

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-graduação em
Física
Dissertação de Mestrado

André Luiz Oliveira Bilobran

Uma Medida de Realidade Física

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Renato Moreira Angelo*

Curitiba - PR

2015

B596m

Bilobran, André Luiz Oliveira

Uma medida de realidade física/ André Luiz Oliveira Bilobran. – Curitiba, 2015.

73 f. : il. color. ; 30 cm.

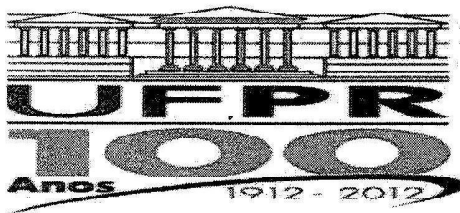
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2015.

Orientador: Renato Moreira Angelo .

Bibliografia: p. 68-73.

1. Mecânica quântica. 2. Teoria quântica relativista. 3. Medição. I. Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título.

CDD: 530.120151542



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

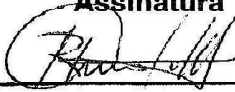
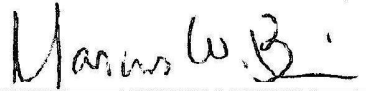
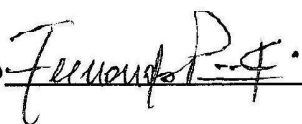
DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

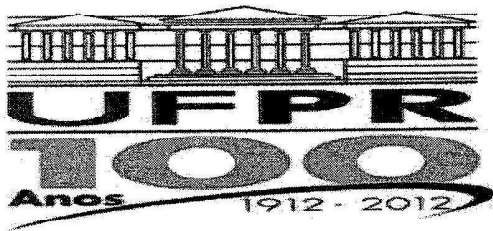
Uma Medida de Realidade Física.

ALUNO

ANDRÉ LUIZ OLIVEIRA BILOBRAN

Em sessão pública iniciada as treze horas e trinta minutos do dia 27 de fevereiro de 2015, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu aprovar o candidato com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Renato Moreira Angelo (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Fernando R. de Luna Parisio Filho (UFPE)		<u>A</u>



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do aluno **ANDRÉ LUIZ OLIVEIRA BILOBRAN**, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: *“Uma Medida de Realidade Física”*.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

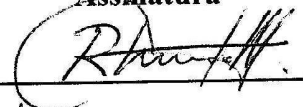
Banca Examinadora

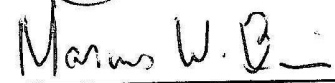
Prof. Dr. Renato Moreira Angelo
(UFPR)

Prof. Dr. Marcus Werner Beims
(UFPR)

Prof. Dr. Fernando R. de Luna Parisio Filho
(UFPE)

Assinatura







Agradecimentos

- Ao orientador, prof. Renato, pela disposição e paciência em sanar minhas dúvidas mais básicas; por me apresentar problemas de física muito instigantes; e por me ensinar a fazer ciência com rigor, seriedade e uma boa dose de diversão.
- Aos pais, Luiz e Dora, por todo o amor e apoio incondicional durante toda essa jornada.
- À Mariana, minha pequena, por me amar e me apoiar a todo momento; e por ser uma grande amiga e me tornar uma pessoa mais feliz.
- Agradeço deveras ao amigo Alexandre, por todas as conversas e discussões, físicas e as não-físicas também, e por partilhar comigo as agruras da vida;
- Ao grupo de pesquisa, que foi mudando de forma e tamanho ao longo dos anos, porém sempre proporcionando discussões interessantes e que ajudaram o trabalho a ganhar robustez. Em especial, ao prof. Alexandre por valiosos ‘insights’ e pelas piadas sem-graça mais engraçadas do grupo.
- Aos professores das bancas de pré-defesa, Marcos Gomes e Márcio Bettega, e de defesa, Marcus Beims e Fernando Parisio, pelo tempo dispendido em ler essa dissertação e fazer críticas que contribuíram significativamente para a melhoria da mesma.
- Aos demais amigos e familiares que me apoiaram e me incentivaram a continuar estudando.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Inspirados em um conceito físico fundamental, seja ele a ligação entre correlação e realidade, abordamos a noção de elementos de realidade. Baseando-nos na ideia de que a codificação de uma propriedade física em um grau de liberdade é o que de fato torna tal propriedade definida (real), propomos, de maneira empiricamente fundamentada, como identificar os elementos de realidade dentro da Mecânica Quântica. Nossa proposta estende aquela dada por EPR [1], reconhecendo também os casos em que a ignorância é meramente subjetiva. Tal proposição nos permite identificar quais estados quânticos descrevem realidade definida para um dado observável, o que nos leva a estabelecer uma medida de realidade física. Dentro desse formalismo, demonstramos que observáveis incompatíveis não podem ter realidade simultânea para estados emaranhados (em contraste com a conclusão de EPR); concluímos também que a existência de discórdia quântica impede que a realidade do estado local seja igual à realidade acessada via estado global. Em seguida, constatando a possibilidade de alterações nos elementos de realidade de uma localidade por medições causalmente desconexas em uma localidade remota, propomos uma medida de não-localidade. Minimizando essa medida e determinando-a em alguns casos simples, demonstramos a existência de aspectos não-locais mais gerais que os previstos pelas desigualdades de Bell. E, numa análise geral dessa medida, vamos apontar como a noção de não-localidade surge dentro da teoria, notando que seu mecanismo gerador depende totalmente da indefinição das partes que compõem o sistema total. Além disso, fazendo um breve estudo de casos, vamos abordar o problema da medição dentro do nosso formalismo, demonstrando uma possível solução.

Abstract

Inspired by a fundamental physical concept, namely the connection between correlation and reality, we investigate the notion of elements of reality. Based on the idea that codification of a physical property in a degree of freedom is what in fact makes that property definite (real), we propose a way of identifying the elements of reality within Quantum Mechanics, in an empirically grounded manner. Our proposal extends EPR's [1], acknowledging also cases in which our ignorance is merely subjective. That allow us to identify which quantum state describes definite reality for a given observable, which leads us to establish a measure of physical reality. Within our formalism, we demonstrate that noncommuting observables cannot have simultaneous reality (in contrast with EPR's conclusion); also we arrive at the conclusion that the existence of quantum discord prevents an equivalence between local state reality and the reality probed via global state. Next, noticing the possibility of changes in the elements of reality of one location in consequence of spacelike-separated measurements in remote locations we propose a measure of nonlocality. Upon minimization of this measure we investigate simple cases realizing that it signals nonlocal aspects even for separable states, thus being more sensitive than Bell nonlocality. Further analyzing our measure, we investigate how the notion of nonlocality arises from the theory, noticing that it's generating mechanism relies on the indefiniteness of the parts that compose the global state. Besides, we investigate the measurement problem within our framework exhibiting a possible solution to it through a brief case study.

Lista de Figuras

3.1	Protocolo tomográfico que define o conceito de elementos de realidade. . .	24
3.2	Experimento de dupla fenda com fenda leve flutuante concebido por Bohr.	31
3.3	$\mathfrak{I}(X \rho)$ em função do tempo adimensional t/τ_S para a partícula livre. . . .	35
3.4	$\mathfrak{I}(X \rho)$ vs desvio padrão para partícula livre. A figura mostra que essas duas grandezas estão diretamente conectadas.	36
3.5	$\mathfrak{I}(\sigma_z \rho)$ vs f para o estado de Werner, mostrando que \mathfrak{I} pode ser vista como uma medida de coerência para espaço de Hilbert único.	37
3.6	Comparação entre espaço discretizado e contínuo no caso de superposição de pacotes Gaussianos (similar à fenda dupla).	38
3.7	$\mathfrak{I}(X \rho)$ vs t/τ_S e Δx vs t/τ_S , onde vemos que o mínimo de irrealidade ocorre próximo ao mínimo no desvio padrão.	39
3.8	$\mathfrak{I}(X \rho)$ em função do tempo adimensional para o caso da superposição de Gaussianas (similar à fenda dupla). Comparamos vários valores de δx para observar o efeito da discretização.	41
3.9	Comparação entre a dinâmica das irrealidades para os casos de uma superposição e de uma mistura.	43

3.10	Irrealidades dos três operadores de Pauli em função do tempo adimensional τ . Os mínimos de irrealidade para cada observável ocorrem quando o estado encontra-se em um autoestado do mesmo observável.	44
3.11	$\mathfrak{I}(\sigma_z \rho_S)$ vs t e $\mathfrak{I}(Z \rho_E)$ vs t , com t em unidades arbitrárias. Enquanto a interação definiu a realidade do spin da partícula, o $\mathfrak{I}(Z \rho_E)$ tende a aumentar por conta do alargamento do pacote.	47
3.12	Cada Gaussiana representa a parte espacial associada ao spin (direções “cima” ou “baixo”). Comparando $\Delta(t)$, que é a largura de cada pacote de onda, com $d(t)$, a distância entre seus centros, determinamos o tempo a partir do qual os estados tornam-se discerníveis.	48
4.1	Não-localidade mínima \mathcal{N}_{min} , discórdia global \mathcal{D}_{12} e emaranhamento E para (a) ρ_W e (b) ρ_α . Na área hachurada, $E = 0$ enquanto que $\mathcal{N}_{min} \geq 0$. .	54

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	iv
Sumário	vi
1 Introdução	1
2 Conceitos Preliminares	7
2.1 Paradoxo EPR	7
2.2 Teorema de Bell	10
2.3 Elementos de Teoria de Informação Clássica	12
2.4 Elementos de Teoria de Informação Quântica	17
2.5 Emaranhamento	21
3 Medida de Irrealidade	23

3.1	Realidade baseada em tomografia	23
3.2	Observáveis Incompatíveis	27
3.3	Realidade e Inseparabilidade	28
3.4	O Problema da Medição	29
3.5	A Dinâmica de $\mathfrak{J}(\mathcal{O}_1 \rho)$	33
3.5.1	Partícula Livre	33
3.5.2	Superposição de Pacotes Gaussianos	37
3.5.3	Mistura de Pacotes Gaussianos	42
3.5.4	Precessão de Spin	43
3.5.5	Stern-Gerlach	45
4	Medida de Não-localidade	51
4.1	Não-localidade a partir de Irrealidade	51
4.2	Não-localidade Mínima	53
4.3	Mecanismo Gerador de Não-localidade	56
5	Conclusão	59
A	Espaço Discretizado	62
B	Limites da Não-localidade Mínima	64
	Referências Bibliográficas	68

Introdução

Partindo da ideia central de Descartes “*Penso, logo existo*”, alguém poderia concluir que um sistema isolado no universo por si só seria capaz de garantir sua própria existência¹. No entanto, ao analisar essa ideia à luz do método científico percebe-se que essa posição não pode ser mantida. A Física é fundamentalmente relacional, de tal maneira que é impossível a um sistema isolado definir suas próprias propriedades físicas. Para que haja uma descrição precisa de uma dada propriedade é necessário haver um “observado” e um “observador”, ou seja, um sistema e um referencial. De forma similar, a noção de realidade, tal como nos é intuitivamente reconhecida, está diretamente associada à nossa capacidade de medir. Uma vez que possamos olhar, cheirar, ouvir, degustar ou sentir algo, deduzimos que tal coisa é real. Mas não só através da percepção humana é que reconhecemos realidade, pois ninguém diria que os raios UV não existem por não conseguir vê-los, ou os infrassons, por não os ouvir. Desde que um objeto físico possa interagir com outro², *correlacionando-se*, a existência de uma propriedade física relacional está garantida. Ou seja, somente através de interações que permitam alguma codificação é que o observador pode “saber” do observado e a partir daí descrever propriedades físicas em relação a si³.

¹Neste trabalho, os termos ‘existência’ ou ‘realidade’ referem-se a instâncias em que um sistema possui *propriedades físicas bem definidas*.

²Estritamente falando, não precisaríamos de dois objetos distintos, mas apenas de dois *graus de liberdade* interagentes.

³Dado que a física é fundamentalmente relacional, os papéis de sistema (observado) e referencial (observador) podem ser invertidos.

A questão que queremos discutir é se podemos conferir realidade a grandezas físicas associadas a partículas quânticas. Essa discussão está ligada ao fato de que uma partícula clássica obedece a uma lei física cuja solução garante a definição de apenas um par ‘posição-momento’ a cada instante de tempo, enquanto que a solução da lei que descreve o comportamento de uma partícula quântica prevê uma sobreposição de diversas posições e momentos (princípio de superposição). Tal fato a princípio nos sugere a utilização do termo “realidade definida” para a situação em que há apenas um valor possível para a grandeza física envolvida (caso clássico ou caso quântico quando o estado é autoestado de algum observável), em consonância com a primeira noção de realidade física de que se tem notícia (vide parágrafo logo abaixo).

Dentro desse contexto, a referência primordial que devemos considerar é o artigo escrito por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) intitulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” [1], de 1935. Mais tarde faremos uma análise aprofundada do mesmo mas, sucintamente, nele os autores propõem uma definição para a noção de elemento de realidade dentro de uma teoria física. Além disso, também definem quais as características que uma teoria deve ter para ser considerada completa, utilizando essas definições na análise de um estado emaranhado para responder de maneira negativa a pergunta feita no título. A enorme importância desse trabalho deve-se em grande parte à formalização de um conceito de realidade na tentativa de resgatar os conceitos tacitamente aceitos antes do advento da Mecânica Quântica (MQ). Em artigo publicado logo em seguida, sob o mesmo título, Niels Bohr [2] responde a EPR notando que a definição de elemento de realidade por eles dada é ambígua. Bohr discorre sobre um princípio de complementaridade, o qual afirma que é o procedimento experimental que determina qual grandeza física se quer definir (tornar real). Não existe realidade definida antes do experimento, e a aparente incompletude descrita por EPR decorre da escolha de se medir uma grandeza em detrimento de outra, ditas complementares, como posição e momento por exemplo. Tal discussão travada por Einstein e Bohr refere-se aos limites de descrição e previsão que uma teoria física faz da realidade, e foi apenas o começo de uma longa série de debates dessa natureza.

Para muitos, o resultado principal dentro de toda a literatura a respeito desse assunto deve-se ao artigo de John Bell intitulado “On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox” [3], de 1964. Nele Bell mostra que qualquer teoria que procure suplementar a MQ com variáveis

ocultas, visando restaurar causalidade e localidade, conforme incentivado por EPR, será incompatível com algumas previsões da MQ. As seguidas constatações experimentais das chamadas ‘violações da desigualdade de Bell’ (a menos de alguns ‘loopholes’⁴) deram ao teorema o status de “most profound discovery of science”, conforme sugerido pelo físico Henry Stapp [7], embora ainda hoje exista debate a respeito do real significado do teorema (veja a discussão feita por Arthur Fine em [8]). A prova de Bell foi fortemente motivada pela invenção da Mecânica Bohmiana [9], teoria baseada em variáveis ocultas que reproduz os resultados previstos pela MQ usual. Assim como a interpretação Bohmiana, outras interpretações possíveis da MQ foram elaboradas e atualmente não há um consenso sobre qual a interpretação correta [10, 11], dado que todas fazem as mesmas previsões experimentais⁵.

Mais recentemente a discussão sobre os fundamentos da MQ reside nas interpretações da função de onda, divididas em ônticas e epistêmicas. A visão ôntica defende que os estados quânticos representam a realidade física diretamente, enquanto que a visão epistêmica defende que os estados representam apenas informação à respeito da realidade subjacente, correspondendo somente ao conhecimento do observador. Uma série de artigos contribuem para a primeira visão [12–20], enquanto outros vão ao encontro da segunda [21–24]. Entre os primeiros, vale destacar o artigo escrito por Pusey, Barrett e Rudolph (PBR), “On the reality of the quantum state” [12], de 2012. Nele os autores mostram que, sob certas suposições, um modelo em que o estado quântico represente apenas informação sobre uma realidade subjacente faz previsões que contradizem aquelas da teoria quântica.

Paralelamente à evolução do conceito de realidade física, a partir de 1961, com a publicação do artigo seminal de Rolf Landauer [25] a comunidade física começou a elaborar sobre a ideia proposta por ele de que *informação é física*.

Seguindo a argumentação feita por Plenio e Vitelli [26], imagine que você está segurando algo em suas mãos, podendo ser uma sequência de cartas de um baralho, figuras

⁴‘Loophole’ é a palavra inglesa utilizada para designar defeitos na montagem experimental que impediriam que as condições lógicas para a validade do teorema de Bell fossem de fato satisfeitas. De acordo com a visão cética, enquanto todos os ‘loopholes’ não forem eliminados, não será possível concluir definitivamente que a natureza quântica é não-local [4–6].

⁵Usualmente, os livros-texto de MQ apresentam apenas a interpretação de Copenhague ao introduzir os conceitos quânticos, mas, possivelmente, essa preferência seja devido ao valor histórico dessa interpretação, uma vez que ela nasceu das discussões realizadas pelos fundadores da MQ (em grande parte no famoso Congresso de Solvay de 1927), tendo como maior proponente Niels Bohr.

geométricas ou mesmo uma molécula complexa, e então perguntamos: qual é o conteúdo informacional desse objeto? Para responder a isso, considere uma outra pessoa que compartilha algum conhecimento prévio em comum com você, de tal maneira que vocês possam facilmente se comunicar, mas que não saiba nada sobre o estado do objeto em questão. Os autores definem o *conteúdo informacional* do objeto como o tamanho do conjunto de instruções que a pessoa requer para recriar o objeto, ou melhor, o estado do objeto. Por exemplo, assuma que o objeto é uma partícula com o spin para cima e que ambos saibam previamente que o sentido do spin ou é para cima ou para baixo, orientado na direção z . Nesse caso, a única instrução que precisa ser transmitida para que a pessoa recrie o estado é se o spin é para cima ou para baixo. Isso mostra que a transmissão muitas vezes é apenas uma escolha entre duas alternativas. De maneira geral, pode-se reduzir um conjunto complicado de instruções a n escolhas binárias. Assim sendo, podemos medir o conteúdo informacional do objeto simplesmente contando o número de escolhas binárias. E essa é justamente a ideia de *bit* clássico, uma variável que pode assumir apenas dois valores.

No que concerne à física, toda informação é armazenada, processada e transmitida por meios físicos. Capacitores ou spins são usados para armazenamento, ondas eletromagnéticas e fibras óticas usadas para transmissão, e as leis da Eletrodinâmica, Mecânica Clássica ou Quântica ditam as propriedades desses dispositivos e limitam nossa capacidade de processamento. Essa observação, por mais trivial que pareça, foi aplicada com sucesso por Bennett [27] na solução do paradoxo do Demônio de Maxwell, através do uso do Princípio de Landauer. O paradoxo demonstrava uma violação da segunda lei da Termodinâmica, sugerindo que seria possível diminuir a entropia de um gás sem gasto de energia, apenas com a informação da posição e do momento das partículas. A solução desse paradoxo só foi possível graças à constatação de que há uma imposição física no processamento da informação. O resultado de Landauer [25] foi reconhecer que o ato de apagar informação, irreversivelmente, implica em um inevitável aumento da entropia. Bennett observou que este aumento se daria pelo apagamento da memória do demônio, o que precisa ser feito para que o sistema volte ao estado inicial, assim resolvendo o paradoxo.

Anterior a isso, já em 1948, em um artigo seminal intitulado “A mathematical theory of communication” [28], Claude Shannon respondeu a pergunta de quão redundante é o conteúdo informacional de uma mensagem. Nele, Shannon estabeleceu uma fórmula quan-

tificando isso, a qual depende da probabilidade de ocorrência de cada letra da mensagem. Esse resultado é de suma importância por efetivamente formalizar de maneira rigorosa o quanto uma mensagem pode ser comprimida. Sabendo isso, juntamente com a definição de conteúdo informacional de um estado, podemos estabelecer de maneira precisa a informação contida em um objeto físico, bem como saber transmitir tal informação. Mais tarde esses conceitos foram estendidos à teoria quântica e hoje são de grande interesse na área de informação quântica e suas aplicações [29] (computação quântica, teleporte quântico e criptografia quântica).

Nessa dissertação nos basearemos nesses resultados para responder propriamente a pergunta de como definir elementos de realidade dentro da teoria quântica, de uma forma empiricamente fundamentada. Ao mesmo tempo que nos voltamos às discussões sobre os fundamentos da teoria quântica, utilizamos muitas das ferramentas e definições da teoria de informação quântica. Levamos em consideração que informação é física, não só por sempre estar codificada em sistemas físicos, mas também porque a informação que nós possuímos a respeito de um sistema físico contribui para a definição do próprio estado desse sistema. E a partir dessas considerações, vamos definir uma medida de realidade retomando a argumentação inicial, em que a informação que um ente físico possui a respeito de um grau de liberdade de outro ente define um elemento de realidade. Organizamos a estrutura da seguinte forma.

No capítulo 2 fazemos um apanhado geral dos conceitos físicos e propriedades matemáticas mais relevantes para o entendimento do nosso trabalho. Analisamos as ideias de EPR, do teorema de Bell e introduzimos os conceitos iniciais ligados à teoria de informação, primeiramente a parte clássica e em seguida sua formulação quântica. Daremos especial ênfase à *entropia*, pois essa é a medida em que baseamos nossa medida de realidade.

No terceiro capítulo introduzimos a nossa noção de elementos de realidade, a qual é baseada em um protocolo tomográfico por nós concebido. Motivados por essa discussão, definimos nossa medida de irrealidade e apresentamos os desdobramentos conceituais e matemáticos que advém do formalismo proposto. Discutimos a possível realidade simultânea de observáveis incompatíveis⁶, encontramos uma ligação entre nossa medida e

⁶Dois observáveis, A e B , são ditos incompatíveis quando $[A, B] \neq 0$ e compatíveis caso $[A, B] = 0$.

discórdia quântica e por último fazemos um estudo de casos com o objetivo de propor uma solução para o problema da medição.

No capítulo 4 apresentamos nossa medida de não-localidade, a qual nasce naturalmente da noção de irrealidade apresentada no capítulo anterior. Apresentamos uma extremização dessa medida e aplicamos a dois estados conhecidos na literatura. Essa análise, juntamente com os resultados matemáticos que obtemos, nos permite comparar nossa noção de não-localidade com aquela de Bell e também revelar o mecanismo gerador de não-localidade.

Além de apontar perspectivas de pesquisas futuras, o último capítulo sumariza nossos resultados e encerra nosso trabalho com ponderações acerca das seguintes questões fundacionais: existe sempre uma realidade e a MQ não é capaz de falar sobre ela, ou a teoria é completa e a realidade nem sempre está definida? A função de onda é real ou informacional? O colapso é um fenômeno físico dinâmico ou atualização Bayesiana de informação? A natureza é não-local?

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nesse capítulo vamos apresentar os conceitos necessários ao entendimento de nossos resultados. Começamos pelo paradoxo¹ EPR [1], onde surgiu, até onde sabemos, a primeira definição formal de realidade física dentro da MQ, passando então pelo teorema de Bell [3], resultado obrigatório ao se tratar de realidade e não-localidade. Em seguida fazemos um apanhado das ferramentas e definições matemáticas que nos serão úteis nos capítulos subsequentes.

