

WILSON MARQUES JUNIOR

As Equações Linearizadas de Burnett
para
um Gás Monoatômico Denso

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA
1989




MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. WILSON MARQUES JUNIOR

Em sessão pública de defesa de tese iniciada as quinze horas, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 18 de maio de 1989.

Banca Examinadora:



Prof. Gilberto Medeiros Kremer

UFPR - Presidente



Prof. I-Shih Liu

UFRJ



Prof. José Antonio Salvador

UFRJ

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Gilberto Medeiros Kremer
pela orientação, dedicação e amizade.

À Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

A partir da teoria cinética de gases densos proposta por Enskog, do método dos momentos de Grad e do método de Chapman-Enskog, determinamos expressões lineares para o tensor pressão e para o fluxo de calor correspondentes à terceira aproximação da função de distribuição. Estas expressões são conhecidas na literatura como equações de Burnett.

Nesta aproximação obtém-se os efeitos conhecidos como:

- i) tensão térmica, que indica o surgimento de uma tensão devido à um segundo gradiente de temperatura.

- ii) fluxo de calor viscoso, que indica o surgimento de um fluxo de calor devido à um segundo gradiente de velocidade.

Analisamos o problema da propagação de ondas harmônicas planas com pequenas amplitudes nas teorias de 13 campos, Navier-Stokes-Fourier e Burnett. Em cada caso determinamos os coeficientes de atenuação e velocidade de fase e comparamos os resultados.

ABSTRACT

Based on Enskog dense gas theory, Grad method of moments and on Chapman-Enskog method, we obtain linear expressions for the pressure tensor and for the heat flux corresponding to the third approximation of the distribution function. These expressions are known as Burnett equations.

This approximation yields effects known as:

i) thermal stress, which indicates the appearance of a stress due to a second gradient of temperature.

ii) viscous heat flux, which indicates the appearance of a heat flux due to a second gradient of velocity.

The problem concerning the propagation of plane harmonic waves of small amplitude is analyzed for the theories of Burnett, 13-field and Navier-Stokes-Fourier. The phase speed and the attenuation coefficient are obtained for each theory and the results are compared.

INDICE

	pg
I - INTRODUÇÃO.....	01
II - FUNDAMENTOS DA TEORIA CINÉTICA DOS GASES	
II.1 - Definições Básicas para Gases Ideais.....	03
II.2 - A Equação de Boltzmann.....	06
II.3 - A Equação de Enskog para um Gás Monoatômico Denso.....	11
III - O MÉTODO DOS MOMENTOS	
III.1 - TEORIA CINÉTICA DE 13 CAMPOS.....	15
III.1.1 - A Equação de Transporte.....	16
III.1.2 - As Equações de Balanço.....	20
III.1.3 - Determinação dos Termos Constitutivos.....	24
III.1.4 - As Equações de Campo Linearizadas.....	26
III.2 - TEORIA CINÉTICA DE 5 CAMPOS.....	27
III.2.1 - A Equação de Transporte.....	28
III.2.2 - As Equações de Balanço.....	29
III.2.3 - Determinação dos Termos Constitutivos.....	31
III.2.4 - As Equações de Campo Linearizadas.....	35

IV - O MÉTODO DE CHAPMAN-ENSKOG

IV.1 - A Primeira Aproximação da Função de Distribuição.....37
IV.2 - A Segunda Aproximação da Função de Distribuição.....38
IV.3 - A Terceira Aproximação da Função de Distribuição.....51
IV.4 - Cálculo dos Coeficientes de Transporte.....68

V - PROPAGAÇÃO DE ONDAS HARMÔNICAS PLANAS

V.1 - Teoria de Burnett.....70
V.2 - Teorias de 13 Campos e Navier-Stokes-Fourier.....75

VI - CONCLUSÃO.....83

APÊNDICE

A - Dinâmica de uma Colisão Binária.....84
B - O Fator χ 89
C - Cálculo das Integrais.....90
D - Os Polinômios de Sonine.....94

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....97

I - INTRODUÇÃO

A teoria cinética considera os gases constituídos de um número muito grande de partículas, que na maior parte do tempo estão se movendo livremente no interior de um determinado volume que as contém. O movimento dessas partículas é brevemente interrompido quando elas se chocam com as paredes do recipiente ou com outras partículas.

No caso de gases ideais a diferença entre as dimensões das partículas e a distância média percorrida por elas entre duas colisões consecutivas é muito grande, sendo válida para este tipo de gás a equação de Boltzmann.

Em 1922 Enskog [1] propôs um modelo para gases densos constituído de partículas esféricas e rígidas, introduzindo duas modificações na equação de Boltzmann. A primeira modificação considera que durante uma colisão binária o centro das duas partículas estão separados por uma determinada distância, e a segunda considera um aumento na probabilidade de ocorrência de uma colisão para um gás denso.

O objetivo deste trabalho é a determinação das equações linearizadas de Burnett [2], que representam a dependência do tensor pressão e do fluxo de calor com as segundas derivadas da temperatura e velocidade, para um gás monoatômico denso, usando como base o modelo de Enskog, o método dos momentos de Grad [3] e o método de Chapman-Enskog [4].

Analisamos a solução das equações de campo correspondendo a uma propagação de ondas harmônicas planas na aproximação de Burnett, 13 campos e Navier-Stokes-Fourier.

Utilizaremos a notação cartesiana para tensores com a convenção de soma de Einstein, assim como a seguinte notação: parenteses pontagudos envolvendo dois índices representa o deviante de um tensor; por exemplo

$$\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{3} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ij}$$

II - FUNDAMENTOS DA TEORIA CINÉTICA DOS GASES

II.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS PARA GASES IDEAIS

i) Espaço de Fase:

Para gases monoatômicos ideais, cada átomo pode ser caracterizado como um ponto num espaço hexa-dimensional chamado de espaço μ , através de sua posição x e velocidade c no instante de tempo t .

ii) Função de Distribuição:

A função que contém as informações caracterizadoras do espaço de fase é a função de distribuição das velocidades $f(x,c,t)$, de forma que

$$f(x,c,t)dxdc \quad (2.1.1)$$

representa o número esperado de átomos situados entre x e $x + dx$, com velocidades entre c e $c + dc$, no instante t .

iii) Densidade Numérica e de Massa:

A densidade numérica $n(x,t)$ é uma propriedade macroscópica do gás que pode ser obtida a partir da função de distribuição, sendo definida como o número de átomos por unidade de volume na posição x no instante t , isto é,

$$n(x,t) = \int f(x,c,t)dc . \quad (2.1.2)$$

Sendo m a massa de cada átomo de um gás monoatômico, a densidade na posição x no instante t é

$$\rho(x,t) = mn(x,t) . \quad (2.1.3)$$

iv) Velocidade do Gás e Velocidade Peculiar:

Com base na quantidade microscópica mc_i , que é o momento linear de um átomo com velocidade c_i , definimos a densidade de momento linear ρv_i através de

$$\rho v_i(x,t) = \int mc_i f dc . \quad (2.1.4)$$

O movimento de translação de um átomo pode ser especificado em relação a um referencial que se move com uma velocidade macroscópica v . A velocidade do átomo relativa a este referencial é denominada de velocidade peculiar e denotada por C . Assim,

$$C_i = c_i - v_i . \quad (2.1.5)$$

Se na equação (2.1.4), substituirmos a velocidade do átomo pela velocidade peculiar, concluímos que

$$\int mC_i f dc = \rho v_i - \int mv_i f dc = 0 . \quad (2.1.6)$$

v) Energia Interna do Gás:

A partir da quantidade microscópica $\frac{1}{2} mc^2$, que é a energia cinética de cada átomo, definimos a densidade de energia ρu através de

$$\rho u(x,t) = \int \frac{1}{2} mc^2 f dc . \quad (2.1.7)$$

Substituindo a velocidade peculiar na equação (2.1.7) ,
obtemos

$$\rho u = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 , \quad (2.1.8)$$

onde

$$\rho \epsilon(x,t) = \int \frac{1}{2} mC^2 f dc . \quad (2.1.9)$$

é a densidade de energia interna e $\frac{1}{2} \rho v^2$ é a densidade de energia cinética.

Na derivação da equação (2.1.8) utilizamos a relação (2.1.6).

vi) Temperatura:

A temperatura T de um gás ideal monoatômico é definida através da equação calórica de estado

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T , \quad (2.1.10)$$

onde k é a constante de Boltzmann.

Igualando as equações (2.1.9) e (2.1.10) temos

$$T = \frac{m}{3\rho k} \int mC^2 f dc . \quad (2.1.11)$$

II.2 A EQUAÇÃO DE BOLTZMANN

Como foi definido na seção anterior, o estado de um gás ideal é caracterizado por uma função de distribuição $f(x,c,t)$ tal que

$$f(x,c,t)dxdc \quad (2.2.1)$$

nos dá o número de átomos entre x e $x + dx$, com velocidades entre c e $c + dc$, no instante t .

Se cada átomo do gás estiver sujeito a uma força externa $F(x,t)$, após um intervalo de tempo Δt , os átomos ocuparão uma nova posição no espaço de fase que será: $x + c\Delta t$ e $c + F\Delta t$. Sendo assim, o número de átomos que se encontram no elemento de volume entre $x + c\Delta t$ e $(x + c\Delta t) + dx$, com velocidade linear entre $c + F\Delta t$ e $(c + F\Delta t) + dc$, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ é

$$f(x + c\Delta t, c + F\Delta t, t + \Delta t)dxdc . \quad (2.2.2)$$

Se não houvessem colisões entre os átomos as expressões (2.2.1) e (2.2.2) seriam iguais. Contudo, as colisões alteram a densidade do número de átomos que estão no elemento de volume, fazendo com que certos átomos saiam deste elemento, enquanto outros entram no mesmo. A mudança do número de átomos é proporcional a dx, dc e Δt , assim

$$f(x + c\Delta t, c + F\Delta t, t + \Delta t)dxdc - f(x,c,t)dxdc = Pdxdc\Delta t , \quad (2.2.3)$$

onde P representa a taxa de mudança da função de distribuição f devido as colisões entre os átomos.

Se dividirmos (2.2.3) por $dxdc\Delta t$ e passarmos ao limite quando Δt tende a zero, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = P . \quad (2.2.4)$$

A determinação de P é feita com base nas seguintes hipóteses:

- 1) somente as colisões binárias contribuem para P .
- 2) a variação da densidade de fase durante a colisão é pequena, bem como a variação espacial durante a ação das forças interatômicas.
- 3) em qualquer posição x e tempo t as velocidades de dois átomos não estão correlacionadas (suposição do caos molecular).
- 4) o efeito das forças externas sobre os átomos durante a colisão é pequeno em comparação com as forças que agem entre os átomos.

Vamos observar agora a colisão entre dois átomos, um com velocidade c e o outro com velocidade c_1 . A figura 2.2.1 mostra o primeiro átomo (sem índice) em repouso no plano α , enquanto o outro átomo (com índice 1) se aproxima de α segundo um ângulo reto com velocidade relativa $g = c_1 - c$. Este movimento relativo é ainda caracterizado pelo parâmetro de impacto b e pelo ângulo azimutal ϵ .

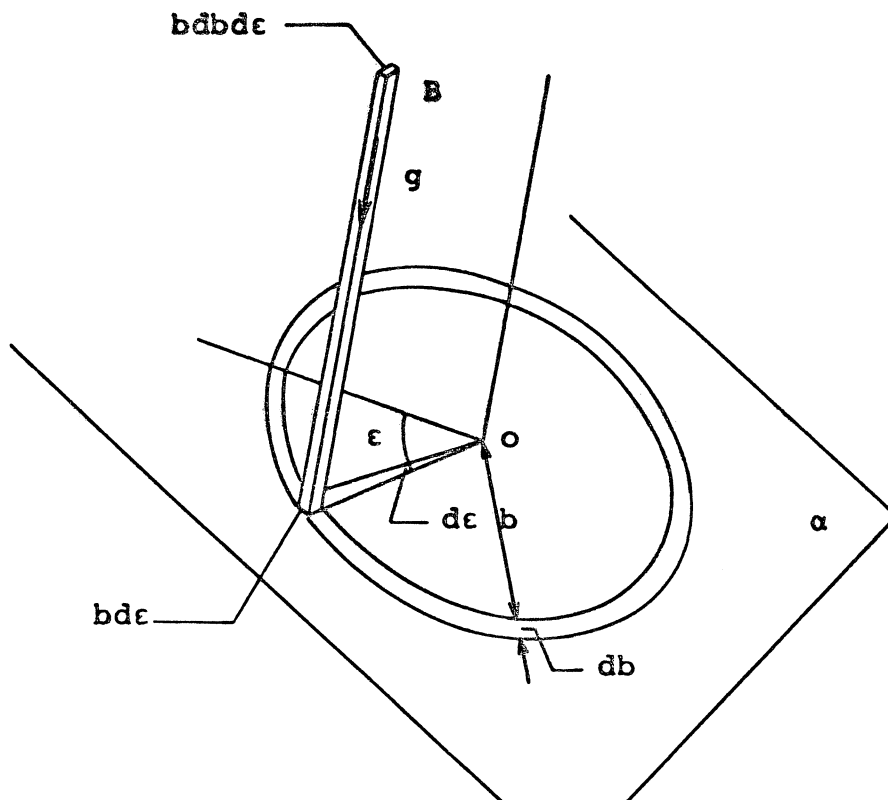


Figura 2.2.1 - Geometria de uma colisão binária

Podemos dizer que, no tempo dt , todos os átomos do tipo 1 com velocidades c_1 e que se encontram no cilindro de colisão de volume $gbdbd\epsilon dt$, irão colidir com um átomo com velocidade c localizado no ponto O . O número de átomos do tipo 1 com velocidades c_1 no cilindro de colisão é dado por

$$f(x, c_1, t) gbdbd\epsilon dc_1 dt . \quad (2.2.5)$$

Se $f(x, c, t) dx dc$ representa o número de átomos com velocidades c que se encontram no elemento de volume dx , então

$$f(x, c, t) f(x, c_1, t) gbdbd\epsilon dx dc dc_1 dt , \quad (2.2.6)$$

representa o número total de colisões que ocorrem no elemento de volume dx e intervalo de tempo dt .

Dividindo (2.2.6) por $dxdc dt$ e integrando sobre todas as componentes da velocidade c_1 de $-\alpha$ a $+\alpha$, sobre o ângulo azimutal ϵ de 0 a 2π e sobre todos os valores do parâmetro de impacto b de 0 a $+\alpha$, obtemos a densidade do número total de colisões por intervalo de tempo dt que anula pontos de fase com velocidade c no elemento de volume $dxdc$, isto é,

$$P^- = \int f(x, c, t) f(x, c_1, t) g b db d\epsilon dc_1. \quad (2.2.7)$$

Há colisões, porém, que criam pontos com velocidade c no elemento de volume $dxdc$. Esta criação resulta de colisões de átomos, cujas velocidades iniciais são c' e c'_1 e velocidades finais c e c_1 , parâmetro de impacto b e ângulo azimutal $\pi + \epsilon$. Esta colisão é denominada de colisão de restituição, enquanto que a anterior é conhecida como colisão direta (vide Figura 2.2.2).

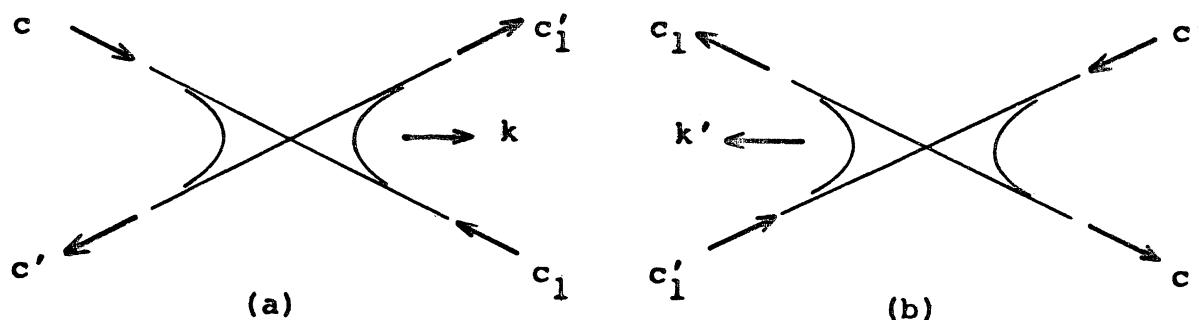


Figura 2.2.2 - (a) colisão direta
(b) colisão de restituição

Com base na análise anterior, podemos afirmar que a densidade do número total de colisões que ocorrem no elemento de volume dx e tempo dt , para a colisão de restituição, é dada por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1', t) g' b d b d \varepsilon d c' d c_1' d \mathbf{x} d t . \quad (2.2.8)$$

As equações que relacionam as velocidades finais em função das velocidades iniciais são

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + k(\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) , \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{c}_1' = \mathbf{c}_1 - k(\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) , \quad (2.2.10)$$

onde k , definido como

$$k = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}'}{|\mathbf{g} - \mathbf{g}'|} \quad (2.2.11)$$

é o vetor de colisão e especifica a direção da linha que une o centro dos átomos na colisão. Além disso, como o Jacobiano da transformação de velocidades é unitário temos que

$$d c d c_1 = d c' d c_1' . \quad (2.2.12)$$

Como pela conservação da energia

$$g = g' , \quad (2.2.13)$$

podemos escrever a expressão (2.2.8) na forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1', t) g b d b d \varepsilon d c d c_1 d \mathbf{x} d t . \quad (2.2.14)$$

A dedução das equações (2.2.9), (2.2.10) e (2.2.13) pode ser vista no apêndice A.

Portanto, a densidade do número total de colisões por intervalo de tempo dt , que cria pontos de fase com velocidade c no elemento de volume $dxdc$ é

$$P^+ = \int f(x, c', t) f(x, c_1', t) g b d b d \epsilon d c_1. \quad (2.2.15)$$

Usando os resultados acima, a equação (2.2.4), com $P = P^+ - P^-$, fica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int (f_1' f' - f_1 f) g b d b d \epsilon d c_1, \quad (2.2.16)$$

onde utilizamos as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned} f &\equiv f(x, c, t) & , & & f' &\equiv f(x, c', t) & , \\ f_1 &\equiv f(x, c_1, t) & , & & f_1' &\equiv f(x, c_1', t) & . \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

A equação (2.2.16), chamada de equação de Boltzmann, é uma equação que descreve a evolução da função de distribuição de velocidades no espaço de fase.

II.3 - A EQUAÇÃO DE ENSKOG PARA UM GÁS MONOATÔMICO DENSO

Para gases ideais, onde as dimensões atômicas são pequenas se comparadas ao livre caminho médio, a transferência de propriedades atômicas é consequência exclusiva do movimento dos átomos entre as colisões. No caso de gases densos a disparidade entre as dimensões atômicas e o livre caminho médio torna-se

pequena, e surge um mecanismo adicional de transferência de momento linear e energia.

Quem primeiro estudou este mecanismo foi Enskog [1], usando um modelo de esferas rígidas. A vantagem do modelo de Enskog é que as colisões são instantâneas e a probabilidade de colisões múltiplas (colisões simultâneas entre mais de dois átomos) é desprezada. Neste modelo, momento linear e energia são transferidos de uma distância igual a distância que separa os centros dos dois átomos no instante da colisão.

Vamos descrever agora as considerações feitas por Enskog.

Considere um gás monoatômico composto de esferas rígidas de diâmetro a . A figura 2.3.1 representa dois átomos com velocidades c e c_1 e centros O e O_1 no instante da colisão.

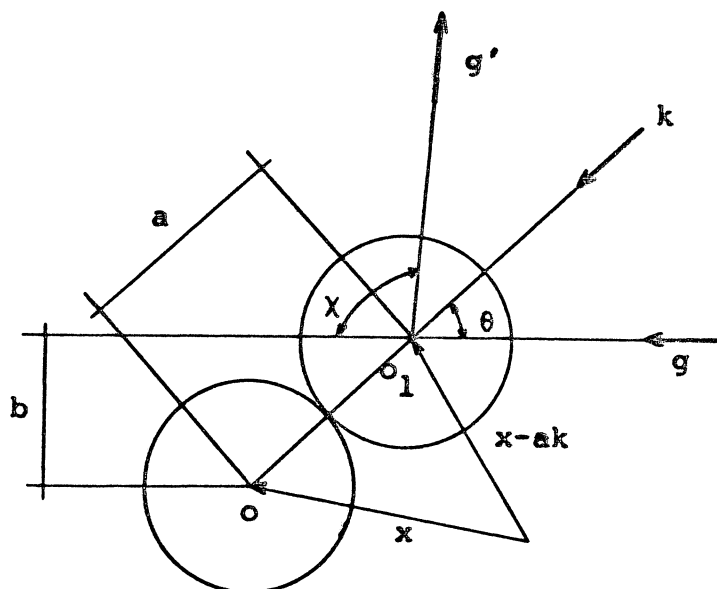


Figura 2.3.1 - Geometria da colisão entre duas esferas

O plano que contém g' e k forma um ângulo ϵ com o plano

de referencia que contém g . Assim, θ e ϵ são coordenadas polares que definem a direção de k . Da figura 2.3.1 temos que $b = a \sin\theta$, assim

$$g b db d\epsilon = g a^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\epsilon = a^2 (g \cdot k) dk, \quad (2.3.1)$$

onde $a^2 dk = a^2 \sin\theta d\theta d\epsilon$ denota um elemento de superfície e $(g \cdot k) = g \cos\theta$ é a projeção de k na direção de g .

