

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO  
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DEPENDENTES DO TEMPO

CURITIBA

2014

RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO  
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DEPENDENTES DO TEMPO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. José Antonio  
Marques Carrer

Coorientador: Prof. Luiz Alkimin  
de Lacerda

CURITIBA

2014

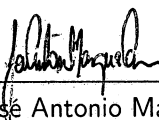
## TERMO DE APROVAÇÃO

RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO

### ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DEPENDENTES DO TEMPO

Tese aprovada pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador:



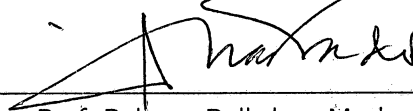
Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.  
Universidade Federal do Paraná



Prof. Wibe João Mansur, Ph.D.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prof. João Elias Abdalla Filho, Ph.D.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.  
Universidade Federal do Paraná



Prof. Marcos Arndt, D.Sc.  
Universidade Federal do Paraná

CURITIBA

7 de novembro de 2014

Dedico esta obra à minha Mãe, que  
me ensinou os preceitos mais importantes  
da Vida: respeito à Palavra do Senhor e gratidão  
pelo sacrifício de Seu Filho, Meu Salvador, Jesus Cristo.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, ao Senhor Jesus Cristo, pela minha salvação, e ao Espírito Santo, pela consolação.

Aos meus pais, Mario e Eledir, à minha esposa, Patricia, e à minha irmã, Lisiane, pela compreensão e pelo incentivo nos momentos mais difíceis.

Aos mestres, Prof. Carrer e Prof. Alkimin, pela orientação, confiança e, principalmente, paciência com o meu perfeccionismo sem fim.

Aos professores e colegas do PPGMNE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo auxílio financeiro.

**“O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria. . .”**

**Salmo 111:10a**

## RESUMO

O presente trabalho trata da solução da equação de Euler-Bernoulli para flexão dinâmica de vigas através do Método dos Elementos de Contorno utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo. Inicialmente, são apresentadas uma breve revisão da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e as soluções analíticas utilizadas como referência. A seguir, é introduzida a solução fundamental dependente do tempo e são discutidas algumas de suas propriedades. Na sequência, a formulação integral do problema é deduzida a partir da técnica de resíduos ponderados e são propostas três implementações numéricas diferentes. Finalmente, os resultados numéricos obtidos através dos códigos computacionais desenvolvidos com base nas implementações numéricas propostas são comparados de maneira gráfica às soluções analíticas adotadas.

Palavras-chave: Análise dinâmica. Vigas de Euler-Bernoulli. Método dos Elementos de Contorno. Soluções fundamentais dependentes do tempo.

## ABSTRACT

This work is concerned with the solution of the Euler-Bernoulli equation for dynamic bending of beams through the Boundary Element Method with time-dependent fundamental solutions. Initially, a brief review of the Euler-Bernoulli beam theory and the analytical solutions used as reference are presented. Next, the time-dependent fundamental solution is introduced and some of its properties are discussed. In the sequence, the integral formulation is developed by using a weighted residuals technique and three different numerical implementations are proposed. Finally, the numerical results obtained with the computational codes based on the proposed numerical implementations are graphically compared with the adopted analytical solutions.

Keywords: Dynamic analysis. Euler-Bernoulli beams. Boundary Element Method.  
Time-dependent fundamental solutions.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ESQUEMA DA VIGA SOB CONSIDERAÇÃO . . . . .	19
FIGURA 2 – COMPORTAMENTO DAS INTEGRAIS DE FRESNEL . . . . .	24
FIGURA 3 – COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS . . . . .	25
FIGURA 4 – DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL. . . . .	33
FIGURA 5 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	57
FIGURA 6 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	58
FIGURA 7 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	59
FIGURA 8 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	60
FIGURA 9 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	61
FIGURA 10 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	62
FIGURA 11 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	63
FIGURA 12 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	64
FIGURA 13 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	65
FIGURA 14 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	66
FIGURA 15 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	67
FIGURA 16 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	68
FIGURA 17 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	69
FIGURA 18 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	70
FIGURA 19 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	71

FIGURA 20 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	72
FIGURA 21 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	73
FIGURA 22 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	74
FIGURA 23 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	75
FIGURA 24 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	76
FIGURA 25 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	77
FIGURA 26 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	78
FIGURA 27 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $50\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	79
FIGURA 28 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	80
FIGURA 29 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	81
FIGURA 30 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	82
FIGURA 31 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	83
FIGURA 32 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO $100\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	84
FIGURA 33 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	85
FIGURA 34 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	86
FIGURA 35 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	87
FIGURA 36 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	88
FIGURA 37 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	89
FIGURA 38 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	90
FIGURA 39 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	91

FIGURA 40 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	92
FIGURA 41 – CARREGAMENTO CD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	93
FIGURA 42 – CARREGAMENTO CD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	94
FIGURA 43 – CARREGAMENTO CD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	95
FIGURA 44 – CARREGAMENTO CD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	96
FIGURA 45 – CARREGAMENTO CD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	97
FIGURA 46 – CARREGAMENTO CD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	98
FIGURA 47 – CARREGAMENTO CD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	99
FIGURA 48 – CARREGAMENTO CD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	100
FIGURA 49 – CARREGAMENTO DI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	101
FIGURA 50 – CARREGAMENTO DI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	102
FIGURA 51 – CARREGAMENTO DI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	103
FIGURA 52 – CARREGAMENTO DI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	104
FIGURA 53 – CARREGAMENTO DI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	105
FIGURA 54 – CARREGAMENTO DI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	106
FIGURA 55 – CARREGAMENTO DI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	107
FIGURA 56 – CARREGAMENTO DI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	108
FIGURA 57 – CARREGAMENTO CI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	109
FIGURA 58 – CARREGAMENTO CI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	110
FIGURA 59 – CARREGAMENTO CI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	111

FIGURA 60 – CARREGAMENTO CI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	112
FIGURA 61 – CARREGAMENTO CI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	113
FIGURA 62 – CARREGAMENTO CI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	114
FIGURA 63 – CARREGAMENTO CI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (CONTORNO) . . . . .	115
FIGURA 64 – CARREGAMENTO CI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO $10\mu s$ (DOMÍNIO) . . . . .	116

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESÍDUOS DE CONTORNO . . . . .	27
TABELA 2 – FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO . . . . .	28
TABELA 3 – COMPRIMENTO UTILIZADO EM CADA TIPO DE VIGA . . . . .	54
TABELA 4 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E DO MATERIAL . . . . .	54
TABELA 5 – VALOR DO CARREGAMENTO EXTERNO . . . . .	54
TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS . . . . .	123

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	15
1.2 REVISÃO DA LITERATURA .....	15
1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS .....	17
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	17
<b>2 VIGAS DE EULER-BERNOULLI</b> .....	<b>19</b>
2.1 EQUAÇÃO GOVERNANTE .....	19
2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	20
2.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL .....	21
<b>3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	<b>26</b>
3.1 RESÍDUOS PONDERADOS .....	26
3.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL .....	29
3.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	31
3.3.1 Discretização espacial e temporal .....	31
3.3.2 Aproximação numérica constante .....	33
3.3.3 Aproximação numérica linear .....	38
3.3.4 Aproximação numérica mista .....	45
3.3.5 Carregamentos externos concentrados .....	46
3.3.6 Carregamentos externos impulsivos .....	48
3.3.7 Carregamentos externos concentrados/impulsivos .....	51
3.3.8 Marcha no tempo .....	52
<b>4 EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>53</b>
4.1 ORGANIZAÇÃO E DEFINIÇÕES .....	53
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	55
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	<b>117</b>
5.1 REVISÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS .....	117
5.2 CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO .....	118
5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	118
5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	118
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>120</b>
<b>APÊNDICE</b> .....	<b>122</b>
<b>ANEXO</b> .....	<b>133</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O advento de computadores eletrônicos digitais em meados do século XX permitiu a utilização prática de algoritmos numéricos para a solução de equações diferenciais de interesse em física e engenharia. Particularmente, a popularização dos microcomputadores pessoais nas últimas duas décadas do século XX tornou o uso de programas numéricos em análises e projetos de engenharia uma ferramenta indispensável para a obtenção de soluções ótimas em termos de segurança *versus* custos.

Atualmente, dentre os vários métodos numéricos disponíveis, destaca-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

O presente trabalho, particularmente, trata da solução da equação de Euler-Bernoulli para flexão dinâmica de vigas através do Método dos Elementos de Contorno utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo.

## 1.2 REVISÃO DA LITERATURA

No contexto da teoria clássica de vigas, ou teoria de Euler-Bernoulli, assunto do presente trabalho, o leitor pode encontrar, por exemplo, os trabalhos de Providakis e Beskos [1], Schanz [2] e Langre, Axisa e Guilbaud [3].

O primeiro desses trabalhos concentra-se em vibrações livres e forçadas, sendo que o problema de vibração forçada é resolvido utilizando-se a transformada de Laplace e a resposta é obtida através de uma inversão numérica da solução transformada.

O segundo trabalho utiliza um método interessante, designado Método da Quadratura de Convolução, proposto por Lubich [4, 5], para avaliar a convolução presente na equação integral dependente do tempo. As principais características desse método, que pode ser aplicado a problemas onde soluções fundamentais dependentes do tempo não estejam disponíveis, são: (a) uso das soluções fundamentais no domínio de Laplace e (b) aproximação numérica das integrais de convolução, presentes nas equações do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo, através de uma fórmula de quadratura baseada em um método linear de múltiplos passos, que possui solução direta no domínio do tempo.

No terceiro trabalho, a formulação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo (TD-BEM em inglês) é empregada. Apesar de muito interessante do ponto de vista matemático, a complexidade da solução fundamental, que envolve integrais de Fresnel, e a aparente dificuldade de obtenção de resultados estáveis tornam essa formulação menos atrativa que as demais. É importante mencionar uma das conclusões à qual os autores Langre, Axisa e Guilbaud [3] chegaram: *"It is nevertheless clear that the Laplace transform domain method is the most adequate for the solution of linear problems of flexural vibrations of beams"*.

Na teoria de vigas de Timoshenko a deformação de cisalhamento e a inércia rotatória da seção transversal são levadas em conta, dando origem a uma teoria aprimorada que produz resultados mais elaborados que os da teoria clássica. Por essa razão, muita atenção tem sido dedicada ao desenvolvimento de formulações do Método dos Elementos de Contorno baseadas naquela teoria.

Para análises estáticas, o leitor pode consultar Antes [6]: nesse trabalho, estruturas de pórticos planos são modeladas através da adição de equações para forças e deslocamentos axiais às equações de viga de Timoshenko. Análises dinâmicas são apresentadas no trabalho de Antes, Schanz e Alvermann [7], no qual o Método da Quadratura de Convolução é empregado novamente para avaliar a convolução presente na equação integral dependente do tempo.

Outra aplicação pode ser encontrada no trabalho de Tanaka, Matsumoto e Oida [8], o qual trata do problema de flexão estática de placas enrijecidas por vigas. Análises não-lineares são encontradas nos trabalhos de Sapountzakis e Dourakopoulos [9, 10].



### 1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A motivação deste trabalho encontra-se apoiada em três fatores específicos. Primeiro, conforme percebe-se na revisão da literatura apresentada, a reduzida quantidade de trabalhos publicados sobre o tema. Segundo, a conclusão, um tanto quanto desencorajadora, dos autores Langre, Axisa e Guilbaud [3] em comparação à experiência do orientador do autor em assuntos similares aos abordados naquele texto. Terceiro, como não poderia deixar de ser uma vez tratar-se de uma Tese de Doutorado, o gosto pelo desafio.

Os objetivos deste trabalho são os seguintes: (a) dedução da formulação integral de contorno dependente do tempo para a equação de Euler-Bernoulli, (b) proposição de diferentes esquemas de implementação numérica para a solução da formulação integral mencionada, (c) implementação computacional das soluções numéricas propostas, e (d) análise e validação numérica através de exemplos específicos.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e são apresentadas as soluções analíticas utilizadas como base para comparação com os valores numéricos obtidos com o Método dos Elementos de Contorno. Em seguida, é introduzida a solução fundamental dependente do tempo e são discutidas algumas de suas propriedades.

O Capítulo 3 contém o núcleo matemático deste trabalho. Primeiramente é discutida a dedução da sentença inversa de resíduos ponderados. As equações integrais de contorno são listadas na sequência e são propostas três implementações numéricas diferentes. Finalmente, as formulações anteriores são particularizadas para carregamentos concentrados, impulsivos e concentrados/impulsivos. Fechando o capítulo encontram-se algumas observações sobre as características da marcha no tempo utilizada e suas implicações no desempenho computacional.

No Capítulo 4 os resultados numéricos obtidos com os códigos computacionais desenvolvidos em linguagem Fortran são comparados de maneira gráfica às soluções analíticas adotadas. As conclusões imediatas são apontadas e discutidas.

O Capítulo 5 apresenta uma revisão sucinta dos assuntos abordados nos capítulos anteriores bem como as contribuições do presente trabalho, as sugestões para trabalhos futuros e as considerações finais.

## 2 VIGAS DE EULER-BERNOULLI

### 2.1 EQUAÇÃO GOVERNANTE

O fenômeno de flexão dinâmica de vigas delgadas uniformes é regido pela equação de Euler-Bernoulli

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1)$$

onde  $u(x, t)$  é a deflexão transversal da viga sujeita ao carregamento externo  $f(x, t)$ ,  $EI$  é a rigidez à flexão da viga,  $\rho A$  é a densidade linear do material do qual a viga é constituída,  $x$  é a coordenada espacial e  $t$  denota o tempo. A viga possui comprimento  $L$  e o tempo total de análise é dado por  $T$ . A Figura 1 apresenta um esquema da viga sob consideração.

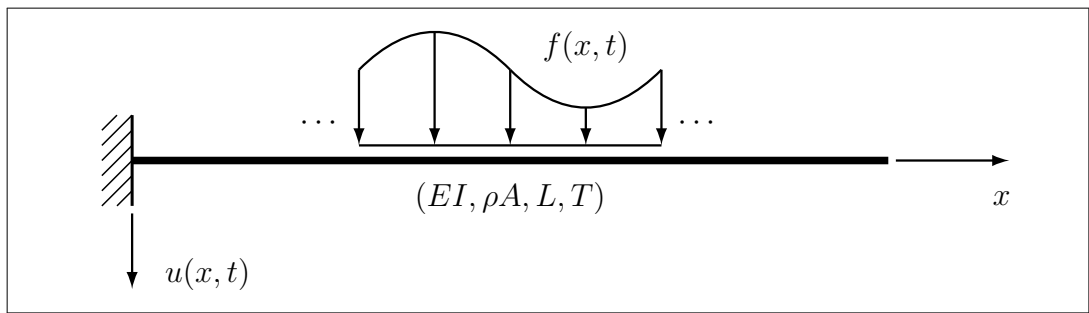


FIGURA 1 – ESQUEMA DA VIGA SOB CONSIDERAÇÃO

Dividindo a equação (1) por  $\rho A$  e definindo

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

obtém-se a expressão

$$c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{f(x, t)}{\rho A}, \quad (2)$$

que é a forma da equação governante do problema adotada neste trabalho.

A partir de  $u(x, t)$  definem-se as seguintes grandezas:

$$\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad Q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \text{e} \quad v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

denominadas, respectivamente, rotação, momento fletor, força cortante, e velocidade.

## 2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica da equação (2) pode ser escrita como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) q_k(t),$$

onde  $\phi_k(x)$  é o  $k$ -ésimo modo normal e  $q_k(t)$  é a  $k$ -ésima coordenada generalizada.

As coordenadas generalizadas, para condições iniciais nulas, são dadas por

$$q_k(t) = \frac{1}{\rho A b_k \omega_k} \int_0^t Q_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau,$$

onde

$$b_k = \int_0^L \phi_k^2(x) dx, \quad \omega_k = \beta_k^2 c, \quad \text{e} \quad Q_k(\tau) = \int_0^L \phi_k(x) f(x, \tau) dx,$$

sendo  $\omega_k$  a  $k$ -ésima frequência natural e  $Q_k(\tau)$  a força generalizada associada à  $k$ -ésima coordenada generalizada.

Expressões para os modos normais  $\phi_k(x)$  e para os coeficientes  $\beta_k$ , tendo em vista os tipos de vigas analisados neste trabalho, são fornecidas na sequência:

a) viga apoiada/apoiada (AA):

$$\phi_k(x) = \sin \beta_k x;$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{L};$$

b) viga engastada/apoiada (EA):

$$\phi_k(x) = (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x) - \alpha_k (\cos \beta_k x - \cosh \beta_k x);$$

$$\alpha_k = \frac{\sin \beta_k L - \sinh \beta_k L}{\cos \beta_k L - \cosh \beta_k L}; \quad \tan \beta_k L = \tanh \beta_k L;$$

c) viga engastada/engastada (EE):

$$\phi_k(x) = (\sinh \beta_k x - \sin \beta_k x) - \alpha_k (\cosh \beta_k x - \cos \beta_k x);$$

$$\alpha_k = \frac{\sinh \beta_k L - \sin \beta_k L}{\cosh \beta_k L - \cos \beta_k L}; \quad \cos \beta_k L \cosh \beta_k L = +1;$$

d) viga engastada/livre (EL):

$$\phi_k(x) = (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x) - \alpha_k (\cos \beta_k x - \cosh \beta_k x);$$

$$\alpha_k = \frac{\sin \beta_k L + \sinh \beta_k L}{\cos \beta_k L + \cosh \beta_k L}; \quad \cos \beta_k L \cosh \beta_k L = -1.$$

Para mais detalhes ver, por exemplo, Rao [11].

### 2.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução fundamental do problema é a função  $u^*$  que satisfaz a relação

$$c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau), \quad (3)$$

onde  $\delta$  é a função delta de Dirac, e corresponde à deflexão de uma viga de comprimento infinito medida em um ponto campo  $x$  em um tempo  $t$  quando se aplica uma carga pontual impulsiva em um ponto fonte  $\xi$  em um tempo  $\tau$ . Tal função é dada por

$$u^*(x, \xi, t, \tau) = \frac{1}{c} \left\{ \frac{r}{2} \left[ S \left( \frac{r}{\sqrt{2\pi a}} \right) - C \left( \frac{r}{\sqrt{2\pi a}} \right) \right] + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sin \left( \frac{r^2}{4a} \right) + \cos \left( \frac{r^2}{4a} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

onde  $r = |x - \xi|$  e  $a = c(t - \tau)$ . Para a dedução dessa solução ver, por exemplo, Langre, Axisa e Guilbaud [3] e Kythe [12]. Mais detalhes podem ser obtidos em Graff [13] e Campbell e Foster [14]. As funções S e C, denominadas integrais de Fresnel, são definidas como

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) d\zeta, \quad \text{e} \quad C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) d\zeta.$$

Essas integrais não possuem solução analítica, sendo, portanto, avaliadas numericamente. Neste trabalho adotou-se o algoritmo descrito em Boersma [15] e que é incluído no Anexo deste trabalho. A Figura 2 apresenta o comportamento das integrais de Fresnel.

A função  $u^*$  apresenta as seguintes propriedades:

- a) reciprocidade espacial:  $u^*(x, \xi, t, \tau) = u^*(\xi, x, t, \tau)$ ;
- b) reciprocidade temporal:  $u^*(x, \xi, t, \tau) = u^*(x, \xi, -\tau, -t)$ ;
- c) translação temporal:  $u^*(x, \xi, t, \tau) = u^*(x, \xi, t + \Delta t, \tau + \Delta t)$ .

Quanto às características de  $u^*$  vale destacar que, curiosamente,  $u^*$  não<sup>†</sup> é descontínua quando  $r = 0$ , algo incomum nas soluções fundamentais das equações diferenciais governantes de problemas (2D e 3D) de interesse em engenharia. Ver, por exemplo, as soluções fundamentais para problemas de potencial em Wrobel [16] e para problemas de elasticidade linear em Aliabadi [17]. De maneira similar as soluções fundamentais para vigas de Timoshenko, listadas em Carrer *et al.* [18], também não apresentam descontinuidade quando  $r = 0$ .

A partir de (4) obtém-se

$$\begin{aligned} \theta^*(x, \xi, t, \tau) &= +\frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left[ S\left(\frac{r}{\sqrt{2\pi a}}\right) - C\left(\frac{r}{\sqrt{2\pi a}}\right) \right] \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right), \\ M^*(x, \xi, t, \tau) &= -\frac{EI}{c} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}} \left[ \sin\left(\frac{r^2}{4a}\right) - \cos\left(\frac{r^2}{4a}\right) \right] \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2, \\ Q^*(x, \xi, t, \tau) &= -\frac{EI}{c} \left\{ \frac{r}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left[ \sin\left(\frac{r^2}{4a}\right) + \cos\left(\frac{r^2}{4a}\right) \right] \right\} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^3, \end{aligned}$$

<sup>†</sup>Todavia, tanto Langre, Axisa e Guilbaud [3] quanto Kythe [12] afirmam que a solução fundamental para a equação de Euler-Bernoulli é descontínua em  $r$  quando  $r = 0$ , embora uma inspeção das respectivas soluções apresentadas não revele tal característica.

onde  $\frac{\partial r}{\partial x} = \pm 1$  conforme  $x \gtrless \xi$ , respectivamente. A Figura 3 apresenta uma análise comparativa do comportamento de  $u^*$ ,  $\theta^*$ ,  $M^*$  e  $Q^*$  *versus*  $x$  para diferentes valores de  $t$  quando  $\xi$  e  $\tau$  são mantidos fixos.

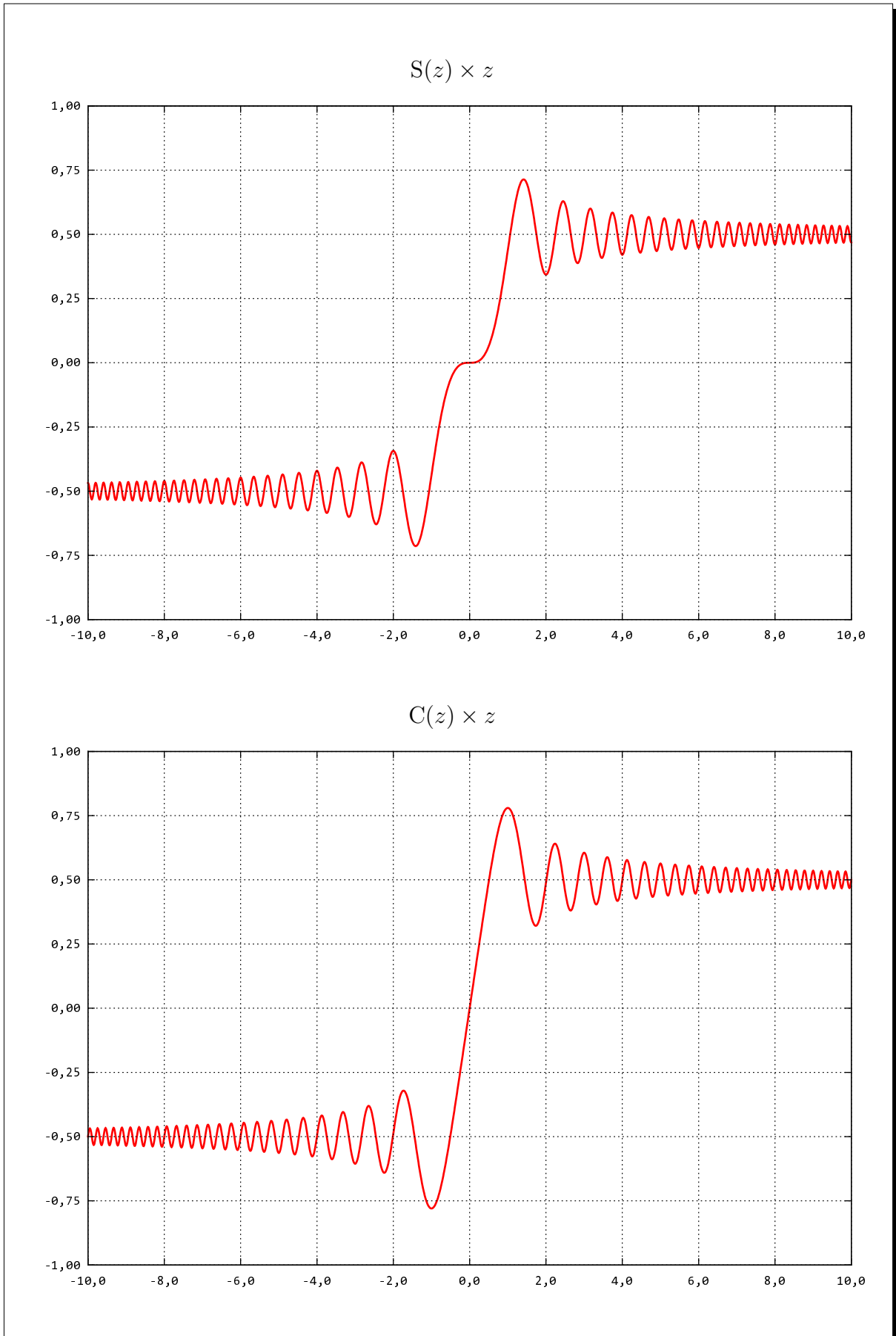


FIGURA 2 – COMPORTAMENTO DAS INTEGRAIS DE FRESNEL



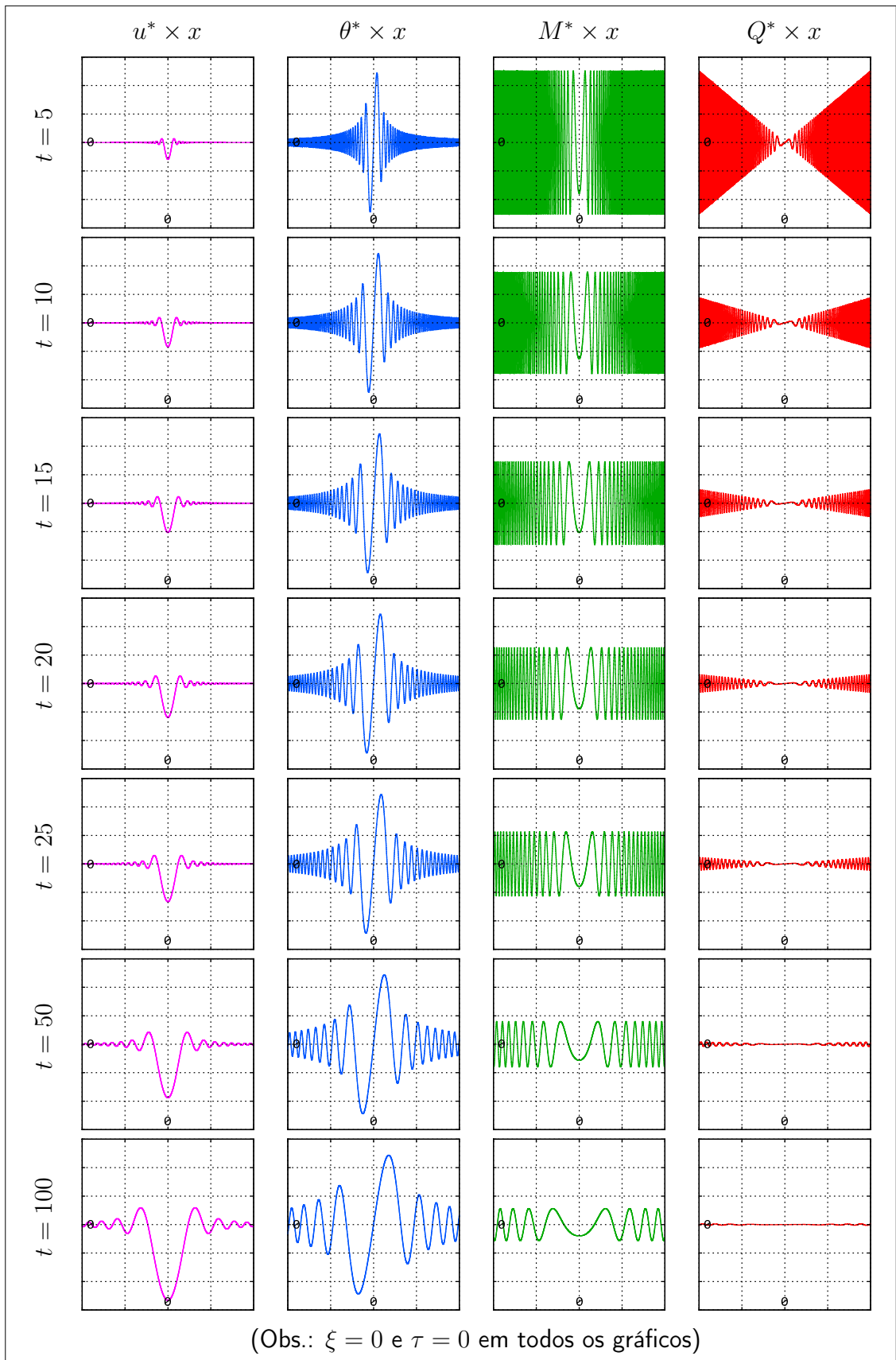


FIGURA 3 – COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 3.1 RESÍDUOS PONDERADOS

Inicialmente, efetua-se a seguinte troca de variáveis: a dimensão temporal passa a ser representada pela variável  $\tau$  e o instante de aplicação do delta de Dirac temporal passa a ser designado pela variável  $t$ . Assim, as equações (2) e (3) são reescritas, respectivamente, como

$$c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{f(x, \tau)}{\rho A}, \quad (5)$$

e

$$c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau). \quad (6)$$

Tal troca de variáveis se faz necessária para preservar o princípio da causalidade quando o problema representado pela equação (5) é combinado com o problema representado pela equação (6) na equação integral (16). Observa-se que, apesar da troca de variáveis mencionada, a solução de (6) permanece sendo a expressão (4) devido à propriedade de reciprocidade temporal da mesma.

A introdução de uma função aproximada<sup>†</sup> arbitrária para deflexões na equação (5) dá origem ao resíduo de domínio

$$R(x, \tau) = c^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} - \frac{f(x, \tau)}{\rho A} \neq 0,$$

aos resíduos das condições de contorno

$$\left[ R_1(\tau) \right]_{x=0} \neq 0, \quad \left[ R_2(\tau) \right]_{x=0} \neq 0, \quad \left[ R_3(\tau) \right]_{x=L} \neq 0, \quad \text{e} \quad \left[ R_4(\tau) \right]_{x=L} \neq 0, \quad (7)$$

---

<sup>†</sup> Em toda esta seção emprega-se a notação  $\widetilde{(\cdot)}$ / $\widehat{(\cdot)}$  para grandezas aproximadas/prescritas, respectivamente.

que dependem do tipo de viga sob consideração, e aos resíduos das condições iniciais

$$\left[ R_5(x) \right]_{\tau=0} = \tilde{u}(x, 0) - \hat{u}(x, 0) \neq 0, \quad \text{e} \quad \left[ R_6(x) \right]_{\tau=0} = \tilde{v}(x, 0) - \hat{v}(x, 0) \neq 0, \quad (8)$$

que são válidos para todos os tipos de vigas. A Tabela 1 define os resíduos de contorno para os diferentes tipos de vigas analisados neste trabalho.

TABELA 1 – RESÍDUOS DE CONTORNO

Viga	$[R_1(\tau)]_{x=0}$	$[R_2(\tau)]_{x=0}$	$[R_3(\tau)]_{x=L}$	$[R_4(\tau)]_{x=L}$
AA	$\tilde{u}(0, \tau) - \hat{u}(0, \tau)$	$\tilde{M}(0, \tau) - \hat{M}(0, \tau)$	$\tilde{u}(L, \tau) - \hat{u}(L, \tau)$	$\tilde{M}(L, \tau) - \hat{M}(L, \tau)$
EA	$\tilde{u}(0, \tau) - \hat{u}(0, \tau)$	$\tilde{\theta}(0, \tau) - \hat{\theta}(0, \tau)$	$\tilde{u}(L, \tau) - \hat{u}(L, \tau)$	$\tilde{M}(L, \tau) - \hat{M}(L, \tau)$
EE	$\tilde{u}(0, \tau) - \hat{u}(0, \tau)$	$\tilde{\theta}(0, \tau) - \hat{\theta}(0, \tau)$	$\tilde{u}(L, \tau) - \hat{u}(L, \tau)$	$\tilde{\theta}(L, \tau) - \hat{\theta}(L, \tau)$
EL	$\tilde{u}(0, \tau) - \hat{u}(0, \tau)$	$\tilde{\theta}(0, \tau) - \hat{\theta}(0, \tau)$	$\tilde{M}(L, \tau) - \hat{M}(L, \tau)$	$\tilde{Q}(L, \tau) - \hat{Q}(L, \tau)$

A sentença forte de resíduos ponderados é, então, dada por

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L u^* \left( c^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\ &- \int_0^T [w_1 R_1]_{x=0} d\tau - \int_0^T [w_3 R_3]_{x=L} d\tau - \int_0^L [w_5 R_5]_{\tau=0} dx \\ &- \int_0^T [w_2 R_2]_{x=0} d\tau - \int_0^T [w_4 R_4]_{x=L} d\tau - \int_0^L [w_6 R_6]_{\tau=0} dx, \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  e  $w_6$  são funções de ponderação *a priori* arbitrárias.

Integrando por partes adequadamente a primeira integral dupla em (9), simplificando parcelas e rearranjando termos obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \tilde{u} \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\ &- \int_0^T [w_1 R_1]_{x=0} d\tau - \int_0^T [w_3 R_3]_{x=L} d\tau - \int_0^L [w_5 R_5]_{\tau=0} dx \\ &- \int_0^T [w_2 R_2]_{x=0} d\tau - \int_0^T [w_4 R_4]_{x=L} d\tau - \int_0^L [w_6 R_6]_{\tau=0} dx \\ &+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T [u^* \tilde{Q}]_{x=0}^{x=L} d\tau - \frac{1}{\rho A} \int_0^T [\theta^* \tilde{M}]_{x=0}^{x=L} d\tau - \int_0^L [u^* \tilde{v}]_{\tau=0}^{\tau=T} dx \\ &- \frac{1}{\rho A} \int_0^T [Q^* \tilde{u}]_{x=0}^{x=L} d\tau + \frac{1}{\rho A} \int_0^T [M^* \tilde{\theta}]_{x=0}^{x=L} d\tau + \int_0^L [v^* \tilde{u}]_{\tau=0}^{\tau=T} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

É interessante observar, em (10), como o integrando da primeira integral dupla é escrito quando comparado àquele de (9), ou seja, em uma forma inversa. Nota-se, ainda, o aparecimento de valores aproximados nos extremos espaciais e temporais do problema.

Parte desses valores pode ser utilizada para eliminar os termos aproximados presentes nos resíduos das condições de contorno e das condições iniciais. Para tanto, as funções de ponderação  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  e  $w_6$  precisam ser definidas adequadamente. Tais definições são listadas na Tabela 2.

TABELA 2 – FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO

Viga	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$
AA	$+Q^*/(\rho A)$	$+\theta^*/(\rho A)$	$-Q^*/(\rho A)$	$-\theta^*/(\rho A)$	$-v^*$	$+u^*$
EA	$+Q^*/(\rho A)$	$-M^*/(\rho A)$	$-Q^*/(\rho A)$	$-\theta^*/(\rho A)$	$-v^*$	$+u^*$
EE	$+Q^*/(\rho A)$	$-M^*/(\rho A)$	$-Q^*/(\rho A)$	$+M^*/(\rho A)$	$-v^*$	$+u^*$
EL	$+Q^*/(\rho A)$	$-M^*/(\rho A)$	$-\theta^*/(\rho A)$	$+u^*/(\rho A)$	$-v^*$	$+u^*$

Substituindo (7) e (8) em (10) e aplicando as definições correspondentes listadas nas Tabelas 1 e 2 resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \tilde{u} \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\
&- \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ +u^* \tilde{Q} - \theta^* \widehat{M} + M^* \tilde{\theta} - Q^* \widehat{u} \right]_{x=0} d\tau + \int_0^L \left[ +u^* \widehat{v} - v^* \widehat{u} \right]_{\tau=0} dx \\
&+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ +u^* \tilde{Q} - \theta^* \widehat{M} + M^* \tilde{\theta} - Q^* \widehat{u} \right]_{x=L} d\tau - \int_0^L \left[ +u^* \tilde{v} - v^* \tilde{u} \right]_{\tau=T} dx,
\end{aligned} \quad (11)$$

para vigas do tipo apoiada/apoiada,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \tilde{u} \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\
&- \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ +u^* \tilde{Q} - \theta^* \widetilde{M} + M^* \widehat{\theta} - Q^* \widehat{u} \right]_{x=0} d\tau + \int_0^L \left[ +u^* \widehat{v} - v^* \widehat{u} \right]_{\tau=0} dx \\
&+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ +u^* \tilde{Q} - \theta^* \widehat{M} + M^* \tilde{\theta} - Q^* \widehat{u} \right]_{x=L} d\tau - \int_0^L \left[ +u^* \tilde{v} - v^* \tilde{u} \right]_{\tau=T} dx,
\end{aligned} \quad (12)$$

para vigas do tipo engastada/apoiada,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \tilde{u} \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\
- \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* \tilde{Q} - \theta^* \tilde{M} + M^* \hat{\theta} - Q^* \hat{u} \right]_{x=0} d\tau + \int_0^L \left[ + u^* \hat{v} - v^* \hat{u} \right]_{\tau=0} dx & \quad (13) \\
+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* \tilde{Q} - \theta^* \tilde{M} + M^* \hat{\theta} - Q^* \hat{u} \right]_{x=L} d\tau - \int_0^L \left[ + u^* \tilde{v} - v^* \tilde{u} \right]_{\tau=T} dx, &
\end{aligned}$$

para vigas do tipo engastada/engastada, e

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \tilde{u} \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\
- \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* \tilde{Q} - \theta^* \tilde{M} + M^* \hat{\theta} - Q^* \hat{u} \right]_{x=0} d\tau + \int_0^L \left[ + u^* \hat{v} - v^* \hat{u} \right]_{\tau=0} dx & \quad (14) \\
+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* \hat{Q} - \theta^* \hat{M} + M^* \tilde{\theta} - Q^* \tilde{u} \right]_{x=L} d\tau - \int_0^L \left[ + u^* \tilde{v} - v^* \tilde{u} \right]_{\tau=T} dx, &
\end{aligned}$$

para vigas do tipo engastada/livre.

Inspecionando (11), (12), (13) e (14) conclui-se que, com exceção das condições de contorno prescritas/aproximadas, essas expressões são idênticas. Portanto, suprimindo temporariamente essa distinção, uma única relação pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L u \left( c^2 \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) dx d\tau &= \int_0^T \int_0^L \frac{u^* f}{\rho A} dx d\tau \\
- \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=0} d\tau + \int_0^L \left[ + u^* v - v^* u \right]_{\tau=0} dx & \quad (15) \\
+ \frac{1}{\rho A} \int_0^T \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=L} d\tau - \int_0^L \left[ + u^* v - v^* u \right]_{\tau=T} dx. &
\end{aligned}$$

Tal expressão é denominada sentença inversa de resíduos ponderados e é a base para a obtenção da equação integral para deflexões.

### 3.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL

Introduzindo (6) em (15), fazendo uso das propriedades de integração da função delta de Dirac, levando em conta que as condições iniciais, neste trabalho, são consideradas nulas e que  $u^*$ ,  $\theta^*$ ,  $M^*$ ,  $Q^*$  e  $v^*$  não são definidas para  $\tau \geq t$ , obtém-se a equação integral

$$\begin{aligned}
u(\xi, t) = & -\frac{1}{\rho A} \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=0} d\tau \\
& + \frac{1}{\rho A} \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=L} d\tau \\
& + \frac{1}{\rho A} \int_0^t \int_0^L u^* f dx d\tau.
\end{aligned} \tag{16}$$

A solução do problema, que envolve quatro incógnitas de contorno, requer ao menos duas equações integrais distintas. Assim, a partir de (16), escreve-se, para a rotação,

$$\begin{aligned}
\theta(\xi, t) = & -\frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=0} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=L} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \int_0^t \int_0^L u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{17}$$

para o momento fletor,

$$\begin{aligned}
M(\xi, t) = & +c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=0} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=L} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \int_0^t \int_0^L u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{18}$$

e para a força cortante,

$$\begin{aligned}
Q(\xi, t) = & +c^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=0} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left\{ \int_0^t \left[ +u^*Q - \theta^*M + M^*\theta - Q^*u \right]_{x=L} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left\{ \int_0^t \int_0^L u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

Neste trabalho a solução das incógnitas de contorno emprega as equações (16) e (17). As equações (18) e (19) são utilizadas apenas na fase de pós-processamento.

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

#### 3.3.1 Discretização espacial e temporal

Para implementar numericamente as equações integrais definidas anteriormente é necessário, primeiramente, discretizar os intervalos espaciais e temporais.

Adotando, portanto,

$$\Delta L = \frac{L}{\ell}, \quad \text{de tal modo que} \quad L = \sum_{i=1}^{\ell} \Delta L,$$

e

$$\Delta T = \frac{T}{n}, \quad \text{de tal modo que} \quad T = \sum_{j=1}^n \Delta T,$$

e impondo

$$\xi = x_p = p\Delta L, \quad \text{com} \quad p = 0, \dots, \ell,$$

e

$$t = t_q = q\Delta T, \quad \text{com} \quad q = 1, \dots, n,$$

obtém-se

$$\int_0^L (\cdot) dx = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} (\cdot) dx, \quad \text{e} \quad \int_0^t (\cdot) d\tau = \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} (\cdot) d\tau,$$

onde

$$x_{i1} = x_{i-1} = (i-1)\Delta L, \quad \text{e} \quad x_{i2} = x_i = i\Delta L,$$

e

$$t_{j1} = t_{j-1} = (j-1)\Delta T, \quad \text{e} \quad t_{j2} = t_j = j\Delta T.$$

As divisões espaciais são denominadas células, e as divisões temporais, passos de tempo. A Figura 4 ilustra o esquema de discretização proposto.

As equações integrais (16) e (17) são reescritas na forma

$$\begin{aligned}
u(x_p, t_q) = & -\frac{1}{\rho A} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_0} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_\ell} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \left\{ \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{20}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta(x_p, t_q) = & -\frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_0} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_\ell} d\tau \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{21}$$

respectivamente.

De maneira similar, (18) torna-se

$$\begin{aligned}
M(x_p, t_q) = & + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_0} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_\ell} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} \left\{ \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^* f dx d\tau \right\},
\end{aligned} \tag{22}$$

e (19),

$$\begin{aligned}
Q(x_p, t_q) = & + c^2 \frac{\partial^3}{\partial x_p^3} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_0} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^3}{\partial x_p^3} \left\{ \sum_{j=1}^q \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \left[ + u^* Q - \theta^* M + M^* \theta - Q^* u \right]_{x=x_\ell} d\tau \right\} \\
& - c^2 \frac{\partial^3}{\partial x_p^3} \left\{ \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^* f dx d\tau \right\}.
\end{aligned} \tag{23}$$



Em seguida, é necessário definir hipóteses para os comportamentos de  $u$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $Q$ , ao longo de cada passo de tempo, nos contornos do problema. Também é necessário definir o comportamento do carregamento externo no domínio do problema. As Subseções 3.3.2 e 3.3.3, na sequência, discutem os detalhes inerentes às hipóteses de comportamento constante e linear, respectivamente. A Subseção 3.3.4, por sua vez, apresenta uma hipótese mista derivada da combinação das hipóteses anteriores.