2.1 Paradoxo EPR

No trabalho de 1935 “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” Einstein, Podolsky e Rosen, a partir de algumas premissas básicas, por eles definidas, chegam à conclusão de que a descrição teórica dada pela MQ é incompleta. Além disso, insinuam a existência de uma teoria mais fundamental na qual as ferramentas matemáticas básicas tenham uma interpretação física melhor definida. Para tanto, eles começam por uma clara crítica às ideias estabelecidas na conferência de Solvay de 1927, conhecidas como a visão operacionalista da MQ. Para EPR é necessário distinguir realidade objetiva de conceitos físicos sob os quais a teoria opera. Os conceitos são

¹O dicionário *Michaelis* define paradoxo como: 1. “opinião contrária à comum”; 2. “afirmação auto-contraditória, apesar de baseada em dedução válida a partir de premissas aceitáveis”. Aqui fazemos uso desse termo no primeiro sentido, no entanto, historicamente, o termo ‘paradoxo’ foi utilizado por EPR no segundo sentido.

definidos de modo a corresponder à realidade objetiva, e por meio desses conceitos faz-se inferência sobre a realidade.

EPR procede à formulação de duas questões relativas ao sucesso de uma teoria:

- 1) A teoria está correta?
- 2) A descrição que ela dá está completa?

Caso a resposta a ambas seja afirmativa, os conceitos da teoria são satisfatórios. A resposta à primeira pergunta, segundo eles, refere-se ao quanto as previsões da teoria concordam com a observação experimental. Porém, como não há dúvidas quanto ao sucesso da MQ nesse quesito, eles atacam diretamente apenas a segunda questão. Para respondê-la, os autores estabelecem como sua primeira definição, uma condição necessária para a teoria ser completa:

Definição 1 (Completeza). – *“Todo elemento da realidade física deve possuir uma correspondência na teoria²”.*

Em seguida eles definem uma condição suficiente para realidade.

Definição 2 (Elemento de realidade). – *“Se, sem perturbar o sistema, pudermos prever com certeza (probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade associado a essa quantidade”.*

A partir daí segue-se uma análise da MQ na tentativa de responder a pergunta 2, naquilo que ficou conhecido como o *paradoxo EPR*.

Paradoxo. – *Dados dois observáveis M e N tais que $MN \neq NM$, usualmente diz-se que o conhecimento de um impede o conhecimento do outro. Por exemplo, quando o momento de uma partícula é conhecido, sua posição não possui realidade física. Para EPR sobram, portanto, duas alternativas: (A) a descrição quântica da realidade dada pela função de onda é incompleta ou (B) a operadores incompatíveis correspondem quantidades físicas que não podem ter realidade simultânea. Pois, se dois observáveis tivessem realidade simultânea, e portanto valores definidos, isso corresponderia a uma descrição completa. Se a descrição da MQ contemplasse isso, a teoria deveria prever esses valores. EPR segue: como (A) e (B) não podem estar ambos errados, então se a alternativa (B) for falsa, (A) será verdadeira e vice-versa.*

²Perceba como, por essa proposta, a Termodinâmica não seria uma teoria completa, pois elementos da realidade física, como velocidade e posição de moléculas não possuem correspondência direta na teoria.

Na sequência eles utilizam um estado quântico para provar que (B) é falso. No entanto, por simplicidade, reproduziremos aqui a versão desse paradoxo proposta por Bohm [30], em que ele utiliza observáveis de espectro discreto ao invés de contínuo, como derivado originalmente. Trata-se da preparação de dois qubits no estado singleto, os quais escrevemos nas formas:

$$\begin{aligned} |s\rangle &= \frac{|+z, -z\rangle - |-z, +z\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|-x, +x\rangle - |+x, -x\rangle}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

em que $|+z\rangle$ ($|-z\rangle$) corresponde ao autoestado de σ_z na direção positiva (negativa) do eixo z , e $|+x\rangle$ ($|-x\rangle$) corresponde ao autoestado de σ_x na direção positiva (negativa) do eixo x . Separam-se então os dois qubits, mandando-os para localidades muito distantes, um para o laboratório da Alice e o outro para o de Bob, de tal maneira que as medições efetuadas em um laboratório sejam causalmente desconexas das medições realizadas no outro laboratório. Isto é, elas ocorrem de modo que não haja a possibilidade da informação referente a uma medição, viajando à velocidade da luz, chegar à outra localidade a tempo de causalmente afetar o experimento que nela ocorre³. A seguir Alice fará uma medição de spin. Dois cenários são considerados: no primeiro, Alice faz uma medição de spin na direção z , obtendo um autoestado de σ_z e fazendo com que, através do colapso da função de onda, o estado de Bob também seja um autoestado desse mesmo observável; no segundo, Alice realiza a medição na direção x , obtendo portanto um autoestado de σ_x , e similarmente para Bob. Ou seja, como consequência de duas medições diferentes no sistema de Alice, o sistema de Bob pode ser deixado com duas funções de onda distintas. Voltando agora ao texto original de EPR, segue-se a noção de *localidade* definida pelos autores: “*como, na realização da medição, os dois sistemas não mais interagem, nenhuma mudança real pode acontecer no segundo sistema em consequência de alterações no primeiro.*” “*Assim*”, eles concluem “*é possível atribuir duas funções de onda distintas para a mesma realidade*”.

Segundo o critério de realidade de EPR, no primeiro cenário existe um elemento de realidade para o sistema de Bob associado a σ_z , enquanto que no segundo cenário,

³Fazendo conexão com a terminologia usada em Relatividade, as medições em cada uma das localidades seriam eventos em um intervalo *tipo espaço*.

existe um elemento de realidade para Bob associado a σ_x . Mas como as duas funções de onda pertencem à mesma realidade, EPR conclui que deve haver elementos de realidade associados a um par de observáveis incompatíveis, implicando assim que a alternativa (B) seja falsa. Logo, (A) é verdadeira, ou seja, a descrição dada pela MQ é incompleta.

2.2 Teorema de Bell

Em 1964 Bell fechou o ciclo de discussões inaugurado por EPR e iniciou outro. No artigo intitulado “On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox”, Bell provou que algumas previsões da MQ são incompatíveis com aquelas de uma teoria física que respeite causalidade local. Esse conjunto de hipóteses que naturalmente esperaríamos de uma teoria física, também chamado de *realismo local*, vai ao encontro daquilo que encontramos no artigo de EPR. No caso de Bell, a ideia é permitir a existência de variáveis ocultas (assim chamadas por poderem não ser conhecidas, ou nem mesmo passíveis de se conhecer) dentro de uma teoria que poderia suplantiar a MQ, as quais tenham um papel duplo: conter as informações referentes à preparação dos sistemas analisados pela teoria, além de também garantir que as propriedades físicas desses sistemas possuam valor definido em todo instante. O grande trunfo de Bell foi mostrar que qualquer teoria que busque suplementar a MQ dessa maneira, como sugerido por EPR, será incompatível com algumas das previsões da MQ. Por motivos didáticos não vamos exibir aqui a desigualdade de Bell original, mas sim uma prova do teorema como exposto em [6].

Dois sistemas são postos a interagir e em seguida são espacialmente separados. O primeiro sistema vai para o laboratório de Alice, onde será feita uma série de medições, enquanto que o segundo sistema vai para o de Bob, que também realizará diversas medições. A notação utilizada será a seguinte: x e y denotarão as escolhas de medições de Alice e Bob respectivamente; a e b serão as saídas obtidas em cada experimento realizado por Alice e Bob. a e b podem variar, mesmo que as mesmas escolhas x e y sejam feitas. Vamos dizer então que esses resultados são governados por uma distribuição de probabilidade $p(ab|xy)$, de tal maneira que, repetindo os experimentos um número suficiente de vezes, pode-se determinar $p(ab|xy)$. A questão é que, em geral, ao realizarmos algum experimento desse tipo, obtemos $p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y)$, ou seja, as saídas em cada um dos laboratórios não são estatisticamente independentes entre si. Curiosamente,

isso ocorre mesmo que os laboratórios estejam causalmente separados. Contudo, isso não significa que haja influência direta de um sistema sobre o outro. Pode ser que a correlação simplesmente revele alguma dependência entre os sistemas estabelecida previamente no momento em que eles interagiram. Ao menos é isso que se esperaria de uma teoria local. De maneira mais precisa, a noção de localidade passa por identificar um conjunto de fatores descritos por alguma variável λ (ou um conjunto delas) que influencie causalmente as saídas em cada laboratório e que deem conta da dependência entre a e b . Se λ levar em conta todos os possíveis fatores devemos ter $p(ab|xy, \lambda) = p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda)$. Deve-se observar que λ não necessariamente será constante, mesmo se os procedimentos de medição forem mantidos fixos, pois λ , por ser desconhecida, pode depender de variáveis físicas não controláveis, a princípio. Por isso, os possíveis valores de λ devem ser caracterizados por uma certa distribuição $q(\lambda)$. Considerando a condição de fatorabilidade escrita anteriormente temos

$$p(ab|xy) = \int d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda). \quad (2.1)$$

Nesse ponto os autores argumentam que esse formalismo inclui qualquer tipo de teoria, sem assumir nenhuma espécie de determinismo, ou mesmo características clássicas. Apenas assume-se que as saídas a e b são determinadas probabilisticamente pelas escolhas de medição, x e y e por λ , sem restrições sobre a lei física que governa essa relação. No entanto, no artigo [31] Cavalcanti e Wiseman discordam dessa visão, apresentando o determinismo como uma das premissas do teorema de Bell.

A prova do teorema segue da constatação de que certos experimentos de MQ, feitos com partículas emaranhadas, não admitem uma decomposição do tipo (2.1). O resultado principal é obtido no seguinte esquema. Considere que só existam duas escolhas de medição por observador, $x, y \in \{0, 1\}$ e os possíveis resultados também só assumam dois valores $a, b \in \{-1, 1\}$. Seja $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{a,b} ab p(ab|xy)$ o valor esperado do produto ab dado que foram feitas as escolhas de medição x, y e considere a seguinte expressão $S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$, que é função das probabilidades $p(ab|xy)$. Se cada um desses valores satisfaz (2.1), temos

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2, \quad (2.2)$$

que é conhecida como a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [32]. A derivação dessa desigualdade segue do uso de (2.1) no cálculo de $\langle a_x b_y \rangle$, o que permite escrever $\langle a_x b_y \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \langle a_x \rangle_\lambda \langle b_y \rangle_\lambda$, onde $\langle a_x \rangle_\lambda = \sum_a a p(a|x, \lambda)$ e $\langle b_y \rangle_\lambda = \sum_b b p(b|y, \lambda)$ assumem valores no intervalo $[-1, 1]$. Utilizando isso, podemos escrever (2.2) como $S = \int d\lambda q(\lambda) [\langle a_0 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda) + \langle a_1 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda)]$. Como $\langle a_0 \rangle_\lambda$ e $\langle a_1 \rangle_\lambda \in [-1, 1]$ certamente a expressão entre colchetes é menor ou igual que $|\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda| + |\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda| = 2\langle b_0 \rangle_\lambda \leq 2$, onde usamos, sem perda de generalidade, que $\langle b_0 \rangle_\lambda \geq \langle b_1 \rangle_\lambda \geq 0$. Sabendo que $\int d\lambda q(\lambda) = 1$, chegamos finalmente a $S \leq 2$.

Vamos exibir agora um exemplo de estado físico que viola essa desigualdade. Considere que Alice e Bob compartilhem um estado singleto de dois qubits $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-z, +z\rangle - |+z, -z\rangle)$ escrito na base de σ_z , onde $|+z\rangle$ e $|-z\rangle$ são os autoestados de σ_z cujos autovalores são $+1$ e -1 respectivamente. Considere que as escolhas de medições x e y estejam associadas a vetores \vec{x} e \vec{y} correspondentes a medições de $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ no primeiro qubit e $\vec{y} \cdot \vec{\sigma}$ no segundo qubit, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ corresponde ao vetor de Pauli. De acordo com a MQ, temos que $\langle a_x b_y \rangle = -\vec{x} \cdot \vec{y}$. Façamos a exigência de que as duas escolhas de medições $x \in \{0, 1\}$ sejam em direções ortogonais \hat{e}_1 e \hat{e}_2 e as escolhas $y \in \{0, 1\}$ correspondam a medições nas direções $-(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$ e $(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$. Então temos $\langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 b_1 \rangle = \langle a_1 b_0 \rangle = 1/\sqrt{2}$ e $\langle a_1 b_1 \rangle = -1/\sqrt{2}$, e portanto

$$S = 2\sqrt{2} > 2, \quad (2.3)$$

em contradição com a desigualdade CHSH. Ou seja, uma teoria de variáveis ocultas que obedeça ao conjunto de hipóteses denominado de realismo local, como definido por Bell, não pode reproduzir os resultados da MQ. Esse resultado teórico veio a ser confirmado (a menos de alguns ‘loopholes’) por diversas experiências, a primeira⁴ delas realizada por Aspect, Dalibard e Roger em 1982 [37].

2.3 Elementos de Teoria de Informação Clássica

O intuito desta seção é situar o leitor sobre como surgiu a medida de *entropia* e qual seu significado dentro da teoria de informação. A motivação do apanhado conceitual que

⁴Na verdade, houve outras experiências antes dessa([33–36]), porém não conclusivas.

fazemos logo abaixo é justificar o uso dessa medida que faremos no capítulo seguinte.

Considere a frase: “Não haverá um terremoto em Curitiba amanhã”. Qual é o conteúdo informacional dessa asserção? Ou ainda, que conhecimento adicional ela nos dá que nós ainda não tínhamos? Compare com a seguinte afirmação: “Haverá um terremoto em Curitiba amanhã”. Claramente a segunda contém uma quantidade de informação significativamente maior que a primeira, uma vez que a não ocorrência de terremotos em Curitiba é mais que esperada. O que queremos atentar com esse exemplo é que o conteúdo informacional de uma dada mensagem está diretamente ligado à incerteza associada ao evento por ela descrito. Essa é a ideia central do trabalho de Claude Shannon, que em seu artigo de 1948 [28] estabeleceu as bases da teoria de informação. Seus dois resultados centrais foram:

1. O quanto uma mensagem pode ser comprimida; ou, o quão redundante é a informação contida nessa mensagem.
2. A que taxa podemos comunicar, de maneira confiável, uma mensagem por um canal com ruído; ou, quanta redundância deve-se incorporar à mensagem para protegê-la de erros.

O sentido de mensagem aqui é, genericamente, uma cadeia de caracteres escolhidos de um alfabeto. Ambas as questões dizem respeito a quão inesperada é a próxima letra da mensagem, em média. O grande trunfo de Shannon foi verificar que a Entropia fornece uma boa maneira de quantificar essa redundância. Vamos seguir o roteiro traçado em [38], utilizando o livro de Nielsen e Chuang [29] como base para apresentar as medidas entrópicas que nos interessam.

Considere um alfabeto de k letras, $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Vamos supor que esse alfabeto seja binário, com $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$. Suponha também que as letras em uma mensagem são estatisticamente independentes e que o 0 ocorra com probabilidade p , enquanto o 1, com probabilidade $1 - p$. Considerando uma mensagem muito longa, com n letras ($n \gg 1$), é possível comprimir tal mensagem em uma cadeia de letras que seja menor mas que contenha essencialmente a mesma informação? Para n grande, cada cadeia conterá tipicamente cerca de np 0's e $n(1 - p)$ 1's. O número de cadeias formadas de tal

forma é da ordem de $\binom{n}{np}$. Usando a aproximação de Stirling $\log n! = n \log n - n$:

$$\log \binom{n}{np} = \log \left(\frac{n!}{(np)![n(1-p)]!} \right) \cong n \log n - n[np \log np - np + n(1-p) \log n(1-p) - n(1-p)] = nH(p)$$

sendo $H(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$. Assim, o número típico de cadeias é da ordem de $2^{nH(p)}$ e não 2^n como esperaríamos fazendo uma aproximação mais ingênua, apenas armazenando em um bit cada letra da sequência. Devido à disparidade entre as probabilidades da letra ser 0 ou 1, para carregar essencialmente toda informação contida na cadeia de n bits, basta escolher um bloco de códigos com $2^{nH(p)}$ letras, e que atribui um número inteiro positivo a cada uma das cadeias típicas. Assim, podemos especificar cada uma dessas novas letras usando uma cadeia binária de tamanho $nH(p)$. Como $0 \leq H(p) \leq 1$ para $0 \leq p \leq 1$, e como $H(p) = 1$ apenas para $p = 1/2$, o bloco diminui a mensagem para qualquer $p \neq 1/2$, ou seja, sempre que 0 e 1 não aparecem com a mesma probabilidade. Esse é o resultado de Shannon. A ideia é que não precisamos de um código para cada sequência de letras, mas apenas para as sequências típicas. Podemos facilmente generalizar essa ideia para o caso de um alfabeto de k letras, onde uma letra x aparece com probabilidade $p(x)$. Numa cadeia de n letras, x tipicamente aparece em torno de $np(x)$ vezes, e o número de cadeias típicas é da ordem de

$$\frac{n!}{\prod_x (np(x))!} \cong 2^{-nH(X)},$$

onde utilizamos o teorema de Stirling novamente, e onde

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log p(x)$$

é a *entropia de Shannon* do ensemble $X = \{x, p(x)\}$. Adotando um bloco de códigos que designa inteiros para sequências típicas, a informação contida numa cadeia de n letras pode ser comprimida para $H(X)$ bits. Nesse sentido, uma letra x escolhida do ensemble carrega, em média, $H(X)$ bits de informação. Ao mesmo tempo, podemos entender a entropia como uma medida de ignorância sobre X antes de aprendermos seu valor. Essas duas visões são complementares, uma vez que a entropia pode ser ou a ignorância antes

de sabermos o valor de X , ou a informação ganha depois de sabermos o valor de X .

Um exemplo concreto do uso da entropia em teoria de informação aparece na referência [29] da seguinte forma: suponha que haja uma fonte produzindo um dos quatro símbolos, 1, 2, 3 ou 4. Sem compressão, dois bits são utilizados para armazenamento cada vez que um símbolo é produzido. No entanto, vamos supor que o símbolo 1 seja produzido pela fonte com probabilidade $1/2$, o símbolo 2 com probabilidade $1/4$ e os símbolos 3 e 4 com probabilidade $1/8$. Podemos utilizar essa informação para comprimir a fonte, utilizando menos bits para armazenar os símbolos que mais aparecem, como o 1, e mais bits para armazenar os que ocorrem com menor frequência, como 3 e 4. Uma maneira de fazer isso é codificar o 1 como bit 0, o 2 como bit 10, o 3 como bit 110 e o 4 como bit 111. Note que o comprimento médio da cadeia comprimida é $(1/2) \cdot 1 + (1/4) \cdot 2 + (1/8) \cdot 3 + (1/8) \cdot 3 = 7/4$ bits de informação por uso da fonte. Isso é menos do que o necessário na aproximação mais ingênua. Incrivelmente, isso bate com a entropia da fonte, $H(X) = -(1/2)\log(1/2) - (1/4)\log(1/4) - (1/8)\log(1/8) - (1/8)\log(1/8) = 7/4$. E mais, qualquer tentativa de comprimir a fonte ainda mais resulta em informação sendo perdida. Ou seja, a entropia quantifica a melhor compressão que se pode conseguir. A seguir vamos definir algumas medidas no campo de informação que nos serão úteis mais adiante.

Entropia Conjunta — Dada a definição de entropia e sua interpretação, podemos também definir como fica essa medida para o caso de dois ensembles, X e Y . A entropia conjunta, definida como⁵ $H(X, Y) = -\sum_{x,y} p(x, y)\ln p(x, y)$, mede a ignorância total sobre o par (X, Y) . Duas propriedades importantes são a *subaditividade*, $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, e a *subaditividade forte*, $H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$. Para a primeira, a igualdade ocorre somente se X e Y forem variáveis independentes, já para a segunda, a igualdade ocorre somente se $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ formam uma cadeia de Markov⁶.

Entropia Condicional — Suponha que saibamos os valores de Y , tendo assim adquirido uma quantidade $H(Y)$ de informação sobre o par (X, Y) . A entropia condicional de X dado que sabemos Y é uma medida de quão ignorante, em média, ainda somos à

⁵Previamente, introduzimos a entropia de Shannon utilizando o logaritmo na base dois, porém, para casos mais gerais que o binário, é comum o uso da base e . De qualquer maneira, a mudança de base apenas introduz uma constante multiplicativa.

⁶Um processo Markoviano é um processo estocástico em que o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados. Por isso, ele também é chamado de “processo sem memória”.

respeito de X mesmo após conhecermos Y , e é definida como $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$. Essa medida é não-negativa, $H(X|Y) \geq 0$, ocorrendo a igualdade somente se Y for função de X , $Y = f(X)$. Além disso, $H(X|Y, Z) \leq H(X|Y)$, o que condiz com nossa intuição de que a ignorância sobre X , dados Y e Z é menor do que sabendo apenas Y .

Entropia Relativa — A entropia relativa mede o quão distante uma distribuição $p(x)$ está de uma distribuição $q(x)$ sobre uma mesma variável x , e é definida como $H(p(x)||q(x)) = \sum_x p(x) \ln p(x) - p(x) \ln q(x)$. Essa medida é não-negativa, ou seja, $H(p(x)||q(x)) \geq 0$, ocorrendo a igualdade somente se $q(x) = p(x)$.

Informação Mútua — Vimos que a entropia de Shannon quantifica a informação contida, em média, por uma letra do ensemble X pois ela nos informa quantos bits são necessários para codificar essa informação. Já a informação mútua, $I(X; Y)$ quantifica o quão correlacionadas duas mensagens estão, ou o quanto elas têm em comum. Adicionando a informação a respeito de X , $H(X)$ à informação a respeito de Y , $H(Y)$, teremos contado a informação comum a ambos duas vezes. Assim, subtraindo a informação conjunta, ficamos apenas com a informação comum, ou informação mútua entre X e Y , $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$. Podemos ver que ela é simétrica na troca de X por Y , ou seja, descobrimos o mesmo conteúdo a respeito de X ao conhecer Y , quanto à respeito de Y ao conhecer X . Outra propriedade da informação mútua, qual seja $I(X; Y) \geq 0$, deriva do fato que aprender sobre Y nunca pode reduzir o conhecimento de X , sendo que a igualdade ocorre quando X e Y são totalmente descorrelacionados, de tal maneira que, ao saber sobre Y , não há ganho de informação sobre X . Uma outra maneira de escrever a informação mútua é em termos da entropia condicional $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$. Substituindo essa última expressão na primeira, obtemos $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \equiv J(X; Y)$. Por conveniência, rebatizamos a informação mútua calculada dessa forma por $J(X; Y)$, por motivos que ficarão claros na próxima seção.

Nessa seção foram introduzidos os conceitos básicos de teoria de informação clássica. A seguir vamos entender como esses conceitos tomam forma dentro de um contexto quântico. Para mais informações recomendamos também o livro “From Classical to Quantum Shannon Theory” [39].