Como estamos tratando de gases densos, os centros do dois átomos que colidem não se encontram no mesmo ponto, uma vez que as dimensões atômicas estão sendo consideradas. No instante da colisão, O está na posição x e O_1 na posição $x - ak$, então $f_1 \equiv f(x, c_1, t)$ deve ser substituída por $f_1 \equiv f(x - ak, c_1, t)$. No caso de uma colisão inversa, onde c e c_1 são as velocidades após a colisão e $-k$ é o vetor de colisão, O está na posição x e O_1 na posição $x + ak$ e $f'_1 \equiv f(x, c'_1, t)$ de ser substituída por $f'_1 \equiv f(x + ak, c'_1, t)$.

Também, em um gás denso, o volume no qual um átomo pode estar situado se reduz e a probabilidade de colisão aumenta. Este fato é levado em conta quando multiplicamos as expressões (2.2.6) e (2.2.14) por um fator χ , que é função da posição e do tempo. A função χ deve ser avaliada no ponto de contacto entre os dois átomos.

Sendo assim, a forma corrigida das equações (2.2.6) e (2.2.14) é

$$\chi(x - \frac{a}{2} k, t) f(x, c, t) f(x - ak, c_1, t) a^2 (g \cdot k) dk d\epsilon dc_1 dx dt, \quad (2.3.2)$$

$$\chi(x + \frac{a}{2} k, t) f(x, c', t) f(x + ak, c'_1, t) a^2 (g \cdot k) dk d\epsilon dc_1 dx dt. \quad (2.3.4)$$

Dividindo as equações (2.3.2) e (2.3.3) por $dxdc dt$ e integrando em relação a c_1 e k , obtemos

$$P^- = \int \chi(x - \frac{a}{2} k, t) f(x, c, t) f(x - ak, c_1, t) a^2 (g \cdot k) dk dc_1, \quad (2.3.4)$$

$$P^+ = \int \chi(x + \frac{a}{2} k, t) f(x, c', t) f(x + ak, c_1, t) a^2 (g \cdot k) dk dc_1, \quad (2.3.5)$$

onde P^- e P^+ são, respectivamente, as densidades do número total de colisões por intervalo de tempo dt , que anulam e criam pontos no espaço de fase com velocidade c no elemento de volume $dxdc$.

Assim, a equação que descreve a evolução da função de distribuição de velocidades para um gás denso constituído de esferas rígidas com diâmetro a , chamada de equação de Enskog, é

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int [\chi(x + \frac{a}{2} k, t) f(x, c', t) f(x + ak, c_1, t) - \chi(x - \frac{a}{2} k, t) f(x, c, t) f(x - ak, c_1, t)] a^2 (g \cdot k) dk dc_1. \quad (2.3.6)$$

Uma explicação sobre o fator χ pode ser vista no apêndice B.

III - O MÉTODO DOS MOMENTOS

Na teoria cinética dos gases, existem dois métodos que descrevem um estado macroscópico de um gás. Estes dois métodos são conhecidos como o método dos momentos de Grad [3] e o método de Chapman-Enskog [4].

Neste capítulo desenvolveremos uma teoria cinética para um gás moderadamente denso de esferas rígidas, baseada no método do momentos de Grad, com o objetivo de determinar as equações linearizadas de Burnett para este tipo de gás.

No próximo capítulo desenvolveremos o método de Chapman-Enskog com a mesma finalidade.

III.1 - TEORIA CINÉTICA DE 13 CAMPOS

Um estado macroscópico de um gás monoatômico denso de esferas rígidas pode ser caracterizado por 13 campos escalares assim definidos:

$$\rho = \int m f dc \quad - \text{densidade} \quad , \quad (3.1.1)$$

$$\rho v_i = \int m c_i f dc \quad - \text{momento linear} \quad , \quad (3.1.2)$$

$$p_{ij} = \int m C_i C_j f dc \quad - \text{tensor pressão} \quad , \quad (3.1.3)$$

cinético

$$q_i = \int \frac{m}{2} C_i C^2 f dc \quad - \text{fluxo de calor} \quad , \quad (3.1.4)$$

cinético

onde C_i é a velocidade peculiar do gás.

Os 13 campos escalares definidos acima, necessitam de 13 equações de balanço. Estas equações são obtidas a partir de uma equação de transporte.

III.1.1.1 - A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Se, nas condições em que o gás se encontra, as funções f'_1, f_1 e χ forem consideradas suaves, podemos desenvolvê-las em séries de Taylor em torno do ponto x até termos de segunda ordem (tal desenvolvimento será justificado mais adiante), assim obtemos a partir da equação (2.3.6)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = P_0 + P_1 + P_2, \quad (3.1.5)$$

onde:

$$P_0 = \chi \int (f'_1 f' - f_1 f) d\Gamma^*, \quad (3.1.6)$$

$$P_1 = a\chi \int \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_i} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* + \frac{a}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \int (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma^*, \quad (3.1.7)$$

$$P_2 = \frac{a^2}{2} \chi \int \left[f' \frac{\partial^2 f'_1}{\partial x_i \partial x_j} - f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* + \frac{a^2}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \int \left[f' \frac{\partial f_1}{\partial x_j} - f \frac{\partial f'_1}{\partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* + \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} \int (f'_1 f' - f_1 f) k_i k_j d\Gamma^* \quad (3.1.8)$$

$$\text{e } d\Gamma^* = a^2 (g \cdot k) dk dc_1.$$

P_0 , com χ igual a um, é o termo de colisão usual da equação de Boltzmann para um gás rarefeito. P_1 é a primeira correção do termo de colisão que leva em consideração o fato do gás ser denso, e contém somente gradientes de primeira ordem. P_2 é

a segunda correção do termo de colisão e abrange gradientes de segunda ordem e produtos de gradientes.

Multiplicando a equação (3.1.5) por uma função arbitrária $\psi(x, c, t)$, integrando sobre todos os valores de c , eliminando as derivadas de χ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \int \psi \frac{\partial \chi}{\partial x_i} (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{a}{2} \psi \chi (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma \\ &- \frac{a}{2} \int \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \chi (f'_1 f' - f_1 f) k_i d\Gamma - \frac{a}{2} \int \psi \chi \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_i} + f'_1 \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right. \\ &\left. + f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + f_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde $d\Gamma = a^2 (g \cdot k) dk dc_1 dc$ e utilizando ainda

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} dc = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f dc - \int \frac{\partial \psi}{\partial t} f dc, \quad (3.1.10)$$

$$\int \psi c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dc = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi c_i f dc - \int c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f dc, \quad (3.1.11)$$

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} dc = \frac{\partial}{\partial c_i} \int \psi F_i f dc - \int F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} f dc, \quad (3.1.12)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f dc + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int \psi c_i f dc - \frac{a}{2} \int \chi \psi (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma \right. \\ \left. + \frac{a^2}{4} \int \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} (f'_1 f' - f_1 f) k_i k_j d\Gamma - \frac{a^2}{4} \int \chi \psi \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_j} - f'_1 \frac{\partial f'}{\partial x_j} \right. \right. \\ \left. \left. + f \frac{\partial f_1}{\partial x_j} - f_1 \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma \right] = \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} \right] f dc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \chi \psi (f'_1 f' - f_1 f) d\Gamma + \frac{a}{2} \int \chi \psi \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_i} - f'_1 \frac{\partial f'}{\partial x_i} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right. \\
& - \left. f_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma - \frac{a}{2} \int \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma - \frac{a^2}{4} \int \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left[\right. \\
& f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_j} - f'_1 \frac{\partial f'}{\partial x_j} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_j} - f_1 \frac{\partial f}{\partial x_j} \left. \right] k_i k_j d\Gamma - \frac{a^2}{4} \int \chi \psi \left[\frac{\partial f'}{\partial x_i} \frac{\partial f'_1}{\partial x_j} \right. \\
& - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int \chi \psi \left[f' \frac{\partial^2 f'_1}{\partial x_i \partial x_j} + f'_1 \frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& - \left. f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} - f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma + \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \chi \psi (f'_1 f' - f_1 f) k_i k_j d\Gamma \\
& + \frac{a^2}{8} \int \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} (f'_1 f' - f_1 f) k_i k_j d\Gamma . \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

Na equação (3.1.13) consideramos a integral

$$\int \frac{\partial}{\partial c_i} (\psi F_i f) dc = 0 , \tag{3.1.14}$$

pois segundo o teorema da divergência podemos escrever (3.1.14) como:

$$\int \oint_S \psi F_i f e_i dS . \tag{3.1.15}$$

Na equação (3.1.15) e_i é um vetor unitário e dS o elemento de área de uma superfície que esta situada em pontos infinitamente distantes no espaço das velocidades. A nulidade da integral (3.1.14) resulta do fato de (3.1.15) ser nula, pois a função de distribuição f decresce rápidamente para grandes valores de c .

Vamos modificar agora alguns termos da equação

(3.1.13), como por exemplo

$$\begin{aligned}
 -\frac{a}{2} \int \chi \psi (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma &= -\frac{a}{2} \int \chi \psi' f_1 f k'_i d\Gamma' - \frac{a}{2} \int \chi \psi f_1 f k_i d\Gamma \\
 & \quad (3.1.16) \\
 &= \frac{a}{2} \int \chi \psi' f_1 f k_i d\Gamma - \frac{a}{2} \int \chi \psi f_1 f k_i d\Gamma = \frac{a}{2} \int \chi (\psi' - \psi) f_1 f k_i d\Gamma .
 \end{aligned}$$

A primeira igualdade da equação (3.1.16) resulta da troca de velocidades (c, c_1) por (c', c'_1) , já a segunda igualdade é obtida levando-se em conta as equações válidas para uma colisão de restituição, isto é,

$$g' = -g \quad , \quad k' = -k \quad , \quad dc dc_1 = dc' dc'_1 . \quad (3.1.17)$$

Efetuada operações análogas nos devidos termos da equação (3.1.13), e sabendo que

$$f_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = f f_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\ln \frac{f}{f_1} \right] , \quad (3.1.18)$$

obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\Phi_i + \tilde{\Phi}_i)}{\partial x_i} = S + P + \tilde{P} , \quad (3.1.19)$$

onde:

$$\Psi = \int \psi f dc , \quad (3.1.20)$$

$$\Phi_i = \int \psi c_i f dc , \quad (3.1.21)$$

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{a}{2} \chi \int (\psi' - \psi) f f_1 k_i d\Gamma + \frac{a^2}{4} \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{f}{f_1} k_i k_j d\Gamma +$$

$$\frac{a^2}{4} \int \chi \frac{\partial (\psi' - \psi)}{\partial x_j} f f_1 k_i k_j d\Gamma + \frac{a^2}{8} \frac{\partial}{\partial x_j} \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 k_i k_j d\Gamma, \quad (3.1.22)$$

$$S = \int F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} f dc, \quad (3.1.23)$$

$$P = \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] f dc, \quad (3.1.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 d\Gamma + \frac{a}{2} \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{f}{f_1} k_i d\Gamma + \\ & \frac{a}{2} \int \chi \frac{\partial (\psi' - \psi)}{\partial x_i} f f_1 k_i d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int \chi (\psi' - \psi) \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \\ & \left. f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma - \frac{a^2}{4} \int \chi (\psi' - \psi) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} k_i k_j d\Gamma + \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

$$\frac{a^2}{4} \int \chi \frac{\partial (\psi' - \psi)}{\partial x_i} f f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{f}{f_1} k_i k_j d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int \chi \frac{\partial^2 (\psi' - \psi)}{\partial x_i \partial x_j} f f_1 k_i k_j d\Gamma$$

Ψ é a densidade da função ψ , Φ_i e $\tilde{\Phi}_i$ são os fluxos cinético (devido ao escoamento do gás) e potencial (relativo as colisões entre os átomos), S é a densidade de suprimento relacionada com as forças externas (daqui para frente será desconsiderada a ação de forças externas, logo $S = 0$), P e \tilde{P} são termos de produção.

A equação de transporte (3.1.19) nos permitirá obter equações de balanço para os 13 campos escalares.

III.1.2 - AS EQUAÇÕES DE BALANÇO

Os 13 campos básicos escalares definidos no começo desta seção, necessitam de 13 equações de balanço. Estas equações são obtidas através da equação (3.1.19), substituindo ψ por m , mc_i , $mC_i C_j$ e $\frac{1}{2} mC_i^2 C_i$. Assim, temos

i) Balanco de massa ($\psi = m$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.26)$$

ii) Balanco de momento linear ($\psi = mc_i$):

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j + p_{ij} + p_{ij}^I)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.1.27)$$

iii) Balanco do tensor pressao ($\psi = mC_i C_j$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (p_{ij} v_k + p_{ijk} + p_{ijk}^I)}{\partial x_k} + (p_{ik} + p_{ik}^I) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\ + (p_{jk} + p_{jk}^I) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = p_{ij} + \tilde{P}_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

iv) Balanco do fluxo de calor ($\psi = \frac{1}{2} mC^2 C_i$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial (q_i v_j + q_{ij} + q_{ij}^I)}{\partial x_j} + (q_j + q_j^I) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \\ + (p_{ijk} + p_{ijk}^I) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} p_{ij} \frac{\partial (p_{jk} + p_{jk}^I)}{\partial x_k} \\ - \frac{1}{2\rho} p_{rr} \frac{\partial (p_{ik} + p_{ik}^I)}{\partial x_k} = Q_i + \tilde{Q}_i, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

onde

$$p_{ijk} = \int m C_i C_j C_k f \, dc, \quad (3.1.30)$$

$$p_{ijk}^I = \frac{a}{2} \int m \chi (C_i' C_j' - C_i C_j) f f_{1k} \, d\Gamma + \frac{a^2}{4} \int m \chi (C_i' C_j' -$$

$$\begin{aligned}
& - C_i C_j \rangle f f_1 \frac{\partial}{\partial x_l} \ln \frac{f}{f_1} k_k k_l d\Gamma - \frac{a^2}{8} \frac{\partial}{\partial x_l} \int m\chi \langle C_i' C_j' - C_i C_j \rangle f f_1 k_k k_l d\Gamma \\
& - \frac{a^2}{4} \int m\chi \left[\langle C_i' - C_i \rangle \frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \langle C_j' - C_j \rangle \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right] f f_1 k_k k_l d\Gamma, \quad (3.1.31)
\end{aligned}$$

$$q_{ij} = \int \frac{1}{2} m C^2 C_i C_j f dc, \quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned}
q_{ij}^I &= \frac{a}{4} \int m\chi \left[\langle C_i' \rangle^2 C_i' - \langle C \rangle^2 C_i \right] f f_1 k_j d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int m\chi \left[\langle C_i' \rangle^2 C_i' \right. \\
& - \langle C \rangle^2 C_i \left. \right] f f_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{f}{f_1} k_j k_k d\Gamma - \frac{a^2}{16} \frac{\partial}{\partial x_k} \int m\chi \left[\langle C_i' \rangle^2 C_i' \right. \\
& - \langle C \rangle^2 C_i \left. \right] f f_1 k_j k_k d\Gamma - \frac{a^2}{4} \int m\chi \langle C_r' C_i' - C_r C_i \rangle \frac{\partial v_r}{\partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma \\
& - \frac{a^2}{8} \int m\chi \left[\langle C_i' \rangle^2 - \langle C \rangle^2 \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma, \quad (3.1.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^I &= \frac{a}{2} \int m\chi \langle C_i' - C_i \rangle f f_1 k_j d\Gamma + \frac{a^2}{4} \int m\chi \langle C_i' \rangle \\
& - C_i \rangle f f_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{f}{f_1} k_j k_k d\Gamma, \quad (3.1.34)
\end{aligned}$$

$$q_k^I = \frac{1}{2} P_{rrk}^I, \quad (3.1.35)$$

$$P_{ij} = \int m\chi \langle C_i' C_j' - C_i C_j \rangle f f_1 d\Gamma, \quad (3.1.36)$$

$$Q_i = \int \frac{1}{2} m\chi \left[\langle C_i' \rangle^2 C_i' - \langle C \rangle^2 C_i \right] f f_1 d\Gamma, \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{ij} &= \frac{a}{2} \int m\chi \langle C_i' C_j' - C_i C_j \rangle f f_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{f}{f_1} k_k d\Gamma - \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_l} \int m\chi \langle C_j' \\
& - C_j \rangle f f_1 k_k k_l d\Gamma - \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_l} \int m\chi \langle C_i' - C_i \rangle f f_1 k_k k_l d\Gamma -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a^2}{4} \int m\chi (C'_i C'_j - C_i C_j) \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} k_k k_l d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int m\chi (C'_i C'_j \\
& - C_i C_j) \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_l} - f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right] k_k k_l d\Gamma, \tag{3.1.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_i &= \frac{a}{4} \int m\chi \left[(C')^2 C'_i - (C)^2 C_i \right] f f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{f}{f_1} k_j d\Gamma - \frac{a^2}{8} \int m\chi \left[(C')^2 C'_i \right. \\
& (C)^2 C_i \left. \right] \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} k_j k_k d\Gamma + \frac{a^2}{16} \int m\chi \left[(C')^2 C'_i - (C)^2 C_i \right] \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_k} \right. \\
& + f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \left. \right] k_j k_k d\Gamma - \frac{a^2}{8} \int m\chi (C'_r C'_i - C_r C_i) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j \partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma \\
& + \frac{a^2}{8} \int m\chi (C'_i - C_i) \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \frac{\partial v_r}{\partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int m\chi (C'_r \\
& - C_r) \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} f f_1 k_j k_k d\Gamma + \frac{a^2}{8} \int m\chi (C'_r - C_r) \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma \\
& - \frac{a^2}{16} \int m\chi \left[(C')^2 - (C)^2 \right] \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} f f_1 k_j k_k d\Gamma. \tag{3.1.39}
\end{aligned}$$

O sistema de equações diferenciais (3.1.26), (3.1.27), (3.1.28) e (3.1.29) não pode ser considerado ainda como um sistema de equações de campo para os 13 campos escalares: ρ , v_i , p_{ij} e q_i , pois este contém novas quantidades: p_{ijk} , p_{ijk}^I , q_{ij} , q_{ij}^I , p_{ij}^I , q_k^I , P_{ij} , Q_i , \tilde{P}_{ij} e \tilde{Q}_i . As quantidades p_{ijk} , p_{ijk}^I , q_{ij} , q_{ij}^I , p_{ij}^I e q_k^I são conhecidas como os momentos da função de distribuição, enquanto que P_{ij} , Q_i , \tilde{P}_{ij} e \tilde{Q}_i como termos de produção.

Para que o referido sistema de equações diferenciais se torne um sistema de equações de campo, precisamos exprimir estas novas quantidades como funções dos campos básicos ρ , v_i , p_{ij} e q_i .

III.1.3 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS CONSTITUTIVOS

Para a determinação dos termos constitutivos, precisamos de uma função de distribuição que seja função dos 13 campos básicos. Assumiremos $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ como sendo a função de distribuição de Grad [3]:

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \left[\frac{m}{kT} \right]^2 \frac{1}{2\rho} \left[p_{\langle ij \rangle} c_i c_j + 2q_i \left(\frac{mC^2}{5kT} - 1 \right) c_i \right] \right\}, \quad (3.1.40)$$

onde

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{m} \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{mC^2}{2kT} \right] \quad (3.1.41)$$

é a função de distribuição de Maxwell, k é a constante de Boltzmann e $p_{\langle ij \rangle} = p_{ij} - \frac{1}{3} p_{rr} \delta_{ij}$ é o deviante do tensor pressão.

