UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Oscar Armando Hernández Morales

UMA INTRODUÇÃO ÀS t-ESTRUTURAS E APLICAÇÕES.

Curitiba, 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Oscar Armando Hernández Morales

UMA INTRODUÇÃO ÀS t-ESTRUTURAS E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Curitiba, 2015.

M828i Morales, Oscar Armando Hernández
Uma introdução às t-estruturas e aplicações/ Oscar Armando Hernández Morales. – Curitiba, 2015.
144 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares .
Bibliografia: p. 143-144.

1. Álgebra homológica. 2. Categorias (Matemática). 3. Teoria dos funtores. I. Universidade Federal do Paraná. II.Alvares, Edson Ribeiro. III. Título.

CDD: 512.62

TERMO DE APROVAÇÃO

"UMA INTRODUÇÃO ÀS t-ESTRUTURAS E APLICAÇÕES"

por

OSCAR ARMANDO HERNÁNDEZ MORALES

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática,

pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: ______________________________

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Dep. de Matemática – UFPR

____

Prof. Dr. Hernan Alonso Giraldo Salazar
Universidad de Antioquia

____

Profa. Dra. Sonia Elisabet Trepode
Universidad Nacional de Mar del Plata

Curitiba, 13 de fevereiro de 2015.

Agradecimentos

É realmente muito difícil agradecer em tão poucas linhas todas as pessoas que já passaram pela minha vida e que de alguma forma me ajudaram a ser quem sou e a chegar onde cheguei, se fosse listar aqui todos os nomes, provavelmente o espaço não seria suficiente, por isso, agradeço a todos que não tiverem seus nomes aqui citados. Quero começar agradecendo aos meus pais por sempre me apoiarem em minha vida acadêmica e por sempre acreditarem em mim. Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares, por ter me orientado neste trabalho, e também pela sua dedicação e confiança em meu trabalho, acreditando sempre no meu sucesso.

Gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro. Agradeço também ao PPGM e a todos os professores do programa. Agradeço a todos os meus amigos, pelos momentos felizes que podemos compartilhar juntos. E finalmente, agradeço todos meus amigos, por sempre estar ao meu lado e me apoiar, e sempre continuar acreditando em mim, mesmo quando nem mesmo eu acreditava mais.

Resumo

Motivados pela definição de t-estruturas proposta por Beilinson e Bernstein e Deligne em [BBD82], apresentamos a construção de categorias abelianas a partir de uma categoria triangulada. Além disso, a partir do trabalho de Keller-Vossieck [KV88b], estudaremos compatibilidade entre t-estruturas limitadas. Para isso, estabelecemos inicialmente algumas propriedades elementares das categorias trianguladas introduzidas por Verdier em [Ver96]. Logo estudaremos as t-estruturas na categoria derivada.

Palavras-chave: categoria triangulada, t-estruturas, aisles, categoria derivada.

Abstract

Motivated by the definition of t-structures proposed by Beilinson, Bernstein and Deligne in [BBD82], we present a construction of abelian categories from a triangulated category. In addition to that, we study the compatibility between bounded t-structures as seen in Keller-Vossieck [KV88b]. In order to do so, we first establish some basic properties of the triangulated categories introduced by Verdier [Ver96], then we study the t-structures in a derived category.

Keywords: triangulated category, t-structures, aisles, derived category.

Sumário

Introdução **1**

1 Conceitos e Resultados Preliminares **4**

1.1 Categorias e funtores 4

1.2 Categorias trianguladas 7

1.2.1 Propriedades básicas de categorias trianguladas. 12

1.2.2 Funtor exato 17

2 t-Estrutura na categoria derivada. **19**

2.1 Funtor de cohomologia 19

2.2 Funtores de truncamento na categoria C(A). 24

2.3 Funtores de truncamento na categoria D(A). 33

2.3.1 Sequências exatas curtas e triângulos distinguidos. 36

2.4 A t-estrutura natural na categoria derivada. 38

3 t-estruturas **49**

3.1 t-estruturas em categorias trianguladas. 49

3.2 Funtores truncamento em categorias trianguladas 57

3.3 Composição de funtores truncamento 73

3.4 O coração de uma t-estrutura 84

3.5 Funtor de cohomologia em categorias trianguladas. 95

3.6 t-estruturas não degeneradas e limitadas. 108

4 Aisles e t-estruturas **112**

4.1 Aisles 112

4.2 Compatibilidade de t-estruturas. 123

4.2.1 Ligações entre os corações de t-estruturas compatíveis 126

4.2.2 Compatibilidade em t-estruturas limitadas. 136

Referências Bibliográficas **143**

Introdução

Tendo as suas origens em geometria e topologia algébrica, as categorias trianguladas foram introduzidas em meados dos anos 1960 por Jean-Louis Verdier em sua tese doutoral, ver [Ver96]. Hoje em dia existem aplicações importantes de categorias trianguladas em áreas como geometria algébrica, topologia algébrica, álgebra comutativa, geometria diferencial e teoria de representação.

Uma descoberta importante em álgebra homológica na década de oitenta foi o fato de as categorias derivadas de duas categorias abelianas absolutamente diferentes poderem ser equivalentes como categorias trianguladas. Neste trabalho, descrevemos uma abordagem axiomática do problema e estudaremos uma técnica que iranos permitir construir subcategorias abelianas dentro de uma mesma categoria triangulada. Essa axiomátição é chamada de o formalismo das t-estruturas, as quais foram introduzidas por Beilinson, Bernstein e Deligne [BBD82]. Além disso, estudaremos as t-estruturas no casso particular das categorias derivadas. Mais especificamente, temos que os axiomas de uma t-estrutura formalizam a seguinte situação: Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana e $\mathscr{D} = \mathscr{D}^*(\mathscr{A})$ sua categoria derivada. Denote $\mathscr{D}^{\geq n}$ (respectivamente $\mathscr{D}^{\leq n}$) à subcategoria plena de $\mathscr{D}$ formada pelos complexos $K^\bullet$ com $H^i(K^\bullet) = 0$ para $i < n$ (respectivamente Para $i > n$). Pela Proposição 2.14, a subcategoria plena $\mathscr{D}^{\geq 0} \bigcap \mathscr{D}^{\leq 0}$ (chamada de categoria dos H^0- complexos) coincide com $\mathscr{A}$; mais explicitamente, o functor $\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq 0} \bigcap \mathscr{D}^{\leq 0}$ é a equivalência de categorias. Acontece que para provar que a intersecção $\mathscr{D}^{\geq 0} \bigcap \mathscr{D}^{\leq 0}$ é abeliana precisamos apenas das propriedades formais que apresentamos em 3.1. Desta maneira resulta claro que cada categoria abeliana pode ser entendida como o coração de uma t-estrutura na sua categoria derivada. A questão de quais categorias abelianas podem ser dadas como corações de t-estruturas sobre uma categoria derivada fixa, não foi abordada neste trabalho, e pode ser encontrada em [LV12]. Outra questão interessante é comparar categorias abelianas que tem as mesmas categorias derivadas, isto é estudado por Keller e Vossieck em [KV88b], no qual se coloca o seguinte problema:

Dadas duas categorias trianguladas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, tais que existe uma equivalência triangulada $\Phi : \mathscr{D}^b(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{D}^b(\mathscr{B})$. Temos em $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ uma t-estrutura natural cujo coração é $\mathscr{A}$. Analogamente em $\mathscr{D}^b(\mathscr{B})$. Pela equivalência triangulada, esta t-estrutura em $\mathscr{D}^b(\mathscr{B})$ pode ser olhada como uma t-estrutura em $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$. O que objetivo do conceito de compatibilidade de t-estruturas é comparar duas t-estruturas que alguma forma retém informações sobre os objetos de $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$. Estas informações ora estão codificadas pela t-estrutura natural de $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$, ora pela t-estrutura natural de $\mathscr{D}^b(\mathscr{B})$ que foi levada para $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ pelo funtor Φ.

O objetivo deste trabalho é fornecer as condições básicas necessárias para o leitor interessado em compreender o tema. Para isso, buscamos apresentar a definição clássica de t-estrutura e sua versão moderna que são os ailes introduzidos por Keller-Vossieck. Além disso, como estamos bastante interessados na compreensão de compatibilidade em t-estruturas, fizemos uma seção de aplicações provando os principais resultados sobre o mesmo. Note que a maior parte do que encontramos sobre este tema não estavam provados e apresentamos aqui os resultados com as respectivas provas, assim apresentamos por exemplo o teorema 3.48 o qual não aparece na bibliografia existente. Por conseguinte, os temas neste trabalho estão dispostos da seguinte maneira: no primeiro capítulo, são apresentados os axiomas e as propriedades básicas de Categorias Trianguladas, além de outras definições e resultados necessários nos capítulos seguintes. O segundo capítulo é dedicado à construção da t-estrutura natural numa categoria derivada e suas propriedades as quais serviram de modelo para formular o conceito de t-estrutura em categorias trianguladas, e que iremos apresentar no terceiro capítulo, mais ainda, nesse mesmo capítulo iremos demonstrar as seguintes proposições:

- O coração da t-estrutura numa categoria triangulada é uma categoria abeliana.
- A composição dos funtores de truncamento definem um funtor cohomológico, isto é, a cada triângulo distinguido faz corresponder uma sequência longa de cohomologia.

O funtor de cohomologia resulta ser de grande utilidade no estudo das t-estructuras, pois dito funtor descreve completamente os morfismo e os objetos no caso que a t-estructura é não degenerada, neste caso iremos demonstrar que: Um morfismo na categoria triangulada é um isomorfismo nela, se e somente se, o funtor de cohomologia induz um isomorfismo no coração da t-estructura. Além disso o funtor de cohomologia permite-nos descrever os objetos que pertencem à t-estructura em termos das cohomologias nulas do objeto.

O quarto e último capítulo é destinado a um estudo de Aisles e provaremos que a função $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0}) \longrightarrow D^{\leq 0}$ é uma bijeção entre o conjunto de t-estruturas na categoria triangulada e o conjunto de Aisles da mesma categoria. Além do mais, caraterizaremos um aisle como uma subcategoria estritamente plena $\mathscr{U}$ que é fechada por translações positivas e na qual para cada objeto, existe um triângulo distinguido cujo primeiro elemento pertencem a $\mathscr{U}$, o segundo elemento é o próprio objeto e o terceiro pertence à categoria ortogonal direita de $\mathscr{U}$.

Finalmente, consideramos o conceito de t-estruturas compatíveis. Dadas duas t-estruturas dizemos que a primeira compatível com a segunda se a primeira coordenada da primeira t-estructura é estável por todos os funtores de truncamento induzidos pela segunda t-estrutura. Advertimos ao leitor que iremos precisar estudar alguns conceitos adicionais, os quais são: subcategoria geradora, e a categoria dos q-fechados. Assim

apresentamos um novo teorema (ver 4.38) que diz: *O coração numa de uma t-estructura em uma categoria triangulada, gera dita categoria, se e somente se, a t-estrutura é limitada nesta categoria.*
Destacamos também os seguintes resultados:

- Suponhamos que $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ são aisles compatíveis numa categoria triangulada. Segue que: os funtores de cohomologia associados a $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ respectivamente, induzem funtores adjuntos entre subcategorias dos corações das t-estructuras subjacentes. Mais ainda, iremos construir funtores quasi-inversos, ração pela qual estudaremos as propriedades dos objetos que denominaremos q-fechados.

- Dadas duas t-estructuras limitadas (associadas aos aisles $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$). Neste caso podemos entender a noção de compatibilidade entre t-estruturas, dizendo que o aisle $\mathscr{U}$ será compatibilidad com o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$, se $\mathscr{U}$ é estável pelos funtores de cohomologia induzidos pelo aisle $\mathscr{V}$.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos apenas alguns dos conceitos e das propriedades que usaremos ao longo deste trabalho no qual utilizaremos a linguagem categórica, motivo pelo qual começaremos apresentando as definições formais de: Categoria e funtores, assim como algumas de suas propriedades genais. Logo, iremos definir categorias aditivas, categorias pré-trianguladas e categorias trianguladas e suas propriedades básicas. Finalmente, descreveremos brevemente alguns dos elementos que fazem com que a categoria de homotopia da categoria dos complexos seja uma categoria triangulada.

1.1 Categorias e funtores

Nesta seção introduziremos a noção de categoria, subcategoria (plena e estritamente plena), funtor, funtor adjunto, equivalencia de funtores, categoria aditiva, par de torção. Mais detalhes podem ser encontrados em [GY03, KS90, Mit65, HJR10, Ass97].

Definição 1.1 *Uma categoria $\mathscr{D}$ é dada por uma classe de objetos $Obj(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_0$ e uma classe de morfismos $Mor(\mathscr{D}) = \mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ com uma operação $\circ$ definida em $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ tal que:*

(1) $\mathscr{M}_{\mathscr{D}} = \bigcup_{(A,B)\in\mathscr{D}_0\times\mathscr{D}_0} Hom_{\mathscr{D}}(A,B)$ *onde* $Hom_{\mathscr{D}}(A,B)$ *é um conjunto para cada* $(A,B) \in \mathscr{D}_0 \times \mathscr{D}_0$;

(2) $Hom_{\mathscr{D}}(A,B) = Hom_{\mathscr{D}}(C,D)$ *se e somente se,* $A = C$ *e* $B = D$;

(3) Para cada terna $(A,B,C) \in \mathscr{D}_0 \times \mathscr{D}_0 \times \mathscr{D}_0$ *a operação* $\circ$ *definida em* $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ *induz por restrição, uma função*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{D}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{D}}(B,C) &\longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(A,C) \\ (f,g) &\longrightarrow g \circ f \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

a) Vale a associatividade da composição quando estiver definida: $g\circ(f\circ h) = (g\circ f)\circ h$;

b) $\forall A \in \mathscr{D}_0$, *existe um elemento* $1_A \in Hom_{\mathscr{D}}(A, A)$, *tal que se* $f \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ *e* $g \in Hom_{\mathscr{D}}(A, B)$ *então* $1_A \circ f = f$ *e* $g \circ 1_A = g$;

Definição 1.2 *Seja* $\mathscr{D}$ *uma categoria. Dizemos que:*

i) *Uma categoria* $\mathscr{C}$ *é uma subcategoria da categoria* $\mathscr{D}$ *se:*

   (a) $Obj(\mathscr{C}) \subset Obj(\mathscr{D})$;

   (b) $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \subset Hom_{\mathscr{D}}(X, Y)$ *para quaisquer* $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$;

   (c) *A composição em* $\mathscr{C}$ *é a mesma de* $\mathscr{D}$

   (d) *Para cada* $X \in Obj(\mathscr{C})$ *o morfismo identidade* 1_X *em* $\mathscr{C}$ *é o mesmo que o morfismo identidade* 1_X *em* $\mathscr{D}$.

ii) *Uma subcategoria* $\mathscr{C}$ *é plena se* $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) = Hom_{\mathscr{D}}(X, Y)$ *para quaisquer* $X, Y \in \mathscr{C}_0$.

iii) *Uma subcategoria* $\mathscr{C}$ *é estritamente plena se é plena e fechada por isomorfismos, isto é, dado* $X \in \mathscr{C}_0$ *e um isomorfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *em* $\mathscr{M}_{\mathscr{D}}$ *então* $Y \in \mathscr{C}_0$ *e* f *é um morfismo em* $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$.

Definição 1.3 *Um funtor* F *da categoria* $\mathscr{C}$ *na categoria* $\mathscr{D}$ *(o qual denotaremos por* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$*) é dado por:*

a) *Um mapeio* $\mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{D}_0 : X \longrightarrow F(X)$.

b) *Um mapeio* $\mathscr{M}_{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathscr{D}} : \alpha \longrightarrow F(\alpha)$, *tal que* $F(\alpha) \in Hom_{\mathscr{C}}(F(X), F(Y))$ *quando* $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

Satisfazendo as seguintes condições: $F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)$ *para quaisquer* α, $\beta \in \mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ *sempre que* $\alpha \circ \beta$ *esteja definida e* $F(1_X) = 1_{F(X)}, \forall X \in \mathscr{C}_0$.

Observação 1.4 *Ao funtor que satisfaça a definição anterior o chamaremos de* ***Funtor covariante***. *Por outro lado se o funtor* F *satisfaz a condição* $F(\alpha \circ \beta) = F(\beta) \circ F(\alpha)$ *para quaisquer* α, $\beta \in \mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ *sempre que* $\alpha \circ \beta$ *esteja definida, o chamaremos de* ***Funtor contravariante***.

Definição 1.5 *Dadas as categorias* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *e o funtor* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. *Dizemos que:*

i) *O funtor* F *é fiel se para quaisquer* $X, Y \in \mathscr{C}_0$ *a aplicação* $F : Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(FX, FY)$ *é injetiva, e é pleno se esta aplicação é sobrejetiva.*

ii) *O funtor* F *é denso se, para cada* $Y \in D_0$ *existe um* $X \in C_0$, *tal que* FX *e* Y *são isomorfos.*

iii) *Dado o funtor $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Uma transformação natural ou morfismo funtorial $\eta : F \longrightarrow G$ é uma família de morfismos em $\mathscr{D}$: $\eta_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ um para cada $X \in \mathscr{C}_0$, satisfazendo a condição seguinte: para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathscr{C}$ o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Mais ainda, se para cada $X \in \mathscr{C}_0$, temos que $\eta_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$ então denominaremos á transformação natural $\eta : F \longrightarrow G$ de isomorfismo funtorial.

Definição 1.6 *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. Um funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ é chamado de* ***equivalência de categorias*** *se existe um funtor $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que o funtor GF é isomorfismo ao funtor $Id_{\mathscr{C}}$ e o funtor FG é isomorfismo ao funtor $Id_{\mathscr{D}}$.*
Dizemos que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são equivalentes se existe um equivalência $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$.

Observação 1.7 *Ao funtor G na definição anterior o chamaremos de quasi-inverso do funtor F.*

Definição 1.8 *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ dois funtores. F é adjunto à esquerda de G, ou G é adjunto à direita de F, ou (F, G) é um par adjunto, se para cada $X \in \mathscr{C}_0$ e $M \in \mathscr{D}_0$, existe uma bijeção $\varphi_{X,M} : Hom_{\mathscr{C}}(X, G(M)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(F(X), M)$ e se é funtorial em cada variável, isto é, supondo F e G covariantes; se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo de $\mathscr{C}$ e $u : M \longrightarrow N$ é um morfismo em $\mathscr{D}$, os diagramas seguintes são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(X, G(M)) \arrow[r, "\varphi_{X,M}"] & Hom_{\mathscr{D}}(F(X), M) \\ Hom_{\mathscr{C}}(Y, G(M)) \arrow[r, "\varphi_{Y,M}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{C}}(f,G(M))"] & Hom_{\mathscr{D}}(F(Y), M) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(F(f),M)"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(X, G(M)) \arrow[r, "\varphi_{X,M}"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{C}}(X,G(u))"'] & Hom_{\mathscr{D}}(F(X), M) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(F(X),u)"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(X, G(N)) \arrow[r, "\varphi_{X,N}"] & Hom_{\mathscr{D}}(F(X), N) \end{tikzcd}$$

Proposição 1.9 *Dadas as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Se $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ é um par adjunto de funtores, então os morfismos $\sigma_Y : FGY \longrightarrow Y$, tal que $\sigma_Y = \varphi_{GY,Y}(1_{GY})$ e $\eta_X : X \longrightarrow GFX$, tal que $\eta_X = \varphi^{-1}_{X,FX}(1_{FX})$ são funtoriais, onde $\varphi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{C}}(X, GY) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(FX, Y)$ é uma bijeção $\forall X \in \mathscr{C}$ e $\forall Y \in \mathscr{D}$.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [GY03, p. 90]. □

Definição 1.10 *Dadas as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Seja $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ um funtor adjunto à esquerda do funtor $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$. Os morfismos funtoriais $\sigma : F \circ G \longrightarrow Id_{\mathscr{D}}$ e $\eta : Id_{\mathscr{C}} \longrightarrow G \circ F$ da proposição 1.9 são chamados* ***morfismos adjuntos*** *associados ao par adjunto de funtores F e G.*

Definição 1.11 *A categoria $\mathscr{A}$ é chamada de* ***categoria aditiva*** *se são verdadeiras as seguintes condições :*

(A1) Para todo par de objetos $X, Y \in \mathscr{A}$, o conjunto $Hom_{\mathscr{A}}(X, Y)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos $Hom_{\mathscr{A}}(Y, Z) \times Hom_{\mathscr{A}}(X, Y) \to Hom_{\mathscr{A}}(X, Z)$ é bilinear sobre os inteiros.

(A2) $\mathscr{A}$ contém um objeto 0, isto é, para todo objeto $X \in \mathscr{A}$ os conjuntos de morfismos $Hom_{\mathscr{A}}(X, 0)$ e $Hom_{\mathscr{A}}(0, X)$ tem um único elemento.

(A3) Para tudo par de objetos X e Y na categoria $\mathscr{A}$, exite um coproduto $X \oplus Y \in \mathscr{A}$.

A definição a seguir pode ser encontrada em [Hap88, p. 58].

Definição 1.12 *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria aditiva e sejam $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ duas subcategorias plenas da categoria $\mathscr{A}$. O par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é chamado de* ***par de torção*** *em $\mathscr{A}$ se as três condições seguintes são satisfeitas:*

(i) $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall X \in \mathcal{T}$ e $\forall Y \in \mathcal{F}$.

(ii) Se $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall Y \in \mathcal{F}$ então $X \in \mathcal{T}$.

(iii) Se $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall X \in \mathcal{T}$ então $Y \in \mathcal{F}$.

Nas condições acima, $\mathcal{T}$ é chamada de classe de torção, e $\mathcal{F}$, classe livre de torção. Observe que o par de torção determina a direção dos morfismos da categoria.

1.2 Categorias trianguladas

Nesta seção apresentaremos a definição de categoria triangulada dada por Jean-Louis Verdier em [Ver96] e listamos as suas propriedades básicas. Além disso, estudaremos o funtor de cohomologia que esta definido numa categoria triangulada e funtor exato que definiremos entre categorias trianguladas.

Comecemos definindo o conceito de **funtor translação**.

Definição 1.13 *Dada uma categoria aditiva $\mathscr{C}$. Seja $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ uma equivalência de categorias, tal que T é um funtor aditivo.*

Observação 1.14 *Ao funtor T da definição anterior o chamaremos de* ***funtor translação****. Utilizaremos a seguinte notação: $T^n(X) = X[n], \forall n \in \mathbb{Z}$ e diremos que $X[n]$ é o $n-$ésimo shift do objeto X.*

Definição 1.15 *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria aditiva.*

1. *Um* ***triângulo*** *em $\mathscr{C}$ é um diagrama*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

e é denotado por

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

2. *Sejam*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

dois triângulos em $\mathscr{C}$. Um ***morfismo de triângulos*** *é um diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "{u[1]}"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

Um morfismo de triângulos é um ***isomorfismo de triângulos*** *se u, v e w são isomorfismos.*

Definição 1.16 *Uma* ***categoria triangulada*** *é uma tripla $(\mathscr{C}, T, \Delta)$, onde $\mathscr{C}$ uma categoria aditiva, T um funtor translação de $\mathscr{C}$ e Δ é uma classe de de triângulos que chamamos* ***triângulos distinguidos****, os quais satisfazem os axiomas seguintes:*

(TR1) (a) *Todo triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é também um triângulo distinguido.*

(b) *Para cada objeto X em $\mathscr{C}$, o triângulo*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "1_x"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido.

(c) Para cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(TR2) Um triângulo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido se, e somente se,

$$\begin{tikzcd} & X[1] \arrow[dl, "-f[1]"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido.

(TR3) Se

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

são triângulos distinguidos, $u \in Hom_{\mathscr{C}}(X,X')$ e $v \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Y')$ tal que $vf = f'u$, então existe $w \in Hom_{\mathscr{C}}(Z,Z')$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

(TR4) (Axioma do octaedro) Sejam $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z)$ e $h = g \circ f$. Se

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "a"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "c"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "h"] & & Z \arrow[ul, "b"'] \end{tikzcd}$$

são triângulos distinguidos, então o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "c"] & X' \arrow[r] & Y[1]
\end{tikzcd}
$$

pode ser completado ao diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "a"'] & Z \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed, "b"] & X' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1_{X'}"] & Y[1] \arrow[d, dashed, "a[1]"] \\
Z' \arrow[r, dashed, "u"] & Y' \arrow[r, dashed, "v"] & X' \arrow[r, dashed, "w"] & Z'[1]
\end{tikzcd}
$$

onde

$$
\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\
Z' \arrow[rr, "u"] & & Y' \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}
$$

é um triângulo distinguido e as setas verticais são morfismos de triângulos.

À segunda propriedade é chamada o axioma da rotação de triângulos, a qual podemos enunciar de forma equivalente (rodando o triângulo no outro sentido).
(TR2') Um triângulo

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
$$

é distinguido se, e somente se,

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\
Z[-1] \arrow[rr, "-h[-1]"] & & X \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}
$$

é um triângulo distinguido.

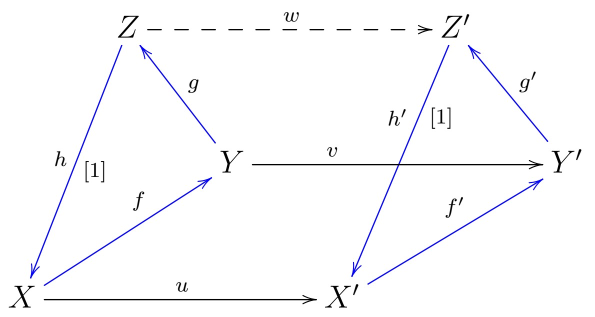
Utilizando o mesmo raciocínio que acima temos que:

Observação 1.17 *Aplicando o axioma TR2 infinitamente (nos dois sentidos) ao triângulo distinguido* $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ *obtemos a sequência infinita*

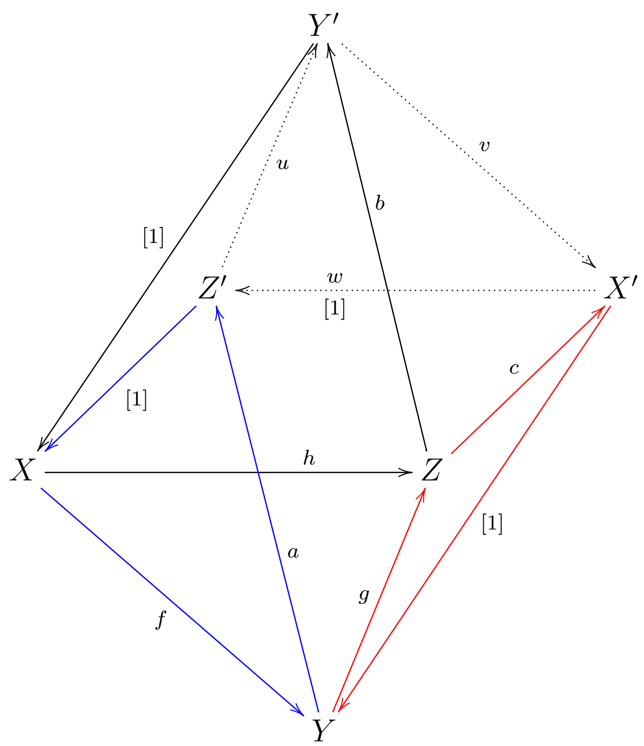
$$\ldots \longrightarrow X[n] \xrightarrow{(-1)^n f[n]} Y[n] \xrightarrow{(-1)^n g[n]} Z[n] \xrightarrow{(-1)^n h[n]} X[n+1] \longrightarrow \ldots$$

onde três morfismos consecutivos formam um triângulo distinguido.

À terceira propriedade a chamaremos de axioma do prisma



E a quarta propriedade é chamada de axioma do octaedro. Para ver a conexão considere o diagrama octaédrico



onde o diagrama original esta composto por três triângulos distinguidos baseados nos três morfismos f, g e h, que formam um diagrama comutativo. Este diagrama pode ser completado adicionando o triângulo distinguido pontilhado que completa o octaedro. Os outros lados que contêm setas pontilhadas são comutativos e definem morfismos entre pares de triângulos distinguidos originais. Em particular, os quadrados ligando Y na parte inferior a Y' na parte superior através de Z e Z', e Y' no topo a $Y[1]$ na parte inferior através de $X[1]$ e X' comutam.

1.2.1 Propriedades básicas de categorias trianguladas.

Os resultados desta seção não dependem do axioma do octaedro (TR4).

Definição 1.18 *Um funtor aditivo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico se para qualquer triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

temos uma sequência exata

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

em $\mathcal{A}$.

Observação 1.19 *Aplicando o funtor cohomológico $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ à sequência da observação 1.17, podemos construir a sequência exata infinita*

$$\ldots \longrightarrow F(X[n]) \xrightarrow{(-1)^n F(f[n])} F(Y[n]) \xrightarrow{(-1)^n F(g[n])} F(Z[n]) \xrightarrow{(-1)^n F(h[n])} F(X[n+1]) \longrightarrow \ldots$$

na categoria abeliana $\mathscr{A}$, à qual denominaremos **sequência exata longa de cohomologia.**

Proposição 1.20 *Seja U um objeto em $\mathscr{C}$. Então,*

(i) O funtor $X \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(U, X)$ que vai de $\mathscr{C}$ na categoria de grupos abelianos é um funtor cohomológico.

(ii) O funtor $X \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(X, U)$ de $\mathscr{C}^{opp}$ na categoria de grupos abelianos é um funtor cohomológico.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [Ver96, p. 97]. □

Observação 1.21 *Em virtude da proposição acima e pela observação 1.19, para cada objeto U da categoria $\mathscr{C}$, temos as seguintes* ***sequências exatas longas de grupos abelianos****:*

a) Para $F = Hom_{\mathscr{C}}(U, \_)$.

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(U,X) \xrightarrow{f_*} Hom_{\mathscr{C}}(U,Y) \xrightarrow{g_*} Hom_{\mathscr{C}}(U,Z) \xrightarrow{h_*} Hom_{\mathscr{C}}(U,X[1]) \xrightarrow{f[1]_*} \ldots$$

onde $f_* : Hom_{\mathscr{C}}(U,X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(U,Y)$ *é dado por* $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.

b) Para $F = Hom_{\mathscr{C}}(\_, U)$.

$$\ldots \xrightarrow{f[1]^*} Hom_{\mathscr{C}}(X[1],U) \xrightarrow{h^*} Hom_{\mathscr{C}}(Z,U) \xrightarrow{g^*} Hom_{\mathscr{C}}(Y,U) \xrightarrow{f^*} Hom_{\mathscr{C}}(X,U) \longrightarrow \ldots$$

onde $f^* : Hom_{\mathscr{C}}(Y,U) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,U)$ *dado por* $f^*(\psi) = \psi \circ f$.

Corolário 1.22 *Seja*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

um triângulo distinguido. Então a composição de dos morfismos consecutivos é nula.

Demonstração: Veja, por exemplo, [Ver96, p. 97]. □

Corolário 1.23 *Seja*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & X[1] \arrow[d, "{u[1]}"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

um morfismo de dois triângulos distinguidos. Se dois dos morfismos u, v *e* w *são isomorfismos, o terceiro é também um isomorfismo.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [Ver96, p. 97]. □

Corolário 1.24 *Sejam*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

dois triângulos distinguidos. Então existe um isomorfismo $u : Z \longrightarrow Z'$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "u"'] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X[1] \end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de triângulos.

Demonstração: Ver [Ver96, p. 98]. □

Observação 1.25 *O corolário acima mostra que os triângulos distinguidos baseados no morfismo* f *são únicos (salvo isomorfismos de triângulos), portanto, o terceiro vértice de um triângulo distinguido é determinado a menos de isomorfismos. Esse objeto é chamado de* ***Cone de*** f. *Mas é importante levar em conta que em geral o isomorfismo* u *que completa o diagrama não é único. Porém, adicionando a hipótese* $Hom(X, Z[-1]) = 0$ *o lema 1.31 permite-nos demonstrar a unicidade deste isomorfismo.*

Corolário 1.26 *Seja*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

dois triângulos distinguidos. Então

$$\begin{tikzcd} & Z \oplus Z' \arrow[dl, "h \oplus h'"', "{[1]}"] & \\ X \oplus X' \arrow[rr, "f \oplus f'"] & & Y \oplus Y' \arrow[ul, "g \oplus g'"'] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [Ver96, p. 98]. □

Corolário 1.27 *Seja*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

um triângulo distinguido em $\mathscr{D}$. *Então,* v *é monomorfismo que cinde, isto é, existe* $s : Z \longrightarrow Y$ *tal que* $v \circ s = 1_Y$. *Mais ainda* $X \oplus Z \xrightarrow{(u,s)} Y$ *é isomorfismo. Reciprocamente, tudo triângulo da forma*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "i"] & & X \oplus Z \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

onde $i : X \longrightarrow X \oplus Y$ *a inclusão natural e* $p : X \oplus Y \longrightarrow Y$ *a projeção natural, é distinguido.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [Ver96, p. 100]. □

Observação 1.28 *É claro que o isomorfismo* $(u, s) : X \oplus Z \longrightarrow Y$ *do corolário acima induz o isomorfismo de triângulos*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & X \oplus Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "{(u,s)}"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Z"'] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "0"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Lema 1.29 *Seja*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

um triângulo distinguido em $\mathscr{C}$. *Se dois de seus vértices são isomorfos a 0, o terceiro é isomorfo a 0.*

Demonstração: Em virtude do axioma (TR2), podemos supor que existem isomorfismos $u : X \longrightarrow 0$ e $v : Y \longrightarrow 0$. Além disso, pelo axioma (TR1), consideremos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ 0 \arrow[rr] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Logo, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
0 \arrow[r, "1_0"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0[1]
\end{tikzcd}$$

onde as linhas horizontais são triângulos distinguidos. Assim, pelo axioma (TR3), existe um morfismo $w : Z \longrightarrow 0$ tal que o seguinte diagrama é um morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"'] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
0 \arrow[r, "1_0"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0[1]
\end{tikzcd}$$

Portanto, w é um isomorfismo (ver corolário 1.23). $\square$

Lema 1.30 *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{C}$ é isomorfismo se, e somente se, para algum Z (necessariamente isomorfo com zero), o triângulo*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "0"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido.

Demonstração: Veja, por exemplo, [Nee01, p. 41]. $\square$

O seguinte resultado é um refinamento do axioma (TR3).

Proposição 1.31 *Seja*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

dois triângulos distinguidos e $v : Y \longrightarrow Y'$. *Então tem-se o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "w"'] & X[1] \arrow[d, dashed, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

e as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $g' \circ v \circ f = 0$;

(ii) existe u *tal, o primeiro quadrado no diagrama é comutativo;*

(iii) existe w *tal que o segundo quadrado no diagrama é comutativa;*

(iv) existem u *e* w *de modo a que o diagrama é um morfismo de triângulos.*

Se essas condições forem satisfeitas e $Hom(X, Z'[-1]) = 0$, *o morfismo* u *em (ii) (respectivamente* w *em (iii)) é único.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [Mil14, p. 59]. □

1.2.2 Funtor exato

Adicionamos duas definições funtoriais básicas que iremos utilizar frequentemente neste trabalho. Mais informações podem ser consultadas em [Ver96, Nee01, Mit65, GY03, KS90].

Definição 1.32 *Sejam* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *duas categorias aditivas. Um funtor* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *é chamado aditivo se todas as funções*

$$F : Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y)), \quad \forall X, Y \in Obj(\mathscr{C}),$$

são homomorfismos de grupos abelianos.

Definição 1.33 *Sejam* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *são duas categorias trianguladas. Um funtor triangulado (ou exato)* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *é um funtor aditivo* $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *junto com o isomorfismo funtorial* $\eta : F \circ T \longrightarrow T \circ F$ *tal que para cada triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

em $\mathscr{C}$ *o triângulo*

$$\begin{tikzcd}
 & F(Z) \arrow[dl, "\eta_X \circ F(h)"', "{[1]}"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y) \arrow[ul, "F(g)"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido em $\mathscr{D}$.

Capítulo 2

t-Estrutura na categoria derivada.

O objetivo principal deste trabalho é o estudo das t-estruturas. Neste capítulo faremos um estudo de um tipo de t-estrutura que se define de forma natural na categoria derivada e por isso a chamaremos de **t-estrutura natural**. Os seguintes livros contém parte essencial do tema: [KS90, GY03, Mil14]. Porém para introduzir este tema, precisamos definir os funtores de cohomologia H^n. Motivo pelo qual na primeira seção definiremos estes funtores na categoria dos complexos junto com algumas propriedades que irão nos permitir construir os **funtores de truncamento**, os quais em virtude dos teoremas de localização podemos estender à categoria derivada. Além disso, demonstraremos as propriedades básicas que definem uma **t-estrutura**, conceito que formalizaremos e estudaremos no contexto geral das **categorias trianguladas** no próximo capítulo.

O leitor é aconselhado a consultar previamente as noções de categoria: aditiva, abeliana, de homologia e derivada, localização entre outras, as quais podem ser encontradas por exemplo em [HJR10].

2.1 Funtor de cohomologia

O objetivo principal nesta seção é definir categoricamente os funtores de cohomologia H^n na categoria dos de homotopia, os quais são induzidos pelos respectivos funtores H^n na categoria dos complexos. Assim iniciaremos nossa construção supondo que $\mathscr{A}$ é uma categoria abeliana (uma definição pode ser encontrar em [HJR10, p. 8]).

Sabemos por definição que o complexo $(X^\bullet, d_X)$ na categoria $\mathscr{A}$ é representado pelo diagrama

$$\dots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} \dots$$

tal que $d_X^k \circ d_X^{k-1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $(Ker(d_X^n), \mu)$ o kernel do diferencial d_X^n, então $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$, assim pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo

$\varphi : X^{n-1} \longrightarrow Ker(d_X^n)$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \\ & ker\ d_X^n \arrow[ur, "\mu"'] & & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $d_X^{n-1} = \mu \circ \varphi$, onde μ é monomorfismo e $d_X^n \circ \mu = 0$. Por conseguinte, sendo $(Im(d_X^{n-1}), \alpha)$ a imagem do diferencial d_X^{n-1}, pela propriedade universal da imagem, existe um único morfismo $\theta : Im(d_X^{n-1}) \longrightarrow Ker(d_X^n)$ tal que: $\alpha = \mu \circ \theta$, onde α é monomorfismo e $d_X^{n-1} = \alpha \circ \beta$. Assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & Im(d_X^{n-1}) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, "\theta"] & & \\ X^{n-1} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \\ & Ker(d_X^n) \arrow[ur, "\mu"'] & & \end{tikzcd}$$

Além disso, dado que α é monomorfismo, então θ é monomorfismo, assim $Im(d_X^{n-1})$ é um subobjeto de $Ker(d_X^n)$. Mais ainda, desde que $\mathscr{A}$ é uma categoria abeliana, então existe o cokernel de $\theta : Im(d_X^{n-1}) \longrightarrow Ker(d_X^n)$ nesta categoria, isto é, existe um epimorfismo $\rho : Ker(d_X^n) \longrightarrow Coker(\theta)$ tal que, $\rho \circ \theta = 0$. Portanto, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow Im(d_X^{n-1}) \xrightarrow{\theta} Ker(d_X^n) \xrightarrow{\rho} Coker(\theta) \longrightarrow 0$$

é exata curta na categoria $\mathscr{A}$, isto é, $Coker(\theta) = Ker(d_X^n)/Im(d_X^{n-1})$.

Por conseguinte temos:

Definição 2.1 *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana. Para cada complexo $(X^\bullet, d_X)$ e $n \in \mathbb{Z}$, definamos o objeto $H^n(X^\bullet) = Ker(d_X^n)/Im(d_X^{n-1}) \in \mathscr{A}$.*

Observação 2.2 *Da construção acima é claro que $Coker(\theta) = 0$ se e somente se, θ é isomorfismo. Portanto, pela definição 2.1 temos que: $H^n(X^\bullet) = 0$ se e somente se $Ker(d_X^n) = Im(d_X^{n-1})$, isto é, dizemos que $X^\bullet$ é um* ***complexo exato*** *na posição n.*

Seja $(Y^\bullet, d_Y)$ é outro complexo na categoria $\mathscr{A}$ e $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos, isto é, $\forall k \in \mathbb{Z}$ os quadrados no diagrama seguinte comutam

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \dots \\ Y^\bullet & \dots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r, "d_Y^{n-2}"] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r, "d_Y^{n+1}"] & Y^{n+2} \arrow[r, "d_Y^{n+2}"] & \dots \end{tikzcd}$$

Logo, fixado $n \in \mathbb{Z}$ e supondo que $(Ker(d_Y^n), \mu')$ é o kernel do diferencial d_Y^n, então $d_Y^n \circ (f^n \circ \mu) = (d_Y^n \circ f^n) \circ \mu = (f^{n+1} \circ d_X^n) \circ \mu = f^{n+1} \circ (d_X^n \circ \mu) = 0$, assim pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\Phi : Ker(d_X^n) \longrightarrow Ker(d_Y^n)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker\ d_X^n \arrow[rr, "f^n \circ \mu"] \arrow[dr, dashed, "\Phi"'] & & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \\
& Ker\ d_Y^n \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $f^n \circ \mu = \mu' \circ \Phi$. Portanto, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dd, "f^{n-1}"'] & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[dd, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[dd, "f^{n+1}"'] \\
& Ker(d_X^n) \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[dd, dashed, "\Phi"'] & & \\
Y^{n-1} \arrow[rr, "d_Y^{n-1}"] & & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \\
& Ker(d_Y^n) \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, pela construção de cima temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& & Im(d_X^{n-1}) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\theta"'] & & \\
X^{n-1} \arrow[urr, "\beta"] \arrow[rrr, "d_X^{n-1}"] \arrow[ddd, "f^{n-1}"'] & & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[ddd, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[ddd, "f^{n+1}"'] \\
& Ker(d_X^n) \arrow[urr, "\mu"'] \arrow[ddd, dashed, "\Phi"'] & & & \\
& & Im(d_Y^{n-1}) \arrow[dr, "\alpha'"] \arrow[ddl, dashed, "\theta'"'] & & \\
Y^{n-1} \arrow[urr, "\beta'"] \arrow[rrr, "d_Y^{n-1}"] & & & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \\
& Ker(d_Y^n) \arrow[urr, "\mu'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, suponhamos que (I, σ) é a imagem do morfismo $f^n \circ d_X^{n-1}$ e que (I', σ') é a imagem do morfismo $f^n \circ \alpha$, então existem epimorfismos $\delta : X^{n-1} \longrightarrow I$ e $\delta' : Im(d_X^{n-1}) \longrightarrow I$ tais que os diagramas seguintes comutam

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "\sigma"] & \\
X^{n-1} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "f^n \circ d_X^{n-1}"] & & Y^n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, "\sigma'"] & \\
H^n(Im(d_X^{n-1})) \arrow[ur, "\delta'"] \arrow[rr, "f^n \circ \alpha"] & & Y^n
\end{tikzcd}$$

Como $\sigma' \circ (\delta' \circ \beta) = (\sigma' \circ \delta') \circ \beta = (f^n \circ \alpha) \circ \beta = f^n \circ d_X^{n-1}$, então pela propriedade universal da imagem existe um único morfismo $\varepsilon : I \longrightarrow I'$ que faz comutar o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, dashed, "\varepsilon"] & \\ X^{n-1} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "f^n \circ d_X^{n-1}"] \arrow[dr, "\delta' \circ \beta"'] & & Y^n \\ & I' \arrow[ur, "\sigma'"'] & \end{tikzcd}$$

Isto é, $\sigma' \circ \varepsilon = \sigma$ e $\varepsilon \circ \delta = \delta' \circ \beta$. Do qual deduzimos que, ε é monomorfismo pois σ é monomorfismo e dado que β e σ' são epimorfismos, então ε é epimorfismo, portanto, ε é isomorfismo, pois a categoria $\mathscr{A}$ é abeliana. Logo, existe um isomorfismo $\varepsilon^{-1} : I' \longrightarrow I$, assim podemos definir o epimorfismo $\lambda = \varepsilon^{-1} \circ \delta' : Im(d_X^{n-1}) \longrightarrow I$ o qual satisfaz $\lambda \circ \beta = \varepsilon^{-1} \circ \delta' \circ \beta = \delta$.
Como $\alpha' \circ (\beta' \circ f^{n-1}) = (\alpha' \circ \beta') \circ f^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1} = f^n \circ d^{n-1}$, então pela propriedade universal da imagem existe um único morfismo $\lambda' : I \longrightarrow Im(d_Y^{n-1})$ que faz comutar o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, dashed, "\lambda'"] & \\ X^{n-1} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "f^n \circ d_X^{n-1}"] \arrow[dr, "\beta' \circ f^{n-1}"'] & & Y^n \\ & Im(d_Y^{n-1}) \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

Isto é, $\alpha' \circ \lambda' = \sigma$ e $\lambda' \circ \delta = \beta' \circ f^{n-1}$, em particular λ' é monomorfismo pois σ é monomorfismo.
Finalmente o morfismo $\gamma = \lambda' \circ \lambda : Im(d_X^{n-1}) \longrightarrow Im(d_Y^{n-1})$, faz verdadeira a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \mu' \circ (\theta' \circ \gamma) \circ \beta &= (\mu' \circ \theta') \circ \gamma \circ \beta = \alpha' \circ \gamma \circ \beta = (\alpha' \circ \lambda') \circ (\lambda \circ \beta) = \sigma \circ \delta \\ &= f^n \circ d_X^{n-1} = f^n \circ \alpha \circ \beta = (f^n \circ \mu) \circ (\theta \circ \beta) = (\mu' \circ \Phi) \circ (\theta \circ \beta) \\ &= \mu' \circ (\Phi \circ \theta) \circ \beta. \end{aligned}$$

Então, $\theta' \circ \gamma = \Phi \circ \theta$, pois μ' é monomorfismo e β é epimorfismo. Por conseguinte, dado que θ' é monomorfismo, então γ é único. Mais ainda, $f^n \circ \alpha = f^n \circ \mu \circ \theta = \mu' \circ \Phi \circ \theta =$

$\mu' \circ \theta' \circ \gamma = \alpha' \circ \gamma$. Portanto, temos que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
 & & Im(d_X^{n-1}) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\theta"'] \arrow[ddd, dashed, "\gamma"] & & \\
X^{n-1} \arrow[urr, "\beta"] \arrow[rrr, "d_X^{n-1}"] \arrow[ddd, "f^{n-1}"'] & & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[ddd, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[ddd, "f^{n+1}"'] \\
 & Ker(d_X^n) \arrow[urr, "\mu"'] \arrow[ddd, dashed, "\Phi"'] & & & \\
 & & Im(d_Y^{n-1}) \arrow[dr, "\alpha'"] \arrow[ddl, dashed, "\theta'"'] & & \\
Y^{n-1} \arrow[urr, "\beta'"] \arrow[rrr, "d_Y^{n-1}"] & & & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \\
 & Ker(d_Y^n) \arrow[urr, "\mu'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Logo, pela definição 2.1, as linhas no diagrama seguintes são sequências exatas na categoria $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(d_X^{n-1}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Ker(d_X^n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Phi"'] & H^n(X^\bullet) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Im(d_Y^{n-1}) \arrow[r, "\theta'"] & Ker(d_Y^n) \arrow[r, "\rho'"] & H^n(Y^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Além disso, o quadrado da esquerda comuta, portanto pela propriedade universal do cokernel existe um único morfismo $\Psi : H^n(X^\bullet) \longrightarrow H^n(Y^\bullet)$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(d_X^{n-1}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Ker(d_X^n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Phi"'] & H^n(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Psi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Im(d_Y^{n-1}) \arrow[r, "\theta'"] & Ker(d_Y^n) \arrow[r, "\rho'"] & H^n(Y^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de sequências exatas na categoria $\mathscr{A}$.

