

CLEDER MARCOS SCHENEKEMBERG

UMA PROPOSTA DE MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE
CARREGAMENTO DE MÚLTIPLOS CONTÊINERES HETEROGÊNEOS COM
RESTRICÇÕES ADICIONAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin

CURITIBA

2015

S324p

Schenekemberg, Cleder Marcos

Uma proposta de modelo matemático para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos com restrições adicionais/ Cleder Marcos Schenekemberg. – Curitiba, 2015.
130 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2015.

Orientador: Cassius Tadeu Scarpin .

Bibliografia: p. 96-104.

1. Otimização combinatória. 2. Heurística. 3. Veículos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Scarpin, Cassius Tadeu. III. Título.


CDD: 519.64

TERMO DE APROVAÇÃO

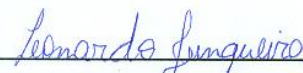
CLEDER MARCOS SCHENEKEMBERG

UMA PROPOSTA DE MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE
CARREGAMENTO DE MÚLTIPLOS CONTÊINERES HETEROGÊNEOS COM
RESTRICÇÕES ADICIONAIS


Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:




Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin
Orientador – Membro do PPGMNE/UFPR.



Prof. Dr. Leonardo Junqueira
Membro da Universidade Nove de Julho, São Paulo/SP



Prof. Dr. Arinei Carlos Lindbeck da Silva
Membro do PPGMNE/UFPR



Prof. Dr. Celso Carnieri
Docente aposentado do PPGMNE/UFPR

Curitiba, 27 de fevereiro 2015

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de realizar este trabalho.

A minha esposa, pelo apoio nos momentos difíceis, por acreditar na realização deste sonho, pela compreensão de todos os finais de semana e madrugadas de estudos e, sobretudo, por fazer parte da minha vida. Te amo Cristiane.

A minha filha Camila, por encantar e dar sentido aos meus dias de luta. Te amo muito minha princesa.

Aos meus pais, irmãos, sogra e familiares, pelo incentivo, amor e apoio incondicional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin, por seus ensinamentos, atenção, suporte e, acima de tudo, pela amizade.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Ao amigo Deidson, por fazer parte desta caminhada.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Cada sonho que você deixa para trás, é um pedaço do seu futuro que deixa de existir.

Steve Jobs

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma proposta de resolução para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Estes problemas consistem em empacotar caixas retangulares ortogonalmente e sem sobreposição dentro de contêineres, de modo a otimizar o valor total das caixas carregadas em um número limitado de contêineres ou maximizar a ocupação do espaço disponível. Tem-se como objetivo apresentar uma abordagem por meio de um modelo de programação linear inteira 0-1 capaz de considerar restrições práticas comumente encontradas em situações reais. Considerações de separação de itens, carregamento completo de grupos de caixas, estabilidade vertical e múltiplas orientações das caixas são descritas. Estas considerações, embora apareçam com grande frequência em situações reais, raramente são tratadas em trabalhos correlatos. Cenários foram modelados como problemas de programação linear por meio de um algoritmo em linguagem de programação e o *solver CPLEX*, com parâmetros *default*, foi utilizado para resolvê-los. Ao todo, trezentos e dezesseis problemas foram resolvidos com casos da literatura e dados gerados aleatoriamente. Os resultados obtidos mostram que, apesar do modelo proposto se limitar a resolver apenas problemas relativamente simples, o mesmo descreve de modo apropriado as considerações tratadas.

Palavras-chave: Problema de carregamento de contêineres. Restrições práticas. Modelagem matemática.

ABSTRACT

In this work we present a proposal to solve the multiple heterogeneous container loading problem. These problems consist of packing orthogonally and without overlap rectangular boxes inside containers of available space, in order to optimize the total value of loaded boxes or to maximize the occupation. The objective of this work is to present an approach through a 0-1 integer linear programming model able to consider practical constraints usually found in real situations. Considerations of separations of items, complete shipment, vertical stability and multiple orientations of the boxes are described. Although these considerations appear frequently in real situations, some often are rarely treated in related work. Scenarios were modeled as linear programming problems by using an algorithm in a programming language and the CPLEX solver with default parameters was used to solve them. Three hundred sixteen problems were solved with instances of literature and data generated randomly. The results show that the model is able to solve only relatively simple problems, however, it describes appropriately the treated considerations.

Key-words: Container loading problem. Practical constraints. Mathematical Modelling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – DISPOSITIVOS DE UNITIZAÇÃO DA CARGA	22
FIGURA 2 – REPRESENTAÇÃO DO RETÂNGULO DO TIPO i DENTRO DO RETÂNGULO A_0	35
FIGURA 3 – POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS CAIXAS	40
FIGURA 4 – CAIXA DO TIPO i POSICIONADA COM SEU VÉRTICE NO PONTO (p, q, r) DENTRO DE UM CONTÊINER POSICIONADO NA ORIGEM	45
FIGURA 5 – EXEMPLO DE UMA PILHA DE CAIXAS	51
FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA CAMADA VERTICAL DE UM CONTÊINER	52
FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DE UM BLOCO HOMOGÊNEO DE CAIXAS.....	52
FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE GUILHOTINADO E NÃO-GUILHOTINADO, RESPECTIVAMENTE	53
FIGURA 9 – AS SEIS POSSÍVEIS POSIÇÕES QUE UMA CAIXA DO TIPO i PODE ASSUMIR NO CARREGAMENTO.....	64
FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO PLANO DA BASE DE UM CONTÊINER OBTIDO COM E SEM O USO DO AGNU, RESPECTIVAMENTE.....	70
FIGURA 11 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DE UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO 4B OBTIDO COM O CENÁRIO C-III	81
FIGURA 12 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DE UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO 4B OBTIDO COM O CENÁRIO C-IV.....	81
FIGURA 13- PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS.....	85
FIGURA 14 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE	

ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	86
FIGURA 15 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	87
FIGURA 16 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	87
FIGURA 17 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS	90
FIGURA 18 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS	91
FIGURA 19 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS	91
FIGURA 20 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-5 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS	92
GRÁFICO 1 – REPRESENTAÇÃO DO CRESCIMENTO DO TEMPO DECORRIDO EM RELAÇÃO AO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE TIPOS DE CAIXAS NOS CENÁRIOS m_A E m_B , RESPECTIVAMENTE	80
QUADRO 1 – PSEUDOCÓDIGO DE GERAÇÃO DOS NÚMEROS ÚTEIS	68
QUADRO 2 – PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DA DISPONIBILIDADE DAS CAIXAS	75

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO DO TIPO MINIMIZAÇÃO DAS ENTRADAS.....	25
TABELA 2 – CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO DO TIPO MAXIMIZAÇÃO DAS SAÍDAS	26
TABELA 3 – VALORES OBTIDOS COM OS QUATROS CENÁRIOS TESTADOS..	78
TABELA 4 – TEMPO COMPUTACIONAL DECORRIDO NA RESOLUÇÃO DOS CINCO CONJUNTOS DE TESTES GERADOS PARA CADA m	79
TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS COM UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO 4B RESOLVIDO DE ACORDO COM OS CENÁRIOS C-III E C-IV, RESPECTIVAMENTE	80
TABELA 6 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS DEZESSEIS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994) COM ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS	84
TABELA 7 – DADOS DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty <i>et al</i> (1994).....	84
TABELA 8 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS DEZESSEIS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994) COM ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO.....	85
TABELA 9 – RESULTADOS OBTIDOS COM OS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994)	88
TABELA 10 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994) DE ACORDO COM OS CENÁRIOS C-2, C-3, C-4 E C-5	89
TABELA 11 – CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE	109
TABELA 12 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-I E O CONTEXTO mA	112

TABELA 13 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-I E O CONTEXTO <i>mB</i>	112
TABELA 14 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-II E O CONTEXTO <i>mA</i>	113
TABELA 15 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-II E O CONTEXTO <i>mB</i>	113
TABELA 16 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-III E O CONTEXTO <i>mA</i>	114
TABELA 17 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-III E O CONTEXTO <i>mB</i>	115
TABELA 18 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-IV E O CONTEXTO <i>mA</i>	115
TABELA 19 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-IV E O CONTEXTO <i>mB</i>	116
TABELA 20 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-1 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS	118
TABELA 21 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS	118
TABELA 22 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS	119
TABELA 23 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS	120
TABELA 24 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	122
TABELA 25 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	122
TABELA 26 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	123

TABELA 27 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS.....	125
TABELA 28 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS.....	125
TABELA 29 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS.....	126
TABELA 30 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-5 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS.....	126
TABELA 31 – CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994).....	129

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	17
1.1.1 Objetivo geral.....	17
1.1.2 Objetivos específicos	17
1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO.....	18
1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO	18
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	18
2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	20
2.1 CONCEITOS PRELIMINARES DE LOGÍSTICA	20
2.2 PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO.....	23
2.2.1 Classificação dos problemas de corte e empacotamento	23
2.2.2 Problemas de carregamento de contêiner	26
2.2.3 Restrições práticas em problemas de carregamento de contêiner	30
3 REVISÃO DE LITERATURA	34
3.1 TRABALHOS CORRELATOS	34
3.1.1 Formulação de Beasley (1985)	35
3.1.2 Formulação de Mohanty <i>et al</i> (1994).....	37
3.1.3 Formulação de Chen <i>et al</i> (1995)	39
3.1.4 Formulação de Junqueira (2009)	44
3.1.5 Formulação de Hifi <i>et al</i> (2010)	47
3.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	50
3.2.1 Métodos heurísticos e metaheurísticos.....	50
3.2.2 Algoritmos exatos, de busca em árvore e de aproximação.....	53
4 MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO	56

4.1	MODELO MATEMÁTICO	56
4.1.1	Restrição de separação de itens.....	60
4.1.2	Restrição de carregamento completo de grupo de caixas	61
4.1.3	Restrição de estabilidade vertical	63
4.1.4	Restrição de orientação das caixas	63
4.2	ALGORITMO GERADOR DE NÚMEROS ÚTEIS.....	67
4.3	MODELO REVISITADO.....	70
5	TESTES COMPUTACIONAIS E RESULTADOS	74
5.1	CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE	74
5.1.1	Procedimento de geração dos conjuntos de testes	75
5.1.2	Resultados dos testes computacionais.....	76
5.2	CONJUNTOS DE TESTES DA LITERATURA	81
5.2.1	Resultados com orientação fixa	83
5.2.2	Resultados com orientação no plano	85
5.2.3	Resultados com orientação geral.....	87
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	93
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE 1 – EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO AGNU NO PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES.....	104
	APÊNDICE 2 – CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE	108
	APÊNDICE 3 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM DADOS ALEATÓRIOS.....	111
	APÊNDICE 4 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS.....	117

APÊNDICE 5 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO	121
APÊNDICE 6 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS	124
ANEXO 1 – CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty <i>et al</i> (1994)	128

1 INTRODUÇÃO

O trabalho da logística é desempenhar o gerenciamento estratégico da compra, do transporte e da armazenagem de matérias-primas, peças ou produtos acabados por parte da organização, de tal maneira que a lucratividade atual e futura sejam maximizadas mediante a entrega de encomendas com o menor custo associado (CHRISTOPHER, 2010). Este processo abrange o planejamento, a implantação e o controle de fluxo eficiente e eficaz de mercadorias desde o ponto de origem até o ponto de consumo, com o propósito de atender às exigências do cliente (BALLOU, 2006).

O objeto de estudo deste trabalho está relacionado com as atividades logísticas de transporte e armazenagem de carga, ou, mais especificamente, com as atividades relacionadas ao padrão e posicionamento de caixas dentro de contêineres (caminhões, paletes, etc.). Para isso, métodos de otimização comumente encontrados na literatura são empregados para resolver um caso particular dos problemas de corte e empacotamento, conhecido como problema de carregamento de contêineres.

Este tipo particular de problema é clássico em Pesquisa Operacional, cujo objetivo principal do mesmo é determinar o arranjo de caixas dentro de um ou mais contêineres, de tal maneira que a ocupação do espaço seja otimizada. Com base nestes objetivos, os problemas de carregamento de contêineres podem ser diferenciados em duas novas perspectivas. A primeira visa otimizar o carregamento de todas as caixas disponíveis, buscando minimizar o número (valor) de contêineres empregados no transporte. A segunda tem por objetivo primário selecionar um determinado subconjunto de caixas que devem ser posicionadas num número fixo de contêineres, de modo a maximizar o volume (valor) total das caixas carregadas.

Além dos objetivos primários citados, em muitos problemas reais tem-se a necessidade de assegurar que certas exigências práticas sejam garantidas. Na literatura, Bischoff e Ratcliff (1995) listam doze requisitos práticos comumente encontrados em problemas de carregamento de contêineres. Dentre estes, destacam-se a estabilidade (vertical e horizontal) da carga, limitação máxima de peso que pode ser acondicionado nos contêineres, orientação das caixas,

prioridades de envio de certos tipos de produtos, empilhamento máximo, carregamento completo de grupo de caixas, separação de determinados tipos de mercadorias, entre outros.

Este trabalho tem o interesse particular no carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos, onde um grupo de contêineres com dimensões distintas deve ser carregado com um subconjunto das caixas disponíveis, de modo a maximizar o valor total das caixas empacotadas. Considerações práticas de estabilidade vertical, múltiplas orientações das caixas, separação de itens e carregamento completo de grupo de caixas serão consideradas.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de modelagem matemática, através de uma adaptação do modelo proposto por Junqueira (2009), para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos com considerações práticas.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Apresentar uma formulação matemática para as restrições práticas de separação de itens e de carregamento completo de grupo de caixas.
- Adaptar as restrições de estabilidade vertical e orientação das caixas, apresentadas por Junqueira (2009), para problemas que contenham múltiplos contêineres disponíveis.
- Fornecer uma adaptação para o modelo matemático capaz de considerar caixas com dimensões reais.
- Aplicar o conceito de números úteis de Carnieri *et al* (1994) ao modelo proposto, de modo alternativo na busca por melhoria de desempenho computacional.

1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

A importância deste trabalho está na prática permanente do transporte de produtos, seja nacional ou internacionalmente, por meio de contêineres (caminhões, paletes, etc.). Este tipo de transporte de mercadorias possibilita às organizações ganho em tempo de manuseio, proteção contra avarias, maior segurança e, sobretudo, na redução de custos das operações ligadas ao transporte da carga. Contudo, esta modalidade de transporte possui custos fixos em relação aos contêineres, seja pelo aluguel, pela aquisição do dispositivo ou até mesmo pela sua utilização. Deste modo, a necessidade de explorar o máximo do volume disponível do contêiner passa a ser fator decisivo na redução de custos de qualquer organização, dado que a ausência de planejamento pode comprometer substancialmente o valor final do produto transportado.

No entanto, além de garantir o carregamento ótimo dos contêineres, um padrão de carregamento deve ser capaz de levar em consideração certos aspectos práticos comumente encontrados em problemas reais. Sendo assim, este trabalho visa contribuir com uma formulação matemática para o problema de múltiplos contêineres capaz de abordar exigências práticas, tais como orientação múltiplas das caixas, estabilidade vertical da carga, carregamento completo de grupos e separação de itens em contêineres distintos.

1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Com base na complexidade de resolução destes problemas, as limitações existentes neste trabalho decorrem da insuficiência de memória do computador e do elevado tempo computacional necessário para a obtenção de respostas satisfatórias. Embora não se alcance a solução ótima em todos os casos, um limite máximo de tempo será pré-determinado em todos os testes realizados.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- **CAPÍTULO 2:** Apresenta a descrição formal do problema. Inicialmente, conceitos preliminares de logística como tipologia da carga, unitização e dispositivos de unitização são discutidos. Em seguida, busca-se definir e classificar os problemas de corte e empacotamento, com interesse particular pelo problema de carregamento de contêiner, que é o principal objeto de estudo deste trabalho. Por fim, as dozes restrições práticas descritas por Bischoff e Ratcliff (1995) são apresentadas.
- **CAPÍTULO 3:** Apresenta algumas propostas de modelagem matemática encontradas em trabalhos correlatos, bem como aborda os principais métodos de solução comumente utilizados na literatura de carregamento de contêiner.
- **CAPÍTULO 4:** Apresenta o modelo de programação linear inteira 0 – 1 proposto para resolver o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Além disso, formulações matemáticas capazes de descrever situações práticas comumente encontradas em carregamento de contêineres são apresentadas.
- **CAPÍTULO 5:** Os resultados computacionais obtidos com conjuntos de testes gerados aleatoriamente e da literatura são apresentados, comparados e discutidos.
- **CAPÍTULO 6:** Descreve as conclusões e discute perspectivas para futuros trabalhos.

2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo, inicialmente, serão expostos alguns conceitos preliminares de logística, que servirão de base na exploração e entendimento das seções e capítulos subsequentes. Em seguida, descreve-se o problema geral de corte e empacotamento, onde se tem interesse particular em um dos seus problemas variantes, conhecido como problema de carregamento de contêineres. Por fim, as dozes considerações práticas de Bischoff e Ratcliff (1995) são caracterizadas.

2.1 CONCEITOS PRELIMINARES DE LOGÍSTICA

Logística é o processo de gerenciamento estratégico da compra, do transporte e da armazenagem de matérias-primas, peças ou produtos acabados por parte da organização, de tal modo que a lucratividade atual e futura sejam maximizadas mediante a entrega de encomendas com o menor custo associado (CHRISTOPHER, 2010). Para Ballou (2006), este processo abrange o planejamento, a implantação e controle do fluxo eficiente e eficaz de mercadorias desde o ponto de origem até o ponto de consumo, com o propósito de atender às exigências do cliente.

O objeto de estudo deste trabalho abrange unicamente as atividades logísticas de manuseio, de armazenagem e de transporte. Todas estas atividades estão diretamente relacionadas com a carga, isto é, com mercadorias que devem ser devidamente manuseadas, armazenadas e transportadas.

Para Rojas (2014) as características da carga são definidas de acordo com o seu tipo e sua natureza, onde estas características influenciam diretamente na forma de acondicionamento (embalagem e armazenagem), na escolha dos modais (hidroviário, rodoviário, dutoviário e aeroviário) e equipamentos empregados na sua movimentação e transporte. Segundo o autor, a carga pode ser classificada nos seguintes tipos: *(i)* Carga a granel; *(ii)* Carga refrigerada; *(iii)* Carga perigosa; *(iv)* Carga neo-granel e *(v)* Carga geral (solta e unitizada). A seguir define-se cada

tipologia, contudo, um enfoque especial será conferido a carga geral unitizada, que é objeto de estudo nas seções e capítulos subsequentes.

(i) Carga a granel: Carga homogênea transportada em grandes quantidades, medida em volume ou massa (metros cúbicos, litros, toneladas). Em geral, é composta por mercadorias sem acondicionamento e sem marca de identificação, com o veículo sendo o elemento de contenção. Exemplos de mercadorias: petróleo, grãos, minérios, etc.

(ii) Carga frigorificada: Carga que necessita ser congelada ou refrigerada para conservar as propriedades essenciais dos produtos durante o transporte. Exemplos de mercadorias: peixes, carnes, frutas frescas, etc.

(iii) Carga perigosa: Carga perigosa é todo produto que representa algum tipo de risco para pessoas, animais, meio ambiente, ou mesmo, para a transportadora. São exemplos de carga perigosa: explosivos, gases, substâncias oxidantes, líquidos ou sólidos inflamáveis, etc.

(iv) Carga neo-granel: É um tipo particular da carga a granel, mas cujos os produtos apresentam, individualmente, volume expressivo, como veículos, bobinas de aço, troncos de árvores, etc.

(v) Carga geral: Carga transportada com acondicionamento (embalagem de transporte ou unitização), com marca de identificação e contagem de unidades, pode ser dividida em:

- Solta: Volumes acondicionados sob dimensões e formas diversas, que são embarcados separadamente, por exemplo, pacotes, sacarias, tambores, fardos, etc.
- Unitizada: Composta pelo agrupamento de vários itens em unidades de transporte, que permitem o embarque de grandes quantidades de mercadoria simultaneamente. A unitização, em si, não integra a embalagem do produto e tem por finalidade facilitar a movimentação, o manuseio, a armazenagem e o transporte da mercadoria.

De acordo com Bowersox e Closs (2010), as principais vantagens da unitização da carga são:

- Redução de avarias durante o manuseio e transporte.
- Padronização internacional dos recipientes de unitização.
- Aumento geral da eficiência da movimentação de materiais.

- Unidade de transporte reutilizável que reduz desperdícios.
- Maior proteção contra fatores ambientais.
- Redução de ocorrência de furtos.

Dentre os mais variados dispositivos de unitização, destacam-se (ROJAS, 2014):

a) *Contêiner*: Dispositivo de transporte de grandes dimensões, produzido em aço, fibra ou alumínio, suficientemente forte para suportar ao uso repetitivo (veja FIGURA 1 a)). Oferece segurança, inviolabilidade, rapidez e redução dos custos nos transportes.

b) *Paletes*: Plataforma plana produzida em madeira, alumínio, aço ou outro material resistente que permite a movimentação de cargas com o uso de empilhadeiras por locais de armazenagem (Veja FIGURA 1 b)). Podem ser descartáveis ou reutilizáveis.

c) *Caixas de papelão*: As caixas de papelão são, certamente, um dos recursos em embalagens mais dinâmicos do mercado, fornecendo muitas vantagens ao seu consumidor. São encontradas em diversas formas, desde tamanhos e estilos já padronizados até embalagens totalmente customizadas (Veja FIGURA 1 c)).

d) *Big-Bags*: São sacos de material sintético, para acondicionamento, transporte ou armazenagem de produtos industrializados em pó ou grãos. Possuem grande capacidade de armazenamento e permitem ser reutilizados (veja FIGURA 1 d)).

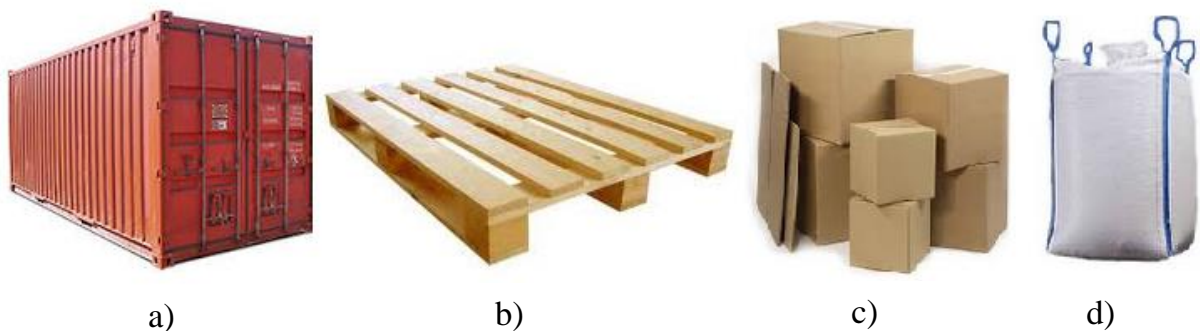


FIGURA 1 - DISPOSITIVOS DE UNITIZAÇÃO DE CARGA
FONTE: O autor (2015).

2.2 PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO

Os problemas de corte e empacotamento (PCE's), como muitos de natureza combinatória, abrangem uma variedade de problemas caracterizados por uma estrutura comum, que consistem em combinar unidades menores (itens: peças, caixas, etc.) dentro de unidades maiores (objetos: chapas, contêineres, etc.), com a finalidade de otimizar certos objetivos. Esta combinação, dentro de suas mais variadas versões, pode determinar o padrão de corte de peças para composição de itens encomendados, como também o empacotamento de caixas em contêineres.

2.2.1 Classificação dos problemas de corte e empacotamento

Com base na grande abrangência e aplicabilidade dos PCE's nos mais variados ramos comerciais e industriais, tem surgido nas últimas décadas diversos trabalhos relacionados ao assunto. Entretanto, ordenar e categorizar tais problemas tornou-se, inicialmente, um obstáculo aos pesquisadores de forma a dispersar, ou até mesmo ocultar pesquisas por ausência de padronização na literatura especializada.

Uma das primeiras tentativas de classificação dos PCE's foi proposta por Dyckhoff (1990). O autor apresentou uma abordagem sistemática e consistente, considerando as estruturas lógicas e características peculiares dos problemas. No entanto, a tipologia proposta era incapaz de categorizar satisfatoriamente determinados problemas e, com o surgimento de novas variantes dos PCE's, caiu em descrédito na comunidade acadêmica.

Baseados na tipologia de Dyckhoff (1990), Wäscher *et al* (2007) apresentaram uma tipologia melhorada, capaz de organizar e caracterizar a literatura de corte e empacotamento. Os autores definem cinco critérios básicos para derivar os tipos de PCE's, como: *i*) Dimensionalidade; *ii*) Tipo de designação (minimização das entradas ou maximização das saídas), *iii*) Variedade (sortimento) dos itens, *iv*) Variedade (sortimento) dos objetos e *v*) Forma dos itens.

i) Dimensionalidade: Representa o número de dimensões geométricas fundamentais e indispensáveis para descrever os itens e os objetos. O Problema pode ser:

- Unidimensional: Quando o comprimento do objeto é a única dimensão relevante para o problema, por exemplo, corte de barras de ferro.
- Bidimensional: Neste caso, duas dimensões são relevantes para o problema, largura e comprimento. Estes problemas podem ser encontrados, por exemplo, em corte de placas de vidro ou chapas de madeiras.
- Tridimensional: Quando uma terceira dimensão integra o problema, estes problemas podem ser encontrados em carregamento de contêineres, por exemplo.
- n –dimensional ($n > 3$): Ocorrem quando quatro ou mais dimensões são relevantes ao problema. Neste Caso, além das dimensões dos objetos, outras características do problema são levadas em consideração, por exemplo, o tempo de processamento de uma determinada operação.

ii) Tipo de designação: Representa o objetivo principal do problema, pode ser dividido em:

- Minimização das entradas (*input minimization*): caso onde existem objetos suficientes para acomodar todos os itens disponíveis. Tem-se como objetivo principal, determinar a maneira ótima de dispor os itens, de tal modo que minimize o valor (custo, perda de volume, etc.) dos objetos selecionados.
- Maximização das saídas (*output maximization*): Caso onde apenas um subconjunto de itens pode ser acomodado nos objetos disponíveis. Tem-se como objetivo principal, determinar o valor (área, volume, etc.) máximo dos itens designados.

iii) Variedade (sortimento) dos itens: Representa o sortimento dos itens em relação às suas medidas e formas, considerando suas dimensões e características geométricas. Pode ser dividida em:

- Itens idênticos: Todos os itens com mesma forma e tamanho.
- Variedade fracamente heterogênea: Poucos grupos de itens idênticos com demanda relativamente grande.
- Variedade fortemente heterogênea: Grande diversidade de itens com demanda pequena ou até mesma única.

iv) Variedade (sortimento) dos objetos: Representa o sortimento dos objetos em relação as suas medidas e formas, considerando dimensões fixas ou variáveis (ilimitadas). Esta variedade, quanto ao número de objetos, pode conter:

- Objeto único: Variedade com apenas um objeto, que pode ter dimensões fixas (pré-determinadas), ou ter uma ou mais dimensões variáveis (não conhecidas *a priori*).

- Vários Objetos: Todos os objetos possuem dimensões fixas. Tal como definido em sortimento de itens, podem ser idênticos, fracamente e fortemente heterogêneos.

v) Forma dos itens: Representa as características geométricas dos itens, nos casos bi e tridimensional, pode-se ter: itens regulares (círculos, retângulos, cilindros, paralelepípedos, etc.) e irregulares (formas diversas, por exemplo, não convexas e assimétricas).

Com base nos critérios definidos acima, Wäscher et al (2007) classificam os problemas de corte e empacotamento em três tipos:

- Tipo básico: Os problemas do tipo básico são definidos pelos critérios da designação e variedade dos itens.

- Tipo intermediário: Os problemas do tipo intermediário são formados com o acréscimo do critério sortimento dos objetos aos problemas do tipo básico.

Na (TABELA 1 e 2) são categorizados os problemas de corte e empacotamento do tipo minimização das entradas e maximização das saídas, respectivamente. A nomenclatura usada para definir os tipos intermediários de PCE's é detalhada na seção seguinte, no contexto dos problemas de carregamento de contêineres.

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO DO TIPO MINIMIZAÇÃO DAS ENTRADAS

Características dos objetos		Variedade dos itens	
		Fracamente heterogênea	Fortemente heterogênea
Todas as dimensões fixas	Idênticos	SSSCSP (17)	SBSBPP (34)
	Fracamente heterogêneos	MSSCSP (6)	MBSBPP (12)
	Fortemente heterogêneos	RCSP (1)	RBPP (7)
Apenas um objeto com dimensão variável		ODP	
		ODP/W (3)	ODP/S (26)

FONTE: Adaptado de Bortfeldt e Wäscher (2013).

- Tipo refinado: São obtidos com o acréscimo dos critérios de dimensionalidade e formas dos itens, resultando em subcategorias dos problemas do tipo intermediário. A nomenclatura destes problemas é formada pela adição de adjetivos aos nomes dos problemas do tipo intermediário, da seguinte forma: dimensão dos itens/objetos, seguido da forma dos itens/objetos e, por fim, o nome do problema do tipo intermediário (em resumo, “<dimensão dos itens/objetos> _ <forma dos itens/objetos> _ <problema do tipo intermediário>”). Para exemplificar, a nomenclatura 3_R_IIPP descreve a subcategoria do problema intermediário IIPP composto por itens/objetos tridimensionais (3) e regulares (R).

TABELA 2 - CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO DO TIPO MAXIMIZAÇÃO DAS SAÍDAS

Características dos objetos		Variedade de itens		Idênticos	Fracamente heterogênea	Fortemente heterogênea
Todas as dimensões fixas	Apenas um objeto			IIPP (10)	SLOPP (37)	SKP (56)
	Idênticos			X	MILOPP (1)	MIKP (2)
	Heterogêneos				MHLOPP (3)	MHKP (3)

FONTE: Adaptado de Bortfeldt e Wäscher (2013).

2.2.2 Problemas de carregamento de contêiner

Neste trabalho será abordado o problema de carregamento de contêineres (PCC), que é um caso particular dos problemas de corte e empacotamento. Genericamente, pode ser descrito como o problema de empacotar (carregar) itens (caixas) de tamanhos e valores variados em objetos maiores (contêineres, caminhões, etc.), com o objetivo de otimizar uma função objetivo.

O objetivo principal dos PCC's pode ser visto, de acordo com o critério de designação da subseção anterior, como:

- Problema de minimização das entradas: Os contêineres disponíveis para carregamento são suficientes para empacotar todas as caixas. Deste modo, busca-se determinar o arranjo ótimo das caixas num subconjunto de contêineres, de tal maneira que o volume não utilizado dos contêineres seja minimizado. Note que, se

os contêineres disponíveis são todos idênticos, o problema passa ser a determinação do número mínimo de contêineres designados para garantir o carregamento de todas as caixas.

- Problema de maximização das saídas: Os contêineres disponíveis para carregamento não são suficientes para empacotar todas as caixas. Deste modo, busca-se maximizar o valor total das caixas carregadas dentro dos contêineres disponíveis. Note que, se os valores associados forem proporcionais aos volumes das caixas, o problema passa a ser a determinação do volume máximo das caixas carregadas.

Na sequência, serão expostos os tipos de problemas de carregamento de contêineres, que são generalizados da tipologia proposta por Wäscher *et al* (2007) para os problemas intermediários de corte e empacotamento. Por padronização, será mantida a nomenclatura dos problemas em língua inglesa.

