

JACAONO BATISTA DE LIMA

# **POLIGONAÇÃO: PROPAGAÇÃO DE ERROS E OTIMIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

JACAONO BATISTA DE LIMA

POLIGONAÇÃO: PROPAGAÇÃO DE ERROS E OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao  
Curso de Pós-Graduação em Ciên-  
cias Geodésicas para obtenção  
do Grau de Mestre em Ciências  
pela Universidade Federal do  
Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

POLIGONAÇÃO: PROPAGAÇÃO DE ERROS E OTIMIZAÇÃO

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências  
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências pela Universidade Federal do Paraná

por

JACAONO BATISTA DE LIMA, Engenheiro Militar

\*\*\*\*\*

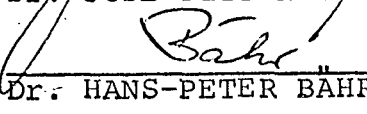
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

BANCA EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. CAMIL GEMAEI - ORIENTADOR

  
\_\_\_\_\_  
Dr. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

  
\_\_\_\_\_  
Dr. HANS-PETER BÄHR

  
\_\_\_\_\_  
MSc. DENIZAR BIITZKOW

À minha esposa ENI  
e meus filhos:

LIENE,

LUCIANO,

LUCIENE e

JÚNIOR

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, de forma especial, a Deus por ter-me dado força suficiente para realizar mais esta tarefa.

Manifesto meus agradecimentos às entidades e pessoas abaixo relacionadas que contribuíram para a realização desta obra:

- Ministério do Exército, na pessoa do Exm<sup>o</sup> Sr. General Aristides Barreto, pela minha indicação, seu incentivo e esforço pessoal no sentido de que fosse iniciado o ciclo de formação de Mestres em Ciências, da Diretoria de Serviço Geográfico.

- Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, na pessoa de seu Coordenador, Dr. José Bittencourt de Andrade, por ter iniciado a formação de Mestres em Ciências, da DSG.

- Dr. Camil Gemael, pela leitura, revisão, sugestões apresentadas e orientação da tese; bem como, seu incentivo e esforço pessoal para a formação de Mestres em Ciências, do Exército.

- M.Sc. Álvaro Doubek, pela leitura, sugestões e revisão do 2<sup>o</sup> capítulo.

- M.Sc. François Albert Rosier, pela leitura, sugestões e revisão do 3<sup>o</sup> capítulo.

- Bel. em Biblioteconomia Eliane Stroparo, pelo preparo e revisão da bibliografia.

- Licenc. em Letras Ediclêa Walter, pela datilografia e revisão.

- Professores, alunos e funcionários do Curso pelo incentivo e ajuda.

## RESUMO

Este trabalho, dividido em cinco capítulos e um apêndice, tem como objetivo principal fazer uma análise da propagação dos erros na poligonação.

Os capítulos de um a quatro sintetizam conceitos básicos, tabelas e fórmulas utilizadas. O capítulo cinco e apêndice apresentam exemplos simulados e programas em Linguagem Fortran, respectivamente.

## ABSTRACT

This work consists in five chapters and an appendix, and its principal objective is to analyze the error propagation in traverse.

Basic concepts, tables and formulas used in this work are summarized in the first four chapters.

Simulated examples and computational programs in Fortran are presented in the fifth chapter and appendix.

## INTRODUÇÃO

As poligonais, à semelhança das redes geodésicas, têm sido planejadas e medidas com base na experiência previamente adquirida. Isso contribuiu para que deficiências fossem descobertas a posteriori, implicando em perda de tempo e aumento do custo.

O problema das redes geodésicas foi resolvido, em parte, considerando-se o coeficiente de rigidez para determinar o afastamento entre as bases geodésicas a serem medidas. Foi uma das primeiras técnicas de otimização.

Modernamente, tanto para as redes como para poligonais, com o advento das técnicas de simulação computacional, surgiram métodos de programação linear e não-linear para solução rápida e econômica de tais problemas.

Estes métodos consistem da escolha de medidas, cujos erros podem ser propagados, antes que estas medidas sejam realizadas. Com esta propagação calculam-se os erros das variáveis não observáveis. Estes processos facilitam a busca da solução ideal.

Nosso trabalho não constitui um estudo destes métodos de programação linear e não-linear; é tão somente uma busca da solução ideal, por tentativas tendo como referencial o erro médio quadrático máximo tolerado.

## SUMÁRIO

	página
Título . . . . .	ii
Dedicatória. . . . .	iii
Agradecimentos . . . . .	iv
Resumo . . . . .	v
Abstract . . . . .	v
Introdução . . . . .	vi
Sumário . . . . .	vii

### CAPÍTULO 1

#### POLIGONAÇÃO: CONCEITOS BÁSICOS, CLASSIFICAÇÕES

##### E PRECISÕES DAS POLIGONAIS

1.1.	Poligonação . . . . .	01
1.2.	Poligonal . . . . .	01
1.3.	Classificação das Poligonais quanto ao tipo.	02
1.4.	Classificação das Poligonais quanto às suas precisões. . . . .	03
1.5.	Especificações Recomendadas na IX Reunião Pan- Americana de Consulta sobre Cartografia. IPGH. Buenos Aires 1961. . . . .	04
1.6.	Nova Contribuição à Classificação das Poligo- nais quanto às suas Precisões . . . . .	04
1.7.	Classificação das Triangulações de Acordo com a NOAA-1980 . . . . .	06
1.8.	Classificação das Trilaterações de Acordo com a NOAA-1980 . . . . .	07