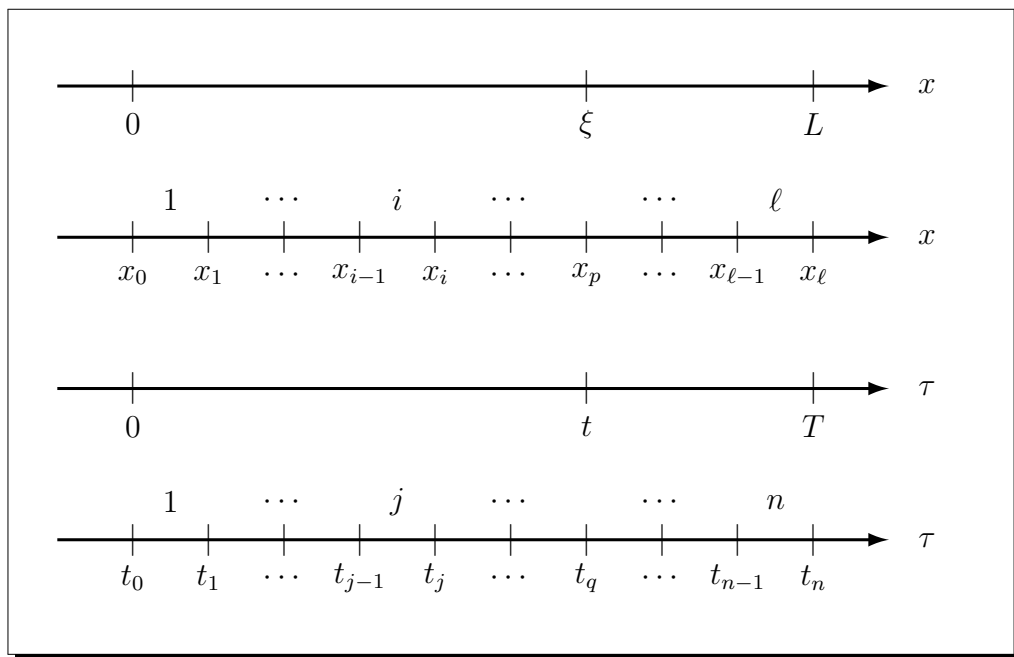


FIGURA 4 – DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL

### 3.3.2 Aproximação numérica constante

Admitindo que as variáveis  $u$  e  $\theta$ , associadas às condições de contorno essenciais, comportem-se da forma

$$u(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = u_0^{j2},$$

$$\theta(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = \theta_0^{j2},$$

$$u(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = u_\ell^{j2},$$

$$\theta(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = \theta_\ell^{j2},$$

que as variáveis  $M$  e  $Q$ , associadas às condições de contorno naturais, comportem-se da forma

$$\begin{aligned}
 M(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= M_0^{j2}, \\
 Q(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= Q_0^{j2}, \\
 M(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= M_\ell^{j2}, \\
 Q(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= Q_\ell^{j2},
 \end{aligned} \tag{24}$$

e que, além disso, o carregamento externo seja da forma

$$f(x_{i1} \leq x \leq x_{i2}, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = f_i^j,$$

então (20) será reescrita como

$$\begin{aligned}
 u_p^q &= -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0}^{qj} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0}^{qj} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell}^{qj} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell}^{qj} \theta_\ell^{j2} \right\} \\
 &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0}^{qj} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0}^{qj} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell}^{qj} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell}^{qj} M_\ell^{j2} \right\} \\
 &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi}^{qj} f_i^j \right\},
 \end{aligned} \tag{25}$$

onde

$$\widehat{G}_{p0}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} u^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widehat{G}_{p\ell}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} u^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p0}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \theta^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \theta^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widehat{H}_{p0}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} M^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{H}_{p\ell}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} M^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{p0}^{qj} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} Q^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \widehat{H}_{p\ell}^{qj} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} Q^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,\end{aligned}$$

e

$$F_{pi}^{qj} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau) dx d\tau.$$

Por sua vez, (21) é reescrita como

$$\begin{aligned}\theta_p^q &= -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,p}^{qj} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0,p}^{qj} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell,p}^{qj} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj} \theta_\ell^{j2} \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,p}^{qj} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0,p}^{qj} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell,p}^{qj} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj} M_\ell^{j2} \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi,p}^{qj} f_i^j \right\},\end{aligned}\quad (26)$$

(22) torna-se

$$\begin{aligned}M_p^q &= +c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0,pp}^{qj} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj} \theta_\ell^{j2} \right\} \\ &- c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0,pp}^{qj} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj} M_\ell^{j2} \right\} \\ &- c^2 \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi,pp}^{qj} f_i^j \right\},\end{aligned}\quad (27)$$

e (23) assume a forma

$$\begin{aligned}Q_p^q &= +c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj} \theta_\ell^{j2} \right\} \\ &- c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj} M_\ell^{j2} \right\} \\ &- c^2 \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi,ppp}^{qj} f_i^j \right\}.\end{aligned}\quad (28)$$

Em (26), (27) e (28) adota-se a notação  $(\cdot)_{(\cdot),p}^{(\cdot)}$ ,  $(\cdot)_{(\cdot),pp}^{(\cdot)}$  e  $(\cdot)_{(\cdot),ppp}^{(\cdot)}$  para designar, respectivamente, as derivadas parciais primeira, segunda e terceira com relação a  $x_p$ .

As equações (25), (26), (27) e (28) podem ser agrupadas, aos pares, nas seguintes equações matriciais:

$$\mathbf{u}_p^q = -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi}^{qj} \mathbf{f}_i^j, \quad (29)$$

e

$$\mathbf{q}_p^q = +c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj} \mathbf{u}_x^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi}^{qj} \mathbf{f}_i^j, \quad (30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p^q &= \left\{ u_p^q, \theta_p^q \right\}^\top, & \mathbf{u}_x^{j2} &= \left\{ u_0^{j2}, \theta_0^{j2}, u_\ell^{j2}, \theta_\ell^{j2} \right\}^\top, \\ \mathbf{q}_p^q &= \left\{ Q_p^q, M_p^q \right\}^\top, & \mathbf{q}_x^{j2} &= \left\{ Q_0^{j2}, M_0^{j2}, Q_\ell^{j2}, M_\ell^{j2} \right\}^\top, \\ & & \mathbf{f}_i^j &= \left\{ f_1^j, \dots, f_\ell^j \right\}^\top, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0}^{qj} & +\widetilde{H}_{p0}^{qj} & +\widehat{H}_{p\ell}^{qj} & -\widetilde{H}_{p\ell}^{qj} \\ -\widehat{H}_{p0,p}^{qj} & +\widetilde{H}_{p0,p}^{qj} & +\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj} & -\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0}^{qj} & +\widetilde{G}_{p0}^{qj} & +\widehat{G}_{p\ell}^{qj} & -\widetilde{G}_{p\ell}^{qj} \\ -\widehat{G}_{p0,p}^{qj} & +\widetilde{G}_{p0,p}^{qj} & +\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj} & -\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj} & +\widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj} & +\widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj} & -\widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj} \\ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj} & +\widetilde{H}_{p0,pp}^{qj} & +\widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj} & -\widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj} & +\widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj} & +\widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj} & -\widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj} \\ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj} & +\widetilde{G}_{p0,pp}^{qj} & +\widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj} & -\widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{F}}_{pi}^{qj} &= \begin{bmatrix} F_{p1}^{qj} & \dots & F_{p\ell}^{qj} \\ F_{p1,p}^{qj} & \dots & F_{p\ell,p}^{qj} \end{bmatrix}, & \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi}^{qj} &= \begin{bmatrix} F_{p1,ppp}^{qj} & \dots & F_{p\ell,ppp}^{qj} \\ F_{p1,pp}^{qj} & \dots & F_{p\ell,pp}^{qj} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fórmulas matemáticas para os coeficientes presentes nessas matrizes são fornecidas no Apêndice deste trabalho.

Entretanto, as equações (29) e (30) só podem ser utilizadas quando o histórico dos valores de  $u$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $Q$ , nos contornos do problema, é conhecido.

Portanto, aplicando (29), simultaneamente, nos contornos do problema, resulta

$$\left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{H}_{xx}^{qq} + \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_x^{q2} = \left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{G}_{xx}^{qq} \right) \mathbf{q}_x^{q2} + \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{H}_{xx}^{qj} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{G}_{xx}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi}^{qj} \mathbf{f}_i^j, \quad (31)$$

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade,

$$\mathbf{H}_{xx}^{qj} = \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{00}^{qj} & +\widetilde{H}_{00}^{qj} & +\widehat{H}_{0\ell}^{qj} & -\widetilde{H}_{0\ell}^{qj} \\ -\widehat{H}_{00,p}^{qj} & +\widetilde{H}_{00,p}^{qj} & +\widehat{H}_{0\ell,p}^{qj} & -\widetilde{H}_{0\ell,p}^{qj} \\ -\widehat{H}_{\ell 0}^{qj} & +\widetilde{H}_{\ell 0}^{qj} & +\widehat{H}_{\ell\ell}^{qj} & -\widetilde{H}_{\ell\ell}^{qj} \\ -\widehat{H}_{\ell 0,p}^{qj} & +\widetilde{H}_{\ell 0,p}^{qj} & +\widehat{H}_{\ell\ell,p}^{qj} & -\widetilde{H}_{\ell\ell,p}^{qj} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{xx}^{qj} = \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{00}^{qj} & +\widetilde{G}_{00}^{qj} & +\widehat{G}_{0\ell}^{qj} & -\widetilde{G}_{0\ell}^{qj} \\ -\widehat{G}_{00,p}^{qj} & +\widetilde{G}_{00,p}^{qj} & +\widehat{G}_{0\ell,p}^{qj} & -\widetilde{G}_{0\ell,p}^{qj} \\ -\widehat{G}_{\ell 0}^{qj} & +\widetilde{G}_{\ell 0}^{qj} & +\widehat{G}_{\ell\ell}^{qj} & -\widetilde{G}_{\ell\ell}^{qj} \\ -\widehat{G}_{\ell 0,p}^{qj} & +\widetilde{G}_{\ell 0,p}^{qj} & +\widehat{G}_{\ell\ell,p}^{qj} & -\widetilde{G}_{\ell\ell,p}^{qj} \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{F}_{xi}^{qj} = \begin{bmatrix} F_{01}^{qj} & \dots & F_{0\ell}^{qj} \\ F_{01,p}^{qj} & \dots & F_{0\ell,p}^{qj} \\ F_{\ell 1}^{qj} & \dots & F_{\ell\ell}^{qj} \\ F_{\ell 1,p}^{qj} & \dots & F_{\ell\ell,p}^{qj} \end{bmatrix}.$$

As condições de contorno prescritas são introduzidas em  $\mathbf{u}_x^{q2}$  e  $\mathbf{q}_x^{q2}$  e o sistema é reordenado na forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{By} + \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{x}$  contém as incógnitas do problema e  $\mathbf{y}$  contém as condições de contorno prescritas. Resolve-se, então, para  $\mathbf{x}$  e repete-se o processo para o próximo passo de tempo.

A formulação matemática descrita nesta seção, referenciada em outras partes deste trabalho como formulação MEC-CCC, foi implementada computacionalmente em linguagem Fortran e encontra-se disponível no Apêndice deste trabalho.

### 3.3.3 Aproximação numérica linear

Admitindo que as variáveis  $u$  e  $\theta$ , associadas às condições de contorno essenciais, comportem-se da forma

$$\begin{aligned}
 u(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) u_0^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) u_0^{j2}, \\
 \theta(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) \theta_0^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) \theta_0^{j2}, \\
 u(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) u_\ell^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) u_\ell^{j2}, \\
 \theta(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) \theta_\ell^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) \theta_\ell^{j2},
 \end{aligned} \tag{32}$$

que as variáveis  $M$  e  $Q$ , associadas às condições de contorno naturais, comportem-se da forma

$$\begin{aligned}
 M(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) M_0^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) M_0^{j2}, \\
 Q(x = x_0, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) Q_0^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) Q_0^{j2}, \\
 M(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) M_\ell^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) M_\ell^{j2}, \\
 Q(x = x_\ell, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) &= \Phi^{j1}(\tau) Q_\ell^{j1} + \Phi^{j2}(\tau) Q_\ell^{j2},
 \end{aligned}$$

e que, além disso, o carregamento externo seja da forma

$$\begin{aligned}
 f(x_{i1} \leq x \leq x_{i2}, t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) \\
 &= \Lambda_{i1}^{j1}(x, \tau) f_{i1}^{j1} + \Lambda_{i2}^{j1}(x, \tau) f_{i2}^{j1} \\
 &\quad + \Lambda_{i1}^{j2}(x, \tau) f_{i1}^{j2} + \Lambda_{i2}^{j2}(x, \tau) f_{i2}^{j2},
 \end{aligned} \tag{33}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{i1}^{j1}(x, \tau) &= \Psi_{i1}(x) \Phi^{j1}(\tau), & \Lambda_{i2}^{j1}(x, \tau) &= \Psi_{i2}(x) \Phi^{j1}(\tau), \\
 \Lambda_{i1}^{j2}(x, \tau) &= \Psi_{i1}(x) \Phi^{j2}(\tau), & \Lambda_{i2}^{j2}(x, \tau) &= \Psi_{i2}(x) \Phi^{j2}(\tau),
 \end{aligned}$$

sendo

$$\Psi_{i1}(x) = \frac{x_{i2} - x}{x_{i2} - x_{i1}}, \quad \text{e} \quad \Psi_{i2}(x) = \frac{x - x_{i1}}{x_{i2} - x_{i1}},$$

e

$$\Phi^{j1}(\tau) = \frac{t_{j2} - \tau}{t_{j2} - t_{j1}}, \quad \text{e} \quad \Phi^{j2}(\tau) = \frac{\tau - t_{j1}}{t_{j2} - t_{j1}},$$

então (20) será reescrita como

$$\begin{aligned}
u_p^q = & -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0}^{qj2} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0}^{qj2} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell}^{qj2} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell}^{qj2} \theta_\ell^{j2} \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0}^{qj2} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0}^{qj2} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell}^{qj2} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell}^{qj2} M_\ell^{j2} \right\} \\
& - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0}^{qj1} u_0^{j1} + \widetilde{H}_{p0}^{qj1} \theta_0^{j1} + \widehat{H}_{p\ell}^{qj1} u_\ell^{j1} - \widetilde{H}_{p\ell}^{qj1} \theta_\ell^{j1} \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0}^{qj1} Q_0^{j1} + \widetilde{G}_{p0}^{qj1} M_0^{j1} + \widehat{G}_{p\ell}^{qj1} Q_\ell^{j1} - \widetilde{G}_{p\ell}^{qj1} M_\ell^{j1} \right\} \\
& + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ F_{pi1}^{qj1} f_{i1}^{j1} + F_{pi2}^{qj1} f_{i2}^{j1} + F_{pi1}^{qj2} f_{i1}^{j2} + F_{pi2}^{qj2} f_{i2}^{j2} \right\},
\end{aligned} \tag{34}$$

onde

$$\widehat{G}_{p0}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) u^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) u^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widehat{G}_{p0}^{qj2} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) u^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj2} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) u^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p0}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) \theta^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) \theta^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p0}^{qj2} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) \theta^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj2} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) \theta^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{H}_{p0}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) M^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\widetilde{H}_{p\ell}^{qj1} = \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) M^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{p0}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) M^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \tilde{H}_{p\ell}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) M^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \hat{H}_{p0}^{qj1} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) Q^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \hat{H}_{p\ell}^{qj1} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j1}(\tau) Q^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \hat{H}_{p0}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) Q^*(x = x_0, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau, \\ \hat{H}_{p\ell}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \Phi^{j2}(\tau) Q^*(x = x_\ell, \xi = x_p, t = t_q, \tau) d\tau,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}F_{pi1}^{qj1} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Lambda_{i1}^{j1}(x, \tau) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau) dx d\tau, \\ F_{pi2}^{qj1} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Lambda_{i2}^{j1}(x, \tau) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau) dx d\tau, \\ F_{pi1}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Lambda_{i1}^{j2}(x, \tau) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau) dx d\tau, \\ F_{pi2}^{qj2} &= \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Lambda_{i2}^{j2}(x, \tau) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau) dx d\tau.\end{aligned}$$

Por sua vez, (21) é reescrita como

$$\begin{aligned}\theta_p^q &= -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\hat{H}_{p0,p}^{qj2} u_0^{j2} + \tilde{H}_{p0,p}^{qj2} \theta_0^{j2} + \hat{H}_{p\ell,p}^{qj2} u_\ell^{j2} - \tilde{H}_{p\ell,p}^{qj2} \theta_\ell^{j2} \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\hat{G}_{p0,p}^{qj2} Q_0^{j2} + \tilde{G}_{p0,p}^{qj2} M_0^{j2} + \hat{G}_{p\ell,p}^{qj2} Q_\ell^{j2} - \tilde{G}_{p\ell,p}^{qj2} M_\ell^{j2} \right\} \\ &- \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\hat{H}_{p0,p}^{qj1} u_0^{j1} + \tilde{H}_{p0,p}^{qj1} \theta_0^{j1} + \hat{H}_{p\ell,p}^{qj1} u_\ell^{j1} - \tilde{H}_{p\ell,p}^{qj1} \theta_\ell^{j1} \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \left\{ -\hat{G}_{p0,p}^{qj1} Q_0^{j1} + \tilde{G}_{p0,p}^{qj1} M_0^{j1} + \hat{G}_{p\ell,p}^{qj1} Q_\ell^{j1} - \tilde{G}_{p\ell,p}^{qj1} M_\ell^{j1} \right\} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ F_{pi1,p}^{qj1} f_{i1}^{j1} + F_{pi2,p}^{qj1} f_{i2}^{j1} + F_{pi1,p}^{qj2} f_{i1}^{j2} + F_{pi2,p}^{qj2} f_{i2}^{j2} \right\},\end{aligned}\tag{35}$$



(22) torna-se

$$\begin{aligned}
M_p^q = & + c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj2} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0,pp}^{qj2} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj2} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj2} \theta_\ell^{j2} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj2} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0,pp}^{qj2} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj2} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj2} M_\ell^{j2} \right\} \\
& + c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj1} u_0^{j1} + \widetilde{H}_{p0,pp}^{qj1} \theta_0^{j1} + \widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj1} u_\ell^{j1} - \widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj1} \theta_\ell^{j1} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj1} Q_0^{j1} + \widetilde{G}_{p0,pp}^{qj1} M_0^{j1} + \widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj1} Q_\ell^{j1} - \widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj1} M_\ell^{j1} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi1,pp}^{qj1} f_{i1}^{j1} + F_{pi2,pp}^{qj1} f_{i2}^{j1} + F_{pi1,pp}^{qj2} f_{i1}^{j2} + F_{pi2,pp}^{qj2} f_{i2}^{j2} \right\},
\end{aligned} \tag{36}$$

e (23) assume a forma

$$\begin{aligned}
Q_p^q = & + c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj2} u_0^{j2} + \widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj2} \theta_0^{j2} + \widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj2} u_\ell^{j2} - \widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj2} \theta_\ell^{j2} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj2} Q_0^{j2} + \widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj2} M_0^{j2} + \widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj2} Q_\ell^{j2} - \widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj2} M_\ell^{j2} \right\} \\
& + c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj1} u_0^{j1} + \widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj1} \theta_0^{j1} + \widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj1} u_\ell^{j1} - \widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj1} \theta_\ell^{j1} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \left\{ -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj1} Q_0^{j1} + \widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj1} M_0^{j1} + \widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj1} Q_\ell^{j1} - \widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj1} M_\ell^{j1} \right\} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^\ell \left\{ F_{pi1,ppp}^{qj1} f_{i1}^{j1} + F_{pi2,ppp}^{qj1} f_{i2}^{j1} + F_{pi1,ppp}^{qj2} f_{i1}^{j2} + F_{pi2,ppp}^{qj2} f_{i2}^{j2} \right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Em (35), (36) e (37) adota-se a notação  $(\cdot)_{(\cdot),p}^{(\cdot)}$ ,  $(\cdot)_{(\cdot),pp}^{(\cdot)}$  e  $(\cdot)_{(\cdot),ppp}^{(\cdot)}$  para designar, respectivamente, as derivadas parciais primeira, segunda e terceira com relação a  $x_p$ .

As equações (34), (35), (36) e (37) podem ser agrupadas, aos pares, nas seguintes equações matriciais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_p^q = & -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj2} \mathbf{q}_x^{j2} - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj1} \mathbf{u}_x^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj1} \mathbf{q}_x^{j1} \\
& + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2},
\end{aligned} \tag{38}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_p^q = & + c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj2} \mathbf{q}_x^{j2} + c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj1} \mathbf{u}_x^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj1} \mathbf{q}_x^{j1} \\
& - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2},
\end{aligned} \tag{39}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_p^q &= \{u_p^q, \theta_p^q\}^\top, \quad \mathbf{u}_x^{j1} = \{u_0^{j1}, \theta_0^{j1}, u_\ell^{j1}, \theta_\ell^{j1}\}^\top, \quad \mathbf{u}_x^{j2} = \{u_0^{j2}, \theta_0^{j2}, u_\ell^{j2}, \theta_\ell^{j2}\}^\top, \\
\mathbf{q}_p^q &= \{Q_p^q, M_p^q\}^\top, \quad \mathbf{q}_x^{j1} = \{Q_0^{j1}, M_0^{j1}, Q_\ell^{j1}, M_\ell^{j1}\}^\top, \quad \mathbf{q}_x^{j2} = \{Q_0^{j2}, M_0^{j2}, Q_\ell^{j2}, M_\ell^{j2}\}^\top,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{i1}^{j1} &= \{f_{11}^{j1}, \dots, f_{\ell 1}^{j1}\}^\top, & \mathbf{f}_{i2}^{j1} &= \{f_{12}^{j1}, \dots, f_{\ell 2}^{j1}\}^\top, \\
\mathbf{f}_{i1}^{j2} &= \{f_{11}^{j2}, \dots, f_{\ell 1}^{j2}\}^\top, & \mathbf{f}_{i2}^{j2} &= \{f_{12}^{j2}, \dots, f_{\ell 2}^{j2}\}^\top,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj1} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0}^{qj1} & +\widetilde{H}_{p0}^{qj1} & +\widehat{H}_{p\ell}^{qj1} & -\widetilde{H}_{p\ell}^{qj1} \\ -\widehat{H}_{p0,p}^{qj1} & +\widetilde{H}_{p0,p}^{qj1} & +\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj1} \end{bmatrix}, \\
\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj1} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0}^{qj1} & +\widetilde{G}_{p0}^{qj1} & +\widehat{G}_{p\ell}^{qj1} & -\widetilde{G}_{p\ell}^{qj1} \\ -\widehat{G}_{p0,p}^{qj1} & +\widetilde{G}_{p0,p}^{qj1} & +\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj2} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0}^{qj2} & +\widetilde{H}_{p0}^{qj2} & +\widehat{H}_{p\ell}^{qj2} & -\widetilde{H}_{p\ell}^{qj2} \\ -\widehat{H}_{p0,p}^{qj2} & +\widetilde{H}_{p0,p}^{qj2} & +\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj2} \end{bmatrix}, \\
\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj2} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0}^{qj2} & +\widetilde{G}_{p0}^{qj2} & +\widehat{G}_{p\ell}^{qj2} & -\widetilde{G}_{p\ell}^{qj2} \\ -\widehat{G}_{p0,p}^{qj2} & +\widetilde{G}_{p0,p}^{qj2} & +\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}_{px}^{qj1} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj1} & +\widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj1} & +\widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj1} & -\widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj1} \\ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj1} & +\widetilde{H}_{p0,pp}^{qj1} & +\widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj1} & -\widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj1} \end{bmatrix}, \\
\overline{\overline{\overline{\mathbf{G}}}}_{px}^{qj1} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj1} & +\widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj1} & +\widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj1} & -\widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj1} \\ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj1} & +\widetilde{G}_{p0,pp}^{qj1} & +\widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj1} & -\widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{px}^{qj2} &= \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj2} + \widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj2} + \widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj2} - \widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj2} \\ -\widehat{H}_{p0,pp}^{qj2} + \widetilde{H}_{p0,pp}^{qj2} + \widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj2} - \widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj2} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{px}^{qj2} &= \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj2} + \widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj2} + \widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj2} - \widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj2} \\ -\widehat{G}_{p0,pp}^{qj2} + \widetilde{G}_{p0,pp}^{qj2} + \widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj2} - \widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj1} &= \begin{bmatrix} F_{p11}^{qj1} & \dots & F_{p\ell1}^{qj1} \\ F_{p11,p}^{qj1} & \dots & F_{p\ell1,p}^{qj1} \end{bmatrix}, & \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{qj1} &= \begin{bmatrix} F_{p11,ppp}^{qj1} & \dots & F_{p\ell1,ppp}^{qj1} \\ F_{p11,pp}^{qj1} & \dots & F_{p\ell1,pp}^{qj1} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj1} &= \begin{bmatrix} F_{p12}^{qj1} & \dots & F_{p\ell2}^{qj1} \\ F_{p12,p}^{qj1} & \dots & F_{p\ell2,p}^{qj1} \end{bmatrix}, & \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{qj1} &= \begin{bmatrix} F_{p12,ppp}^{qj1} & \dots & F_{p\ell2,ppp}^{qj1} \\ F_{p12,pp}^{qj1} & \dots & F_{p\ell2,pp}^{qj1} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj2} &= \begin{bmatrix} F_{p11}^{qj2} & \dots & F_{p\ell1}^{qj2} \\ F_{p11,p}^{qj2} & \dots & F_{p\ell1,p}^{qj2} \end{bmatrix}, & \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{qj2} &= \begin{bmatrix} F_{p11,ppp}^{qj2} & \dots & F_{p\ell1,ppp}^{qj2} \\ F_{p11,pp}^{qj2} & \dots & F_{p\ell1,pp}^{qj2} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj2} &= \begin{bmatrix} F_{p12}^{qj2} & \dots & F_{p\ell2}^{qj2} \\ F_{p12,p}^{qj2} & \dots & F_{p\ell2,p}^{qj2} \end{bmatrix}, & \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{qj2} &= \begin{bmatrix} F_{p12,ppp}^{qj2} & \dots & F_{p\ell2,ppp}^{qj2} \\ F_{p12,pp}^{qj2} & \dots & F_{p\ell2,pp}^{qj2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fórmulas matemáticas para os coeficientes presentes nessas matrizes são fornecidas no Apêndice deste trabalho.

Entretanto, as equações (38) e (39) só podem ser utilizadas quando o histórico dos valores de  $u$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $Q$ , nos contornos do problema, é conhecido.

Portanto, aplicando (38), simultaneamente, nos contornos do problema, resulta

$$\left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{H}_{xx}^{qq2} + \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_x^{q2} = \left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{G}_{xx}^{qq2} \right) \mathbf{q}_x^{q2} + \mathbf{b},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{H}_{xx}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{G}_{xx}^{qj2} \mathbf{q}_x^{j2} - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{H}_{xx}^{qj1} \mathbf{u}_x^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{G}_{xx}^{qj1} \mathbf{q}_x^{j1} \\ &+ \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2}, \end{aligned} \quad (40)$$

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade,

$$\mathbf{H}_{xx}^{qj1} = \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{00}^{qj1} & +\widetilde{H}_{00}^{qj1} & +\widehat{H}_{0\ell}^{qj1} & -\widetilde{H}_{0\ell}^{qj1} \\ -\widehat{H}_{00,p}^{qj1} & +\widetilde{H}_{00,p}^{qj1} & +\widehat{H}_{0\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{H}_{0\ell,p}^{qj1} \\ -\widehat{H}_{\ell 0}^{qj1} & +\widetilde{H}_{\ell 0}^{qj1} & +\widehat{H}_{\ell\ell}^{qj1} & -\widetilde{H}_{\ell\ell}^{qj1} \\ -\widehat{H}_{\ell 0,p}^{qj1} & +\widetilde{H}_{\ell 0,p}^{qj1} & +\widehat{H}_{\ell\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{H}_{\ell\ell,p}^{qj1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{xx}^{qj1} = \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{00}^{qj1} & +\widetilde{G}_{00}^{qj1} & +\widehat{G}_{0\ell}^{qj1} & -\widetilde{G}_{0\ell}^{qj1} \\ -\widehat{G}_{00,p}^{qj1} & +\widetilde{G}_{00,p}^{qj1} & +\widehat{G}_{0\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{G}_{0\ell,p}^{qj1} \\ -\widehat{G}_{\ell 0}^{qj1} & +\widetilde{G}_{\ell 0}^{qj1} & +\widehat{G}_{\ell\ell}^{qj1} & -\widetilde{G}_{\ell\ell}^{qj1} \\ -\widehat{G}_{\ell 0,p}^{qj1} & +\widetilde{G}_{\ell 0,p}^{qj1} & +\widehat{G}_{\ell\ell,p}^{qj1} & -\widetilde{G}_{\ell\ell,p}^{qj1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{xx}^{qj2} = \begin{bmatrix} -\widehat{H}_{00}^{qj2} & +\widetilde{H}_{00}^{qj2} & +\widehat{H}_{0\ell}^{qj2} & -\widetilde{H}_{0\ell}^{qj2} \\ -\widehat{H}_{00,p}^{qj2} & +\widetilde{H}_{00,p}^{qj2} & +\widehat{H}_{0\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{H}_{0\ell,p}^{qj2} \\ -\widehat{H}_{\ell 0}^{qj2} & +\widetilde{H}_{\ell 0}^{qj2} & +\widehat{H}_{\ell\ell}^{qj2} & -\widetilde{H}_{\ell\ell}^{qj2} \\ -\widehat{H}_{\ell 0,p}^{qj2} & +\widetilde{H}_{\ell 0,p}^{qj2} & +\widehat{H}_{\ell\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{H}_{\ell\ell,p}^{qj2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{xx}^{qj2} = \begin{bmatrix} -\widehat{G}_{00}^{qj2} & +\widetilde{G}_{00}^{qj2} & +\widehat{G}_{0\ell}^{qj2} & -\widetilde{G}_{0\ell}^{qj2} \\ -\widehat{G}_{00,p}^{qj2} & +\widetilde{G}_{00,p}^{qj2} & +\widehat{G}_{0\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{G}_{0\ell,p}^{qj2} \\ -\widehat{G}_{\ell 0}^{qj2} & +\widetilde{G}_{\ell 0}^{qj2} & +\widehat{G}_{\ell\ell}^{qj2} & -\widetilde{G}_{\ell\ell}^{qj2} \\ -\widehat{G}_{\ell 0,p}^{qj2} & +\widetilde{G}_{\ell 0,p}^{qj2} & +\widehat{G}_{\ell\ell,p}^{qj2} & -\widetilde{G}_{\ell\ell,p}^{qj2} \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{F}_{xi1}^{qj1} = \begin{bmatrix} F_{011}^{qj1} & \dots & F_{0\ell 1}^{qj1} \\ F_{011,p}^{qj1} & \dots & F_{0\ell 1,p}^{qj1} \\ F_{\ell 11}^{qj1} & \dots & F_{\ell\ell 1}^{qj1} \\ F_{\ell 11,p}^{qj1} & \dots & F_{\ell\ell 1,p}^{qj1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{xi2}^{qj1} = \begin{bmatrix} F_{012}^{qj1} & \dots & F_{0\ell 2}^{qj1} \\ F_{012,p}^{qj1} & \dots & F_{0\ell 2,p}^{qj1} \\ F_{\ell 12}^{qj1} & \dots & F_{\ell\ell 2}^{qj1} \\ F_{\ell 12,p}^{qj1} & \dots & F_{\ell\ell 2,p}^{qj1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{xi1}^{qj2} = \begin{bmatrix} F_{011}^{qj2} & \dots & F_{0\ell 1}^{qj2} \\ F_{011,p}^{qj2} & \dots & F_{0\ell 1,p}^{qj2} \\ F_{\ell 11}^{qj2} & \dots & F_{\ell\ell 1}^{qj2} \\ F_{\ell 11,p}^{qj2} & \dots & F_{\ell\ell 1,p}^{qj2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{xi2}^{qj2} = \begin{bmatrix} F_{012}^{qj2} & \dots & F_{0\ell 2}^{qj2} \\ F_{012,p}^{qj2} & \dots & F_{0\ell 2,p}^{qj2} \\ F_{\ell 12}^{qj2} & \dots & F_{\ell\ell 2}^{qj2} \\ F_{\ell 12,p}^{qj2} & \dots & F_{\ell\ell 2,p}^{qj2} \end{bmatrix}.$$

As condições de contorno prescritas são introduzidas em  $\mathbf{u}_x^{q2}$  e  $\mathbf{q}_x^{q2}$  e o sistema é reordenado na forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{By} + \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{x}$  contém as incógnitas do problema e  $\mathbf{y}$  contém as condições de contorno prescritas. Resolve-se, então, para  $\mathbf{x}$  e repete-se o processo para o próximo passo de tempo.

A formulação matemática descrita nesta seção, referenciada em outras partes deste trabalho como formulação MEC-LLL, foi implementada computacionalmente em linguagem Fortran e encontra-se disponível no Apêndice deste trabalho.

### 3.3.4 Aproximação numérica mista

Como é discutido no Capítulo 4, ambas as formulações precedentes, MEC-CCC e MEC-LLL, apresentam comportamento numérico insatisfatório, de modo que uma terceira formulação se faz necessária.

Tal formulação é obtida a partir de uma combinação das formulações anteriores, ou seja, admitindo que as variáveis associadas às condições de contorno essenciais comportem-se de maneira linear [equações (32)] e que as variáveis associadas às condições de contorno naturais comportem-se de maneira constante [equações (24)].<sup>†</sup> Para que essa nova formulação seja o mais geral possível, o carregamento externo é considerado como sendo da forma (33).

Obtém-se, então, as seguintes equações matriciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p^q = & -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj1} \mathbf{u}_x^{j1} \\ & + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2}, \end{aligned} \quad (41)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_p^q = & + c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{G}}_{px}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} + c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{H}}_{px}^{qj1} \mathbf{u}_x^{j1} \\ & - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} - c^2 \sum_{j=1}^q \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2}, \end{aligned} \quad (42)$$

<sup>†</sup>A inspiração para essas escolhas encontra-se na conclusão da Tese de Doutorado de Mansur [19]. Ver o Capítulo 4 para uma discussão mais elaborada a respeito desses aspectos.

que, como antes, só podem ser utilizadas quando o histórico dos valores de  $u$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $Q$ , nos contornos do problema, é conhecido.

Portanto, aplicando (41), simultaneamente, nos contornos do problema, resulta

$$\left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{H}_{xx}^{qq2} + \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_x^{q2} = \left( \frac{1}{\rho A} \mathbf{G}_{xx}^{qq} \right) \mathbf{q}_x^{q2} + \mathbf{b},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & -\frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{H}_{xx}^{qj2} \mathbf{u}_x^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{G}_{xx}^{qj} \mathbf{q}_x^{j2} - \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{H}_{xx}^{jj1} \mathbf{u}_x^{j1} \\ & + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi1}^{qj1} \mathbf{f}_{i1}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi2}^{qj1} \mathbf{f}_{i2}^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi1}^{qj2} \mathbf{f}_{i1}^{j2} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xi2}^{qj2} \mathbf{f}_{i2}^{j2}. \end{aligned} \quad (43)$$

As condições de contorno prescritas são introduzidas em  $\mathbf{u}_x^{q2}$  e  $\mathbf{q}_x^{q2}$  e o sistema é reordenado na forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{By} + \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{x}$  contém as incógnitas do problema e  $\mathbf{y}$  contém as condições de contorno prescritas. Resolve-se, então, para  $\mathbf{x}$  e repete-se o processo para o próximo passo de tempo.

A formulação matemática descrita nesta seção, referenciada em outras partes deste trabalho como formulação MEC-LCL, foi implementada computacionalmente em linguagem Fortran e encontra-se disponível no Apêndice deste trabalho.

### 3.3.5 Carregamentos externos concentrados

Carregamentos externos concentrados podem ser modelados matematicamente com o emprego da função delta de Dirac como

$$f(x, \tau) = \delta(x - x_k)P(\tau),$$

onde  $x_k = k\Delta L$ , com  $0 < k < \ell$ , é o ponto de aplicação do carregamento.

Dessa maneira, a contribuição do carregamento externo nas equações integrais (16), (17), (18) e (19) assume a forma

$$\int_0^t u^*(x = x_k, \xi = x_p, t = t_q, \tau) P(\tau) d\tau.$$

Adotam-se duas hipóteses para o comportamento do carregamento  $P(\tau)$  ao longo de cada passo de tempo: comportamento constante,  $P(t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = P_k^{j2}$ , e comportamento linear,  $P(t_{j1} \leq \tau \leq t_{j2}) = \Phi^{j1}(\tau)P_k^{j1} + \Phi^{j2}(\tau)P_k^{j2}$ .

Essas definições alteram as formulações precedentes da seguinte maneira:

- a) formulação MEC-CCC: as equações (29), (30) e (31) são reescritas, respectivamente, como

$$\mathbf{u}_p^q = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj} \mathbf{f}_k^{j2},$$

$$\mathbf{q}_p^q = (\dots) - c^2 \sum_{j=1}^q \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj} \mathbf{f}_k^{j2},$$

e

$$\mathbf{b} = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xk}^{qj} \mathbf{f}_k^{j2},$$

onde

$$\mathbf{f}_k^{j2} = \left\{ P_k^{j2} \right\}, \quad \mathbf{F}_{xk}^{qj} = \left[ \hat{G}_{0k}^{qj}, \hat{G}_{0k,p}^{qj}, \hat{G}_{\ell k}^{qj}, \hat{G}_{\ell k,p}^{qj} \right]^T,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj} = \left[ \hat{G}_{pk}^{qj}, \hat{G}_{pk,p}^{qj} \right]^T, \quad \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj} = \left[ \hat{G}_{pk,ppp}^{qj}, \hat{G}_{pk,pp}^{qj} \right]^T;$$

- b) formulação MEC-LLL: as equações (38), (39) e (40) são reescritas, respectivamente, como

$$\mathbf{u}_p^q = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj1} \mathbf{f}_k^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj2} \mathbf{f}_k^{j2},$$

$$\mathbf{q}_p^q = (\dots) - c^2 \sum_{j=1}^q \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj1} \mathbf{f}_k^{j1} - c^2 \sum_{j=1}^q \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj2} \mathbf{f}_k^{j2},$$

e

$$\mathbf{b} = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xk}^{qj1} \mathbf{f}_k^{j1} + \frac{1}{\rho A} \sum_{j=1}^q \mathbf{F}_{xk}^{qj2} \mathbf{f}_k^{j2},$$

onde

$$\mathbf{f}_k^{j1} = \{P_k^{j1}\}, \quad \mathbf{F}_{xk}^{qj1} = [\hat{G}_{0k}^{qj1}, \hat{G}_{0k,p}^{qj1}, \hat{G}_{\ell k}^{qj1}, \hat{G}_{\ell k,p}^{qj1}]^T,$$

$$\mathbf{f}_k^{j2} = \{P_k^{j2}\}, \quad \mathbf{F}_{xk}^{qj2} = [\hat{G}_{0k}^{qj2}, \hat{G}_{0k,p}^{qj2}, \hat{G}_{\ell k}^{qj2}, \hat{G}_{\ell k,p}^{qj2}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj1} = [\hat{G}_{pk}^{qj1}, \hat{G}_{pk,p}^{qj1}]^T, \quad \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj1} = [\hat{G}_{pk,ppp}^{qj1}, \hat{G}_{pk,pp}^{qj1}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{pk}^{qj2} = [\hat{G}_{pk}^{qj2}, \hat{G}_{pk,p}^{qj2}]^T, \quad \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{qj2} = [\hat{G}_{pk,ppp}^{qj2}, \hat{G}_{pk,pp}^{qj2}]^T;$$

- c) formulação MEC-LCL: as equações (41), (42) e (43) sofrem alterações similares àquelas da formulação MEC-LLL.

### 3.3.6 Carregamentos externos impulsivos

Carregamentos externos impulsivos podem ser modelados matematicamente com o emprego da função delta de Dirac como

$$f(x, \tau) = P(x)\delta(\tau - t_0).$$

Dessa maneira, a contribuição do carregamento externo nas equações integrais (16), (17), (18) e (19) assume a forma

$$\int_0^L u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau = t_0) P(x) dx.$$

Adotam-se duas hipóteses para o comportamento do carregamento  $P(x)$  ao longo de cada célula espacial: comportamento constante,  $P(x_{i1} \leq x \leq x_{i2}) = P_i^0$ , e comportamento linear,  $P(x_{i1} \leq x \leq x_{i2}) = \Psi_{i1}(x)P_{i1}^0 + \Psi_{i2}(x)P_{i2}^0$ .



Essas definições alteram as formulações precedentes da seguinte maneira:

- a) formulação MEC-CCC: as equações (29), (30) e (31) são reescritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_p^q &= (\dots) + \frac{1}{\rho A} \overline{\mathbf{F}}_{pi}^{q0} \mathbf{f}_i^0, \\ \mathbf{q}_p^q &= (\dots) - c^2 \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi}^{q0} \mathbf{f}_i^0,\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{b} = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \mathbf{F}_{xi}^{q0} \mathbf{f}_i^0,$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i^0 &= \{P_1^0, \dots, P_\ell^0\}^\top, \\ \mathbf{F}_{xi}^{q0} &= \begin{bmatrix} U_{01}^{q0} & \dots & U_{0\ell}^{q0} \\ U_{01,p}^{q0} & \dots & U_{0\ell,p}^{q0} \\ U_{\ell 1}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell}^{q0} \\ U_{\ell 1,p}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell,p}^{q0} \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{F}}_{pi}^{q0} &= \begin{bmatrix} U_{p1}^{q0} & \dots & U_{p\ell}^{q0} \\ U_{p1,p}^{q0} & \dots & U_{p\ell,p}^{q0} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi}^{q0} &= \begin{bmatrix} U_{p1,ppp}^{q0} & \dots & U_{p\ell,ppp}^{q0} \\ U_{p1,pp}^{q0} & \dots & U_{p\ell,pp}^{q0} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

com

$$U_{pi}^{q0} = \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau = t_0) dx;$$

- b) formulação MEC-LLL: as equações (38), (39) e (40) são reescritas, respectivamente, como

$$\mathbf{u}_p^q = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{q0} \mathbf{f}_{i1}^0 + \frac{1}{\rho A} \overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{q0} \mathbf{f}_{i2}^0,$$

$$\mathbf{q}_p^q = (\dots) - c^2 \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{q0} \mathbf{f}_{i1}^0 - c^2 \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{q0} \mathbf{f}_{i2}^0,$$

e

$$\mathbf{b} = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \mathbf{F}_{xi1}^{q0} \mathbf{f}_{i1}^0 + \frac{1}{\rho A} \mathbf{F}_{xi2}^{q0} \mathbf{f}_{i2}^0,$$

onde

$$\mathbf{f}_{i1}^0 = \left\{ P_{11}^0, \dots, P_{\ell 1}^0 \right\}^\top,$$

$$\mathbf{f}_{i2}^0 = \left\{ P_{12}^0, \dots, P_{\ell 2}^0 \right\}^\top,$$

$$\mathbf{F}_{xi1}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{011}^{q0} & \dots & U_{0\ell 1}^{q0} \\ U_{011,p}^{q0} & \dots & U_{0\ell 1,p}^{q0} \\ U_{\ell 11}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell 1}^{q0} \\ U_{\ell 11,p}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell 1,p}^{q0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{xi2}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{012}^{q0} & \dots & U_{0\ell 2}^{q0} \\ U_{012,p}^{q0} & \dots & U_{0\ell 2,p}^{q0} \\ U_{\ell 12}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell 2}^{q0} \\ U_{\ell 12,p}^{q0} & \dots & U_{\ell \ell 2,p}^{q0} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{pi1}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{p11}^{q0} & \dots & U_{p\ell 1}^{q0} \\ U_{p11,p}^{q0} & \dots & U_{p\ell 1,p}^{q0} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{pi2}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{p12}^{q0} & \dots & U_{p\ell 2}^{q0} \\ U_{p12,p}^{q0} & \dots & U_{p\ell 2,p}^{q0} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi1}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{p11,ppp}^{q0} & \dots & U_{p\ell 1,ppp}^{q0} \\ U_{p11,pp}^{q0} & \dots & U_{p\ell 1,pp}^{q0} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}}_{pi2}^{q0} = \begin{bmatrix} U_{p12,ppp}^{q0} & \dots & U_{p\ell 2,ppp}^{q0} \\ U_{p12,pp}^{q0} & \dots & U_{p\ell 2,pp}^{q0} \end{bmatrix},$$

com

$$U_{pi1}^{q0} = \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Psi_{i1}(x) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau = t_0) dx,$$

$$U_{pi2}^{q0} = \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Psi_{i2}(x) u^*(x, \xi = x_p, t = t_q, \tau = t_0) dx;$$

- c) formulação MEC-LCL: as equações (41), (42) e (43) sofrem alterações similares àquelas da formulação MEC-LLL.

