*, organizado por Sérgio Lorenzato (LORENZATO, 2012) constatamos a existência no Brasil de estudos sistemáticos acerca desse tipo de material há mais de duas décadas. Nessa publicação, os autores abordam diversos aspectos dos MDM, tanto na formação inicial e continuada do professor, quanto na utilização deles em sala de aula. Como as funções e os objetivos do uso de um material no ensino são diversas, Lorenzato(2012) ressalta a necessidade de que o professor se questione acerca dos propósitos com os quais está utilizando certo material: se "[...] para apresentar um assunto, para motivar o aluno, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos?" (LORENZATO, 2012, p.18). Além dos propósitos do uso, levar em consideração que a natureza do material didático, manipulável ou não, influencia no direcionamento das atividades propostas. Nesta pesquisa abordamos o uso de MDM dinâmicos, ou seja, que podem sofrer transformações, visualmente perceptíveis e que segundo Lorenzato (2012, p. 19), "facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem." Destacamos ainda que para garantir a aprendizagem não basta utilizar o manipulável e visual, "faz-se necessário também a atividade mental por parte do aluno." (LORENZATO, 2012, p.21).

Em um artigo intitulado *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática,* Fiorentini e Miorim (1990) destacaram que alguns professores apresentam dificuldades na hora da escolha do material com o qual irão trabalhar e que nem eles têm clareza dos motivos que o levaram a certas escolhas. Em vários casos a justificativa do uso se limita ao caráter motivacional e lúdico que os tais MDM possuem, esquecendo-se, ou mesmo desconhecendo, a importância da atividade mental e de reflexões de natureza epistemológica relacionadas à conceitualização dos objetos matemáticos que o uso deles pode proporcionar. Esses autores afirmam ainda que em palestras ou eventos que promovem oficinas com MDM, as salas ficam sempre lotadas, o que demonstra o interesse crescente por parte do professor acerca desse recurso didático. No entanto, em vários casos, no momento do emprego do material, a discussão fica limitada somente a um conteúdo específico.

Ao abordar a forma como os professores fazem a utilização do MDM, Nacarato (2005) destaca que o "uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem de matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-lo." (NACARATO, 2005, p.4) Por isso o MDM pode resultar em um facilitador ou um complicador no processo de ensino e de aprendizagem.

Ao iniciarmos uma revisão de literatura acerca dos temas contemplados nesta pesquisa, percebemos que entre a primeira edição do citado livro organizado por Lorenzato, que foi publicada em 2006, até os dias atuais, muitos estudos e experiência com MDM foram desenvolvidos. Com o advento da informática poder-se-ia pensar que a utilização de tais materiais fosse cair em desuso. No entanto, ao observar a quantidade e a variedade de trabalhos apresentados no XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM) realizado em 2013, na cidade de Curitiba-PR, na forma de relatos de experiências, comunicações científicas e pôsteres, vemos que a busca por formas apropriadas de usar MDM no ensino-aprendizagem de matemática continua despertando o interesse de professores nos mais diversos níveis de ensino, além de pesquisadores.

Explorando os anais do referido evento de abrangência nacional que se constituiu um espaço de divulgação, discussão e troca de experiências acerca da matemática e seu ensino, dentre os trabalhos apresentados na forma de relato de experiência, notamos que os autores, em grande quantidade, são professores atuantes em escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio. Outra quantidade significativa de autores são licenciandos e professores participantes do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), criado em 2010 e executado no âmbito da CAPES, com o propósito de formar um vínculo entre futuros professores e escolas da rede pública, visando a incentivar a formação de docentes em nível superior além de aumentar a qualidade da formação inicial do estudante dos cursos de licenciatura.

Dentre os trabalhos apresentados como comunicação científica, que contemplam pesquisas concluídas ou em fase de conclusão, destacamos os autores Paulo e Pinheiro (2013, p.1) que reafirmam que para vários alunos a Matemática é "uma ciência cujo estudo é cansativo e complexo". Entendendo que essa visão da matemática pode resultar em um sentimento de aversão que dificulta o aprendizado, esses autores destacam que o uso de recursos didáticos como os MDM, aos quais eles se referem como material concreto,

> é de fundamental importância no processo de construção de um conhecimento significativo com participação integral do aluno e contando com um estimulo natural do lúdico para romper obstáculos criados acerca do ensino da matemática. (PAULO; PINHEIRO, 2013, p.3)

Temos aqui o aspecto motivacional contemplado. O impacto desse aspecto nas atividades desenvolvidas é marcante.

Gama e Santos (2013, p.4) consideram que "uma das maneiras de criar uma integração aluno-matemática é possibilitar a eles, explorar, experimentar e entender a matéria", o que aponta para a mesma direção que a constatação de Estevam, Rodrigues, Verbaneck (2013, p.2) segundo a qual "O ato de manipular permite ao aluno experimentar padrões que são essenciais na matemática".

Ao estudarmos acerca de como ocorre o desenvolvimento cognitivo humano, percebemos que a utilização de objetos físicos como MDM pode ser fundamental na elaboração do conhecimento matemático. No entanto, com tantos recursos à disposição de alunos e professores, dentro e fora da sala de aula, os MDM muitas vezes acabam sendo esquecidos, trocados por recursos digitais ou empregados apenas em atividades visualmente motivadoras, negligenciando a ação e reflexão sobre eles, empregando-os como legítimos materiais para o ensino-aprendizagem de matemática.

Ao investigarmos vários MDM percebemos que eles possibilitam diferentes abordagens de um mesmo conteúdo. Quando um estudante se depara com um material didático manipulável, a ele é permitido, e por que não exigido, experimentar a matemática, o que pode levá-lo a perceber relações matemáticas de forma autônoma, possibilitando ao professor ser realmente um mediador entre o conhecimento sistematizado e o aluno. É com esse propósito que buscamos elaborar a sequencia de atividades proposta neste estudo. Para concluir essa Introdução expomos a forma como o texto está organizado.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

No primeiro capítulo apresentamos elementos de nossa trajetória acadêmica e profissional que nos levaram à formulação das questões norteadoras e objetivos da pesquisa, além de uma justificativa pautada em uma breve revisão de literatura sobre MDM no ensino de matemática.

No segundo capítulo, apresentamos considerações acerca dos materiais didáticos manipuláveis, seu potencial e suas limitações; aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, relacionando-os com a sequência de atividades proposta nesta pesquisa. Na última parte deste capítulo abordamos concepções de matemática e possíveis repercussões destas na adoção de estratégias de ensino pelo professor, além de aspectos da teoria psicogenética piagetiana, entendendo que compreender como se dá o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem de matemática são fatores relevantes quando de trata do trabalho com MDM.

No terceiro capítulo são apresentadas sequências de atividades envolvendo o uso de uma folha de papel quadrada como material didático manipulável, concomitante a uma análise dessas atividades à luz da teoria dos Registros de Representações Semióticas para verificar se elas possibilitam a elaboração e transformações de registros de representações semióticas necessárias ao aprendizado de matemática.

No quarto capítulo são apresentados aspectos metodológicos e os resultados da realização da sequência de atividades por três estudantes com idade média de 15 anos. Após a coleta de dados, foram organizadas tabelas que auxiliaram na produção de textos dissertativos que revelam o desempenho dos estudantes ao realizarem as atividades e permitem avaliar a viabilidade destas no ensino. Também são apresentadas colocações dos estudantes quando questionados sobre a atividade.

No quinto e último capítulo, como considerações finais, apresentamos uma reflexão sobre a trajetória percorrida no desenvolvimento deste estudo, tentativas de respostas às questões de investigação, juntamente com outras questões suscitadas por ele e que podem demandar novas pesquisas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino de matemática, com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), deve ser trabalhado de modo a aproximar o indivíduo a vários campos do conhecimento matemático, pois este serve como base para que, ao iniciar o Ensino Médio, o estudante consiga ampliar e desenvolver sua capacidade de abstração e raciocínio em todas as vertentes da matemática.

O conhecimento matemático usualmente é caracterizado como um conhecimento formal, que independe de aplicações a um contexto específico, e para se atingir esse formal passa-se por um processo de abstração. Os MDM podem contribuir nesse processo de abstração, desde que atividades envolvendo seu uso e que sejam elaboradas para esse fim.

Há muito tempo o homem utiliza materiais para desenvolver atividades relacionadas com a matemática, como por exemplo, as pedras para a contagem, o ábaco para efetuar operações. Lorenzato (2012) em um de seus artigos organizou de forma cronológica, vários pensadores e educadores que defendem o uso do concreto, segundo ele "já em 1650 Comenius defendia que o ensino deveria acontecer do concreto ao abstrato, demonstrando que o conhecimento se inicia pelo sentido e fazendo é que se aprende" (LORENZATO, 2012, p. 3.).

Os MDM podem possibilitar ao individuo visualizar relações matemáticas, muitas vezes tidas como de difícil compreensão. Seu uso pode se dar de forma visual, tátil e mental, sendo que este último está presente em todas essas formas, pois ao mesmo tempo em que o aluno está visualizando ou manipulando o material ele estará realizando operações mentais.

O aspecto visual inclui o indivíduo observar o objeto físico que lhe está sendo apresentado. O aspecto tátil se dá quando o indivíduo tem a oportunidade de tocar, manipular o objeto em questão, o que possibilita ao mesmo investigar além dos aspectos expostos pelo professor. A manipulação mental pode acontecer ao mesmo tempo em que o indivíduo experimenta os dois aspectos anteriores, quando ele abstrai relações e propriedades de que depois serão empregadas na elaboração de representações do objeto em questão. Ou seja, produz registros de representações a partir de abstrações favorecidas pelos MDM utilizados. Outra oportunidade para a ação mental ocorre quando o indivíduo, após lhe serem apresentados aspectos teóricos de um objeto matemático, consegue revelar que compreendeu a informação teórica dada ao manipular um material fornecido. Um exemplo, provar por meio de dobraduras que um quadrado pode ser decomposto em três retângulos equivalentes. (Ver atividade do momento 1). A relação existente entre estes três aspectos, neste trabalho, é considerada uma relação que pode contribuir para a compreensão do fazer matemática.

De acordo com Lorenzato (2012) e Fiorentini e Miorim (1990), somente o uso de MDM não garante o aprendizado, faz-se necessário um bom embasamento teórico acerca dos conteúdos que se pretende ensinar e também das formas como o sujeito aprende.

A relação entre o indivíduo e o tátil dá-se desde o início de sua vida e principalmente sua vida escolar. Nos anos iniciais da escola, muitas vezes, o ensino de determinados conceitos matemáticos se dá primeiro pelo contato visual e tátil com o material. A frequência deste uso, com o passar dos anos escolares, tende a diminuir, e praticamente desaparecer na etapa correspondente ao Ensino Médio. Os conteúdos deste período, , são abstratos, ou seja, o processo de aprendizado se dá mentalmente, não havendo mais a necessidade de apoios concretos. Há sim a necessidade de realizar operações mentais, na tentativa de compreender o que se lhe está apresentando.

Trabalhar com o material manipulável pode ser um tanto quanto complexo, o que não significa que o material irá dificultar a situação. Antes de se iniciar qualquer atividade deve haver preparação, conhecimento do objeto com o qual se irá trabalhar, saber sua finalidade, qual a área de aplicação e como se dará essa aplicação. Não é frequente encontrarmos situações em que os estudantes estejam trabalhando com atividades lúdicas, jogos e materiais manipuláveis. Isso se deve, possivelmente, ao desconhecimento por parte do professor do potencial dos MDM disponíveis atualmente em muitas escolas.

Tentar incorporar objetos do cotidiano, como simples folhas de papel sulfite, ao ensino de conteúdos proporciona ao aluno a oportunidade de trabalhar com a matemática de forma palpável e dentro de sua própria realidade. A intenção de se proporcionar uma aula diferenciada é sempre envolver o aluno e fazê-lo participante na construção dos seus conhecimentos, incentivar o desenvolvimento da autonomia.

Se conseguirmos despertar o interesse de estudantes para investigações matemáticas que os MDM podem incitar, daremos a eles condições para que desenvolvam suas habilidades referentes ao fazer matemática.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES

A matemática é tida para muitos como uma ciência difícil, complicada para se entender. Nota-se, em eventos no âmbito da Educação Matemática, que há uma busca incessante por metodologias e recursos que possam contribuir para seu entendimento e desta forma, mudar essa visão. Uma das alternativas para a promoção da aprendizagem pode se dar por meio de diferentes registros de um mesmo objeto matemático.

Esses diferentes tipos de registro podem ser relacionados à teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval que se refere aos estudos relacionados à aprendizagem da matemática envolvendo os aspectos cognitivos, desde a aquisição do conhecimento, aos problemas que envolvem essa aprendizagem. Essa teoria tem se revelado pertinente para esse trabalho na medida em que nos fornece elementos consistentes para analisar uma prática que consideramos produtiva para o ensino-aprendizagem da matemática.

Segundo essa teoria, as representações de um objeto matemático serão consideradas registros de representação de permitirem as três seguintes operações cognitivas: a formação, o tratamento e a objetivação. A relação entre essa teoria e as atividades propostas neste trabalho, poderão ser percebidas nos momentos segundo os quais organizamos o roteiro de atividades com MDM; esses momentos serão detalhados no capitulo 4.

Antes de apresentarmos uma descrição das atividades propostas aos sujeitos de nossa pesquisa experimental denominados estudantes, faremos uma discussão acerca de dois termos característicos dessa abordagem teórica à luz de nossos interesses de pesquisa: registro, representação.

Os Registros, segundo Duval (2011), são representações de objetos se cumprirem as funções cognitivas de formação, tratamento e objetivação, ditas funções serão descritas no decorrer do texto. A teoria de Duval permite a análise das produções matemáticas dos alunos apresentadas em situações de ensino. Essas produções precisam ser refletidas em relação ao ensino, pois esse ensino segundo Duval tem que se voltar para a conceitualização dos objetos matemáticos.

Com relação à matemática, precisamos ter sempre em mente que para um bom entendimento do que se está trabalhando se faz necessário no mínimo dois registros diferentes, pertencentes a sistemas semióticos distintos como, por exemplo, linguagem algébrica, língua natural, gráficos, figuras. “A mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro” (DUVAL, 2011, p. 100).

Segundo Duval[3] (1993, apud DAMM, 1999, p. 138) há três aproximações da noção de representações , estas são essenciais para o desenvolvimento do conhecimento: as representações mentais; as representações internas ou computacionais e as representações semióticas.

Para Duval (2011), as representações são ambivalentes, pois, de um lado não se deve confundir representação com objeto, por outro é necessária a representação para que se tenha acesso ao objeto, “pois, elas estão ‹‹no lugar dos›› objetos ou os ‹‹evocam››, quando esses não são imediatamente acessíveis” (DUVAL, 2011, p. 23).

É importante que se faça a diferenciação entre representação e signos. Estes são definidos por sua característica comum com as representações, pois

DUVAL[3], R. Registres de representation sémiotique et fonctionnements cognitif de la pensée. *Annales de didactique et Sciences Cognitives*, vol.5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993, pp.37-65 segundo Saint Augustin[4] (1997 apud DUVAL, 2001, p.23), “o signo é uma coisa (res) que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa”.

Ressalta-se que “os signos são radicalmente diferentes das representações, em sua relação com os próprios objetos que não é uma relação de causalidade, mas uma relação de referência” (DUVAL, 2011, p.23), além do mais, “os signos apresentam a possibilidade de poderem ser substituídos por outros signos, independente dos objetos que eles podem evocar” (DUVAL, 2011, 27).

> Em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações (...), portanto para seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 1999, p.135).

É comum, em fase de aprendizagem, confundir objeto matemático com sua representação, pois um mesmo objeto pode ter diferentes representações. Isso pode ser um dos motivos pelos quais o aluno apresenta maior dificuldade em determinados assuntos. Segundo Duval (2009),

> [...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figura... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL. 2009, p.14)

A conceitualização segundo Duval (2009, p. 32), “pressupõe, então a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro”.

Para Duval (2009), os registros de representações devem proporcionar três atividades cognitivas ligadas a semiósis: Formação, tratamento e conversão.

A *formação* de representações refere-se à identificação do objeto matemático representado, ou seja, algo que queremos representar. “Podemos

[4] AUGUSTIN, S. De Doctrina chistiana. Paris: Bibliothèque Augustinienne, 1997, p. 136.

comparar a formação de uma representação à realização de uma tarefa de descrição." (DAMM, 1999, p. 144). O *tratamento* é uma operação cognitiva, está relacionado à transformação do registro de representação. Esta transformação acontece de forma interna, ou seja, no interior de um mesmo sistema semiótico porém, altera-se a forma escrita, por exemplo. Damm (1999, p.145) ressalta que "os tratamentos estão ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático". A *conversão,* refere-se à transformação de um dado registro de representação, esta representação se dá de forma externa, ou seja, há alteração na forma de representação do objeto, por exemplo de uma função a um gráfico. Para Duval (2009), quando trabalhamos com a conversão, deve ficar claro a relação entre semiósis e noésis. A semiósis refere-se à formação da representação e a noésis à apreensão conceitual de um objeto.

As representações semióticas possuem grande importância à atividade cognitiva. Porém, Duval (2009), destaca que das três atividades citadas anteriormente, somente às duas primeiras (formação e tratamento), na maioria dos casos, são consideradas para o ensino. Para Brandt e Moretti (2005, p. 205), "o privilégio de uma das três atividades cognitivas prejudica a conceitualização do objeto matemático". Para Damm (1999, p. 142), "poderemos falar em conceitualização, aquisição do conhecimento somente a partir do momento em que o aluno "transitar" naturalmente por diferentes registros".

A teoria dos registros de representação semiótica vem ao encontro da proposta deste trabalho, pois consideramos, assim como Duval (2011), que o conhecimento será adquirido a partir do momento em que o estudante possuir autonomia para transitar entre pelo menos dois registros de representação

Para tanto, elaboramos uma sequência de atividades envolvendo as três operações cognitivas de formação, tratamento e conversão.

Ao iniciarmos a atividade a partir de dobras aleatórias e em seguida passarmos para dobras a serem feitas com orientação e em seguida propusemos a associação destas a conceitos matemáticos, acreditamos que nesse ponto, o aluno já consiga fazer algumas representações semióticas que o ajudarão na conceitualização de objetos. Conforme Damm (1999, p. 143), "sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende".

2.3 SOBRE A MATEMÁTICA, SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

A realização desta pesquisa se apoia em uma concepção de matemática, configurada permanentemente na vivência da autora na docência em matemática. Apoia-se também em pressupostos que permeiam a prática profissional e que direcionam escolhas metodológicas e no entendimento acerca de como ocorre o desenvolvimento cognitivo e junto desse a aprendizagem de matemática pelo aluno. Por isso nesta seção faremos uma exposição acerca desses três aspectos norteadores de nosso estudo.

Para tratar da concepção de matemática, recorremos a Davis e Hersh(1995) que muito bem nos apresentam duas vertentes em especial, dentre outras possíveis: a concepção formalista e a concepção platonista de matemática. Nesta última, a existência dos objetos matemáticos, que não são físicos ou materiais, são imutáveis, não foram construídos, criados, nem desaparecerão, independe de nosso conhecimento sobre eles. Nessa concepção, uma vez que tudo já existe, não há espaço para a invenção. Percebemos que essa concepção cabe muito bem como subjacente a certas atividades de ensino que envolvem investigação matemática, descoberta de padrões e relações, como por exemplo, a percepção de formas geométricas na natureza, a identificação da razão áurea em seres vivos. Nesse contexto, o matemático, estudante ou professor, "é uma cientista empírico, como o geólogo: não pode inventar nada, porque já existe tudo. Ele só pode descobrir." (DAVIS, HERSH;1995, p. 300).