## CAPÍTULO 2

### DISTANCIÔMETROS ELETRÔNICOS E INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO ANGULAR

2.1.	Distanciômetro Eletrônico . . . . .	08
2.2.	Distâncias . . . . .	09
2.3.	Classificação Geral dos Métodos de Medição de Distâncias . . . . .	11
2.4.	Classificação dos Distanciômetros Eletrônicos	12
2.4.1.	Quanto à Frequência da Onda Portadora . . . . .	12
2.4.1.1.	Distanciômetros Eletrônicos do Sistema da Faixa de Ondas Longas . . . . .	12
2.4.1.2.	Distanciômetros Eletrônicos do Sistema de Micro-Ondas . . . . .	14
2.4.1.3.	Distanciômetros Eletrônicos do Sistema Luz Visível. . . . .	15
2.4.1.4.	Distanciômetros Eletrônicos do Sistema Infravermelho. . . . .	16
2.4.2.	Outra Classificação Segundo CHRZANOVSKI . . . . .	17
2.5.	Instrumentos de Medição Angular . . . . .	19
2.6.	Classificação dos Teodolitos por Fabricante . . . . .	20

## CAPÍTULO 3

### TRANSPORTE DE COORDENADAS ELIPSÓIDICAS E PLANAS UTM

3.1.	Transformação de Coordenadas Elipsóidicas ( $\phi$ e $\lambda$ ) em Planas UTM (N e E) . . . . .	21
3.2.	Transformação de Coordenadas Planas UTM (N e E) em Elipsóidicas ( $\phi$ e $\lambda$ ) . . . . .	24
3.3.	Problema Inverso no Plano Conforme de Gauss . . . . .	26
3.4.	Transporte de Coordenadas Elipsóidicas. . . . .	30

3.4.1.	Cálculo da Latitude . . . . .	31
3.4.2.	Cálculo da Longitude. . . . .	33
3.4.3.	Cálculo do Contra-Azimute . . . . .	34
3.5.	Transporte de Coordenadas Planas UTM . . . . .	35
3.5.1.	Seqüência de Cálculo. . . . .	37
3.6.	Coordenadas de um vértice de Ordem "n". . . . .	40

## CAPÍTULO 4

### PROPAGAÇÃO DE ERRO NA POLIGONAL

4.1.	Definições . . . . .	43
4.2.	Lei de Propagação das Variâncias-Covariâncias - Caso Linear . . . . .	46
4.3.	Lei de Propagação das Variâncias-Covariâncias - Caso não-Linear . . . . .	47
4.3.1.	Aproximação Linear da Série de Taylor, para uma Função a uma Variável . . . . .	47
4.3.2.	Aproximação Linear da Série de Taylor, para uma Função a duas Variáveis . . . . .	48
4.3.3.	Aproximação Linear da Série de Taylos para m Fun- ções a n Variáveis . . . . .	49
4.4.	Matriz Variância-Covariância das Coordenadas Planas de um Vértice de Ordem n . . . . .	52
4.5.	Elipse dos Erros . . . . .	57
4.5.1.	Variância Máxima e Mínima . . . . .	58
4.5.2.	Variância Máxima e Mínima em Função dos Coefi- cientes das Equações Normais. . . . .	62
4.5.3.	Propriedades da Elipse dos Erros. . . . .	63

## CAPÍTULO 5

### EXEMPLOS SIMULADOS

5.1.	Problema geral . . . . .	67
5.2.	Exemplos . . . . .	68
	CONCLUSÃO. . . . .	99
	NOTAS DE REFERÊNCIA. . . . .	100
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	103
	APÊNDICE . . . . .	107

## CAPÍTULO 1

### POLIGONAÇÃO: CONCEITOS BÁSICOS, CLASSIFICAÇÕES E PRECISÕES DAS POLIGONAIS

#### 1.1. Poligonação

É o processo de levantamento que tem por fim a determinação da posição de uma série de pontos, através de poligonais que se estendem entre pontos de ordem superior, já conhecidos. Este levantamento consiste de medições de distâncias através de instrumentos eletrônicos e medições angulares através de teodolitos.

A poligonação pode ser:

- de 1<sup>a</sup> ordem, efetuada através de poligonais que se estendem entre posições ajustadas (data);
- de 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordens, através de poligonais apoiadas em pontos de ordem superior.

#### 1.2. Poligonal

É o resultado dos trabalhos de uma poligonação.

A poligonal tem por finalidade determinar o posicionamento plani-altimétrico de uma série de pontos, por medições lineares e angulares, partindo de um ponto de posição conhecida e fechando em outro também de posição conhecida. Para orientação da poligonal é necessário conhecer, no ponto de partida, o azimute da direção inicial e, para controle do transporte é preciso saber, no ponto de chegada, o azimute da direção final. Os azimutes, inicial e final,

são, portanto, azimutes fixos de ordem superior calculados dos pontos de partida e chegada, para outros vértices.

### 1.3. Classificação das Poligonais quanto ao Tipo

Quanto ao tipo, as poligonais classificam-se em:

- eletrônicas, cujos lados são medidos com equipamentos de Medição Eletrônica de Distâncias (MED);
- à invar, cujos lados são medidos com fita ou fio invar;
- taqueométricas, são aquelas em cujas medições utilizam-se estádias e teodolitos.