Definição 2.3 *Seja $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um morfismo na categoria $C(\mathscr{A})$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, denotaremos por $H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \longrightarrow H^n(Y^\bullet)$ ao morfismo Ψ, na construção acima.*

Observação 2.4 *A aplicação $H^n : C(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$, definida como em 2.1 e 2.3 é um funtor covariante e aditivo, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e são chamados **funtores de cohomologia**.*

O próximo teorema diz que toda sequência exata curta na categoria dos complexos induz uma sequência exata longa de cohomologia na categoria abeliana A.

Teorema 2.5 *Seja $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta na categoria $C(\mathscr{A})$. Então, existe uma sequência exata longa canônica em $\mathscr{A}$:*

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(g^\bullet)} H^n(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

mais ainda, se

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é uma diagrama comutativo de sequências exatas na categoria $C(\mathscr{A})$*, então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^n(Z) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(X) \arrow[d] \\ H^n(Z') \arrow[r] & H^{n+1}(X') \end{tikzcd}$$

comuta, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver [KS90, p. 32] □

O próximo resultado mostra que os funtores de cohomologia H^n estão bem definidos na categoria de homotopia.

Lema 2.6 *Se* $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ *e* $g : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ *são morfismos homotópicos, então* $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver [Mil14, p. 95] □

Observação 2.7 *Pelo lema 2.6 temos que* $H^n : K(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ *é um funtor covariante e aditivo.*

2.2 Funtores de truncamento na categoria C(A).

Começamos esta seção construindo um sub-objeto limitado superiormente de um complexo qualquer. A seguir provaremos que a cohomologia deste sub-complexo é nula ou é igual à cohomologia do complexo original. Finalmente, definiremos os funtores de truncamento na categoria dos complexos.

Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana. Seja $(A^\bullet, d_A)$ um complexo e $n \in \mathbb{Z}$, logo temos o diagrama

$$\dots \longrightarrow A^{n-2} \xrightarrow{d_A^{n-2}} A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \xrightarrow{d_A^{n+1}} \dots$$

tal que $d_A^k \circ d_A^{k-1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\varphi : A^{n-1} \longrightarrow kerd_A^n$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{n-1} \arrow[rr, "d_A^{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & A^n \arrow[r, "d_A^n"] & A^{n+1} \\ & ker\ d_A^n \arrow[ur, "\mu"'] & & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $d_A^{n-1} = \mu \circ \varphi$, então $\mu \circ \varphi \circ d_A^{n-2} = d_A^{n-1} \circ d_A^{n-2} = 0$, portanto $\varphi \circ d_A^{n-2} = 0$, dado que μ é monomorfismo. Além disso, $d_A^n \circ \mu = 0$. Assim temos o morfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "i^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "1_{A^{n-2}}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{A^{n-1}}"'] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
A^\bullet & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, suponhamos que existe um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq n}(A^\bullet)$ tal que $i^\bullet \circ f^\bullet = 0$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \ldots \\
\tau_{\leq n}(A^\bullet) & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] & ker\ d_A^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de complexos. Por conseguinte $f^k = 0, \forall k > n$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "i^\bullet \circ f^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "\mu \circ f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "0"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "0"'] & \ldots \\
A^\bullet & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

representa o morfismo nulo. Do qual se infere que $f^k = 0, \forall k < n$ e $\mu \circ f^n = 0$, mas μ é monomorfismo. Portanto, $f^k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, isto é, $f^\bullet = 0$, portanto, $i^\bullet$ é monomorfismo.

Logo, podemos afirmar que o complexo $\tau_{\leq n}(A^\bullet)$ dado por:

$$\tau_{\leq n}(A^\bullet)^p = \begin{cases} A^p & \text{se } p < n; \\ ker\ d_A^n & \text{se } p = n; \\ 0 & \text{se } p > n. \end{cases} \qquad d^p_{\tau_{\leq n}(A^\bullet)} = \begin{cases} d_A^p & \text{se } p < n-1; \\ \varphi & \text{se } p = n-1; \\ 0 & \text{se } p \geq n. \end{cases}$$

é um sub-complexo de $A^\bullet$. Este complexo é chamado de **complexo truncado**. Mais ainda, ao monomorfismo $i^\bullet : \tau_{\leq n}(A^\bullet) \longrightarrow A^\bullet$ o denominaremos **a inclusão canônica**.

O lema a seguir mostra que os funtores de cohomologia levam à inclusão canônica em isomorfismo ou no morfismo nulo.

Lema 2.8 *O morfismo $H^p(i^\bullet) : H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \longrightarrow H^p(A^\bullet)$ é um isomorfismo para $p \leq n$ e é nulo para $p > n$.*

Demonstração:

a) $p = n$. Seja $(kerd_A^n, \mu)$ o kernel do morfismo d_A^n e (Imd_A^{n-1}, α) a imagem do morfismo d_A^{n-1}. Por hipótese $d_A^n \circ d_A^{n-1} = 0$, então pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\varphi : A^{n-1} \longrightarrow kerd_A^n$, tal que $d_A^{n-1} = \mu \circ \varphi$, assim pela propriedade universal da imagem existe um único morfismo $\theta : Imd_A^{n-1} \longrightarrow kerd_A^n$, tal que $\alpha = \mu \circ \theta$.

$$
\begin{tikzcd}
& Imd_A^{n-1} \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, "\theta"] & & \\
A^{n-1} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "d_A^{n-1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A^n \arrow[r, "d_A^n"] & A^{n+1} \\
& kerd_A^n \arrow[ur, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}
$$

onde β é epimorfismo pois a categoria $\mathscr{A}$ é abeliana (Ver [Var07, Proposición 1.11.4]). Seja $(Im\varphi, \alpha')$ a imagem do morfismo φ. Então existe um monomorfismo $\alpha' : Im\varphi' \longrightarrow A^n$ e um epimorfismo $\beta' : A^{n-1} \longrightarrow Im\varphi$, tal que $\varphi = \alpha \circ \beta$, pois a categoria $\mathscr{A}$ é abeliana (Ver [Var07, Proposición 1.11.4]). Alem disso, como $\varphi = \theta \circ \beta$, pela propriedade universal da imagem existe um único $\lambda : Im\varphi \longrightarrow Imd_A^{n-1}$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& Im\varphi \arrow[dr, "\alpha'"] \arrow[dd, dashed, "\lambda"] & \\
A^{n-1} \arrow[ur, "\beta'"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & & A^n \\
& Imd_A^{n-1} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}
$$

comuta, isto é, $\alpha' = \theta \circ \lambda$ e $\beta = \lambda \circ \beta'$. Como α' é monomorfismo, então λ é monomorfismo, e dado que β é epimorfismo, então λ é epimorfismo, portanto λ é isomorfismo, pois $\mathscr{A}$ é abeliana (Ver [Var07, Proposición 1.16.5]).

Finalmente, consideremos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im\varphi \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\lambda"'] & kerd_A^n \arrow[r] \arrow[d, "1_{kerd_A^n}"'] & H^n(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-1} \arrow[r, "\theta"] & kerd_A^n \arrow[r] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

no qual o primeiro quadrado comuta e as linhas são sequências exatas curtas, então existe um morfismo $H^n(i^\bullet) : H^n(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \longrightarrow H^n(A^\bullet)$, tal que o segundo quadrado do diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im\varphi \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\lambda"'] & kerd_A^n \arrow[r] \arrow[d, "1_{kerd_A^n}"'] & H^n(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^n(i^\bullet)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-1} \arrow[r, "\theta"] & kerd_A^n \arrow[r] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Mais ainda, dado que λ e $1_{kerd_A^n}$ são isomorfismos, então $H^n(i^\bullet)$ é isomorfismo (Ver [GY03, Five-Lemma, p.135]).

b) $p = n-1$. Seja $(kerd_A^{n-1}, \mu')$ o kernel do morfismo d_A^{n-1} e (Imd_A^{n-2}, α) a imagem do morfismo d_A^{n-2}. Por hipótese $d_A^{n-1} \circ d_A^{n-2} = 0$, então pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\varphi' : A^{n-2} \longrightarrow kerd_A^{n-1}$, tal que $d_A^{n-2} = \mu' \circ \varphi'$, assim pela propriedade universal da imagem existe um único morfismo $\theta : Imd_A^{n-2} \longrightarrow kerd_A^{n-1}$, tal que $\alpha = \mu' \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd}
 & Imd_A^{n-2} \arrow[dd, dashed, "\theta"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
A^{n-2} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "d_A^{n-2}"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \\
 & kerd_A^{n-1} \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Seja $(ker\varphi, \mu'')$ o kernel do morfismo φ. Então existe um morfismo $\varphi'' : A^{n-2} \longrightarrow ker\varphi$ tal que $d_A^{n-2} = \mu'' \circ \varphi''$, então pela propriedade universal da imagem existe um único $\theta' : Imd_A^{n-2} \longrightarrow ker\varphi$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Imd_A^{n-2} \arrow[dd, dashed, "\theta'"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
A^{n-2} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "d_A^{n-2}"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & & A^{n-1} \\
 & ker\varphi \arrow[ur, "\mu''"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\alpha = \mu'' \circ \theta'$.
Além disso, $d_A^{n-1} \circ \mu'' = \mu \circ \varphi \circ \mu'' = 0$, então existe um morfismo $\Phi : ker\varphi \longrightarrow kerd_A^{n-1}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
ker\varphi \arrow[r, "\mu''"] \arrow[d, dashed, "\Phi"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{A^{n-1}}"'] & ker\ d_A^n \arrow[d, "\mu"'] \\
kerd_A^{n-1} \arrow[r, "\mu'"] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\mu'' = \mu' \circ \Phi$ e como μ'' é monomorfismo, então Φ também é monomorfismo. Por outro lado, $0 = d_A^{n-1} \circ \mu' = \mu \circ \varphi \circ \mu'$, então $\varphi \circ \mu'$, por conseguinte, existe um morfismo $\Psi : kerd_A^{n-1} \longrightarrow ker\varphi$ tal que $\mu' = \mu'' \circ \Psi$. Então, $\mu' \circ \Phi \circ \Psi = \mu'' \circ \Psi = \mu' = \mu' \circ 1_{kerd_A^{n-1}}$, e como μ' é monomorfismo, temos que $\Phi \circ \Psi = 1_{kerd_A^{n-1}}$, assim Φ é epimorfismo que cinde. Portanto, Φ é isomorfismo.
Finalmente, dado que $\mu' \circ \theta = \alpha = \mu'' \circ \theta' = \mu' \circ \Phi \circ \theta'$ e μ' é monomorfismo, então $\theta = \Phi \circ \theta'$, logo temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-2} \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "1_{Imd_A^{n-2}}"'] & ker\varphi \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & H^{n-1}(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-2} \arrow[r, "\theta"] & kerd_A^{n-1} \arrow[r] & H^{n-1}(A^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

no qual as linhas são sequências exatas curtas, então existe um morfismo $H^{n-1}(i^\bullet)$: $H^{n-1}(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \longrightarrow H^{n-1}(A^\bullet)$, tal que o segundo quadrado do diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-2} \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "1_{Imd_A^{n-2}}"'] & ker\varphi \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & H^{n-1}(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^{n-1}(i^\bullet)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Imd_A^{n-2} \arrow[r, "\theta"] & kerd_A^{n-1} \arrow[r] & H^{n-1}(A^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, dado que Φ e $1_{Imd_A^{n-2}}$ são isomorfismos, então $H^{n-1}(i^\bullet)$ é isomorfismo (Ver [GY03, Five-Lemma, p.135]).

c) $p < n - 1$. Seja $(kerd_A^p, \mu')$ o kernel do morfismo d_A^p e (Imd_A^{p-1}, α) a imagem do morfismo d_A^{p-1}. Por hipótese $d_A^p \circ d_A^{p-1} = 0$, então pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\varphi' : A^{p-1} \longrightarrow kerd_A^p$, tal que $d_A^{p-1} = \mu' \circ \varphi'$, assim pela propriedade universal da imagem existe um único morfismo $\theta : Imd_A^{p-1} \longrightarrow kerd_A^p$, tal que $\alpha = \mu' \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd}
 & Imd_A^{p-1} \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, "\theta"] & & \\
A^{p-1} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "d_A^{p-1}"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & A^p \arrow[r, "d_A^p"] & A^{p+1} \\
 & kerd_A^p \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Logo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Imd_A^{p-1} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "1_{Imd_A^{p-1}}"'] & kerd_A^p \arrow[r] \arrow[d, "1_{kerd_A^p}"'] & H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Imd_A^{p-1} \arrow[r, "\theta"] & kerd_A^p \arrow[r] & H^p(A^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

pode ser completado com o isomorfismo $1_{H^p(A^\bullet)}$, portanto por unicidade $H^p(i^\bullet) = 1_{H^p(A^\bullet)}$.

d) $p = n + 1$. Sabemos que $(0, 1_0)$ é o kernel do morfismo 1_0, mais ainda também é a imagem do morfismo $kerd_A^n \longrightarrow 0$, então $H^{n+1}(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) = 0$, portanto, $H^{n+1}(i^\bullet) = 0$.

e) $p > n + 1$. Sabemos que $(0, 1_0)$ é o kernel e a imagem do morfismo 1_0, então $Im1_0$ é isomorfismo com $ker1_0 = 0$, por conseguinte $H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) = 0$, portanto, $H^p(i^\bullet) = 0$.

□

Dado outro complexo $B^\bullet$ e $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ um morfismo de complexos, então $d_B^k \circ f^k = f^{k+1} \circ d_A^k, \forall k \in \mathbb{Z}$. Além disso, suponhamos que $(kerd_A^n, \mu)$ é o kernel do morfismo d_A^n e que $(kerd_B^n, \mu')$ é o kernel do morfismo d_B^n então, $d_B^n \circ (f^n \circ \mu) = f^{n+1} \circ (d_A^n \circ \mu) = 0$, assim pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\Phi : kerd_A^n \longrightarrow kerd_B^n$, tal que $f^n \circ \mu = \mu' \circ \Phi$, portanto temos o diagrama comutativo seguinte

$$\begin{tikzcd}
ker d_A^n \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "\Phi"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
ker d_B^n \arrow[r, "\mu'"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos por hipótese que $d_B^k \circ d_B^{k-1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então pela propriedade universal do kernel existe um único morfismo $\varphi' : B^{n-1} \longrightarrow ker d_B^n$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B^{n-1} \arrow[rr, "d_B^{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\varphi'"'] & & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \\
& ker\ d_B^n \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $d_B^{n-1} = \mu' \circ \varphi'$, então $\mu' \circ (\varphi' \circ f^{n-1}) = d_B^{n-1} \circ f^{n-1} = f^n \circ d_A^{n-1} = (f^n \circ \mu) \circ \varphi = (\mu' \circ \Phi) \circ \varphi = \mu' \circ (\Phi \circ \varphi)$ e como μ' é monomorfismo, então $\varphi' \circ f^{n-1} = \Phi \circ \varphi$, assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[rr, "d_A^{n-1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[dd, "f^{n-1}"'] & & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[dd, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[dd, "f^{n+1}"'] \\
& ker\ d_A^n \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[dd, dashed, "\Phi"' near end] & & \\
B^{n-1} \arrow[rr, "d_B^{n-1}" near start] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \\
& ker\ d_B^n \arrow[ur, "\mu'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Logo, $f^\bullet$ induz o morfismo de complexos $\tau_{\leq n}(f^\bullet) : \tau_{\leq n}(A^\bullet) \longrightarrow \tau_{\leq n}(B^\bullet)$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\tau_{\leq n}(B^\bullet) & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "\varphi'"] & ker\ d_B^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, seja $j^\bullet : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow B^\bullet$ a inclusão canônica. Então temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[r, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"] \arrow[d, "i^\bullet"'] & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[d, "j^\bullet"] \\
A^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

De fato, dados os morfismos de complexos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "i^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "1_{A^{n-2}}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{A^{n-1}}"'] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

temos o morfismo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "f^\bullet \circ i^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n \circ \mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, dados os morfismos de complexos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "j^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] \arrow[d, "1_{B^{n-2}}"'] & B^{n-1} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "1_{B^{n-1}}"'] & ker\ d_B^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu'"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

temos o morfismo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "j^\bullet \circ \tau_{\leq n}(f^\bullet)"'] & \dots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu' \circ \Phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Portanto, $f^\bullet \circ i^\bullet = j^\bullet \circ \tau_{\leq n}(f^\bullet)$, pois $f^n \circ \mu = \mu' \circ \Phi$.
Por conseguinte podemos definir o funtor aditivo,

$$\begin{array}{rcl}
C(\mathscr{A}) & \xrightarrow{\tau_{\leq n}} & C(\mathscr{A}) \\
A^\bullet & \longmapsto & \tau_{\leq n}(A^\bullet) \\
f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet & \longmapsto & \tau_{\leq n}(f^\bullet) : \tau_{\leq n}(A^\bullet) \longrightarrow \tau_{\leq n}(B^\bullet)
\end{array}$$

O funtor $\tau_{\leq n} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ será chamado de **funtor de truncamento** na categoria dos complexos.

A seguir definiremos o outro funtor de truncamento na categoria dos complexos e enunciaremos as propriedades análogas as anteriormente demonstradas.

Dado um complexo $(A^\bullet, d_A)$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos o diagrama

$$\ldots \longrightarrow A^{n-2} \xrightarrow{d_A^{n-2}} A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

tal que $d_A^k \circ d_A^{k-1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, então pela propriedade universal do cokernel existe um único morfismo $\psi : coker\ d_A^{n-1} \longrightarrow A^{n+1}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \arrow[rr, "d_A^n"] \arrow[dr, "\rho"'] & & A^{n+1} \\
& & coker\ d_A^{n-1} \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $d_A^n = \psi \circ \rho$, então $d_A^{n+1} \circ \psi \circ \rho = d_A^{n+1} \circ d_A^n = 0$, portanto $d_A^{n+1} \circ \psi = 0$, pois ρ é epimorfismo. Além disso, $\rho \circ d_A^{n-1} = 0$. Assim temos o morfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[d, "q^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "\rho"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "1_{A^{n+1}}"'] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] \arrow[d, "1_{A^{n+2}}"'] & \ldots \\
\tau_{\geq n}(A^\bullet) & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & coker\ d_A^{n-1} \arrow[r, "\psi"] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, suponhamos que existe um morfismo $f^\bullet : \tau_{\geq n}(A^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ tal que $f^\bullet \circ q^\bullet = 0$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(A^\bullet) \arrow[d, "f^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & coker\ d^{n-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \ldots \\
X^\bullet & \ldots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] & X^{n-1} \arrow[r, "(d_X^{n-1})"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de complexos. Por conseguinte $f^k = 0, \forall k < n$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[d, "f^\bullet \circ q^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "0"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "0"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n \circ \rho"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \ldots \\
X^\bullet & \ldots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] & X^{n-1} \arrow[r, "(d_X^{n-1})"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

representa o morfismo nulo. Do qual se infere que $f^k = 0, \forall k > n$ e $f^n \circ \rho = 0$, mas ρ é epimorfismo. Portanto, $f^k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, isto é, $f^\bullet = 0$, portanto, $q^\bullet$ é epimorfismo, assim podemos considerar o complexo $\tau_{\geq n}(A^\bullet)$ definido como o quociente do complexo $A^\bullet$ da forma:

$$\tau_{\geq n}(A^\bullet)^p = \begin{cases} 0 & \text{se } p < n; \\ coker\ d_A^{n-1} & \text{se } p = n; \\ A^p & \text{se } p > n. \end{cases} \qquad d^p_{\tau_{\geq n}(A^\bullet)} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < n; \\ \psi & \text{se } p = n; \\ d_A^p & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Onde $q^\bullet : A^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n}(A^\bullet)$ é chamado projeção canônica.

Lema 2.9 *O morfismo $H^p(q^\bullet) : H^p(A^\bullet) \longrightarrow H^p(\tau_{\geq n}(A^\bullet))$ é um isomorfismo para $p \geq n$*

e 0 para $p < n$.

Demonstração: Análoga à prova do lema 2.8. $\square$

Agora suponhamos que $B^\bullet$ é outro complexo e que $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ um morfismo de complexos, então $d_B^{k-1} \circ f^{k-1} = f^k \circ d_A^{k-1}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Além disso, suponhamos que $(Coker d_A^n, \rho)$ é o cokernel do morfismo d_A^{n-1} e que $(Coker d_B^{n-1}, \rho')$ é o cokernel do morfismo d_B^n então, $\rho' \circ f^n \circ d_A^n = 0$, assim pela propriedade universal do cokernel existe um único morfismo $\Psi : Coker d_A^{n-1} \longrightarrow Coker d_B^{n-1}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f^n"] & Coker d_A^{n-1} \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\
B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "\rho'"] & Coker d_B^{n-1}
\end{tikzcd}$$

comuta. E como ρ é um epimorfismo, então podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[dd, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[rr, "d_A^n"] \arrow[dr, "\rho"'] \arrow[dd, "f^n"'] & & A^{n+1} \arrow[dd, "f^{n+1}"'] \\
& & Coker\ d_A^{n-1} \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[dd, dashed, "\Psi"', near end] & \\
B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[rr, "d_B^n"] \arrow[dr, "\rho'"'] & & B^{n+1} \\
& & Coker\ d_B^{n-1} \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Logo, $f^\bullet$ induz o morfismo de complexos $\tau_{\geq n}(f^\bullet) : \tau_{\geq n}(A^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq n}(B^\bullet)$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(A^\bullet) \arrow[d, "\tau_{\geq n}(f^\bullet)"'] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Coker\ d_A^{n-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Psi"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"] & \dots \\
\tau_{\geq n}(B^\bullet) & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Coker\ d_B^{n-1} \arrow[r, "\psi'"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, seja $p^\bullet : B^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n}(B^\bullet)$ a projeção canônica. Então temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "q^\bullet"'] & B^\bullet \arrow[d, "p^\bullet"] \\
\tau_{\geq n}(A^\bullet) \arrow[r, "\tau_{\geq n}(f^\bullet)"] & \tau_{\geq n}(B^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Por conseguinte podemos definir o funtor aditivo,

$$\begin{array}{ccc}
C(\mathscr{A}) & \xrightarrow{\tau_{\geq n}} & C(\mathscr{A}) \\
A^\bullet & \longmapsto & \tau_{\geq n}(A^\bullet) \\
f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet & \longmapsto & \tau_{\geq n}(f^\bullet) : \tau_{\geq n}(A^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq n}(B^\bullet)
\end{array}$$

O funtor $\tau_{\geq n} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ será chamado de **funtor de truncamento** na categoria dos complexos.

2.3 Funtores de truncamento na categoria D(A).

No final da presente seção veremos que dentro da categoria derivada podemos encontrar uma sub-categoria equivalente à categoria dos complexos. Mas antes disso deveremos definir os funtores truncamento na categoria derivada, o qual iremos conseguir utilizando o fato conhecido que a categoria derivada da categoria dos complexos pode ser construída como a localização da categoria de homotopia.

Primeiro definiremos os funtores de truncamento na categoria de homotopia como a seguir. Suponhamos que $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ é homotópico à zero, então $\forall k \in \mathbb{Z}$ temos que $f^k = h^{k+1} \circ d_A^k + d_B^{k-1} \circ h^k$, isto é, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \cdots \arrow[r] & A^{n-3} \arrow[r, "d_A^{n-3}"] \arrow[d, "f^{n-3}"'] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n-1}"'] & A^{n} \arrow[r, "d_A^{n}"] \arrow[d, "f^{n}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n}"'] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"'] & A^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+2}"'] & \cdots \\
B^\bullet & \cdots \arrow[r] & B^{n-3} \arrow[r, "d_B^{n-3}"] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^{n} \arrow[r, "d_B^{n}"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Além disso temos o morfismo $h^n \circ \mu : ker d_A^n \longrightarrow B^{n+1}$, então

a) Si $k = n-1$, então $f^{n-1} = h^n \circ d_A^{n-1} + d_B^{n-2} \circ h^{n-1} = (h^n \circ \mu) \circ \varphi + d_B^{n-2} \circ h^{n-1}$.

b) Si $k = n$, então $f^n = h^{n+1} \circ d_A^n + d_B^{n-1} \circ h^n$ e compondo com μ temos que $\mu' \circ \Phi = f^n \circ \mu = h^{n+1} \circ d_A^n \circ \mu + d_B^{n-1} \circ h^n \circ \mu = \mu' \circ \varphi' \circ h^n \circ \mu$ portanto, $\Phi = \varphi' \circ (h^n \circ \mu)$, pois μ' é monomorfismo.

Assim, de a) e b) se deduz que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(A^\bullet) \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"'] & \cdots A^{n-3} \arrow[r, "d_A^{n-3}"] \arrow[d, "f^{n-3}"'] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n-1}"'] & ker\ d_A^n \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dl, dashed, "h^n \circ \mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \cdots \\
\tau_{\leq n}(B^\bullet) & \cdots B^{n-3} \arrow[r, "d_B^{n-3}"] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "\varphi'"] & ker\ d_B^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $\tau_{\leq n}(f^\bullet)$ é homotópico à zero. Em consequência, supondo que $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ e $g^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ são homotópicos, isto é, $f^\bullet - g^\bullet$ é homotópico à zero, então $\tau_{\leq n}(f^\bullet - g^\bullet)$ é homotópico à zero e como $\tau_{\leq n}$ é um funtor aditivo, $\tau_{\leq n}(f^\bullet) - \tau_{\leq n}(g^\bullet)$ é homotópico à zero, portanto, $\tau_{\leq n}(f^\bullet)$ e $\tau_{\leq n}(g^\bullet)$ também são homotópicos. Assim, o $\tau_{\leq n}$ induz um funtor aditivo

$$\tau_{\leq n} : K(\mathscr{A}) \longrightarrow K(\mathscr{A})$$

Além disso, temos

i) Pelos itens d) e e) da prova do lema 2.8 segue que $H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) = H^p(\tau_{\leq n}(B^\bullet)) = 0, \forall p > n$ então, $H^p(\tau_{\leq n}(f^\bullet)) = 1_0, \forall p > n$.

ii) Suponhamos $p \geq n$. Aplicando o funtor H^p as inclusões canônicas $i^\bullet : \tau_{\leq n}(A^\bullet) \longrightarrow A^\bullet$ e $j^\bullet : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow B^\bullet$, então $H^p(\tau_{\leq n}(i^\bullet))$ e $H^p(\tau_{\leq n}(j^\bullet))$ são isomorfismos, pelo lema 2.8. Mais ainda, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \arrow[r, "H^p(\tau_{\leq n}(f^\bullet))"] \arrow[d, "H^p(i^\bullet)"'] & H^p(\tau_{\leq n}(B^\bullet)) \arrow[d, "H^p(j^\bullet)"] \\ H^p(A^\bullet) \arrow[r, "H^p(f^\bullet)"] & H^p(B^\bullet) \end{tikzcd}$$

Então, $H^p(\tau_{\leq n}(f^\bullet)) = H^p(j^\bullet)^{-1} \circ H^p(f^\bullet) \circ H^p(i^\bullet)$.

Assim de i) e ii), segue que se $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ é um quasi-isomorfismo, $\tau_{\leq n}(f^\bullet)$ também é quasi-isomorfismo.

Portanto, o funtor $Q \circ \tau_{\leq n} : K(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$, onde $Q : K(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é o funtor localização, levará quasi-isomorfismo em quasi-isomorfismo. Então pelo teorema de localização [Mil14, p. 35], o diagrama

$$\begin{tikzcd} K(\mathscr{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}"'] & D(\mathscr{A}) \\ K(\mathscr{A}) \arrow[r, "Q"] & D(\mathscr{A}) \end{tikzcd}$$

pode ser completado com um único funtor aditivo $\tau_{\leq n} : D(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ tal que $\tau_{\leq n} \circ Q = Q \circ \tau_{\leq n}$, isto é, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} K(\mathscr{A}) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "Q\circ\tau_{\leq n}"'] & & D(\mathscr{A}) \\ & D(\mathscr{A}) \arrow[ur, dashed, "\tau_{\leq n}"'] & \end{tikzcd}$$

O funtor $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ será chamado de **funtor de truncamento** na categoria derivada. Analogamente, podemos definir o funtor truncamento $\tau_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$.

Proposição 2.10 *O funtor natural $D^-(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno, isto é, $D^-(\mathscr{A})$ é uma subcategoria plena de $D(\mathscr{A})$.*

Demonstração: O funtor natural $K^-(\mathscr{A}) \longrightarrow K(\mathscr{A})$ induz o funtor natural $D^-(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$. Além disso, a classe localizante S^- consiste de todos os morfismos em S tais que são morfismos em $K^-(\mathscr{A})$. Suponhamos que $X^\bullet$ um complexo limitado superiormente, $Y^\bullet$ um complexo qualquer e $s : Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ um quasi-isomorfismo. Dado que $X^\bullet$ um complexo limitado superiormente, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H^p(X^\bullet) = 0$ para $p > n$ e como s é quasi-isomorfismo então $H^p(Y^\bullet) = 0$ para $p > n$. Portanto, $i : \tau_{\leq n}(Y^\bullet) \longrightarrow Y^\bullet$

é quasi-isomorfismo, pelo lema 2.8. Por conseguinte, $s \circ i : \tau_{\leq n}(Y^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ é quasi-isomorfismo. Assim, pelo teorema [Mil14, p. 24] temos que $D^-(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno. □

Proposição 2.11 *O funtor natural $D^+(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno, isto é, $D^+(\mathscr{A})$ é uma subcategoria plena de $D(\mathscr{A})$.*

Demonstração: O funtor natural $K^+(\mathscr{A}) \longrightarrow K(\mathscr{A})$ induz o funtor natural $D^+(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$. Além disso, a classe localizante S^+ consiste de todos os morfismos em S tais que são morfismos em $K^+(\mathscr{A})$. Suponhamos que $X^\bullet$ um complexo limitado superiormente, $Y^\bullet$ um complexo qualquer e $s : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ um quasi-isomorfismo. Dado que $X^\bullet$ um complexo limitado inferiormente, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H^p(X^\bullet) = 0$ para $p < n$ e como s é quasi-isomorfismo então $H^p(Y^\bullet) = 0$ para $p < n$. Portanto, $q : Y^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n}(Y^\bullet)$ é quasi-isomorfismo, pelo lema 2.9. Por conseguinte, $q \circ s : X^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n}(Y^\bullet)$ é quasi-isomorfismo. Assim, pelo teorema [Mil14, p. 25] temos que $D^+(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno. □

Proposição 2.12 *O funtor natural $D^b(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno, isto é, $D^b(\mathscr{A})$ é uma subcategoria plena de $D(\mathscr{A})$ igual a $D^-(\mathscr{A}) \bigcap D^+(\mathscr{A})$.*

Demonstração: O funtor natural $K^b(\mathscr{A}) \longrightarrow K^+(\mathscr{A})$ induz o funtor $D^b(\mathscr{A}) \longrightarrow D^+(\mathscr{A})$. Além disso, a classe localizante S^b consiste de todos os morfismos em S^+ tais que são morfismos em $K^b(\mathscr{A})$. Suponhamos que $X^\bullet$ um complexo limitado, $Y^\bullet$ um complexo limitado inferiormente e $s : Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ um quasi-isomorfismo. Dado que $X^\bullet$ um complexo limitado, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H^p(X^\bullet) = 0$ para $p > n$ e como s é quasi-isomorfismo então $H^p(Y^\bullet) = 0$ para $p > n$. Portanto, $i : \tau_{\leq n}(Y^\bullet) \longrightarrow Y^\bullet$ é quasi-isomorfismo, pelo lema 2.8, logo, $\tau_{\leq n}(Y^\bullet)$ é um complexo limitado. Por conseguinte, $s \circ i : \tau_{\leq n}(Y^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ é quasi-isomorfismo. Assim, pelo teorema [Mil14, p. 24] temos que $D^b(\mathscr{A}) \longrightarrow D^+(\mathscr{A})$ é fiel e pleno. Portanto, pela proposição 2.11 temos que o funtor natural $D^b(\mathscr{A}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ é fiel e pleno. □

Observação 2.13 *Os funtores truncamento $\tau_{\leq n}$ e $\tau_{\geq n}$ preservam as subcategorias plenas $D^b(\mathscr{A})$, $D^+(\mathscr{A})$ e $D^-(\mathscr{A})$ da categoria $D(\mathscr{A})$. Portanto, temos os correspondentes funtores truncamento nestas categorias os quais denotaremos da mesma forma.*

Denotaremos por $D : \mathscr{A} \longrightarrow D^*(\mathscr{A})$ ao funtor natural que é a composição do funtor $K : \mathscr{A} \longrightarrow K^*(\mathscr{A})$ e o funtor quociente $Q : K^*(\mathscr{A}) \longrightarrow D^*(\mathscr{A})$, isto é, $D = Q \circ K$.

Teorema 2.14 *O funtor $D : \mathscr{A} \longrightarrow D(\mathscr{A})$ produz uma equivalência da categoria $\mathscr{A}$ com a subcategoria plena de $D(\mathscr{A})$ formada pelos H^0-complexos.*

Demonstração: Ver, por exemplo [GY03, p. 164] □

2.3.1 Sequências exatas curtas e triângulos distinguidos.

Sabemos que para uma categoria abeliana $\mathscr{A}$, a categoria $C^*(\mathscr{A})$ é também abeliana. Logo, dado o monomorfismo $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ nesta categoria, não somente podemos construir a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

em $C^*(\mathscr{A})$, assim como também o triângulo canônico

$$\begin{tikzcd} & C_{f^\bullet} \arrow[dl, "p_{f^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{f^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

nesta mesma categoria.

Lema 2.15 *Seja $m^\bullet : C_{f^\bullet} \longrightarrow Z^\bullet$ o morfismo dado por $m^\bullet = g^\bullet \circ p_Y$, onde $p_Y : C_{f^\bullet} \longrightarrow Y^\bullet$ é a projeção natural. Então $m^\bullet$ é quasi-isomorfismo na categoria $K^*(\mathscr{A})$.*

Demonstração: Por hipótese temos que $m^\bullet = g^\bullet \circ p_Y$, então se verificam as igualdades seguintes:

$$\begin{aligned} m^{n+1} \circ d^n_{C_{f^\bullet}} = \begin{bmatrix} 0 & g^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g^{n+1}f^{n+1} & g^{n+1}d^n_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^n_Z g^n \end{bmatrix} \\ &= d^n_Z \circ \begin{bmatrix} 0 & g^n \end{bmatrix} = d^n_Z \circ m^n \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $m^\bullet$ é um morfismo de complexos.
Por outro lado, aplicando o lema [Mil14, lema 1.6.1, p. 99] ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "1_{X^\bullet}"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & X^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

Então existe um morfismo $w : C_{1_{X^\bullet}} \longrightarrow C_{f^\bullet}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "1_{X^\bullet}"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & X^\bullet \arrow[r, "i_{1_{X^\bullet}}"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & C_{1_{X^\bullet}} \arrow[r, "p_{1_{X^\bullet}}"] \arrow[d, dashed, "w^\bullet"'] & T(X^\bullet) \arrow[d, "T(1_{X^\bullet})"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & X^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"] & C_{f^\bullet} \arrow[r, "p_{f^\bullet}"] & T(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

comuta salvo homotopia, portanto, $w^\bullet \circ i_{1_{X^\bullet}} = i_{f^\bullet} \circ f^\bullet$. Assim, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$w^n = \begin{bmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & f^n \end{bmatrix}$$

Logo, temos que $w^\bullet$ é um monomorfismo e $im\ w^n = X^{n+1} \oplus im\ f^n = X^{n+1} \oplus ker\ g^n = ker\ m^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a sequência curta

$$0 \longrightarrow C_{1_{X^\bullet}} \xrightarrow{w^\bullet} C_{f^\bullet} \xrightarrow{m^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

é exata em $C^*(\mathscr{A})$. Então pelo teorema [Mil14, lema 2.1.2, p. 102], $C_{1_{X^\bullet}} = 0$ na categoria $K^*(\mathscr{A})$, do qual segue que $H^p(C_{1_{X^\bullet}}) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Portanto, da sequência exata longa de cohomologia baseada na sequência exata curta construída acima (teorema 2.5), temos que $H^p(m^\bullet) : H^p(C_{f^\bullet}) \longrightarrow H^p(Z^\bullet)$ é um isomorfismo, $\forall p \in \mathbb{Z}$. $\square$

A próxima proposição nos mostra que toda sequência exata curta na categoria dos complexos, induz um triângulo distinguido na categoria derivada.

Proposição 2.16 *Seja*

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta em $C^*(\mathscr{A})$. *Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\widetilde{f^\bullet}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{g^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido na categoria $D^*(\mathscr{A})$, *onde* $\widetilde{f^\bullet}$ *e* $\widetilde{g^\bullet}$ *são respectivamente as classes de homotopia dos morfismos* $f^\bullet$ *e* $g^\bullet$.

Demonstração: Pelo lema 2.15, sabemos que a classe de homotopia do morfismo $m^\bullet = g^\bullet \circ p_Y$ é um isomorfismo na categoria $D^*(\mathscr{A})$. Mais ainda, $m^\bullet \circ i_{f^\bullet} = (g^\bullet \circ p_Y) \circ i_Y = g^\bullet \circ 1_Y = g^\bullet$. Por conseguinte, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "\widetilde{f^\bullet}"] \arrow[d, "\widetilde{1}_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\widetilde{i}_{f^\bullet}"] \arrow[d, "\widetilde{1}_{Y^\bullet}"'] & C_{\widetilde{f^\bullet}} \arrow[r, "\widetilde{p}_{f^\bullet}"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{m^\bullet}"'] & T(X^\bullet) \arrow[d, "T(\widetilde{1}_{X^\bullet})"] \\ X^\bullet \arrow[r, "\widetilde{f^\bullet}"] & Y^\bullet \arrow[r, "\widetilde{g^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r, "\widetilde{p}_{f^\bullet} \circ \widetilde{m^\bullet}^{-1}"] & T(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de triângulos em $D^*(\mathscr{A})$. Além disso, por definição o triângulo

$$\begin{tikzcd} & C_{\widetilde{f^\bullet}} \arrow[dl, "\widetilde{p}_{f^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\widetilde{f^\bullet}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{i}_{f^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é canônico. Portanto, o triângulo

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "\widetilde{p}_{f^\bullet} \circ \widetilde{m^\bullet}^{-1}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\widetilde{f^\bullet}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{g^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido. □

2.4 A t-estrutura natural na categoria derivada.

Em virtude dos lemas 2.8 e 2.9, vemos que podemos simplificar o estudo da categoria derivada ao considerar as classe dos complexos que são exatos superior ou inferiormente. Assim surge uma questão importante, quando baixo que condições estas duas classes determinam a categoria derivada toda? isto é, podemos supor que todo complexo é isomorfo a algum complexo limitado na categoria derivada? Estas e outras questões iremos responder no próximo capítulo. Por enquanto começaremos nosso estudo definindo formalmente estas classes especiais de complexos, assim temos que na definição a seguir $\mathscr{D}^{\leq n}$ é a categoria dos complexos que são exatos para todo $p > n$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ é a categoria dos complexos que são exatos para todo $p < n$.

Definição 2.17 *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana e $\mathscr{D} = D^*(\mathscr{A})$. Para $n \in \mathbb{Z}$, sejam $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ as sub-categorias plenas de $\mathscr{D}$ tais que: $Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) = \{A^\bullet \in \mathscr{D} | H^p(A^\bullet) = 0, \forall p > n\}$ e $Obj(\mathscr{D}^{\geq n}) = \{A^\bullet \in \mathscr{D} | H^p(A^\bullet) = 0, \forall p < n\}$.*

As categorias da definição acima tem algumas propriedades básicas que listamos a continuação

Proposição 2.18 *Se $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana. Então,*

a) Para $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ são subcategorias estritamente plenas de $\mathscr{D}$.

b) $\ldots \subset \mathscr{D}^{\leq n-1} \subset \mathscr{D}^{\leq n} \subset \mathscr{D}^{\leq n+1} \subset \ldots$ e $\ldots \supset \mathscr{D}^{\geq n-1} \supset \mathscr{D}^{\geq n} \supset \mathscr{D}^{\geq n+1} \supset \ldots$

c) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{D}^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$ e $\mathscr{D}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\geq 0})$, onde T é o funtor translação da categoria $\mathscr{D}$.

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{Z}$ temos que:

a) Dado que as sub-categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ são plenas por definição, basta demonstrar que as mesmas são fechadas por isomorfismos. De fato, suponhamos que $f : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um isomorfismo na categoria $\mathscr{D}$ e $X^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$, aplicando o funtor H^p, segue que $H^p(f) : H^p(X^\bullet) \longrightarrow H^p(Y^\bullet)$ é um isomorfismo, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, $H^p(X^\bullet)$ é isomorfismo ao objeto nulo $\forall p > n$ por hipótese, então $H^p(Y^\bullet) = 0$, $\forall p > n$, portanto $Y^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$ por definição. Analogamente podemos demonstrar que, $\mathscr{D}^{\geq n}$ é fechada por isomorfismos.

b) Suponhamos $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$, então $H^p(A^\bullet) = 0, \forall p > n$ pela definição 2.17, logo $H^p(A^\bullet) = 0, \forall p > n+1$ e portanto $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n+1}$, assim $\mathscr{D}^{\leq n} \subset \mathscr{D}^{\leq n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Agora suponhamos que $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, então $H^p(A^\bullet) = 0, \forall p < n+1$ pela definição 2.17, logo $H^p(A^\bullet) = 0, \forall p < n$ e portanto $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\geq n}$, assim $\mathscr{D}^{\geq n+1} \subset \mathscr{D}^{\geq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

c) Seja $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$, então aplicando a definição 2.17 temos que $H^p(A^\bullet) = 0, \forall p > n$, logo $T^n(A^\bullet) \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e como $A^\bullet = T^{-n}(T^n(A^\bullet))$, então $A^\bullet \in T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$. Reciprocamente, suponhamos que $A^\bullet \in T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$, então existe um complexo $B^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, tal que $A^\bullet = T^{-n}(B^\bullet)$, logo, $H^p(A^\bullet) = H^0(T^p(A^\bullet)) = H^0(T^{p-n}(B^\bullet)) = 0$, quando $p - n > 0$, então $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$. Portanto, $\mathscr{D}^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$. Analogamente se demonstra que, $\mathscr{D}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\geq 0})$.

□

Observação 2.19 *A partir da definição 2.17 e pelo lema 2.8, podemos definir o funtor truncamento* $\tau_{\leq n}$ *como um funtor da categoria* $\mathscr{D}$ *na categoria* $\mathscr{D}^{\leq n}$*, da mesma forma pelo lema 2.9 podemos definir o funtor truncamento* $\tau_{\geq n}$ *como um funtor da categoria* $\mathscr{D}$ *na categoria* $\mathscr{D}^{\geq n}$*.*

No seguinte lema provaremos que cada funtor de truncamento admite como funtor adjunto ao funtor inclusão que tem como dominio a sub-categoria de complexos limitados e como contradomínio a categoria derivada.