Substituindo a função de distribuição de Grad (3.1.40) nos termos constitutivos (3.1.30), (3.1.31), (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35), (3.1.36), (3.1.37), (3.1.38), (3.1.39) e integrando, obtemos

$$P_{ijk} = \frac{2}{5} (q_i \delta_{jk} + q_j \delta_{ik} + q_k \delta_{ij}), \quad (3.1.42)$$

$$q_{ij} = \frac{5}{2} \rho \left[\frac{kT}{m} \right]^2 \delta_{ij} + \frac{7}{2} \frac{kT}{m} p_{\langle ij \rangle}, \quad (3.1.43)$$

$$P_{ij}^I = \rho^2 b \chi \frac{kT}{m} \delta_{ij} + \frac{2}{5} \rho b \chi p_{\langle ij \rangle} - \frac{48}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \left[2 \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right] - \frac{24}{125} \frac{\mu^I}{\rho} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \left[2 \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial q_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right], \quad (3.1.44)$$

$$\begin{aligned}
P_{ijk}^I &= \frac{9}{25} \rho b \chi (q_i \delta_{jk} + q_j \delta_{ik} + \frac{4}{9} q_k \delta_{ij}) - \frac{48}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{k}{m} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \delta_{jk} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial T}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{24}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{1}{\rho} \left(2 \frac{\partial p_{\langle ij \rangle}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{\langle ik \rangle}}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial p_{\langle jk \rangle}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{\langle ir \rangle}}{\partial x_r} \delta_{jk} + \frac{\partial p_{\langle jr \rangle}}{\partial x_r} \delta_{ik} \right) + \frac{36}{175} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\right. \\
&\quad \left. \frac{10}{3} p_{\langle ij \rangle} \delta_{kr} + p_{\langle ik \rangle} \delta_{jr} + p_{\langle jk \rangle} \delta_{ir} + p_{\langle ir \rangle} \delta_{jk} + p_{\langle jr \rangle} \delta_{ik} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} p_{\langle kr \rangle} \delta_{ij} \right) , \tag{3.1.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{ij}^I &= \frac{5}{2} \rho^2 b \chi \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \delta_{ij} + \frac{17}{10} \rho b \chi \frac{kT}{m} p_{\langle ij \rangle} - \frac{132}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{kT}{m} \left(\right. \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right) - \frac{6}{125} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{1}{\rho} \left(2 \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{3} \frac{\partial q_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right) , \tag{3.1.46}
\end{aligned}$$

$$q_j^I = \frac{3}{5} \rho b \chi q_j - \frac{24}{5} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{48}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\rho \pi \chi} \frac{\partial p_{\langle jr \rangle}}{\partial x_r} , \tag{3.1.47}$$

$$P_{ij} = - \frac{16}{5} a^2 \frac{\rho}{m} \chi \left(\frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2} p_{\langle ij \rangle} , \tag{3.1.48}$$

$$Q_i = - \frac{32}{15} a^2 \frac{\rho}{m} \chi \left(\frac{\pi kT}{m} \right)^{1/2} q_i , \tag{3.1.49}$$

$$\tilde{P}_{ij} = \frac{144}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{a \chi} \left(\frac{kT}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{6}{25} \rho b \chi \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} , \tag{3.1.50}$$

$$\tilde{Q}_i = \rho^2 b \chi \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{10} \rho b \chi \frac{kT}{m} \frac{\partial p_{\langle ir \rangle}}{\partial x_r} , \tag{3.1.51}$$

onde

$$p = \frac{\rho k T}{m} \quad \text{pressão do gás ideal}$$

$$b = \frac{2}{3} \pi \frac{a^3}{m} \quad \text{co-volume de um átomo por unidade de massa}$$

$$\mu^I = \frac{5}{16a^2} \left(\frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2} \quad \text{coeficiente de viscosidade cizalhante de um gás ideal}$$

Os termos não lineares em $p_{\langle ij \rangle}$, q_i , $\frac{\partial T}{\partial x_j}$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_j}$ e suas derivadas foram desprezados. O apêndice C traz maiores detalhes sobre o cálculo das integrais.

III.1.4 - AS EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS

Substituindo os termos constitutivos (3.1.42) a (3.1.51) nas equações de balanço (3.1.26) a (3.1.29), desprezando os termos não lineares em v_i , $p_{\langle ij \rangle}$, q_i , $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ e suas derivadas, obtemos um sistema de equações linearizadas para os 13 campos que é :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.52)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{k}{m} (1 + \rho b \chi) \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{kT}{m} \left[1 + 2\rho b \chi + \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \\ & \left[1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right] \frac{\partial p_{\langle ij \rangle}}{\partial x_j} - \frac{48}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{1}{\chi} \left[2 \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \right] \\ & - \frac{24}{125} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{1}{p} \left[2 \frac{\partial^2 q_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 q_r}{\partial x_i \partial x_r} \right] = 0, \quad (3.1.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\rho k T}{m} \left(1 + \rho b \chi \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ & - \frac{24}{5} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{k}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} - \frac{48}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\rho \pi \chi} \frac{\partial^2 p_{\langle i r \rangle}}{\partial x_i \partial x_r} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_{\langle i j \rangle}}{\partial t} + \frac{4}{5} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{48}{5} \mu^I \frac{\rho b \chi}{a} \frac{1}{\chi} \left(\frac{k T}{m \pi} \right)^{1/2} \left(1 + \right. \\ & \left. \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} - \frac{96}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{k}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} - \frac{216}{175} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\rho \pi \chi} \left(\right. \\ & \left. \frac{\partial^2 p_{\langle i j \rangle}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{11}{9} \left[\frac{\partial^2 p_{\langle i k \rangle}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 p_{\langle j k \rangle}}{\partial x_i \partial x_k} \right] - \frac{22}{17} \frac{\partial^2 p_{\langle r k \rangle}}{\partial x_r \partial x_k} \delta_{i j} \right) = \\ & - \frac{16}{5} a^2 \chi \frac{\rho}{m} \left(\frac{\pi k T}{m} \right)^{1/2} p_{\langle i j \rangle}, \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{5}{2} \rho T \left(\frac{k}{m} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{k T}{m} \left(1 + \rho b \chi \right) \frac{\partial p_{\langle i j \rangle}}{\partial x_j} - \\ & \frac{12}{25} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi \chi} \frac{k T}{m} \left(2 \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \right) + \frac{54}{125} \mu^I \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\rho \pi \chi} \left(\right. \\ & \left. 2 \frac{\partial^2 q_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 q_r}{\partial x_i \partial x_r} \right) = - \frac{32}{15} a^2 \chi \frac{\rho}{m} \left(\frac{\pi k T}{m} \right)^{1/2} q_i. \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

As equações (3.1.54) e (3.1.55) representam o traço e a parte sem traço da equação (3.1.28).

III.2 - TEORIA CINÉTICA DE 5 CAMPOS

Iremos caracterizar agora um estado macroscópico de um gás monoatômico denso por 5 campos escalares de densidade ρ , velocidade v_i e temperatura T .

III.2.1 - A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Iremos adotar o mesmo procedimento da seção III.1.1. Se fizermos o desenvolvimento em séries de Taylor em torno do ponto x das funções f'_1 , f_1 e χ até termos de terceira ordem, multiplicarmos por uma função arbitrária $\psi(c)$, onde ψ é um invariante de soma, e integrarmos sobre todos os valores de c , obtemos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\Phi_i + \tilde{\Phi}_i)}{\partial x_i} = S + \tilde{P}, \quad (3.2.1)$$

onde

$$\Psi = \int \psi f \, dc, \quad (3.2.2)$$

$$\Phi_i = \int \psi c_i f \, dc, \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i = & \frac{a}{2} \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 k_i \, d\Gamma + \frac{a^2}{4} \int \chi (\psi' - \psi) f f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{f}{f_1} k_i k_j \, d\Gamma \\ & + \frac{a^3}{16} \int \chi (\psi' - \psi) \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_k} + f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right] k_i k_j k_k \, d\Gamma \\ & - \frac{a^3}{8} \int \chi (\psi' - \psi) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} k_i k_j k_k \, d\Gamma + \frac{a^3}{48} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int \chi (\psi' \\ & - \psi) f f_1 k_i k_j k_k \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$S = \int F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} f \, dc, \quad (3.2.5)$$

$$\tilde{P} = 0 . \quad (3.2.6)$$

Os termos da equação (3.2.1) têm os mesmos significados físicos que os termos correspondentes da equação (3.1.19).

Na teoria de 5 campos escalares, as equações de balanço para estes campos correspondem às equações de balanço de massa, momento linear e energia. Por isso na derivação da equação (3.2.1) escolhemos uma função arbitrária ψ , que depende somente da velocidade c .

III.2.2 - AS EQUAÇÕES DE BALANÇO

As 5 equações de balanço correspondentes aos campos de densidade ρ , velocidade v_i e temperatura T , são obtidas a partir da equação de transporte (3.2.1) substituindo sucessivamente ψ por m , mc_i e $\frac{1}{2} mc^2$. Assim, temos:

i) Balanço de massa ($\psi = m$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (3.2.7)$$

ii) Balanço de momento linear ($\psi = mc_i$):

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + p_{ij} + p_{ij}^I + p_{ij}^{II} = 0 , \quad (3.2.8)$$

iii) Balço de energia ($\psi = \frac{1}{2} mc^2$):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho (\varepsilon + \frac{1}{2} v^2) v_j + (p_{ij} + p_{ij}^I + p_{ij}^{II}) v_i + q_j + q_j^I + q_j^{II} \right], \quad (3.2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{ij}^{II} &= \frac{a^3}{16} \int m\chi (C'_i - C_i) \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_l} + f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right] k_j k_k k_l d\Gamma \\ &\quad - \frac{a^3}{8} \int m\chi (C'_i - C_i) \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} k_j k_k k_l d\Gamma + \frac{a^3}{48} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \int m\chi (C'_i \\ &\quad - C_i) f f_1 k_j k_k k_l d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} q_j^{II} &= \frac{a^3}{32} \int m\chi [(C')^2 - (C)^2] \left[f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_k} + f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right] k_i k_j k_k d\Gamma \\ &\quad - \frac{a^3}{16} \int m\chi [(C')^2 - (C)^2] \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} k_i k_j k_k d\Gamma \\ &\quad + \frac{a^3}{96} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int m\chi [(C')^2 - (C)^2] f f_1 k_i k_j k_k d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Nas equações (3.2.7), (3.2.8) e (3.2.9) não há termos de produção, pois as grandezas massa, momento linear e energia são conservativas (estamos tratando de colisões elásticas).

Agora, p_{ij} , p_{ij}^I , p_{ij}^{II} , q_j , q_j^I e q_j^{II} são termos constitutivos e devem ser expressos como função dos campos básicos ρ , v_i e T , para que o sistema de equações (3.2.7), (3.2.8) e (3.2.9) torne-se um sistema de equações de campo.

III.2.3 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS CONSTITUTIVOS

Inicialmente vamos determinar os termos constitutivos p_{ij}^{II} e q_j^{II} expressos pelas equações (3.2.10) e (3.2.11).

Como estamos interessados em obter as equações linearizadas de Burnett para um gás denso, onde aparecem somente os gradientes de primeira e segunda ordem dos campos básicos ρ , v_i e T , devemos utilizar no cálculo de p_{ij}^{II} e q_j^{II} a função de distribuição de velocidades de Maxwell.

Aqui pode ser visto com maior clareza porque as funções χ , f_1 e f'_1 na equação (2.3.6) foram desenvolvidas em séries de Taylor em torno do ponto x até termos de terceira ordem.

Substituindo a função de distribuição de Maxwell em (3.2.10), (3.2.11) e integrando, obtemos :

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{II} = & \frac{a^5}{30} \rho \chi \frac{kT}{m^2} \pi \left[2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} \right] + \frac{a^5}{60} \rho^2 \chi \frac{k}{m^2} \pi \left[\right. \\
 & 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} \left. \right] + \frac{a^5}{90} m \pi \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} \left[\chi \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \frac{kT}{m} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{5}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_r} \left[\chi \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \frac{kT}{m} \right] \delta_{ij} \right], \quad (3.2.12)
 \end{aligned}$$

$$q_j^{II} = \frac{36}{125} (\mu^I)^2 \frac{\rho^2 b^3 \chi}{\pi} \left[2 \frac{\partial^2 v_{\langle j}}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j \partial x_r} \right]. \quad (3.2.13)$$

Os termos constitutivos p_{ij} , p_{ij}^I , q_j e q_j^I podem ser expressos em função de ρ , v_i e T , empregando-se o método de Chapman-Enskog [1] e [4]. Este método será desenvolvido no próximo capítulo.

De acordo com as equações (3.1.44) e (3.1.47) p_{ij}^I e q_j^I são funções de ρ , T , $p_{\langle ij \rangle}$ e q_j , logo precisamos expressar

$p_{\langle ij \rangle}$ e q_j como funções de ρ , v_i e T . Para tal, usaremos as equações de campo linearizadas (3.1.55) e (3.1.56) e o método de iteração de Maxwell [6].

O primeiro passo desta iteração consiste em substituir no lado esquerdo das equações (3.1.55) e (3.1.56) os valores de $p_{\langle ij \rangle}$ e q_i no equilíbrio, que são $p_{\langle ij \rangle}^{(0)} = 0$ e $q_i^{(0)} = 0$, e obter no lado direito o primeiro valor da iteração

$$p_{\langle ij \rangle}^{(1)} = -2\mu^I \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right] \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{6}{5} \mu^I \frac{\rho^2 b^2}{\rho \pi a^2} \left[\frac{k m}{\pi T} \right]^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}}, \quad (3.2.14)$$

$$q_i^{(1)} = -\frac{75}{64} \frac{1}{\chi a^2} \left[\frac{k^3 T}{m \pi} \right]^{1/2} \left[1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{9}{40} \mu^I \frac{\rho^2 b^2}{\rho \pi a^2} \left[\frac{m k T}{\pi} \right]^{1/2} \left[2 \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_{r \rangle}} + \frac{5}{3} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \right]. \quad (3.2.15)$$

No segundo passo da iteração substituímos $p_{\langle ij \rangle}^{(1)}$ e $q_i^{(1)}$ no lado esquerdo das equações (3.1.55) e (3.1.56), considerando somente os termos até gradientes de segunda ordem, obtemos do lado direito o segundo valor da iteração

$$p_{\langle ij \rangle}^{(2)} = -2\mu^I \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right] \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} - 2 \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho^2} \left[1 + \frac{12}{5} \rho b \chi + \frac{4}{5} \rho^2 b^2 \chi^2 + \rho^2 b \left[1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right] \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right] \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right] \frac{1}{\rho T} \left[1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{7}{25} + \frac{96}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right] \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}}, \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned}
q_i^{(2)} = & -\frac{75}{64} \frac{1}{\chi a^2} \left(\frac{k^3 T}{m \pi} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} + 3 \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \right. \\
& + \rho b \chi + \left. \left[\frac{6}{25} + \frac{12}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_{r \rangle}} - \frac{15}{4} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \right. \\
& + \left. \frac{8}{5} \rho b \chi + \left[\frac{15}{25} - \frac{8}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} . \quad (3.2.17)
\end{aligned}$$

Definimos o tensor pressão total P_{ij}^* e o fluxo de calor total Q_i^* como

$$P_{ij}^* = p_{ij} + p_{ij}^I + p_{ij}^{II} \quad (3.2.18)$$

$$Q_i^* = q_i + q_i^I + q_i^{II} \quad (3.2.19)$$

Substituindo $p_{\langle ij \rangle}^{(2)}$ e $q_i^{(2)}$ nas equações (3.1.44) e (3.1.47), considerando apenas os termos lineares até gradientes de segunda ordem, obtemos expressões lineares para o tensor pressão total e fluxo de calor total

$$\begin{aligned}
P_{ij}^* = & p (1 + \rho b \chi) \delta_{ij} - 2 \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{4}{25} + \frac{48}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \\
& - \eta \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ij} - 2 \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{14}{5} \rho b \chi + \frac{44}{25} \rho^2 b^2 \chi^2 + \left[\frac{40}{125} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{192}{125\pi} \right] \rho^3 b^3 \chi^3 + \rho^2 b \left[1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{20}{125} - \frac{24}{125\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right. \\
& \left. \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho T} \left(1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left[\frac{15}{25} + \frac{132}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right. \\
& \left. + \left[\frac{14}{125} + \frac{492}{125\pi} \right] \rho^3 b^3 \chi^3 \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \frac{64}{25} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \rho b \chi + \frac{1}{8} \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} + \frac{6}{5} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^I} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(1 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} , \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} Q_i^* = & - \frac{\lambda^I}{\chi} \left[1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left(\frac{9}{25} + \frac{32}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ & + 3 \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{8}{5} \rho b \chi + \left(\frac{21}{25} + \frac{44}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{18}{125} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{124}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \right] \frac{\partial^2 v_{<i}}{\partial x_r \partial x_r} - \frac{15}{4} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{11}{5} \rho b \chi + \left(\frac{39}{25} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{8}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{45}{125} - \frac{40}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \right] \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} , \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

onde

$$\eta = \rho^2 b^2 \chi \frac{1}{\pi a^2} \left(\frac{m k T}{\pi} \right)^{1/2} \quad \begin{array}{l} \text{coeficiente de viscosidade} \\ \text{volumétrica} \end{array}$$

$$\lambda^I = \frac{75}{64} \frac{1}{a^2} \left(\frac{k^3 T}{m \pi} \right)^{1/2} \quad \begin{array}{l} \text{coeficiente de condutividade} \\ \text{térmica de um gás ideal} \end{array}$$

As equações (3.2.20) e (3.2.21) são as equações linearizadas de Burnett para um gás monoatômico denso de esferas rígidas.

Se a velocidade do gás for nula ($v_i = 0$), além da pressão hidrostática, existem duas outras contribuições para o aumento da pressão num gás monoatômico denso. A primeira devido a um segundo gradiente de temperatura e a segunda devido a um segundo gradiente da densidade. Isto pode ser visto a partir da equação (3.2.20), fazendo-se $i = j$

$$\begin{aligned}
P^* = p (1 + \rho b \chi) + \frac{64}{25} \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\rho b \chi + \frac{1}{8} \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_r \partial x_r} + \\
+ \frac{6}{5} \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho T} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} . \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

Para um gás ideal a pressão é simplesmente a pressão hidrostática do gás, não havendo nenhuma outra contribuição para o aumento desta. Isto pode ser visto na equação anterior fazendo-se $\rho b = 0$

$$P^* = p = \frac{\rho k T}{m} \quad (3.2.23)$$

III.2.4 - AS EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS

Substituindo (3.2.20) e (3.2.21) nas equações de balanço (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9), desprezando os termos não lineares em v_i , $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ e suas derivadas, obtemos um sistema de equações linearizadas para ρ , v_i e T

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 , \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{k}{m} (1 + \rho b \chi) \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{k T}{m} \left(1 + 2 \rho b \chi + \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \\
- 2 \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{4}{5} \rho b \chi \left[\frac{4}{25} + \frac{48}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_r} \right) \\
- \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right) - 2 \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{14}{5} \rho b \chi + \frac{44}{25} \rho^2 b^2 \chi^2 \right. \\
\left. + \left[\frac{40}{125} - \frac{192}{125\pi} \right] \rho^3 b^3 \chi^3 + \rho^2 b \left(1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{20}{125} - \frac{24}{125\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{<i>i> \partial x_r} \right) + \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^I} \left(1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left(\frac{15}{25} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{132}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{14}{125} + \frac{492}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \left. \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_{<i>i> \partial x_r} \right) \\
& + \frac{64}{25} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\rho b \chi + \frac{1}{8} \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_r \partial x_r} \right) \\
& + \frac{6}{5} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho^I} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} \right) = 0, \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{k T}{m} (1 + \rho b \chi) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left(\frac{9}{25} \right. \right. \\
& + \left. \frac{32}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 \left. \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + 3 \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{8}{5} \rho b \chi + \left(\frac{21}{25} \right. \right. \\
& + \left. \frac{44}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{18}{125} + \frac{124}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \left. \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 v_{<i>i>}}{\partial x_r \partial x_r} \right) \\
& - \frac{15}{4} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{11}{5} \rho b \chi + \left(\frac{39}{25} - \frac{8}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{45}{125} \right. \right. \\
& - \left. \frac{40}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \left. \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \right) = 0. \quad (3.2.26)
\end{aligned}$$

No capítulo 5 analisaremos uma solução para este sistema e que corresponde no caso de uma propagação de ondas harmônicas planas de pequenas amplitudes.

IV - O MÉTODO DE CHAPMAN-ENSKOG

O objetivo do método de Chapman-Enskog é determinar os termos constitutivos p_{ij} , P_{ij}^I , P_{ij}^{II} , q_i , q_i^I e q_i^{II} , da teoria de 5 campos escalares desenvolvida na seção III.2, em função dos campos básicos ρ , v_i e T .

A idéia básica do método é escrever a função de distribuição como uma série infinita

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots, \quad (4.1)$$

onde as expressões $f^{(0)}$, $f^{(0)} + f^{(1)}$, $f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)}$, ... são aproximações sucessivas para a função de distribuição f .

IV.1 - A PRIMEIRA APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

O primeiro termo de f consiste de uma função de distribuição de Maxwell

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{m} \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{mC^2}{2kT} \right], \quad (4.1.1)$$

que nos dá os valores locais da densidade, velocidade e temperatura.

Este termo corresponde à primeira aproximação para a função de distribuição, e sua dedução pode ser vista com mais detalhes em [4].

IV 2 - A SEGUNDA APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

A segunda aproximação é

$$f^{(0)} + f^{(1)} = f^{(0)} (1 + \phi^{(1)}) \quad (4.2.1)$$

e consiste de um desvio da função de distribuição de Maxwell, sendo $\phi^{(1)}$ uma função linear das primeiras derivadas de ρ , v_i e T .

Neste método o desvio $\phi^{(1)}$ é determinado a partir da equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x} &= \int \chi (f'_1 f' - f_1 f) d\Gamma^* + \int a\chi \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_i} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* \\ &+ \int \frac{a}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma^* , \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

quando nela substituímos o valor da expressão (4.2.1).

A equação (4.2.2) foi obtida de (2.3.6), expandindo-se as funções χ , f'_1 e f_1 em séries de Taylor em torno do ponto x , levando-se em conta apenas as primeiras derivadas.