Nas atividades com MDM que propomos, e mais ainda nos desdobramentos que elas permitem, há espaço para exploração de descobertas. No entanto, por questões metodológicas, as ações do estudante estão direcionadas para a percepção e verificação da existência de um objeto matemático específico, captado com o emprego de outros objetos matemáticos. Nelas podemos destacar o acesso aos objetos matemáticos por meio das representações deles.

Diferente do platonismo, a concepção formalista de matemática não pressupõe a existência de objetos. "A matemática consiste em axiomas, definições e teoremas – por outras palavras, em fórmulas." (DAVIS e HERSH, 1995, p. 300) Essas fórmulas podem admitir interpretações físicas que lhe dão significado inclusive permitindo decidir de elas são falsas ou verdadeiras. No entanto, do ponto de vista da matemática, existem regras (lógicas) através das quais as fórmulas são obtidas uma a partir de outras. Essa concepção é bastante presente no ensino de matemática, embora não seja explicitada ou discutida, o que demandaria uma abordagem de aspectos filosóficos da matemática no ensino, algo também incomum, provavelmente devido à formação dos professores pouco voltada para a abordagem de questões dessa natureza.

Exemplos de como a concepção formalista se apresenta no ensino de matemática no ensino médio, por exemplo, podem ser identificados quando ao estudante são apresentadas em aulas expositivas, ou por meio do próprio livro didático, definições, propriedades e resultados importantes que devem ser conhecidos para servirem à obtenção de novos resultados, também importantes, dentro da própria matemática. A aplicação dessas definições, propriedades e resultados em contextos além da matemática aparece ao final, quando aparece. Esse é, ou foi durante muito tempo, o caso dos conteúdos *matrizes* e *determinantes*, comumente iniciado com a definição de matrizes, seus tipos e notações, seguidos de operações e propriedades acerca destas, além de um estudo acerca de determinantes. O ensino de sistemas de equações lineares geralmente ocorre desconectado do ensino de matrizes, como sendo um conteúdo à parte. Esses conteúdos, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, se prestam a uma discussão sobre a concepção formalista da matemática no ensino, uma vez que evidencia a conveniência da criação/apresentação de conceitos e definições, o estabelecimento de relações e a percepção de propriedades. Quanto à aplicação desses conteúdos, os propósitos do ensino tratarão de direcionar.

Apesar dessa forma de ensino ser comum, notamos que em livros didáticos atuais de matemática para o ensino médio, há propostas de abordagem desses conteúdos que partem de situações possíveis no cotidiano dos alunos e, a partir delas, propõe o desenvolvimento do conteúdo como uma ferramenta para a resolução de problemas formulados a partir do estudo de situações do cotidiano. Mas a adoção dessa metodologia de ensino, que contempla a modelagem matemática como estratégia de ensino, ainda é pouco presente no cotidiano escolar.

Quanto às atividades com MDM e registros de representações que propomos, a presença de elementos de uma concepção formalista de matemática também é notada. A forma de escrita e notação usualmente empregada para a abordagem do Teorema de Tales, dos casos de congruência e semelhança de triângulos, na forma dedutiva de organizar argumentos geométricos, numéricos e algébricos para produzir uma prova. Essa prática demanda a existência de elementos bem definidos (ponto médio, segmento de reta, ângulo, medida etc.) e uma notação precisa. Além disso, com o propósito de desprendimento do MDM em prol de uma representação geométrica e depois algébrica dos elementos e relações estabelecidas, possíveis, devido à justificativa teórica da situação posta, o foco da atividade passa a ser o que o estudante escreve, e que deve representar o que ele cria mentalmente a partir da manipulação das representações construídas. Assim, podemos identificar nessas atividades a possibilidade de elaboração de representações semióticas segundo (DUVAL, 2011), pois se tratam de representações produzidas intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico de representação, a partir da língua natural como sendo o primeiro sistema semiótico.

Nessa manipulação encontramos a possibilidade de interpretar a ação do estudante a partir das transformações entre registros de representações semióticas também propostas por DUVAL(2011). Este tópico será abordado no capítulo seguinte, no entanto podemos adiantar que no momento em que o estudante, de posse da habilidade em realizar registros dentro de um sistema de notação convencionado (usando figuras geométricas e letras), forma um registro baseado em seu entendimento da situação problema posta, como apoio de orientações impressas e com a intervenção da pesquisadora, temos um cenário propício para a observações das transformações de tratamento e conversão (DUVAL, 2011).

Como o propósito deste trabalho é investigar o potencial das atividades com MDM propostas associadas a registros de representações, uma vez que apenas a manipulação física, ainda que crítica e reflexiva, não garante a atividade matemática de fato, entendemos que este estudo e seus resultados constituem o início de um projeto de pesquisa mais amplo, cujas limitações de tempo e entendimento presentes, apenas permitem alavancar.

Para finalizar esta seção atendendo aos propósitos inicialmente postos, faremos considerações acerca de como entendemos o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem de matemática em estudantes na faixa etária dos 15 anos, por ser esta a idade média dos estudantes sujeitos de nossa pesquisa. Baseamo-nos na Epistemologia Genética de Jean Piaget(1896-1980), de modo a situar o papel do MDM na aquisição do raciocínio hipotético-dedutivo, essencial à aquisição de conhecimento matemático.

Piaget dedicou-se à explicação biológica do conhecimento que, segundo ele, surge a partir do momento em que é comunicável e controlável. Biólogo e filósofo de formação, ele buscou explicar o processo do desenvolvimento cognitivo por meio do que ele chamou de *estruturas cognitivas*: certas estruturas mentais que o organismo elabora ao interagir com o meio. Esse processo ocorre em etapas ordenadas denominadas *estágios* ou *períodos*, caracterizadas por determinados comportamentos que retratam a existência das estruturas mencionadas e a aprendizagem de algo novo depende do estágio de desenvolvimento no qual o indivíduo está. A aprendizagem pode ser provocada por situações, por um experimento psicológico, por um professor. Ela é provocada, como oposição à espontaneidade do desenvolvimento, que não é uma soma discreta de experiências de aprendizagem, mas pode ser explicado por meio delas (PIAGET, INHELDER, 1995).

No primeiro estágio do desenvolvimento cognitivo, denominado sensório motor, o indivíduo é guiado pela percepção e não há ainda a presença da linguagem. O estágio seguinte inclui a linguagem, a imagem mental e a utilização de símbolos para representar objetos quando estes se encontram ausentes, este, é denominado pré-operatório e se dá por volta dos dois aos sete anos de idade, embora a faixa etária não seja delimitada nesse modelo teórico. No entanto, a atentar para essa característica podemos situar a explicação no sistema de ensino regular atual, o qual aos sete anos a criança encontra-se na etapa de alfabetização. O terceiro estágio de desenvolvimento cognitivos descrito por Piaget é denominado operatório concreto, apresenta como característica a reversibilidade mental, permite ao indivíduo retomar uma ação em pensamento. (PIAGET, INHELDER, 1995). As ações mentais nessa fase, em geral, aplicam-se a objetos físicos, e não a hipóteses. A partir dos 12 anos aproximadamente, inicia-se o estágio o operatório formal*,* no qual as operações são aplicadas não somente a objetos físicos, mas também, a hipóteses formuladas em palavras. O indivíduo possui capacidade de formalização do raciocínio, no sentido de que pode combinar proposições e conceitos além do que existe na sua realidade. Adquire o raciocínio hipotético-dedutivo**.**

Assim, temos que nos níveis elementares do desenvolvimento cognitivo, o entendimento tem sua fonte na manipulação de objetos físicos. Mas, na medida em que o indivíduo se desenvolve, a construção dos novos conceitos tende a ser mental, não mais apoiada em tais objetos. E, a partir da manipulação mental desses conceitos, são construídos conceitos matemáticos. NEGRELLI (2000).

A descrição feita por Piaget e seus colaboradores do processo de desenvolvimento cognitivo humano mostra que a maneira como uma pessoa representa o mundo muda sistematicamente com o desenvolvimento, o que é de extrema relevância, quando se trata do ensino de matemática se compreendemos que a matemática lida com representações.

As experiências com objetos físicos não constituem obstáculos para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo, mas são vistas como uma fase necessária para se chegar até ele. Ou seja, a elaboração das estruturas mentais que caracterizarão o raciocínio hipotético-dedutivo dependerá da elaboração das estruturas típicas da fase de manipulação de objetos físicos. Por isso, consideramos que a atividade com MDM e registros de representações que propomos pode contribuir significativamente para o aprendizado de matemática e, mais que isso, para a prática da atividade matemática, de acordo com Duval (2011).

Além de falar dos estágios de desenvolvimento, importante é colocar que no modelo teórico piagetiano há quatro grupos de fatores principais explicam o processo de desenvolvimento. A maturação, que é o amadurecimento biológico do organismo; as experiências do indivíduo, anteriores e atuais; a transmissões e interações sociais vividas e a equilibração, que é o processo por meio do qual o sistema cognitivo individual busca um estado de equilíbrio superior, quando momentos anteriores de equilíbrio são abalados na interação com o meio. (PIAGET, INHELDER, 1995). Destacamos esses fatores porque nas atividades que propomos o fator relacionado a experiências anteriores mostra-se decisivo.

3. SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS

Tendo como um dos objetivos desta pesquisa a elaboração de uma sequência de atividades que envolvam o uso de MDM e registros de representações para o ensino de matemática, descreveremos, a seguir, as referidas atividades e apontaremos à possibilidade de promoverem elaborações e transformações de registros de representações semióticas.

Como MDM serão empregadas folhas[5] quadradas de papel sulfite, lembrando que por MD entendemos que "é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem" (LORENZATO, 2012, p. 18) e por MDM os MD que privilegiam aspectos táteis e visuais.

Escolhemos a folha de papel tamanho por ser um material acessível, de baixo custo, reciclável, seguro e com potencial para atividades dinâmicas. Caracterizamos como dinâmicas aquelas atividades que além de possibilitarem movimentações e mudanças(de formato, tamanho, etc) possibilitam a investigação das causas e consequências das movimentações e mudanças.

As atividades estão agrupadas em momentos, sendo cada momento definido pelos tipos de representação que a atividade permite elaborar e pelo grau de necessidade de manipulação e dependência do MDM para a execução das ações demandadas. Ou seja, do momento zero ao momento quatro a necessidade e/ou dependência de apoio material diminui, podendo tornar o MDM dispensável para a execução das últimas atividades.

Durante a descrição das atividades, neste texto, buscaremos identificar e destacar diferentes tipos de representações e possíveis transformações de representações que esta atividade poderá mobilizar, de modo especial aquelas pertencentes à fundamentação teórica dada por Raymond Duval: a formação, o tratamento e a conversão.

> A transformação de representações semióticas é o processo que encontramos em todas as formas da atividade matemática. Quer quando se trata de explorar situações, resolver problemas ou demonstrar conjecturas, ela constitui a dinâmica da

[5] Denominaremos por folha (s), a folha de papel de formato quadrangular, com dimensões 21cm x 21cm, obtidas a partir de folhas sulfite A4 , recortando-as, de modo a reduzir o lado maior até que fique com a mesma medida do lado menor.

> progressão. Dois tipos de fatores a comandam: primeiro, a diversidade de representações que podem ser mobilizadas e, na sequência, a execução alternada ou em paralelo, explícita ou implícita, de duas transformações diferentes das representações efetivamente mobilizadas. (DUVAL, 2011, p.66).

Antes de descrevermos as atividades de cada momento, esclareceremos o significado dos termos empregados para indicar: o que se pede que o estudante faça, a *atividade/ação*, que será denotado por um **A**; a resposta esperada para a ação, a *hipótese*, denotada por **H**. Os símbolos adotados pelos termos serão acompanhados de índices **m** e **o** que indicam respectivamente o momento e a posição da atividade em uma dada sequência. Por exemplo, a terceira atividade proposta no momento 1 será indicada por $\boldsymbol{A_{1,3}}$.

Atividades ($\boldsymbol{A_{m,o}}$)**:** indicam o que a pesquisadora propõe ao estudante, por meio dos materiais disponibilizados, tarefas escritas e/ou orientações verbais.

Hipóteses ($\boldsymbol{H_{m,o}}$)**:** indicam o que a pesquisadora espera dentre as possíveis ações/respostas do estudante diante da situação presente.

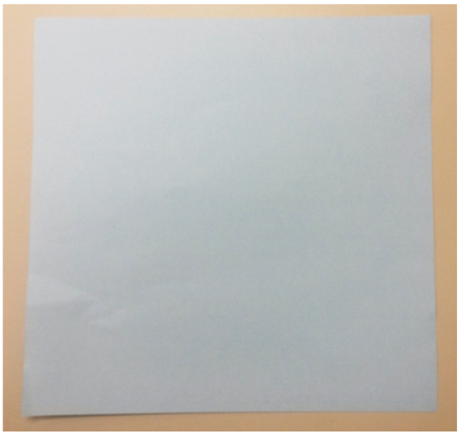
Na sequência, apresentaremos a descrição das atividades elaboradas, agrupadas em cinco momentos.

3.1 MOMENTO ZERO

As atividades deste momento têm como objetivo a familiarização do estudante com o MDM, o reconhecimento do seu vocabulário e o diagnóstico de sua familiaridade com conceitos matemáticos que serão tratados como, por exemplo, vértice, diagonal, ponto médio, etc. Além das ações demandadas são descritas as intervenções prováveis da pesquisadora com o intuito de orientar o estudante e, quando necessário, esclarecer dúvidas.

Inicialmente disponibilizam-se folhas de cores variadas sobre uma mesa. As dobras neste momento zero podem ser realizadas todas em uma mesma folha.

Figura 1- Folha de papel de formato quadrangular, com dimensões 21cm x 21cm, obtida a partir de folha sulfite A4



Fonte: A autora (2015)

$A_{0,1}$: Atividade exploratória com uma folha de papel quadrada para reconhecimento/diagnóstico do vocabulário matemático do estudante. Pedir que dobre a folha quadrada de modo a obter dois retângulos[6].

Figura 2 - Resultado da dobra da folha de modo a obter dois retângulos

Fonte: A autora (2015)

[6] Entende-se que, ao realizar a dobra obtém-se uma região retangular, e não um retângulo, compreensão análoga às demais figuras obtidas a partir das dobras.

$H_{0,1}$: Que o estudante revele familiaridade com os termos metade, ponto médio, referindo-se a um quadrado e aos seus lados.

$A_{0,2}$: Pedir que dobre a folha quadrada de modo a obter dois triângulos.

Figura 3 - Resultado da dobra da folha de modo a obter dois triângulos

Fonte: A Autora (2015)

$H_{0,2}$: Que o estudante revele familiaridade com o conceito de diagonal.

$A_{0,3}$: Pedir que dobre a folha quadrada de modo a obter quatro quadrados iguais.

$H_{0,3}$: Que o estudante revele familiaridade com conceitos como paralelismo entre segmentos de retas, perpendicularismo e ângulo reto.

Tanto no Momento 0 quanto no Momento 1, não enfatizaremos a precisão no uso da linguagem matemática pelo estudante, empregando termos formais. Valorizaremos o uso de termos e expressões da língua materna que permitam que se compreenda o que ele pretende informar. Desta forma, o estudante revela seus conhecimentos em relação a questões de linguagem e notação e evidencia, o que consideramos pertinente destacar, que "a língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento." (DUVAL, 2011, p. 83). No ensino, Duval acrescenta, que sua função é reduzida à de comunicação, como se tratasse apenas de um código, "privilegiando as palavras em detrimento das operações discursivas", e o mesmo não concorda com esse fato.

A língua materna desempenha importante papel no ensino e aprendizagem de matemática. A compreensão de conceitos e estratégias matemáticas pode ser favorecida pelo uso intencional da língua de modo a trazer para o universo linguístico do aluno descrições e explicações em termos que lhe são familiares, exigindo-lhe em seguida que os reformule utilizando o código convencionado que lhe deve ser ensinado na escola.

> A língua continua sendo um registro necessário em matemática, não apenas para enunciar definições, teoremas, conjecturas etc. Uma linha de fratura invisível, mas muito profunda, separa a utilização da linguagem em matemática e a dos outros domínios do conhecimento. Seja para designar, enunciar ou deduzir, não mobilizamos os mesmos tipos de operações discursivas em cada uma das duas situações epistemológicas. As maneiras de designar, definir, raciocinar em matemática são estranhas, muitas vezes contrárias às que praticamos espontaneamente em uma troca ou em um debate fora da matemática. (DUVAL, 2011, p. 98-99)

Nas atividades que propomos a língua é elemento essencial para a produção de representações, não sendo utilizada apenas para registrar combinações de símbolos válidas. Nela as transformações de representações semióticas possibilitadas e demandadas revelam a presença da atividade matemática.

3.2 MOMENTO UM

Para a realização das atividades deste Momento são disponibilizados os seguintes materiais: folhas, lápis, borracha, régua graduada, jogo de esquadros sem graduação, folhas brancas para registros (pautadas e não pautadas). É necessário que a mesa sobre a qual serão realizadas as atividades seja retangular, uma vez que em dado momento solicitar-se-á que o estudante posicione a folha de modo que um dos lados fique paralelo à borda da mesa.

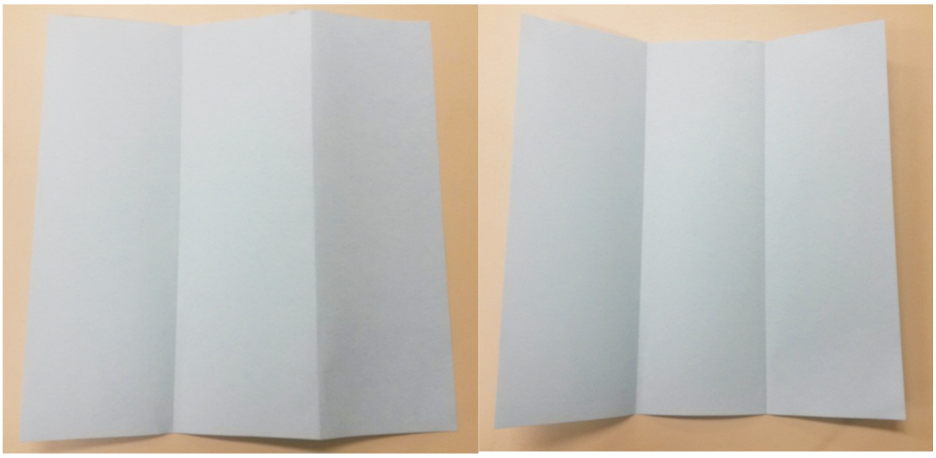
Sobre a mesa são disponibilizados os materiais listados inicialmente, esclarecendo ao estudante que poderá utilizá-los livremente.

Neste Momento 1 todas as solicitações e questões são feitas verbalmente pela pesquisadora ao estudante. Cabe lembrar que aparentes lacunas percebidas nas solicitações seguintes terão sua possibilidade de existência minimizada ou mesmo eliminada, uma vez que o MDM e sua manipulação também fornecerão informações necessárias. Além disso, o rigor quanto ao uso de termos matemáticos é flexibilizado conscientemente como, por exemplo, quando se refere ao quadrado, que na verdade é uma região quadrangular ou mais, ainda um objeto espacial (prisma).

$A_{1,1}$: Solicitação verbal ao estudante: Dobre esta folha obtendo três partes retangulares iguais.

$H_{1,1}$: Que obtenha três retângulos conforme a imagem a seguir.

Figura 4 - Resultado da dobra da folha de papel de modo a obter três retângulos



Fonte: A autora (2015)

$A_{1,2}$: Qual é a relação entre o lado menor de um desses retângulos formado e o lado do quadrado inicial?

$H_{1,2}$: Que o estudante perceba e verbalize que o lado menor equivale a 1/3 do lado do quadrado.