Lema 2.20 *Seja* $n \in \mathbb{Z}$*. Então*

(i) $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq n}$ *é adjunto à direta do funtor inclusão* $I : \mathscr{D}^{\leq n} \longrightarrow \mathscr{D}$*;*

(ii) $\tau_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n}$ *é adjunto à esquerda do funtor inclusão* $J : \mathscr{D}^{\geq n} \longrightarrow \mathscr{D}$*.*

Demonstração:

(i) Seja $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B^\bullet \in \mathscr{D}$ e $i^\bullet : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow B^\bullet$ a inclusão canônica, então temos o homomorfismo

$$Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet)) \xrightarrow{\quad\Phi\quad} Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet), B^\bullet)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & \\ A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ f^\bullet"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Agora provaremos que Φ é uma bijeção.

a) Sobrejetividade: Seja $\phi \in Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet), B^\bullet)$ representada pela fração

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

tal que $s^\bullet : C^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ é quasi-isomorfismo. Portanto, $H^p(C^\bullet) = 0$ para $p > n$, isto é, $C^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$. Então pelo lema 2.8, a inclusão canônica $j^\bullet : \tau_{\leq n}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet$ é quasi-isomorfismo. Portanto o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & \\ A^\bullet & \tau_{\leq n}(C^\bullet) \arrow[u, "j^\bullet", "\sim"'] \arrow[d, "1"'] & B^\bullet \\ & \tau_{\leq n}(C^\bullet) \arrow[ul, "s^\bullet \circ j^\bullet", "\sim"'] \arrow[ur, "f^\bullet \circ j^\bullet"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, com o qual estabelecemos a equivalência da fração de cima com a debaixo. Assim, podemos supor que $C^p = 0$ se $p > n$. Além disso, o morfismo de complexos $f^\bullet : C^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ podemos representá-lo pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \cdots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d_C^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d, "f^n"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ B^\bullet & \cdots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Por outro lado, consideremos a inclusão canônica $i^\bullet : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow B^\bullet$, isto é,

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[d, "i^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] \arrow[d, "1_{B^{n-2}}"'] & B^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{B^{n-1}}"'] & ker\ d_B^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ B^\bullet & \ldots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \ldots \end{tikzcd}$$

Além disso, suponhamos que $Im\ f^n$ é a imagem do morfismo f^n, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Im\ f^n \arrow[dr, "\alpha"] & \\ C^n \arrow[ur, dashed, "\beta"] \arrow[rr, "f^n"] & & B^n \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde α é monomorfismo e β é epimorfismo. Logo, $d_B^n \circ \alpha \circ \beta = d_B^n \circ f^n = 0$, assim $d_B^n \circ \alpha = 0$, então pela propriedade universal do kernel, existe um único morfismo $\lambda : Im\ f^n \longrightarrow Ker\ d_B^n$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Im\ f^n \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\lambda"'] & & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \\
& Ker\ d_B^n \arrow[ur, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Então, $\mu \circ (\lambda \circ \beta) = (\mu \circ \lambda) \circ \beta = \alpha \circ \beta = f^n$ e $\mu \circ (\lambda \circ \beta) \circ d_C^{n-1} = f^n \circ d_C^{n-1} = d_B^{n-1} \circ f^{n-1} = \mu \circ (\varphi \circ f^{n-1})$, então $(\lambda \circ \beta) \circ d_C^{n-1} = \varphi \circ f^{n-1}$, pois μ é monomorfismo, portanto temos os morfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "g^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d_C^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r] \arrow[d, "\lambda\circ\beta"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[d, "i^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] \arrow[d, "1_{B^{n-2}}"'] & B^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{B^{n-1}}"'] & ker\ d_B^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

cuja composição é

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "i^\bullet\circ g^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d_C^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu\circ\lambda\circ\beta"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B^\bullet & \dots \arrow[r] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Portanto, $f^\bullet = i^\bullet \circ g^\bullet$.

Finalmente, consideremos os morfismos $i^\bullet : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow B^\bullet$ e $\psi : A^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq n}(B^\bullet)$ na categoria $\mathscr{D}$, os quais podem ser representados pelas frações

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[dl, "1"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet"] & \\
\tau_{\leq n}(B^\bullet) & & B^\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & \\
A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Então obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& & C^\bullet \arrow[dl, dashed, "1"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "g^\bullet"] & & \\
& C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[dl, "1"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet"] & \\
A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) & & B^\bullet
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet\circ g^\bullet"] & \\
A^\bullet & & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\phi = i^\bullet \circ \psi = \Phi(\psi)$.

b) Injetividade: Agora suponhamos que existe $\psi \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet))$ tal que $\Phi(\psi) = i^\bullet \circ \psi = 0$ na categoria $\mathscr{D}$. Então, pela discussão anterior ψ é representada pela fração

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & \\ A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \end{tikzcd}$$

onde $C^\bullet$ é tal que $C^p = 0$ para $p > n$. Mais ainda, $\Phi(\psi)$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ g^\bullet"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

e como $\Phi(\psi) = 0$, então existe $D^\bullet$ e um quasi-isomorfismo $j^\bullet : D^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ g^\bullet"] & \\ A^\bullet & D^\bullet \arrow[u, "j^\bullet", "\sim"'] \arrow[d] & B^\bullet \\ & A^\bullet \arrow[ul, "1", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Então, $H^p(D^\bullet) = H^p(C^\bullet) = 0$ para $p > n$, dado que $j^\bullet$ é quasi-isomorfismo. Assim, definindo $E^\bullet = \tau_{\leq n}(D^\bullet)$ e $k^\bullet = j^\bullet \circ j'^\bullet$, tal que $j'^\bullet : \tau_{\leq n}(D^\bullet) \longrightarrow D^\bullet$ é a inclusão canônica, a qual é quasi-isomorfismo pelo lema 2.8, temos que $k^\bullet$ é quasi-isomorfismo e o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ g^\bullet"] & \\ A^\bullet & E^\bullet \arrow[u, "k^\bullet", "\sim"'] \arrow[d] & B^\bullet \\ & A^\bullet \arrow[ul, "1", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, $a^\bullet = i^\bullet \circ g^\bullet \circ k^\bullet$ é homotópico a zero, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} E^\bullet \arrow[d, "a^\bullet"'] & \ldots E^{n-3} \arrow[r, "d_E^{n-3}"] \arrow[d, "a^{n-3}"'] & E^{n-2} \arrow[r, "d_E^{n-2}"] \arrow[d, "a^{n-2}"'] \arrow[dl, dashed, "h^{n-2}"'] & E^{n-1} \arrow[r, "d_E^{n-1}"] \arrow[d, "a^{n-1}"'] \arrow[dl, dashed, "h^{n-1}"'] & E^n \arrow[r] \arrow[d, "a^n"'] \arrow[dl, dashed, "h^n"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "h^{n+2}"'] & \ldots \\ B^\bullet & \ldots B^{n-3} \arrow[r, "d_B^{n-3}"] & B^{n-2} \arrow[r, "d_B^{n-2}"] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

é comutativo e $\forall p \in \mathbb{Z}$ se cumpre que $a^p = d_B^{p-1} \circ h^p + h^{p+1} \circ d_E^p$.

1) Suponhamos $p < n$, então $i^p = 1_{B^p}$, logo $g^p \circ k^p = i^p \circ g^p \circ k^p = a^p = d_B^{p-1} \circ h^p + h^{p+1} \circ d_E^p$.

2) No caso $p = n$, sabemos que $i^n = \mu$, então $\mu \circ g^n \circ k^n = a^n = d_B^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_E^n = \mu \circ \varphi \circ h^n$, pois $h^{n+1} = 0$, e dado que μ é monomorfismo, concluímos que $g^n \circ k^n = \varphi \circ h^n$.

3) Para $p > n$, temos que $h^p = g^p = 0$, então $g^p \circ k^p = 0 = d_B^{p-1} \circ h^p + h^{p+1} \circ d_E^p$.

De 1), 2) e 3), temos o diagrama comutativo seguinte $g^\bullet \circ k^\bullet : E^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq n}(B^\bullet)$ é homotópico à zero. Além disso, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & \\ A^\bullet & E^\bullet \arrow[u, "k^\bullet", "\sim"'] \arrow[d, "1"] & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \\ & E^\bullet \arrow[ul, "s^\bullet", "\sim"'] \arrow[ur, "g^\bullet \circ k^\bullet"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, portanto $\psi = 0$.

Já demonstramos que $\forall A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B^\bullet \in \mathscr{D}$, $\Phi_{A^\bullet,B^\bullet} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet), B^\bullet)$ é uma bijeção, por conseguinte, só resta demonstrar que é funtorial em ambas as variáveis.

a) Se $\varphi : A^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, então o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet)) \arrow[r, "\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet), B^\bullet) \\ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(C^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet)) \arrow[r, "\Phi_{C^\bullet,B^\bullet}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\varphi, \tau_{\leq n}(B^\bullet))"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(C^\bullet), B^\bullet) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(I(\varphi), B^\bullet)"'] \end{tikzcd}$$

De fato, seja $\psi \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(C^\bullet, \tau_{\leq n}(B^\bullet))$ a qual é representada pela fração

$$\begin{tikzcd} & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & \\ C^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \end{tikzcd}$$

e suponhamos que o morfismo φ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & L^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & \\ A^\bullet & & C^\bullet \end{tikzcd}$$

Então, temos que:

(1) O morfismo $\psi \circ \varphi$ é representado pela fração

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & K^\bullet \arrow[dl, dashed, "r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h^\bullet"] & & & & & & & K^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet\circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet\circ h^\bullet"] & \\
 & & L^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & & = & & & A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \\
 & A^\bullet & & C^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Portanto, o morfismo $\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}(Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\varphi,\tau_{\leq n}(B^\bullet))(\psi)) = \Phi_{A^\bullet,B^\bullet}(\psi\circ\varphi)$ é representado pela fração

$$
\begin{tikzcd}
 & K^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet\circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet\circ g^\bullet\circ h^\bullet"] & \\
A^\bullet & & B^\bullet
\end{tikzcd}
$$

(2) O morfismo $\Phi_{C^\bullet,B^\bullet}(\psi)$ é representado pela fração

$$
\begin{tikzcd}
 & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet\circ g^\bullet"] & \\
C^\bullet & & B^\bullet
\end{tikzcd}
$$

Portanto, o morfismo $Hom_{\mathscr{D}}(I(\varphi),B^\bullet)(\Phi_{C^\bullet,B^\bullet}(\psi)) = \Phi_{C^\bullet,B^\bullet}(\psi)\circ\varphi$ é representado pela fração

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K^\bullet \arrow[dl, dashed, "r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h^\bullet"] & & & & & & K^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet\circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet\circ g^\bullet\circ h^\bullet"] & \\
 & L^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet\circ g^\bullet"] & & = & & A^\bullet & & B^\bullet \\
A^\bullet & & C^\bullet & & B^\bullet & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Segue de (1) e (2) $\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}\circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\varphi,\tau_{\leq n}(B^\bullet)) = Hom_{\mathscr{D}}(I(\varphi),B^\bullet)\circ\Phi_{C^\bullet,B^\bullet}$.

b) Seja $\mu : B^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ um morfismo na categoria $\mathscr{D}$. O diagrama seguinte comuta

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet,\tau_{\leq n}(B^\bullet)) \arrow[r, "\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet,\tau_{\leq n}(\mu))"'] & Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet),B^\bullet) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet),\mu)"] \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet,\tau_{\leq n}(D^\bullet)) \arrow[r, "\Phi_{A^\bullet,D^\bullet}"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet),D^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

De fato, seja $\psi \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet,\tau_{\leq n}(B^\bullet))$ o qual é representado pela fração

$$
\begin{tikzcd}
 & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & \\
A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

e suponhamos que o morfismo μ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & K^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & \\ B^\bullet & & D^\bullet \end{tikzcd}$$

por conseguinte, o morfismo $\tau_{\leq n}(\mu) : \tau_{\leq n}(B^\bullet) \longrightarrow \tau_{\leq n}(D^\bullet)$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\leq n}(K^\bullet) \arrow[dl, "\tau_{\leq n}(s^\bullet)"', "\sim"] \arrow[dr, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"] & \\ \tau_{\leq n}(B^\bullet) & & \tau_{\leq n}(D^\bullet) \end{tikzcd}$$

Assim temos o seguinte:

(1) O morfismo $\tau_{\leq n}(\mu) \circ \psi$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & & L^\bullet \arrow[dl, dashed, "r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h^\bullet"] & & \\ & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "g^\bullet"] & & \tau_{\leq n}(K^\bullet) \arrow[dl, "\tau_{\leq n}(s^\bullet)"', "\sim"] \arrow[dr, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"] & \\ A^\bullet & & \tau_{\leq n}(B^\bullet) & & \tau_{\leq n}(D^\bullet) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & L^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet \circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)\circ h^\bullet"] & \\ A^\bullet & & \tau_{\leq n}(D^\bullet) \end{tikzcd}$$

Portanto, o morfismo $\Phi_{A^\bullet,D^\bullet}(Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(\mu))(\psi)) = \Phi_{A^\bullet,D^\bullet}(\tau_{\leq n}(\mu) \circ \psi)$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & L^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet \circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "j^\bullet \circ \tau_{\leq n}(f^\bullet)\circ h^\bullet"] & \\ A^\bullet & & D^\bullet \end{tikzcd}$$

(2) O morfismo $\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}(\psi)$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd} & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ g^\bullet"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Por outro lado, sabemos que os diagramas seguintes comutam

$$\begin{tikzcd} L^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "r^\bullet"', "\sim"] & \tau_{\leq n}(K^\bullet) \arrow[d, "\sim"', "\tau_{\leq n}(s^\bullet)"] \\ M^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(K^\bullet) \arrow[r, "\tau_{\leq n}(s^\bullet)"] \arrow[d, "k^\bullet"', "\sim"] & \tau_{\leq n}(B^\bullet) \arrow[d, "\sim"', "i^\bullet"] \\ K^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"] & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Então, $i^\bullet \circ g^\bullet \circ r^\bullet = i^\bullet \circ \tau_{\leq n}(s^\bullet) \circ h^\bullet = s^\bullet \circ k^\bullet \circ h^\bullet$. Portanto, o morfismo

$Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet),\mu)(\Phi_{A^\bullet,B^\bullet}(\psi)) = \mu \circ \Phi_{A^\bullet,B^\bullet}(\psi)$ é representado pela fração

$$\begin{tikzcd}
 & & L^\bullet \arrow[dl, dashed, "r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "k^\bullet \circ h^\bullet"] & & & & & L^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet \circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet \circ k^\bullet \circ h^\bullet"] & \\
 & M^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "i^\bullet \circ g^\bullet"] & & K^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet"] & = & & & & \\
A^\bullet & & B^\bullet & & D^\bullet & & A^\bullet & & D^\bullet
\end{tikzcd}$$

Mais ainda, pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(K^\bullet) \arrow[r, "\tau_{\leq n}(f^\bullet)"] \arrow[d, "k^\bullet"', "\sim"] & \tau_{\leq n}(D^\bullet) \arrow[d, "j^\bullet", "\sim"'] \\
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & D^\bullet
\end{tikzcd}$$

temos a equivalência

$$\begin{tikzcd}
 & L^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet \circ r^\bullet"', "\sim"] \arrow[dr, "f^\bullet \circ k^\bullet \circ h^\bullet"] & \\
A^\bullet & L^\bullet \arrow[u, "1", "\sim"'] \arrow[d, "1", "\sim"'] & D^\bullet \\
 & L^\bullet \arrow[ul, "t^\bullet \circ r^\bullet", "\sim"'] \arrow[ur, "j^\bullet \circ \tau_{\leq n}(f^\bullet) \circ h^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Segue de (1) e (2) $\Phi_{A^\bullet,D^\bullet} \circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A^\bullet, \tau_{\leq n}(\mu)) = Hom_{\mathscr{D}}(I(A^\bullet),\mu) \circ \Phi_{A^\bullet,B^\bullet}$.

Portanto, de a) e b) o funtor $\tau_{\leq n}$ e adjunto à direta do funtor I.

(ii) A prova de (ii) é análoga.

□

O lema acima nos permite demonstrar que na categoria derivada o morfismo nulo é o único morfismo entre um complexo que é exato a partir da posição $n+1$ em diante e um complexo que é exato da posição n pra atrás.

Corolário 2.21 *Se $m < n$. Então $Hom_{\mathscr{D}}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$ para qualquer $A^\bullet \in \mathscr{D}^{\leq m}$ e $B^\bullet \in \mathscr{D}^{\geq n}$.*

Demonstração: Pelo lema 2.20, temos $Hom_{\mathscr{D}}(A^\bullet, B^\bullet) = Hom_{\mathscr{D}}(A^\bullet, \tau_{\leq m}(B^\bullet))$. Por outro lado, temos:

a) Por hipótese $B^\bullet \in \mathscr{D}^{\geq n}$, então pela definição 2.17 $H^p(B^\bullet) = 0, \forall p < n$ e como $m < n$, então $H^p(B^\bullet) = 0, \forall p \leq m$, além disso, do lema 2.8 deduzimos que $H^p(B^\bullet) = H^p(\tau_{\leq m}(B^\bullet)), \forall p \leq m$, portanto $H^p(\tau_{\leq m}(B^\bullet)) = 0, \forall p \leq m$.

b) Pelos itens d) e e) da prova do lema 2.8, temos que $H^p(\tau_{\leq m}(B^\bullet)) = 0, \forall p > m$.

Assim, dos itens a) e b), temos que: $H^p(\tau_{\leq m}(B^\bullet)) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$, então, $\tau_{\leq m}(B^\bullet) = 0$ na categoria $\mathscr{D}$. Portanto, $Hom_{\mathscr{D}}(A^\bullet, B^\bullet) = Hom_{\mathscr{D}}(A^\bullet, 0) = 0$. $\square$

Finalmente, temos um dos resultados mais importante deste capítulo, o qual reflete a importância de estudar as sub-categorias dos complexos limitados na categoria derivada, pois nos diz que a cada complexo podemos associar um triângulo distinguido na categoria derivada e consequentemente, para cada complexo temos uma sequência exata curta tal que o cokernel da inclusão natural é um complexo exato inferiormente, como veremos a seguir.

Proposição 2.22 *Para cada complexo $X^\bullet$ e $n \in \mathbb{Z}$ existe um único morfismo $\widetilde{h^\bullet}$: $\tau_{\geq n+1}(X^\bullet) \longrightarrow T(\tau_{\leq n}(X^\bullet))$ tal que*

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n+1}(X^\bullet) \arrow[dl, "\widetilde{h^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq n}(X^\bullet) \arrow[rr, "\widetilde{i^\bullet}"] & & X^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{p^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido na categoria $D^*(\mathscr{A})$.

Demonstração: Dado $X^\bullet$ um complexo de $\mathscr{A}$-objetos e $n \in \mathbb{Z}$, definamos $Q^\bullet = Coker\ (i^\bullet)$ onde $i^\bullet : \tau_{\leq n}(X^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ é a inclusão canônica, a qual sabemos que é um monomorfismo na categoria $C(\mathscr{A})$ e que é represento pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(X^\bullet) \arrow[d, "i^\bullet"'] & \dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d, "1_{X^{n-2}}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{X^{n-1}}"'] & Ker\ d_X^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ X^\bullet \arrow[d, "coker(i^\bullet)"'] & \dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[r, "(d_X^{n-1})"] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "\rho"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "1_{X^{n+1}}"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "1_{X^{n+2}}"'] & \dots \\ Q^\bullet & \dots \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed, "1_0"] & 0 \arrow[r, dashed] & Coker\ \mu \arrow[r, dashed, "\psi"] & X^{n+1} \arrow[r, dashed, "d_X^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r, dashed, "d_X^{n+2}"] & \dots \end{tikzcd}$$

onde $\mu = ker(d_X^n)$, $\rho = coker(\mu)$ e ψ é o morfismo induzido pela propriedade universal do cokernel, pois $(1_{X^{n+1}} \circ d_X^n) \circ \mu = 0$.
Por outro lado, considerando o diagrama

$$\begin{tikzcd} Ker(\beta) \arrow[r, "ker(\beta)"] & X^n \arrow[rr, "d_X^n"] \arrow[dr, "\beta"'] & & X^{n+1} \arrow[r, "coker(\alpha)"] & Coker(\alpha) \\ & & Im(d_X^n) \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

Onde $\alpha = im(d_X^n)$ é monomorfismo e $\beta = coim(d_X^n)$ é um epimorfismo. Então, $\mu = ker(\beta)$, $\rho = \beta$, $Coker(\mu) = Coim(d_X^n)$ e $coker(d_X^n) = coker(\alpha)$. Logo, pela unicidade do morfismo ψ e dado que $d_X^n = \alpha \circ \beta$, segue que $\psi = \alpha$, assim temos que

$$(Q^\bullet)^p = \begin{cases} 0 & \text{se } p < n; \\ Coim\ (d_X^n) & \text{se } p = n; \\ X^p & \text{se } p > n. \end{cases} \qquad d^p_{\tau_{\leq n}(A^\bullet)} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq n-1; \\ \alpha & \text{se } p = n; \\ d_X^p & \text{se } p \geq n. \end{cases}$$

Se consideramos a projeção canônica $q^\bullet : Q^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(Q^\bullet)$, isto é, o morfismo de complexos

$$\begin{tikzcd} Q^\bullet \arrow[d, "q^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Coim(d_X^n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "coker(\alpha)"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "1_{X^{n+2}}"'] & X^{n+3} \arrow[r, "d_X^{n+3}"] \arrow[d, "1_{X^{n+3}}"'] & \ldots \\ \tau_{\geq n+1}(Q^\bullet) & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Coker(\alpha) \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] & X^{n+3} \arrow[r, "d_X^{n+3}"] & \ldots \end{tikzcd}$$

tal que $H^p(q^\bullet) : H^p(Q^\bullet) \longrightarrow H^p(X^\bullet)$ para cada $p \geq n+1$ e $H^p(q^\bullet) = 0$ para cada $p < n+1$, pelo lema 2.9. Por outro lado, como α monomorfismo, então $Ker(\alpha) = 0$, logo $H^n(Q^\bullet) = 0$, portanto $H^p(q^\bullet) = 1_0$, para cada $p \leq n+1$. Além disso, sendo $Coker(d_X^n) = Coker(\alpha)$, então $\tau_{\geq n+1}(Q^\bullet) = \tau_{\geq n+1}(X^\bullet)$, do qual concluímos que o morfismo

$$\begin{tikzcd} Q^\bullet \arrow[d, "q^\bullet"'] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Coim(d_X^n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "coker(d_X^n)"'] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] \arrow[d, "1_{X^{n+2}}"'] & X^{n+3} \arrow[r, "d_X^{n+3}"] \arrow[d, "1_{X^{n+3}}"'] & \ldots \\ \tau_{\geq n+1}(X^\bullet) & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Coker(d_X^n) \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r, "d_X^{n+2}"] & X^{n+3} \arrow[r, "d_X^{n+3}"] & \ldots \end{tikzcd}$$

é quasi-isomorfismo, portanto, $Q^\bullet$ é isomorfismo a $\tau_{\geq n+1}(X^\bullet)$ na categoria $D^*(\mathscr{A})$.
Por conseguinte, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq n}(X^\bullet) \xrightarrow{i^\bullet} X^\bullet \longrightarrow Q^\bullet \longrightarrow 0$$

é exata e $Q^\bullet = \tau_{\geq n+1}(X^\bullet)$ na categoria $D^*(\mathscr{A})$. Então pela proposição 2.16, o triângulo

$$\begin{tikzcd} & Q^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq n}(X^\bullet) \arrow[rr, "\widetilde{i^\bullet}"] & & X^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{q^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido na categoria $D^*(\mathscr{A})$. Portanto, o triângulo

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n+1}(X^\bullet) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq n}(X^\bullet) \arrow[rr, "\widetilde{i^\bullet}"] & & X^\bullet \arrow[ul, "\widetilde{p^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido na categoria $D^*(\mathscr{A})$. Finalmente, a unicidade do morfismo $\widetilde{h^\bullet}$ é consequência do lema 1.31 e corolário do 2.21. $\square$

Capítulo 3

t-estruturas

Na primeira seção deste capítulo introduziremos a noção de t-estruturas a qual foi definida pela primeira vez por Beilinson-Bernstein-Deligne no artigo [BBD82]. Nesse mesmo artigo eles constroem subcategorias abelianas em categorias trianguladas. Assim o objetivo deste capítulo será provar esse e outros resultados básicos de t-estruturas pelo qual apresentaremos as definições precisas e demonstraremos uma série de lemas fundamentais. Outras fontes de referência são [KS90, GY03, Mil14].

Ao longo deste capítulo $\mathscr{D}$ é uma categoria triangulada.

3.1 t-estruturas em categorias trianguladas.

A discussão na última seção ilustra a seguinte definição, formalizando assim as propriedades observadas.

Definição 3.1 *Uma t-estrutura em $\mathscr{D}$ é um par de subcategorias estritamente plenas $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ que satisfazem as seguintes condições:*

(t1) $\mathscr{D}^{\leq 0} \subset \mathscr{D}^{\leq 1}$, $\mathscr{D}^{\geq 0} \supset \mathscr{D}^{\geq 1}$, onde $\mathscr{D}^{\leq 1} = T^{-1}(\mathscr{D}^{\leq 0})$ e $\mathscr{D}^{\geq 1} = T^{-1}(\mathscr{D}^{\geq 0})$;

(t2) $Hom(X, Y) = 0$ para $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $Y \in \mathscr{D}^{\geq 1}$;

(t3) para qualquer $X \in \mathscr{D}$ existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ A \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $B \in \mathscr{D}^{\geq 1}$.

Exemplo 3.2 *Seja $\mathscr{D} = \mathscr{D}^*(\mathscr{A})$ a categoria derivada da categoria abeliana $\mathscr{A}$. Dadas as subcategorias $\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$ (ver definição 2.17), pela proposição 2.18 e o corolário 2.21* *e a proposição 2.22, temos que* $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ *satisfaz as condições da definição 3.1. Esta t-estrutura é chamada a t-estrutura natural em* $\mathscr{D}^*(\mathscr{A})$*.*

A seguir apresentamos algumas propriedades elementares que se deduzem da definição de t-estrutura e que iremos utilizar no resto do trabalho.

Proposição 3.3 *Denotando por* $\mathscr{D}^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$ *e* $\mathscr{D}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\geq 0})$*, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*.*

a) $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ *se e somente se* $X[1] \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$ *se e somente se* $X[-1] \in \mathscr{D}^{\leq n+1}$

b) $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ *se e somente se* $X[1] \in \mathscr{D}^{\geq n-1}$ *se e somente se* $X[-1] \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$

c) $\ldots \subset \mathscr{D}^{\leq n-1} \subset \mathscr{D}^{\leq n} \subset \mathscr{D}^{\leq n+1} \subset \ldots$*, isto é, a família* $(\mathscr{D}^{\leq n}; n \in \mathbb{Z})$ *é crescente.*

d) $\ldots \supset \mathscr{D}^{\geq n-1} \supset \mathscr{D}^{\geq n} \supset \mathscr{D}^{\geq n+1} \supset \ldots$*, isto é, a família* $(\mathscr{D}^{\geq n}; n \in \mathbb{Z})$ *é decrescente.*

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{Z}$.

a) Dado que T é um equivalência de categorias, temos as equivalências seguintes:

   1) $X \in \mathscr{D}^{\leq n} \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathscr{D}^{\leq 0}; X = X_0[-n] \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathscr{D}^{\leq 0}; X[1] = X_0[-(n-1)] \Leftrightarrow X[1] \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$

   2) $X \in \mathscr{D}^{\leq n} \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathscr{D}^{\leq 0}; X = X_0[-n] \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathscr{D}^{\leq 0}; X[-1] = X_0[-(n+1)] \Leftrightarrow X[-1] \in \mathscr{D}^{\leq n+1}$

b) É análogo ao item a).

c) Suponhamos $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$, então aplicando o item a) $n-$vezes, temos que $X[n] \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, mas $\mathscr{D}^{\leq 0} \subset \mathscr{D}^{\leq 1}$ por (t1) da definição 3.1, então $X[n] \in \mathscr{D}^{\leq 1} \Leftrightarrow X[n+1] \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, pelo item a). Então $\exists X_0 \in \mathscr{D}^{\leq 0}; X[n+1] = X_0$ e sendo T uma equivalência de categorias, concluímos que $X = X_0[-(n+1)] \in \mathscr{D}^{\leq n+1}$.

d) Suponhamos $X \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, então aplicando o item b) $n-$vezes, temos que $X[n] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, mas $\mathscr{D}^{\geq 1} \subset \mathscr{D}^{\geq 0}$ por (t1) da definição 3.1, então $X[n] \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então $\exists X_0 \in \mathscr{D}^{\geq 0}; X[n] = X_0$ e sendo T uma equivalência de categorias, concluímos que $X = X_0[-n] \in \mathscr{D}^{\geq n}$.

□

Na próxima proposição apresentamos um método para construir t-estruturas a partir de uma t-estrutura dada, o qual generaliza a construção que aparece no item i) do Exemplo 1.3.2 no artigo [BBD82, p. 29].

Proposição 3.4 *Seja* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *uma equivalência triangulada e* $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ *é uma t-estrutura na categoria triangulada* $\mathscr{C}$ *então,* $(F\mathscr{C}^{\leq 0}, F\mathscr{C}^{\geq 0})$ *é uma t-estrutura em* $\mathscr{D}$*.*

Demonstração: Chamando $\mathscr{D}^{\leq 0} = F\mathscr{C}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0} = F\mathscr{C}^{\geq 0}$, temos que $\mathscr{D}^{\leq 1} = T^{-1}F\mathscr{C}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 1} = T^{-1}F\mathscr{C}^{\geq 0}$. Agora demonstraremos que $\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$ satisfazem as condições da definição 3.1.

1) Demonstraremos somente que $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é uma subcategoria estritamente plena da categoria $\mathscr{D}$, pois a demonstração para a categoria $\mathscr{D}^{\geq 0}$ é análoga.

   a) Como $\mathscr{C}^{\leq 0}$ é uma subcategoria plena da categoria $\mathscr{C}$ e F é uma equivalência de categorias então, $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é uma subcategoria plena da categoria $\mathscr{D}$.

   b) Suponhamos que $g : Y \to Y'$ é um isomorfismo na categoria $\mathscr{D}$ tal que Y é um objeto da subcategoria $\mathscr{D}^{\leq 0}$, então existe um objeto X na subcategoria $\mathscr{C}^{\leq 0}$ tal que $Y = FX$, mais ainda dado que F é uma equivalência de categorias, existe um objeto X' e um isomorfismo $f : X \to X'$ na categoria $\mathscr{C}$ tais que $g = F(f)$ e $Y' = FX'$, então X' é um objeto da categoria $\mathscr{C}^{\leq 0}$, pois $\mathscr{C}^{\leq 0}$ é uma subcategoria estritamente plena da categoria $\mathscr{C}$. Assim, Y' é um objeto da categoria $\mathscr{D}$ e g é um isomorfismo da categoria $\mathscr{D}$. Portanto, $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é uma subcategoria estritamente plena da categoria $\mathscr{D}$.

2) Para demonstrar a condição (t1) da definição 3.1, temos que demonstrar que:

   (a) $\mathscr{D}^{\leq 0} \subset \mathscr{D}^{\leq 1}$. Suponhamos que $Y \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, então existe um objeto $X \in \mathscr{C}^{\leq 0}$ tal que $Y = FX$. Mas, T é um automorfismo de categoria e F é um funtor exato então $FX = T^{-1}(TFX) = T^{-1}(FTX)$, onde $TX \in \mathscr{C}^{\leq -1} \subset \mathscr{C}^{\leq 0}$ pela proposição 3.3. Logo, $X_0 = TX \in \mathscr{C}^{\leq 0}$ e $Y = T^{-1}(FX_0) \in \mathscr{D}^{\leq 1}$.

   (b) $\mathscr{D}^{\geq 0} \supset \mathscr{D}^{\geq 1}$. Suponhamos que $Y \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, então existe um objeto $X \in \mathscr{C}^{\geq 0}$ tal que $Y = T^{-1}FX$. Mas, T é um automorfismo de categoria e F é um funtor exato então $T^{-1}FX = T^{-1}TFT^{-1}X = F(T^{-1}X)$, onde $T^{-1}X \in \mathscr{C}^{\geq 1} \subset \mathscr{C}^{\geq 0}$ pela proposição 3.3. Logo, $X_0 = T^{-1}X \in \mathscr{C}^{\geq 0}$ e $Y = FX_0 \in \mathscr{D}^{\geq 0}$.

3) Suponhamos que $Y \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $Y' \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, então existe um objeto $X \in \mathscr{C}^{\leq 0}$ e um objeto $X' \in \mathscr{C}^{\geq 1}$ tais que: $Y = FX$ e $Y' = FX'$. Assim, $Hom_{\mathscr{D}}(Y, Y') = Hom_{\mathscr{D}}(FX, FX') = Hom_{\mathscr{C}}(X, X')$, pois F é fiel e pleno. Mas $Hom_{\mathscr{C}}(X, X') = 0$, pela condição (t2) da definição 3.1, portanto $Hom_{\mathscr{D}}(Y, Y') = 0$.

4) Dado $Y \in \mathscr{D}$, existe $X \in \mathscr{C}$ tal que $Y = FX$ pois F é pleno. Então pela condição (t3) da definição 3.1 existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ A \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathscr{C}^{\leq 0}$ e $B \in C^{\geq 1}$. Por conseguinte,

$$\begin{tikzcd} & FB \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ FA \arrow[rr] & & FX \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido pois F é um funtor exato. Mais ainda, $FA \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $FB = FT^{-1}B_0 = T^{-1}FB_0 \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, pois F é um funtor exato e $B_0 \in \mathscr{C}^{\geq 0}$. Portanto, $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ satisfaz a condição (t3) da definição 3.1.

$\square$

O próximo lema é uma extensão da condição *(t2)* de t-estrutura que será fundamental neste trabalho, em particular demonstraremos que o par $(\mathscr{D}^{\leq n}, \mathscr{D}^{\geq n+1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ é um par de torção, ver teorema 4.6 no capítulo 4.

Lema 3.5 *Seja $n, m \in \mathbb{Z}$ com $n < m$. Se $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $Y \in \mathscr{D}^{\geq m}$, então $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0$.*

Demonstração: Por hipótese $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$, então pela proposição 3.3 temos: $X = X'[-n]$ para algum $X' \in \mathscr{D}^{\leq 0}$. Por outro lado, suponhamos que $Y \in \mathscr{D}^{\geq m}$, como por hipótese $n+1 \leq m$ então pela proposição 3.3, temos que $Y \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, mais ainda, existe $Y_0 \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ tal que $Y = Y_0[-(n+1)] = (Y_0[-1])[-n] = Y'[-n]$, onde $Y' = Y_0[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, pela proposição 3.3. Portanto, $Hom(X, Y) = Hom(X'[-n], Y'[-n]) = Hom(X', Y') = 0$, por (t2) da definição 3.1. $\square$

O resultado seguinte é um caso particular da proposição 3.4. Dizemos que a segunda t-estrutura é deduzida da primeira por translação. Assim no resto do capítulo, bastará supor que $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ é a t-estrutura dada na categoria $\mathscr{D}$.

Proposição 3.6 *Se $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ é uma t-estrutura em $\mathscr{D}$, então para cada $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathscr{D}^{\leq n}, \mathscr{D}^{\geq n})$ é uma t-estrutura em $\mathscr{D}$.*

Demonstração:

a) Por hipótese T é uma equivalência de categorias e $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é estritamente plena, então pelo item 1) da proposição 3.4, com $F = T^n$ concluímos que $D^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\leq 0})$ é estritamente plena. Da mesma forma demonstramos que$\mathscr{D}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{D}^{\geq 0})$, é estritamente plena.

b) Da proposição 3.3, segue que $\mathscr{D}^{\leq n} \subset \mathscr{D}^{\leq n+1}$ e $\mathscr{D}^{\geq n} \supset \mathscr{D}^{\geq n+1}$ tal que $\mathscr{D}^{\leq n+1} = T^{-1}(\mathscr{D}^{\leq n})$ e $\mathscr{D}^{\geq n+1} = T^{-1}(\mathscr{D}^{\geq n})$, então (t1) da definição 3.1 é satisfeito.

c) Do lema 3.5, com $m = n+1$ se verifica (t2) da definição 3.1.

d) Seja $n \in \mathbb{Z}$, para cada objeto $X \in \mathscr{D}$ temos $X[n] \in \mathscr{D}$, então por (t3) da definição 3.1 existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ A' \arrow[rr] & & X[n] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que $A' \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $B' \in \mathscr{D}^{\geq 1}$.
Mais ainda podemos definir os objetos $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, tais que $A[n] \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $B[n] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, como a seguir:

(i) $A = A'[-n] \in \mathscr{D}^{\leq n}$ então $A[n] = A' \in \mathscr{D}^{\leq 0}$;

(ii) $B' = B_0[-1]$ tal que $B_0 \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então $B = B'[-n] = B_0[-(n+1)] \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$ e $B[n] = B' \in \mathscr{D}^{\geq 1}$.

De (i) e (ii) temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & B[n] \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ A[n] \arrow[rr] & & X[n] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

onde $A[n] \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $B[n] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$. Agora aplicamos $3n$ vezes o axioma (TR2) de triângulos distinguidos e obtemos o triângulo distinto

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ A \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

onde $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, portanto, $(\mathscr{D}^{\leq n}, \mathscr{D}^{\geq n})$ satisfaz (t3) da definição 3.1.

$\square$

Agora demonstraremos que $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\leq n})$ e $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\geq n})$ e mais adiante veremos que em geral a outra inclusão não é verdadeira, isso nos permitirá definir um tipo de t-estrutura chamada não degenerada.

Proposição 3.7 *Seja* 0 *o objeto zero na categoria* $\mathscr{D}$*, então* $0 \in \mathscr{D}^{\leq n}$ *e* $0 \in \mathscr{D}^{\geq n}$*, para todo* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Demonstração: Pela proposição 3.6, existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & 0 \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$. Por outro lado, pelo axioma TR1 podemos construir o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ 0 \arrow[rr, "1_0"] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Assim, pelo axioma TR3 existe um morfismo $g' : B \to 0$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_0"] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g'"] & A[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\ 0 \arrow[r, "1_0"] & 0 \arrow[r, "1_0"] & 0 \arrow[r] & 0[1] \end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos, em particular $g' \circ g = 1_0$. Analogamente, existe um morfismo $f' : 0 \to A$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1_0"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & 0 \arrow[r, "1_0"] \arrow[d, "1_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0[1] \arrow[d, "{f'[1]}"] \\ A \arrow[r, "f"] & 0 \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0[1] \end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos, assim $f \circ f' = 1_0$. Por conseguinte temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'\circ f"'] & 0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_0"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g\circ g'"] & A[1] \arrow[d, "{(f'\circ f)[1]}"] \\ A \arrow[r, "f"] & 0 \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}$$

Mais ainda, pelo lema 3.5 sabemos que $Hom_{\mathscr{D}}(A, B[-1]) = 0$, pois $B[-1] \in \mathscr{D}^{\geq n+2}$, então pelo lema 1.31 concluímos que $f' \circ f = 1_A$ e $g \circ g' = 1_B$. Portanto, $f : A \longrightarrow 0$ é um isomorfismo e dado que $\mathscr{D}^{\leq n}$ é estritamente plena, então $0 \in \mathscr{D}^{\leq n}$. Assim mesmo, $g' : B \longrightarrow 0$ é isomorfismo e como $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ é estritamente plena, então $0 \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$.

□

A seguir utilizaremos o mesmo raciocínio feito acima para um objeto arbitrário X da categoria $\mathscr{D}$.

Dado o morfismo identidade $1_X : X \longrightarrow X$ na categoria $\mathscr{D}$, então como no item c) da prova do 3.6 podemos construir os triângulos distinguidos seguintes:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ A \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que, A e C são objetos na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, e B e D são objetos na categoria $\mathscr{D}^{\geq n+1}$. Assim temos o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & B \arrow[r] & A[1] \\ C \arrow[r] & X \arrow[r] & D \arrow[r] & C[1] \end{tikzcd}$$

onde $Hom(A, D) = 0$ pelo lema 3.5. Então, pelo lema 1.31 existem os morfismos $\alpha : A \longrightarrow C$ e $\beta : B \longrightarrow D$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"'] \\ C \arrow[r] & X \arrow[r] & D \arrow[r] & C[1] \end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos. Mais ainda, pelo lema 3.5, $Hom(A, D[-1]) = 0$, pois $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $D[-1] \in \mathscr{D}^{\geq n+2}$. Portanto, do lema 1.31 se conclui que α e β são únicos. Analogamente, existem e são únicos morfismos $\gamma : C \longrightarrow A$ e $\delta : D \longrightarrow B$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & C[1] \arrow[d, "\gamma[1]"'] \\ A \arrow[r] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos e a composição desses morfismos de triângulos é

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma\circ\alpha"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\delta\circ\beta"'] & A[1] \arrow[d, "\gamma\circ\alpha[1]"'] \\ A \arrow[r] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}$$

mas é claro que os morfismos $1_A : A \longrightarrow A$ e $1_B : A \longrightarrow B$ fazem o diagrama um morfismo de triângulos, portanto $\gamma \circ \alpha = 1_A$ e $\delta \circ \beta = 1_B$, pela unicidade do teorema 1.31. Analogamente, $\alpha \circ \gamma = 1_C$ e $\beta \circ \delta = 1_D$. Do qual podemos concluir que: α e β são isomorfismos, então, A e B são únicos (salvo isomorfismos). Portanto, a cada $X \in \mathscr{D}$, podemos associar os objetos $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $B \in D^{\geq n+1}$, que denotaremos por $\tau_{\leq n}(X)$ e $\tau_{\geq n+1}(X)$. Além disso, podemos associar os morfismos $i_X : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ e

$p_X : X \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(X)$, os quais são únicos salvo isomorfismos. Da discussão precedente temos a seguinte definição:

Definição 3.8 *Dado $n \in \mathbb{Z}$. A cada $X \in \mathscr{D}$, podemos associar os objetos $\tau_{\leq n}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1}(X) \in D^{\geq n+1}$. Além disso, definimos os morfismos $i_X : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ e $p_X : X \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(X)$, os quais chamaremos de morfismos de truncamento, tais que o triângulo*

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\tau_{\leq n}(X) \arrow[rr, "i_X"] & & X \arrow[ul, "p_X"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido.

A seguir apresentamos um lema que é um refinamento da definição precedente, no qual $i = i_x$ e $p = p_X$ são os morfismos de truncamento.

Lema 3.9 *Para cada $X \in \mathscr{D}$ temos o triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[dl, "r"', "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq n}(X) \arrow[rr, "i"] & & X \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd}$$

onde r é único.

Demonstração: O triângulo distinguido é construído na definição anterior, logo a unicidade do morfismo r segue do lema 1.31. $\square$

Dados os objetos X e Y na categoria $\mathscr{D}$, então como no item c) da prova do 3.6 podemos construir os triângulos distinguidos seguintes:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
A \arrow[rr] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
C \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

tal que, A e C são objetos na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, e B e D são objetos na categoria $\mathscr{D}^{\geq n+1}$. Mais ainda, dado o morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, consideremos o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] & A[1] \\
C \arrow[r] & Y \arrow[r] & D \arrow[r] & C[1]
\end{tikzcd}$$

Desde que $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $D \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, pelo lema 3.5 temos que $Hom(A, D) = 0$. Portanto, a composição dos morfismos $A \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow D$ no diagrama anterior é 0, assim pelo teorema 1.31, o diagrama acima pode ser completado e obtemos um morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & A[1] \arrow[d, "\varphi[1]"'] \\ C \arrow[r] & Y \arrow[r] & D \arrow[r] & C[1] \end{tikzcd}$$

Mais ainda, como $A \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $D[-1] \in \mathscr{D}^{\geq n+2}$, então $Hom(A, D[-1]) = 0$, do qual se conclui aplicando o mesmo teorema que: φ e ψ são únicos. Da discussão acima também temos que os morfismos φ e ψ são únicos, então aplicando a definição 3.8, temos:

Definição 3.10 *Dado $n \in \mathbb{Z}$. Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, chamaremos de morfismos de truncamento aos morfismos $\tau_{\leq n}(f) : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow \tau_{\leq n}(Y)$ e $\tau_{\geq n+1}(f) : \tau_{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(Y)$ das categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ respectivamente, tais que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(f)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f))[1]"] \\ \tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y \arrow[r, "p_Y"] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1] \end{tikzcd}$$

representa um morfismo de triângulos distinguidos.

3.2 Funtores truncamento em categorias trianguladas

Nesta seção iremos construir os funtores induzidos pelos morfismos de truncamento e demonstraremos que eles são adjuntos dos funtores inclusão. Além disso, estudaremos como estes funtores de truncamento se comportam ao compor com o funtor translação da categoria $\mathscr{D}$, mais ainda provaremos que os funtores de truncamento são aditivos. Finalmente, daremos uma caracterização das categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ em termos dos morfismo de truncamento e demonstraremos que tais categorias são fechadas por extensões.

Das definições anteriores podemos construir os funtores naturais [1] $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n+1}$, tais que:

a) A cada objeto $X \in \mathscr{D}$, correspondem os objetos $\tau_{\leq n}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1}(X) \in D^{\geq n+1}$ respectivamente, como na definição 3.8.

[1] Pelo exemplo 3.2, chamaremos estes funtores de **funtores truncamento** correspondentes à *t-estrutura* $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$

b) A cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, correspondem os morfismos $\tau_{\leq n}(f) \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1}(f) \in D^{\geq n+1}$ respectivamente, como na definição 3.10.

A seguir demostraremos que as aplicações $\tau_{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1}$ satisfazem as condições da definição 1.3.