Problemas de minimização das entradas (*input minimization*):

- *Single Stock-Size Cutting Stock Problem* (SSSCSP): Empacotar um dado conjunto de caixas fracamente heterogêneas num número mínimo de contêineres idênticos. Problema abordado, por exemplo, por Ivancic *et al* (1989) e Che *et al* (2011).

- *Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem* (MSSCSP): Selecionar um subconjunto de contêineres fracamente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fracamente heterogêneas, tal que o valor dos contêineres designados seja minimizado. Problema abordado, por exemplo, por Ivancic *et al* (1989), Eley (2003), Brunetta e Gregoire (2005) e Chan *et al* (2006).

- *Residual Cutting Stock Problem* (RCSP): Selecionar um subconjunto de contêineres fortemente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fracamente heterogêneas, tal que o valor dos contêineres designados seja minimizado.

- *Single Bin-Size Bin Packing Problem* (SBSBPP): Empacotar um conjunto fortemente heterogêneos de caixas num número mínimo de contêineres idênticos. Problema abordado, por exemplo, por Amossen e Pisinger (2010) e Hifi *et al* (2010).

- *Multiple Bin-Size Bin Packing Problem* (MBSBPP): Selecionar um subconjunto de contêineres fracamente heterogêneos para empacotar um conjunto

de caixas fortemente heterogêneas, tal que o valor dos contêineres designados seja minimizado. Problema abordado, por exemplo, por Brunetta e Gregoire (2005) e Lin *et al* (2006).

- *Residual Bin Packing Problem* (RBPP): Selecionar um subconjunto de contêineres fortemente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fortemente heterogêneas, tal que o valor dos contêineres designados seja minimizado. Problema abordado, por exemplo, por Westerlund *et al* (2007).

- *Open Dimension Problem* (ODP): Empacotar um conjunto de caixas (se fortemente heterogêneas (ODP/S) – se fracamente heterogêneas (ODP/W)) em um único contêiner disponível contendo uma ou mais dimensões variáveis, tal que o volume do contêiner seja minimizado. Problema abordado, por exemplo, por Li e Cheng (1990) e Li *et al* (2003).

Problemas de maximização das saídas (*output maximization*):

- *Identical Item Packing Problem* (IIPP): Empacotar um número máximo de caixas idênticas em um único contêiner. Problema abordado, por exemplo, por Bischoff (1991) e Junqueira *et al* (2012a).

- *Single Large Object Placement Problem* (SLOPP): Empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um único contêiner, tal que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por George e Robinson (1980), Bischoff (2006) e Balakirsky *et al* (2010).

- *Multiple Identical Large Object Placement Problem* (MILOPP): Empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um conjunto de contêineres idênticos, tal que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por Bortfeldt (2000).

- *Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem* (MHLOPP): Empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um conjunto de contêineres (fracamente ou fortemente heterogêneos), tal que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por Eley (2003).

- *Single Knapsack Problem* (SKP): Empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um único contêiner, tal que o valor (volume) total das

caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por Dowsland (1991), Ngoi *et al* (1994) e Pisinger (2002).

- *Multiple Identical Knapsack Problem* (MIKP): Empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um conjunto de contêineres idênticos, tal que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por Fraser e George (1994).

- *Multiple Heterogeneous Knapsack Problem* (MHKP): Empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um conjunto de contêineres (fracamente ou fortemente heterogêneos), tal que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado. Problema abordado, por exemplo, por Fraser e George (1994), Ceschia e Schaefer (2011).

Além destes problemas, na literatura de corte e empacotamento é comum encontrar outras derivações dos tipos acima, como o problema de carregamento tridimensional de paletes. Este problema, de acordo com o seu propósito, pode ser dividido em: O problema de carregamento de paletes do distribuidor (*Distributor's Pallet Loading Problem*) e o problema de carregamento de paletes do produtor (*Manufacturer's Pallet Loading Problem*). No primeiro caso existe mais de um tipo de caixa disponível, por outro lado, o segundo possui apenas um tipo de caixa para carregamento, ou seja, todas as caixas são idênticas.

Na (TABELA 1 e 2) encontra-se, juntamente com a categorização dos PCC's, um levantamento da literatura apresentado por Bortfeldt e Wäscher (2013). Os autores revisaram 158 artigos da literatura publicados exclusivamente em jornais internacionais, volumes editados e conferências entre 1980 e 2011. Nesta revisão foram considerados os tipos refinados dos PCE's, de acordo com Wäscher *et al* (2007), problemas de roteamento de veículos integrados com carregamento de contêineres, problema de carregamento de paletes (os autores assumem o espaço acima do palete como um contêiner - isto pode ser feito, por exemplo, nos problemas do tipo IIPP, SKP e SLOPP) e demais problemas variantes dos PCE's. Como mostrado nas tabelas, existem tipos de problemas pouco ou raramente abordados, como os problemas RCSP, MILLOPP, MIKP e MHLOPP que aparecem em no máximo três publicações. Por outro lado, trabalhos como ODP/S, SBSBPP, SLOPP e SKP tem recebido substancial interesse da comunidade acadêmica, aparecendo em até 56 (no caso do SKP) trabalhos no período apurado.

2.2.3 Restrições práticas em problemas de carregamento de contêiner

Na resolução dos problemas da subseção anterior, além da otimização dos objetivos principais, deve-se garantir que as caixas empacotadas não se sobreponham (isto é, não ocupem o mesmo espaço dentro do contêiner - restrição de não sobreposição), e que sejam carregadas inteiramente dentro das limitações físicas dos contêineres. Estas suposições são conhecidas como considerações (ou restrições) geométricas na literatura especializada.

Para Bischoff e Ratcliff (1995), resolver um problema de carregamento de contêiner vai além da otimização da função objetivo com a garantia das considerações geométricas. Segundo os autores, os métodos de resolução dos PCC's, para serem verdadeiramente úteis, devem observar várias considerações de cunho prático oriundas de situações reais, e, com isso, listam doze restrições que podem ser incorporadas aos problemas. Estas restrições comumente aparecem na literatura especializada como “restrições práticas”, “considerações práticas” ou “restrições adicionais”, as quais serão mantidas neste trabalho sem distinção. A seguir apresenta-se a definição de cada restrição prática.

- Restrição 1 - Orientação das caixas: Algumas caixas podem ser rotacionadas em sentidos específicos dentro do contêiner, por exemplo, caixas que contenham informação do tipo “este lado para cima”. Exemplos podem ser encontrados em Loh e Nee (1992), Eley (2002), Bortfeldt *et al* (2003), Boschetti (2004), Lin *et al* (2006), Huang e He (2009), Ren *et al* (2011), He e Huang (2011).

- Restrição 2 - Empilhamento máximo: Limite máximo de peso que pode ser empilhado sobre uma determinada caixa, ou ainda, pressão máxima que pode ser exercida sobre a face superior da caixa, de modo que não ocorram avarias. Por exemplo, caixas com informação do tipo “não empilhe mais que x unidades”. Exemplos pode sem encontrados em Bischoff (2006), Lin *et al* (2006), Iori e Martello (2010), Makarem e Haraty (2010), Balakirsky *et al* (2011) e Junqueira *et al* (2012b).

- Restrição 3 - Manuseio: O peso, o tamanho ou o equipamento que realiza o processo de carga/descarga podem influenciar no arranjo das caixas dentro do contêiner. Por exemplo, pode ser necessário, por questões de segurança, que certos itens sejam colocados próximos a porta do contêiner, ou ainda, que caixas pesadas sejam posicionadas num limite máximo de altura.

- Restrição 4 - Estabilidade da carga: Condição que garante que porções mínimas das faces das caixas estejam apoiadas. Pode ser dividida em estabilidade vertical (suporte das faces inferiores) e estabilidade horizontal (suporte das faces laterais). Restrição fundamental para evitar danos aos produtos durante o transporte e garantir a segurança dos operadores, especialmente durante o procedimento de descarga. Exemplos podem ser encontrados em Eley (2002), Moura e Oliveira (2005), Bischoff (2006), Gendreau *et al* (2006), Lin *et al* (2006), Liu *et al* (2011), Ren *et al* (2011) e Junqueira *et al* (2012a).

- Restrição 5 - Agrupamento de itens: Caixas de um mesmo tipo ou que pertencem a um mesmo grupo (por exemplo, mesmo destino) devem ser posicionadas próximas dentro do contêiner. Esta restrição pode, por exemplo, facilitar o procedimento de checagem dos itens em termos de carga/descarga. Exemplos aparecem em Terno *et al* (2000).

- Restrição 6 - Múltiplos destinos: Se um contêiner (caminhão) for designado para realizar entregas em vários destinos (clientes), é fundamental que caixas de um mesmo pedido estejam posicionadas próximas umas às outras. Além disso, devem ser carregadas de modo a considerar o roteiro a ser percorrido pelo contêiner e a ordem que elas serão descarregadas. Estas suposições são fundamentais para evitar operações desnecessárias do tipo carga/descarga nos pontos de destinos. Exemplo podem ser encontrados em Terno *et al* (2000), Gendreau *et al* (2006), Lin *et al* (2006) e Junqueira *et al* (2012a).

- Restrição 7 - Separação de itens: Pode ser necessário garantir que determinadas caixas fiquem separadas dentro de um mesmo contêiner, ou até mesmo, carregadas em contêineres diferentes. Por exemplo, produtos alimentícios devem ser posicionados distantes de artigos de perfumarias e outros produtos químicos. Exemplos podem ser encontrados em Eley (2003).

A restrição 7 foi originalmente definida por Bischoff e Ratcliff (1995) como "*Separations of items within a container*", isto é, os autores consideram as separações de determinados tipos de caixas pelo afastamento dentro de um único contêiner, por outro lado, Eley (2003) estende tal descrição para tratar a separação de itens em contêineres distintos.

- Restrição 8 - Carregamento completo de grupos de itens: Alguns subconjuntos da carga devem ser integralmente carregados (ou deixados de fora do

carregamento), mesmo que isso afete a ocupação do contêiner. Mais precisamente, se uma caixa de um determinado grupo for carregada, deve-se garantir que todas as demais caixas também sejam transportadas ou, de modo alternativo, se uma caixa não for carregada, todas as demais caixas deste subconjunto não devem pertencer ao carregamento. Para exemplificar, considere uma máquina (móvel, etc.) que está embalada em diversas caixas. Não tem sentido prático carregar apenas algumas unidades destas caixas, isto é, deve-se garantir o carregamento integral do grupo. Tais subconjuntos serão chamados, no decorrer deste trabalho, de grupo de caixas (itens) ou simplesmente de grupos. Exemplos podem ser encontrados em Eley (2003).

Obviamente, a restrição 8 é aplicável apenas aos problemas do tipo maximização das saídas, visto que em problemas do tipo minimização das entradas todas as caixas serão obrigatoriamente carregadas de qualquer modo. Além disso, vale destacar que as caixas que formam um dado grupo não precisam, necessariamente ser carregadas no mesmo contêiner, isto é, caixas de um grupo podem ser alocadas em contêineres distintos, desde que todas as caixas do grupo façam parte do padrão de carregamento.

De acordo com Eley (2003) a restrição de carregamento completo pode ser dividida em 4 possíveis variantes, como:

i) Variante 1: Grupo composto por caixas de um único tipo deve ser completamente carregado ou deixado de fora.

ii) Variante 2: Um grupo de caixas de tipos distintos deve ser completamente carregado ou deixado de fora. Note que esta variante difere da primeira pelos tipos de caixas que compõe o grupo, isto é, mais de um tipo de caixa pode pertencer ao grupo.

iii) Variante 3: O número de caixas de um único tipo deve ser múltiplo de um dado tamanho de lote (multiplicidade do grupo), por exemplo, 0, 4, 8, 12, 16, ..., onde 4 é multiplicidade do grupo.

iv) Variante 4: Uma combinação de caixas de tipos distintos, chamada pelo autor de grupo de carregamento completo, deve ser múltiplo de um dado tamanho de lote. Por exemplo, considere uma máquina que, desmontada para transporte, é constituída de 3 caixas do tipo 1 e 5 caixas do tipo 2. Se a decisão for empacotar x

máquinas, então 3x caixas do tipo 1 e 5x caixas do tipo 2 devem integrar o padrão de carregamento.

- Restrição 9 - Prioridades: O envio de certas caixas pode ser mais importante que de outras. Mais especificamente, caixas próximas do vencimento ou com urgência de entrega devem ter preferência no padrão de carregamento. Exemplos podem ser encontrados em Bortfeldt e Gehring (1999) e Ren *et al* (2011).

- Restrição 10 - Complexidade do padrão de empacotamento: Padrões de carregamento mais complexos podem, inevitavelmente, demandar esforços ou equipamentos extras. Casos críticos, de ausência de tecnologia, de dispositivos que efetuam o processo de carga/descarga, ou simplesmente de recursos humanos, podem implicar no impedimento imediato do carregamento de determinados tipos de caixas. Exemplos podem ser encontrados em Bortfeldt e Gehring (2001), Hifi (2002), Martello *et al* (2007) e Amossen e Pisinger (2010).

- Restrição 11 - Limite de peso: O peso total das caixas empacotadas não deve exceder o limite máximo suportado pelo contêiner, ou ainda, exceder o limite máximo de peso permitido por uma via de trânsito. Exemplos podem ser encontrados em Terno *et al* (2000), Balakirsky *et al* (2010), Iori e Martello (2010) e Liu *et al* (2011).

- Restrição 12 - Distribuição de peso dentro do contêiner: Do ponto de vista do transporte do contêiner carregado, é fundamental que o peso da carga esteja distribuído o máximo possível sobre o piso do contêiner, isto é, que o centro de gravidade de um contêiner carregado esteja próximo do centro geométrico do plano que define a base. Uma carga com o peso não uniformemente distribuído, dificulta ou impossibilita certas operações de manuseio, além de comprometer substancialmente a segurança dos operadores, principalmente em transporte por rodovias. Exemplos podem ser encontrados em Eley (2002), Balakirsky *et al* (2010) e Makarem e Haraty (2010).

3 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, inicialmente, descreve-se as formulações matemáticas da literatura que abordam, direta ou indiretamente, os problemas de carregamento de contêineres. Trabalhos correlatos como Tsai *et al* (1993), Hadjiconstantinou e Christofides (1995) e Beasley (2004) serão brevemente discutidos, enquanto que as formulações de Beasley (1985), Mohanty *et al* (1994), Chen *et al* (1995), Junqueira (2009) e de Hifi *et al* (2010) serão detalhadas com maior rigor. Por fim, este capítulo termina com a exposição e discussão dos principais métodos de solução encontrados na literatura especializada.

3.1 TRABALHOS CORRELATOS

Tsai *et al* (1993) fornecem um modelo de programação linear inteira mista 0 – 1 para o problema de carregamento de paletes do distribuidor, onde caixas de diversos tipos e tamanhos devem ser empacotadas em um único palete, de tal modo que o volume total ocupado seja mínimo. Testes computacionais, com problemas de baixa complexidade, foram realizados para validar o modelo proposto. Entretanto, nenhuma consideração prática foi citada pelos autores.

Hadjiconstantinou e Christofides (1995) e Beasley (2004) abordam o problema de corte não-guilhotinado bidimensional, do qual um único retângulo grande deve ser cortado em peças retangulares de diferentes tamanhos e valores, com o objetivo de maximizar o valor total das peças cortadas. Hadjiconstantinou e Christofides (1995) fornecem um modelo de programação linear inteira 0 – 1 para o problema. Por sua vez, Beasley (2004) fornece um modelo de programação não linear inteira mista 0 – 1. Ambas as formulações propostas, embora não tratem diretamente os PCC's, podem ser estendidas de modo a considerar problemas de carregamento de contêineres.

Nas próximas subseções serão revisadas, em ordem cronológica, as formulações de Beasley (1985), Mohanty *et al* (1994), Chen *et al* (1995), Junqueira (2009) e, por último, a formulação de Hifi *et al* (2010). Na descrição dos modelos

será mantida a nomenclatura original proposta pelos autores. Além disso, assume-se que os parâmetros e as variáveis de decisão são independentes entre as diversas modelagens apresentadas.

3.1.1 Formulação de Beasley (1985)

Beasley (1985) desenvolve uma formulação de programação linear inteira 0 – 1 para considerar o problema de corte não-guilhotinado bidimensional, onde o objetivo é determinar o padrão de corte ótimo de uma chapa retangular que deve ser cortada em peças regulares de tamanhos e valores pré-determinados. O procedimento de solução usa um limitante superior derivado de uma relaxação Lagrangeana e um procedimento de busca em árvore. Testes computacionais em 12 conjuntos de problemas foram efetuados. Os resultados mostram que a abordagem é capaz de resolver problemas de complexidade moderada.

Os parâmetros, índices e variáveis da formulação são definidos como segue:

A_0 : Retângulo de dimensões (L_0, W_0) que deve ser cortado por m retângulos menores.

(L_i, W_i) : Dimensões do retângulo i , onde $i = 1, \dots, m$.

v_i : Valor associado ao retângulo i , onde $i = 1, \dots, m$.

$P_i (Q_i)$: Quantidade mínima (máxima) de retângulos do tipo i que devem ser cortados do retângulo A_0 . Note que $0 \leq P_i \leq Q_i$, onde $i = 1, \dots, m$.

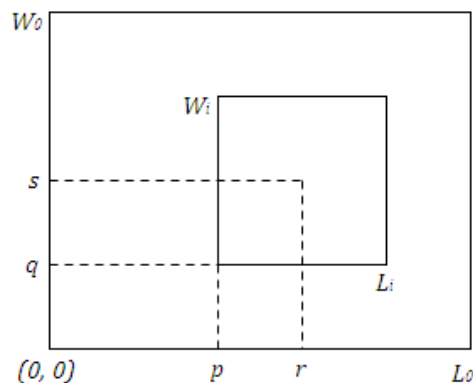


FIGURA 2 – REPRESENTAÇÃO DO RETÂNGULO DO TIPO i DENTRO DO RETÂNGULO A_0
 FONTE: Adaptado de Beasley (1985).

a_{ipqrs} : Função binária que assume o valor 1 se o retângulo do tipo i , quando cortado com seu canto inferior esquerdo na posição (p, q) , não permite que outro retângulo corte o ponto (r, s) dentro dele (veja FIGURA 2). Caso contrário, seu valor é 0.

A função binária a_{ipqrs} pode ser redefinida da seguinte maneira:

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{Se } 0 \leq p \leq r \leq p + L_i - 1 \leq L_0 - 1 \text{ e} \\ & 0 \leq q \leq s \leq q + W_i - 1 \leq W_0 - 1 \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Os conjuntos definidos em (2) e (3), indicam as possíveis posições que o canto inferior esquerdo de um retângulo i pode assumir ao longo do comprimento e da largura do retângulo A_0 , respectivamente:

$$L = \{0; 1; 2; \dots; L_0 - 1\} \quad (2)$$

$$W = \{0; 1; 2; \dots; W_0 - 1\} \quad (3)$$

As variáveis de decisão do modelo são definidas como segue:

$$x_{ipq} = \begin{cases} 1, & \text{Se um retângulo do tipo } i \text{ é cortado com o seu canto inferior} \\ & \text{esquerdo na posição } (p, q), \text{ onde } 0 \leq p \leq L_0 - L_i \text{ e } 0 \leq q \leq W_0 - W_i \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

Os autores assumem que as dimensões dos retângulos são valores inteiros. Além disso, que a orientação dos retângulos é fixa (isto é, as dimensões (p, q) e (q, p) descrevem retângulos diferentes, se $p \neq q$) e que os cortes devem ser traçados paralelos aos lados do retângulo A_0 (corte ortogonal).

A formulação de programação inteira 0 – 1 para o problema de corte não-guilhotinado bidimensional é descrita como:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{p \in L} \sum_{q \in W} v_i x_{ipq} \quad (5)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{p \in L} \sum_{q \in W} a_{ipqrs} x_{ipq} \leq 1, \quad \forall r \in L, \forall s \in W \quad (6)$$

$$P_i \leq \sum_{p \in L} \sum_{q \in W} x_{ipq} \leq Q_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$x_{ipq} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in L, \quad \forall q \in W \quad (8)$$

No modelo (5) – (8), a função objetivo (5) visa maximizar o valor (área) total dos retângulos cortados a partir de A_0 . As restrições em (6) impedem que um ponto qualquer seja cortado por mais de um retângulo. As expressões em (7) garantem que as quantidades mínimas e máximas de cada tipo de retângulo i sejam obedecidas. Por fim, as expressões em (8) definem o domínio das variáveis de decisão.

A formulação apresentada acima, embora não aborde diretamente os PCC's, pode ser facilmente estendida a considerar o carregamento de contêineres. Junqueira (2009) adaptou tal formulação para o empacotamento de um único contêiner, do qual servirá de base, neste trabalho, para a consideração de múltiplos contêineres.

3.1.2 Formulação de Mohanty *et al* (1994)

Mohanty *et al* (1994) apresentam uma heurística baseada em uma formulação de programação linear inteira, que usa o problema de um único contêiner como um subproblema de geração de coluna. O algoritmo heurístico visa empacotar um subconjunto de caixas retangulares de diferentes valores num conjunto de contêineres disponíveis, de tal modo que o valor total das caixas seja maximizado. Testes computacionais foram efetuados em 16 exemplos. Os resultados obtidos mostram-se coerentes, entretanto, a metodologia de solução proposta não garante a otimalidade dos problemas tratados. Nenhuma restrição prática foi considerada.

Os autores usam as seguintes definições na formulação do problema:

r : Número de tipos de caixas.

p : Número de tipos de contêineres.

n_i : Número do i –ésimo ($i = 1, \dots, r$) tipo de caixa disponível.

(l_i, w_i, h_i) : Comprimento, largura e altura, respectivamente do i –ésimo ($i = 1, \dots, r$) tipo de caixa.

v_i : Volume $(l_i \cdot w_i \cdot h_i)$ do i –ésimo ($i = 1, \dots, r$) tipo de caixa.

c_i : Valor por unidade de volume do i –ésimo ($i = 1, \dots, r$) tipo de caixa (desta forma, o valor do i –ésimo tipo de caixa é $c_i \cdot v_i$).

q_k : Número do k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner disponível.

(L_k, W_k, H_k) : Comprimento, largura e altura, respectivamente do k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner.

V_k : Volume $(L_k \cdot W_k \cdot H_k)$ do k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner.

s_k : Número do padrão de empacotamento disponível para o k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner.

a_{ijk} : Número do i – étimo ($i = 1, \dots, r$) tipo de caixa empacotada no k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner usando o j – étimo ($j = 1, \dots, s_k$) padrão de empacotamento.

A_{jk} : Vetor do número de cada tipo de caixa empacotada no k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner usando o j – étimo ($j = 1, \dots, s_k$) padrão de empacotamento $(a_{1jk}, a_{2jk}, \dots, a_{rjk})^T$.

x_{jk} : Número do k – étimo ($k = 1, \dots, p$) tipo de contêiner empacotado usando o j – étimo padrão de empacotamento.

N : Vetor do número de cada tipo de caixa disponível $(n_1, n_2, \dots, n_r)^T$.

Um padrão de empacotamento, usado para carregar um dado contêiner, possui informação do número de caixas de cada tipo, bem como, a configuração destas caixas dentro do contêiner. Usando a notação citada acima, a formulação do problema fica estabelecida como:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{s_k} C_{jk} \cdot x_{jk} \quad (9)$$

Sujeito a

$$\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{s_k} A_{jk} \cdot x_{jk} \leq N \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{s_k} x_{jk} \leq q_k \quad (11)$$

$$x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (12)$$

Onde C_{jk} , dado por $C_{jk} = \sum_{i=1}^r a_{ijk} \cdot c_i \cdot v_i$, é o valor total do j – étimo padrão de empacotamento.

A metodologia de resolução do modelo (9) – (12), proposta pelos autores, é um procedimento heurístico que usa uma abordagem gulosa na geração de colunas (padrões de empacotamento). Entretanto, tal metodologia não garante a obtenção da solução ótima para o problema, pois computacionalmente torna-se inviável a geração de todos os padrões de carregamento.

3.1.3 Formulação de Chen *et al* (1995)

Chen *et al* (1995) consideram o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos (não-idênticos), onde um subconjunto de contêineres deve ser selecionado para empacotar todas as caixas regulares disponíveis. O objetivo principal deste problema é minimizar o espaço não utilizado, isto é, obter a mínima perda de volume dos contêineres designados. Os autores apresentam uma formulação matemática, por meio de um modelo de programação linear inteira mista 0 – 1, para tratar o problema. Testes computacionais foram efetuados com exemplos de baixa complexidade, apenas para validar a modelagem proposta. Restrições de orientação e distribuição de peso são abordadas no modelo, no entanto, não se tem garantia de um carregamento estável.

Os parâmetros e variáveis usadas na formulação são definidas como segue:

N : Número total de caixas para serem empacotadas.

m : Número total de contêineres disponíveis.

M : Número arbitrariamente grande.

s_{ij} : Variável binária, que é igual a 1 se a caixa i é carregada no contêiner j , caso contrário é igual a 0.

n_j : Variável binária, que é igual a 1 se o contêiner j é usado, caso contrário é igual a 0.

(p_i, q_i, r_i) : Comprimento, largura e altura da caixa i , respectivamente.

(L_j, W_j, H_j) : Comprimento, largura e altura do contêiner j , respectivamente.

(x_i, y_i, z_i) : Variáveis contínuas que indicam a localização do vértice frontal esquerdo inferior da caixa i .

(l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}) : Variáveis binárias que indicam se o comprimento da caixa i está paralelo ao eixo X, Y ou Z . Por exemplo, o valor de l_{xi} é igual a 1 se o comprimento da caixa i é paralelo ao eixo X , caso contrário é igual a 0.

(w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}) : Variáveis binárias que indicam se a largura da caixa i está paralelo ao eixo X, Y ou Z . Por exemplo, o valor de w_{xi} é igual a 1 se a largura da caixa i é paralelo ao eixo X , caso contrário é igual a 0.

(h_{xi}, h_{yi}, h_{zi}) : Variáveis binárias que indicam se a altura da caixa i está paralelo ao eixo X, Y ou Z . Por exemplo, o valor de h_{xi} é igual a 1 se a altura da caixa i é paralelo ao eixo X , caso contrário é igual a 0.

A posição relativa das caixas é definido pelas seguintes variáveis binárias:

a_{ik} : Caixa i encontra-se à esquerda da caixa k .

b_{ik} : Caixa i encontra-se à direita da caixa k .

c_{ik} : Caixa i encontra-se atrás da caixa k .

d_{ik} : Caixa i encontra-se na frente da caixa k .

e_{ik} : Caixa i encontra-se abaixo da caixa k .

f_{ik} : Caixa i encontra-se acima da caixa k .

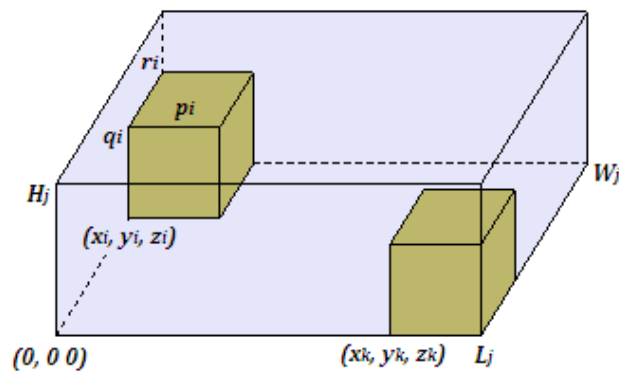


FIGURA 3 – POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS CAIXAS
 FONTE: Adaptado de Chen *et al* (1995).

As variáveis definidas acima são necessárias apenas quando $i < k$. Na (FIGURA 3) é apresentado uma ilustração da posição relativa de duas caixas i e k carregadas dentro do contêiner j , que encontra-se posicionado na origem (s_{ij} e s_{kj} iguais a 1). Observe que a caixa i está posicionada à esquerda e atrás da caixa k , desta forma, apenas às posições relativas a_{ik} e c_{ik} são iguais a 1. Além disso, a caixa i possui seu comprimento, sua largura e sua altura paralelo ao eixo X , ao eixo

Z e ao eixo Y, respectivamente. Portanto, os indicadores de orientação da caixa i , são: l_{xi} , w_{zi} e h_{yi} iguais a 1.

Os autores formulam o problema de carregamento de contêiner de acordo com o seguinte modelo:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^m L_j \cdot W_j \cdot H_j \cdot n_j - \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i \cdot r_i \quad (13)$$

Sujeito a

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (14)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot w_{xk} + r_k \cdot h_{xk} \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (15)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (16)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot l_{yk} + r_k \cdot h_{yk} \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (17)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq z_k + (1 - e_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (18)$$

$$z_k + r_k \cdot h_{zk} + q_k \cdot w_{zk} + p_k \cdot l_{zk} \leq z_i + (1 - f_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (19)$$

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} + e_{ik} \geq s_{ij} + s_{kj} - 1, \quad \forall i, k, i < k \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^m s_{ij} = 1, \quad \forall i \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^N s_{ij} \leq M \cdot n_j, \quad \forall j \quad (22)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq L_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (23)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq W_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (24)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq H_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (25)$$

$$l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}, h_{xi}, h_{yi}, h_{zi}, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, e_{ik}, f_{ik}, s_{ij}, n_j \in \{0,1\} \quad (26)$$

$$x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$$

No modelo, definido por (13) – (26), a expressão (13) descreve a função objetivo, que visa minimizar a perda de volume não utilizado dos contêineres selecionados. As restrições (14) – (20) impedem que ocorram sobreposições das caixas empacotadas dentro de um mesmo contêiner. A restrição (21) garante que uma caixa seja empacotada em apenas um dos contêineres disponíveis. Se uma caixa qualquer é designada a um contêiner j , a expressão (22) assegura que este

contêiner encontra-se em uso. As restrições (23) – (25) garantem que todas as caixas sejam posicionadas inteiramente dentro das limitações físicas do contêiner. Por fim, as expressões em (26) definem o domínio das variáveis do modelo.

No modelo, as variáveis binárias $l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}, h_{xi}, h_{yi}$ e h_{zi} são dependentes e existe a seguinte relação entre elas:

$$l_{xi} + l_{yi} + l_{zi} = 1 \quad (27)$$

$$w_{xi} + w_{yi} + w_{zi} = 1 \quad (28)$$

$$h_{xi} + h_{yi} + h_{zi} = 1 \quad (29)$$

$$l_{xi} + w_{xi} + h_{xi} = 1 \quad (30)$$

$$l_{yi} + w_{yi} + h_{yi} = 1 \quad (31)$$

$$l_{zi} + w_{zi} + h_{zi} = 1 \quad (32)$$

Com base nas relações (27) – (32), os autores eliminam do modelo as seguintes variáveis $l_{yi}, w_{xi}, w_{zi}, h_{xi}$ e h_{yi} . As restrições, após os ajustes, podem ser reescritas da seguinte forma:

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot (l_{zi} - w_{yi} + h_{zi}) + r_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi} + w_{yi} - h_{zi}) \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M \quad (33)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot (l_{zk} - w_{yk} + h_{zk}) + r_k \cdot (1 - l_{xk} - l_{zk} + w_{yk} - h_{zk}) \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M \quad (34)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi}) + r_i \cdot (l_{xi} + l_{zi} - w_{yi}) \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M \quad (35)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot (1 - l_{xk} - l_{zk}) + r_k \cdot (l_{xk} + l_{zk} - w_{yk}) \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M \quad (36)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot (1 - l_{zi} - h_{zi}) + p_i \cdot l_{zi} \leq z_k + (1 - e_{ik}) \cdot M \quad (37)$$

$$z_k + r_k \cdot h_{zk} + q_k \cdot (1 - l_{zk} - h_{zk}) + p_k \cdot l_{zk} \leq z_i + (1 - f_{ik}) \cdot M \quad (38)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot (l_{zi} - w_{yi} + h_{zi}) + r_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi} + w_{yi} - h_{zi}) \leq L_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad (39)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot (1 - l_{xi} - l_{zi}) + r_i \cdot (l_{xi} + l_{zi} - w_{yi}) \leq W_j + (1 - s_{ij}) \cdot M \quad (40)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot (1 - l_{zi} - h_{zi}) + p_i \cdot l_{zi} \leq H_j + (1 - s_{ij}) \cdot M, \quad \forall i, j \quad (41)$$

Estas restrições, definidas por (33) – (41), devem substituir as suas respectivas expressões no modelo (13) – (26). O modelo revisado é composto por $\frac{1}{2}mN(N-1) + 3N(N+m-1) + N+m$ restrições e $(3N+m+4)N+m$ variáveis, sendo $(3N+m+1)N+m$ variáveis binárias e $3N$ variáveis contínuas.