2.4 Elementos de Teoria de Informação Quântica

Para começar vamos imaginar uma fonte que prepara mensagens de n letras, mas de tal maneira que cada letra é escolhida de um ensemble de estados quânticos. O alfabeto então consiste de um conjunto de estados quânticos ρ_x , cada um ocorrendo com probabilidade p_x . Dado isso, as probabilidades de saída de qualquer medição de alguma letra desse ensemble são totalmente especificadas pela matriz densidade $\rho = \sum_x p_x \rho_x$. Se quisermos saber a probabilidade de obter a saída a , dado que faremos uma medição do observável A , temos

$$p(a) = \text{Tr}(A\rho). \quad (2.4)$$

Para essa (ou qualquer) matriz densidade, podemos definir a entropia de von Neumann

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (2.5)$$

Claramente, se escolhermos uma base ortonormal $|a\rangle$ que diagonaliza ρ , $\rho = \sum_a \lambda_a |a\rangle\langle a|$, então teremos

$$S(\rho) = H(A), \quad (2.6)$$

onde $H(A)$ é a entropia de Shannon para o ensemble $A = \{a, \lambda_a\}$. Ou seja, no caso em que o alfabeto produzido consiste de estados puros mutuamente ortogonais, a fonte quântica se reduz a uma fonte clássica. No entanto, um problema em teoria de informação quântica é que estados puros não ortogonais não podem ser perfeitamente distinguidos, algo sem análogo clássico. Apesar de guardarem certas semelhanças interpretativas, a incerteza clássica refere-se àquela presente em jogar uma moeda ou um dado, ou seja, incerteza associada à falta de conhecimento total. O estado da moeda está definido em cada instante da dinâmica, apenas somos ignorantes a respeito do mesmo. Já a incerteza quântica refere-se a uma incerteza irreduzível da Natureza, uma incerteza fundamental. Em verdade, a entropia de von Neumann pode ser usada para descrever ambos os tipos de incertezas, ela quantifica não só a informação quântica contida em uma letra do ensemble (o número mínimo de qubits, por letra, necessária para codificar a informação), como também a informação clássica (o máximo de informação, por letra - em bits - que podemos

conhecer sobre a preparação fazendo a melhor medição possível). Além de que, como veremos adiante, ela tem um terceiro papel: o de medir emaranhamento de um estado puro bipartido.

Propriedades matemáticas de $S(\rho)$ — Existem várias propriedades matemáticas de $S(\rho)$ que são análogas às propriedades de $H(X)$. A seguir listamos as mais básicas e mais úteis aos nossos propósitos.

(1) Não-negatividade. A entropia é sempre maior ou igual a zero, i.e., $S(\rho) \geq 0$, ocorrendo a igualdade apenas se o estado for puro, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(2) Invariância. A entropia é invariante sob transformações unitárias, ou seja, $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

(3) Valor máximo. Em um espaço de Hilbert de dimensão d , o máximo da entropia é $\ln d$. Esse é o valor quando o estado é maximamente misturado, $\rho = \mathbb{1}/d$, o qual corresponde a uma descrição em que a ignorância sobre o estado é máxima.

(4) Concavidade. Se $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, então $S(p_1 \rho_1 + \dots + p_n \rho_n) \geq p_1 S(\rho_1) + \dots + p_n S(\rho_n)$. Isto é, dispondo-se de preparações $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, a ignorância sobre uma mistura desses estados é maior do que a média das ignorâncias sobre cada estado separadamente.

(5) Subaditividade. Considere um estado bipartido ρ_{AB} , então $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$, sendo $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ e $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$. A igualdade ocorre quando $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. Por completeza, apresentamos também o limite inferior, conhecido como desigualdade de Araki-Lieb: $S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|$ [40].

(6) Subaditividade forte. Para um estado tripartido qualquer, ρ_{ABC} , temos que $S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC})$.

(7) Teorema da entropia conjunta. Suponha que p_i são probabilidades, $|i\rangle$ são estados ortogonais de um sistema A, e ρ_i é um conjunto qualquer de operadores densidade do sistema B. Então $S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i)$.

Seguindo como na seção anterior, vamos definir as medidas mais úteis ao trabalho.

Informação Disponível — Como visto na propriedade 3, existe um máximo de informação $\ln d$ para um espaço de Hilbert de dimensão d . Portanto, dado um ρ arbitrário

pertencente a esse espaço, defini-se $\mathcal{I}(\rho) = \ln d - S(\rho)$ como a informação disponível. Caso o estado seja maximamente misturado, $\mathcal{I}(\rho) = 0$. Caso ele seja puro, a informação disponível será máxima, pois $S(\rho) = 0$ para ρ puro.

Informação Mútua — Anteriormente, vimos como escrever essa quantidade dentro da teoria clássica, a saber $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$ ou $J(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$, expressões completamente equivalentes, i.e., $I(X;Y) = J(X;Y)$. No entanto, ao generalizarmos essas expressões para o formalismo quântico, devemos trocar as distribuições de probabilidades clássicas pelas respectivas matrizes densidade, e a entropia de Shannon pela entropia de von Neumann, e ao fazer isso, surge uma ambiguidade quanto à forma de $H(X|Y)$. Isso porque a entropia condicional requer que especifiquemos o estado de X dado que o estado de Y foi *medido*. Tal asserção dentro da teoria quântica é ambígua até que se defina qual é a base em que é feita a medição de Y . Considerando medições perfeitas definidas via um conjunto de projetores $\{\Pi_i^Y\}$, onde os i 's correspondem às diferentes saídas, temos que o estado de X , depois de uma medição de Y com saída i é dado, pelo postulado do colapso, por

$$\rho_{X|\Pi_i^Y} = \frac{\Pi_i^Y \rho_{X,Y} \Pi_i^Y}{\text{Tr}_{X,Y}(\Pi_i^Y \rho_{X,Y})}, \quad (2.7)$$

com probabilidade $p_i = \text{Tr}_{X,Y}(\Pi_i^Y \rho_{X,Y})$ de ser obtido. As entropias $S(\rho_{X|\Pi_i^Y})$, ponderadas pelas probabilidades p_i nos dão a entropia de X condicionada às medições projetivas de Y ,

$$S(\rho_X|\Pi_i^Y) = \sum_i p_i S(\rho_{X|\Pi_i^Y}). \quad (2.8)$$

Podemos então escrever $J_{X;Y}(\rho_{XY}) = S(\rho_X) - S(\rho_X|\Pi_i^Y)$, enquanto que $I(X;Y)$ no formalismo quântico fica $I_{X;Y}(\rho_{XY}) = S(\rho_X) + S(\rho_Y) - S(\rho_{XY})$.

Discórdia Quântica — Essa diferença entre os valores referentes às duas formas de se escrever a informação mútua em MQ foi notada em [41] e [42] quase que simultaneamente, levando à definição do que Ollivier e Zurek [41] batizaram de *discórdia quântica*,

$$\begin{aligned} D_Y(\rho_{XY|\Pi_i^Y}) &= I_{X;Y}(\rho_{XY}) - J_{X;Y}(\rho_{XY}) \\ &= S(\rho_Y) - S(\rho_{XY}) + S(\rho_X|\Pi_i^Y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nesses artigos, os autores defendem que essa medida deve ser minimizada sob as possíveis medições $\{\Pi_i^Y\}$, o que corresponde a encontrar o observável cuja medição menos perturba o estado quântico e, ao mesmo tempo, permite que se extraia o máximo de informação a respeito de X . Sendo assim, a medida usual de discórdia quântica, como aparece na literatura atual corresponde não à fórmula anterior, mas sim a

$$\mathcal{D}_Y(\rho_{XY}) = \min_{\{\Pi_i^Y\}} [S(\rho_Y) - S(\rho_{XY}) + S(\rho_X|\Pi_i^Y)]. \quad (2.10)$$

Temos então, como resultado, uma medida que depende apenas do estado. De fato, a leitura usual que têm-se da discórdia é que ela é uma medida de correlações puramente quânticas, capaz de sinalizar a sensibilidade do estado global frente à perturbações locais. Um ponto importante a ser notado é que essa medida não é simétrica sob a troca de índices $X \leftrightarrow Y$, o que levou a tentativas de escrever uma discórdia simétrica. A seguir apresentamos uma medida de discórdia simétrica proposta por Rulli e Sarandy [43].

Discórdia Global — A simetrização da discórdia usual é obtida através da escrita dessa última em termos da entropia relativa, $S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma)$. Considerando que um conjunto de medições projetivas no subespaço \mathcal{H}_Y , $\Pi_j^Y = \{|j\rangle\langle j|\}$, atuando sobre um estado ρ_{XY} seja denotado por

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\rho_{XY}) &= \sum_j (\mathbb{1} \otimes \Pi_{Yj}) \rho_{XY} (\mathbb{1} \otimes \Pi_{Yj}) \\ &= \sum_j p_j \rho_{X|j} \otimes \Pi_j^Y, \end{aligned}$$

e que $\Phi_Y(\rho_Y) = \sum_j p_j \Pi_j^Y$, onde usamos que $\text{Tr}_X \rho_{X|j} = 1$. Podemos então escrever $S(\Phi_Y(\rho_Y)) = H(Y)$, e, utilizando que $S(\sum_i p_i \rho_i) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i)$ [29] obter $S(\Phi_Y(\rho_{XY})) = H(Y) + \sum_j p_j S(\rho_{X|j})$. Assim, podemos reescrever $J_{X:Y}(\rho_{XY})$ como

$$\begin{aligned} J_{X:Y}(\rho_{XY}) &= S(\rho_X) - \sum_j p_j S(\rho_{X|j}) \\ &= S(\rho_X) + S(\Phi_Y(\rho_Y)) - S(\Phi_Y(\rho_{XY})) \\ &= S(\Phi_Y(\rho_{XY})||\rho_X \otimes \Phi_Y(\rho_Y)). \end{aligned}$$

Como $I_{X:Y}(\rho_{XY}) = S(\rho_{XY}||\rho_X \otimes \rho_Y)$, podemos reescrever a discórdia como uma diferença

de entropias relativas, $\mathcal{D}_Y(\rho_{XY}) = \min_{\{\Pi_j^Y\}} [S(\rho_{XY} || \rho_X \otimes \rho_Y) - S(\Phi_Y(\rho_{XY}) || \rho_X \otimes \Phi_Y(\rho_Y))]$. É possível então obter uma versão simétrica da discórdia, apenas estendendo essa fórmula para o caso em que haja medições sobre os dois subsistemas, definindo portanto $\mathcal{D}_{XY}(\rho_{XY}) = \min_{\{\Pi_i^X \otimes \Pi_j^Y\}} [S(\rho_{XY} || \rho_X \otimes \rho_Y) - S(\Phi_{XY}(\rho_{XY}) || \Phi_X(\rho_X) \otimes \Phi_Y(\rho_Y))]$, sendo $\Phi_{XY}(\rho_{XY}) = \sum_{i,j} (\Pi_i^X \otimes \Pi_j^Y) \rho_{XY} (\Pi_i^X \otimes \Pi_j^Y)$. Em termos da informação mútua, a discórdia global fica

$$\mathcal{D}_{XY}(\rho_{XY}) = \min_{\{\Pi_i^X \otimes \Pi_j^Y\}} [I_{X:Y}(\rho_{XY}) - I_{X:Y}(\Phi_{XY}(\rho_{XY}))]. \quad (2.11)$$

No artigo [43] os autores ainda exibem uma extensão dessa discórdia global para estados com um número arbitrário de partições, e também provam outros dois pontos importantes para nós: o primeiro sendo a não-negatividade da discórdia global, i.e., $\mathcal{D}_{XY}(\rho_{XY}) \geq 0$; e o segundo, que a discórdia global reduz-se à discórdia quântica usual para estados puros bipartidos e ambas se reduzem à entropia de emaranhamento nesse caso.

2.5 Emaranhamento

Por fim, queremos falar brevemente desse conceito tão importante na área de informação que é o *emaranhamento*. Vamos focar em sistemas quânticos bipartidos descritos por um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, mas o conceito pode ser estendido a espaços com mais partições. A definição de estado emaranhado é dada em termos de uma negativa.

Estados puros. — Um estado puro ($\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$) será emaranhado se *não* puder ser escrito na forma $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Podemos entender isso do seguinte modo. Suponha que se possa realizar apenas uma medição local, i.e., em apenas um dos subsistemas. Após a medição de algum observável local $A \otimes \mathbb{1}_2$ no subsistema 1, sendo $\mathbb{1}_2$ a identidade em \mathcal{H}_2 , o estado do subsistema 1 será projetado em um autoestado de A , mas o estado do segundo subsistema permanecerá o mesmo. Mais tarde, se alguém fizer uma medição local no subsistema 2, o resultado será totalmente independente do resultado da medição no primeiro subsistema. Ou seja, as saídas das medições em cada um dos subsistemas são decorrelacionadas, dependendo apenas do estado do respectivo subsistema.

Estados mistos. — Um estado misto será emaranhado se *não* houver estados locais $\rho_i^{(1)}$, $\rho_i^{(2)}$, e valores não-negativos p_i , tais que ϱ possa ser escrito por uma soma convexa da forma $\varrho = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}$. Na verdade, um estado desse tipo exhibe correlações entre medições, i.e., existem observáveis locais A e B tais que $\text{Tr}(\varrho A \otimes B) \neq \text{Tr}(\varrho A \otimes \mathbb{1}_B) \text{Tr}(\varrho \mathbb{1}_A \otimes B)$, porém essas correlações podem ser descritas em termos de probabilidades clássicas p_i . Por isso, estados desse tipo são ditos separáveis.

Apesar dessas definições parecerem simples, diagnosticar se um estado é de fato separável (i.e., não-emaranhado) pode ser uma tarefa complicada. Para demonstrar a separabilidade deve-se exibir decomposições do estado como as mostradas acima, estados do tipo produto no caso puro, ou em uma soma convexa de produtos tensoriais no caso misto. No entanto, o fracasso em encontrar tais decomposições pode ter duas razões: ou o estado é emaranhado e não existe decomposição, ou o estado é realmente separável, mas a decomposição não pode ser identificada com clareza. Por isso, há a necessidade de se distinguir de maneira simples estados emaranhados de separáveis sem requerer explicitar tais decomposições. Nessa busca, surgiram várias maneiras de se medir emaranhamento, e pode-se dizer que para estados puros existem várias ferramentas que cumprem esse papel. Já para estados mistos, essas ferramentas funcionam apenas para estados de pequena dimensão; para sistemas de dimensão grande as medidas não são satisfatórias [44].

Medidas de emaranhamento devem satisfazer alguns requisitos básicos⁷ (veja [45] para um apanhado das propriedades). Vamos exibir aqui apenas duas medidas de emaranhamento bem conhecidas, as quais utilizaremos mais adiante. Para mais detalhes, ver [44].

Entropia de emaranhamento. — Dado um estado puro $\varrho \in \mathcal{H}$, com bipartição definida por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, o emaranhamento entre as partes A e B é dado por $E(\varrho) = S(\rho_A)$, sendo $\rho_A = \text{Tr}_B \varrho$ e $S(\rho_A) = S(\rho_B)$.

Concorrência. — Embora haja generalizações desta medida, aqui definiremos a concorrência apenas para um par de qubits. Sendo ρ um estado arbitrário de dois qubits, a concorrência é definida como $C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$, onde os λ_i s são os autovalores em ordem decrescente da matriz $\rho \tilde{\rho}$, onde $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$. ρ^* é o complexo conjugado de ρ e σ_y é o operador de Pauli.

⁷Em verdade, esse conjunto de requisitos necessários para quantificar emaranhamento ainda é uma questão em aberto.

Capítulo 3

Medida de Irrealidade

A partir desse ponto entraremos na parte original da dissertação. Vamos elaborar sobre como definir os elementos de realidade na MQ e utilizar essa definição para dar uma medida quantitativa de irrealidade. Veremos então como fica a irrealidade simultânea para observáveis que não comutam e na sequência utilizaremos nosso formalismo para discutir uma possível abordagem ao problema da medição.

3.1 Realidade baseada em tomografia

O objetivo de uma tomografia é definir, a partir de uma série de medições sobre um conjunto de partículas identicamente preparadas, a matriz densidade associada a tal preparação. Após esta construção, atribui-se esta matriz densidade a toda partícula preparada sob tais condições. A ideia é que, a partir de um conjunto reduzido de informações sobre o estado, podemos reconstruí-lo por completo, assim como um objeto 3D pode ser inferido da análise de imagens 2D obtidas de diversos ângulos.

Estamos aqui interessados em definir uma medida de realidade física com um certo apelo empírico, baseando-a em um *protocolo tomográfico*, o qual se encontra ilustrado na figura 3.1. Considere a preparação de um estado físico, composto por N partições¹, por um dado procedimento experimental. À um físico é designada a tarefa de fazer

¹' N partições' pode referir-se a N partículas em uma dimensão, ou a uma partícula com N graus de liberdade.

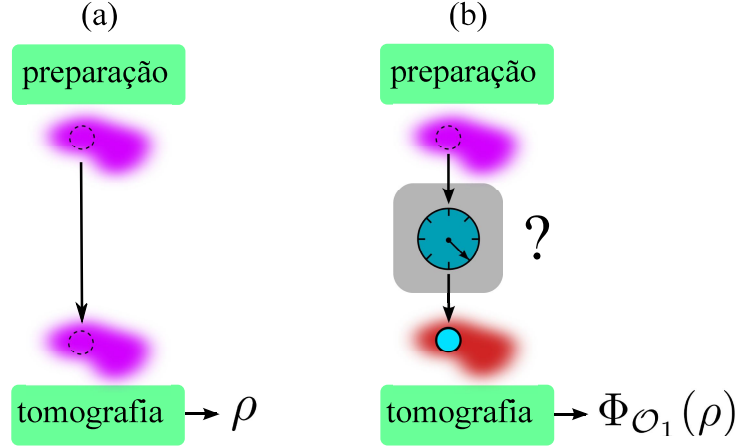


Figura 3.1: (a) Uma preparação ρ é determinada via tomografia. (b) Um observável \mathcal{O}_1 é medido por um agente externo depois da preparação, tornando-se real antes da tomografia, a qual então nos dá $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$. Caso $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, a medição apenas revelou um elemento de realidade já pré-existente na preparação.

uma tomografia completa desse estado, isto é, a ele é permitida a realização de inúmeras medições de quantos observáveis forem necessários para, ao final da tarefa, ele ter certeza de que o estado quântico, a cada preparação experimental, é descrito formalmente pela matriz densidade ρ pertencente ao espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \mathcal{H}_N$. Em seguida, mantendo-se ainda a mesma preparação experimental do estado, a qual produz ρ em cada realização, a mesma tarefa de se realizar uma tomografia completa do estado é designada, porém agora com uma modificação: antes que a tomografia ocorra, um agente externo irá realizar secretamente uma medição de um único observável, $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{H}_1$, sobre apenas um dos subsistemas. Dado que $\mathcal{O}_1 = \sum_k o_{1k} O_{1k}$, com projetores $O_{1k} = |o_{1k}\rangle\langle o_{1k}|$, cada medição desse observável dará como resultado algum autovalor o_{1k} . A teoria quântica prevê que, após a medição, o estado do sistema irá colapsar para $O_{1k} \otimes \rho_{2|o_{1k}}$ com probabilidade $p_{o_{1k}}$, sendo que $\rho_{2|o_{1k}} = \text{Tr}_1(O_{1k} \rho O_{1k}) / p_{o_{1k}}$ é o estado do resto do sistema dado que a saída foi o_{1k} , e $p_{o_{1k}} = \text{Tr}(O_{1k} \rho O_{1k})$. O resultado de cada medição de \mathcal{O}_1 não é revelado ao físico que irá tomografar o estado em seguida, de tal maneira que a melhor descrição possível do estado após a tomografia será

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) \equiv \sum_k O_{1k} \rho O_{1k} = \sum_k p_{o_{1k}} O_{1k} \otimes \rho_{2|o_{1k}}. \quad (3.1)$$

Relembrando o critério de elemento de realidade proposto por EPR, pode-se dizer que, depois de uma medição de \mathcal{O}_1 , existe um elemento de realidade associado a esse observável.

Isso advém do fato que o agente intermediário pode prever com certeza (probabilidade igual a um) que uma medição subsequente desse mesmo observável dará exatamente a mesma saída (considerando medições ideais). Queremos aqui, concordar com o conceito de EPR nesse caso, mas também ir um passo além. Perceba que a descrição (3.1) não nos permite prever com certeza qual é o resultado de uma medição de \mathcal{O}_1 , porém isso não significa que o valor desse observável não esteja plenamente definido antes da tomografia. Pelo contrário, uma vez feita a medição pelo agente, é certo que o estado do subsistema 1 encontra-se em um autoestado de \mathcal{O}_1 . Nesse sentido, a descrição (3.1) é *epistêmica* em relação a \mathcal{O}_1 , ou seja, representa apenas conhecimento a respeito de uma realidade subjacente a esse observável, e a aleatoriedade das medições de \mathcal{O}_1 , descritas pelas probabilidades $p_{o_{1k}}$, representa simplesmente uma ignorância subjetiva sobre o real valor de \mathcal{O}_1 . Nosso protocolo segue com uma comparação entre os estados tomografados em cada cenário. Quando $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$, concluímos que um elemento de realidade associado a \mathcal{O}_1 já estava definido após a preparação experimental do estado. Nesse caso, a medição de \mathcal{O}_1 não irá definir uma realidade, mas apenas revelar uma realidade pré-existente. Portanto, o protocolo sugere a seguinte definição.

Definição (Elemento de realidade). *Um observável $\mathcal{O}_1 = \sum_k o_{1k} O_{1k}$, com projetores $O_{1k} = |o_{1k}\rangle\langle o_{1k}|$ agindo sobre \mathcal{H}_1 , é real para uma dada preparação $\rho \in \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ se e somente se*

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho. \quad (3.2)$$

O mapa $\Phi_{\mathcal{O}_1}$ definido na Eq. (3.1) denota o procedimento de medições “não lidas”², como descrito em nosso protocolo. Dada a definição enfatizamos que quando o estado for

²Medições não-lidas pelo físico; o agente externo fez a leitura porém não revelou as saídas. Note que ao estabelecer o protocolo com os dois observadores, fica claro quando é que a descrição quântica é epistêmica.

uma *mistura de autoestados* de um observável, $\rho = \sum_j p_{1j} O_{1j}$, esse será real. De fato,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) &= \sum_k O_{1k} \left(\sum_j p_{1j} O_{1j} \right) O_{1k} \\ &= \sum_k |o_{1k}\rangle \sum_j p_{1j} \delta_{k,j} \delta_{j,k} \langle o_{1k}| \\ &= \rho.\end{aligned}$$

Fica claro que nossa definição pode ser considerada uma extensão daquela dada por EPR, já que, para EPR não há elemento de realidade associado a um estado de mistura.

Outro ponto a ser notado é que esse formalismo já incorpora o fato de que uma medição preserva a realidade já pré-existente,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_1}(\rho) &\equiv \Phi_{\mathcal{O}_1}(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) \\ &= \sum_k O_{1k} \left(\sum_j O_{1j} \rho O_{1j} \right) O_{1k} \\ &= \sum_k |o_{1k}\rangle \sum_j \delta_{k,j} \langle o_{1j}| \rho |o_{1j}\rangle \delta_{j,k} \langle o_{1k}| \\ &= \sum_k O_{1k} \rho O_{1k} \\ &= \Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho),\end{aligned}$$

implementando no formalismo a noção de estado clássico, aquele que não é perturbado pela medição, apenas revelado. Além disso, como um estado do tipo $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$ pode ser visto como um estado epistêmico (em relação a \mathcal{O}_1), a redução desse estado (colapso) pode ser vista como uma mera atualização de informação, ao invés de um processo físico.