As poligonais têm início e término sempre em pontos de ordem superior, estes pontos podem pertencer aos mais variados tipos de apoio básico, tais como:

- rede de triangulação;
- rede de trilateração;
- poligonais;
- bases;
- pontos de Laplace;
- pontos de satélite.

A figura 1.3.1. mostra o caso mais comum de poligonal, ligando duas redes de meridianos de uma triangulação.

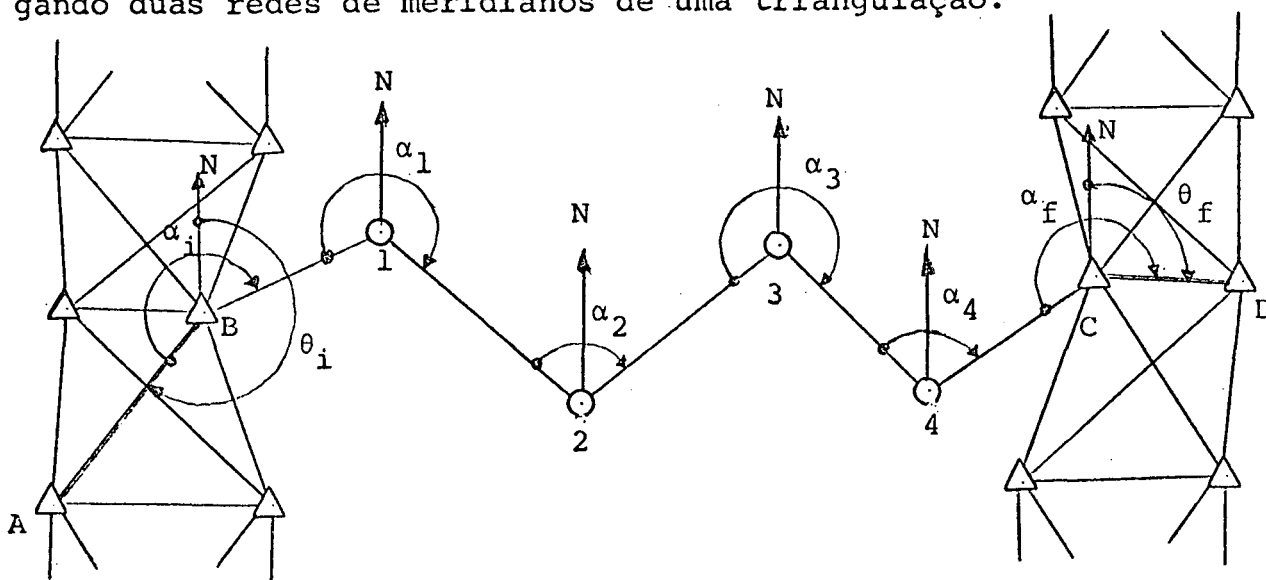


Fig. 1.3.1 - Poligonal ligando vértices de rede de triangulação.

#### 1.4. Classificação das Poligonais quanto às suas Precisoões

As poligonais, quanto às suas precisões, classificam-se em:

- 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens.

As poligonais à invar e taqueométricas não serão objeto de estudo, tendo em vista que, nas mesmas, não são utilizados equipamentos de MED.

As poligonais de 4<sup>a</sup> ordem ou topográficas também não serão especificadas, tendo em vista não serem usadas em levantamentos geodésicos.

Segue-se um quadro, cujos critérios de precisões foram preconizados pelo Inter American Geodetic Survey (IAGS), nas seguintes publicações:

- "Specification for Precise Traverse Using Electronic Distance - Measuring Equipment - IAGS - 1965 - G.B. Grunwell";
- "Telurometer Manual - Publication 62-1 - U.S. Coast and Geodetic Survey 1959".

Especificações	1 <sup>a</sup> ordem	2 <sup>a</sup> ordem	3 <sup>a</sup> ordem
Tolerância de fechamento linear após o ajustamento	1/25.000	1/15.000	1/7.500
Tolerância na discrepância do azimute por estação	1,0"	2,0"	5,0"
Tolerância de fechamento em azimute, antes do ajustamento	2" $\sqrt{n}$ ou 1"p.e	10" $\sqrt{n}$ ou 3"p.e.	15" $\sqrt{n}$ ou 5"p.e
Erro provável na medida de um ângulo	1,5"	3,0"	6,0"
Erro provável do resultado do azimute astronômico	0,3"	0,5"	2,0"
Número de estações entre azimutes astronômicos	10 a 15	15 a 25	20 a 35
Onde: n = número de estações da poligonal p.e. = por estação.			

Quadro 1.1 - Resumo das poligonais de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordens |<sup>01</sup>|.