Com o propósito de considerar outros casos especiais dos PCC's, Chen *et al* (1995) ainda fornecem algumas modificações para o modelo proposto. Os autores sugerem adaptações na formulação para minimizar o comprimento de um contêiner,

para abordar a distribuição de peso dentro dos contêineres e, por último, adaptações para selecionar apenas um contêiner de um conjunto disponível. A seguir, encontra-se adaptado apenas o último caso citado.

Se o objetivo é a seleção de um único contêiner para empacotar um dado conjunto de caixas, de tal modo que o espaço não utilizado do contêiner seja minimizado, as seguintes modificações devem ser efetuadas: (i) Exclua do modelo as restrições (21) e (22); (ii) Elimine a variável s_{ij} ; (iii) Defina o valor do lado direito da restrição (20) igual a 1; (iv) Substitua o lado direito das restrições (39), (40) e (41) por $\sum_{j=1}^m L_j n_j$, $\sum_{j=1}^m W_j n_j$ e $\sum_{j=1}^m H_j n_j$, respectivamente e (v) Acrescente a seguinte restrição ao modelo $\sum_{j=1}^m n_j = 1$. Desta forma, a formulação é dada por:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^m L_j \cdot W_j \cdot H_j \cdot n_j - \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i \cdot r_i \quad (42)$$

Sujeito a

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (43)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k \cdot w_{xk} + r_k \cdot h_{xk} \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (44)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (45)$$

$$y_k + q_k \cdot w_{yk} + p_k \cdot l_{yk} + r_k \cdot h_{yk} \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (46)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq z_k + (1 - e_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (47)$$

$$z_k + r_k \cdot h_{zk} + q_k \cdot w_{zk} + p_k \cdot l_{zk} \leq z_i + (1 - f_{ik}) \cdot M, \quad \forall i, k, i < k \quad (48)$$

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} + e_{ik} \geq 1, \quad \forall i, k, i < k \quad (49)$$

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i \cdot w_{xi} + r_i \cdot h_{xi} \leq \sum_{j=1}^m L_j n_j, \quad \forall i \quad (50)$$

$$y_i + q_i \cdot w_{yi} + p_i \cdot l_{yi} + r_i \cdot h_{yi} \leq \sum_{j=1}^m W_j n_j, \quad \forall i \quad (51)$$

$$z_i + r_i \cdot h_{zi} + q_i \cdot w_{zi} + p_i \cdot l_{zi} \leq \sum_{j=1}^m H_j n_j, \quad \forall i \quad (52)$$

$$\sum_{j=1}^m n_j = 1 \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 & l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, w_{xi}, w_{yi}, w_{zi}, h_{xi}, h_{yi}, h_{zi}, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, e_{ik}, f_{ik}, n_j \in \{0,1\} \\
 & x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{54}$$

Observe que, no modelo (42) – (54), as expressões (42) – (49) são similares as expressões do modelo proposto inicialmente, logo, possuem a mesma interpretação. As expressões definidas em (50) – (52) garantem que as caixas empacotadas no contêiner j estejam inteiramente dentro das limitações físicas do contêiner escolhido. A restrição (53), incomum ao modelo proposto inicialmente, assegura que será selecionado apenas um contêiner do conjunto disponível. Finalmente, (54) define os domínios das variáveis de decisão do modelo.

3.1.4 Formulação de Junqueira (2009)

Junqueira (2009) apresenta um modelo de programação linear inteira 0 – 1 para o empacotamento de um subconjunto de caixas dentro de um único contêiner disponível, de tal modo que o valor (volume) das caixas carregadas seja maximizado. Esta abordagem permitiu aos autores em trabalhos correlatos, como em Junqueira (2009), Junqueira *et al* (2010) e Junqueira *et al* (2012a, 2012b), a formulação matemática das restrições adicionais de estabilidade da carga (vertical e horizontal), limitação de peso, empilhamento máximo, orientação das caixas e múltiplos destinos. Testes computacionais, com instâncias da literatura e geradas aleatoriamente, mostram que o modelo é coerente e descreve satisfatoriamente as condições tratadas. Entretanto, os autores concluem que a abordagem se limita a resolver problemas de baixa complexidade, e sugerem que para problemas mais realistas métodos alternativos de resolução devem ser levados em consideração.

Nesta seção será apresentado, resumidamente, apenas o modelo base definido pelas considerações geométricas, restrição de limitação do número de caixas e restrição adicional de estabilidade vertical. A seguir, descreve-se a nomenclatura usada na formulação do problema.

(L, W, H) : Comprimento, largura e altura do contêiner, respectivamente.

m : Quantidade de tipos de caixas disponíveis.

(l_i, w_i, h_i) : Comprimento, largura e altura da caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$), respectivamente.

b_i : Disponibilidade máxima da caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$).

v_i : Volume (valor) da caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$).

α : Coeficiente de estabilidade vertical, onde $\alpha \in [0; 1]$.

O coeficiente de estabilidade vertical, citado acima, é comumente encontrado na literatura de carregamento de contêiner, por exemplo, em Eley (2002). A interpretação deste parâmetro varia de acordo com o seu intervalo de definição. Se por um lado $\alpha = 0$, a exigência quanto à estabilidade das caixas é desconsiderada, isto é, as caixas podem estar parcialmente apoiadas ou flutuando dentro do contêiner. Por outro lado, se $\alpha = 1$, exige-se que 100% das faces inferiores das caixas estejam apoiadas, seja pelas faces superiores das demais caixas ou pelo piso do contêiner.

Na modelagem do problema os autores assumem que: todas as caixas devem ser empacotadas ortogonalmente dentro do contêiner (isto é, os lados das caixas devem ser paralelos ou ortogonais aos lados do contêiner); que as caixas possuem dimensões inteiras e, por fim, que a orientação dos itens seja fixa (isto é, não pode haver rotação das caixas em torno de nenhum de seus eixos).

Além disso, os autores admitem que o contêiner encontra-se posicionado na origem do sistema de coordenadas cartesianas (com os lados L, W e H do contêiner paralelos aos eixos X, Y e Z , respectivamente), e que a posição (p, q, r) define o vértice inferior frontal esquerdo que uma determinada caixa pode assumir dentro do contêiner (veja FIGURA 4).

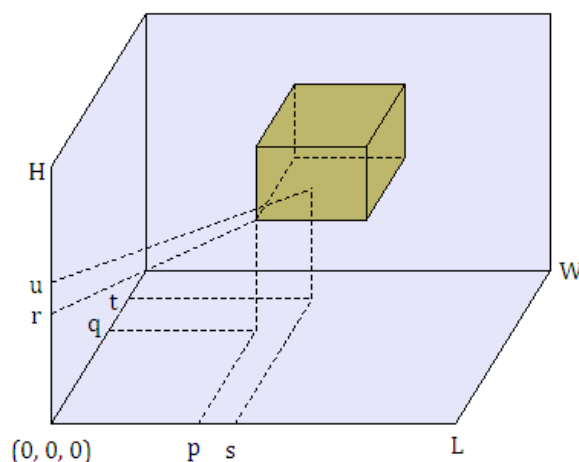


FIGURA 4 – CAIXA DO TIPO i POSICIONADA COM SEU VÉRTICE NO PONTO (p, q, r) DENTRO DE UM CONTÊINER POSICIONADO NA ORIGEM

FONTE: Adaptado de Junqueira (2009).

Os conjuntos abaixo, definidos pelo autor, indicam as possíveis posições que uma determinada caixa pode assumir em relação aos eixos do contêiner:

$$X = \{p | 0 \leq p \leq L - \min_i(l_i), p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (55)$$

$$Y = \{q | 0 \leq q \leq W - \min_i(w_i), q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (56)$$

$$Z = \{r | 0 \leq r \leq H - \min_i(r_i), r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (57)$$

Com a finalidade de reduzir a cardinalidade dos conjuntos (55)-(57), e conseqüentemente reduzir as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo dos eixos do contêiner, o autor redefine estes conjuntos, de acordo com os padrões normais ou seções cônicas de Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), da seguinte forma:

$$X = \{p | p = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot l_i, 0 \leq p \leq L - \min_i(l_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (55')$$

$$Y = \{q | q = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot w_i, 0 \leq q \leq W - \min_i(w_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (56')$$

$$Z = \{r | r = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot h_i, 0 \leq r \leq H - \min_i(h_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (57')$$

Considere ainda:

$$X_i = \{p \in X | 0 \leq p \leq L - l_i\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (58)$$

$$Y_i = \{q \in Y | 0 \leq q \leq W - w_i\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (59)$$

$$Z_i = \{r \in Z | 0 \leq r \leq H - h_i\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (60)$$

As variáveis de decisão do modelo foram definidas como:

$$x_{ipqr} = \begin{cases} 1 & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice frontal inferior} \\ & \text{esquerdo posicionado no ponto } (p, q, r) \text{ do contêiner, tal que} \\ & 0 \leq p \leq L - l_i, 0 \leq q \leq W - w_i \text{ e } 0 \leq r \leq H - h_i \\ 0 & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (61)$$

A modelo matemático, proposto pelo autor, para o carregamento de um único contêiner com restrição adicional de estabilidade vertical da carga é formulado como:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} v_i \cdot x_{ipqr} \quad (62)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_i | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ipqr} \leq 1, \quad (63)$$

Onde $s \in X$, $t \in Y$ e $r \in Z$

$$\sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ipqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (64)$$

$$\sum_{\{i | r' - h_i \geq 0\}} \sum_{\{p \in X_i | p' - l_i + 1 \leq p \leq p' + l_a - 1\}} \sum_{\{q \in Y_i | q' - w_i + 1 \leq q \leq q' + w_a - 1\}} L_{ia} \cdot W_{ia} \cdot x_{ipq}(r' - h_i) \geq \alpha \cdot l_a \cdot w_a \cdot x_{ap'q'r'}, \quad (65)$$

Onde $a = 1, \dots, m$, $p' \in X_a$, $q' \in Y_a$ e $r' \in Z_a \setminus \{0\}$

$$\text{Com } \begin{cases} L_{ia} = \min(p + l_i, p' + l_a) - \max(p, p') \\ W_{ia} = \min(q + w_i, q' + w_a) - \max(q, q') \end{cases}$$

$$x_{ipqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in X_i, \quad q \in Y_i, \quad r \in Z_i \quad (66)$$

No modelo acima, definido por (62) – (66), a função objetivo (62) visa maximizar o valor (volume) total das caixas carregadas. As restrições (63) não permitem que ocorra sobreposição das caixas dentro do contêiner, isto é, impedem que a posição (s, t, u) ocupada pela caixa do tipo i cujo vértice inferior frontal esquerdo é o ponto (p, q, r) , seja ocupada por outra caixa distinta (veja FIGURA 4). As expressões (64) não permitem o carregamento de caixas do tipo i além da disponibilidade máxima. As restrições (65) tratam a estabilidade vertical do carregamento e, por fim, as expressões (66) definem o domínio das variáveis do modelo.

3.1.5 Formulação de Hifi *et al* (2010)

Hifi *et al* (2010) apresentam uma formulação de programação linear inteira mista para o problema de carregamento de contêineres, com o objetivo de minimizar o número de contêineres idênticos designados para empacotar um dado conjunto de caixas regulares. Os autores fornecem algumas desigualdades especiais com a

finalidade de melhorar o limitante inferior relaxado da formulação proposta. Testes computacionais, efetuados com exemplos da literatura, mostram que a performance da abordagem é satisfatória quando comparada com outros trabalhos correlatos, tal como Martello *et al* (2000).

Os parâmetros, índices e as variáveis de decisão do modelo são definidas como:

n : Número de caixas regulares.

(w_i, h_i, d_i) : Largura, altura e comprimento, respectivamente, de cada caixa i ($i = 1, \dots, n$).

(W, H, D) : Largura, altura e comprimento dos contêineres.

$\bar{\gamma}$: Número inicial suficiente de contêineres (limite superior) capaz de empacotar todas as caixas disponíveis (onde $n \geq \bar{\gamma}$).

(x_i, y_i, z_i) : Coordenadas do canto inferior esquerdo posterior da caixa i , onde $x_i \geq 0, y_i \geq 0, z_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, n$.

$(0, 0, 0)$: Coordenadas do canto inferior esquerdo posterior do contêiner.

γ_i : Rótulo do contêiner ao qual a caixa i foi designada ($i = 1, \dots, m$). O objetivo é minimizar o maior rótulo do contêiner usado $\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \{\gamma_i\}$.

$l_{ij} = 1$: Indica que a caixa i está posicionada à esquerda da caixa j .

$u_{ij} = 1$: Indica que a caixa i está posicionada abaixo da caixa j .

$b_{ij} = 1$: Indica que a caixa i está posicionada atrás da caixa j .

$c_{ij} = 1$: Se $\gamma_i < \gamma_j$.

Com base nestas definições, o modelo de programação linear inteira mista proposto para o problema é definido por:

$$\text{Minimizar } \gamma \tag{67}$$

Sujeito a

$$l_{ij} + l_{ji} + u_{ij} + u_{ji} + b_{ij} + b_{ji} + c_{ij} + c_{ji} = 1, \quad i < j = 1, \dots, n \tag{68}$$

$$x_i - x_j + W(l_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq W - w_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \tag{69}$$

$$y_i - y_j + H(u_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq H - h_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \tag{70}$$

$$z_i - z_j + D(b_{ij} - c_{ij} - c_{ji}) \leq D - d_i, \quad i \neq j = 1, \dots, n \tag{71}$$

$$(\bar{\gamma} - 1)(l_{ij} + l_{ji} + u_{ij} + u_{ji} + b_{ij} + b_{ji}) + \gamma_i - \gamma_j + \bar{\gamma}c_{ij} \leq \bar{\gamma} - 1, \quad i \neq j = 1, \dots, n \tag{72}$$

$$l_{ij}, u_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (73)$$

$$0 \leq x_i \leq W - w_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (74)$$

$$0 \leq y_i \leq H - h_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (75)$$

$$0 \leq z_i \leq D - d_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (76)$$

$$0 \leq \gamma_i \leq \gamma \leq \bar{\gamma}, \quad i = 1, \dots, n \quad (77)$$

No modelo (67) – (77), as restrições (68) – (71) impedem que ocorram sobreposições das caixas dentro do contêiner. A expressão (72) resulta que se $c_{ij} = 1$ ou $c_{ji} = 1$ as caixas i e j estão localizadas em contêineres distintos, por outro lado, se alguma variável $l_{ij}, l_{ji}, u_{ij}, u_{ji}, b_{ij}, b_{ji}$ for igual a 1, as caixas i e j devem obrigatoriamente pertencer ao mesmo contêiner.

O parâmetro $\bar{\gamma}$, que pertence ao conjunto γ , é um limitante superior para o número de contêineres. George e Robinson (1980) apresentaram uma heurística de construção de paredes virtuais que permite obter, de maneira rápida, tal parâmetro.

Com base na complexidade em se determinar a solução ótima do problema definido acima, os autores buscam resolver o problema estágio por estágio. Primeiro, procura-se obter uma solução factível para o problema, em seguida, começando de um nó inicial, busca-se a solução ótima.

Hifi *et al* (2010) argumentam que os limites inferiores baseados na solução do modelo relaxado, em geral, são de baixa qualidade, isto é, uma grande quantidade desnecessária de nós devem ser gerados com a aplicação do algoritmo *Branch and Bound* (B & B). Em consequência disto, os autores apresentam desigualdades válidas adaptadas da literatura para resolver o modelo (67) – (77).

As expressões, definidas por (78) – (81), foram adaptadas de Eastman *et al* (1964) e de Bekrar e Kacem (2009). Eastman *et al* (1964) apresentaram limitantes inferiores para o problema de sequenciamento de n trabalhos em m máquinas idênticas (problema de sequenciamento), por sua vez, Bekrar e Kacem (2009) ajustaram estes limitantes para o problema de empacotamento de itens retangulares a partir de uma faixa de comprimento fixo e altura infinita (problema de empacotamento guilhotinado bidimensional em faixa), e por fim, Hifi *et al* (2010) generalizaram as desigualdades do caso bidimensional para o problema de carregamento de contêineres, como mostrado a seguir:

$$W - w_i - \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j l_{ij})}{HD} \geq x_i \geq \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j l_{ji})}{HD} \quad (78)$$

$$H - h_i - \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j u_{ij})}{WD} \geq y_i \geq \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j u_{ji})}{WD} \quad (79)$$

$$D - d_i - \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j b_{ij})}{WH} \geq z_i \geq \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j b_{ji})}{WH} \quad (80)$$

$$\gamma - \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j c_{ij})}{WHD} \geq \gamma_i \geq \frac{\sum_{j \neq i}(w_j h_j d_j c_{ji})}{WHD} + 1 \quad (81)$$

Os autores derivam as expressões (78) – (81) com base numa série de similaridades entre os problemas envolvidos, porém, por simplicidade, serão omitidas neste trabalho. Estas desigualdades, caso simultaneamente adicionadas ao modelo proposto, geram o limitante inferior para o problema tratado.

3.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Nesta seção, apresenta-se uma revisão dos principais métodos de solução encontrados na literatura de carregamento de contêiner. Inicialmente, alguns algoritmos heurísticos e metaheurísticos são discutidos, na sequência, métodos exatos, aproximados e de busca em árvore são relatados.

3.2.1 Métodos heurísticos e metaheurísticos

O problema de carregamento de contêineres, segundo Pisinger (2002), pertence a classe de problemas combinatórios *NP – Hard* (*NP – Difícil*, ou ainda, *Non-deterministic Polynomial-time hard*), o que torna um desafio à obtenção da solução ótima dentro de um limite de tempo aceitável. Deste modo, a complexidade de resolução normalmente dita a utilização de métodos de solução baseados em procedimentos heurísticos, onde acarreta na busca por algoritmos eficientes.

De acordo com Pisinger (2002), os métodos heurísticos podem ser classificados como:

i) Pilhas de caixas (ou torres de caixas): Este método pode ser visto como uma decomposição do problema de carregamento de contêiner em dois novos subproblemas, o problema tridimensional de construção de pilhas e o problema

bidimensional de alocação de pilhas no contêiner (ARAÚJO, 2006). Isto é, a partir de caixas selecionadas apropriadamente (caixas bases), deve-se construir pilhas de caixas, que posteriormente devem ser arranjadas sobre o piso do contêiner (veja FIGURA 5).

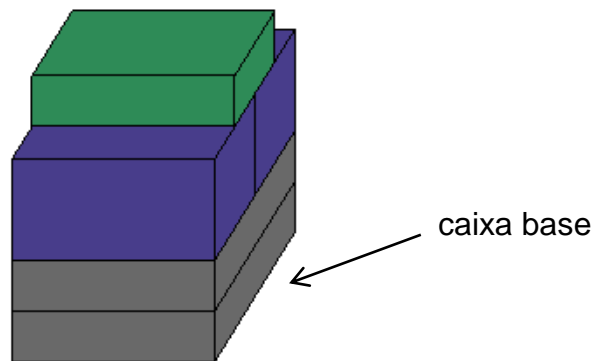


FIGURA 5 – EXEMPLO DE UMA PILHA DE CAIXAS
 FONTE: O autor (2015).

Segundo Santos (2011), este método de solução favorece a abordagem de algumas restrições práticas, como a fragilidade das caixas (empilhamento máximo) e estabilidade vertical da carga, porém, pode gerar padrões de carregamento com pouca estabilidade horizontal e baixa ocupação de volume, essencialmente quando a tipologia das caixas é fortemente heterogênea. Este procedimento de solução é utilizado, por exemplo, por Gehring e Bortfeldt (1997) e Altarazi (2013).

(ii) Paredes virtuais: Este método consiste em construir camadas (paredes) verticais ou horizontais paralelas a um dos lados do contêiner. As camadas horizontais são tomadas a partir do piso do contêiner em direção a parte superior (teto), por outro lado, as camadas verticais são construídas a partir de uma lateral do contêiner em direção a lateral oposta. Neste método, o contêiner é particionado em espaços menores e o carregamento é realizado camada por camada. Este procedimento de solução pode ser encontrado, por exemplo, em Pisinger (2002) e Cecílio e Morabito (2004).

De acordo com Araújo (2006), uma camada vertical j (CV_j) é equivalente a uma seção do contêiner que possui todos os espaços vazios com pontos que pertencem ao conjunto $CV_j = \{(x, y, z) / x_j \leq x \leq x_{j+1}, 0 \leq y \leq W, 0 \leq z \leq H\}$, onde $(x_j, 0, 0)$ e $(x_{j+1}, 0, 0)$ representam as posições do espaço vazio das camadas verticais j e $j + 1$, respectivamente. Segundo George e Robinson (1980), em geral, o

comprimento da t -ésima camada vertical ($c_t = x_{j+1} - x_j$) é determinado pelo tamanho da primeira caixa alocada na posição $(x_j, 0, 0)$, ou seja, na camada vertical j . A (FIGURA 6) ilustra o espaço associado à primeira camada vertical do contêiner, onde a caixa alocada em $(0, 0, 0)$ dita o comprimento da camada.

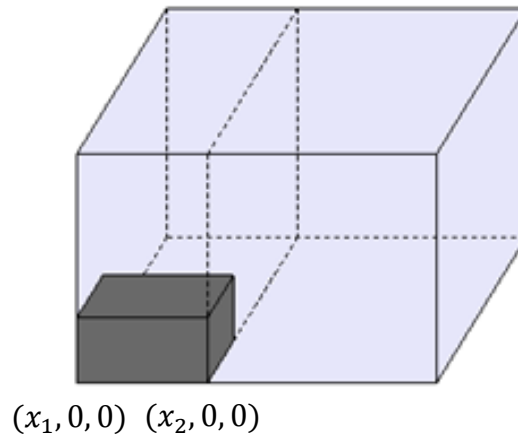


FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA CAMADA VERTICAL DE UM CONTÊINER
FONTE: O autor (2015).

(iii) Cubóides: São blocos homogêneos formados por caixas de um mesmo tipo e dispostas com mesma orientação, que devem ser alocados ortogonalmente dentro do contêiner. Na (FIGURA 7) é ilustrado um padrão de carregamento construído (parcialmente) com um cubóide formado por um determinado tipo de caixa. Esta metodologia de solução pode ser encontrado, por exemplo, em Eley (2002), Bortfeldt *et al* (2003), Araújo (2006), Araújo e Armetano (2007) e Ren *et al* (2011).

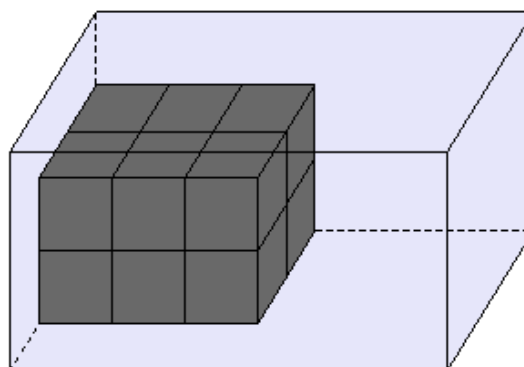


FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DE UM BLOCO HOMOGÊNEO DE CAIXAS
FONTE: O autor (2015).

(iv) Cortes guilhotinados: São cortes realizados de uma face até a face oposta do paralelepípedo (caixa) que produzem dois novos paralelepípedos (caixas)

menores e adjacentes. Neste método, o padrão de carregamento pode ser obtido com uma sequência de cortes guilhotinados. Morabito e Arenales (1994) utilizam esta metodologia, contudo, sua aplicação é mais comum em problemas bidimensionais. Na (FIGURA 8 a) e b)) ilustra-se padrões de corte guilhotinado e não-guilhotinado, respectivamente.

Nos últimos anos, além dos métodos heurísticos, a utilização de técnicas de solução baseadas em metaheurísticas tem sido bastante notável na literatura especializada. Estas técnicas podem ser vistas como estruturas algorítmicas, capazes de evitar ótimos locais, e que podem ser adaptadas a diferentes problemas de otimização, isto é, um conjunto de conceitos que podem ser utilizados para definir métodos heurísticos aplicáveis a um extenso conjunto de problemas distintos. Dentre as mais comumente utilizadas em problemas de carregamento de contêiner, destacam-se: Algoritmo Genético; *Simulated Annealing*; Busca tabu; Colônias de formiga; Nuvem de partículas e GRASP. Autores como Bortfeldt *et al* (2003), Moura e Oliveira (2005), Takahara (2006), Wang *et al* (2010), Yap *et al* (2012) e Domingo *et al* (2012) utilizam este procedimento de solução.

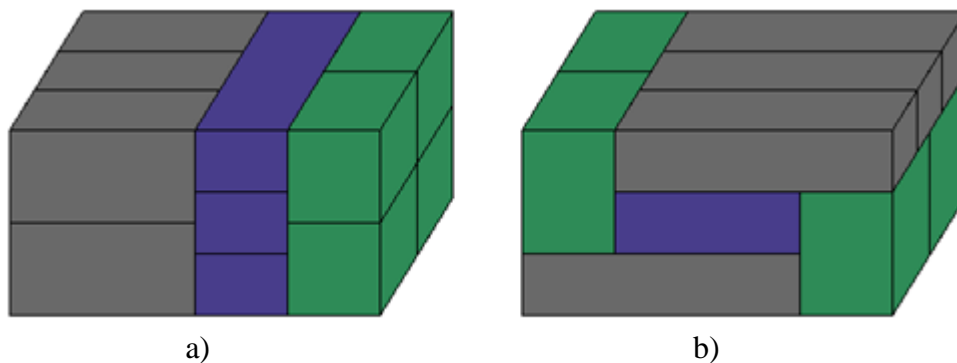


FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE GUILHOTINADO E NÃO-GUILHOTINADO, RESPECTIVAMENTE
 FONTE: O autor (2015).

3.2.2 Algoritmos exatos, de busca em árvore e de aproximação

Como visto na subseção anterior, os problemas de carregamento de contêiner, em geral, pertencem a classe de problemas combinatórios *NP – Hard*, e são essencialmente difíceis de resolver na prática, diferentemente, por exemplo, do problema de corte unidimensional. Por esta razão, são poucas as abordagens

encontradas na literatura que tratem de maneira exata estes problemas tridimensionais.

No decorrer desta subseção, são discutidas algumas aplicações de métodos de solução encontrados na literatura. Algoritmos exatos, aproximados e de busca em árvore serão considerados, no entanto, alguns métodos de solução serão citados sem a preocupação da descrição formal, como o método de *Branch & Bound* e relaxação Lagrangeana. O primeiro pode ser obtido em Murty (1985), por sua vez, a relaxação Lagrangeana pode ser encontrada em Fischer (1981).

Martello *et al* (2000) fornecem um algoritmo exato para o carregamento de um único contêiner (problema do tipo SKP), do qual derivam um método baseado em *Branch & Bound* para o carregamento de múltiplos contêineres, em especial para o SBSBPP. Os autores não consideram nenhuma restrição prática e as caixas do carregamento devem possuir orientação fixa, porém, cortes não-guilhotinados são considerados. Experimentos computacionais, com instâncias de até 90 caixas, mostram que a abordagem não é capaz de resolver, dentro de um limite de tempo aceitável, problemas com elevado número de caixas, se limitando apenas a resolver otimamente exemplos com até 20 itens disponíveis.

Busca em árvore pode ser uma alternativa de solução para os problemas de carregamento de contêiner, em geral, esta metodologia usa heurísticas construtivas para obter a solução a partir de nós da árvore. Entretanto, explorar todos estes nós é uma tarefa computacionalmente inviável, por este motivo, é necessário utilizar algoritmos variados para explorar parcialmente a árvore de maneira eficiente.

Hifi (2004) apresenta um algoritmo de busca em profundidade e um algoritmo de programação dinâmica (ambas abordagens exatas) para resolver o problema de corte tridimensional restrito, isto é, onde apenas uma quantidade limitada de cada tipo de caixa está disponível para corte. Restrições de orientação (em todos os sentidos) e cortes guilhotinados são considerados. Os autores efetuaram testes computacionais com 60 instâncias, com até 50 caixas, obtendo resultados ótimos na grande maioria dos casos.

Oliveira e Morabito (2006) apresentam métodos exatos, baseados em relaxações Lagrangeana e *Surrogate*, com desempenho considerável para resolver o problema de carregamento de paletes do produtor. As técnicas de solução propostas são procedimentos de busca em árvore do tipo *Branch and Bound* que,

em cada nó, utilizam limitantes obtidos de relaxações Lagrangeana de uma formulação de programação linear inteira 0 – 1. Algoritmos de otimização do subgradiente são usados para otimizar estes limitantes. Experimentos computacionais foram realizados com um problema real e instâncias da literatura. Os resultados obtidos mostram que as técnicas propostas são competitivas com outras técnicas da literatura.

Fekete *et al* (2007) fornecem um algoritmo exato de busca em árvore para resolver problemas de carregamento de contêiner. Os autores usam uma caracterização em teoria de grafos para a posição relativa das caixas em um empacotamento factível. Testes computacionais com 150 instâncias (com até 80 caixas) do problema SKP foram efetuados. Os resultados obtidos mostram que apenas problemas com até 20 caixas podem ser resolvidos otimamente dentro de um limite de tempo aceitável, contudo, 70% dos exemplos testados foram resolvidos otimamente.

Ren *et al* (2011) consideram o problema de carregamento de contêiner com restrição adicional de prioridades de envio. Os autores usam um método de busca em árvore baseado numa heurística gulosa e um procedimento de construção de cubóides. Testes computacionais efetuados com instâncias da literatura mostram que a ocupação do contêiner não depende apenas dos tipos das caixas, mas também das suas prioridades de envio.

Algoritmos de aproximação são métodos usados para encontrar soluções com certa garantia de qualidade, não necessariamente garantem a solução ótima, mas garantem uma performance eficiente de resolução. Algoritmos deste tipo tem sido considerados por: Mizawa e Wakabayashi (1997, 1999, 2007) e Jansen e Solis-Oba (2006).

4 MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO

Neste capítulo será apresentado o modelo proposto para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Este modelo, obtido por meio de uma adaptação da formulação de Junqueira (2009) (veja subseção 3.1.4), é capaz de considerar restrições práticas do carregamento, como estabilidade vertical da carga, separação de itens, carregamento completo de grupo de itens e orientação das caixas. Além disso, fornece condições de abordar caixas com dimensões contínuas e contêineres de diferentes tipos e tamanhos.