Fórmulas matemáticas para os coeficientes  $U_{pi}^{q0}$ ,  $U_{pi1}^{q0}$  e  $U_{pi2}^{q0}$  são fornecidas no Apêndice deste trabalho.

### 3.3.7 Carregamentos externos concentrados/impulsivos

Carregamentos externos concentrados/impulsivos podem ser modelados matematicamente com o emprego da função delta de Dirac como

$$f(x, \tau) = \delta(x - x_k) \delta(\tau - t_0) P_k^0,$$

onde  $x_k = k\Delta L$ , com  $0 < k < \ell$ , é o ponto de aplicação do carregamento.

Dessa maneira, a contribuição do carregamento externo nas equações integrais (16), (17), (18) e (19) assume a forma

$$u^*(x = x_k, \xi = x_p, t = t_q, \tau = t_0) P_k^0.$$

Essas definições alteram as formulações precedentes da seguinte maneira:

- a) formulação MEC-CCC: as equações (29), (30) e (31) são reescritas, respectivamente, como

$$\mathbf{u}_p^q = (\dots) + \frac{1}{\rho A} \bar{\mathbf{F}}_{pk}^{q0} \mathbf{f}_k^0,$$

$$\mathbf{q}_p^q = (\dots) - c^2 \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{pk}^{q0} \mathbf{f}_k^0,$$



## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1 ORGANIZAÇÃO E DEFINIÇÕES

Os exemplos numéricos desenvolvidos para avaliar a precisão, a estabilidade e a convergência das diferentes formulações propostas foram organizados da seguinte maneira:

- a) quatro tipos de carregamentos externos:
  - DD: distribuído no espaço e distribuído no tempo;
  - CD: concentrado no espaço e distribuído no tempo;
  - DI: distribuído no espaço e impulsivo no tempo;
  - CI: concentrado no espaço e impulsivo no tempo;
- b) quatro tipos de vigas:
  - AA: apoio simples no extremo esquerdo e apoio simples no extremo direito;
  - EA: engaste na extremo esquerdo e apoio simples no extremo direito;
  - EE: engaste no extremo esquerdo e engaste no extremo direito;
  - EL: engaste no extremo esquerdo e extremidade livre no extremo direito;
- c) três tipos de formulações numéricas para o MEC:
  - CCC: condições de contorno essenciais constantes em cada passo de tempo; condições de contorno naturais constantes em cada passo de tempo; carregamento externo constante em cada célula e em cada passo de tempo;
  - LLL: condições de contorno essenciais lineares em cada passo de tempo; condições de contorno naturais lineares em cada passo de tempo; carregamento externo linear em cada célula e em cada passo de tempo;

- LCL: condições de contorno essenciais lineares em cada passo de tempo; condições de contorno naturais constantes em cada passo de tempo; carregamento externo linear em cada célula e em cada passo de tempo.

Cada uma das 48 combinações citadas anteriormente foi avaliada com 10 valores de passos de tempo diferentes, variando de  $100\mu s$  a  $10\mu s$ . Em cada uma dessas análises, uma vez obtidas as respectivas soluções de contorno, foram calculados os valores da deflexão, da rotação, do momento fletor e da força cortante para um ponto interno localizado à distância de  $1/4$  do comprimento da viga. As respostas numéricas foram, então, comparadas graficamente às respostas analíticas.

Os valores numéricos adotados para as grandezas envolvidas encontram-se listados nas Tabelas 3, 4 e 5. As condições de contorno prescritas e as condições iniciais são nulas em todos os exemplos. O tempo máximo de análise foi de 30ms.

TABELA 3 – COMPRIMENTO UTILIZADO EM CADA TIPO DE VIGA

Viga	$L$	Unidade
AA	4,0	m
EA	4,0	m
EE	4,0	m
EL	2,0	m

TABELA 4 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E DO MATERIAL

Grandeza	Valor	Unidade
$E$	2,0000E+11	Pa
$I$	1,7393E-04	m <sup>4</sup>
$\rho$	7,8500E+03	kg/m <sup>3</sup>
$A$	6,2000E-03	m <sup>2</sup>

TABELA 5 – VALOR DO CARREGAMENTO EXTERNO

Carregamento	$f$	Unidade	Posição	Unidade
DD	1,0E+04	N/m	—	—
CD	$1,0E+04 \times L$	N	$3L/4$	m
DI	1,0E+02	N/m	—	—
CI	$1,0E+02 \times L$	N	$3L/4$	m

## 4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Inicialmente, foi implementada e analisada a formulação MEC-CCC para carregamentos do tipo DD. Os resultados para três valores de passo de tempo ( $100\mu s$ ,  $50\mu s$ , e  $10\mu s$ ), tanto para as incógnitas de contorno quanto para os pontos internos, são apresentados nas Figuras 5–28. Em linhas gerais, conclui-se que: (a) para vigas do tipo AA, tanto a solução de contorno, Figuras 5–7, quanto a solução para pontos internos, Figuras 8–10, apresentam instabilidade; (b) para vigas do tipo EA, a solução de contorno, Figuras 11–13, mostra-se aceitável e a solução para pontos internos, Figuras 14–16, apresenta problemas no cálculo dos momentos fletores e forças cortantes; (c) para vigas do tipo EE, tanto a solução de contorno, Figuras 17–19, quanto a solução para pontos internos, Figuras 20–22, apresentam resultados satisfatórios; (d) para vigas do tipo EL, tanto a solução de contorno, Figuras 23–25, quanto a solução para pontos internos, Figuras 26–28, apresentam instabilidade.

Não é surpresa que a formulação MEC-CCC mostre-se, de maneira geral, inadequada, uma vez que as variáveis associadas às condições de contorno essenciais,  $u$  e  $\theta$ , são consideradas como tendo comportamento constante ao longo de cada passo de tempo. É sabido que tais grandezas, pela sua natureza, possuem variação contínua no tempo, algo que a hipótese de comportamento constante não é capaz de representar, ao contrário, tal hipótese acaba por introduzir um comportamento de “salto” no tempo para essas variáveis. Tendo isso em mente, destaca-se a qualidade dos resultados para vigas do tipo EE, fato que será discutido adiante.

Na sequência, visando melhorar os resultados da formulação MEC-CCC, a formulação MEC-LLL foi desenvolvida e implementada. Entretanto, os resultados obtidos com essa formulação mostraram-se completamente instáveis para todos os tipos de vigas e valores de passo de tempo analisados. Para efeito de registro são apresentados apenas os resultados de contorno, para o primeiro valor de passo de tempo, nas Figuras 29–32.

O que se percebe é que, apesar das variáveis associadas às condições de contorno essenciais serem adequadamente aproximadas pela formulação MEC-LLL, uma aproximação linear no tempo para as variáveis associadas às condições de contorno naturais,  $M$  e  $Q$ , é altamente deletéria para a qualidade geral da solução. Os resultados da formulação MEC-CCC

para vigas do tipo EE, mencionados anteriormente, corroboram essa conclusão: como para esse tipo de viga as condições de contorno prescritas, que são consideradas nulas (e, portanto, constantes) em todos os exemplos, correspondem a valores de  $u$  e  $\theta$ , então a formulação MEC-CCC aproxima essas condições de contorno tão bem quanto a formulação MEC-LLL; a diferença na qualidade das respostas está na maneira como as variáveis associadas às condições de contorno naturais foram aproximadas: quando foram consideradas com variação temporal constante, as respostas foram estáveis; quando foram consideradas com variação temporal linear, as respostas foram instáveis.

As conclusões apresentadas por Mansur [19] são similares e inspiraram o desenvolvimento de uma terceira formulação: MEC-LCL. As Figuras 33–40 apresentam os resultados dessa formulação para o menor valor de passo de tempo analisado ( $10\mu s$ ), tanto para as incógnitas de contorno quanto para os pontos internos. As respostas mostram-se, agora, bastante estáveis e precisas quando comparadas às respectivas soluções analíticas.

Para carregamentos do tipo CD, DI, e CI, as formulações MEC-CCC e MEC-LLL comportam-se de maneira similar ao que foi descrito anteriormente. Portanto, apenas são apresentados os resultados da formulação MEC-LCL para esses carregamentos: Figuras 41–48 para carregamentos do tipo CD; Figuras 49–56 para carregamentos do tipo DI; e Figuras 57–64 para carregamentos do tipo CI.

Os resultados para carregamentos CD mostram-se tão bons quanto aqueles obtidos com carregamentos DD. Já para carregamentos DI verificam-se instabilidades no cálculo das forças cortantes. O alto nível de oscilações na resposta é o principal fator responsável pela perda da acurácia dos resultados. Acredita-se, inicialmente, que uma avaliação mais precisa das integrais de Fresnel seja necessária para a obtenção de melhores resultados para as forças cortantes. Os resultados para as demais grandezas podem ser considerados aceitáveis. Finalmente, para carregamentos CI, as mesmas conclusões são verificadas para as forças cortantes; para os momentos fletores as respostas mostram-se relativamente instáveis, particularmente no início das análises (ver, por exemplo, as Figuras 59–62); as demais variáveis possuem resultados aceitáveis.



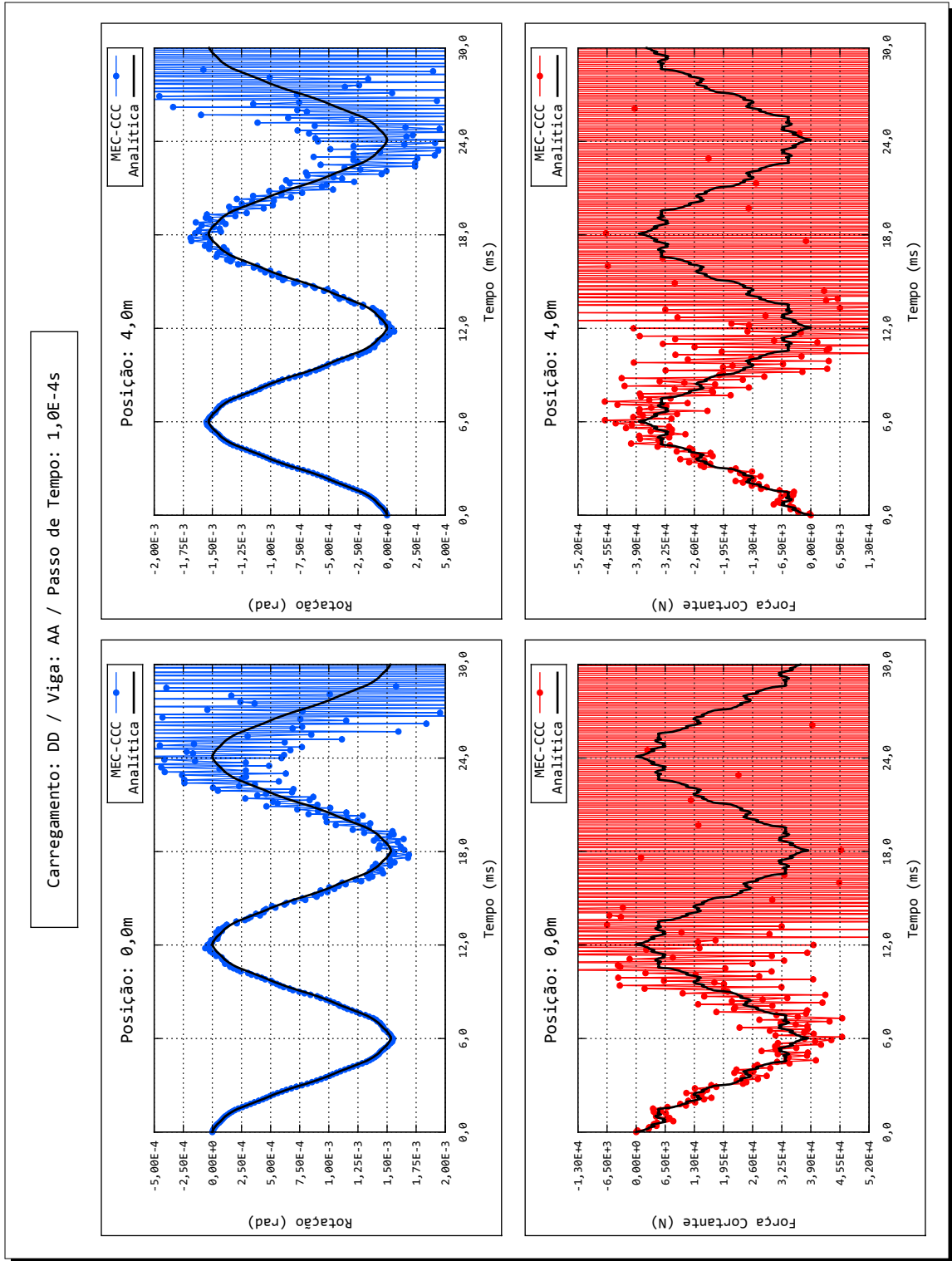


FIGURA 5 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100 $\mu$ s (CONTORNO)

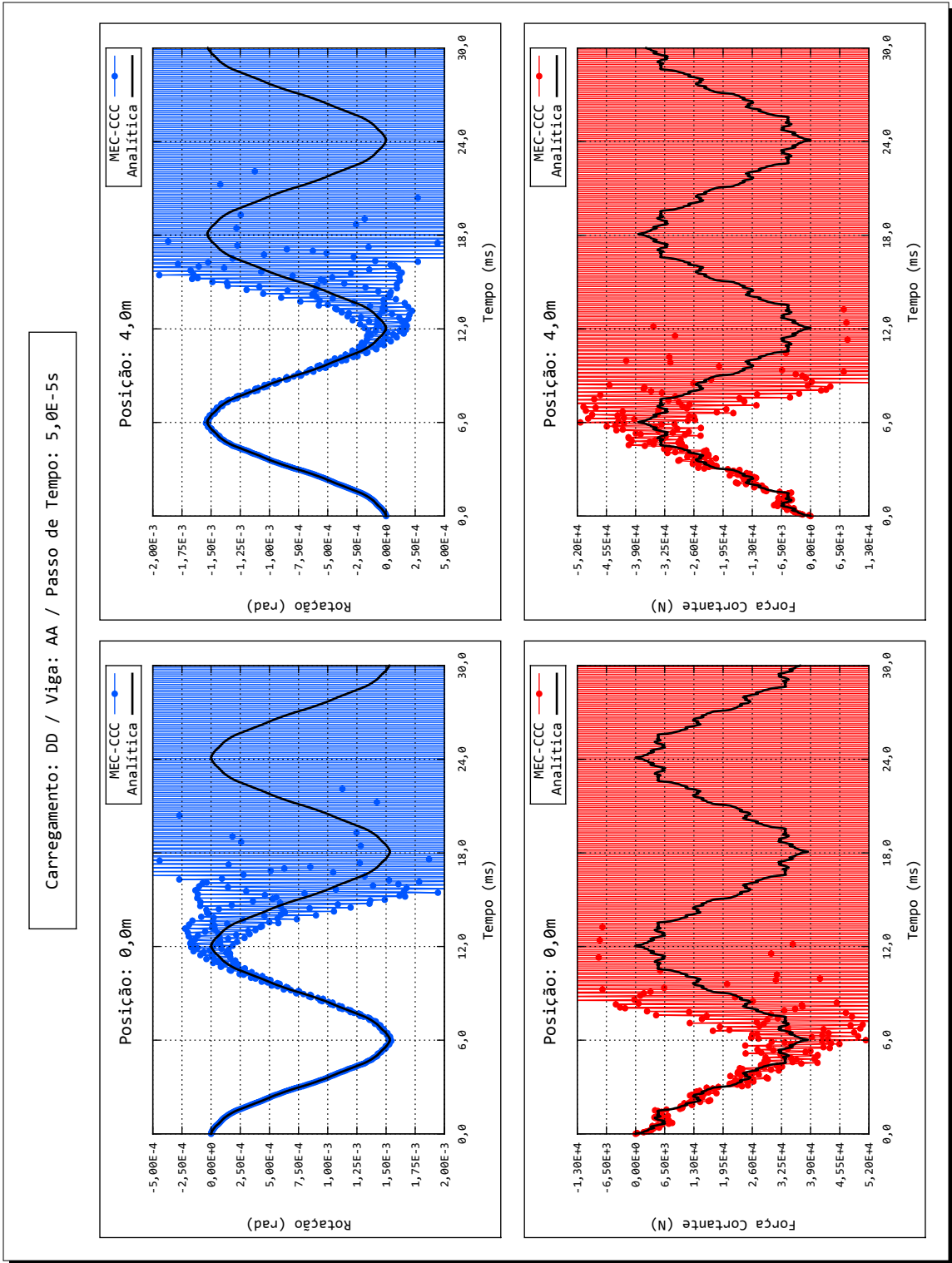


FIGURA 6 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50 $\mu$ s (CONTORNO)

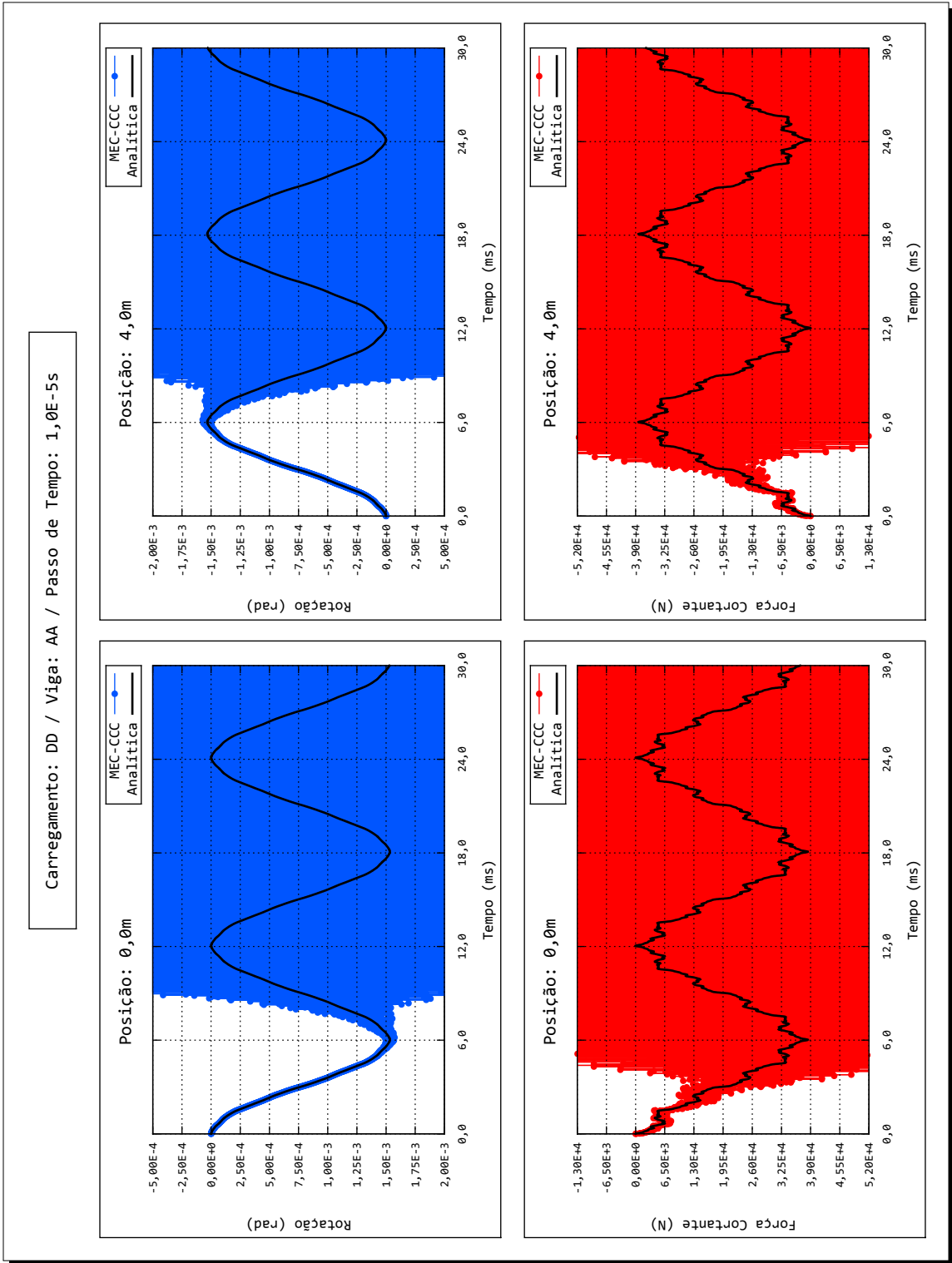


FIGURA 7 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

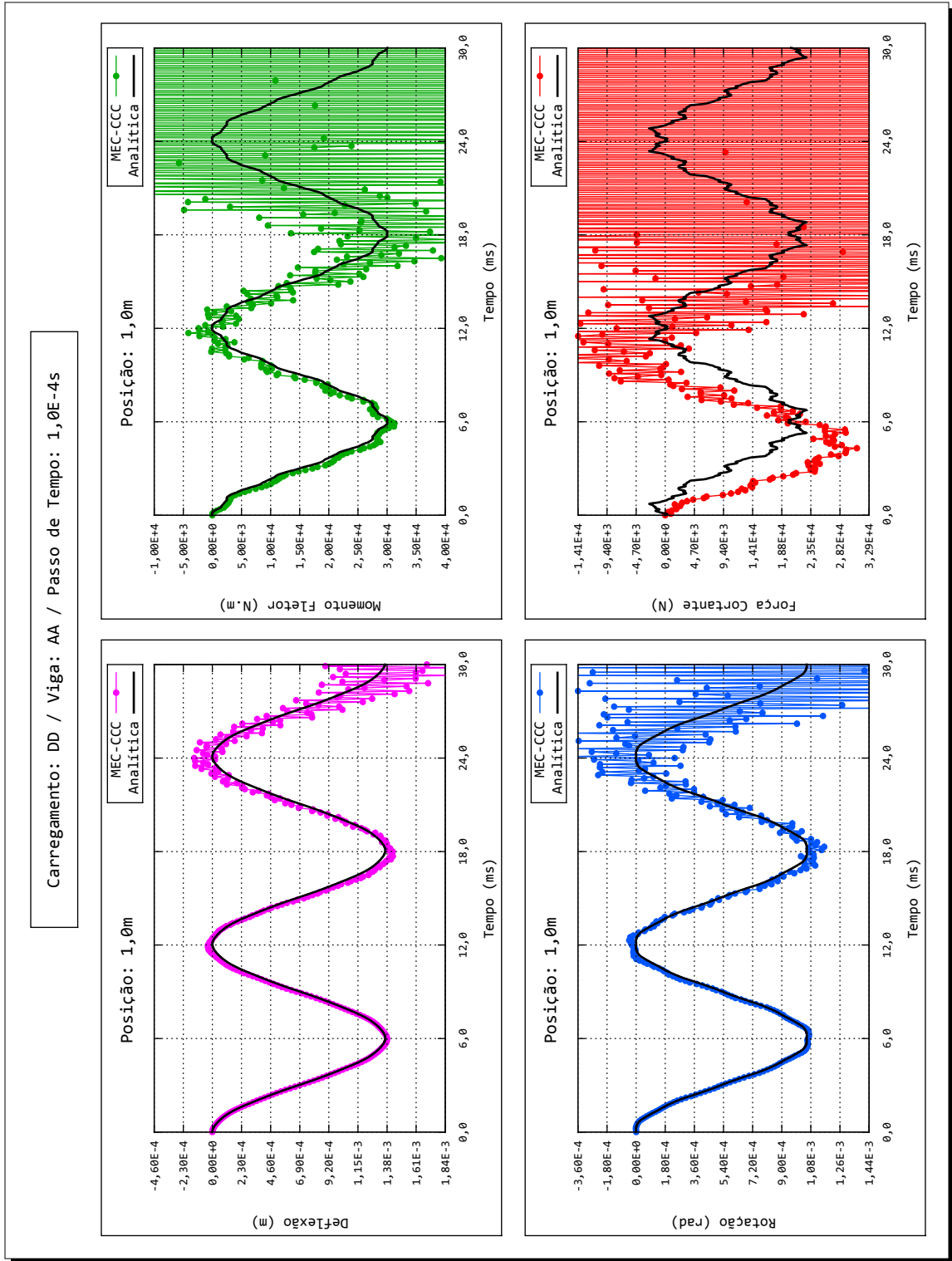


FIGURA 8 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100 $\mu$ s (DOMÍNIO)

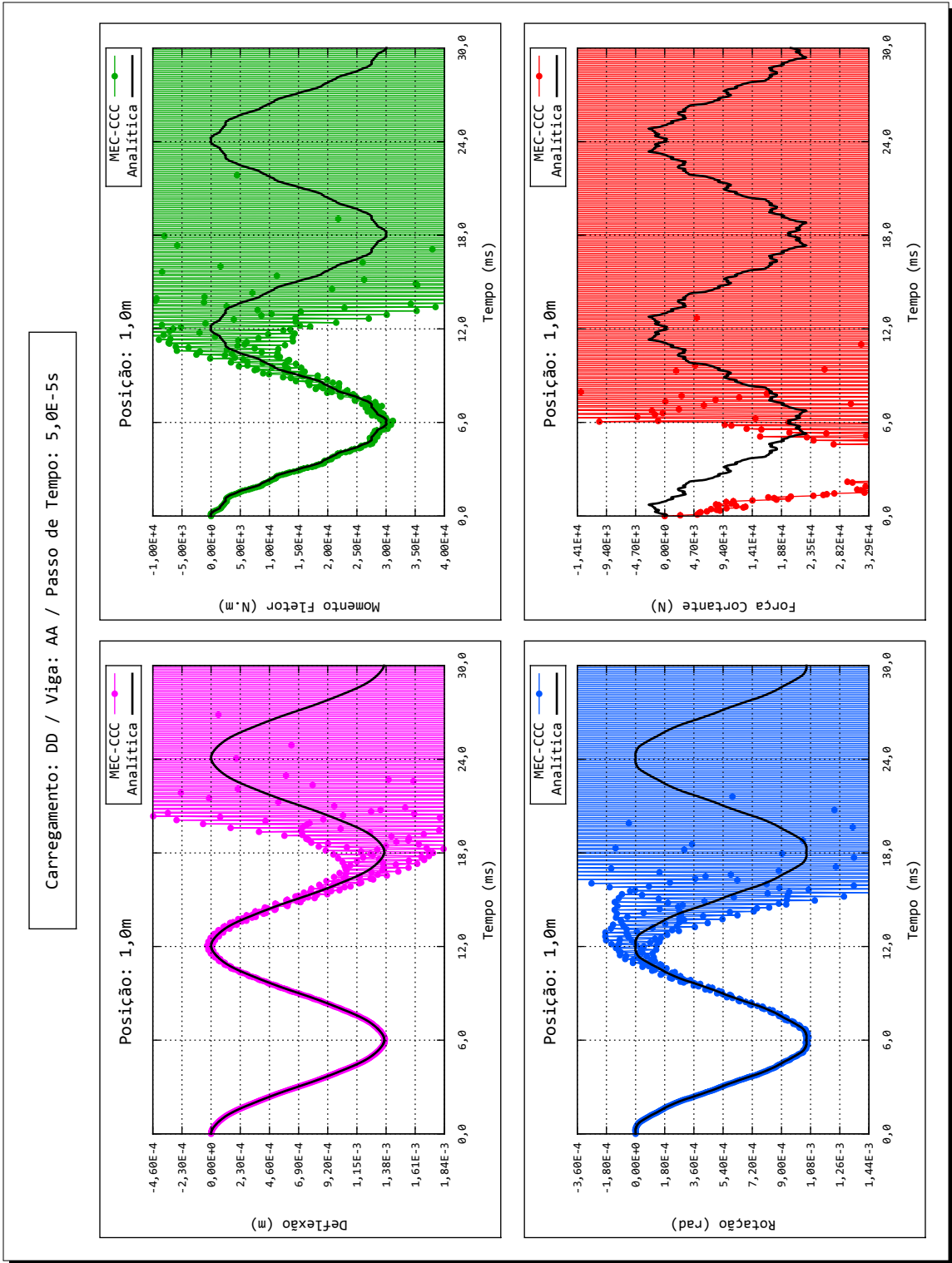


FIGURA 9 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50 $\mu$ s (DOMÍNIO)

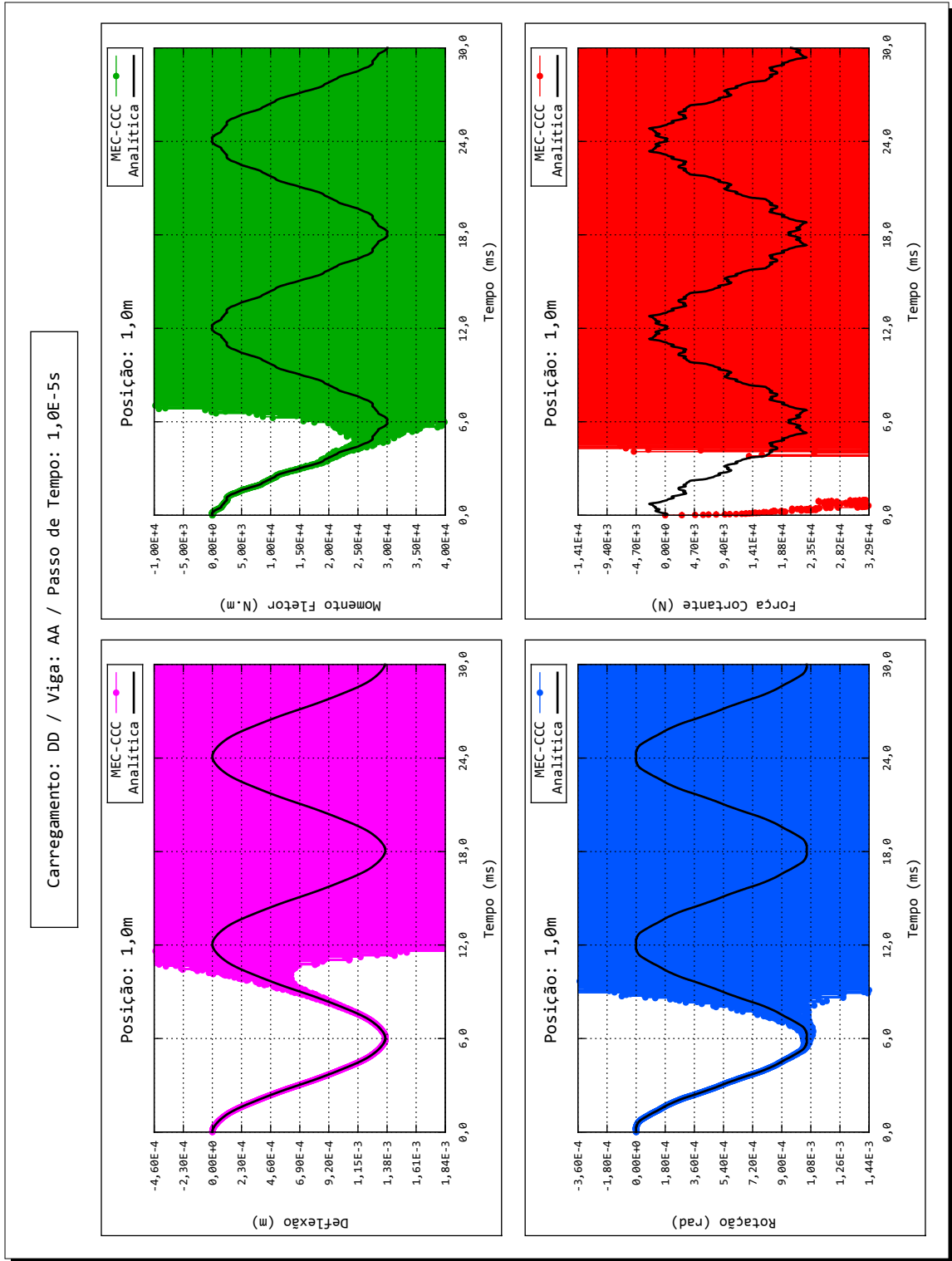


FIGURA 10 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (DOMÍNIO)

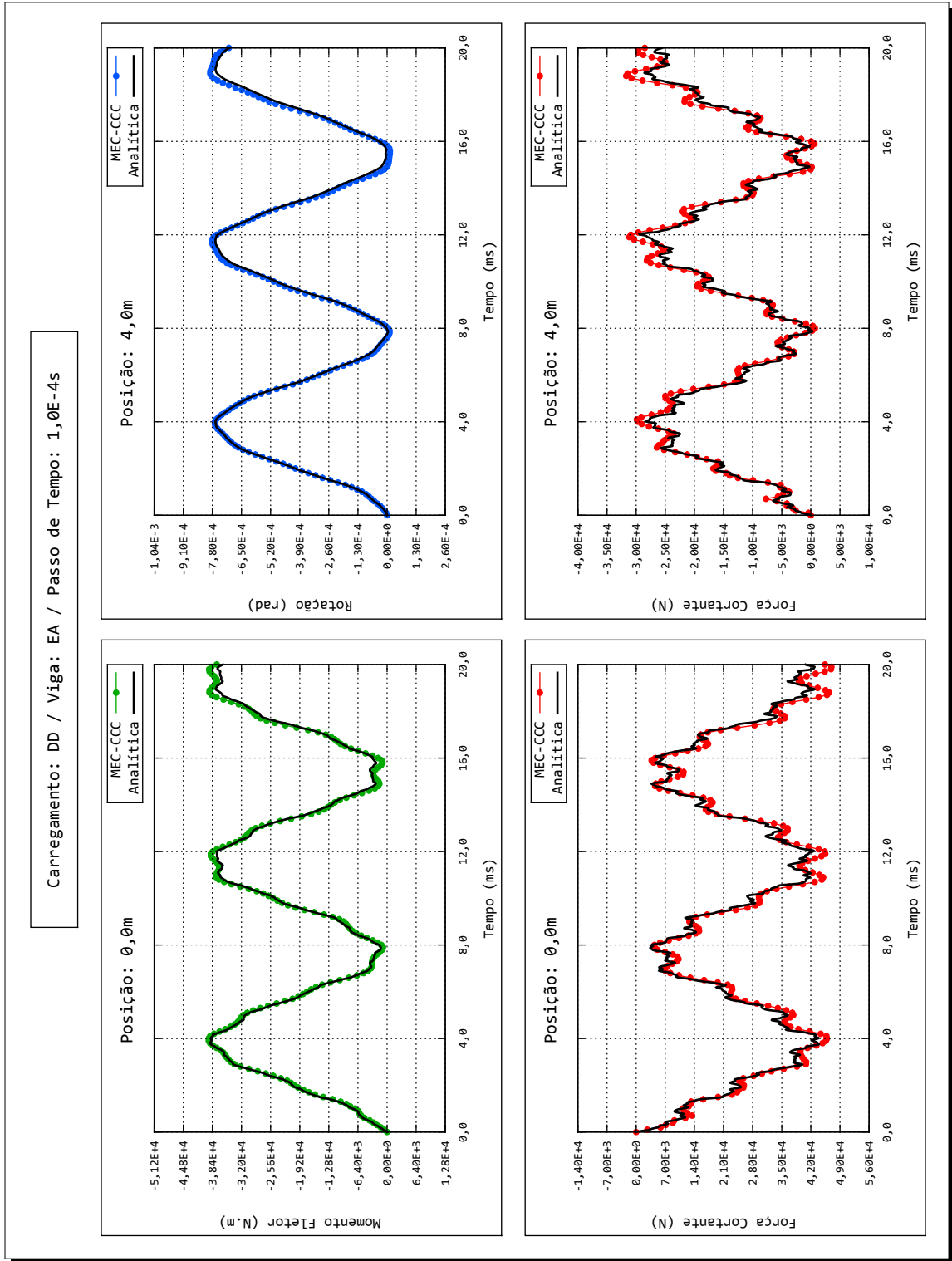


FIGURA 11 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100<sup>ms</sup> (CONTOURNO)

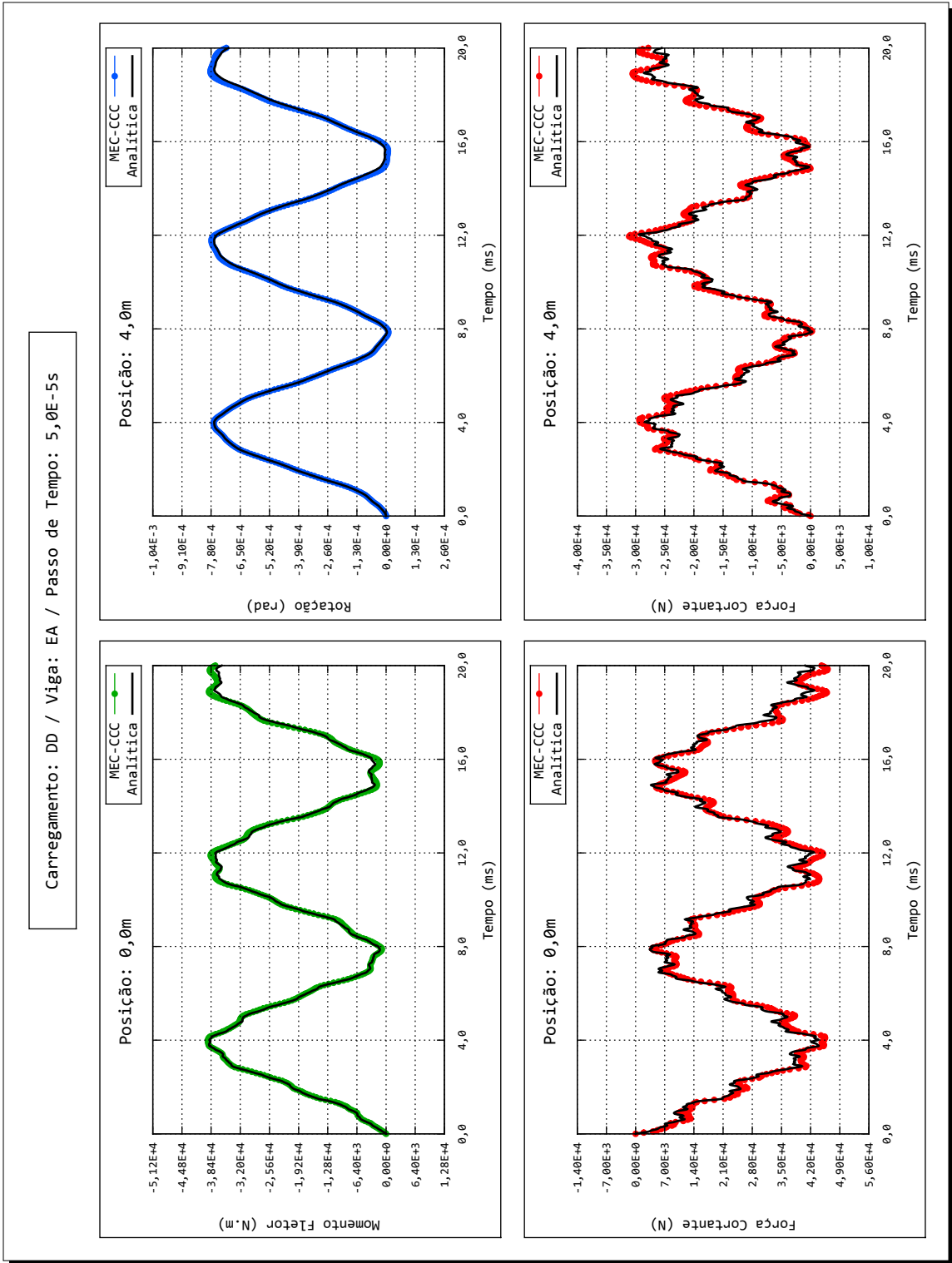


FIGURA 12 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50 $\mu$ s (CONTOUR)



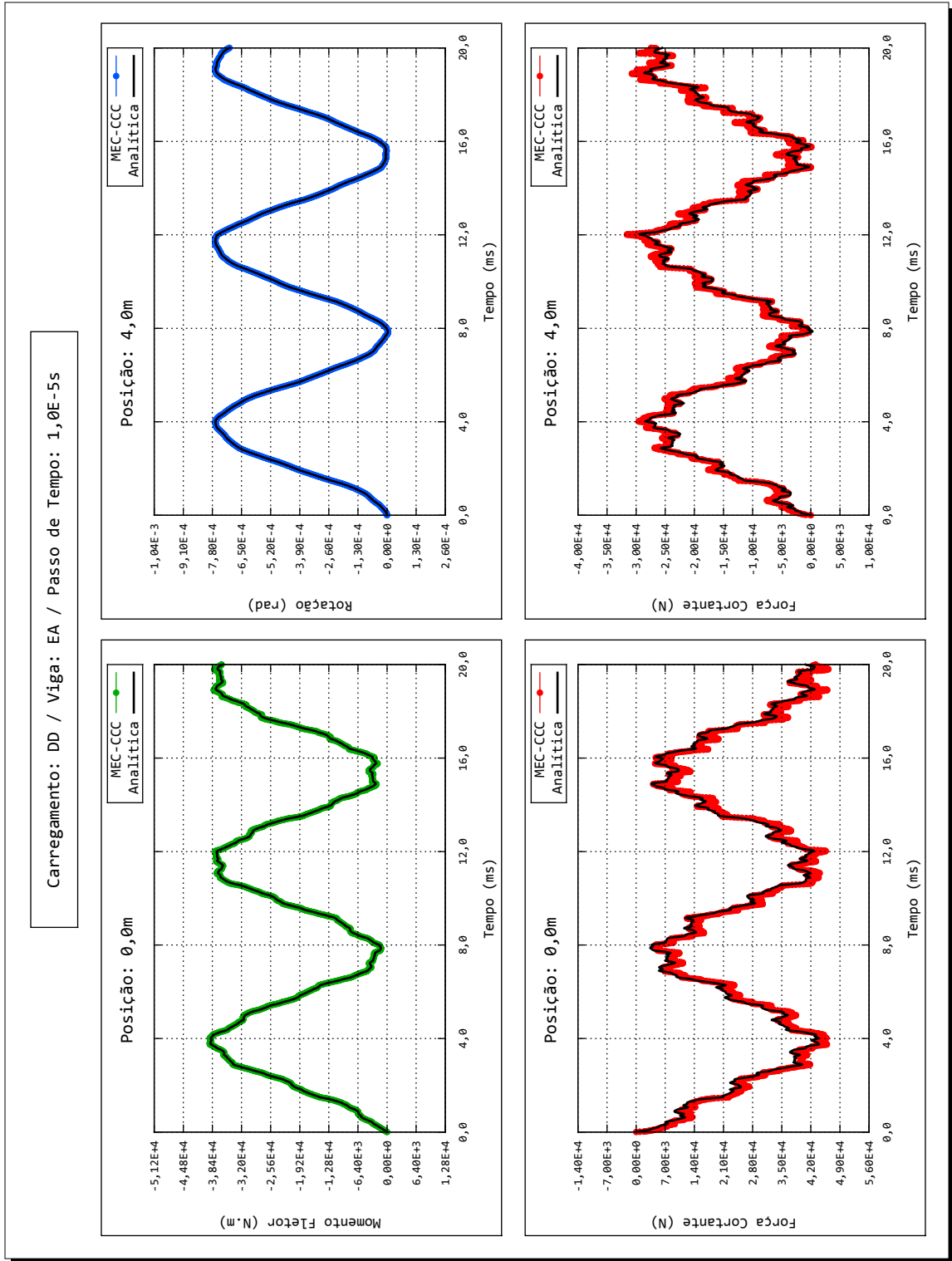


FIGURA 13 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

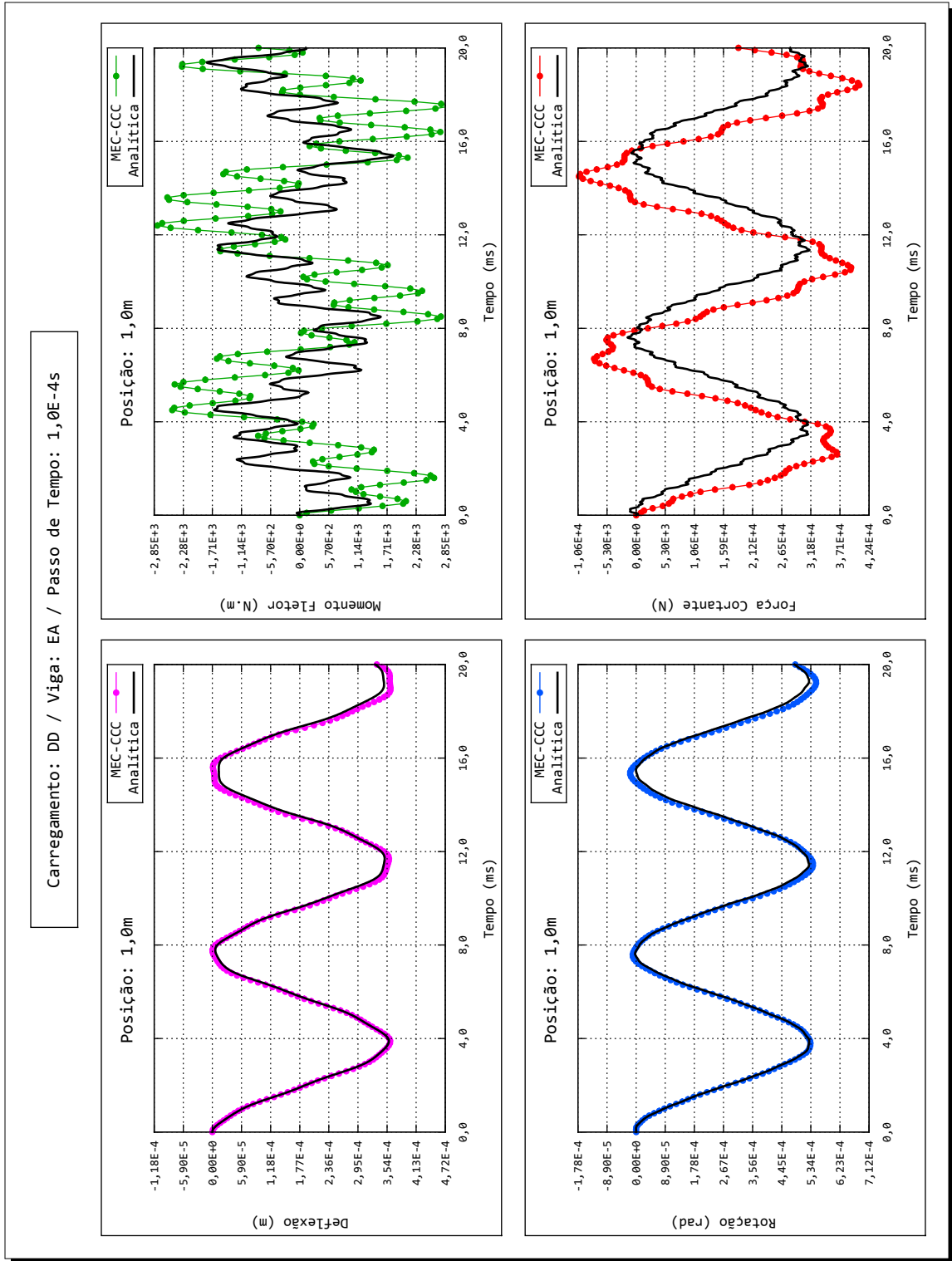


FIGURA 14 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100<sup>ms</sup> (DOMÍNIO)