Motivados pelo critério acima somos levados a definir uma ‘distância’ de quanto um estado ρ está de um estado no qual \mathcal{O}_1 é real. Definimos a *irrealidade* de um observável \mathcal{O}_1 dada uma preparação $\rho \in \mathcal{H}$ como uma distância entrópica

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) \equiv S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) - S(\rho). \quad (3.3)$$

Essa medida é não-negativa, i.e., $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) \geq 0$, pois a atuação do mapa Φ nunca pode reduzir a entropia [29]. A igualdade ocorre somente se $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = \rho$. Essas propriedades são

importantes pois demonstram que a medida pode ser de fato pensada como uma ‘distância’. Outro ponto é que ela é dependente não só do estado, mas também do observável. Isso significa que para uma mesma preparação ρ , para a qual exista algum observável que seja real, tal que $\mathfrak{I} = 0$, outro observável pode apresentar uma irrealidade $\mathfrak{I} > 0$. Esse efeito é naturalmente esperado se considerarmos que o estado pode ser classificado como um autoestado ou uma superposição dependendo da base em que é escrito. Um exemplo trivial seria $|\psi\rangle = | + z\rangle$, um autoestado de σ_z na direção positiva do eixo, o qual escrito na base de σ_x torna-se $|\psi\rangle = (| + x\rangle + | - x\rangle)/\sqrt{2}$, um estado de superposição. Calculando-se as irrealidades de ambos temos $\mathfrak{I}(\sigma_z||\psi\rangle) = 0$ e $\mathfrak{I}(\sigma_x||\psi\rangle) = \ln 2$ ³.

3.2 Observáveis Incompatíveis

O conceito de observáveis *maximamente incompatíveis* (MI) provém diretamente do conceito de *bases mutuamente neutras*, do inglês ‘*mutually unbiased bases*’ (MUB) [46]. Considere dois observáveis MI, \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}'_1 , pertencentes a \mathcal{H}_1 , os quais possuem bases $\{|o_{1k}\rangle\}$ e $\{|o'_{1k'}\rangle\}$, respectivamente. Para MUB’s, temos que $|\langle o_{1k}|o'_{1k'}\rangle|^2 = \frac{1}{d_1}$, onde $d_1 = \dim(\mathcal{H}_1)$. Intuitivamente, podemos ler isso da maneira como primeiramente apareceu, no trabalho de Schwinger [46]. Ele constatou que não é possível obter informação a respeito de um sistema quântico através de medições em uma base que é mutuamente neutra com a base em que o estado foi preparado. Posto isso, queremos então calcular $\mathfrak{I}(\mathcal{O}'_1|\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho))$, a irrealidade de \mathcal{O}'_1 dado um estado $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$ com \mathcal{O}_1 real. Pode-se demonstrar que $\Phi_{\mathcal{O}'_1\mathcal{O}_1}(\rho) = \frac{1}{d_1} \otimes \rho_2$, com $\rho_2 = \text{Tr}_1\rho$. A partir disso, obtemos que $\mathfrak{I}(\mathcal{O}'_1|\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) + \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) = I_{1:2}(\rho) + \mathcal{I}(\rho_1)$, onde $\mathcal{I}(\rho_1) = \ln d_1 - S(\rho_1) \geq 0$ é a informação disponível. Agora considere uma preparação em que \mathcal{O}_1 seja real, i.e., $\rho = \Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$. Segue que $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) = 0$ e

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}'_1|\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) = I_{1:2}(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) + \mathcal{I}(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho_1)). \quad (3.4)$$

Portanto, dois observáveis MI serão simultaneamente reais somente se os dois termos no lado direito da equação forem nulos. Esse resultado contrasta com aquele de EPR pois, ao final do artigo, os autores baseiam sua conclusão de que a MQ é incompleta justamente no fato de que eles conseguem provar, sob suas próprias premissas, que dois observáveis

³ $\Phi_{\sigma_x}(|\psi\rangle) = | + x\rangle\langle + x|\psi\rangle\langle\psi| + x\rangle\langle + x| + | - x\rangle\langle - x|\psi\rangle\langle\psi| - x\rangle\langle - x| = \frac{1}{2}(| + x\rangle\langle + x| + | - x\rangle\langle - x|)$. Como $S(|\psi\rangle) = 0$ porque o estado é puro, temos $\mathfrak{I}(\sigma_x||\psi\rangle) = S(\Phi_{\sigma_x}(|\psi\rangle)) = 2(-1/2)\ln(1/2) = \ln 2$.

incompatíveis possuem realidade simultânea, para um estado emaranhado. Aqui, esse será o caso somente se $\rho = \frac{\mathbb{1}_1}{d_1} \otimes \rho_2$, um estado totalmente descorrelacionado (pois assim $I_{1:2} = 0$), no qual o estado reduzido é maximamente misturado (o que garante que $\mathcal{I} = 0$). Sob essas circunstâncias, todos os observáveis atuando em \mathcal{H}_1 são reais simultaneamente, dando a esse tipo de estado uma essência clássica.

Note que o conceito de classicalidade aqui não tem relação com o Princípio de Incerteza de Heisenberg. Para apreciar este ponto considere a relação de Robertson-Schrödinger, $\Delta\mathcal{O}_1\Delta\mathcal{O}'_1 = |\langle[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}'_1]\rangle|/2$. Aqui, o desvio médio quadrático $\Delta\mathcal{O}_1$ refere-se à dispersão estatística de medições individuais realizadas sobre \mathcal{O}_1 em preparações idênticas. Por sua vez, $\Delta\mathcal{O}'_1$ é obtido através de outra sequência de medições individuais de \mathcal{O}'_1 . Repare que \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}'_1 não são medidos simultaneamente ou um após o outro; são obtidos em ensembles distintos (apesar de igualmente preparados). Já a medida de $\mathfrak{I}(\mathcal{O}'_1|\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho))$ diz respeito à realidade *simultânea* de \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}'_1 dado ρ . A diferença conceitual pode ser ilustrada tomando-se $\rho = \frac{\mathbb{1}}{d}$ como exemplo. Para este estado, a dispersão estatística é máxima enquanto a irrealidade é mínima, o que ocorre para todos os observáveis. Ou seja, a dispersão estatística decorre apenas da nossa ignorância subjetiva a respeito da realidade do estado, uma vez que $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) = 0$.

3.3 Realidade e Inseparabilidade

Considere a irrealidade $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho)$ do observável \mathcal{O}_1 dada a preparação ρ . Notando que $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho_2) = \rho_2$, onde $\rho_2 = \text{Tr}_1\rho$, pode-se adicionar e subtrair termos a \mathfrak{I} da seguinte maneira: $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) - S(\rho) + \left(S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho_1)) - S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho_1))\right) + \left(S(\rho_1) - S(\rho_1)\right) + \left(S(\rho_2) - S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho_2))\right)$. Rearranjando os termos, obtemos

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) = \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho_1) + D_{[\mathcal{O}_1]}(\rho), \quad (3.5)$$

sendo $D_{[\mathcal{O}_1]}(\rho) = I_{1:2}(\rho) - I_{1:2}(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho))$. A menos de uma minimização, $D_{[\mathcal{O}_1]}$ é uma medida do tipo discórdia [41–43] escrita em termos de informação mútua. $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho_1)$ pode ser vista como uma medida de *irrealidade local*, pois quantifica a irrealidade de \mathcal{O}_1 dado o estado local $\rho_1 = \text{Tr}_2\rho$. Recentemente, essa expressão foi usada para quantificar caráter

ondulatório e coerência [47, 48]. A relação (3.5) pode ser reescrita como

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) - \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho_1) \geq \mathcal{D}_1(\rho), \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{D}_1(\rho) = \min_{\mathcal{O}_1} D_{[\mathcal{O}_1]}(\rho)$ é a discórdia quântica. Isso mostra que uma quantidade \mathcal{D}_1 de correlação quântica impede que a irrealidade de \mathcal{O}_1 dada a tomografia ρ seja igual a irrealidade dada a tomografia local ρ_1 . Isso significa que a realidade de \mathcal{O}_1 não pode ser separada dos outros subsistemas, mesmo que estes estejam muito longe, o que constitui uma violação do princípio de separabilidade⁴ de Einstein [49] que aparece na definição de “localidade” no artigo de EPR.

3.4 O Problema da Medição

Nosso intuito nessa seção e na próxima é evidenciar o comportamento da nossa medida de irrealidade a fim de discutir interpretações para essa questão fundamental. A ideia é calcular as irrealidades de observáveis referentes a duas partições, as quais são postas a se correlacionar. Mas, antes disso, vamos fazer uma breve introdução ao problema.

De maneira geral, o problema da medição diz respeito à conciliação entre as previsões estatísticas da MQ com a observação de um resultado único na realização de um experimento. Porém, essa não é a única forma de formular esse problema. O primeiro obstáculo com o qual nos deparamos é que a simples tentativa de esboçar a pergunta já acaba sendo parcial. Isso ocorre pois a própria noção de vetor de estado é problemática. Anteriormente descrevemos de maneira breve que o estado $|\psi\rangle$ atribuído a um sistema quântico pode ser visto como um objeto ôntico ou epistêmico. O problema da medição trata sobre como o estado quântico reage frente a uma interação com instrumentos de medição, como ocorre o colapso (ou se de fato ocorre um colapso), de maneira a explicar como obtemos os resultados experimentais obtidos em laboratório e como, no âmbito do universo macroscópico, as estranhas características quânticas do mundo subatômico nunca são observadas. Como, nessa análise, deve-se definir certas predileções interpretativas, a própria abordagem do problema acaba definindo a visão do investigador. Por conta

⁴Esse princípio diz que cada um dos subsistemas de um sistema multipartido tem a sua própria realidade, a qual não pode ser perturbada por qualquer alteração feita em outro subsistema espacialmente separado do primeiro.

disso, ocorrem vários desdobramentos das possíveis interpretações que se pode construir a respeito dessa transição quântico-clássica, resultando em diferentes interpretações da MQ [50, 51]. Aqui queremos apenas dar uma ideia básica do problema e construir uma possível abordagem utilizando nossa medida de irrealidade.

Considere um aparato ideal o qual realiza medições confiáveis, de tal maneira que a interação entre o aparato (A) e o sistema de interesse (S) se dê unitariamente da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{U}_{SA}|\uparrow\rangle_S \otimes |\Psi(0)\rangle_A &= |\uparrow\rangle_S \otimes |up\rangle_A, \\ \hat{U}_{SA}|\downarrow\rangle_S \otimes |\Psi(0)\rangle_A &= |\downarrow\rangle_S \otimes |down\rangle_A,\end{aligned}$$

onde $|\uparrow\rangle_S$ e $|\downarrow\rangle_S$ representam possíveis estados do sistema, $|\Psi(0)\rangle_A$ o estado inicial do aparato, $|up\rangle_A$ e $|down\rangle_A$ os estados do aparato depois da interação e \hat{U}_{SA} o operador de evolução unitária atuando em ambos os subespaços. Assim sendo, caso o sistema encontre-se no estado $|\uparrow\rangle_S$, nosso aparato terminará em $|up\rangle_A$, representando uma medição bem sucedida sem alteração do estado inicial do sistema. Porém, caso o sistema encontre-se inicialmente em uma superposição de estados, o sistema evoluirá para

$$\hat{U}_{SA}(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)_S \otimes |\Psi(0)\rangle_A = \alpha|\uparrow\rangle_S \otimes |up\rangle_A + \beta|\downarrow\rangle_S \otimes |down\rangle_A,$$

de modo que o próprio aparato encontrar-se-ia em uma superposição ao final da medição. O motivo para insatisfação com essa representação é que, como notado por Zurek em [52], no mundo real, sabemos que apenas uma das possíveis alternativas ocorre. Essa descrição de forma alguma condiz com uma medição usual, na qual, ao final, o estado sempre reduz-se a um autoestado. Nesse cenário, supondo que a função de onda represente diretamente a realidade de um sistema individual (visão ôntica), ela teria que evoluir dinamicamente de seu estado inicial para um de seus autoestados. O problema é que essa transição não é descrita pela evolução unitária dada pela equação de Schrödinger [53]. Se fosse, então a teoria iria prever essa transição, e portanto, o resultado exato da medição, em contradição com o aspecto estatístico da teoria. Essa transição seria essencialmente o colapso da função de onda, o que, se assumirmos que seja um processo físico, não se esperaria que ocorresse instantaneamente, e deveria ser acessível à observação [54, 55].

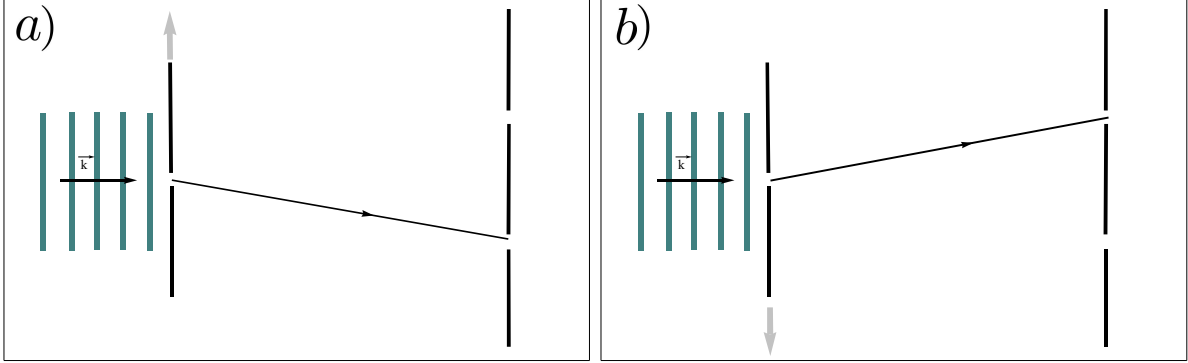


Figura 3.2: Experimento de dupla fenda concebido por Bohr [2]. A fenda simples, pela qual a partícula passa antes de atingir a dupla fenda, é leve e flutuante. Assim, se a partícula for em direção à fenda inferior, como ilustrado em *a*, a fenda deve subir (devido à conservação do momento). Se a partícula for em direção à fenda superior, como ilustrado em *b*, a fenda deve descer. Caso o movimento da fenda possa ser distinguido inequivocamente, a fenda será um informante do caminho da partícula e nenhum padrão de interferência será visto.

Problema exposto, podemos então devidamente abordá-lo. Invocamos primeiramente o teorema de Stinespring [56], $\Phi(\rho) = \text{Tr}_A(U\rho \otimes |a_0\rangle\langle a_0|U^\dagger)$, onde U é um operador unitário agindo em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ e $|a_0\rangle \in \mathcal{H}_A$. De acordo com esse teorema, qualquer operação quântica na forma Φ pode ser vista como uma redução feita em um sistema auxiliar \mathcal{A} (ancila) com o qual o sistema está relacionado e evolui unitariamente. Isso sugere que um estado com realidade definida surgiria sob uma correlação entre o sistema e um *informante*, i.e., um grau de liberdade que guarda a informação a respeito do estado físico do sistema. Tal observação está em plena sintonia com a sustentação feita na Introdução, de que é apenas através de correlações que um sistema tem sua realidade estabelecida. Para ilustrar esse ponto, revisitemos o experimento de fenda leve concebido por Bohr [2] (vide Fig. 3.2).

Esse experimento mental consiste de uma simples experiência de dupla fenda, porém com uma alteração: a fenda simples F , a qual a partícula P atravessa antes de passar pela fenda dupla, é muito leve e flutuante, i.e., sua massa é da ordem da massa da própria partícula e ela não se encontra presa rigidamente ao laboratório. Ao interagir com a fenda leve flutuante, a conservação do momento implica que, para P mover-se em direção à fenda superior (inferior), F deve mover-se para baixo (cima). Se m e M forem as massas de P e F , respectivamente, então a correlação gerada no experimento pode ser descrita pelo estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle_P |-\frac{mv}{M}\rangle + | -v\rangle_P |\frac{mv}{M}\rangle)$, onde, por simplicidade, v e mv/M —

as velocidades de P e F, respectivamente — são tratadas como variáveis discretas. Sendo v o observável associado à velocidade de P, pode-se facilmente demonstrar que $\mathfrak{J}(v|\rho_P)$, onde $\rho_P = \text{Tr}_F|\Psi\rangle\langle\Psi|$, é uma função monotonamente crescente de $x = |\langle\frac{mv}{M}| - \frac{mv}{M}\rangle|$ e que $\mathfrak{J}(v|\rho_P) = 0$ somente se $x = 0$. Isso mostra que o observável v , dado ρ_P , será real somente se o movimento de F puder ser distinguido inequivocamente, i.e., se a fenda puder ser um informante, caso em que nenhum padrão de interferência será visto. Claramente a realidade da velocidade pode ser ajustada pela razão $\frac{m}{M}$, cujo valor é escolhido previamente pelo observador (em acordo com a visão de Bohr [2]). Quando $m \ll M$ (fenda quase fixa), a conservação do momento não será capaz de revelar o caminho da partícula, de maneira que a velocidade será maximamente indefinida e o padrão de interferência será visível.

Em termos de irrealidade, quando a fenda é leve o suficiente, temos que $\mathfrak{J}(v|\rho_P) = 0$, de maneira que v é *localmente definida* e nenhuma interferência será observada. Por outro lado, $\mathfrak{J}(v||\Psi) = \mathcal{D}_P(|\Psi\rangle) = \ln 2$ (exatamente o emaranhamento em $|\Psi\rangle$), então v é *globalmente indefinida*. Mas afinal de contas, há um elemento de realidade associado a v ou não? A resposta depende de como a realidade é acessada. Em um experimento de interferência somente a partícula é monitorada, de maneira que apenas a realidade local é analisada. Se olharmos para ambas, partícula e fenda, seremos capazes de identificar as correlações, o que irá embaralhar a realidade da partícula. Muito recentemente esse experimento mental foi realizado experimentalmente [57], confirmando a visão de Bohr e a nossa também.

Ao considerar um modelo de medição, como prescrito por von Neumann [53], a diferença em relação ao exemplo dado seria que, para o ancila ser elevado a aparato de medição, ele teria que ser ‘robusto’. Isto é, ter seu estado preservado frente à sondagem (via fótons, por exemplo) de diversos observadores. Contudo, no que diz respeito à emergência de realidade, a função do aparato permanece a mesma do ancila (fenda leve no exemplo de Bohr): ser um informante, codificando informação à respeito da realidade do sistema quântico sob inspeção. O traço parcial feito sobre o estado reflete o fato de não termos acesso direto ao sistema quântico. Nesse sentido, a descoerência [58] (efeito de degradação de fase quântica induzido por infinitos graus de liberdade incontrolláveis) teria um papel irrelevante na definição da realidade de um observável, uma vez que, para estabelecer realidade, bastaria a correlação com um informante, como no exemplo da fenda leve.

Na próxima seção vamos analisar, sob essa ótica, como fica estabelecida a realidade no caso de uma medição do tipo Stern-Gerlach.

3.5 A Dinâmica de $\mathfrak{J}(\mathcal{O}_1|\rho)$

Iniciaremos aqui o estudo da realidade para diversos casos com apenas um sistema⁵, a saber: partícula livre, superposição de pacotes Gaussianos e precessão de spin. Tal análise nos dará intuição sobre o comportamento dessa medida, implicando uma melhor compreensão do caso menos trivial — em espaço de Hilbert bipartido — inspecionado mais à frente: o experimento de Stern-Gerlach.

Todas as medidas de irrealidade aqui foram normalizadas pela informação máxima $\ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert, para que variassem no intervalo entre zero e um.

3.5.1 Partícula Livre

Analisamos aqui a dinâmica da irrealidade para o simples caso de uma partícula que evolui livremente (potencial nulo). Contudo, antes de apresentarmos as contas, devemos fazer uma ressalva. As medidas de entropia utilizadas na área de Informação Quântica são definidas dentro de espaços de Hilbert discretos e de dimensão finita, pois o interesse normalmente é restrito a sistemas de qubits. Porém aqui estamos interessados em utilizar essas medidas também em espaços de Hilbert de variáveis contínuas e de dimensão infinita, mais especificamente na base de posição. Isso deve-se ao fato de que muito do que é medido em laboratório (spins, por exemplo) é feito através de medições de posição. Utilizando-se detectores de tamanho finito (δx) e, lendo as saídas obtidas por esses, é que inferimos o estado do sistema quântico de interesse. Sendo assim, uma vez que queremos incluir a resolução dos detectores na descrição formal das medições de posição, devemos estabelecer as devidas correspondências entre as grandezas do espaço contínuo usual com as do *espaço discretizado* que têm o objetivo de representar esses medidores não-infinitesimais. A

⁵Nesse estudo analisaremos a noção de realidade usando um único espaço de Hilbert. Isso de forma alguma contraria nossa argumentação inicial, pois estamos assumindo implicitamente que o observável de interesse e seu grau de realidade estão definidos em relação ao referencial do laboratório.

transformação do formalismo de variáveis contínuas para o discretizado encontra-se no apêndice A.

Considere que o estado de uma partícula de massa m é um pacote Gaussiano centrado em x e com momento médio p :

$$\langle x_k | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar} p x_k \right]$$

onde $\Delta = \Delta_0 \sqrt{1 + \frac{t^2}{4\tau_S^2}}$, sendo Δ_0 a largura inicial do pacote, $\tau_S = \frac{m\Delta_0^2}{\hbar}$ uma escala de tempo relevante, $x = x_0 + \frac{p}{m}t$, onde x_0 corresponde ao centro do pacote no instante inicial e

$$N = \delta x \sum_k \exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \right],$$

sendo $x_k = k \delta x$, com $k \in \mathbb{Z}$. A soma em k deve ser feita sobre todo o espaço do laboratório preenchido pelos detectores. Ou seja, caso haja n detectores alinhados, ocupando um espaço de comprimento l , teríamos n termos na soma, e $\delta x = l/n$.