Proposição 3.11 *A cada $n \in \mathbb{Z}$, existem funtores covariantes $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n+1} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n+1}$.*

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

a) Pela definição 3.10, dado o morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, existem morfismos únicos $\tau_{\leq n}(f) : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow \tau_{\leq n}(Y)$ e $\tau_{\geq n+1}(f) : \tau_{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(Y)$ nas categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ respectivamente, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(f)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y \arrow[r, "p_Y"] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1]
\end{tikzcd}$$

representa um morfismo de triângulos distinguidos. Analogamente, dado o morfismo $g : Y \longrightarrow Z$ na categoria $\mathscr{D}$, existem morfismos únicos $\tau_{\leq n}(g) : \tau_{\leq n}(Y) \longrightarrow \tau_{\leq n}(Z)$ e $\tau_{\geq n+1}(g) : \tau_{\geq n+1}(Y) \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(Z)$ nas categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ respectivamente, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(g)"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "g"'] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(g)"] & (\tau_{\leq n}(Y))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(g))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Z) \arrow[r, "i_Z"] & Z \arrow[r, "p_Z"] & \tau_{\geq n+1}(Z) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Z))[1]
\end{tikzcd}$$

representa um morfismo de triângulos distinguidos. Em consequência temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(f)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(g)"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "g"'] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(g)"] & (\tau_{\leq n}(Y))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(g))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Z) \arrow[r, "i_Z"] & Z \arrow[r, "p_Z"] & \tau_{\geq n+1}(Z) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Z))[1]
\end{tikzcd}$$

no qual todos os quadrados comutam. Logo, sendo T um funtor covariante, obtemos o morfismo de triângulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(g)\circ\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "g\circ f"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(g)\circ\tau_{\geq n+1}(f)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(g)\circ\tau_{\leq n}(f))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Z) \arrow[r, "i_Z"] & Z \arrow[r, "p_Z"] & \tau_{\geq n+1}(Z) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Z))[1]
\end{tikzcd}$$

Mas pela definição 3.10, os morfismos $\tau_{\leq n}(g \circ f)$ e $\tau_{\geq n+1}(g \circ f)$ são os únicos que fazem o diagrama anterior comutar, portanto, $\tau_{\leq n}(g \circ f) = \tau_{\leq n}(g) \circ \tau_{\leq n}(f)$ e $\tau_{\geq n+1}(g \circ f) = \tau_{\geq n+1}(g) \circ \tau_{\geq n+1}(f)$.

b) Pela definição 3.10, dado o morfismo $1_X : X \longrightarrow X$ na categoria $\mathscr{D}$, existem morfismos únicos $\tau_{\leq n}(1_X) : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow \tau_{\leq n}(X)$ e $\tau_{\geq n+1}(f) : \tau_{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(X)$ nas categorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ respectivamente, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(1_X)"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "1_X"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(1_X)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(1_X))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] & X \arrow[r, "p_X"] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

representa um morfismo de triângulos distinguidos. Mas é claro que os morfismos $1_{\tau_{\leq n}(X)} : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow \tau_{\leq n}(X)$ e $1_{\tau_{\geq n+1}(X)} : \tau_{\geq n+1}(X) \longrightarrow \tau_{\geq n+1}(X)$, fazem o diagrama anterior comutar, portanto, pela unicidade da definição 3.10, concluímos que: $\tau_{\leq n}(1_X) = 1_{\tau_{\leq n}(X)}$ e $\tau_{\geq n+1}(1_X) = 1_{\tau_{\geq n+1}(X)}$.

□

O próximo lema estabelece que para cada funtor de truncamento existe um funtor adjunto.

Lema 3.12 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:*

(i) $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq n}$ é adjunto à direta do funtor inclusão $I : \mathscr{D}^{\leq n} \longrightarrow \mathscr{D}$;

(ii) $\tau_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n}$ é adjunto à esquerda do funtor inclusão $J : \mathscr{D}^{\geq n} \longrightarrow \mathscr{D}$.

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

(i) Pelo axioma TR1, a cada $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ podemos associar o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X \arrow[rr, "1_X"] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

o qual satisfaz as condições da definição 3.8, pela proposição 3.7, mais ainda, suponhamos $Y \in \mathscr{D}$ e seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo na categoria $\mathscr{D}$ então, pela definição 3.10 temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f))[1]"'] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y \arrow[r] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1]
\end{tikzcd}$$

Logo, sendo que o morfismo $\tau_{\leq n}(f)$ é determinado de maneira única por f tal que, $f = i_Y \circ \tau_{\leq n}(f)$, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) \\ f & \longmapsto & \tau_{\leq n}(f) \end{array}$$

esta bem definido. Agora, definamos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) \\ g & \longmapsto & i_Y \circ g \end{array}$$

Logo, determinamos as compostas:

a)

$$\begin{array}{rcl} \Psi \circ \Phi : Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) \\ f & \longmapsto & i_Y \circ \tau_{\leq n}(f) = f \end{array}$$

Portanto, $\Psi \circ \Phi = 1_{Hom_{\mathscr{D}}(X,Y)}$.

b)

$$\begin{array}{rcl} \Phi \circ \Psi : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) \\ g & \longmapsto & \tau_{\leq n}(i_Y \circ g) \end{array}$$

Onde $\tau_{\leq n}(i_Y \circ g) : X \longrightarrow \tau_{\leq n}(Y)$ é o único morfismo que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(i_Y \circ g)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "i_Y \circ g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(i_Y \circ g))[1]"] \\ \tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y \arrow[r] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1] \end{tikzcd}$$

Mas, é claro que $g : X \longrightarrow \tau_{\leq n}(Y)$ também faz o diagrama comutar, portanto, $\tau_{\leq n}(i_Y \circ g) = g$ e $\Phi \circ \Psi = 1_{Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y))}$.

De a) e b) concluímos que Φ é uma bijeção e Ψ é o inverso.

Agora, consideremos a bijeção

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(I(X),Y) \\ h & \longmapsto & i_Y \circ h \end{array}$$

tal que $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $Y \in \mathscr{D}$. Então:

I) Se $\alpha : X \longrightarrow X'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) \arrow[r, "\Psi_{X,Y}"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(X), Y) \\ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X', \tau_{\leq n}(Y)) \arrow[r, "\Psi_{X',Y}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\_,\tau_{\leq n}(Y))(\alpha)"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(X'), Y) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(\_,Y)(I(\alpha))"'] \end{tikzcd}$$

De fato, seja $g \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X', \tau_{\leq n}(Y))$, então

(1) $\Psi_{X,Y}(Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\_, \tau_{\leq n}(Y))(\alpha)(g)) = \Psi_{X,Y}(g \circ \alpha) = i_Y \circ (g \circ \alpha)$

(2) $Hom_{\mathscr{D}}(\_, Y)(I(\alpha))(\Psi_{X',Y}(g)) = Hom_{\mathscr{D}}(\_, Y)(I(\alpha))(i_Y \circ g) = (i_Y \circ g) \circ \alpha$

Segue de (1) e (2) $\Psi_{X,Y} \circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\alpha, \tau_{\leq n}(Y)) = Hom_{\mathscr{D}}(I(\alpha), Y) \circ \Psi_{X',Y}$

II) Se $\beta : Y \longrightarrow Y'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) \arrow[r, "\Psi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X,\_)(\tau_{\leq n}(\beta))"'] & Hom_{\mathscr{D}}(I(X), Y) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(I(X),\_)(\beta)"] \\ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y')) \arrow[r, "\Psi_{X,Y'}"] & Hom_{\mathscr{D}}(I(X), Y') \end{tikzcd}$$

De fato, seja $f \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y))$, então

1) $\Psi_{X,Y'}(Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \_)(\tau_{\leq n}(\beta))(f)) = \Psi_{X,Y'}(\tau_{\leq n}(\beta) \circ f) = i_{Y'} \circ (\tau_{\leq n}(\beta) \circ f)$

2) $Hom_{\mathscr{D}}(I(X), \_)(\beta)(\Psi_{X,Y}(f)) = Hom_{\mathscr{D}}(I(X), \_)(\beta)(i_Y \circ f) = \beta \circ (i_Y \circ f)$

3) Da definição 3.10, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(\beta)"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ \tau_{\leq n}(Y') \arrow[r, "i_{Y'}"] & Y' \end{tikzcd}$$

Assim, de 1) e 2) e 3) $\Psi_{X,Y'} \circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(\beta)) = Hom_{\mathscr{D}}(I(X), \beta) \circ \Psi_{X,Y}$

Portanto, de I) e II) $\tau_{\leq n}$ é adjunto à direta do funtor I.

(ii) A cada $Y \in \mathscr{D}^{\geq n}$, podemos associar o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ 0 \arrow[rr] & & Y \arrow[ul, "1_Y"'] \end{tikzcd}$$

o qual satisfaz as condições da definição 3.8, mais ainda, suponhamos $X \in \mathscr{D}$ e seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo na categoria $\mathscr{D}$ então, pela definição 3.10 temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(f)"'] & (\tau_{\leq n-1}(X))[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Logo, dado que o morfismo $\tau_{\geq n}(f)$ é determinado de maneira única por f tal que, $f = \tau_{\geq n}(f) \circ q_X$, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y) \\ f & \longmapsto & \tau_{\geq n}(f) \end{array}$$

esta bem definido.

Agora, definamos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) \\ g & \longmapsto & g \circ q_X \end{array}$$

Logo, determinamos as compostas:

a)
$$\begin{array}{rcl} \Psi \circ \Phi : Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) \\ f & \longmapsto & \tau_{\geq n}(f) \circ q_X = f \end{array}$$

Portanto, $\Psi \circ \Phi = 1_{Hom_{\mathscr{D}}(X,Y)}$.

b)
$$\begin{array}{rcl} \Phi \circ \Psi : Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y) \\ g & \longmapsto & \tau_{\geq n}(g \circ q_X) \end{array}$$

Onde $\tau_{\geq n}(g \circ q_X) : \tau_{\geq n}(X) \longrightarrow Y$ é o único morfismo que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "g \circ q_X"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(g \circ q_X)"'] & (\tau_{\leq n-1}(X))[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mas, é claro que $g : \tau_{\geq n}(X) \longrightarrow Y$ também faz o diagrama comutar, portanto, $\tau_{\geq n}(g \circ q_X) = g$ e $\Phi \circ \Psi = 1_{Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y)}$.

Por conseguinte, de a) e b) concluímos que Φ é uma bijeção e Ψ é o inverso.

Agora, consideremos a bijeção

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X),Y) \\ h & \longmapsto & \tau_{\geq n}(h) \end{array}$$

tal que $X \in \mathscr{D}$ e $Y \in \mathscr{D}^{\geq n}$. Então:

I) Se $\alpha : X \longrightarrow X'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y)) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), Y) \\
Hom_{\mathscr{D}}(X', J(Y)) \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(_, J(Y))(\alpha)"] & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X'), Y) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(_, Y)(\tau_{\geq n}(\alpha))"']
\end{tikzcd}$$

De fato, seja $g \in Hom_{\mathscr{D}}(X', J(Y))$, então

(1) $\Phi_{X,Y}(Hom_{\mathscr{D}}(\_, J(Y))(\alpha)(g)) = \Phi_{X,Y}(g \circ \alpha) = \tau_{\geq n}(g \circ \alpha)$

(2) $Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\_, Y)(\tau_{\geq n}(\alpha))(\Phi_{X',Y}(g)) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\_, Y)(\tau_{\geq n}(\alpha))(\tau_{\geq n}(g)) = \tau_{\geq n}(g) \circ \tau_{\geq n}(\alpha)$

Assim, pela proposição 3.11 e (1) e (2) concluímos que:

$$\Phi_{X,Y} \circ Hom_{\mathscr{D}}(\alpha, J(Y)) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(\alpha), Y) \circ \Phi_{X',Y}$$

II) Se $\beta : Y \longrightarrow Y'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\geq n}$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y)) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(X, _)(J(\beta))"'] & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), Y) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), _)(\beta)"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y')) \arrow[r, "\Phi_{X,Y'}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), Y')
\end{tikzcd}$$

De fato, seja $f \in Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y))$, então

1) $\Phi_{X,Y'}(Hom_{\mathscr{D}}(X, \_)(J(\beta))(f)) = \Phi_{X,Y'}(J(\beta) \circ f) = \tau_{\geq n}(\beta \circ f) = \tau_{\geq n}(\beta) \circ \tau_{\geq n}(f)$

2) $Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), \_)(\beta)(\Phi_{X,Y}(f)) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), \_)(\beta)(\tau_{\geq n}(f)) = \beta \circ \tau_{\geq n}(f)$

3) Da definição 3.10, temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "\beta"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\beta)"'] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "1'_Y"] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Assim, de 1) e 2) e 3) concluímos que:

$$\Psi_{X,Y'} \circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(\beta)) = Hom_{\mathscr{D}}(X, \beta) \circ \Psi_{X,Y}$$

Portanto, de I) e II) $\tau_{\geq n}$ é adjunto à esquerda do funtor J.

□

Proposição 3.13 *Para cada $X \in \mathscr{D}$ temos:*

a) Como Ψ é uma bijeção e funtorial em cada variável, temos que $i_X : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ é um morfismo adjunto (ver definição 1.10).

b) Assim mesmo, temos que $q_X : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ é um morfismo adjunto, pois Φ é uma bijeção e funtorial em cada variável.

Demonstração:

a) No item i) da prova do lema 3.12, construímos o isomorfismo bi-funtorial

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X, \tau_{\leq n}(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(I(X), Y) \\ h & \longmapsto & i_Y \circ h \end{array}$$

Assim em particular, para cada $Y \in \mathscr{D}$ e $X = \tau_{\leq n}(Y)$, temos o isomorfismo

$$\Psi = \Psi_{\tau_{\leq n}(Y),Y} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(Y), \tau_{\leq n}(Y)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(I(\tau_{\leq n}(Y)), Y)$$

então, pela proposição 1.9 $\Psi(1_{\tau_{\leq n}(Y)}) : I(\tau_{\leq n}(Y)) \longrightarrow Y$ é um morfismo adjunto. Mas, $\Psi(1_{\tau_{\leq n}(Y)}) = i_Y \circ 1_{\tau_{\leq n}(Y)} = i_Y$ e $I(\tau_{\leq n}(Y)) = \tau_{\leq n}(Y)$.

b) No item ii) da prova do lema 3.12, construímos o isomorfismo bi-funtorial

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{X,Y} : Hom_{\mathscr{D}}(X, J(Y)) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), Y) \\ h & \longmapsto & \tau_{\geq n}(h) \end{array}$$

Assim em particular, para cada $X \in \mathscr{D}$ e $Y = \tau_{\geq n}(X)$, temos o isomorfismo

$$\Phi = \Phi_{X,\tau_{\geq n}(X)} : Hom_{\mathscr{D}}(X, J(\tau_{\geq n}(X))) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}^{\geq n}}(\tau_{\geq n}(X), \tau_{\geq n}(X))$$

então, pela proposição 1.9 $\Phi^{-1}(1_{\tau_{\geq n}(X)}) : X \longrightarrow J(\tau_{\geq n}(X))$ é um morfismo adjunto. Mas, $\Phi^{-1}(1_{\tau_{\geq n}(X)}) = \Psi(1_{\tau_{\geq n}(X)}) = 1_{\tau_{\geq n}(X)} \circ q_X = q_X$ e $J(\tau_{\geq n}(X)) = \tau_{\geq n}(X)$.

□

No próximo lema ficam mais claras as relações obtidas na proposição 3.3 e demonstra que os funtores de truncamento não são funtores exatos.

Lema 3.14 *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, os funtores*

a) $\tau_{\leq n} \circ T$ e $T \circ \tau_{\leq n+1}$ são isomorfos.

b) $\tau_{\geq n} \circ T$ e $T \circ \tau_{\geq n+1}$ são isomorfos.

Demonstração: Seja A um objeto na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$ e X um objeto em $\mathscr{D}$. Então, $A[-1] \in \mathscr{D}^{\leq n+1}$.

a) Do item i) do lema 3.12, temos que

$$\Psi_{A,X[1]} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, \tau_{\leq n}(X[1])) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1])$$

é uma bijeção, a qual denotaremos por simplicidade de $\Psi_{A,X}$. Mais ainda, dado o morfismo $f : A \longrightarrow B$ na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, então, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\Psi_{A,X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(B, \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\Psi_{B,X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(f,\tau_{\leq n}(X[1]))"] & Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f,X[1])"']
\end{tikzcd}$$

Aplicando novamente o item i) do lema 3.12, para $n+1$ temos a bijeção

$$\Psi_{A[-1],X} : Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(A[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X)$$

Mais ainda, dado que $f[-1] : A[-1] \longrightarrow B[-1]$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\leq n+1}$, então, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(A[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[r, "\Psi_{A[-1],X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(B[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[r, "\Psi_{B[-1],X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(f[-1],\tau_{\leq n+1}(X))"] & Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f[-1],X)"']
\end{tikzcd}$$

Assim, chamando de $\Phi_{A,X}$ à inversa de $\Psi_{A[-1],X}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \arrow[r, "\Phi_{A,X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(A[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \\
Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \arrow[r, "\Phi_{B,X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f[-1],X)"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(B[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(f[-1],\tau_{\leq n+1}(X))"']
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, dado que T é fiel e pleno, para todo X e Y em $\mathscr{D}$, temos a bijeção

$$\begin{array}{rccc}
\eta_{X,Y} : & Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}}(X[1], Y[1]) \\
& g & \longmapsto & g[1]
\end{array}$$

Mais ainda, se $h : X \longrightarrow X'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}$, então o quadrado seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] & Hom_{\mathscr{D}}(X[1], Y[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}}(X', Y) \arrow[r, "\eta_{X',Y}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(h,Y)"] & Hom_{\mathscr{D}}(X'[1], Y[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(h[1],Y[1])"']
\end{tikzcd}$$

De fato, seja $\alpha \in Hom_{\mathscr{D}}(X', Y)$, então

1) $[\eta_{X,Y} \circ Hom_{\mathscr{D}}(h, Y)](\alpha) = \eta_{X,Y}(Hom_{\mathscr{D}}(h, Y)(\alpha)) = \eta_{X,Y}(\alpha \circ h) = (\alpha \circ h)[1]$
2) $[Hom_{\mathscr{D}}(h[1], Y[1]) \circ \eta_{X',Y}](\alpha) = Hom_{\mathscr{D}}(h[1], Y[1])(\alpha[1]) = \alpha[1] \circ h[1] = (\alpha \circ h)[1]$
   Portanto, de 1) e 2), temos $\eta_{X,Y} \circ Hom_{\mathscr{D}}(h, Y) = Hom_{\mathscr{D}}(h[1], Y[1]) \circ \eta_{X',Y}$.

Em particular, para $X = A[-1]$ e $Y = X$ temos a bijeção

$$\eta_{A[-1],X} : Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1]).$$

Mais ainda, se $h = f[-1]$ e $X' = B[-1]$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \arrow[r, "\eta_{A[-1],X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1]) \\ Hom_{\mathscr{D}}(B[-1], X) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f[-1],X)"] \arrow[r, "\eta_{B[-1],X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(B, X[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f,X[1])"'] \end{tikzcd}$$

Assim, chamando de $\Omega_{A,X}$ à inversa de $\eta_{A[-1],X}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(A, X[1]) \arrow[r, "\Omega_{A,X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], X) \\ Hom_{\mathscr{D}}(B, X[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f,X[1])"] \arrow[r, "\Omega_{B,X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(B[-1], Y) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f[-1],X)"'] \end{tikzcd}$$

E, no caso $X = A[-1]$ e $Y = \tau_{n+1}(X)$ temos a bijeção

$$\eta_{A[-1],\tau_{n+1}(X)} : Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], \tau_{n+1}(X)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(A, (\tau_{n+1}(X))[1]).$$

Mais ainda, se $h = f[-1]$ e $X' = B[-1]$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(A[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[r, "\eta_{A[-1],\tau_{\leq n+1}(X)}"] & Hom_{\mathscr{D}}(A, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \\ Hom_{\mathscr{D}}(B[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f[-1],\tau_{\leq n+1}(X))"] \arrow[r, "\eta_{B[-1],\tau_{\leq n+1}(X)}"] & Hom_{\mathscr{D}}(B, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f,(\tau_{\leq n+1}(X))[1])"'] \end{tikzcd}$$

Assim, denotando de $\Theta_{A,X}$ a $\eta_{A[-1],\tau_{n+1}(X)}$, dado que $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\leq n+1}$ são subcategorias plenas da categoria $\mathscr{D}$, e $f[-1]$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\leq n+1}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(A[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[r, "\Theta_{A,X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \\ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(B[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(f[-1],\tau_{\leq n+1}(X))"] \arrow[r, "\Theta_{B,X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(B, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(f,(\tau_{\leq n+1}(X))[1])"'] \end{tikzcd}$$

Em consequência, dado que a composta de bijeções é bijeção, temos que $\varphi_{A,X} = \Theta_{A,X} \circ$

$\Phi_{A,X} \circ \Omega_{A,X} \circ \Psi_{A,X}$ é uma bijeção de $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, \tau_{\leq n}(X[1]))$ em $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, (\tau_{\leq n+1}(X))[1])$
Mais ainda, se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{A,X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(B, \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{B,X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(f, \tau_{\leq n}(X[1]))"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(B, (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(f, (\tau_{\leq n+1}(X))[1])"']
\end{tikzcd}$$

comuta.
Em particular, para $A = (\tau_{\leq n+1}(X))[1]$ temos a bijeção

$$Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], \tau_{\leq n}(X[1])) \xrightarrow{\varphi_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1],X}} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], (\tau_{\leq n+1}(X))[1])$$

Então, existe $\gamma \in Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], \tau_{\leq n}(X[1]))$ tal que $\varphi_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1],X}(\gamma) = 1_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1]}$, mais ainda, para $B = \tau_{\leq n}(X[1])$ e $f = \gamma$, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1],X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\gamma, \tau_{\leq n}(X[1]))"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\gamma, (\tau_{\leq n+1}(X))[1])"']
\end{tikzcd}$$

Logo, definamos $\alpha = \varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}(1_{\tau_{\leq n}(X[1])})$, temos que $\alpha \circ \gamma = 1_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1]}$. Assim mesmo temos a bijeção

$$Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(X[1])) \xrightarrow{\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), (\tau_{\leq n+1}(X))[1])$$

e para $A = \tau_{\leq n}(X[1])$ e $B = (\tau_{\leq n+1}(X))[1]$ e $f = \alpha$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], \tau_{\leq n}(X[1])) \arrow[r, "\varphi_{(\tau_{\leq n+1}(X))[1],X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\alpha, \tau_{\leq n}(X[1]))"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}((\tau_{\leq n+1}(X))[1], (\tau_{\leq n+1}(X))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\alpha, (\tau_{\leq n+1}(X))[1])"']
\end{tikzcd}$$

então, $\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}(\gamma \circ \alpha) = \alpha = \varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}(1_{\tau_{\leq n}(X[1])})$, assim, $\gamma \circ \alpha = 1_{\tau_{\leq n}(X[1])}$. Portanto, $\alpha : \tau_{\leq n}(X[1]) \longrightarrow (\tau_{\leq n+1}(X))[1]$ é isomorfismo.
Agora suponhamos que Y é outro objeto da categoria $\mathscr{D}$ e que $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo em $\mathscr{D}$. Definindo $\beta = \varphi_{\tau_{\leq n}(Y[1]),Y}(1_{\tau_{\leq n}(Y[1])})$, demonstraremos que o quadrado

$$\begin{tikzcd}
(\tau_{\leq n} \circ T)(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\tau_{\leq n} \circ T)(f)"'] & (T \circ \tau_{\leq n+1})(X) \arrow[d, "(T \circ \tau_{\leq n+1})(f)"] \\
(\tau_{\leq n} \circ T)(Y) \arrow[r, "\beta"] & (T \circ \tau_{\leq n+1})(Y)
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato, pela definição 3.10 temos o morfismo $\tau_{\leq n}(f[1]) : \tau_{\leq n}(X[1]) \longrightarrow \tau_{\leq n}(Y[1])$ na categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$ tal que o quadrado

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X[1]) \arrow[r, "i_{X[1]}"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f[1])"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Y[1]) \arrow[r, "i_{Y[1]}"] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

comuta. Então, para $A = \tau_{\leq n}(X[1])$ e $B = \tau_{\leq n}(Y[1])$ temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(Y[1])) \arrow[r, "\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), (\tau_{\leq n+1}(Y))[1]) \\
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(Y[1]), \tau_{\leq n}(Y[1])) \arrow[r, "\varphi_{\tau_{\leq n}(Y[1]),Y}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(f[1]),\tau_{\leq n}(Y[1]))"] & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(Y[1]), (\tau_{\leq n+1}(Y))[1]) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(f[1]),(\tau_{\leq n+1}(Y))[1])"']
\end{tikzcd}$$

Assim em particular temos que $(\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y} \circ Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(f[1]), \tau_{\leq n}(Y[1]))(1_{\tau_{\leq n}(Y[1])}) = (Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(f[1]), (\tau_{\leq n+1}(Y))[1]) \circ \varphi_{\tau_{\leq n}(Y[1])})(1_{\tau_{\leq n}(Y[1])})$

Por conseguinte, $\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}(\tau_{\leq n}(f[1])) = \beta \circ \tau_{\leq n}(f[1])$.

Por outro lado, temos que

$\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}(\tau_{\leq n}(f[1])) = (\Theta_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y} \circ \Phi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y} \circ \Omega_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y} \circ \Psi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y})(\tau_{\leq n}(f[1]))$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(Y[1])) & \xrightarrow{\Psi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), Y[1]) \\
\tau_{\leq n}(f[1]) & \longmapsto & i_{Y[1] \circ \tau_{\leq n}(f[1])} = f[1] \circ i_{X[1]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), Y[1]) & \xrightarrow{\Omega_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}} & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], Y)) \\
f[1] \circ i_{X[1]} & \longmapsto & (f[1] \circ i_{X[1]})[-1] = f \circ (i_{X[1]}[-1])
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], Y)) & \xrightarrow{\Phi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}} & Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], \tau_{\leq n+1}(Y)) \\
f \circ (i_{X[1]}[-1]) & \longmapsto & \tau_{\leq n+1}(f) \circ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], \tau_{\leq n+1}(Y)) & \xrightarrow{\Theta_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n+1}(Y)[1]) \\
\tau_{\leq n+1}(f) \circ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1]) & \longmapsto & \tau_{\leq n+1}(f)[1] \circ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])[1]
\end{array}$$

Logo, $\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),Y}(\tau_{\leq n}(f[1])) = \tau_{\leq n+1}(f)[1] \circ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])[1]$. Do qual deduzimos que: $\tau_{\leq n+1}(f)[1] \circ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])[1] = \beta \circ \tau_{\leq n}(f[1])$

Por outro lado, temos que

$\varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}(1_{\tau_{\leq n}(X[1])}) = (\Theta_{\tau_{\leq n}(X[1]),X} \circ \Phi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X} \circ \Omega_{\tau_{\leq n}(X[1]),X} \circ \Psi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X})(1_{\tau_{\leq n}(X[1])})$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n}(X[1])) & \xrightarrow{\Psi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), X[1]) \\
1_{\tau_{\leq n}(X[1])} & \longmapsto & i_{X[1]} \circ 1_{\tau_{\leq n}(X[1])} = i_{X[1]}
\end{array}$$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), X[1]) &\xrightarrow{\Omega_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], X)) \\ i_{X[1]} &\longmapsto (i_{X[1]})[-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], X)) &\xrightarrow{\Phi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) \\ i_{X[1]}[-1] &\longmapsto \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{D}^{\leq n+1}}(\tau_{\leq n}(X[1])[-1], \tau_{\leq n+1}(X)) &\xrightarrow{\Theta_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}} Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq n}(X[1]), \tau_{\leq n+1}(X)[1]) \\ \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1]) &\longmapsto \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])[1] \end{aligned}$$

Assim, $\alpha = \varphi_{\tau_{\leq n}(X[1]),X}(1_{\tau_{\leq n}(X[1])}) = \tau_{\leq n+1}(i_{X[1]}[-1])[1]$. Portanto, $\tau_{\leq n+1}(f)[1] \circ \alpha = \beta \circ \tau_{\leq n}(f[1])$, isto é $(T \circ \tau_{\leq n+1})(f) \circ \alpha = \beta \circ (\tau_{\leq n} \circ T)(f)$, para todo morfismo f na categoria $\mathscr{D}$.

□

Agora demonstraremos que os funtores truncamento caraterizam a *t-estrutura*.

Lema 3.15 *Seja $X \in \mathscr{D}$. Então:*

a) As seguintes condições são equivalentes:

- *(i)* $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$;
- *(ii)* $i : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ *é isomorfismo;*
- *(iii)* $\tau_{\geq n+1}(X) = 0$.

b) As seguintes condições são equivalentes:

- *(i)* $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$;
- *(ii)* $q : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ *é isomorfismo;*
- *(iii)* $\tau_{\leq n-1}(X) = 0$.

Demonstração: Seja X um objeto da categoria $\mathscr{D}$.

a) (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Dado $n \in \mathbb{Z}$, pela definição 3.8, existe um triângulo distinguido da forma

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq n}(X) \arrow[rr, "i"] & & X \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

Assim pelo lema 1.30, $\tau_{\geq n+1}(X) = 0$ se e somente se, i é isomorfismo. Portanto, (ii) e (iii) são equivalentes.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Dado que $\tau_{\leq n}(X)$ é um objeto na subcategoria estritamente plena $\mathscr{D}^{\leq n}$ de

$\mathscr{D}$ e i é isomorfismo, então $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$.

(i)$\Rightarrow$ (ii). Se $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Então pela definição 3.10, temos que $\tau_{\leq n}(1_X) = i$ e como $\tau_{\leq n}$ é funtor, concluímos que i é isomorfismo.

b) (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Dado $n-1 \in \mathbb{Z}$, pela definição 3.8, existe um triângulo distinguido da forma

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\geq n}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[rr, "j"] & & X \arrow[ul, "q"']
\end{tikzcd}$$

Então, pelo axioma de rotação, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
& (\tau_{\leq n-1}(X))[1] \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "q"] & & \tau_{\geq n}(X) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Assim pelo lema 1.30, $(\tau_{\leq n-1}(X))[1] = 0$ se e somente se, q é isomorfismo, e como T é uma equivalência de categorias então, (ii) e (iii) são equivalentes.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Dado que $\tau_{\geq n}(X)$ é um objeto na subcategoria estritamente plena $\mathscr{D}^{\geq n}$ de $\mathscr{D}$ e q é isomorfismo, então $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$.

(i)$\Rightarrow$ (ii). Se $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & 0 \arrow[d] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r] & X \arrow[r, "q"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

Então pela definição 3.10, temos $\tau_{\geq n}(1_X) = q$ e como $\tau_{\geq n}$ é funtor, concluímos que q é isomorfismo.

□

De acordo com a definição 1.2.6 dada por [BBD82, p. 28], o lema a seguir estabelece que as subcategorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ da categoria $\mathscr{D}$, são estáveis por extensões.

Lema 3.16 *Seja*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

um triângulo distinguido em $\mathscr{D}$.

(i) Se X e Z são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$, então Y é um objeto da categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$.

(ii) Se X e Z são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\geq n}$, então Y é um objeto da categoria $\mathscr{D}^{\geq n}$.

Demonstração:

(i) Seja U um objeto na categoria $\mathscr{D}$. Então pela proposição 1.20, temos a sequência exata longa de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(Z,U) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(Y,U) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(X,U) \longrightarrow \cdots .$$

Em particular se $U = \tau_{\geq n+1}(Y) \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$, temos que $Hom_{\mathscr{D}}(X,U) = Hom_{\mathscr{D}}(Z,U) = 0$ pelo 3.5, pois $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $Z \in \mathscr{D}^{\leq n}$, por conseguinte $Hom_{\mathscr{D}}(Y,U) = 0$. Então pelo lema 3.12 temos que $0 = Hom_{\mathscr{D}}(Y,U) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq n+1}}(\tau_{\geq n+1}(Y),U) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq n+1}}(U,U)$. Mas, $Hom_{\mathscr{D}^{\geq n+1}}(U,U) = Hom_{\mathscr{D}}(U,U)$ pois $\mathscr{D}^{\geq n+1}$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{D}$, isto é, o único elemento do grupo $Hom_{\mathscr{D}}(U,U)$ é o morfismo nulo, mas 1_U pertence a este grupo, então, pela definição de morfismo nulo, existe um único morfismo $\alpha : U \longrightarrow 0$ e um único morfismo $\beta : 0 \longrightarrow U$, tal que $1_U = \beta \circ \alpha$, e como $\alpha \circ \beta \in Hom_{\mathscr{D}}(0,0)$, então $\alpha \circ \beta = 1_0$. Portanto, α é um isomorfismo, assim $\tau_{\geq n+1}(Y) = U = 0$ e pelo lema 3.15, concluímos $Y \in \mathscr{D}^{\leq n}$.

(ii) Seja U um objeto na categoria $\mathscr{D}$. Então pela proposição 1.20, temos a sequência exata longa de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U,X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U,Z) \longrightarrow \cdots .$$

Em particular se $U = \tau_{\leq n-1}(Y) \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$, temos que $Hom_{\mathscr{D}}(U,X) = Hom_{\mathscr{D}}(U,Z) = 0$ pelo 3.5, pois $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ e $Z \in \mathscr{D}^{\geq n}$, por conseguinte $Hom_{\mathscr{D}}(U,Y) = 0$. Então pelo lema 3.12 temos que $0 = Hom_{\mathscr{D}}(U,Y) = Hom_{\mathscr{D}^{\leq n-1}}(U,\tau_{\leq n-1}(Y)) = Hom_{\mathscr{D}^{\leq n-1}}(U,U)$. Mas, $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n-1}}(U,U) = Hom_{\mathscr{D}}(U,U)$ pois $\mathscr{D}^{\leq n-1}$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{D}$, isto é, o único elemento do grupo $Hom_{\mathscr{D}}(U,U)$ é o morfismo nulo, mas 1_U pertence a este grupo, então, pela definição de morfismo nulo, existe um único morfismo $\alpha : U \longrightarrow 0$ e um único morfismo $\beta : 0 \longrightarrow U$, tal que $1_U = \beta \circ \alpha$, e como $\alpha \circ \beta \in Hom_{\mathscr{D}}(0,0)$, então $\alpha \circ \beta = 1_0$. Portanto, α é um isomorfismo, assim $\tau_{\leq n-1}(Y) = U = 0$ e pelo lema 3.15, concluímos $Y \in \mathscr{D}^{\geq n}$.

$\square$

A seguir provaremos que as $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ tem estrutura aditiva, as quais sabemos que são plenas e fechadas por extensões, porém pela proposição 3.3 estas categorias não são subcategorias trianguladas da categoria $\mathscr{D}$, ver definição [Nee01, p. 60]. Mas no próximo capítulo construiremos subcategorias trianguladas de $\mathscr{D}$ que contém tais subcategorias.

Lema 3.17 *Seja $n \in \mathbb{Z}$.*

(i) As subcategorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ são subcategorias aditivas de $\mathscr{D}$ (ver definição 1.11).

(ii) Os funtores $\tau_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq n}$ e $\tau_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n}$ são aditivos.

Demonstração: Fixemos $n \in \mathbb{Z}$.

(i) Demonstraremos somente que $\mathscr{D}^{\leq n}$ é uma subcategoria aditiva de $\mathscr{D}$, pois o caso $\mathscr{D}^{\geq n}$ é análogo.

(A1) Pela proposição 3.6, temos que $\mathscr{D}^{\leq n}$ é uma subcategoria plena da categoria aditiva $\mathscr{D}$, então para cada $X, Y \in \mathscr{D}^{\leq n}$, se cumpre que $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X,Y) = Hom_{\mathscr{D}}(X,Y)$, logo $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X,Y)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(Y,Z) \times Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(X,Z)$ é bilinear sobre os inteiros.

(A2) Seja 0 o objeto zero da categoria $\mathscr{D}$, então $Hom_{\mathscr{D}}(X,0) = 0$ e $Hom_{\mathscr{D}}(0,X) = 0$, para cada objeto $X \in \mathscr{D}$, e como $0 \in \mathscr{D}^{\leq n}$, pela proposição 3.7, então $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(U,0) = Hom_{\mathscr{D}}(U,0) = 0$ e $Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(0,U) = Hom_{\mathscr{D}}(0,U) = 0$, para cada objeto $U \in \mathscr{D}^{\leq n}$.

(A3) Seja X e Y objetos na categoria $\mathscr{D}$. Pelo corolário 1.27, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & X \oplus Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Então, aplicando o lema 3.16, $X \oplus Y \in \mathscr{D}^{\leq n}$ sempre que, X e Y pertençam à categoria $\mathscr{D}^{\leq n}$.

(ii) Sejam f e g morfismos de X para Y na categoria $\mathscr{D}$. Então, $\tau_{\leq n}(f)$ e $\tau_{\leq n}(g)$ e $\tau_{\geq n+1}(f)$ e $\tau_{\geq n+1}(g)$ são os únicos morfismos tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(f)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f))[1]"] \\ \tau_{\leq n}(Y) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(g)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(g)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(g))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1]
\end{tikzcd}$$

são morfismos de triângulos. Isto implica que

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)+\tau_{\leq n}(g)"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f+g"'] & \tau_{\geq n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq n+1}(f)+\tau_{\geq n+1}(g)"] & (\tau_{\leq n}(X))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq n}(f)+\tau_{\leq n}(g))[1]"] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \tau_{\geq n+1}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq n}(Y))[1]
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos. Portanto, $\tau_{\leq n}(f) + \tau_{\leq n}(g) = \tau_{\leq n}(f + g)$ e $\tau_{\geq n+1}(f) + \tau_{\geq n+1}(g) = \tau_{\geq n+1}(f + g)$, pela definição 3.10. Do qual concluímos que a aplicação $\tau_{\leq n} : Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(\tau_{\leq n}(X), \tau_{\leq n}(Y))$ é um homomorfismo de grupos, assim mesmo a aplicação $\tau_{\geq n+1} : Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}^{\geq n+1}}(\tau_{\geq n+1}(X), \tau_{\geq n+1}(Y))$ é um homomorfismo de grupos.

□

3.3 Composição de funtores truncamento

Nesta seção estudaremos as composições dos funtores de truncamento.

Lema 3.18 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m < n$. Então: $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n} \cong \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}(X) \cong 0$.*

Demonstração: Seja X um objeto na categoria $\mathscr{D}$.

a) Por hipótese, $m < n$ o que equivale a $m \leq n - 1$, então pela proposição 3.3, $\mathscr{D}^{\leq m} \subset \mathscr{D}^{\leq n-1}$, logo $\tau_{\leq m}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$, portanto, $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) = 0$ pelo lema 3.15. Assim, o funtor $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$ aplicado ao morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, induz o morfismo $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n})(f) : \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n})(X) \longrightarrow \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n})(Y)$, então, $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n})(f) = 1_0 = 0$.

b) Por hipótese, $m < n$ ou equivalentemente $m + 1 \leq n$, então pela proposição 3.3, $\mathscr{D}^{\geq n} \subset \mathscr{D}^{\geq m+1}$, logo $\tau_{\geq n}(X) \in \mathscr{D}^{\geq m+1}$, portanto, $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) = 0$ pelo lema 3.15. Assim, o funtor $\tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$ aplicado ao morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, induz o morfismo $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m})(f) : \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m})(X) \longrightarrow \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m})(Y)$, então, $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m})(f) = 1_0 = 0$.

□

Lema 3.19 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $m \leq n$. Então:*

(i) $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\leq n} \cong \tau_{\leq n} \circ \tau_{\leq m} \cong \tau_{\leq m}$;

(ii) $\tau_{\geq m} \circ \tau_{\geq n} \cong \tau_{\geq n} \circ \tau_{\geq m} \cong \tau_{\geq n}$.

Demonstração:

(i) Da proposição 3.3 seque que $\mathscr{D}^{\leq m} \subset \mathscr{D}^{\leq n}$, pois $m \leq n$. Portanto, $\tau_{\leq m}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n}$, assim aplicando o lema 3.15, $\eta_X : \tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq m}(X)$ é isomorfismo. Agora aplicando o funtor $\tau_{\leq m}$ ao morfismo $f : X \longrightarrow Y$ da categoria $\mathscr{D}$, temos o morfismo $\tau_{\leq m}(f) : \tau_{\leq m}(X) \longrightarrow \tau_{\leq m}(Y)$ na categoria $\mathscr{D}^{\leq m}$, então pela definição 3.10 existe um único morfismo $\tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(f)) : \tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(Y))$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(f))"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[d, "\tau_{\leq m}(f)"] \\
\tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(Y)) \arrow[r, "\eta_Y"] & \tau_{\leq m}(Y)
\end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $\eta : \tau_{\leq n} \circ \tau_{\leq m} \longrightarrow \tau_{\leq m}$ é um isomorfismo funtorial.
Por outro lado, pela definição 3.10, dados $X, Y \in \mathscr{D}$, se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo em $\mathscr{D}$ então o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq n}(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\tau_{\leq n}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Além disso, pelo proposição 3.11 temos que o funtor $\tau_{\leq m} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\leq m}$ é um funtor covariante, então aplicando este ao quadrado anterior, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)) \arrow[r, "\tau_{\leq m}(i_X)"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(f))"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[d, "\tau_{\leq m}(f)"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(Y)) \arrow[r, "\tau_{\leq m}(i_Y)"] & \tau_{\leq m}(Y)
\end{tikzcd}$$

Assim basta demonstrar que $\sigma_X = \tau_{\leq m}(i_X)$ é isomorfismo, para que possamos concluir que $\sigma : \tau_{\leq m} \circ \tau_{\leq n} \longrightarrow \tau_{\leq m}$ é um isomorfismo funtorial.
Vamos então demonstrar que σ_X é isomorfismo. Primeiro aplicando a definição 3.10 ao morfismo i_X e ao inteiro m, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)) \arrow[r, "j_{\tau_{\leq n}(X)}"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & \tau_{\leq n}(X) \arrow[d, "i_X"] \\
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "j_X"] & X
\end{tikzcd}$$

Logo aplicamos o funtor covariante $Hom_{\mathscr{D}}(A, \_)$ com $A \in \mathscr{D}^{\leq m} \subset \mathscr{D}^{\leq n}$, assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(A,\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(A,j_{\tau_{\leq n}(X)})"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(A,\sigma_X)"'] & Hom_{\mathscr{D}}(A,\tau_{\leq n}(X)) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(A,i_X)"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(A,\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(A,j_X)"] & Hom_{\mathscr{D}}(A,X)
\end{tikzcd}$$

E dado que $\mathscr{D}^{\leq n}$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{D}$, então $Hom_{\mathscr{D}}(A,\tau_{\leq n}(X)) = Hom_{\mathscr{D}^{\leq n}}(A,\tau_{\leq n}(X))$, logo $Hom_{\mathscr{D}}(A,i_X)$ é o isomorfismo que construímos no item i) na prova do lema 3.12. Analogamente, temos que $Hom_{\mathscr{D}}(A,j_{\tau_{\leq n}(X)})$ e $Hom_{\mathscr{D}}(A,j_X)$ são isomorfismos. Portanto, $Hom_{\mathscr{D}}(A,\sigma_X)$ é isomorfismo para todo $A \in \mathscr{D}^{\leq m}$, pois o diagrama acima comuta.
Em particular, para $A = \tau_{\leq m}(X)$, temos a bijeção

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(X),\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(X),\sigma_X)} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(X),\tau_{\leq m}(X)) \\
h & \longmapsto & \sigma_X \circ h
\end{array}$$

Então, existe um morfismo $\varphi : \tau_{\leq m}(X) \to \tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))$ tal que $\sigma_X \circ \varphi = 1_{\tau_{\leq m}(X)}$.
Por outro lado, para $A = \tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))$, temos a bijeção

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)),\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)),\sigma_X)} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)),\tau_{\leq m}(X)) \\
h & \longmapsto & \sigma_X \circ h
\end{array}$$

Na qual se verificam:

1) $Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)),\sigma_X)(1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))}) = \sigma_X \circ 1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))} = \sigma_X$.

2) $Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)),\sigma_X)(\varphi \circ \sigma_X) = \sigma_X \circ (\varphi \circ \sigma_X) = 1_{\tau_{\leq m}(X)} \circ \sigma_X = \sigma_X$.

Assim, de 1) e 2) temos que $\varphi \circ \sigma_X = 1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X))}$. Portanto, σ_X é isomorfismo.

(ii) Da proposição 3.3 seque que $\mathscr{D}^{\geq n} \subset \mathscr{D}^{\geq m}$, pois $m \leq n$. Portanto, $\tau_{\geq n}(X) \in \mathscr{D}^{\geq m}$, assim aplicando o lema 3.15, $\gamma_X : \tau_{\geq n}(X) \longrightarrow \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(X))$ é isomorfismo. Agora aplicando o funtor $\tau_{\geq n}$ ao morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, temos o morfismo $\tau_{\geq n}(f) : \tau_{\geq n}(X) \longrightarrow \tau_{\geq n}(Y)$ na subcategoria $\mathscr{D}^{\geq n}$, então pela definição 3.10 existe um único morfismo $\tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(f)) : \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(Y))$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(f)"'] & \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[d, "\tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(f))"] \\
\tau_{\geq n}(Y) \arrow[r, "\gamma_Y"] & \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(Y))
\end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $\gamma : \tau_{\geq n} \longrightarrow \tau_{\geq m} \circ \tau_{\geq n}$ é um isomorfismo funtorial.
Por outro lado, pela definição 3.10, dados $X, Y \in \mathscr{D}$, se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo

em $\mathscr{D}$ então o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq m}(X) \arrow[d, "\tau_{\geq m}(f)"] \\ Y \arrow[r, "p_Y"] & \tau_{\geq m}(Y) \end{tikzcd}$$

Além disso, pelo proposição 3.11 temos que o funtor $\tau_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{\geq n}$ é um funtor covariante, então aplicando este ao quadrado anterior, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\tau_{\geq n}(p_X)"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(f)"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)) \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(f))"] \\ \tau_{\geq n}(Y) \arrow[r, "\tau_{\geq n}(p_Y)"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(Y)) \end{tikzcd}$$

Assim basta demonstrar que $\varphi_X = \tau_{\geq n}(p_X)$ é isomorfismo, para que possamos concluir que $\varphi : \tau_{\geq n} \longrightarrow \tau_{\geq n} \circ \tau_{\geq m}$ é um isomorfismo funtorial.
Vamos então demonstrar que φ_X é isomorfismo. Primeiro aplicando a definição 3.10 ao morfismo p_X e ao inteiro n, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "p_X"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[d, "\varphi_X"] \\ \tau_{\geq m}(X) \arrow[r, "q_{\tau_{\geq m}(X)}"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)) \end{tikzcd}$$

Logo aplicamos o funtor contravariante $Hom_{\mathscr{D}}(\_, A)$ com $A \in \mathscr{D}^{\geq n} \subset \mathscr{D}^{\geq m}$, assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(X, A) & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(X), A) \arrow[l, "Hom_{\mathscr{D}}(q_X, A)"'] \\ Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq m}(X), A) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(p_X, A)"] & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)), A) \arrow[l, "Hom_{\mathscr{D}}(q_{\tau_{\geq m}(X)}, A)"'] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, A)"'] \end{tikzcd}$$

E dado que $\mathscr{D}^{\geq m}$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{D}$, então $Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq m}(X), A) = Hom_{\mathscr{D}^{\geq m}}(\tau_{\geq m}(X), A)$, logo $Hom_{\mathscr{D}}(p_X, A)$ é o isomorfismo que construímos no item ii) na prova do lema 3.12. Analogamente, temos que $Hom_{\mathscr{D}}(q_{\tau_{\geq m}(X)}, A)$ e $Hom_{\mathscr{D}}(q_X, A)$ são isomorfismos. Portanto, $Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, A)$ é isomorfismo para todo $A \in \mathscr{D}^{\geq n}$, pois o diagrama acima comuta.
Em particular, para $A = \tau_{\geq n}(X)$, temos a bijeção

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)), \tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, \tau_{\geq n}(X))"] & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(X), \tau_{\geq n}(X)) \\ h \arrow[r, mapsto] & h \circ \varphi_X \end{tikzcd}$$

Então, existe um morfismo $\sigma : \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)) \to \tau_{\geq n}(X)$ tal que $\sigma \circ \varphi_X = 1_{\tau_{\geq n}(X)}$.