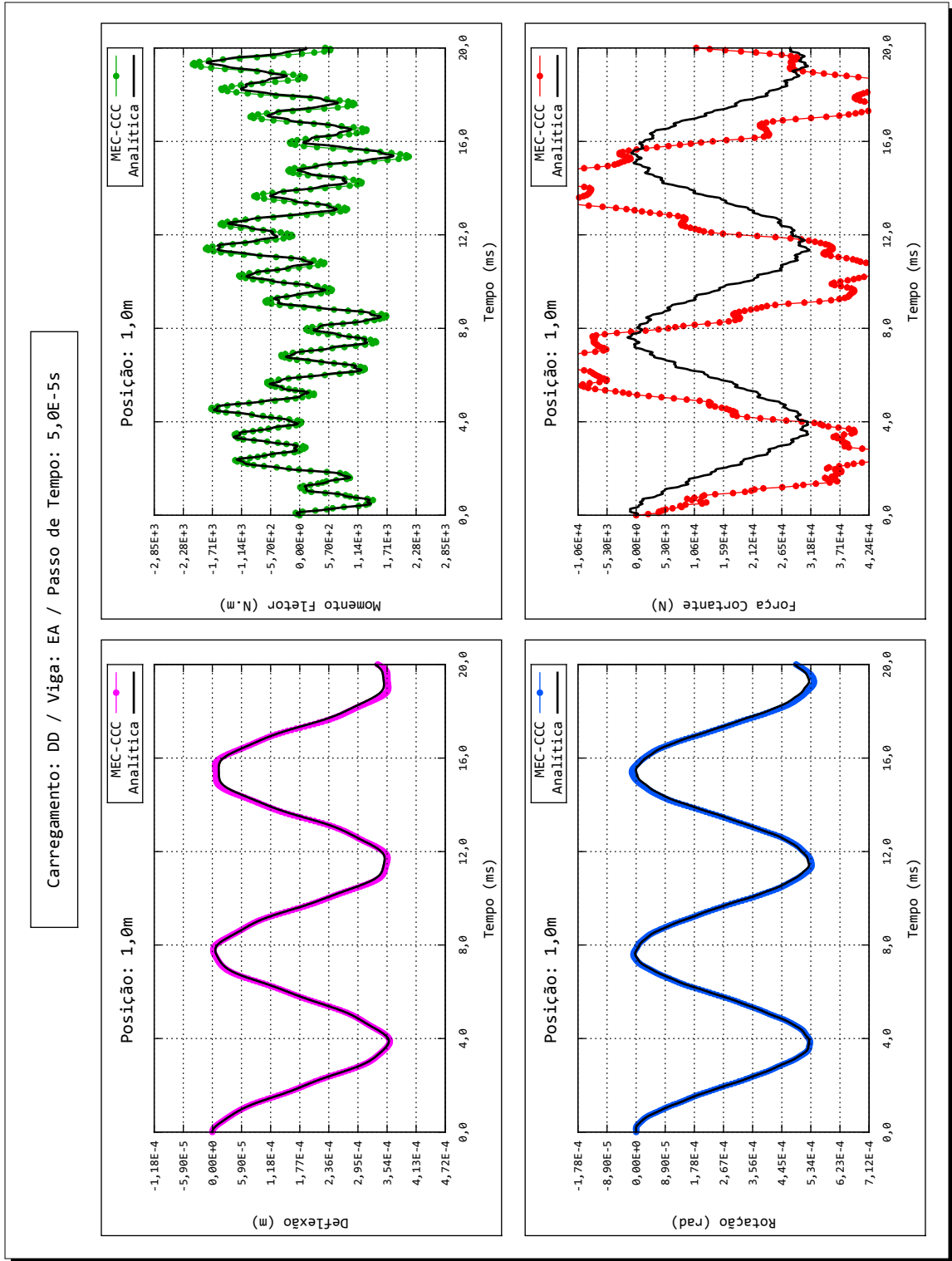


FIGURA 15 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50 $\mu$ s (DOMÍNIO)

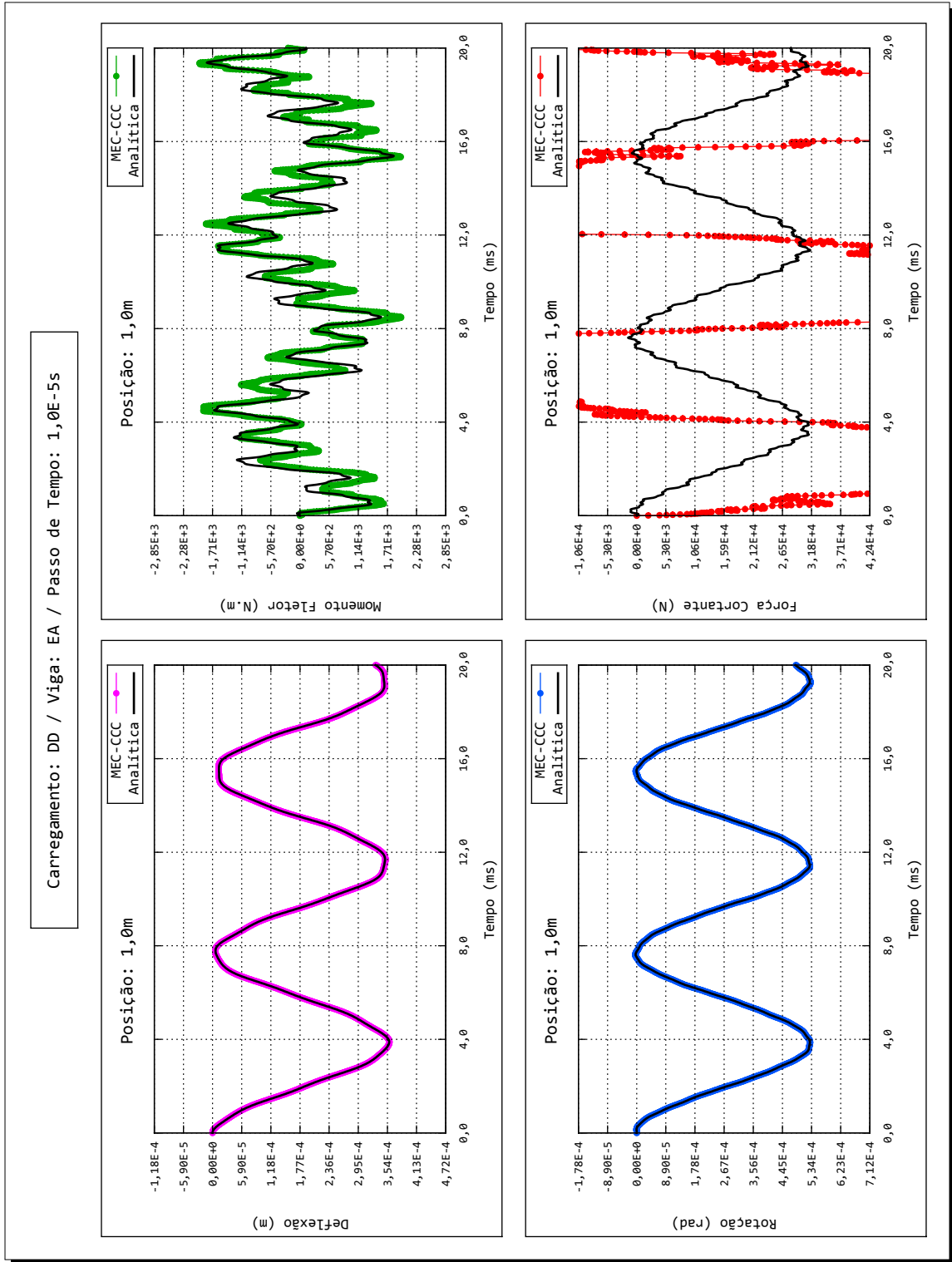


FIGURA 16 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

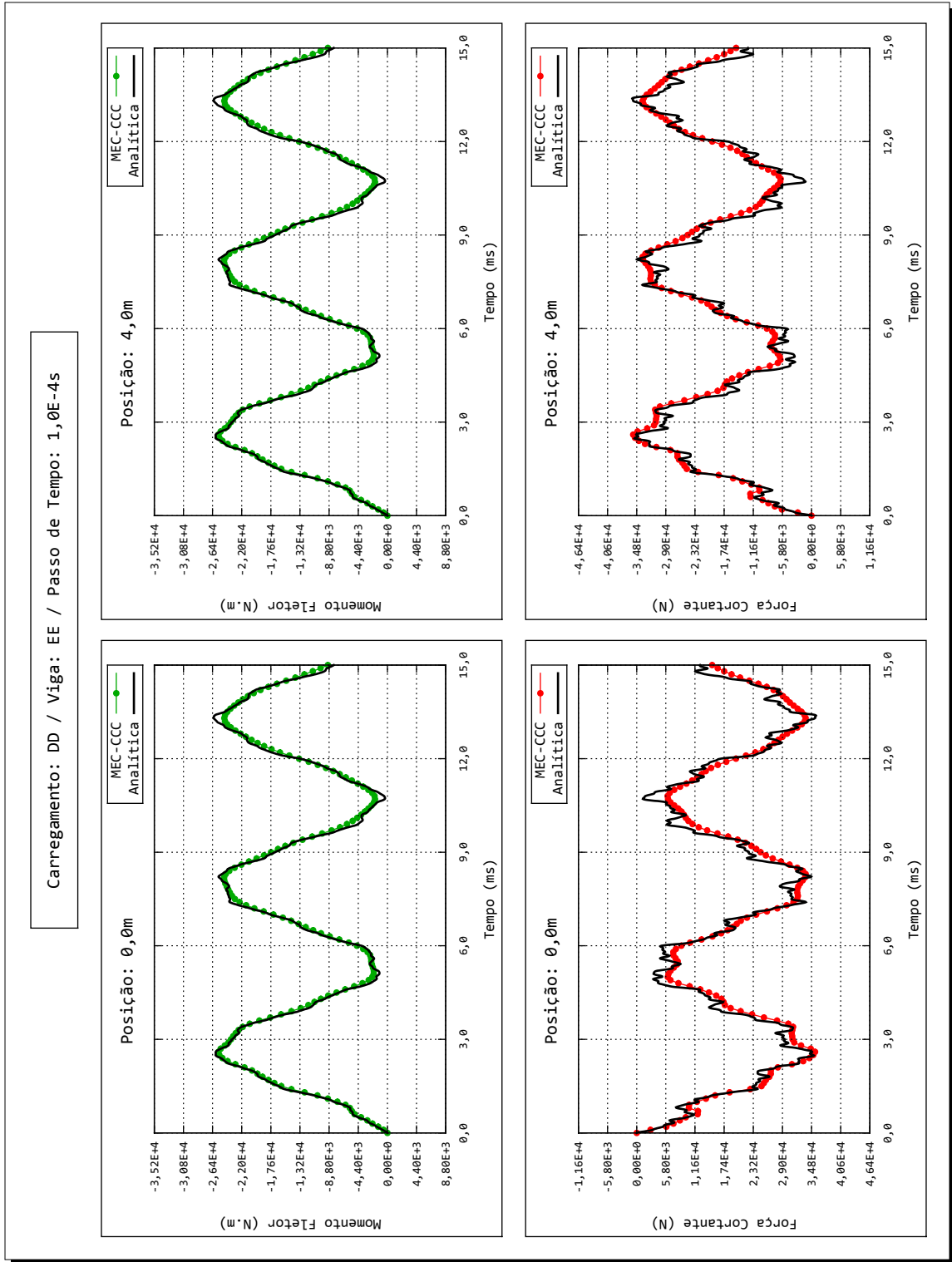


FIGURA 17 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100ns (CONTOUR)

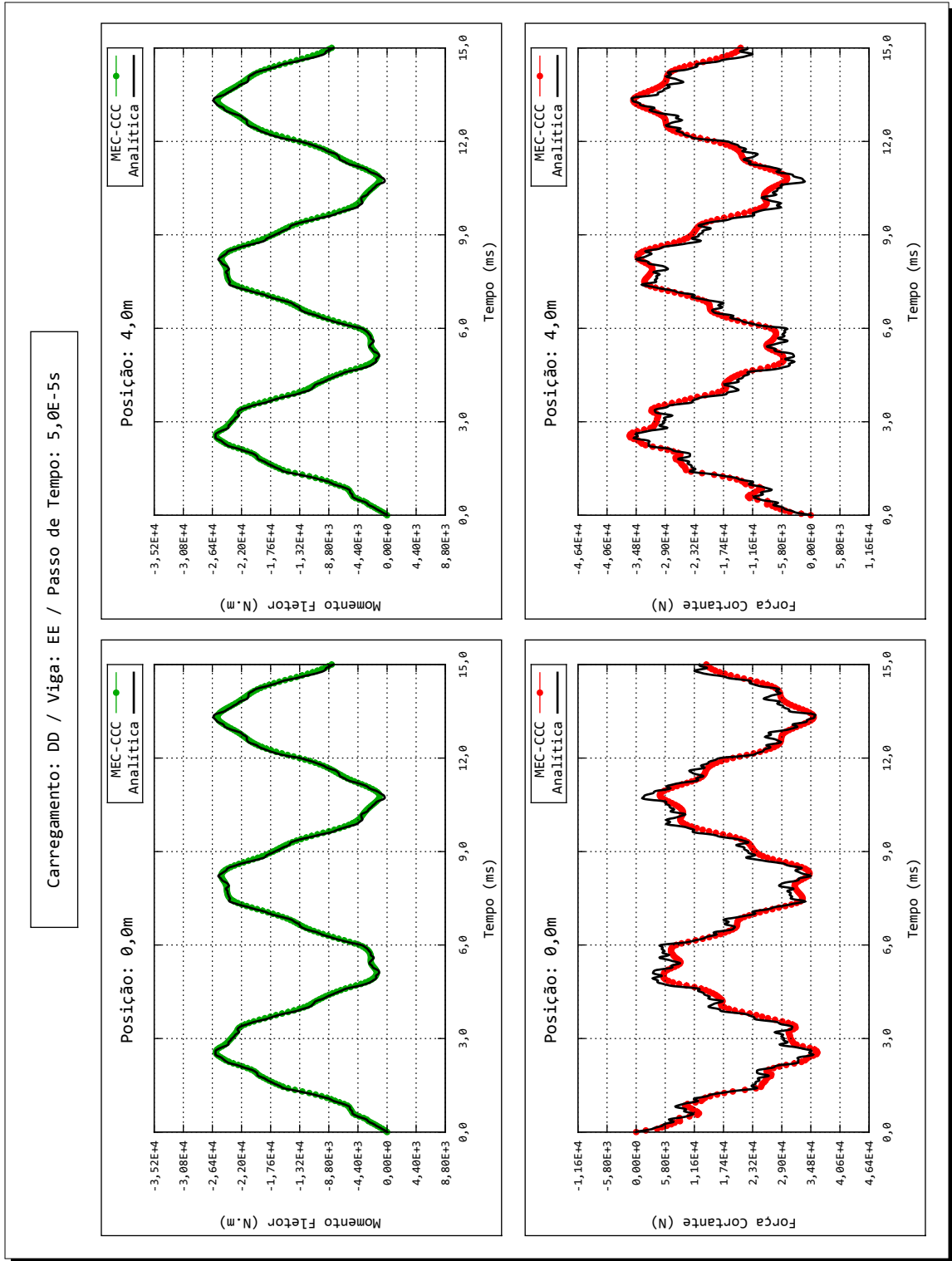


FIGURA 18 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50<sup>ns</sup> (CONTOUR)

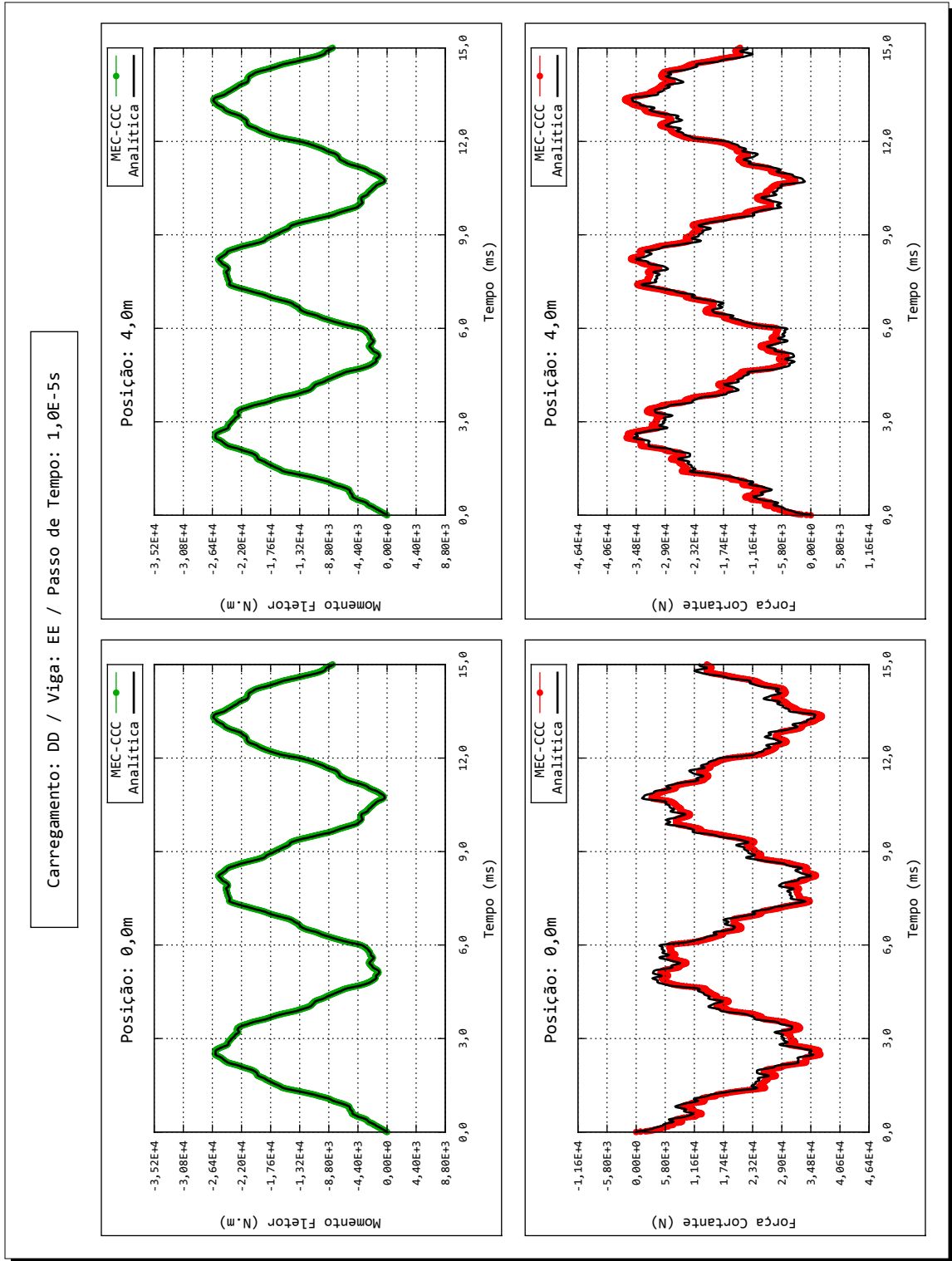


FIGURA 19 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

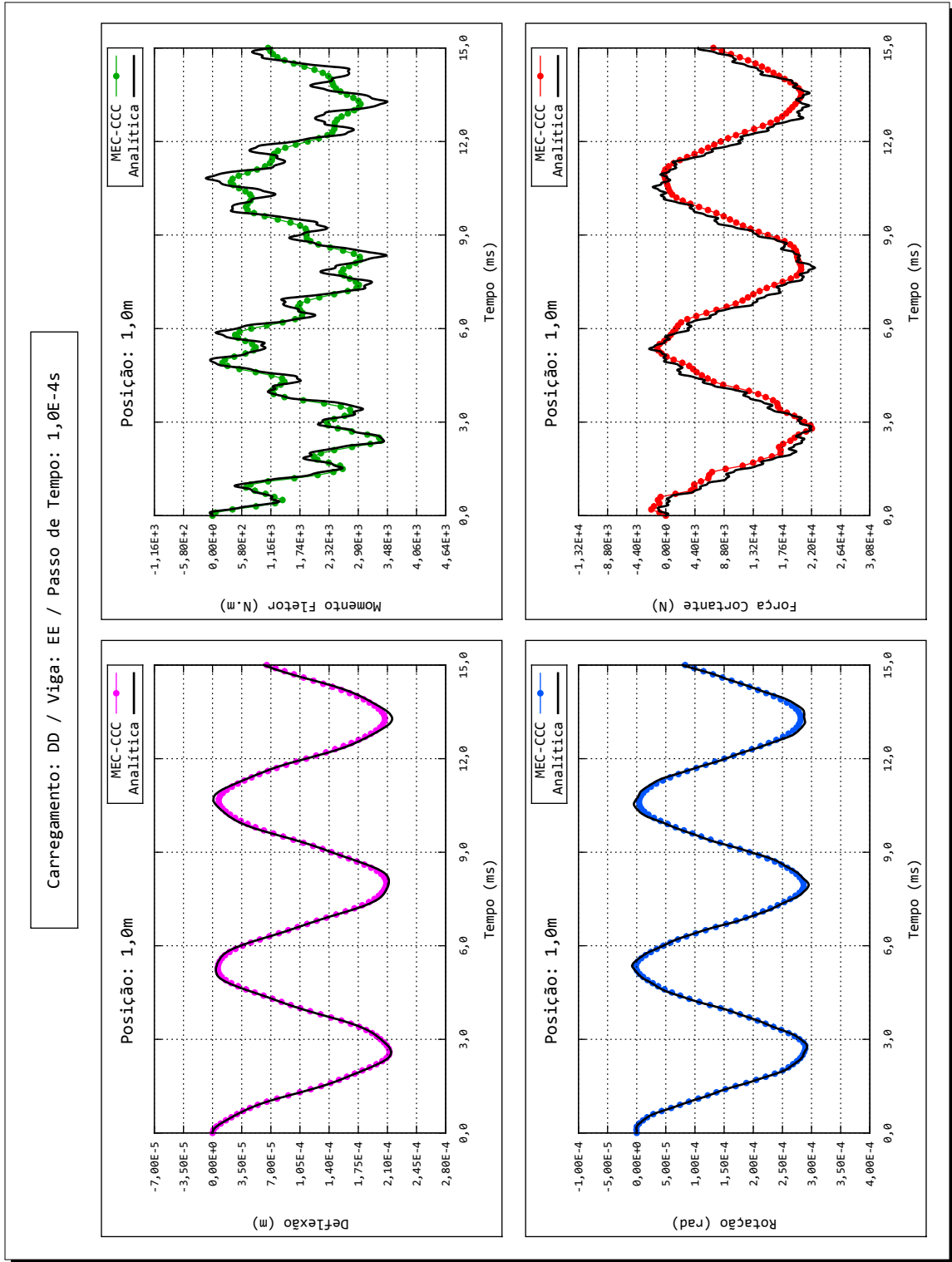


FIGURA 20 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100ns (DOMÍNIO)



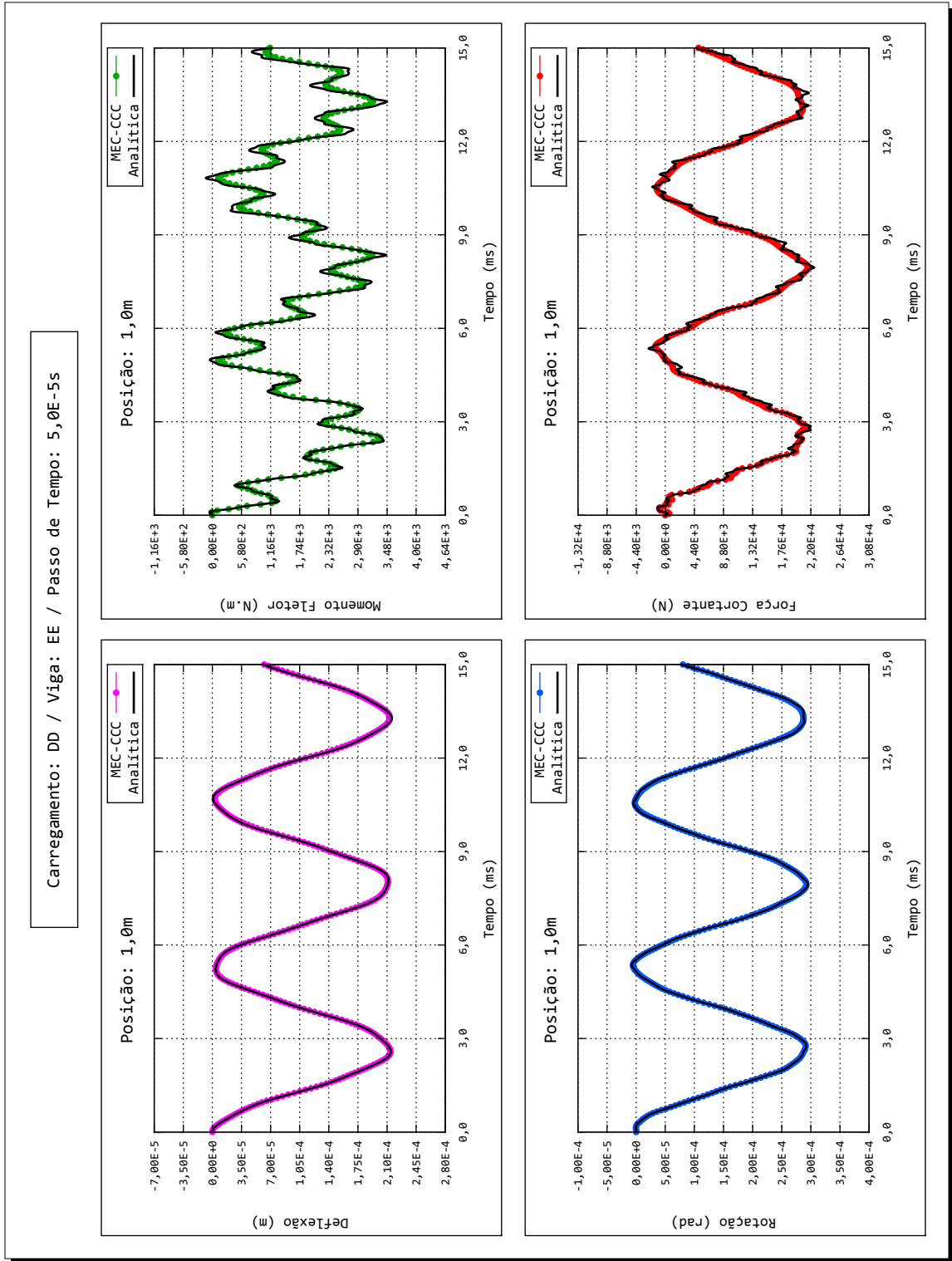


FIGURA 21 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50ms (DOMÍNIO)

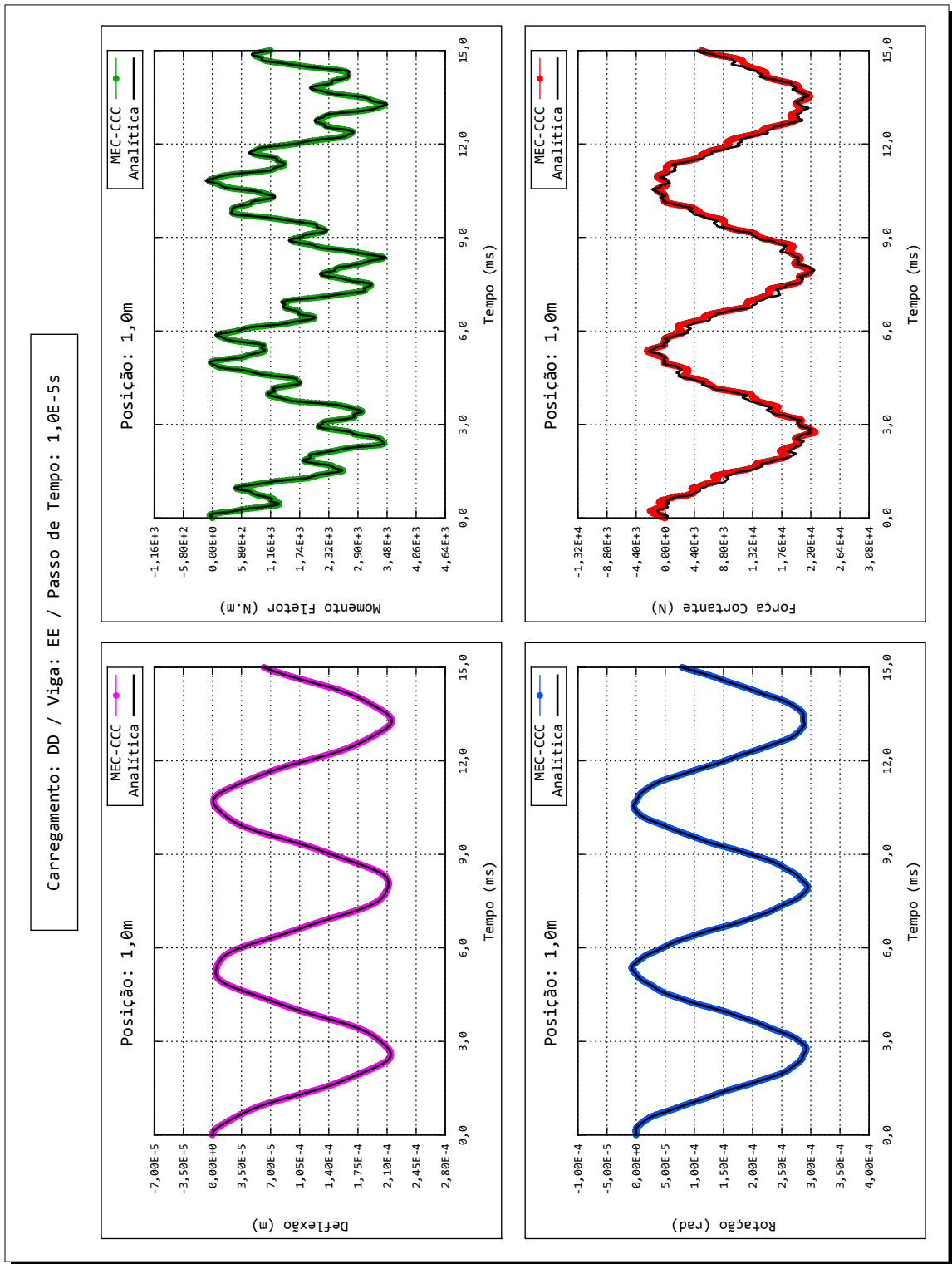


FIGURA 22 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

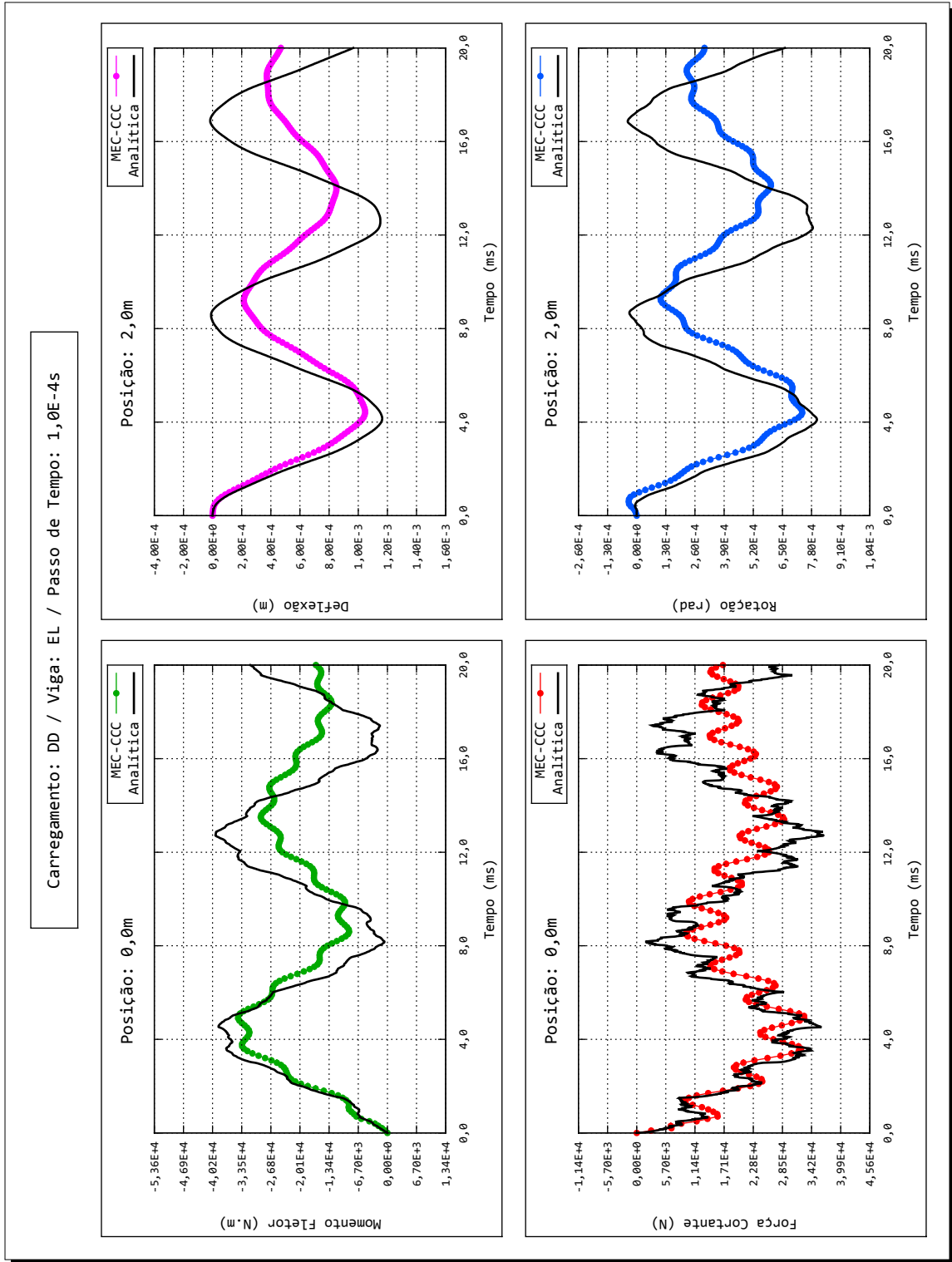


FIGURA 23 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100ns (CONTORNO)

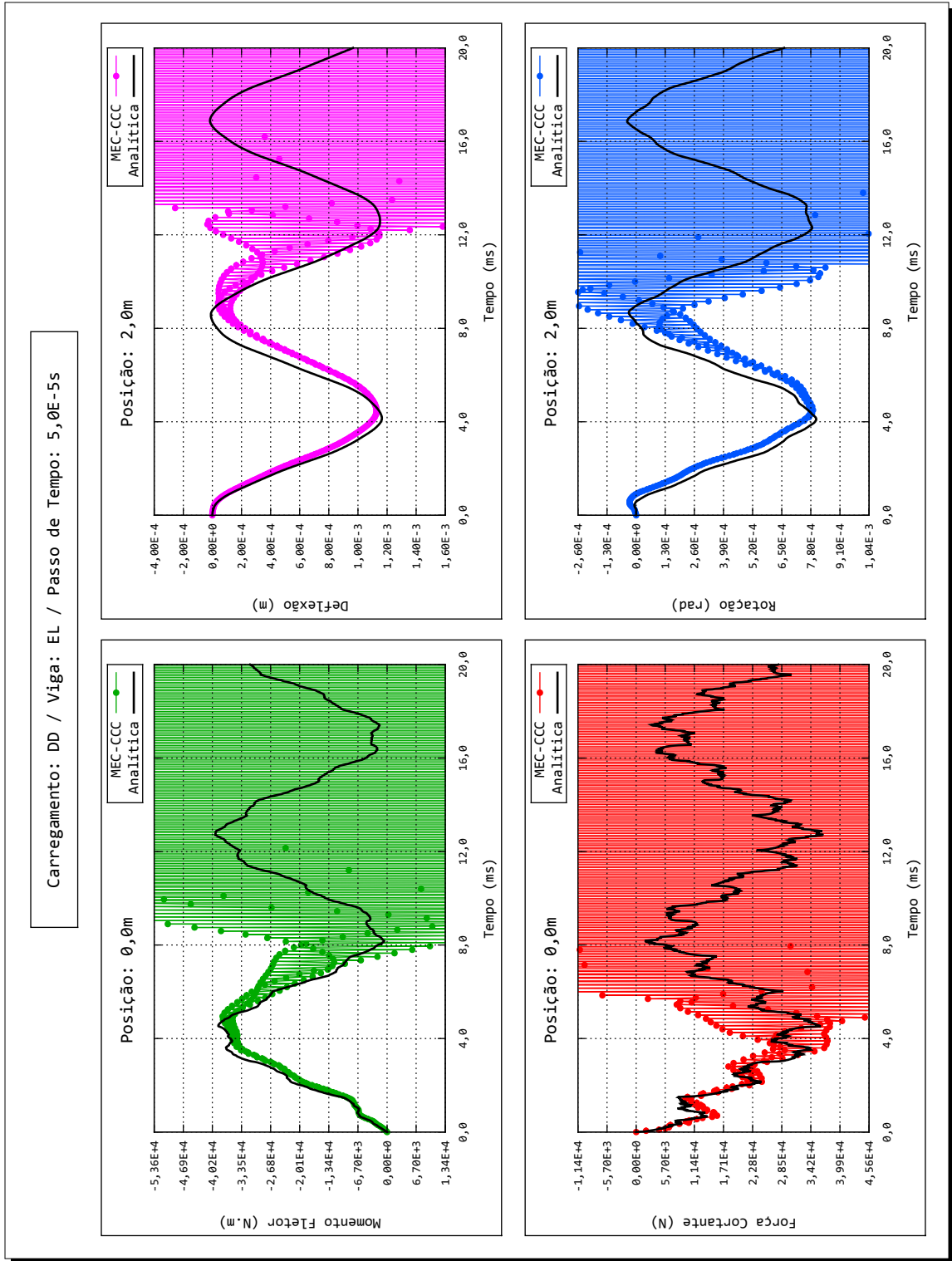


FIGURA 24 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50ms (CONTOUR)

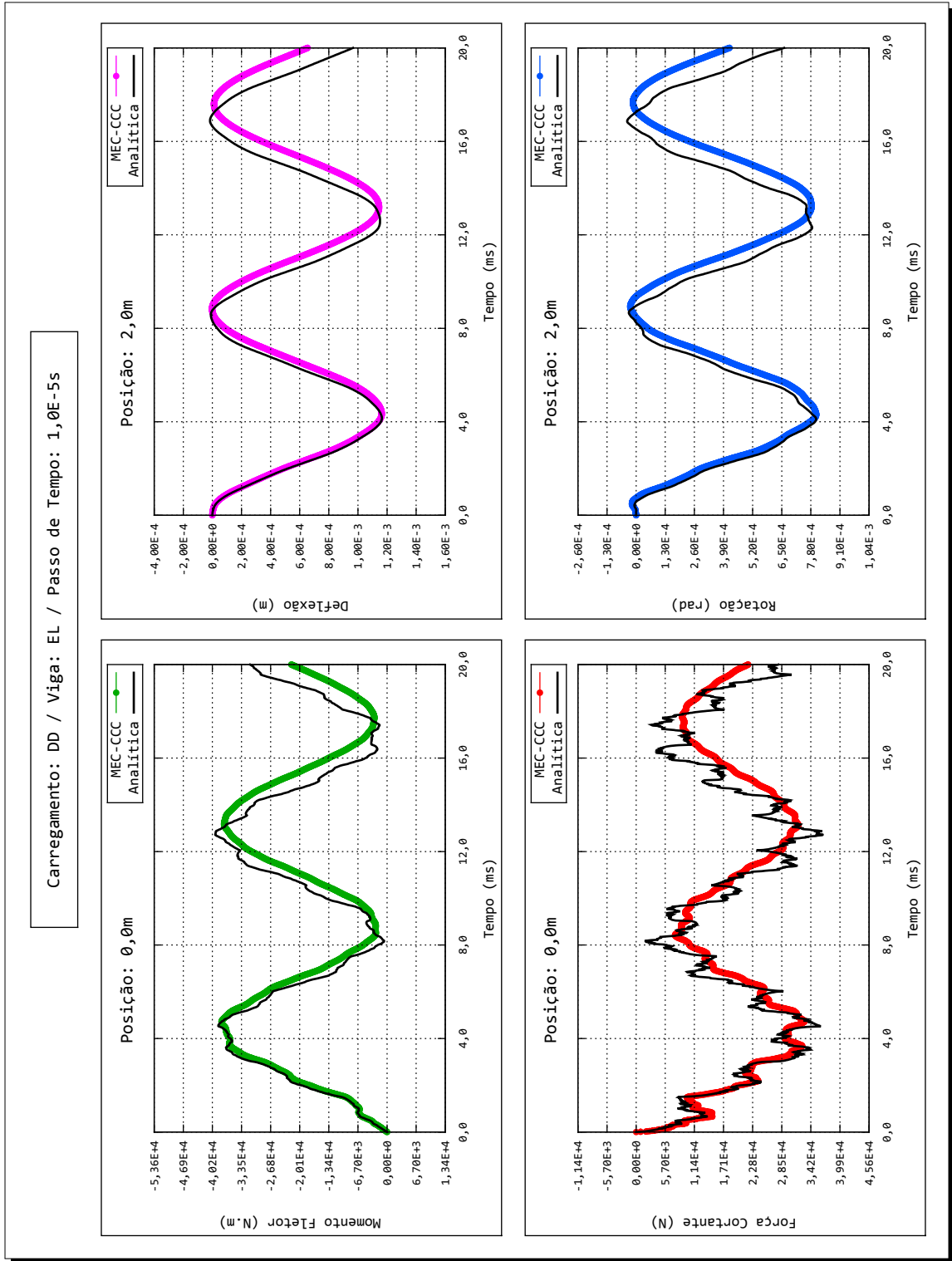


FIGURA 25 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (CONTORNO)