No decorrer deste capítulo, inicialmente, serão descritos os ajustes necessários para adaptar o modelo de Junqueira (2009) para lidar com problemas que envolvam múltiplos contêineres heterogêneos, isto é, diversos contêineres disponíveis com tipos e dimensões distintas. Em seguida, visando reduzir a complexidade do modelo, apresenta-se uma proposta alternativa aos conjuntos que descrevem as possíveis posições das caixas dentro dos contêineres. Por fim, o modelo proposto é revisitado, agora com a finalidade de considerar caixas com dimensões contínuas.

Para descrever as próximas seções, assumem-se as seguintes suposições:

- Os PCC's considerados são do tipo maximização das saídas, isto é, os contêineres são insuficientes para empacotar todas as caixas disponíveis.
- As caixas e os contêineres possuem formas regulares, isto é, paralelepípedos retangulares.
- As caixas serão empacotadas ortogonalmente dentro dos contêineres, ou seja, os lados das caixas devem ser dispostos paralelos ou ortogonalmente aos lados dos contêineres.

4.1 MODELO MATEMÁTICO

Na subseção 3.1.4, apresentou-se o modelo matemático proposto por Junqueira (2009) para abordar o carregamento de um único contêiner disponível com restrição de estabilidade vertical. No entanto, embora não tenha sido apresentado naquele trabalho, o modelo é capaz de considerar satisfatoriamente as

restrições de empilhamento máximo, múltiplos destinos, orientação das caixas e limitação de peso. Nesta seção, tal modelo será estendido de modo a considerar o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos com restrições adicionais de separação de itens e carregamento completo de grupos. Além disso, as restrições práticas de orientação das caixas e estabilidade vertical (formuladas pelo autor) serão adaptadas aos diversos contêineres disponíveis.

No decorrer deste trabalho, por simplicidade, adota-se a mesma nomenclatura e parâmetros definidos pelo autor (veja seção 3.1.4). No entanto, devido a natureza distinta dos problemas, as seguintes definições extras são necessárias:

- c : Quantidade de tipos de contêineres distintos.
- d_k : Disponibilidade do contêiner do tipo k , onde $k = 1, \dots, c$.
- (L_k, W_k, H_k) : Comprimento, largura e altura dos contêineres do tipo k ($k = 1, \dots, c$), respectivamente.

Os conjuntos (55)-(60), definidos por Junqueira (2009), indicam as possíveis posições que uma determinada caixa pode assumir ao longo dos eixos do contêiner. Ao se considerar múltiplos contêineres, com d_k contêineres do tipo k disponíveis (onde $k = 1, \dots, c$), os conjuntos (55)-(57) podem ser adaptados da seguinte forma:

$$X_k = \{p | 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_i), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (82)$$

$$Y_k = \{q | 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_i), \quad q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (83)$$

$$Z_k = \{r | 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_i), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (84)$$

Ajustes equivalentes devem ser feitos nos conjuntos descritos por (58)-(60):

$$X_{ik} = \{p \in X_k | 0 \leq p \leq L_k - l_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (85)$$

$$Y_{ik} = \{q \in Y_k | 0 \leq q \leq W_k - w_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (86)$$

$$Z_{ik} = \{r \in Z_k | 0 \leq r \leq H_k - h_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (87)$$

Observe que, para definir os conjuntos (82)-(87) um índice extra foi necessário, visto que deve-se mapear as possíveis posições das caixas em todos k tipos de contêineres disponíveis (onde, $k = 1, \dots, c$).

As variáveis de decisão do modelo passam a ser definidas como:

$$x_{ijkpqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice frontal inferior esquerdo} \\ & \text{posicionado no ponto } (p, q, r) \text{ do } j - \text{ésimo contêiner do tipo } k, \\ & \text{tal que } 0 \leq p \leq L_k - l_i, 0 \leq q \leq W_k - w_i \text{ e } 0 \leq r \leq H_k - h_i \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (88)$$

Note que, nas variáveis de decisão definidas acima, os contêineres de um determinado tipo k foram sequenciados de 1 até d_k , isto é, o índice j (j –ésimo contêiner) varia de 1 até d_k .

Para formular a modelagem matemática do problema algumas suposições são necessárias. Assume-se que todas as caixas serão carregadas com orientação fixa, isto é, não podem ser rotacionadas em torno de nenhum de seus eixos, e que todas as dimensões das caixas são valores inteiros.

A seguir, descreve-se o modelo proposto sem nenhuma restrição adicional (chamado de modelo base).

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (89)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_{ik} | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (90)$$

Onde $s \in X_k$, $t \in Y_k$, $u \in Z_k$, $\forall k = 1, \dots, c$ e $\forall j = 1, \dots, d_k$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (91)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad k = 1, \dots, c \text{ e } j = 1, \dots, d_k \quad (92)$$

No modelo base descrito por (89) – (92), tal como em Junqueira (2009) para o caso de um único contêiner disponível, a função objetivo (89) visa maximizar o valor (volume) das caixas empacotadas nos contêineres disponíveis. As restrições (90) garantem que duas ou mais caixas não se sobreponham dentro de um mesmo contêiner, isto é, que não ocupem pontos internos em comum. As expressões (91) impedem que caixas sejam carregadas além da disponibilidade máxima permitida. Por fim, as expressões (92) definem o domínio das variáveis de decisão.

No modelo acima as restrições (91) consideram apenas a limitação máxima de caixas que podem ser carregadas nos contêineres disponíveis. No entanto, caso

exista a necessidade de carregar limites mínimos de caixas (B_i), uma nova restrição pode ser considerada:

$$B_i \leq \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr}, \quad i = 1, \dots, m \quad (93)$$

Na literatura de carregamento de contêiner, problemas que exigem a limitação de quantidades que devem ser enviadas de cada tipo de caixa (seja mínimo ou máximo) são conhecidos como problemas restritos, e problemas com ausência de limitação, isto é, com disponibilidade infinita (ilimitada) de caixas, são conhecidos como problemas irrestritos.

O modelo base, tal como definido acima, embora aborde exclusivamente o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos (problemas do tipo MHKP e MHLPOP, segundo a tipologia de Wäscher *et al* (2007)), pode ser facilmente adaptado aos problemas que contenham múltiplos contêineres idênticos, bastando apenas subtrair os somatórios com os índices variando em j , excluir o índice j da variável de decisão e definir c como a quantidade disponível de contêineres idênticos. Esta modelagem pode ser obtida com maiores detalhes em Kurpel *et al* (2014).

De modo alternativo, o modelo base também pode ser estendido de forma a considerar problemas do tipo minimização das entradas, bastando apenas redefinir a função objetivo (minimizar o número de contêineres usados ou minimizar a perda de volume), ajustar as restrições definidas em (90) para evitar a sobreposição de caixas apenas nos contêineres selecionados (pela definição de uma nova variável) e, por fim, substituir a desigualdade em (91) por uma igualdade, visto que em problemas desta natureza os contêineres são suficientes para empacotar todas as caixas disponíveis.

Nas próximas subseções serão formuladas as restrições práticas de separação de itens, carregamento completo de grupo de caixas, estabilidade vertical e orientação das caixas em múltiplas direções. Estas restrições, quando necessárias em problemas práticos, devem ser acrescentadas apropriadamente ao modelo base.

4.1.1 Restrição de separação de itens

Em muitos problemas práticos é frequentemente desejável que caixas de dois (ou mais) tipos distintos sejam separadas dentro do contêiner, ou ainda, que não estejam em um mesmo contêiner (por exemplo, produtos químicos e alimentícios). Esta exigência prática não tem recebido muita atenção na literatura de carregamento de contêiner. Segundo Bortfeldt e Wäscher (2013), até o ano de 2011 apenas uma abordagem é encontrada na literatura especializada, proposta por Eley (2003). O autor, por meio de um procedimento heurístico, aborda a separação de dois tipos de caixas (a e t) em contêineres distintos.

Neste trabalho, diferentemente de Eley (2003), pretende-se considerar a separação de diversos tipos de caixas em contêineres distintos. A formulação matemática proposta visa garantir que caixas de determinados tipos não ocupem um mesmo contêiner simultaneamente. Mais especificamente, a formulação garante que em cada contêiner específico seja empacotado no máximo um dos tipos de caixas do grupo de itens que deseja-se separar.

Para considerar a restrição prática de separação de itens, inicialmente, define-se um conjunto de tipos de caixas que deseja-se separar em contêineres distintos. Este conjunto, que será denominado por B , é composto apenas pelos tipos de caixas, entre os m tipos de caixas disponíveis, que devem ser obrigatoriamente posicionados em contêineres distintos. Contudo, vale destacar que os demais tipos de caixas, ou seja, que não pertençam ao conjunto B , podem ser empacotadas simultaneamente nos contêineres disponíveis.

Em seguida, uma nova variável binária é definida, como:

$$y_{ajk} \in \{0, 1\}, \forall a \in B, \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (94)$$

Por fim, a formulação matemática da restrição adicional que visa separar tipos determinados de caixas em contêineres distintos é dada por:

$$\sum_{p \in X_{ak}} \sum_{q \in Y_{ak}} \sum_{r \in Z_{ak}} x_{ajkpqr} \leq b_a \cdot y_{ajk}, \quad \forall a \in B, \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (95)$$

$$\sum_{a \in B} y_{ajk} \leq 1, \quad \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (96)$$

De acordo com (94), foram definidas novas variáveis binárias que, combinadas com (96), garantem, por meio de (95), que no máximo um tipo de caixa do conjunto B pode ser carregado no j -ésimo contêiner do tipo k . Observe que, como definido em (96), para o j -ésimo contêiner do tipo k , apenas uma variável binária pode assumir o valor unitário, desta forma, indicando o único tipo de caixa do conjunto B que pode ser alocada neste contêiner específico.

É importante destacar, com base nas formulações já apresentadas, que a restrição considerada nesta subseção pode levar a problemas infactíveis. Este fato pode aparecer essencialmente na combinação desta exigência prática com problemas restritos definidos pela expressão (93).

4.1.2 Restrição de carregamento completo de grupo de caixas

Tal como a restrição adicional de separação de itens, a restrição de carregamento completo de grupo de caixas não tem recebido suficiente atenção na literatura especializada. De nosso conhecimento, apenas Eley (2003) (único trabalho da literatura até o ano de 2011, segundo Bortfeldt e Wäscher (2013)), Scarpin *et al* (2014) e Schenekemberg *et al* (2014) abordam esta exigência prática. Enquanto que Eley (2003) utiliza técnicas heurísticas para o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos, Scarpin *et al* (2014) e Schenekemberg *et al* (2014) apresentam um modelo matemático para o carregamento de múltiplos contêineres idênticos.

A seguir, apresenta-se a modelagem desta restrição de acordo com às quatro variantes definidas por Eley (2003) (veja seção 2.2.2 – restrição 8).

- Variante 1: Considere um grupo composto por b_i caixas do tipo i . A formulação abaixo garante que este grupo será enviado por completo ou, alternativamente, deixado de fora do carregamento, isto é, o padrão de carregamento deve comportar as b_i unidades disponíveis ou nenhuma delas.

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} = b_i \cdot y, \quad \text{onde } y \in \{0,1\} \quad (97)$$

- Variante 2: Considere um grupo (G) composto por ρ tipos de caixas distintas. Cada tipo de caixa deste grupo possui b_i unidades (onde, $i \in G$), que

devem ser carregadas (ou deixadas de fora) juntamente com todas as demais unidades do grupo.

Considere as seguintes variáveis binárias:

$$y \text{ e } y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in G. \quad (98)$$

Desta forma, a formulação desta variante é dada por:

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} = b_i \cdot y_i, \quad \forall i \in G \quad (99)$$

$$\sum_{i \in G} y_i = \rho \cdot y \quad (100)$$

Observe que, caso a expressão definida em (100) seja igual ρ (isto é, todas as variáveis binárias em (98) sejam iguais a 1) as expressões geradas por (99) garantem que todas as caixas do grupo devem ser enviadas, caso contrário, nenhuma caixa deve ser carregada.

- Variante 3: Considere grupos formados por α_i unidades de caixas de um mesmo tipo (i). Nesta variante, o carregamento deve ser efetuado de acordo com a multiplicidade do grupo (tamanho de lote), isto é, o carregamento deve ser múltiplo de α_i (onde, $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$). A seguir, apresenta-se a formulação desta variante que visa garantir o envio de múltiplas caixas do tipo i (onde $1 \leq i \leq m$).

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} = \alpha_i \cdot y, \quad \text{onde } y \in \mathbb{Z}^+ \quad (101)$$

Em problemas restritos a multiplicidade de caixas enviadas deve respeitar a limitação máxima permitida (b_i).

- Variante 4: Considere grupos formados por caixas de tipos distintos, onde para cada grupo em particular (B), φ_i caixas do tipo i estão disponíveis (onde $i \in B$). A seguir, apresenta-se a formulação desta variante que visa garantir o envio de múltiplos grupos idênticos ($0, 1, 2, \dots$), isto é, o envio de grupos compostos pelos mesmos tipos de caixas com quantidade iguais.

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} = \varphi_i \cdot y, \quad \forall i \in B \quad (102)$$

Onde $y \in \mathbb{Z}^+$.

4.1.3 Restrição de estabilidade vertical

Nesta subseção será adaptada a formulação matemática da componente vertical da estabilidade, proposta inicialmente por Junqueira (2009), para o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Maiores detalhes da formulação, bem como a modelagem da componente horizontal da estabilidade, podem ser obtidos no trabalho original do autor.

A restrição de estabilidade vertical para o carregamento de múltiplos contêineres passa a ser descrita como:

$$\sum_{\{i|r'-h_i \geq 0\}}^m \sum_{\{p \in X_{ik} | p' - l_i + 1 \leq p \leq p' + l_a - 1\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | q' - w_i + 1 \leq q \leq q' + w_a - 1\}} L_{ia} \cdot W_{ia} \cdot x_{ijkpq}(r' - h_i) \geq \alpha \cdot l_a \cdot w_a \cdot x_{ajkp'q'r'} \quad (103)$$

$$\text{Com } \begin{cases} L_{ia} = \min(p + l_i, p' + l_a) - \max(p, p') \\ W_{ia} = \min(q + w_i, q' + w_a) - \max(q, q') \end{cases} \quad (104)$$

$$\text{Onde } a = 1, \dots, m, p' \in X_{ak}, q' \in Y_{ak}, r' \in Z_{ak} \setminus \{0\}, \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (105)$$

As expressões (103)-(105), como definidas acima, garantem o suporte da face inferior de uma caixa do tipo a posicionada no ponto (p', q', r') do j -ésimo contêiner do tipo k . Este suporte é oferecido por uma caixa do tipo i (inclusive $i = a$) que encontra-se localizada na posição (p, q, r) dentro do contêiner, onde $r = r' - h_i$.

4.1.4 Restrição de orientação das caixas

O modelo base, definido por (89)-(92), considera apenas padrões de carregamento contendo caixas com orientação fixa. No entanto, dado que o carregamento deve ser ortogonal, existe a possibilidade de que uma determinada caixa possa assumir seis orientações distintas dentro do contêiner (veja FIGURA 9). Sendo assim, nesta subseção apresenta-se a formulação para a orientação das caixas em múltiplas direções.

Na literatura é comum encontrar três tipos básicos de orientação das caixas, como:

i) Orientação fixa: Apenas uma única orientação é permitida para cada tipo de caixa, isto é, as caixas não podem ser rotacionadas em torno de seus eixos. Na

prática, este caso pode ser encontrado, por exemplo, no carregamento de paletes em contêineres, onde o equipamento (empilhadeira) que realiza a operação carga/descarga deve acessar exclusivamente um lado específico (ou lado oposto) do carregamento. Este tipo básico de orientação já encontra-se atendido pelo modelo base do início da seção.

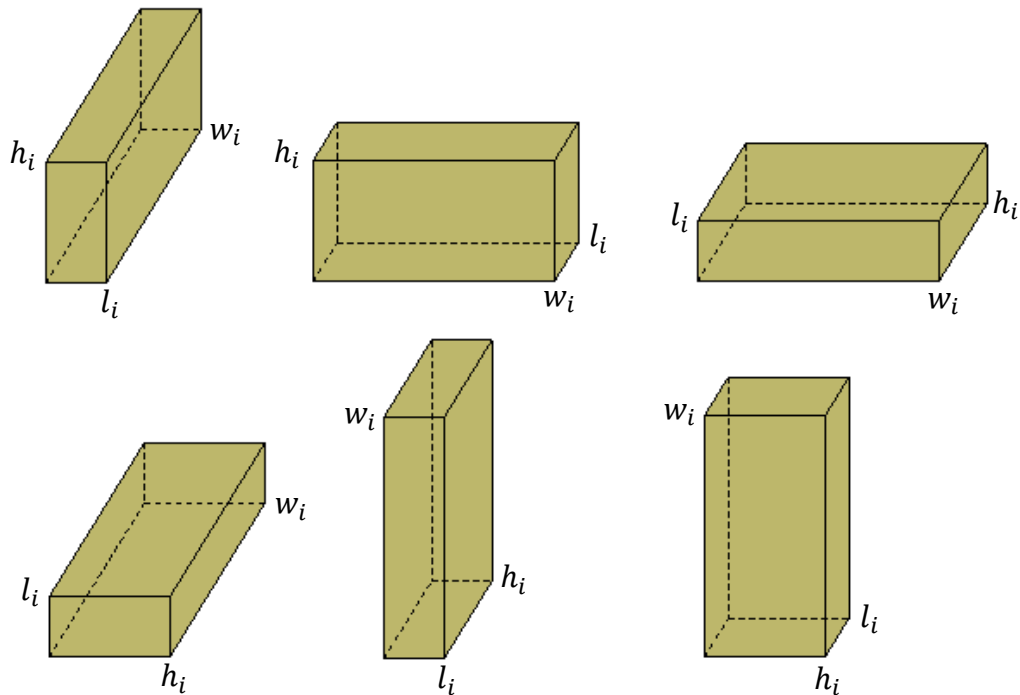


FIGURA 9 – AS SEIS POSSÍVEIS ORIENTAÇÕES QUE UMA CAIXA DO TIPO i PODE ASSUMIR NO CARREGAMENTO

FONTE: O autor (2015).

ii) Orientação no plano: Neste tipo de orientação uma dimensão particular da caixa é pré-fixada como sendo a altura, enquanto nenhuma restrição é imposta na direção horizontal. Dado que o padrão de empacotamento deve ser ortogonal, uma determinada caixa pode rotacionar 90 graus no plano do contêiner, isto é, em duas orientações possíveis. Na prática, este tipo básico pode parecer, por exemplo, em caixas que contenham informação do tipo “este lado para cima”.

Segundo Junqueira (2009), para adaptar o modelo base para tratar rotações no plano, cada orientação possível da caixa do tipo i pode ser vista como um novo tipo de caixa, isto é, uma caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$) pode ser decomposta em duas novas caixas com dimensões (l_i, w_i, h_i) e (w_i, l_i, h_i) , uma vez que apenas a altura da

caixa deve permanecer fixa. Desta forma, o modelo base passa a ter $2m$ tipos de caixas distintas, e pode ser reescrito como:

$$\text{Maximizar } \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{2m} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (106)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{2m} \sum_{\{p \in X_{ik} | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (107)$$

Onde $s \in X_k$, $t \in Y_k$, $u \in Z_k$, $\forall j = 1, \dots, d_k$ e $k = 1, \dots, c$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=(2i-1)}^{2i} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_i, \quad \hat{i} = 1, \dots, m \quad (108)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 2m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k \quad (109)$$

Observe que nas expressões (106), (107) e (109) i varia até $2m$, por outro lado, em (108) \hat{i} varia apenas até m . Além disso, (108) possui um somatório extra em relação ao modelo (89)-(92). Estes ajustes são necessários, visto que um determinado tipo de caixa i foi decomposta em duas novas caixas, deste modo, devem compartilhar a mesma restrição de limitação de caixas.

iii) Orientação geral: Este tipo de orientação permite que uma determinada caixa possa rotacionar em todas as seis possíveis direções, isto é, em torno de todos os seus eixos.

Analogamente ao tipo de orientação no plano, cada caixa do tipo i pode ser decomposta em seis novas caixas (uma caixa pra cada rotação possível) com dimensões: (l_i, w_i, h_i) , (l_i, h_i, w_i) , (w_i, l_i, h_i) , (w_i, h_i, l_i) , (h_i, l_i, w_i) e (h_i, w_i, l_i) . Desta forma, o modelo base passa a ter $6m$ tipos de caixas distintas, e pode ser reescrito como:

$$\text{Maximizar } \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{6m} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (110)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{6m} \sum_{\{p \in X_{ik} | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (111)$$

Onde $s \in X_k$, $t \in Y_k$, $u \in Z_k$, $\forall j = 1, \dots, d_k$ e $k = 1, \dots, c$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=(6\hat{i}-5)}^{6\hat{i}} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_{\hat{i}}, \quad \hat{i} = 1, \dots, m \quad (112)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 6m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k \quad (113)$$

De acordo com Junqueira (2009), outra maneira de adaptar o modelo base para múltiplas orientações, consiste em definir um índice (g) para as possíveis orientações que a caixa pode assumir. Estas orientações pertencem ao subconjunto $O_i \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, onde $O_i \neq \emptyset$. Desta forma, $x_{igjkpqr}$ passa a ser nova variável de decisão e o modelo base torna-se:

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^m \sum_{g \in O_i} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{igjkpqr} \quad (114)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{g \in O_i} \sum_{\{p \in X_{ik} | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{igjkpqr} \leq 1, \quad (115)$$

Onde $s \in X_k$, $t \in Y_k$, $u \in Z_k$, $\forall j = 1, \dots, d_k$ e $k = 1, \dots, c$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{g \in O_i} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{igjkpqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (116)$$

$$x_{igjkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k \quad (117)$$

Nesta seção todas as formulações, sendo o modelo base e as restrições práticas, foram modeladas a partir dos conjuntos definidos em (82)-(87). No entanto, uma vez que estes conjuntos possuam todas as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo dos eixos do contêiner, apenas problemas de porte moderado podem ser resolvidos, em decorrência do elevado número de variáveis e restrições do modelo. No carregamento de múltiplos contêineres estas limitações são ainda mais acentuadas, visto que para cada tipo diferente de contêiner seis

novos conjuntos como definidos em (82)-(87) são gerados, acarretando num significativo aumento dos pontos a serem analisados como possíveis vértices dos itens.

Com o objetivo de reduzir estas limitações do modelo, na próxima seção será apresentada uma proposta, por meio de uma “discretização” dos conjuntos (82)-(87), capaz de eliminar pontos potencialmente desnecessários na resolução dos problemas. Tal abordagem, além de proporcionar ganhos efetivos de desempenho de resolução, pela redução da cardinalidade destes conjuntos, permite a consideração de caixas com dimensões não inteiras no carregamento.

4.2 ALGORITMO GERADOR DE NÚMEROS ÚTEIS

O Algoritmo Gerador de Números Úteis (AGNU), que será descrito nesta seção, foi elaborado a partir do algoritmo proposto inicialmente por Carnieri *et al* (1994) para abordar o problema de corte bidimensional guilhotinado de chapas de madeira. O procedimento apresentado pelos autores permite a geração de apenas um grupo potencialmente útil de valores que devem ser avaliados como possíveis pontos de corte, eliminando pontos desnecessários na busca pelo ótimo. Este procedimento, em termos dos conjuntos de pontos gerados, é equivalente aos padrões normais e seções cônicas utilizados por Junqueira (2009), no qual se difere basicamente no processo de geração dos valores.

Carnieri *et al* (1994) não definem as posições que os eventuais resíduos podem assumir na chapa de madeira original, visto que, para metodologia de solução aplicada é indiferente a localização da peça cortada em relação ao referencial (origem). Como o modelo definido na seção anterior, tal como em Junqueira (2009), estabelece o vértice frontal inferior esquerdo como o referencial para um determinado item dentro do contêiner, uma adaptação ao AGNU foi necessária. Esta adaptação é baseada no procedimento apresentado por Arce *et al* (2004) (também disponível em Arce (2000)) para abordar o problema de corte (traçamento) de árvores para obtenção de multiprodutos em nível de fustes (tronco) individuais.

Na sequência será descrito o algoritmo para gerar o conjunto de números úteis para um contêiner genérico do tipo g com dimensões (L_g, W_g, H_g) , que deve ser

carregado com m tipos distintos de caixas de diferentes tamanhos $((l_i, w_i, h_i))$, onde $i = 1, \dots, m$.

Na descrição do algoritmo, inicialmente, uma dimensão arbitrária do contêiner deve ser selecionada, visto que o AGNU comporta apenas o caso unidimensional. Para efeito de apresentação, optou-se pelo eixo X do contêiner, porém, vale salientar que estes procedimentos podem ser estendidos diretamente aos demais eixos do contêiner (eixos Y e Z).

Passo 1. Calcule $\beta = \min \{l_i, i = 1, 2, \dots, m\}$. Defina $\bar{X}_g^{(m+1)} = F^{(m+1)} = \{0\}$, e faça $k = m$.

Passo 2. Calcule $F^{(k)} = \{\bar{x} + \varepsilon \cdot l_k / \bar{x} \in \bar{X}_g^{(k+1)}, \varepsilon = 1, 2, \dots, \text{ e } L_g - (\bar{x} + \varepsilon \cdot l_k) \geq \beta\}$.

Passo 3. Faça $\bar{X}_g^{(k)} = F^{(k)} \cup \bar{X}_g^{(k+1)}$. Remova os números equivalentes de $\bar{X}_g^{(k)}$.

Passo 4. Se $k > 1$, faça $k \leftarrow k - 1$ e volte ao **Passo 2**. Caso contrário, pare. O conjunto $\bar{X}_g^{(1)}$, ou simplesmente \bar{X}_g , contém a lista dos números úteis do contêiner do tipo g gerados a partir do eixo X .

QUADRO 1 – PSEUDOCÓDIGO DE GERAÇÃO DOS NÚMEROS ÚTEIS
Fonte: Adaptado de Arce *et al* (2004).

No pseudocódigo descrito no (QUADRO 1), inicialmente, o **Passo 1** determina o menor comprimento entre todas as caixas disponíveis (β) e o primeiro número útil é definido como a coordenada nula do eixo X . No **Passo 2**, a partir da caixa do tipo k e dos números úteis determinados, devem ser obtidos os pontos de vértices ao longo de L_g , adicionando ε comprimentos de caixa ($\varepsilon = 1, 2, \dots$), desde que o tamanho remanescente do contêiner seja suficiente para posicionar uma caixa de menor comprimento (β , obtido no **Passo 1**). Os números úteis obtidos são adicionados ao conjunto $\bar{X}_g^{(k)}$, removendo os elementos repetidos (**Passo 3**). O critério de parada do pseudocódigo é satisfeito quando $k = 1$, onde o conjunto $\bar{X}_g^{(1)}$ (\bar{X}_g) é composto pelos números úteis do comprimento do contêiner.

O procedimento descrito no (QUADRO 1) define apenas as possíveis componentes da coordenada que uma caixa pode assumir ao longo do comprimento do contêiner. Com isso, para cada tipo específico de contêiner disponível o

procedimento deve ser aplicado, separadamente, para cada dimensão, isto é, comprimento, largura e altura.

Por motivo de distinção, no decorrer deste trabalho assume-se que os conjuntos \bar{X}_g , \bar{Y}_g e \bar{Z}_g (e conseqüentemente os conjuntos \bar{X}_{ig} , \bar{Y}_{ig} e \bar{Z}_{ig}) são obtidos através da aplicação do AGNU descrito nesta seção, por sua vez, os conjuntos X_g , Y_g e Z_g (e conseqüentemente os conjuntos X_{ig} , Y_{ig} e Z_{ig}) são gerados de acordo com a definição da seção anterior.

Para exemplificar a aplicação do AGNU, considere um determinado tipo de contêiner com dimensões $(L_g, W_g, H_g) = (20, 15, 15)$, que deve ser carregado com três tipos de caixas: $(l_1, w_1, h_1) = (7, 5, 3)$, $(l_2, w_2, h_2) = (5, 6, 5)$, $(l_3, w_3, h_3) = (8, 6, 3)$.

Após a execução dos passos do (QUADRO 1), em três aplicações do AGNU, os seguintes conjuntos de números úteis foram obtidos (este exemplo encontra-se detalhado em APÊNDICE 1):

$$\bar{X}_g = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 14; 15\} \quad (118)$$

$$\bar{Y}_g = \{0; 5; 6; 10\} \quad (119)$$

$$\bar{Z}_g = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (120)$$

Em contrapartida aos conjuntos gerados com o AGNU, abaixo são apresentados os valores obtidos com os conjuntos definidos por (82)-(84).

$$X_g = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \quad (121)$$

$$Y_g = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad (122)$$

$$Z_g = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (123)$$

Com base no modelo definido por (89)–(92), os conjuntos (118)-(120) indicam que o modelo terá 603 variáveis binárias e 324 restrições de não-sobreposição. Por outro lado, os conjuntos (121)-(123) resultam em 5.452 variáveis e 2.288 restrições de não-sobreposição. Além disso, em ambas as situações o modelo base será composto por 03 restrições de limitação do número de caixas. Em síntese, os valores obtidos neste exemplo indicam que o uso do AGNU implica em apenas

11% das variáveis e 14% das restrições de não sobreposição obtidas com o modelo base da seção anterior.

Na (FIGURA 10 a) e b)) são ilustrados os planos da base do contêiner gerados pelos pares de conjuntos (\bar{X}_g, \bar{Y}_g) e (X_g, Y_g) , respectivamente. Cabe destacar que cada plano deste cortará o eixo Z do contêiner nos pontos $\bar{Z}_g = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 12\}$ e $Z_g = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$, respectivamente.

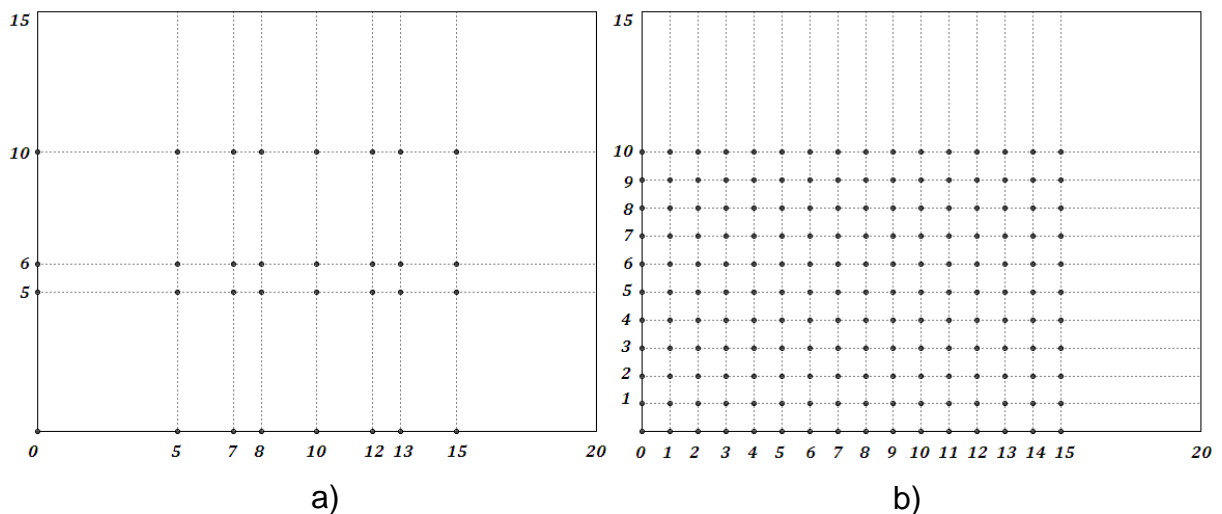


FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO PLANO DA BASE DE UM CONTÊINER OBTIDOS COM E SEM O USO DO AGNU, RESPECTIVAMENTE
 FONTE: O autor (2015).