O operador densidade assume a forma

$$\rho = \sum_{i,j} \frac{\delta x^2}{N} \exp \left[-\frac{(x_i - x)^2 + (x_j - x)^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar} p (x_i - x_j) \right] |x_i\rangle \langle x_j|,$$

e após a medição de posição

$$\Phi_X(\rho) = \frac{\delta x^2}{N} \sum_k \exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \right] |x_k\rangle \langle x_k|.$$

Como ρ é puro, $S(\rho) = 0$. Estando o estado medido já escrito na sua decomposição espectral, i.e., $\Phi_X(\rho) = \sum_k \lambda_k |x_k\rangle \langle x_k|$, sua entropia é dada por $S(\Phi_X(\rho)) = -\sum_k \lambda_k \ln \lambda_k$. Portanto, temos

$$S(\Phi_X(\rho)) = -\frac{\delta x}{N} \sum_k \exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \right] \ln \left(\exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \right] \right).$$

Calculando a irrealidade, obtemos

$$\mathfrak{I}(X|\rho) = \frac{\delta x}{N} \sum_k \frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \exp \left[-\frac{(x_k - x)^2}{\Delta^2} \right].$$

Como já comentamos anteriormente, o cálculo deve ser efetuado numericamente. Notamos que esse resultado exibe clara dependência com a largura do pacote de onda, Δ , o qual aumenta à medida que o tempo cresce. Por isso vamos mostrar sua evolução em duas figuras: na figura 3.3 encontra-se a dependência explícita com o tempo, enquanto que na figura 3.4 mostramos a dependência com o desvio padrão $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

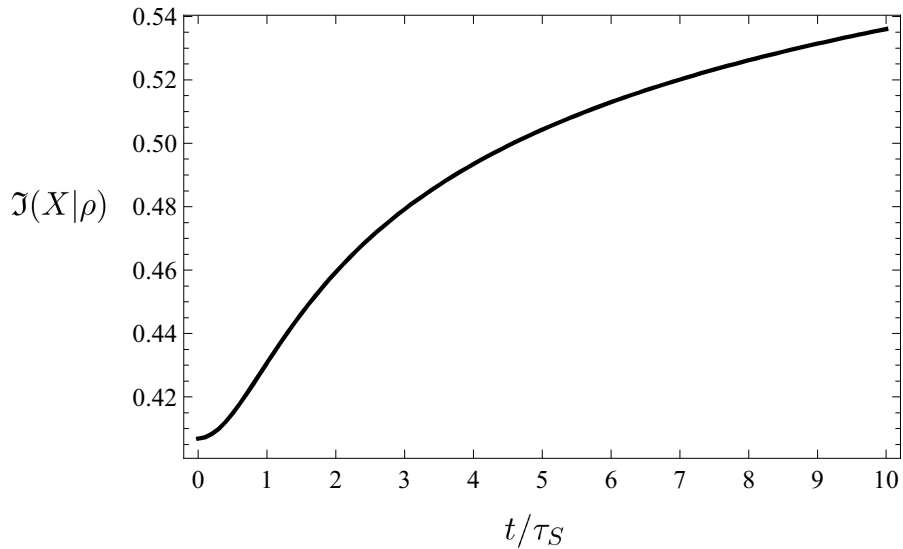


Figura 3.3: Comportamento de $\mathfrak{I}(X|\rho)$ em função do tempo adimensional t/τ_S . Os valores utilizados foram $\tau_S = 1$, $x_0 = 0$, $p = 3$ e $\delta x = 0.1$ em unidades arbitrárias.

Podemos observar em ambas que à medida que ocorre o alargamento do pacote, ou seja, a partícula vai se deslocalizando espacialmente, a irrealidade também aumenta. Isso concorda com a definição operacional de $\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho)$ que, no caso de espaço de Hilbert único, pode ser vista genericamente como uma medida de *coerência*⁶ do estado. Para apreciar melhor este ponto, calculamos a irrealidade para o estado de Werner (vide figura 3.5), $\rho_w = \frac{(1-f)}{2} \mathbb{1} + f|\phi\rangle\langle\phi|$, sendo $|\phi\rangle = a| -z\rangle + \sqrt{1-a^2}e^{i\theta}| +z\rangle$, onde $| -z\rangle$ e $| +z\rangle$ são autoestados de σ_z . f mede a fidelidade de ρ_w ao estado puro $|\phi\rangle$ ($0 \leq f \leq 1$), isto é, f

⁶Aqui, a noção de coerência está associada ao número de autoestados de posição populados, e não a estados que mantém a mesma forma durante a evolução temporal, ditos estados coerentes.

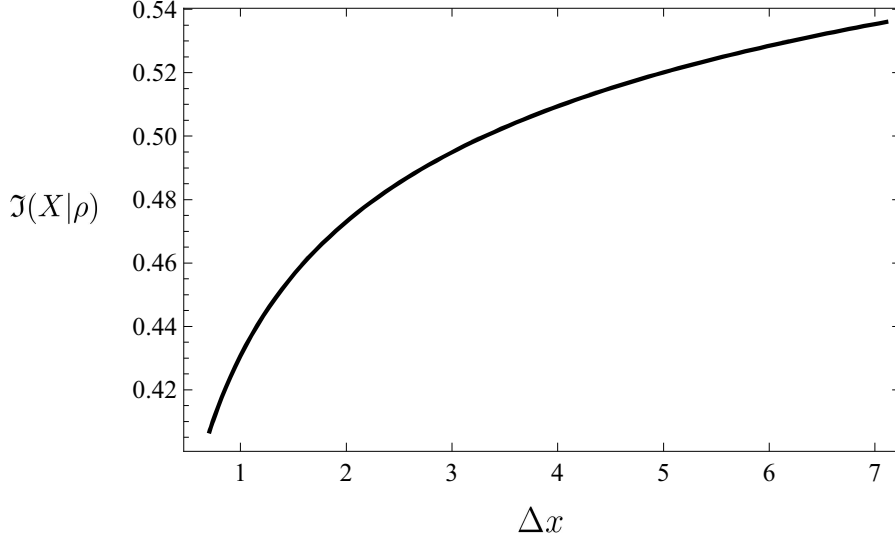


Figura 3.4: $\mathfrak{I}(X|\rho)$ vs desvio padrão. A irrealidade cresce com o desvio padrão de forma muito similar à evolução no tempo, relacionando assim seu aumento à deslocalização da partícula. Os valores utilizados foram os mesmos do gráfico anterior.

mede o ruído de ρ , pois quanto mais distante f for de 1, menor será a pureza do estado.

Para \mathfrak{I} obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_w) = & - \left(\frac{1}{2} + (1/2 - a^2)f \right) \ln \left(\frac{1}{2} + (1/2 - a^2)f \right) - \\ & - \left(\frac{1}{2} - (1/2 - a^2)f \right) \ln \left(\frac{1}{2} - (1/2 - a^2)f \right) + \\ & + \frac{1-f}{2} \ln \left(\frac{1-f}{2} \right) + \frac{1+f}{2} \ln \left(\frac{1+f}{2} \right). \end{aligned}$$

Olhando diretamente para esse resultado fica difícil analisar qual é o papel de f na irrealidade do σ_z . No entanto, ao gerar os gráficos de \mathfrak{I} em função de f notamos que a irrealidade é função crescente da fidelidade f , independentemente do valor de a utilizado. Ou seja, à medida que a coerência do estado aumenta, i.e., o valor de f tende a 1, a irrealidade também aumenta (vide figura 3.5). Além disso, se $a = 0$ ou $a = 1$ ($|\phi\rangle$ sem coerência) então $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_w) = 0$, mais um indicador de que \mathfrak{I} funciona como medida de coerência.

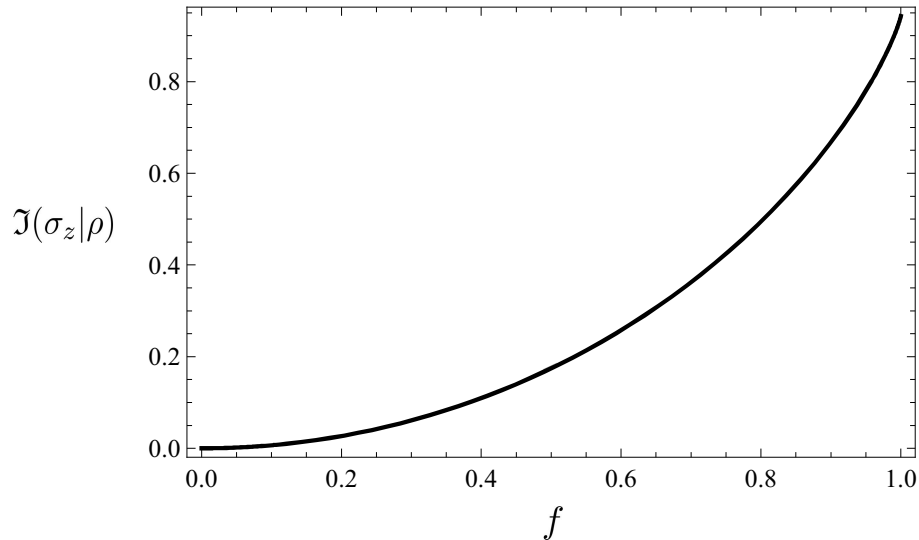


Figura 3.5: $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho)$ vs f . Independentemente do valor de a a irrealidade é função crescente de f , i.e., à medida que a coerência do estado aumenta (f tende a 1), $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho)$ também aumenta. Usamos $a = 0.6$.

3.5.2 Superposição de Pacotes Gaussianos

Familiarizados com os pormenores de $\mathfrak{I}(X|\rho)$ estamos preparados para abordar situações físicas mais interessantes. O caso da superposição de pacotes Gaussianos que vamos tratar aqui pode ser visto como um caso equivalente a uma experiência de dupla fenda. Isso porque cada pacote pode ser considerado como a porção do estado que acaba de passar por cada uma das fendas e, como veremos a seguir, os padrões de interferência que aparecem durante a evolução dos pacotes assemelham-se muito ao padrão de interferência característico dessa experiência. E finalmente, o tempo de evolução dos pacotes pode ser associado com a distância em que é colocado o anteparo onde as partículas são detectadas. Por exemplo, no caso em que o anteparo é colocado muito próximo das fendas, não há interferência. Isso é representado aqui pela separação inicial dos pacotes. À medida que o anteparo é colocado mais distante das fendas o padrão de interferência característico é melhor visualizado, o que aqui corresponde a um intervalo maior de tempo (por exemplo, $t = 2$ na figura 3.6). Feita a comparação, podemos investigar uma das experiências mais paradigmáticas da MQ, muitas vezes utilizada como exemplo introdutório às estranhas características e às dificuldades interpretativas da MQ, por conta de sua “simplicidade” experimental e complexidade conceitual. A experiência consiste em mandar partículas quânticas (o exemplo do elétron é o mais comum) igualmente preparadas, uma a uma em

direção a uma tela na qual existem duas fendas e analisar o padrão das posições em que cada partícula, após várias realizações, é detectada em um anteparo localizado atrás da tela.

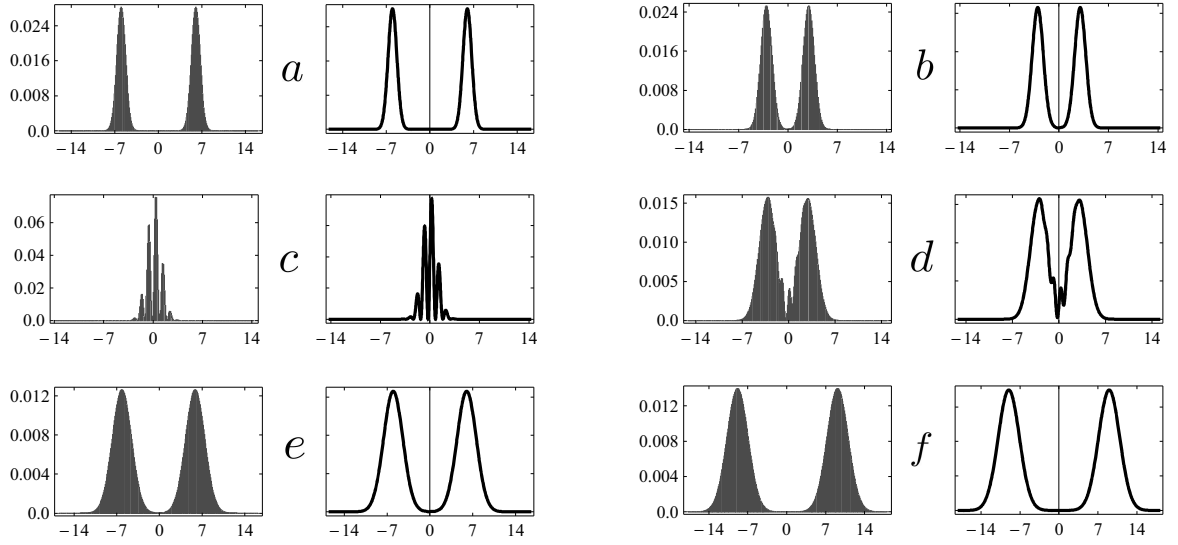


Figura 3.6: Como podemos observar, o gráfico do espaço discretizado (histogramas em cinza) reproduz muito bem aquilo que observamos no caso contínuo. Em *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* são exibidas, em unidades de τ_S , as densidades de probabilidade a tempos iguais a 0, 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Note os famosos padrões de interferência nos gráficos ao centro e o aumento na largura (‘spreading’) de cada pacote de onda depois de se cruzarem. Valores utilizados: $\tau_S = 1$, $x_0 = 6$, $p_1 = -p_2 = 3$, $\theta = \pi/2$ e $\delta x = 0.1\Delta_0$ em unidades arbitrárias.

O resultado, já muito bem conhecido, é que no anteparo forma-se um padrão de interferência típico de ondas, do que conclui-se que o elétron, ou a partícula utilizada na experiência, não é uma partícula no sentido da Mecânica Clássica, com posição e momento bem definidos.

Vamos então considerar que o estado da partícula logo após a passagem pelas fendas pode ser representado de maneira geral por uma superposição de Gaussianas com diferença de fase θ :

$$|\Psi\rangle = \frac{e^{i\theta/2}|F_1\rangle + e^{-i\theta/2}|F_2\rangle}{\sqrt{N}},$$

sendo

$$\langle x_k|F_{1,2}\rangle = \exp\left[-\frac{(x_k - x_{1,2})^2}{2\Delta^2} + \frac{i}{\hbar}p_{1,2}x_k\right],$$

onde $x_{1,2}$ é o centro de cada pacote, $p_{1,2}$ é o momento e $\Delta = \Delta_0 \sqrt{1 + \frac{t^2}{4\tau_S^2}}$ é a largura, sendo $\tau_S = \frac{m\Delta_0^2}{\hbar}$ (como no problema da partícula livre). Fizemos o gráfico da evolução da densidade de probabilidade do estado acima de duas formas: da maneira usual, utilizando o espaço contínuo e também através da quantização espacial relatada anteriormente (Fig. 3.6). Com isso poderemos perceber se, utilizando a segunda maneira, estamos perdendo algum detalhe da dinâmica do estado. Na figura 3.7 percebemos a relação da irrealidade com o desvio padrão, pois, dado nosso estudo anterior de que essas duas grandezas estão diretamente conectadas (no caso de espaço de Hilbert único) queremos analisar esse comportamento quando o estado estudado não só exibe o ‘spreading’, como também o fenômeno de interferência.

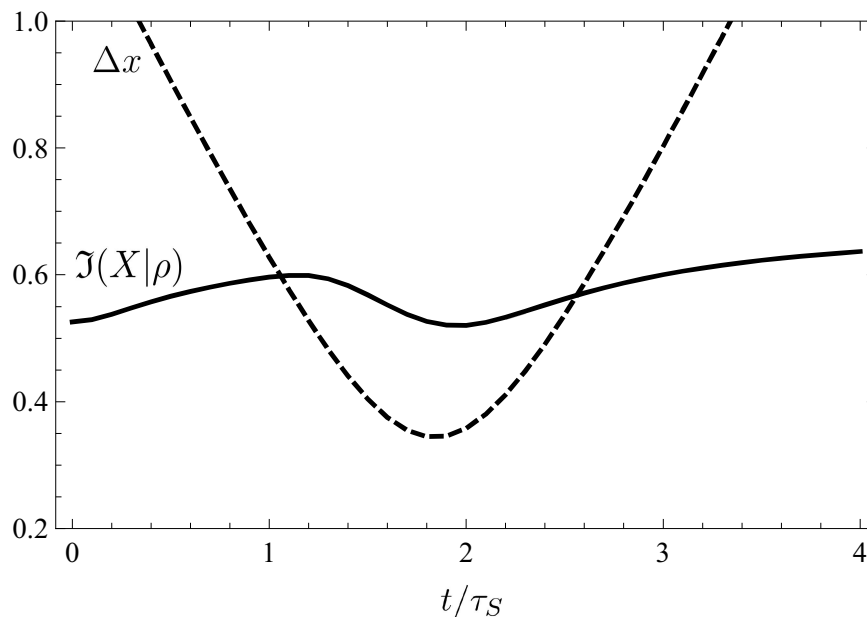


Figura 3.7: Gráficos de $\mathfrak{J}(X|\rho)$ vs t/τ_S (linha grossa) e Δx vs t/τ_S (linha tracejada). Vemos que o mínimo de $\mathfrak{J}(X|\rho)$ ocorre próximo ao mínimo no desvio padrão. Porém, como já vimos na seção 3.2, essas duas grandezas não são sinônimos (aqui vê-se que $\mathfrak{J}(X|\rho)$ pode aumentar mesmo com Δx em queda – com t/τ_S entre 0 e 1). Δx encontra-se em unidades arbitrárias.

O estado evoluído nesse caso é

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\delta x^2}{N} \sum_{k,i} \left(\exp \left[-\frac{(x_k - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_i - x_1)^2}{2\Delta_1^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_k - x_2)^2}{2\Delta_2^2} - \frac{(x_i - x_2)^2}{2\Delta_2^2} \right] + \right. \\ & + \exp \left[i\theta - \frac{(x_k - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_i - x_2)^2}{2\Delta_2^2} + \frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)x_k \right] + \\ & \left. + \exp \left[-i\theta - \frac{(x_k - x_2)^2}{2\Delta_2^2} - \frac{(x_i - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)x_k \right] \right) |x_k\rangle\langle x_i|, \end{aligned}$$

$$\text{com } \Delta_{1,2} = \Delta_0^{1,2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{4\tau_S^2}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} N = & \sum_k \delta x \left(\exp \left[-\frac{(x_k - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_k - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{(x_k - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_k - x_2)^2}{2\Delta_2^2} \right] 2\cos \left[\theta + \frac{(p_1 - p_2)}{\hbar}x_k \right] \right). \end{aligned}$$

Calculando a irrealidade do estado, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(X|\rho) = & - \sum_j \frac{\delta x}{N} \left(\exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_j - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] + \right. \\ & + \exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_j - x_2)^2}{2\Delta_2^2} \right] 2\cos \left[\theta + \frac{(p_1 - p_2)}{\hbar}x_j \right] \left. \right) \ln \left[\frac{\delta x}{N} \left(\exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \exp \left[-\frac{(x_j - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_j - x_2)^2}{2\Delta_2^2} \right] 2\cos \left[\theta + \frac{(p_1 - p_2)}{\hbar}x_j \right] \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais uma vez fica difícil concluir algo sobre a dinâmica olhando diretamente para a fórmula, por isso recorreremos à análise do gráfico da irrealidade em função do tempo, exibida na figura 3.8. Aproveitamos esse gráfico para comparar o efeito da discretização do espaço, relacionada com a escolha do valor de δx (tamanho do detector). Ao diminuirmos o seu valor estamos aumentando nossa capacidade de resolução, de maneira que o valor de $\mathfrak{J}(X|\rho)$ já começa alto. Isso ocorre pois, aumentando a resolução, a deslocalização espacial do estado fica mais evidente. Aumentar o valor de δx implica em uma menor capacidade de “enxergar” a quanticidade do sistema. No caso limite de termos apenas um grande detector ocupando todo o espaço do experimento, qualquer estado parecerá real, por mais deslocalizado que seja. Mesmo assim, à medida que o tempo passa, $\mathfrak{J}(X|\rho)$ aumenta ainda mais por conta do efeito de dispersão que deslocaliza a partícula.

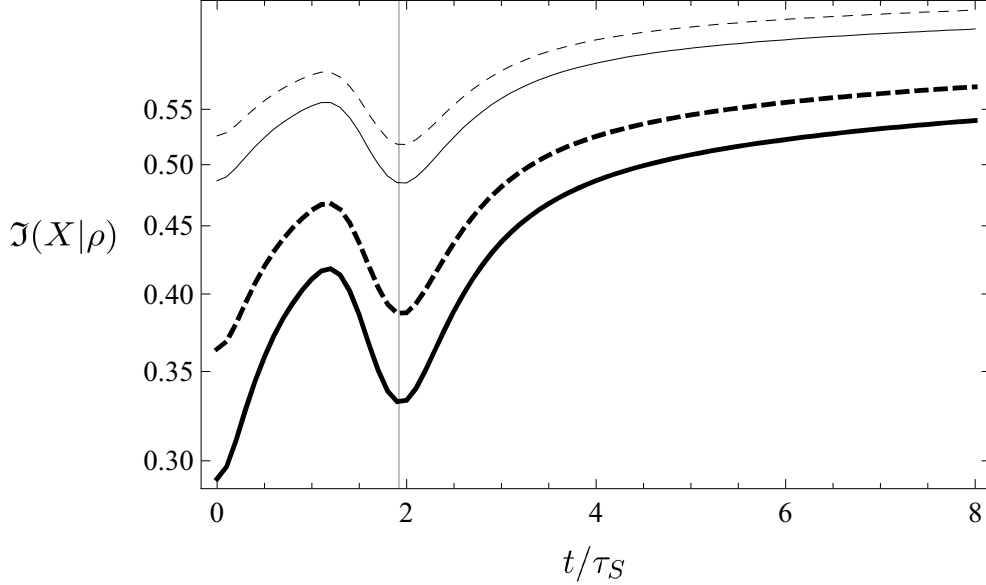


Figura 3.8: $\mathfrak{J}(X|\rho)$ em função do tempo adimensional para o caso da superposição de Gaussianas (similar à fenda dupla). De baixo para cima diminuímos o valor de δx : $\delta x = \Delta_0$ (linha grossa); $\delta x = 0.5\Delta_0$ (linha tracejada); $\delta x = 0.1\Delta_0$ (linha fina); $\delta x = 0.05\Delta_0$ (linha tracejada fina). Nota-se que a dinâmica é diferente daquela da partícula livre. Ao invés de um crescimento monotônico, vemos que em um dado momento há uma queda no caráter ondulatorio. Isso ocorre devido à ligação de $\mathfrak{J}(X|\rho)$ com o desvio padrão, como já notamos no caso anterior. Quando os pacotes de onda se aproximam, o desvio padrão vai diminuindo até atingir um mínimo e depois cresce novamente à medida que os pacotes se afastam. Paradoxalmente, o ponto em que há um mínimo de irrealdade se dá quando o padrão de interferência é mais acentuado.

Um ponto muito importante é que à medida que $\delta x \rightarrow 0$ (limite do contínuo) $\mathfrak{J}(X|\rho)$ tende a não apresentar mais nenhuma dinâmica, uma vez que seu valor satura logo de início. Porém, dado que os detectores são de tamanho finito, esse limite nunca é atingido e a medida de $\mathfrak{J}(X|\rho)$ pode ser utilizada. O importante aqui é manter δx uma ou mais ordens de grandeza menor do que a largura do pacote, ou melhor, do que o desvio padrão, a fim de capturar os detalhes de cada estado, evitando assim um diagnóstico errado no que concerne à característica do mesmo.

3.5.3 Mistura de Pacotes Gaussianos

Aproveitando o exemplo logo acima, gostaríamos de calcular a irrealidade para o caso de uma mistura de pacotes Gaussianos, escrita da seguinte forma

$$\rho = \frac{|F_1\rangle\langle F_1| + |F_2\rangle\langle F_2|}{N}, \quad (3.7)$$

sendo $|F_1\rangle$ e $|F_2\rangle$ definidos exatamente como no caso anterior. A comparação torna-se interessante pois esse estado não possui os termos fora da diagonal, os quais causam o fenômeno de interferência. Portanto, a evolução temporal da densidade de probabilidade, nesse caso, consiste apenas de duas Gaussianas cruzando-se independentemente, isto é, sem interferir uma com a outra. O estado evoluído nesse caso é

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\delta x^2}{N} \sum_{k,i} \left(\exp \left[-\frac{(x_k - x_1)^2}{2\Delta_1^2} - \frac{(x_i - x_1)^2}{2\Delta_1^2} + \frac{i p_1}{\hbar} (x_k - x_i) \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{(x_k - x_2)^2}{2\Delta_2^2} - \frac{(x_i - x_2)^2}{2\Delta_2^2} + \frac{i p_2}{\hbar} (x_k - x_i) \right] \right) |x_k\rangle\langle x_i|, \end{aligned}$$

com normalização dada por

$$N = \sum_k \delta x \left(\exp \left[-\frac{(x_k - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_k - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] \right).$$

Calculando a irrealidade do estado, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(X|\rho) = & - \sum_j \frac{\delta x}{N} \left(\exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_j - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] \right) \ln \left[\frac{\delta x}{N} \left(\exp \left[-\frac{(x_j - x_1)^2}{\Delta_1^2} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \exp \left[-\frac{(x_j - x_2)^2}{\Delta_2^2} \right] \right) \right]. \end{aligned}$$

Na figura 3.9 temos representadas as irrealidades calculadas para o estado de superposição (já apresentado na seção anterior) e para o estado de mistura. Note que os valores a cada instante de tempo são próximos, porém a irrealidade do estado de superposição é menor em parte da evolução. Isso ocorre pois a interferência faz com que haja uma atenuação nas populações de vários estados, implicando em um valor menor para \mathfrak{J} .