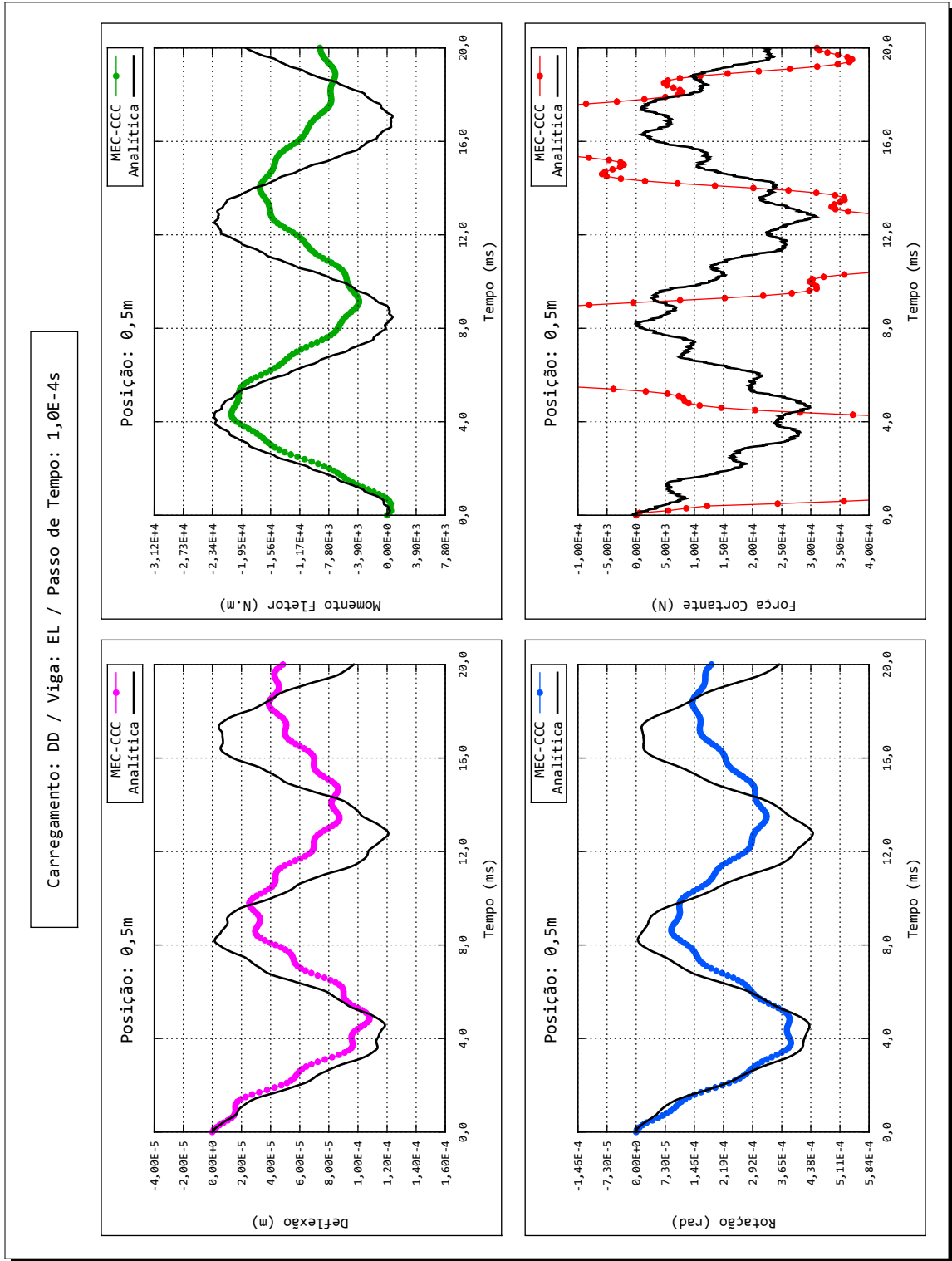


FIGURA 26 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 100ns (DOMÍNIO)

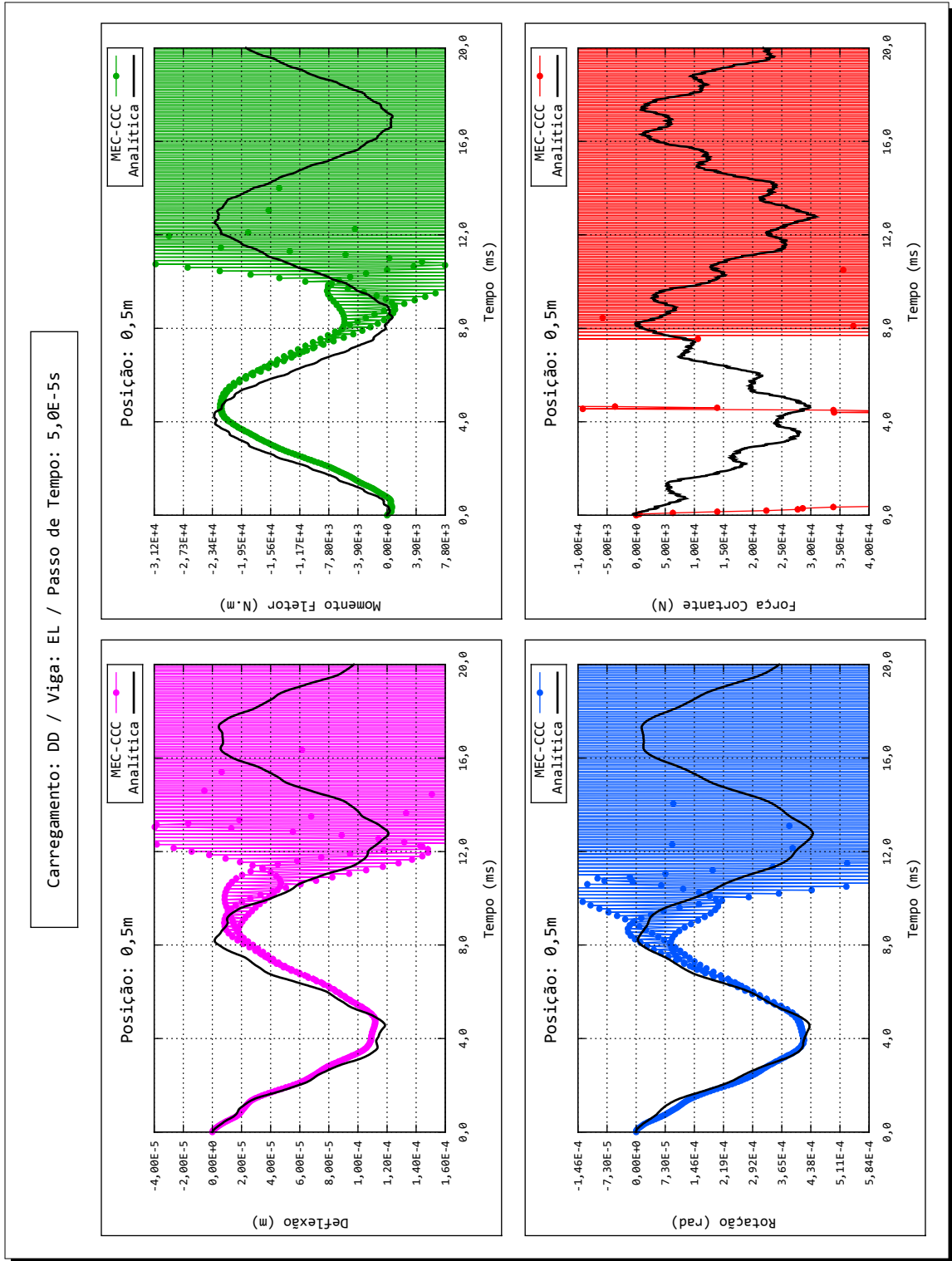


FIGURA 27 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 50ms (DOMÍNIO)

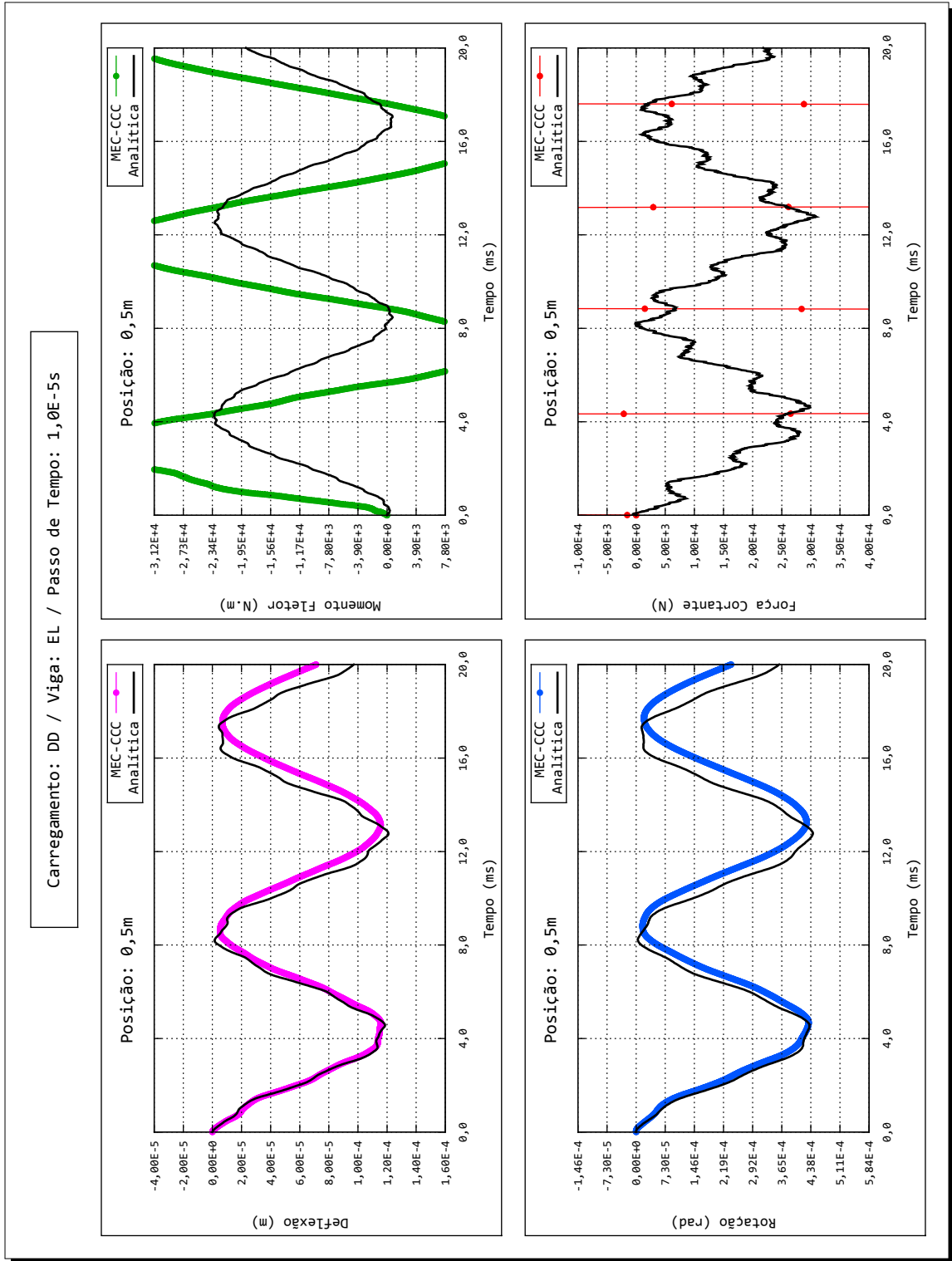


FIGURA 28 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-CCC, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)



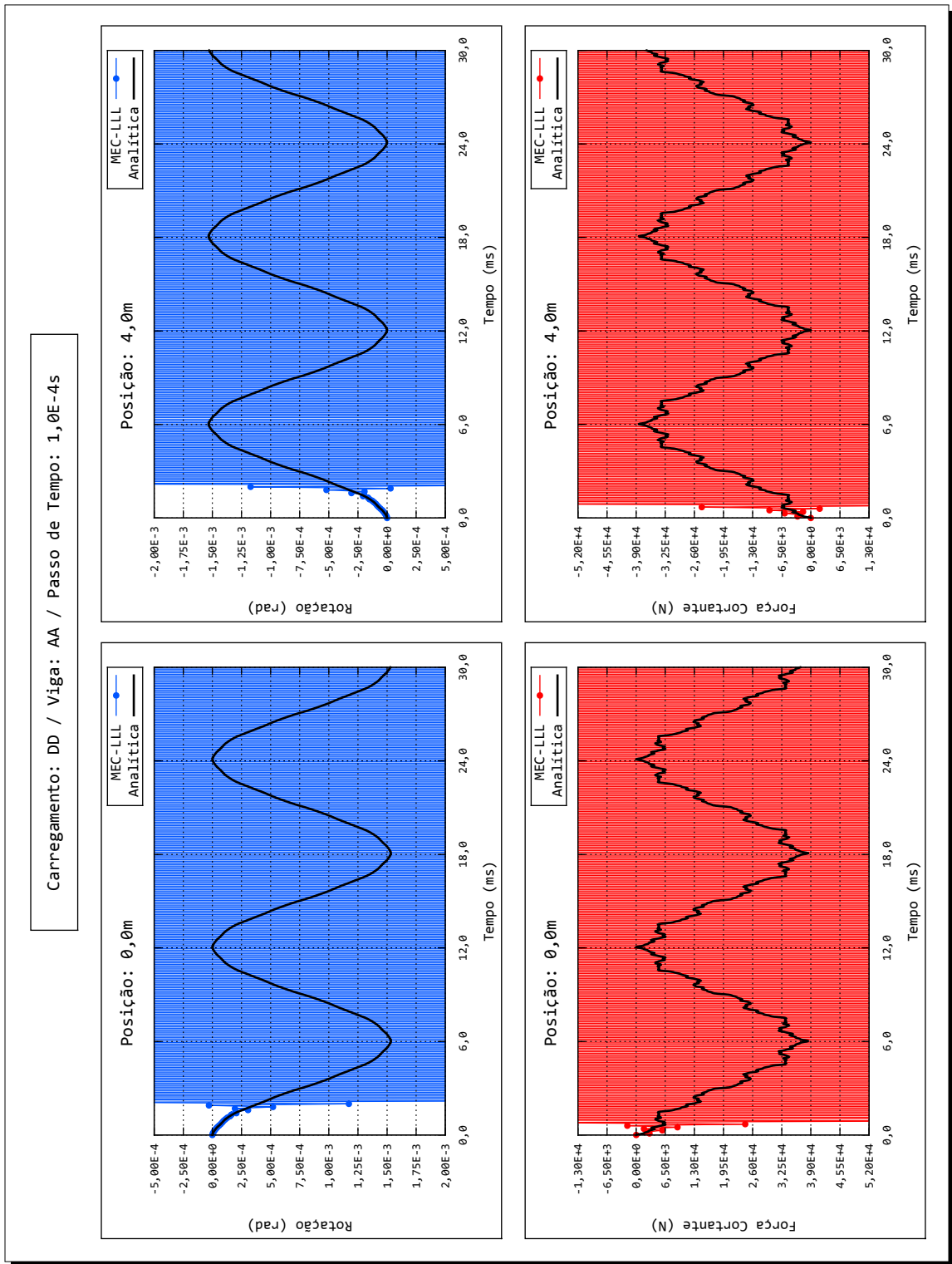


FIGURA 29 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO 100 $\mu$ s (CONTOUR)

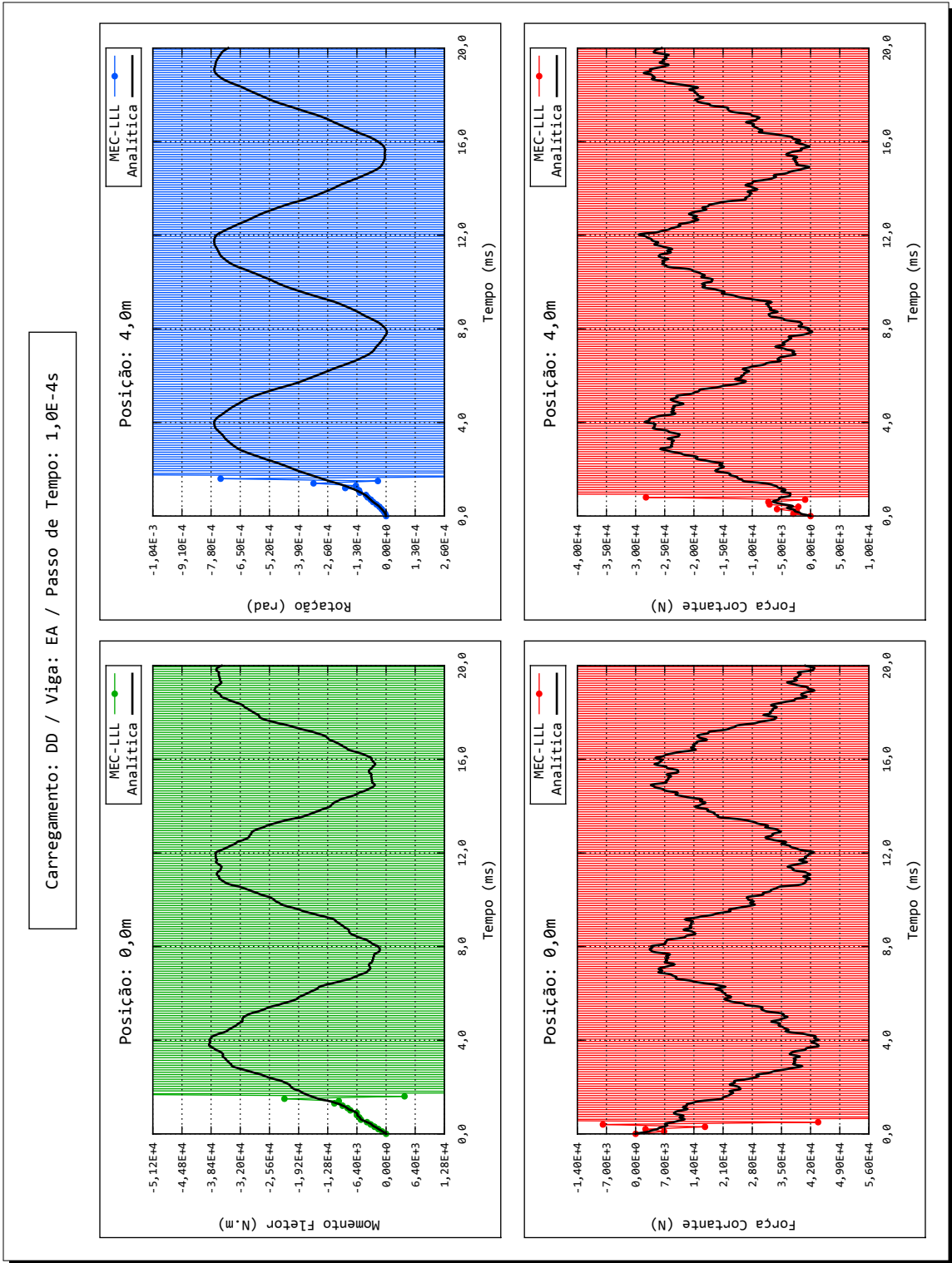


FIGURA 30 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO 100μs (CONTOUR)

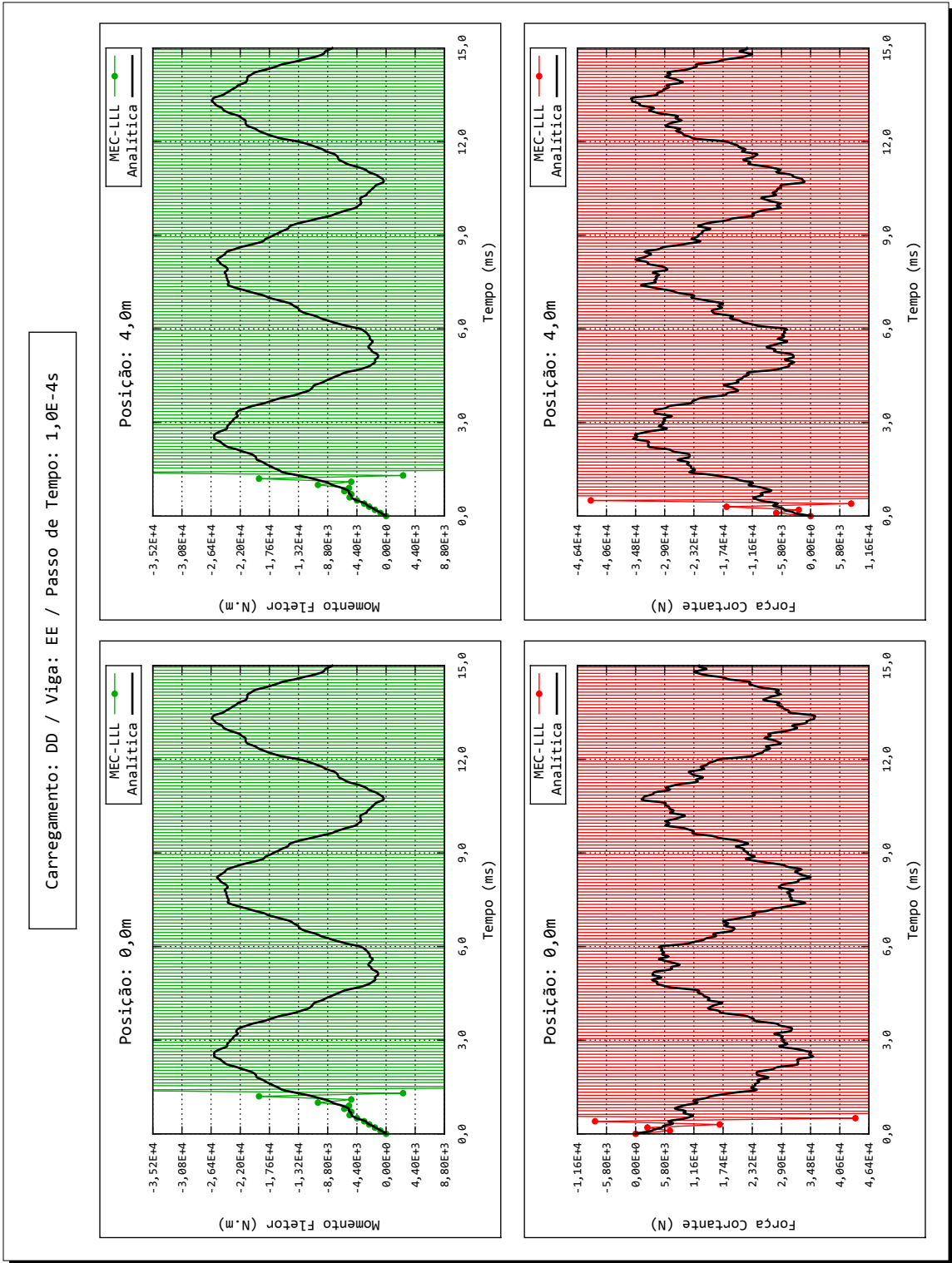


FIGURA 31 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO 100 $\mu$ s (CONTORNO)

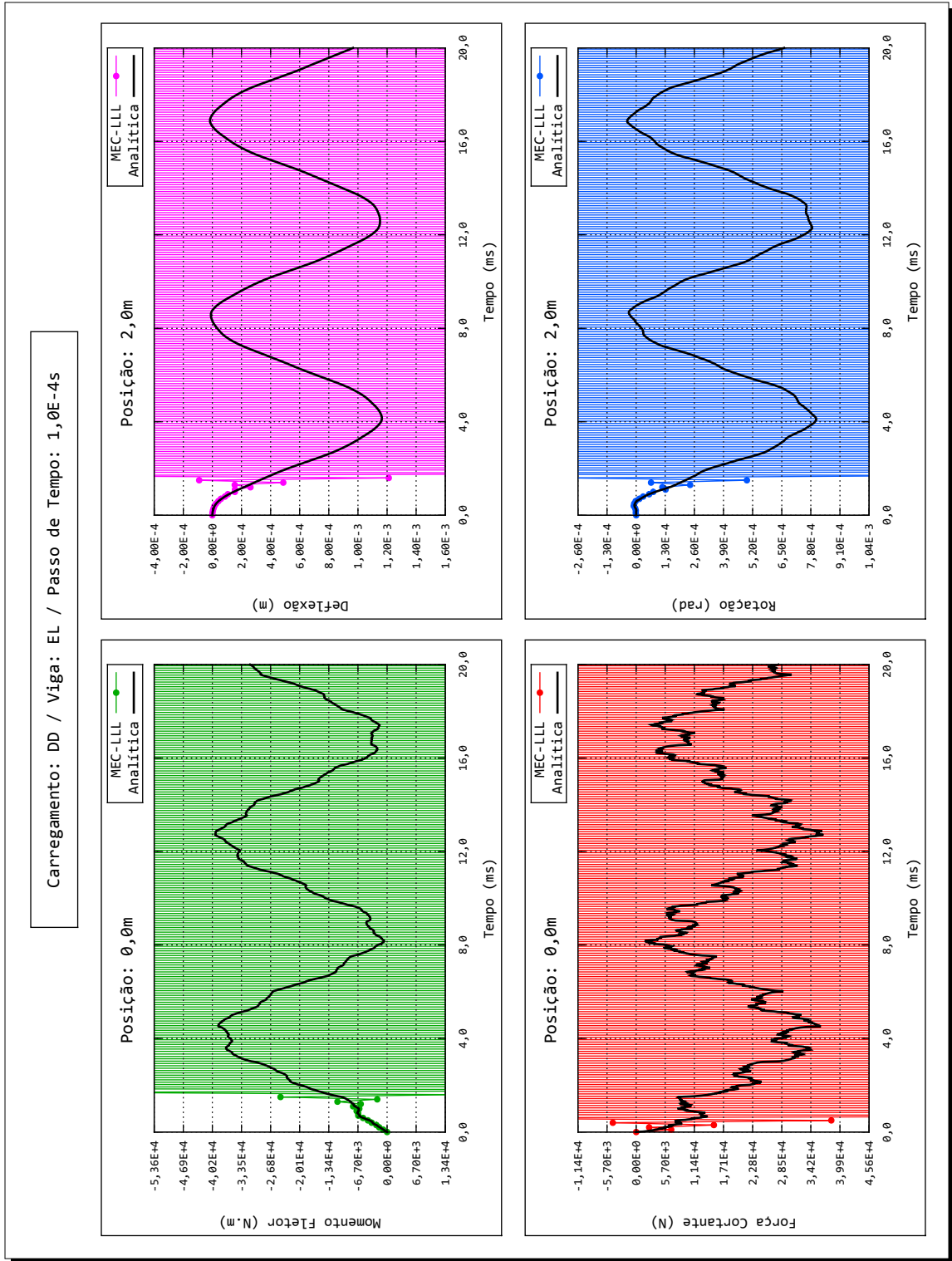


FIGURA 32 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LLL, PASSO DE TEMPO 100 $\mu$ s (CONTOUR)

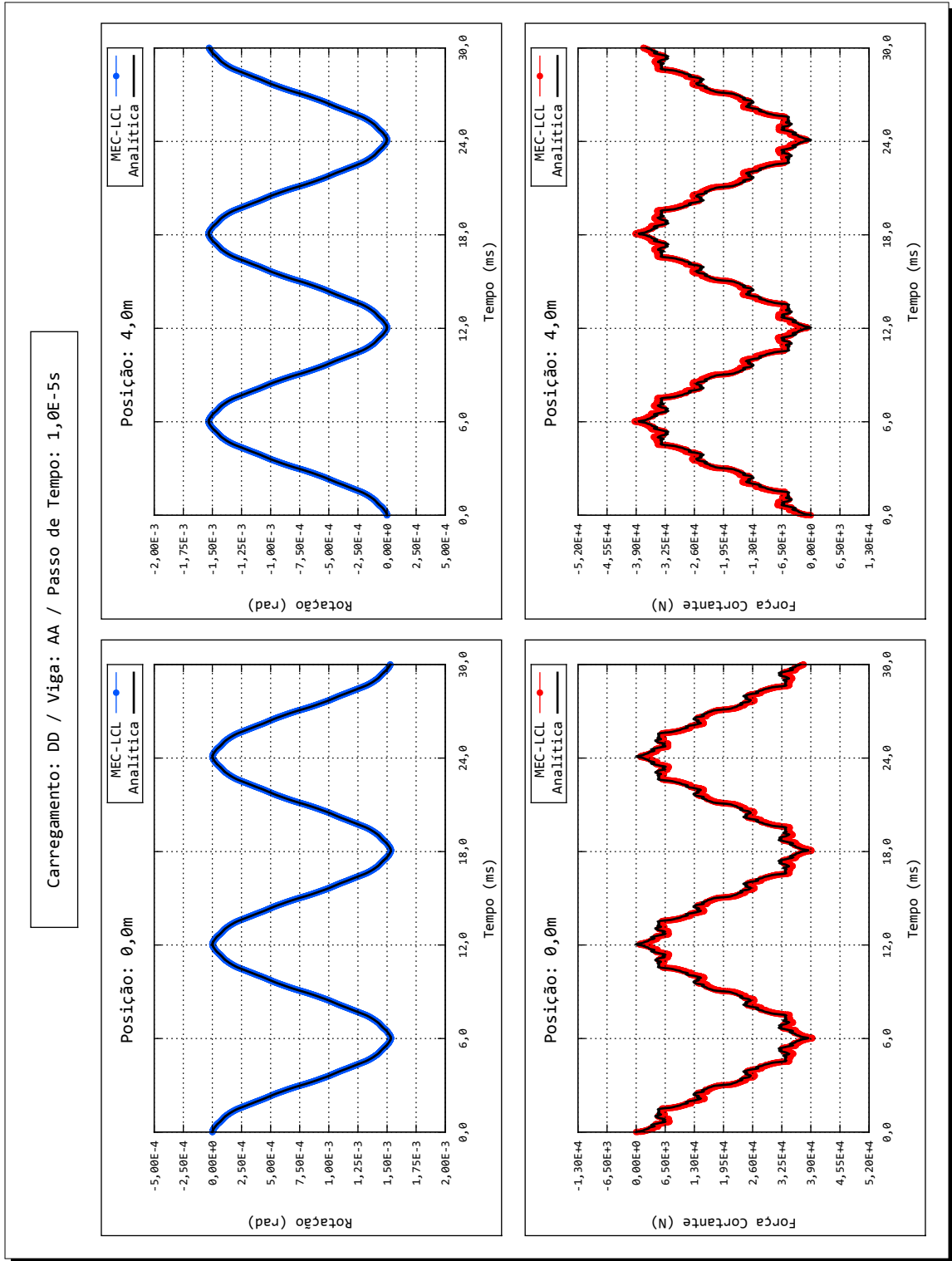


FIGURA 33 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTOUR)

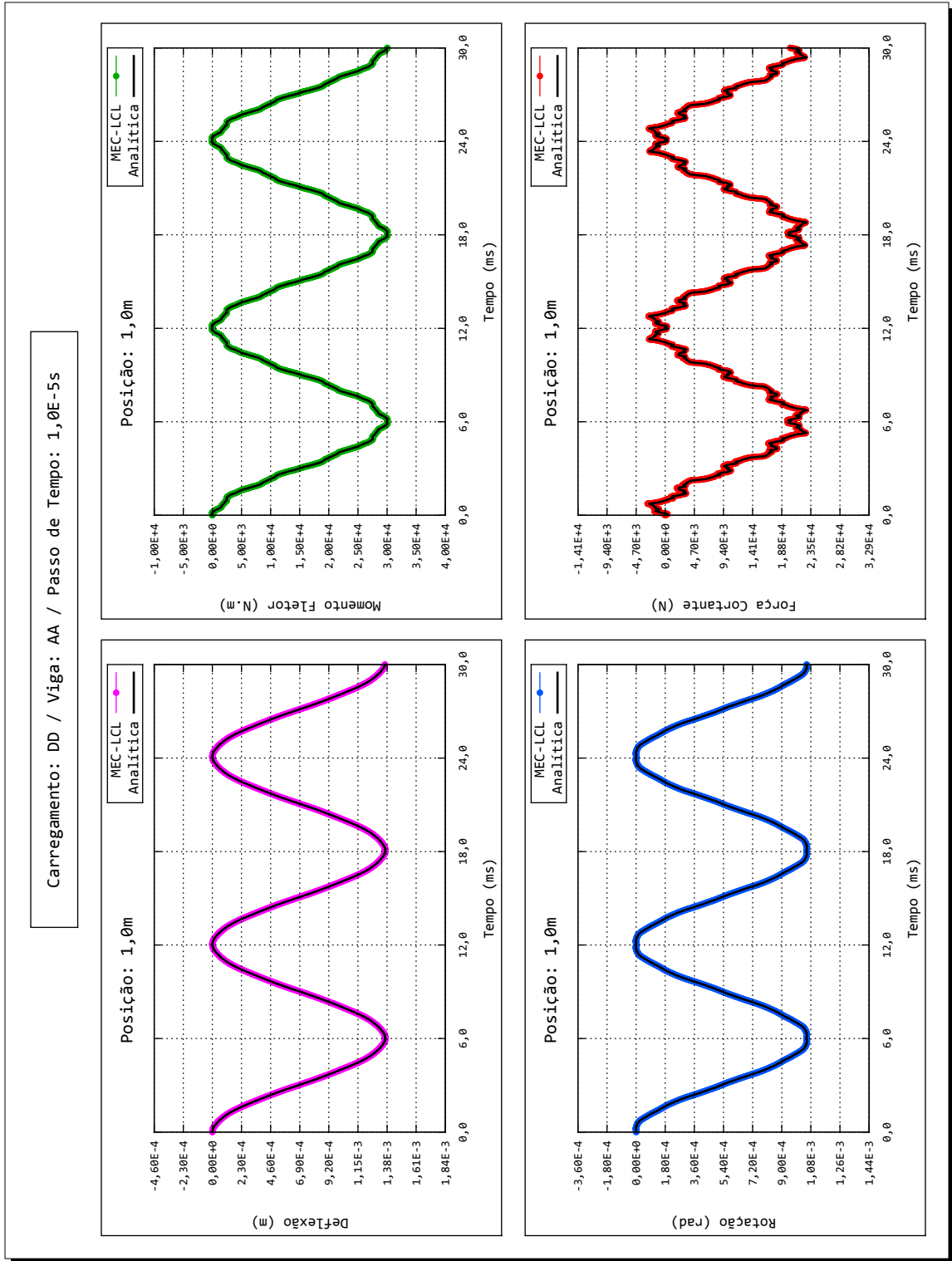


FIGURA 34 – CARREGAMENTO DD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

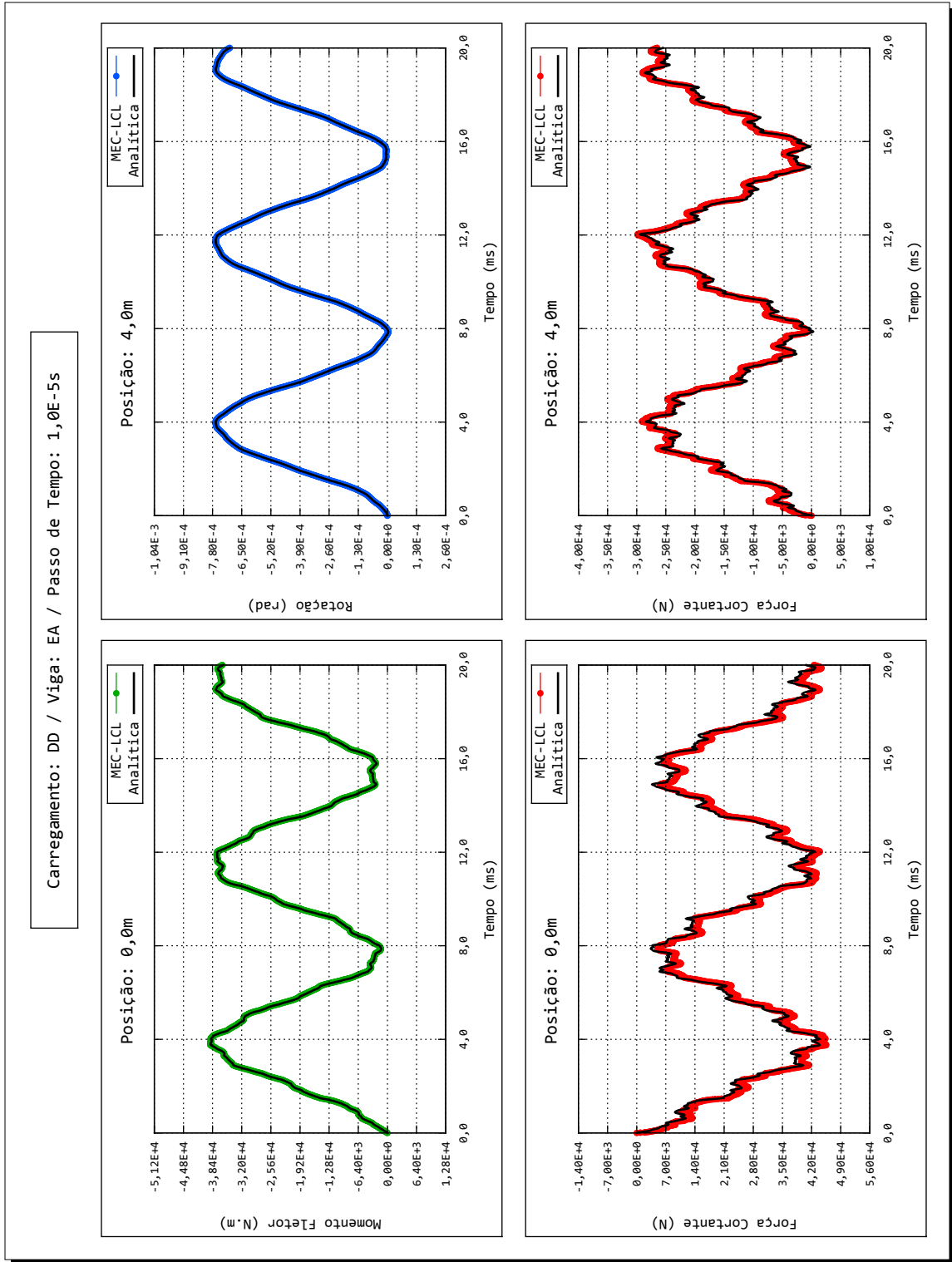


FIGURA 35 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

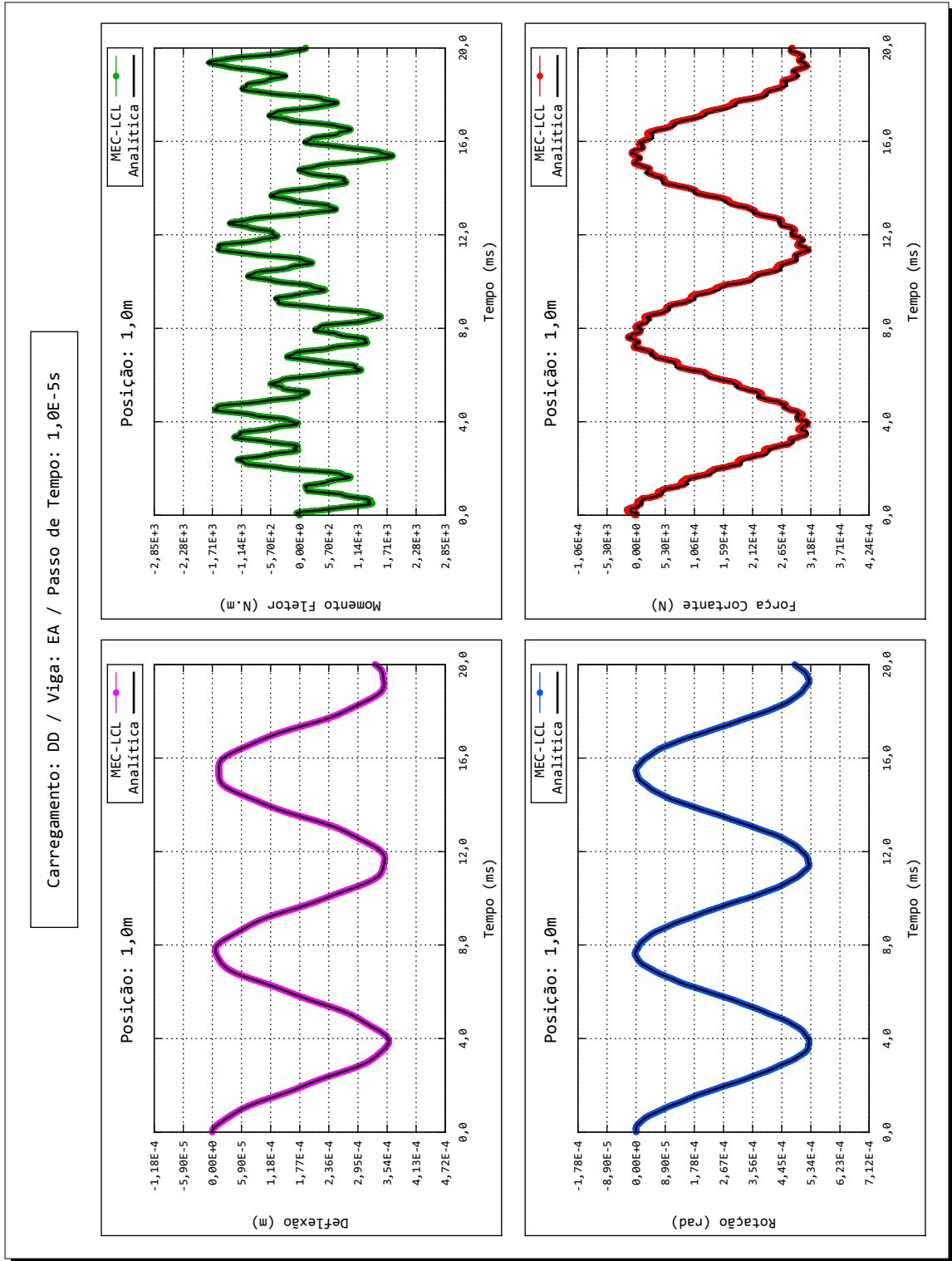


FIGURA 36 – CARREGAMENTO DD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)