$A_{1,3}$: Como podemos verificar que as medidas do lado menor dos três retângulos são iguais?

$H_{1,3}$: Que o estudante argumente sobrepondo as três regiões retangulares (argumento geométrico), utilize a régua graduada (argumento aritmético) efetuando medições, ou se expresse com palavras.

Faz-se necessário ressaltar que o estudante é induzido a chegar ao valor de 1/3, pois essa relação será primordial para as atividades que seguem. Caso a relação não seja identifica de imediato pelo estudante, o professor deverá intervir e encaminhar a atividade de modo que o estudante perceba a relação..

3.3 MOMENTO DOIS

Para as atividades propostas neste momento 2 é apresentado ao estudante uma folha sulfite A4 cortada em formato quadrangular semelhante a utilizada na atividade anterior e outra folha sulfite A4 com orientações também impressas (apresentadas a seguir por meio das $\boldsymbol{A_{m,o}}$) para a realização de uma sequência de atividades elaborada pela autora. Nas figuras 5 a 10 são indicadas as dobras e registros que se espera que o estudante realize (o que equivale às $\mathbf{H_{m,o}}$). A linha de cor azul tracejada indica a dobra que deve ser feita e as letras maiúsculas os pontos destacados.

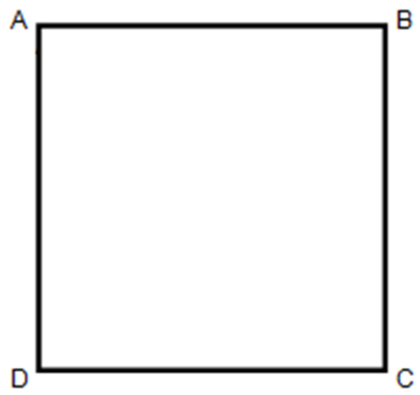
Para iniciar este momento o estudante recebe essas duas folhas (ver apêndice 1). A partir deste momento, no diálogo será priorizado o uso termos matemáticos, de modo que a pesquisadora interpretará a linguagem usual do estudante convertendo-a em termos técnicos conforme necessidade. Por exemplo, caso o estudante mencione o “ponto que fica no meio” a pesquisadora o denotá-lo-á ponto médio, no caso de “ponto do canto”, vértice.

Caso a pesquisadora observe erros na execução das orientações, não percebidos pelo estudante, deverá intervir de modo a orientar o estudante a corrigir o erro.

$\mathbf{A_{2.1}}$: Disponha uma folha de papel quadrada sobre a mesa de modo que um dos lados fique paralelo à borda da mesa (que é retangular).

$\mathbf{A_{2.2}}$: Escreva nos cantos dessa folha as letras **A**, **B**, **C** e **D** indicando os vértices de um quadrado. Inicie pelo canto superior esquerdo e siga no sentido horário.

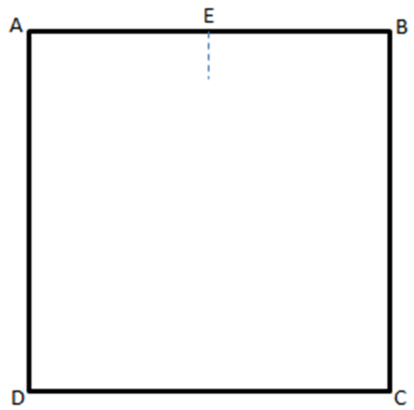
Figura 5 - Folha quadrada de papel com dimensões 21cm x 21cm



Fonte: A autora (2014)

$A_{2.3}$: Considere o lado AB do quadrado, que é um segmento de reta, e determine seu ponto médio. Use a letra **E** para indicar este ponto médio e escreva-a na folha adequadamente.

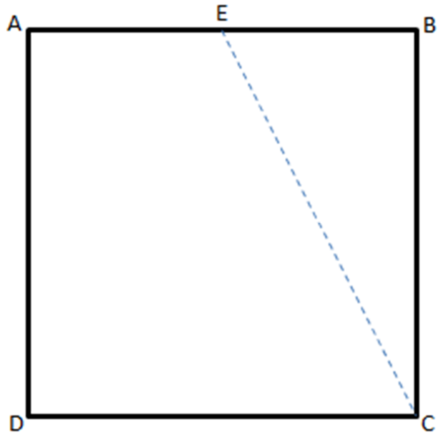
Figura 6 - Dobra para encontrar o ponto médio do segmento AB



Fonte: A autora (2014)

$A_{2,4}$: Dobre e desdobre essa folha quadrada de modo a marcar (vincar) o segmento de reta EC, que vai do ponto médio **E**, que você acaba de determinar, ao vértice **C**. Observe que com essa dobra fica evidente o triângulo retângulo EBC.

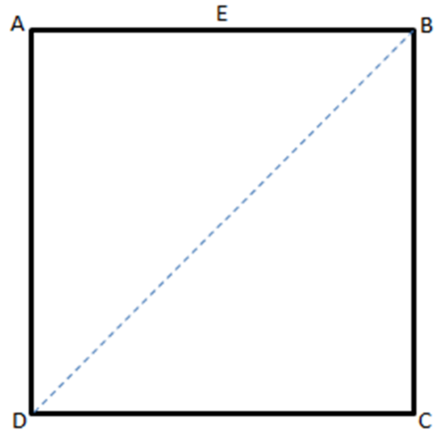
Figura 7 - Dobra para determinar o segmento EC



Fonte: A autora (2014)

$A_{2,5}$: Dobre e desdobre a folha de modo a marcar a diagonal BD do quadrado ABCD.

Figura 8 - Dobra para determinar a diagonal do quadrado ABCD

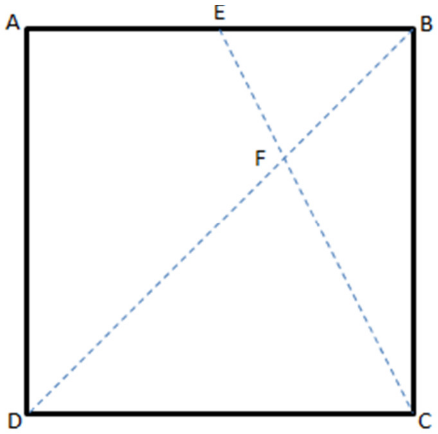


Fonte: A autora (2014)

$H_{2,5}$: Que tenha familiaridade com aspectos relacionados ao quadrado.

$A_{2.6}$: Observe que essa diagonal BD intercepta a hipotenusa EC em um ponto. Escreva na folha a letra **F** para indicar esse ponto de interseção.

Figura 9 - Intersecção do segmento EC com o segmento BD.

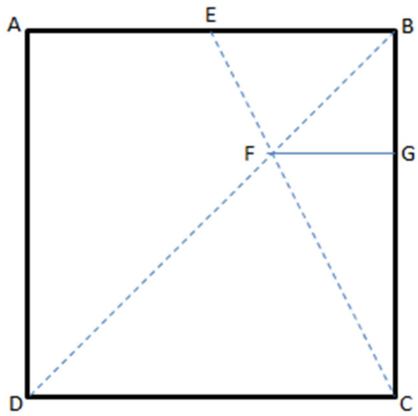


Fonte: A autora (2014)

$A_{2.7}$: Visualize um ponto **G**, situado entre os vértices **B** e **C**, de modo que o segmento de reta FG seja paralelo ao lado EB do triângulo EBC. Escreva na folha a letra **G** para determinar esse ponto.

Trace a lápis o segmento de reta FG na folha.

Figura 10 - Determinação do segmento FG



Fonte: A autora (2014)

$H_{2,7}$: Que o estudante tenha familiaridade com termos como paralelo, perpendicular e outros relacionados ao quadrado.

***$A_{2,8}$*:** Observe as anotações que você fez na folha e responda: qual a relação entre a medida do segmento de reta FG e a medida do lado do quadrado ABCD?

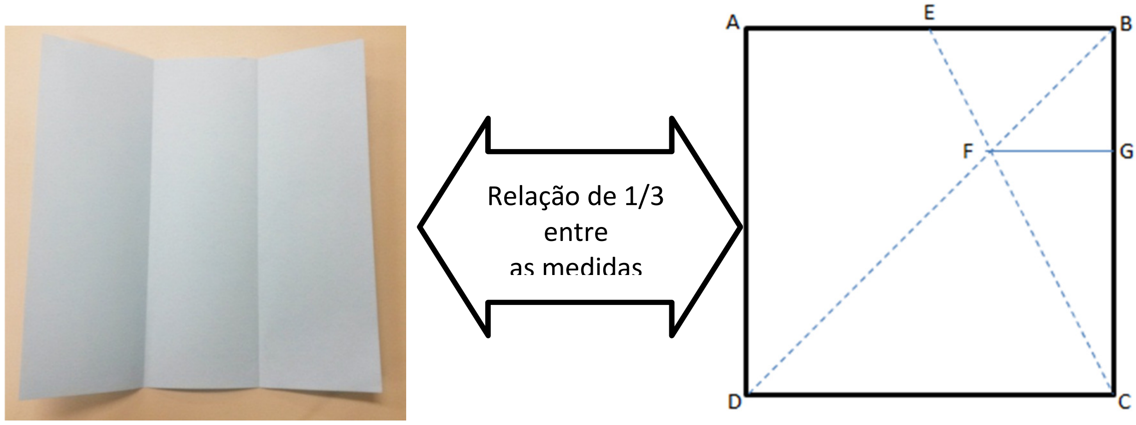
$H_{2,8}$: Ele levantará a hipótese de que FG=1/3 BC. A hipótese poderá ser levantada a partir da comparação com as dobras realizadas na folha de modo a obter três retângulos na atividade anterior. Além disso, o estudante terá a sua disposição um jogo de esquadros sem graduação que também poderá utilizar.

$A_{2,9}$: Afirmar que FG é 1/3 BC.

$H_{2,9}$ O estudante concorda.

Ao final destas atividades podemos observar uma transformação entre os registros de representações. Na passagem dos Momentos 1 a 2 realiza-se a representação do mesmo objeto (neste caso a relação 1/3 entre duas medidas) de duas formas diferentes, no Momento 1 utilizando dobras e no Momento 2 utilizando registros com o emprego de sistemas de signos diferentes. Neste caso, podemos observar relações entre medidas, estas são representadas por um registro numérico.

Figura 11 Registro realizado no Momento 1 e registro realizado no momento 2



Fonte: A autora (2014)

3.4 MOMENTO TRÊS

Para a descrição das atividades propostas neste momento 3 é apresentada impressa em uma folha sulfite A4 uma figura que representa o contorno da folha quadrada utilizada para dobras e outra folha sulfite A4 com orientações também impressas (ver apêndice 2 - 3) .

Neste momento as atividades propostas têm o objetivo de conduzir o estudante à elaboração de uma justificativa matemática, uma prova, da relação matemática expressa por FG = 1/3 BC. Essa prova será pautada em argumentos geométricos reforçados por relações algébricas decorrentes de pontos destacados e da semelhança entre figuras obtidas.

Vale lembrar que a construção de uma sequência de atividades com MDM foi pensada, no início do curso de mestrado, para o ensino de determinados conteúdos a um grupo específico de alunos do ensino regular e que, devido ao redirecionamento da pesquisa, necessário em função da mudança dos sujeitos, o objetivo da atividade de ensino no que diz respeito ao conteúdo a ser ensinado não estava mais determinado. Isso, no entanto, trouxe o direcionamento da pesquisa para os registros de representações e de modo especial, àqueles produzidos com o intuito de explicitar uma relação matemática detectada a partir do uso de um MDM e produzir uma prova matemática para ela.

O conteúdo nesse caso volta-se para o procedimento tipicamente empregado em matemática para estabelecer resultados como válidos, a prova ou demonstração. Tratar de demonstrações não é o foco deste trabalho, mas a relevância do tema tem levado à produção de várias pesquisas como, por exemplo, Garnica(1995) e Negrelli(2000). Consideramos que a habilidade de elaboração mental e produção escrita de uma prova matemática, com o apoio de atividades envolvendo um MDM, pode contribuir significativamente para o aprendizado desse aspecto importante que é o modo de proceder em matemática.

Assim, o aprendizado promovido não é o de um resultado específico(teorema-fórmula) mas do processo para o estabelecimento de novos resultados em matemática e o objetivo da atividade está voltado, principalmente, ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e Médio é importante identificar as principais características da matemática, de seus métodos para que no nível fundamental de ensino ela possa desempenhar “[...]equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno [...]” (BRASIL, 1997, p.29). No nível médio, entre os objetivos do ensino de matemática está o de levar o aluno a “[...]expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática[...]” (BRASIL, 1997, p. 85).

Nesse contexto de produções e transformações de registros de representações é importante ressaltar que,

> Evidentemente de um ponto de vista matemático, apenas as demonstrações permitem produzir novos conhecimentos. Mas, de um ponto de vista cognitivo, não podemos compreender os encaminhamentos matemáticos, isto é, adquirir uma autonomia mínima de iniciativa e de controle para realizar uma atividade matemática, sem ter tomado consciência das operações especificas de cada um dos registros mobilizados. (DUVAL, 2011, p. 97).

Para levar o estudante a tomar consciência do que ele realiza em cada um dos registros que elabora, nesse momento 3 disponibiliza-se ao estudante uma folha sulfite A4 na qual estará desenhado um quadrado (com medidas 12 cm x 12 cm) que representa o contorno da folha quadrada utilizada no momento anterior. Receberá também outra com instruções para registrar todos os pontos destacados e dobras efetuadas no momento anterior, além do segmento FG traçado a lápis por ele.

Para isso o estudante tem a sua disposição lápis, borracha e jogo de esquadros sem graduação.

Orientações.

$\boldsymbol{A_{3,1}}$: Escreva as letras A, B, C, e D indicando os vértices do quadrado ABCD.

***H**$_{3,1}$*: O estudante realizará a atividade de registro sem dificuldades.

***A**$_{3,2}$*: Escreva a letra E, que representa o ponte médio do lado AB do quadrado, e trace o segmento EC utilizando a régua.

***H**$_{3,2}$*: Que ele perceba que pode encontrar o ponto médio utilizando o traço das diagonais e o jogo de esquadros.

***A**$_{3,3}$*: Escreva as letras F e G e trace o segmento FG.

***H**$_{3,3}$*: Que manifeste que o segmento FG é paralelo ao segmento AB.

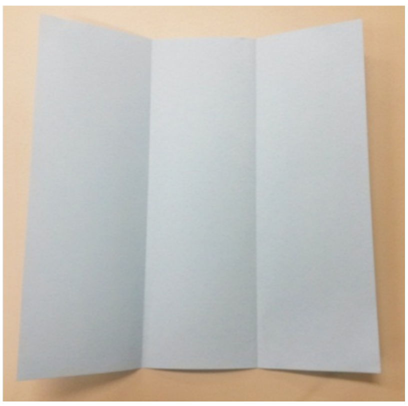
***A**$_{3,4}$*: Na atividade anterior você verificou, utilizando régua e também dobrando a folha de papel quadrada, que o segmento FG mede 1/3 do lado do quadrado ABCD.

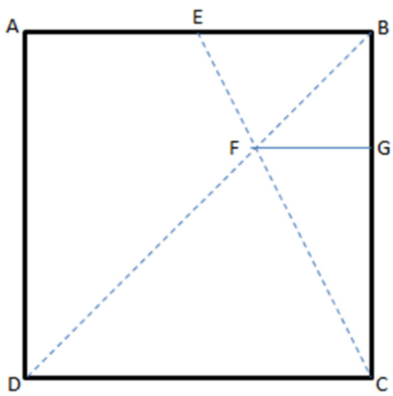
A partir das anotações feitas na folha como você prova que o segmento de reta FG mede 1/3 do lado do quadrado ABCD? Ou seja, que FG= 1/3 BC? Escreva.

***H**$_{3,4}$*: Que identifique relações matemáticas que serão utilizadas na elaboração de uma provas.

O estudante poderá recorrer as três registros realizados até o momento.

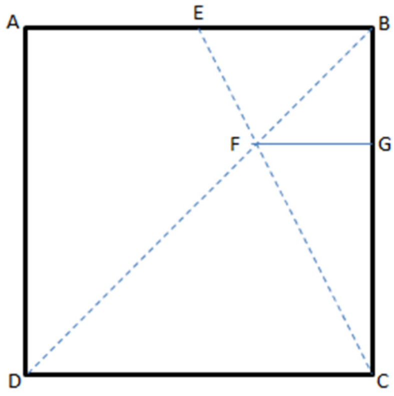
Figura 12 – Registro realizado no momento 1 e 2 com uma folha de papel cortada com tamanho 21 cm x 21 cm





Fonte: A autora (2014)

Figura 13 Registro realizado no momento 3 com uma figura quadrangular medindo 12 cm x 12 cm, impressa em uma folha de sulfite



Fonte: A autora (2014)

Ao finalizar o terceiro momento, é possível observar a produção de três registros além de perceber uma transformação entre os registros, porém isso não garante a operação cognitiva da conversão. Para que ocorra a conversão faz-se necessário a alteração na relação entre as medidas dos lados, como por exemplo, mudar o ponto E de posição de modo a provocar uma alteração na relação entre as medidas, além de, essa relação ser expressa por meio da linguagem natural e da linguagem numérica. No último registro há a alteração na medida do lado do quadrado, porém esse fato não altera a relação existente entre os lados.

3.5 MOMENTO QUATRO

No ensino de matemática naturalmente o papel do professor é de extrema importância, pois a ele cabe a responsabilidade de elaborar sequências de atividades objetivando mobilizar os aspectos cognitivos fundamentais à formação, ao tratamento e à conversão de registros de modo que o sistema semiótico possa ser um registro de representação. Afinal, não é qualquer registro que se constitui numa representação semiótica; ela é produzida intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico de representação. Como bem nos coloca Duval,

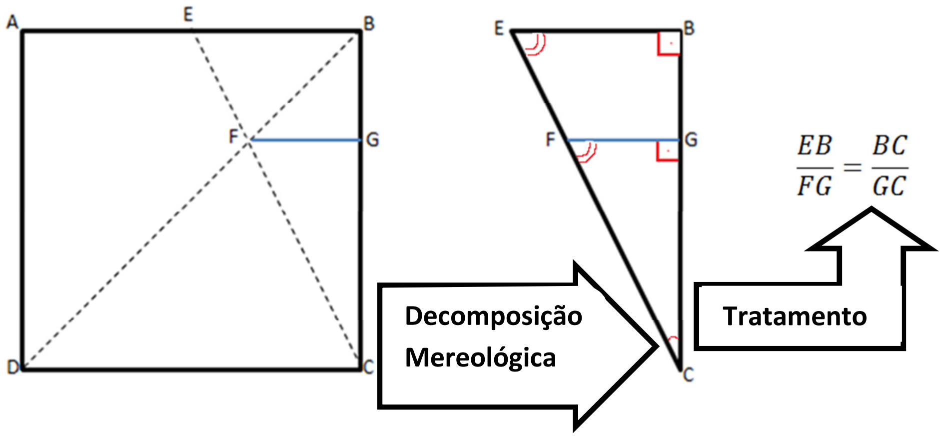
> As representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços. (DUVAL, 2011, p.38)

Neste momento 4 temos a atividade de ensino com o professor no seu papel de mediador entre o estudante e o conhecimento matemático. O diálogo, a discussão entre o estudante e a professora/pesquisadora pode tornar-se um fator decisivo na formação de uma representação. Por isso, a partir desse momento a pesquisadora tende a intervir com mais frequência na atividade devido à necessidade de apoio do estudante para mover-se num terreno desconhecido, pois elaborar provas e demonstrações não é tarefa usual no ensino fundamental e médio. Também devido a esse fato, a pesquisadora poderá conduzir a atividade de modo que leve o estudante a compreender ou fazer relações entre registros que o mesmo ainda não havia percebido.