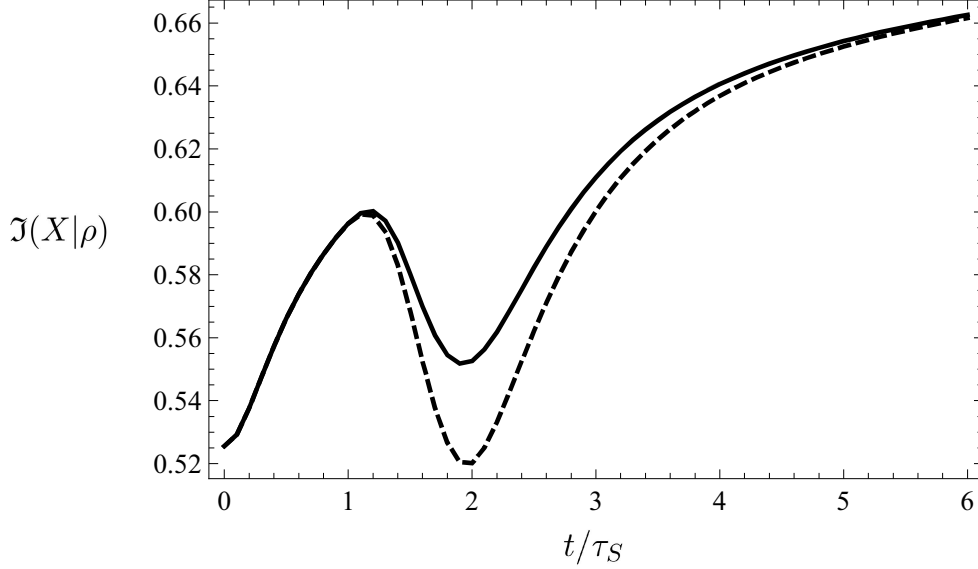


Figura 3.9: A linha cheia representa a dinâmica da irrealidade da mistura enquanto a linha tracejada, a da superposição (em ambos $\delta x = 0.1\Delta_0$). Podemos observar que, quando a sobreposição de Gaussianas é pequena, não há diferença entre as irrealidades. Já quando a sobreposição torna-se considerável, a irrealidade da mistura fica maior. Isso deve-se ao fato de que a interferência faz com que haja uma atenuação nas populações de vários estados, o que, por sua vez, diminui o valor de $\mathfrak{I}(X|\rho)$.

3.5.4 Precessão de Spin

Fugindo um pouco dos casos em que devemos fazer a discretização, vamos analisar como é a dinâmica de \mathfrak{I} em um espaço de Hilbert de dimensão 2. Isso é interessante pois assim não precisamos nos preocupar com a escolha de δx , a qual definiria o grau de resolução com que observamos a dinâmica.

Considere uma partícula dotada de spin 1/2 imersa em um campo magnético B . O Hamiltoniano é dado por $H = -\gamma\vec{S} \cdot \vec{B}$. Considerando que o campo é constante e na direção z e o estado inicial é

$$|\psi(0)\rangle = \frac{(|+z\rangle + |-z\rangle)}{\sqrt{2}},$$

temos que o estado a tempo t fica

$$|\psi(t)\rangle = \frac{[\exp(\frac{i}{2}\gamma Bt)|+z\rangle + \exp(-\frac{i}{2}\gamma Bt)|-z\rangle]}{\sqrt{2}}.$$

Calculando a irrealidade para o observável σ_x (spin na direção x) obtemos

$$\mathfrak{I}(\sigma_x|\rho(\tau)) = -\sin^2\tau \ln(\sin^2\tau) - \cos^2\tau \ln(\cos^2\tau),$$

onde $\tau = \frac{\gamma B t}{2}$ é um parâmetro adimensional dependente do tempo. Já para σ_y (spin na direção y), temos

$$\mathfrak{I}(\sigma_y|\rho(\tau)) = -\left(\frac{1 - \sin 2\tau}{2}\right) \ln\left(\frac{1 - \sin 2\tau}{2}\right) - \left(\frac{1 + \sin 2\tau}{2}\right) \ln\left(\frac{1 + \sin 2\tau}{2}\right).$$

A evolução de ambos encontra-se na figura 3.10, na qual notamos um claro exemplo do efeito estudado na seção 3.2. Por se tratarem de observáveis maximamente incompatíveis (MI), nos tempos em que ocorre um mínimo de irrealidade de σ_x observa-se um máximo de irrealidade de σ_y . Já a irrealidade de σ_z permanece inalterada durante toda a evolução pois a precessão ocorre exatamente em torno do eixo z .

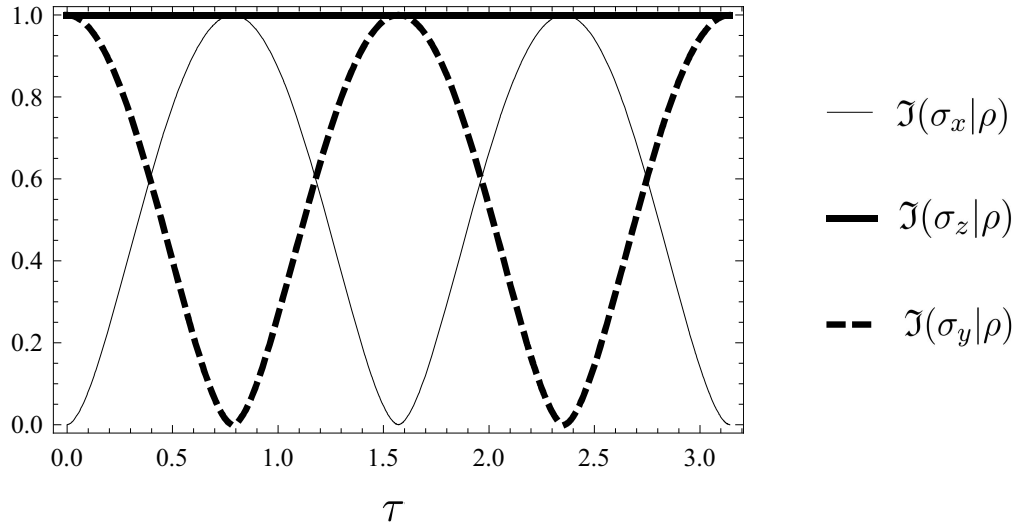


Figura 3.10: Irrealidades dos três operadores de Pauli em função do tempo adimensional τ . $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho)$ (linha grossa), $\mathfrak{I}(\sigma_x|\rho)$ (linha fina) e $\mathfrak{I}(\sigma_y|\rho)$ (linha tracejada). Note que, para $\mathfrak{I}(\sigma_x|\rho)$, inicialmente a irrealidade é nula, pois começamos com um autoestado de σ_x (superposição na base de σ_z) e depois a irrealidade aumenta à medida que o estado distancia-se de um autoestado, voltando a anular-se nos tempos em que o estado volta à situação inicial. Os mínimos de irrealidade para cada observável ocorrem quando o estado encontra-se em um autoestado do mesmo observável. Como σ_x e σ_y são MI, o máximo de um corresponde ao mínimo do outro, sendo um exemplo claro do conceito exposto na seção 3.2. $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho)$ é constante pois a precessão do estado é em torno de z , o que mantém a irrealidade inicial inalterada.

3.5.5 Stern-Gerlach

Até agora tratamos de casos envolvendo apenas um sistema quântico, buscando saber quais os parâmetros envolvidos na dinâmica da realidade frente a uma evolução unitária. Nessa seção buscamos uma abordagem para o problema da medição. Queremos analisar o comportamento de \mathfrak{J} frente ao processo de interação entre dois sistemas de maneira a tentar modelar uma medição. Escolhemos aqui tratar de uma medição de Stern-Gerlach, um dos experimentos mais importantes de MQ, no qual ficou demonstrado a existência de um momento angular intrínseco (o spin) do elétron [59]. O experimento consiste em enviar átomos de prata com momento angular orbital nulo por uma região de campo magnético não uniforme e verificar a deflexão espacial sofrida pelos átomos em um anteparo composto por vários detectores. São dois graus de liberdade relevantes na descrição do experimento, quais sejam o spin do elétron e o grau de liberdade espacial. Consideramos que o estado inicial é separável e que evolui unitariamente para um estado emaranhado, de forma que informação a respeito do spin possa ser deduzida a partir de uma análise da parte espacial, a qual efetivamente é acessada pelo detector no anteparo.

Consideramos que o estado inicial é um produto tensorial de um pacote Gaussiano com uma superposição de autoestados de $\hat{\sigma}_z$

$$\langle z|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{(\pi\Delta^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{2\Delta^2}\right] (\alpha|+z\rangle + \beta|-z\rangle),$$

e que a interação é dada pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{P_z^2}{2m} - f\sigma_z Z,$$

onde P_z é o operador momento, σ_z é o operador de Pauli, ambos na direção z , Z é o operador posição, m é a massa e $f = \mu\frac{\partial B}{\partial z}$, sendo μ o momento magnético e B o campo magnético. De acordo com a evolução de Schrödinger, o estado do sistema num instante t arbitrário é dado por

$$\langle z|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{f^2}{6m}t^3\right) \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/2}\Delta\left(i\frac{t}{\tau_S} + 1\right)}} \left[\phi_+(z,t)\alpha|+z\rangle + \phi_-(z,t)\beta|-z\rangle \right],$$

sendo

$$\phi_{\pm}(z, t) = \exp \left[\frac{- \left(\frac{(z-z_0)}{\Delta} \mp \frac{t^2}{2T^2} \right)^2}{2 \left(i \frac{t}{\tau_S} + 1 \right)} \pm \frac{i}{\hbar} f z t \right],$$

em que $\tau_S = m\Delta^2/\hbar$ é uma escala de tempo relacionada ao ‘spreading’ e $T = \sqrt{m\Delta/f}$ uma escala associada ao afastamento do centro do pacote de onda. Note que $\phi_+(z, 0) = \phi_-(z, 0)$. Os passos matemáticos utilizados para chegarmos nesse resultado foram omitidos pois, embora simples, são tediosos⁷. Com isso calculamos as irrealidades de σ_z e de Z respectivas a cada uma das partições $\rho_S = \text{Tr}_E \rho$ e $\rho_E = \text{Tr}_S \rho$, sendo o subscrito S referente a spin e E referente a “espacial”.

$$\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_S) = -|\alpha|^2 \ln |\alpha|^2 - |\beta|^2 \ln |\beta|^2 + \lambda_1 \ln \lambda_1 + (1 - \lambda_1) \ln(1 - \lambda_1),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(Z|\rho_E) = & - \frac{\delta z}{N_d} \sum_i \left(|\alpha|^2 |\phi_+(z_i, t)|^2 + |\beta|^2 |\phi_-(z_i, t)|^2 \right) \ln \left[\frac{\delta z}{N_d} \left(|\alpha|^2 |\phi_+(z_i, t)|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. |\beta|^2 |\phi_-(z_i, t)|^2 \right) \right] + \lambda_1 \ln \lambda_1 + (1 - \lambda_1) \ln(1 - \lambda_1), \end{aligned}$$

sendo

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\alpha|^2 |\beta|^2 \left(\exp \left[-\frac{f^2 t^2}{2} \left(\frac{4\Delta^2}{\hbar^2} + \frac{t^2}{m^2 \Delta^2} \right) \right] - 1 \right)}.$$

A dinâmica desses resultados encontra-se na figura 3.11.

Note que $\lambda_1(t)$ contém toda a evolução temporal de $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_S)$. Caso $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ teríamos $\lambda_1(t) = 1$, implicando que a irrealidade do spin manteria seu valor inicial inalterado. Em particular, caso $f = 0$, além de o mesmo ocorrer, o estado a tempo t seria separável, pois $\phi_+(z, t) = \phi_-(z, t)$. No limite em que $t \rightarrow \infty$, $\lambda_1 \rightarrow 1/2 + \sqrt{1/4 - |\alpha|^2 |\beta|^2}$, o que explica o comportamento assintótico de $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_S)$.

Importante notar nos resultados que a parte de spin da partícula tende a ter sua

⁷Nessa derivação, para separar as exponenciais, usamos a fórmula de Zassenhaus [60], que é consequência direta do teorema de Baker–Campbell–Hausdorff (BCH).

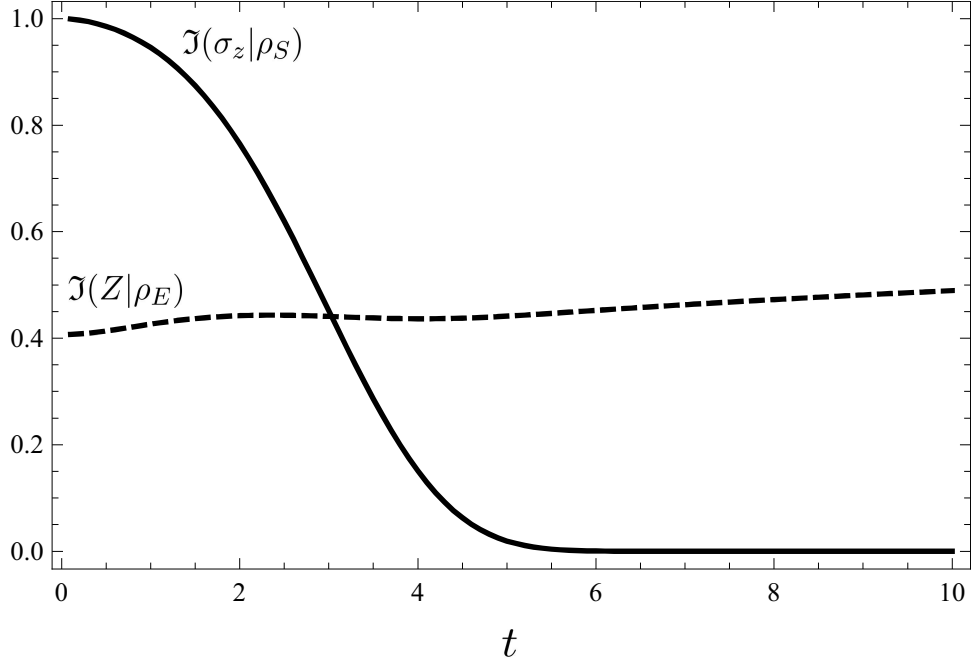


Figura 3.11: $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_S)$ vs t (linha cheia) e $\mathfrak{I}(Z|\rho_E)$ vs t (linha tracejada), com t em unidades arbitrárias. Pode-se dizer que a pré-medição foi bem sucedida, uma vez que o $\mathfrak{I}(\sigma_z|\rho_S)$ tende a zero, ou seja, sua realidade local fica bem definida. Já o $\mathfrak{I}(Z|\rho_E)$ tende a aumentar por conta do alargamento do pacote, como foi visto no caso da partícula livre. Note que há um mínimo em $\mathfrak{I}(Z|\rho_E)$ em $t = 4, 1$.

realidade definida após esperarmos tempo suficiente para que haja uma correlação bem estabelecida. Já a parte espacial tende a ter um aumento de irrealidade à medida que ocorre o ‘spreading’ do pacote de onda, porém sem grande variação em relação à irrealidade do estado inicial, a princípio bem localizado. O ponto crucial aqui é o seguinte: em um processo de medição, fundamentalmente *não temos acesso direto ao sistema de interesse* (o spin, nesse caso específico). Por isso é necessário a correlação do sistema com um ‘ponteiro’, o qual funciona como informante (o grau de liberdade espacial, no exemplo), codificando informação à respeito do sistema. O último passo da medição seria a análise do estado local do ponteiro, o qual, estando devidamente correlacionado ao sistema, nos permite inferir o estado deste. Mas para que essa análise do ponteiro seja possível, é necessário que ele seja composto de estados experimentalmente discerníveis. Para elucidar esse ponto, vamos olhar diretamente para o estado do nosso ponteiro. De forma simplificada, o estado global pode ser escrito na forma $|\Psi(t)\rangle = \alpha|\phi_+(t)\rangle|+z\rangle + \beta|\phi_-(t)\rangle|-z\rangle$, o que nos permite escrever o operador densidade da parte espacial como $\rho_E = |\alpha|^2|\phi_+(t)\rangle\langle\phi_+(t)| + |\beta|^2|\phi_-(t)\rangle\langle\phi_-(t)|$. Essencial-

mente, $|\phi_+(t)\rangle$ e $|\phi_-(t)\rangle$ são duas Gaussianas se deslocando em sentidos contrários (vide figura 3.12), uma associada ao spin na direção positiva do eixo z , e outra associada ao spin negativo. A partir do momento em que a sobreposição dos pacotes de onda torna-se muito pequena, i.e., seus estados ficam praticamente ortogonais, poderíamos definir o spin da partícula apenas determinando a sua posição através de detectores em um anteparo.

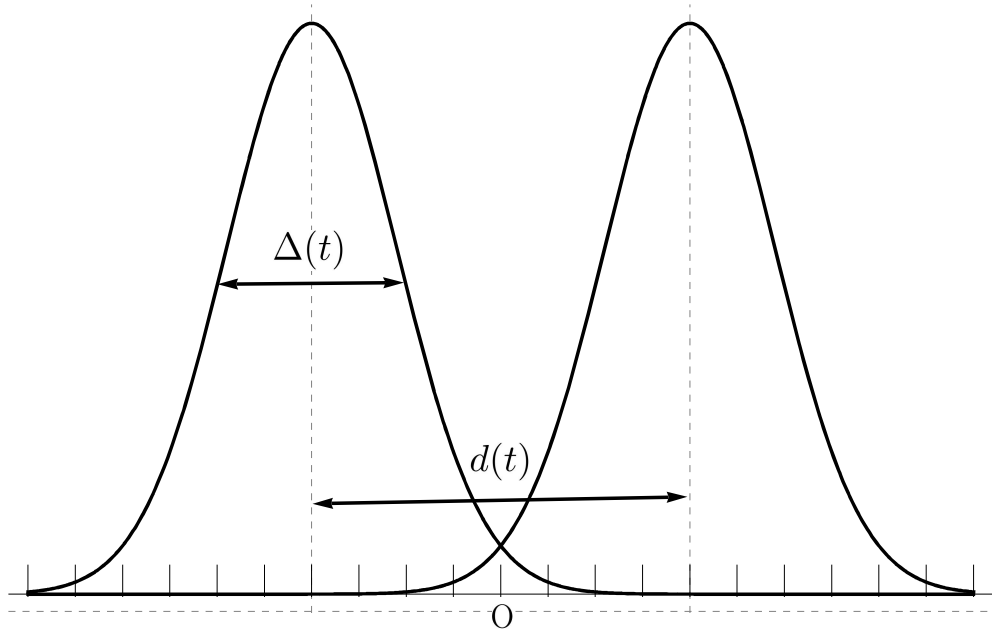


Figura 3.12: Cada Gaussiana representa a parte espacial associada ao spin (direções “cima” ou “baixo”). Comparando $\Delta(t)$, que é a largura de cada pacote de onda, com $d(t)$, a distância entre seus centros, determinamos o tempo a partir do qual os estados tornam-se discerníveis. Isso ocorre quando $d(t) > \Delta(t)$. Caso a detecção ocorresse em um dos detectores da região em que a sobreposição ainda é apreciável, não poderíamos definir qual é o spin da partícula.

Olhando a figura 3.12, definimos que, para todos os efeitos práticos, os estados serão discerníveis quando $d(t) > \Delta(t)$, sendo $d(t) = \Delta_0 \frac{t^2}{T^2}$ a distância entre os centros dos pacotes de onda e $\Delta(t) = \Delta_0 \sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau_S^2}}$ a largura de cada pacote. Resolvendo essa inequação obtemos o tempo a partir do qual o spin pode ser determinado através da detecção da posição da partícula, sendo ele

$$t > \frac{T^2}{\tau_S} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau_S^4/T^4}}{2}} = t_R, \quad (3.8)$$

resultado escrito em termos das escalas de tempo que apareceram logo acima, $\tau_S = m\Delta^2/\hbar$ e $T = \sqrt{m\Delta/f}$. O subscrito ‘R’ deve-se ao fato que t_R seria o tempo a partir do qual

a posição (entendida na base $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle\}$) seria real. Temos aqui uma clara prescrição de quanto tempo o experimentalista deve esperar para efetuar uma medição de spin bem sucedida. Para um tempo de voo da partícula maior do que t_R , o emaranhamento entre as partes é máximo, pois $\langle\phi_+(t_R)|\phi_-(t_R)\rangle \approx 0$. Nessa condição, ao encontrar a partícula em um detector localizado acima do ponto em que ela foi inicialmente lançada, teríamos certeza de que seu spin é positivo, por exemplo.

Em resumo, a interação duraria um tempo finito, ao final do qual, caso os estados da parte espacial sejam discerníveis ($t_{voo} > t_R$), teríamos uma pré-medição bem sucedida. O termo ‘pré-medição’ ao invés de ‘medição’ refere-se ao fato de que estamos apenas dando conta de como seria possível, através de interação unitária, explicar o emaranhamento dos subsistemas, porém sem realmente explicar como um estado inicial de superposição daria a saída única (para cima ou para baixo) observada em laboratório. Levando-se em conta o estado global, a realidade dos observáveis em questão não está bem definida. Esse caso é análogo ao da fenda leve que discutimos anteriormente pois o estado de posição da partícula não é ‘robusto’, i.e., não pode ser sondado via fótons por vários observadores e manter seu estado preservado. Assim, precisamos de um conjunto de detectores, estes sim com graus de liberdade robustos, com posição e velocidade bem definidas, e um grau de liberdade interno ($\{0, 1\}$), correspondendo à ‘átomo não-detectado’ e ‘átomo detectado’, respectivamente, que funciona como informante. Incluindo mais N subsistemas, cada um correspondendo a um microdetector (que reagiria à interação com a prata), o estado final do sistema composto por detectores, átomo e spin ainda seria puro e emaranhado. Já o estado reduzido dos N detectores seria da forma

$$\text{Tr}_{S,E} \rho = |1, 0, \dots, 0\rangle\langle 1, 0, \dots, 0| + |0, 1, \dots, 0\rangle\langle 0, 1, \dots, 0| + \dots + |0, 0, \dots, 1\rangle\langle 0, 0, \dots, 1|.$$

O traço parcial representa o fato de que as partições de spin e de posição são fundamentalmente inacessíveis. O estado diretamente acessível ao observador é o estado reduzido dos N detectores que, como vemos, é uma mistura estatística. O cálculo de irrealidade neste caso mostra que a energia interna (base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) de todos os detectores é real, pois o estado reduzido é do tipo $\Phi(\rho)$. Portanto, a leitura desse estado de energia pelo observador, isto é, a ação última que produz a saída única (o colapso), constitui mera atualização de informação. Ao lermos a posição da partícula no detector, temos apenas uma informação sobre uma realidade que já está definida. Este passo, o da atualização

de informação (colapso), não é descrito pela evolução unitária (determinística) de Schrödinger. Trata-se de uma limitação de qualquer descrição estatística — seja a MQ, seja a teoria clássico-estatística Liouvilliana — que não inclua o observador como parte da teoria.