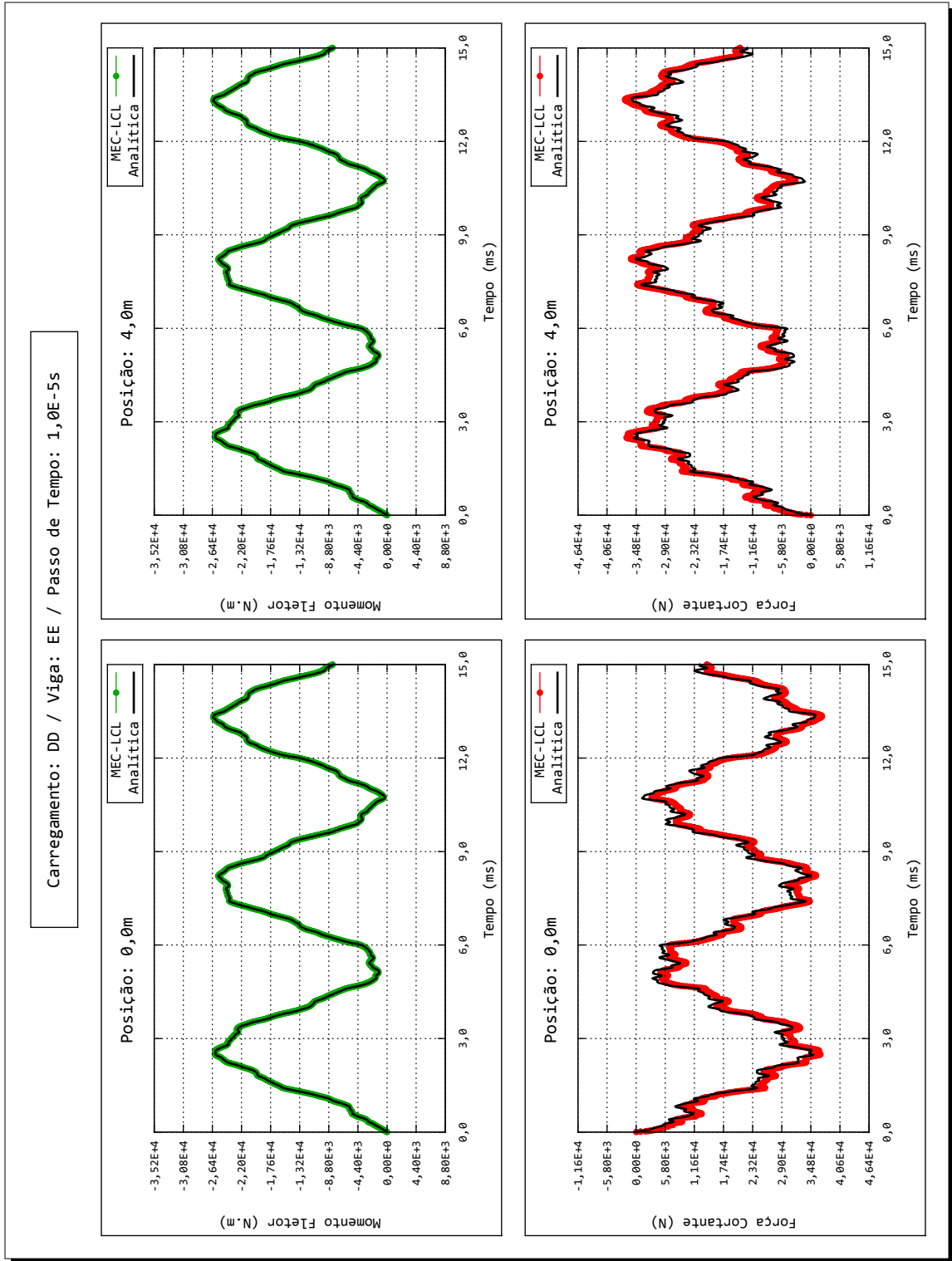


FIGURA 37 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

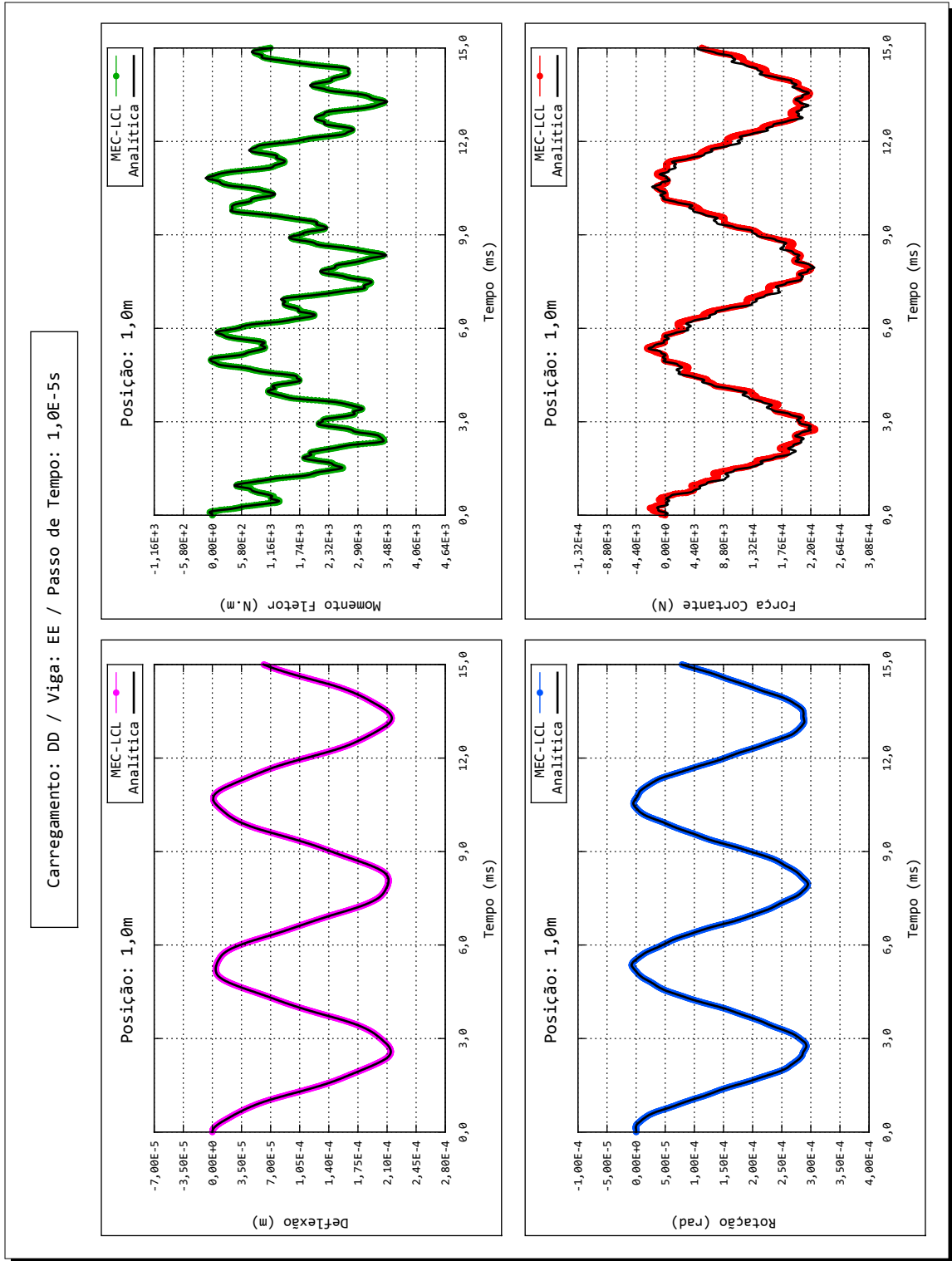


FIGURA 38 – CARREGAMENTO DD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

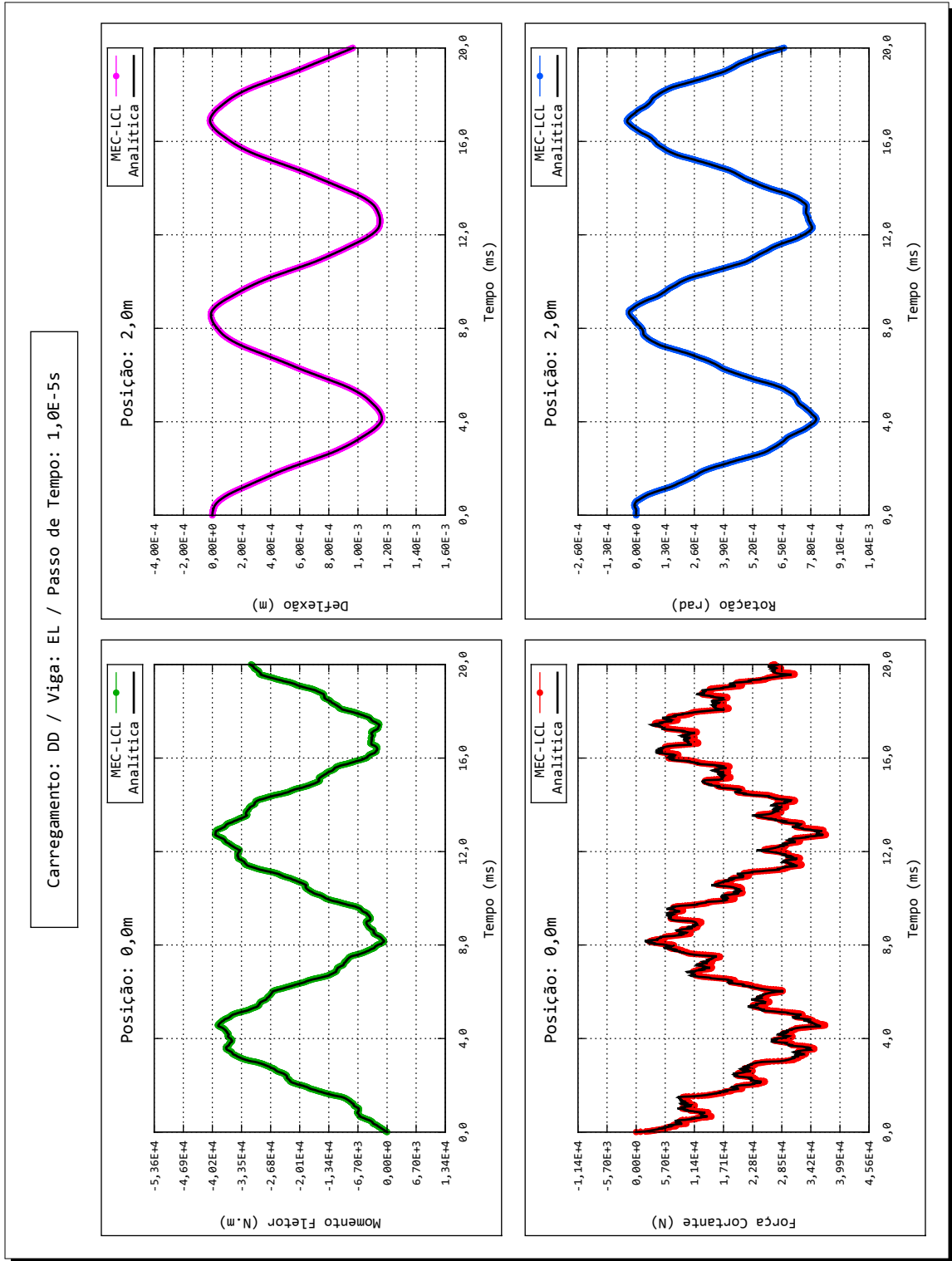


FIGURA 39 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO  $10^{-5}$ s (CONTOUR)

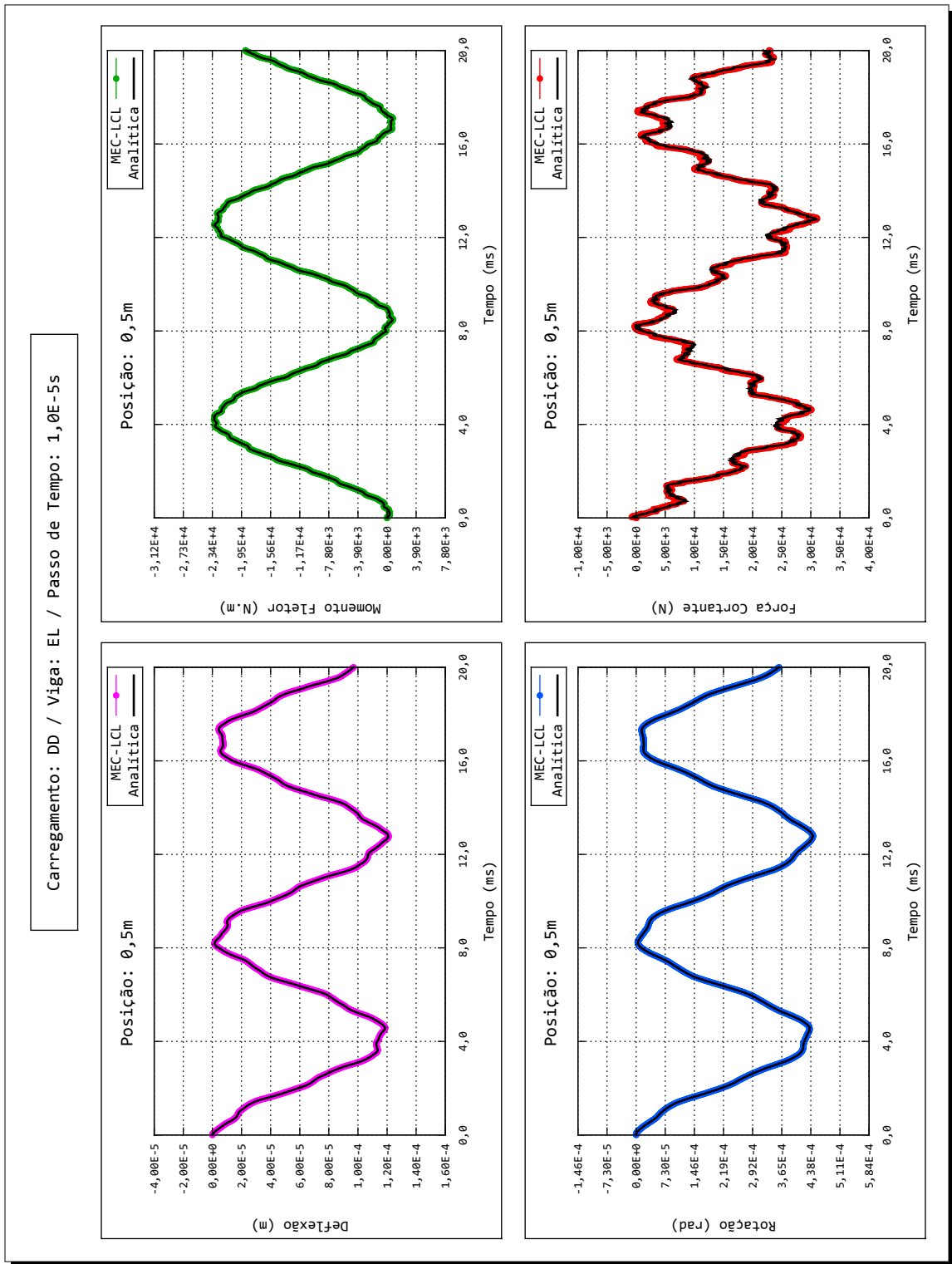


FIGURA 40 – CARREGAMENTO DD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO  $10^{-5}$  (DOMÍNIO)

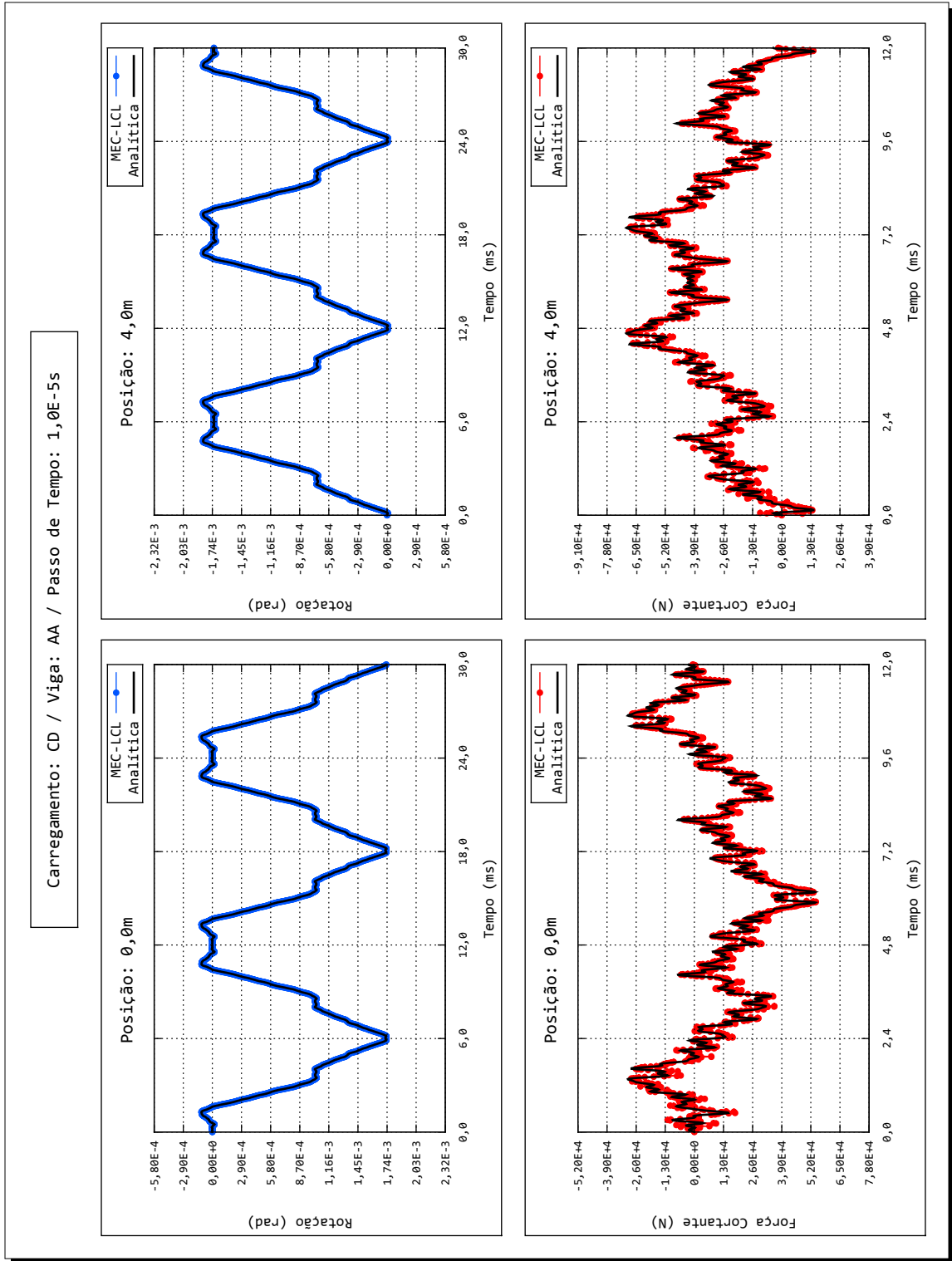


FIGURA 41 – CARREGAMENTO CD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (CONTORNO)

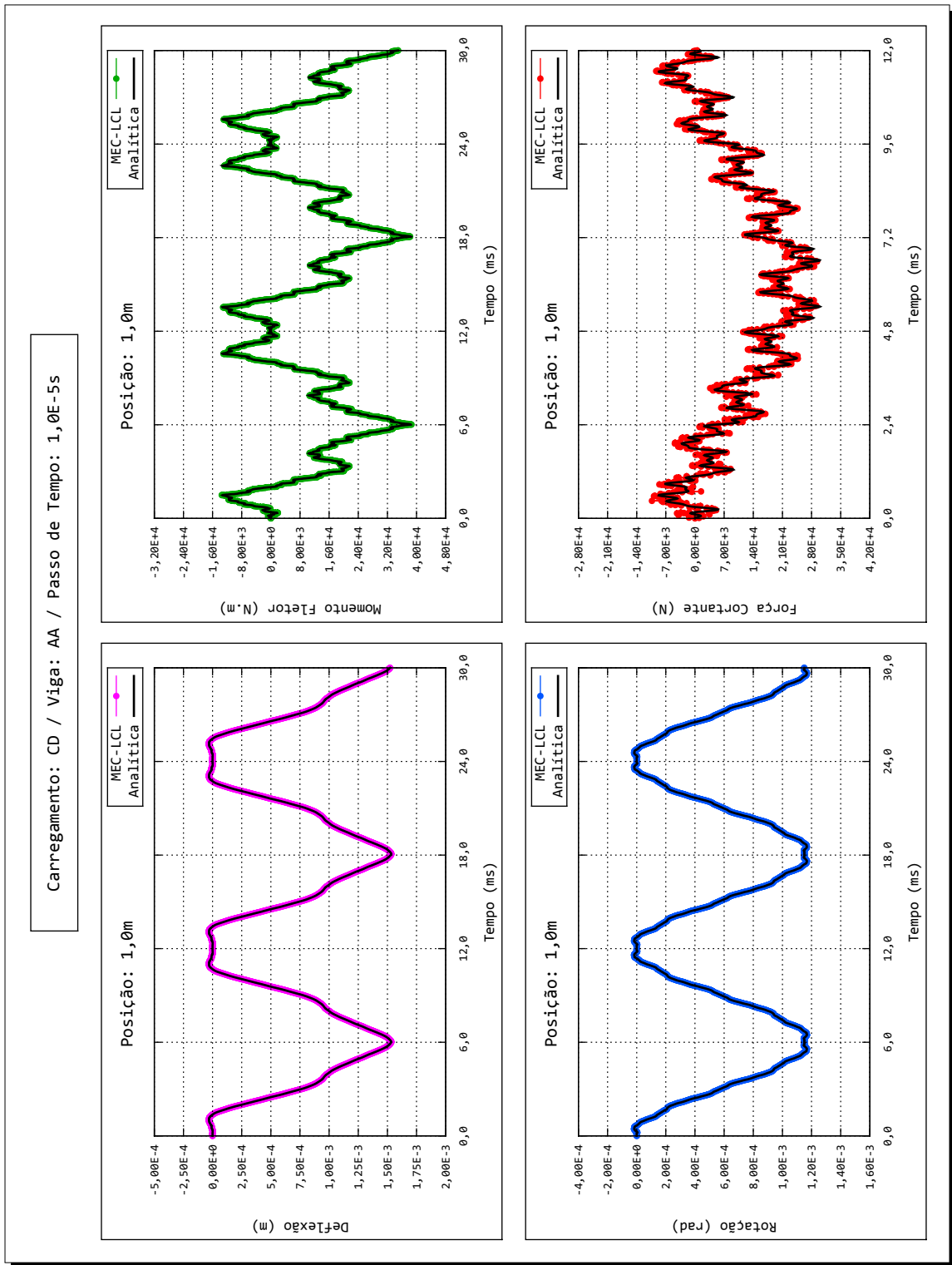


FIGURA 42 – CARREGAMENTO CD, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)

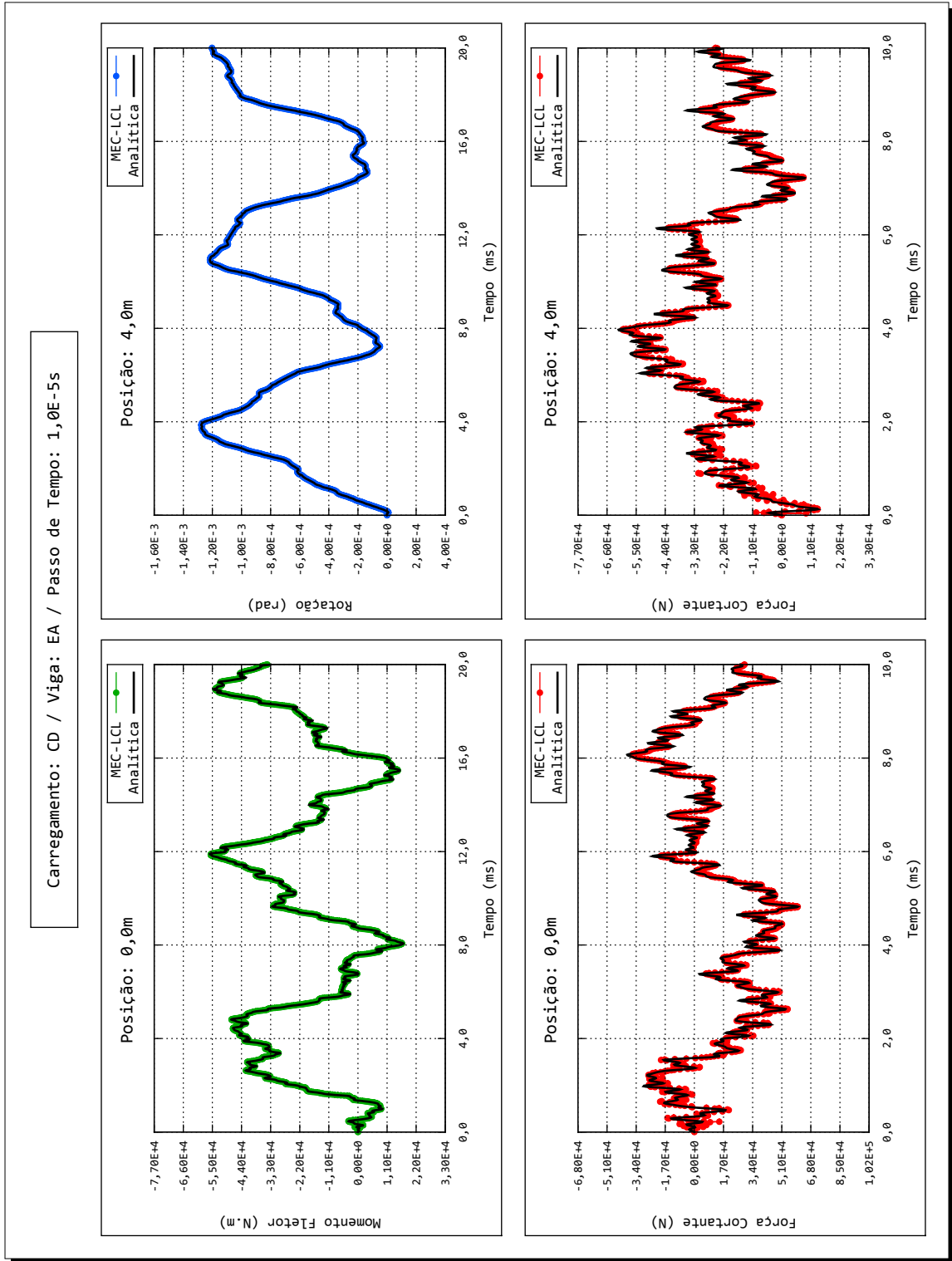


FIGURA 43 – CARREGAMENTO CD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTORNO)

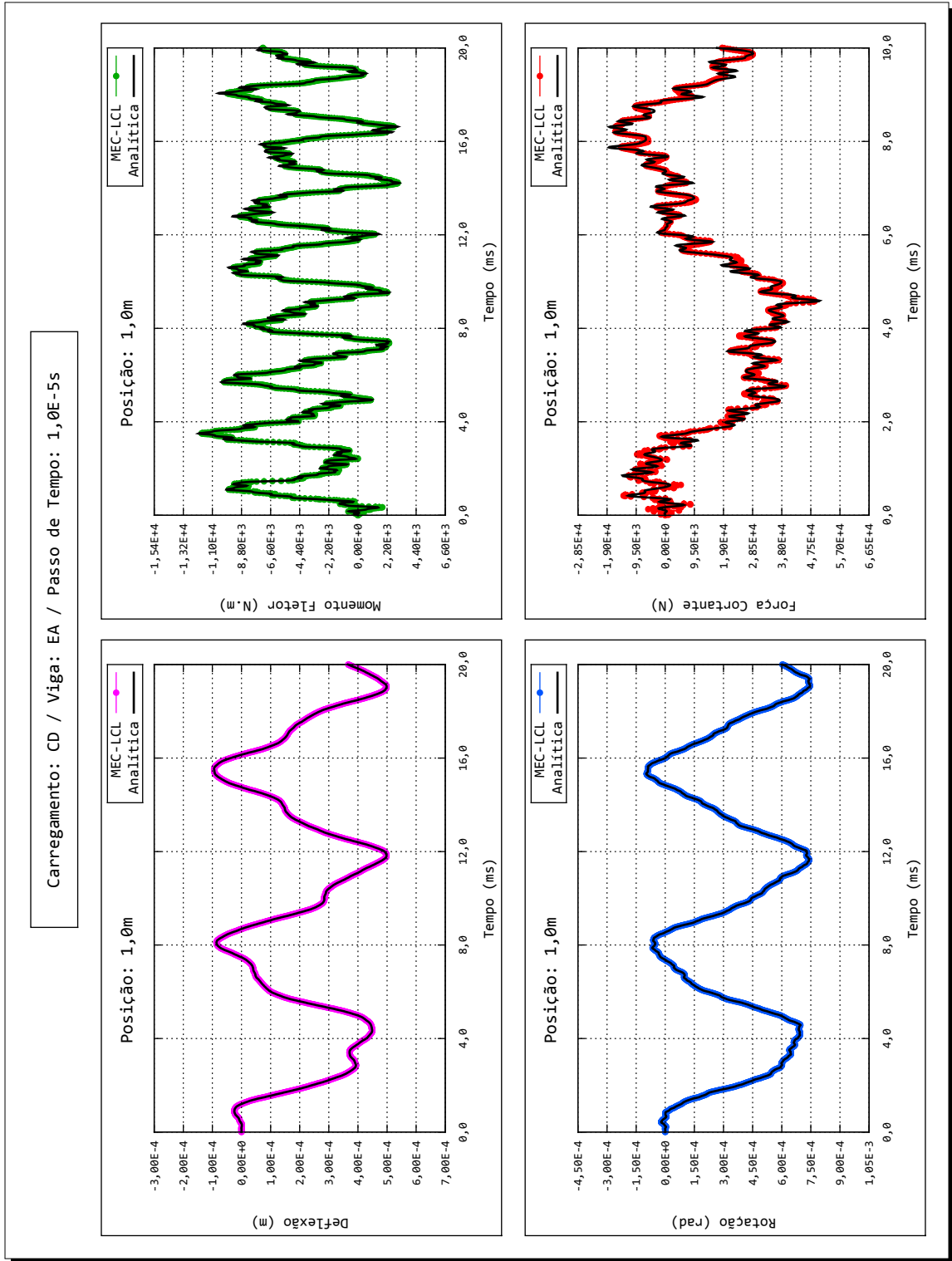


FIGURA 44 – CARREGAMENTO CD, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)



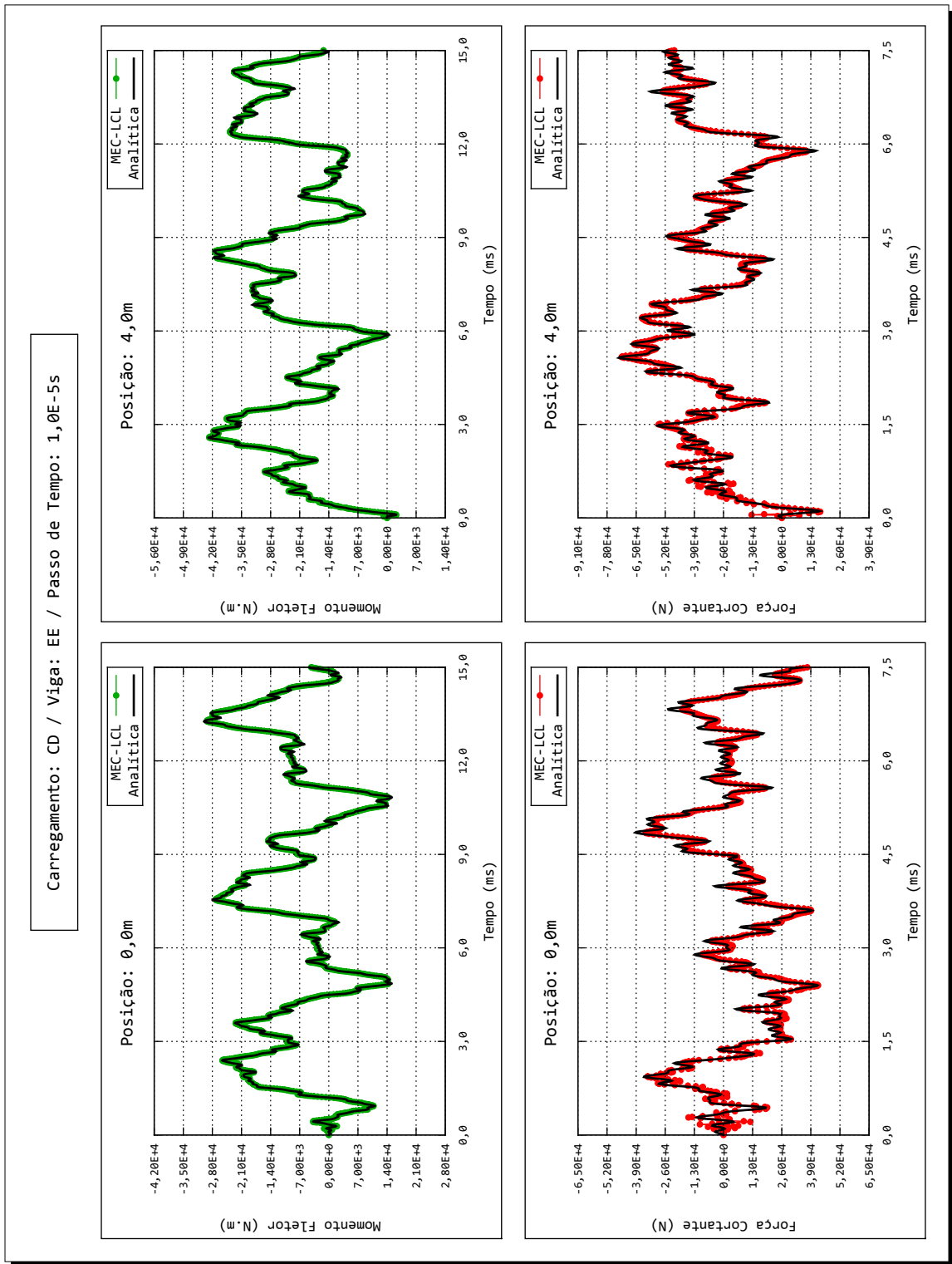


FIGURA 45 – CARREGAMENTO CD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTOURO)

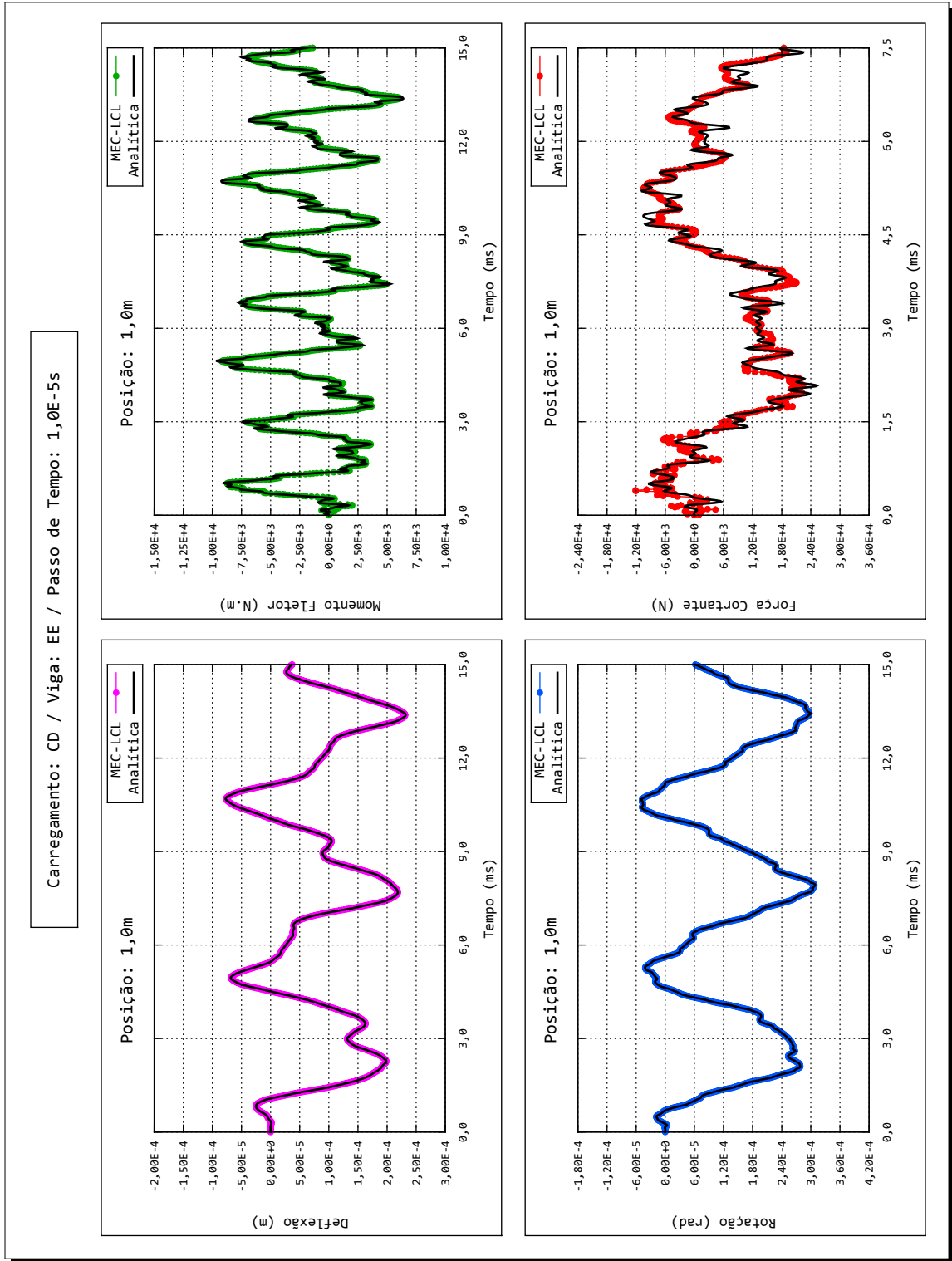


FIGURA 46 – CARREGAMENTO CD, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

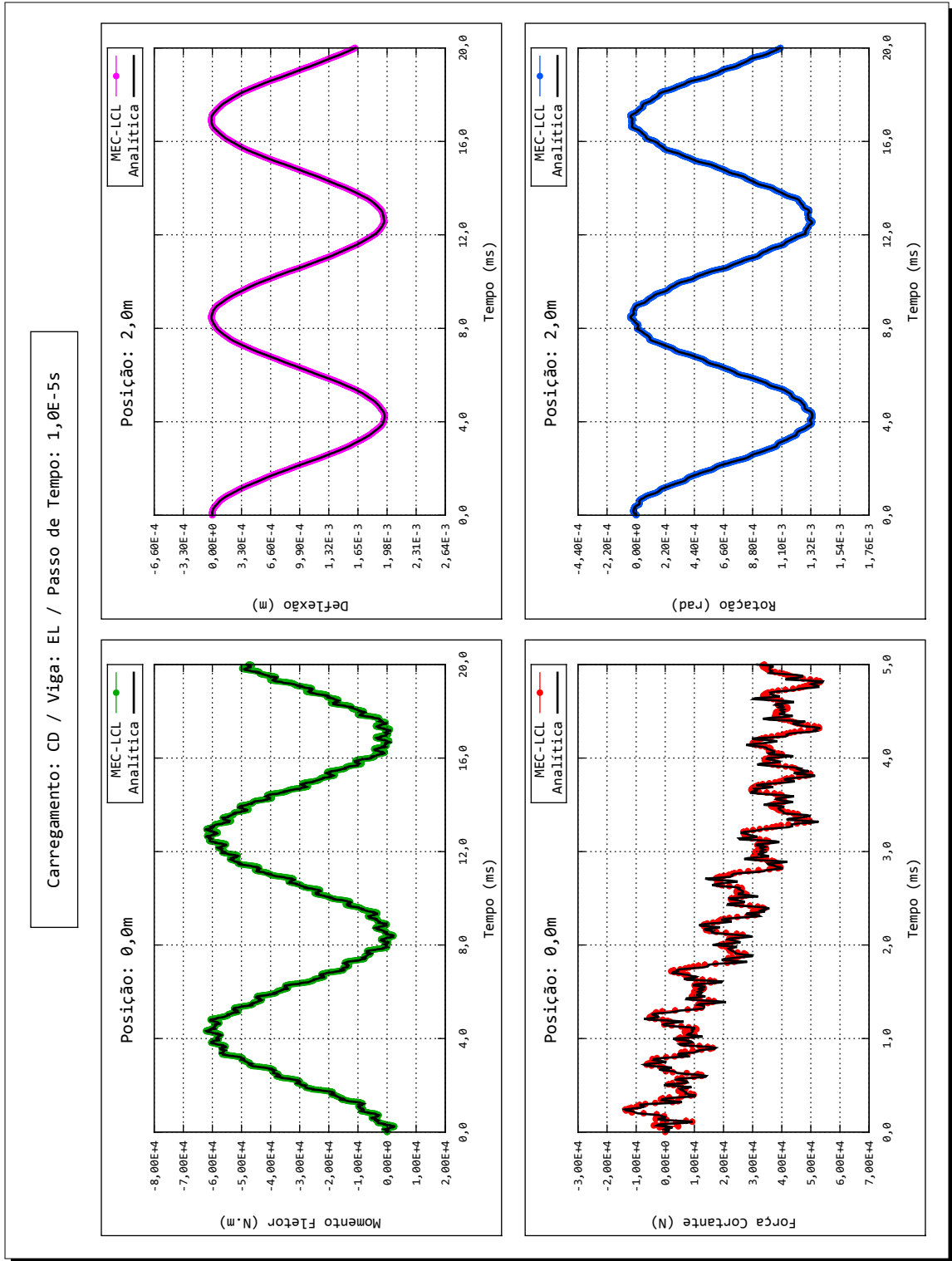


FIGURA 47 – CARREGAMENTO CD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (CONTORNO)

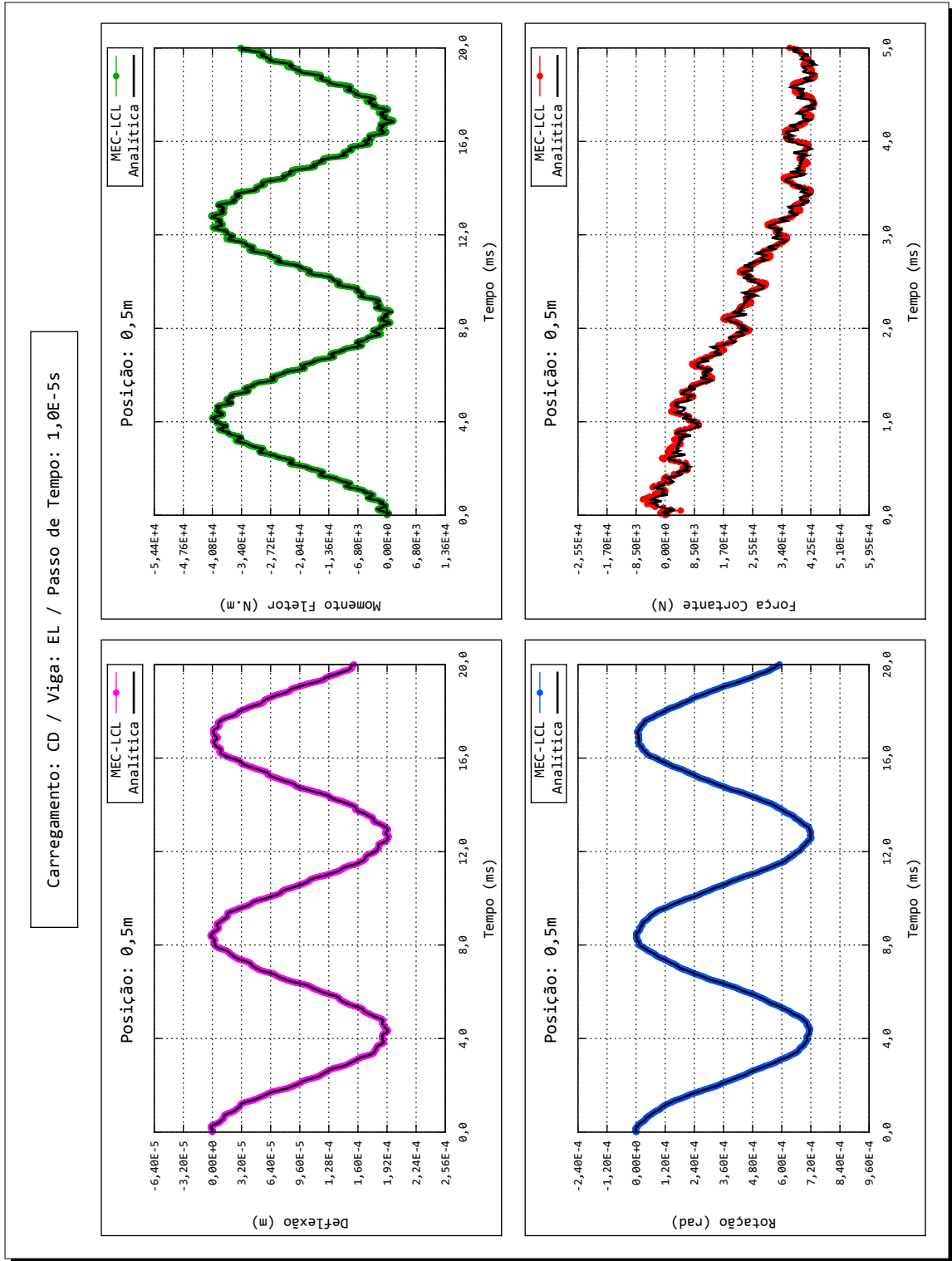


FIGURA 48 – CARREGAMENTO CD, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