Quando substituímos (4.2.1) no lado esquerdo de (4.2.2), desprezando os termos envolvendo $\phi^{(1)}$, sendo ρ , v_i e T funções de x e t , podemos escrever este lado como

$$\begin{aligned} f^{(0)} &\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT} C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + (C_i + v_i) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] \right] . \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

A substituição de (4.2.1) no primeiro termo do lado direito da equação (4.2.2), desprezando os produtos $\phi^{(1)} \phi_1^{(1)}$, $\phi^{(1)'} \phi_1^{(1)'}$ e sabendo que $f^{(0)} f_1^{(0)} = f^{(0)'} f_1^{(0)'}$, nos leva a

$$\chi I[\phi^{(1)}] \equiv \chi \int f^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1^{(1)'} + \phi^{(1)'} - \phi_1^{(1)} - \phi^{(1)}) d\Gamma^* \quad (4.2.4)$$

O segundo e terceiro termos da equação (4.2.2) já envolvem derivadas espaciais, logo devemos desprezar todos os termos envolvendo $\phi^{(1)}$ quando neles substituirmos a equação (4.2.1). Então podemos escrever $f^{(0)}$ no lugar de f e estes dois termos ficam

$$a\chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln (f_1^{(0)'} f_1^{(0)} \chi) d\Gamma^* \quad (4.2.5)$$

Depois de substituir os valores de $f_1^{(0)'}$, $f_1^{(0)}$ na expressão acima temos

$$a\chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} k_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \ln (\rho^2 \chi T^{-3}) + \frac{m}{2kT^2} ((C_1^i)')^2 + (C_1^i)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} (C_r^1)' + C_r^1 \left. \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] d\Gamma^* \quad (4.2.6)$$

A integração da expressão (4.2.6) em k e C_1 resulta

$$-\rho b \chi f^{(0)} \left[C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln (\rho^2 \chi T) + \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln T) C_i \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) + \frac{2}{5} \left[\left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \delta_{ir} + 2C_i C_r \frac{m}{2kT} \right] \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] \quad (4.2.7)$$

Usando (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.7) a equação (4.2.2) fica

$$I[\phi^{(1)}] = \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT} C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (C_i + v_i) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] \\
& + \rho b \chi \left[C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(\rho^2 \chi T) + \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln T) C_i \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right] \right. \\
& \left. + \frac{2}{5} \left[\left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right] \delta_{ir} + 2C_i C_r \frac{m}{2kT} \right] \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] \quad (4.2.8)
\end{aligned}$$

Para que $\phi^{(1)}$ seja solução da equação integral (4.2.8) é necessário que o lado direito desta equação satisfaça as condições

$$\begin{aligned}
& \int \psi f^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT} C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + (C_i + v_i) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] + \rho b \chi \left[C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(\rho^2 \chi T) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln T) C_i \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right] + \frac{2}{5} \left[\left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right] \delta_{ir} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2C_i C_r \frac{m}{2kT} \right] \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right] \right] dc = 0, \quad (4.2.9)
\end{aligned}$$

onde ψ é um invariante de soma, isto é, $\psi'_1 + \psi' = \psi_1 + \psi$. As condições (4.2.9) são consequências do resultado que para toda função $f(x, c, t)$, temos

$$\begin{aligned}
& \int \psi f_1^{(0)} f^{(0)} (\phi_1^{(1)'} + \phi^{(1)'} - \phi_1^{(1)} - \phi^{(1)}) d\Gamma = \int \phi^{(1)} f_1^{(0)} f^{(0)} (\psi'_1 + \psi' - \psi_1 - \psi) d\Gamma. \quad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Esta igualdade é obtida através de arranjos semelhantes aos empregados na seção III.1.1 para dedução da equação (3.1.16). Em particular se ψ for um invariante de soma, a integral (4.2.10) é nula e segue a equação (4.2.9).

A partir da equação (4.2.9), segue as seguintes equações quando ψ assume os valores m , mc_i e $\frac{1}{2} mc^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho \frac{kT}{m} (1 + \rho b\chi) \right] = 0, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \frac{kT}{m} (1 + \rho b\chi) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.2.13)$$

As equações (4.2.11), (4.2.12) e (4.2.13) são as equações de campo para um fluido de Euler.

Eliminando $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ e $\frac{\partial T}{\partial t}$ dados pelas equações (4.2.11) a (4.2.13), a equação (4.2.8) se reduz a

$$\begin{aligned} I[\phi^{(1)}] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[(1 + \frac{3}{5} \rho b\chi) \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) C_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + (1 + \frac{2}{5} \rho b\chi) \frac{m}{kT} C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

A solução geral $\phi^{(1)}$ da equação (4.2.14), pode ser escrita como uma soma entre a solução da equação homogênea e uma combinação linear dos gradientes de temperatura e velocidade. Assim, temos

$$\phi^{(1)} = - \frac{1}{\chi} \frac{A_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\chi} \frac{m}{2kT} B_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha_1 + \alpha_{2r} C_r + \alpha_3 C^2, \quad (4.2.15)$$

onde α_1 e α_3 são duas funções escalares, α_{2r} e A_i são duas

funções vetoriais e B_{ij} uma função tensorial. A_i e B_{ij} dependem de C , ρ e T , enquanto α_1 , α_{2r} e α_3 não dependem de C .

Substituindo a equação (4.2.15) na equação (4.2.14) e igualando os coeficientes de $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, obtemos equações integrais para A_i e B_{ij} que são

$$- I[A_i] = f^{(0)} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left[\frac{mC^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right] C_i, \quad (4.2.16)$$

$$- I[B_{ij}] = 2f^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) C_{\langle i} C_{j \rangle}. \quad (4.2.17)$$

A equação (4.2.17) impõe determinadas restrições ao tensor B_{ij} . Se tomarmos o traço e a parte anti-simétrica da equação (4.2.17), obtemos, respectivamente,

$$I[B_{rr}] = 0, \quad (4.2.18)$$

$$I[B_{(ij)}] = 0, \quad (4.2.19)$$

onde $B_{(ij)} = \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{ji})$ representa a parte anti-simétrica do tensor B_{ij} .

Estas equações serão satisfeitas se tivermos, respectivamente,

$$B_{rr} = 0, \quad (4.2.20)$$

$$B_{ij} = B_{ji}. \quad (4.2.21)$$

Das equações (4.2.20) e (4.2.21) concluímos que B_{ij} é um tensor simétrico sem traço.

De acordo com teoremas de representação de funções

escalares, vetoriais e tensoriais [7], podemos expressar a função vetorial $A_i(C, \rho, T)$ e a função tensorial simétrica sem traço $B_{ij}(C, \rho, T)$ como

$$A_i = A(C^2, \rho, T) C_i, \quad (4.2.22)$$

$$B_{ij} = B(C^2, \rho, T) C_{\langle i} C_{j \rangle}, \quad (4.2.23)$$

onde $A(C^2, \rho, T)$ e $B(C^2, \rho, T)$ são duas funções escalares.

A inserção das representações (4.2.22) e (4.2.23) na solução geral (4.2.15) leva à

$$\phi^{(1)} = -\frac{1}{\chi} \frac{A}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\chi} \frac{m}{2kT} B C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha_1 + \alpha_{2r} C_r + \alpha_3 C^2. \quad (4.2.24)$$

As constantes α_1 , α_{2r} e α_3 podem ser escolhidas tal que $\phi^{(1)}$ satisfaça a condição

$$\int \psi f^{(0)} \phi^{(1)} dc = 0, \quad (4.2.25)$$

ou seja,

$$\int \psi f^{(0)} \left[-\frac{1}{\chi} \frac{A}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\chi} \frac{m}{2kT} B C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha_1 + \alpha_{2r} C_r + \alpha_3 C^2 \right] dc = 0 \quad (4.2.26)$$

Esta condição pode ser facilmente verificada a partir das definições dos campos básicos ρ , v_i e T dadas pelas equações (3.1.1), (3.1.2) e (2.1.11).

Assim, se tomarmos $\psi = m$, mc_i e $\frac{1}{2} mc^2$ e integrarmos,

obtemos, respectivamente,

$$\alpha_1 + \frac{3kT}{m} \alpha_3 = 0, \quad (4.2.27)$$

$$\int m f^{(0)} \left[-\frac{1}{\chi} \frac{A}{T} \frac{\partial T}{\partial x_r} + \alpha_{2r} \right] C_i C_r dc = 0, \quad (4.2.28)$$

$$\alpha_1 + \frac{5kT}{m} \alpha_3 = 0. \quad (4.2.29)$$

Das equações (4.2.27) e (4.2.29) podemos concluir que $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, enquanto que a equação (4.2.28) mostra que α_{2r} é proporcional a $\frac{\partial T}{\partial x_i}$. Assim, α_{2r} deve ser da forma $\alpha_{2r} = \frac{1}{\chi} \frac{\alpha}{T} \frac{\partial T}{\partial x_r}$ e a equação (4.2.28) se reduz a

$$\int \frac{m}{\chi} f^{(0)} \left[-\frac{A^*}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] C_i C_r dc = 0, \quad (4.2.30)$$

onde $A^* = A - \alpha$.

Como $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ não é nulo, podemos expressar a condição (4.2.30) na forma

$$\int A^* C^2 f^{(0)} dc = 0. \quad (4.2.31)$$

Com base nos resultados acima, podemos escrever a equação (4.2.24) como

$$\phi^{(1)} = -\frac{1}{\chi} \left[\frac{A^*}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{2kT} B C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]. \quad (4.2.32)$$

Os coeficientes A^* e B são obtidos através da solução das equações integrais (4.2.16) e (4.2.17), isto é,

$$- I[A^* C_i] = f^{(0)} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(\frac{m C^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) C_i, \quad (4.2.33)$$

$$- I[BC_{\langle i j \rangle}] = 2f^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) C_{\langle i j \rangle}. \quad (4.2.34)$$

As equações integrais (4.2.33) e (4.2.34) podem ser escritas em função dos polinômios de Sonine (Apêndice D)

$$S_{3/2}^{(1)}(\beta C^2) = \frac{5}{2} - \beta C^2, \quad (4.2.35)$$

$$S_{5/2}^{(0)}(\beta C^2) = 1, \quad (4.2.36)$$

como

$$I[A^* C_i] = f^{(0)} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) S_{3/2}^{(1)}(\beta C^2) C_i, \quad (4.2.37)$$

$$- I[BC_{\langle i j \rangle}] = 2f^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) S_{5/2}^{(0)}(\beta C^2) C_{\langle i j \rangle}, \quad (4.2.38)$$

onde $\beta = \frac{m}{2kT}$.

Para resolver as equações (4.2.37) e (4.2.38) expandimos os coeficientes A^* e B em séries de polinômios de Sonine da seguinte forma

$$A^*(C^2, \rho, T) = -\beta \sum_{r=0}^{\alpha} a_r S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2), \quad (4.2.39)$$

$$B(C^2, \rho, T) = \beta \sum_{r=0}^{\alpha} b_r S_{5/2}^{(r)}(\beta C^2), \quad (4.2.40)$$

onde a_r e b_r são coeficientes escalares que não dependem de C .

O coeficiente A^* deve satisfazer a equação (4.2.31).

Portanto se substituirmos (4.2.39) em (4.2.31) obtemos

$$- \int f^{(0)} \beta \sum_{r=0}^{\alpha} a_r S_{3/2}^{(r)} C^2 dc =$$

$$- 4\pi \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \beta \sum_{r=0}^{\alpha} \int S_{3/2}^{(0)} S_{3/2}^{(r)} C^4 e^{-\beta C^2} dC = 0. \quad (4.2.41)$$

Usando as equações (D.6) e (D.7), do apêndice D, em (4.2.41) temos

$$- \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} a_0 = 0. \quad (4.2.42)$$

Portanto, concluímos que $a_0 = 0$ e que A^* passa a ser expresso como

$$A^*(C^2, \rho, T) = - \beta \sum_{r=1}^{\alpha} a_r S_{3/2}^{(r)}. \quad (4.2.43)$$

A inserção das expressões (4.2.40) e (4.2.43) nas equações integrais (4.2.37) e (4.2.38), resulta que

$$- \beta \sum_{r=1}^{\alpha} a_r I[S_{3/2}^{(r)} C_i] = f^{(0)} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) S_{3/2}^{(1)} C_i, \quad (4.2.44)$$

$$- \beta \sum_{r=0}^{\alpha} b_r I[S_{5/2}^{(r)} C_{\langle i} C_{j \rangle}] = 2 f^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) S_{5/2}^{(0)} C_{\langle i} C_{j \rangle}. \quad (4.2.45)$$

Usando as equações (4.2.44) e (4.2.45), iremos determinar os coeficientes a_r e b_r das expansões de A^* e B em séries de polinômios de Sonine.

Se multiplicarmos a equação (4.2.44) por $\beta S_{3/2}^{(r)} C_i$,

integrarmos em relação a C e utilizarmos a equação (D.7), obtemos

$$\sum_{s=1}^{\alpha} \alpha_{rs} a_s = \frac{15}{4} \frac{\rho}{m} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) \delta_{1r}, \quad (4.2.46)$$

onde

$$\alpha_{rs} = -\beta^2 \int S_{3/2}^{(r)} C_i I[S_{3/2}^{(s)} C_i] dC. \quad (4.2.47)$$

Multiplicando agora a equação (4.2.46) por $\beta^2 S_{5/2}^{(r)} C_{\langle i} C_{j \rangle}$ e integrando em relação a C , obtemos

$$\sum_{s=0}^{\alpha} \beta_{rs} b_s = 5 \frac{\rho}{m} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \delta_{0r}, \quad (4.2.48)$$

onde

$$\beta_{rs} = -\beta^3 \int S_{5/2}^{(r)} C_{\langle i} C_{j \rangle} I[S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i} C_{j \rangle}] dC. \quad (4.2.49)$$

A equação (4.2.46) representa um sistema infinito de equações algébricas para os coeficientes a_n , bem como a equação (4.2.48) um sistema infinito de equações algébricas para b_n . Somente os coeficientes a_1 e b_0 interessam no cálculo dos coeficientes de transporte e estes são obtidos a partir do sistema de equações (4.2.46) e (4.2.48)

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \alpha} \left(\begin{array}{c|ccc|} \frac{15}{4} \frac{\rho}{m} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \hline & 0 & \alpha_{22} & \alpha_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \\ \hline \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right),$$

(4.2.50)

$$b_0 = \lim_{n \rightarrow \alpha} \left(\begin{array}{c|ccc|} 5 \frac{\rho}{m} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) & \beta_{01} & \dots & \beta_{0n} \\ \hline & 0 & \beta_{11} & \beta_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \beta_{n1} & \beta_{nn} \\ \hline \beta_{00} & \beta_{01} & \dots & \beta_{0n} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{n0} & \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{array} \right).$$

(4.2.51)

Os coeficientes a_1 e b_0 são obtidos com base num método de aproximações sucessivas. Neste método a aproximação de ordem p para os coeficientes a_1 e b_0 , denotada por $[a_1]_p$ e $[b_0]_p$ é dada através do sub-determinante de ordem p . Só iremos considerar a primeira aproximação para os coeficientes a_1 e b_0 que é

$$a_1 = \frac{15}{4} \frac{\rho}{m} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \frac{1}{\alpha_{11}}, \tag{4.2.52}$$

$$b_0 = 5 \frac{\rho}{m} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{1}{\beta_{00}} , \quad (4.2.53)$$

onde as integrais α_{11} e β_{00} são definidas como

$$\alpha_{11} = - \beta^2 \int S_{3/2}^{(1)} C_i \, I [S_{3/2}^{(1)} C_i] dC , \quad (4.2.54)$$

$$\beta_{00} = - \beta^3 \int S_{5/2}^{(0)} C_{\langle i} C_{j \rangle} \, I [S_{5/2}^{(0)} C_{\langle i} C_{j \rangle}] dC . \quad (4.2.55)$$

Para o cálculo das integrais α_{11} e β_{00} mudamos as variáveis de integração C e C_1 e adotamos como novas variáveis a velocidade relativa g e a velocidade do centro de massa G definidas por

$$g = C_1 - C , \quad (4.2.55)$$

$$G = \frac{C_1 + C}{2} . \quad (4.2.56)$$

Como a lei de conservação de momento linear implica que $G' = G$, as equações (4.2.55) e (4.2.56) fornecem

$$C = G - \frac{1}{2} g , \quad C_1 = G + \frac{1}{2} g , \quad (4.2.57)$$

$$C' = G' - \frac{1}{2} g' , \quad C'_1 = G' + \frac{1}{2} g' , \quad (4.2.58)$$

$$dC dC_1 = dg dG . \quad (4.2.59)$$

Usando as equações (2.2.9), (2.2.10), (4.2.57) e (4.2.59) podemos escrever α_{11} e β_{00} como

$$\alpha_{11} = \beta^3 \int \left[\left[\frac{5}{2} - \beta (G^2 - G_s g_s + \frac{1}{4} g^2) \right] \left[G_i - \frac{1}{2} g_i \right] f_1^{(0)} f^{(0)} \left[\right. \right. \\ \left. \left. - 2G_r g_r k_i (g \cdot k) - 2G_r g_i k_r (g \cdot k) + 4G_r k_r k_i (g \cdot k)^2 - 2G_i g_r k_r (g \cdot k) \right. \right. \\ \left. \left. + 2G_i (g \cdot k)^2 \right] a^2 (g \cdot k) dk dg dG, \quad (4.2.60)$$

$$\beta_{00} = -\beta^3 \int \left[\left[G_{\langle i} G_{j \rangle} - \frac{1}{2} g_{\langle i} G_{j \rangle} - \frac{1}{2} g_{\langle j} G_{i \rangle} + \frac{1}{4} g_{\langle i} g_{j \rangle} \right] f_1^{(0)} f^{(0)} \left[\right. \right. \\ \left. \left. 2k_{\langle i} k_{j \rangle} (g \cdot k)^2 - g_{\langle i} k_{j \rangle} (g \cdot k) - g_{\langle j} k_{i \rangle} (g \cdot k) \right] a^2 (g \cdot k) dk dg dG. \quad (4.2.61)$$

Integrando as equações (4.2.60) e (4.2.61) em relação a \mathbf{k} , utilizando para isto as equações (C.6) a (C.10) do apêndice C, e em seguida em relação as velocidades relativas \mathbf{g} e G , utilizando as equações (C.1) a (C.5), obtemos

$$\alpha_{11} = \frac{5}{4} \frac{\rho^2}{m} \frac{1}{\mu^I}, \quad (4.2.62)$$

$$\beta_{00} = \frac{5}{4} \frac{\rho^2}{m} \frac{1}{\mu^I}, \quad (4.2.63)$$

onde concluímos que $\alpha_{11} = \beta_{00}$.

Utilizando as equações (4.2.62), (4.2.63), (4.2.52), (4.2.53), (4.2.43), (4.2.40) e (4.2.32) escrevemos $\phi^{(4)}$ como

$$\phi^{(4)} = \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left[\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right] C_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} -$$

$$-\frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \frac{m}{kT} C_i C_j \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} . \quad (4.2.64)$$

IV.3 - A TERCEIRA APROXIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

A terceira aproximação é

$$f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} = f^{(0)} (1 + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}) , \quad (4.3.1)$$

onde $\phi^{(2)}$ é uma função linear das segundas derivadas de ρ , v_i e T .

O desvio $\phi^{(2)}$ será determinado a partir da equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \int \chi (f'_1 f' - f_1 f) d\Gamma^* + \int a \chi \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_i} + f \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* \\ &+ \int \frac{a}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} (f'_1 f' + f_1 f) k_i d\Gamma^* + \int \frac{a^2}{2} \chi \left[f' \frac{\partial^2 f'_1}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ &- \left. f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* + \int \frac{a^2}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \left[f' \frac{\partial f'_1}{\partial x_j} - f \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* \\ &+ \int \frac{a^2}{8} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} (f'_1 f' - f_1 f) k_i k_j d\Gamma^* , \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

quando nela substituíremos a expressão (4.3.1).

A equação (4.3.2) foi obtida a partir de (2.3.6), expandindo-se as funções χ , f'_1 e f_1 em séries de Taylor em torno do ponto x , levando-se em conta apenas as primeiras e segundas derivadas.

Substituindo (4.3.1) no lado esquerdo da equação (4.3.2), agora desprezando os termos envolvendo $\phi^{(2)}$, temos

$$\begin{aligned}
f^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT} C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{P} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(\right. \right. \\
\left. \left. \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_i \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{P} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{m}{kT} C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right. \\
+ (C_j + v_j) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \right. \\
+ \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{P} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_r \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_r} \right) - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{P} \left(1 + \right. \\
\left. \left. + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{m}{kT} C_{\langle r} C_{s \rangle} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} \right) \right] \left. \right] . \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

A substituição de (4.3.1) no lado direito da equação (4.3.2), desprezando os termos não lineares, leva a

$$\begin{aligned}
\chi \int f_1^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1^{(1)'} + \phi_1^{(1)'} - \phi_1^{(1)} - \phi_1^{(1)}) d\Gamma^* + \chi \int f_1^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1^{(2)'} \\
+ \phi_1^{(2)'} - \phi_1^{(2)} - \phi_1^{(2)}) d\Gamma^* + \int a \chi f_1^{(0)} f_1^{(0)} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln (f_1^{(0)'} f_1^{(0)} \chi) d\Gamma^* \\
+ \int a \chi f_1^{(0)} f_1^{(0)} \left[\frac{\partial \phi_1^{(1)'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* + \int \frac{a^2}{2} \chi \left[f_1^{(0)'} \frac{\partial^2 f_1^{(0)'}}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
\left. - f_1^{(0)} \frac{\partial^2 f_1^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* . \quad (4.3.4)
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a equação (4.3.2) da seguinte forma

$$f^{(0)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m}{kT} C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{P} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(\right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_i \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right] - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{m}{kT} C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \\
& + (C_j + v_j) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \right. \\
& + \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left. \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_r \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial T}{\partial x_r} \right] - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \left(1 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \frac{m}{kT} C_{\langle r} C_{s \rangle} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_r}{\partial x_s} \right] \right] = \chi \int f_1^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1^{(1)'} + \phi_1^{(1)'} \\
& - \phi_1^{(1)} - \phi_1^{(1)}) d\Gamma^* + \chi \int f_1^{(0)} f_1^{(0)} (\phi_1^{(2)'} + \phi_1^{(2)'} - \phi_1^{(2)} - \phi_1^{(2)}) d\Gamma^* \\
& + \int a \chi f_1^{(0)} f_1^{(0)} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln (f_1^{(0)'} f_1^{(0)} \chi) d\Gamma^* + \int a \chi f_1^{(0)} f_1^{(0)} \left[\frac{\partial \phi_1^{(1)'}}{\partial x_i} \right. \\
& + \left. \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* + \int \frac{a^2}{2} \chi \left[f_1^{(0)'} \frac{\partial^2 f_1^{(0)'}}{\partial x_i \partial x_j} - f_1^{(0)} \frac{\partial^2 f_1^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^* .
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

A multiplicação da equação (4.3.5) por m , mc_i e $\frac{1}{2} mc^2$ e integração sobre todos os valores de c , fornece as equações de campo linearizadas para um fluido de Navier-Stokes. Assim, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 , \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - 2 \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{r \rangle}} \right] \\
- \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right] - \frac{6}{5} \eta \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{r \rangle}} \right] = 0 ,
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + p^* \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$- \frac{24}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \quad (4.3.8)$$

onde $p^* = (1 + \rho b \chi)$ é a pressão hidrostática de um gás denso.