Com base no exemplo descrito acima, fica evidente a redução de pontos a serem avaliados como possíveis vértices das caixas. Conseqüentemente, isto pode gerar significativos ganhos de performance do método de solução utilizado. Contudo, vale salientar que o AGNU obterá os mesmos pontos dos conjuntos (82)-(87) caso avalie alguma caixa que possua todas as dimensões iguais a 1.

4.3 MODELO REVISITADO

O modelo base, juntamente com as considerações práticas apresentadas na seção 4.1, foram formulados a partir dos conjuntos (82)-(87). Entretanto, como visto na seção anterior, estes conjuntos podem possuir uma grande cardinalidade de elementos e, conseqüentemente acarretar em formulações com elevado número de variáveis e restrições. Outro aspecto a ser considerado, é que as formulações da

seção 4.1 não permitem o carregamento de caixas com dimensões reais, visto que, a definição dos conjuntos (82)-(87) abrange apenas o posicionamento dos vértices das caixas em coordenadas inteiras dentro do contêiner. Com base nestas limitações, no decorrer desta seção serão apresentados os ajustes necessários para reformular a modelagem matemática proposta para o problema.

Os conjuntos definidos em (124)-(126) passam a indicar as possíveis posições que as caixas podem assumir ao longo dos eixos de um contêiner do tipo k ($k = 1, \dots, c$). Estes conjuntos foram obtidos através do AGNU, considerando os m tipos distintos de caixas em cada aplicação do algoritmo.

$$\bar{X}_k = \{p \mid p \text{ é um número útil do comprimento do contêiner do tipo } k, \quad p \in \mathbb{R}\} \quad (124)$$

$$\bar{Y}_k = \{q \mid q \text{ é um número útil da largura do contêiner do tipo } k, \quad q \in \mathbb{R}\} \quad (125)$$

$$\bar{Z}_k = \{r \mid r \text{ é um número útil da altura do contêiner do tipo } k, \quad r \in \mathbb{R}\} \quad (126)$$

De (124)-(126), como na seção 4.1, derivam os seguintes conjuntos:

$$\bar{X}_{ik} = \{p \in \bar{X}_k \mid 0 \leq p \leq L_k - l_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (127)$$

$$\bar{Y}_{ik} = \{q \in \bar{Y}_k \mid 0 \leq q \leq W_k - w_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (128)$$

$$\bar{Z}_{ik} = \{r \in \bar{Z}_k \mid 0 \leq r \leq H_k - h_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (129)$$

Das definições acima, vale salientar que os conjuntos definidos em (124)-(126), e conseqüentemente (127)-(129), podem ser compostos não apenas por elementos inteiros, diferentemente dos conjuntos definidos em (82)-(87). Este fato decorre essencialmente do uso do algoritmo gerador de números úteis apresentado na seção anterior.

Com base nestes novos conjuntos, o modelo pode ser reformulado como:

(Função objetivo)

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^m \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (130)$$

Sujeito a

(Restrição de não-sobreposição)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} \mid s-l_i < p < s\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} \mid t-w_i < q < t\}} \sum_{\{r \in \bar{Z}_{ik} \mid u-h_i < r < u\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (131)$$

Onde $s \in \bar{X}_k$, $t \in \bar{Y}_k$, $u \in \bar{Z}_k$, $\forall j = 1, \dots, d_k$ e $k = 1, \dots, c$

(Restrição de limitação do número de caixas)

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (132)$$

(Domínio das variáveis)

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in \bar{X}_{ik}, \quad q \in \bar{Y}_{ik}, \quad r \in \bar{Z}_{ik}, \quad k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k \quad (133)$$

No modelo descrito por (130)-(133), chamado de modelo base reformulado, observe que além das alterações dos conjuntos que descrevem os possíveis pontos de vértices das caixas em todas as restrições e na função objetivo, ajustes básicos foram necessários nos índices do somatório da restrição de não-sobreposição. Estes ajustes, tomados com base numa “grade” de pontos gerados a partir do uso do AGNU (veja FIGURA 10), permitem considerar, alternativamente, caixas com dimensões reais.

A seguir são apresentados os ajustes necessários para as considerações práticas da seção 4.1, exceto a restrição de orientação das caixas, visto que a sua formulação deriva basicamente do modelo (130)-(133), considerando caixas extras como alternativas de orientação.

- Restrição de separação de itens

$$y_{ajk} \in \{0,1\}, \quad \forall a \in B, \quad \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (134)$$

$$\sum_{p \in \bar{X}_{ak}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ak}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ak}} x_{ajkpqr} \leq b_a \cdot y_{ajk}, \quad \forall a \in B, \quad \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (135)$$

$$\sum_{a \in B} y_{ajk} \leq 1, \quad \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (136)$$

- Restrição de carregamento completo de grupo de itens – variante 1

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = b_i \cdot y, \quad \text{onde } y \in \{0,1\} \quad (137)$$

- Restrição de carregamento completo de grupo de itens – variante 2

$$y \text{ e } y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in G. \quad (138)$$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = b_i \cdot y_i, \quad \forall i \in G \quad (139)$$

$$\sum_{i \in G} y_i = \rho \cdot y \quad (140)$$

- Restrição de carregamento completo de grupo de itens – variante 3

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = \alpha_i \cdot y, \quad \text{onde } y \in \mathbb{Z}^+. \quad (141)$$

- Restrição de carregamento completo de grupo de itens – variante 4

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in \bar{X}_{ik}} \sum_{q \in \bar{Y}_{ik}} \sum_{r \in \bar{Z}_{ik}} x_{ijkpqr} = \varphi_i \cdot y, \quad \forall i \in B \quad (142)$$

Onde $y \in \mathbb{Z}^+$.

- Restrição de estabilidade vertical:

$$\sum_{\{i|r'-h_i \geq 0\}}^m \sum_{\{p \in \bar{X}_{ik} | p' - l_i < p < p' + l_a\}} \sum_{\{q \in \bar{Y}_{ik} | q' - w_i < q < q' + w_a\}} L_{ia} \cdot W_{ia} \cdot x_{ipq(r'-h_i)} \geq \alpha \cdot l_a \cdot w_a \cdot x_{ap'q'r'} \quad (143)$$

$$\text{Com } \begin{cases} L_{ia} = \min(p + l_i, p' + l_a) - \max(p, p') \\ W_{ia} = \min(q + w_i, q' + w_a) - \max(q, q') \end{cases} \quad (144)$$

$$\text{Onde } a = 1, \dots, m, \quad p' \in \bar{X}_a, \quad q' \in \bar{Y}_a, \quad r' \in \bar{Z}_a \setminus \{0\}, \quad (r' - h_i) \in \bar{Z}_a \setminus \{0\}, \quad \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k. \quad (145)$$

Observe que na restrição de estabilidade vertical, tal como na restrição de não-sobreposição, foram necessários ajustes básicos nos índices dos somatórios da expressão (143), além da inclusão do termo " $(r' - h_i) \in \bar{Z}_a \setminus \{0\}$ " na expressão (144), isto é, no domínio de definição da restrição.

5 TESTES COMPUTACIONAIS E RESULTADOS

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais efetuados. Os modelos foram gerados por meio de um algoritmo em linguagem de programação *Microsoft Visual Studio Ultimate 2012*© (versão 11.0.50727.1) e o *solver CPLEX*© *Interactive Optimizer* (versão 12.6.0.0), com parâmetros *default*, foi utilizado para resolvê-los. Os testes foram efetuados em um computador com sistema operacional *Microsoft Windows 8*, processador *Intel*© *Core*™ *i5-4200U CPU @ 1,60HZ 2,30GHZ*, memória *RAM* de 8GB e sistema operacional de 64 *bits*. Os modelos foram avaliados com conjuntos de testes gerados aleatoriamente (140 casos) e com dados da literatura (176 casos). Um limite máximo de tempo de 86.400 segundos (24 horas) foi estabelecido para a execução dos testes.

Em todos os testes efetuados, a qualidade da solução pode ser:

- Solução ótima, com *gap* nulo.
- Solução não ótima, com *gap* não nulo e tempo de resolução excedido pelo *CPLEX*.
- Solução não ótima, com *gap* não nulo e insuficiência de memória do computador para resolver o problema.
- Sem solução, sem *gap* e com insuficiência de memória do computador para compilar o modelo pelo *CPLEX*. Nas tabelas de resultados das seções seguintes, estes casos serão identificados por " – ".

Onde os *gap*'s de otimalidade são obtidos por:

$$gap = \frac{(\text{melhor limitante obtido} - \text{melhor valor obtido})}{(\text{melhor limitante obtido})} \cdot 100\% \quad (148)$$

5.1 CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE

Nesta seção, inicialmente, descreve-se a metodologia empregada na geração dos conjuntos de testes. Os dados gerados, com o máximo de quatro tipos de caixas disponíveis, serão divididos em dois contextos distintos com base nas dimensões

dos itens. Na sequência, serão apresentados os resultados obtidos com a realização dos testes.

5.1.1 Procedimento de geração dos conjuntos de testes

Com base na metodologia utilizada por Junqueira (2009), nesta subseção é apresentado um procedimento de geração aleatória de conjuntos de testes, que consiste na determinação de valores inteiros (apenas por simplicidade) para compor os dados dos problemas a serem resolvidos na subseção seguinte.

Os dados gerados neste trabalho podem possuir até quatro tipos distintos de caixas (isto é, $m \in \{1; 2; 3; 4\}$), onde para cada valor particular de m deve-se gerar aleatoriamente cinco ($n = 1, \dots, 5$) panoramas de informações para os contêineres, que, por sua vez, derivam dois contextos diferentes de acordo com as dimensões das caixas.

Inicialmente, nos intervalos a seguir (nos passos i) – iii)), as informações pertinentes aos contêineres devem ser arbitrariamente selecionadas.

- i) Quantidade de tipos de contêineres distintos (c) : [1; 3].
- ii) Disponibilidade de cada tipo de contêiner k , onde $k = 1, \dots, c$, (d_k): [1; 3].
- iii) Dimensões do contêiner do tipo k , onde $k = 1, \dots, c$, (L_k, W_k, H_k): [10; 25].

Em seguida, de posse dos dados obtidos anteriormente, as dimensões das caixas devem ser geradas. Para isso, dois contextos são considerados, mA e mB (onde $m \in \{1; 2; 3; 4\}$), como segue:

- Contexto mA : Para $i = 1, \dots, m$, obtenha $l_i \in [0,25\bar{L}; 0,75\bar{L}]$, $w_i \in [0,25\bar{W}; 0,75\bar{W}]$, $h_i \in [0,25\bar{H}; 0,75\bar{H}]$, onde \bar{L} , \bar{W} e \bar{H} são as menores coordenadas entre todos os contêineres disponíveis, respectivamente.

- Contexto mB : Para $i = 1, \dots, m$, obtenha $l_i \in [0,10\bar{L}; 0,50\bar{L}]$, $w_i \in [0,10\bar{W}; 0,50\bar{W}]$, $h_i \in [0,10\bar{H}; 0,50\bar{H}]$, onde \bar{L} , \bar{W} e \bar{H} são as menores coordenadas entre todos os contêineres disponíveis, respectivamente.

Dos contextos definidos acima, vale salientar que as dimensões das caixas oriundas do contexto mA tendem a possuir valores maiores que as dimensões das caixas derivadas de mB . Deste modo, os problemas resolvidos de acordo com contexto mA devem possuir, em geral, complexidade inferior de resolução, visto que

a cardinalidade dos conjuntos (125)-(130) (e dos conjuntos (82)-(87)) deverá ser substancialmente menor.

A disponibilidade de cada tipo de caixa i (b_i , onde $i = 1, \dots, m$), é obtida de acordo com o (Quadro 2) a seguir.

- Passo 1.** Calcule o volume total dos contêineres disponíveis (VTC).
- Passo 2.** Faça $\theta = VTC/m$, onde m é a quantidade de tipos de caixas distintas.
- Passo 3.** Selecione aleatoriamente uma caixa do tipo i no conjunto $\beta = \{1; \dots; m\}$. Retire i do conjunto β .
- Passo 4.** Se i não for o último tipo de caixa em β , selecione aleatoriamente um valor no intervalo $I = [0,7.\theta; 1,3.\theta]$ e volte ao **Passo 3**. Caso contrário, faça $(VTC - \sum_{\{j=1, \dots, m/j \neq i\}} b_j \cdot v_j)/v_i$ e pare.

QUADRO 2 – PROCEDIMENTO DE GERAÇÃO DA DISPONIBILIDADE DAS CAIXAS
 FONTE: O autor (2015).

O **Passo 1** do (QUADRO 2), determina o volume total dos contêineres disponíveis, do qual parcelas de volumes são computadas no **Passo 2**. O **Passo 3** visa selecionar arbitrariamente uma caixa do tipo i ($i \in \beta$), onde no **Passo 4** a sua disponibilidade (b_i) é definida. A disponibilidade sorteada no intervalo I representa um valor que pode exceder (ou limitar) a parcela de volume do **Passo 2** em até 30%. Caso a caixa selecionada no **Passo 3** seja a última do conjunto β , a disponibilidade deve ser calculada com base no volume restante deixado pelas demais caixas. Além disso, os valores obtidos no **Passo 4**, caso não sejam valores inteiros, devem ser arredondados para o primeiro valor inteiro superior.

Em síntese, o procedimento descrito acima pode ser visto como: i) determinar os valores dos contêineres e ii) obter dois panoramas de dimensões e disponibilidades das caixas (contextos m_A e m_B , onde $i = 1, 2, 3$ e 4) para cada grupo de dados obtidos em i). Este procedimento deve ser repetido cinco vezes ($n = 1, \dots, 5$) para cada m ($m \in \{1; 2; 3; 4\}$).

5.1.2 Resultados dos testes computacionais

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos com dados gerados aleatoriamente por meio do procedimento descrito na subseção anterior. Os cenários

testados foram definidos de acordo com a restrição adicional de separação de itens e dos modelos das seções 4.1 e 4.3. Ao todo, quarenta conjuntos de testes foram gerados, resultando em cento e quarenta problemas resolvidos entre todos os cenários considerados. Os dados dos problemas podem ser obtidos em (APÊNDICE 2).

Os cenários desta subseção foram definidos da seguinte forma:

- Cenário I (C-I): Modelo definido pelas expressões (89)–(92), isto é, o modelo base da seção 4.1 sem restrição adicional.
- Cenário II (C-II): Modelo definido pelas expressões (89)–(92) e (94)–(96), isto é, o modelo base da seção 4.1 com restrição adicional de separação de itens.
- Cenário III (C-III): Modelo definido pelas expressões (130)–(133), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 sem restrição adicional.
- Cenário IV (C-IV): Modelo definido pelas expressões (130)–(133) e (134)–(136), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 com restrição adicional de separação de itens.

Com base nas definições acima, observe que os cenários C-I e C-III possuem as mesmas considerações geométricas, porém, se diferem em relação ao uso do AGNU. Este fato também ocorre com os cenários C-II e C-IV, no entanto, a restrição adicional de separação de itens passa a ser considerada. No decorrer desta subseção, estes pares de cenários serão ditos equivalentes do ponto de vista das exigências práticas.

Para a realização dos testes algumas suposições foram adotadas, tais como:

i) Assume-se que o termo v_i da função objetivo descreve o volume da caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$), que pode ser obtido por $v_i = (l_i \cdot w_i \cdot h_i)$. Deste forma, o objetivo principal é maximizar o volume total das caixas carregadas nos contêineres disponíveis.

ii) Nos cenários que possuem a restrição adicional de separação de itens (C-II e C-IV), tal como em Eley (2003), optou-se por separar as caixas do tipos 1 e 2 em contêineres distintos.

Contudo, cabe destacar que a suposição do item ii) não tem sentido prático nos conjuntos de testes gerados de acordo com os contextos 1A e 1B, dado que, pela definição, estes conjuntos possuem um único tipo de caixa disponível. Sendo

assim, os cenários C-II e C-IV foram resolvidos apenas com os dados dos contextos mA e mB considerando $m > 1$ (isto é, $m \in \{2; 3; 4\}$).

A partir do procedimento de geração aleatória de dados da subseção anterior, um total de quarenta conjuntos de testes foram criados, sendo vinte destes para cada contexto (mA e mB). Com base nestes conjuntos, os quatro cenários foram avaliados da seguinte forma: Os cenários C-I e C-III foram resolvidos com todos os exemplos gerados, isto é, com os cinco conjuntos obtidos para cada m ($m \in \{1; 2; 3; 4\}$) nos dois contextos considerados. Por outro lado, devido a suposição ii), os cenários C-II e C-IV não foram resolvidos com os conjuntos do contexto 1A e 1B (isto é, $m \in \{2; 3; 4\}$). Sendo assim, ao todo foram resolvidos quarenta exemplos com os cenários C-I e C-III e trinta com os cenários C-II e C-IV, totalizando cento e quarenta problemas resolvidos.

Em (APÊNDICE 3) encontram-se sumarizados os resultados obtidos com todos os testes efetuados, tais como: Número de Variáveis Binárias (VB); Número de Restrições de Não-Sobreposição (RNS); Número de Restrições de Limitação de Caixas (RLNC); Número de Restrições de Separação de Itens (RSI); Valor da Função Objetivo (Z); Tempo computacional (T(s)); Ocupação mínima (Oc.-) e Ocupação máxima (Oc.+) dos contêineres (em porcentagem). Contudo, cabe destacar que todos os problemas foram resolvidos otimamente (*gap* nulo) dentro do limite de tempo disponível para resolução (86.400 segundos).

TABELA 3 – VALORES OBTIDOS COM OS QUATRO CENÁRIOS TESTADOS

Contexto	Cenário	Val.	VB	RNS	Z	T(s)	Oc. -	Oc. +
mA	C-I	\bar{x}	14.600,65	8.399,70	16.833,95	109,20	58,04	71,97
		σ	9.143,03	4.706,69	8.916,68	401,35	16,04	20,18
	C-II	\bar{x}	16.983,13	8.646,67	16.954,93	170,81	59,00	73,04
		σ	9.109,06	4.600,12	8.372,92	405,73	14,28	15,98
	C-III	\bar{x}	697,00	423,90	16.833,95	28,04	58,03	72,00
		σ	990,33	591,15	8.916,68	120,60	16,03	20,21
	C-IV	\bar{x}	909,53	537,26	16.954,90	21,79	58,61	72,67
		σ	1.066,56	641,48	8.372,93	76,82	14,14	16,16
mB	C-I	\bar{x}	25.948,40	12.864,10	20.715,45	881,59	76,62	90,09
		σ	14.850,23	6.207,43	9.738,19	3.363,54	12,61	7,07
	C-II	\bar{x}	30.757,60	13.303,00	20.124,53	4.510,07	75,64	88,19
		σ	13.821,79	6.308,30	9.238,06	9.939,55	9,45	5,01
	C-III	\bar{x}	2.780,80	1.298,00	20.715,45	36,39	76,27	90,14
		σ	2.531,55	1.025,00	9.738,19	123,66	12,61	7,25
	C-IV	\bar{x}	3.619,93	1.633,00	20.124,53	73,16	75,66	88,21
		σ	2.397,01	952,44	9.238,06	195,28	9,47	5,03

FONTE: O autor (2015).

Na (TABELA 3) encontram-se, resumidamente, os resultados pertinentes aos experimentos efetuados, onde os valores (val.) \bar{x} e σ descrevem a média e o desvio padrão, respectivamente. Desta tabela pode-se destacar uma diferença substancial de valores com relação ao uso do AGNU. Por exemplo, na resolução de todos os dados do contexto mB com o cenário C-II foram obtidas em média 30.757,60 variáveis binárias e 13.303,40 restrições de não-sobreposição. Por sua vez, o cenário equivalente C-IV gerou apenas 3.619,93 variáveis e 1.633 restrições. Como citado na seção 4.2, estas características tendem a resultar em melhorias de performance de resolução. Isto de fato pode ser visto com a comparação dos tempos médios decorridos para resolver otimamente estes conjuntos, 4.510,07 e 73,16 segundos, respectivamente.

TABELA 4 – TEMPO COMPUTACIONAL DECORRIDO NA RESOLUÇÃO DOS CINCO CONJUNTOS DE TESTES GERADOS PARA CADA m

Contexto	Cenário	\bar{x}	σ	Cenário	\bar{x}	σ
1A	C-I	1,38	1,23	C-III	0,001	0,001
2A		3,32	3,16		0,19	0,16
3A		44,81	58,75		1,02	1,39
4A		387,47	723,43		110,98	221,37
1B		2,32	1,34		0,01	0,01
2B		200,29	379,41		6,65	9,83
3B		187,19	241,56		6,68	10,84
4B		3.136,59	6.185,41		132,23	220,64
2A	C-II	6,10	8,20	C-IV	0,18	0,16
3A		37,83	26,22		2,75	4,16
4A		468,50	599,73		62,45	123,32
2B		158,60	211,44		2,13	2,21
3B		1.815,18	1.777,28		34,05	30,94
4B		11.556,46	14.742,15		183,30	307,87

FONTE: O autor (2015).

Na (TABELA 4) apresenta-se o tempo computacional médio decorrido para resolver os cinco exemplos gerados para cada m (onde, $m \in \{1; 2; 3; 4\}$) em cada contexto considerado. Nesta tabela os resultados foram separados de acordo com os cenários equivalentes, mais especificamente, os cenários da esquerda (C-I e CII) são similares aos respectivos cenários da direita (C-III e C-IV), com exceção do uso do AGNU.

Os resultados mostram que o desempenho de resolução dos problemas varia significativamente com o número de tipos de caixas disponíveis (compare, por exemplo, os conjuntos dos contextos 1A, 2A, 3A e 4A resolvidos com o cenário C-I).

No entanto, este fato já era esperado, visto que quanto maior o número de tipos de caixas, maior deverá ser o número de restrições e variáveis do modelo, resultando conseqüentemente em problemas mais complexos de serem resolvidos. O (GRÁFICO 1 a) e b)) ilustra o crescimento de tempo em relação ao crescimento da quantidade de tipos de caixas, nos contextos mA e mB , respectivamente.

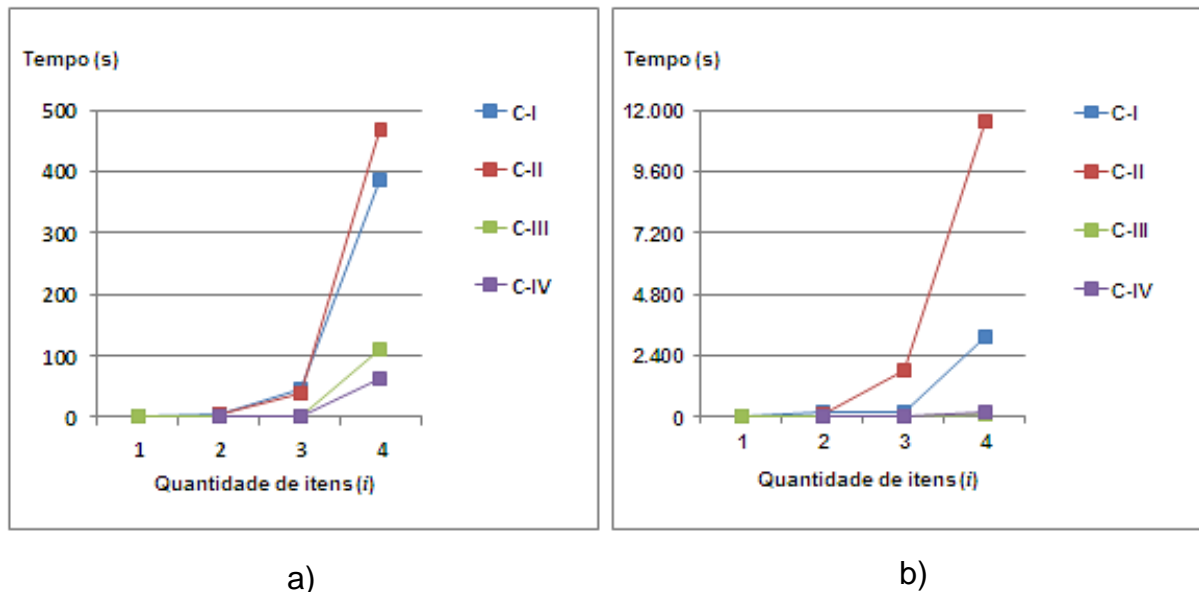


GRÁFICO 1 – REPRESENTAÇÃO DO CRESCIMENTO DO TEMPO DECORRIDO EM RELAÇÃO AO CRESCIMENTO DO NÚMERO DE TIPO DE CAIXAS NOS CENÁRIOS mA e mB , RESPECTIVAMENTE

FONTE: O autor (2015).

A (TABELA 5) apresenta os resultados obtidos com a resolução de um conjunto de teste do contexto $4B$ (primeiro exemplo do contexto $4B$ com os dados disponíveis em APÊNDICE 2), que foi resolvido de acordo com os cenários C-III e C-IV, respectivamente. Observe que o valor ótimo do cenário C-III supera o valor obtido por C-IV. Este fato decorre das limitações impostas ao segundo cenário, ou seja, as restrições de separação de itens, que tendem a limitar os padrões de carregamento. No entanto, o tempo computacional médio decorrido na resolução deste conjunto com o cenário C-III foi superior ao dobro do tempo gasto para resolver o mesmo conjunto com C-IV, ainda que o segundo cenário apresente doze restrições de separação de itens.

TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS COM UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO $4B$ RESOLVIDO DE ACORDO COM OS CENÁRIOS C-III E C-IV, RESPECTIVAMENTE

Cenário	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc. -	Oc. +
C-III	6.224	2.352	4	-	14.228	86,09	91,63	99,02
C-IV	6.232	2.352	4	12	13.968	42,63	92,31	94,12

FONTE: O autor (2015).

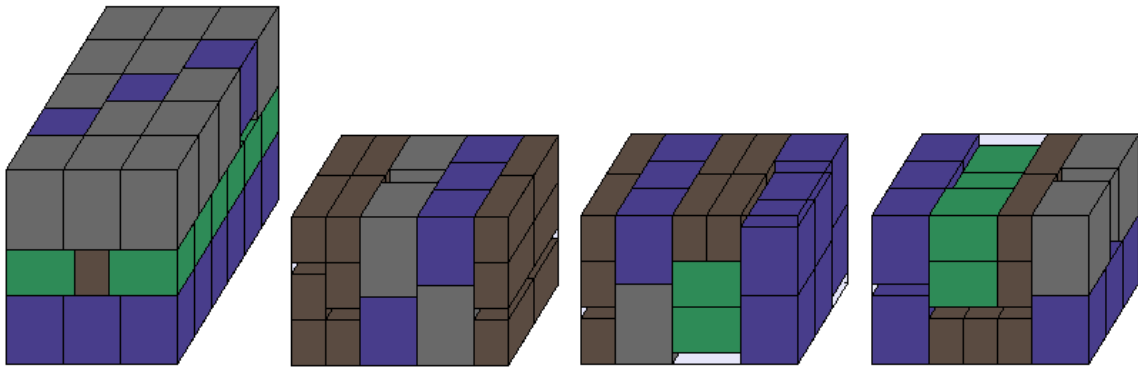


FIGURA 11 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DE UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO 4B
OBTIDO COM O CENÁRIO C-III
FONTE: O autor (2015).

Nas (FIGURAS 11 e 12) são ilustrados os padrões de carregamento obtidos com os cenários C-III e C-IV, respectivamente. Para a representação da carga, o seguinte esquema de cores foi adotado: cinza – caixas do tipo 1; azul – caixas do tipo 2; verde – caixas do tipo 3 e marrom – caixas do tipo 4. Na primeira figura, pode-se perceber os quatro tipos de caixas posicionadas num mesmo contêiner (veja, por exemplo, o primeiro contêiner da esquerda). Na segunda figura, nota-se que o objetivo de separar as caixas do tipo 1 e 2 foi satisfeito, isto é, caixas com cores cinza e azul não dividem um mesmo contêiner.

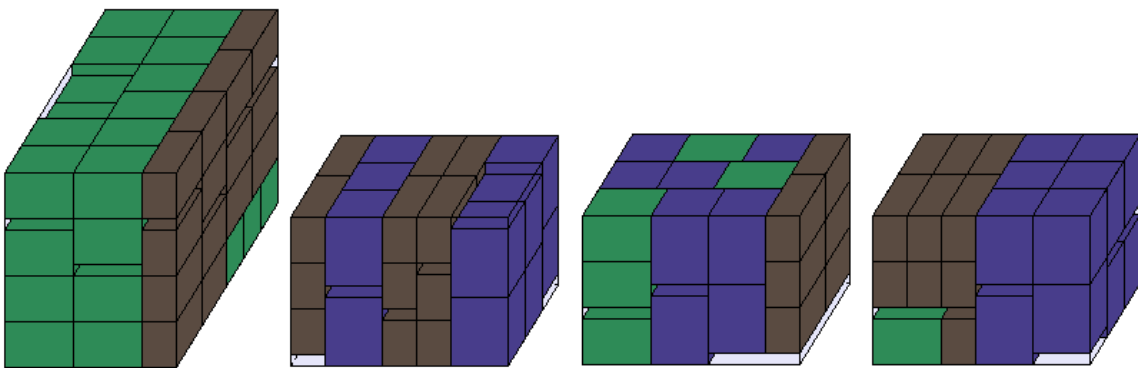


FIGURA 12 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DE UM CONJUNTO DE TESTE DO CONTEXTO 4B
OBTIDO COM O CENÁRIO C-IV
FONTE: O autor (2015).

5.2 CONJUNTOS DE TESTES DA LITERATURA

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais obtidos com instâncias da literatura. Os dezesseis casos de testes de Mohanty *et al* (1994) foram utilizados para avaliar os cenários criados com base nas restrições de orientação

das caixas (fixa, no plano e geral), estabilidade vertical e separação de itens. A restrição de carregamento completo de grupo de caixas, por motivos de limitação de tempo, não foi testada neste trabalho. No entanto, as variantes do tipo 2 e 3 encontram-se avaliadas em Scarpin *et al* (2014) e Schenekemberg *et al* (2014).

Como na seção anterior, os seguintes cenários são considerados:

- Cenário 1 (C-1): Modelo definido pelas expressões (89)-(92), isto é, o modelo base da seção 4.1 sem restrição adicional.
- Cenário 2 (C-2): Modelo definido pelas expressões (130)-(133), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 sem restrição adicional.
- Cenário 3 (C-3): Modelo definido pelas expressões (130)-(133) e (143)-(145), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 com restrição adicional de estabilidade vertical.
- Cenário 4 (C-4): Modelo definido pelas expressões (130)-(133), (134)-(136) e (143)-(145), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 com restrições adicionais de separação de itens e estabilidade vertical.
- Cenário 5 (C-5): Modelo definido pelas expressões (130)-(133) e (134)-(136), isto é, o modelo base reformulado da seção 4.3 com restrição adicional de separação de itens.