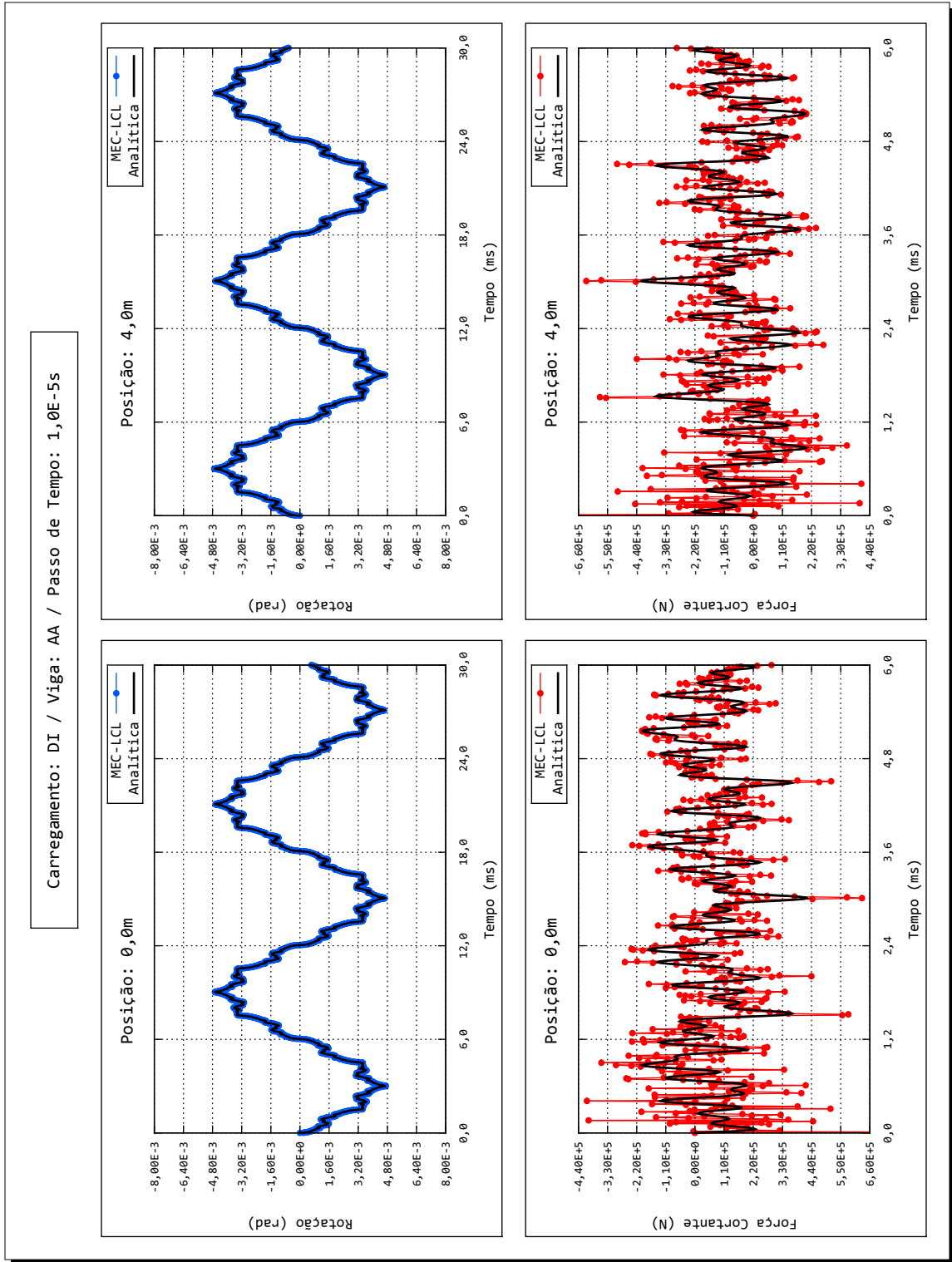


FIGURA 49 – CARREGAMENTO DI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (CONTOUR)

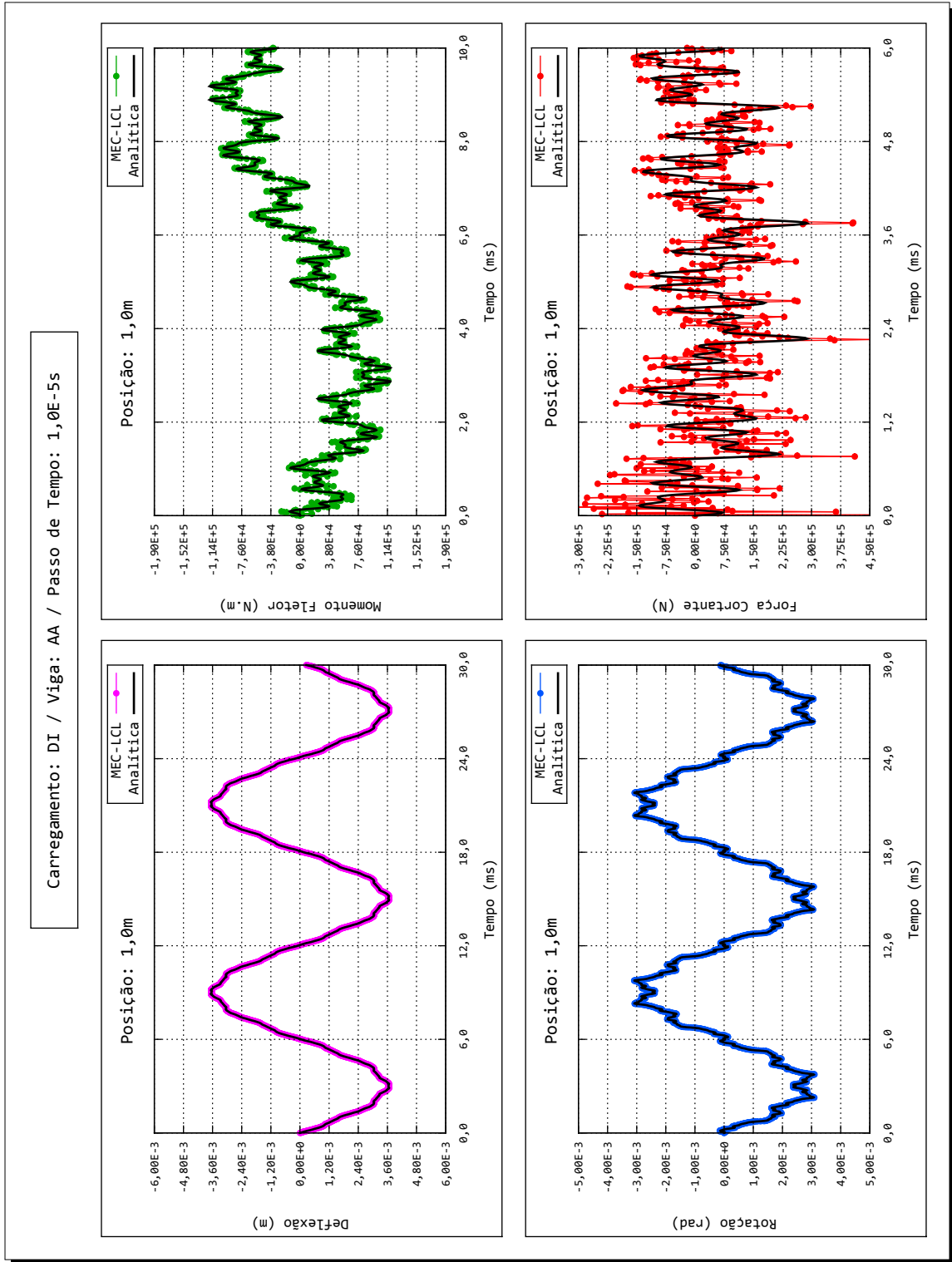


FIGURA 50 – CARREGAMENTO DI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

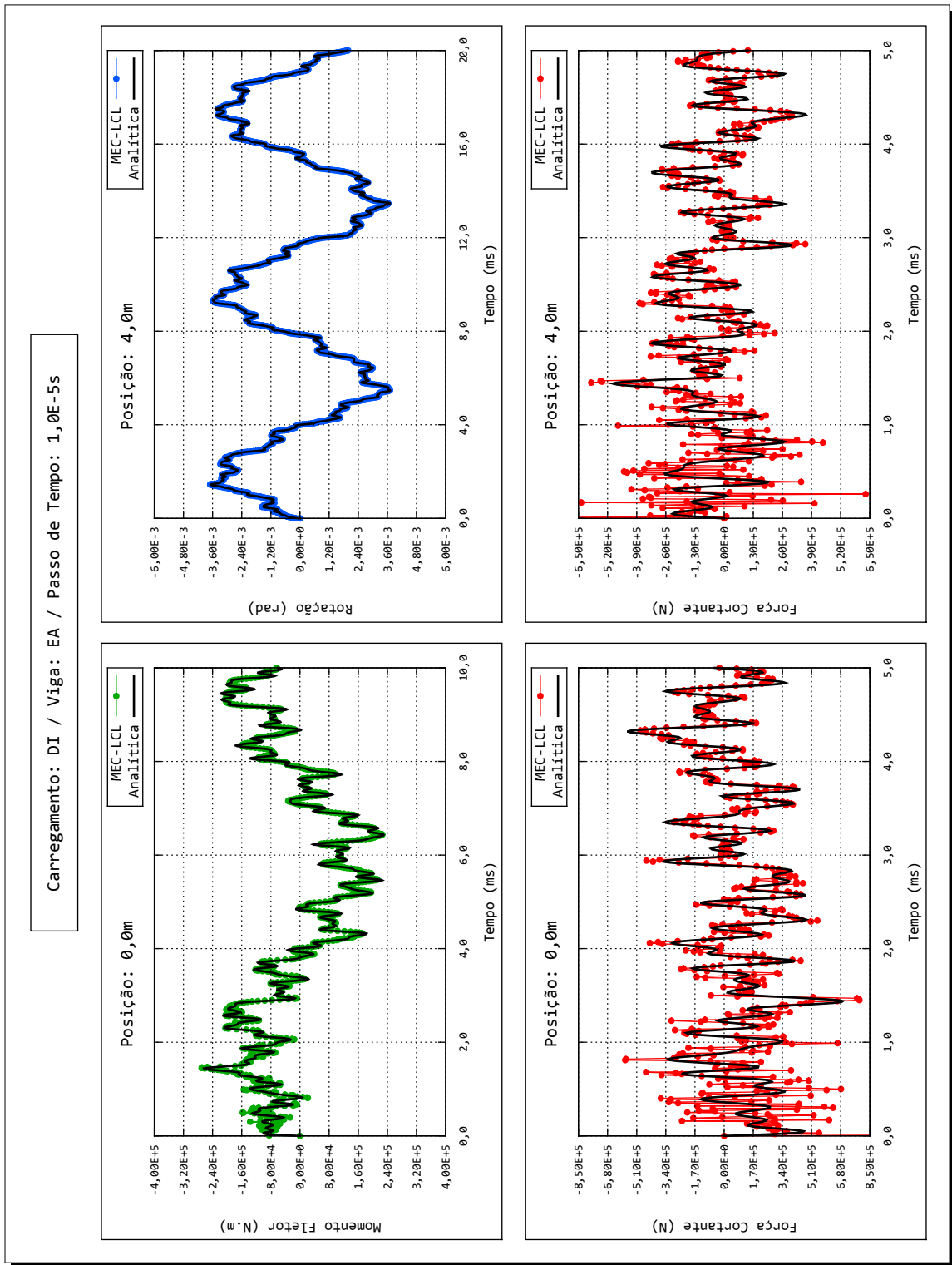


FIGURA 51 – CARREGAMENTO DI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (CONTORNO)

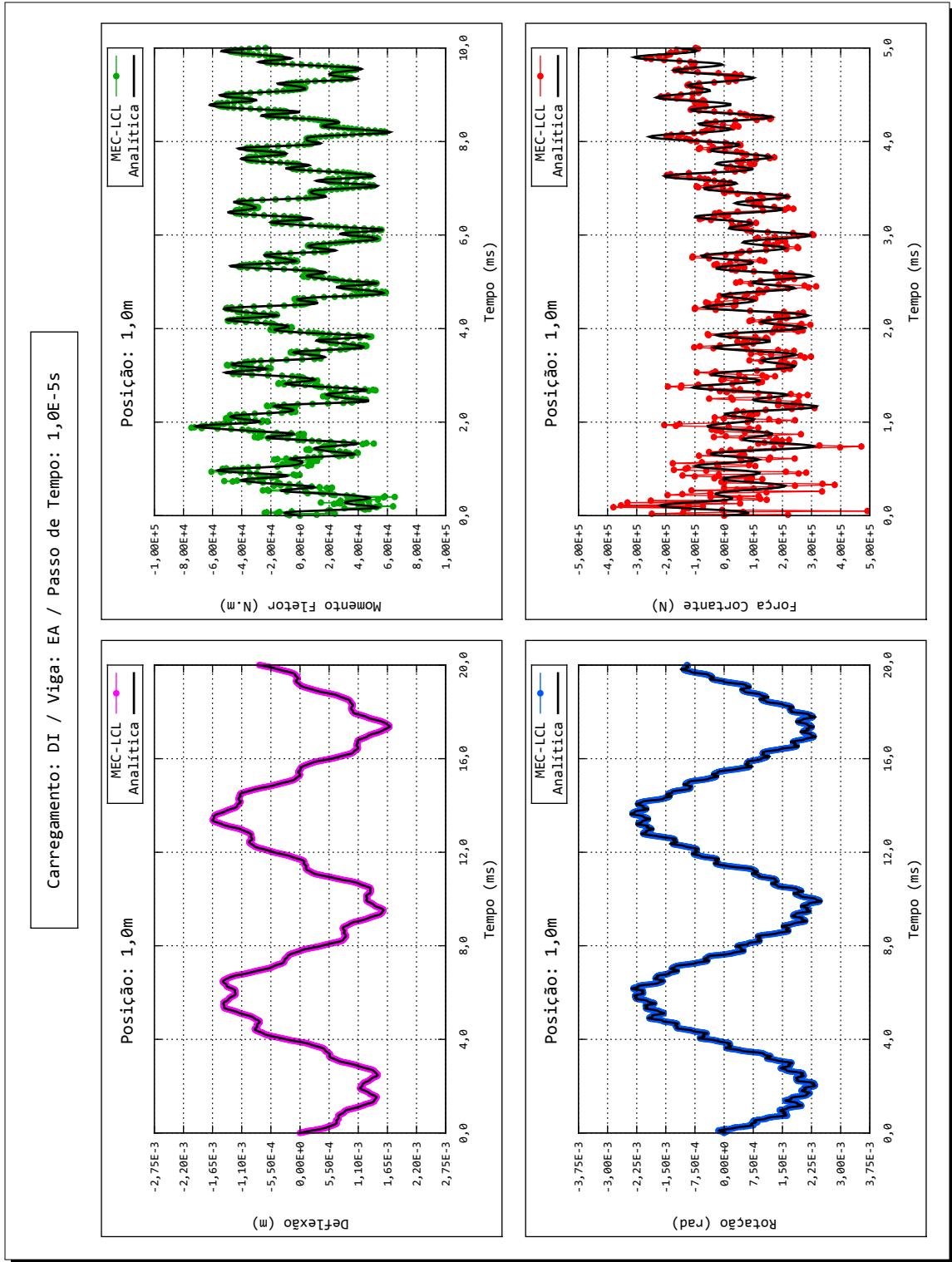


FIGURA 52 – CARREGAMENTO DI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)



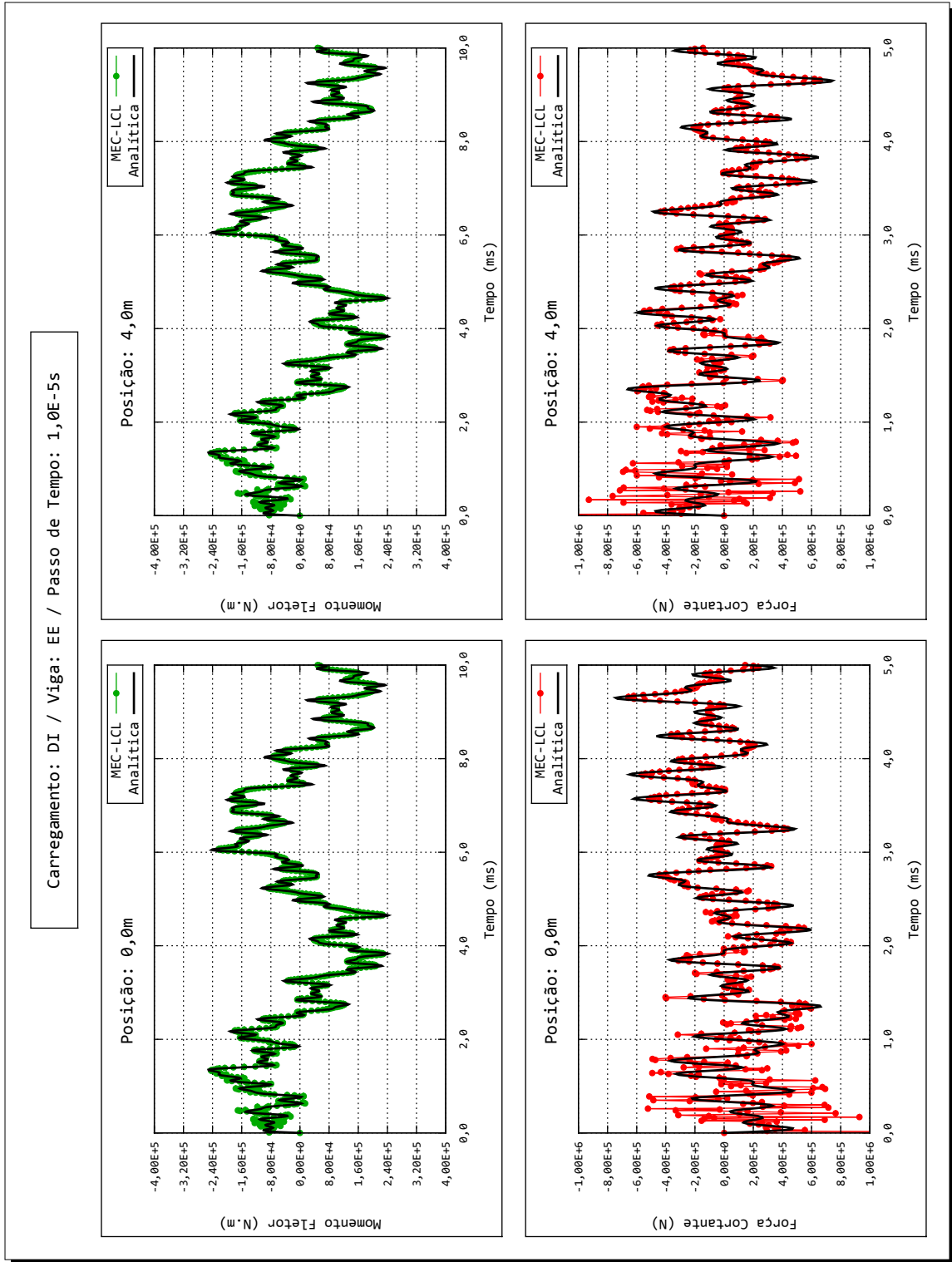


FIGURA 53 – CARREGAMENTO DI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (CONTORNO)

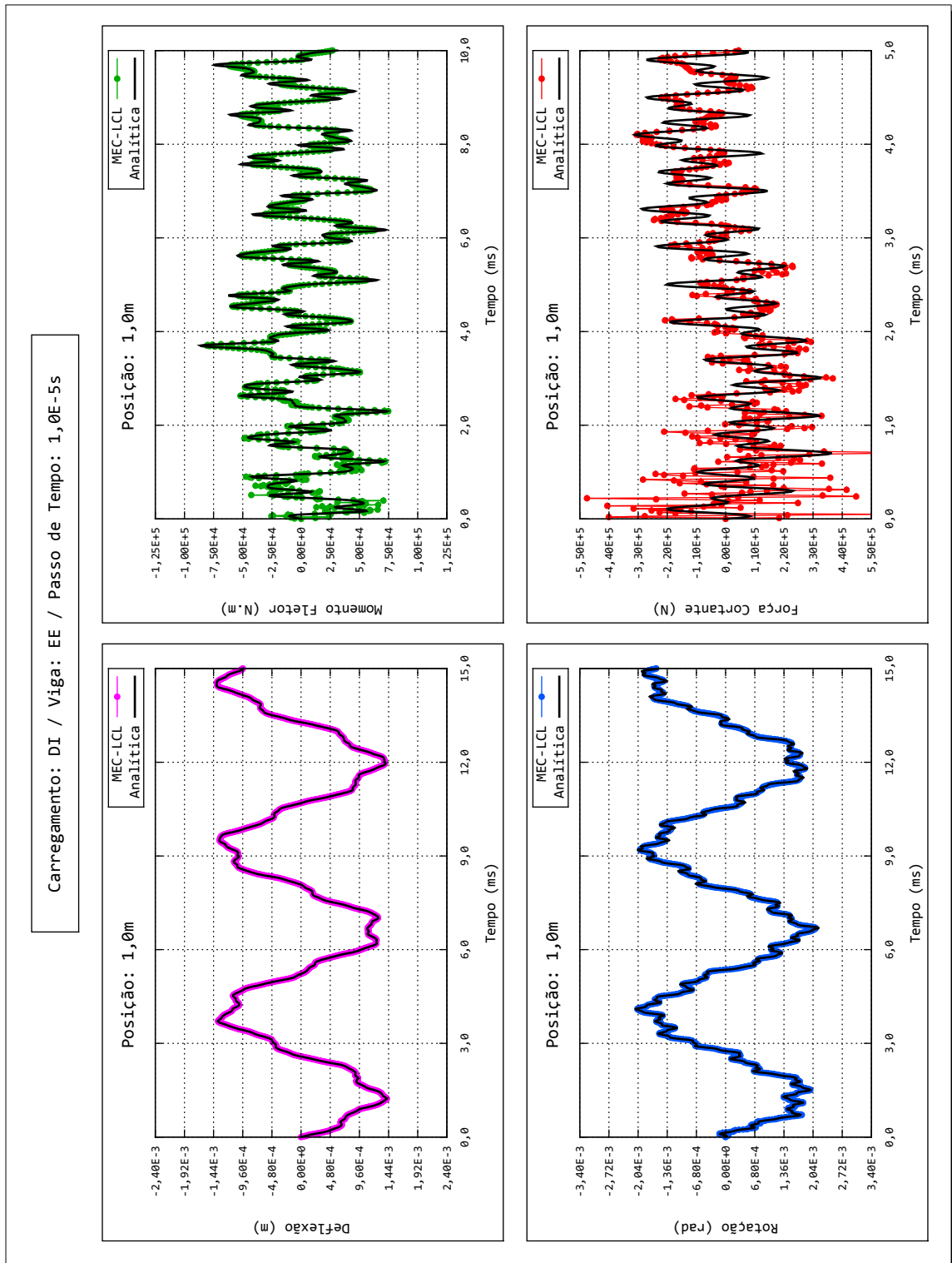


FIGURA 54 – CARREGAMENTO DI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)

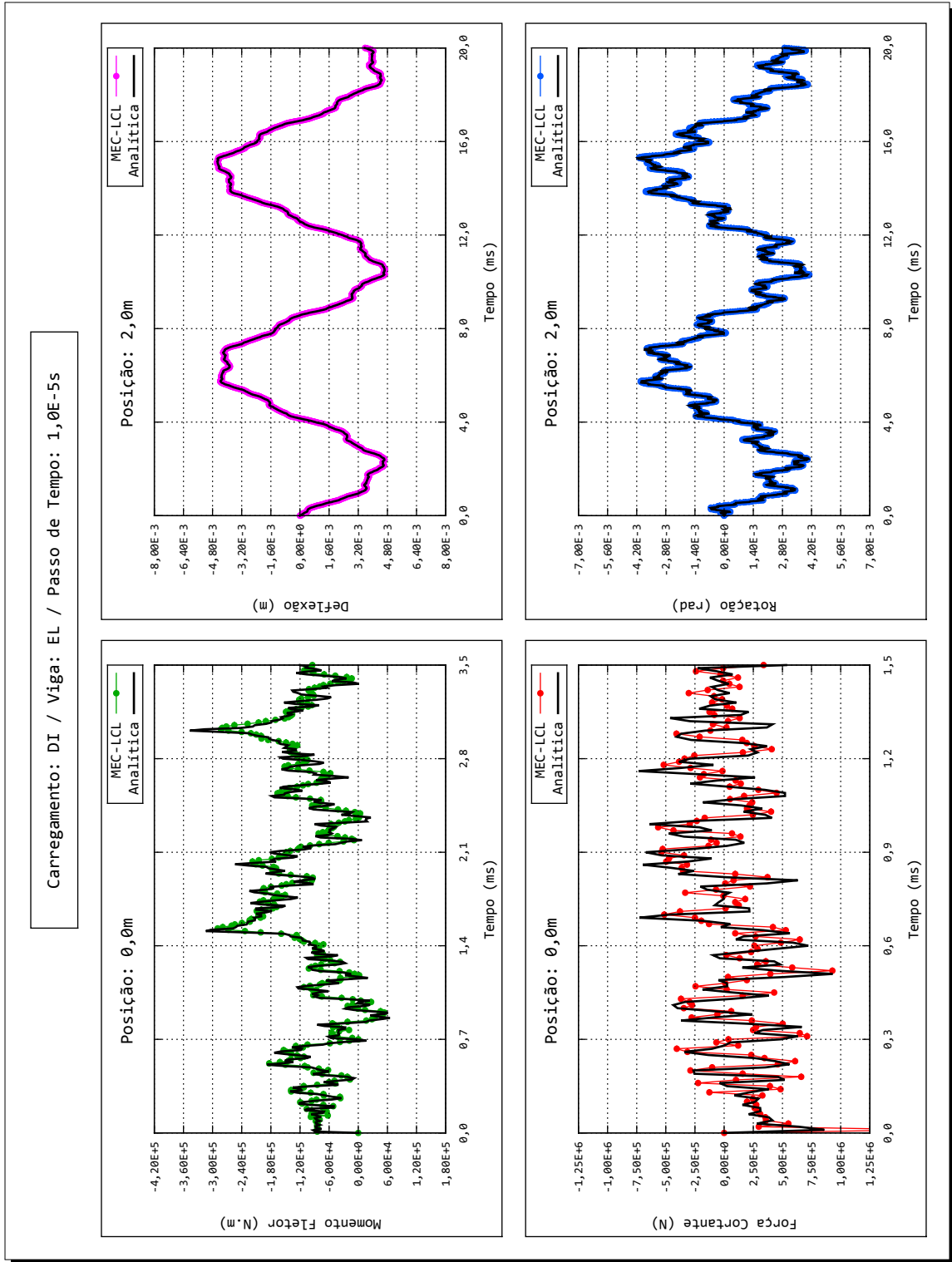


FIGURA 55 – CARREGAMENTO DI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (CONTORNO)

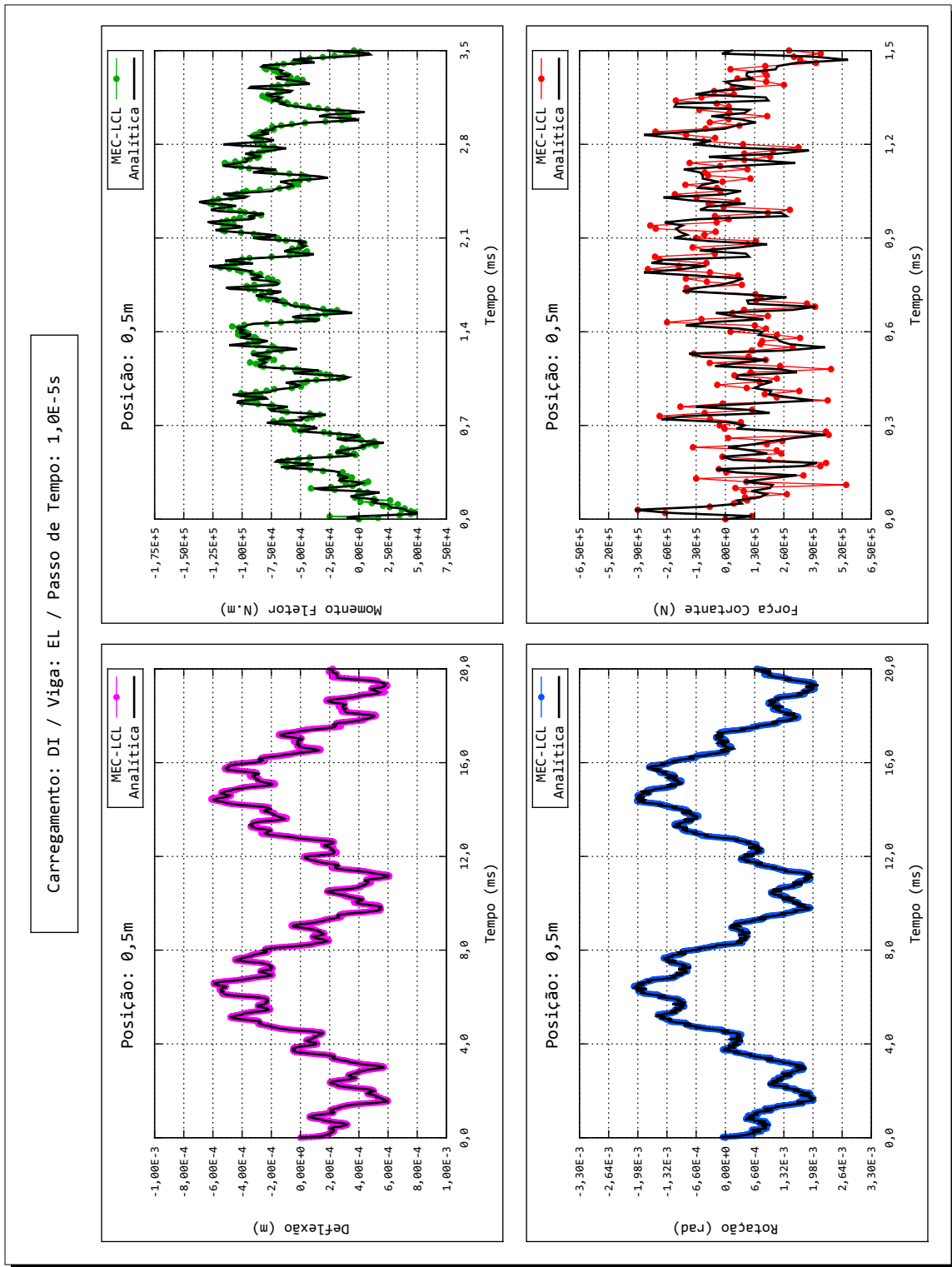


FIGURA 56 – CARREGAMENTO DI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)

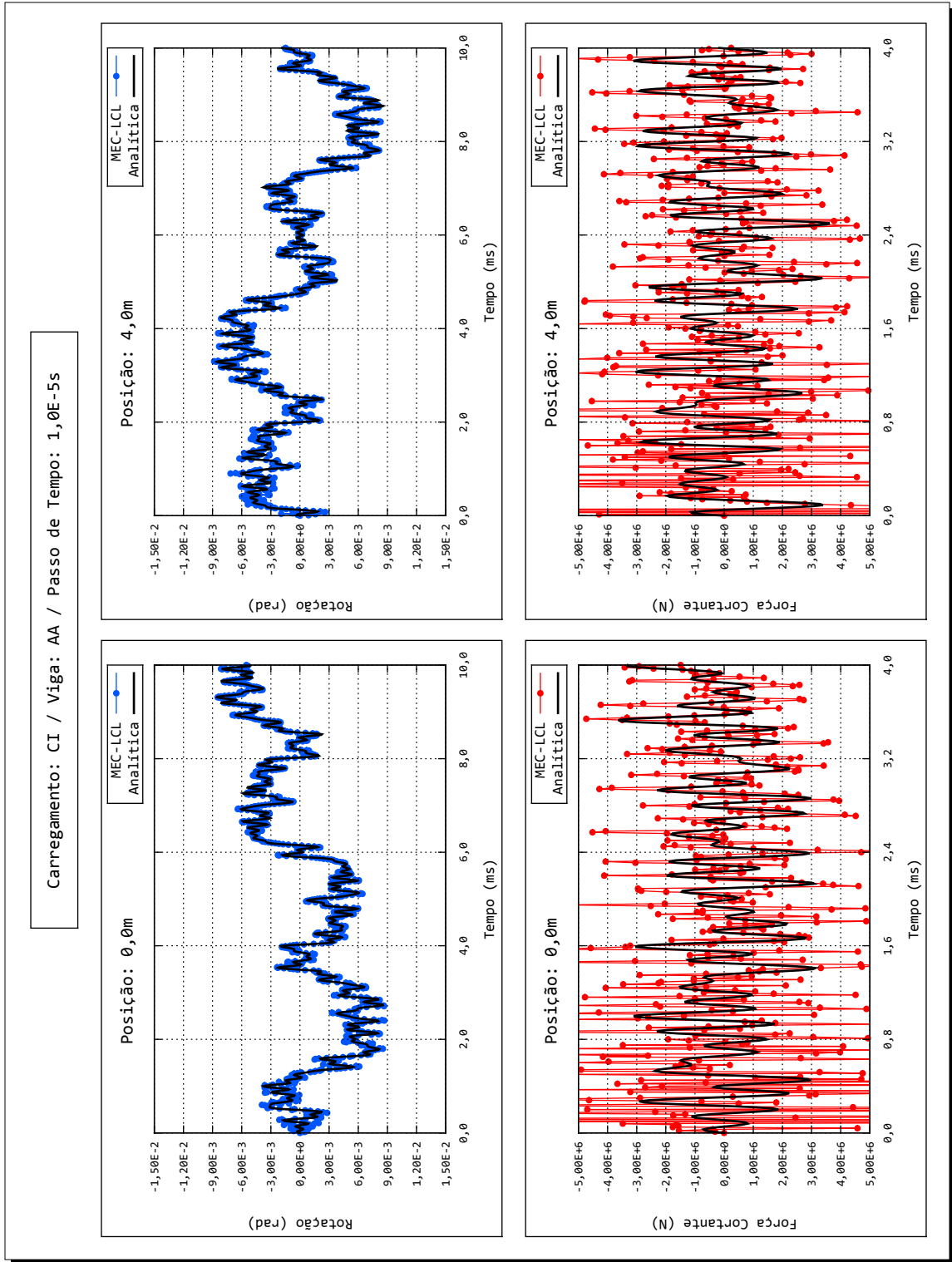


FIGURA 57 – CARREGAMENTO CI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (CONTORNO)

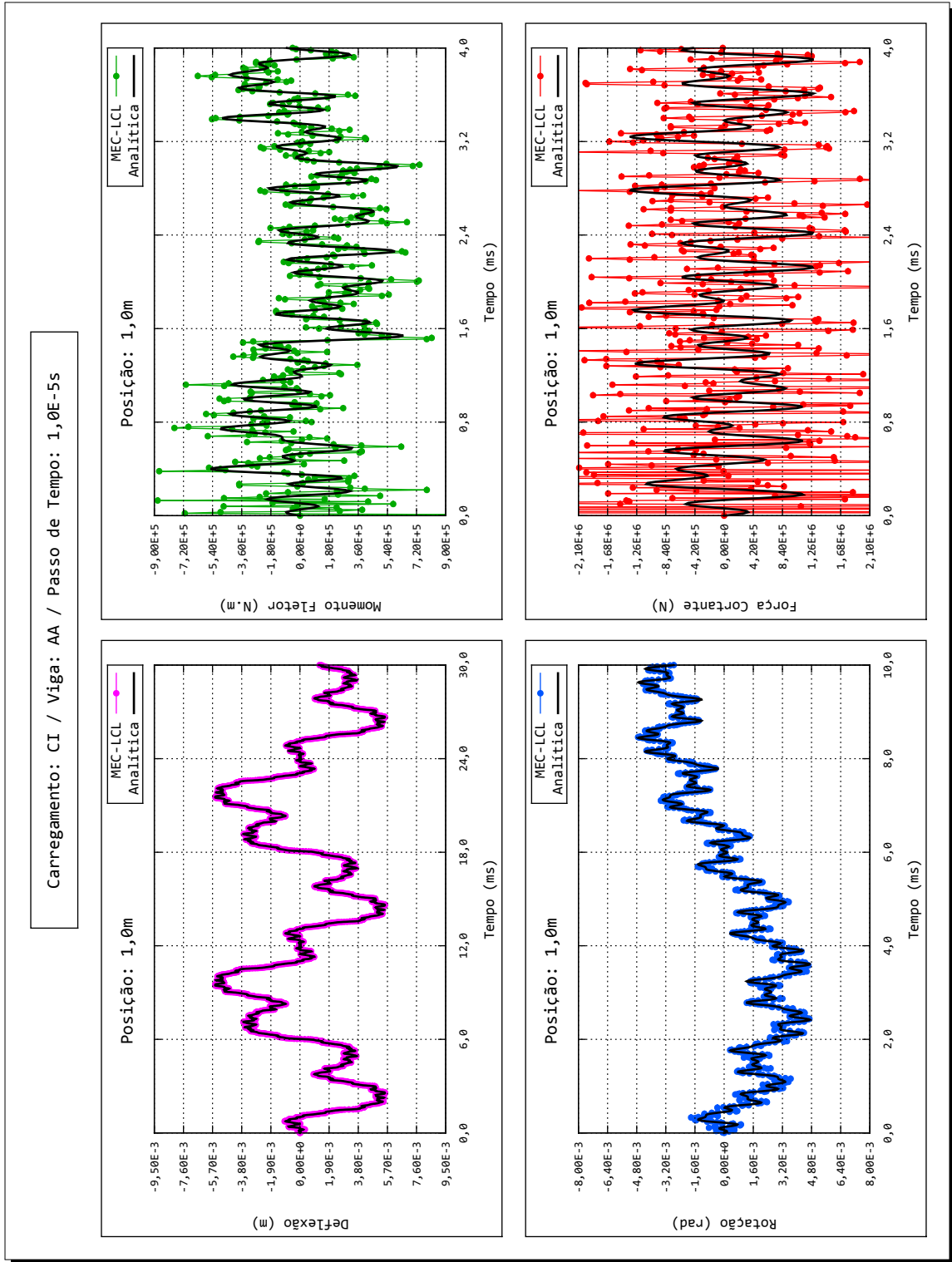


FIGURA 58 – CARREGAMENTO CI, VIGA AA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>ms (DOMÍNIO)

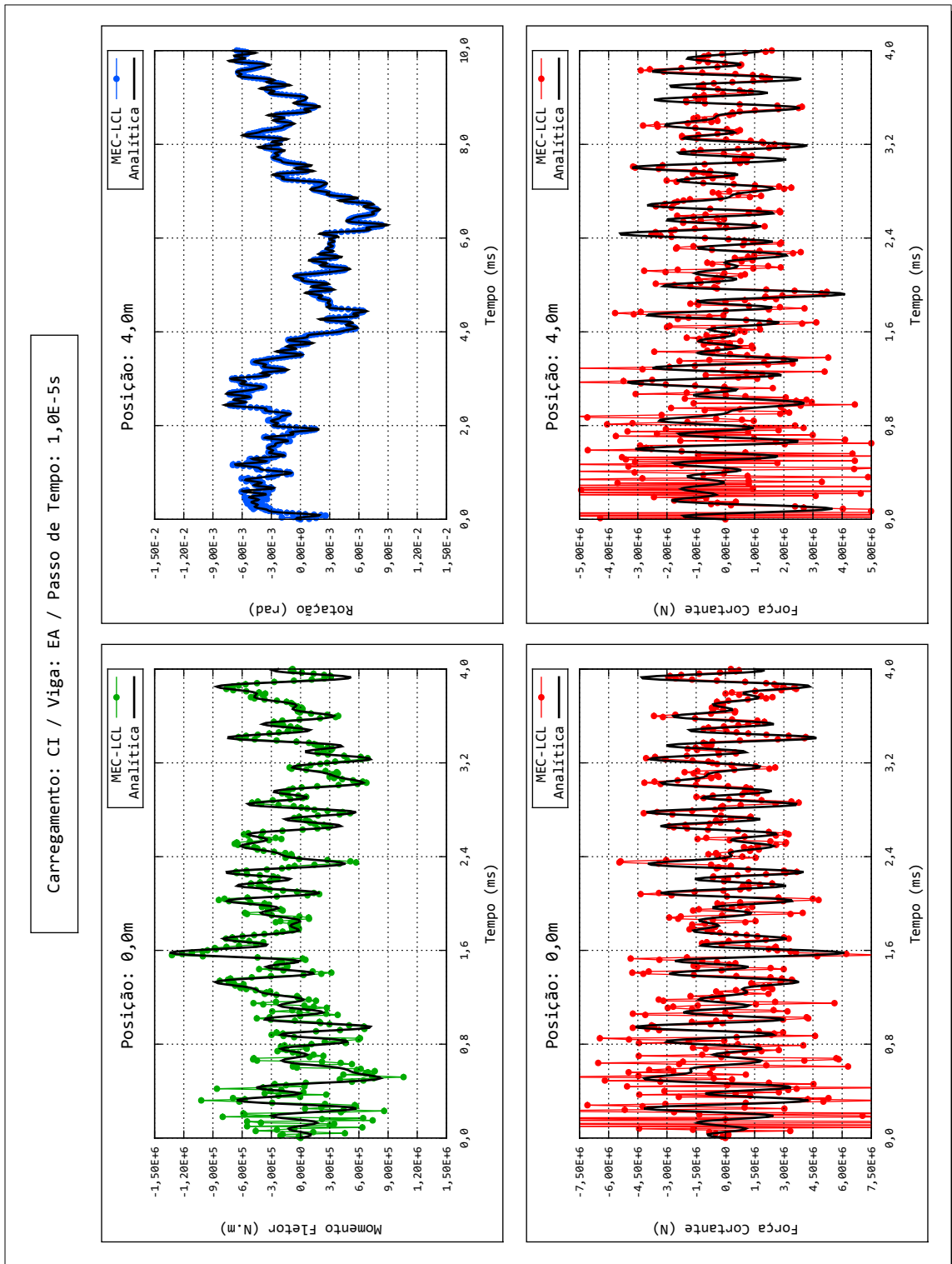


FIGURA 59 – CARREGAMENTO CI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO  $10^{-5}$ s (CONTORNO)