Nesse momento as ações e questões são postas verbalmente pela pesquisadora.

***A**$_{4,1}$*: Observe os triângulos EBC e FGC, que relação há entre eles? Qual a relação existente entre as medidas dos lados dos triângulos? Dos ângulos?

Figura 14- Relação existente entre os triângulos semelhantes



Fonte: A autora (2015)

Ao realizarmos a decomposição de uma figura estamos realizando uma decomposição mereológica. Para Kluppel e Finck,

> a decomposição mereológica, isto é, a reconfiguração, atende a exigência de natureza cognitiva de não mudança de dimensão. Além disso, essa reconfiguração estaria contribuindo para a conduta de abdução ao propor variações sistemáticas dos fatores de visibilidade e, portanto, de uma apreensão operatória da figura. (KLUPPEL; FINCK, 2012, p. 15)

$H_{4,1}$: Que o estudante identifique elementos que permitam concluir que os triângulos são semelhantes[7].

Neste momento é possível perceber que, para o estudante concluir que os triângulos são semelhantes ele precisará mobilizar dois registros. Segundo Duval,

> A mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro! Ela não é suficiente, pois é preciso que haja também uma coordenação de registros de forma que os registros funcionem em sinergia. (DUVAL, 2011, p. 100)

Ou seja, deve haver um efeito ativo ou retroativo do trabalho, um esforço coordenado de vários sistemas para a realização de uma tarefa, o estudante poderá transitar entre os registros desde que compreenda a relação entre eles.

As intervenções da pesquisadora neste momento têm o intuito de promover uma discussão de modo que o estudante conclua que os triângulos são semelhantes. Também será possível, diagnosticar e ampliar conhecimentos do estudante a respeito de semelhança de triângulos.

$A_{4,2}$: Com base no fato de que os triângulos EBC e FGC são semelhantes, prove que FG = 1/3 BC ou AB

$H_{4,2}$: O estudante não apresente conhecimentos e habilidades necessárias para elaborar uma prova havendo necessidade de auxílio e ensinamentos da pesquisadora.

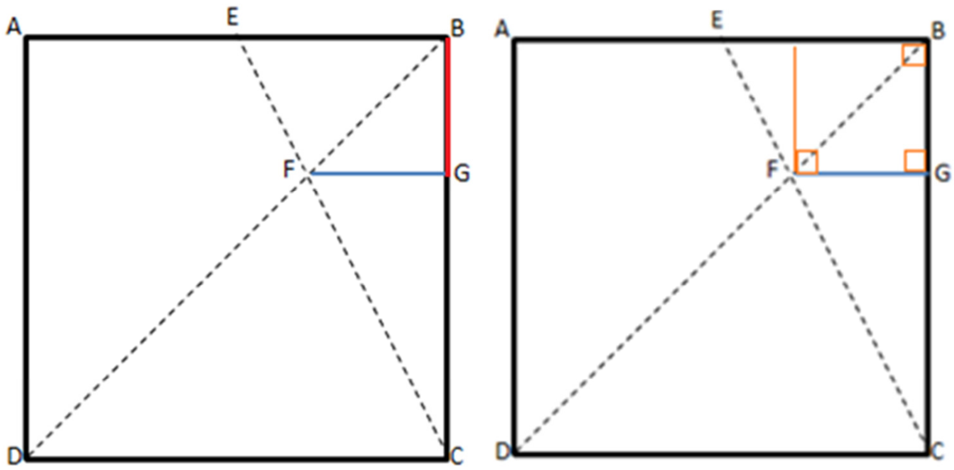
[7] Pelo Teorema Fundamental dos triângulos semelhantes: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Para poder construir a prova, o estudante precisará evocar diferentes representações. Duval afirma que, “a produção de representação semiótica precede de alguma maneira o pensamento dos objetos que se encontram assim representados” (DUVAL, 2011, p. 99), ou seja, neste momento o estudante poderá identificar aspectos ainda não percebidos por ele durante a realização da atividade. Um exemplo é a relação entre a dobradura inicial da folha em três partes semelhantes e a prova (algébrica).

Para dar continuidade a atividade deve-se construir uma prova matemática junto com o estudante, seguindo os seguintes passos:

***A**$_{4,3}$*: Na figura a seguir, o segmento BG tem a mesma medida que FG?

Figura 15- Destaque do triângulo isósceles.



Fonte: A autora (2014)

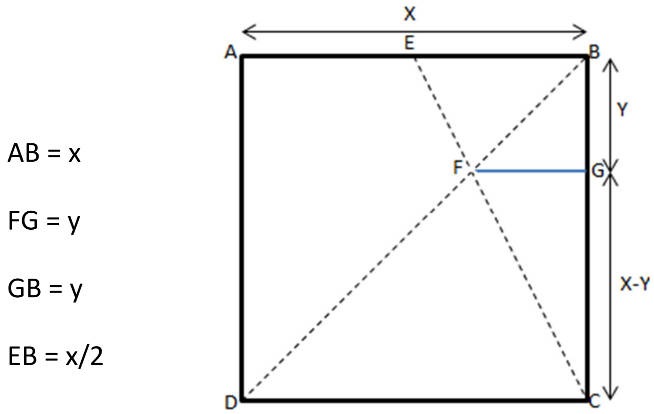
***H**$_{4,3}$:* Que o estudante relembre as propriedades de triângulos e que responda que sim, devido ao fato do triângulo FGB ser isósceles. *Que tenha familiaridade com Teorema de Tales e as regras de proporção*

Para a construção de uma argumentação algébrica necessária a prova a pesquisadora levara o estudante a produzir os seguintes registros.

***A**$_{4,4}$: Para a elaboração da prova denotar por Y as medidas FG e BG e expressar as medidas dos segmentos* EB e GC *em função da medida AB, que será denotada por X.*

***H**$_{4,4}$: Que o estudante consiga fazer relação entre os termos.*

Figura 16 - Denotação dos termos algébricos (parte 1)

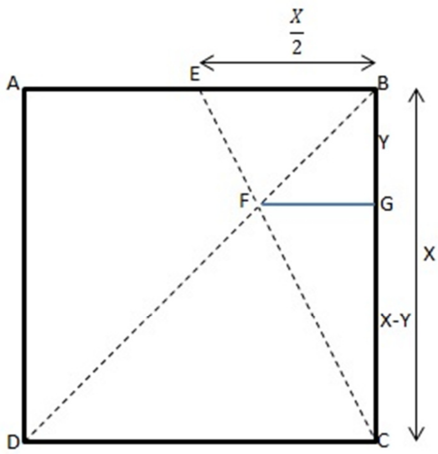


Fonte: A autora (2014)

A*$_{4,5}$*: *Escreva uma ou mais equação que envolvam X e Y a partir do observado na figura.*

H*$_{4,5}$*: *Que o estudante não apresente desenvoltura.*

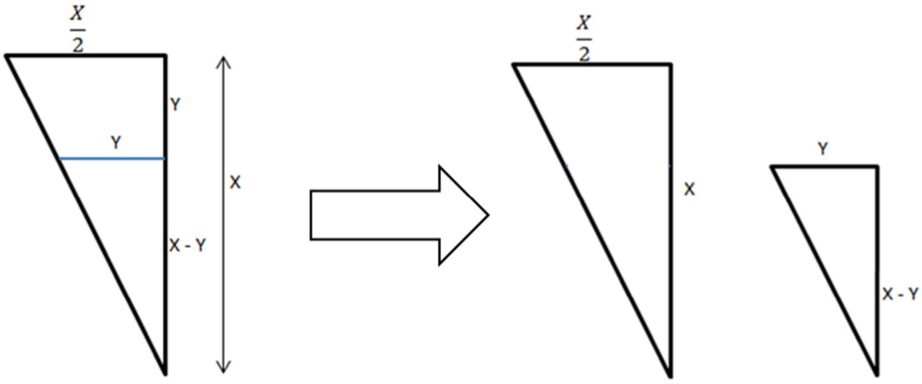
Figura 17 - Denotação dos termos algébricos (parte 2)



Fonte: A autora (2015)

A*$_{4,6}$* Destaque os triângulos retângulos EBC e FGC e observe as proporções válidas.

Figura 18 - Destaque dos triângulos para trabalhar as proporções



Fonte: A autora (2015)

H

$H_{4,6}$: O estudante construirá o seguinte argumento algébrico com auxílio da pesquisadora:

$$\frac{X}{X-Y} = \frac{\frac{X}{2}}{Y}$$

Do destaque dos triângulos ao argumento algébrico há uma conversão, e em seguida após o desenvolvimento algébrico podemos dizer que há um tratamento, pois, do argumento algébrico à conclusão de que Y = X/3 há um tratamento no próprio registro. Cada seta a seguir, na sequência de identidades que compõem uma prova matemática, indica um tratamento.

Figura 19 – Cálculos para a prova matemática

$$\frac{X}{X-Y} = \frac{\frac{X}{2}}{Y} \Rightarrow XY = \frac{X}{2}(X-Y) \Rightarrow XY = \frac{X^2}{2} - \frac{XY}{2} \Rightarrow XY + \frac{XY}{2} = \frac{X^2}{2}$$

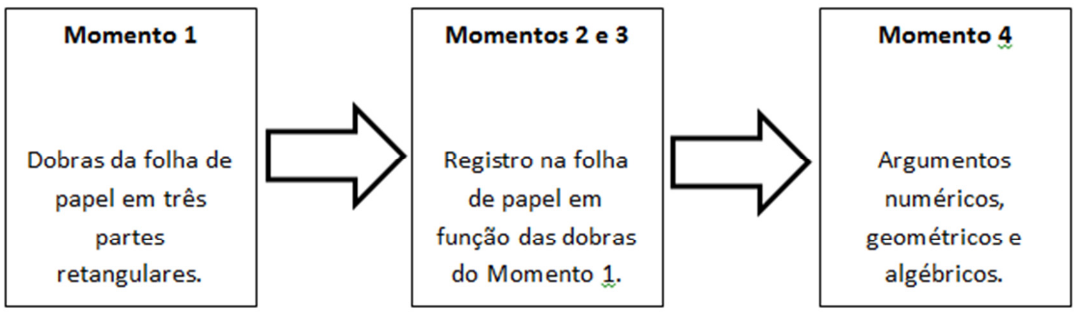
$$\Rightarrow \frac{2XY + XY}{2} = \frac{X^2}{2} \Rightarrow \frac{3XY}{2} = \frac{X^2}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{3XY}{2}\right) = X^2 \Rightarrow 3XY = X^2$$

$$\Rightarrow Y = \frac{X^2}{3X} \Rightarrow Y = \frac{X}{3}$$

Fonte: A autora (2015)

Observando essa sequência de identidades a ser realizada para que se chegue à conclusão de que FG = 1/3 de BC, percebe-se que transitamos por diferentes registros, além disso, há uma relação existente entre cada momento. Entre estes quatro momentos, notamos a conversão entre os registros de representações tendo por referencia o mesmo objeto. Veja o esquema a seguir:

Figura 20 – Diferentes registros de representação encontrados no decorrer do desenvolvimento atividades



Fonte: A autora (2015)

4. REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES PELOS ESTUDANTES

Neste capítulo exporemos a caracterização dos sujeitos da pesquisa, os procedimentos e instrumentos da coleta dos dados, que foram utilizados na produção dos relatos expostos acerca da realização das atividades com três estudantes.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos dessa pesquisa são alunos regularmente matriculados em colégios situados no município de Curitiba-Paraná.

O estudante 1 tem 14 anos, sexo masculino, está matriculado no 9° ano do Ensino Fundamental em um colégio da rede privada de ensino. O estudante 2 tem 16 anos, sexo feminino, está matriculado no 3° ano do Ensino Médio em um colégio da rede estadual de ensino. O estudante 3, tem 15 anos, sexo feminino, está matriculado no 1° ano do Ensino Médio de um colégio da rede estadual de ensino.

A escolha desses sujeitos, denominados estudantes no decorrer desse estudo, deve-se ao fato de que os conceitos matemáticos (procedimentos e definições, teoremas) tratados nas atividades pertencem a esses níveis de ensino, conforme estabelecido nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Além de, buscarmos formar um grupo que possuísse características semelhantes as do primeiro grupo de estudantes que, como citado anteriormente, se desfez.

4.2 PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para elaboração desta pesquisa os dados foram obtidos por meio de três instrumentos de coleta: filmagem com gravação de áudio, anotações dos estudantes e anotações da pesquisadora.

A atividade foi realizada de forma individual e em horários/datas diferentes com cada estudante. A atividade realizada em cada momento foi gravada e as anotações elaboradas pelos alunos foram recolhidas para auxiliar na produção das descrições expostas.

4.3 REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES PELOS ESTUDANTES

As atividades foram realizadas no mesmo ambiente com todos os estudantes e em dias diferentes. O local de realização foi preparado com uma mesa retangular, cadeiras, câmeras para gravação de vídeo e todos os materiais necessários para a realização da mesma.

Optou-se em apresentar na forma de relato a descrição do que ocorreu na realização das atividades por cada um dos estudantes, salientando que privilegiamos o uso do MDM e os registros de cada estudante e buscamos conduzir a realização das atividades de modo que ele tivesse autonomia, com o mínimo possível de intervenção da pesquisadora. Por isso, as falas dos estudantes são em pouca quantidade.

A seguir, os relatos das atividades realizadas com os estudantes 1, 2 e 3. No texto, a fala dos estudantes estará destacada entre aspas e em itálico. A redação está na primeira pessoa do singular, estando a pesquisadora também no papel de professora, que não apenas observará o que o estudante faz, mas fará intervenções de natureza didática.

4.3.1 Estudante 1

Inicio a atividade informando ao estudante que ele poderia interromper a qualquer momento para tirar dúvidas, porém, se faz necessária a tentativa de realizar a maior parte possível de forma individual.

Entrego uma folha de papel de formato quadrado obtida a partir de uma folha sulfite A4 e informo-o de que neste momento todas as dobras realizadas serão nesta folha.

Solicito ao estudante que dobre a folha de modo a obter dois triângulos e prontamente ele dobra a folha vincando a diagonal do quadrado e obtendo duas regiões triangulares.

Conversamos sobre o vinco que se encontra na folha, questiono-o sobre que elemento do quadrado que este vinco representa e o estudante menciona que não se recorda; menciona que há uma simetria no material que ele manipula. Concordo com a existência da simetria indicada e informo que o eixo dessa simetria é a diagonal do quadrado, utilizando o termo do qual ele não se recordava.

Em seguida solicito ao estudante que dobre a folha quadrada de modo a obter dois retângulos. Ele rapidamente une dois lados paralelos do quadrado e obtêm duas regiões retangulares. Questiono-o sobre o que representa o vinco obtido no papel e ele menciona que *"é o meio"*, em seguida complemento dizendo que se analisarmos um dos lados onde esse vinco que está marcado, é o ponto médio.

Uma terceira orientação é dada: dobre a folha de modo a obter quatro quadrados iguais. Primeiramente o estudante verbaliza dizendo que "*dobrando o retângulo e depois ao meio*" e em seguida realiza a dobra. Ao desdobrarmos o papel obtivemos dois vincos que se interceptam e pergunto qual é o ângulo formado na intersecção dos vincos e ele menciona que é o *"ângulo reto*". Questiono-o sobre o nome que se dá a retas que se cruzam e formam um ângulo de 90° entre si e ele menciona que é a *"vertical*", explico que duas retas que se cruzam e formam um ângulo de 90° são chamadas de perpendiculares.

Finalizado esse momento 0 entrego uma nova folha quadrada igual à primeira e solicito que ele dobre a folha de modo a obter três retângulos iguais. Por alguns instantes o estudante fica pensativo e em seguida dobra a folha de modo a sobrepor as partes. Observa que os retângulos não possuem a mesma medida, tenta fazer pequenos ajustes nas dobras.

Pergunto como podemos comprovar que as medidas são iguais e rapidamente ele pega a régua graduada e faz a verificação. Após medir ele menciona que "*o primeiro retângulo ficou com 6,7 cm e os outros dois ficaram com 7,1 cm*". Finalizado essa verificação passamos para as atividades do o momento 2.

Entrego uma folha igual às demais utilizadas até o momento e também a folha A4 onde estão impressas algumas orientações. Informo que para realizar essa atividade ele deverá seguir as orientações e caso não entenda alguma delas poderá perguntar.

O estudante inicia a leitura das orientações e em seguida pega a folha quadrada e nomeia os vértices A, B, D e C nesta ordem, porém diferente da forma que estava descrita nas orientações que era A, B, C e D. Em seguida ele realiza a dobra que marcará o ponto médio. Após nomear o ponto E peço para que verifique se a ordem dos pontos está correta; ele identifica o erro e faz a correção.

Retomando as orientações, percebo que o aluno fica pensativo e pergunto o que representa a dobra, o segmento EC, e ele me responde que é um "*triângulo".* Ele faz várias tentativas para vincar o segmento que vai do ponto E ao ponto C, porém não logra a dobra. Faço uma intervenção realizando uma dobra semelhante em outra folha para ele observe. Ele retoma sua folha e realiza a dobra, porém a mesma não passa pelo ponto C; o estudante então faz ajustes nas dobras até conseguir ficar muito próximo do ponto. Percebo que se trata de pouca habilidade em realizar dobraduras.

A dobra da diagonal ele realiza sem dificuldades. Em seguida com o lápis marca o ponto F na intersecção do segmento EC e BD. Menciono que pode usar o esquadro para traçar o segmento FG caso ache necessário. O estudante pega o esquadro, analisa o quadrado com o qual ele havia trabalhado anteriormente e traça o segmento FG, sem utilizar um referencial para ver se a linha estava realmente paralela.

Ao ler a orientação onde o aluno é questionado sobre a relação existente entre o segmento FG e o lado do quadrado ABCD ele diz que "*a relação entre o segmento FG e a medida do lado do quadrado ABCD é que é 1/3 do quadrado", baseando-se no visual* Ele anota essa relação na folha em que está trabalhando.

Passamos para o momento seguinte onde entrego ao estudante uma folha A4 onde está representada a uma superfície quadrangular e outra folha com novas orientações. Informo que novamente ele deve seguir as orientações e poderá utilizar esquadros caso seja necessário.

Ele inicia a leitura das novas orientações. Nomeia os vértices. Em seguida me pergunta se pode dobrar a folha. Peço para que tente recordar o que encontramos quando traçamos as diagonais do quadrado. Ele traça as diagonais do quadrado e busca um ponto de referência para alinhar o esquadro e marca o ponto E. Da mesma forma, busca um referencial, posiciona o esquadro e traça o segmento FG.

Ao ler a orientação que questiona-o sobre como podemos verificar a relação existente entre o segmento FG e o lado do quadrado ABCD ele busca uma forma de medir a distância entre os pontos B e G e os pontos G e C, tendo em vista que neste momento não havia a sua disposição régua graduada. Por mais alguns segundos o estudante fica pensativo e diz que "*a relação é a mesma da atividade anterior"*.

Passamos para outro momento, mas ainda tendo como base a última atividade realizada, pergunto "de que forma podemos utilizar tudo o que você já aprendeu em matemática para provar que FG é 1/3 de BC?". Ele me pergunta se pode pegar a régua graduada e medir o lado do quadrado. Repondo que não, pois precisamos encontrar uma forma que permita provar a relação de 1/3 em todos os casos.