Medida de Não-localidade

A partir do conceito de irrealidade, desenvolvido no capítulo anterior, propomos também uma maneira de medir a *não-localidade* de um par de observáveis dado um estado quântico. Como veremos a seguir, nossa definição surge naturalmente do formalismo proposto, notando-se que a definição de elementos de realidade em uma dada localidade pode afetar a realidade de observáveis em outra localidade separada espacialmente da primeira.

4.1 Não-localidade a partir de Irrealidade

Como vimos na seção 2.2, a noção de não-localidade está diretamente associada a violações da desigualdade de Bell, i.e., dado que um estado viole uma desigualdade, ele é dito não-local. Também é possível mostrar que previsões da MQ são incompatíveis com aquelas feitas por uma teoria local através de simples contradições lógicas que não envolvem qualquer tipo de desigualdade (veja os artigos de Greenberger, Horne e Zeilinger [61] e de Lucien Hardy [62]). Contudo, o que esses trabalhos exibem - assim como violações de Bell - são apenas *testemunhas* de não-localidade, ou seja, medidas que respondem de forma binária se há ou não não-localidade. Outra questão relevante é como medir a quantidade de não-localidade em um dado estado. Em geral, a abordagem é feita em termos de uma maximização de medidas de desigualdade de Bell (veja [6] para uma revisão desses trabalhos). Nossa abordagem, porém, vai na contramão da aproximação usual, baseando-se apenas na medida de irrealidade definida no capítulo passado.

Considere um cenário do tipo EPR, no qual dois subsistemas, 1 e 2, são preparados em um estado ρ , e em seguida são separados, sendo mandados a dois laboratórios afastados um do outro por uma distância d . Um sistema auxiliar A , preparado em um estado inicial $\rho_A = |a_0\rangle\langle a_0|$ é posto a interagir localmente com o subsistema 2, através de uma interação unitária $U_{2A}(t)$. Vamos supor que a interação entre o sistema auxiliar e o subsistema 2 seja do tipo $U_{2A}(\tau)|o_{2k}\rangle|a_0\rangle = |o_{2k}\rangle|a_k\rangle$, sendo τ o tempo necessário para que informação a respeito de 2 seja armazenada nos $\{|a_k\rangle\}$, os quais formam uma base ortonormal. Depois de a interação ocorrer, o estado global do sistema fica $\varrho(\tau) = U_{2A}(\tau)\rho \otimes \rho_A U_{2A}^\dagger(\tau)$. Vamos assumir aqui que $d \gg c\tau$, onde c é a velocidade da luz. Ou seja, a interação se completa antes que qualquer informação referente a ela possa chegar à localidade onde o subsistema 1 se encontra. Definimos então a seguinte medida de não-localidade:

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, U_{2A}|\rho) \equiv \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\text{Tr}_A\varrho(0)) - \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\text{Tr}_A\varrho(\tau)). \quad (4.1)$$

Claramente, a medida revela alterações na realidade de \mathcal{O}_1 depois de ocorrer a interação na localidade remota. Efetuando o traço no sistema auxiliar temos $\text{Tr}_A\varrho(0) = \sum_a \langle a|\rho \otimes \rho_A|a\rangle = \rho$. E também, $\text{Tr}_A\varrho(\tau) = \sum_a \langle a|U_{2A}|a_0\rangle\rho\langle a_0|U_{2A}^\dagger|a\rangle = \Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)$, o que nada mais é que a aplicação do teorema de Stinespring. Assim, chegamos a

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho) = \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\rho) - \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)), \quad (4.2)$$

a qual representa a diferença de irrealidade do observável \mathcal{O}_1 antes e depois da medição do observável \mathcal{O}_2 na localidade remota, dada uma preparação ρ . Escrevendo em termos de entropia podemos notar que essa medida é invariante sob troca de índices, $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) + S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)) - S(\Phi_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}(\rho)) - S(\rho)$. Outra propriedade é que $\mathcal{N} = 0$ para qualquer par de observáveis quando o estado é totalmente decorrelacionado, $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$, como esperado. Já para uma soma convexa do tipo $\sum_i p_i \rho_1^{(i)} \otimes \rho_2^{(i)}$ — mesmo apresentando emaranhamento nulo — a não-localidade é diferente de zero (veja a Fig. 4.1 na seção seguinte). Interessante notar que, ao apresentar essa medida, não estamos assumindo nenhuma condição nova, ou introduzindo outro conceito que já não propusemos ao definir a medida de irrealidade (3.3). Uma vez estabelecido o protocolo tomográfico, base do nosso formalismo, essa noção de não-localidade surge de forma muito natural. A seguir vamos fazer uma extremização dessa medida e verificar seus desdobramentos.

4.2 Não-localidade Mínima

Definimos também a *não-localidade mínima* de uma preparação ρ , otimizando a medida acima sobre o par de observáveis $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$:

$$\mathcal{N}_{min}(\rho) \equiv \min_{\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\}} \mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho). \quad (4.3)$$

A motivação para tal definição é estabelecer que tipos de estados são capazes de exibir não-localidade independentemente dos observáveis que se queira medir. Isto é, se $\mathcal{N}_{min} > 0$, não existirá par de observáveis capaz de acusar ausência de aspectos não-locais. Além disso, mostramos que essa medida tem uma conexão direta com a discórdia global [43], através do seguinte resultado.

Teorema. *Para qualquer preparação $\rho \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, vale que $0 \leq \mathcal{N}_{min}(\rho) \leq \mathcal{D}_{12}(\rho)$. Em particular, se ρ é puro, então $\mathcal{N}_{min}(\rho) = 0$.*

A prova se encontra no apêndice B.

Vamos ilustrar o comportamento de \mathcal{N}_{min} para duas preparações específicas de estados de dois qubits, a saber, o estado α

$$\rho_\alpha = \frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}{4} + \frac{\alpha}{4}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2) + \frac{2\alpha-1}{4}\sigma_3 \otimes \sigma_3, \quad (4.4)$$

e o estado de Werner

$$\rho_W = \frac{(1-f)}{4}\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + f|s\rangle\langle s|, \quad (4.5)$$

onde f mede a fidelidade de ρ_W com o singlete $|s\rangle$. As expressões analíticas foram obtidas da seguinte forma. Em um espaço de Hilbert de dimensão 2, um operador qualquer pode ser escrito em termos de dois projetores ortogonais dados por $P^\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \hat{v} \cdot \vec{\sigma})$, onde \hat{v} é um versor arbitrário e $\vec{\sigma}$ é o operador de Pauli. Para o cálculo de $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$, por exemplo, ficaríamos com $\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) = P_1^+ \rho P_1^+ + P_1^- \rho P_1^-$, com $P_1^\pm \in \mathcal{H}_1$. Com isso, obtemos uma expressão para $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho)$ em termos de f e dos parâmetros dos versores $\hat{v}_1 = \hat{v}_1(\phi_1, \theta_1)$ e $\hat{v}_2 = \hat{v}_2(\phi_2, \theta_2)$. Tal expressão não será exibida aqui por ser muito extensa e não se

apresentar significativa à discussão. Apresentamos aqui o resultado final do cálculo:

$$\mathcal{N}_{min}(\rho_\alpha) = \text{Min} \left[f \ln f + (1+f)(\ln 2 - \ln(1+f)), \right. \\ \left. \frac{1}{2}(f \ln 4 + (f-1) \ln(1-f) - (1+f) \ln(1+f)) \right],$$

$$\mathcal{N}_{min}(\rho_W) = -\frac{(1-f)}{2} \ln \left(\frac{1-f}{4} \right) - (1+f) \ln \left(\frac{1+f}{4} \right) + \frac{(1+3f)}{4} \ln \left(\frac{1+3f}{4} \right) - \ln 4.$$

Esses resultados são mostrados na Fig. 4.1 juntamente com os resultados da discórdia global \mathcal{D}_{12} e o emaranhamento E (calculado via concorrência).

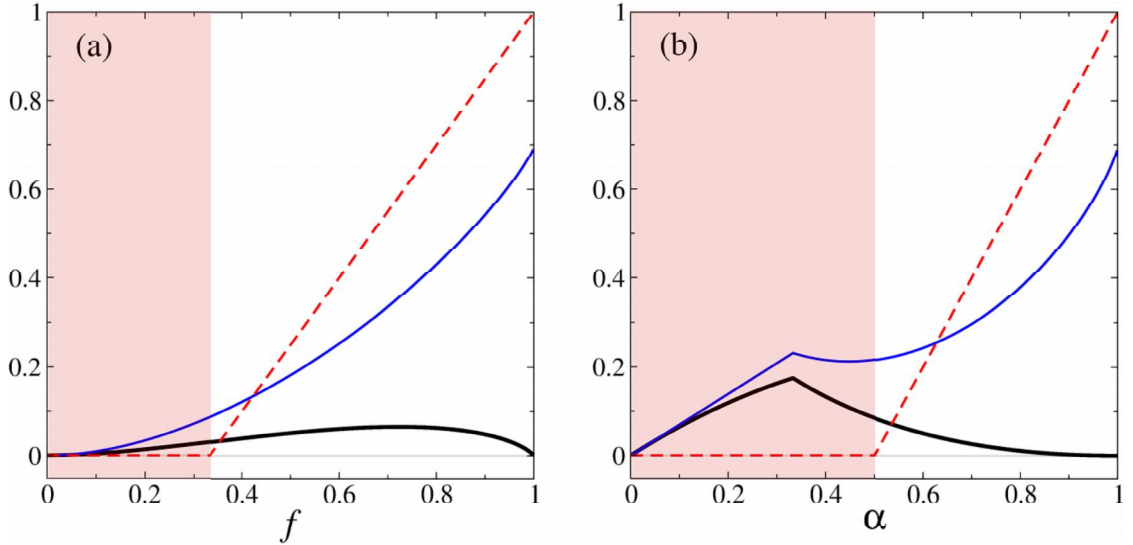


Figura 4.1: Não-localidade mínima \mathcal{N}_{min} (linha grossa), discórdia global \mathcal{D}_{12} (linha fina) e emaranhamento E (linha tracejada) para (a) ρ_W e (b) ρ_α . Na área hachurada, $E = 0$ enquanto que $\mathcal{N}_{min} \geq 0$.

Gostaríamos de enfatizar dois pontos importantes. Primeiro, diferentemente da não-localidade de Bell, \mathcal{N}_{min} pode existir mesmo sem a presença de emaranhamento. Devemos alertar que já existem trabalhos em que há exemplos de não-localidade sem emaranhamento, como em [63–67]. Aqui, tal fato sugere uma analogia interessante: \mathcal{N}_{min} engloba aspectos não-locais aos quais a não-localidade de Bell é insensível, assim como a discórdia quântica consegue detectar correlações invisíveis às medidas de emaranhamento. Segundo, \mathcal{N}_{min} é nulo para estados puros ($f = \alpha = 1$). Isso não significa que estados

puros impedem a existência de não-localidade, mas que existe pelo menos um par de observáveis para os quais a não-localidade desaparece. De fato, não é difícil demonstrar que, se tomarmos os observáveis \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 cujos autoestados definem a base de Schmidt, então $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 || \psi) = E(|\psi\rangle)$, onde $E(|\psi\rangle) = -\text{Tr}_1(\rho_1 \ln \rho_1)$, sendo $\rho_1 = \text{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi|$, nos dá o emaranhamento. Segue a prova. Um estado puro em termos de sua decomposição de Schmidt é escrito $|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle |k\rangle$, sendo o primeiro $|k\rangle$ referente ao subespaço 1 e o segundo $|k\rangle$, ao subespaço 2. Portanto, seu operador densidade fica $\rho = \sum_{k,k'} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k'}} |k\rangle |k\rangle \langle k' | \langle k'|$. Escrevendo a não-localidade em termos de entropia temos:

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 || \psi) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) - S(\rho) - \left(S(\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}(\rho)) - S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)) \right).$$

Efetuada medições projetivas no subespaço 2 temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho) &= \sum_j |j\rangle \langle j | \rho | j\rangle \langle j| \\ &= \sum_{k,k',j} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k'}} \delta_{j,k} |k\rangle \langle k' | \delta_{k',j} \\ &= \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k | \langle k | \langle k|. \end{aligned}$$

Similarmente, obtemos $\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}(\rho) = \Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho) = \Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)$. Assim, tem-se que $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 || \psi) = S(\sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k | \langle k | \langle k|) = -\sum_k \lambda_k \ln \lambda_k$. Agora, para calcular o emaranhamento de ρ , devemos primeiro obter ρ_1 :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Tr}_2 \rho \\ &= \sum_j \langle j | \rho | j\rangle \\ &= \sum_{j,k,k'} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k'}} \delta_{j,k} |k\rangle \langle k' | \delta_{k',j} \\ &= \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $E(|\Psi\rangle) = S(\rho_1) = -\sum_k \lambda_k \ln \lambda_k = \mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 || \psi)$.

Um exemplo que podemos usar para sublinhar a mensagem central aqui é o singlete $\rho_s = |s\rangle \langle s|$. Por cálculo direto mostra-se que $\mathcal{N}(\sigma_{1r}, \sigma_{2r'} | \rho_s) = \delta_{r,r'} E(|s\rangle)$, onde $r, r' =$

x, y, z e $\delta_{r,r'}$ é a delta de Kronecker. Isso indica que aspectos não-locais aparecem quando olhamos para pares de observáveis em que o emaranhamento foi codificado, ou seja, nos observáveis que definem a base de Schmidt. Nenhuma não-localidade é detectada quando olhamos para um par MI, quando um deles compõe a base de Schmidt. Isso explica porque $\mathcal{N}_{min}(|\psi\rangle) = 0$ e enfatiza que \mathcal{N}_{min} é conceitualmente diferente da discórdia, que se reduz ao emaranhamento para estados puros.

4.3 Mecanismo Gerador de Não-localidade

Vamos enfatizar aqui uma propriedade da Eq. (4.2) que é de suma importância:

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 | \Phi_{\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_2)}(\rho)) = 0. \quad (4.6)$$

Para constatar isso basta escrever $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 | \rho) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)) + S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)) - S(\Phi_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}(\rho)) - S(\rho)$ e fazer a substituição $\rho \rightarrow \Phi_{\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_2)}(\rho)$. Isso implica que a não-localidade só se manifestará se *ambos os observáveis forem irrealis* para uma dada preparação. Na introdução antecipamos que, uma vez que um ente físico interage e se correlaciona com outro ente (ou grau de liberdade), estabelece-se entre as partes um elemento de realidade. Quando essa correlação é gerada em um sistema quântico fechado, um *vínculo* é estabelecido, o qual se manifesta como uma lei de conservação na álgebra de operadores. Por exemplo, para o singlete $|s\rangle$ temos que $\sigma_z = \sigma_{1z} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_{2z} = 0$. Aqui a situação é tal que, mesmo o spin total σ_z sendo real (i.e., definido, como garantido pela interação física) os spins individuais σ_{1z} e σ_{2z} não são. O fato é que o vínculo $\mathbb{1}_1 \otimes \sigma_{2z} = -\sigma_{1z} \otimes \mathbb{1}_2$ reduz as indefinições, antes independentes, de σ_{1z} e de σ_{2z} a um estado de *realidade condicional*, uma situação em que a realidade de um observável fica condicionada à realidade de outro. *Uma vez que um deles se torna real*, o outro também tornar-se-á. Separar os subsistemas sem degradar o vínculo torna possível definir a realidade em uma localidade através de uma ação em outra localidade causalmente desconexa. De maneira alguma isso poderia ocorrer em um contexto clássico, pois apesar de a noção de um vínculo não-local continuar válida, não há indefinição fundamental dos observáveis, i.e., a realidade deles já está estabelecida antes da separação. Portanto, a irrealidade é *o mecanismo básico* por trás da não-localidade.

A pergunta relevante que devemos então responder é: como fazemos para estabelecer a realidade de um grau de liberdade numa dada localidade? Há duas formas. 1) Podemos emaranhá-lo com um informante a ser posteriormente descartado. O que sobra é uma mistura estatística para o grau de liberdade, o qual será então real. Esse primeiro cenário corresponde ao caso da fenda leve de Bohr, realizado experimentalmente em [57]. Nenhuma interferência é observada quando informação sobre a partícula, armazenada na fenda leve, é descartada. Neste caso, não há colapso, pois não há leitura do informante. 2) Podemos emaranhá-lo com um informante robusto e fazer a leitura deste último. Esse cenário corresponde à nossa análise do problema da medição na seção 3.5.5. Aqui haverá colapso. O sistema será deixado num autoestado e portanto será real. Após a leitura, o informante robusto pode ser então desprezado. Repare que se apenas gerarmos emaranhamento do grau de liberdade com um informante não definiremos sua realidade. Lembre-se do problema da fenda leve de Bohr: ao emaranhar-se com a fenda leve o caminho da partícula não ganha realidade automaticamente; isso só ocorre se descartarmos a fenda leve. Portanto, para o estabelecimento da realidade, é vital que descartemos o informante (ou que façamos sua leitura e reduzamos o estado do sistema de interesse).

Esse argumento pode ser corroborado se notarmos que a não-localidade será nula se o sistema todo for acessado. Isto é, quando pudermos tomografar todas as partes do sistema, seremos incapazes de revelar aspectos não-locais. Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira: considere uma preparação ρ para um sistema multi-partido, arbitrariamente particionado em $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y$. Seja U_y um operador unitário em \mathcal{H}_y e $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{H}_1 \in \mathcal{H}_x$. Como $\Phi_{\mathcal{O}_1}$ e U_y comutam, segue que

$$\mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|\varrho) - \mathfrak{I}(\mathcal{O}_1|U_y\varrho U_y^\dagger) = 0. \quad (4.7)$$

Através desse resultado podemos ver que a realidade de um dado observável não pode ser alterada por perturbações físicas ocorridas em outra parte (eventualmente remota) do sistema. A consequência disso é que, dado que possamos acessar o sistema todo, não há chance de se encontrar não-localidade. (Recentemente, conclusão similar a essa apareceu no contexto da interpretação de muitos mundos [68]). Nessa análise fica claro que se quisermos ver não-localidade não podemos simplesmente usar uma perturbação unitária local que apenas produza o emaranhamento. É preciso usar uma operação não unitária, seja a leitura ou o descarte do informante (conforme fazemos na Eq. (4.1)).

Se usarmos apenas uma transformação unitária local, não poderemos definir a realidade numa localidade e, portanto, nem condicionar a realidade na outra. Logo, não haverá não-localidade. Repare que o traço na Eq. (4.1) é justamente o que nos permite usar o teorema de Stinespring e obter o estado $\Phi(\rho)$ com realidade definida.

A interpretação direta desse resultado é que a não-localidade só aparece quando ignoramos partes do sistema. Contudo, devemos lembrar o leitor que existe um cenário em que descartar uma parte do sistema é fundamentalmente indispensável: no *processo de medição*. Durante esse processo, utilizamos aparatos de medição, i.e., instrumentos robustos que após sondarem o sistema investigado, podem ser devidamente lidos, enquanto o sistema de interesse é descartado (traçado). Ou seja, nosso acesso ao sistema de interesse é sempre indireto. Exemplificando isso, considere uma preparação ρ para dois subsistemas, 1 e 2. Seja $|a_0\rangle\langle a_0|$ e $|b_0\rangle\langle b_0|$ os estados iniciais dos aparatos de medição A e B os quais são capazes de interagir com 1 e 2, respectivamente, via transformações unitárias reais U_{1A} e U_{2B} . Depois que a interação acaba (i.e., depois que as correlações pertinentes foram estabelecidas) o sistema total é dado por ρ_{12AB} . Aproveitando o exemplo que citamos logo acima, haveria um vínculo estabelecido entre as partículas 1 e 2 descrito na álgebra dos operadores. Além desse, existiriam outros dois vínculos estabelecidos entre as partículas e seus medidores, i.e., informação à respeito do spin estaria armazenada em algum grau de liberdade interno de cada um dos respectivos aparatos. O ponto essencial aqui é interpretar o que significa *ter acesso global*. Acessar todas as partes do sistema corresponderia a olhar diretamente para esses vínculos não-locais simultaneamente, acessando não só os aparatos, como também os próprios sistemas de interesse, e assim verificar todas as correlações estabelecidas sem introduzir nenhum outro sistema físico no problema. Esse cenário, porém, é totalmente artificial, pois o sistema de interesse não pode ser acessado sem o aparato. Em um processo usual, as correlações só são verificadas depois da ocorrência de medições em cada partição e da confrontação dos resultados finais. O estado reduzido ρ_{12} nunca pode ser diretamente acessado, afinal de contas é justamente por isso que precisamos dos aparatos. Assim, o que realmente acessamos é somente ρ_{AB} , o qual pode exibir não-localidade como quantificado em (4.2).

Conclusão

Em 1935, Einstein, Podolski e Rosen (EPR) [1] puseram em cheque a Mecânica Quântica (MQ), sugerindo que haveria uma teoria que viria a suplantá-la, na qual os conceitos físicos fundamentais estariam em harmonia com as noções de realidade clássica e localidade. A empreitada foi frustrada quando John Bell, em 1964, publicou um artigo seminal [3], demonstrando que alguns resultados da MQ são incompatíveis com os de qualquer teoria física que respeite realismo local. As violações das desigualdades de Bell, mensuradas pela primeira vez por Aspect *et al* [37], demonstram empiricamente que qualquer teoria que possa suplantá-la não conseguirá evitar aspectos não-locais. Mais recentemente, Pusey, Barret e Rudolph [12] demonstraram que uma interpretação puramente epistêmica para o vetor de estado produziria conflito com resultados da MQ. A questão fundamental por trás desses e outros trabalhos é se a teoria física diz respeito à realidade que nos cerca, tratando diretamente de uma ontologia, ou se os conceitos representam apenas informação subjetiva a respeito dessa ontologia. O nascimento e florescimento de áreas como Informação Quântica, Computação Quântica e Termodinâmica Quântica têm impulsionado novos desenvolvimentos sobre os aspectos fundamentais da teoria. Porém, dada a quantidade de trabalhos na área, contraditórios entre si, e dado o grande número de interpretações possíveis, parece justo dizer que a comunidade científica ainda segue dividida e longe de um consenso.

Nessa dissertação reformulamos e estendemos a noção de elementos de realidade sugerida originalmente por EPR. A partir da definição dos elementos de realidade, pude-

mos definir também uma medida de irrealidade de observáveis dado um estado quântico, Eq. (3.3). Tal medida está totalmente baseada em um protocolo empírico, tendo portanto um forte apelo experimental. Demonstramos as propriedades importantes dessa medida, como a não-negatividade, notando que ela depende tanto do estado quanto do observável em questão. Com isso em mente, investigamos a dependência entre as realidades de observáveis incompatíveis, exibindo um único estado em que ambos observáveis podem estar definidos simultaneamente (estado fundamentalmente clássico). Vimos que isso não representa uma violação do princípio de incerteza, o qual é conceitualmente diferente da nossa noção de realidade.