Eliminando $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ e $\frac{\partial T}{\partial t}$, dados pelas equações (4.3.6), (4.3.7) e (4.3.8), da equação (4.3.5) temos

$$\begin{aligned} f^{(0)} & \left[- \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{1}{p} \left(\frac{mC^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \left[\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + p^* \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right. \right. \\ & - \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{24}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \left. \right] \\ & - \frac{1}{p} C_i \left[\rho v_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - 2 \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_r \rangle} \right) \right. \\ & - \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right) - \frac{6}{5} \eta \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_r \rangle} \right) \left. \right] - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p^2} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \left[\frac{5}{2} \right. \\ & - \frac{mC^2}{2kT} \left. \right] C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} v_r \frac{\partial T}{\partial x_r} + p^* \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right] + \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p^2} (1 + \\ & + \frac{2}{5} \rho b \chi) C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right] + (C_j + v_j) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \left(\frac{mC^2}{2kT} \right. \right. \\ & - \frac{3}{2} \left. \left. \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{m}{kT} C_r \frac{\partial v_r}{\partial x_j} + \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \left(\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_r \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_j} \right. \\ & \left. - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) \frac{m}{kT} C_{\langle r} C_{s \rangle} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} \right) \right] \left. \right] = \chi \int f_1^{(0)'} f_1^{(0)} C \phi_1^{(1)'} \\ & \frac{\phi_1^{(1)'} - \phi_1^{(1)} - \phi_1^{(1)'} d\Gamma^* + \chi \int f_1^{(0)'} f_1^{(0)} (C \phi_1^{(2)'} + \phi_1^{(2)'} - \phi_1^{(2)} - \phi_1^{(2)'} d\Gamma^* \\ & + \int a \chi f_1^{(0)'} f_1^{(0)} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln (f_1^{(0)'} f_1^{(0)} \chi) d\Gamma^* + \int a \chi f_1^{(0)'} f_1^{(0)} \left[\frac{\partial \phi_1^{(1)'}}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi_1^{(1)'}}{\partial x_i} \right] k_i d\Gamma^* + \int \frac{a^2}{2} \chi \left[f_1^{(0)'} \frac{\partial^2 f_1^{(0)'}}{\partial x_i \partial x_j} - f_1^{(0)} \frac{\partial^2 f_1^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right] k_i k_j d\Gamma^*, \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

onde os termos grifados se anulam, de acordo com a equação (4.2.8).

Substituindo os valores de $\phi_1^{(1)'}$, $\phi_1^{(1)}$ e $f_1^{(0)'}$, $f_1^{(0)}$, respectivamente, no quarto e quinto termos do lado direito da equação (4.3.9), integrando o quarto termo em relação a k e C_1 e reagrupando os termos semelhantes obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[-2 \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \left(\frac{15}{8} - \frac{5}{2} \beta C^2 + \frac{1}{2} \beta^2 C^4 \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \right. \\
 & \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi)^2 C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} \\
 & - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{m}{p k T} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{6}{35} \rho b \chi) C_{\langle i} C_{j \rangle} C_{k \rangle} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \\
 & + \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{12}{35} \rho b \chi) \left(\frac{7}{2} - \beta C^2 \right) C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \\
 & - \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \rho b \chi) \left(\frac{5}{2} - \beta C^2 \right) C_i \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \\
 & + \frac{4}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \left(\frac{5}{2} - \beta C^2 \right) C_i \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r \rangle} \\
 & - \frac{16}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{\rho T} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \beta C^2 \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{96}{25} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} C_i \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_r \rangle} \\
 & + \frac{16}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} C_i \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \left. \right] - \frac{a^2}{2} \int f_1^{(0)} f^{(0)} \left[\frac{m}{2 k T} \left((C^1)' \right)^2 \right. \\
 & \left. - (C^1)^2 \right] \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{k T} (C_r^1' - C_r^1) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_j} \left. \right] k_i k_j d\Gamma^* = \\
 & \int f_1^{(0)} f^{(0)} (\phi_1^{(2)'} + \phi^{(2)'} - \phi_1^{(2)} - \phi^{(2)}) d\Gamma^* . \tag{4.3.10}
 \end{aligned}$$

A solução geral $\phi^{(2)}$, da equação (4.3.10), será uma soma entre a solução da equação homogênea e uma combinação linear

dos segundos gradientes de densidade, velocidade e temperatura

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{\chi} A_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{\chi} B_{ij} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{\chi} D_{ijk} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} + \alpha_1 + \alpha_{2r} C_r + \alpha_3 C^2, \quad (4.3.11)$$

onde A_{ij} , B_{ij} , D_{ijk} , são funções tensoriais que dependem de C , ρ e T , enquanto α_1 e α_3 são duas funções escalares e α_{2r} é uma função vetorial e estas não dependem de C .

Substituindo a equação (4.3.11) na equação (4.3.10) e igualando os coeficientes de $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}$, obtemos equações integrais para A_{ij} , B_{ij} e D_{ijk} que são

$$\begin{aligned} I[A_{ij}] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[2\mu^I \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi)^2 \left(\frac{15}{8} - \frac{5}{2} \beta C^2 + \frac{1}{2} \beta^2 C^4 \right) \delta_{ij} \right. \\ & + \frac{3}{2} \mu^I \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi)^2 C_{\langle i} C_{j \rangle} - \frac{3}{2} \mu^I \frac{1}{\rho T} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \\ & \frac{12}{35} \rho b \chi) \left(\frac{7}{2} - \beta C^2 \right) C_{\langle i} C_{j \rangle} + \frac{16}{5} \mu^I \frac{1}{\rho T} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \beta C^2 \right) \delta_{ij} \\ & \left. \right] + \frac{a^2}{2} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{2kT^2} ((C^i)^2 - (C^i)^2) k_i k_j d\Gamma^*, \quad (4.3.12) \end{aligned}$$

$$I[B_{ij}] = -f^{(0)} \left[\frac{\mu^I}{\rho} \frac{1}{\chi} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) \right] C_{\langle i} C_{j \rangle}, \quad (4.3.13)$$

$$\begin{aligned} I[D_{ijk}] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\mu^I \frac{m}{\rho k T} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{6}{35} \rho b \chi) C_{\langle i} C_j C_{k \rangle} \right. \\ & \left. + \mu^I \frac{1}{\rho} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \rho b \chi) \left(\frac{5}{2} - \beta C^2 \right) C_{\langle i} C_{j \rangle} \delta_{ik} \delta_{j\epsilon} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \rangle - \frac{4}{5} \mu^I \frac{1}{p} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) \left[\frac{5}{2} \right. \\
& \left. - \beta c^2 \right] C_p \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jk} + \frac{1}{12} \delta_{ij} \delta_{kp} + \frac{1}{12} \delta_{ik} \delta_{jp} \right) \\
& - \frac{96}{25} \mu^I \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} C_p \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jk} + \frac{1}{12} \delta_{ij} \delta_{kp} + \frac{1}{12} \delta_{ik} \delta_{jp} \right) \\
& - \frac{16}{5} \mu^I \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} C_s \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{js} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \right) \left. \right] \\
& + \frac{a^2}{2} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{\kappa I} (C_i^1 - C_i^1) k_i k_j d\Gamma^* . \tag{4.3.14}
\end{aligned}$$

Se tomarmos a parte anti-simétrica da equação (4.3.12), obtemos

$$I[A_{(ij)}] = 0 , \tag{4.3.15}$$

onde $A_{(ij)} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji})$ representa a parte anti-simétrica do tensor A_{ij} . A equação (4.3.15) será satisfeita se $A_{(ij)} = 0$, assim podemos concluir que A_{ij} é um tensor simétrico.

A equação (4.3.13) também impõe determinadas restrições ao tensor B_{ij} . Se tomarmos o traço e a parte anti-simétrica da equação (4.2.13), obtemos

$$I[B_{rr}] = 0 , \tag{4.3.16}$$

$$I[B_{(ij)}] = 0 . \tag{4.3.17}$$

As equações (4.3.16) e (4.3.17) serão satisfeitas se $B_{rr} = 0$ e $B_{(ij)} = 0$, assim concluímos que B_{ij} é um tensor simétrico com traço nulo.

Usando novamente os teoremas de representação de funções escalares, vetoriais e tensoriais, podemos expressar a função tensorial simétrica A_{ij} , a função tensorial simétrica de traço nulo B_{ij} e a função tensorial D_{ijk} como

$$A_{ij} = A_1 \delta_{ij} + A_2 C_{\langle i} C_{j \rangle} , \quad (4.3.18)$$

$$B_{ij} = B C_{\langle i} C_{j \rangle} , \quad (4.3.19)$$

$$D_{ijk} = D_1 C_{\langle i} C_j C_{k \rangle} + D_2 C_i \delta_{jk} + D_3 C_j \delta_{ik} + D_4 C_k \delta_{ij} , \quad (4.3.20)$$

onde A_1 , A_2 , B , D_1 , D_2 , D_3 e D_4 são funções escalares que dependem de C^2 , ρ e T .

Substituindo (4.3.18), (4.3.19) e (4.3.20) na solução geral (4.3.11), temos

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & -\frac{1}{\chi} \left[A_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + A_2 C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + B C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ & + D_1 C_{\langle i} C_j C_{k \rangle} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} + D_2 C_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_r \partial x_r} + D_3 C_j \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j \partial x_r} \\ & \left. + D_4 C_k \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r \partial x_k} \right] + \alpha_1 + \alpha_{2r} C_r + \alpha_3 C^2 . \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

As constantes α_1 , α_{2r} e α_3 podem ser escolhidas tal que $\phi^{(2)}$ satisfaça a equação

$$\int \psi f^{(0)} \phi^{(2)} dc = 0 . \quad (4.3.22)$$

Se tomarmos $\psi = m$, mc_i e $\frac{1}{2} mc^2$ e integrarmos, obtemos, respectivamente,

$$-\frac{m}{\chi} \int A_1 f^{(0)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} dc + \rho \alpha_1 + 3 p \alpha_3 = 0, \quad (4.3.23)$$

$$\frac{m}{\chi} \int (D_2 C_i \delta_{jk} + D_3 C_j \delta_{ik} + D_4 C_k \delta_{ij}) C_s \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} f^{(0)} dc = p \alpha_{2s}, \quad (4.3.24)$$

$$-\frac{m}{2\chi} \int A_1 f^{(0)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} C^2 dc + \frac{3}{2} p \alpha_1 + \frac{15}{2} p \frac{kT}{m} \alpha_3 = 0. \quad (4.3.25)$$

Pelas equações (4.3.23), (4.3.24) e (4.3.25) devemos ter

$$\alpha_1 = \frac{1}{\chi} \xi_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (4.3.26)$$

$$\alpha_{2r} = \frac{1}{\chi} (\xi_1 \delta_{ij} \delta_{kr} + \xi_2 \delta_{ik} \delta_{jr} + \xi_3 \delta_{ir} \delta_{jk}) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (4.3.27)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\chi} \xi_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.3.28)$$

e a equação (4.3.21) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & -\frac{1}{\chi} \left[A_1^* \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + A_2 C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + B C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ & + D_1 C_{\langle i} C_j C_{k \rangle} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} + D_2^* C_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_r \partial x_r} + D_3^* C_j \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j \partial x_r} \\ & \left. + D_4^* C_k \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r \partial x_k} \right], \quad (4.3.29) \end{aligned}$$

onde:

$$A_1^* = A_1 - \xi_1 - \xi_3 C^2, \quad (4.3.30)$$

$$D_2^* = D_2 - \zeta_3, \quad (4.3.31)$$

$$D_3^* = D_3 - \zeta_2, \quad (4.3.32)$$

$$D_4^* = D_4 - \zeta_1. \quad (4.3.33)$$

Os coeficientes A_1^* , A_2 , B , D_1 , D_2^* , D_3^* e D_4^* são obtidos através da solução das equações integrais (4.3.12), (4.3.13) e (4.3.14), ou seja,

$$\begin{aligned} I[A_1^*] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[2\mu^I \frac{1}{\rho T} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right)^2 S_{1/2}^{(2)} + \frac{16}{5} \mu^I \frac{1}{\rho T} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} S_{1/2}^{(1)} \right] \\ & + \frac{a^2}{6} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{2kT^2} \left((c^{1'})^2 - (c^1)^2 \right) d\Gamma^*, \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} I[A_2 C_{\langle i} C_{j \rangle}] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\frac{3}{2} \mu^I \frac{1}{\rho T} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right)^2 S_{5/2}^{(0)} - \frac{3}{2} \mu^I \frac{1}{\rho T} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{12}{35} \rho b \chi\right) S_{5/2}^{(1)} \right] C_{\langle i} C_{j \rangle} \\ & + \frac{a^2}{2} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{2kT^2} \left((c^{1'})^2 - (c^1)^2 \right) k_{\langle i} k_{j \rangle} d\Gamma^*, \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

$$I[B C_{\langle i} C_{j \rangle}] = -\frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\mu^I \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) S_{5/2}^{(0)} \right] C_{\langle i} C_{j \rangle}, \quad (4.3.36)$$

$$\begin{aligned} I[D_1 C_{\langle i} C_{j} C_{k \rangle}] = & \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\mu^I \frac{m}{\rho k T} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{6}{35} \rho b \chi\right) S_{7/2}^{(0)} \right. \\ & \left. \right] C_{\langle i} C_{j} C_{k \rangle} - \frac{a^2}{2} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{kT} k_{\langle i} k_{j} k_{k \rangle} (g \cdot k) d\Gamma^*, \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

$$\begin{aligned}
I [D_2^* C_i \delta_{jk} + D_3^* C_j \delta_{ik} + D_4^* C_k \delta_{ij}] &= \frac{1}{\chi} f^{(0)} \left[\mu^I \frac{1}{p} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \right. \\
&+ \rho b \chi) S_{3/2}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{js} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \right) - \frac{4}{5} \mu^I \frac{1}{p} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) \\
&(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) S_{3/2}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \delta_{is} \delta_{jk} + \frac{1}{12} \delta_{ij} \delta_{ks} + \frac{1}{12} \delta_{ik} \delta_{js} \right) \\
&- \frac{96}{25} \mu^I \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{is} \delta_{jk} + \frac{1}{12} \delta_{ij} \delta_{ks} + \frac{1}{12} \delta_{ik} \delta_{js} \right) \\
&- \left. \frac{16}{5} \mu^I \frac{1}{p} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{js} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \right) \right] C_s - \\
\frac{a^2}{10} \chi \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{kT} (k_i \delta_{jk} + k_j \delta_{ik} + k_k \delta_{ij}) (g \cdot k) d\Gamma^* , & \quad (4.3.38)
\end{aligned}$$

onde a equação (4.3.38) representa um sistema de equações para os coeficientes D_2^* , D_3^* e D_4^* .

De acordo com as equações (4.3.34), (4.3.35), (4.3.36), (4.3.37) e (4.3.38) os coeficientes A_1^* , A_2 , B , D_1 , D_2^* , D_3^* e D_4^* podem ser escritos como uma expansão em séries de polinômios de Sonine, da seguinte forma :

$$A_1^* = \beta \sum_{r=0}^{\alpha} a_{1r} S_{1/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.39)$$

$$A_2 = \beta \sum_{r=0}^{\alpha} a_{2r} S_{5/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.40)$$

$$B = \beta \sum_{r=0}^{\alpha} b_r S_{5/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.41)$$

$$D_1 = -\beta \sum_{r=0}^{\alpha} d_{1r} S_{7/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.42)$$

$$D_2^* = -\beta \sum_{r=0}^{\alpha} d_{2r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.43)$$

$$D_3^* = -\beta \sum_{r=0}^{\alpha} d_{3r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) , \quad (4.3.44)$$

$$D_4^* = -\beta \sum_{r=0}^{\alpha} d_{4r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) . \quad (4.3.45)$$

O coeficiente A_1 deve satisfazer as equações (4.3.22) e (4.3.24), enquanto que os coeficientes D_2 , D_3 e D_4 devem satisfazer a equação (4.3.23). Concluimos então que

$$-\frac{m}{\chi} \int A_1^* f^{(0)} dc = 0 , \quad (4.3.46)$$

$$-\frac{m}{\chi} \int A_1^* f^{(0)} C^2 dc = 0 , \quad (4.3.47)$$

$$\frac{m}{\chi} \int \left[D_2^* C_i C_s \delta_{jk} + D_3^* C_j C_s \delta_{ik} + D_4^* C_k C_s \delta_{ij} \right] f^{(0)} dc = 0 . \quad (4.3.48)$$

Substituindo as equações (4.3.39), (4.3.43), (4.3.44) e (4.3.45) nas equações (4.3.46), (4.3.47) e (4.3.48), podemos concluir que

$$a_{10} = 0 , \quad (4.3.48)$$

$$a_{11} = 0 , \quad (4.3.49)$$

$$d_{20} = d_{30} = d_{40} = 0 \quad (4.3.50)$$

e que os coeficientes A_1^* , D_2^* , D_3^* e D_4^* passam a ser escritos como :

$$A_1^* = \beta \sum_{r=2}^{\alpha} a_{1r} S_{1/2}^{(r)}(\beta C^2) \quad (4.3.51)$$

$$D_2^* = -\beta \sum_{r=1}^{\alpha} d_{2r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) \quad (4.3.52)$$

$$D_3^* = -\beta \sum_{r=1}^{\alpha} d_{3r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) \quad (4.3.53)$$

$$D_4^* = -\beta \sum_{r=1}^{\alpha} d_{4r} S_{3/2}^{(r)}(\beta C^2) \quad (4.3.54)$$

A partir das equações (4.3.35), (4.3.36) e (4.3.38) iremos determinar os coeficientes a_{2r} , b_r , d_{2r} , d_{3r} e d_{4r} . Os coeficientes a_{1r} e d_{1r} não interessam no cálculo dos coeficientes de transporte. Inserindo (4.3.40) em (4.3.35), multiplicando por $\beta^2 S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i} C_{j \rangle}$ e integrando em relação à C , temos

$$\begin{aligned} & \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pTm} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi)^2 \delta_{0s} - \frac{105}{8} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pTm} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \frac{12}{35} \rho b \chi) \delta_{1s} \\ & + \frac{a^2}{2} \chi \beta^2 \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{2kT^2} ((C^{1'})^2 - (C^1)^2) S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i} C_{j \rangle} k_{\langle i} k_{j \rangle} d\Gamma = \\ & \sum_{r=0}^{\alpha} \alpha_{rs} a_{2r} \quad (4.3.55) \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_{rs} = \beta^3 \int S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i} C_{j \rangle} I [S_{5/2}^{(r)} C_{\langle i} C_{j \rangle}] dC \quad (4.3.56)$$

Da mesma forma, inserindo (4.3.41) em (4.3.36), multiplicando por $\beta^3 S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i j \rangle}$ e integrando em relação à C , temos

$$-\frac{5}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm^2} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \delta_{0s} = \sum_{r=0}^{\alpha} \beta_{rs} b_r, \quad (4.3.57)$$

onde

$$\beta_{rs} = \beta^3 \int S_{5/2}^{(s)} C_{\langle i j \rangle} I[S_{5/2}^{(r)} C_{\langle i j \rangle}] dC. \quad (4.3.58)$$

Inserindo (4.3.52), (4.3.53) e (4.3.54) em (4.3.38), fazendo $j = k$, $i = k$ e $i = j$, multiplicando respectivamente cada equação por $\beta S_{3/2}^{(s)} C_i$, $\beta S_{3/2}^{(s)} C_j$ e $\beta S_{3/2}^{(s)} C_k$ e integrando em relação à C obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) (1 + \rho b \chi) \delta_{1s} - 5 \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) \delta_{1s} - \frac{72}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \delta_{0s} - \frac{a^2}{2} \chi \beta \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{kT} S_{3/2}^{(s)} C_i k_i \\ (g \cdot k) d\Gamma &= \sum_{r=1}^{\alpha} \gamma_{rs} (3d_{2r} + d_{3r} + d_{4r}), \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{15}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) (1 + \rho b \chi) \delta_{1s} - \frac{5}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) \delta_{1s} - \frac{72}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \delta_{0s} - \frac{a^2}{2} \chi \beta \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{m}{kT} S_{3/2}^{(s)} C_j k_j \\ (g \cdot k) d\Gamma &= \sum_{r=1}^{\alpha} \gamma_{rs} (d_{2r} + 3d_{3r} + d_{4r}), \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{15}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi) (1 + \rho b \chi) \delta_{1s} - \frac{5}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) (1 + \\
& + \frac{3}{5} \rho b \chi) \delta_{1s} - \frac{72}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \delta_{0s} - \frac{a^2}{2} \chi B \int f_1^{(0)} f^{(0)} \frac{\pi}{kT} S_{3/2}^{(s)} C_k k_k \\
& (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) d\Gamma = \sum_{r=1}^{\alpha} \gamma_{rs} (d_{2r} + d_{3r} + 3d_{4r}) , \quad (4.3.61)
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma_{rs} = - \beta^2 \int S_{3/2}^{(s)} C_p I [S_{3/2}^{(r)} C_p] dC . \quad (4.3.62)$$

As equações (4.3.55) e (4.3.57) representam um sistema infinito de equações algébricas para os coeficientes a_{2r} e b_r , respectivamente. Já as equações (4.3.59), (4.3.60) e (4.3.61) representam sistemas infinitos de equações algébricas para os coeficientes d_{2r} , d_{3r} e d_{4r} .