Peço para que o estudante analise os pontos EBC. O que você tem aqui? questiono-o. Ele me diz que é um "*triângulo*". E se analisarmos os pontos FGC? "*Outro triângulo*", reponde. Questiono-o, será que você consegue fazer alguma relação entre esses dois triângulos? O estudante aponta para os triângulos e me diz que "*o triângulo maior e o inteiro e esse triângulo menor é 1/3".*

Menciono se ele conhece ou lembra-se de conteúdos como semelhança de triângulos, Teorema de Tales. Ele comenta que não se recorda. Então comento que irei ajuda-lo a encontrar alguma relação para elaborar uma prova.

Primeiramente realizamos a troca de representações dos segmentos para outros léxicos. Pergunto ao estudante como posso representar o segmento EB em função de X ou Y. Ele me responde que "*esse pedaço é metade então é X é dividido por 2*". Ele faz essa anotação na folha. Em seguida pergunto como posso representar o segmento BC e ele me diz que *"esse lado pode ser representado por X".*

Pergunto-lhe qual é a medida de BG tendo em vista que não sabemos seu valor e ele me responde que "podemos representar utilizando Y". Ainda questiono-o sobre como podemos representar GC em função de X ou Y e rapidamente ele me responde "*2Y*". Explico que não sabemos essa medida, porém já nomeamos BC como X, BG como Y, se tirarmos X de Y o que sobrará? Ele me responde rapidamente "*X menos Y*" e faz as anotações na folha.

Primeiramente entrego uma folha em branco, folha na qual se desenvolverá a prova. Iniciamos a representação dos triângulos para identificar as relações existentes entre eles. Solicito para que ele desenhe na folha o triângulo EBC e o triangulo FGC, além de representar suas medidas utilizando X e Y.O estudante faz o desenho e para identificar as medidas interfiro mostrando-lhe que os triângulos que ele acaba de desenhar representam os triângulos que ele obteve na atividade anterior, portanto as medidas eram as mesmas.

Dando continuidade pergunto ao estudante como podemos escrever o segmento FG e ele me responde "*X menos Y não é?"*. Então intervenho e pergunto-lhe se analisarmos os pontos BFG o que irá formar e ele me afirma que é um triângulo e instantaneamente "*Y",* diz ele, referindo-se ao segmento FG. Pergunto-lhe por que Y e ele me diz que "*é porque todos os lados são iguais".*

Percebendo que o estudante está confundindo os tipos de triângulos pergunto-lhe quais são os três tipos, ele me reponde que são isósceles, equilátero e escaleno. Voltando para atividade anterior, pergunto-lhe novamente que tipo de triângulo é o triângulo BFG e ele mês responde que *"esse triângulo é o isósceles pois possui dois lados iguais e um diferente".*

Comento sobre a necessidade de comprovarmos que o triângulo BFG é isósceles e que para tanto, precisamos retomar algumas propriedades dos triângulos. Analisando o quadrado pergunto qual é o ângulo formado no vértice B e ele me responde que "*é 90 graus*". Pergunto-lhe ainda o que o lado BF faz com o ângulo esse ângulo e rapidamente ele me responde que "*o ângulo é dividido ao meio*", então pergunto qual é o valor do ângulo formado no vértice B do triangulo e ele responde que "*é um ângulo de 45 graus".*

Após verificar que um dos ângulos do triângulo é 45 graus pergunto qual deve ser o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo e ele me responde que é 180 graus. Então o estudante me diz que "*o outro ângulo também é 45 graus".* Para verificar realizamos a soma e obtivemos como resultado o valor de 180 graus. Portanto concluiu-se que o segmento FG era igual a Y.

Após realizar todas as representações, comentei sobre proporção, dizendo que existe o Teorema de Tales que diz que as retas paralelas cortadas por transversais determina segmentos proporcionais . Perguntei ao aluno como poderíamos representar essa regra utilizando as medidas dos triângulos e ele ficou pensativo por alguns instantes e em seguida me disse "*X dividido por X menos Y"* referindo-se dessa forma a uma das relações ele faz a anotação e em seguida me refiro a outra relação e ele me diz que "*é X dividido por dois, dividido por Y*". Chegando assim a relação a seguir:

$$\frac{X}{X-Y} = \frac{\frac{X}{2}}{Y}$$

A partir disso, solicitei que o estudante resolvesse a igualdade, este por sua vez precisou intervenção para realizar a distributiva. Após realizar os cálculos o estudante pode chegar à conclusão de que $Y = \frac{x}{3}$ confirmando sua hipótese inicial.

Após finalizar, entregamos um folha onde está impressa algumas perguntas sobre a atividade, folhas e respostas serão apresentados no decorrer do texto

4.3.2 Estudante 2

Inicio a atividade explicando ao estudante que poderá tirar todas as dúvidas a qualquer momento e que é importante tentar fazer sozinho a maior quantidade possível da atividade.

Entrego uma folha cortada em formato quadrado obtida a partir de uma folha A4. Solicito que dobre a folha de modo a obter dois triângulos e rapidamente ela dobra a folha em duas partes de modo a obter duas regiões retangulares. Questiono-o sobre o que o vinco representa e me responde que "*não se recorda".* Explico que o vinco representa a diagonal do quadrado. Pergunto então sobre a quantidade de diagonais e ela me responde que "*são quatro*" e indica os lados do quadrado. Explico que são duas e em seguida realizamos a dobra para vincar a segunda diagonal.

Dando continuidade aos trabalhos, peço para que dobre a folha de papel de modo a obter dois retângulos semelhantes e ele me indica uma dobra de modo a juntar dois lados paralelos. Pergunto sobre o que representa o vinco marcado no lado do quadrado. Por alguns instantes o estudante fica pensativo em seguida me questiona se o que quero saber é o nome ou o ângulo. Como se não entendesse, pergunto: O ângulo? Qual ângulo?

Indicando o encontro entre as duas retas ele me diz que "*esse ângulo é de 90 graus*", então pergunto a ele sobre o ponto marcado pelo vinco no lado do quadrado, e ele me respondo que é "*ponto agudo*". Percebendo que o estudante estava se confundido comento que o vinco no lado do quadrado representa o ponto médio, ou seja, divide o segmento em duas partes iguais.

Em seguida, pergunto ao estudante de que modo podemos dobrar a folha para obter quatro quadrados semelhantes e ele faz a dobras sem apresentar dificuldades. Ao abrir a folha, observamos os vincos e questiono-o sobre o que os vincos representam e a resposta é *“altura e largura”.* Instigo o estudante a me dizer o que mais pode representar e ele me indica o ângulo de 90 graus formado na intersecção das retas, complemento dizendo que quando duas retas se cruzam e forma um ângulo de 90 graus elas são chamas de per... antes de terminar a frase o estudante me responde “*perpendicular*”, ainda acrescenta que *“paralelas é quando é assim*” (indicando os lados do quadrado paralelos dois a dois).

Passando para outro momento, entrego uma nova folha semelhante a anterior, reforço que as dúvidas poderão ser tiradas a qualquer momento. Então o questiono sobre como podemos dobrar a folha de modo a obter três retângulos iguais e ele me diz “*dobrar uma vez*”, ao mesmo tempo inicia a dobra porém não finaliza percebendo que ao dobrar uma vez obteria dois retângulos e não três como o solicitado. Ao perceber que o estudante fica pensativo, digo que pode desdobrar e realizar outras dobras para obter o retângulo e assim ele retoma as dobras. São realizadas mais duas tentativas e na terceira ele percebe como pode dobrar, porém, após realizar a dobra percebe que os retângulos apresentam pequenas diferenças de tamanho então busca ajustar as dobras.

Pergunto de que forma podemos verificar se os lados são iguais ou não e a resposta foi “com régua” (nesse momento ele pega a régua e mede a largura da cada um dos retângulos, percebendo que os lados não possuem o mesmo tamanho ele me diz que “*aqui deu 6,5 aqui 7 e o último deu 7,3*” , neste caso referindo-se ao lado menor de cada um dos retângulos obtidos por meio da dobra.

Passamos para outro momento, entrego uma folha semelhante a atividade anterior e outra folha onde está impresso algumas orientações. Explico que para realizar essa atividade, deverá seguir as orientações impressas.

Antes de iniciar a atividade, retiro a régua graduada da mesa deixando apenas o jogo de esquadros sem graduação, lápis, borracha e folha em branco e pautadas.

O estudante inicia a leitura das orientações, nomeia os vértices e o ponto E, em seguida apresenta dificuldade para realizar a dobra que representa o segmento EC. Alguns segundos depois interfiro indicando em um outro papel como ele pode realizar a dobra. Após, o estudante faz a dobra conforme indicado.

Seguindo as orientações, traça o segmento que representa a diagonal do quadrado, analisa a intersecção do segmento EC com o segmento BD e marca o ponto F. Para marcar o segmento FG o mesmo utiliza esquadro, porém sem nenhum ponto de referência.

Após ler a última orientação, por alguns instantes o estudante fica pensativo e em seguida pergunto qual a relação existente entre o lado maior e o lado menor, ele responde que a relação é "*porque ela fica reta*", então pergunto: Mas ele fica paralelo com quais lados? Então me responde que "*com AB com CD".*

Pergunto se há relação entre a medida do lado maior e a medida do lado menor, e ele me responde que "*não, pois não tem o mesmo tamanho (...) tem relação que ela é o mesmo sentido, ela esta na horizontal"* (referindo-se ao segmento FG).

Insisto questionando que se comparar a medida FG com a medida BC, há alguma relação entre elas? Ela é uma parte do tamanho? Se for parte, que parte é? Então o estudante responde dizendo que *"é do mesmo tamanho desse aqui*" (indicando o segmento FG e o segmento BG), questiono o porque e ele me responde que "*ele é um triângulo, do ângulo de 90 graus , esqueci o nome daquele triângulo que são três, não, acho que são duas que tem medidas iguais*" (apontando para os lados do triângulo BGF).

Afirmo que é um triângulo isósceles e que este possui dois lados iguais e um diferente. Pergunto então qual ângulo é formado no vértice B ou F e ele me responde que é "*45 graus, pois é metade",* referindo-se a metade do ângulo de 90 graus.

Retomo a questão da relação entre os lados, aponto para os lados e pergunto se há relação e ele me diz que a relação "é formar um triângulo". Mudo os termos e questiono se a relação é de metade, ou um terço ou um quinto e o mesmo diz *que "na verdade, esse aqui* (apontando o segmento BG) é menor que esse (lado BC), *mas de largura*", o que ele quis dizer é que o triângulo FGC é mais largo que o triângulo EBC.

Insisto na questão do tamanho e pergunto quantas vezes o tamanho do segmento FG é menor ao tamanho do segmento BC e após alguns instantes ele me responde que "*três vezes*" e prosseguindo pergunto de que forma matemática podemos representar que o segmento FG é uma parte de três e após alguns instantes ele me responde que é "*1/3*".

Continuo dizendo que se analisarmos tudo o que já fizemos temos a hipótese de que FG e BG equivalem a um terço e passamos para o próximo momento.

Entrego uma nova folha A4 onde está impresso um uma figura quadrangular e juntamente com essa outra folha com novas instruções. Explico novamente que para a realização da atividade ele deverá seguir as instruções.

A primeira coisa que me pergunta é se pode usar a régua graduada e respondo que não, que a sua disposição terá os esquadros sem graduação. Inicialmente nomeia os vértices conforme solicitado em seguida fica reflexivo por alguns instantes e pergunto qual a dúvida, o mesmo me diz que é sobre encontrar o ponto médio. Pergunto o que obtemos aos traçar as diagonais e ele me responde que é o meio. Após, traça as diagonais e a partir da intersecção das diagonais encontra o ponto médio.

Retoma as orientações, em seguida traça o segmento EC, marca o ponto F e traça o segmento FG, usa o esquadro, porém não utiliza referencial. Ele analisa por alguns instantes a pergunta presente na folha de instruções sobre a relação entre o lado maior e o lado menor do retângulo e responde que "*aqui, podemos ver que tem uma dessas medidas* (apontando o segmento FG), *quer dizer um triângulo, como aqui da pra observar que cabe o dobro* (se referindo ao triangulo FGC*), dois desse aqui* (apontando o triângulo BGF), *fica três. Esse* (o lado BG do triângulo BGF) *é um terço desse* (segmento BC do quadrado)".

Pergunto então sobre como podemos provar de forma matemática, que fórmula, relação ou conteúdos podemos utilizar para provar que a medida FG ou BG é 1/3? *"podemos usar triângulos, fração e ângulos"*, respondeu.

Inicio então a atividade para provar que FG é um terço de BC. A princípio explico ao estudante que iremos fazer uma troca de variáveis de léxos para representar as medidas dos lados. Utilizando a última folha trabalhada, pergunto o que significa o ponto E, a responde é que "*equivale a metade ou ponto médio*" pergunto como podemos representar e a resposta de forma oral é "*um sobre dois",* continuo perguntado a metade de quanto e rapidamente a resposta é "*então x é metade, e ficaria x/2*" e realiza-se o registro no papel.

Pergunto então como podemos representar o segmento BG, o estudante analisa por alguns segundos e em seguida diz que pode ser chamado de y.

Continuo e pergunto como podemos representar o segmento GC, por alguns instantes ele fica pensativo e em seguida responde x^2, digo que não, pois se temos o segmento X e se tirarmos o segmento Y o que sobra será a medida GC então se pensarmos em termos de X e Y, GC mede? "*X menos Y"* responde.

Dando continuidade, pergunto ao estudante se ele consegue visualizar algum triângulo e ele aponta o triângulo EBC e o triângulo BGF. Pergunto se ele se lembra de algum conteúdo ou fórmula matemática que permita que façamos a prova matemática e a resposta é negativa.

Entrego então uma nova folha em branco, folha essa no qual será desenvolvida a prova. Solicito para que represente primeiramente o triângulo nesta folha, os triângulos da atividade anterior, ou seja, os triângulos EBC e o BGF, além do desenho deve representar as medidas encontradas na atividade anterior em função de X e Y.

O estudante apresentou dificuldades para visualizar a medida Y no novo desenho, pois fazia referência somente ao segmento BC e não relacionava que FG = BG. Interferi e alguns segundos após ele identificou.

Passamos para a elaboração da relação. Comento que os triângulos são proporcionais e menciono o exemplo de que 2 e 4 são proporcionais pois de 2 para 4 aumenta duas unidades. Iniciamos a discussão sobre prova buscando uma fórmula ou uma relação que pudesse nos ajudar. Uma das dificuldades apresentadas foi representar na forma de fração a divisão de duas frações, ou seja, onde colocar o traço da fração. Juntamente com o estudante fomos organizando os dados de modo a obter a igualdade:

$$\frac{X}{X-Y} = \frac{\frac{X}{2}}{Y}$$

Após encontrar a relação, a parte algébrica foi desenvolvida, por varias vezes precisei intervir junto ao estudante devido a erros durante a resolução, como exemplo erros no princípio aditivo e princípio multiplicativo, erro para realizar a soma de frações, onde não foi calculado o MMC.

Finalizada a prova, o estudante pode verificar que a medida realmente equivale a um terço do lado do quadrado. Em seguida, entregamos algumas perguntas impressas, perguntas essas que serão apresentadas no decorrer do trabalho.

4.3.3 Estudante 3

Inicio a atividade informando ao estudante que ele poderá me interromper a qualquer momento, porém é importante que ele tente resolver o máximo da atividade de forma individual.

Entrego uma folha de papel quadrada obtido a partir de uma folha de sulfite A4 e informo ao estudante que iremos fazer algumas dobras com o objetivo de retomar alguns conceitos já trabalhados por ele anteriormente, além de informar que para esse momento, todas as dobras serão realizadas na mesma folha.

Solicito que dobre a folha de modo a obter dois triângulos. O estudante dobra de modo a sobrepor dois vértices opostos do quadrado, obtendo assim o vinco que representa a diagonal. Questiono ao aluno sobre o que representa a dobra e após pensar por alguns instantes ele responde não se recorda, então faço uma breve explicação sobre o conceito.

Em seguida, solicito que dobre a mesma folha, de modo a obter dois retângulos iguais. Ao abrir a dobra podemos observar o vinco no meio da folha, pergunto ao aluno o que representa este vinco e ele me responde "*que divide ao meio*", pergunto então o termo matemático que podemos utilizar para representar o ponto formado na intersecção do vinco com o lado do quadrado, porém o estudante não me respondeu, digo então que o termo é ponto médio e faço uma breve explicação sobre o seu dignificado.

Para dar continuidade na atividade, solicito que dobre a folha de modo a obter quatro quadrados. Prontamente o estudante realiza a dobra. Peço para que faça a desdobra e observando os vincos, pergunto a ele o nome que se dá as retas representadas pelos vincos. Ele me responde que não se recorda, então o questiono sobre o ângulo formado na intersecção das retas e rapidamente ele me diz que "*é um ângulos de 90 graus*". Pergunto novamente o nome que se dá a duas retas que se cruzam e formam um ângulo de 90° graus e sem obter resposta nomeio as retas como perpendiculares.

Passando para o próximo momento, entrego uma nova folha quadrada, semelhantes à folha da atividade anterior e solicito ao estudante que dobre a folha de modo a obter três retângulos congruentes. Primeiramente a estudante leva as duas laterais paralelas da folha até o centro, de modo que permaneçam paralelas.

Ao abrir a folha, o mesmo percebe que obteve dois retângulos menores e aparentemente congruentes e um terceiro retângulo que representa ter o dobro da medida dos demais. Ao perceber a discrepância nas medidas o estudante faz o ajuste nas dobras até obter três retângulos aparentemente congruentes.

Após finalizar as dobras, questiono-o sobre a relação existente entre o lado menor e o lado maior do retângulo, o estudante fica pensativo em um primeiro momento e em seguida me responde dizendo que não entendeu. Novamente, pergunto qual a relação e acrescento perguntando se há proporção entre as medidas. Quando menciono proporção o estudante prontamente me responde que "*na verdade um é maior e o outro é menor*". Questiono novamente se existe proporção e dou uma exemplo dizendo que entre o número 2 e o número 4 existe uma proporção pois o 4 é o dobro de 2.

Apontando para o retângulo representado pela dobra de papel pergunto: Há alguma relação aqui? O estudante fica pensativo por alguns instantes e em seguida busca alguma forma para medir o lado menor do retângulo (a estudante não recorre à regra graduada para realizar a medição mesmo sabendo que a régua estava a sua disposição ela utiliza os dedos como ferramenta para medir) e em seguida responde que "*sim, pois aqui cabem, uma, duas, (pausa) o lado menor cabe três vezes dentro do lado maior*". Após o estudante concluir que o lado maior é três vezes a medida do lado menor passamos para a atividade seguinte.

Entrego uma folha quadrada semelhante a da atividade anterior e juntamente entrego uma folha A4 onde está impresso algumas orientações. Solicito que siga as instruções e ressalto que ele pode me perguntar quando apresentar duvida, porém é importante que busque seguir o maior número de instruções sozinho.

O estudante inicia a atividade nomeando os vértices conforme instrução. Para realizar a instrução seguinte, o estudante precisa encontrar o ponto médio, e ele mes questiona se pode usar a régua, informo a ele que nesse momento ele possui os esquadros sem graduação a disposição e que pode usá-los a qualquer momento. Em seguida o estudante une dois dos lados paralelos e faz um pequeno vinco em um dos lados e nomeia-o por E.

Uma das instruções seguintes é para que dobre a folha marcando o segmento EC, e nesse momento o estudante apresenta dificuldade com a dobra. Em um primeiro momento, a dobra não passa pelo ponto C porém ele percebe e faz pequenos ajustes na dobra de modo que passasse polo ponto C e pelo ponto E.

Para realizar a próxima orientação o estudante me pergunta: "*Como é a diagonal mesmo"?* Pego uma folha quadrada sem dobras e realizo a dobra de modo que ele possa acompanhar. Ao realizar a dobra o estudante não percebe que a dobra passa pelos vértices A e C diferente do solicitado. Questiono-o se realmente é isso o solicitado. Ele percebe o erro e faz a dobra passando pelos vértices B e D.