Com base nas definições acima, observe que os cenários C-1 e C-2 diferem unicamente com relação ao uso do AGNU, sendo assim, no sentido das restrições, serão ditos equivalentes.

Para realizar os testes desta seção algumas suposições foram adotadas, tais como:

- i) Assume-se que o termo v_i da função objetivo passa a descrever o valor da caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$), que pode ser obtido por $v_i = c_i \cdot (l_i \cdot w_i \cdot h_i)$, onde c_i representa o valor por unidade de volume. Note que, diferentemente da seção anterior, o objetivo principal visa maximizar o valor total das caixas carregadas.
- ii) Admite-se que o parâmetro de estabilidade vertical para os cenários C-3 e C-4 é igual a um (isto é, $\alpha = 1$). Esta suposição exige que as faces inferiores de todas as caixas carregadas devam estar completamente apoiadas sobre as demais caixas ou sobre o piso do contêiner.

iii) Todos os cenários serão resolvidos com base nos conjuntos de testes de Mohanty *et al* (1994). Estes dados podem ser obtidos em (ANEXO 1).

iv) Em todos os cenários que possuem restrição adicional de separação de itens (C-4 e C-5), tal como em Eley (2003), optou-se por separar as caixas do tipos 1 e 2 em contêineres distintos.

Esta seção está dividida da seguinte forma: Inicialmente, na próxima subseção, são detalhados os experimentos efetuados com base na orientação fixa das caixas e os cenários C-1, C-2, C-3 e C-4. Em seguida, considera-se a orientação no plano e os cenários C-2, C-3 e C-4. Por fim, na última subseção os resultados obtidos com a orientação geral das caixas e os cenários C-2, C-3 e C-4 e C-5 são comparados com os valores obtidos por Mohanty *et al* (1994), Bortfeldt (2000) e Eley (2003).

5.2.1 Resultados com orientação fixa

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos com a orientação fixa das caixas e os cenários C-1, C-2, C-3 e C-4. Em (APÊNDICE 4) encontram-se as informações detalhadas dos testes, tais como: número de variáveis binárias; número de restrições de não-sobreposição; número de restrições de limitação de caixas; número de restrições de separação de itens; número de restrições de estabilidade vertical; valor da função objetivo; tempo computacional e ocupação mínima e máxima dos contêineres.

Com base nos resultados em (APÊNDICE 4), cabe destacar que dos sessenta e quatro exemplos resolvidos (dezesesseis exemplos de Mohanty *et al* (1994) para cada um dos quatro cenários considerados) apenas em sete casos a solução ótima não foi alcançada. Com destaque para o último conjunto de teste de Mohanty *et al* (1994) (veja ANEXO 1) onde nenhuma solução foi obtida com o cenário C-1, uma vez que o modelo excedeu a memória do computador logo na leitura dos dados pelo *solver CPLEX*. Consequentemente, para este conjunto nenhuma informação sobre *gap* e tempo computacional está disponível.

Na (TABELA 6) encontram-se sumarizados os valores médios obtidos com os dezesseis casos de testes. Nota-se, portanto, significativa diferença de valores entre o cenários equivalentes C-1 e C-2. Enquanto que o primeiro cenário obteve em

média 67.374,56 (37.614,38) variáveis binárias (restrições de não-sobreposição), o segundo, com o uso do AGNU, obteve apenas 2.235,13 (1.406,81) variáveis (restrições). Estas características, como dito na seção anterior, afetam significativamente o desempenho computacional do método de solução aplicado, pode-se comparar, por exemplo, o tempo médio decorrido para resolução destes cenários, 6.719,58 e 755,15 segundos, respectivamente.

TABELA 6 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS DEZESSEIS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994) COM ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Cenário	Val.	VB	RNS	VER	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
C-1	\bar{x}	67.374,56	37.614,38	-	-	118.797,83	6.719,58	63,41	84,49
	σ	105.496,18	51.342,53	-	-	208.076,31	20.086,44	16,31	14,01
C-2	\bar{x}	2.235,13	1.406,81	-	-	145.566,59	755,15	62,58	85,03
	σ	3.824,08	2.522,55	-	-	226.579,49	2.873,63	14,85	13,80
C-3	\bar{x}	2.235,13	1.406,81	1.908,88	-	143.895,00	3.250,28	61,18	84,67
	σ	3.824,08	2.522,55	3.560,69	-	224.894,96	10.866,40	14,44	12,79
C-4	\bar{x}	2.246,00	1.406,81	1.908,88	16,31	139.261,22	6.596,95	56,56	86,15
	σ	3.822,95	2.522,55	3.560,69	10,00	219.856,58	17.211,04	14,24	13,35

FONTE: O autor (2015).

Outro ponto que deve ser destacado com relação a (TABELA 6), cabe aos cenários avaliados. Observe que o tempo médio de resolução cresce ao passo que mais restrições são incorporadas aos modelos. Este fato deve-se principalmente as restrições de estabilidade vertical. Por comparação, perceba que o tempo médio decorrido para resolver o cenário C-3 é superior a quatro vezes o tempo necessário para o resolver todos os testes com o cenário C-2.

TABELA 7 – DADOS DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994)

Conjunto	Caixas						Contêineres				
	i	b_i	l_i	w_i	h_i	c_i	k	d_k	L_k	W_k	H_k
12	1	35	3	6	8	1,1	1	1	30	15	18
	2	40	5	9	4	1,8	2	1	28	25	10
	3	15	8	9	12	1,0	3	1	20	18	10

FONTE: Mohanty *et al* (1994).

O décimo segundo conjunto de teste de Mohanty *et al* (1994), com dados descritos conforme a (TABELA 7), foi resolvido otimamente em apenas 0,73 segundo com o cenário C-2, onde resultou em 928 variáveis binárias e 664 restrições de não-sobreposição. A (FIGURA 13) ilustra o padrão de carregamento obtido com a alocação de 35 caixas do tipo 1 (cor cinza), 40 caixas do tipo 2 (cor azul) e 03 caixas do tipo 3 (cor verde), resultando em $Z = 21.096$. Na figura, o primeiro contêiner da esquerda obteve 85,33% de ocupação do volume disponível, o segundo 75,09% e o terceiro 74%, respectivamente.

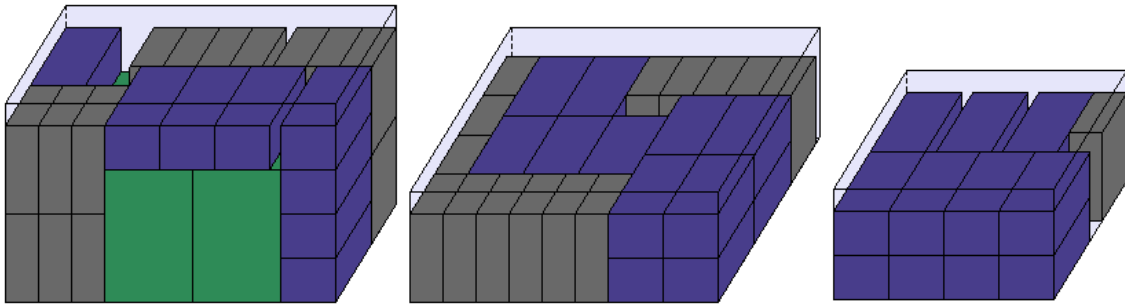


FIGURA 13 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

FONTE: O autor (2015).

5.2.2 Resultados com orientação no plano

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos com a orientação das caixas no plano e os cenários C-2, C-3 e C-4. Em (APÊNDICE 5) encontram-se as informações detalhadas dos testes.

Dos resultados em (APÊNDICE 5), destaca-se que dos quarenta e oito exemplos resolvidos (dezesseis exemplos de Mohanty *et al* (1994) para cada cenário considerado) em nove casos a solução ótima não foi obtida. Em todos os cenários testados o oitavo, o nono e o décimo sexto conjunto de teste de Mohanty *et al* (1994) excederam o tempo limite de resolução. Os valores dos *gap*'s obtidos para os cenários foram: (0,002%; 0,18%; 0,21%) para C-2, (0,03%; 0,08%; 0,11%) para o C-3 e (0,02%; 0,32%; 650%) para C-4, respectivamente, oitavo, nono e décimo conjunto de teste.

TABELA 8 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS DEZESSEIS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994) COM ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Cenário	Val.	VB	RNS	REV	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
C-2	\bar{x}	10.469,38	3.688,13	-	-	187.504,38	16.247,86	71,29	90,24
	σ	17.454,67	5.828,15	-	-	337.534,20	33.700,43	15,69	8,33
C-3	\bar{x}	10.469,38	3.688,13	8.965,69	-	177.719,47	16.262,00	65,51	87,70
	σ	17.454,67	5.828,15	15.740,33	-	328.949,73	33.693,57	13,72	9,28
C-4	\bar{x}	10.480,25	3.688,13	8.965,69	16,31	170.145,03	16.287,96	63,83	86,79
	σ	17.452,95	5.828,15	15.740,33	10,00	324.797,88	33.681,80	14,54	11,48

FONTE: O autor (2015).

Na (TABELA 8) são apresentados os valores médios obtidos com os testes efetuados. Com base na (TABELA 6) da subseção anterior, pode-se notar que o número médio de variáveis binárias (restrições de não-sobreposição) dos cenários

C-2, C-3 e C-4 não ultrapassa 2.300 (1.500) unidades, no entanto, com a possibilidade de rotação das caixas no plano, este valor passa a superar 10.400 (3.688) variáveis (restrições) nos três cenários considerados.

O conjunto de teste 12 de Mohanty *et al* (1994), com dados descritos conforme a (TABELA 7), foi resolvido otimamente nos três cenários considerados. Nos padrões de carregamento obtidos com os cenários C-2 e C-3, tal como na subseção anterior, foram alocadas 35 caixas do tipo 1, 40 caixas do tipo 2 e 03 caixas do tipo 3, resultando novamente em $Z = 21.096$. No cenário C-4, por sua vez, as mesmas quantidades foram designadas, exceto para a caixa do tipo 3, que teve apenas duas unidades carregadas, obtendo $Z = 20.232$. A seguir são ilustrados os padrões de carregamento, com base no seguinte esquema de cores: caixas do tipo 1 - cor cinza; caixas do tipo 2 - cor azul e caixas do tipo 3 - cor verde.

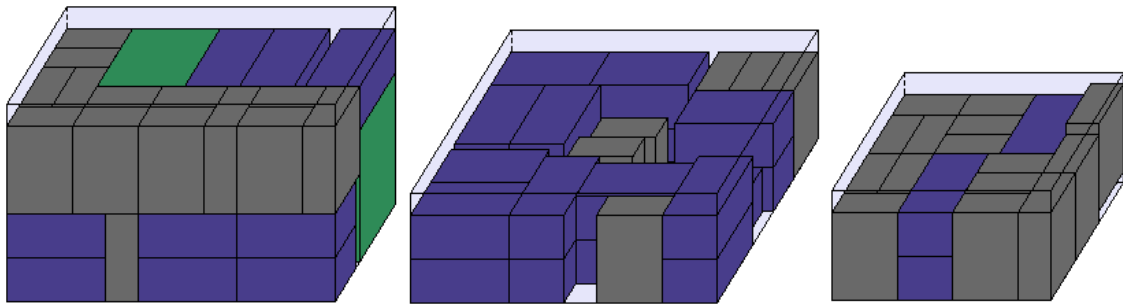


FIGURA 14 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

FONTE: O autor (2015).

Inicialmente, na (figura 14) é ilustrado o padrão de carregamento obtido com o cenário C-2, onde o primeiro contêiner da esquerda obteve ocupação de 85,78% do volume disponível, o segundo de 71,49% e o terceiro 80%, respectivamente. Nesta figura pode-se perceber que o padrão de carregamento não é estável (veja o contêiner da direita), o que de fato já era esperado, visto que a restrição de estabilidade vertical não foi considerada.

Na (FIGURA 15) o padrão de carregamento do cenário C-3 é ilustrado, do qual o primeiro contêiner da esquerda obteve ocupação de 87,56% do volume disponível, o segundo de 71,49% e o terceiro 76%, respectivamente. No entanto, observe que, diferentemente do padrão de carga da (FIGURA 14), as faces inferiores de todas as caixas do carregamento estão completamente apoiadas.

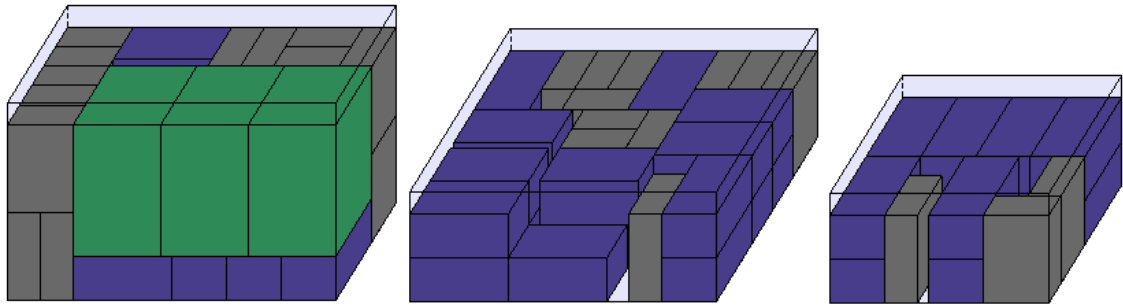


FIGURA 15 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

FONTE: O autor (2015).

Por fim, a (FIGURA 16) ilustra o padrão de carregamento obtido com o cenário C-4, do qual a ocupação de volume dos contêineres foi de 76,89%, 72%, 75%, respectivamente. Com base nesta figura pode-se destacar que, embora o valor da função objetivo tenha decrescido, a finalidade de separar as caixas do tipo 1 e 2 em contêineres distintos foi satisfeita. Nota-se que neste padrão de carregamento, caixas das cores azul e cinza não pertencem a um mesmo contêiner, além disso, a carga encontra-se totalmente estável.

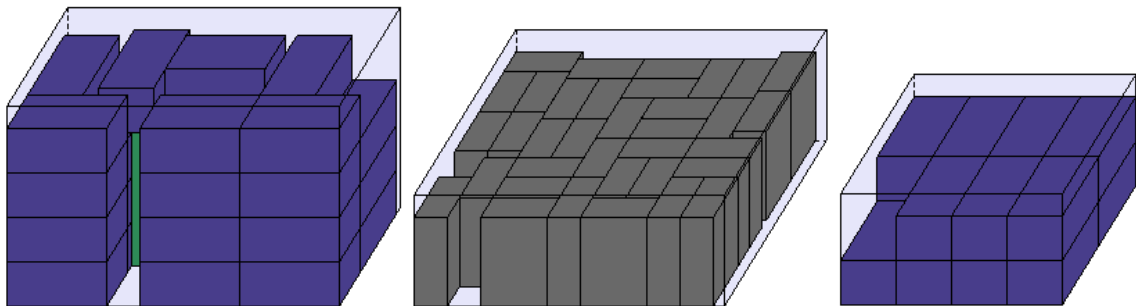


FIGURA 16 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

FONTE: O autor (2015).

5.2.3 Resultados com orientação geral

Nesta subseção busca-se comparar os resultados obtidos com a resolução dos casos de testes de Mohanty *et al* (1994) com resultados de trabalhos correlatos. Os experimentos foram efetuados com a orientação geral das caixas e os cenários C-2, C-3, C-4 e C-5. Em (APÊNDICE 6) encontram-se as informações pertinentes aos testes realizados.

Os resultados obtidos foram comparados com os seguintes cenários da literatura:

- MOH: Heurística baseada em um procedimento de geração de colunas de Mohanty *et al* (1994).
- BOR: Heurística baseada em uma abordagem de preenchimento de um contêiner de Bortfeldt (2000).
- ELE: Heurística combinada à programação inteira de Eley (2003).

Os cenários MOH e BOR, descritos anteriormente, não consideram nenhuma restrição adicional, sendo assim, são equivalentes ao cenário C-2. O cenário tratado por Eley (2003), quanto ao uso das restrições, considera dois contextos. O primeiro não trata nenhuma restrição adicional, desta forma, é equivalente ao cenário C-2 e será chamado unicamente por ELE. O segundo, por sua vez, aborda a restrição prática de separação de itens, sendo assim, é equivalente ao cenário C-5. Este contexto será chamado de ELE^(SI) no decorrer desta subseção.

Na (TABELA 9) encontram-se sumarizados os resultados obtidos (função objetivo) com os dezesseis conjuntos de teste de Mohanty *et al* (1994). Nesta tabela os valores destacados por (*) nos cenários C-2, C-3, C-4 e C-5 indicam que a solução ótima foi alcançada. Os conjuntos que não foram resolvidos são sinalizados por (-).

TABELA 9 – RESULTADOS OBTIDOS COM OS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994)

<i>n</i>	MOH	BOR	ELE	ELE ^(SI)	C-2	C-3	C-4	C-5
1	8.640	8.640	8.640	5.120	9216*	8640	6720*	7680*
2	83.494,40	85.120	83.376	85.376	85.555,20*	85.376	85.376	85.555,20*
3	53.262,50	53.262,50	53.262,50	53.262,50	53.262,50	53.262,50	53.262,50	53.262,50
4	2.333.440	2.333.440	2.307.840	1.354.752	1.354.752*	1.354.752*	1.354.752*	1.354.752*
5	495.500	581.250	583.750	536.250	583.750*	583.750*	538.750*	538.750*
6	138.240	139.584	141.216	139.968	142.464	142.464	139.968	140.448
7	16.668	17.409	17.004	16.707	17.664	16.896	17.037	17.664*
8	65.741,60	68.645,60	69.121,20	69.121,20	71.972,40	40.556,20	-	71.972,40
9	119.772	128.952	133.632	128.088	108.684	-	-	102.276
10	15.360	15.360	15.360	15.360	15.360*	15.360*	15.360*	15.360*
11	49.995	53.202,80	52.873,60	52.873,60	54.761*	54.761*	54.761*	54.761*
12	23.529	24.235,20	23.673	22.730,40	24.552	23.587,20	23.918,40	23.918,40
13	36.556,80	36.556,80	36.556,80	34.022,40	36.556,80*	35.289,60	34.022,40	34.022,40
14	56.492,80	65.316,80	68.723,20	66.995,20	68.468,40*	68.122,80	65.829,60	65.829,60
15	37.558,80	39.727,20	39.382,20	39.382,20	40.366,40*	40.307,80*	40.051,10*	40.191,10*
16	556.458	595.770	591.535	568.482	486.258	-	-	-

FONTE: O autor (2015).

Fazendo-se a análise dos resultados, o cenário C-2 obteve solução ótima em nove dos dezesseis conjuntos de testes considerados. Os valores obtidos também foram superiores em onze ocasiões quando comparados aos resultados de MOH e BOR e em dez aos de ELE. Igualmente, quando a restrição de separação de itens passa a integrar os cenários, C-5 obteve solução ótima em oito exemplos, superou em nove e foi similar em quatro quando comparados ao cenário equivalente ELE^(SI).

Outro aspecto notável da tabela, cabe ao valor total das caixas carregadas nos diversos cenários considerados. Observe que, quanto maior for a exigência prática do cenário, menor tende a ser o valor carregado. Isto pode ser visto, por exemplo, ao comparar os valores ótimos obtidos com o primeiro conjunto de teste resolvido de acordo com os cenários C-2 (sem restrição adicional), C-4 (restrições de estabilidade vertical e separação de itens) e o C-5 (restrição de separação de itens).

Na (TABELA 10) são apresentados os valores médios obtidos com os testes efetuados. Nesta tabela, por comparação com os valores das subseções anteriores, pode-se notar que o número de variáveis (e de restrições de não-sobreposição) cresce substancialmente com a possibilidade de rotação das caixas nas seis orientações possíveis. Os valores passam a superar 60.000 (8.600) variáveis (restrições) nos cenários considerados. Este aumento significativo de valores impactou diretamente no desempenho de resolução dos problemas. Pode-se comparar, por exemplo, o tempo médio necessário para resolver o cenário C-2 que nas subseções anteriores era de 755,15 e 16.247,86, agora passa a ser de 43.262,07 segundos.

TABELA 10 – VALORES MÉDIOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DOS CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994) DE ACORDO COM ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Cenário	Val.	VB	RNS	REV	RSI	T(s)	Oc.-	Oc.+
C-2	\bar{x}	60.190,56	8.676,50	-	-	43.262,07	83,51	94,36
	σ	85.402,53	10.167,64	-	-	39.181,29	16,33	6,35
C-3	\bar{x}	60.190,56	8.676,50	54.788,56	-	40.387,70	83,00	94,90
	σ	85.402,53	10.167,64	79.937,08	-	39.838,87	16,25	6,39
C-4	\bar{x}	60.200,94	8.676,50	54.788,56	16,31	37.380,47	80,40	91,62
	σ	85.400,34	10.167,64	79.937,08	10,00	39.578,53	16,72	10,03
C-5	\bar{x}	60.200,94	8.676,50	-	16,31	36.742,50	81,08	91,53
	σ	85.400,34	10.167,64	-	10,00	40.872,54	15,60	9,66

FONTE: O autor (2015).

O cenário C-2, embora tenha obtido o maior tempo médio decorrido, resolveu otimamente o maior número de exemplos, ao todo nove conjuntos de testes resolvidos contra cinco do cenário C-3, seis do C-4 e oito do C-5. O fato de C-3 e C-4 terem obtido um menor número de valores ótimos deve-se, em geral, a restrição de estabilidade vertical, que em média resulta num acréscimo de 54.788,56 restrições nestes cenários.

O conjunto de teste 12 de Mohanty *et al* (1994), com dados descritos conforme a (TABELA 7) da subseção 5.2.1, foi resolvido (não otimamente) de acordo com o cenário C-2 dentro do limite de tempo disponível (com $gap = 0,76\%$). A (FIGURA 17) ilustra o padrão de carregamento obtido com a alocação de 35 caixas do tipo 1 (cor cinza), 40 caixas do tipo 2 (cor azul) e 07 caixas do tipo 3 (cor verde), resultando em $Z = 24.552$. Observe que, embora este conjunto não tenha sido resolvido otimamente, o valor da função objetivo é significativamente maior que os valores obtidos nas subseções anteriores (onde o máximo ocorrido foi de $Z = 21.096$).

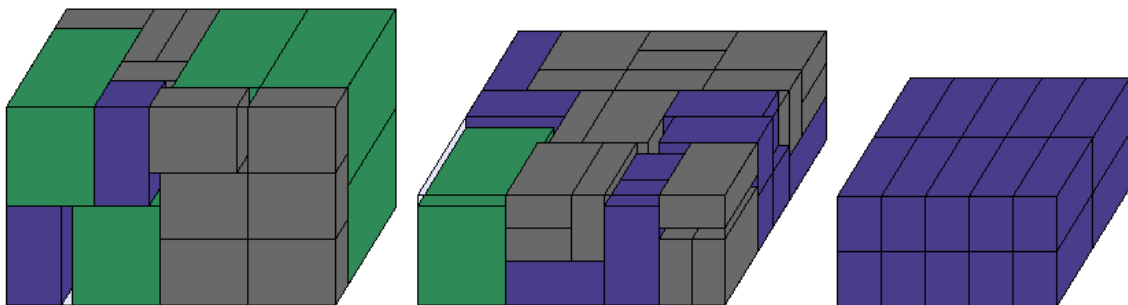


FIGURA 17 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

FONTE: O autor (2015).

A ocupação de volume deste padrão de carregamento foi de 98,66% para o primeiro, 95,65% para o segundo e de 100% para o terceiro contêiner. Com a possibilidade de orientação geral das caixas, a ocupação dos contêineres tende a crescer, dado que novos padrões de carregamento podem ser considerados. Este fato fica evidente quando comparados os resultados dos cenários das subseções anteriores com a atual.

A (FIGURA 18) ilustra o padrão de carregamento (não ótimo) obtido com o cenário C-3. Ao todo foram alocadas 33 caixas do tipo 1 (cor cinza), 38 caixas do

tipo 2 (cor azul) e 07 caixas do tipo 3 (cor verde), resultando em $Z = 23.587,20$. Além disso, a ocupação de volume foi de 98,67% para o primeiro, 86,40% para o segundo e 100% para o terceiro contêiner, respectivamente. Observe que neste padrão de carregamento, ao contrário do padrão apresentado na (FIGURA 17), todas as caixas possuem as suas faces inferiores completamente suportadas, isto é, conforme a definição deste cenário, a exigência prática de estabilidade vertical encontra-se satisfeita.

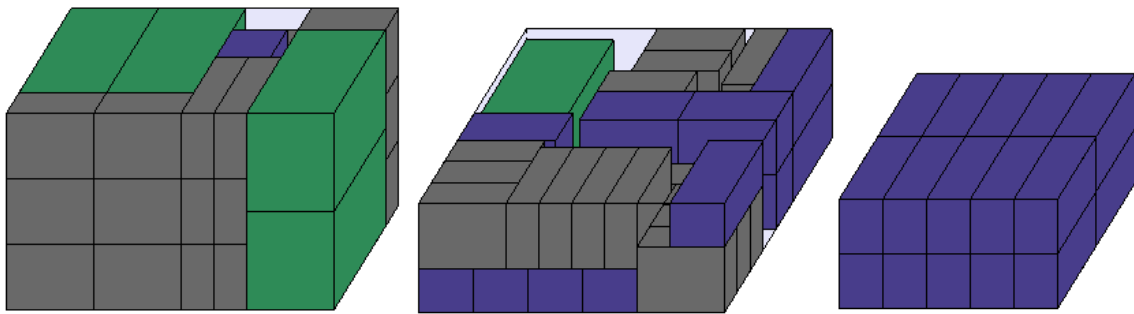


FIGURA 18 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS
FONTE: O autor (2015).

Na (FIGURA 19) apresenta-se o padrão de carregamento obtido com o cenário C-4. Este padrão, obtido dentro do tempo limite disponível para resolução e resolvido não otimamente, é composto por 31 caixas do tipo 1 (cor cinza), 40 caixas do tipo 2 (cor azul) e 07 caixas do tipo 3 (cor verde), resultando em $Z = 23.918,40$. Na figura, o primeiro contêiner da esquerda obteve 97,78% de ocupação, o segundo 88,46% e o terceiro 100%, respectivamente. Neste padrão, além da estabilidade vertical da carga, cabe destacar que caixas dos tipos 1 e 2 não dividem um mesmo contêiner, isto é, as restrições de estabilidade e separação de itens, conforme a definição deste cenário, foram simultaneamente satisfeitas.

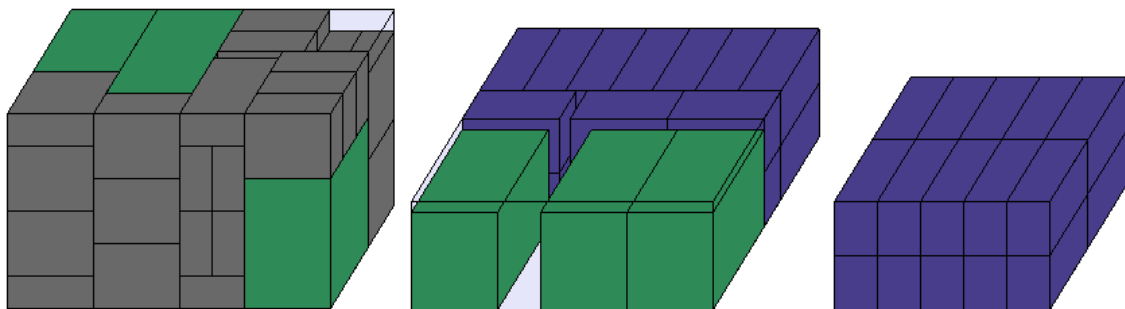


FIGURA 19 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS
FONTE: O autor (2015).

Na (FIGURA 20) é ilustrado o padrão de carregamento (não ótimo) obtido com o cenário C-5, onde foram alocadas 31 caixas do tipo 1 (cor cinza), 40 caixas do tipo 2 (cor azul) e 07 caixas do tipo 3 (cor verde), resultando em $Z = 23.918,4$. A ocupação de volume deste cenário é equivalente a ocupação apresentada pelo cenário C-4, isto é, 97,78%, 88,46 e 100%, respectivamente. Nota-se neste cenário que existem caixas, como mostrado no primeiro e segundo contêiner, com as faces inferiores parcialmente suportadas, porém, a exigência prática de separação de itens foi obedecida, isto é, foram separadas as caixas dos tipos 1 e 2 em contêineres distintos.

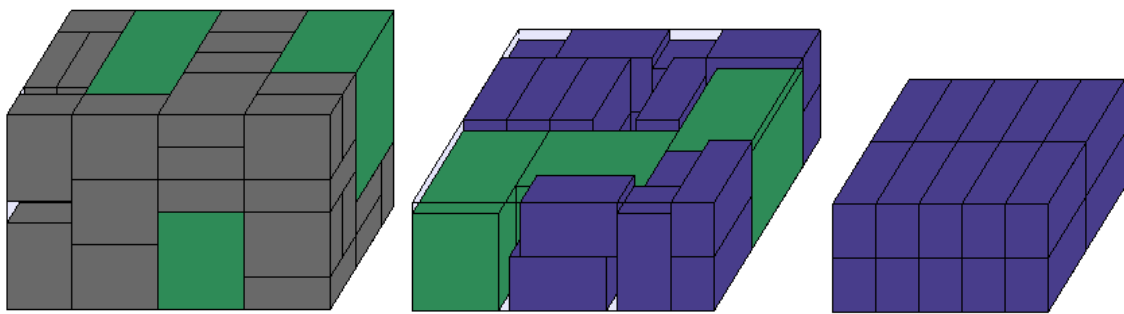


FIGURA 20 – PADRÃO DE CARREGAMENTO DO DÉCIMO SEGUNDO CONJUNTO DE TESTE DE Mohanty *et al* (1994) RESOLVIDO DE ACORDO COM O CENÁRIO C-5 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS
FONTE: O autor (2015).

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de modelagem matemática para o problema de carregamento de contêiner, em especial, carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Esta abordagem foi testada por meio do *software* de otimização *CPLEX*, e embora que limitada a resolver problemas de complexidade moderada, representou satisfatoriamente as condições tratadas, seja resolvendo instâncias geradas aleatoriamente ou da literatura.

O modelo do capítulo 4 deste trabalho, oriundo de uma adaptação do modelo inicialmente apresentado por Junqueira (2009), demonstra ser uma excelente abordagem às doze considerações práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995). Originalmente em Junqueira (2009), mesmo que apenas em problemas que contenham um único contêiner, foram consideradas as restrições adicionais de orientação das caixas, múltiplos destinos, empilhamento máximo, limitação de peso e estabilidade vertical e horizontal da carga. Por sua vez, neste trabalho foram consideradas as restrições de separação de itens, carregamento completo de grupos de caixas e, novamente, as restrições de estabilidade vertical e orientação das caixas (as duas últimas foram adaptadas ao caso de múltiplos contêineres). Sendo assim, diferentemente de determinadas heurísticas ou métodos específicos, esta abordagem mostra ser facilmente manipulada a considerar um grande número de exigências práticas do carregamento de contêiner.