1.5. Especificações Recomendadas na IX Reunião Pan-Americana de Consulta sobre Cartografia. IPGH. Buenos Aires 1961

| 0 2 |

Direção ajustada de poligonal em conexão com trilateração . . . . .	0,35"
Lados poligonais eletrônicos . . . . .	1/150.000
Número de estações de Laplace na poligonação eletrônica . . . . .	6 a 8

1.6. Nova Contribuição à Classificação das Poligonais quanto às suas Precisões

Conforme especificações do National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) - 1980, órgão do Departamento de Comércio dos EEUU, é a seguinte a classificação moderna de poligonais, quanto às suas precisões:

Classificação	1ª ordem	2ª ordem		3ª ordem	
		Classe I	Classe II	Classe I	Classe II
-Distância entre estações	10 a 15km	4km	2km	0,1km	0,1km
DIREÇÕES HORIZONTAIS: -menor leitura do instrumento	0,2"	0,2" ou 1,0"	0,2" ou 1,0"	1,0"	1,0"
-nº de obs.	16	8 ou 12	6 ou 8	4	2
-rejeição p/média	4"	4" ou 5"	4" ou 5"	5"	5"
DISTÂNCIAS MEDIDAS: -erro médio quadrático	1/600000	1/300000	1/120000	1/60000	1/30000
AZIMUTE ASTRONÔMICO: -nº de estações	5-6	10-12	15-20	20-25	30-40
-nº de obs.	16	16	12	8	4
-erro médio quadrático	0,45"	0,45"	1,5"	3,0"	8,0"
-limite de rejeição do azimute de fechamento	1"p.e. ou $2\sqrt{N}$	1,5"p.e. ou $3\sqrt{N}$	2,0"p.e. ou $6\sqrt{N}$	3,0"p.e. ou $10\sqrt{N}$	3,0"p.e. ou $30\sqrt{N}$
FECHAMENTO EM AZIMUTE: -após o ajustamento	$0,04m\sqrt{K}$ ou 1/100000	$0,08m\sqrt{K}$ ou 1/50000	$0,2m\sqrt{K}$ ou 1/20000	$0,4m\sqrt{K}$ ou 1/10000	$0,8m\sqrt{K}$ ou 1/5000
<p>ONDE: p.e. = por estação  N = número de estações para o transporte de azimute  K = distância em quilômetros entre duas estações</p> $\text{erro médio quadrático} = \sigma_m = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n(n-1)}}$ <p>- Em que <math>\sigma_m</math> = erro médio quadrático  v = resíduo ou diferença entre cada observação e a média entre todas as observações  n = número de observações</p>					

Quadro 1.2 - Classificação das poligonais quanto às suas precisões

| 0.3 |



## 1.7. Classificação das Triangulações de Acordo com a NOAA-1980 [0.4]

Classificação	1ª ordem	2ª ordem		3ª ordem	
		Classe I	Classe II	Classe I	Classe II
-Distância entre as estações	15km	10km	5km	-	-
MEDIDA DA BASE: -Erro médio quadrático	1/1000000	1/900000	1/800000	1/500000	1/250000
DIREÇÕES HORIZONTAIS: -Menor leitura do instrumento	0,2"	0,2"	0,2" ou 1,0"	1,0"	1,0"
-Nº de obs.	16	16	8 ou 12	4	2
-Rejeição p/ média	4"	4"	5"	5"	5"
FECHAMENTO DE UM TRIÂNGULO: -A média não excede	1,0"	1,2"	2,0"	3,0"	5,0"
-Máximo de excesso	3,0"	3,0"	5,0"	5,0"	10,0"
LADOS: -A correção média da direção não excede	0,3"	0,4"	0,6"	0,8"	2,0"
AZIMUTE ASTRONÔMICO: -Espaçamento-figuras	6 a 8	6 a 10	8 a 10	10 a 12	12 a 15
-Nº de obs.	16	16	16	8	4
-Erro médio quadrático	0,45"	0,45"	0,6"	0,8"	3,0"
FECHAMENTO FINAL EM DISTÂNCIA	1/100000	1/50000	1/20000	1/10000	1/5000

Quadro 1.3 - Classificação moderna das triangulações

1.8. Classificação das Trilaterações de Acordo com o NOAA - 1980 |<sup>05</sup>|

Classificação	1 <sup>a</sup> ordem	2 <sup>a</sup> ordem		3 <sup>a</sup> ordem	
		Classe I	Classe II	Classe I	Classe II
-distância entre as estações	10km	10km	5km	0,5km	0,25km
DISTÂNCIAS MEDIDAS: -erro médio quadrático	1/1000000	1/750000	1/450000	1/250000	1/150000
AZIMUTE ASTRONÔMICO: -espaçamento- figuras	6 a 8	6 a 10	8 a 10	10 a 12	12 a 15
-nº de obs.	16	16	16	8	4
-erro médio quadrático	0,45"	0,45"	0,6"	0,8"	3,0"
FECHAMENTO FINAL: -não excede	1/100000	1/50000	1/20000	1/10000	1/5000

Quadro 1.4 - Classificação moderna das trilaterações

## CAPÍTULO 2

DISTANCIÔMETROS ELETRÔNICOS E INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO ANGULAR2.1. Distanciômetro Eletrônico

É todo tipo de instrumento utilizado para medir distâncias eletronicamente.

Os principais distanciômetros eletrônicos são classificados basicamente em duas classes, de acordo com a emissão de suas ondas:

-eletroópticos, que utilizam a radiação dentro do espectro visível e proximidades para transporte dos sinais e cujo princípio de funcionamento é baseado na medição da diferença de fase entre a onda eletroótica emitida de uma estação principal a uma secundária, e refletida por esta à primeira.

Os instrumentos desta classe requerem boas condições de visibilidade e possuem comprimentos de onda da ordem de  $\mu\text{m}$ .

- eletromagnéticos: são instrumentos que empregam microondas de comprimento de onda da ordem de cm e mm e cujo princípio de funcionamento se baseia na medição da diferença de fase entre a onda eletromagnética emitida de uma estação principal a uma secundária e retransmitida desta à primeira.