Somente os coeficientes a_{20} , b_0 , d_{21} , d_{31} e d_{41} interessam no cálculo dos coeficientes de transporte. Estes coeficientes são obtidos a partir do sistema de equações (4.3.55), (4.3.57), (4.3.59), (4.3.60) e (4.3.61) com base no mesmo método de aproximações sucessivas visto na seção anterior. Iremos também considerar somente a primeira aproximação para estes coeficientes dada por :

$$a_{20} = \left[\frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pTm} (1 + \frac{3}{5} \rho b \chi)^2 + \frac{24}{5} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pTm} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \frac{1}{\alpha_{00}} , \quad (4.3.63)$$

$$b_0 = - \frac{5}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{mp^2} (1 + \frac{2}{5} \rho b \chi) \frac{1}{\beta_{00}} , \quad (4.3.64)$$

$$d_{21} = \frac{3}{2} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left[\left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) + \frac{12}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \frac{1}{\gamma_{11}}, \quad (4.3.65)$$

$$d_{31} = d_{41} = - \frac{15}{8} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{\rho}{pm} \left[\left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \rho b \chi\right) - \frac{2}{15} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi\right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right) - \frac{48}{125} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \frac{1}{\gamma_{11}}. \quad (4.3.66)$$

As integrais α_{00} , β_{00} e γ_{11} são definidas como

$$\alpha_{00} = \beta^3 \int S_{5/2}^{(0)} C_{ij} C_{ij} I[S_{5/2}^{(0)} C_{ij} C_{ij}] dC, \quad (4.3.67)$$

$$\beta_{00} = \beta^3 \int S_{5/2}^{(0)} C_{ij} C_{ij} I[S_{5/2}^{(0)} C_{ij} C_{ij}] dC, \quad (4.3.68)$$

$$\gamma_{11} = - \beta^2 \int S_{3/2}^{(1)} C_r I[S_{3/2}^{(1)} C_r] dC \quad (4.3.69)$$

e valem

$$\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{11} = - \frac{5}{4} \frac{1}{\mu^I} \frac{\rho \rho}{Tk}. \quad (4.3.70)$$

O cálculo das integrais α_{00} , β_{00} e γ_{11} segue o mesmo procedimento desenvolvido na seção anterior.

Substituindo α_{00} , β_{00} e γ_{11} nas equações (4.3.63), (4.3.64), (4.3.65) e (4.3.66), obtemos

$$a_{20} = - 3 \left[\frac{\mu^I}{p} \right]^2 \frac{1}{\chi} \frac{k}{m} \left[\left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi\right)^2 + \frac{32}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right], \quad (4.3.71)$$

$$b_o = 2 (\mu^I)^2 \frac{1}{(p)^3} \frac{1}{\chi} \frac{kT}{m} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right), \quad (4.3.72)$$

$$d_{21} = - \frac{6}{5} \left[\left(\frac{\mu^I}{p} \right)^2 \frac{1}{\chi} \frac{kT}{m} \left[\left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) + \frac{12}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \right], \quad (4.3.73)$$

$$d_{31} = d_{41} = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\mu^I}{p} \right)^2 \frac{1}{\chi} \frac{kT}{m} \left[\left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(1 + \rho b \chi \right) - \frac{2}{15} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) - \frac{48}{125} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \right]. \quad (4.3.74)$$

Substituindo a_{20} , b_o , d_{21} , d_{31} e d_{41} em (4.3.40), (4.3.41), (4.3.52), (4.3.53) e (4.3.54) e estas em (4.3.29), determinamos a expressão final para $\phi^{(2)}$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{Tp^2} \left[\left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right)^2 + \frac{32}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ & - \left[\left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{(p)^3} \left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) C_{\langle i} C_{j \rangle} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{p^2} \left[\left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \left(1 + \rho b \chi \right) - \frac{8}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \left[\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right] C_i \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} \right. \right. \\ & - \frac{6}{5} \left[\left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{p^2} \left[\left(1 + \frac{2}{5} \rho b \chi \right) \left(1 + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) + \frac{12}{25} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \right] \left[\frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right] C_i \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_{r \rangle}} \right. \\ & \left. \left. - \frac{mC^2}{2kT} \right] C_i \frac{\partial^2 v_{\langle i}}{\partial x_r \partial x_{r \rangle}} \right]. \quad (4.3.75) \end{aligned}$$

IV.4 - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Podemos determinar o tensor pressão total e o fluxo de calor total na aproximação de Burnett, substituindo $f = f^{(0)}(1 + \phi^{(1)} + \phi^{(2)})$ nos termos constitutivos p_{ij} , p_{ij}^I , p_{ij}^{II} , q_i , q_i^I e q_i^{II} , dados pelas equações (3.1.3), (3.1.34), (3.2.10), (3.1.4), (3.1.35) e (3.2.11).

Sendo assim, após a integração, obtemos o tensor pressão total e o fluxo de calor total dados por

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^* = & p (1 + \rho b \chi) \delta_{ij} - 2 \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{4}{25} + \frac{48}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \\
 & - \eta \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \delta_{ij} - 2 \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{14}{5} \rho b \chi + \frac{44}{25} \rho^2 b^2 \chi^2 + \left[\frac{40}{125} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{192}{125\pi} \right] \rho^3 b^3 \chi^3 + \rho^2 b \left[1 + \frac{4}{5} \rho b \chi + \left[\frac{20}{125} - \frac{24}{125\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right. \\
 & \left. \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho T} \left(1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left[\frac{15}{25} + \frac{132}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right. \\
 & \left. + \left[\frac{14}{125} + \frac{492}{125\pi} \right] \rho^3 b^3 \chi^3 \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\langle i} \partial x_{j \rangle}} + \frac{64}{25} \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(\right. \\
 & \left. \rho b \chi + \frac{1}{8} \rho^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} + \frac{6}{5} \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho T} \frac{\rho^2 b^2 \chi^2}{\pi} \left(1 \right. \\
 & \left. + \frac{3}{5} \rho b \chi \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} \delta_{ij} , \tag{4.4.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_i^* = & - \frac{\lambda^I}{\chi} \left(1 + \frac{6}{5} \rho b \chi + \left[\frac{9}{25} + \frac{32}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \\
 & + 3 \left[\frac{\mu^I}{\chi} \right]^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{8}{5} \rho b \chi + \left[\frac{21}{25} + \frac{44}{25\pi} \right] \rho^2 b^2 \chi^2 + \left[\frac{18}{125} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{124}{125\pi} \left. \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \left. \right) \frac{\partial^2 v_{<i}}{\partial x_r \partial x_r} - \frac{15}{4} \left(\frac{\mu^I}{\mu} \right)^2 \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{11}{5} \rho b \chi + \left(\frac{39}{25} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{8}{25\pi} \right) \rho^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{45}{125} - \frac{40}{125\pi} \right) \rho^3 b^3 \chi^3 \right) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_r} . \quad (4.4.2)
\end{aligned}$$

As equações (4.4.1) e (4.4.2) são iguais as equações (3.2.20) e (3.2.21), mostrando que os resultados obtidos pelo método dos momentos de Grad são os mesmos obtidos pelo método de Chapman-Enskog.

V - PROPAGAÇÃO DE ONDAS HARMÔNICAS PLANAS

V.1 - TEORIA DE BURNETT

Para o sistema de equações diferenciais parciais (3.2.24) a (3.2.26) estamos buscando uma solução correspondente à propagação de ondas harmônicas planas longitudinais de pequena amplitude.

Estas ondas são definidas de tal forma que, no equilíbrio

$$\rho_0 = \text{constante} , \quad (5.1.1)$$

$$T_0 = \text{constante} , \quad (5.1.2)$$

$$v_i^0 = 0 \quad (5.1.3)$$

e fora do equilíbrio

$$\rho = \rho_0 + \bar{\rho} e^{i(\omega t - k^c x)} , \quad (5.1.4)$$

$$T = T_0 + \bar{T} e^{i(\omega t - k^c x)} , \quad (5.1.5)$$

$$v_x = \bar{v} e^{i(\omega t - k^c x)} . \quad (5.1.6)$$

Estamos considerando apenas o caso uni-dimensional com a propagação de onda na direção do eixo x, o que não provoca perda

de generalidade. Nas equações (5.1.4), (5.1.5) e (5.1.6), as amplitudes $\bar{\rho}$, \bar{T} e \bar{v} são consideradas pequenas, sendo desprezável o produto entre duas (ou mais) delas. A frequência da onda é representada por w ($w > 0$), e o número de onda por $k^c = k^r + ik^i$, onde $k^r > 0$ e $\alpha = -k^i$ é o coeficiente de atenuação.

A velocidade de fase é dada por

$$v = w (k^r)^{-1} . \quad (5.1.7)$$

Inserindo as equações (5.1.4), (5.1.5) e (5.1.6) nas equações (3.2.24), (3.2.25) e (3.2.26), obtemos o seguinte sistema de equações lineares homogêneas para as amplitudes $\bar{\rho}$, \bar{v} e \bar{T}

$$w\bar{\rho} - k^c \rho_o \bar{v} = 0 , \quad (5.1.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k^T}{m} \rho_o \left(1 + 2\rho_o b\chi + \rho_o^2 b \frac{\partial \chi}{\partial \rho_o} \right) k^c + \frac{4}{3} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho_o} \left(1 + \frac{14}{5} \rho_o b\chi \right. \right. \\ & + \frac{44}{25} \rho_o^2 b^2 \chi^2 + \left. \left. \left[\frac{40}{125} - \frac{432}{125\pi} \right] \rho_o^3 b^3 \chi^3 + \rho_o^2 b \left[1 + \frac{4}{5} \rho_o b\chi + \left[\frac{20}{125} \right. \right. \right. \\ & - \left. \left. \left. \frac{54}{125\pi} \right] \rho_o^2 b^2 \chi^2 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \rho_o} \right] (k^c)^3 \bar{\rho} - \left[w\rho_o - i \frac{4}{3} \frac{\mu^I}{\chi} \left(1 + \frac{4}{5} \rho_o b\chi \right. \right. \\ & + \left. \left. \left[\frac{20}{125} + \frac{108}{125\pi} \right] \rho_o^2 b^2 \chi^2 \right) (k^c)^2 \right] \bar{v} + \left[\rho_o \frac{k}{m} (1 + \rho_o b\chi) k^c \right. \\ & - \left. \frac{2}{3} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho_o T_o} \left(1 + \frac{6}{5} \rho_o b\chi + \left[\frac{15}{25} + \frac{177}{25\pi} \right] \rho_o^2 b^2 \chi^2 + \left[\frac{14}{125} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \frac{867}{125\pi} \right] \rho_o^3 b^3 \chi^3 \right) (k^c)^3 \right] \bar{T} = 0 , \quad (5.1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_0 \frac{k}{m} T_0 (1 + \rho_0 b \chi) k^c + \frac{7}{4} \left(\frac{\mu^I}{\chi} \right)^2 \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{101}{35} \rho_0 b \chi + \left[\frac{417}{175} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{472}{175\pi} \right) \rho_0^2 b^2 \chi^2 + \left(\frac{531}{875} - \frac{1096}{875\pi} \right) \rho_0^3 b^3 \chi^3 \right] (k^c)^3 \right] \bar{v} - \left[\frac{3}{2} \rho_0 \frac{k}{m} w \right. \\
& \left. + i \frac{15}{4} \frac{\mu^I}{\chi} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{6}{5} \rho_0 b \chi + \left[\frac{9}{25} + \frac{32}{25\pi} \right] \rho_0^2 b^2 \chi^2 \right) (k^c)^2 \right] \bar{T} = 0. \quad (5.1.10)
\end{aligned}$$

Este sistema admite uma solução não trivial somente se o determinante correspondente for nulo. Esta solução fornece uma relação entre a frequência w e o número de onda k^c chamada de relação de dispersão:

$$(Ar^{-4} + iBr^{-3})\Gamma^6 - (Cr^{-2} - iDr^{-1})\Gamma^4 - (E + iFr^{-1})\Gamma^2 + 1 = 0, \quad (5.1.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
A = & \frac{105}{(16)^4} \frac{1}{(\chi)^4} \left[1 + \frac{126}{105} \rho_0^* \chi + \left(\frac{63}{105} + \frac{3717}{525\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^2 + \left(\frac{294}{525} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{18207}{2625\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^3 \right] \left[1 + \frac{101}{35} \rho_0^* \chi + \left(\frac{417}{175} - \frac{472}{175\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{531}{875} - \frac{1096}{875\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^3 \right], \quad (5.1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{45}{2048} \frac{1}{(\chi)^3} \left[1 + \frac{54}{45} \rho_0^* \chi + \left(\frac{81}{225} + \frac{288}{225\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^2 \right] \left[1 + \frac{14}{5} \rho_0^* \chi \right. \\
& \left. + \frac{44}{25} (\rho_0^* \chi)^2 + \left(\frac{40}{125} - \frac{432}{125\pi} \right) (\rho_0^* \chi)^3 + (\rho_0^* \chi)^2 \left(1 + \frac{4}{5} \rho_0^* \chi + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{20}{125} - \frac{54}{125\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \left] \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.1.13)$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{(\chi)^2} \left[\frac{15}{128} \left[1 + \frac{4}{5} \rho_0^* \chi + \left[\frac{4}{25} + \frac{108}{25\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \right] \left[1 + \frac{6}{5} \rho_0^* \chi \right. \right. \\ & + \left. \left. \left[\frac{9}{25} + \frac{32}{25\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \right] + \frac{21}{512} \left[1 + \rho_0^* \chi \right] \left[1 + \frac{101}{35} \rho_0^* \chi \right. \right. \\ & + \left. \left. \left[\frac{417}{175} - \frac{472}{175\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 + \left[\frac{531}{875} + \frac{1096}{875\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^3 \right] - \frac{1}{64} \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \left. \rho_0^* \chi \right] \left[1 + \frac{6}{5} \rho_0^* \chi + \left[\frac{15}{25} + \frac{177}{25\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 + \left[\frac{14}{125} + \frac{867}{125\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^3 \right] \right. \\ & + \frac{3}{64} \left[1 + \frac{14}{5} \rho_0^* \chi + \frac{44}{25} (\rho_0^* \chi)^2 + \left[\frac{40}{125} - \frac{432}{125\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^3 \right. \\ & \left. \left. (\rho_0^* \chi)^2 \left[1 + \frac{4}{5} \rho_0^* \chi + \left[\frac{20}{125} - \frac{54}{125\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \right] \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right] \right], \quad (5.1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{9}{32} \frac{1}{\chi} \left[1 + 2\rho_0^* \chi + (\rho_0^* \chi)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right] \left[1 + \frac{6}{5} \rho_0^* \chi + \left[\frac{9}{25} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{32}{25\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \right], \quad (5.1.15) \end{aligned}$$

$$E = \frac{2}{5} \left[1 + \rho_0^* \chi \right]^2 + \frac{3}{5} \left[1 + 2\rho_0^* \chi + (\rho_0^* \chi)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.1.16)$$

$$F = \frac{23}{32} \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{122}{115} \rho_0^* \chi + \left[\frac{167}{575} + \frac{1344}{575\pi} \right] (\rho_0^* \chi)^2 \right]. \quad (5.1.17)$$

Nas equações acima $\Gamma = v_0 \frac{k^c}{w}$, $v_0 = \left[\frac{5kT}{3m} \right]^{1/2}$ é a velocidade adiabática do som para um gás monoatômico rarefeito, $r = \frac{3}{16} (v_0)^2 \rho_0 \frac{1}{w\mu}$ e $\rho_0^* = \rho_0 b$ é a densidade reduzida.

A velocidade de fase e o coeficiente de atenuação podem ser expressos em função da frequência w (ou do parâmetro r) a partir da relação de dispersão (5.1.11), uma vez que o fator χ seja conhecido.

O fator χ será expresso pela série

$$\chi = 1 + \frac{5}{8} \rho_o^* + 0,28695 (\rho_o^*)^2 + 0,1103 (\rho_o^*)^3 + 0,0386 (\rho_o^*)^4 + 0,0138 (\rho_o^*)^5 + \dots , \quad (5.1.18)$$

cujos coeficientes são os coeficientes viriais para esferas rígidas (veja apêndice B).

Utilizando o método dos aproximantes de Padé [11], podemos escrever o fator χ como

$$\chi = \frac{1 + 0,3519 \rho_o^* + 0,0867 (\rho_o^*)^2 + 0,1347 (\rho_o^*)^3}{1 - 0,2731 \rho_o^* - 0,0295 (\rho_o^*)^2} . \quad (5.1.19)$$

Uma solução aproximada para a relação de dispersão pode ser facilmente obtida, considerando-se Γ como uma expansão em potências de $\frac{1}{r}$, isto é ,

$$\Gamma = a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2} + a_3 r^{-3} + \dots , \quad (5.1.20)$$

sendo esta expansão válida para baixas frequências.

A inserção da expressão (5.1.20) na relação de dispersão (5.1.11), fornece as seguintes expressões para a velocidade de fase e coeficiente de atenuação, em função de $\frac{1}{r}$ e ρ_o^*

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_o} \left[\frac{1}{(E)}^{1/2} - \frac{1}{2(E)}^{3/2} \left[CE^2 + \frac{3}{4} F^2 E^2 + \frac{7}{4} D^2 - \frac{5}{2} DFE \right] \frac{1}{(r)^2} \right] , \quad (5.1.21)$$

$$\alpha = - \frac{w}{v_0} \left[\frac{1}{2(E)}^{5/2} \left(D - FE \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{2(E)}^{13/2} \left(BE^3 + \frac{5}{2} FCE^3 + \frac{5}{8} F^3E^3 - \frac{7}{2} CDE^2 - \frac{35}{8} F^2DE^2 + \frac{63}{8} FD^2E - \frac{33}{8} D^3 \right) \left(\frac{1}{r} \right)^3 \right]. \quad (5.1.22)$$

Podemos plotar $\frac{v_0^*}{v}$ e $\frac{\alpha v_0^*}{w}$ em função do parâmetro r e da densidade reduzida ρ_0^* , onde

$$v_0^* = v_0 \left[1 + 2\rho_0^* \chi + \frac{2}{5} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{3}{5} (\rho_0^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right] \quad (5.2.23)$$

é a velocidade adiabática do som no gás denso e pode ser obtida da equação (5.1.11) fazendo $w \rightarrow 0$.

A figura 1 mostra $\frac{v_0^*}{v}$ e $\frac{\alpha v_0^*}{w}$ versus o parâmetro r , para valores da densidade reduzida ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4. Quando r cresce (w decresce), a velocidade de fase v tende a velocidade adiabática do som v_0^* . Além disso, a razão v_0^*/v cresce com ρ_0^* .

A densidade reduzida $\rho_0^* = 0$ corresponde a um gás rarefeito, enquanto que $\rho_0^* = 0.4$ corresponde a uma densidade moderada de aproximadamente 650 amagat para o Hélio, 400 amagat para o neônio, 160 amagat para o argônio e 65 amagat para o xenônio [13].