Dando continuidade, o estudante marca o ponto F e me questiona quanto ao ponto G. Automaticamente leio novamente a instrução junto com o estudante e ele me indica onde deve ficar o ponto G. Pergunto onde é a origem da segmento FG, o mesmo aponta o ponto F. Questiono-o sobre o que é paralelo e ele me responde dizendo que "*paralelo é a mesma coisa que esse*", indicando o segmento AB e o segmento BC. Comento que nesse caso as retas são perpendiculares. Então pergunto quais são os lados que são paralelos no quadrado e ela prontamente me responde que "*esse com esse*", indicando o segmento AB com o CD, e "*esse com esse*", indicando o segmento BC com o segmento DA.

Continuando a discussão questiono onde estará o segmento que começa no ponto F e que é paralelo a EB, o mesmo me diz que não compreende. Sendo assim, solicito que o estudante pegue o esquadro, posicione sobre o segmento EB. Após esquadro posicionado pergunto novamente o que é ser paralelo e o mesmo me responde que "*é estar um do lado do outro".* Questiono-o novamente que se ser paralelo é estar um do lado do outro como é possível traçar uma reta que seja paralela a EB, ele fica pensativo por alguns minutos e em seguida me questiona que "*vai começar no F e terminar em G"?* Movimento a cabeça como se concordasse e em seguida ela movimenta o esquadro (que está posicionado no segmento EB) para baixo até o ponto F e traça o segmento FG e em seguida argumenta dizendo que "*essa é a mesma desse*" (indicando o material em que ela esta trabalhando e o papel dobrado anteriormente).

Seguindo novamente as instruções, após ler a questão referente a relação existente entre o segmento FG e o segmento AB, o estudante fica pensativo e tenta de alguma forma encontrar um objeto de medida e em seguida diz que "*ela vai entrar três vezes aqui*" referindo-se que o segmento FG é três vez menor que o lado do quadrado. Então, questiono-o sobre como podemos indicar essa relação e prontamente ele recorre aos esquadros de alguma forma tenta fazer marcações com o objetivo de obter a medida. Sem lograr êxito, me diz: "*Não sei como indicar, pois não tem nenhum número*".

Sabendo que o estudante já havia encontrado a relação, porém, não conseguia escrever de forma matemática, perguntei sobre a possibilidade de representar a relação utilizando uma fração, percebendo que o mesmo estava pensativo, perguntei quantas partes havia riscado no papel (referindo-se as marcações que fez com o esquadro) na folha de papel e o mesmo prontamente responde que "*três*", então o questiono sobre uma forma de representar os dados que ele tem até o momento e prontamente me responde que "*a fração é 1/3".*

Passando para outro momento, entrego uma folha A4 onde está impresso uma representação de uma superfície quadrática e outra folha onde está impressa novas orientações. Comento que novamente ele deverá seguir às orientações e que se aparecer alguma dúvida poderá me perguntar.

Seguindo as orientações, o estudante nomeia os vértices e em seguida busca estratégias para encontrar o ponto médio, pega o esquadro e busca um ponto de referência. Traça as diagonais e em seguida uma linha que vai de um lado ao outro do quadrado marcando o meio. Dando continuidade, traça o segmento EC, nomeia o ponto F e traça o segmento FG com o esquadro sem utilizar referencial, em seguida, quando questionada sobre a relação de FG com o lado do quadrado ela menciona que "*é a mesma da anterior (referindo-se a atividade), a relação é 1/3".* Questiono então se recorda-se de algum conteúdo, fórmula ou outros elementos da matemática que nos ajude a fazer uma prova matemática e ele me responde que não se lembra.

Comento que para fazermos a prova iremos trabalhar os léxicos X e Y e que por isso faremos uma troca dos léxicos. . Inicio falando sobre o triângulo BGF, pergunto qual o ângulo formado no vértice G e prontamente me responde que *"é um ângulo de 90 graus*", pergunto o ângulo formado no vértice F e a resposta em tom de dúvida é de que "*o ângulo mede 60 graus?"* Menciono sobre o ângulo formado no vértice B e o estudante me diz que é um ângulo de 90 graus e completo dizendo que a diagonal divide o ângulo ao meio e que o ângulo formado no vértice B é de 45° logo o triângulo é isósceles.

Iniciamos a troca de léxicos para representar as medidas dos lados, pergunto quanto mede o segmento EB e o estudante me diz que "*é dividida em duas partes*" complemento dizendo que ele deverá representar utilizando uma fração que a medida nós não sabemos, mas sabemos que ele e dividida ao meio então o estudante menciona dividir por dois, porém no momento do registro ele representa como x^2. Menciono que ao elevar ao quadrado estamos multiplicando um número por ele mesmo, ela percebe o erro e refaz a anotação de forma correta.

Pergunto como podemos representar BC e ele me responde que "*é utilizando X*", em seguida pergunto como podemos representar o segmento BG e a resposta é "*Y*", quando questionado sobre o valor do segmento GC a resposta é "*Y menos X*", reforço a questão de que nesse caso, da maior medida tiraremos a menor medida, então ele faz a correção registrando *X menos Y.* Realizada todas as alterações passamos para o próximo momento.

Entrego uma folha A4 em branco, folha na qual faremos o desenvolvimento da prova. Inicialmente solicito que o estudante represente nessa folha o triângulo EBC e o triângulo EGF escrevendo suas medidas em função de X e Y assim como acabamos de representar. Ressalto que as medidas em centímetros não precisam ser as mesmas, porém é importante que as figuras que está fazendo sejam parecidas com as figuras da atividade anterior.

Após fazer a representação, buscamos uma relação de proporção. Explico que haverá sempre uma proporção entre as medidas desses triângulos que são semelhantes, neste caso a relação é a seguinte:

$$\frac{X}{X-Y} = \frac{\frac{X}{2}}{Y}$$

A partir desse momento, o estudante desenvolve a parte algébrica necessitando apenas de algumas interferências. Um ponto no qual apresentou dificuldade foi na resolução da distributiva.

Após finalizar os cálculos, o estudante pode concluir que sua hipótese inicial, de que o segmento FG mede 1/3 é verdadeira. Em seguida entregamos algumas questões sobre a atividade para o aluno responder, estas questões serão apresentas mais adiante no texto.

4.4 COLOCAÇÕES DOS ESTUDANTES SOBRE AS ATIVIDADES REALIZADAS

Após a realização das atividades, os estudantes foram convidados a responderem algumas perguntas, que estavam impressas em folhas de sulfite, o que fizeram de forma totalmente individual. (Ver anexos 3 - 4, 7 - 8 e 11 - 12) A compilação das respostas dadas são apresentadas a seguir.

Na primeira pergunta os estudantes foram questionados sobre o conhecimento da atividade, o estudante 1 relata que conhece parte da atividade, porém não menciona qual parte, já o estudante 2 menciona que não conhece e em contra partida o estudante 3 afirma que conhece.

Na segunda pergunta os estudantes são questionados quanto ao conhecimento dos assuntos/conteúdos envolvidos na atividade e todos disseram que conheciam. O estudante 1 acrescenta que conhece alguns mas não se recorda de outros.

Sobre assuntos não estudados, era a terceira questão, o estudante 1 e 2 disseram que não se recordavam do Teorema de Tales e o estudante 3 menciona ângulos.

Em qual parte da atividade utilizaram mais os próprios conhecimentos, matemáticos era o tema da pergunta número quatro. O estudante 1 menciona que "*no qual eu fui descrevendo as equações para descobrir a fórmula para encontrar o y, eu utilizei meus conhecimentos sobre frações e equações*", já o estudante 2 afirma que "*na proporção e nos triângulos, pois nessa área podemos usar um pouco de lógica*", e o estudante 3 por sua vez diz que "*no momento quatro porque foi o momento em que fiz conta para descobrir o valor de um lado do triângulo*".

Na questão cinco os alunos foram questionados em relação a compreensão sobre a matemática que a atividade trouxe-lhes. O estudante 1 escreveu que "*sim, desvendei novos conteúdos matemáticos que aprimoraram meu raciocínio*", já o estudante 2 menciona que "*Sim. Com o auxílio das dobraduras, obtêm-se uma compreensão maior em relação a medidas*" e o estudante 3 comenta que "*Sim. Porque tem algumas coisas que são lógicas e não consegui ver no momento*".

Na questão seis a pergunta era sobre a parte em que os estudantes acharam mais interessante e se houvesse, dizer qual. O estudante 1 diz que "*sim, quando eu tive que dobrar a folha várias vezes para encontrar determinados* *pontos*", o estudante 2 diz que a parte interessante é "*na parte das dobraduras, que assim se formam os triângulos e suas medidas*", e o estudante 3 diz que "*sim, o momento em que fiz o quadrado com os triângulos*".

Para a questão sete, separamos alguns aspectos e solicitamos que eles escrevessem o grau de dificuldade que sentiram. Para os três primeiros aspectos, ler e entender as instruções, executar as instruções e escrever o que era pedido, o estudante 1 e 2 mencionam que não apresentaram nenhum dificuldade e o estudante 3 pouca dificuldade.

Para o quarto aspecto que era escrever a prova matemática o estudante 1 e 3 mencionaram que apresentaram pouca dificuldade e o estudante 2 muita dificuldade. E no último aspecto sobre fazer as dobras no papel, o estudante 1 mencionou que apresentou pouca dificuldade e os demais estudantes mencionaram que não sentiram nenhuma dificuldade.

Alguns apontamentos são pertinentes a este momento. Com relação à questão 2, dois dos estudantes comentaram não ter estudado, porém esse assunto está presente em vários livros didáticos do 9° ano indicados no PNLD.

Com relação aos aspectos auto avaliativos, durante a atividade pode-se perceber que o estudante 2 apresentou pouca dificuldade na questão ler, interpretar e escrever o que era pedido, contrariando o mencionado por ela ao responder a questão.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do desenvolvimento desta pesquisa, várias decisões foram sendo tomadas de modo que este momento, longe de ser uma conclusão, fosse possível. Como a escolha da temática relacionada a MDM esteve desde o início ligada aos nossos genuínos interesses, houve a perseverança necessária nos momentos de conflito e indecisão. Isso resultou num crescimento necessário ao professor que se pretende investigador de sua própria prática.

Os desdobramentos, reorientações e lapidações necessárias no decorrer do processo de pesquisa nos permitem afirmar que este texto não pode considerado conclusivo acerca das questões que abordamos, tendo em vista a abrangência e complexidade do tema tratado. O que temos aqui são considerações acerca das primeiras respostas conquistadas para os questionamentos levantados, que somente a continuidade da investigação permitirá avaliarCom base na primeira questão norteadora, "*Como explorar um material didático manipulável no ensino de matemática não apenas como motivador e como facilitador de visualizações, mas também de modo a trabalhar com deduções e registros de representações semióticas?*", elaboramos sequências de atividades envolvendo um MDM e dobraduras e em seguida elaboramos algumas considerações sobre essas atividades à luz da Teoria de Registros Representações Semióticas segundo Raymond Duval; referencial este, que nos foi revelado a partir da necessidade de mudança do tema de estudos.

Consideramos que as sequências de atividades propostas permitiram revelar um modo de explorar um material didático manipulável no ensino de matemática não apenas como motivador e como facilitador de visualizações, mas também de modo a possibilitar a compreensão de objetos matemáticos, trabalhando com deduções e registros de representações.

Escolhemos a dobradura, pois, pode ser realizada com um MDM de fácil acesso e baixo custo, a folha de sulfite A4. Para Passos (2012), o papel é considerado um bom MDM pois este apresenta aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas.

Sobre o uso do MDM, é comum encontrarmos professores que mencionam sua utilização durante as aulas, mas que "diante das dificuldades de organização das situações de aprendizagem, normalmente, tem-se a ilusão que o material possa, por si mesmo, resolver o problema básico da formação" (PAIS, 2000, p.6). Também sabemos que o uso do MDM por si mesmo, pode perder sua funcionalidade, uma vez que ele deve estar vinculado à existência de um nível de racionalidade, conforme apontado em (LORENZATO, 2012).

Para Pais (1996), "a finalidade do MDM é servir de interface mediadora para facilitar na relação entre professor, aluno e conhecimento em um momento preciso na elaboração do saber", concordamos com o autor e ousamos complementar essa afirmação acrescentando que além das funções já mencionadas, o MDM deve ser utilizado de modo que durante a realização da atividade o estudante se desprenda do concreto, de apoios materiais, e passe a formar as ideias no campo das representações mentais. Também devemos oportunizar ao estudante de forma individual a possibilidade de investigação e interação com o MDM, com o intuito de que ele desenvolva habilidades e autonomia acerca do fazer matemática.

Sobre a teoria de teoria de Raymond Duval, esta nos possibilitou identificar transformações entre os diferentes momentos da atividade. No entanto, a percepção da possibilidade e da necessidade de seguir no estudo sobre Registros de Representações Semióticas no contexto de realização de atividades com MDM, a fim de realmente nos esclarecermos acerca das transformações de representações possíveis e significativas, é um avanço considerável para nós neste momento.Com base na segunda questão norteadora deste estudo, a saber "*Como estudantes (no estágio de desenvolvimento cognitivo operatório formal) revelam sua compreensão (efetuando transformações de registros de representações) acerca de um objeto matemático no decorrer da realização de atividades envolvendo um MDM e registros de representações semióticas?*", pudemos avaliar a viabilidade do uso dessas atividades para o ensino de matemática, bem como perceber outros desdobramentos possíveis para elas.

Propomos as atividades elaboradas a três estudantes, de 14, 15 e 16 anos de idade, cursando o nono ano do Ensino Fundamental e o primeiro e terceiro anos do Ensino Médio. Elas foram realizadas por eles em um mesmo local nas mesmas condiçõesporém, em ocasiões diferentes. Após a realização das atividades elaboramos relatos que detalham o desenvolvimento delas pelos estudantes com a nossa mediação. A proposta das atividades em diferentes níveis de complexidade, iniciando por manipulações e questionamentos relativamente simples favoreceu o ganho de confiança e pode ter contribuído para a aquisição da autonomia demonstrada. Houve estudante que mesmo tendo tido dificuldades, após rever a atividade e reconstruir o processo, alegou que aquelas não existiram.

A atividade proposta pode evidenciar que apesar da faixa etária dos estudantes e do desenvolvimento intelectual cognitivo não necessitar do concreto, os estudantes apresentaram dificuldades para identificar as relações matemáticas.

Um aspecto que chamou a atenção foi a desenvoltura que o estudante 1 apresentou para resolver a atividade com autonomia. Provavelmente porque os assuntos envolvidos haviam sido estudados mais recentemente por ele, se comparado com os demais estudantes, que já estão no Ensino Médio,

No decorrer da realização das atividades propostas, pudemos verificar a presença e a relevância da língua materna, como um primeiro registro de representação semiótica, e seu papel nas operações discursivas que foram fundamentais para a elaboração de registros posteriores. Esse aspecto é perceptível principalmente quando mencionamos o nome de objetos matemáticos, um exemplo a diagonal, o estudante mostra qual é o objeto, seu posicionamento, mas não consegue nomeá-lo. Esse comportamento foi perceptível nos três estudantes.

Sobre o potencial das atividades propostas é possível afirmar que estas podem ser grandes facilitadadores no processo de aquisição do conhecimento pois, demandaram a elaboração de diferentes representações de uma relação matemática investigada, o que favorece a formação de registros de representações semióticas, de acordo com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval.

Outro aspecto que pôde ser percebido é o aumento da autonomia do estudante no desenvolvimento da atividade. Ao final da atividade 3 alguns estudantes já não se mostraram tão dependentes de orientações por parte da professora pesquisadora.

No que diz respeito a limitações e dificuldades para a realização das atividades, destacamos que o tempo previsto, ainda que não fixado, foi extrapolado. Os trinta minutos que julgamos necessários na verdade foram insuficientes sendo que a realização das atividades durou 40, 70 e 60 minutos para os estudantes 1, 2 e 3 respectivamente. Essa ampliação do tempo necessário para a realização possivelmente deveu-se à pouca familiaridade dos estudantes com atividades manipulativas e à minúcia da pesquisadora ao acompanhar a produção de justificativas escritas para as deduções no momento 4, explicando/ensinando conceitos e notações desconhecidos ou não lembrados pelos estudantes.

Percebemos que desde o início da atividade até a produção da prova matemática com argumentos algébricos para a relação matemática detectada (que o segmento encontrado equivale a 1/3 do lado do quadrado), o estudante transita entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático, que são exploradas e discutidas na medida em que registros delas são solicitados e elaborados, sob a orientação da professora pesquisadora. Consideramos que esse mesmo tipo de transição pode ocorrer quando o estudante busca compreender uma demonstração matemática apresentada com propósitos didáticos.

Ressaltamos que são muitas ainda as possibilidades de discussão acerca do tema explorado e que nossa compreensão acerca dele certamente foi ampliada, embora ainda permaneça limitada. Para finalizamos este texto, expomos uma questão que pode ser investigada, como complemento a nossas contribuições: como o estudante relata seus avanços, em relação à compreensão matemática, no decorrer das atividades propostas?

REFERÊNCIAS

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O Papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 7, n.2, p.201-227, 2005. Disponível em: ‹http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/4701/3269›. Acesso em:17/05/14.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. v.3.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio; ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1998.

DAMM, R. F. Registro de representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-153.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução por Fernando Miguel Louro, Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa : Gradiva, 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-12,1990.

GAMA; C. L. G. da; SANTOS, J. V. dos. Laboratório de matemática, um diferencial no ensino de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais**. Curitiba, 2013. Disponível em‹ http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/poster_3.html›. Acesso em: 25/01/14.

GARNICA, Antônio V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. Rio Claro, 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP. Rio Claro, 1995.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: ______ (Org). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.(Coleção Formação de Professores). p. 3-37.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

NEGRELLI, L. G. A consideração de procedimentos dedutivos e indutivos na formação de professores de matemática .2000. 102 f. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR. Curitiba, 2000.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké.** Campinas, UNICAMP, v.4, n.6. p. 65 – 74, 1996. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2664>. Acesso em: 27/09/14.

______. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino a geometria. In: REUNIÃO ANPED, 23, 2000, Caxambu, MG. **Anais.** Caxambu, 2000.Disponível em: < http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF>. Acesso em: 27/09/2014.

PAULO, S. G. de O.; PINHEIRO, C. A. de M. Alguns Aspectos do ensino de matemática por meio de materiais concretos In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**,** 11., 2013, Curitiba. **Anais**. Curitiba, 2013. Disponível em: ‹http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/comunicacoes_6.html›. Acesso em: 25/01/2014.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A psicologia da criança.** Tradução: Octavio Mendes Cajado. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil,1995.

RODRIGUES, B. G.; VWEBWNEH, V.; ESTEVAM, E. J. G. Poliedros arquimedianos: materiais manipuláveis e Sofware Poly como alternativa didática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2013, Curitiba**.** **Anais.** Curitiba, 2013. Disponível em: ‹hptp://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2518_1018_ID.pdf›. Acesso em: 25/01/2014.

DOCUMENTOS CONSULTADOS

ALMOULOUD, Saddo Ag. A noção de registro de representação semiótica e análise do funcionamento do pensamento. In: ______ **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: UFPR, 2007. p. 71-88.

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração decimal.** 2005, 246f. Tese (Doutorado em Educação Científica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Disponível em: ‹https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/103059/222199.pdf?sequence=1›. Acesso em :17/05/2014.

BRANDT, C. F.; DIONIZIO, F. A. Q. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Caxias do Sul, RS. **Anais**. Caxias do Sul, 2012. Disponível em: ‹http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/2866/264›. Acesso em :17/05/2014.