Há também os equipamentos de ondas longas e interferômetros, de baixa e alta precisão, respectivamente.

## 2.2. Distâncias

As distâncias medidas eletronicamente estão sujeitas a reduções, como veremos a seguir.

A distância obtida diretamente do campo, feita com distanciômetro eletrônico, reduzida do índice de refração e correção de zero, é dada pela expressão:

$$S_m = S \frac{n_1}{n_2} + Z_0 \quad 2.2.1$$

Em que:

$S$  - é a distância bruta medida eletronicamente entre dois pontos;

$\frac{n_1}{n_2}$  - é a correção do índice de refração ou razão entre:

$n_1$  - índice de refração do distanciômetro eletrônico;

$n_2$  - índice de refração, função das condições meteorológicas dos extremos da linha;

$Z_0$  - é a correção de zero ou calibração do instrumento, isto é, a distância entre os centros eletrônico e geométrico do equipamento.

A distância medida eletronicamente  $S_m$  está sujeita ainda às seguintes alterações:

- correção de curvatura na propagação da onda eletromagnética, devida à variação de refração da atmosfera;

- correção para redução ao horizonte, devida à diferença de altitude entre as estações principal e secundária;

- correção para redução ao elipsóide, função da altitude média das estações e do raio de curvatura do elipsóide, na latitude média das duas estações. Corrige-se para reduzir ao elipsóide, sobre o qual se trabalha, no entanto, o desconhecimento do valor da

ondulação geoidal  $N$  faz com que, na maioria das vezes, se reduza ao geóide, e se admita tal distância como elipsóidica;

- correção corda-arco, em que a distância é levada da corda ao arco da superfície do geóide. Esta correção é sempre positiva.

Tem-se como resultado final uma distância geodésica  $S_0$  para utilização no transporte de coordenadas sobre o elipsóide.

A figura 2.2.1 ilustra as diferentes correções sofridas por uma distância eletrônica.

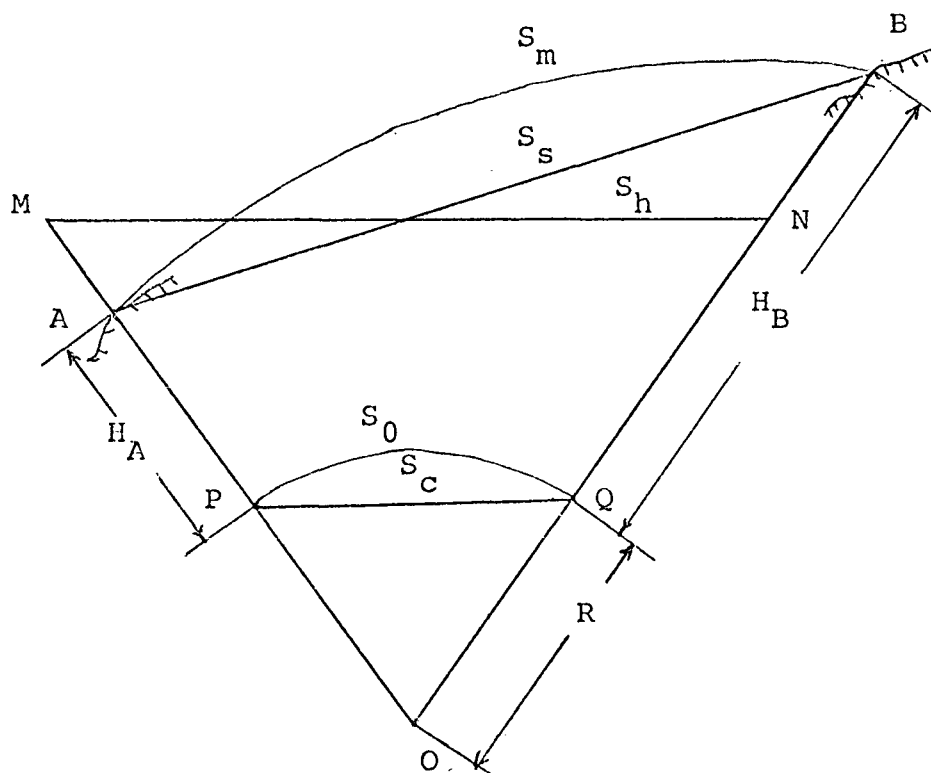


Fig. - 2.2.1

Em que:

$S_m$  - distância medida no campo, entre os pontos  $A$  e  $B$ , e corrigida do índice de refração e erro de zero.

$S_s$  - distância corrigida da refração atmosférica.

$S_h$  - distância reduzida ao horizonte.

$S_c$  - distância reduzida ao geóide.

$S_0$  - distância elipsóidica.

$H_A$  e  $H_B$  - altitudes geométricas dos pontos A e B.

$H_M = \frac{H_A + H_B}{2}$  - altitude geométrica média dos pontos A e B.

$R$  = raio de curvatura do elipsóide na latitude média dos pontos A e B.

### 2.3. Classificação Geral dos Métodos de Medição de Distâncias

Segue-se um resumo dos métodos de medição de distâncias, bem como as precisões obtidas em cada método. As precisões abaixo discriminadas, já levam em consideração a calibração do instrumento.

A precisão é expressa em ppm (parte por milhão), e é a razão entre o desvio-padrão  $\sigma_s$  e a distância  $S$ .