Por outro lado, para $A = \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))$, temos a bijeção

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)), \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)))} & Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq n}(X), \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))) \\ h & \longmapsto & h \circ \varphi_X \end{array}$$

Na qual se verificam:

1) $Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)))(1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))}) = 1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))} \circ \varphi_X = \varphi_X$.

2) $Hom_{\mathscr{D}}(\varphi_X, \tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X)))(\varphi_X \circ \sigma) = (\varphi_X \circ \sigma) \circ \varphi_X = \varphi_X \circ 1_{\tau_{\geq n}(X)} = \varphi_X$.

Assim, de 1) e 2) temos que $\varphi_X \circ \sigma = 1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\geq m}(X))}$. Portanto, φ_X é isomorfismo.

□

Agora estudaremos $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$ e $\tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$ no caso $m \geq n$.

Observação 3.20 *Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, denotaremos por $\mathscr{D}^{[m,n]} = \mathscr{D}^{\geq m} \bigcap \mathscr{D}^{\leq n}$ à subcategoria estritamente plena da categoria $\mathscr{D}$ (ver proposição 3.6)*

Lema 3.21 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $m \geq n$. Para cada $X \in \mathscr{D}$, tem-se $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))$ e $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))$ são objetos na categoria $\mathscr{D}^{[n,m]}$.*

Demonstração: Seja $X \in \mathscr{D}$.

a) Aplicando a definição 3.8 ao objeto $\tau_{\leq m}(X)$ com $n - 1 \in \mathbb{Z}$, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[dl, "r"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[rr, "i"] & & \tau_{\leq m}(X) \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, por hipótese $n - 1 < m$ então, pelo lema 3.19 existe um isomorfismo $\sigma : \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq n-1}(X)$, por conseguinte temos o isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(X)}"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))}"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d, "\sigma[1]"] \\ \tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i\circ\sigma^{-1}"] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\sigma[1]\circ r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \end{tikzcd}$$

E como o triângulo de cima é distinguido então o triângulo

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[dl, "\sigma[1]\circ r"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq n-1}(X) \arrow[rr, "i\circ\sigma^{-1}"] & & \tau_{\leq m}(X) \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido. Então pelo axioma de rotação o seguinte triângulo é distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq m}(X) \arrow[rr] & & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Além disso, $\tau_{\leq n-1}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$ então $\tau_{\leq n-1}(X)[1] \in \mathscr{D}^{\leq n-2} \subset \mathscr{D}^{\leq m}$, pois $m \geq n > n-2$. O que implica, $\tau_{\leq n-1}(X)[1]$ e $\tau_{\leq m}(X)$ são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\leq m}$, assim pelo lema 3.16, temos que $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \in \mathscr{D}^{\leq m}$ e por definição temos $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \in \mathscr{D}^{\geq n}$, portanto, $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \in \mathscr{D}^{\geq n} \cap \mathscr{D}^{\leq m} = \mathscr{D}^{[n,m]}$.

b) Aplicando a definição 3.8 ao objeto $\tau_{\geq n}(X)$ com $m \in \mathbb{Z}$, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[dl, "s"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[rr, "j"] & & \tau_{\geq n}(X) \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, por hipótese $m+1 > n$ então, pelo lema 3.19 existe um isomorfismo $\varphi : \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\geq m+1}(X)$, por conseguinte temos o isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))}"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq n}(X)}"] & \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi"'] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1]}"] \\ \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\varphi \circ q"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s \circ \varphi^{-1}"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1] \end{tikzcd}$$

E como o triângulo de cima é distinguido então o triângulo

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[dl, "s\circ\varphi^{-1}"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[rr, "j"] & & \tau_{\geq n}(X) \arrow[ul, "\varphi\circ q"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido. Então pelo axioma de rotação o seguinte triângulo é distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ \tau_{\geq m+1}(X)[-1] \arrow[rr] & & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Além disso, desde que $\tau_{\geq m+1}(X) \in \mathscr{D}^{\geq m+1}$ então $\tau_{\geq m+1}(X)[-1] \in \mathscr{D}^{\geq m+2} \subset \mathscr{D}^{\geq n}$, pois $m+2 > m \geq n$. O qual implica que, $\tau_{\geq m+1}(X)[-1]$ e $\tau_{\geq n}(X)$ são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\geq n}$, assim pelo lema 3.16, temos que $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \in \mathscr{D}^{\geq n}$ e por definição temos $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \in \mathscr{D}^{\leq m}$, portanto, $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \in \mathscr{D}^{\geq n} \cap \mathscr{D}^{\leq m} = \mathscr{D}^{[n,m]}$.

$\square$

Observação 3.22 *Supondo que $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $m \geq n$. Então, dado um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, temos o morfismo $\tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(f)) : \tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(Y))$ o qual é induzido pelos funtores de truncamento $\tau_{\leq n}$ e $\tau_{\geq m}$, mas pelo lema 3.21, temos que $\tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(X)) \in \mathscr{D}^{[n,m]}$, $\forall X \in \mathscr{D}$, então $\tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(f))$ é um morfismo na categoria $\mathscr{D}^{[n,m]}$. Portanto, o funtor $\tau_{\geq m} \circ \tau_{\leq n}$ esta definido da categoria $\mathscr{D}$ na categoria $\mathscr{D}^{[n,m]}$. Mais ainda, o funtor $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$ esta definido entre as mesmas categorias.*

Lema 3.23 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $m \geq n$ e $X \in \mathscr{D}$. Então, existe um único morfismo $\phi : \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(X) \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[rr, "\phi"] & & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Mais ainda, ϕ é isomorfismo.

Demonstração: Seja X um objeto da categoria $\mathscr{D}$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, consideremos o morfismo de truncamento $i : \tau_{\leq m}(X) \longrightarrow X$. Logo, aplicando a definição 3.10 ao inteiro $n-1$ e ao morfismo i, sabemos que existem e são únicos os morfismos $\sigma = \tau_{\leq n-1}(i)$ e $\psi = \tau_{\geq n}(i)$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "r_n"] \arrow[d, "\psi"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d, "\sigma[1]"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] & X \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos distinguidos. Em consequência, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p \circ i"] \arrow[d, "p_n"'] & \tau_{\geq n}(X) \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Por hipótese $n \leq m$, então pelo lema 3.21 temos $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \in \mathscr{D}^{\leq m}$. Assim aplicando a definição 3.10 o morfismo ψ, existe um único morfismo $\phi = \tau_{\leq m}(\psi)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))}"] \arrow[d, "\phi"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)[1] \arrow[d] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "q"] & \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "s_m"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos distinguidos. Em particular, $\psi = j \circ \phi$, assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p \circ i"] \arrow[d, "p_n"'] & \tau_{\geq n}(X) \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\phi"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

tal que o morfismo ϕ é único. Agora demonstraremos que este é isomorfismo.
No item i) do lema 3.19 demonstramos que $\sigma : \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq n-1}(X)$ é isomorfismo. Assim temos os morfismos de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_n \circ \sigma^{-1}"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(X)}"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\sigma[1] \circ r_n"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))}"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d, "\sigma^{-1}[1]"] \\
\tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "r_n"] \arrow[d, "\psi"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d, "\sigma[1]"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] & X \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Por conseguinte, chamando $k = i_n \circ \sigma^{-1}$, obtemos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)}"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\sigma[1] \circ r_n"] \arrow[d, "\psi"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)[1]}"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] & X \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Além disso, pelo lema 3.9 temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[dl, "s"', "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq m}(X) \arrow[rr, "i"] & & X \arrow[ul, "q_X"']
\end{tikzcd}$$

Logo, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)}"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\sigma[1]\circ r_n"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)[1]}"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_X"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d, "k[1]"] \\
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "q_X"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s"] & \tau_{\leq m}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

como cada linha é um triângulo distinguido e $i_X = i \circ k$, podemos completar o diagrama anterior usando o axioma do octaedro

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)}"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\sigma[1]\circ r_n"] \arrow[d, dashed, "u"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq n-1}(X)[1]}"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_X"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed, "v"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d, "k[1]"] \\
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "p_n"'] & X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, dashed, "p"'] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "1_{\tau_{\geq m+1}(X)}"] & \tau_{\leq m}(X)[1] \arrow[d, dashed, "p_n[1]"] \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, dashed, "u"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, dashed, "v"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, dashed, "w"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Então o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[rr, "u"] & & \tau_{\geq n}(X) \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido. Além disso, temos as igualdades seguintes:

a) $u \circ p_n = p \circ i$, $r \circ u = \sigma[1] \circ r_n$;

b) $v \circ p = q_X$, $w = p_n[1] \circ s$.

Do item a) segue que u completa o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "i"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "r_n"] \arrow[d, "u"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d, "\sigma[1]"] \\
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] & X \arrow[r, "p"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Então, $u = \psi$, pela unicidade na definição 3.10.

Por outro lado, o morfismo $p : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ induz o isomorfismo $\varphi = \tau_{\geq m+1}(p) : \tau_{\geq m+1}(X) \longrightarrow \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X))$, como na prova do item ii) do lema 3.19. Assim temos os morfismos de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(p)"'] & X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "p"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi"] & \tau_{\leq m}(X)[1] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(p)[1]"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))}"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq n}(X)}"] & \tau_{\geq m+1}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "s_m"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1]}"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ q"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s_m\circ\varphi"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

Por conseguinte, o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[dl, "s_m\circ\varphi"', "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[rr, "j"] & & \tau_{\geq n}(X) \arrow[ul, "\varphi^{-1}\circ q"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido. Mais ainda, obtemos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(p)"'] & X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "p"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq m+1}(X)}"] & \tau_{\leq m}(X)[1] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(p)[1]"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ q"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s_m\circ\varphi"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

Então, $(\varphi^{-1}\circ q)\circ p = q_X$ e $p\circ i = j\circ\tau_{\leq m}(p)$ e $s_m\circ\varphi = \tau_{\leq m}(p)[1]\circ s$.
Agora aplicamos a definição 3.10 ao morfismo $q_X : X \longrightarrow \tau_{\geq m+1}(X)$, onde $\tau_{\geq m+1}(X) \in \mathscr{D}^{\geq m+1} \subset \mathscr{D}^{\geq n}$, dado que por hipótese $n \leq m$, logo, temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q_X"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(q_X)"] & \tau_{\leq n-1}(X)[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "1_{\tau_{\geq m+1}(X)}"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tal que $\tau_{\geq n}(q_X)$ é único, mas pelo item b) temos que o morfismo v faz comutar o diagrama, então $v = \tau_{\geq n}(q_X)$. Mais ainda, o morfismo $\varphi^{-1}\circ q$ também faz comutar o diagrama anterior, portanto, $v = \varphi^{-1}\circ q$.
Finalmente, aplicamos a definição 3.10 ao morfismo $\tau_{\leq m}(p) : \tau_{\leq m}(X) \longrightarrow \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))$, onde $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \in \mathscr{D}^{\geq n}$, pelo lema 3.19 pois $n \leq m$ por hipótese, assim, temos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d] & \tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(p)"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "r_n"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(p))"] & \tau_{\leq n-1}(\tau_{\leq m}(X))[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "1_{\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))}"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por conseguinte, $\tau_{\leq m}(p) = \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(p)) \circ p_n$, então $p \circ i = j \circ \tau_{\leq m}(p) = j \circ \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(p)) \circ p_n$, isto é o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "p\circ i"] \arrow[d, "p_n"'] & \tau_{\geq n}(X) \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(p))"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

Em consequência, $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(p)) = \phi$, por unicidade. Do qual deduzimos que $s_m \circ \varphi = \tau_{\leq m}(p)[1] \circ s = (\phi \circ p_n)[1] \circ s = \phi[1] \circ p_n[1] \circ s = \phi[1] \circ w$, pelo item b) acima.
Portanto, obtemos o morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi"'] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq n}(X)}"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq m+1}(X)}"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[r, "j"] & \tau_{\geq n}(X) \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ q"] & \tau_{\geq m+1}(X) \arrow[r, "s_m\circ\varphi"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)[1]
\end{tikzcd}$$

Finalmente, sendo dois dos morfismos verticais, isomorfismos então o terceiro é isomorfismo, pelo corolário 1.23. Portanto, ϕ é isomorfismo. □

Mais ainda podemos demostrar que $\phi_X : \tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X))$ define uma transformação natural entre os funtores $\tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq n}$ e $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$, por conseguinte temos o seguinte resultado.

Lema 3.24 *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m \geq n$. Então, os funtores $\tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$ e $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$ são isomorfos.*

Demonstração: Pelo lema 3.23, para cada $X \in \mathscr{D}$, temos o isomorfismo $\phi_X = \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(i_X))$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & X \arrow[r, "p_X"] & \tau_{\geq n}(X) \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[rr, "\phi_X"] & & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

comuta e i_X e p_X são os morfismos de truncamento, por conseguinte, dado o morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$ e o inteiro m, pela definição 3.10, o quadrado seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\tau_{\leq m}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Assim, aplicando o funtor covariante $\tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$, temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(f)))"'] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[d, "\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(f))"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(Y))) \arrow[r, "\phi_Y"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(Y))
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, aplicando a definição 3.10 ao inteiro m e ao morfismo $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(f))$, temos o morfismo de triângulos distinguido

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X))) \arrow[r, "j_X"] \arrow[d, "\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(f))"'] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X) \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(f))"] \\
\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(Y))) \arrow[r, "j_Y"] & \tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(Y)
\end{tikzcd}$$

E como por hipótese $n \leq m$, então pelo lema 3.21 $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)$ e $\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(Y)$ são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\leq m}$, do qual deduzimos que os morfismos truncamento j_X e j_Y são isomorfismos, ao aplicarmos o lema 3.15. Finalmente, obtemos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(X)) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(f))"'] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[d, "\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(f))"] \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq m}(Y)) \arrow[r, "\eta_Y"] & \tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(Y))
\end{tikzcd}$$

tal que, $\eta_X = \phi_X \circ j_X^{-1}$ é isomorfismo, para cada $X \in \mathscr{D}$.
Portanto, $\eta : \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m} \longrightarrow \tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n}$ é isomorfismo funtorial. □

Pelo lema 3.17, sabemos que os funtores de truncamento são aditivos e pela observação 3.22 para $m = n = 0$ temos que o funtor $\tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^{[0,0]}$, assim temos a definição seguinte:

Definição 3.25 *O funtor aditivo $H^0 : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$, é a composição dos funtores aditivos $\tau_{\leq 0}$ e $\tau_{\geq 0}$, isto é, $H^0 = \tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$.*

Proposição 3.26 *Os funtores H^0 e $\tau_{\leq 0} \circ \tau_{\geq 0}$ são isomorfos.*

Demonstração: Pela definição 3.25 e o lema 3.24 para $m = n = 0$, temos que os funtores $H^0 = \tau_{\leq 0} \circ \tau_{\geq 0}$ e $\tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$ são isomorfos. □

3.4 O coração de uma t-estrutura

Nesta seção demonstraremos que o coração de uma **t-estrutura** é uma categoria abeliana e que dada uma sequência exata curta nesta categoria podemos construir um triângulo distinguido na categoria triangulada $\mathscr{D}$.

Definição 3.27 *Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada e sejam $\mathscr{D}^{\geq 0}$ e $\mathscr{D}^{\leq 0}$ duas subcategorias estritamente plenas que satisfazem as condições da definição 3.1. O coração $\mathscr{A}$ da t-estrutura é $\mathscr{D}^{[0,0]}$.*

Exemplo 3.28 *Dada a t-estrutura natural em $\mathscr{D}^*(\mathscr{A})$ como no exemplo 3.2, o coração desta t-estrutura é a subcategoria dos H^0-complexos a qual é equivalente a $\mathscr{A}$, pelo teorema 2.14.*

Na próxima proposição veremos que funtores exatos entre categorias trianguladas preservam os corações das t-estruturas respectivas.

Proposição 3.29 *Seja $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ a t-estrutura na categoria $\mathscr{D}$ como na proposição 3.4. Então a categorias $\mathscr{C}^{[0,0]}$ e $\mathscr{D}^{[0,0]}$ são equivalentes. Além disso, a categoria $\mathscr{A}$ é estável por extensões.*

Demonstração:

Como $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ é uma equivalência de categorias, definamos o funtor $\hat{F} : \mathscr{C}^{[0,0]} \longrightarrow \mathscr{D}^{[0,0]}$, tal que $\hat{F}(X) = F(X)$ para cada objeto $X \in \mathscr{C}^{[0,0]}$ e $\hat{F}(f) = F(f)$ para cada morfismo f na categoria $\mathscr{C}^{[0,0]}$. Agora demonstraremos que $\hat{F}$ é uma equivalência de categorias:

a) $\hat{F}$ é denso. Dado $Y \in \mathscr{D}^{[0,0]}$, existe um objeto $X \in \mathscr{C}^{\leq 0}$ tal que $Y = FX$ e um objeto $X' \in \mathscr{C}^{\geq 0}$ tal que $Y = FX'$, então $X \simeq F^{-1}FX \simeq F^{-1}FX' \simeq X'$, pois F é equivalência de categorias e dado que $\mathscr{C}^{\geq 0}$ é estritamente plena, então $X \in \mathscr{C}^{\geq 0}$, portanto, $Y = FX = \hat{F}X$.

b) $\hat{F}$ é fiel. Suponhamos que $\hat{F}(f) = \hat{F}(g)$ tal que $f, g \in Hom_{\mathscr{C}^{[0,0]}}(X, Y)$, então $F(f) = F(g)$, portanto $f = g$, dado que F é fiel.

c) $\hat{F}$ é pleno. Suponhamos que $h \in Hom_{\mathscr{D}^{[0,0]}}(\hat{F}X, \hat{F}Y)$, então $h \in Hom_{\mathscr{D}^{[0,0]}}(FX, FY)$, assim existe um morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tal que $F(f) = h$, pois F é pleno, e dado que $\mathscr{C}^{[0,0]}$ é uma subcategoria plena de $\mathscr{C}$, então $f \in Hom_{\mathscr{C}^{[0,0]}}(X, Y)$, portanto $h = \hat{F}(f)$.

□

No teorema seguinte provaremos que o coração da t-estrutura herda as propriedades das categorias $\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$.

Teorema 3.30 *O coração $\mathscr{A}$ da t-estrutura $(\mathscr{D}^{\leq 0}$, $\mathscr{D}^{\geq 0})$ em $\mathscr{D}$ é uma subcategoria estritamente plena e aditiva da categoria $\mathscr{D}$.*

Demonstração: Por hipótese as subcategorias $\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$ são estritamente plenas, então $\mathscr{A} = \mathscr{D}^{[0,0]}$ é uma subcategoria estritamente plena de $\mathscr{D}$. Além disso, as subcategorias

$\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$ são aditivas pelo lema 3.17, portanto $\mathscr{A}$ é aditiva. Finalmente, pelo lema 3.16 as subcategorias $\mathscr{D}^{\leq 0}$ e $\mathscr{D}^{\geq 0}$ são fechadas por extensões, então $\mathscr{A}$ também é fechada por extensões. $\square$

Agora demonstraremos que $\mathscr{A}$ é abeliana. Mas antes disso veremos que $\mathscr{A}$ não é fechada por cones.

Lema 3.31 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{A}$ e considere o triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

onde Z é o cone de f. Então $Z \in \mathscr{D}^{[-1,0]}$.

Demonstração: Por hipótese o triângulo de cima é distinguido, então aplicando o axioma TR2 temos que o triângulo

$$\begin{tikzcd} & X[1] \arrow[dl, "{-f[1]}"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é distinguido. Além disso, por hipótese temos:

(i) $Y \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, então pela proposição 3.3 temos que $X[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1} \subset \mathscr{D}^{\leq 0}$, logo $X[1]$ e Y pertencem na categoria $\mathscr{D}^{\leq 0}$, e pelo lema 3.16 temos $Z \in \mathscr{D}^{\leq 0}$.

(ii) $Y \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ e $X \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então pela proposição 3.3 temos que $X[1] \in \mathscr{D}^{\geq -1}$ e $Y \in \mathscr{D}^{\geq 0} \subset \mathscr{D}^{\geq -1}$, por conseguinte $Z \in \mathscr{D}^{\geq -1}$, aplicando o lema 3.16.

De (i) e (ii) concluímos que $Z \in \mathscr{D}^{\geq -1} \cap \mathscr{D}^{\leq 0} = \mathscr{D}^{[-1,0]}$. $\square$

O lema anterior nos motiva a considerar os objetos $H^0(Z)$ e $H^0(Z[-1])$ os quais sabemos pela definição do funtor H^0 que pertence à categoria $\mathscr{A}$.

Lema 3.32 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{A}$ e considere o triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

onde Z é o cone de f e seja $C = H^0(Z)$ e $K = H^0(Z[-1])$, então os triângulos seguintes são distinguidos

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ K[1] \arrow[rr] & & Z \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C[-1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ K \arrow[rr, "i"] & & Z[-1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

onde as fechas são dadas pelos morfismos de truncamento.

Demonstração: Pelo lema 3.9, para $n = -1$ e $Z \in \mathscr{D}$, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq 0}(Z) \arrow[dl, "q_Z"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq -1}(Z) \arrow[rr, "i_Z"'] & & Z \arrow[ul, "p=p_Z"'] \end{tikzcd}$$

i) Pelo lema 3.31, temos que $Z \in \mathscr{D}^{[-1,0]}$, então $\tau_{\leq 0}(Z) = Z$. Logo, pela definição 3.25 $C = H^0(Z) = \tau_{\geq 0}(\tau_{\leq 0}(Z)) = \tau_{\geq 0}(Z) \in \mathscr{A}$.

ii) como $Z \in \mathscr{D}^{[-1,0]}$, em particular $Z \in \mathscr{D}^{\geq -1}$, então pela proposição 3.3 $Z[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, por conseguinte, $\tau_{\geq 0}(Z[-1]) = Z[-1]$. Pela definição 3.25, $K = H^0(Z[-1]) = \tau_{\leq 0}(\tau_{\geq 0}(Z[-1]) = \tau_{\leq 0}(Z[-1])$. Então pelo lema 3.14, $K[1] = T(\tau_{\leq 0}(Z[-1])) = \tau_{\leq -1}(T(Z[-1])) = \tau_{\leq -1}(Z) \in \mathscr{D}^{\leq -1}$.

De i) e ii) temos, $C = \tau_{\geq 0}(Z)$ e $K[1] = \tau_{\leq -1}(Z)$.
Por outro lado, pelo lema 3.9, para $n = 0$ e $Z[-1] \in \mathscr{D}$, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq 1}(Z[-1]) \arrow[dl, "q_{Z[-1]}"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leq 0}(Z[-1]) \arrow[rr, "i=i_{Z[-1]}"'] & & Z[-1] \arrow[ul, "p_{Z[-1]}"'] \end{tikzcd}$$

Dos itens anteriores temos $K = \tau_{\leq 0}(Z[-1])$ e $C = \tau_{\geq 0}(Z)$. Assim pelo lema 3.14, $T(\tau_{\geq 1}(Z[-1])) = \tau_{\geq 0}(T(Z[-1])) = \tau_{\geq 0}(Z) = C$, então $\tau_{\geq 1}(Z[-1]) = C[-1]$. $\square$

Agora podemos definir dois morfismos que chamaremos de c e k, a partir dos morfismos que aparecem no lema 3.32. Assim supondo que $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo na categoria $\mathscr{A}$:

a) Chamemos de $p : Z \longrightarrow \tau_{\geq 0}(Z) = C$ o morfismo truncamento do cone do morfismo f, e definiremos, $c : Y \longrightarrow C$ é o morfismo composição $c = p \circ g$.

b) Aplicando o axioma (TR2) ao triângulo distinguido baseado no morfismo f, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"'] & \\ Z[-1] \arrow[rr, "-h[-1]"] & {[1]} & X \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

Além disso, seja $i : \tau_{\leq 0}(Z[-1]) = K \longrightarrow Z[-1]$ o morfismo truncamento, então sendo $h' = -h[-1]$, podemos definir o morfismo $k : K \longrightarrow X$ como a composição $k = h' \circ i$.

Lema 3.33 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{A}$ e considere o triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & {[1]} & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

onde Z é o cone de f e seja $C = H^0(Z)$ e $K = H^0(Z[-1])$, então:

i) A sequência $0 \longrightarrow Hom(C, U) \xrightarrow{c^*} Hom(Y, U) \xrightarrow{f^*} Hom(X, U)$ é exata, para qualquer $U \in \mathscr{D}^{\geq 0}$.

ii) A sequência $0 \longrightarrow Hom(U, K) \xrightarrow{k_*} Hom(U, X) \xrightarrow{f_*} Hom(U, Y)$ é exata, para qualquer $U \in \mathscr{D}^{\leq 0}$.

Demonstração:

(i) Pelo lema 3.32, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] & \\ K[1] \arrow[rr] & {[1]} & Z \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

com $K[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1}$, então $K[2] \in \mathscr{D}^{\leq -2}$. Portanto, pelo lema 3.5, para qualquer $U \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, $Hom(K[1], U) = Hom(K[2], U) = 0$ e pela sequência exata longa de homologia na proposição 1.20, obtemos a sequência exata curta

$$0 = Hom(K[2], U) \longrightarrow Hom(C, U) \xrightarrow{p*} Hom(Z, U) \longrightarrow Hom(K[1], U) = 0\,.$$

Portanto, $p^* : Hom(C, U) \longrightarrow Hom(Z, U)$ é isomorfismo.

Agora aplicamos o mesmo teorema ao triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

e obtemos a correspondente sequência exata de homologia

$$0 = Hom(X[1], U) \longrightarrow Hom(Z, U) \xrightarrow{g*} Hom(Y, U) \xrightarrow{f^*} Hom(X, U)\ .$$

Onde $Hom(X[1], U) = 0$, se deduz do lema 3.5, aplicado aos objetos $U \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ e $X[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1}$. Por conseguinte, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom(C, U) \xrightarrow{g^* \circ p^*} Hom(Y, U) \xrightarrow{f^*} Hom(X, U)\ .$$

Mas, $g^* \circ p^* = Hom(\_, U)(g) \circ Hom(\_, U)(p) = Hom(\_, U)(p \circ g) = Hom(\_, U)(c) = c^*$.

(ii) Pelo lema 3.32, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & C[-1] \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ K \arrow[rr, "i"] & & Z[-1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

com $C[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, então $C[-2] \in \mathscr{D}^{\geq -2}$. Portanto, pelo lema 3.5, para qualquer $U \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, $Hom(U, C[-1]) = Hom(U, C[-2]) = 0$ e pela sequência exata longa de homologia na proposição 1.20, obtemos a sequência exata curta

$$0 = Hom(U, C[-2]) \longrightarrow Hom(U, K) \xrightarrow{i_*} Hom(U, Z[-1]) \longrightarrow Hom(U, C[-1]) = 0\ .$$

Portanto, $i_* : Hom(U, K) \longrightarrow Hom(U, Z[-1])$ é isomorfismo.

Agora aplicamos o mesmo teorema ao triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\ Z[-1] \arrow[rr, "h'"] & & X \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

e obtemos a correspondente sequência exata de homologia

$$0 = Hom(U, Y[-1]) \longrightarrow Hom(U, Z[-1]) \xrightarrow{h'_*} Hom(U, X) \xrightarrow{f_*} Hom(U, Y)\ .$$

Onde $Hom(U, Y[-1]) = 0$, se deduz do lema 3.5, aplicado aos objetos $U \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $Y[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$. Por conseguinte, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom(U, K) \xrightarrow{h'{*} \circ i_*} Hom(U, X) \xrightarrow{f_*} Hom(U, Y)\ .$$

Mas, $h'_* \circ i_* = Hom(U, \_)(h') \circ Hom(U, \_)(i) = Hom(U, \_)(h' \circ i) = Hom(U, \_)(k) = k_*$.

$\square$

Já estamos em condições de demonstrar que todo morfismo na categoria $\mathscr{A}$ tem kernel e cokernel, assim temos o seguinte lema, o qual nos permitirá provar que $\mathscr{A}$ é uma categoria abeliana.

Lema 3.34 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{A}$, então*

i) (C, c) é o cokernel de f.

ii) (K, k) é o kernel de f;

Demonstração:

1. Por definição temos o diagrama $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{p} C$, tal que $c = p \circ g$. Assim, pelo lema 1.22 temos que $g \circ f = 0$, portanto $c \circ f = p \circ (g \circ f) = 0$.

   Agora consideremos o diagrama seguinte e suponhamos que existe $A \in \mathscr{A}$ e um morfismo $\alpha : Y \longrightarrow A$ tal que $\alpha \circ f = 0$.

$$\begin{tikzcd} & & A & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "c"] & & C \end{tikzcd}$$

   Então $f^*(\alpha) = 0$, assim $\alpha \in Ker(f^*) = Im(c^*)$, pelo lema 3.33 com $U = A$. Então existe um morfismo $\beta \in Hom(C, A)$ tal que $\alpha = c^*(\beta) = \beta \circ c$. Do qual temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & & A & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "c"] & & C \arrow[ul, dashed, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

   Portanto, o par (C, c) é o cokernel de f.

2. Por definição temos o diagrama $K \xrightarrow{i} Z[-1] \xrightarrow{h'} X \xrightarrow{f} Y$, tal que $k = h' \circ i$. Assim, pelo lema 1.22 temos que $f \circ h' = 0$, portanto $f \circ k = f \circ (h' \circ i) = 0$.

   Agora consideremos o diagrama seguinte e suponhamos que existe $A \in \mathscr{A}$ e um morfismo $\alpha : A \longrightarrow X$ tal que $f \circ \alpha = 0$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[ur, "\alpha"] & & \end{tikzcd}$$

   Então $f_*(\alpha) = 0$, assim $\alpha \in Ker(f_*) = Im(k_*)$, pelo lema 3.33 com $U = A$. Então existe um morfismo $\beta \in Hom(A, K)$ tal que $\alpha = k_*(\beta) = k \circ \beta$. Do qual temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

   Portanto, o par (K, k) é o kernel de f.

□

Nos resta só construir a decomposição canônica do morfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Proposição 3.35 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{A}$, então o morfismo natural $Coim(f) \longrightarrow Im(f)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Dado o morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{A}$, pelo lema 3.34 sabemos que $c : Y \longrightarrow C$ é o cokernel de f. Logo, chamando J ao cone do morfismo c, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "c"] & & C \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

e pelo lema 3.31, $J \in \mathscr{D}^{[-1,0]}$. Em particular, $J \in \mathscr{D}^{\geq -1} = T(\mathscr{D}^{\geq 0})$. Assim, existe $I \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ tal que $J = I[1]$. Logo, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & I[1] \arrow[dl, "s"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "c"] & & C \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Mais ainda, como $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ é automorfismo da categoria triangulada $\mathscr{D}$, então T é uma equivalência de categorias, portanto, T é fiel e pleno, por conseguinte, existe um único morfismo $r : I \longrightarrow Y$, tal que $r[1] = s$. Por outro lado, pela rotação do triângulo baseado no morfismo $f : X \longrightarrow Y$ temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & X[1] \arrow[dl, "-f[1]"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

Analogamente, pela rotação do triângulo baseado no morfismo $i_Z : K[1] \longrightarrow Z$ do lema 3.32, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & K[2] \arrow[dl, "-(i_Z)[1]"', "{[1]}"] & \\
Z \arrow[rr, "p"] & & C \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Além disso, temos por definição $c = p \circ g$, onde p e g são morfismos na categoria triangulada $\mathscr{D}$, então pelo axioma do octaedro o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] & Y[1] \arrow[d, "1_Y{[1]}"] \\
Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"'] & I[1] \arrow[r, "r[1]"] & Y[1] \arrow[d, "g[1]"] \\
Z \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & K[2] \arrow[r, "-i_Z[1]"] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

pode ser completado ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, dashed, "-u[1]"'] & Y[1] \arrow[d, "1_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"'] & I[1] \arrow[r, "r[1]"] \arrow[d, dashed] & Y[1] \arrow[d, "g[1]"] \\
Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & K[2] \arrow[r, "-i_Z[1]"] \arrow[d, dashed, "1_{K[2]}"'] & Z[1] \arrow[d, dashed, "h[1]"] \\
X[1] \arrow[r, dashed, "-u[1]"] & I[1] \arrow[r, dashed] & K[2] \arrow[r, dashed, "w"] & X[2]
\end{tikzcd}$$

onde $X[1] \xrightarrow{-u[1]} I[1] \longrightarrow K[2] \xrightarrow{w} X[2]$ é triângulo distinguido e as setas verticais são morfismos de triângulos. Por conseguinte,

a) $-f[1] = r[1] \circ -u[1] = -(r \circ u)[1]$ ou equivalentemente $f = r \circ u$.

b) $w = h[1] \circ -i_Z[1] = -(h \circ i_Z)[1] = -(h' \circ i)[2] = -k[2]$.

c) O triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & K[2] \arrow[dl, "-K[2]"', "{[1]}"] & \\ X[1] \arrow[rr, "-u[1]"] & & I[1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Rodando três vezes este triângulo, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & K[1] \arrow[dl, "{k[1]}"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & I \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Além disso, como X e K são elementos na categoria $\mathscr{A}$, então $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $K[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1} \subset \mathscr{D}^{\leq 0}$. Portanto, aplicando o lema 3.16 temos que $I \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e como já temos que $I \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então $I \in \mathscr{A}$. Rodando este último triângulo temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ K \arrow[rr, "-k"] & & X \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd}$$

Agora consideremos o isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "-k"] \arrow[d, "-1_K"'] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & I \arrow[r, "a"] \arrow[d, "1_I"'] & K[1] \arrow[d, "-1_{K[1]}"] \\ K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "u"] & I \arrow[r, "-a"] & K[1] \end{tikzcd}$$

O qual implica que

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ K \arrow[rr, "k"] & & X \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd}$$

é triângulo distinguido, isto é, I é o cone de k. Assim, pelo lema 3.34, concluímos que (I, u) é o cokernel de k.

Por outro lado, aplicando o axioma TR2 ao triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & I[1] \arrow[dl, "{r[1]}"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "c"] & & C \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ I \arrow[rr, "-r"] & & Y \arrow[ul, "c"'] \end{tikzcd}$$

o qual é isomorfismo ao triângulo

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ I \arrow[rr, "r"] & & Y \arrow[ul, "c"'] \end{tikzcd}$$

então, pelo lema 3.34, deduzimos que (I, r) é o kernel de c. Portanto, $I = coim(f) = im(f)$. Mais ainda pelo item a) temos $f = r \circ u$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "u"'] & & Y \arrow[r, "c"] & C \\ & I = Coim(f) \arrow[rr, "1_I"] & & I = Im(f) \arrow[u, "r"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. □

Finalmente, aplicando os resultados anteriores temos o seguinte teorema.

Teorema 3.36 *O coração $\mathscr{A}$ da t-estrutura ($\mathscr{D}^{\leq 0}$, $\mathscr{D}^{\geq 0}$) em $\mathscr{D}$ é uma categoria abeliana.*

Demonstração: Pelo teorema 3.30 sabemos que $\mathscr{A}$ é uma categoria aditiva e pelo lema 3.34 podemos afirmar que todo morfismo na categoria $\mathscr{A}$ tem kernel e Cokernel. Além disso, pela proposição 3.35 temos que o morfismo natural $coim\ f \longrightarrow im\ f$ é um isomorfismo. Portanto, $\mathscr{A}$ é uma categoria abeliana, ver definição 2.3 em [HJR10, p. 8]. □

O próximo corolário demonstra que toda sequência exata curta em $\mathscr{A}$ é admissível, o qual junto com o lema 3.5 nos permite concluir que $\mathscr{A}$ é uma subcategoria admissível de $\mathscr{D}$ (ver definição 1.2.5. do artigo [BBD82, p. 28]).

Corolário 3.37 *Seja* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *uma sequência exata na categoria $\mathscr{A}$. Então Z é o cone de $f : X \longrightarrow Y$ e o triângulo*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido.

Demonstração: Por hipótese temos que a sequência $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ é exata em $\mathscr{A}$, então X, Y e Z pertencem $\mathscr{A}$, mais ainda o par (Z, g) é o cokernel de f e $ker(f) = 0$. Por outro lado, temos:

i) O triângulo distinguido baseado no morfismo f, no qual C_f é o cone, isto é,

$$\begin{tikzcd} & C_f \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido, então pelo lema 3.31 temos que $C_f \in \mathscr{D}^{\leq 0}$.

ii) Aplicando o lema 3.32 temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & C[-1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ K \arrow[rr] & & C_f[-1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que $K = H^0(C_f[-1]) = \tau_{\leq 0}(C_f[-1])$ e $C = H^0(C_f) = \tau_{\geq 0}(C_f)$. Mas ainda pelo lema 3.34 $K = ker(f)$, então $K = 0$, logo $K \in \mathscr{D}^{\geq 1}$ e como $C[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, então pelo lema 3.16 $C_f[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$ o qual equivale a $C_f \in \mathscr{D}^{\geq 0}$.

De i) e ii) concluímos que $C_f \in \mathscr{A}$. Então, $C = \tau_{\geq 0}(C_f) = C_f$ e aplicando novamente o lema 3.34 temos que (C_f, g') é o cokernel de f, então existe um isomorfismo $\phi : Z \longrightarrow C_f$ tal que $g' = \phi \circ g$. Logo, $Z = C_f$ e o diagrama seguinte é um isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h'\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & C_f \arrow[r, "h'"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Assim, dado que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} C_f \xrightarrow{h'} X[1]$ é triângulo distinguido, concluímos que o triângulo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h'\circ\phi} X[1]$ é distinguido. □

3.5 Funtor de cohomologia em categorias trianguladas.

Agora demonstraremos que H^0 como definido em 3.25 é um funtor de cohomologia. Isso nos permitirá definir os funtores $H^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.38 *O funtor $H^0 : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ é um funtor cohomológico.*

Demonstração: Por definição falta só demostrar que o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

induz a sequência exata $H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z)$. O qual provaremos numa serie de passos:

a) Primeiro suponhamos que X, Y e Z são objetos da subcategoria $\mathscr{D}^{\geq 0}$ e seja $U \in \mathscr{A}$, então pela proposição 1.20, temos a sequência exata

$$Hom(U, Z[-1]) \longrightarrow Hom(U, X) \xrightarrow{f_*} Hom(U, Y) \xrightarrow{g_*} Hom(U, Z) .$$

Mais ainda, como $U \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $Z[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, pelo lema 3.5, vemos que $Hom(U, Z[-1]) = 0$. Assim obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom(U, X) \xrightarrow{f_*} Hom(U, Y) \xrightarrow{g_*} Hom(U, Z) .$$

Por outro lado, as igualdades seguintes seguem do lema 3.12 e do fato que $\mathscr{A}$ é uma subcategoria estritamente plena:

$$Hom_{\mathscr{A}}(U, H^0(X)) = Hom_{\mathscr{D}}(U, H^0(X)) = Hom_{\mathscr{D}}(U, \tau_{\leq 0}(X)) = Hom_{\mathscr{D}}(U, X)$$

onde $H^0(X) = \tau_{\leq 0}(\tau_{\geq 0}(X)) = \tau_{\leq 0}(X)$ pelo lema 3.15. Analogamente, provamos que $Hom_{\mathscr{A}}(U, H^0(Y)) = Hom_{\mathscr{D}}(U, Y)$ e $Hom_{\mathscr{A}}(U, H^0(Z)) = Hom_{\mathscr{D}}(U, Z)$. Isto implica que a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(U, H^0(X)) \xrightarrow{H^0(f)_*} Hom(U, H^0(Y)) \xrightarrow{H^0(g)_*} Hom(U, H^0(Z)) .$$

é exata. Portanto, a sequência

$$0 \longrightarrow H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z) .$$

é exata.

b) Agora suponhamos que X, Y e Z são objetos da subcategoria $\mathscr{D}^{\leq 0}$. Seja $U \in \mathscr{A}$, então pela proposição 1.20, temos a sequência exata

$$Hom(X[1], U) \xrightarrow{h^*} Hom(Z, U) \xrightarrow{g^*} Hom(Y, U) \xrightarrow{f^*} Hom(X, U) .$$

Mais ainda, como $U \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ e $X[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1}$, pelo lema 3.5, vemos que $Hom(X[1], U) = 0$. Assim obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom(Z, U) \xrightarrow{g^*} Hom(Y, U) \xrightarrow{f^*} Hom(X, U) \, .$$

Por outro lado, as igualdades seguintes seguem do lema 3.12 e do fato que $\mathscr{A}$ é uma subcategoria estritamente plena:

$$Hom_{\mathscr{A}}(H^0(X), U) = Hom_{\mathscr{D}}(H^0(X), U) = Hom_{\mathscr{D}}(\tau_{\geq 0}(X), U) = Hom_{\mathscr{D}}(X, U)$$

onde $H^0(X) = \tau_{\geq 0}(\tau_{\leq 0}(X)) = \tau_{\geq 0}(X)$ pelo lema 3.15. Analogamente, provamos que $Hom_{\mathscr{A}}(H^0(Y), U) = Hom_{\mathscr{D}}(Y, U) =$ e $Hom_{\mathscr{A}}(H^0(Z), U) = Hom_{\mathscr{D}}(Z, U)$. Isto implica que a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(H^0(Z), U) \xrightarrow{H^0(g)^*} Hom(H^0(Y), U) \xrightarrow{H^0(f)^*} Hom(H^0(X), U) \, .$$

é exata. Portanto, a sequência

$$H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z) \longrightarrow 0 \, .$$

é exata.

c) Suponhamos somente que $Z \in \mathscr{D}^{\geq 0}$. Seja $W \in \mathscr{D}^{\leq -1}$, então pelo lema 3.5, $Hom(W, Z) = Hom(W, Z[-1]) = 0$, pois $Z[-1]) \in \mathscr{D}^{\geq 1}$. Assim pela proposição 1.20, temos a sequência exata curta

$$0 = Hom(W, Z[-1]) \longrightarrow Hom(W, X) \xrightarrow{f_*} Hom(W, Y) \longrightarrow Hom(W, Z) = 0$$

isto é, $f_* : Hom(W, X) \longrightarrow Hom(W, Y)$ é isomorfismo. Agora consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "\tau_{\leq -1}(f)"] \arrow[d, "i"'] & \tau_{\leq -1}(Y) \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Logo aplicamos o funtor covariante $Hom(W, \_)$ e temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(W, \tau_{\leq -1}(X)) \arrow[r, "\tau_{\leq -1}(f)_*"] \arrow[d, "i_*"'] & Hom(W, \tau_{\leq -1}(Y)) \arrow[d, "j_*"] \\ Hom(W, X) \arrow[r, "f_*"] & Hom(W, Y) \end{tikzcd}$$

Assim, dado que i_* e j_* são isomorfismos, pelo lema 3.12, então $\tau_{\leq -1}(f)_* = (j_*)^{-1} \circ f_* \circ i_*$ é isomorfismo, e como W é arbitrário, então $\tau_{\leq -1}(f)_* = Hom(W, \tau_{\leq -1}(f))$ é um isomorfismo nos seguintes casos:

(a) $W = \tau_{\leq -1}(Y)$. $\tau_{\leq -1}(f)_* : Hom(\tau_{\leq -1}(Y), \tau_{\leq -1}(X)) \longrightarrow Hom(\tau_{\leq -1}(Y), \tau_{\leq -1}(Y))$ é isomorfismo, então dado $1_{\tau_{\leq -1}(Y)} \in Hom(\tau_{\leq -1}(Y), \tau_{\leq -1}(Y))$, existe um único morfismo $\varphi \in Hom(\tau_{\leq -1}(Y), \tau_{\leq -1}(X))$ tal que $\tau_{\leq -1}(f)_*(\varphi) = 1_{\tau_{\leq -1}(Y)}$, isto é, $\tau_{\leq -1}(f) \circ \varphi = 1_{\tau_{\leq -1}(Y)}$.

(b) $W = \tau_{\leq -1}(X)$. $\tau_{\leq -1}(f)_* : Hom(\tau_{\leq -1}(X), \tau_{\leq -1}(X)) \longrightarrow Hom(\tau_{\leq -1}(X), \tau_{\leq -1}(Y))$ é isomorfismo. Além disso, temos que:

   i. $\tau_{\leq -1}(f)_*(1_{\tau_{\leq -1}(X)}) = \tau_{\leq -1}(f) \circ 1_{\tau_{\leq -1}(X)} = \tau_{\leq -1}(f)$.

   ii. $\tau_{\leq -1}(f)_*(\varphi \circ \tau_{\leq -1}(f)) = \tau_{\leq -1}(f) \circ (\varphi \circ \tau_{\leq -1}(f)) = (\tau_{\leq -1}(f) \circ \varphi) \circ \tau_{\leq -1}(f) = 1_{\tau_{\leq -1}(Y)} \circ \tau_{\leq -1}(f) = \tau_{\leq -1}(f)$, pelo item a).