BRANDT, C. F. et al. O ensino da álgebra de acordo com teoria dos registros de representação semiótica segundo Reymond Duval. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11.,**.** Curitiba, 2013. **Anais**. Disponível em: ‹ http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3198_1794_ID.pdf›. Acesso em 17/05/14.

IBRAIM, E. S. R.; BARRETO, M. dos S. O Uso de dobraduras e origami no ensino de geometria plana.. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba, 2013. **Anais**. Curitiba, 2013Disponível em: ‹http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/relatos_7.html›. Acesso em 25/01/14.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos a luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação - Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem) Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grosa, 2012. Disponível em: <http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=732>Acesso em: 25/01/14

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas. Papirus, 2013. (Coleção Papirus Educação)

MÜELLER, C.et al. O ensino de matemática e a aprendizagem lúdica: um relato de experiência In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,9., 2013, CURITIBA **Anais**. Curitiba, 2013. Disponível em: ‹http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/relatos_2.html›. Acesso em: 25/01/2014.

SILVA, V. dos S.; LUCENA, T. V. de. Uso de material manipulável nas aulas de introdução à álgebra com alunos em defasagem idade/série. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba, 2013. **Anais.** Disponível em: ‹http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/relatos_7.html›. Acesso em 25/01/14.

APÊNDICE

APÊNDICE 1 – Tabela organizada com o objetivo organizar observações relacionadas as hipóteses levantadas para a realização da atividade.

Descrição do identificador	Estudante 1 9º ano do Ens. Fund.	Estudante 2 3º ano do Ens. Médio	Estudante 3 1º ano do Ens. Médio
$H_{0,1}$: que o estudante revele familiaridade com os termos metade, ponto médio, referindo-se ao quadrado	Não revelou a familiaridade esperada **Obs.** Mencionou somente que a linha dividia o quadrado ao meio	Não revelou a familiaridade esperada **Obs:** Menciona o ângulo de 90° formado pela linha que marca a metade da folha de papel quadrada quadrado e a borda da folha.	Não revelou a familiaridade esperada **Obs:** Ele menciona que ao dobrar a folha obtemos metade, mas não se refere ao ponto médio.
$H_{0,2}$: Que o estudante revele familiaridade com o conceito de diagonal	Não revelou familiaridade **Obs:** Fez referência à simetria que pode ser observada em relação ao vinco.	Não revelou familiaridade **Obs:** Para informar o número de diagonais do quadrado menciona 4, confundindo-as com os lados .	Não revelou familiaridade **Obs:** Para informar o número de diagonais do quadrado menciona 4, confundindo-as com os lados.
$H_{0,3}$: Que o estudante revele familiaridade com conceitos como paralelismo entre segmentos de retas, perpendicularismo e ângulo reto.	Não revelou familiaridade com o conceito de perpendicular **Obs**: O aluno identifica como reto o ângulo formado entre as retas perpendiculares	Revelou pouca familiaridade **Obs:** Em um primeiro momento a estudante não identifica, mas após intervenção usa o termo/nomeia o ângulo como reto.	Não revelou familiaridade com o conceito de perpendicular **Obs:** Não domina o conceito de retas perpendiculares e retas paralelas em alguns momentos ela identifica as retas paralelas, porém em outros não. Possivelmente devido à não familiaridade com o termo perpendiculares.

Momento 1			
$H_{1,1}$: Que obtenha três retângulos semelhantes	Obteve utilizando a estratégia de dobrar a folha de modo a sobrepor três partes e em seguida ajustando as dobras **Obs** Percebe que os retângulos não ficaram do mesmo tamanho e tenta aproximar as medidas ajustando a dobra	Obteve utilizando a estratégia de dobrar a folha de modo a sobrepor três partes e em seguida ajustando as dobras **Obs:** Percebe que os retângulos não ficaram do mesmo tamanho e tenta aproximar as medidas ajustando a dobra	Obteve utilizando a estratégia de levar os dois lados do quadrado ao meio do quadrado, dessa forma se obteve dois retângulos menores e um maior, em seguida o estudante fez o ajuste das dobras **Obs:** Percebe que os retângulos não ficaram do mesmo tamanho e tenta aproximar as medidas ajustando a dobra
$H_{1,2}$: Que o estudante perceba e verbalize que o lado menor equivale a 1/3 do lado do quadrado.	Percebeu e verbalizou **Obs:** Não se fez necessário a intervenção	Não percebeu nem verbalizou **Obs:** O estudante visualizou após intervenção	Não percebeu nem verbalizou **Obs:** O estudante visualizou após intervenção
$H_{1,3}$: Que o estudante argumente sobrepondo as três regiões retangulares (argumento geométrico) ou utilize a régua graduada (argumentos aritmético) efetuando medições.	Utiliza a régua graduada para medir o lado menor do retângulo **Obs:** Ele não tenta sobrepor os retângulos	Utiliza a régua graduada para medir o lado menor do retângulo **Obs:** Ele não tenta sobrepor os retângulos	Utiliza a régua graduada para medir o lado menor do retângulo **Obs:** Ela permanece com as partes sobrepostas, porém, não argumenta que são do mesmo tamanho
Momento 2			
$H_{2,5}$: Que tenha familiaridade com aspectos relacionados ao quadrado.	Apresenta familiaridade com os elementos do quadrado **Obs:** Em um primeiro momento,	Apresenta familiaridade com os elementos do quadrado **Obs:** Apresentou dificuldade para	Apresenta familiaridade com os elementos do quadrado **Obs:** Apresentou dificuldade para

	nomeou os vértices de uma forma diferente da orientada. Apresentou dificuldade para realizar a dobra entre o ponto E e o ponto C.	realizar a dobra entre o ponto E e o ponto C.	realizar a dobra entre o ponto E e o ponto C. A primeira diagonal traçada foi a BD que não era a solicitada
$H_{2,2}$: Que o estudante tenha familiaridade com termos como paralelo, perpendicular e outros relacionados ao quadrado.	Apresenta familiaridade Obs: Utilizou o esquadro para traçar o segmento FG e como referencia utiliza o lado AB do quadrado.	Apresenta familiaridade Obs: Utilizou o esquadro para traçar o segmento FG sem nenhuma referência	Apresenta pouca familiaridade Obs: Em um primeiro momento a estudante identifica oralmente o paralelismo entre os segmentos, porém, quando ao traçar se confundia. Em seguida utilizou o esquadro para traçar o segmento, teve como referencia o segmento AB do quadrado.
$H_{2,3}$: Ele levantará a hipótese de que FG=1/3 AC	Levantou a hipótese **Obs:** De imediato levanta a hipótese	Não levantou a hipótese **Obs:** Após intervenção a estudante levanta a hipótese	Não levantou a hipótese **Obs:** Apresentou um pouco de dificuldade para entender o solicitado, porém, em seguida levantou a hipótese.
$H_{2,4}$: O estudante concorda.	Sim Obs:	Sim Obs: Mesmo tendo concordado com a hipótese a estudante insiste em fazer relações com medidas dos triângulos de forma equivocada	Sim Obs:
TERCEIRO MOMENTO			

$H_{3,1}$: O estudante realizará a atividade de registro sem dificuldades	Apresentou dificuldade **Obs:** Dificuldade para encontrar o ponto médio	Apresentou dificuldade **Obs:** Dificuldade para encontrar o ponto médio	Apresentou dificuldade **Obs:** Dificuldade para encontrar o ponto médio
$H_{3,2}$: Que ele perceba que pode encontrar o ponto médio utilizando o traço das diagonais e o jogo de esquadros.	Não percebeu **Obs:** Após intervenção identificou o ponto médio	Não percebeu **Obs:** Após intervenção identificou o ponto médio.	Não percebeu **Obs:** Após intervenção identificou o ponto médio.
$H_{3,3}$: Que manifeste que o segmento FG é paralelo ao segmento AB.	Manifestou **Obs:** Utilizou como referencia o lado AB do quadrado para traçar FG	Manifestou **Obs:** Identificou, porém não utilizou o lado AB do quadrado como referencia para traçar FG	Manifestou **Obs:** Utilizou como referencia o segmento EB para traçar FG
$H_{3,4}$: Que identifique relações matemáticas que serão utilizadas na elaboração de uma provas.	Não identificou **Obs:** A primeira intenção foi utilizar uma régua graduada Não mencionou nenhum elemento matemático para elaborar a prova	Não identificou **Obs:** A primeira intenção foi utilizar uma régua graduada. Menciona que podemos usar fração. A estudante se prende a relação entre os lados e tem dificuldade para fazer relação com os triângulos	Não fez relação e não utilizou a régua **Obs:** Não identifica nenhum conceito ou relação que possa ser usada
QUARTO MOMENTO			
$H_{4,1}$: Que o estudante identifique elementos que permitam concluir que os triângulos são semelhantes.	Não identificou **Obs:** Segundo o estudante, “o triângulo maior é um inteiro e o pequeno é dois terços.”	Identificou **Obs:** Não apresentou dificuldades para identificar a relação entre os ângulos	Não identificou **Obs:** Primeiramente fez relação com os lados que são iguais, porém não identificou relação com os ângulos.

$H_{4,2}$: O estudante não apresente conhecimentos e habilidades necessárias para elaborar uma prova havendo necessidade de auxílio e ensinamentos da pesquisadora.	Apresentou habilidades mediana **Obs:** Necessitou de poucas intervenções	Apresentou pouca habilidade **Obs:** Necessitou de muitas intervenções	Apresentou habilidade mediana **Obs:** necessitou de poucas intervenções
$H_{4,3}$: Que o estudante relembre as propriedades de triângulos e que responda que sim, devido ao fato do triângulo FGB ser isósceles. Que tenha familiaridade com Teorema de Tales e as regras de proporção	Relembrou as propriedades e não apresentou familiaridade com a regra de proporção	Relembrou as propriedades e não apresentou familiaridade com a regra de proporção	Relembrou as propriedades e não apresentou familiaridade com a regra de proporção
$H_{4,4}$: Que o estudante consiga fazer relação entre os termos.	Fez relação **Obs:** Faz a transição entre os termos sem apresentar dificuldades	Não fez todas as relações **Obs**: Faz a relação com varias intervenções	Não fez todas as relações **Obs**: Faz a relação com pouca intervenção
$H_{4,5}$: Que o estudante não apresente desenvoltura.	Apresentou Desenvoltura **Obs:** Apresenta pouca dificuldade em relação ao desenvolvimento algébrico	Não apresentou desenvoltura **Obs:** Apresenta muita dificuldade em relação ao desenvolvimento algébrico	Não apresentou desenvoltura **Obs:** Apresenta dificuldade mediada em relação ao desenvolvimento algébrico
$H_{4,6}$: O estudante construirá o seguinte argumento algébrico com auxilio da pesquisadora.	Não construiu **Obs:** Apresentou dificuldade para construir o argumento. Necessitou de intervenção	Não construiu **Obs:** Apresentou dificuldade para construir o argumento. Necessitou de intervenção	Não construiu **Obs:** Apresentou dificuldade para construir o argumento. Necessitou de intervenção

APÊNDICE 2: impressas entregue no momento 2 ao estudante

MOMENTO 2

REALIZE AS ATIVIDADES SEGUINDO AS ORIENTAÇÕES

1. Disponha uma folha de papel quadrada sobre a mesa de modo que um dos lados fique paralelo à borda da mesa (que é retangular).

2. Escreva nos cantos dessa folha as letras **A**, **B**, **C** e **D** indicando os vértices de um quadrado.
   Inicie pelo canto superior esquerdo e siga no sentido horário.

3. Considere o lado AB do quadrado, que é um segmento de reta, e determine seu ponto médio.
   Use a letra **E** para indicar este ponto médio e escreva-a na folha adequadamente.

4. Dobre e desdobre essa folha quadrada de modo a marcar (vincar) o segmento de reta EC, que vai do ponto médio **E**, que você acaba de determinar, ao vértice **C**.
   Observe que com essa dobra fica evidente o triângulo retângulo EBC.

5. Dobre e desdobre a folha de modo a marcar a diagonal BD do quadrado ABCD.

6. Observe que essa diagonal BD intercepta a hipotenusa EC em um ponto.
   Escreva na folha a letra **F** para indicar esse ponto de interseção.

7. Visualize um ponto **G**, situado entre os vértices **B** e **C**, de modo que o segmento de reta FG seja paralelo ao lado EB do triângulo EBC. Escreva na folha a letra **G** para determinar esse ponto.
   Trace a lápis o segmento de reta FG na folha.

8. Observe as anotações que você fez na folha e responda: qual a relação entre a medida do segmento de reta FG e a medida do lado do quadrado ABCD?

APÊNDICE 3 - Orientações impressas entregue no momento 3 ao estudante

MOMENTO 3

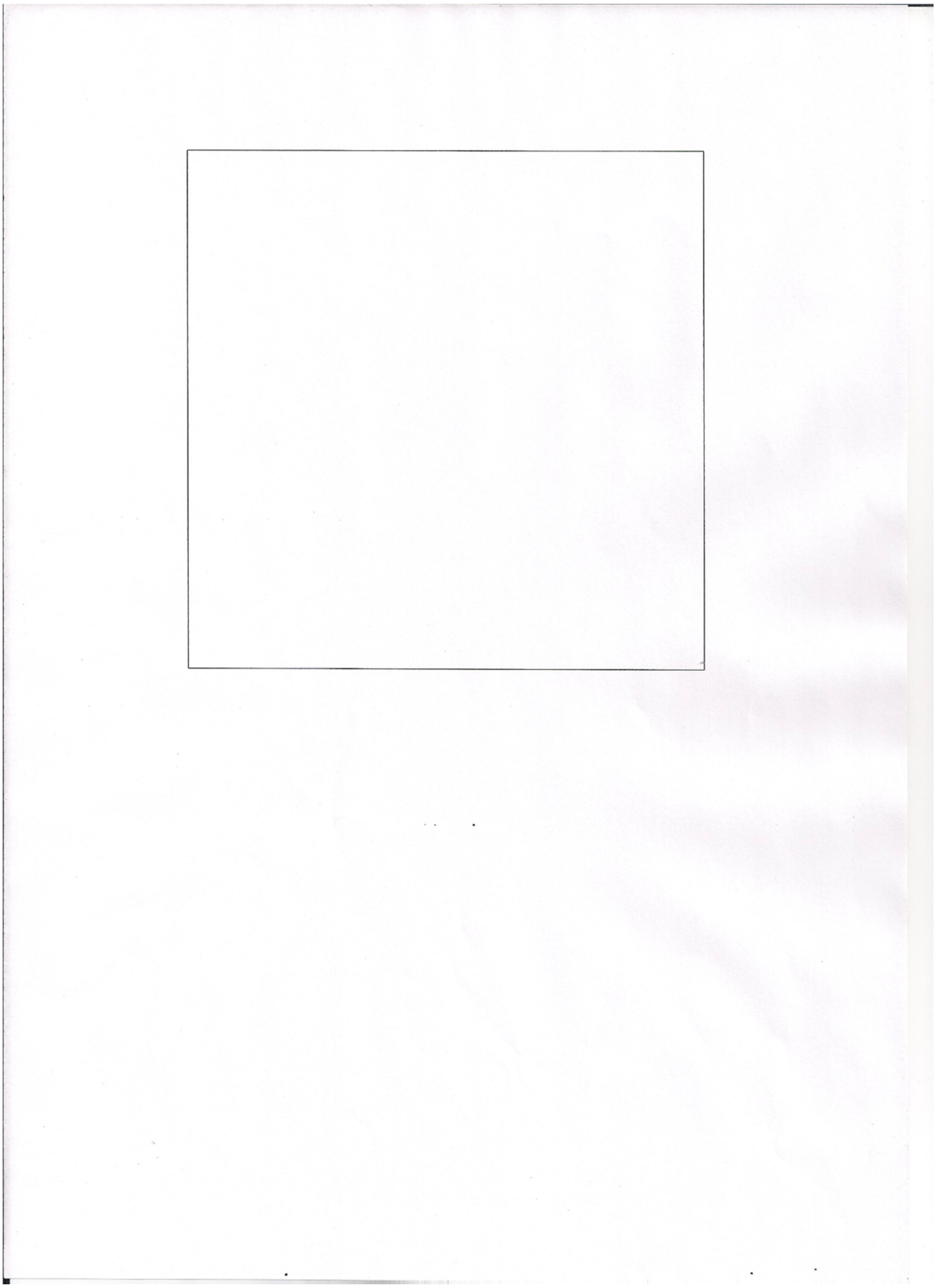
CONTINUE REALIZANDO AS ATIVIDADES SEGUINDO AS ORIENTAÇÕES

Você recebeu uma folha com o desenho de um quadrado que representa o contorno da folha quadrada utilizada no momento anterior. Você representará nesta figura os pontos, segmentos de reta e figuras geométricas determinadas naquela atividade. Para isso,

1. Escreva as letras **A**, **B**, **C**, e **D** indicando os vértices do quadrado ABCD.
2. Escreva a letra **E** e trace o segmento EC utilizando a régua.
3. Escreva as letras **F** e **G** e trace o segmento FG.
4. Na atividade anterior você verificou, utilizando régua e também dobrando a folha de papel quadrada, que o segmento FG mede $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado ABCD.

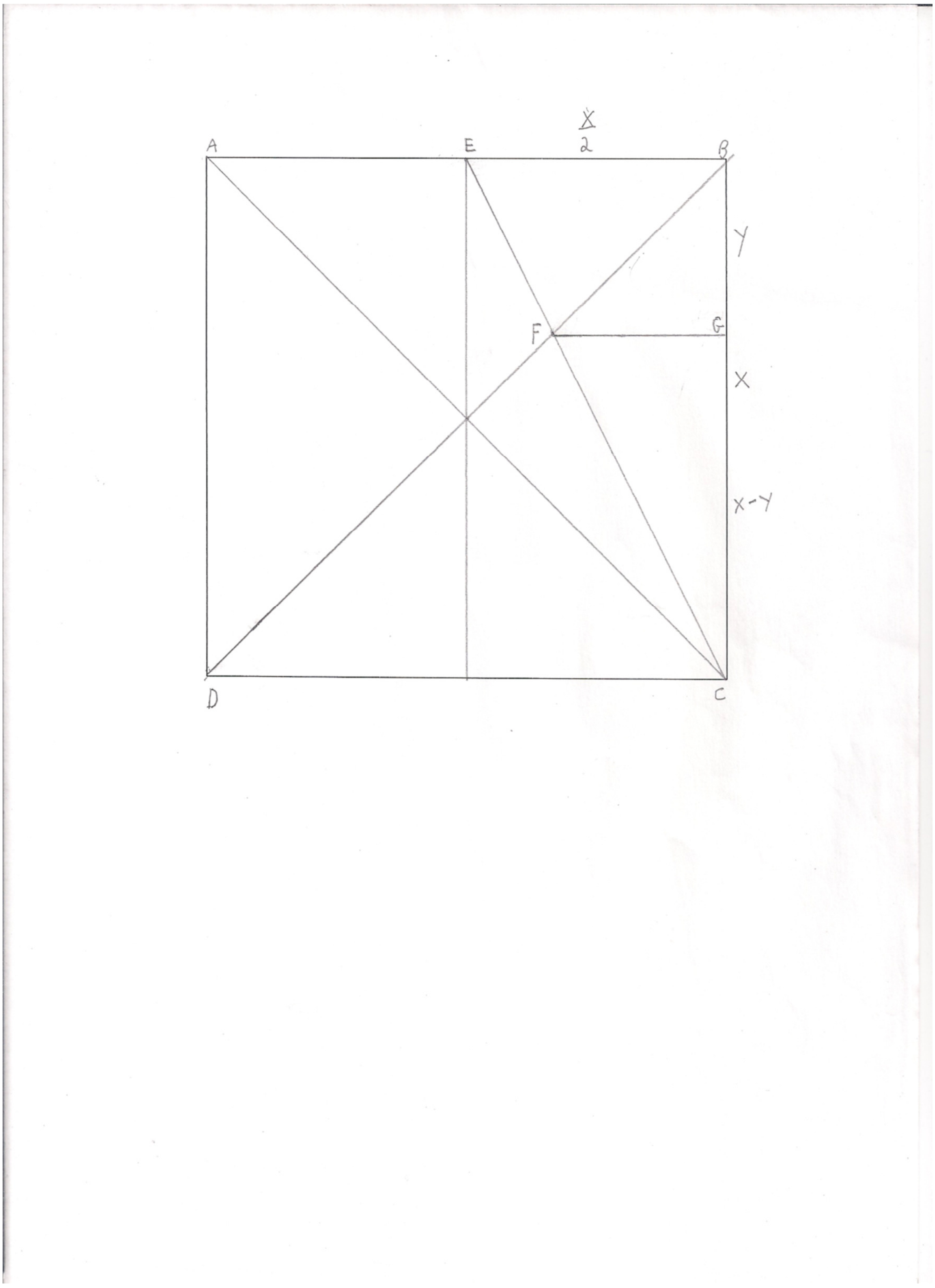
A partir das anotações feitas na folha como você prova que o segmento de reta FG mede $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado ABCD? Ou seja, que $FG = \frac{1}{3}\,BC$? Escreva.