V.2 - TEORIAS DE 13 CAMPOS E NAVIER-STOKES-FOURIER

Uma expressão genérica para a relação de dispersão nas teorias de 13 campos e Navier-Stokes-Fourier foi obtida em [11] e [12] sendo escrita como

$$(Ar^{-2} + iBr^{-1})\Gamma^4 + (C + iDr^{-1} + Er^{-2})\Gamma^2 + iFr^{-1} + Gr^{-2} - 1 = 0, \quad (5.2.1)$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G são dados por :

i) Teoria de 13 campos:

$$A = \frac{81}{512} \frac{1}{(\chi)^2} \left[1 + \frac{72}{27} \rho_0^* \chi + \frac{53}{25} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{66}{125} (\rho_0^* \chi)^3 + \frac{11}{15} \left[1 + \frac{6}{5} \rho_0^* \chi + \frac{9}{25} (\rho_0^* \chi)^2 \right] (\rho_0^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.2.2)$$

$$B = -\frac{9}{32} \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{16}{5} \rho_0^* \chi + \frac{69}{25} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{18}{25} (\rho_0^* \chi)^3 + \left[1 + \frac{6}{5} \rho_0^* \chi + \frac{9}{25} (\rho_0^* \chi)^2 \right] (\rho_0^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.2.3)$$

$$C = 1 + 2\rho_0^* \chi + \frac{2}{5} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{3}{5} (\rho_0^* \chi)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*}, \quad (5.2.4)$$

$$D = \frac{3}{2} \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{31}{20} \rho_0^* \chi + \frac{139}{400} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{5}{16} (\rho_0^* \chi)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.2.5)$$

$$E = -\frac{117}{256} \frac{1}{(\chi)^2} \left[1 + \frac{88}{65} \rho_0^* \chi + \frac{209}{650} (\rho_0^* \chi)^2 + \frac{5}{26} (\rho_0^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_0^*} \right], \quad (5.2.6)$$

$$F = -\frac{25}{32} \frac{1}{\chi}, \quad (5.2.7)$$

$$G = \frac{75}{512} \frac{1}{(\chi)^2} . \quad (5.2.8)$$

ii) Navier-Stokes-Fourier:

$$A = \frac{15}{128} \frac{1}{(\chi)^2} \left[1 + 2\rho_o^* \chi + \frac{37}{25} \left(1 + \frac{140}{37\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^2 + \frac{12}{25} \left(1 + \frac{194}{15\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^3 + \frac{36}{625} \left(1 + \frac{275}{9\pi} + \frac{96}{(\pi)^2} \right) (\rho_o^* \chi)^2 \right] , \quad (5.2.9)$$

$$B = - \frac{9}{32} \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{16}{5} \rho_o^* \chi + \frac{69}{25} \left(1 + \frac{32}{69\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^2 + \frac{18}{25} \left(1 + \frac{32}{9\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^3 + \left(1 + \frac{6}{5} \rho_o^* \chi + \frac{9}{25} \left(1 + \frac{32}{9\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^2 \right) (\rho_o^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_o^*} \right] \quad (5.2.10)$$

$$C = 1 + 2\rho_o^* \chi + \frac{2}{5} (\rho_o^* \chi)^2 + \frac{3}{5} (\rho_o^*)^2 \frac{\partial \chi^*}{\partial \rho_o^*} , \quad (5.2.11)$$

$$D = \frac{23}{32} \frac{1}{\chi} \left[1 + \frac{122}{115} \rho_o^* \chi + \frac{167}{575} \left(1 + \frac{1344}{176\pi} \right) (\rho_o^* \chi)^2 \right] , \quad (5.2.12)$$

$$E = F = G = 0 . \quad (5.2.13)$$

Inserindo agora a expressão (5.1.20) na relação de dispersão (5.2.1), obtemos as seguintes expressões para a velocidade de fase e coeficiente de atenuação, em função de $\frac{1}{r}$ e ρ_o^* , para as teorias de 13 campos e Navier-Stokes-Fourier:

i) Teoria de 13 campos

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \left[\frac{1}{(C)}^{1/2} - \frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{A}{(C)}^2 + \frac{7}{4} \frac{B^2}{(C)}^4 + \frac{5}{2} \frac{BD}{(C)}^3 + \frac{3}{2} \frac{BF}{(C)}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{D^2}{(C)}^2 - \frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2} \frac{DF}{C} + \frac{E}{C} + G \right] r^{-2} \right], \quad (5.2.14)$$

$$\alpha = \frac{w}{v_0} \left[\frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{B}{(C)}^2 + \frac{D}{C} + F \right] r^{-1} - \frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{7}{2} \frac{AB}{(C)}^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{2} \frac{AD}{(C)}^3 + \frac{3}{2} \frac{AF}{(C)}^2 + \frac{33}{8} \frac{B^3}{(C)}^6 + \frac{63}{8} \frac{DB^2}{(C)}^5 + \frac{35}{8} \frac{FB^2}{(C)}^4 + \frac{35}{8} \frac{BD^2}{(C)}^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} \frac{BF^2}{(C)}^2 + \frac{15}{4} \frac{BDF}{(C)}^3 + \frac{5}{2} \frac{BE}{(C)}^3 + \frac{3}{2} \frac{BG}{(C)}^2 + \frac{5}{2} \frac{D^3}{(C)}^3 - \frac{1}{8} \frac{DF^2}{C} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{3}{8} \frac{FD^2}{(C)}^2 + \frac{3}{2} \frac{DE}{(C)}^2 + \frac{1}{2} \frac{DG}{C} + \frac{1}{2} FE - \frac{1}{2} GF + \frac{1}{8} F^3 \right] r^{-3} \right]. \quad (5.2.15)$$

ii) Navier-Stokes-Fourier

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \left[\frac{1}{(C)}^{1/2} - \frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{A}{(C)}^2 + \frac{7}{4} \frac{B^2}{(C)}^4 + \frac{5}{2} \frac{BD}{(C)}^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{D^2}{(C)}^2 \right] r^{-2} \right], \quad (5.2.16)$$

$$\alpha = \frac{w}{v_0} \left[\frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{B}{(C)}^2 + \frac{D}{C} \right] r^{-1} - \frac{1}{2(C)}^{1/2} \left[\frac{7}{2} \frac{AB}{(C)}^4 + \frac{5}{2} \frac{AD}{(C)}^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{33}{8} \frac{B^3}{(C)}^6 + \frac{63}{8} \frac{DB^2}{(C)}^5 + \frac{35}{8} \frac{BD^2}{(C)}^4 + \frac{5}{8} \frac{D^3}{(C)}^3 \right] r^{-3} \right]. \quad (5.2.17)$$

Como já foi feito na seção anterior, podemos plotar $\frac{v_0^*}{v}$ e $\frac{\alpha v_0^*}{w}$ em função do parâmetro r e da densidade reduzida ρ_0^* , para estas duas teorias.

A figura 2 mostra $\frac{v_0^*}{v}$ e $\frac{\alpha v_0^*}{w}$ versus o parâmetro r , para valores de ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4, na teoria de 13 campos.

A figura 3 mostra $\frac{v_0^*}{v}$ e $\frac{\alpha v_0^*}{w}$ versus o parâmetro r , para valores de ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4, na teoria de Navier-Stokes-Fourier.

Comparando as três teorias, podemos concluir que a velocidade de fase apresenta praticamente o mesmo valor nas teorias de 13 campos e Burnett, sendo menor na teoria de Navier-Stokes-Fourier.

No caso de gases ideais para $r > 3,125$, onde as 3 teorias são praticamente indistinguíveis, os dados experimentais concordam com os valores calculados. Para $0,156 < r < 0,312$ a teoria de Burnett apresenta os melhores resultados [14].

Devido a falta de dados experimentais para gases densos não podemos fazer um comentário semelhante, mas o que se espera é um comportamento parecido.

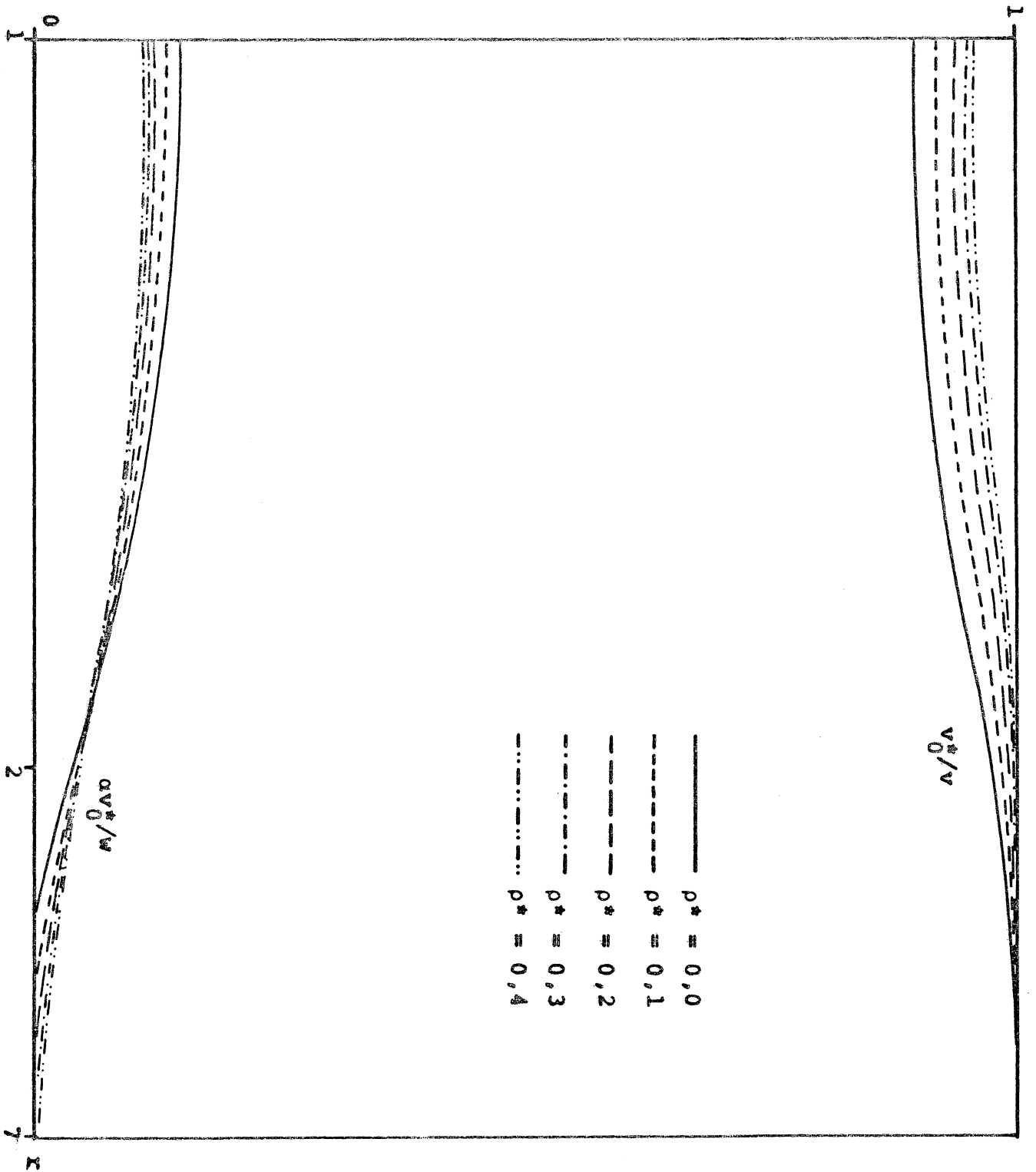


Figura 1 - Relação de Dispersão para Teoria de Burnett.

v_0^*/v e $\alpha v_0^*/w$ versus r para ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4.

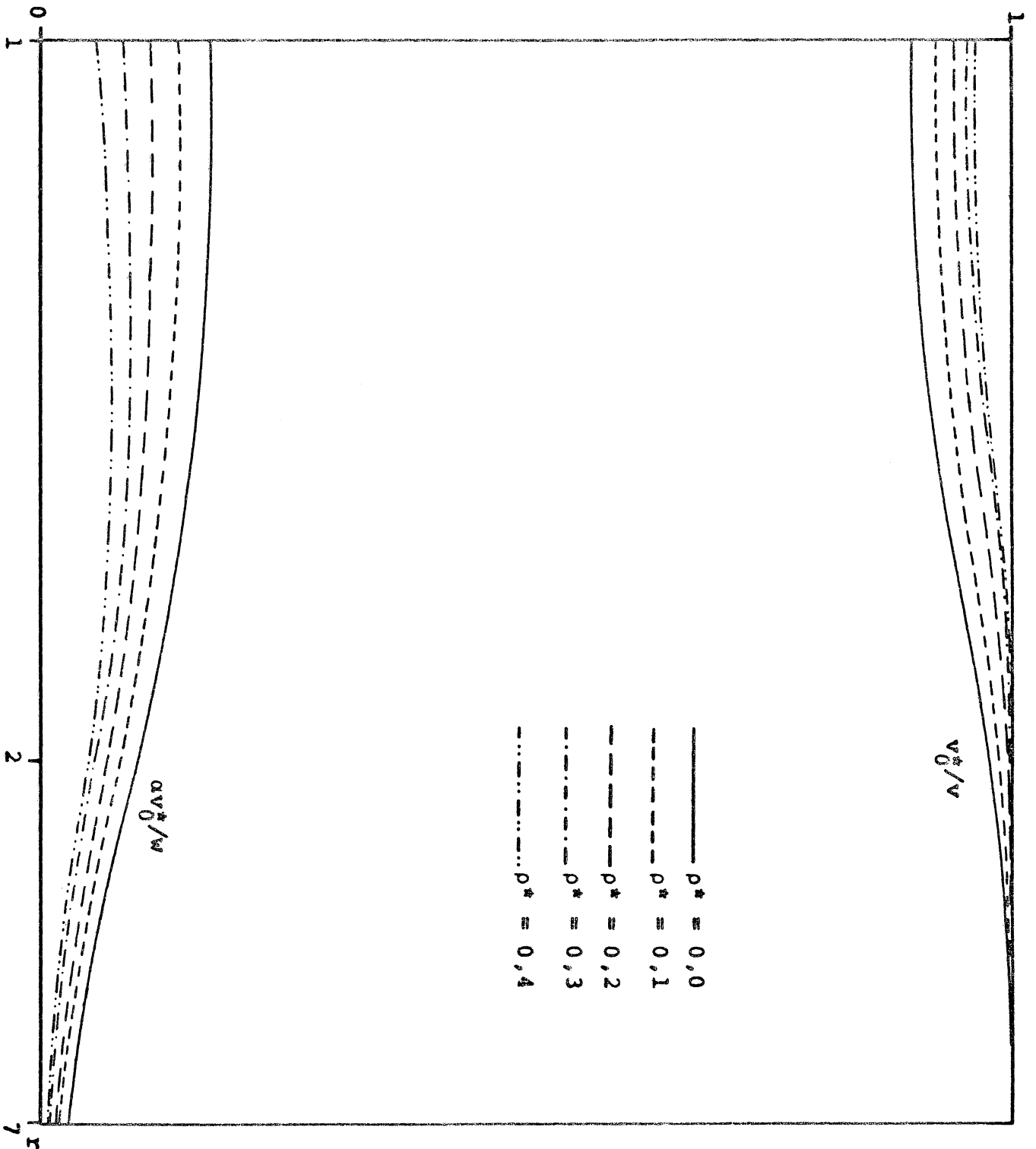


Figura 2 - Relação de Dispersão para Teoria de 13 Campos.

v_0^*/v e $\alpha v_0^*/w$ versus r para ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4.

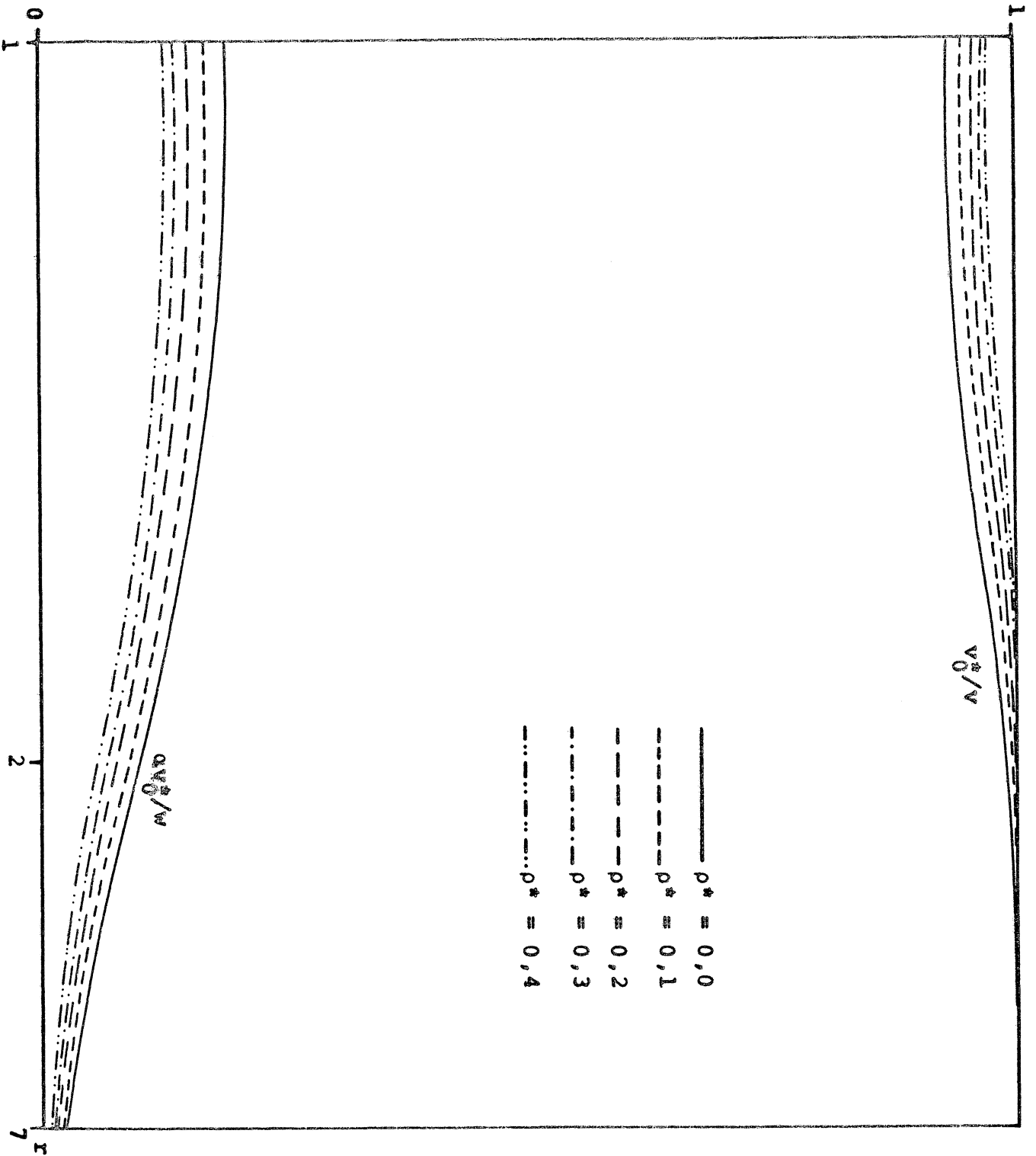


Figura 3 - Relação de Dispersão para Teoria Navier-Stokes-Fourier.
 v_0^*/v e $\alpha v_0^*/w$ versus r para ρ_0^* variando de 0.0 até 0.4.

VI - CONCLUSÃO

As equações (3.2.20) e (3.2.21) representam as equações linearizadas de Burnett para um gás monoatômico denso constituído de esferas rígidas. Verifica-se através da equação (3.2.20) que a pressão de um gás denso em repouso é constituída de duas contribuições. A primeira corresponde a uma pressão hidrostática, enquanto que a segunda é uma função dos segundos gradientes de temperatura e densidade. Para o caso de um gás ideal em repouso a segunda contribuição se anula.

A solução das teorias de Burnett, 13 Campos e Navier-Stokes-Fourier, correspondendo a uma propagação de ondas harmônicas planas de pequenas amplitudes, mostrou que os valores obtidos para as velocidades de fase nas três teorias concordam para baixas frequências.

Para gases ideais a teoria de Burnett é a que melhor concorda com os dados experimentais. Tal afirmação não pode ser feita para gases densos devido a falta de dados experimentais, mas o que se espera é um comportamento semelhante para esses gases.

APÊNDICE

A - DINÂMICA DE UMA COLISÃO BINÁRIA

Considere uma colisão entre duas partículas eletricamente neutras com massas m_α e m_β .

Se desprezarmos os efeitos das forças externas durante o curto período da colisão, as equações de movimento para as duas partículas que colidem podem ser escritas como

$$m_\alpha \ddot{x}_i^\alpha = - \frac{\partial \phi(|x^{\beta\alpha}|)}{\partial x_i^\alpha}, \quad (\text{A.1})$$

$$m_\beta \ddot{x}_i^\beta = - \frac{\partial \phi(|x^{\beta\alpha}|)}{\partial x_i^\beta}, \quad (\text{A.2})$$

onde x_i^α e x_i^β são os vetores de posição das duas partículas, enquanto que $x^{\beta\alpha} = x^\beta - x^\alpha$ é o vetor da posição relativa. O potencial de interação $\phi(|x^{\beta\alpha}|)$ é suposto esféricamente simétrico e de domínio limitado, isto é,

$$\lim_{|x^{\beta\alpha}| \rightarrow \infty} \phi(|x^{\beta\alpha}|) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Denotaremos por c_α e c_β as velocidades assintóticas pré-colisionais das duas partículas e por c'_α e c'_β suas velocidades assintóticas pós-colisionais. Além disso, definimos as velocidades

relativas assintóticas pré- e pós-colisionais respectivamente por

$$g_{\beta\alpha} = c_{\beta} - c_{\alpha} , \quad (\text{A.4})$$

$$g'_{\beta\alpha} = c'_{\beta} - c'_{\alpha} . \quad (\text{A.5})$$

A adição das equações (A.1) e (A.2) resulta em

$$m_{\alpha} \ddot{x}_i^{\alpha} + m_{\beta} \ddot{x}_i^{\beta} = 0 . \quad (\text{A.6})$$

Esta equação nos fornece, através de sua integração, a lei de conservação de momento linear, que para as velocidades assintóticas pré- e pós-colisionais, pode ser escrita como

$$m_{\alpha} c_{\alpha} + m_{\beta} c_{\beta} = m_{\alpha} c'_{\alpha} + m_{\beta} c'_{\beta} . \quad (\text{A.7})$$

Se multiplicarmos a equação (A.1) por $1/m_{\alpha}$ e a equação (A.2) por $1/m_{\beta}$ e as subtrairmos, obtemos

$$\mu_{\alpha\beta} \ddot{x}_{\beta\alpha} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta\alpha}} \frac{x_{\beta\alpha}}{x_{\beta\alpha}} , \quad (\text{A.8})$$

onde $\mu_{\alpha\beta} = m_{\alpha} m_{\beta} / (m_{\alpha} + m_{\beta})$ representa a massa reduzida.