   Dos itens i) e ii) concluímos que $\varphi \circ \tau_{\leq -1}(f) = 1_{\tau_{\leq -1}(X)}$.

Portanto, $\tau_{\leq -1}(f) : \tau_{\leq -1}(X) \longrightarrow \tau_{\leq -1}(Y)$ é isomorfismo, pelos itens a) e b).

Agora consideremos os morfismos $\tau_{\leq -1}(X) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ e definamos $s = f \circ i = j \circ \tau_{\leq -1}(f)$. Por conseguinte, temos o isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\tau_{\leq -1}(f)"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "1_Y"'] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq 0}(Y)}"] & (\tau_{\leq -1}(Y))[1] \arrow[d, "(\tau_{\leq -1}(f))[1]"] \\
\tau_{\leq -1}(Y) \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "p_Y"] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq -1}(Y))[1]
\end{tikzcd}$$

E como por definição o triângulo de embaixo é distinguido, então o triângulo de cima é distinguido. Logo pelo axioma do octaedro, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq -1}(X)}"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq 0}(X) \arrow[r] & (\tau_{\leq -1}(X))[1] \arrow[d, "1_{(\tau_{\leq -1}(X))[1]}"] \\
\tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "1_Y"'] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r] & (\tau_{\leq -1}(Y))[1] \arrow[d, "i[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

pode ser completado ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq -1}(X)}"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "f"'] & \tau_{\geq 0}(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & (\tau_{\leq -1}(X))[1] \arrow[d, "1_{(\tau_{\leq -1}(X))[1]}"] \\
\tau_{\leq -1}(X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "1_Y"'] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & (\tau_{\leq -1}(Y))[1] \arrow[d, "i[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "p_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "p_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1_Z"] & X[1] \arrow[d, dashed] \\
\tau_{\geq 0}(X) \arrow[r, dashed] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r, dashed] & (\tau_{\geq 0}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

onde $\tau_{\geq 0}(X) \longrightarrow \tau_{\geq 0}(Y) \longrightarrow Z \longrightarrow (\tau_{\geq 0}(X))[1]$ é triângulo distinguido e as linhas horizontais são morfismos de triângulos, então em particular os quadrados na última linha do diagrama comutam, logo pela unicidade dos morfismos $\tau_{\geq 0}(f)$ e $\tau_{\geq 0}(g)$ e dado que $Z \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_Y"'] & Z \arrow[d, "1_Z"] \\ \tau_{\geq 0}(X) \arrow[r, "\tau_{\geq 0}(f)"] & \tau_{\geq 0}(Y) \arrow[r, "\tau_{\geq 0}(g)"] & Z \end{tikzcd}$$

Assim aplicando o funtor H^0 obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^0(X) \arrow[r, "H^0(f)"] \arrow[d, "H^0(p_X)"'] & H^0(Y) \arrow[r, "H^0(g)"] \arrow[d, "H^0(p_Y)"'] & H^0(Z) \arrow[d, "1_{H^0(Z)}"] \\ H^0(\tau_{\geq 0}(X)) \arrow[r, "H^0(\tau_{\geq 0}(f))"] & H^0(\tau_{\geq 0}(Y)) \arrow[r, "H^0(\tau_{\geq 0}(g))"] & H^0(Z) \end{tikzcd}$$

Por outro lado, como $H^0 = \tau_{\leq 0} \circ \tau_{\geq 0}$ e $\tau_{\geq 0}(p_X) = 1_{\tau_{\geq 0}(X)}$, então $H^0(p_X) = 1_{H^0(X)}$. Analogamente, $H^0(p_Y) = 1_{H^0(Y)}$.

Mais ainda, como todos os vértices no último triângulo distinguido são objetos da categoria $\mathscr{D}^{\geq 0}$, podemos aplicar o item a) e obter a sequência exata

$$0 \longrightarrow H^0(\tau_{\geq 0}(X)) \xrightarrow{H^0(\tau_{\geq 0}(f))} H^0(\tau_{\geq 0}(Y)) \xrightarrow{H^0(\tau_{\geq 0}(g))} H^0(Z)\ .$$

Portanto, a sequência

$$0 \longrightarrow H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z)$$

é exata.

d) Agora suponhamos somente que $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$. Seja $W \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, então pelo lema 3.5, $Hom(X, W) = Hom(X[1], W) = 0$, pois $X[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1}$. Assim pela proposição 1.20, temos a sequência exata curta

$$0 = Hom(X[1], W) \longrightarrow Hom(Z, W) \xrightarrow{g^*} Hom(Y, W) \longrightarrow Hom(X, W) = 0$$

isto é, $g^* : Hom(Z, W) \longrightarrow Hom(Y, W)$ é isomorfismo. Agora consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ \tau_{\geq 1}(Y) \arrow[r, "\tau_{\geq 1}(g)"] & \tau_{\geq 1}(Z) \end{tikzcd}$$

Logo aplicamos o funtor contravariante $Hom(\_, W)$ e temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(\tau_{\geq 1}(Z), W) \arrow[r, "\tau_{\geq 1}(g)^*"] \arrow[d, "q^*"'] & Hom(\tau_{\geq 1}(Y), W) \arrow[d, "p^*"] \\ Hom(Z, W) \arrow[r, "g^*"] & Hom(Y, W) \end{tikzcd}$$

Como p^* e q^* são isomorfismos, pelo lema 3.12, então $\tau_{\geq 1}(g)^* = (p^*)^{-1} \circ g^* \circ q^*$ é isomorfismo. Mais ainda dado que W é arbitrário podemos demonstrar que $\tau_{\geq 1}(g) : \tau_{\geq 1}(Y) \longrightarrow \tau_{\geq 1}(Z)$ é isomorfismo.

Agora consideremos os morfismos $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{q} \tau_{\geq 1}(Z)$ e definamos $t = q \circ g = \tau_{\geq 1}(g) \circ p$. Por conseguinte, temos o isomorfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq 0}(Y) \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq 0}(Y)}"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_Y"'] & \tau_{\geq 1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\geq 1}(g)"] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq 0}(Y)[1]}"] \\ \tau_{\leq 0}(Y) \arrow[r, "i_Y"] & Y \arrow[r, "t"] & \tau_{\geq 1}(Z) \arrow[r] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \end{tikzcd}$$

E como por definição o triângulo de cima é distinguido, então o triângulo de embaixo é distinguido, no qual aplicamos o axioma de rotação e obtemos o triângulo distinguido $Y \xrightarrow{t} \tau_{\geq 1}(Z) \longrightarrow (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \xrightarrow{-(i_Y)[1]} Y[1]$. Assim mesmo, usando o axioma de rotação nos triângulos distinguidos baseados nos morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $i_Z : \tau_{\leq 0}(Z) \longrightarrow Z$, sendo $t = q \circ g$, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] & Y[1] \arrow[d, "1_{Y[1]}"] \\ Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & \tau_{\geq 1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq 1}(Z)}"] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[r, "-(i_Y)[1]"] & Y[1] \arrow[d, "g[1]"] \\ Z \arrow[r, "q"] & \tau_{\geq 1}(Z) \arrow[r] & (\tau_{\leq 0}(Z))[1] \arrow[r, "-(i_Z)[1]"] & Z[1] \end{tikzcd}$$

O qual pode ser completado pelo axioma do octaedro ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, dashed, "u[1]"] & Y[1] \arrow[d, "1_{Y[1]}"] \\ Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & \tau_{\geq 1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\tau_{\geq 1}(Z)}"] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[r, "-(i_Y)[1]"] \arrow[d, dashed, "v[1]"] & Y[1] \arrow[d, "g[1]"] \\ Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \tau_{\geq 1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & (\tau_{\leq 0}(Z))[1] \arrow[r, "-(i_Z)[1]"] \arrow[d, dashed, "1_{\tau_{\leq 0}(Z)}"] & Z[1] \arrow[d, dashed, "h[1]"] \\ X[1] \arrow[r, dashed, "u[1]"] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[r, dashed, "v[1]"] & (\tau_{\leq 0}(Z))[1] \arrow[r, dashed, "w[1]"] & X[2] \end{tikzcd}$$

onde $X[1] \xrightarrow{u[1]} (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \xrightarrow{v[1]} (\tau_{\leq 0}(Z))[1] \xrightarrow{w[1]} X[2]$ é triângulo distinguido e as linhas horizontais são morfismos de triângulos, então aplicando três vezes o axioma de rotação temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\leq 0}(Z) \arrow[dl, "-w"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "-u"] & & \tau_{\leq 0}(Y) \arrow[ul, "-v"'] \end{tikzcd}$$

no qual todos os seus vértices pertencem na categoria $\mathscr{D}^{\leq 0}$, pois por hipótese $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$. Então, pelo item b) temos a sequência exata

$$H^0(X) \xrightarrow{H^0(-u)} H^0(\tau_{\leq 0}(Y)) \xrightarrow{H^0(-v)} H^0(\tau_{\leq 0}(Z)) \longrightarrow 0\,.$$

Mais ainda, dado que os dois primeiros quadrados na última coluna do diagrama acima comutam, temos as seguintes igualdades, nas quais usamos o fato que T é um funtor aditivo e fiel:

i) $-f[1] = -(i_Y)[1] \circ u[1] = (-i_Y \circ u)[1] \Leftrightarrow f = -i_Y \circ -u$;

ii) $g[1] \circ -(i_Y)[1] = -(i_Z)[1] \circ v[1] \Leftrightarrow (g \circ -i_Y)[1] = (i_Z \circ -v)[1] \Leftrightarrow g \circ -i_Y = i_Z \circ -v$;

Logo temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "-u"] \arrow[d, "1_X"'] & \tau_{\leq 0}(Y) \arrow[r, "-v"] \arrow[d, "-i_Y"'] & \tau_{\leq 0}(Z) \arrow[d, "i_Z"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Assim aplicando o funtor H^0 obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^0(X) \arrow[r, "H^0(-u)"] \arrow[d, "1_{H^0(X)}"'] & H^0(\tau_{\leq 0}(Y)) \arrow[r, "H^0(-v)"] \arrow[d, "H^0(-i_Y)"'] & H^0(\tau_{\leq 0}(Z)) \arrow[d, "H^0(i_Z)"] \\ H^0(X) \arrow[r, "H^0(f)"] & H^0(Y) \arrow[r, "H^0(g)"] & H^0(Z) \end{tikzcd}$$

Por outro lado, como $H^0 = \tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$ e $\tau_{\leq 0}(i_Y) = 1_{\tau_{\leq 0}(Y)}$, então $H^0(-i_Y) = -1_{H^0(Y)}$. Analogamente, $H^0(i_Z) = 1_{H^0(Z)}$. Então o diagrama acima é um isomorfismo de sequências, do qual concluímos que a sequência

$$H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z) \longrightarrow 0$$

é exata.

e) Agora demonstraremos o caso geral. Primeiro consideremos os morfismos

$$\tau_{\leq 0}(X) \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ f\ } Y$$

e definamos $f \circ i = c : \tau_{\leq 0}(X) \longrightarrow Y$, logo temos o triângulo distinguido

$$\tau_{\leq 0}(X) \xrightarrow{\ c\ } Y \xrightarrow{\ u\ } W \longrightarrow (\tau_{\leq 0}(X))[1]\ ,$$

tal que W é o cone. Como $\tau_{\leq 0}(X) \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, então pelo item d) temos a sequência exata

$$H^0(\tau_{\leq 0}(X)) \xrightarrow{\ H^0(c)\ } H^0(Y) \xrightarrow{\ H^0(u)\ } H^0(W) \longrightarrow 0\ .$$

Mais ainda, como $c = f \circ i$ e $1_{H^0(X)} = H^0(i) : H^0(\tau_{\leq 0}(X)) \longrightarrow H^0(X)$, então $H^0(c) = H^0(f) \circ H^0(i) = H^0(f)$ e $H^0(\tau_{\leq 0}(X)) = H^0(X)$. Portanto, temos a sequência exata

$$H^0(X) \xrightarrow{\ H^0(f)\ } H^0(Y) \xrightarrow{\ H^0(u)\ } H^0(W) \longrightarrow 0\ .$$

Assim, $Im(H^0(f)) = Ker(H^0(u))$ (*)

Por outro lado, consideremos o triângulo distinguido baseado no morfismos f e o triângulo distinguido que construímos usando os morfismos de truncamento, juntamente com o triângulo distinguido baseado no morfismo c, logo temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq 0}(X)}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \tau_{\geq 0}(X) \arrow[r] & (\tau_{\leq 0}(X))[1] \arrow[d, "1_{(\tau_{\leq 0}(X))[1]}"] \\
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_Y"] & W \arrow[r] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[d, "i[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

o qual pode ser completado usando o axioma do octaedro, ao o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{\tau_{\leq 0}(X)}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \tau_{\geq 1}(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & (\tau_{\leq 0}(X))[1] \arrow[d, "1_{(\tau_{\leq 0}(X))[1]}"] \\
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_Y"] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v"] & (\tau_{\leq 0}(Y))[1] \arrow[d, "i[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "1_Z"] & X[1] \arrow[d, dashed] \\
\tau_{\geq 1}(X) \arrow[r, dashed] & W \arrow[r, dashed, "v"] & Z \arrow[r, dashed] & (\tau_{\geq 1}(X))[1]
\end{tikzcd}$$

onde $\tau_{\geq 1}(X) \longrightarrow W \xrightarrow{\ v\ } Z \longrightarrow (\tau_{\geq 1}(X))[1]$ é um triângulo distinguido e as linhas horizontais são morfismos de triângulos, logo em particular temos que $g = v \circ u$ e aplicando o axioma de rotação ao último triângulo, temos o seguinte triângulo distinguido

$$
\begin{tikzcd}
 & (\tau_{\geq 1}(X))[1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
W \arrow[rr, "v"] & & Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

no qual $\tau_{\geq 1}(X)[1] \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então pelo item c) temos que a sequência exata

$$0 \longrightarrow H^0(W) \xrightarrow{H^0(v)} H^0(Z) \longrightarrow H^0(\tau_{\geq 1}(X)[1])$$

Então, em particular $H^0(v)$ é monomorfismo (**).
Finalmente, dado que $g = v \circ u$, então $H^0(g) = H^0(v) \circ H^0(u)$, assim de (*) e (**) concluímos que $Im(H^0(f)) = Ker(H^0(u)) = Ker(H^0(g))$, portanto a sequência

$$H^0(X) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(Z)$$

é exata. □

Pelo lema 3.17, sabemos que os funtores de truncamento são aditivos e pela observação 3.22 para $m = n \in \mathbb{Z}$ temos o funtor $\tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq n}$ definido da categoria $\mathscr{D}$ na subcategoria $\mathscr{D}^{[n,n]}$, então o funtor $T^n \circ \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq n}$ esta definido da categoria $\mathscr{D}$ no coração da *t-estrutura*, assim temos a definição seguinte:

Definição 3.39 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos o funtor aditivo $H^n : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ como a composição dos funtores aditivos T^n e $\tau_{\geq n}$ e $\tau_{\leq n}$, isto é, $H^n = T^n \circ \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq n}$.*

As duas proposições seguintes permitem estabelecer definições equivalentes do funtor H^0 que nos ajudarão no cálculo da cohomologia de um objeto qualquer na categoria $\mathscr{D}$.

Proposição 3.40 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, os funtores H^n e $T^n \circ \tau_{\leq n} \circ \tau_{\geq n}$ são isomorfos.*

Demonstração: Pelo lema 3.24 para $m = n \in \mathbb{Z}$, temos que existe um isomorfismo funtorial $\phi : \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq n} \longrightarrow \tau_{\leq n} \circ \tau_{\geq n}$, então, para cada $X \in \mathscr{D}$, existe um isomorfismo $\phi_X : \tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X))$, assim $\gamma_X = T^n(\phi_X) : T^n(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X))) \longrightarrow T^n(\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X)))$ é isomorfismo. Mais ainda, dado um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ temos o diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X)) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(f))"'] & \tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X)) \arrow[d, "\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(f))"] \\
\tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(Y)) \arrow[r, "\varphi_Y"] & \tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(Y))
\end{tikzcd}
$$

assim, aplicando o funtor T^n e a definição 3.39, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^n(X) \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "H^n(f)"'] & T^n(\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X))) \arrow[d, "T^n(\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(f)))"] \\
H^n(Y) \arrow[r, "\gamma_Y"] & T^n(\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(Y)))
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\gamma : H^n \longrightarrow T^n \circ \tau_{\leq n} \circ \tau_{\geq n}$ é isomorfismo funtorial. □

Graças à próxima proposição e o teorema 3.38, podemos afirmar que os os funtores H^n também são funtores de cohomologia.

Proposição 3.41 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, os funtores H^n e $H^0 \circ T^n$ são isomorfos.*

Demonstração: Na demonstração seguinte podemos utilizar o mesmo raciocínio que na prova da proposição 3.40, pois todos os funtores são covariantes.

1) Demonstremos por indução matemática o caso $n > 0$.
   Suponhamos que $n = 1$. Pelo lema 3.14, sabemos que $T\circ\tau_{\geq 1} \cong \tau_{\geq 0}\circ T$ e pela proposição 3.11 sabemos que $\tau_{\leq 1}$ é um funtor covariante, então $(T \circ \tau_{\geq 1}) \circ \tau_{\leq 1} \cong (\tau_{\geq 0} \circ T) \circ \tau_{\leq 1}$, assim pela definição 3.39, temos que $H^1 \cong \tau_{\geq 0} \circ (T \circ \tau_{\leq 1})$. Mas $T \circ \tau_{\leq 1} \cong \tau_{\leq 0} \circ T$ (lema 3.14) e dado que $\tau_{\geq 0}$ é um funtor covariante (proposição 3.11), então $H^1 \cong \tau_{\geq 0} \circ (T \circ \tau_{\leq 1}) \cong \tau_{\leq 0} \circ (\tau_{\geq 0} \circ T) = H^0 \circ T^1$ (definição 3.25).
   Agora suponhamos que para $n = 2$. Então, $H^2 = T^2 \circ \tau_{\geq 2} \circ \tau_{\leq 2} = T \circ (T \circ \tau_{\geq 2}) \circ \tau_{\leq 2} \cong T \circ (\tau_{\geq 1} \circ T) \circ \tau_{\leq 2} \cong T \circ \tau_{\geq 1} \circ (\tau_{\leq 1} \circ T) = H^1 \circ T \cong H^0 \circ T^2$, assim repetindo o processo indefinidamente temos que $H^n \cong H^0 \circ T^n, \forall n > 0$.

2) No caso $n < 0$, primeiro demostramos $T^{-1} \circ \tau_{\leq m} \cong \tau_{\leq m+1} \circ T^{-1}, \forall m \in \mathbb{Z}$. De fato, pelo lema 3.14 sabemos que $T \circ \tau_{\leq m} \cong \tau_{\leq m+1} \circ T$, assim aplicando o funtor covariante T^{-1} temos que $\tau_{\leq m} \cong 1_{\mathscr{D}}\circ\tau_{\leq m} \cong T^{-1}\circ T\circ\tau_{\leq m} \cong T^{-1}\circ\tau_{\leq m+1}\circ T$, então $\tau_{\leq m} \cong T^{-1}\circ\tau_{\leq m+1}\circ T$, portanto, $\tau_{\leq m} \circ T^{-1} \cong T^{-1} \circ \tau_{\leq m+1} \circ T \circ T^{-1} \cong T^{-1} \circ \tau_{\leq m+1} \circ 1_{\mathscr{D}} \cong T^{-1} \circ \tau_{\leq m+1}$.
   Analogamente, podemos demonstrar que $T^{-1} \circ \tau_{\geq m} \cong \tau_{\geq m+1} \circ T^{-1}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
   Por conseguinte, aplicando a definição 3.39, para $n = -1$, temos que $H^{-1} = T^{-1} \circ \tau_{\geq -1} \circ \tau_{\leq -1} \cong \tau_{\geq 0} \circ T^{-1} \circ \tau_{\leq -1} \cong \tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0} \circ T^{-1} = H^0 \circ T^{-1}$.
   Agora suponhamos que $n = -2$, então pela definição 3.39, temos que $H^{-2} = T^{-2} \circ \tau_{\geq -2} \circ \tau_{\leq -2} \cong T^{-1} \circ T^{-1} \circ \tau_{\geq -2} \circ \tau_{\leq -2} \cong T^{-1} \circ \tau_{\geq -1} \circ T^{-1} \circ \tau_{\leq -2} \cong T^{-1} \circ \tau_{\geq -1} \circ \tau_{\leq -1} \circ T^{-1} = H^{-1} \circ T^{-1} \cong H^0 \circ T^{-2}$. Logo, repetindo o processo indefinidamente temos que $H^n \cong H^0 \circ T^n, \forall n < 0$.

□

O próximo lema mostra que os morfismos de truncamento na categoria $\mathscr{D}$ induzem isomorfismos na categoria $\mathscr{A}$ por meio dos funtores de cohomologia H^n.

Lema 3.42 *Seja X um objeto da categoria $\mathscr{D}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Se $i : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ e $q : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ são os morfismos de truncamento, então:*

(i) $H^m(\tau_{\leq n}(X)) = 0$ *para todo* $m > n$ *e* $H^m(i) : H^m(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow H^m(X)$ *é um isomorfismo para todo* $m \leq n$.

(ii) $H^m(\tau_{\geq n}(X)) = 0$ *para todo* $m < n$ *e* $H^m(q) : H^m(X) \longrightarrow H^m(\tau_{\geq n}(X))$ *é um isomorfismo para todo* $m \geq n$.

Demonstração:

(i) No caso $m > n$, $\tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(X)) = 0$ pelo lema 3.18, então aplicando o funtor $T^m \circ \tau_{\leq m}$, temos que $0 = T^m(\tau_{\leq m}(0)) = T^m(\tau_{\leq m}(\tau_{\geq m}(\tau_{\leq n}(X)))) = H^m(\tau_{\leq n}(X))$, pela proposição 3.40.
Agora suponhamos que $m \leq n$, então $\tau_{\leq m}(i) : \tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\leq m}(X)$ é isomorfismo, pelo lema 3.19. Logo aplicando o funtor $T^m \circ \tau_{\geq m}$, obtemos o isomorfismo $T^m(\tau_{\geq m}(\tau_{\leq m}(i))) : T^m(\tau_{\geq m}(\tau_{\leq m}(\tau_{\leq n}(X)))) \longrightarrow T^m(\tau_{\geq m}(\tau_{\leq m}(X)))$, portanto, utilizando a definição 3.39, concluímos que $H^m(i) : H^m(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow H^m(X)$ é um isomorfismo.

(ii) No caso $m < n$, $\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)) = 0$ pelo lema 3.18, então aplicando o funtor $T^m \circ \tau_{\geq m}$, temos que $0 = T^m(\tau_{\geq m}(0)) = T^m(\tau_{\geq m}(\tau_{\leq m}(\tau_{\geq n}(X)))) = H^m(\tau_{\geq n}(X))$, pela definição 3.39.
Agora suponhamos que $m \geq n$, então $\tau_{\geq m}(q) : \tau_{\geq m}(X) \longrightarrow \tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(X))$ é isomorfismo, pelo lema 3.19. Logo aplicando o funtor $T^m \circ \tau_{\leq m}$, obtemos o isomorfismo $T^m(\tau_{\leq m}(\tau_{\geq m}(q))) : T^m(\tau_{\leq m}(\tau_{\geq m}(X)) \longrightarrow T^m(\tau_{\leq m}(\tau_{\geq m}(\tau_{\geq n}(X)))$, portanto, $H^m(q) : H^m(X) \longrightarrow H^m(\tau_{\geq n}(X))$ é um isomorfismo, pela proposição 3.40.

$\square$

O seguinte corolário nos oferece um critério para determinar em quais subcategorias $\mathscr{D}^{\leq n}$ esta um objeto X pertencente à classe $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) \subset \mathscr{D}$. Na próxima seção daremos um exemplo no qual se prova que esta inclusão em geral é estrita e no caso que a igualdade seja satisfeita chamaremos à t-estrutura de **t-estrutura limitada**.

Corolário 3.43 *Seja* $n \in \mathbb{Z}$.

(i) X *é um objeto da categoria* $\mathscr{D}^{\leq n}$*, se e somente se,* $H^m(X) = 0$ *para todo* $m > n$ *e existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $X \in \mathscr{D}^{\leq k}$.

(ii) X *é um objeto da categoria* $\mathscr{D}^{\geq n}$*, se e somente se,* $H^m(X) = 0$ *para todo* $m < n$ *e existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $X \in \mathscr{D}^{\geq k}$.

Demonstração: Fixamos $n \in \mathbb{Z}$.

(i) (a) Se $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ então, pelo lema 3.15, $i : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ é isomorfismo, assim para cada $m \in \mathbb{Z}$ o funtor H^m induz o isomorfismo $H^m(i) : H^m(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow H^m(X)$, então $H^m(X) = H^m(\tau_{\leq n}(X)) = 0$, para todo $m > n$, pelo lema 3.42. Além disso, sendo $k = n$ demonstramos a existência.

(b) Reciprocamente, suponhamos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X \in \mathscr{D}^{\leq k}$. Se $n \geq k$, então $X \in \mathscr{D}^{\leq k} \subset \mathscr{D}^{\leq n}$, pela proposição 3.3. Agora suponhamos que $k > n$, então por hipótese $H^k(X) = 0$ e $X = \tau_{\leq k}(X)$ pelo lema 3.15. Logo, pela definição 3.39 $0 = H^k(X) = T^k(\tau_{\geq k}(\tau_{\leq k}(X))) = T^k(\tau_{\geq k}(X))$, do qual deduzimos que $\tau_{\geq k}(X) = 0$, pois T é uma equivalência de categorias. Portanto, pelo lema 3.15, $X \in D^{\leq k-1}$, assim depois de uma quantidade finita de passos teremos que $X \in D^{\leq n}$.

(ii) (a) Se $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ então, pelo lema 3.15, $q : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ é isomorfismo, assim para cada $m \in \mathbb{Z}$ o funtor H^m induz o isomorfismo $H^m(q) : H^m(X) \longrightarrow H^m(\tau_{\geq n}(X))$, então $H^m(X) = H^m(\tau_{\geq n}(X)) = 0$, para todo $m < n$, pelo lema 3.42. Além disso, sendo $k = n$ demonstramos a existência.

(b) Reciprocamente, suponhamos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X \in \mathscr{D}^{\geq k}$. Se $n \leq k$, então $X \in \mathscr{D}^{\geq k} \subset \mathscr{D}^{\geq n}$, pela proposição 3.3. Agora suponhamos que $k < n$, então por hipótese $H^k(X) = 0$ e $X = \tau_{\geq k}(X)$ pelo lema 3.15. Logo, pela proposição 3.40 $0 = H^k(X) = T^k(\tau_{\leq k}(\tau_{\geq k}(X))) = T^k(\tau_{\leq k}(X))$, do qual deduzimos que $\tau_{\leq k}(X) = 0$, pois T é uma equivalência de categorias. Portanto, pelo lema 3.15, $X \in D^{\geq k+1}$, assim depois de uma quantidade finita de passos teremos que $X \in D^{\geq n}$.

□

O corolário anterior junto com o lema a seguir nos garante que todo objeto $X \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) \subset \mathscr{D}$ tem homologia nula, para cada $n \in \mathbb{Z}$, porém a recíproca não é verdadeira, isto motiva o estudo de t-estruturas não degeneradas, o qual faremos na seguinte seção.

Lema 3.44 *Para cada objeto X da categoria $\mathscr{D}$ temos:*

(i) Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ e $H^m(X) = 0$ para todo $m \leq n$, se e somente se, $X \in \mathscr{D}^{\leq m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$;

(ii) Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ e $H^m(X) = 0$ para todo $m \geq n$, se e somente se, $X \in \mathscr{D}^{\geq m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

(i) (a) Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$. Si $m \geq n$ então, $X \in \mathscr{D}^{\leq n} \subset \mathscr{D}^{\leq m}$, pela proposição 3.3. Por conseguinte, resta demonstrar o caso $m < n$, assim primeiro suponhamos que $m = n - 1$, então pela definição 3.8 podemos construir o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq n}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq m}(X) \arrow[rr, "i"] & & X \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, dado que $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$, então $j : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow X$ é isomorfismo pelo lema 3.15, assim aplicando o funtor $\tau_{\geq n}$ temos o isomorfismo $\tau_{\geq n}(j) : \tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X)) \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$, o que demonstra que $H^n(X) = T^n(\tau_{\geq n}(\tau_{\leq n}(X))) = T^n(\tau_{\geq n}(X))$ e como por hipótese $H^n(X) = 0$, então $T^n(\tau_{\geq n}(X)) = 0$, o equivalentemente $\tau_{\geq n}(X) = 0$, pois T é uma equivalência de categorias, assim aplicando o lema 3.15, temos que $X \in \mathscr{D}^{\leq n-1}$. Logo, repetindo o argumento indefinidamente se demonstra que $X \in \mathscr{D}^{\leq m}$, para todo $m < n$.

(b) Reciprocamente, se $X \in \mathscr{D}^{\leq m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, então em particular $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, mais ainda $X \in \mathscr{D}^{\leq m-1}$, $\forall m \leq 0$, então pelo corolário 3.43, $H^m(X) = 0$ para cada $m \leq 0$.

(ii) (a) Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$. Si $m \leq n$ então, $X \in \mathscr{D}^{\geq n} \subset \mathscr{D}^{\geq m}$, pela proposição 3.3. Por conseguinte, resta demonstrar o caso $m > n$, assim primeiro suponhamos que $m = n + 1$, então pela definição 3.8 podemos construir o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq m}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq n}(X) \arrow[rr, "j"] & & X \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

e aplicando o axioma de rotação, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\leq n}(X)[1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "q"] & & \tau_{\geq m}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, dado que $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$, então $p : X \longrightarrow \tau_{\geq n}(X)$ é isomorfismo pelo lema 3.15, assim aplicando o funtor $\tau_{\leq n}$ temos o isomorfismo $\tau_{\leq n}(p) : \tau_{\leq n}(X) \longrightarrow \tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X))$, então $T^n(\tau_{\leq n}(X)) = T^n(\tau_{\leq n}(\tau_{\geq n}(X))) = H^n(X)$ pela proposição 3.40 e como por hipótese $H^n(X) = 0$, então $T^n(\tau_{\leq n}(X)) = 0$, o equivalentemente $\tau_{\leq n}(X) = 0$, pois T é uma equivalência de categorias, assim aplicando o lema 3.15, temos que $X \in \mathscr{D}^{\geq n+1}$. Logo, repetindo o argumento indefinidamente se demonstra que $X \in \mathscr{D}^{\geq m}$, para todo $m > n$.

(b) Reciprocamente, se $X \in \mathscr{D}^{\geq m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, então em particular $X \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, mais ainda $X \in \mathscr{D}^{\geq m+1}$, $\forall m \geq 0$, então pelo corolário 3.43, $H^m(X) = 0$ para cada $m \geq 0$.

□

3.6 t-estruturas não degeneradas e limitadas.

Nesta seção estudaremos a relação entre as **t-estruturas não degeneradas** (ver [BBD82, p. 32] e as **t-estruturas limitadas**. As definições das mesmas e os resultados apresentamos aqui podem ser consultados por exemplo em [KN11, p. 10] e algumas das suas aplicações podem ser encontradas em [LV12, GKR04]. Neste trabalho, a importância das t-estruturas limitadas fica clara graças ao lema 3.49 e o teorema 3.48, os quais no permitirão restringir o estudo da categoria $\mathscr{D}$ ao coração da t-estrutura por meio do funtor de cohomologia H^n. Mais ainda na seção 4.2 apresentaremos uma definição equivalente à de t-estruturas limitadas e aplicaremos os resultados da atual seção no estudo da compatibilidade de t-estruturas.

Começaremos esta seção respondendo à questão deixada em aberto no capítulo anterior, quando é que o único objeto da categoria $\mathscr{D}$, tal que pertence a $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, é o objeto nulo? (ver proposição 3.7). A resposta à mesma é dada no próximo lema.

Lema 3.45 *Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada e $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura em $\mathscr{D}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) = \{0\}$ *e* $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\geq n}) = \{0\}$;

(ii) Para cada $X \in \mathscr{D}$, $H^p(X) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$, implica $X = 0$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que $X \in \mathscr{D}$ tal que $H^p(X) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$, pela definição 3.8 temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geq 1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau_{\leq 0}(X) \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Além disso, aplicando o lema 3.42, temos que para cada $m \leq 0$, $H^m(\tau_{\leq 0}(X)) = H^m(X)$, então $H^m(\tau_{\leq 0}(X)) = 0$ para todo $m \leq 0$ e como $\tau_{\leq 0}(X) \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, segue do lema 3.44, que $\tau_{\leq 0}(X) \in \mathscr{D}^{\leq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, então $\tau_{\leq 0}(X) = 0$ por hipótese. Assim, utilizando o mesmo

raciocínio provamos que $\tau_{\geq 1}(X) = 0$, portanto, $X = 0$ pelo lema 1.29.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $X \in \mathscr{D}$ tal que $X \in \mathscr{D}^{\leq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, então pelo lema 3.44, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, $H^m(X) = 0$ para todo $m \leq k$ e $X \in \mathscr{D}^{\leq k}$, então pelo corolário 3.43, $H^m(X) = 0$ para todo $m > k$. Por conseguinte, $H^m(X) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$, portanto $X = 0$, por hipótese. Analogamente, podemos provar que se $X \in \mathscr{D}^{\geq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, então $X = 0$.

$\square$

Definição 3.46 *Uma t-estrutura $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ em $\mathscr{D}$, satisfazendo uma das condições do lema 3.45 é chamada não degenerada.*

Exemplo 3.47 *A t-estrutura natural na categoria $\mathscr{D}^*(\mathscr{A})$ de uma categoria abeliana $\mathscr{A}$ é não degenerada.*
Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada. Então $(\{0\}, \mathscr{D})$ é uma t-estrutura em $\mathscr{D}$, na qual $\mathscr{D}^{\leq n} = \{0\}$ e $\mathscr{D}^{\geq n} = \mathscr{D}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, $\tau_{\leq n} = 0$ e $\tau_{\geq n} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $H^p = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, o que demonstra que a t-estrutura é degenerada.

O próximo teorema (o qual é uma melhora do teorema que aparece em [GY03, p. 283]) é um resultado básico e particularmente importante das *t-estruturas* não degeneradas, pois nelas podemos podemos descrever completamente as categorias que formam a *t-estrutura* utilizando exclusivamente os funtores de cohomologia H^n, mais ainda nestas *t-estruturas* para determinar se um morfismo na categoria $\mathscr{D}$ é isomorfismo basta provar que os morfismos induzidos pelos funtores de cohomologia são isomorfismos na categoria abeliana $\mathscr{A}$.

Teorema 3.48 *Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada e $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura em $\mathscr{D}$. Então as condições seguintes são equivalentes:*

(i) A t-estrutura não degenerada em $\mathscr{D}$;

(ii) Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathscr{D}$ é um isomorfismo se e somente se, $H^n(f) : H^n(X) \longrightarrow H^n(Y)$ em $\mathscr{A}$ é um isomorfismo, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(iii) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{D}^{\leq n}$ e $\mathscr{D}^{\geq n}$ são subcategorias plenas, tais que $Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) = \{X \in \mathscr{D} | H^p(X) = 0, \forall p > n\}$ e $Obj(\mathscr{D}^{\geq n}) = \{X \in \mathscr{D} | H^p(X) = 0, \forall p < n\}$.

Demonstração:

- (i) $\Rightarrow$ (ii). Se f é um isomorfismo, então aplicando o funtor H^p, temos que $H^p(f)$ é isomorfismo para cada $p \in \mathbb{Z}$. Reciprocamente, suponhamos que $H^p(f) : H^p(X) \longrightarrow H^p(Y)$ é isomorfismo $\forall\ p \in \mathbb{Z}$, para algum morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, então pelo axioma *(TR1)* temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Logo pelo teorema 3.38, temos a sequência exata

$$H^p(X) \xrightarrow{H^p(f)} H^p(Y) \longrightarrow H^p(Z) \longrightarrow H^{p+1}(X) \xrightarrow{H^{p+1}(f)} H^{p+1}(Y)$$

na categoria abeliana $\mathscr{A}$, por conseguinte temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Coker(H^p(f)) \longrightarrow H^p(Z) \longrightarrow Ker(H^{p+1}(f)) \longrightarrow 0$$

Portanto, $H^p(Z) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$ e dado que a *t-estrutura* é não degenerada, então $Z = 0$. Portanto, pelo lema 1.30, concluímos que f é isomorfismo.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii). Para cada $n \in \mathbb{Z}$, pelo corolário 3.43, temos que $Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) \subset \{X \in \mathscr{D} | H^p(X) = 0, \forall p > n\}$. Agora demonstraremos a inclusão contraria. Assim suponhamos que $X \in \mathscr{D}$ é tal que $H^p(X) = 0, \forall p > n$. Sabemos pelo lema 3.42 que $H^p(\tau_{\geq n+1}(X)) = 0, \forall p < n+1$ e que $H^p(\tau_{\geq n+1}(X)) = H^p(X) = 0, \forall p \geq n+1 > n$, então $H^p(\tau_{\geq n+1}(X)) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, dado que 0 é objeto final na categoria $\mathscr{D}$, então existe um único morfismo $\alpha : \tau_{\geq n+1}(X) \longrightarrow 0$. Logo fixado $p \in \mathbb{Z}$, temos o morfismo $H^p(\alpha) : H^p(\tau_{\geq n+1}(X)) \longrightarrow H^p(0)$ e como $H^p(\tau_{\geq n+1}(X)) = H^p(0) = 0$, então $H^p(\alpha) = 1_0$, o qual é isomorfismo, assim por hipótese α é isomorfismo, isto é, $\tau_{\geq n+1}(X) = 0$, portanto $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$, pelo lema 3.15.

- (iii) $\Rightarrow$ (i). Seja $X \in \mathscr{D}$ tal que $H^p(X) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$, então em particular X satisfaz:

  1) $H^p(X) = 0, \forall p > 0$, assim por hipótese $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, logo $\tau_{\geq 1}(X) = 0$, pelo item a) do lema 3.15, .

  2) $H^p(X) = 0, \forall p < 1$, assim por hipótese $X \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, logo $X = \tau_{\geq 1}(X)$, pelo item b) do lema 3.15.

  Portanto, de 1) e 2) concluímos que $X = 0$.

$\square$

No estudo das *t-estruturas* uma questão importante que temos que levar em consideração é se podemos supor que todo objeto da categoria triangulada pertence a alguma subcategoria $\mathscr{D}^{\leq n}$ ou $\mathscr{D}^{\geq n}$. Daremos exemplos nos quais isto não acontece, mas primeiro apresentaremos uma condição necessária e suficiente no lema a seguir.

Lema 3.49 *Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada e $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura em $\mathscr{D}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\leq n}) = Obj(\mathscr{D})$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Obj(\mathscr{D}^{\geq n}) = Obj(\mathscr{D})$;

(ii) A t-estrutura é não degenerada e para cada $X \in \mathscr{D}$, o conjunto $\{p \in \mathbb{Z} | H^p(X) \neq 0\}$ é finito.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que $X \in \mathscr{D}$ tal que $H^p(X) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}$, então por hipótese existe algum $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X \in \mathscr{D}^{\leq k}$, mais ainda $H^p(X) = 0, \forall p \leq k$, então aplicando o lema 3.44, concluímos que $X \in \mathscr{D}^{\leq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Da mesma maneira demonstramos que $X \in \mathscr{D}^{\geq n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, assim em particular temos que $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $X \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, logo por *(t3)* da definição 3.1, segue que $Hom_{\mathscr{D}}(X, X) = 0$, então $1_X = 0$, portanto $X = 0$, o que demonstra que a *t-estrutura* é não degenerada em $\mathscr{D}$.
Seja X um objeto qualquer na categoria $\mathscr{D}$, por hipótese existem $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $X \in \mathscr{D}^{\leq m}$ e $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$, então pelo corolário 3.43, $H^p(X) = 0, \forall p > m$ e $H^p(X) = 0, \forall p < n$. Portanto, $H^p(X) \neq 0$ no máximo para todos os inteiros p entre m e n inclusive.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja X um objeto qualquer na categoria $\mathscr{D}$, se $X = 0$ então $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ e $X \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, pela proposição 3.7. Suponhamos então que $X \neq 0$, como a *t-estrutura* é não degenerada, então o conjunto $\{p \in \mathbb{Z} | H^p(X) \neq 0\}$ é não vazio e como é finito, então existe um inteiro $m = max\{p \in \mathbb{Z} | H^p(X) \neq 0\}$, em consequência $\forall p > m, H^p(X) = 0$, além disso, pelo lema 3.42, $H^p(\tau_{\geq m+1}(X)) = H^p(X) = 0, \forall p \geq m + 1 > m$ e $H^p(\tau_{\geq m+1}(X)) = 0, \forall p < m + 1$, então $\tau_{\geq m+1}(X) = 0$, pois a *t-estrutura* é não degenerada, portanto $X \in \mathscr{D}^{\leq m}$, pelo lema 3.15. Finalmente, utilizando um raciocínio similar concluímos que $X \in \mathscr{D}^{\geq r}$, onde $r = min\{p \in \mathbb{Z} | H^p(X) \neq 0\}$.

$\square$

Definição 3.50 *Uma t-estrutura* $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ *em* $\mathscr{D}$*, satisfazendo uma das condições do lema 3.49 é chamada limitada.*

Exemplo 3.51 *Seja* $\mathscr{A}$ *uma categoria abeliana. Então a t-estrutura natural na categoria derivada limitada* $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ *é limitada. Porém as t-estruturas naturais nas categorias* $\mathscr{D}^+(\mathscr{A})$, $\mathscr{D}^-(\mathscr{A})$ *e* $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ *não são limitadas. Outro exemplo de t-estrutura não limitada em* $\mathscr{D}$ *é o par de subcategorias* $(\{0\}, \mathscr{D})$.

Capítulo 4

Aisles e t-estruturas

No presente capítulo apresentaremos alguns resultados de Keller e Vossieck introduzidos em [KV88b]. Ao investigar as relações entre os corações de duas t-estruturas sobre uma categoria triangulada Keller e Vossieck, apresentaram condições necessárias e suficientes para que duas t-estruturas sejam compatíveis. Este conceito permite obter uma generalização da teoria da dualidade desenvolvida por Grothendieck e Roos para anéis comutativos regulares e a teoria de inclinação utilizada na investigação de álgebras de dimensão finita.

Observação 4.1 *A notação e os enunciados dos teoremas principias do presente capítulo foram retomados do artigo [HHK07, p. 84-90], mas os demonstrações dos mesmos são baseadas nas encontradas no artigo [KV88b].*

Ao longo deste capítulo suporemos que $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada com funtor suspensão T.

4.1 Aisles

Nesta seção introduziremos a noção de **Aisles** e estabeleceremos a equivalência com as **t-estruturas**, ver [KV88a, p. 2]. Além disso, apresentamos uma demonstração alternativa do lema que aparece no artigo [Hap88, p. 58] referente ao par de torção numa categoria triangulada (veja o corolário 4.8), mas antes disso iremos definir e provar as propriedades básicas da **categoria ortogonal**.

Definição 4.2 *Um aisle em $\mathscr{D}$ é uma subcategoria plena e aditiva $\mathscr{U}$ de $\mathscr{D}$ que satisfaz as seguintes condições:*

a) $T\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$, *b) $\mathscr{U}$ é estável por extensões, isto é, para cada triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

na categoria $\mathscr{D}$ tem-se que $Y \in \mathscr{U}$, sempre que $X \in \mathscr{U}$ e $Z \in \mathscr{U}$,

c) a inclusão canônica $\mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{D}$ admite um funtor adjunto à direita $\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{U}$, $X \mapsto X_{\mathscr{U}}$.

Antes de continuar nosso estudo sobre aisles e t-estruturas, discutiremos brevemente a noção de **categoria ortogonal** e sua estrutura algebraica básica, a qual iremos a utilizar no resto do capítulo.

Definição 4.3 *Seja $\mathscr{V}$ uma subcategoria de $\mathscr{D}$. Denotaremos por $\mathscr{V}^{\perp}$ (respetivamente $^{\perp}\mathscr{V}$) a subcategoria plena determinada pelos objetos $Y \in \mathscr{D}$ tais que $Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) = 0$ (respetivamente $Hom_{\mathscr{D}}(Y,X) = 0$) para todo objeto $X \in \mathscr{V}$.*

Proposição 4.4 *Sejam $\mathscr{V}^{\perp}$ e $^{\perp}\mathscr{V}$ as categorias dadas na definição 4.3, então $\mathscr{V}^{\perp}$ e $^{\perp}\mathscr{V}$ são subcategorias estritamente plenas e aditivas da categoria $\mathscr{D}$.*

Demonstração: Faremos a demonstração somente para a subcategoria $\mathscr{V}^{\perp}$.

a) A categoria $\mathscr{V}^{\perp}$ é estritamente plena. Seja Y' um objeto na categoria $\mathscr{D}$ e suponhamos que existe um isomorfismo $f : Y' \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$ tal que $Y \in V^{\perp}$, isto é, $Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) = 0$ para cada $X \in \mathscr{V}$. Suponhamos que $g \in Hom_{\mathscr{D}}(X,Y')$, então $f \circ g = 0$ e como f é monomorfismo, então $g = 0$, portanto $Hom_{\mathscr{D}}(X,Y') = 0$, assim por definição $Y' \in \mathscr{V}^{\perp}$, então $f \in Hom_{\mathscr{D}}(Y,Y') = Hom_{\mathscr{V}^{\perp}}(Y,Y')$.

b) A categoria $\mathscr{V}^{\perp}$ é aditiva.