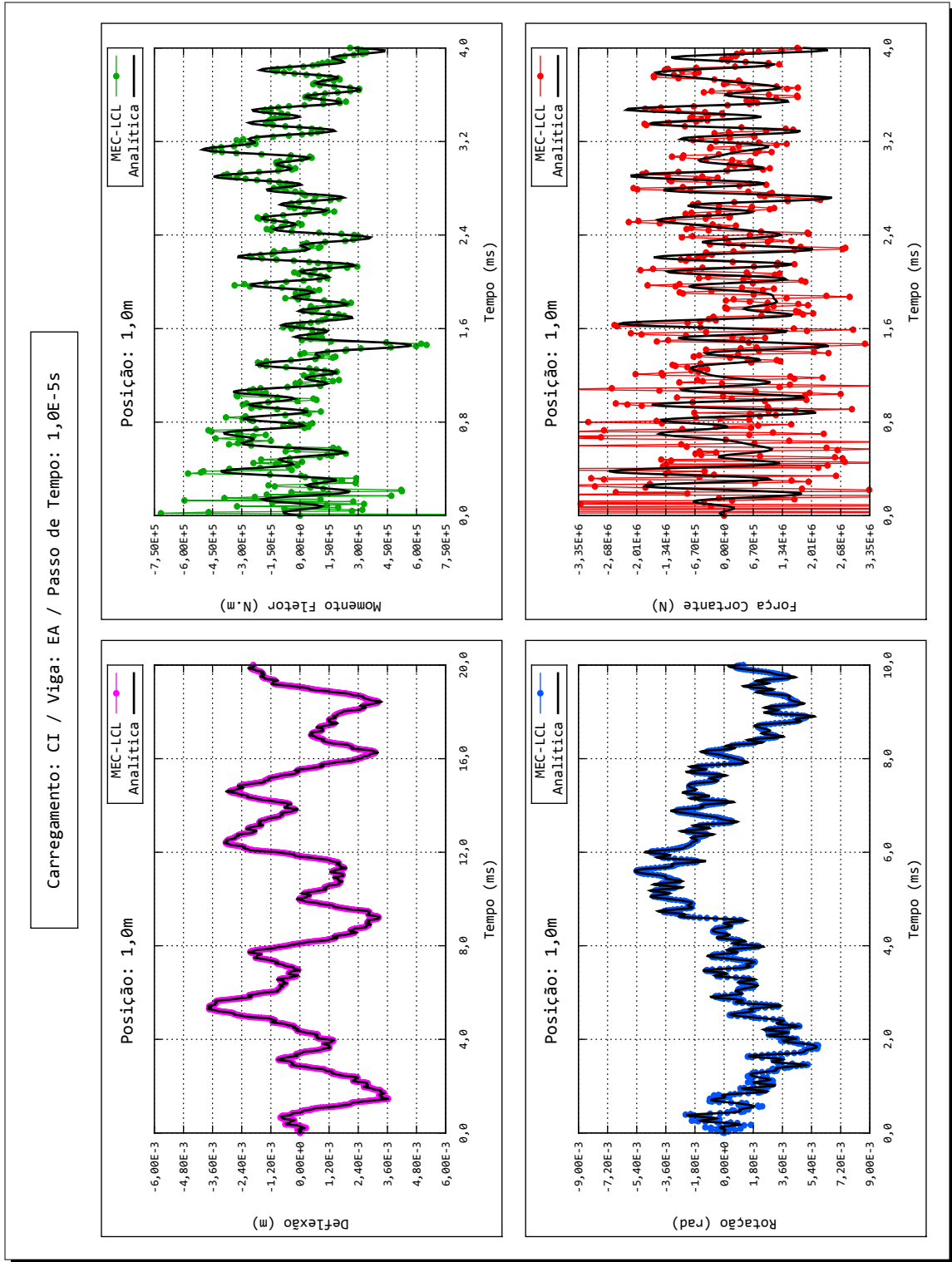


FIGURA 60 – CARREGAMENTO CI, VIGA EA, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)



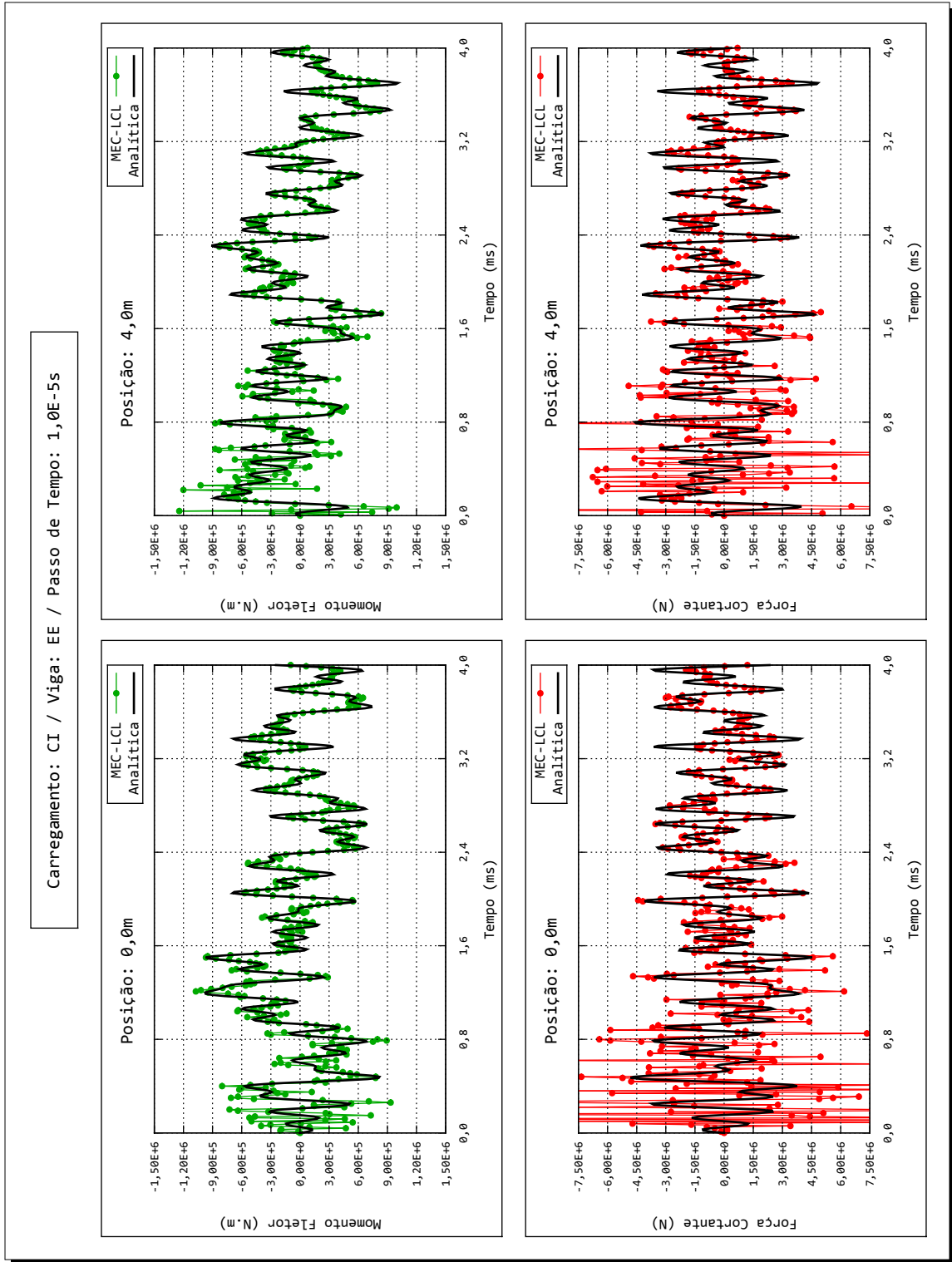


FIGURA 61 – CARREGAMENTO CI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (CONTORNO)

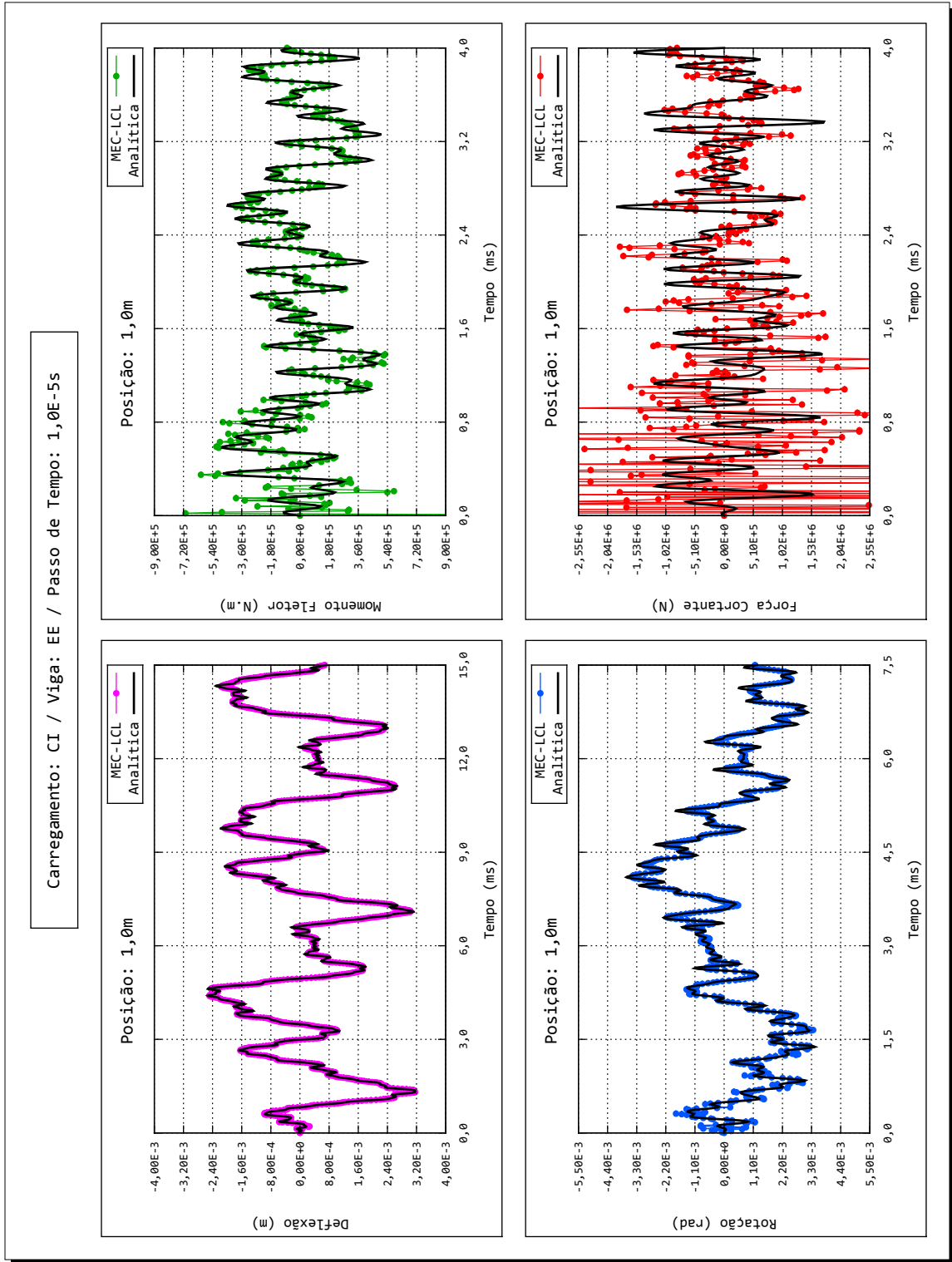


FIGURA 62 – CARREGAMENTO CI, VIGA EE, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (DOMÍNIO)

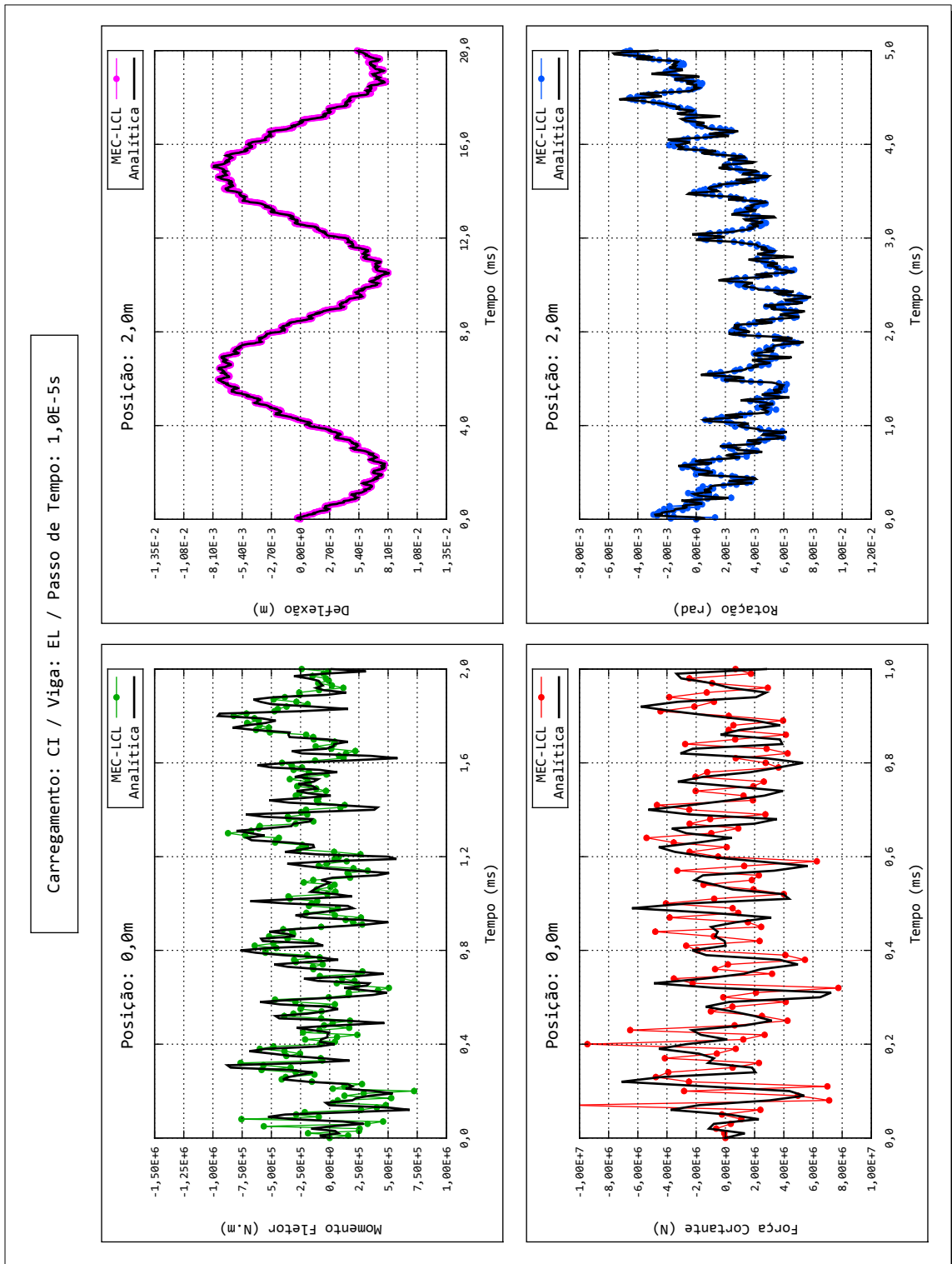


FIGURA 63 – CARREGAMENTO CI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup> (CONTORNO)

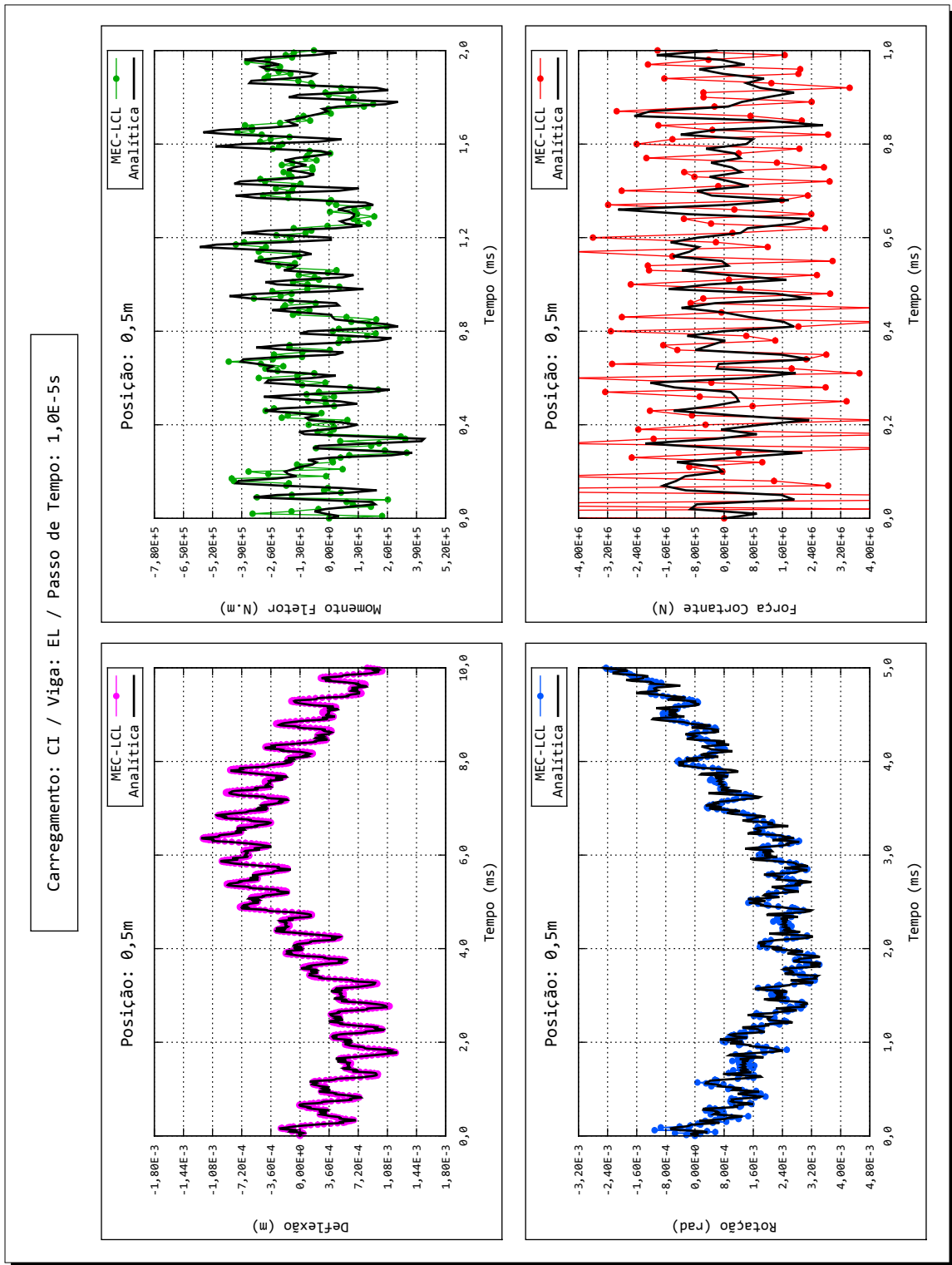


FIGURA 64 – CARREGAMENTO CI, VIGA EL, FORMULAÇÃO MEC-LCL, PASSO DE TEMPO 10<sup>-5</sup>s (DOMÍNIO)

## 5 CONCLUSÃO

### 5.1 REVISÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS

Neste trabalho foram discutidas a formulação matemática e a implementação numérica do Método dos Elementos de Contorno em análises dinâmicas de vigas de Euler-Bernoulli utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo.

No Capítulo 1, após algumas considerações iniciais, foi apresentada uma revisão da literatura pertinente. A motivação e os objetivos foram enunciados na sequência. A descrição da estruturação e organização do texto fecha o primeiro capítulo.

No Capítulo 2 foi feita uma breve revisão da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e foram apresentadas as soluções analíticas utilizadas como base para comparação com os valores numéricos obtidos com o Método dos Elementos de Contorno. A solução fundamental dependente do tempo e suas propriedades foram introduzidas e discutidas na sequência.

O Capítulo 3 contém o núcleo matemático do presente trabalho. A partir do método dos resíduos ponderados foi deduzida a sentença inversa associada à equação governante do problema. Combinando essa sentença inversa com a forma singular da equação governante do problema produziu-se, devido às propriedades de integração da função delta de Dirac, uma equação integral para as deflexões verticais da viga. Equações integrais para a rotação, o momento fletor e a força cortante foram obtidas tomando-se derivadas de primeira, de segunda e de terceira ordem, respectivamente, da equação integral para deflexões em relação ao ponto fonte. Em seguida foi descrito o esquema de discretização dos intervalos espaciais e temporais e foram propostas três formulações para a análise numérica do problema: MEC-CCC, MEC-LLL e MEC-LCL. Foram, então, apresentadas as alterações necessárias para adaptar as formulações precedentes para carregamentos externos concentrados, impulsivos e concentrados/impulsivos. Fechando o terceiro capítulo foram feitas algumas observações sobre as características da

marcha no tempo utilizada e suas implicações para o desempenho computacional.

O Capítulo 4, por sua vez, descreveu o conjunto de exemplos numéricos desenvolvidos para avaliar o comportamento das formulações do Método dos Elementos de Contorno propostas e apresentou os resultados mais preponderantes. As conclusões imediatas foram, então, apontadas e discutidas.

## 5.2 CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

Considerando a qualidade dos resultados numéricos obtidos, afirma-se que a principal contribuição do presente trabalho está na demonstração da factibilidade do emprego do Método dos Elementos de Contorno para a solução de análises dinâmicas de vigas de Euler-Bernoulli empregando soluções fundamentais dependentes do tempo. Como contribuições secundárias destacam-se as fórmulas analíticas e os códigos computacionais disponibilizados no Apêndice ao texto.

## 5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros destacam-se a implementação de (a) vigas contínuas, (b) vigas em base elástica, (c) condições iniciais não nulas, (d) vigas com mudanças abruptas de seção transversal através da técnica de sub-regiões e (e) análises dinâmicas com soluções fundamentais dependentes do tempo para vigas de Timoshenko.

## 5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria de Euler-Bernoulli para vigas, também denominada teoria clássica de vigas, é relativamente simples e produz, do ponto de vista prático, resultados bastante satisfatórios.

O desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno dependente do tempo para a análise dinâmica desse tipo de viga mostrou-se, todavia, bastante desafiador, devido à complexidade da solução fundamental do problema. Porém, a julgar pelos resultados apresentados, o esforço foi recompensado: resultados bastante precisos foram obtidos, demonstrando, sem dúvida alguma, a viabilidade do emprego da formulação e encorajando trabalhos futuros. Pelo exposto, conclui-se que o saldo é positivo e o trabalho apresentado representa apenas o início de uma linha de pesquisa bastante promissora.

## REFERÊNCIAS

- 1 PROVIDAKIS, C. P.; BESKOS, D. E. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. **Computer and Structures**, v. 22, n. 6, p. 957–964, 1986.
- 2 SCHANZ, M. A time domain boundary integral formulation for Euler-Bernoulli beams. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 79, n. S2, p. S575–S576, 1999.
- 3 LANGRE, E. de; AXISA, F.; GUILBAUD, D. Forced flexural vibrations of beams using a time-stepping boundary element method. In: BREBBIA, C. A.; CHAUDOUET-MIRANDA, A. (Eds.). **Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering: Proceedings of the International Boundary Element Symposium (Nice, France, May 15–17, 1990)**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1990. p. 139–150.
- 4 LUBICH, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus I. **Numerische Mathematik**, v. 52, n. 2, p. 129–145, 1988.
- 5 LUBICH, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus II. **Numerische Mathematik**, v. 52, n. 4, p. 413–425, 1988.
- 6 ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. **Computer and Structures**, v. 81, n. 6, p. 383–396, 2003.
- 7 ANTES, H.; SCHANZ, M.; ALVERMANN, S. Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 276, n. 3–5, p. 807–836, 2004.
- 8 TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; OIDA, S. A boundary element method applied to the elastostatic bending problem of beam-stiffened plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 10, p. 751–758, 2000.
- 9 SAPOUNTZAKIS, E.; DOURAKOPOULOS, J. Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beams by BEM: Part I: Theory and numerical implementation. **Nonlinear Dynamics**, v. 58, n. 1–2, p. 295–306, 2009.
- 10 SAPOUNTZAKIS, E.; DOURAKOPOULOS, J. Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beams by BEM: Part II: Applications and validation. **Nonlinear Dynamics**, v. 58, n. 1–2, p. 307–318, 2009.
- 11 RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- 12 KYTHE, P. K. **Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications**. Boston: Birkhäuser, 1996.
- 13 GRAFF, K. F. **Wave Motion in Elastic Solids**. New York: Dover Publications, 1991.



- 14 CAMPBELL, G. A.; FOSTER, R. M. **Fourier Integrals for Practical Applications**. Princeton, New Jersey: D. van Nostrand Company, 1961.
- 15 BOERSMA, J. Computation of Fresnel integrals. **Mathematics of Computation**, v. 14, n. 72, p. 380, 1960.
- 16 WROBEL, L. C. **The Boundary Element Method. Volume 1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.
- 17 ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method. Volume 2: Applications in Solids and Structures**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.
- 18 CARRER, J. A. M.; FLEISCHFRESSER, S. A.; GARCIA, L. F. T.; MANSUR, W. J. Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 12, p. 1602–1616, 2013.
- 19 MANSUR, W. J. **A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — University of Southampton, Southampton, Inglaterra, 1983.

## APÊNDICE

O conteúdo deste Apêndice encontra-se em formato digital nos arquivos localizados no disco anexo a este trabalho. Os 101 arquivos disponíveis podem ser agrupados em três categorias:

- a) códigos: pertencem a essa categoria os arquivos *Beam-CCC.rar*, *Beam-LCL.rar* e *Beam-LLL.rar*. Cada um desses arquivos reúne 82 arquivos contendo códigos escritos em linguagem Fortran. Esses arquivos contêm as implementações computacionais das formulações matemáticas apresentadas no Capítulo 3;
- b) coeficientes: pertencem a essa categoria os arquivos *Coeficientes-CCC.pdf* e *Coeficientes-LLL.pdf*. Esses arquivos contêm fórmulas para os coeficientes definidos no Capítulo 3: o primeiro possui 38 páginas e lista 88 fórmulas e o segundo possui 139 páginas e lista 208 fórmulas. A Tabela 6 apresenta a correspondência entre os coeficientes listados e sua localização nos referidos arquivos;
- c) exemplos: pertencem a essa categoria os 96 arquivos restantes. Esses arquivos contêm os gráficos gerados a partir dos resultados numéricos obtidos com os códigos computacionais desenvolvidos. A nomenclatura desses arquivos segue o padrão *Exemplo-CARGA-VIGA-MEC-ONDE.pdf*. Para cada combinação de carregamento externo (*CARGA* = DD, CD, DI ou CI), tipo de viga (*VIGA* = AA, EA, EE ou EL) e formulação do MEC (*MEC* = CCC, LCL ou LLL) existem dois arquivos: um com as soluções das respectivas incógnitas de contorno (*ONDE* = CON) e outro com os valores de deflexão, rotação, momento fletor e força cortante calculados para um dado ponto no interior da viga (*ONDE* = DOM). Todos os arquivos possuem 10 páginas, cada uma correspondendo a um valor de passo de tempo diferente, totalizando 960 exemplos e 3840 gráficos.

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continua)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
1	$\widehat{G}_{p\ell}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	1
2	$\widehat{G}_{p0}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	1
3	$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	2
4	$\widetilde{G}_{p0}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	2
5	$\widetilde{H}_{p\ell}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	3
6	$\widetilde{H}_{p0}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	3
7	$\widehat{H}_{p\ell}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	4
8	$\widehat{H}_{p0}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	4
9	$\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	5
10	$\widehat{G}_{p0,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	5
11	$\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	6
12	$\widetilde{G}_{p0,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	6
13	$\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	7
14	$\widetilde{H}_{p0,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	7
15	$\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	8
16	$\widehat{H}_{p0,p}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	8
17	$\widehat{G}_{p\ell,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	9
18	$\widehat{G}_{p0,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	9
19	$\widetilde{G}_{p\ell,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	10
20	$\widetilde{G}_{p0,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	10
21	$\widetilde{H}_{p\ell,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	11
22	$\widetilde{H}_{p0,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	11
23	$\widehat{H}_{p\ell,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	12
24	$\widehat{H}_{p0,pp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	12
25	$\widehat{G}_{p\ell,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	13
26	$\widehat{G}_{p0,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	13
27	$\widetilde{G}_{p\ell,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	14
28	$\widetilde{G}_{p0,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	14
29	$\widetilde{H}_{p\ell,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	15
30	$\widetilde{H}_{p0,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	15
31	$\widehat{H}_{p\ell,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	16
32	$\widehat{H}_{p0,ppp}^{qj}$	Coeficientes-CCC.pdf	16

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
33	$\hat{G}_{p\ell}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	17
34	$\hat{G}_{p0}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	17
35	$\tilde{G}_{p\ell}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	17
36	$\tilde{G}_{p0}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	17
37	$\tilde{H}_{p\ell}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	18
38	$\tilde{H}_{p0}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	18
39	$\hat{H}_{p\ell}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	18
40	$\hat{H}_{p0}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	18
41	$\hat{G}_{p\ell,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	19
42	$\hat{G}_{p0,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	19
43	$\tilde{G}_{p\ell,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	19
44	$\tilde{G}_{p0,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	19
45	$\tilde{H}_{p\ell,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	20
46	$\tilde{H}_{p0,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	20
47	$\hat{H}_{p\ell,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	20
48	$\hat{H}_{p0,p}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	20
49	$\hat{G}_{p\ell,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	21
50	$\hat{G}_{p0,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	21
51	$\tilde{G}_{p\ell,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	21
52	$\tilde{G}_{p0,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	21
53	$\tilde{H}_{p\ell,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	22
54	$\tilde{H}_{p0,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	22
55	$\hat{H}_{p\ell,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	22
56	$\hat{H}_{p0,pp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	22
57	$\hat{G}_{p\ell,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	23
58	$\hat{G}_{p0,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	23
59	$\tilde{G}_{p\ell,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	23
60	$\tilde{G}_{p0,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	23
61	$\tilde{H}_{p\ell,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	24
62	$\tilde{H}_{p0,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	24
63	$\hat{H}_{p\ell,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	24
64	$\hat{H}_{p0,ppp}^{qq}$	Coeficientes-CCC.pdf	24

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
65	$U_{pi}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	25
66	$U_{pi}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	25
67	$U_{pi,p}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	26
68	$U_{pi,p}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	26
69	$U_{pi,pp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	27
70	$U_{pi,pp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	27
71	$U_{pi,ppp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	28
72	$U_{pi,ppp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	28
73	$F_{pi}^{qj}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	29
74	$F_{pi}^{qj}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	30
75	$F_{pi,p}^{qj}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	31
76	$F_{pi,p}^{qj}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	32
77	$F_{pi,pp}^{qj}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	33
78	$F_{pi,pp}^{qj}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	33
79	$F_{pi,ppp}^{qj}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	34
80	$F_{pi,ppp}^{qj}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	34
81	$F_{pi}^{qq}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	35
82	$F_{pi}^{qq}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	35
83	$F_{pi,p}^{qq}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	36
84	$F_{pi,p}^{qq}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	36
85	$F_{pi,pp}^{qq}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	37
86	$F_{pi,pp}^{qq}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	37
87	$F_{pi,ppp}^{qq}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-CCC.pdf	38
88	$F_{pi,ppp}^{qq}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-CCC.pdf	38

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
89	$\widehat{G}_{p\ell}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	1
90	$\widehat{G}_{p0}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	1
91	$\widehat{G}_{p\ell}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	2
92	$\widehat{G}_{p0}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	2
93	$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	3
94	$\widetilde{G}_{p0}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	3
95	$\widetilde{G}_{p\ell}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	4
96	$\widetilde{G}_{p0}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	4
97	$\widetilde{H}_{p\ell}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	5
98	$\widetilde{H}_{p0}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	5
99	$\widetilde{H}_{p\ell}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	6
100	$\widetilde{H}_{p0}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	6
101	$\widehat{H}_{p\ell}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	7
102	$\widehat{H}_{p0}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	7
103	$\widehat{H}_{p\ell}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	8
104	$\widehat{H}_{p0}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	8
105	$\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	9
106	$\widehat{G}_{p0,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	9
107	$\widehat{G}_{p\ell,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	10
108	$\widehat{G}_{p0,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	10
109	$\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	11
110	$\widetilde{G}_{p0,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	11
111	$\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	12
112	$\widetilde{G}_{p0,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	12
113	$\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	13
114	$\widetilde{H}_{p0,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	13
115	$\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	14
116	$\widetilde{H}_{p0,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	14
117	$\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	15
118	$\widehat{H}_{p0,p}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	15
119	$\widehat{H}_{p\ell,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	16
120	$\widehat{H}_{p0,p}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	16

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
121	$\hat{G}_{p^l,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	17
122	$\hat{G}_{p0,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	17
123	$\hat{G}_{p^l,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	18
124	$\hat{G}_{p0,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	18
125	$\tilde{G}_{p^l,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	19
126	$\tilde{G}_{p0,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	19
127	$\tilde{G}_{p^l,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	20
128	$\tilde{G}_{p0,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	20
129	$\tilde{H}_{p^l,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	21
130	$\tilde{H}_{p0,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	21
131	$\tilde{H}_{p^l,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	22
132	$\tilde{H}_{p0,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	22
133	$\hat{H}_{p^l,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	23
134	$\hat{H}_{p0,pp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	23
135	$\hat{H}_{p^l,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	24
136	$\hat{H}_{p0,pp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	24
137	$\hat{G}_{p^l,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	25
138	$\hat{G}_{p0,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	25
139	$\hat{G}_{p^l,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	26
140	$\hat{G}_{p0,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	26
141	$\tilde{G}_{p^l,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	27
142	$\tilde{G}_{p0,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	27
143	$\tilde{G}_{p^l,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	28
144	$\tilde{G}_{p0,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	28
145	$\tilde{H}_{p^l,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	29
146	$\tilde{H}_{p0,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	29
147	$\tilde{H}_{p^l,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	30
148	$\tilde{H}_{p0,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	30
149	$\hat{H}_{p^l,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	31
150	$\hat{H}_{p0,ppp}^{qj1}$	Coeficientes-LLL.pdf	31
151	$\hat{H}_{p^l,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	32
152	$\hat{H}_{p0,ppp}^{qj2}$	Coeficientes-LLL.pdf	32

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
153	$\widehat{G}_{p\ell}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	33
154	$\widehat{G}_{p0}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	33
155	$\widehat{G}_{p\ell}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	34
156	$\widehat{G}_{p0}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	34
157	$\widetilde{G}_{p\ell}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	35
158	$\widetilde{G}_{p0}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	35
159	$\widetilde{G}_{p\ell}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	36
160	$\widetilde{G}_{p0}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	36
161	$\widetilde{H}_{p\ell}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	37
162	$\widetilde{H}_{p0}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	37
163	$\widetilde{H}_{p\ell}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	37
164	$\widetilde{H}_{p0}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	37
165	$\widehat{H}_{p\ell}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	38
166	$\widehat{H}_{p0}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	38
167	$\widehat{H}_{p\ell}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	38
168	$\widehat{H}_{p0}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	38
169	$\widehat{G}_{p\ell,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	39
170	$\widehat{G}_{p0,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	39
171	$\widehat{G}_{p\ell,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	40
172	$\widehat{G}_{p0,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	40
173	$\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	41
174	$\widetilde{G}_{p0,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	41
175	$\widetilde{G}_{p\ell,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	41
176	$\widetilde{G}_{p0,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	41
177	$\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	42
178	$\widetilde{H}_{p0,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	42
179	$\widetilde{H}_{p\ell,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	42
180	$\widetilde{H}_{p0,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	42
181	$\widehat{H}_{p\ell,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	43
182	$\widehat{H}_{p0,p}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	43
183	$\widehat{H}_{p\ell,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	43
184	$\widehat{H}_{p0,p}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	43



TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
185	$\hat{G}_{p\ell,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	44
186	$\hat{G}_{p0,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	44
187	$\hat{G}_{p\ell,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	44
188	$\hat{G}_{p0,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	44
189	$\tilde{G}_{p\ell,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	45
190	$\tilde{G}_{p0,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	45
191	$\tilde{G}_{p\ell,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	45
192	$\tilde{G}_{p0,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	45
193	$\tilde{H}_{p\ell,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	46
194	$\tilde{H}_{p0,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	46
195	$\tilde{H}_{p\ell,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	46
196	$\tilde{H}_{p0,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	46
197	$\hat{H}_{p\ell,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	47
198	$\hat{H}_{p0,pp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	47
199	$\hat{H}_{p\ell,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	47
200	$\hat{H}_{p0,pp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	47
201	$\hat{G}_{p\ell,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	48
202	$\hat{G}_{p0,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	48
203	$\hat{G}_{p\ell,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	48
204	$\hat{G}_{p0,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	48
205	$\tilde{G}_{p\ell,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	49
206	$\tilde{G}_{p0,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	49
207	$\tilde{G}_{p\ell,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	49
208	$\tilde{G}_{p0,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	49
209	$\tilde{H}_{p\ell,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	50
210	$\tilde{H}_{p0,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	50
211	$\tilde{H}_{p\ell,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	50
212	$\tilde{H}_{p0,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	50
213	$\hat{H}_{p\ell,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	51
214	$\hat{H}_{p0,ppp}^{qq1}$	Coeficientes-LLL.pdf	51
215	$\hat{H}_{p\ell,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	51
216	$\hat{H}_{p0,ppp}^{qq2}$	Coeficientes-LLL.pdf	51

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
217	$U_{pi1}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	52
218	$U_{pi1}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	52
219	$U_{pi2}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	53
220	$U_{pi2}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	53
221	$U_{pi1,p}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	54
222	$U_{pi1,p}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	54
223	$U_{pi2,p}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	55
224	$U_{pi2,p}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	55
225	$U_{pi1,pp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	56
226	$U_{pi1,pp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	56
227	$U_{pi2,pp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	57
228	$U_{pi2,pp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	57
229	$U_{pi1,ppp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	58
230	$U_{pi1,ppp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	58
231	$U_{pi2,ppp}^{q0}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	59
232	$U_{pi2,ppp}^{q0}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	59

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (continuação)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
233	$F_{pi1}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	60
234	$F_{pi1}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	62
235	$F_{pi1}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	64
236	$F_{pi1}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	66
237	$F_{pi2}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	68
238	$F_{pi2}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	70
239	$F_{pi2}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	72
240	$F_{pi2}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	74
241	$F_{pi1,p}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	76
242	$F_{pi1,p}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	78
243	$F_{pi1,p}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	80
244	$F_{pi1,p}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	82
245	$F_{pi2,p}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	84
246	$F_{pi2,p}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	86
247	$F_{pi2,p}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	88
248	$F_{pi2,p}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	90
249	$F_{pi1,pp}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	92
250	$F_{pi1,pp}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	94
251	$F_{pi1,pp}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	96
252	$F_{pi1,pp}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	98
253	$F_{pi2,pp}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	100
254	$F_{pi2,pp}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	102
255	$F_{pi2,pp}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	104
256	$F_{pi2,pp}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	106
257	$F_{pi1,ppp}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	108
258	$F_{pi1,ppp}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	109
259	$F_{pi1,ppp}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	110
260	$F_{pi1,ppp}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	111
261	$F_{pi2,ppp}^{qj1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	112
262	$F_{pi2,ppp}^{qj1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	113
263	$F_{pi2,ppp}^{qj2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	114
264	$F_{pi2,ppp}^{qj2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	115

TABELA 6 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE COEFICIENTES E FÓRMULAS (conclusão)

#	Coeficiente	Arquivo	Página
265	$F_{pi1}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	116
266	$F_{pi1}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	117
267	$F_{pi1}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	118
268	$F_{pi1}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	119
269	$F_{pi2}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	120
270	$F_{pi2}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	121
271	$F_{pi2}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	122
272	$F_{pi2}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	123
273	$F_{pi1,p}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	124
274	$F_{pi1,p}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	125
275	$F_{pi1,p}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	126
276	$F_{pi1,p}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	127
277	$F_{pi2,p}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	128
278	$F_{pi2,p}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	129
279	$F_{pi2,p}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	130
280	$F_{pi2,p}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	131
281	$F_{pi1,pp}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	132
282	$F_{pi1,pp}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	132
283	$F_{pi1,pp}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	133
284	$F_{pi1,pp}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	133
285	$F_{pi2,pp}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	134
286	$F_{pi2,pp}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	134
287	$F_{pi2,pp}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	135
288	$F_{pi2,pp}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	145
289	$F_{pi1,ppp}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	136
290	$F_{pi1,ppp}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	136
291	$F_{pi1,ppp}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	137
292	$F_{pi1,ppp}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	137
293	$F_{pi2,ppp}^{qq1}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	138
294	$F_{pi2,ppp}^{qq1}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	138
295	$F_{pi2,ppp}^{qq2}$ ( $p < i$ )	Coeficientes-LLL.pdf	139
296	$F_{pi2,ppp}^{qq2}$ ( $i \leq p$ )	Coeficientes-LLL.pdf	139

## ANEXO

380

J. BOERSMA

## Computation of Fresnel Integrals

By J. Boersma

Two approximations, one valid for  $x$  less than 4 and the other valid for  $x$  larger than 4, have been established by means of the  $\tau$ -method of Lanczos [1] for the Fresnel integrals defined in the form

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-it}}{\sqrt{2\pi t}} dt = C(x) - iS(x).$$

These approximations are the following:

$$(1) \text{ For } 0 \leq x \leq 4 \quad f(x) = e^{-iz} \sqrt{\frac{x}{4}} \sum_{n=0}^{11} (a_n + ib_n) \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$(2) \text{ For } x \geq 4 \quad f(x) = \frac{1-i}{2} + e^{-iz} \sqrt{\frac{4}{x}} \sum_{n=0}^{11} (c_n + id_n) \left(\frac{4}{x}\right)^n.$$

The numerical values of the coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  and  $d_n$  are given by

$a_0 = +1.595769140$	$b_0 = -0.000000033$	$c_0 = 0$	$d_0 = +0.199471140$
$a_1 = -0.000001702$	$b_1 = +4.255387524$	$c_1 = -0.024933975$	$d_1 = +0.000000023$
$a_2 = -6.808568854$	$b_2 = -0.000092810$	$c_2 = +0.000003936$	$d_2 = -0.009351341$
$a_3 = -0.000576361$	$b_3 = -7.780020400$	$c_3 = +0.005770956$	$d_3 = +0.00023006$
$a_4 = +6.920691902$	$b_4 = -0.009520895$	$c_4 = +0.000689892$	$d_4 = +0.004851466$
$a_5 = -0.016898657$	$b_5 = +5.075161298$	$c_5 = -0.009497136$	$d_5 = +0.001903218$
$a_6 = -3.050485660$	$b_6 = -0.138341947$	$c_6 = +0.011948809$	$d_6 = -0.017122914$
$a_7 = -0.075752419$	$b_7 = -1.363729124$	$c_7 = -0.006748873$	$d_7 = +0.029064067$
$a_8 = +0.850663781$	$b_8 = -0.403349276$	$c_8 = +0.000246420$	$d_8 = -0.027928955$
$a_9 = -0.025639041$	$b_9 = +0.702222016$	$c_9 = +0.002102967$	$d_9 = +0.016497308$
$a_{10} = -0.150230960$	$b_{10} = -0.216195929$	$c_{10} = -0.001217930$	$d_{10} = -0.005598515$
$a_{11} = +0.034404779$	$b_{11} = +0.019547031$	$c_{11} = +0.000233939$	$d_{11} = +0.000838386$

The derivation of these approximations is given in [2].

The maximum error is  $1.6 \times 10^{-9}$  for the first approximation and  $0.5 \times 10^{-9}$  for the second approximation.

Mathematical Institute  
University of Groningen  
The Netherlands

1. C. LANCZOS, *Applied Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1956.
2. J. BOERSMA, "On a numerical method for the computation of Fresnel integrals", *Report TW 2*, Math. Inst., Univ. of Groningen, 1960.

Received March 2, 1960.