Notamos também uma conexão da nossa medida com a discórdia quântica. Dada a Eq. (3.5), vemos que a irrealidade pode ser decomposta em uma medida de irrealidade local (a qual pode ser vista como uma medida de coerência) e uma medida do tipo discórdia (a qual, se minimizada, torna-se a discórdia global [43]). Isso impede que a realidade acessada por operações locais seja igual à realidade do estado global.

Apresentamos também, brevemente, o problema da medição, e a partir de um estudo de caso exibimos um possível modelo de medição, ilustrado no exemplo do Stern-Gerlach. Com isso identificamos os mecanismos essenciais e resolvemos, dentro do nosso modelo de realidade, o problema da medição mesmo sem incluir descoerência.

Em seguida, baseando-nos no conceito de irrealidade, definimos uma medida de não-localidade [Eq. (4.2)]. Tal definição surgiu naturalmente do formalismo proposto notando-se que a irrealidade de um observável pode ser alterada, de maneira causalmente desconexa, por medições de outro observável em uma localidade espacialmente separada da primeira. Propusemos então uma minimização dessa medida de não-localidade sobre os observáveis envolvidos, de modo que ela ficasse dependente apenas do estado e verificamos quais os seus limites superior e inferior, bem como as situações em que ela se anula (estados descorrelacionados e estados puros).

Estudando a não-localidade para dois estados, de Werner e estado α , constatamos a sua existência mesmo na ausência de emaranhamento. Outros trabalhos [63–67] também verificam noções de não-localidade em estados separáveis, sendo portanto mais sensíveis que a não-localidade de Bell.

Outros dois pontos importantes que analisamos foram que, primeiro, dado que temos

acesso total ao estado, ele não exibirá não-localidade. Porém efeitos não-locais são inevitáveis, pois em um processo de medição de fato nunca temos acesso a todo o sistema (é necessário traçar os graus de liberdade dos subsistemas e olhar apenas para os ponteiros). Segundo, só existirá não-localidade quando ambos os observáveis forem irrealis. Tal fato nos revelou que a irrealidade é o mecanismo básico por trás da não-localidade.

Em resposta às perguntas que fizemos ao final da introdução, podemos afirmar que nossa investigação defende os seguintes pontos:

- i) partindo de uma única premissa, a saber, que realidade de um observável está necessariamente definida após uma medição, propusemos um quantificador de realidade e desenvolvemos um quadro conceitual que considera a MQ como teoria completa e prevê que observáveis incompatíveis não podem ser simultaneamente reais para estados emaranhados (em claro contraste com as ideias de EPR);
- ii) para falar de realidade, devemos levar em consideração o par estado/observável e não apenas um deles;
- iii) a realidade é definida por processo unitário, estabelecendo-se via emaranhamento com um informante a ser descartado (ou lido), sendo o colapso mera atualização de informação devido ao caráter estatístico da teoria;
- iv) a irrealidade é o mecanismo básico da não-localidade.

Em resumo, nosso trabalho oferece um novo formalismo para a discussão das noções de realidade e de não-localidade. Os novos aspectos não-locais apresentados requerem uma inspeção mais aprofundada, em especial no que concerne à sua utilização em tarefas de informação quântica e de termodinâmica. Surgem também questões interessantes sobre a extensão de nossa proposta para sistemas multipartidos, referenciais quânticos e medidas fracas. Isso aponta um futuro programa de pesquisa muito fértil e fascinante.

Nossos resultados já foram organizados para publicação e encontram-se no arXiv: <http://arxiv.org/abs/1411.7811>.

Apêndice **A**

Espaço Discretizado

A transformação entre os formalismos contínuo e discretizado foi feita de forma muito simples. Ao invés de tratarmos a posição como uma variável contínua pertencente a um espaço de dimensão infinita, discretizamos o espaço em valores inteiros multiplicados por δx , comprimento fundamental dos detectores. Para tanto, fizemos as seguintes modificações.

$$\mathbf{Identidade} : \quad \mathbb{1}_{cont.} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{1}_{disc.} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta x |x_k\rangle\langle x_k|,$$

sendo δx a resolução de detecção (tamanho do detector).

$$\mathbf{Ortonormalidade} : \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad \leftrightarrow \quad \langle x_k|x_l\rangle = \frac{\delta_{k,l}}{\delta x}.$$

Ao tomarmos o limite de $\delta x \rightarrow 0$, o lado direito da última equação recupera a delta de Dirac, voltando ao resultado do contínuo.

Para ilustrar o uso dessas modificações descrevemos a seguir a transformação da função de onda normalizada para o exemplo da partícula livre:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{(x - x_0(t))^2}{2\Delta^2(t)} + \frac{i}{\hbar} p x \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{(x_k - x_0(t))^2}{2\Delta^2(t)} + \frac{i}{\hbar} p x_k \right],$$

sendo $x_k = \delta x k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os termos dessa expressão foram definidos anteriormente na seção 3.5.1. E a normalização é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \Psi \rangle &= 1 \\ \langle \Psi | \left(\delta x \sum_k |x_k\rangle \langle x_k| \right) | \Psi \rangle &= 1 \\ \delta x \sum_k |\langle \Psi | x_k \rangle|^2 &= 1.\end{aligned}$$

Portanto $N = \delta x \sum_k \exp \left[-\frac{(x_k - x_0(t))^2}{\Delta^2(t)} \right]$. A soma em k é feita numericamente de um k_{min} a um k_{max} , valores entre os quais a função de onda possui valor relevante.

Outros casos que aparecem na dissertação são tratados similarmente. É possível também construir esse formalismo discretizado no espaço conjugado, o do momento. Porém isso será omitido aqui uma vez que tal formalismo não é utilizado.

Limites da Não-localidade Mínima

Aqui apresentamos a prova do teorema enunciado na seção 4.2.

Das Eqs. (3.5) e (4.2) pode-se mostrar $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho) = D_{[\mathcal{O}_1]}(\rho) + D_{[\mathcal{O}_2]}(\rho) - D_{[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]}(\rho)$, onde $D_{[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]}(\rho) = I_{1:2}(\rho) - I_{1:2}(\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}(\rho))$. Da não-negatividade da discórdia quântica \mathcal{D}_k , segue que $I_{1:2}(\rho) \geq I_{1:2}(\Phi_k(\rho))$, $k = 1, 2$. Substituindo $\rho \rightarrow \Phi_{\mathcal{O}_j}(\rho)$ temos $I_{1:2}(\Phi_k(\rho)) \geq I_{1:2}(\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}(\rho))$ e

$$I_{1:2}(\Phi_1(\rho)) + I_{1:2}(\Phi_2(\rho)) \geq 2I_{1:2}(\Phi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}(\rho)).$$

Reescrevendo $I_{1:2}$ em termos da sua quantidade tipo-discórdia D obtemos

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho) = D_{[\mathcal{O}_1]} + D_{[\mathcal{O}_2]} - D_{[\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2]} \leq D_{[\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2]},$$

a qual, sob minimização, nos dá

$$\mathcal{N}_{min}(\rho) \leq \mathcal{D}_{12}(\rho). \tag{B.1}$$

Este limite superior revela uma hierarquia similar àquela exibida entre emaranhamento e não-localidade de Bell. Mostra também que se $\mathcal{D}_{12}(\rho) = 0$, então haverá um par de observáveis para o qual não serão observados aspectos não-locais.

Segue a prova do limite inferior. Considere um estado quadripartido $\varrho_0 = \rho \otimes \rho_A \otimes \rho_B$, onde $\rho \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\rho_A = |a_0\rangle\langle a_0| \in \mathcal{H}_A$, e $\rho_B = |b_0\rangle\langle b_0|$. Seja $\mathcal{O}_1 = \sum_k o_{1k} \mathcal{O}_{1k}$ e

$\mathcal{O}_2 = \sum_j o_{2j} \mathcal{O}_{1j}$ observáveis agindo em \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, onde $\mathcal{O}_{1k} = |k\rangle\langle k|$ e $\mathcal{O}_{2j} = |j\rangle\langle j|$. Considere a transformação unitária $U = U_{1A} \otimes U_{2B}$ tal que $\varrho = U\varrho_0U^\dagger$, $U_{1A}|k\rangle|a_0\rangle = |k\rangle|a_k\rangle$, e $U_{2B}|j\rangle|b_0\rangle = |j\rangle|b_j\rangle$. Disso segue que

$$\varrho = \sum_{\substack{k,k' \\ j,j'}} \langle kj|\rho|k'j'\rangle |k\rangle\langle k'| \otimes |j\rangle\langle j'| \otimes |a_k\rangle\langle a_{k'}| \otimes |b_j\rangle\langle b_{j'}|.$$

Usando o estado acima, obtemos

$$\begin{aligned} \varrho_{12A} &= \text{Tr}_B \varrho \\ &= \sum_{k,k',j} \langle kj|\rho|k'j'\rangle |k\rangle\langle k'| \otimes |j\rangle\langle j| \otimes |a_k\rangle\langle a_{k'}| \\ &= \sum_{k,k',j} \langle kj|\rho|k'j'\rangle U_{1A}|k\rangle\langle k'| \otimes |j\rangle\langle j| \otimes |a_0\rangle\langle a_0| U_{1A}^\dagger \\ &= U_{1A} \left(\sum_{k,k',j} \langle kj|\rho|k'j'\rangle |k\rangle\langle k'| \otimes |j\rangle\langle j| \otimes |a_0\rangle\langle a_0| \right) U_{1A}^\dagger \\ &= U_{1A} \Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho) \otimes \rho_A U_{1A}^\dagger. \end{aligned}$$

Analogamente, $\varrho_{12B} = \text{Tr}_A \varrho = U_{2B} \Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho) \otimes \rho_B U_{2B}^\dagger$. Traçando ambas as partições A e B , temos $\varrho_{12} = \text{Tr}_{A,B} \varrho = \sum_{k,j} \langle kj|\rho|kj\rangle |kj\rangle\langle kj| = \Phi_{\mathcal{O}_{12}}(\rho)$.

Calculando as entropias, temos

$$\begin{aligned} S(\varrho) &= S(U\varrho_0U^\dagger) = S(\varrho_0) = S(\rho) + S(\rho_A) + S(\rho_B) = S(\rho); \\ S(\varrho_{12A}) &= S(U_{1A} \Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho) U_{1A}^\dagger) = S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)); \end{aligned}$$

E finalmente

$$\begin{aligned} S(\varrho_{12}) &= S(\Phi_{\mathcal{O}_{12}}(\rho)); \\ S(\varrho_{12B}) &= S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho)). \end{aligned}$$

Identificando as partições $X = A$, $Y = B$ e $Z = 12$, fazemos as seguintes relações: $S(\rho_{XYZ}) = S(\rho)$, $S(\rho_Z) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}(\rho))$, $S(\rho_{XZ}) = S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho))$, e $S(\rho_{YZ}) = S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(\rho))$, onde ρ_Z , ρ_{XZ} , e ρ_{YZ} são reduções de $\varrho = \rho_{XYZ}$. Da subaditividade forte da entropia de von Neumann, $S(\rho_{XYZ}) + S(\rho_Z) \leq S(\rho_{XZ}) + S(\rho_{YZ})$ [29], segue que $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2|\rho) \geq 0$ e,

após a minimização,

$$\mathcal{N}_{min}(\rho) \geq 0. \quad (\text{B.2})$$

O resultado para estados puros é provado da seguinte forma. Tome observáveis $\mathcal{O}_1 = \sum_k o_{1k} |k\rangle\langle k|$ e $\mathcal{O}_2 = \sum_j o_{2j} |j\rangle\langle j|$ que são conectados pela decomposição de Schmidt $|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle|k\rangle$ da seguinte maneira: os autoestados $\{|k\rangle\}$ de \mathcal{O}_1 correspondem à sub-base de Schmidt $\{|k\rangle\}$ do subespaço 1, enquanto que os autoestados $\{|j\rangle\}$ de \mathcal{O}_2 formam uma MUB com a sub-base de Schmidt $\{|k\rangle\}$ do subespaço 2, i.e., $|\langle k|j\rangle|^2 = \frac{1}{d_2}$, onde $d_2 = \dim(\mathcal{H}_2)$. Para esses observáveis pode-se mostrar que $S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(|\psi\rangle)) = \ln d_2$ e $S(\Phi_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}(|\psi\rangle)) = \ln d_2 + S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(|\psi\rangle))$. A prova segue:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_2}(|\psi\rangle) &= \sum_j |j\rangle\langle j| \left(\sum_{k,k'} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k'}} |k\rangle|k\rangle\langle k'|\langle k'| \right) |j\rangle\langle j| \\ &= \sum_{k,k',j} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_{k'}} \langle j|k\rangle\langle k'|j\rangle |k\rangle|j\rangle\langle k'|\langle j|. \end{aligned}$$

Como $|\langle k|j\rangle|^2 = \frac{1}{d_2}$, temos que $\langle k|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_2}} e^{i\theta_{jk}}$, do que segue

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_2}(|\psi\rangle) &= \frac{1}{d_2} \sum_j \left(\sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle e^{i\theta_{jk}} \right) \left(\sum_{k'} \sqrt{\lambda_{k'}} \langle k'| e^{-i\theta_{k'j}} \right) \otimes |j\rangle\langle j| \\ &= \frac{1}{d_2} \sum_j \rho_j \otimes |j\rangle\langle j|. \end{aligned}$$

O último passo consistiu em identificar $\sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle e^{i\theta_{jk}}$ como um estado puro dependente apenas de j . Utilizando o teorema da entropia conjunta (propriedade 7 exposta na seção 2.4), obtemos $S(\Phi_{\mathcal{O}_2}(\rho)) = \ln d_2$.

Para o cálculo de $\Phi_{\mathcal{O}_{12}}(\rho)$ utilizamos o resultado acima projetando na base de \mathcal{O}_1 . Como essa base corresponde à própria base de Schmidt temos $\left(\sum_{k'} \sqrt{\lambda_{k'}} e^{-i\theta_{k'j}} \langle k'| \right) |k\rangle = \sqrt{\lambda_k} e^{-i\theta_{kj}}$, logo

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_{12}}(|\psi\rangle) &= \frac{1}{d_2} \sum_{jk} \sqrt{\lambda_k} e^{i\theta_{jk}} \sqrt{\lambda_k} e^{-i\theta_{kj}} |k\rangle|j\rangle\langle k|\langle j| \\ &= \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k| \otimes \frac{1}{d_2} \sum_j |j\rangle\langle j|. \end{aligned}$$

Calculando a entropia temos $S(\Phi_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}(|\psi\rangle)) = \ln d_2 + S(\Phi_{\mathcal{O}_1}(|\psi\rangle))$. Assim, obtemos finalmente que $\mathcal{N}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2||\psi) = 0$. Portanto, $\mathcal{N}_{min}(|\psi) = 0$. Este resultado também segue de (B.2) desde que notemos que estados puros saturam a subaditividade forte [69].

■

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] N. Bohr. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* **48**, 696 (1935).
- [3] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* **1**, 195 (1964).
- [4] N. Gisin e B. Gisin. A local hidden variable model of quantum correlation exploiting the detection loophole. *Phys. Lett. A.* **260**, 323 (1999).
- [5] K. Hess e W. Philipp. A possible loophole in the theorem of Bell. *PNAS* **98**, 25, 14224 (2001).
- [6] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani e S. Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419 (2014).
- [7] H. P. Stapp. Bell's theorem and world process. *Il Nuovo Cimento B Series 11* **29**, 270 (1975).
- [8] J. Butterfield, C. Pagonis, A. Fine, R. Clifton, H. Brown, S. Saunders, J. Cushing, G. Bowman, G. Fleming, G. Belot, J. Earman, S. French e A. Shimony. *From Physics to Philosophy* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [9] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables. II. *Phys. Rev.* **85**, 180 (1952).

-
- [10] M. Schlosshauer, J. Kofler e A. Zeilinger. A snapshot of foundational attitudes toward quantum mechanics. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **44**, 222 (2013).
- [11] T. Norsen e S. Nelson. Yet Another Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics. arXiv:1306.4646 (2013).
- [12] M. F. Pusey, J. Barrett e T. Rudolph. On the reality of the quantum state. *Nature Physics* **8**, 475 (2012).
- [13] P. G. Lewis, D. Jennings, J. Barrett e T. Rudolph. Distinct quantum states can be compatible with a single state of reality. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 150404 (2012).
- [14] R. Colbeck e R. Renner. Is a System's Wave Function in One-to-One Correspondence with Its Elements of Reality? *Phys. Rev. Lett.* **108**, 150402 (2012).
- [15] L. Hardy. Are quantum states real? *Int. J. Mod. Phys. B* **27**, 1345012 (2013).
- [16] M. K. Patra, S. Pironio e S. Massar. No-Go Theorems for Psi-Epistemic Models Based on a Continuity Assumption. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 090402 (2013).
- [17] S. Aaronson, A. Bouland, L. Chua e G. Lowther. Psi-epistemic theories: The role of symmetry. *Phys. Rev. A* **88**, 032111 (2013).
- [18] M. S. Leifer. Psi-epistemic models are exponentially bad at explaining the distinguishability of quantum states. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 160404 (2014).
- [19] J. Barrett, E. G. Cavalcanti, R. Lal e O. J. E. Maroney. No Psi-Epistemic Model Can Fully Explain the Indistinguishability of Quantum States. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 250403 (2014).
- [20] C. Branciard. How Psi-Epistemic Models Fail at Explaining the Indistinguishability of Quantum States. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020409 (2014).
- [21] R. W. Spekkens. Evidence for the epistemic view of quantum states: A toy theory. *Phys. Rev. A* **75**, 032110 (2007).
- [22] N. Harrigan e R. W. Spekkens. Einstein, Incompleteness, and the Epistemic View of Quantum States. *Found. Phys.* **40**, 125 (2010).

-
- [23] J. Emerson, D. Serbin, C. Sutherland e V. Veitch. The whole is greater than the sum of the parts: on the possibility of purely statistical interpretations of quantum theory. arXiv:1312.1345 (2013).
- [24] D. J. Miller e M. Farr. Pre-entanglement shows that individual quantum systems do not possess states. arXiv:1405.2757 (2014).
- [25] R. Landauer. Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. IBM J. Res. Develop. **5**, 183 (1961).
- [26] M. B. Plenio e V. Vitelli. The physics of forgetting: Landauer's erasure principle and information theory. Contemporary Physics **42**, 25 (2001).
- [27] C. H. Bennett. The Thermodynamics of Computation - A Review. Int. J. Theor. Phys. **21**, 12, 905 (1982).
- [28] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal **27**, 379 (1948).
- [29] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [30] D. Bohm. *Quantum Theory* (Prentice Hall, Nova York, 1951).
- [31] E. G. Cavalcanti e H. M. Wiseman. Bell Nonlocality, Signal Locality and Unpredictability (or What Bohr Could Have Told Einstein at Solvay Had He Known About Bell Experiments). Found. Phys. **42**, 1329 (2012).
- [32] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [33] S. J. Freedman e J. F. Clauser. Experimental test of local hidden variable theories. Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [34] R. Holt. *Atomic Cascade Experiments*. Tese de Doutorado, Harvard University (1973).
- [35] J. F. Clauser. Experimental investigation of a polarization correlation anomaly. Phys. Rev. L **36**, 1223 (1976).

- [36] E. Fry e R. Thompson. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465 (1976).
- [37] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [38] J. Preskill. <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/notes/chap5.pdf> (Lecture Notes).
- [39] M. M. Wilde. *From Classical to Quantum Shannon Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [40] H. Araki e E. H. Lieb. Entropy inequalities. *Comm. Math. Phys.* **2**, 160 (1970).
- [41] H. Ollivier e W. H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001).
- [42] L. Henderson e V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *J. Phys. A* **34**, 6899 (2001).
- [43] C. C. Rulli e M. S. Sarandy. Global quantum discord in multipartite systems. *Phys. Rev. A* **84**, 042109 (2011).
- [44] F. Mintert, C. Viviescas e A. Buchleitner. *Entanglement and Decoherence*, volume 768 de *Lecture Notes in Physics*, capítulo 2, página 61 (Springer Berlin Heidelberg, Berlim, 2009).
- [45] D. Bru. Characterizing entanglement. *J. Math. Phys.* **43**, 4237 (2002).
- [46] J. Schwinger. Unitary operator bases. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **46**, 570 (1960).
- [47] R. M. Angelo e A. D. Ribeiro. Complementarity as corollary. arXiv:1304.2286 (2013).
- [48] T. Baumgratz, M. Cramer e M. B. Plenio. Quantifying Coherence. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014).
- [49] D. Howard. Einstein on locality and separability. *Stud. Hist. Phil. Sci.* **16**, 171 (1985).
- [50] M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2005).

- [51] L. E. Ballentine. The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.* **42**, 358 (1970).
- [52] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical - Revisited. Em *Quantum Decoherence*, volume 48, página 1 (Birkhauser Basel, Berlim, 2005).
- [53] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955). Traduzido do alemão por Robert T. Beyer.
- [54] F. Parisio. Estimating the reduction time of quantum states. *Phys. Rev. A* **84**, 062108 (2011).
- [55] M. G. M. Moreno e F. Parisio. Investigation of the collapse of quantum states using entangled photons. *Phys. Rev. A* **88**, 012118 (2013).
- [56] D. Spehner. Quantum correlations and distinguishability of quantum states. *J. Math. Phys.* **55**, 075211 (2014).
- [57] X.-J. Liu, Q. Miao, F. Gel'mukhanov, M. Patanen, O. Travnikova, C. Nicolas, H. Agren, K. Ueda e C. Miron. Einstein-Bohr recoiling double-slit gedanken experiment performed at the molecular level. *Nature Photonics* **9**, 120 (2014).
- [58] M. A. Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition* (Springer-Verlag, Berlim, 2007).
- [59] R. Eisberg e R. Resnick. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos e Partículas* (Elsevier, Rio de Janeiro, 1994).
- [60] W. Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **7**, 649 (1954).
- [61] D. M. Greenberger, M. Horne e A. Zeilinger. *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe* (Springer Netherlands, Dordrecht, 1989).
- [62] L. Hardy. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1665 (1993).
- [63] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, C. A. Fuchs, T. Mor, E. Rains, P. W. Shor, J. A. Smolin e W. K. Wootters. Quantum nonlocality without entanglement. *Phys. Rev. A* **59**, 1070 (1999).

-
- [64] S. Luo e S. Fu. Measurement-Induced Nonlocality. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120401 (2011).
- [65] J. Walgate e L. Hardy. Nonlocality, Asymmetry, and Distinguishing Bipartite States. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 147901 (2002).
- [66] Z.-C. Zhang, F. Gao, G.-J. Tian, T.-Q. Cao e Q.-Y. Wen. Nonlocality of orthogonal product basis quantum states. *Phys. Rev. A* **90**, 022313 (2014).
- [67] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek e V. Vedral. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1655 (2012).
- [68] F. D. Tipler. Quantum nonlocality does not exist. *PNAS* **111**, 11281 (2014).
- [69] A. C. S. Costa, R. M. Angelo e M. W. Beims. Monogamy and backflow of mutual information in non-Markovian thermal baths. *Phys. Rev. A* **90**, 012322 (2014).