A1) Dado que $\mathscr{D}$ é uma categoria aditiva e $\mathscr{V}^{\perp}$ é uma subcategoria plena então, dados dois objetos X e Y na categoria $\mathscr{V}^{\perp}$, então $Hom_{\mathscr{V}^{\perp}}(X,Y)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos $Hom_{\mathscr{V}^{\perp}}(Y,Z) \times Hom_{\mathscr{V}^{\perp}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{V}^{\perp}}(X,Z)$ é bilinear nos inteiros.

A2) Seja 0 o objeto nulo da categoria $\mathscr{D}$, então por definição, para cada $X \in \mathscr{V}$ temos que $Hom_{\mathscr{D}}(X,0) = 0$, portanto, $0 \in \mathscr{V}^{\perp}$.

A3) Dados os objetos X e Y na categoria $\mathscr{V}^{\perp}$, como $\mathscr{D}$ é uma categoria aditiva então um coproduto $X \oplus Y \in \mathscr{D}$ tal que, $i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y = 1_{X \oplus Y}$, onde $i_X : X \longrightarrow X \oplus Y$ e $i_Y : Y \longrightarrow X \oplus Y$ são os morfismos inclusão. Suponhamos que $f \in Hom_{\mathscr{D}}(Z, X \oplus Y)$ tal que $Z \in \mathscr{V}$, então $p_X \circ f \in Hom_{\mathscr{D}}(Z,X) = 0$ e $p_Y \circ f \in Hom_{\mathscr{D}}(Z,Y) = 0$, logo $f = 1_{X \oplus Y} \circ f = i_X \circ p_X \circ f + i_Y \circ p_Y \circ f = 0$, portanto $X \oplus Y \in \mathscr{V}^{\perp}$.

□

No próximo teorema estabelecemos condições necessárias e suficientes em termos da categoria ortogonal para que uma subcategoria $\mathscr{U}$ de $\mathscr{D}$ seja um aisle. O enunciado original se encontra em [HHK07, p.23]. A prova que apresentamos aqui é uma versão que pode ser encontrada em [KV88a].

Teorema 4.5 *Uma subcategoria $\mathscr{U}$ de $\mathscr{D}$ é um aisle, se e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

a') $T\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$;

b') $\mathscr{U}$ é estritamente plena;

c') para cada objeto X da categoria $\mathscr{D}$ existe um único triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & X^{\mathscr{U}^{\perp}} \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

com $X_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$ e $X^{\mathscr{U}^{\perp}} \in \mathscr{U}^{\perp}$.

Demonstração: Suponhamos que $\mathscr{U}$ é um aisle. Provaremos então que:

i) $\mathscr{U}$ é estritamente plena. Se $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo na categoria $\mathscr{D}$ e $X \in \mathscr{U}$, então pelo axioma $TR1$ existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

e pela proposição 1.30 sabemos que $Z = 0$ na categoria $\mathscr{D}$, isto é, existe um isomorfismo $\lambda : Z \longrightarrow 0$ e dado que $0 \in \mathscr{U}$ (ver proposição 3.7), segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "1_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & X[1] \arrow[d, "1_X[1]"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0_{\mathscr{U}} \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de triângulos, logo pelo axioma TR1 o triângulo

$$\begin{tikzcd} & 0_{\mathscr{U}} \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é distinguido, então pelo item b) da definição 4.2 segue que $Y \in \mathscr{U}$, portanto $f \in Hom_{\mathscr{D}}(X,Y) = Hom_{\mathscr{U}}(X,Y)$, pois $\mathscr{U}$ é plena.

ii) $\mathscr{U}$ satisfaz a condição c'). Suponhamos que $X \in \mathscr{D}$, pelo item c) da definição 4.2 temos a bijeção $\Phi_{X_{\mathscr{U}},X} : Hom_{\mathscr{U}}(X_{\mathscr{U}}, X_{\mathscr{U}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, X)$, onde $X_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$. Logo definindo o morfismo $\sigma_X = \Phi_{X_{\mathscr{U}},X}(1_{X_{\mathscr{U}}})$, pelo axioma TR1 existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\varepsilon"', "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "\sigma_X"] & & X \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Agora demonstraremos que $Y \in \mathscr{U}^{\perp}$. De fato dado um objeto $V \in \mathscr{U}$ e um morfismo $f \in Hom_{\mathscr{D}}(V,Y)$, então $\varepsilon \circ f \in Hom_{\mathscr{D}}(V, X_{\mathscr{U}}[1])$, assim pelo axioma TR1 e dado que T é uma equivalência de categorias existe um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & W[1] \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ V \arrow[rr, "\varepsilon\circ f"] & & X_{\mathscr{U}}[1] \arrow[ul, "-h{[1]}"'] \end{tikzcd}$$

Por conseguinte, aplicando duas vezes o axioma TR2, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varepsilon\circ f"', "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "h"] & & W \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Então pelo item b) da definição 4.2, $W \in \mathscr{U}$, pois $V \in \mathscr{U}$ e $X_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$. Mais ainda, dado que $\varepsilon \circ f = 1_{X_{\mathscr{U}}} \circ (\varepsilon \circ f)$, então pelo axioma TR3, existe um morfismo

$g \in Hom_{\mathscr{D}}(W, X)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathscr{U}} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_{X_{\mathscr{U}}}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"'] & V \arrow[r, "\varepsilon \circ f"] \arrow[d, "f"'] & X_{\mathscr{U}}[1] \arrow[d, "1_{X_{\mathscr{U}}}[1]"] \\
X_{\mathscr{U}} \arrow[r, "\sigma_X"] & X \arrow[r, "\psi"] & Y \arrow[r, "\varepsilon"] & X_{\mathscr{U}}[1]
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos.

Por outro lado, dado que $\mathscr{U}$ é uma subcategoria plena, então $h \in Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, W) = Hom_{\mathscr{U}}(X_{\mathscr{U}}, W)$, logo pelo item c) da definição 4.2 o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{U}}(X_{\mathscr{U}}, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\Phi_{X_{\mathscr{U}},X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, X) \\
Hom_{\mathscr{U}}(W, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\Phi_{W,X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{U}}(h,X_{\mathscr{U}})"] & Hom_{\mathscr{D}}(W, X) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(h,X)"']
\end{tikzcd}$$

comuta, no qual $\Phi_{W,X}$ é uma bijeção, então existe um único morfismo $g' \in Hom_{\mathscr{U}}(W, X_{\mathscr{U}})$ tal que $\Phi_{W,X}(g') = g$, mais ainda, $[Hom_{\mathscr{D}}(h, X) \circ \Phi_{W,X}](g') = [\Phi_{X_{\mathscr{U}},X} \circ Hom_{\mathscr{U}}(h, X_{\mathscr{U}})](g')$ assim, temos que $\Phi_{X_{\mathscr{U}},X}(1_{X_{\mathscr{U}}}) = \sigma_X = g \circ h = \Phi_{X_{\mathscr{U}},X}(g' \circ h)$, e dado que $\Phi_{X_{\mathscr{U}},X}$ é uma bijeção, concluímos que $g' \circ h = 1_{X_{\mathscr{U}}}$. Em particular, h é um monomorfismo e como T é uma equivalência de categorias, então $h[1]$ é monomorfismo, e dado que $-h[1] \circ (\varepsilon \circ f) = 0$ pelo lema 1.22, então $\varepsilon \circ f = 0$

Pela proposição 1.20, aplicada ao triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\varepsilon"', "{[1]}"] & \\
X_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "\sigma_X"] & & X \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

temos a sequência exata

$$\begin{array}{c}
Hom_{\mathscr{D}}(V, X_{\mathscr{U}}) \xrightarrow{(\sigma_X)_*} Hom_{\mathscr{D}}(V, X) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathscr{D}}(V, Y) \xrightarrow{\varepsilon_*} Hom_{\mathscr{D}}(V, X_{\mathscr{U}}[1]) \\
\hfill f \longmapsto \varepsilon_*(f) = \varepsilon \circ f = 0
\end{array}$$

Assim, $f \in Ker(\varepsilon_*) = Im(\psi_*)$, então existe um morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{D}}(V, X)$ tal que $f = \psi_*(\alpha) = \psi \circ \alpha$. Além disso, pelo item c) da definição 4.2 temos a bijeção $\Phi_{V,X} : Hom_{\mathscr{U}}(V, X_{\mathscr{U}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(V, X)$, então existe um único morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{U}}(V, X_{\mathscr{U}})$ tal que $\alpha = \Phi_{V,X}(\beta)$, mais ainda, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{U}}(V, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\Phi_{V,X}"] & Hom_{\mathscr{D}}(V, X) \\
Hom_{\mathscr{U}}(X_{\mathscr{U}}, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\Phi_{X_{\mathscr{U}},X}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{U}}(\beta,X_{\mathscr{U}})"] & Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, X) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(\beta,X)"']
\end{tikzcd}$$

comuta, logo $[Hom_{\mathscr{D}}(\beta, X) \circ \Phi_{X_{\mathscr{U}},X}](1_{X_{\mathscr{U}}}) = [\Phi_{V,X} \circ Hom_{\mathscr{U}}(\beta, X_{\mathscr{U}})](1_{X_{\mathscr{U}}})$, por conseguinte, temos que $\Phi_{X_{\mathscr{U}},X}(1_{X_{\mathscr{U}}}) \circ \beta = \Phi_{V,X}(1_{X_{\mathscr{U}}} \circ \beta)$, então $\sigma_X \circ \beta = \alpha$, portanto $f = \psi \circ \sigma_X \circ \beta = 0$, pelo lema 1.22 aplicado ao triângulo distinguido baseado no morfismo σ_X.

Finalmente, para demonstrar a unicidade, suponhamos existe um outro triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que $X' \in \mathscr{U}$ e $Y' \in \mathscr{U}^{\perp}$, então $Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, Y') = 0$ e como T é uma equivalência de categorias então $Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, Y'[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}[1], Y') = 0$, pois $X_{\mathscr{U}}[1] \in \mathscr{U}$ pelo item a) da definição 4.2, portanto o morfismo 1_X induz um isomorfismo de triângulos (ver demonstração na página 54, capítulo 3)

$$\begin{tikzcd} X_{\mathscr{U}} \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed] & X_{\mathscr{U}}[1] \arrow[d, dashed] \\ X' \arrow[r] & X \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\mathscr{U}$ satisfaz a') e b') e c'). Então:

1) Existe um funtor adjunto à direita da inclusão canônica. Para cada objeto X da categoria $\mathscr{D}$ existe um único triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & X^{\mathscr{U}^{\perp}} \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "f"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

com $X_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$ e $X^{\mathscr{U}^{\perp}} \in \mathscr{U}^{\perp}$, assim pela proposição 1.20, temos a sequência exata

$$Hom_{\mathscr{D}}(U, X^{\mathscr{U}^{\perp}}[-1]) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U, X_{\mathscr{U}}) \xrightarrow{f_*} Hom_{\mathscr{D}}(U, X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U, X^{\mathscr{U}^{\perp}})$$

Logo, supondo que $U \in \mathscr{U}$ então, $Hom_{\mathscr{D}}(U, X^{\mathscr{U}^{\perp}}) = 0$, pois $X^{\mathscr{U}^{\perp}} \in \mathscr{U}^{\perp}$. Mais ainda, dado que T é uma equivalência de categorias então, $Hom_{\mathscr{D}}(U, X^{\mathscr{U}^{\perp}}[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(U[1], X^{\mathscr{U}^{\perp}}) = 0$, pois $U[1] \in \mathscr{U}$. Por conseguinte, $f_* : Hom_{\mathscr{U}}(U, X_{\mathscr{U}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(U, X)$ é um isomorfismo para cada $U \in \mathscr{U}$.

Além disso, dado outro objeto $Y \in \mathscr{D}$, existe um único triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & Y^{\mathscr{U}^\perp} \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
Y_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "g"] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

tal que $Y_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$ e $Y^{\mathscr{U}^\perp} \in \mathscr{U}^\perp$. Assim, $Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, Y^{\mathscr{U}^\perp}) = 0$, e dado que T é uma equivalência de categorias, então $Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}, Y^{\mathscr{U}^\perp}[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}[1][-1], Y^{\mathscr{U}^\perp}[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}[1], Y^{\mathscr{U}^\perp}) = 0$, pois $X_{\mathscr{U}}[1] \in \mathscr{U}$, por hipótese. Então dado o morfismo $h : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{D}$, pelo lema 1.31 existe um único morfismo $h_{\mathscr{U}} : X_{\mathscr{U}} \longrightarrow Y_{\mathscr{U}}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathscr{U}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h_{\mathscr{U}}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & X^{\mathscr{U}^\perp} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X_{\mathscr{U}}[1] \arrow[d, dashed, "h_{\mathscr{U}}[1]"] \\
Y_{\mathscr{U}} \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & Y^{\mathscr{U}^\perp} \arrow[r] & Y_{\mathscr{U}}[1]
\end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos. Logo aplicando o funtor covariante $Hom_{\mathscr{D}}(U, \_)$ e o fato que $\mathscr{U}$ é subcategoria plena de $\mathscr{D}$, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{U}}(U, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(U,f)"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{U}}(U,h_{\mathscr{U}})"'] & Hom_{\mathscr{D}}(U, X) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{D}}(U,h)"] \\
Hom_{\mathscr{U}}(U, Y_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(U,g)"] & Hom_{\mathscr{D}}(U, Y)
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, dado um morfismo $\alpha : U \longrightarrow V$ na subcategoria $\mathscr{U}$, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{U}}(U, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(U,f)"] & Hom_{\mathscr{D}}(U, X) \\
Hom_{\mathscr{U}}(V, X_{\mathscr{U}}) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{D}}(V,f)"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{U}}(\alpha,X_{\mathscr{U}})"] & Hom_{\mathscr{D}}(V, X) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(\alpha,X_{\mathscr{U}})"']
\end{tikzcd}$$

Com o qual verificamos a condição c) da definição 4.2.

2) $\mathscr{U}$ é estável por extensões. Suponhamos que

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
U \arrow[rr, "f'"] & & X \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

é um triângulo distinguido em $\mathscr{D}$ tal que $U \in \mathscr{U}$ e $V \in \mathscr{U}$. Dado o morfismo

$g : X \longrightarrow Y$ onde $Y \in \mathscr{U}^{\perp}$, pelo axiomas (TR1) e (TR2) temos que o triângulo

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ Z[-1] \arrow[rr] & & X \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

é distinguido e como $g \circ f' \in Hom(U, Y)$, então $g \circ 1_X \circ f' = 0$, logo pela proposição 1.31, existe um morfismo $w : V \longrightarrow Y$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] & X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "1_X"'] & V \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"'] & U[1] \\ Z[-1] \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

comuta, isto é $g = w \circ g'$ e dado que $Hom(V, Y) = 0$, então $w = 0$, assim $g = 0$. Portanto, $Hom(X, Y) = 0$, $\forall Y \in \mathscr{U}^{\perp}$. Em particular temos que $Hom(X, X^{\mathscr{U}^{\perp}}) = 0$, por conseguinte aplicando a proposição 1.20 ao triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & X^{\mathscr{U}^{\perp}} \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr, "f"] & & X \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd}$$

obtemos a sequência exata

$$Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}[1], X^{\mathscr{U}^{\perp}}) \xrightarrow{h*} Hom_{\mathscr{D}}(X^{\mathscr{U}^{\perp}}, X^{\mathscr{U}^{\perp}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(X, X^{\mathscr{U}^{\perp}}) = 0$$

Então h^* é epimorfismo e como $Hom_{\mathscr{D}}(X_{\mathscr{U}}[1], X^{\mathscr{U}^{\perp}}) = 0$, então $1_{X^{\mathscr{U}^{\perp}}} = h^*(0) = 0 \circ h = 0$, portanto, $X^{\mathscr{U}^{\perp}} = 0$. Por conseguinte, $f : X_{\mathscr{U}} \longrightarrow X$ é isomorfismo, pelo lema 1.30, então $X \in \mathscr{U}$. Com o qual verificamos a condição b) da definição 4.2.

3) A categoria $\mathscr{U}$ é aditiva.

A1) Dado que $\mathscr{D}$ é uma categoria aditiva e $\mathscr{U}$ é uma subcategoria plena então, dados dois objetos U e V na categoria $\mathscr{U}$, então $Hom_{\mathscr{U}}(U, V)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos $Hom_{\mathscr{U}}(V, W) \times Hom_{\mathscr{U}}(U, V) \to Hom_{\mathscr{U}}(U, W)$ é bilinear nos inteiros.

A2) Seja 0 o objeto nulo da categoria $\mathscr{D}$. Dado que $\mathscr{U}$ satisfaz o item c) da definição 4.2, $Hom_{\mathscr{U}}(0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{U}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(0_{\mathscr{U}}, 0)$ é uma bijeção. Por outro lado, sabemos que existe um único morfismo $\alpha : 0 \longrightarrow 0_{\mathscr{U}}$ e um único morfismo $\beta : 0_{\mathscr{U}} \longrightarrow 0$ na categoria $\mathscr{D}$, então $\beta \circ \alpha \in Hom_{\mathscr{D}}(0, 0)$ e $\alpha \circ \beta \in Hom_{\mathscr{D}}(0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{U}}) = Hom_{\mathscr{U}}(0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{U}})$

pois $\mathscr{U}$ é plena, então pela unicidade temos que $\alpha \circ \beta = 1_{0_{\mathscr{U}}}$ e $\beta \circ \alpha = 1_0$, portanto $\beta : 0_{\mathscr{U}} \longrightarrow 0$ é um isomorfismo e dado que $\mathscr{U}$ é estritamente plena, então $0 \in \mathscr{U}$.

A3) Dados os objetos U e V na categoria $\mathscr{U}$, pelo corolário 1.27 o triângulo

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & U \oplus V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é distinguido na categoria $\mathscr{D}$, então pelo item anterior temos que $U \oplus V$ é um objeto na categoria $\mathscr{U}$.

$\square$

A noção semelhante à de separabilidade em topologia é a de **par de torção** (Ver definição 1.12) em categoria aditivas, a qual se presenta naturalmente no estudo de aisle, como se demonstra no teorema a continuação.

Teorema 4.6 *Se $\mathscr{U}$ é um aisle da categoria triangulada $\mathscr{D}$, então $(\mathscr{U}, \mathscr{U}^{\perp})$ é um par de torção em $\mathscr{D}$.*

Demonstração: Dado que $\mathscr{D}$ é uma categoria aditiva e $(\mathscr{U}, \mathscr{U}^{\perp})$ é um par de subcategorias plenas em $\mathscr{D}$, somente devemos demonstrar que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall X \in \mathscr{U}$ e $\forall Y \in \mathscr{U}^{\perp}$, se satisfaz por definição de $\mathscr{U}^{\perp}$.

(ii) Se $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall Y \in \mathscr{U}^{\perp}$ então $X \in \mathscr{U}$. Esta condição é demonstrada no final do item 2) da prova do teorema 4.5.

(iii) Se $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = 0,\ \forall X \in \mathscr{U}$ então $Y \in \mathscr{U}^{\perp}$. Pelo item c') do teorema 4.5, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y^{\mathscr{U}^{\perp}} \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ Y_{\mathscr{U}} \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

com $Y_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$ e $Y^{\mathscr{U}^{\perp}} \in \mathscr{U}^{\perp}$. Então, $Y_{\mathscr{U}}[1] \in \mathscr{U}$, pela condição a) da definição 4.2, mais ainda pelo axioma *(TR2)* e pela hipótese temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Y_{\mathscr{U}}[1] \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "u"] & & Y^{\mathscr{U}^{\perp}} \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

então pelo corolário 1.27, existe $s \in Hom_{\mathscr{D}}(Y_{\mathscr{U}}[1], Y^{\mathscr{U}^\perp})$ tal que $v \circ s = 1_{Y_{\mathscr{U}}[1]}$, mas $Hom_{\mathscr{D}}(Y_{\mathscr{U}}[1], Y^{\mathscr{U}^\perp}) = 0$. Logo $1_{Y_{\mathscr{U}}[1]} = 0$ o que implica que $Y_{\mathscr{U}}[1] = 0$, por conseguinte do lema 1.30 deduzimos que $u : Y \longrightarrow Y^{\mathscr{U}^\perp}$ é um isomorfismo e como a subcategoria $\mathscr{U}^\perp$ é estritamente plena como se demonstra na proposição 4.4, concluímos que $Y \in \mathscr{U}^\perp$.

□

A seguir demonstraremos que a noção de Aisle e de t-estrutura (ver definição 3.1) são equivalentes.

Teorema 4.7 *A aplicação $\mathscr{U} \mapsto (\mathscr{U}, T\mathscr{U}^\perp)$ é uma bijeção entre os aisles $\mathscr{U}$ em $\mathscr{D}$ e as t-estruturas em $\mathscr{D}$.*

Demonstração:

1. Dado um aisle $\mathscr{U}$ na categoria $\mathscr{D}$, pelo teorema 4.5, sabemos que $\mathscr{U}$ é estritamente plena. Por outro lado, pela proposição 4.4 sabemos que $\mathscr{U}^\perp$ é estritamente plena, então $T\mathscr{U}^\perp$ é estritamente plena, pois T é uma equivalência de categorias. Resta então demonstrar que o par de subcategorias $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^\perp)$ da categoria $\mathscr{D}$ satisfazem as condições da definição 3.1. De fato, sejam $\mathscr{U}^{\leq 0} = \mathscr{U}$ e $\mathscr{U}^{\geq 0} = T\mathscr{U}^\perp$, então temos que:

   (t1) Denotemos por $\mathscr{U}^{\leq 1} = T^{-1}\mathscr{U}$ e $\mathscr{U}^{\geq 1} = T^{-1}T\mathscr{U}^\perp$, então

   a) $\mathscr{U}^{\leq 0} \subset \mathscr{U}^{\leq 1}$. Seja $X \in \mathscr{U}$ então $X[1] \in \mathscr{U}$, pois $\mathscr{U}$ é aisle, então $X[1][-1] \in \mathscr{U}^{\leq 1}$ e dado que X e $X[1][-1]$ são isomorfismos então $X \in \mathscr{U}^{\leq 1}$

   b) $\mathscr{U}^{\geq 0} \supset \mathscr{U}^{\geq 1}$. Suponhamos que $Y \in \mathscr{U}^{\geq 1}$, então existe $X \in \mathscr{U}^\perp$ tal que $Y = X[1][-1] = X[-1][1]$, mais ainda dado $U \in \mathscr{U}$ temos que $Hom_{\mathscr{D}}(U, X[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(U[1][-1], X[-1]) = Hom_{\mathscr{D}}(U[1], X) = 0$, pois $U[1] \in \mathscr{U}$, portanto $X[-1] \in \mathscr{U}^\perp$ e $Y \in T\mathscr{U}^\perp$.

   (t2) Dado $X \in \mathscr{U}$ e $Y \in \mathscr{U}^{\geq 1}$, existe $Y_0 \in \mathscr{U}^\perp$ tal que $Y = Y_0[1][-1]$, então $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) = Hom_{\mathscr{D}}(X[1], Y[1]) = Hom_{\mathscr{D}}(X[1], Y_0[1]) = Hom_{\mathscr{D}}(X, Y_0) = 0$, pois T é uma equivalência de categorias.

   (t3) Para cada $X \in \mathscr{D}$, pelo teorema 4.5, existe um único triângulo distinguido da forma

$$\begin{tikzcd} & X^{\mathscr{U}^\perp} \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X_{\mathscr{U}} \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

   com $X_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U} = \mathscr{U}^{\leq 0}$ e $X^{\mathscr{U}^\perp} \in \mathscr{U}^\perp = \mathscr{U}^{\geq 1}$.

2. Seja $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura na categoria $\mathscr{D}$. Então

(a) $\mathscr{D}^{\leq 0}$ satisfaz as condições do teorema 4.5.

a') Suponhamos que $Y \in T\mathscr{D}^{\leq 0}$ então existe um objeto $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$ tal que $Y = X[1] \in \mathscr{D}^{\leq -1}$, pelo item a) da proposição 3.3, então, $Y \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, pois pelo item b) da proposição 3.3 $\mathscr{D}^{\leq -1} \subset \mathscr{D}^{\leq 0}$. Portanto, $T\mathscr{D}^{\leq 0} \subset \mathscr{D}^{\leq 0}$.

b') Por definição de t-estrutura, temos que $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é uma subcategoria estritamente plena da categoria $\mathscr{D}$.

c') $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura então, pelo lema 3.9 para cada $X \in \mathscr{D}$ existe um único triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geq 1}(X) \arrow[dl, "r"', "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[rr, "i"] & & X \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd}$$

Além disso pela definição 3.1 temos que $Hom_{\mathscr{D}}(U, \tau_{\geq 1}(X)) = 0$ para todo $U \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, assim $\tau_{\geq 1}(X) \in (\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$.

Portanto, $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é um aisle.

(b) $\mathscr{D}^{\geq 0} = T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$.

i. $\mathscr{D}^{\geq 0} \subset T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$. Dado $Y \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, então $Y[-1] \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, assim pelo lema 3.5 temos que $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y[-1]) = 0$ para todo $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, então $Y[-1] \in (\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$, por conseguinte, $Y[-1][1] \in T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$, portanto $Y \in T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$, pois $T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$ é estritamente plena.

ii. $\mathscr{D}^{\geq 0} \supset T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$. Suponhamos que $Y \in T(\mathscr{D}^{\geq 0})^{\perp}$, então existe um objeto $X \in (\mathscr{D}^{\geq 0})^{\perp}$ tal que $Y = X[1]$, assim o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
0 \arrow[rr, "0"] & & X \arrow[ul, "1_X"']
\end{tikzcd}$$

satisfaz as condições do teorema 4.5. Por outro lado, pela definição 3.8, o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geq 1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\tau_{\leq 0}(X) \arrow[rr, "0"] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

é distinguido. Então, pela unicidade no teorema 4.5, os objetos X e $\tau_{\geq 1}(X)$ são isomorfismos, portanto $X \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, assim pela proposição 3.3, $Y = X[1] \in \mathscr{D}^{\geq 0}$.

□

Os teoremas acima nos permitem dada uma t-estrutura em $\mathscr{D}$ podemos construir um par de torção nessa categoria. Uma demonstração alternativa deste fato pode ser encontrada em [Hap88, p.58].

Corolário 4.8 *Seja $\mathscr{D}$ uma categoria triangulada com t-estrutura $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$, então $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 1})$ é um par de torção em $\mathscr{D}$.*

Demonstração: Dada a *t-estrutura* $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ em $\mathscr{D}$, pelo teorema 4.7, temos que $\mathscr{D}^{\leq 0}$ é um aisle em $\mathscr{D}$ tal que $\mathscr{D}^{\geq 0} = T(\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$ ou equivalentemente $\mathscr{D}^{\geq 1} = (\mathscr{D}^{\leq 0})^{\perp}$, portanto $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 1})$ é um par de torção em $\mathscr{D}$, pelo teorema 4.6. □

4.2 Compatibilidade de t-estruturas.

Nesta seção definiremos a noção de compatibilidade de t-estruturas e suas propriedades, introduzidas nos artigos [KV88b] e [HHK07, pags. 88-90]. Primeiramente iremos supor que o aisle $\mathscr{U}$ é compatível com o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ ou que o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ com o aisle $\mathscr{U}$ (ver proposições 4.10 e 4.12). Posteriormente, na sub-seção 4.2.1 iremos supor que $\mathscr{U}$ é compatível com o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ e que o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ com o aisle $\mathscr{U}$, o qual nos permitirá obter subcategorias equivalentes nas t-estruturas em jogo, motivo pelo qual precisamos definir objetos **q-fechados**, assim como os morfismos entre eles aos quais chamaremos de **q-quasi-isomorfismo**. Já na sub-seção 4.2.2 iremos demonstrar que no caso de t-estruturas limitadas as condições da proposição 4.10 são suficientes.

Na seção anterior demonstramos que dado o aisle $\mathscr{U}$ na categoria triangulada $\mathscr{D}$ podemos associar a *t-estruturas* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ na categoria $\mathscr{D}$, cujo coração é $\mathscr{A} = \mathscr{U} \cap T\mathscr{U}^{\perp}$ (veja definição 3.27). Mais ainda, denotando por $\mathscr{U}^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{U}^{\leq 0})$ e $\mathscr{U}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{U}^{\geq 0})$, onde $\mathscr{U}^{\leq 0} = \mathscr{U}$ e $\mathscr{U}^{\geq 0} = T\mathscr{U}^{\perp}$, então pelo lema 3.12, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que:

(i) $\tau^{\mathscr{U}}_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{U}^{\leq n}$ é adjunto à direta do funtor inclusão $I : \mathscr{U}^{\leq n} \longrightarrow \mathscr{D}$;

(ii) $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{U}^{\geq n}$ é adjunto à esquerda do funtor inclusão $J : \mathscr{U}^{\geq n} \longrightarrow \mathscr{D}$.

onde os funtores de truncamento são definidos pelos triângulos distinguidos da forma

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq n+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
\tau^{\mathscr{U}}_{\leq n}(X) \arrow[rr] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

para cada $X \in \mathscr{D}$, de acordo com a definição 3.8.

Nosso objetivo agora é comparar a *t-estrutura* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ com uma segunda *t-estrutura*

$(\mathscr{V}, T\mathscr{V}^{\perp})$ na categoria $\mathscr{D}$ associada ao aisle $\mathscr{V}$ e cujo coração é $\mathscr{B} = \mathscr{V} \cap T\mathscr{V}^{\perp}$ (veja definição 3.27). Mais ainda, denotando por $\mathscr{V}^{\leq n} = T^{-n}(\mathscr{V}^{\leq 0})$ e $\mathscr{V}^{\geq n} = T^{-n}(\mathscr{V}^{\geq 0})$, onde $\mathscr{V}^{\leq 0} = \mathscr{V}$ e $\mathscr{V}^{\geq 0} = T\mathscr{V}^{\perp}$, então pelo lema 3.12, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que:

(i) $\tau^{\mathscr{V}}_{\leq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{V}^{\leq n}$ é adjunto à direta do funtor inclusão $I' : \mathscr{V}^{\leq n} \longrightarrow \mathscr{D}$;

(ii) $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq n} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{V}^{\geq n}$ é adjunto à esquerda do funtor inclusão $J' : \mathscr{V}^{\geq n} \longrightarrow \mathscr{D}$.

onde os funtores de truncamento são definidos pelos triângulos distinguidos da forma

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq n+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau^{\mathscr{V}}_{\leq n}(X) \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

para cada $X \in \mathscr{D}$, de acordo com a definição 3.8.

Logo definimos os funtores de cohomología relativos a cada um dos aisles $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ como na definição 3.39 e a proposição 3.41:

a) $H^n_{\mathscr{U}} = T^n \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\geq n} \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\leq n} \cong T^n \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\leq n} \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\geq n} \cong H^0_{\mathscr{U}} \circ T^n : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$;

b) $H^n_{\mathscr{V}} = T^n \circ \tau^{\mathscr{V}}_{\geq n} \circ \tau^{\mathscr{V}}_{\leq n} \cong T^n \circ \tau^{\mathscr{V}}_{\leq n} \circ \tau^{\mathscr{V}}_{\geq n} \cong H^0_{\mathscr{V}} \circ T^n : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{B}$.

Além disso, definindo $\mathscr{A}^{\geq n} = \mathscr{A} \cap \mathscr{V}^{\geq n}$ e $\mathscr{B}^{\leq n} = \mathscr{B} \cap \mathscr{U}^{\leq n}$, então pela proposição 3.3 e o lema 3.17 e o lema 3.16, obtemos as filtrações de $\mathscr{A}$ e de $\mathscr{B}$ pelas subcategorias estritamente plenas e aditivas e estáveis por extensões
$\mathscr{A} \supset \ldots \supset \mathscr{A}^{\geq n-1} \supset \mathscr{A}^{\geq n} \supset \mathscr{A}^{\geq n+1} \supset \ldots$ e $\ldots \subset \mathscr{B}^{\leq n-1} \subset \mathscr{B}^{\leq n} \subset \mathscr{B}^{\leq n+1} \subset \ldots \subset \mathscr{B}$.

Agora começaremos nosso estudo sobre compatibilidade, motivo pelo qual daremos uma definição precisa deste novo conceito e a seguir deduziremos as propriedades básicas que se derivam da sua definição.

Definição 4.9 *Dizemos que o aisle $\mathscr{U}$ é compatível com o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ se $\mathscr{U}$ é estável pelo funtor de truncamento $\tau^{\mathscr{V}}_{\leq n}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, isto é $\tau^{\mathscr{V}}_{\leq n}\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 4.10 *Se $\mathscr{U}$ é compatível com $\mathscr{V}^{\perp}$ então*

a) Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{U}$ é estável pelo funtor de truncamento $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq n}$.

b) $Obj(\mathscr{U}) \subset \{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

c) $H^p_{\mathscr{U}} H^q_{\mathscr{V}} \mathscr{U} = 0$, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $p + q > 0$.

d) Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{B}$, tal que $X \in \mathscr{B}^{\leq n}$ e $Y \in \mathscr{B}^{\leq n-1}$ tem-se que: $Ker(f) \in \mathscr{B}^{\leq n}$ e $Coker(f) \in \mathscr{B}^{\leq n-1}$.

Demonstração: Fixado $n \in \mathbb{Z}$.

a) Para cada $X \in \mathscr{U}$, pela definição 3.8 temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
\tau_{\leq n-1}^{\mathscr{V}}(X) \arrow[rr] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

assim pelo axioma TR2 o triângulo

$$\begin{tikzcd}
& \tau_{\leq n-1}^{\mathscr{V}}(X)[1] \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr] & & \tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}(X) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

é distinguido. Além disso, por hipótese de compatibilidade $\tau_{\leq n-1}^{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{U}$, assim pelo item a) da definição 4.2 temos que $\tau_{\leq n-1}^{\mathscr{V}}(X)[1] \in \mathscr{U}$ e como por hipótese $X \in \mathscr{U}$ então $\tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{U}$ pelo item b) da definição 4.2.

b) Pelo item a), $\tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{U}$, quando $X \in \mathscr{U}$, o que implica que $\tau_{\leq n}^{\mathscr{V}}(\tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}(X)) \in \mathscr{U}$ pela hipótese de compatibilidade. Logo, $H_{\mathscr{V}}^{n}(X) = (\tau_{\leq n}^{\mathscr{V}}\tau_{\geq n}^{\mathscr{V}}X)[-(-n)] \in \mathscr{U}^{\leq -n}$ e como $H_{\mathscr{V}}^{n}(X) \in \mathscr{B}$ por definição do funtor $H_{\mathscr{V}}^{n}$, então $H_{\mathscr{V}}^{n}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$.

c) Dados $X \in \mathscr{U}$ e $q \in \mathbb{Z}$, do item b) segue que $H_{\mathscr{V}}^{q}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -q}$, logo $H_{\mathscr{V}}^{q}(X) \in \mathscr{U}^{\leq -q}$ portanto $H_{\mathscr{U}}^{p}H_{\mathscr{V}}^{q}(X) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p > -q$ (corolário 3.43).

d) Dado $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{B}$, seja

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

o triângulo distinguido baseado em f. Então pelo axioma TR2 o triângulo

$$\begin{tikzcd}
& X[1] \arrow[dl, "-f[1]"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

é distinguido, além disso, por hipótese $X \in \mathscr{B}^{\leq n} \subset \mathscr{U}^{\leq n}$ então $X[1] \in \mathscr{U}^{\leq n-1}$, proposição 3.3 e como $Y \in \mathscr{B}^{\leq n-1} \subset \mathscr{U}^{\leq n-1}$, pelo lema 3.16 concluímos que $Z \in \mathscr{U}^{\leq n-1}$, portanto existe $Z_0 \in \mathscr{U}$ tal que $Z = Z_0[-(n-1)]$. Por conseguinte, aplicando o lema 3.34 e a proposição 3.41 e o item b) temos que

(i) $Coker(f) = C = H^0_{\mathscr{V}}(Z) = H^0_{\mathscr{V}}(Z_0[-(n-1)]) = H^{-(n-1)}_{\mathscr{V}}(Z_0) \in \mathscr{B}^{\leq n-1}$;

(ii) $Ker(f) = K = H^0_{\mathscr{V}}(Z[-1]) = H^0_{\mathscr{V}}(Z_0[-n]) = H^{-n}_{\mathscr{V}}(Z_0) \in \mathscr{B}^{\leq n}$.

$\square$

Analogamente definiremos e listaremos as propriedades da compatibilidade do co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ com o aisle $\mathscr{U}$, como a seguir.

Definição 4.11 *Dizemos que o co-aisle $\mathscr{V}^{\perp}$ é compatível com o aisle $\mathscr{U}$ se $\mathscr{V}^{\perp}$ é estável pelo funtor de truncamento $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq n}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, isto é $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq n}\mathscr{V}^{\perp} \subset \mathscr{V}^{\perp}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 4.12 *Se $\mathscr{V}^{\perp}$ é compatível com $\mathscr{U}$ então*

a) Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{V}^{\perp}$ é estável pelo funtor de truncamento $\tau^{\mathscr{U}}_{\leq n}$.

b) $Obj(\mathscr{V}^{\perp}) \subset \{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{A}^{\geq 1-n}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

c) $H^p_{\mathscr{V}} H^q_{\mathscr{U}} \mathscr{V}^{\perp} = 0$, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $p + q < 1$.

d) Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{A}$, tal que $X \in \mathscr{A}^{\geq n}$ e $Y \in \mathscr{A}^{\geq n-1}$ tem-se que: $Ker(f) \in \mathscr{A}^{\geq n}$ e $Coker(f) \in \mathscr{A}^{\geq n-1}$.

4.2.1 Ligações entre os corações de t-estruturas compatíveis

No que segue suporemos que $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ são compatíveis, isto é, $\mathscr{U}$ é compatível com $\mathscr{V}^{\perp}$ (definição 4.9) e $\mathscr{V}^{\perp}$ é compatível com $\mathscr{U}$ (definição 4.11). Veremos no final desta sub-seção que a hipótese de compatibilidade é suficiente para encontrar subcategorias dos corações equivalentes nas t-estruturas induzidas pelos aisles $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$, mais ainda provaremos que os funtores de cohomologia $H^n_{\mathscr{U}}$ e $H^{-n}_{\mathscr{V}}$ induzem funtores adjunto, ver teorema 4.36. Mas primeiro consideremos a seguinte construção:

Fixado um inteiro q, de acordo com a definição 3.8, para cada $N \in \mathscr{B}$ temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N) \arrow[rr] & & N \arrow[ul, "p_N"'] \end{tikzcd}$$

Assim aplicando o teorema 3.38, temos a sequência exata longa de cohomologia:

$$H^{-1}_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) \longrightarrow N_{\leq q} \longrightarrow H^0_{\mathscr{V}}(N) \xrightarrow{t_N} N_{>q} \longrightarrow H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) \longrightarrow H^1_{\mathscr{V}}(N)$$

onde $t_N = H^0_{\mathscr{V}}(p_N)$, $N_{\leq q} = H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N))$, $N_{>q} = H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))$. Além disso, como $N \in \mathscr{B}$ então $N = H^0_{\mathscr{V}}(N)$ pelo lema 3.15, mais ainda pelo corolário 3.43, $H^1_{\mathscr{V}}(N) = 0$ e $N[-1] \in \mathscr{V}^{\geq 1} = \mathscr{V}^{\perp}$ pela proposição 3.3. Logo sendo que $\mathscr{V}^{\perp}$ é compatível com $\mathscr{U}$,

então $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+2}(N[-1]) \in \mathscr{V}^{\perp}$, do qual junto com o lema 3.14 deduzimos que $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+2}(N[-1])[1] \in T\mathscr{V}^{\perp} = \mathscr{V}^{\geq 0}$, portanto $H^{-1}_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) = 0$, corolário 3.43.
Do anterior obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow N_{\leq q} \longrightarrow N \xrightarrow{t_N} N_{>q} \longrightarrow H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) \longrightarrow 0$$

na categoria abeliana $\mathscr{B}$, então $Ker(t_N) = N_{\leq q}$ e $Coker(t_N) = H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N))$.
Como $\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N) \in \mathscr{U}^{\leq q}$, então $\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N) = X[-q]$ tal que $X \in \mathscr{U}$. Assim, dado que $\mathscr{U}$ é compatível com $\mathscr{V}^{\perp}$, da proposição 4.10 segue que:

(1) $N_{\leq q} = H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) = H^0_{\mathscr{V}}(X[-q]) = H^{-q}_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq q}$

(2) $H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) = H^1_{\mathscr{V}}(X[-q]) = H^{1-q}_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq q-1}$

Finalmente, dado que $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \in \mathscr{V}^{\geq 0}$, então $N_{>q} = H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) = \tau^{\mathscr{V}}_{\leq 0}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))$.

A continuação apresentamos uma descrição intrínseca dos termos que formam a sequência exata curta acima.

Proposição 4.13 *Dado $N \in \mathscr{B}$:*

a) $N_{\leq q}$ é o maior sub-objeto de N contido na subcategoria $\mathscr{B}^{\leq q}$.

b) Se $N \in \mathscr{U}^{\leq q}$ e $M \in \mathscr{B}$ é um quociente de N, então $M \in \mathscr{B}^{\leq q}$, isto é, $\mathscr{B}^{\leq q}$ é estável por quocientes.

Demonstração: Primeiro demonstraremos a seguinte afirmação: Para cada morfismo $h : M \longrightarrow N$ tal que $M \in \mathscr{B}^{\leq q}$, tem-se $t_N \circ h = 0$, onde $t_N : N \longrightarrow N_{>q}$ é o morfismo na seguinte sequência exata

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "t_N \circ h"] & & & \\
0 \arrow[r] & N_{\leq q} \arrow[r] & N \arrow[r, "t_N"] & N_{>q} \arrow[r] & H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De fato, dado que $M \in \mathscr{B} \cap \mathscr{U}^{\leq q}$ e $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \in \mathscr{U}^{\geq q+1}$, então aplicando os lemas 3.5 e 3.12 temos que:

$$t_N \circ h \in Hom_{\mathscr{B}}(M, N_{>q}) = Hom_{\mathscr{V}^{\leq 0}}(M, \tau^{\mathscr{V}}_{\leq 0}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))) = Hom_{\mathscr{D}}(M, \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) = 0$$

a) Por definição temos que $N_{\leq q} = Ker(t_N) \in \mathscr{B}^{\leq q}$, assim $N_{\leq q}$ é um subobjeto de N. Suponhamos que $M \in \mathscr{B}^{\leq q}$ é outro subobjeto de N, então existe um monomorfismo $f : M \longrightarrow N$, logo pela afirmação acima temos que $t_N \circ f = 0$, assim pela propriedade universal do kernel, existe um único morfismo $\phi : M \longrightarrow N_{\leq q}$, tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dashed, "\phi"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ 0 \arrow[r] & N_{\leq q} \arrow[r] & N \arrow[r, "t_N"] & N_{>q} \end{tikzcd}$$

b) Por hipótese M é um quociente de N, então existe um epimorfismo $g : N \longrightarrow M$. Por outro lado, como $M \in \mathscr{B}$ então podemos construir o morfismo $t_M : M \longrightarrow M_{>q}$, tal que a sequência seguinte é exata na categoria $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "t_M \circ g"] & & & \\ 0 \arrow[r] & M_{\leq q} \arrow[r] & M \arrow[r, "t_M"] & M_{>q} \arrow[r] & H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(M)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e como $N \in \mathscr{B}^{\leq q}$ por hipótese, então $t_M \circ g = 0$, por conseguinte $t_M = 0$, portanto $M = Ker(t_M) = M_{\leq q} \in \mathscr{B}^{\leq q}$.

□

A próxima definição na qual estabelecemos o conceito de **q-quasi-isomorfismo**, se inspira no item d) da proposição 4.10.

Definição 4.14 *Dizemos que um morfismo $t : N \longrightarrow N'$ da categoria $\mathscr{B}$ é um q-quasi-isomorfismo, se $Ker(t) \in \mathscr{B}^{\leq q}$ e $Coker(t) \in \mathscr{B}^{\leq q-1}$.*

Exemplo 4.15 *Para cada $N \in \mathscr{B}$ o morfismo $t_N : N \longrightarrow N_{>q}$ é um q-quasi-isomorfismo, pois $Ker(t_N) = N_{\leq q} \in \mathscr{B}^{\leq q}$ e $Coker(t_N) = H^1_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N)) \in \mathscr{B}^{\leq q-1}$.*

O conceito de **q-fechado** esta intimamente associado ao de **q-quasi-isomorfismo**, pois são estes objetos os que induzem isomorfismos de grupos abelianos ao aplicar o funtor $Hom_{\mathscr{B}}(t, \_)$, onde o morfismo t é um q-quasi-isomorfismo, assim temos a definição:

Definição 4.16 *Um objeto $M \in \mathscr{B}$ é chamado de q-fechado se para cada q-quasi-isomorfismo $t : N \longrightarrow N'$ a função*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathscr{B}}(N', M) &\xrightarrow{Hom_{\mathscr{B}}(t,M)} Hom_{\mathscr{B}}(N, M) \\ \alpha &\longmapsto t^*(\alpha) = \alpha \circ t \end{aligned}$$

é uma bijeção.

O lema garante que cada objeto do coração da t-estrutura tem associado um objeto q-fechado, intuitivamente podemos dizer que projetamos a categoria $\mathscr{B}$ na subcategoria dos q-fechados, ver proposição 4.22.