Método	Instrumento	Precisão $\frac{\sigma_s}{S}$ ou $\sigma_s$
Mecânico	Fita de aço Fitas ou fios Invar	1/20.000 1/10 <sup>6</sup> (1ppm)
Ótico	Teodolito ao segundo arco e mira horizontal de Invar	1/10.000
	Taqueômetro auto-redutor ex.: Wild RDS	1/1.000
	Taqueômetro dupla imagem ex.: Wild RDH	1/5.000 Considerando distâncias compatíveis c/os instr.
Eletromagnético e Eletroótico	Distanciômetros Eletrônicos a micro-onda	1,5cm $\pm$ 5ppm
	Distanciômetros Eletrônicos a infra-vermelho	1,5mm $\pm$ 2ppm
	Distanciômetros Eletrônicos a laser	1mm $\pm$ 2ppm
	Mecômetro	0,3mm $\pm$ 1ppm Qualquer extensão
Interferométrico	Comparador Väisälä ou interferômetros a laser	0,5ppm

Quadro 2.1 - Principais métodos da medição de distâncias |<sup>06</sup>|

## 2.4. Classificação dos Distanciômetros Eletrônicos

### 2.4.1. Quanto à Frequência da Onda Portadora

Segue-se um quadro-resumo em que estão discriminados a onda portadora, o processo de modulação, transmissão e medida de fase dos quatro principais tipos de distanciômetros eletrônicos além do interferômetro.

Onda Portadora	Processo de Modulação	Transmissão	Medida de Fase
Ondas Longas de Rádio	Nenhum	Antena Vertical	Circuito discriminador com indicador visual de fase
Micro-Ondas	Modulação em Frequência	Dipolo de meia onda e refletor	Indicador de nulo usando resolvidor
Luz Visível	Modulação em intensidade de amplitude pela célula Kerr ou equipamento similar	Sistema de espelhos e lentes	Indicador de nulo usando linha de retardo, variação do percurso da luz
Infravermelho	Modulação direta em intensidade de amplitude	Sistema de espelhos e lentes	Método digital de contagem de pulsos

Quadro 2.2 - Classificação dos distanciômetros eletrônicos segundo a frequência da onda portadora |<sup>07</sup>|

#### 2.4.1.1. Distanciômetros Eletrônicos do Sistema da Faixa de Ondas Longas

São instrumentos que utilizam a onda terrestre como onda de propagação. São equipamentos de baixa precisão sob o aspecto geodésico, porém possuem longo alcance e são utilizados em:

- posicionamentos na navegação marítima e aérea;
- levantamentos oceanográficos e hidrográficos;
- mapeamentos em escalas menores que 1/100.000.

Equipamento	Emprego	Alcance máximo km	Características
Decca Navigator	Navegação e levantamentos hidrográficos	300	Modo hiperbólico para navegação. Possibilidade de operação no modo circular
Decca Lambda	Levantamentos hidrográficos e oceanografia	140	Modo circular
Decca Hifix	Levantamentos hidrográficos e oceanografia	160 ou 320	Modo circular. Preciso e de peso reduzido. Opera em baixa e alta potência.
Seafix	Levantamentos hidrográficos e oceanografia	60	Transistorizados e portáteis
Ray Dist	Levantamentos hidrográficos e oceanografia	320	Modo circular com precisão de até $\pm$ 1m.
Loran C	Navegação de longo curso	2.000	Usa medida de fase e pulsos
Omega	Navegação mundial	-	Precisão: 1,84km à noite e 3,7km durante o dia

Quadro 2.3 - Principais distanciômetros eletrônicos de ondas longas |<sup>00</sup>|



### 2.4.1.2. Distanciômetros Eletrônicos do Sistema de Micro-Ondas

São instrumentos que empregam comprimento de ondas da ordem de centímetros, normalmente 3 a 10cm, mas, modernamente, até milímetros.

O alcance destes instrumentos é de até 150km, necessitando intervisibilidade; recomenda-se sua utilização em distâncias entre 20 e 30km, tendo em vista que, na maioria das vezes, eles são operados junto com teodolitos que têm bom desempenho em torno deste alcance.

Nome	Comprimento de onda portadora	Alcance		Peso kg	Precisão
		min.	máx.		
Tellurometer MRA-2	10cm feixe 20°	100m	150km	13	+5cm ±3ppm
Tellurometer MRB-2 Hydrodist	10cm feixe 20°	-	40km	15	+1,5m
Tellurometer MRA-3	3cm feixe 9°	30m	80km	12,5	+1,5cm ±3ppm
Tellurometer MRB-3	3cm, não direcional	-	-	-	-
Tellurometer MRA-4	9mm feixe 2°	50m	50km	18	+3mm ±3ppm
Tellurometer MRA-5	3cm feixe 6°	100m	50km	-	+1cm ±3ppm
Tellurometer MRA-101	3cm feixe 9°	100m	50km	11	+1,5cm ±3ppm
CA-1000	3cm feixe 20°	50m	30km	-	+1,5cm ±5ppm
SIAL MD60C	3cm feixe 6°	200m	150km	-	+1cm ±3ppm
Wild Distomat DI-50	3cm feixe 6°	100m	50km	25	+2cm +0,5 x 10 <sup>-5</sup>
Cubic Auto Tape	10cm	-	100km	-	+50cm +1 x 10 <sup>-5</sup>
Cubic Eletrotape DM-20	3cm feixe 6°	10m	50km	15 c/bat.	+1cm +3 x 10 <sup>-5</sup>

Quadro 2.4 - Principais distanciômetros eletrônicos que utilizam micro-ondas |<sup>09</sup>|

### 2.4.1.3. Distanciômetros Eletrônicos do Sistema Luz Visível

São instrumentos que usam luz visível.