Neste trabalho o modelo levou em consideração apenas o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos (problemas do tipo MHLOPP e MHKP). No entanto, a modelagem proposta pode ser facilmente estendida de modo a considerar outros tipos de problemas. Para os tipos IIPP, SLOPP, MILOPP, SKP e MIKP (tal como MHLOPP e MHKP, pertencem a classe de maximização das saídas) ajustes básicos nas variáveis de decisão e nos somatórios das expressões são suficientes. Por outro lado, para os problemas do tipo minimização das entradas (SSSCSP, MSSCSP, RCSP, SBSBPP, MBSBPP, RBPP e ODP) as alterações devem abranger uma combinação de ajustes na função objetivo e nas considerações geométricas.

O algoritmo de geração de números úteis, descrito na seção 4.2, colaborou significativamente com a redução da cardinalidade dos conjuntos dos possíveis

vértices, deste modo, proporcionando ganhos significativos no desempenho computacional dos modelos testados. Além disso, o AGNU mostrou que, além de ser uma proposta alternativa viável ao desempenho dos modelos, pode servir de base na adaptação dos modelos para a consideração de caixas com dimensões não inteiras.

Os resultados computacionais do Capítulo 5 mostraram que a abordagem utilizada depende fortemente do número de tipos de caixas, da quantidade de contêineres disponíveis e da proporção das dimensões das caixas em relação às medidas dos contêineres. Além disso, percebeu-se que o desempenho dos modelos testados está fortemente relacionada com os cenários tratados, dado que cenários que possuem o maior número de restrições práticas tendem a ser mais complexos. Este fato foi observado claramente, por exemplo, em modelos que contenham a restrição de estabilidade vertical.

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a abordagem proposta é capaz de resolver, em tempo computacional aceitável, apenas problemas de complexidade moderada. No entanto, a modelagem proposta pode servir de motivação para futuras pesquisas que explorem outros métodos de solução, como procedimentos heurísticos, métodos de relaxação, entre outros.

Este trabalho pode ser utilizado, futuramente, como motivação para as seguintes pesquisas: *i*) explorar formas alternativas aos conjuntos (82)-(84), de modo a diminuir a cardinalidade e conseqüentemente a complexidade dos modelos; *ii*) estender o modelo proposto para considerar os diversos tipos dos problemas de carregamento de contêiner; *iii*) expandir a modelagem para abordar restrições práticas não tratadas neste trabalho, como restrição adicional de manuseio, prioridades de envio e distribuição de peso dentro dos contêineres; *iv*) avaliar o desempenho do modelo com conjuntos de testes não inteiros, isto é, caixas e contêineres com medidas reais *v*) testar combinações diferentes de parâmetros para o *solver CPLEX*, dado que neste trabalho optou-se apenas por parâmetros *default* e *v*) estudar formulações alternativas que permitam eliminar o índice *j* utilizado para representar o *j* –ésimo contêiner de um determinado tipo.

REFERÊNCIAS

ALTARAZI, S. A new prioritizing-stacking heuristic algorithm for the inner-city truck loading problem. **International Journal of Business and Management**. V. 8, n. 3, p. 1-7, 2013.

AMOSSEN, R. R.; PISINGER, D. Multi-dimensional bin packing problems with guillotine constraints. **Computers & Operations Research**. v. 7, p. 1999-2006, 2010.

ARAÚJO, O. C. B. **Problemas de corte e empacotamento tridimensional e integração com roteamento de veículos**. 180 f. Tese (Doutorado em engenharia elétrica) – Faculdade de engenharia elétrica e computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

ARAÚJO, O. C. B.; ARMETANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. **Pesquisa Operacional**, v. 27, n. 2, p. 311-331, 2007.

ARCE, J. E. **Um Sistema de análise, simulação e otimização do sortimento florestal em função da demanda por multiprodutos e dos custos de transporte**. 136 f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Setor de Ciências Agrárias, universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

ARCE, J. E.; MACDONAGH, P.; FRIEDL, R. A. Geração de padrões ótimos de corte através de algoritmos de traçamento aplicados a fustes individuais. **R. Árvore**. v. 28, n. 2, p. 207-217, 2004.

BALAKIRSKY, S.; PROCTOR, F.; KRAMER, T.; KOLHE, P.; CHRISTENSEN, H. I. Using simulation to assess the effectiveness of pallet stacking methods. **2nd International Conference on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots**. Berlin, Springer, p. 336-349, 2010.

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos/logística empresarial**. 5. ed, Porto Alegre: Bookman, 2006.

BEASLEY, J. E. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. **Operations Research**, v. 33, n. 1, p. 49-64, 1985.

BEASLEY, J. E. A population heuristic for constrained two-dimensional non-guillotine cutting. **European Journal of Operations Research**, v. 156, n. 3, p. 601-627, 2004.

BEKRAR, A.; KACEM, I. An exact method for the 2D guillotine strip packing problem. **Advances in Operations Research**, 2009 (doi: 10.1155/2009/732010).

BISCHOFF, E. E. Stability aspects of pallet loading. **OR Spectrum**. v. 13, 189-197, 1991.

BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. **International Journal of Management Science**, Great Britain, v. 23, n. 4, p. 377-390, 1995.

BISCHOFF, E. E. Three-dimensional packing of items with limited load bearing strength. **European Journal of Operations Research**. v. 168, p. 952-966, 2006.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. Zur behandlung von restriktionen bei der stauraumoptimierung am beispiel eines genetischen algorithmus fur das containerbeladeproblem. *Logistik Management – Intelligente I+K Technologien*. Berlin, **Springer**, p. 83-100, 1999.

BORTFELDT, A. Eine heuristic fur multiple containerladeprobleme. **OR Spectrum**. v. 22, n.2, p. 239-261, 2000.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 131, p. 143-161, 2001.

BORTFELDT, A.; GEHRING, H.; MACK, D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. **Parallel Computing**, v. 29, n. 5, p. 641-662, 2003.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading – A state-of-the-art review. **European Journal of Operations Research**. v. 229, p. 1-20, 2013.

BOSCHETTI, M. A. New lower bounds for the three-dimensional finite bin packing problem. **Discrete Applied Mathematics**. v. 140, p. 241-258, 2004.

BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J. **Logística empresarial**. São Paulo: Atlas, 2010.

BRUNETTA, L.; GREGOIRE, P. A general purpose algorithm for three-dimensional packing. **INFORMS Journal on Computing**. v. 17, P. 328-338, 2005.

CARNIERI, C.; MENDOZA, G. A.; GAVINHO, L. G. Solution procedures for Cutting lumber into furniture parts. **European Journal of Operations Research**. v. 73, p. 495-501, 1994.

CHAN, F. T. S.; BHAGWAT, R.; KUMAR, N.; TIWARI, M. K; LAM, P. Development of a decision support system for air-cargo pallets loading problem. **Expert Systems with Applications**. v. 31, p. 472-485, 2006.

CECILIO, F .O.; MORABITO, R. Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema de carregamento de contêineres. **Revista Transportes**, v. 11, n. 2, p. 32-45, 2004.

CESCHIA, S.; SCHAERF, A. Local search for multi-drop multi-container loading problem. **Journal of Heuristics**. v. 19, 275-294, 2011.

CHE, C. H.; HUANG, W.; LIM, A.; ZHU, W. The multiple container loading cost minimization problem. **European Journal of Operations Research**. v. 214, p. 501-511, 2011.

CHEN, C. S.; LEE, M. S.; SHEN, Q. S. An analytical model for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 80, p. 68-78, 1995.

CHRISTOPHIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional Cutting problems. **Operations Research**. v. 25, n.1, p. 30-44, 1977.

CHRISTOPHER, M. **Logística e gerenciamento da cadeia de suprimentos**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

DOMINGO, B. M.; PONNAMBALAM, S. G.; KANAGARAJ, G. Particle swarm optimization for the single container loading problem. **IEEE**. 2012 (doi: 978-1-4673-1344-5/12)

DOWSLAND, W. B. Three-dimensional packing – solution approaches and heuristic development. **International Journal of Production Research**. v. 29, p. 1673-1685, 1991.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operations Research**. v. 44, p. 145-159, 1990.

EASTMAN, W. L.; EVEN, S.; ISAACS, I. M. Bounds for the optimal scheduling of n jobs on m processors. **Management Science**, v. 11, n. 2, 1964.

ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 393-409, 2002.

ELEY, M. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. **OR Spectrum**. v. 25, p. 45-60, 2003.

FEKETE, S. P.; SCHEPERS, J. VAN DER VEEN, J. C. An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing. **Operations Research**, v. 55, n. 3, p. 569-587, 2007.

FISCHER M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. **Management Science**, USA, v. 27, n. 1, p. 1-18, 1981.

FRASER, H. J.; GEORGE, J. A. Integrated container loading software for pulp and paper industry. **European Journal of Operations Research**. v. 77, p. 466-474, 1994.

GENDREAU, M.; IORI, M.; LAPORTE, G.; MARTELLO, S. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. **Transportation Science**. v. 40, p. -342-350, 2006.

GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. **Computers and Operations Research**, Great Britain, v. 7, p. 147-156, 1980.

GEHRING, H.; BORTFELDT, A. A genetic algorithm for solving the container loading problem. **International Transactions in Operations Research**, v. 4, n. 5-6, p. 401-418, 1997.

HADJICONSTATINOU, E.; CHRISTOFIDES, N. An exact algorithm for general, orthogonal, two-dimensional knapsack problems. **European Journal of Operations Research**, v. 83, n. 1, 39-56, 1995.

HE, K.; HUANG, W. An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing. **Computers & Operations Research**. v. 38, p. 227-233, 2011.

HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**. v. 16, n. 5, p. 462-469, 1972.

HIFI, M. Approximate algorithms for the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**. v. 9, p. 747-774, 2002.

HIFI, M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: A comparative study. **Computers & Operations Research**. v. 31, p. 657-674, 2004.

HIFI, M.; KACEM, I.; NEGRE, S.; WU, L. A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 33, p.993-1000, 2010.

HUANG, W.; HE, K. A caving degree approach for the single container loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 196, p. 93-101, 2009.

IORI, M.; MARTELLO, S. Routing problems with loading constraints. **Top**. v. 18, p. 4-27, 2010.

IVANCIC, N.; MATHUR, K.; MOHANTY, B. B. An integer-programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem. **Journal of Manufacturing and Operations Management**. v. 2, p. 268-289, 1989.

JANSEN, K.; SOLIS-OBA, R. An asymptotic algorithm for 3D-Strip packing. **SODA '06 – Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms**. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 2006. (doi: 10.1145/1109575).

JUNQUEIRA, L. **Modelos de programação matemática para problemas de carregamento de caixas dentro de contêineres**. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Modelos de otimização para problemas de carregamento de contêineres com considerações de estabilidade e empilhamento. **Pesquisa Operacional**, v. 30, p. 73-98, 2010.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. **Annals of Operations Research**, v. 199, p. 51-75, 2012. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-011-0942-z> >.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computers & Operations Research**, v. 39, p. 74-85, 2012.

KURPEL, D. K.; SCHENEKEMBERG, C. M.; SCARPIN, C. T. Um modelo matemático para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. In: Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais, 4., 2014, Curitiba. **Anais...** 1 CD-ROM.

LI, K.; CHENG, K. H. On three-dimensional packing. **SIAM Journal on Computing**. v. 19, p. 847-867, 1990.

LI, H. L.; TSAI, J. F.; HU, N. Z. A distributed global optimization method for packing problems. **Journal of the Operational Research Society**. v. 54, p. 419-425, 2003.

LIN, J. L.; CHANG, C. H.; YANG, J. Y. A study of optimal system for multiple constraints multiple-container packing problems. **IEA/AIE**. p. 1200-1210, 2006.

LIU, J.; YUE, Y.; DONG, Z.; MAPLE, C.; KEECH, M. A novel hybrid tabu search approach the container loading problem. **Computers & Operations Research**. v. 38, p. 797-807, 2011.

LOH, H. T.; NEE, A. Y. C. A packing algorithm for hexahedral boxes. **Proceedings of the Conference of Industrial Automation**. Singapore, p. 115-126, 1992.

MAKAREM, O. C.; HARATY, R. A. Smart container loading. **Journal of Methods in Science and Engineering**. V. 10, p. 231-245, 2010.

MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, v. 48, n. 2 , p. 256-267, 2000.

MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D.; DEN BOEF, E.; KORST, J. Algorithm 864: General and robot-packable variants of the three-dimensional bin packing problem. **ACM Transactions on Mathematical Software**. v. 33, n. 1, 2007.

MYZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis. **Algorithmica**. v. 18, p. 122-144, 1997.

MYZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Approximation algorithms for the orthogonal z-oriented three-dimensional packing. **SIAM Journal on Computing**. v. 29, p. 1008-1029, 1999.

MYZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. Two- and three-dimensional parametric packing. **Computers & Operations Research**. v. 9, p. 2589-2603, 2007.

MOHANTY, B. B.; MATHUR, K.; IVANCIC, N. J. Value considerations in three-dimensional packing – A heuristic procedure using the fractional knapsack problem. **European Journal of Operations Research**. v. 74, p. 143-151, 1994.

MORABITO, R.; ARENALES, M. An AND/OR-graph approach to the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, Great Britain, v. 1, n. 1, p. 59-73, 1994.

MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. A GRASP approach to the container-loading problem. **IEEE Computer Society**, v. 4, n. 20, p. 50-57, 2005.

MURTY, K. G. **Linear and combinatorial programming**. Robert E. Krieger: Florida, 1985.

PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 141, n. 2, p. 382-392, 2002.

NGOI, B. K. A.; TAY, M. L.; CHUA, E. S. Applying spatial representation techniques to the container packing problem. **International Journal of Production Research**. v. 32, p. 11-123, 1994.

OLIVEIRA, L. K.; MORABITO, R. Métodos exatos baseados em relaxações Lagrangeana e *Surrogate* para o problema de carregamento de paletes do produtor. **Pesquisa Operacional**. v. 26, n.2, p. 403-432, 2006.

PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 141, p. 382-392, 2002.

REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. **European Journal of Operations Research**, v. 214, p. 526-535, 2011.

ROJAS, P. **Introdução à logística portuária e noções de comércio exterior**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

SANTOS, P. A. V. H. **Resolução do problema de carregamento de container e de roteamento de veículos utilizando algoritmos genéticos**. 85 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

SCARPIN, C. T.; SCHENEKEMBERG, C. M.; KURPEL, D. K. Um modelo matemático exato para o problema de carregamento de contêineres com restrição de carregamento completo de grupos de itens. In: Simpósio de Engenharia de Produção, 31, 2014, Bauru. **Anais...** p. 1-13.

SCHENEKEMBERG, C. M.; KURPEL, D. K.; SCARPIN, C. T. Uma proposta de resolução do problema de carregamento de contêineres com restrição de carregamento completo de grupos de itens. In: Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 35, 2014, Fortaleza. **Anais...** 1 CD-ROM.

TAKAHARA, S. A simple meta-heuristic approach for the multiple container loading problem. **IEEE International Conference on Systems**. 2006 (doi: 1-4244-0100-3/06).

TERNO, J.; SCHEITHAUER, G.; SOMMERWEIß, U.; RIEHME, J. An efficient approach for the multi-pallet loading problem. **European Journal of Operations Research**. v. 123, p. 372-381, 2000.

TSAI, R. D.; MALSTROM, E. M.; KUO, W. Three-dimensional palletization of mixed box sizes. **IIE Transactions**, v. 25, n. 4, p. 64-75, 1993.

WANG, L.; ZHANG, H.; XIONG, Y.; LI, D. Ant colony optimization algorithm based on space division for container loading problem. **IEEE**. 2010 (doi: 978-1-4244-5182-1/10).

WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European journal of Operations Research**. v. 183, p. 1109-1130, 2007.

WESTERLUND, J.; PAPAGEORGIOU, L. G.; WESTERLUND, T. A MILP model for N-dimensional allocation. **Computers & Chemical Engineering**. v. 31, p. 1702-1714, 2007.

YAP, C. N.; LEE, L. S.; MAJID, H. V.; SEOW, H. V. Ant colony optimization for container loading problem. **Journal of Mathematics and statistics**. V.8, n. 4, p. 169175, 2012.

APÊNDICE 1 – EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO AGNU NO PROBLEMA DE
CARREGAMENTO DE CONTÊINERES

Para exemplificar a aplicação do AGNU, considere um contêiner com dimensões $(L_1, W_1, H_1) = (20, 15, 15)$ que deve ser carregado com três tipos de caixas disponíveis, onde $(l_1, w_1, h_1) = (7, 5, 3)$, $(l_2, w_2, h_2) = (5, 6, 5)$, $(l_3, w_3, h_3) = (8, 6, 3)$.

Neste exemplo, os números úteis serão gerados com base no comprimento dos itens, logo, $L_1 = 20$, $l_1 = 7$, $l_2 = 5$ e $l_3 = 8$. Para as demais dimensões, largura e altura, procede-se analogamente.

De acordo com os passos do pseudocódigo da seção 4.2, têm-se:

$$L_1 = 20$$

$$\beta = \min\{7; 5; 8\} = 5$$

$$m = 3$$

$$F^{(4)} = \{0\}$$

$$\bar{X}_1^{(4)} = \{0\}$$

$$F^{(3)} = \{8\}$$

$$\bar{X}_1^{(3)} = \{0; 8\}$$

$$F^{(2)} = \{5; 10; 13; 15\}$$

$$\bar{X}_1^{(2)} = \{0; 5; 8; 10; 13; 15\}$$

$$F^{(1)} = \{7; 12; 14; 15\}$$

$$\bar{X}_1^{(1)} = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 14; 15\}$$

Na sequência acima, a união do conjunto $F^{(3)}$ com $\bar{X}_1^{(4)}$ gera o conjunto $\bar{X}_1^{(3)}$, que contém as possíveis posições, ao longo do comprimento do contêiner, que a caixa do tipo 3 pode ser arranjada. Desta maneira surgem os pontos 0 e 8.

Em seguida, o conjunto $\bar{X}_1^{(2)}$ possui os pontos de vértices, ao longo de L_1 , que as caixas dos tipos 2 e 3 podem ocupar. Pode-se observar que, além das posições obtidas para cada tipo de caixa, sendo $\{0; 5; 10; 15\}$ para $i = 2$ e $\{0; 8\}$ para a caixa do tipo $i = 3$, surge a opção de combinar estas duas caixas ao longo do comprimento do contêiner, como o ponto 13 ($5 + 8$).

Este processo se repete, como descrito no pseudocódigo, até atingir a última caixa da lista ($k = 1$). O conjunto $\bar{X}_1^{(1)}$, ou simplesmente \bar{X}_1 , contém todos os números úteis gerados para o contêiner de comprimento L_1 com base nos três tipos de caixas.

De modo análogo ao ilustrado acima, pode-se obter os seguintes conjuntos de números úteis:

$$\bar{X}_1 = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 14; 15\} \quad (149)$$

$$\bar{Y}_1 = \{0; 5; 6; 10\} \quad (150)$$

$$\bar{Z}_1 = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (151)$$

Com base nas definições (128)-(130), obtêm-se:

$$\bar{X}_{11} = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13\} \quad (152)$$

$$\bar{Y}_{11} = \{0; 5; 6; 10\} \quad (153)$$

$$\bar{Z}_{11} = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (154)$$

$$\bar{X}_{21} = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 14; 15\} \quad (155)$$

$$\bar{Y}_{21} = \{0; 5; 6\} \quad (156)$$

$$\bar{Z}_{21} = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10\} \quad (157)$$

$$\bar{X}_{31} = \{0; 5; 7; 8; 10; 12\} \quad (158)$$

$$\bar{Y}_{31} = \{0; 5; 6\} \quad (159)$$

$$\bar{Z}_{31} = \{0; 3; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (160)$$

Em contrapartida aos conjuntos gerados com o auxílio do AGNU, com base nas expressões (89)–(92), pode-se obter:

$$X_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \quad (161)$$

$$Y_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad (162)$$

$$Z_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (163)$$

Consequentemente, têm-se os conjuntos:

$$X_{11} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\} \quad (164)$$

$$Y_{11} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad (165)$$

$$Z_{11} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (166)$$

$$X_{21} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \quad (167)$$

$$Y_{21} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \quad (168)$$

$$Z_{21} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad (169)$$

$$X_{31} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (170)$$

$$Y_{31} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \quad (171)$$

$$Z_{31} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (172)$$

Os valores obtidos em (149)-(160), descrevem um modelo com 603 variáveis binárias e 324 restrições de não sobreposição, enquanto que, o modelo obtido a partir de (161)-(172) possui 5.452 variáveis e 2.288 restrições.

APÊNDICE 2 – CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE

Os dados apresentados abaixo foram gerados aleatoriamente por meio do procedimento descrito na subseção 5.1.1. Ao todo, quarenta conjuntos de testes, sendo vinte para cada contexto, foram obtidos. Na tabela de valores, a primeira coluna da esquerda indica os cinco (n) grupos de dados gerados para cada m , em seguida, têm-se as informações pertinentes as caixas do contexto mA , seguida das informações do contexto mB e, por fim, os dados relativos aos contêineres.

TABELA 11 – CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE

n	Contexto	Caixas					Contexto	Caixas					Contêineres				
		i	l_i	w_i	h_i	b_i		i	l_i	w_i	h_i	b_i	k	L_k	W_k	H_k	d_k
1	1A	1	6	6	8	29	1B	1	4	5	6	68	1	10	13	16	1
		2	6	5	5	189		2	4	5	6	68	2	24	10	25	1
		3	6	10	13	23		3	4	2	1174	1	22	24	20	1	
		4	6	8	11	71		2	6	13	21	3	2	16	13	21	3
		5	4	4	6	295		3	10	18	12	2	3	10	18	12	2
2	2A	1	9	14	11	16	2B	1	3	3	9	340	1	14	17	24	3
		2	6	13	6	56		1	6	5	5	249	1	12	15	18	3
		3	9	12	7	5		2	4	8	178	1	14	17	24	3	
		4	5	19	10	6		1	5	4	8	178	2	14	17	19	1
		5	7	6	6	31		2	5	4	8	178	3	21	19	19	3
3	3A	1	4	4	7	61	3B	1	3	3	9	340	1	16	19	24	3
		2	5	7	4	85		2	3	5	6	230	2	16	21	25	2
		3	8	4	6	54		3	5	11	2	47	3	21	22	19	1
		4	7	4	8	59		2	6	4	6	24	1	13	25	13	2
		5	6	6	3	104		1	9	2	5	85	1	19	14	23	2
4	4A	1	4	4	7	61	4B	1	2	4	3	466	2	22	10	10	3
		2	5	7	4	85		2	8	4	4	91	2	22	10	10	3
		3	8	4	6	54		1	2	4	3	466	1	22	22	10	2
		4	7	4	8	59		2	4	2	3	303	2	20	15	20	1
		5	6	6	3	104		3	12	10	22	1	3	12	10	22	1
5	5A	1	5	7	9	45	5B	1	3	4	4	268	1	15	20	22	2
		2	7	14	8	19		2	8	2	3	213	2	18	18	13	1
		3	12	5	7	40		3	16	13	13	2	3	16	13	13	2
		4	5	7	8	47		1	7	8	8	35	1	15	23	25	2
		5	10	12	6	19		2	6	5	6	93	2	21	18	23	3
6	6A	1	5	7	8	47	6B	1	6	7	5	58	1	21	16	13	3
		2	10	12	6	19		2	5	4	4	160	2	20	23	10	2
		3	6	6	4	83		3	7	4	4	98	3	15	21	18	2
		4	8	7	8	36		1	4	5	7	89	1	20	22	19	3
		5	10	13	11	7		2	8	5	6	57	2	18	23	23	1
7	7A	1	8	8	12	12	7B	3	7	7	6	48	3	17	18	17	1
		2	8	10	11	14		1	8	6	8	27	1	21	20	23	3
		3	13	11	13	6		2	7	9	8	19					
		4	8	8	12	12		3	6	5	7	48					
		5	8	10	11	14		1	6	8	7	28	1	20	18	17	2
8	8A	1	8	8	12	12	8B	2	4	5	7	64	2	15	24	21	2
		2	8	10	11	14		3	5	9	6	34					
		3	10	9	8	10											
		4	8	8	12	12											
		5	8	10	11	14											

Continua

TABELA 11 – CONJUNTOS DE TESTES GERADOS ALEATORIAMENTE

<i>n</i>	Contexto	Caixas					Contexto	Caixas					Contêineres				
		<i>i</i>	<i>l_i</i>	<i>w_i</i>	<i>h_i</i>	<i>b_i</i>		<i>i</i>	<i>l_i</i>	<i>w_i</i>	<i>h_i</i>	<i>b_i</i>	<i>k</i>	<i>L_k</i>	<i>W_k</i>	<i>H_k</i>	<i>d_k</i>
1	4A	1	12	8	8	7	4B	1	5	5	7	33	1	15	24	17	1
		2	6	4	7	29		2	5	4	6	45	2	19	12	23	3
		3	8	5	8	15		3	6	4	4	67					
		4	7	8	13	11		4	3	6	4	67					
2		1	5	6	5	35		1	4	4	5	81	1	15	25	12	2
		2	4	7	7	23		2	6	4	5	43	2	11	17	12	2
		3	4	5	8	32		3	5	7	5	31	3	14	24	13	2
		4	3	10	9	32		4	6	7	5	27					
3		1	9	9	13	4		1	4	6	8	19	1	15	15	22	1
		2	6	11	16	3		2	5	7	10	9	2	13	15	23	2
		3	8	8	13	5		3	6	3	7	23					
		4	10	11	14	2		4	4	6	9	22					
4		1	8	5	6	17		1	6	4	7	22	1	19	14	16	3
		2	14	11	7	4		2	8	4	5	26					
		3	14	6	11	4		3	4	7	6	20					
		4	7	8	12	3		4	4	7	5	17					
5		1	5	7	6	21		1	2	4	4	57	1	17	15	22	1
		2	6	8	10	9		2	4	5	5	40	2	18	18	23	1
		3	6	7	6	20		3	2	5	4	97	3	18	19	19	1
		4	5	6	8	26		4	6	4	6	56					

FONTE: O autor (2015).

APÊNDICE 3 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM
DADOS ALEATÓRIOS

Nas tabelas de resultados, sumarizadas abaixo, apresenta-se os valores obtidos para cada cenário testado. Onde n ($n = 1, \dots, 5$) representa n -ésimo conjunto de teste gerado para cada m com base nos contextos considerados.

A) RESULTADOS DO CENÁRIO C-I

- Contexto mA

TABELA 12 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-I E O CONTEXTO mA

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
1A	1	2.070	2.070	1	4.608	0,16	55,38	57,60
	2	11.609	11.609	1	16.200	2,39	41,67	68,18
	3	2.592	2.592	1	4.680	0,31	27,31	27,31
	4	7.338	7.338	1	14.784	0,78	32,59	46,70
	5	14.685	14.685	1	25.056	3,27	77,14	92,16
2A	1	15.578	10.589	2	27.882	3,59	53,11	63,65
	2	1.484	1.764	2	3.800	0,39	44,97	44,97
	3	12.744	7.332	2	12.744	2,11	49,09	77,67
	4	13.840	9.719	2	14.784	9,28	74,05	93,33
	5	14.254	8.242	2	20.000	1,25	69,14	96,97
3A	1	32.406	20.080	3	34.020	161,31	74,07	85,22
	2	26.502	14.922	3	26.176	19,81	71,79	87,48
	3	29.081	11.680	3	33.628	27,03	68,90	90,38
	4	10.458	4.680	3	17.160	11,73	59,21	59,21
	5	13.602	6.668	3	15.872	4,16	49,52	73,99
4A	1	20.454	8.736	4	18.680	16,55	78,95	89,09
	2	25.088	10.560	4	17.998	1851,55	70,67	90,11
	3	4.616	2.208	4	5.761	0,91	34,34	47,09
	4	7.017	4.290	4	6.616	1,94	50,66	54,14
	5	26.595	8.230	4	16.230	66,42	78,26	94,22
Média		14.600,65	8.399,70		16.833,95	109,24	58,04	71,97
Desvio Padrão		9.143,03	4.706,69		8.916,68	401,35	16,04	20,18

FONTE: O autor (2015).

- Contexto mB

TABELA 13 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-I E O CONTEXTO mB

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
1B	1	3.213	3.213	1	6.720	0,19	46,15	96,00
	2	19.020	19.020	1	24.336	2,95	80,00	95,45
	3	7.293	7.293	1	12.960	1,31	75,63	75,63
	4	15.789	15.789	1	22.950	3,66	53,42	83,33
	5	12.416	12.416	1	24.800	3,47	57,14	96,00
2B	1	50.926	29.526	2	43.236	958,91	88,93	94,74
	2	6.056	4.752	2	6.096	1,44	69,73	74,56
	3	15.187	9.075	2	14.984	1,69	74,73	82,58
	4	19.656	11.164	2	13.680	12,95	84,00	95,45
	5	24.111	16.568	2	21.216	26,47	90,53	94,55

Continua

TABELA 13 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-I E O CONTEXTO *mB*

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	Z	T(s)	Conclusão	
							Oc.-	Oc.+
3B	1	51.444	19.696	3	36.980	73,45	76,45	89,86
	2	43.260	17.050	3	29.992	26,73	85,22	93,96
	3	48.869	20.334	3	33.892	161,42	65,67	92,87
	4	31.776	13.056	3	2.6064	67,11	89,94	89,94
	5	30.638	13.392	3	23.768	607,22	76,21	94,76
4B	1	24.700	8.412	4	14.228	79,75	91,63	99,02
	2	33.268	10.174	4	17.375	10,02	73,31	82,00
	3	18.851	6.916	4	11.640	42,83	79,27	88,29
	4	18.204	6.336	4	10.688	43,00	83,08	84,96
	5	44.291	13.100	4	18.704	15.507,34	91,41	97,85
Média		25.948,40	12.864,10		20.715,45	881,59	76,62	90,09
Desvio Padrão		14.850,235	6.207,43		9.738,19	3.363,54	12,61	7,07

FONTE: O autor (2015).

B) RESULTADOS DO CENÁRIO C-II

- Contexto *mA*

TABELA 14 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-II E O CONTEXTO *mA*

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
2A	1	15.590	10.589	2	18	22.932	3,56	44,57	51,32
	2	1.488	1.764	2	6	3.800	0,39	44,97	44,97
	3	12.754	7.332	2	15	11.772	2,84	34,36	74,14
	4	13.848	9.719	2	12	13.916	22,36	66,53	88,67
	5	14.264	8.242	2	15	16.640	1,34	67,88	85,21
3A	1	32.416	20.080	3	15	34.020	78,27	74,07	85,22
	2	26.516	14.922	3	21	25.296	51,63	65,93	88,89
	3	29.091	11.680	3	15	31.292	39,55	68,9	81,82
	4	10.464	4.680	3	9	17.160	14,52	59,21	59,21
	5	13.610	6.668	3	12	15.648	5,19	49,52	83,14
4A	1	20.462	8.736	4	12	17.032	22,05	74,90	80,26
	2	26.000	10.560	4	18	16.850	1.482,64	70,67	85,16
	3	4.622	2.208	4	9	5.540	0,91	34,34	47,09
	4	7.021	4.290	4	9	6.616	1,97	50,66	54,14
	5	26.601	8.230	4	9	15.810	834,95	78,58	86,42
Média		16.983,13	8.646,67			16.954,93	170,81	59,00	73,04
Desvio Padrão		9.109,06	4.600,12			8.372,92	405,73	14,28	15,98

FONTE: O autor (2015).