A multiplicação escalar da equação (A.8) por $\dot{x}_{\beta\alpha}$ resulta em

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (\dot{x}_{\beta\alpha})^2 + \phi(x_{\beta\alpha}) \right] = 0 , \quad (\text{A.9})$$

enquanto que a sua multiplicação vetorial por $x_{\beta\alpha}$ nos fornece

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x}_{\beta\alpha} \times x_{\beta\alpha} \right] = 0 . \quad (\text{A.10})$$

As equações (A.9) e (A.10) expressam, respectivamente, a conservação de energia e momento linear durante a colisão.

Da integração da equação (A.9) durante a colisão e da equação (A.3) segue que

$$\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (\dot{x}_{\beta\alpha})^2 + \phi(x_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (g_{\beta\alpha})^2 = \frac{1}{2} \mu_{\beta\alpha} (g'_{\beta\alpha})^2 . \quad (\text{A.11})$$

Concluimos da equação (A.11) que os módulos das velocidades relativas assintóticas pré- e pós-colisionais são iguais, isto é,

$$g_{\beta\alpha} = g'_{\beta\alpha} . \quad (\text{A.12})$$

A equação (A.12) pode ser reescrita, com base na equação (A.7) da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} (c_{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m_{\beta} (c_{\beta})^2 = \frac{1}{2} m_{\alpha} (c'_{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m_{\beta} (c'_{\beta})^2 . \quad (\text{A.13})$$

Da integração da equação (A.11) obtemos

$$\mu_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha} \times x_{\beta\alpha} = \text{constante} . \quad (\text{A.14})$$

Concluimos então que o movimento relativo entre as partículas está confinado a um plano, representado pela Figura A.1.

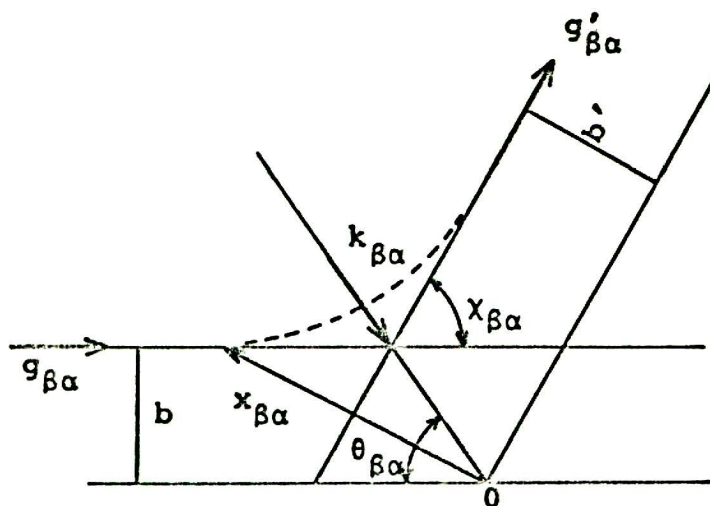


Figura A.1 - Colisão binária

Se projetarmos o vetor antes da colisão $x_{\beta\alpha}$ num plano perpendicular à $g_{\beta\alpha}$ e o vetor após a colisão $x'_{\beta\alpha}$ num plano perpendicular à $g'_{\beta\alpha}$ e denotarmos b e b' estas duas projeções, podemos escrever, a partir da equação (A.14), que

$$g_{\beta\alpha} b n = g'_{\beta\alpha} b' n, \quad (\text{A.15})$$

onde n é um vetor unitário perpendicular ao plano do movimento relativo. Segundo as equações (A.12) e (A.15) concluimos que $b' = b$, sendo b denominado de parâmetro de colisão.

Na Figura A.1 $k^{\beta\alpha}$ é um vetor unitário na direcção de $(g_{\beta\alpha} - g'_{\beta\alpha})$, denominado de vetor de colisão e $\chi_{\beta\alpha}$ é o ângulo de espalhamento.

O vetor de colisão $k^{\beta\alpha}$ bissecta o ângulo entre as velocidades relativas assintóticas

$$g_{\beta\alpha} \cdot k^{\beta\alpha} = -g'_{\beta\alpha} \cdot k^{\beta\alpha} \quad (\text{A.16})$$

segundo a equação (A.12). Conseqüentemente, podemos escrever

$$c'_{\beta} - c'_{\alpha} - (c_{\beta} - c_{\alpha}) = g'_{\beta\alpha} - g_{\beta\alpha} = k^{\beta\alpha} [k^{\beta\alpha} \cdot (g'_{\beta\alpha} - g_{\beta\alpha})] = \\ - 2 k^{\beta\alpha} (k^{\beta\alpha} \cdot g_{\beta\alpha}) . \quad (\text{A.17})$$

Se na equação (A.16) eliminarmos c'_{α} e c_{α} através da equação (A.7), obtemos

$$c'_{\beta} = c_{\beta} - \frac{2m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} k^{\beta\alpha} (k^{\beta\alpha} \cdot g_{\beta\alpha}) . \quad (\text{A.18})$$

Semelhantemente, podemos eliminar c'_{β} e c_{β} da equação (A.18) com base na equação (A.7) e obter

$$c'_{\alpha} = c_{\alpha} + \frac{2m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} k^{\beta\alpha} (k^{\beta\alpha} \cdot g_{\beta\alpha}) . \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.18) e (A.19) nos dão as velocidades assintóticas pós-colisionais em função das velocidades assintóticas pré-colisionais e do vetor de colisão $k^{\beta\alpha}$.

Da mesma maneira, poderíamos escrever as equações (A.18) e (A.19) como

$$c_{\beta} = c'_{\beta} - \frac{2m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} k^{\beta\alpha} (k^{\beta\alpha} \cdot g'_{\beta\alpha}) , \quad (\text{A.20})$$

$$c_{\alpha} = c'_{\alpha} - \frac{2m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} k^{\beta\alpha} (k^{\beta\alpha} \cdot g'_{\beta\alpha}) , \quad (\text{A.21})$$

que expressam as velocidades assintóticas pré-colisionais em termos das velocidades assintóticas pós-colisionais e do vetor de

colisão $k^{\beta\alpha}$.

À partir das equações (A.18) a (A.21) é fácil verificar que o módulo do Jacobiano da transformação de (c_α, c_β) em (c'_α, c'_β) e da transformação inversa são iguais a um, isto é,

$$|J| = \left| \frac{\partial(c_\alpha, c_\beta)}{\partial(c'_\alpha, c'_\beta)} \right| = \left| \frac{\partial(c'_\alpha, c'_\beta)}{\partial(c_\alpha, c_\beta)} \right| = 1. \quad (\text{A.22})$$

B - O FATOR χ

Quando a densidade do gás cresce, a equação de estado térmica desvia da equação de estado térmica de um gás ideal e pode ser expressa em termos de uma série de potências infinita na densidade ρ :

$$p = \frac{\rho kT}{m} (1 + B_2(T)\rho + B_3(T)\rho^2 + \dots). \quad (\text{B.1})$$

A equação (B.1) é chamada de equação de estado virial e as quantidades $B_2(T)$, $B_3(T)$,... são denominadas de segundo, terceiro,... coeficientes viriais. Os coeficientes viriais dependem da temperatura T e do tipo do gás, mas são independentes da densidade e da pressão.

Para o caso de gases constituídos de esferas rígidas, os seguintes coeficientes viriais foram determinados [8] e [9]:

$$B_2 = b = \frac{2}{3} \pi \frac{a^3}{m}, \quad B_3 = \frac{5}{8} b^2, \quad B_4 = 0,28695 b^3, \quad (\text{B.2})$$

$$B_5 = 0,1103 b^4, \quad B_6 = 0,0386 b^5, \quad B_7 = 0,0138 b^6.$$

Por outro lado, a equação de estado térmica pode ser

expressa em termos do fator χ como

$$p = \frac{\rho k T}{m} (1 + \rho b \chi) . \quad (\text{B.3})$$

Das equações (B.1), (B.2) e (B.3) concluímos que o fator χ pode ser escrito na forma :

$$\chi = 1 + \frac{5}{8} \rho_0^* + 0,28695 (\rho_0^*)^2 + 0,1103 (\rho_0^*)^3 + 0,0386 (\rho_0^*)^4 + \\ 0,0138 (\rho_0^*)^5 + \dots . \quad (\text{B.4})$$

C - CÁLCULO DAS INTEGRAIS

C.1 - FORMULÁRIO

No espaço vetorial tri-dimensional V , sendo c um vetor deste espaço, valem as seguintes expressões [10]:

$$\int c_i c_j f(c^2) dc = \frac{1}{3} \delta_{ij} \int c^2 f(c^2) dc , \quad (\text{C.1})$$

$$\int c_i c_j c_r c_s f(c^2) dc = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \int c^4 f(c^2) dc , \quad (\text{C.2})$$

$$\int c_i c_j c_r c_s c_p c_q f(c^2) dc = \frac{1}{105} (\delta_{ij} \delta_{rs} \delta_{pq} + \delta_{ij} \delta_{rq} \delta_{sp} + \delta_{ij} \delta_{rp} \delta_{sq} \\ + \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{pq} + \delta_{ir} \delta_{jp} \delta_{sq} + \delta_{ir} \delta_{jq} \delta_{sp} + \delta_{is} \delta_{jr} \delta_{pq} + \delta_{is} \delta_{jp} \delta_{rq} \\ + \delta_{is} \delta_{jq} \delta_{rp} + \delta_{ip} \delta_{rs} \delta_{jq} + \delta_{ip} \delta_{jr} \delta_{sq} + \delta_{ip} \delta_{rq} \delta_{js} + \delta_{iq} \delta_{rs} \delta_{jp} \\ + \delta_{iq} \delta_{jr} \delta_{sp} + \delta_{iq} \delta_{rp} \delta_{js}) \int c^6 f(c^2) dc . \quad (\text{C.3})$$

O valor das integrais definidas

$$\int_0^{\alpha} c^{2n} e^{-\alpha c^2} dc = \frac{\pi^{-1/2}}{2} (2n - 1)!! 2^{-n} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{2n+1}{2}}, \quad (C.4)$$

$$\int_0^{\alpha} c^{2n+1} e^{-\alpha c^2} dc = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n+1}, \quad (C.5)$$

pode ser encontrado em tabelas de integrais.

As seguintes formulas

$$\int (g \cdot k)^n dk = \frac{2\pi}{n+1} g^n, \quad (C.6)$$

$$\int k_i (g \cdot k)^n dk = \frac{2\pi}{n+2} g^{n-1} g_i, \quad (C.7)$$

$$\int k_i k_j (g \cdot k)^n dk = \frac{2\pi}{(n+1)(n+3)} g^{n-2} (g^2 \delta_{ij} + n g_i g_j), \quad (C.8)$$

$$\int k_i k_j k_k (g \cdot k)^n dk = \frac{2\pi}{(n+2)(n+4)} g^{n-3} \left[g^2 (g_i \delta_{jk} + g_j \delta_{ik} + g_k \delta_{ij}) + (n-1) g_i g_j g_k \right], \quad (C.9)$$

$$\int k_i k_j k_r k_s (g \cdot k)^n dk = \frac{2\pi}{(n+1)(n+3)(n+5)} g^{n-4} \left[g^4 (\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) + n g^2 (g_i g_j \delta_{rs} + g_i g_r \delta_{js} + g_i g_s \delta_{jr} + g_j g_r \delta_{is} + g_j g_s \delta_{ir} + g_r g_s \delta_{ij}) + (n-2) g_i g_j g_r g_s \right] \quad (C.10)$$

são válidas para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

C.2 - PROCEDIMENTO

Tendo em conta que a estrutura do cálculo é a mesma tanto para o cálculo dos momentos como para o cálculo das produções, mostraremos somente o desenvolvimento do cálculo da produção P_{ij} , dada pela equação (3.1.36).

Consideremos inicialmente que a velocidade relativa g e a velocidade do centro de massa G podem ser escritas em função da velocidade peculiar na forma

$$g_i = C_i^1 - C_i, \quad (C.11)$$

$$G_i = \frac{C_i^1 + C_i}{2}. \quad (C.12)$$

A partir destas duas equações podemos facilmente mostrar que

$$C_i = G_i - \frac{1}{2} g_i \quad (C.13)$$

e que o produto ff_1 , a partir das equações (3.1.40) e (C.13), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} ff_1 = & \left[\frac{\rho}{m} \right]^2 \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^3 \exp \left[- \frac{m}{kT} (G^2 + \frac{1}{4} g^2) \right] \left[1 + \frac{P_{\langle ij \rangle}}{2\rho} \left[\frac{m}{kT} \right]^2 \right. \\ & (2G_i G_j + \frac{1}{2} g_i g_j) + \frac{q_i}{\rho} \left[\frac{m}{kT} \right]^2 \left[\frac{2m}{5kT} G_i G^2 + \frac{m}{10kT} G_i g^2 - 2G_i \right. \\ & \left. \left. + \frac{m}{5kT} g_i g_r G_r \right] \right], \quad (C.14) \end{aligned}$$

onde os termos não lineares foram desprezados.

Da equação (A.19), concluímos que o produto $C'_i C'_j$ vale

$$C'_i C'_j = C_i C_j + C_i k_j (g \cdot k) + C_j k_i (g \cdot k) + k_i k_j (g \cdot k)^2. \quad (C.15)$$

Substituindo as equações (C.13), (C.14), (4.2.59) e (C.15) na equação (3.1.36), obtemos

$$P_{ij} = a^2 m \chi \int \left[\left(G_i - \frac{1}{2} g_i \right) k_j (g \cdot k) + \left(G_j - \frac{1}{2} g_j \right) k_i (g \cdot k) + k_i k_j (g \cdot k)^2 \right] \left[\frac{\rho}{m} \right]^2 \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^3 \exp \left[- \frac{m}{kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) \right] \left[1 + \frac{P_{\langle ij \rangle}}{2\rho} \left[\frac{m}{kT} \right]^2 \left(2G_i G_j + \frac{1}{2} g_i g_j \right) + \frac{q_i}{\rho} \left[\frac{m}{kT} \right]^2 \left[2G_i \left(\frac{m}{5kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) - 1 \right) + \frac{m}{5kT} G_r g_i g_r \right] \right] (g \cdot k) dk dg dG. \quad (C.16)$$

Integrando inicialmente esta equação em relação a k , utilizando para isto as equações (C.6) a (C.10), e a seguir fazendo as integrações finais, com auxílio das equações (C.1) a (C.5), obtemos

$$P_{ij} = \frac{16}{5} a^2 \chi \frac{\rho}{m} \left[\frac{kT}{m} \right]^{1/2} P_{\langle ij \rangle}. \quad (C.17)$$

Os fatores $f f_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{f}{f_1}$ e $f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}$ que serão utilizados no cálculo dos outros termos valem

$$f f_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{f}{f_1} = f^{(0)} f_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{f^{(0)}}{f_1^{(0)}} + f^{(0)} f_1^{(0)} \frac{\partial (\phi - \phi_1)}{\partial x_i}, \quad (C.18)$$

onde

$$f_1^{(0)} f_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{f_1^{(0)}}{f_1^{(0)}} = - \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \exp \left[- \frac{m}{kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) \right. \\ \left. \right] \frac{m}{kT} \left[g_r \frac{\partial v_r}{\partial x_i} + G_r g_r \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \quad (C.19)$$

e

$$f_1^{(0)} f_1^{(0)} \frac{\partial (\phi - \phi_1)}{\partial x_i} = - \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \exp \left[- \frac{m}{kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) \right. \\ \left. \right] \left[\frac{1}{2\rho} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 (G_r g_s + G_s g_r) \frac{\partial p_{\langle rs \rangle}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \left(\frac{m}{5kT} (G^2 g_r + 2G_r G_l g_l + \frac{1}{4} g^2 g_r) - g_r \right) \frac{\partial q_r}{\partial x_i} \right] \quad (C.20)$$

e

$$f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \exp \left[- \frac{m}{kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) \right. \\ \left. \right] \left[\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} - \left(3 - \frac{m}{kT} \left(G^2 + \frac{1}{4} g^2 \right) \right) \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ \left. + \frac{2m}{kT} G_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad (C.21)$$

onde os termos não lineares foram desprezados.

D - OS POLINÔMIOS DE SONINE

Como foi dito na seção IV. 2, a solução da equação de Boltzmann através do método de Chapman-Enskog requer a expansão dos coeficientes em séries de polinômios de Sonine $S_m^{(n)}(x)$. Estes estão relacionados com os polinômios associados de Laguerre

através de

$$S_m^{(n)}(x) = \frac{(-1)^m}{n+m!} L_{n+m}^{(m)}(x) . \quad (D.1)$$

Os polinômios associados de Laguerre apresentam uma fórmula geral dada por

$$L_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+m} \frac{(n!)^2}{(n-m-k)!(k+m)! k!} x^k . \quad (D.2)$$

Estes polinômios formam um conjunto de funções ortogonais com relação a função peso $e^{-x} x^m$ no intervalo $0 < x < \alpha$, isto é,

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^m L_n^{(m)}(x) L_p^{(m)}(x) dx = \frac{(n!)^2}{(n-m)!} \delta_{np} . \quad (D.3)$$

Portanto, os polinômios de Sonine apresentam uma fórmula geral e uma condição de ortogonalidade expressas, respectivamente, por

$$S_m^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-k)!(k+m)! k!} (-x)^k , \quad (D.4)$$

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^m S_m^{(n)}(x) S_m^{(p)}(x) dx = \frac{(n+m)!}{n!} \delta_{np} . \quad (D.5)$$

Como estamos interessados nos polinômios de Sonine de ordem n , índice $(l + \frac{1}{2})$ e variável βC^2 . As equações (D.4) e (D.5) ficam

$$S_{l+1/2}^{(n)}(\beta C^2) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{(n-k)! k! \Gamma(k+m+3/2)} (-\beta C^2)^k , \quad (D.6)$$

$$\int_0^{\alpha} e^{-\beta C^2} C^{2l+2} \beta^{l+3/2} S_{l+1/2}^{(n)}(\beta C^2) S_{l+1/2}^{(p)}(\beta C^2) dC = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{n!} \delta_{np},$$

(D.7)

onde $\Gamma(m + 1/2) = (2m - 1)!! 2^{-m} \pi^{1/2}$ é a função gama.

A partir da equação (D.6) podemos escrever os três primeiros polinômios de Sonine, que são:

$$S_{l+1/2}^{(0)} = 1, \quad (D.8)$$

$$S_{l+1/2}^{(1)} = l + \frac{3}{2} - \beta C^2, \quad (D.9)$$

$$S_{l+1/2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[l + \frac{5}{2} \right] \left[l + \frac{3}{2} \right] - \left[l + \frac{5}{2} \right] \beta C^2 + \frac{1}{2} \beta^2 C^4. \quad (D.10)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Enskog, D., " Kinetic Theory of Heat Conduction, Viscosity and Self-Diffusion in Compressed Gases and Liquids ". Translation by J. Kopp in " Kinetic Theory ", vol.3, 226-259, edited by S.G.Brush, Pergamon Press, New York (1972).
- [02] Burnett, D., "The Distribution of Molecular Velocities and the Mean Motion in a Non-Uniform Gas ". Proc. London Math. Soc., 40, 382-435 (1935).
- [03] Grad, H., " On the Kinetic Theory of Rarefied Gases ". Comum. Pure Appl. Math., 2, 331-407 (1949).
- [04] Chapman, S. & T.G. Cowling, " The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases ". Cambridge University Press, Cambridge (1970).
- [05] Kogan, M.N., "Rarefied Gas Dynamics ", Plenum Press, New York (1969)
- [06] E. Ikenberry and C. Truesdell, " On the Pressure and Flux of Energy in a Gas According to Maxwell' Kinetic Theory ", J. Rat. Mech. Anal. , 5, 1-54 (1956).

- [07] G.F. Smith, " On Isotropic Functions of Symmetrics Tensor, Skew-symmetrics Tensor and Vectors ", Int. J. Engng. Sci. , 9, 899-916 (1971).
- [08] Ree, F.H. & W.G. Hoover, " Fifth and Sixth Virial Coefficientes for Hard Spheres and Hard Disks ", J. Chem. Phys., 40, 939-950 (1964).
- [09] Ree, F.H. & W.G. Hoover , " Seventh Virial Coefficient for Hard Spheres and Hard Disks ", J. Chem. Phys., 46, 4181-4197 (1967).
- [10] Truesdell, C.A. & R.G. Muncaster, " Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monoatomic Gas, Treated as a Branch of Rational Mechanics ", Academic Press, New York (1980).
- [11] Rosa, Jr., E., "Teoria Cinética de um Gás Monoatômico Denso" Dissertação de Mestrado, Curitiba (1987).
- [12] Kremer, G.M. and E. Rosa, Jr, " On Enskog's dense gas theory. I. The method of moments for monoatomic gases ", J.Chem.Phys. , 89, 3240-3247 (1988).
- [13] Sengers, J.V., " Thermal Conductivity and Viscosity of Simple Fluids ", Int. J. Heat Mass Transfer , 8, 1103-1116 (1965).
- [14] Greenspan, M., " Propagation of Sound in Five Monoatomic Gases " , J. Acoust. Soc. Am. , 28, 644-648 (1956).