Sofrem pequena influência da umidade, e o índice de refração é pouco afetado pelas condições meteorológicas, dado seu comprimento de onda muito pequeno.

O principal instrumento dessa classe é o geodímetro, em seus diferentes modelos e de grande utilização em poligonais geodésicas cujos lados não ultrapassem 60km, alcance máximo do modelo 8.

	Modelo	Alcance km	Precisão $\pm$ mm $\pm$ ppm	Observações
G E O D Í M E T R O S	NASM-2	35	$\pm 21 \pm 1,2$	Tungstênio 1º geodímetro comercial e 1º com prisma retro-diretivo.
	NASM-4	25	$\pm 10 \pm 2,0$	Tungstênio ou vapor de mercú- rio. Distância diurna 5km
	M 6	25	$\pm 8 \pm 2,0$	Tungstênio ou vapor de mercú- rio. Sistema ótico coaxial. Campo vertical 145°. Muito ver- sátil
	M 6 BL	25	$\pm 5 \pm 1,0$	Laser Alcance diurno 25km.
	M 8	60	$\pm 5 \pm 1,0$	Laser Célula Kerr substituída por modulador KDP. Medida de bases, poligonais geodésicas, etc.
	AG-600	40	$\pm 5 \pm 1,0$	Laser Pelo método especial a preci- são é $\pm 1$ mm $\pm 1$ ppm.
O U T R O S	RANGE- MASTER II	60	$\pm 5 \pm 1,0$	Laser Leitura já corrigida da refra- ção
	ME-3000	2,5 a 3,0	$\pm 0,2 \pm 1,0$	Lâmpada Xenon Usado em Engenharia

Quadro 2.5 - Principais distanciômetros eletrônicos do sistema  
luz visível |<sup>10</sup> |

#### 2.4.1.4. Distanciômetros Eletrônicos do Sistema Infra-Vermelho

São os instrumentos que empregam ondas dentro da faixa do infra-vermelho, isto é, em torno de  $0,9\mu\text{m}$ .

Possuem alcance não superior a 10km, mas são de largo uso nos trabalhos geodésicos, dada a sua boa precisão, preço e fácil uso.

Estes equipamentos são limitados pela potência de saída da fonte que é um diodo de arseniato de gálio, o qual emite luz, que sofre uma perda de potência em presença do meio de propagação.

Instrumento	Alcance km	Precisão	Observações
Telurômetro MA-100	2	+1,5mm+2ppm	Medida de fase digital Frequência aprox. 75MHz
DM-501	2	+5,0mm+5ppm	Acopla-se a teodolitos
DI-3S	2	+5mm+5ppm	Leitura direta corrigida e automática
Geodímetro 14	10	+5mm+10ppm	Acopla-se a teodolitos
DM-60M	2,5	+5mm+0,5ppm	Computa correções atmosféricas
DM 1000	2,5	+4mm+4ppm	-
DM 500	0,5	+6cm	O mais leve
Micro Ranger	1,6	+5mm+2ppm	A precisão varia com a temperatura
CD 6	2	+5mm+5ppm	Comprimento de onda 0,93m
Wild DI 10 Distomat	2	+1cm	Pesa 20kg, comprimento de onda 20m
Zeiss SM II	2	+1cm	Pesa 20,5kg, comprimento de onda 20m
Zeiss Jena EOK 2000	2,5	+1cm+ $1,5 \times 10^{-5}$	Pesa 12kg Leitura automática
Zeiss Reg Elta	2	+1cm	Mede ângulos, registra em fita e é automático
Wild DI 3	0,3	+1cm	Mede distância horizontal e diferença de altura
Hewlett Packard	7500pés	0,01pē+ $1 \times 10^{-5}$	Pesa 7,5kg Leitura digital

Quadro 2.6 - Principais distanciômetros eletrônicos do sistema infra-vermelho |<sup>11</sup>| e |<sup>12</sup>|

2.4.2. Outra Classificação Segundo CHRZANOVSKI [13]

CHRZANOVSKI classifica os instrumentos levando em consideração 4 tipos:

1º) Instrumentos de Medição Eletrônica de Distâncias (MED) a micro-ondas.

2º) Instrumentos de MED a laser.

3º) Instrumentos de MED a infra-vermelho.

4º) Instrumentos de MED a luz branca.

Segue-se uma relação dos principais instrumentos de MED disponíveis no Canadá e EEUU e dos quais o Brasil tem-se utilizado em levantamentos geodésicos.

A relação apresenta modelo, fabricante, alcance e precisão; sendo esta última de capital interesse para o estudo da propagação dos erros na poligonação.