- Contexto *mB*

TABELA 15 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-II E O CONTEXTO *mB*

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
2B	1	50.932	29.526	2	18	37.458	548,70	66,61	90,43
	2	6.060	4.752	2	6	6.096	1,53	62,49	81,80
	3	15.197	9.075	2	15	13.080	1,84	62,77	81,82
	4	19.664	11.164	2	12	12.960	218,49	81,82	95,45
	5	24.121	16.568	2	15	20.064	22,42	82,05	90,91

Continua

TABELA 15 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-II E O CONTEXTO *mB*
Conclusão

Contexto	<i>n</i>	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
3B	1	51.454	19.696	3	15	35.720	113,56	66,78	89,86
	2	43.274	17.050	3	21	29.236	374,72	83,70	91,67
	3	48.869	20.334	3	15	30.752	5.103,33	65,67	84,40
	4	31.786	13.056	3	9	24.576	1.723,12	82,86	88,70
	5	30.646	13.392	3	12	20.838	1.761,17	69,91	82,14
4B	1	24.708	8.412	4	12	13.968	130,61	92,31	94,12
	2	33.274	10.174	4	18	16.880	24,97	72,80	80,22
	3	18.857	6.916	4	9	11.640	46,97	79,27	88,29
	4	18.210	6.336	4	9	10.168	21.837,14	75,38	86,84
	5	44.297	13.100	4	9	18.432	35.742,61	90,27	96,24
Média		30.757,60	13.303,00			20.124,53	4.510,07	75,64	88,19
Desvio Padrão		13.821,79	6.308,30			9.238,06	9.939,55	9,45	5,01

FONTE: O autor (2015).

C) RESULTADOS DO CENÁRIO C-III

• Contexto *mA*TABELA 16 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-III E O CONTEXTO *mA*

Contexto	<i>n</i>	VB	RNS	RLNC	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
1A	1	16	16	1	4.608	0,001	55,38	57,60
	2	108	108	1	16.200	0,01	41,67	68,18
	3	6	6	1	4.680	0,001	27,31	27,31
	4	28	28	1	14.784	0,001	32,59	46,70
	5	261	261	1	25.056	0,001	77,14	92,16
2A	1	158	110	2	27.882	0,06	53,11	63,65
	2	8	8	2	3.800	0,28	44,97	44,97
	3	326	194	2	12.744	0,06	49,09	77,67
	4	1.428	1.095	2	14.784	0,48	74,05	93,33
	5	360	240	2	20.000	0,06	69,14	96,97
3A	1	1.523	1.311	3	34.020	3,67	74,07	85,22
	2	1.353	876	3	26.176	1,22	71,79	87,48
	3	859	363	3	33.628	0,08	68,9	90,38
	4	27	12	3	17.160	0,03	59,21	59,21
	5	140	88	3	15.872	0,09	49,52	73,99
4A	1	1.301	684	4	18.680	0,52	78,95	89,09
	2	4.184	2.404	4	17.998	553,73	70,67	90,11
	3	19	8	4	5.761	0,05	34,34	47,09
	4	156	108	4	6.616	0,11	50,66	54,14
	5	1.679	558	4	16.230	0,50	78,21	94,76
Média		697,00	423,90		16.833,95	28,04	58,03	72,00
Desvio Padrão		990,33	591,15		8.916,68	120,60	16,03	20,21

FONTE: O autor (2015).

- Contexto *mB*

TABELA 17 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-III E O CONTEXTO *mB*

Contexto	N	VB	RNS	RLNC	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
1B	1	56	56	1	6.720	0,02	46,15	96,00
	2	1.014	1.014	1	24.336	0,02	80,00	95,45
	3	81	81	1	12.960	0,001	75,63	75,63
	4	153	153	1	22.950	0,001	53,42	83,33
	5	155	155	1	24.800	0,001	57,14	96,00
2B	1	4.223	2.518	2	43.236	25,55	88,93	94,74
	2	396	324	2	6.096	0,16	72,14	72,14
	3	1.293	723	2	14.984	0,20	67,64	85,13
	4	2.032	1.146	2	13.680	0,17	84,00	95,45
	5	4.774	3.700	2	21.216	7,16	90,53	94,55
3B	1	3.528	1.338	3	36.980	0,63	76,45	89,86
	2	5.860	2.460	3	29.992	1,70	85,22	93,96
	3	3.150	1.506	3	33.892	1,42	64,90	92,87
	4	2.646	1.296	3	26.064	1,28	89,94	89,94
	5	3.558	1.620	3	23.768	28,36	77,12	94,76
4B	1	6.224	2.352	4	14.228	86,09	91,63	99,02
	2	2.500	848	4	17.375	0,70	73,31	82,44
	3	2.302	1.064	4	11.640	5,28	79,27	88,29
	4	1.341	504	4	10.688	0,41	83,08	84,96
	5	10.330	3.096	4	18.704	568,67	88,98	98,44
Média		2.780,80	1.298,00		20.715,45	36,39	76,27	90,14
Desvio Padrão		2.531,55	1.025,00		9.738,19	123,66	12,61	7,25

FONTE: O autor (2015).

D) RESULTADOS DO CENÁRIO C-IV

- Contexto *mA*

TABELA 18 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-IV E O CONTEXTO *mA*

Contexto	n	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
2A	1	170	110	2	18	22.932	0,14	44,57	51,32
	2	12	8	2	6	3.800	0,05	44,97	44,97
	3	334	194	2	15	11.772	0,17	34,36	74,14
	4	1.436	1.095	2	12	13.916	0,48	60,74	93,33
	5	370	240	2	15	16.640	0,06	67,88	85,21
3A	1	1.533	1.311	3	15	34.020	2,20	74,07	85,22
	2	1.367	876	3	21	25.296	10,92	65,93	88,89
	3	869	363	3	15	31.292	0,47	68,90	81,82
	4	33	12	3	9	17.160	0,06	59,21	59,21
	5	148	88	3	12	15.648	0,09	49,52	72,16
4A	1	1.309	684	4	12	17.032	1,61	75,51	80,26
	2	4.190	2.404	4	18	16.850	309,08	70,67	85,16
	3	25	8	4	9	5.540	0,05	34,34	47,09
	4	162	108	4	9	6.616	0,11	50,66	54,14
	5	1.685	558	4	9	15.810	1,39	77,94	87,27
Média		909,53	537,26			16.954,90	21,79	58,61	72,67
Desvio Padrão		1.066,56	641,48			83.72,93	76,82	14,14	16,16

FONTE: O autor (2015).

- Contexto *mB*

TABELA 19 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-IV E O CONTEXTO *mB*

Contexto	<i>n</i>	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	T(s)	Oc.-	Oc.+
2B	1	4.235	2.518	2	18	37.458	3,19	66,61	90,43
	2	404	324	2	6	6.096	0,16	62,49	81,80
	3	1.311	723	2	15	13.080	0,63	62,77	81,82
	4	2.040	1.146	2	12	12.960	0,63	81,82	95,45
	5	4.784	3.700	2	15	20.064	6,02	82,05	90,91
3B	1	3.538	1.338	3	15	35.720	1,86	66,78	89,86
	2	5.874	2.460	3	21	29.236	42,81	84,00	91,99
	3	3.160	1.506	3	15	30.752	85,70	65,67	84,40
	4	2.652	1.296	3	9	24.576	6,72	82,86	88,70
	5	3.566	1.620	3	12	20.838	33,16	69,91	82,14
4B	1	6.232	2.352	4	12	13.968	42,63	92,31	94,12
	2	2.512	848	4	18	16.880	11,81	72,80	80,22
	3	2.308	1.064	4	9	11.640	8,59	79,27	88,29
	4	1.347	504	4	9	10.168	55,48	75,38	86,84
	5	10.336	3.096	4	9	18.432	798,01	90,27	96,24
Média		3.619,93	1.633			20.124,53	73,16	75,66	88,21
Desvio Padrão		2.397,01	952,44			9.238,06	195,28	9,47	5,035

FONTE: O autor (2015).

APÊNDICE 4 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM
ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Nas tabelas de resultados, sumarizadas abaixo, apresentam-se os valores obtidos com a orientação fixa das caixas em cada cenário testado. Para representar as soluções não ótimas (quinta coluna), adota-se a seguinte nomenclatura:

- (Z)¹: Solução não ótima, com *gap* não nulo e tempo de resolução excedido pelo *CPLEX*.
- (Z)²: Solução não ótima, com *gap* não nulo e insuficiência de memória do computador para resolver o problema.
- (-): Sem solução, sem *gap* e com insuficiência de memória do computador para compilar o modelo pelo *CPLEX*.

A) RESULTADOS DO CENÁRIO C-1

TABELA 20 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-1 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	2.696	2.488	2	5.376	-	0,48	53,33	55,98
2	36.945	28.535	4	70.438,40	-	239,06	80,00	100,00
3	18.857	18.064	3	49.512,50	-	406,83	91,67	100,00
4	137.060	93.550	2	846.720	-	6.601,66	42,00	64,62
5	105.758	82.238	3	313.750	-	9.693,23	42,86	85,71
6	44.793	25.671	3	121.824	-	499,47	50,00	100,00
7	12.801	6.345	3	12.522	-	32,30	65,72	82,11
8	51.756	29.064	6	53.009,20	-	1.765,20	76,68	87,78
9	115.826	40.756	4	112.338 ²	0,80%	81.167	74,46	81,47
10	4.635	6.375	3	11.264	-	0,56	81,25	100,00
11	23.753	11.092	4	36.870,60	-	190,56	51,16	63,35
12	13.175	9.478	3	21.096	-	4,13	72,00	87,56
13	20.776	13.580	2	34.656	-	22,88	35,56	78,99
14	24.800	15.386	3	61.588,80	-	143,08	60,00	100,00
15	18.738	8.988	4	31.002	-	27,33	74,50	79,82
16	445.624	210.220	3	-	-	-	-	-
Média	67.374,56	37.614,38		118.797,83		6.719,58	63,41	84,49
Desvio Padrão	105.496,18	51.342,53		208.076,31		20.086,44	16,31	14,01

FONTE: O autor (2015).

B) RESULTADOS DO CENÁRIO C-2

TABELA 21 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	120	90	2	5.376	-	0,19	53,33	55,98
2	1.010	660	4	70.438,40	-	2,09	80,00	100,00
3	369	276	3	49.512,50	-	0,16	91,67	100,00

Continua

TABELA 21 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	Z	gap	T(s)	Conclusão	
							Oc.-	Oc.+
4	90	45	2	846.720	-	0,05	42	64,62
5	414	335	3	313.750	-	0,08	42,86	85,71
6	444	229	3	121.824	-	0,08	50,00	100
7	816	432	3	12.522	-	0,13	65,72	82,11
8	15.176	10.380	6	53.009,20	-	111,55	71,11	87,78
9	5.315	2.263	4	112.338 ²	0,80%	11.884	74,46	81,47
10	544	640	3	11.264	-	0,03	66,67	100
11	438	293	4	36.870,60	-	0,06	51,16	63,35
12	928	664	2	21.096	-	0,73	74,00	85,33
13	730	496	2	34.656	-	2,80	41,48	78,99
14	706	474	3	61.588,80	-	0,11	50,40	100
15	1.758	1.092	4	31.002	-	2,55	74,50	79,82
16	6.904	4.140	3	547.098	-	77,73	71,90	95,26
Média	2.235,13	1.406,81		145.566,59		755,15	62,58	85,03
Desvio Padrão	3.824,08	2.522,55		226.579,49		2.873,63	14,85	13,80

FONTE: O autor (2015).

C) RESULTADOS DO CENÁRIO C-3

TABELA 22 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	120	90	2	10	5.376	-	0,06	53,33	55,98
2	1.010	660	4	740	70.438,40	-	43,69	80,00	100,00
3	369	276	3	260	49.512,50	-	0,11	91,67	100,00
4	90	45	2	70	846.720	-	0,02	42,00	64,62
5	414	335	3	282	313.750	-	0,14	42,86	85,71
6	444	229	3	344	121.824	-	0,08	50,00	100,00
7	816	432	3	612	12.516	-	0,97	66,30	82,11
8	15.176	10.380	6	14.164	51.659,20 ²	2,76%	45.030,31	62,81	80,37
9	5.315	2.263	4	4.489	106.308 ²	8,32%	1.139,94	66,37	81,47
10	544	640	3	264	11.264	-	0,06	79,17	100,00
11	438	293	4	323	36.566,80	-	0,11	51,16	77,29
12	928	664	3	450	21.096	-	1,06	74,06	83,56
13	730	496	2	688	34.617,60	-	1,09	41,48	78,99
14	706	474	3	408	61.588,80	-	0,19	50,40	100,00
15	1.758	1.092	4	1.426	28.976,70	-	391,74	62,67	75,85
16	6.904	4.140	3	6.012	530.106	-	5.394,88	64,64	88,75
Média	2.235,13	1.406,81		1.908,88	143.895,00		3.250,28	61,18	84,67
Desvio Pad.	3.824,08	2.522,55		3.560,69	224.894,96		10.866,40	14,44	12,79

FONTE: O autor (2015).

D) RESULTADOS DO CENÁRIO C-4

TABELA 23 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO FIXA DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	RSI	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	128	90	2	10	12	4.800	-	0,08	34,99	100,00
2	1.040	660	4	740	45	70.080	-	18,50	79,17	100,00
3	377	276	3	260	12	49.512,50	-	0,42	91,67	100,00
4	110	45	2	70	30	846.720	-	0,11	42,00	64,62
5	430	335	3	282	24	313.750	-	0,16	42,86	85,71
6	462	229	3	344	27	115.776	-	0,38	50,00	100,00
7	820	432	3	612	6	12.396	-	0,81	64,00	66,42
8	15.186	10.380	6	14.164	15	51.040,40 ²	3,75%	44.107,52	65,19	80,37
9	5.321	2.263	4	4.489	9	106.380 ²	0,98%	59.032,69	50,00	94,67
10	550	640	3	264	9	11.264	-	0,14	66,67	100,00
11	446	293	4	323	12	36.566,80	-	0,33	51,16	77,29
12	934	664	3	450	9	18.504	-	9,75	53,33	80,00
13	738	496	2	688	12	27.014,40	-	0,67	41,48	61,44
14	718	474	3	408	18	59.472	-	4,09	53,70	100,00
15	1.766	1.092	4	1.426	12	28.941,40	-	30,50	63,03	85,37
16	6.910	4.140	3	6.012	9	475.962	-	2.345,01	55,68	82,45
Média	2.246,00	1.406,81		1.908,88	16,31	139.261,22		6.596,95	56,56	86,15
Desvio Padrão	3.822,95	2.522,55		3.560,69	10,00	219.856,58		17.211,04	14,24	13,35

FONTE: O autor (2015).

APÊNDICE 5 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM
ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Nas tabelas de resultados, sumarizadas abaixo, apresentam-se os valores obtidos com a orientação das caixas no plano em cada cenário testado. Para representar as soluções não ótimas (quinta coluna), adota-se a seguinte nomenclatura:

- (Z)¹: Solução não ótima, com *gap* não nulo e tempo de resolução excedido pelo *CPLEX*.
- (Z)²: Solução não ótima, com *gap* não nulo e insuficiência de memória do computador para resolver o problema.

(-): Sem solução, sem *gap* e com insuficiência de memória do computador para compilar o modelo pelo *CPLEX*.

A) RESULTADOS DO CENÁRIO C-2

TABELA 24 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	Z	gap	T(s)	Oc. -	Oc. +
1	300	158	2	6.528	-	0,25	64,14	73,33
2	2.305	1.060	4	81.088	-	1,19	85,00	98,61
3	777	276	3	52.325	-	3,64	96,67	100,00
4	255	105	2	1.354.752	-	0,08	64,62	84,00
5	1.236	645	3	377.500	-	0,16	28,57	82,65
6	2.217	1.060	3	126.336	-	0,83	66,67	100,00
7	4.000	1.120	3	15.882	-	4,30	74,48	86,15
8	51.432	18.872	6	62.962,60 ¹	0,002%	86.400	88,44	95,01
9	29.529	6.597	4	119.970 ¹	0,03%	86.400	70,63	94,76
10	1.040	640	3	11.264	-	0,19	83,33	100,00
11	2.382	2.105	4	42.955,40	-	12,53	69,05	82,35
12	4.490	2.036	3	21.096	-	21,13	71,49	85,78
13	5.128	2.256	2	36.556,80	-	5,77	57,28	81,55
14	2.116	1.010	3	61.588,80	-	0,44	55,20	100,00
15	5.588	2.778	4	33.495,40	-	715,26	81,03	84,33
16	54.715	18.292	3	595.770 ¹	0,02%	86.400	83,96	95,26
Média	10.469,38	3.688,13		187.504,38		16.247,86	71,29	90,24
Desvio padrão	17.454,67	5.828,15		337.534,20		33.700,43	15,69	8,33

FONTE: O autor (2015).

B) RESULTADOS DO CENÁRIO C-3

TABELA 25 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	Z	gap	T(s)	Oc. -	Oc. +
1	300	158	2	28	6.528	-	0,08	64,14	73,33
2	2.305	1.060	4	1.690	80.524,80	-	7,56	80,00	98,61
3	777	276	3	541	52.325	-	1,19	96,67	100,00
4	255	105	2	205	1.354.752	-	0,03	64,62	84,00
5	1.236	645	3	841	377.500	-	0,27	50,00	75,71

6 | 2.217 | 1.060 | 3 | 1.748 | 126.336 | - | 7,83 | 66,67 | 100,00
 Continua

TABELA 25 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	Z	gap	T(s)	Conclusão	
								Oc. -	Oc. +
7	4.000	1.120	3	3.000	15.882	-	4,16	74,48	86,15
8	51.432	18.872	6	47.978	53.416,60 ¹	0,18%	86.400	62,96	87,24
9	29.529	6.597	4	24.935	114.156 ¹	0,08%	86.400	68,44	84,53
10	1.040	640	3	504	11.264	-	0,09	70,83	100,00
11	2.382	2.105	4	1.714	41.596	-	19,69	62,94	75,59
12	4.490	2.036	3	2.140	21.096	-	28,70	71,49	87,56
13	5.128	2.256	2	4.836	36.556,80	-	305,45	64,20	89,23
14	2.116	1.010	3	1.230	61.588,80	-	0,98	40,80	100,00
15	5.588	2.778	4	4.550	32.891,50	-	615,99	72,00	84,33
16	54.715	18.292	3	47.511	457.098 ¹	0,32%	86.400	37,85	76,89
Média	10.469,38	3.688,13		8.965,69	177.719,47		16.262,00	65,51	87,70
Desvio padrão	17.454,67	5.828,15		15.740,33	328.949,73		33.693,57	13,72	9,28

FONTE: O autor (2015).

C) RESULTADOS DO CENÁRIO C-4

TABELA 26 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS NO PLANO

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	RSI	Z	gap	T(s)	Oc. -	Oc. +
1	308	158	2	28	12	5.760	-	0,06	46,56	100
2	2.335	1.060	4	1.690	45	80.524,80	-	2,84	80	100
3	785	276	3	541	12	52.000	-	4,98	80,56	100
4	275	105	2	205	30	1.354.752	-	0,03	64,62	84
5	1.252	645	3	841	24	377.500	-	0,22	61,22	78,57
6	2.235	1.060	3	1.748	27	123.840	-	10,30	72	100
7	4.004	1.120	3	3.000	6	15.882	-	5,22	74,48	86,15
8	51.442	18.872	6	47.978	15	52.076,40 ¹	0,21%	86.400	63,54	85,09
9	29.535	6.597	4	24.935	9	111.240 ¹	0,11%	86.400	79,02	83,56
10	1.046	640	3	504	9	11.264	-	0,13	75	100
11	2.390	2.105	4	1.714	12	41.596	-	18,09	62,94	75,59
12	4.496	2.036	3	2.140	9	20.232	-	1.118,36	72	76,89
13	5.136	2.256	2	4.836	12	28.953,60	-	10,84	43,46	71,68
14	2.128	1.010	3	1.230	18	59.914,80	-	8,75	36	100
15	5.596	2.778	4	4.550	12	32.400,90	-	227,59	72	82,68
16	54.721	18.292	3	47.511	9	354.384 ¹	650%	86.400	37,85	64,37
Média	10.480,25	3.688,13		8.965,69	16,31	170.145,03		16.287,96	63,83	86,79
Desv. pad.	17.452,95	5.828,15		15.740,33	10,00	324.797,88		33.681,80	14,54	11,48

FONTE: O autor (2015).

APÊNDICE 6 – RESULTADOS DOS TESTES COMPUTACIONAIS OBTIDOS COM
ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Nas tabelas de resultados, sumarizadas abaixo, apresentam-se os valores obtidos com a orientação geral das caixas no plano em cada cenário testado. Para representar as soluções não ótimas (quinta coluna), adota-se a seguinte nomenclatura:

- (Z)¹: Solução não ótima, com *gap* não nulo e tempo de resolução excedido pelo *CPLEX*.
- (Z)²: Solução não ótima, com *gap* não nulo e insuficiência de memória do computador para resolver o problema.

(-): Sem solução, sem *gap* e com insuficiência de memória do computador para compilar o modelo pelo *CPLEX*.

A) RESULTADOS DO CENÁRIO C-2

TABELA 27 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-2 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	2.840	926	2	9.216	-	7,20	86,67	90,96
2	4.030	1.060	4	85.555,20	-	15,78	99,00	100,00
3	1.493	276	3	53.262,50 ²	0,45%	80.647,81	98,33	100,00
4	2.240	750	2	1.354.752	-	0,41	64,62	84,00
5	2.733	750	3	583.750	-	1,47	88,78	100,00
6	16.612	2.820	3	142.464 ²	1,43%	46.217,52	98,67	100,00
7	33.976	6.480	3	17.664 ¹	0,41%	86.400	92,89	93,98
8	204.915	25.304	6	71.972,40 ¹	0,35%	86.400	85,56	96,10
9	264.270	22.632	4	108.684 ¹	400%	86.400	64,69	81,47
10	5.392	1.280	3	15.360	-	3,73	100,00	100,00
11	19.922	7.032	4	54.761	-	1.954,05	83,51	89,52
12	48.294	8.372	3	24.552 ¹	0,76%	86.400	95,66	100,00
13	66.334	13.840	2	36.556,80	-	62.735,34	49,38	84,30
14	25.746	5.892	3	68.468,40	-	67.848,63	87,92	100,00
15	35.612	5.736	4	40.366,40	-	761,23	90,00	96,94
16	228.640	35.674	3	486.258 ¹	250%	86.400	50,46	92,48
Média	60.190,56	8.676,50		197.102,67		43.262,07	83,51	94,36
Desvio padrão	85.402,53	10.167,64		340.064,84		39.181,29	16,33	6,35

FONTE: O autor (2015).

B) RESULTADOS DO CENÁRIO C-3

TABELA 28 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	2.840	926	2	2.236	8.640 ²	5,48%	4.797,67	86,67	90,96
2	4.030	1.060	4	2.640	85.376 ²	0,22%	15.262,50	100,00	100,00
3	1.493	276	3	1.021	53.262,50 ²	0,45%	81.410,07	99,31	100,00
4	2.240	750	2	1.885	1.354.752	-	1,20	64,62	84,00
5	2.733	750	3	1.975	583.750	-	10,13	85,71	100,00
6	16.612	2.820	3	14.129	142.464 ¹	0,67%	86.400	98,67	100,00
7	33.976	6.480	3	32.102	16.896 ¹	5,84%	86.400	83,97	95,49

Continua

TABELA 28 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-3 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	VER	Z	gap	T(s)	Conclusão	
								Oc.-	Oc.+
8	204.915	25.304	6	193.237	40.556,20	-	30.220,47	58,07	91,29
9	264.270	22.632	4	249.342	-	-	-	-	-
10	5.392	1.280	3	3.670	15.360	-	10,66	100,00	100,00
11	19.922	7.032	4	17.933	54.761	-	249,47	83,51	89,52
12	48.294	8.372	3	38.097	23.587,20 ¹	4,92%	86.400	86,40	100,00
13	66.334	13.840	2	61.250	35.289,60 ¹	810%	86.400	43,46	80,46
14	25.746	5.892	3	18.968	68.122,80 ¹	0,75%	86.000	81,67	100,00
15	35.612	5.736	4	31.734	40.807,80	-	1.865,61	90,00	96,94
16	228.640	35.674	3	206.398	-	-	-	-	-
Média	60.190,56	8.676,50	3,25	54.788,56	180.258,94	1,04	40.387,70	83,00	94,90
Desvio padrão	85.402,53	10.167,64	0,97	79.937,08	355.063,41	2,67	39.838,87	16,25	6,39

FONTE: O autor (2015).

C) RESULTADOS DO CENÁRIO C-4

TABELA 29 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-4 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	REV	RSI	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	2.848	926	2	2.236	12	6.720	-	379,67	58,31	66,67
2	4.060	1.060	4	2.640	45	85.376 ²	0,27%	12.672,50	100,00	100
3	1.501	276	3	1.021	12	53.262,50 ¹	0,45%	86.400	99,31	100
4	2.260	750	2	1.885	30	1.354.752	-	0,39	64,62	84
5	2.749	750	3	1.975	24	538.750	-	53,80	71,43	85,71
6	16.630	2.820	3	14.129	27	139.968 ²	1,02%	30.892,43	88,00	100
7	33.980	6.480	3	32.102	6	17.037 ¹	5,26%	86.400	86,15	87,76
8	204.925	25.304	6	193.237	15	-	-	-	-	-
9	264.276	22.632	4	249.342	9	-	-	-	-	-
10	5.398	1.280	3	3.670	9	15.360	-	5,34	100,00	100
11	19.930	7.032	4	17.933	12	54.761	-	523,05	83,51	89,52
12	48.300	8.372	3	38.097	9	23.918,40 ¹	2,48%	86.400	88,46	100
13	66.342	13.840	2	61.250	12	34.022,40 ¹	590%	86.400	43,46	80,46
14	25.758	5.892	3	18.968	18	65.829,60 ¹	3,96%	86.400	72,00	100
15	35.612	5.736	4	31.734	12	40.051,10	-	9.418,93	90,00	96,94
16	228.646	35.674	3	206.398	9	-	-	-	-	-
Média	60.200,94	8.676,50		54.788,56	16,31	186.908,31		37.380,47	80,40	91,62
Desvio pad.	85.400,34	10.167,64		79.937,08	10,00	362.937,54		39.578,53	16,72	10,03

FONTE: O autor (2015).

D) RESULTADOS DO CENÁRIO C-5

TABELA 30 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-5 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	gap	T(s)	Oc.-	Oc.+
1	2.848	926	2	12	7.680	-	11,59	66,67	69,97
2	4.060	1.060	4	45	85.555,20	-	1.299,70	99	100
3	1.501	276	3	12	53.262,50 ¹	0,45%	86.400	99,31	100
4	2.260	750	2	30	1.354.752	-	0,36	64,62	84
5	2.749	750	3	24	538.750	-	22,36	71,43	85,71
6	16.630	2.820	3	27	140.448 ²	0,62%	20.493,48	90,67	100
7	33.980	6.480	3	6	17.664	-	9.829,06	92,89	93,98

Continua

TABELA 30 – RESULTADOS OBTIDOS DE ACORDO COM O CENÁRIO C-5 E ORIENTAÇÃO GERAL DAS CAIXAS

Conjuntos	VB	RNS	RLNC	RSI	Z	gap	T(s)	Conclusão	
								Oc.-	Oc.+
8	204.925	25.304	6	15	71.972,40 ¹	0,40%	86.400	85,56	96,10
9	264.276	22.632	4	9	102276 ¹	460%	86.400	66,52	76,30
10	5.398	1.280	3	9	15.360	-	0,84	100	100
11	19.930	7.032	4	12	54.761	-	529,52	83,51	89,52
12	48.300	8.372	3	9	23.918,40 ¹	3,42%	86.400	88,46	100
13	66.342	13.840	2	12	34.022,40 ¹	7,45%	86.400	43,46	80,46
14	25.758	5.892	3	18	65.829,60 ¹	1,19%	86.400	74,17	100
15	35.612	5.736	4	12	40.191,10	-	550,52	90	96,94
16	228.646	35.674	3	9	-	-	-	-	-
Média	60.200,94	8.676,50	3,25	16,31	173.762,84	0,68	36.742,50	81,08	91,53
Desvio padrão	85.400,34	10.167,64	0,97	10,00	339.559,37	1,60	40.872,54	15,60	9,66

FONTE: O autor (2015).

ANEXO 1 – CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994)

TABELA 31 – CONJUNTOS DE TESTES DE Mohanty *et al* (1994)

Conjuntos	Caixas						Contêineres				
	i	b_i	l_i	w_i	h_i	c_i	k	d_k	L_k	W_k	H_k
1	1	20	2	6	8	1,0	1	2	10	6	16
	2	50	8	4	10	1,5	2	2	14	14	14
2	1	45	8	16	4	1,4	1	5	20	16	20
	2	60	8	8	8	1,0	2	5	24	12	16
	3	50	8	12	12	1,2	3	5	20	8	16
	4	25	12	4	4	1,0					
3	1	35	10	5	5	1,7	1	1	20	15	25
	2	40	5	15	10	1,0	2	2	15	15	20
	3	28	5	15	15	1,5	3	1	45	20	20
4	1	50	36	28	24	1,4	1	5	60	40	72
	2	60	40	32	20	1,0	2	5	40	36	52
5	1	25	15	20	25	2,5	1	3	35	30	20
	2	30	10	15	10	1,0	2	3	35	35	40
	3	40	20	25	35	2,0	3	2	35	25	40
6	1	28	18	10	8	2,0	1	2	24	20	24
	2	37	12	14	10	1,2	2	5	18	16	20
	3	30	6	10	8	1,6	3	2	30	20	30
7	1	15	7	4	10	1,2	1	1	20	15	29
	2	12	3	5	11	1,0	2	1	17	12	24
	3	20	6	9	12	1,5					
8	1	20	6	8	11	1,2	1	2	17	16	20
	2	17	5	15	9	1,0	2	2	23	18	30
	3	13	4	13	7	1,7	3	1	15	12	30
	4	24	12	13	8	1,3					
	5	21	10	14	11	2,0					
	6	80	8	2	4	1,0					
9	1	18	10	13	11	1,8	1	1	40	22	26
	2	20	8	9	10	1,6	2	1	30	30	30
	3	12	7	12	15	1,5	3	1	35	32	40
	4	22	14	15	11	1,2					
10	1	50	2	4	16	1,2	1	2	24	16	8
	2	70	2	8	16	1,5	2	1	16	16	16
	3	80	8	2	4	1,0					
11	1	30	5	11	14	1,2	1	2	21	18	24
	2	28	9	12	10	1,8	2	1	19	15	26
	3	37	7	13	17	1,3	3	1	23	20	27
	4	23	10	10	8	1,1					
12	1	35	3	6	8	1,1	1	1	30	15	18
	2	40	5	9	4	1,8	2	1	28	25	10
	3	15	8	9	12	1,0	3	1	20	18	10
13	1	56	7	8	3	2,0	1	2	25	21	25
	2	28	12	11	4	1,2	2	2	18	15	9
14	1	25	4	8	6	1,8	1	2	30	24	12
	2	32	10	12	6	1,9	2	2	20	20	10
	3	45	14	14	9	1,3	3	2	18	16	30
15	1	25	6	6	9	2,2	1	2	28	14	18
	2	25	12	10	8	1,7	2	2	15	12	20
	3	15	4	7	5	1,0					
	4	20	7	9	11	1,9					
16	1	35	15	18	17	1,6	1	1	48	70	32
	2	30	11	14	11	2,5	2	1	57	69	44
	3	25	24	26	15	1,3	3	1	38	71	55

FONTE: Mohanty *et al* (1994)