Lema 4.17 *Dado $N \in \mathscr{B}$, o objeto $N_{>q}$ é q-fechado.*

Demonstração: Devemos demonstrar que se $f : X \longrightarrow Y$ é um *q-quasi-isomorfismo* então

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{B}}(Y, N_{>q}) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{B}}(f,N_{>q})} & Hom_{\mathscr{B}}(X, N_{>q}) \\ \alpha & \longmapsto & f^*(\alpha) \end{array}$$

é uma bijeção. De fato, dado que $N_{>q} = \tau^{\mathscr{V}}_{\leq 0}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))$, então pelo lema 3.12 o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{V}^{\leq 0}}(X, N_{>q}) \arrow[r, "\Psi_{X,N}"] & Hom_{\mathscr{D}}(X, \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) \\ Hom_{\mathscr{V}^{\leq 0}}(Y, N_{>q}) \arrow[r, "\Psi_{Y,N}"] \arrow[u, "Hom_{\mathscr{V}^{\leq 0}}(f,N_{>q})"] & Hom_{\mathscr{D}}(Y, \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{D}}(f,\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))"'] \end{tikzcd}$$

onde $\Psi_{X,N}$ e $\Psi_{Y,N}$ são bijeções. Por conseguinte, só resta provar que $Hom_{\mathscr{D}}(f, \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))$ é uma bijeção.

Por hipótese $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo entre os objetos X e Y da categoria $\mathscr{B}$, assim pelo lema 3.32, dado o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ K[1] \arrow[rr] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

no qual $K = Ker(f)$ e $C = Coker(f)$, pelo lema 3.34. Então, pela definição 4.14, $K \in \mathscr{B}^{\leq q} \subset \mathscr{U}^{\leq q}$ e $C \in \mathscr{B}^{\leq q-1} \subset \mathscr{U}^{\leq q-1}$, assim $K[1] \in\subset \mathscr{U}^{\leq q-1}$ pela proposição 3.3, logo pelo lema 3.16 concluímos que $Z \in \mathscr{U}^{\leq q-1}$. Por outro lado, pela proposição 1.20 temos a sequência exata de grupos abelianos, com $U = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \in \mathscr{U}^{\geq q+1}$

$$Hom_{\mathscr{D}}(Z, U) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(Y, U) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{D}}(f,U)} Hom_{\mathscr{D}}(X, U) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(Z[-1], U)$$

Mas $Z \in \mathscr{U}^{\leq q-1}$ então $Z[-1] \in \mathscr{U}^{\leq q}$ e como $U \in \mathscr{U}^{\geq q+1}$, do lema 3.5, segue que: $Hom_{\mathscr{D}}(Z, U) = Hom_{\mathscr{D}}(Z[-1], U) = 0$. Portanto, $Hom_{\mathscr{D}}(f, U) = Hom_{\mathscr{D}}(f, \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N))$ é uma bijeção. $\square$

Na proposição nos fornece de dois critérios para determinar se um objeto da categoria $\mathscr{B}$ é q-fechado.

Proposição 4.18 *Dado $N \in \mathscr{B}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) N é q-fechado.

2) $t_N : N \longrightarrow N_{>q}$ é um isomorfismo.

3) Existe um M q-fechado isomorfo a N.

Demonstração: Por hipótese temos que $N \in \mathscr{B}$. Logo as seguintes implicações são verdadeiras:

- 1) $\Rightarrow$ 2). Suponhamos que N é *q-fechado*, pelo exemplo 4.15 temos que $t_N : N \longrightarrow N_{>q}$ é um *q-quasi-isomorfismo*, então

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathscr{B}}(N_{>q}, N) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{B}}(N, N) \\ \alpha & \longmapsto & Hom_{\mathscr{B}}(t_N, N)(\alpha) = \alpha \circ t_N \end{array}$$

  é uma bijeção. Consequentemente, dado $1_N \in Hom_{\mathscr{B}}(N, N)$ existe um único morfismo $s_N \in Hom_{\mathscr{B}}(N_{>q}, N)$, tal que $s_N \circ t_N = Hom_{\mathscr{B}}(t_N, N)(s_N) = 1_N$.
  Por outro lado, dado que $N_{>q}$ é *q-fechado*, então

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathscr{B}}(N_{>q}, N_{>q}) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{B}}(N, N_{>q}) \\ \beta & \longmapsto & Hom_{\mathscr{B}}(t_N, N_{>q})(\beta) = \beta \circ t_N \end{array}$$

  é uma bijeção e como

$$Hom_{\mathscr{B}}(t_N, N_{>q})(t_N \circ s_N) = (t_N \circ s_N) \circ t_N = t_N \circ (s_N \circ t_N) = t_N = Hom_{\mathscr{B}}(t_N, N_{>q})(1_{N_{>q}})$$

  então $t_N \circ s_N = 1_{N_{>q}}$. Portanto, $t_N : N \longrightarrow N_{>q}$ é um isomorfismo.

- 2) $\Rightarrow$ 3). Pelo lema 4.17 sabemos que $N_{>q}$ é *q-fechado*, assim basta tomar $M = N_{>q}$.

- 3) $\Rightarrow$ 1). Suponhamos que existe um isomorfismo $\phi : N \longrightarrow M$ com M *q-fechado*. Se $f : X \longrightarrow Y$ um *q-quasi-isomorfismo* então

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathscr{B}}(Y, M) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{B}}(X, M) \\ \beta & \longmapsto & Hom_{\mathscr{B}}(f, M)(\beta) = \beta \circ f \end{array}$$

  é uma bijeção. Agora provemos que

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathscr{B}}(Y, N) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{B}}(X, N) \\ \alpha & \longmapsto & Hom_{\mathscr{B}}(f, N)(\alpha) = \alpha \circ f \end{array}$$

  é uma bijeção. De fato,

a) Sobrejetiva. Dado $h \in Hom_{\mathscr{B}}(X,N)$, então $\phi \circ h \in Hom_{\mathscr{B}}(X,M)$, assim existe um morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{B}}(Y,M)$ tal que $\beta \circ f = \phi \circ h$ ou equivalentemente $\phi^{-1} \circ \beta \circ f = h$ e como $\phi^{-1} \circ \beta \in Hom_{\mathscr{B}}(Y,N)$, então $Hom_{\mathscr{B}}(f,N)(\phi^{-1} \circ \beta) = h$.

b) Injetiva. Sejam $\alpha : Y \longrightarrow N$ e $\gamma : Y \longrightarrow N$ morfismos na categoria $\mathscr{B}$, tais que $Hom_{\mathscr{B}}(f,N)(\alpha) = Hom_{\mathscr{B}}(f,N)(\alpha)$ o que equivale a $\alpha \circ f = \gamma \circ f$, então $\phi \circ \alpha \circ f = \phi \circ \gamma \circ f$ e como $\phi \circ \alpha \in Hom_{\mathscr{B}}(Y,M)$ e $\phi \circ \gamma \in Hom_{\mathscr{B}}(Y,M)$, então $Hom_{\mathscr{B}}(f,M)(\phi \circ \alpha) = Hom_{\mathscr{B}}(f,M)(\phi \circ \gamma)$, logo $\phi \circ \alpha = \phi \circ \gamma$, pois $Hom_{\mathscr{B}}(f,M)$ é injetiva, e como ϕ é isomorfismo, concluímos que: $\alpha = \gamma$.

$\square$

Definição 4.19 *Denotaremos por $\mathscr{B}_q$ à subcategoria plena de $\mathscr{B}$ cujos objetos são os q-fechado, isto é, $M \in \mathscr{B}_q$ se e somente se M é q-fechado.*

Observação 4.20 *Pela proposição 4.18, $\mathscr{B}_q$ é uma subcategoria estritamente plena de $\mathscr{B}$.*

Agora analisemos o que acontece com os morfismo da categoria $\mathscr{B}$ ao projetar-los na subcategoria $\mathscr{B}_q$.

Suponhamos que $f : N \longrightarrow N'$ é um morfismo na categoria $\mathscr{B}$, pela definição 3.10, existe um único morfismo $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(f) : \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \longrightarrow \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N')$ tal que o diagrama seguinte é um morfismo de triângulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N) \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r, "p_N"] \arrow[d, "f"'] & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N) \arrow[r] \arrow[d, "\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(f)"] & (\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N))[1] \arrow[d] \\
\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N') \arrow[r] & N' \arrow[r, "p_{N'}"] & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N') \arrow[r] & (\tau^{\mathscr{U}}_{\leq q}(N'))[1]
\end{tikzcd}$$

Assim aplicando o funtor $H^0_{\mathscr{V}}$ no quadrado do meio temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^0_{\mathscr{V}}(N) \arrow[r, "H^0_{\mathscr{V}}(p_N)"] \arrow[d, "H^0_{\mathscr{V}}(f)"'] & H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N)) \arrow[d, "H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(f))"] \\
H^0_{\mathscr{V}}(N') \arrow[r, "H^0_{\mathscr{V}}(p_{N'})"] & H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(N'))
\end{tikzcd}$$

Do qual temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t_N"] \arrow[d, "f"'] & N_{>q} \arrow[d, "f_q"] \\
N' \arrow[r, "t_{N'}"] & N'_{>q}
\end{tikzcd}$$

onde $f_q = H^0_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}(f))$. Finalmente, dado que $H^0_{\mathscr{V}}$ e $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}$ são funtores covariantes então $H^0_{\mathscr{V}} \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1}$ é um funtor covariante. Isto motiva a definição seguinte:

Definição 4.21 *O funtor $P = H^0_{\mathscr{V}} \circ \tau^{\mathscr{U}}_{\geq q+1} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}_q$ é tal que $P(N) = N_{>q}$ para cada $N \in \mathscr{B}$ e $P(f) = f_q$ para cada morfismo $f \in \mathscr{B}$.*

Finalmente demonstraremos que o funtor projeção e o funtor inclusão formam um par adjunto. Mais concretamente temos o seguinte resultado:

Proposição 4.22 *O funtor $P : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}_q$ é adjunto à esquerda do funtor inclusão $I : \mathscr{B}_q \longrightarrow \mathscr{B}$.*

Demonstração: Dado o objeto $X \in \mathscr{B}$ e o objeto $M \in \mathscr{B}_q$, pelo exemplo 4.15 sabemos que $t_X : X \longrightarrow X_{>q}$ é um *q-quasi-isomorfismo*, então da definição 4.16 temos a bijeção

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, M) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{B}}(t_X, M)} & Hom_{\mathscr{B}}(X, M) \\ \alpha & \longmapsto & t^*_X(\alpha) \end{array}$$

Assim chamando de $\phi_{X,M}$ à inversa de t^*_X, obtemos a bijeção

$$Hom_{\mathscr{B}}(X, I(M)) \xrightarrow{\phi_{X,M}} Hom_{\mathscr{B}}(P(X), M)$$

Além disso, temos que demonstrar a comutatividade dos diagramas seguintes:

i) Dado o morfismo $f : X \longrightarrow Y$ na categoria $\mathscr{B}$ temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{B}}(X, I(M)) \arrow[r, "\phi_{X,M}"] & Hom_{\mathscr{B}_q}(P(X), M) \\ Hom_{\mathscr{B}}(Y, I(M)) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{B}}(f, I(M))"] \arrow[r, "\phi_{Y,M}"] & Hom_{\mathscr{B}_q}(P(Y), M) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{B}_q}(P(f), M)"'] \end{tikzcd}$$

O que equivale a demonstrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, M) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{B}}(t_X, M)"] & Hom_{\mathscr{B}}(X, M) \\ Hom_{\mathscr{B}}(Y_{>q}, M) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{B}}(f_q, M)"] \arrow[r, "Hom_{\mathscr{B}}(t_Y, M)"] & Hom_{\mathscr{B}}(Y, M) \arrow[u, "Hom_{\mathscr{B}}(f, M)"'] \end{tikzcd}$$

Onde o morfismo $f_q : X_{>q} \longrightarrow Y_{>q}$ faz comutar o diagrama faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "f"'] & X_{>q} \arrow[d, "f_q"] \\ Y \arrow[r, "t_Y"] & Y_{>q} \end{tikzcd}$$

Logo, basta somente aplicar o funtor contravariante $Hom_{\mathscr{B}}(\_, M)$ neste último diagrama.

ii) Seja $u : M \longrightarrow N$ um morfismo na categoria $\mathscr{B}_q$. Devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{B}}(X, I(M)) \arrow[r, "\phi_{X,M}"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{B}}(X,I(u))"'] & Hom_{\mathscr{B}_q}(P(X), M) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{B}_q}(P(X),u)"] \\
Hom_{\mathscr{B}}(X, I(N)) \arrow[r, "\phi_{X,N}"] & Hom_{\mathscr{B}_q}(P(X), N)
\end{tikzcd}$$

comuta ou equivalentemente, demonstrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, M) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{B}}(t_X,M)"] \arrow[d, "Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q},u)"'] & Hom_{\mathscr{B}}(X, M) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{B}}(X,u)"] \\
Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, N) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{B}}(t_X,N)"] & Hom_{\mathscr{B}}(X, N)
\end{tikzcd}$$

De fato, para cada morfismo $\gamma \in Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, M)$, temos:

a) $(Hom_{\mathscr{B}}(X, u) \circ Hom_{\mathscr{B}}(t_X, M))(\gamma) = Hom_{\mathscr{B}}(X, u)(\gamma \circ t_X) = u \circ (\gamma \circ t_X)$

b) $(Hom_{\mathscr{B}}(t_X, N) \circ Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, u))(\gamma) = Hom_{\mathscr{B}}(t_X, N)(u \circ \gamma) = (u \circ \gamma) \circ t_X$

Segue de a) e b) que: $Hom_{\mathscr{B}}(X, u) \circ Hom_{\mathscr{B}}(t_X, M) = Hom_{\mathscr{B}}(t_X, N) \circ Hom_{\mathscr{B}}(X_{>q}, u)$.

□

Um resultado imediato da proposição anterior é que a restrição do funtor projeção à subcategoria dos q-fechados é quasi-inverso do funtor identidade sobre esta sub-categoria.

Proposição 4.23 *O funtor $\widetilde{P} : \mathscr{B}_q \longrightarrow \mathscr{B}_q$, tal que $\widetilde{P}(N) = P(N)$ para cada $N \in \mathscr{B}_q$ é isomorfo ao funtor identidade $1_{\mathscr{B}_q} : \mathscr{B}_q \longrightarrow \mathscr{B}_q$.*

Demonstração: Pela definição do morfismo f_q, temos que para cada $N \in \mathscr{B}$, $t_N : N \longrightarrow P(N)$ é uma transformação natural. Por outro lado, dado $N \in \mathscr{B}_q$ temos o isomorfismo $t_N : 1_{\mathscr{B}_q}(N) \longrightarrow \widetilde{P}(N)$, proposição 4.18. □

A continuação apresentamos um resumo das definições e propriedades duais demonstradas anteriormente.

Para cada $M \in \mathscr{A}$ construímos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
& \tau^{\mathscr{V}}_{\geq q}(M) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\tau^{\mathscr{V}}_{\leq q-1}(M) \arrow[rr, "i_M"] & & M \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Do qual podemos construir a sequência exata

$$0 \longrightarrow H^{-1}_{\mathscr{U}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq q}(M)) \longrightarrow M_{<q} \xrightarrow{s_M} M \longrightarrow M_{\geq q} \longrightarrow 0$$

na categoria abeliana $\mathscr{A}$, onde $s_M = H^0_{\mathscr{U}}(i_{_M})$, $M_{\geq q} = H^0_{\mathscr{U}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq q}(M))$, $M_{<q} = H^0_{\mathscr{U}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\leq q-1}(M))$.

Proposição 4.24 *Dado $M \in \mathscr{A}$:*

a) $M_{\geq q}$ é o maior quociente de M contido na subcategoria $\mathscr{A}^{\geq q}$.

b) Se $M \in \mathscr{V}^{\geq q}$ e $N \in \mathscr{A}$ é um subobjeto de M, então $N \in \mathscr{A}^{\geq q}$, isto é, $\mathscr{A}^{\geq q}$ é estável por subobjetos.

Definição 4.25 *Dizemos que um morfismo $s : M \longrightarrow M'$ da categoria $\mathscr{A}$ é um q-co-quasi-isomorfismo, se $Ker(s) \in \mathscr{A}^{\geq q+1}$ e $Coker(s) \in \mathscr{A}^{\geq q}$.*

Exemplo 4.26 *Para cada $M \in \mathscr{A}$ o morfismo $s_M : M_{<q} \longrightarrow M$ é um q-co-quasi-isomorfismo, pois $Ker(s_M) = H^{-1}_{\mathscr{U}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq q}(M)) \in \mathscr{A}^{\geq q+1}$ e $Coker(s_M) = M_{\geq q} \in \mathscr{A}^{\geq q}$.*

Definição 4.27 *Um objeto $N \in \mathscr{A}$ é chamado de q-co-fechado se para cada q-co-quasi-isomorfismo $s : M \longrightarrow M'$ a função*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{A}}(N, M) & \xrightarrow{Hom_{\mathscr{A}}(N,s)} & Hom_{\mathscr{A}}(N, M') \\ \beta & \longmapsto & s_*(\beta) = s \circ \beta \end{array}$$

é uma bijeção.

Exemplo 4.28 *Dado $M \in \mathscr{A}$, o objeto $M_{<q}$ é q-co-fechado.*

Proposição 4.29 *Dado $M \in \mathscr{A}$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1) M é q-co-fechado.

2) $s_M : M_{<q} \longrightarrow M$ é um isomorfismo.

3) Existe um N q-co-fechado isomorfo a M.

Definição 4.30 *Denotaremos por $\mathscr{A}_q$ à subcategoria estritamente plena de $\mathscr{A}$ cujos objetos são os q-co-fechado, isto é, $M \in \mathscr{A}_q$ se e somente se M é q-co-fechado.*

Definição 4.31 *O funtor $Q = H^0_{\mathscr{U}} \circ \tau^{\mathscr{V}}_{\leq q-1} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}_q$ é tal que $Q(M) = M_{<q}$ para cada $M \in \mathscr{A}$ e para cada morfismo $f \in \mathscr{A}$, $Q(f) = f^q$ é o morfismo que faz comuta o seguinte quadrado*

$$\begin{tikzcd} M_{<q} \arrow[r, "s_M"] \arrow[d, "f^q"'] & M \arrow[d, "f"] \\ M'_{<q} \arrow[r, "s_{M'}"] & M' \end{tikzcd}$$

Proposição 4.32 *O funtor $Q : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}_q$ é adjunto à direita do funtor inclusão $J : \mathscr{A}_q \longrightarrow \mathscr{A}$.*

Proposição 4.33 *O funtor $\widetilde{Q} : \mathscr{A}_q \longrightarrow \mathscr{A}_q$, tal que $\widetilde{Q}(M) = Q(M)$ para cada $M \in \mathscr{A}_q$ é is(omorfo ao funtor identidade $1_{\mathscr{A}_q} : \mathscr{A}_q \longrightarrow \mathscr{A}_q$.*

Antes de provar o teorema principal desta secção, necessitaremos definir duas sub-categorias. A dos q-fechados e a dos q-co-fechados.

Definição 4.34 *Denotemos por $\underline{\mathscr{B}}_q$ à subcategoria plena de $\mathscr{B}^{\leq q}$, tal que $Obj(\underline{\mathscr{B}}_q) = Obj(\mathscr{B}^{\leq q}) \bigcap Obj(\mathscr{B}_{q-1})$. Analogamente denotaremos por $\underline{\mathscr{A}}_q$ à subcategoria plena de $\mathscr{A}^{\geq q}$, tal que $Obj(\underline{\mathscr{A}}_q) = Obj(\mathscr{A}^{\geq q}) \bigcap Obj(\mathscr{A}_{q+1})$*

Observação 4.35 *As subcategorias $\underline{\mathscr{A}}_q$ e $\underline{\mathscr{B}}_q$ são estritamente plenas.*

Teorema 4.36 *Os funtores $H^{-q}_{\mathscr{U}}$ e $H^q_{\mathscr{V}}$ induzem:*

a) Um par de funtores adjuntos $\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}} : \mathscr{B}^{\leq -q} \longrightarrow \mathscr{A}^{\geq q}$ e $\hat{H}^q_{\mathscr{V}} : \mathscr{A}^{\geq q} \longrightarrow \mathscr{B}^{\leq -q}$.

b) Um par de funtores quasi-inversos $\underline{H}^{-q}_{\mathscr{U}} : \underline{\mathscr{B}}_{-q} \longrightarrow \underline{\mathscr{A}}_q$ e $\underline{H}^q_{\mathscr{V}} : \underline{\mathscr{A}}_q \longrightarrow \underline{\mathscr{B}}_{-q}$.

Demonstração: Observemos primeiro que:

- Se $M \in \mathscr{U}$ então pela proposição 4.10, temos que $H^q_{\mathscr{V}}(M) \in \mathscr{B}^{\leq -q}$.
- Se $N \in T\mathscr{V}^{\perp}$ então $N[-1] \in \mathscr{V}^{\perp}$, logo $H^{-q}_{\mathscr{U}}(N) = H^{-q+1}_{\mathscr{U}}(N[-1]) \in \mathscr{A}^{\geq q}$, proposição 4.12.

a) Segue da observação acima: Para cada $N \in \mathscr{B}^{\leq -q}$ temos que $\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}}(N) = H^{-q}_{\mathscr{U}}(N) \in \mathscr{A}^{\geq q}$ e para cada $M \in \mathscr{A}^{\geq q}$ temos que $\hat{H}^q_{\mathscr{V}}(M) = H^q_{\mathscr{V}}(M) \in \mathscr{B}^{\leq -q}$. O que demonstra que os funtores $\hat{H}^q_{\mathscr{V}}$ e $\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}}$ estão bem definidos.
Agora demonstraremos que existe uma bijeção

$$\Phi_{N,M} : Hom_{\mathscr{B}^{\leq -q}}(N, \hat{H}^q_{\mathscr{V}}(M)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{A}^{\geq q}}(\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}}(N), M)$$

Primeiro observemos que:

- $M \in \mathscr{A}^{\geq q}$ implica $M \in \mathscr{V}^{\geq q}$ ou equivalentemente $M[q] \in \mathscr{V}^{\geq 0}$, assim $\hat{H}^q_{\mathscr{V}}(M) = H^q_{\mathscr{V}}(M) = H^0_{\mathscr{V}}(M[q]) = \tau^{\mathscr{V}}_{\leq 0}(M[q])$.
- $N \in \mathscr{B}^{\leq -q}$ implica $N \in \mathscr{U}^{\leq -q}$ ou equivalentemente $N[-q] \in \mathscr{U}^{\leq 0}$, por conseguinte $\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}}(N) = H^{-q}_{\mathscr{U}}(N) = H^0_{\mathscr{U}}(N[-q]) = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(N[-q])$.

Logo, aplicando o lema 3.12 e dado que $\mathscr{A}^{\geq q}$ e $\mathscr{B}^{\leq -q}$ são subcategorias plenas, então temos as bijeções seguintes

$$Hom_{\mathscr{B}^{\leq -q}}(N, \hat{H}^q_{\mathscr{V}}(M)) = Hom_{\mathscr{V}^{\leq 0}}(N, \tau^{\mathscr{V}}_{\leq 0}(M[q])) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(N, M[q]) \longrightarrow$$

$$Hom_{\mathscr{D}}(N[-q], M) \longrightarrow Hom_{\mathscr{U}^{\geq 0}}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(N[-q]), M) = Hom_{\mathscr{A}^{\geq q}}(\hat{H}^{-q}_{\mathscr{U}}(N), M)$$

b) Primeiro demonstraremos que os funtores $\underline{H}_{\mathscr{U}}^{-q}$ e $\underline{H}_{\mathscr{V}}^{q}$ estão bem definidos. De fato,

- Se $N \in \underline{\mathscr{B}}_{-q}$, pela observação inicial temos que $\underline{H}_{\mathscr{U}}^{-q}(N) = H_{\mathscr{U}}^{-q}(N) \in \mathscr{A}^{\geq q}$. Mais ainda, dado que N é *(-q-1) fechado*, então pela proposição 4.18, deduzimos que $N = N_{>-q-1} = H_{\mathscr{V}}^{0}(\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N))$, logo $H_{\mathscr{U}}^{-q}(N) = H_{\mathscr{U}}^{0}T^{-q}(H_{\mathscr{V}}^{0}\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N))$ e dado que $H_{\mathscr{V}}^{0} = \tau_{\leq 0}^{\mathscr{V}} \circ \tau_{\geq 0}^{\mathscr{V}}$, então pelo lema 3.14, temos que $H_{\mathscr{U}}^{-q}(N) = H_{\mathscr{U}}^{0}(\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(N))$.
  Por outro lado, dado que $N \in T\mathscr{V}^{\perp}$ então $N[-1] \in \mathscr{V}^{\perp}$, assim pela hipótese de compatibilidade $\tau_{\geq -q+1}^{\mathscr{U}}(N[-1])) \in \mathscr{V}^{\perp}$, por conseguinte aplicando o lema 3.14 $\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N) = T\tau_{\geq -q+1}^{\mathscr{U}}(N[-1])) \in T\mathscr{V}^{\perp} = \mathscr{V}^{\geq 0}$ e pelo lema 3.15 $\tau_{\geq 0}^{\mathscr{V}}(\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N)) = \tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N) = \tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(\tau_{\leq -q}^{\mathscr{U}}(N))$, pois $N \in \mathscr{U}^{\leq -q}$. Então $T^{-q}\tau_{\geq 0}^{\mathscr{V}}\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(N) = H_{\mathscr{U}}^{-q}(N) \in \mathscr{A}$. Consequentemente, $H_{\mathscr{U}}^{-q}(N) = H_{\mathscr{U}}^{0}\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(H_{\mathscr{U}}^{-q}(N)) = (H_{\mathscr{U}}^{-q}(N))_{<q+1}$ é *(q+1)-co-fechado*, pelo exemplo 4.28 e a proposição 4.29. Portanto, $\underline{H}_{\mathscr{U}}^{-q}(N) \in \underline{\mathscr{A}}_{q}$.
- Se $M \in \underline{\mathscr{A}}_{q}$, pela observação inicial temos que $\underline{H}_{\mathscr{V}}^{q}(M) = H_{\mathscr{V}}^{q}(M) \in \mathscr{B}^{\leq -q}$. Mais ainda, dado que M é *(q+1) co-fechado*, então pela proposição 4.29, deduzimos que $M = M_{<q+1} = H_{\mathscr{U}}^{0}(\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M))$, logo $H_{\mathscr{V}}^{q}(M) = H_{\mathscr{V}}^{q}(H_{\mathscr{U}}^{0}\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M))$ e dado que $H_{\mathscr{U}}^{0} = \tau_{\geq 0}^{\mathscr{U}} \circ \tau_{\leq 0}^{\mathscr{U}}$, então pelo lema 3.14, temos que $H_{\mathscr{V}}^{q}(M) = H_{\mathscr{V}}^{0}\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(T^{q}\tau_{\leq 0}^{\mathscr{U}}\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M))$.
  Por outro lado, dado que $M \in \mathscr{U}$ então pela hipótese de compatibilidade $\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M) \in \mathscr{U}$, por conseguinte aplicando o lema 3.15, $\tau_{\leq 0}^{\mathscr{U}}(\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M)) = \tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M) = \tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(\tau_{\geq q}^{\mathscr{V}}(M))$, pois $M \in \mathscr{V}^{\geq q}$. Então $T^{q}\tau_{\leq 0}^{\mathscr{U}}\tau_{\leq q}^{\mathscr{V}}(M) = H_{\mathscr{V}}^{q}(M) \in \mathscr{B}$. Por conseguinte, $H_{\mathscr{V}}^{q}(M) = H_{\mathscr{V}}^{0}\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}}(H_{\mathscr{V}}^{q}(M)) = (H_{\mathscr{V}}^{q}(M))_{>-q-1}$ é *(-q-1)-fechado*, pelo lema 4.17 e a proposição 4.18. Portanto, $\underline{H}_{\mathscr{V}}^{q}(M) \in \underline{\mathscr{B}}_{-q}$.

Sabemos que os funtores os seguintes são isomorfismos funtoriaes

$$H_{\mathscr{V}}^{q} \circ H_{\mathscr{U}}^{-q} \cong (H_{\mathscr{V}}^{q} \circ T^{q}) \circ (T^{-q}\tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}} \circ \tau_{\leq -q}^{\mathscr{U}}) \cong H_{\mathscr{V}}^{q} \circ \tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}} \circ \tau_{\leq -q}^{\mathscr{U}}$$

Assim pela proposição 4.18 e o lema 3.15, temos os seguintes isomorfismos funtoriaes na subcategoria $\underline{\mathscr{B}}_{-q}$: $\underline{H}_{\mathscr{V}}^{q} \circ \underline{H}_{\mathscr{U}}^{-q} = H_{\mathscr{V}}^{q} \circ H_{\mathscr{U}}^{-q} \cong H_{\mathscr{V}}^{q} \circ \tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}} \circ \tau_{\leq -q}^{\mathscr{U}} \cong H_{\mathscr{V}}^{q} \circ \tau_{\geq -q}^{\mathscr{U}} \cong 1_{\underline{\mathscr{B}}_{-q}}$
Analogamente se demonstrar que existe uma isomorfismo funtoral $\underline{H}_{\mathscr{U}}^{-q} \circ \underline{H}_{\mathscr{V}}^{q} \cong 1_{\underline{\mathscr{A}}_{q}}$.

$\square$

4.2.2 Compatibilidade em t-estruturas limitadas.

Nesta seção provaremos que no caso de *t-estruturas limitadas* as condições da proposição 4.10 são suficientes. Mas antes disso, demonstraremos que a noção de t-estrutura limitada equivale ao conceito de **gerador em categorias trianguladas** que definimos a continuação e do qual é possível achar mais aplicações em [Hap88, p. 70]. Para mais informações ver [Nee01, p. 103].

Definição 4.37 *Seja $\mathscr{C}$ subcategoria de $\mathscr{D}$. Diremos que $\mathscr{C}$ gera $\mathscr{D}$ como subcategoria triangulada ou simplesmente gera, se $\mathscr{D}$ coincide com a mais pequena subcategoria triangulada de $\mathscr{D}$ que é estritamente plena e contem $\mathscr{C}$ como subcategoria.*

O próximo lema mostra que a noção *t-estruturas limitadas* e a de **gerador em categorias trianguladas** são equivalentes no caso particular em que o coração da t-estrutura seja um gerador da categoria triangulada.

Lema 4.38 *Seja $\mathscr{A}$ o coração da t-estrutura $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ em $\mathscr{D}$. $\mathscr{A}$ gera $\mathscr{D}$, se e somente se, t-estrutura $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é limitada.*

Demonstração: Seja $\mathscr{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{U}^{\leq n}$. Sabemos que $\mathscr{U}^{\leq n} \subset \mathscr{U}^{\leq n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$ (ver proposição 3.3), logo as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $\mathscr{C}$ é uma subcategoria estritamente plena de $\mathscr{D}$, pois para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{U}^{\leq n}$ é uma subcategoria estritamente plena de $\mathscr{D}$, proposição 3.6.

b) Da proposição 3.3, segue que $T\mathscr{C} = \mathscr{C}$.

c) Do item b), o lema 3.16 e o axioma *(TR2)*, segue que dado um triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tal que X e Y são objetos em $\mathscr{C}$, então Z é um objeto em $\mathscr{C}$.

d) Segue do lema 3.17 que $\mathscr{C}$ é aditiva.

Dos itens anteriormente, podemos afirmar que $\mathscr{C}$ é uma subcategoria triangulada de $\mathscr{D}$ (ver definição 1.5.1 em [Nee01, p. 60]) e como $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}$ então $\mathscr{C} = \mathscr{D}$, pois $\mathscr{A}$ gera $\mathscr{D}$ por hipótese.
Analogamente, se demonstra que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{U}^{\geq n} = \mathscr{D}$. Portanto, $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é limitada, definição 3.50.

Reciprocamente, ver o lema 2.3 do artigo [LV12, p. 839].

□

A importância de supor que a *t-estrutura* $(\mathscr{V}, T\mathscr{V}^{\perp})$ é limitada fica clara no resultado seguinte, pois ela nos permite provar que $\{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\} \subset Obj(\mathscr{U})$, compare como o item b) da proposição 4.10.

Teorema 4.39 *Se $\mathscr{B}$ gera $\mathscr{D}$ como uma subcategoria triangulada. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

a) $\mathscr{U}$ *é compatível com* $\mathscr{V}^{\perp}$.

b) $Obj(\mathscr{U}) = \{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração: Demonstraremos primeiro que b) $\Rightarrow$ a).
Fixado $m \in \mathbb{Z}$, temos que provar que $\tau^{\mathscr{V}}_{\leq m}\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$. Suponhamos que $X \in \mathscr{U}$, então $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Por outro lado, pelo lema 3.42, temos que $H^n_{\mathscr{V}}(X) = H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\leq m}(X))$ se $n \leq m$, senão $H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\leq m}(X)) = 0$, o qual implica que $H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\leq m}(X)) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\tau^{\mathscr{V}}_{\leq m}(X) \in \mathscr{U}$.
Agora demonstraremos que a) $\Rightarrow$ b).
Dado que $Obj(\mathscr{U}) \subset \{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$, pela proposição 4.10, logo somente devemos demonstrar a outra inclusão. Seja $X \in \mathscr{D}$ tal que $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, notemos que se $X = 0$ então $X \in \mathscr{U}$ pois $\mathscr{U}$ é aditiva. Suponhamos então que $X \neq 0$, dado que por hipótese $\mathscr{B}$ gera então pelo lema 4.38 sabemos que $(\mathscr{V}, T\mathscr{V}^{\perp})$ é uma *t-estrutura limitada*, mais ainda pelo lema 3.49, deduzimos que a *t-estrutura* $(\mathscr{V}, T\mathscr{V}^{\perp})$ é não degenerada e que o conjunto finito e não vazio $\{p \in \mathbb{Z} | H^n_{\mathscr{V}}(X) \neq 0\}$, assim chamando de **r** ao mínimo desse conjunto e de **s** ao máximo, temos a seguinte construção:
Pela definição de r, temos que $H^n_{\mathscr{V}}(X) = 0, \forall n < r$, então $X \in \mathscr{V}^{\geq r}$ pelo teorema 3.48, assim pelo lema 3.15 $X = \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r}(X)$ e dado que o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r}(X)) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\tau^{\mathscr{V}}_{\leq r}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r}(X)) \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r}(X) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

é distinguido, pela definição 3.8, então pelo lema 3.19 e a proposição 3.40 segue que o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
H^r_{\mathscr{V}}(X)[-r] \arrow[rr] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

é distinguido. Logo aplicando a definição 3.8 ao objeto $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X)$, temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+2}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X)) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\tau^{\mathscr{V}}_{\leq r+1}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X)) \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

assim pelo lema 3.19 e a proposição 3.40 temos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+2}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ H^{r+1}_{\mathscr{V}}(X)[-(r+1)] \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Logo, depois de $s-1$ passos teremos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq s}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ H^{s-1}_{\mathscr{V}}(X)[-(s-1)] \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq s-1}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Finalmente, aplicando o mesmo raciocínio ao objeto $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s}(X)$, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq s+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ H^{s}_{\mathscr{V}}(X)[-s] \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{V}}_{\geq s}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

No qual $H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s+1}(X)) = 0, \forall n \geq s+1$, pela definição de s e como $H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s+1}(X)) = 0, \forall n < s+1$ teorema 3.48, então $H^n_{\mathscr{V}}(\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s+1}(X)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, assim pelo lema 3.45 concluímos que $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s+1}(X) = 0$, então $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s}(X) = H^s_{\mathscr{V}}(X)[-s]$, pelo lema 1.30. Por outro lado, sabemos que $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n} \subset \mathscr{U}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, então $H^n_{\mathscr{V}}(X)[-n] \in \mathscr{U}, \forall n \in \mathbb{Z}$, assim em particular $H^s_{\mathscr{V}}(X)[-s] \in \mathscr{U}$, logo $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s}(X) \in \mathscr{U}$. Além disso, $H^{s-1}_{\mathscr{V}}(X)[-(s-1)] \in \mathscr{U}$, então $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq s-1}(X) \in \mathscr{U}$, pois $\mathscr{U}$ é fechada por extensões. Por conseguinte repetindo o argumento um número finito de vezes, teremos que $\tau^{\mathscr{V}}_{\geq r+1}(X) \in \mathscr{U}$ e como $H^r_{\mathscr{V}}(X)[-r] \in \mathscr{U}$ então $X \in \mathscr{U}$.

$\square$

Finalmente a hipótese de que a *t-estrutura* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é *limitada* permite-nos demonstrar a compatibilidade com a *t-estrutura limitada* $(\mathscr{V}, T\mathscr{V}^{\perp})$, a partir das condições c) e d) da proposição 4.10, mais ainda neste caso basta supor que o funtor $H^p_{\mathscr{U}} H^q_{\mathscr{V}}$ se anula somente no coração da primeira *t-estrutura*.

Teorema 4.40 *Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ geram à categoria $\mathscr{D}$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathscr{U}$ é compatível com $\mathscr{V}^{\perp}$.

(ii) $Obj(\mathscr{U}) = \{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) Simultaneamente

a) $H^p_{\mathscr{U}} H^q_{\mathscr{V}} \mathscr{A} = 0$, *para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$ *tal que* $p + q > 0$.

b) Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *na categoria* $\mathscr{B}$, *tal que* $X \in \mathscr{B}^{\leq n}$ *e* $Y \in \mathscr{B}^{\leq n-1}$ *tem-se que:* $Ker(f) \in \mathscr{B}^{\leq n}$ *e* $Coker(f) \in \mathscr{B}^{\leq n-1}$.

Demonstração: Pelo teorema 4.39, sabemos que (i) e (ii) são equivalentes. Além disso, pela proposição 4.10 temos que (i) implica (iii), pois $\mathscr{A} \subset \mathscr{U}$.

Por conseguinte, falta somente demonstrar que (iii) implica (ii), mas como $\mathscr{B}$ gera $\mathscr{D}$ então $\{X \in \mathscr{D} \mid H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}\} \subset Obj(\mathscr{U})$ (ver prova do teorema 4.39). Consequentemente somente demonstraremos a outra inclusão.
Por hipótese $\mathscr{A}$ gera $\mathscr{D}$, então pelo lema 4.38 sabemos que $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é uma *t-estrutura limitada*, mais ainda pelo lema 3.49, deduzimos que a *t-estrutura* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é não degenerada. Logo, para cada $X \in \mathscr{U}$ temos os dois casos seguintes:

1) $X \in \mathscr{A}$. Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que $H^p_{\mathscr{U}}(H^n_{\mathscr{V}}(X)) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$ tal que $p > -n$. Então pelo teorema 3.48 $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{U}^{\leq -n}$, pois a *t-estrutura* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é não degenerada na categoria $\mathscr{D}$. Portanto, $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$.

2) $X \notin \mathscr{U}^{\geq 0}$. Dado que $\mathscr{U}^{\geq 0}$ é aditiva, então $X \neq 0$, mais ainda $X \notin \mathscr{U}^{\geq n}$, se $n \geq 0$, pois $\mathscr{U}^{\geq n} \subset \mathscr{U}^{\geq 0}$. Por outro lado, dado que a *t-estrutura* $(\mathscr{U}, T\mathscr{U}^{\perp})$ é limitada, então do lema 3.49 segue que o conjunto $\{p \in \mathbb{Z} | H^n_{\mathscr{V}}(X) \neq 0\}$ é finito e não vazio, assim chamando de **r** ao mínimo desse conjunto e aplicando o teorema 3.48, deduzimos que $H^n_{\mathscr{V}}(X) = 0, \forall n < r$, logo $X \in \mathscr{U}^{\geq r}$ e como $H^r_{\mathscr{V}}(X) \neq 0$, então $X \notin \mathscr{U}^{\geq n}, \forall n > r$, isto é $r = max\{n \in \mathbb{Z} | X \in \mathscr{U}^{\geq n}\}$, o que implica que $r \leq -1$. A continuação procederemos recursivamente sobre r:

I) $r = -1$. Aplicando a definição 3.8 ao objeto $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X)$ temos que o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X)) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \tau^{\mathscr{U}}_{\leq -1}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X)) \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Mas $X \in \mathscr{U}^{\geq -1}$, então pelo lema 3.15, temos que $X = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X)$, e pelo lema 3.19 $\tau_{\geq 0}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq -1}(X)) = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X)$, assim, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ H^{-1}_{\mathscr{U}}(X)[1] \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Logo pelo teorema 3.38, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$H^{n-1}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) \xrightarrow{f} H^{n+1}_{\mathscr{V}}H^{-1}_{\mathscr{U}}(X) \longrightarrow H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \longrightarrow H^{n}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) \xrightarrow{g} H^{n+2}_{\mathscr{V}}H^{-1}_{\mathscr{U}}(X)$$

é exata e como $\mathscr{B}$ é uma categoria abeliana, obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow 0$$

Assim pelo lema 3.37 temos que o triângulo

$$\begin{tikzcd} & Ker(g) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ Coker(f) \arrow[rr] & & H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é distinguido. Além disso, dado que $X \in \mathscr{U}$, então $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) = H^{0}_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{A}$ e como $H^{-1}_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{A}$, segue do item 1) que $H^{n-1}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n+1}$ e que $H^{n+1}_{\mathscr{V}}H^{-1}_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Consequentemente, o item b) da hipótese garante que $Coker(f) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Analogamente, temos que $H^{n}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq 0}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$ e $H^{n+2}_{\mathscr{V}}H^{-1}_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n-2} \subset \mathscr{B}^{\leq -n-1}$ e de novo pelo item b) da hipótese concluímos que $Ker(g) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Portanto, $H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$, dado que $\mathscr{B}^{\leq -n}$ é fechada por extensões.

II) $r \leq -2$. Suponhamos que para algum k tal que $r \leq k < -1$, já temos demonstrado a afirmação para $k+1$, isto se, $X \in \mathscr{U}^{\geq k+1}$ e $X \in \mathscr{U}$ então $H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Agora demonstraremos que a afirmação é verdadeira se $X \in \mathscr{U}^{\geq k}$.

Pela definição 3.8 aplicada ao objeto $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X)$ temos que o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X)) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ \tau^{\mathscr{U}}_{\leq k}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X)) \arrow[rr] & & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Mas $X \in \mathscr{U}^{\geq k}$, então pelo lema 3.15, temos que $X = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X)$, e pelo lema 3.19 $\tau_{\geq k+1}(\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k}(X)) = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X)$, assim, obtemos o triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ H^{k}_{\mathscr{U}}(X)[-k] \arrow[rr] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Logo pelo teorema 3.38, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$H^{n-1}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) \xrightarrow{f} H^{n-k}_{\mathscr{V}}H^{k}_{\mathscr{U}}(X) \longrightarrow H^{n}_{\mathscr{V}}(X) \longrightarrow H^{n}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) \xrightarrow{g} H^{n-k+1}_{\mathscr{V}}H^{k}_{\mathscr{U}}(X)$$

é exata e como $\mathscr{B}$ é uma categoria abeliana, obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow H^n_{\mathscr{V}}(X) \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow 0$$

Assim pelo lema 3.37 temos que o triângulo

$$\begin{tikzcd} & Ker(g) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ Coker(f) \arrow[rr] & & H^n_{\mathscr{V}}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

é distinguido. Além disso, dado que $\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) = \tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(\tau^{\mathscr{U}}_{\leq 0}(X)) \in \mathscr{U} \bigcap \in \mathscr{U}^{\geq k+1}$, então pela hipótese recursiva temos que $H^{n-1}_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n+1}$ e como $H^k_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{A}$, segue do item 1) que $H^{n-k}_{\mathscr{V}} H^k_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n+k} \subset \mathscr{B}^{\leq -n}$, pois $k < 0$. Por conseguinte, o item b) da hipótese garante que $Coker(f) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Analogamente, temos que $H^n_{\mathscr{V}}\tau^{\mathscr{U}}_{\geq k+1}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$ e $H^{n-k+1}_{\mathscr{V}} H^k_{\mathscr{U}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n+r-1} \subset \mathscr{B}^{\leq -n-1}$ e de novo pelo item b) da hipótese concluímos que $Ker(g) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$. Portanto, $H^n_{\mathscr{V}}(X) \in \mathscr{B}^{\leq -n}$, dado que $\mathscr{B}^{\leq -n}$ é fechada por extensões.

$\square$

Referências Bibliográficas

[Ass97] Ibrahim Assem. *Algèbres et modules. Cours et exercices.* Masson, Ottawa, 1a. edition, 1997.

[BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein, and Pierre Deligne. Analyse et topologie sur les éspaces singuliers. *Soc. Math. France*, 100:29–42, 1982.

[GKR04] A. Gorodentscev, S. Kuleshov, and A. Rudakov. Stability data and t-structures on a triangulated category. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 68(4):117–150, 2004.

[GY03] S.I. Gelfand and Y.I.Manin. *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag, Berlin, 2a. edition, 2003.

[Hap88] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras. *London Mathematical Society*, Lecture Note Series(119):57–71, 1988.

[HHK07] L. A. Hugel, D. Happel, and H. Krause. Handbook of tilting theory. *London Mathematical Society*, Lecture Note Series(332):84–90, 2007.

[HJR10] T. Holm, P. Jorgensen, and R. Roquier. Triangulated categories. *Cambridge Univ.*, Lecture Note Series(375):1–43, 2010.

[KN11] B. Keller and Pedro Nicolás. Weight structures and simple dg modules for positive dg algebras. *Cornell University Library*, arXiv:1009.5904v3, 2011.

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on manifolds. Fundamental Principles of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1a. edition, 1990.

[KV88a] B. Keller and D. Vossieck. Aisles in derived categories. *Bull. Soc. Math. Belg.*, Sér. A 40(2):239–253, 1988.

[KV88b] B. Keller and D. Vossieck. Dualité de grothendieck-roos et basculement. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (307):543–546, 1988.

[LV12] Qunhua Liu and Jorge Vitória. t-structures via recollements for piecewise hereditary algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, University of Stuttgart, Germany(216):837–849, 2012.

[Mil14] D. Milicic. *Lectures on derived categories.* Number http://www.math.utah.edu/∼milicic/Eprints/dercat.pdf. acessado em 17/12/2014.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories.* Academic Press, New York, 1a. edition, 1965.

[Nee01] A. Neeman. Triangulated categories. *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press(148), 2001.

[Var07] Valente S. Vargas. *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos.* PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2007. In Spanish.

[Ver96] J-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Société mathématique de France*, Astérisque(239), 1996.