APÊNDICE 4 - Folha sulfite A4 na qual está desenhado um quadrado que representa o contorno da folha quadrada utilizada no Momento 3



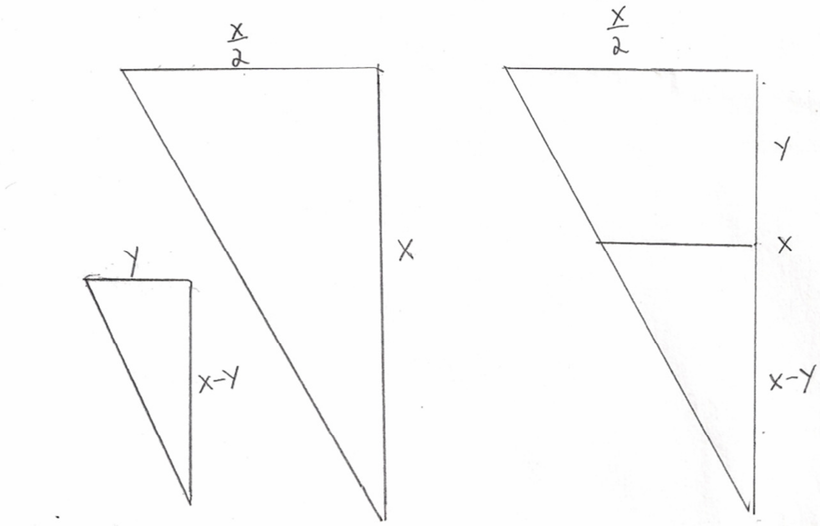
ANEXO

ANEXO1 – Resultado da atividade realizada no momento 3 do estudante 1



ANEXO2 – Resultado da atividade realizada no momento 4 do estudante 1

MOMENTO 4



$$\frac{x}{x-y} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$$

$$xy = \frac{x}{2}(x-y) \rightarrow xy = \frac{x^2 - xy}{2}$$

$$xy = \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2} \rightarrow 2xy = x^2 - xy$$

$$\downarrow$$

$$3xy = x^2$$

$$3y = x$$

$$y = \frac{x}{3}$$

ANEXO3 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 1

MOMENTO 5

1. Você já conhecia a atividade que acabou de realizar, ou parte dela? Parte

2. Os assuntos, conteúdos ou termos matemáticos que apareceram na atividade já eram conhecidos por você? Sim, mas não me recordava de alguns

3. Apareceu algum assunto que você ainda não estudou ou não se lembrava? Se apareceu, qual foi? Sim, não me lembrava do Teorema de Thales

4. Em qual parte da atividade você considera que mais utilizou seus conhecimentos matemáticos? Explique.

Na qual eu fui desvendando as equações para descobrir a fórmula para encontrar o Y, eu utilizei meus conhecimentos sobre fração e equações

5. Você considera que a realização da atividade trouxe-lhe mais compreensão sobre a matemática? Explique.

Sim, desvendei novos conteúdos matemáticos que aprimoraram meu raciocínio

6. Há alguma parte que você achou mais interessante? Se houver, qual é?

Sim, quando eu tive que dobrar a folha várias vezes para encontrar determinados pontos

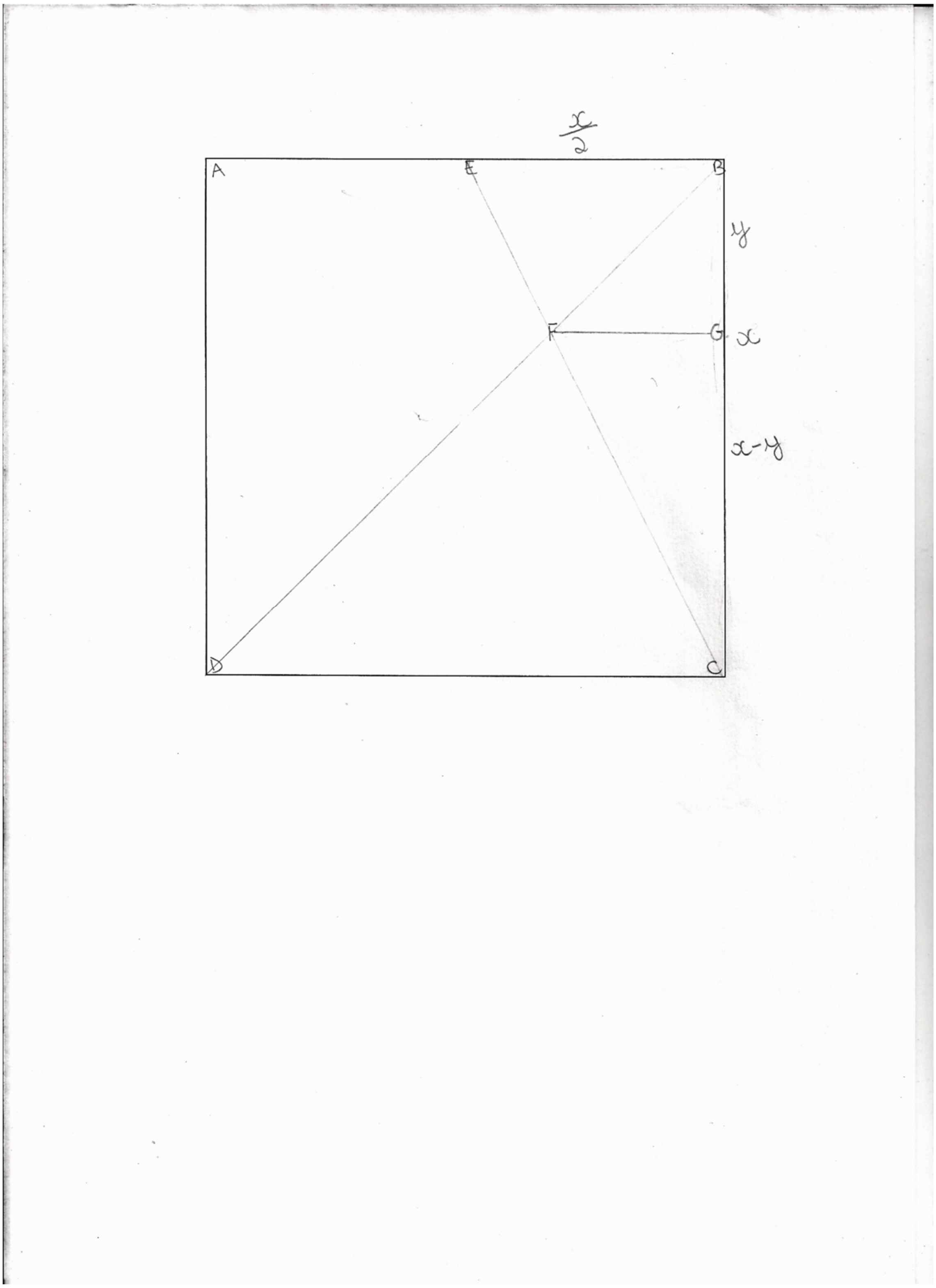
ANEXO4 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 1

7. Avalie cada uma das seguintes ações quanto ao grau de dificuldade que você teve para desenvolvê-la. Escreva à frente de cada item:

Nenhuma dificuldade *Pouca dificuldade* *Muita dificuldade*

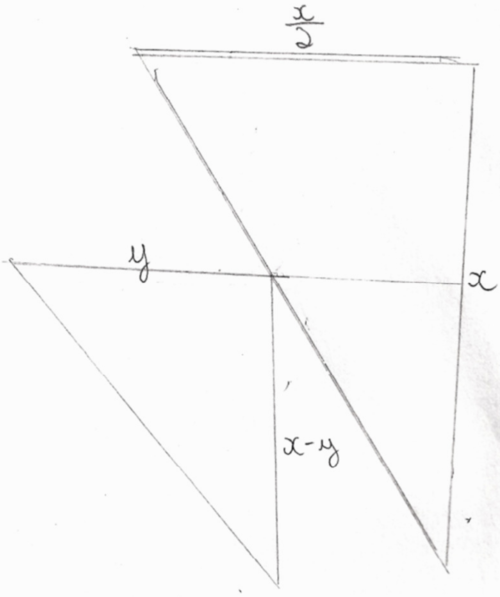
- Ler e entender as instruções ...Nenhuma dificuldade...
- Executar as instruções ...Nenhuma dificuldade...
- Escrever o que era pedido ...nenhuma dificuldade...
- Escrever a prova matemática ...Pouca dificuldade...
- Fazer as dobras no papel ...Pouca dificuldade...

ANEXO 5 – Resultado da atividade realizada no momento 3 do estudante 2



ANEXO 6 – Resultado da atividade realizada no momento do estudante 2

MOMENTO 4



$$\frac{x}{x-y} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$$

$$x \cdot y = (x-y)\cdot\frac{x}{2}$$

$$xy = \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2}$$

$$xy + \frac{xy}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}\cdot x$$

$$\frac{2xy}{2} + \frac{xy}{2}$$

$$\frac{3xy}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$3xy = \frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$

$$y = \frac{x^2}{3x} \qquad y = \frac{x}{3}$$

ANEXO 7 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 2

MOMENTO 5

1. Você já conhecia a atividade que acabou de realizar, ou parte dela? Não

2. Os assuntos, conteúdos ou termos matemáticos que apareceram na atividade já eram conhecidos por você? Sim

3. Apareceu algum assunto que você ainda não estudou ou não se lembrava? Se apareceu, qual foi? Teorema de Thales

4. Em qual parte da atividade você considera que mais utilizou seus conhecimentos matemáticos? Explique.

Na proporção e nos triângulos, pois mesmo assim podemos usar um pouco da lógica.

5. Você considera que a realização da atividade trouxe-lhe mais compreensão sobre a matemática? Explique.

Sim. Com o auxílio das dobraduras, obtém-se uma compreensão maior em relação à medidas.

6. Há alguma parte que você achou mais interessante? Se houver, qual é?

Na parte das dobradura, que assim se formam os triângulos e suas medidas.

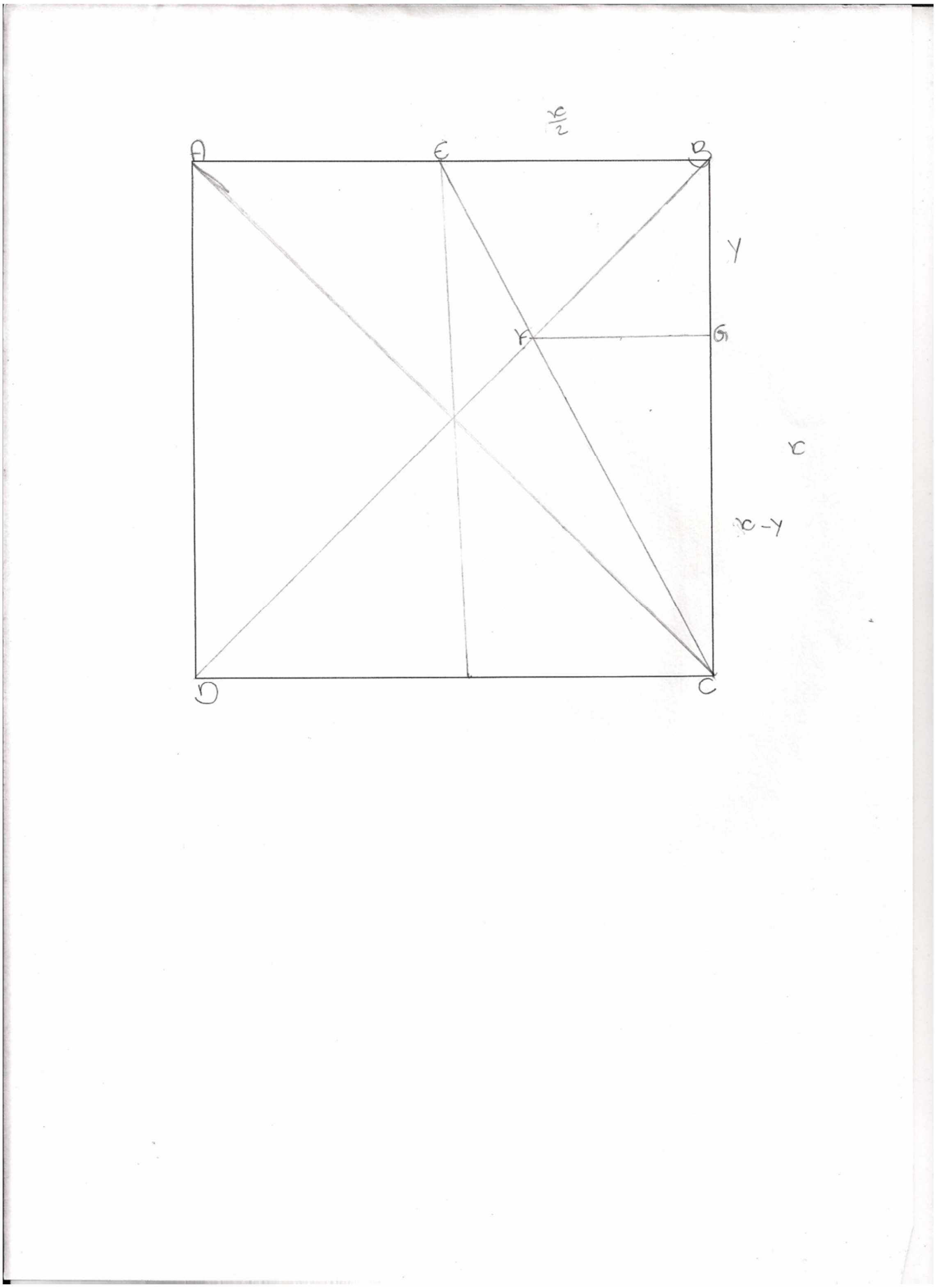
NEXO 8 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 2

7. Avalie cada uma das seguintes ações quanto ao grau de dificuldade que você teve para desenvolvê-la. Escreva à frente de cada item:

Nenhuma dificuldade *Pouca dificuldade* *Muita dificuldade*

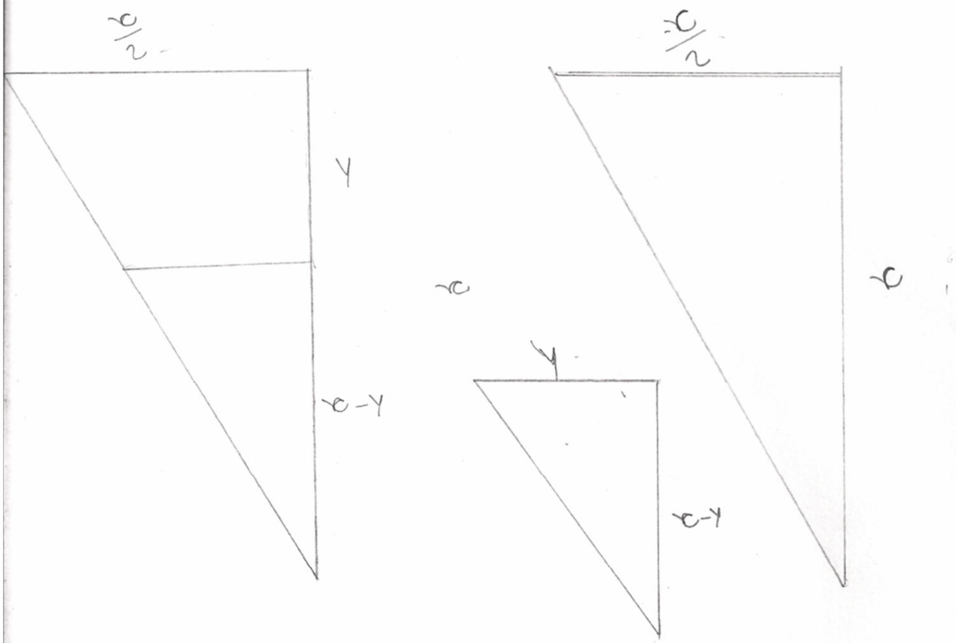
- Ler e entender as instruções ....Nenhuma dificuldade............
- Executar as instruções ...Nenhuma dificuldade......................
- Escrever o que era pedido ...Nenhuma dificuldade..................
- Escrever a prova matemática ...Muita dificuldade....................
- Fazer as dobras no papel ...Nenhuma dificuldade.................

ANEXO 9 – Resultado da atividade realizada no momento 3 do estudante 3



ANEXO10 – Resultado da atividade realizada no momento 4 do estudante 3

MOMENTO 4



$$\frac{x}{x-y} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$$

$$xy = \frac{x}{2} \times (x - y)$$

$$xy = \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2}$$

$$\frac{xy}{1} + \frac{xy}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{2xy}{\cancel{2}} + \frac{xy}{\cancel{2}} = \frac{x^2}{\cancel{2}}$$

$$3xy = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{3x}$$

$$y = \frac{x}{3}$$

m.m.c $\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$

ANEXO11 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 3

MOMENTO 5

1. Você já conhecia a atividade que acabou de realizar, ou parte dela? Sim

2. Os assuntos, conteúdos ou termos matemáticos que apareceram na atividade já eram conhecidos por você? Sim

3. Apareceu algum assunto que você ainda não estudou ou não se lembrava? Se apareceu, qual foi? Sim. Ângulos

4. Em qual parte da atividade você considera que mais utilizou seus conhecimentos matemáticos? Explique.

   No momento 4. Porque foi o momento em que fiz conta para descobrir o valor de um lado do triângulo.

5. Você considera que a realização da atividade trouxe-lhe mais compreensão sobre a matemática? Explique.

   Sim. Porque tem algumas coisas que são lógicas e não consegui ver no momento.

6. Há alguma parte que você achou mais interessante? Se houver, qual é?

   Sim o momento em que fiz o quadrado com os triângulos.

ANEXO12 – Resultado da atividade realizada no momento 5 do estudante 3

7. Avalie cada uma das seguintes ações quanto ao grau de dificuldade que você teve para desenvolvê-la. Escreva à frente de cada item:

Nenhuma dificuldade *Pouca dificuldade* *Muita dificuldade*

- Ler e entender as instruções ...Pouca dificuldade...
- Executar as instruções ...Pouca dificuldade...
- Escrever o que era pedido ...Pouca dificuldade...
- Escrever a prova matemática ...Pouca dificuldade...
- Fazer as dobras no papel ...Nenhuma dificuldade...