MODELO	FABRICANTE	ALCANCE KM	PRECISÃO
INSTRUMENTOS DE MED - MICROONDAS			
Tellurometers:	Tellurometer (Pty) Ltd.		
MRA-3	Tellurometer (Pty) Ltd.	60	1,5cm+5ppm
MR-101	Tellurometer (Pty) Ltd.	60	1,5cm+5ppm
MRA-4	Tellurometer (Pty) Ltd.	30	0,3cm+5ppm
CA 1000	Tellurometer (Pty) Ltd.	25	1,5cm+5ppm
MRA-5	Tellurometer (Pty) Ltd.	50	1,5cm+5ppm
Distomat DI-50	Wild Heerbrug	50	2cm +5ppm
Electrotape DM20	Cubic Corporation	60	1,5cm+5ppm
INSTRUMENTOS DE MED À LASER			
Geodolite 3G	Spectra-Physics	80	1mm +2ppm
Geodimeters:	AGA Corp.		
AGA-8	AGA Corp.	50	6mm +2ppm
AGA-6BL	AGA Corp.	25	6mm +2ppm
AGA-700	AGA Corp.	4	5mm +2ppm
AGA-76	AGA Corp.	3	10mm -2ppm
Ranger I	Laser Syst. & Electron.	4	- -
Ranger II	Laser Syst. & Electron.	6	- -
Ranger III	Laser Syst. & Electron.	12	5mm +2ppm
Rangemaster	Laser Syst. & Electron.	50	5mm +2ppm
INSTRUMENTOS DE MED À INFRAVERMELHO			
DI-10	Wild Heerbrug	2	10mm +2ppm
DI-3	Wild Heerbrug	0,5	< 10mm
HP-3800	Hewlett Packard	2,5	3mm +10ppm
MA-100	Tellurometer (Pty) Ltd.	2	1,5mm+2ppm
CD-5	Tellurometer (Pty) Ltd.	2	5mm +5ppm
Reg Elta 14	Carl Zeiss	2	10mm +2ppm
Microranger	Keufel & Esser	1,5	6mm +2ppm
Cubitape DM-60	Cubic Corp.	2	5mm +10ppm
SDM-3	Sokkisha Ltd.	1	10mm
DM-1000	Kern & Co. Ltd.	2,5	5mm +2ppm
DM-500	Kern & Co. Ltd.	0,5	5mm
INSTRUMENTOS DE MED À LUZ BRANCA			
Mekometer	Kern & Co. Ltd.	2	0,3mm+1ppm
ME 3000			

Quadro 2.7 - Principais instrumentos de MED por modelo, fabricante, alcance e precisão

## 2.5. Instrumentos de Medição Angular

Os teodolitos são os principais instrumentos utilizados em medições angulares. Consistem, basicamente, de telescópio, círculos horizontal e vertical graduados, níveis e dispositivos de leitura.

Os teodolitos podem ser assim especificados:

- astronômicos, que permitem a medição simultânea de ângulos horizontais e verticais, diferenciando-se dos demais pelos dispositivos especiais necessários às observações astronômicas de alta precisão.

Destacam-se nesta classe os seguintes equipamentos:

- T4 da Wild;

DKM3 e DKM3-A da Kern.

- Geodésicos, que permitem as medições astronômicas e geodésicas, de precisões compatíveis com 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens.

São desta classe os seguintes equipamentos:

T3 e T2 da Wild;

DKM2-A e DKM-3 da Kern;

TH2 da Zeiss Oberkochen;

THEO 020-A e THEO 010-A da Zeiss Jena.

- Topográficos, são todos os instrumentos de baixa precisão utilizados em levantamentos de ordens inferiores.

Incluem-se nesta categoria os trânsitos e taqueômetros redutores. Destacam-se os seguintes equipamentos:

T12, T0, T1, T1A e T16 da Wild;

DKM-1, K1A e K1S da Kern;

TH3, TH32, TH4, TH42, TH43 e TH5 da Zeiss Oberkochen;

DAHLTA 010-A e THEO 080-A da Zeiss Jena.

- Taquímetros, que medem simultaneamente ângulos e distâncias.

- Giroscópicos, aos quais foi adicionada uma giro-bússola que estabelece a direção do meridiano do lugar e, conseqüentemente, o azimute de uma direção, independente de observações astronômicas.

## 2.6. Classificação dos Teodolitos por Fabricante

Segue-se uma relação dos principais teodolitos, suas precisões e erros médios quadráticos, de uma direção, especificados nos manuais dos fabricantes.

Fabricante	Tipo de Teodolito	Precisão-leitura estimada	Erro médio quadrático $\sigma_m$
Wild	T4	V-0,2" H-0,1"	±0,3"
	T3	0,2"	-
	T2	0,4"	±1"
	T16	6"	±3"
	T1	6"	±3"
	T1A	5"	±3"
	T0	1'	±15"
	T12	V-2' H-1'	-
	GAK-1	-	±20"
Kern	DKM2-A	0,1"	V-±1,1" H-±0,9"
	DKM3	0,1"	±0,3"
	DKM3-A	0,1"	±0,3"
	DKM1	1"	±2"
	K1-M	5"	±2"
	K1-S	0,1'	±2"
Zeiss Oberkochen	TH2	0,5"	±1"
	TH3	0,1'	±3"
	TH32	0,1 <sup>c</sup>	±3"
	TH4	0,1'	±3"
	TH42	0,2 <sup>c</sup>	±3"
	TH43	0,1'	±3"
	TH5	1'	±20"
Zeiss Jena	THEO 020-A	H-0,1' V-0,2'	±3"
	THEO 010-A	0,1'	±1"
	DAHLTA 010-A	H-0,1' V-0,2'	±1"
	THEO 080-A	0,5'	±7"

Quadro 2.8 - Principais tipos de teodolitos

## CAPÍTULO 3

TRANSPORTE DE COORDENADAS ELIPSÓIDICAS E PLANAS UTM3.1. Transformação de Coordenadas Elipsóidicas ( $\phi$  e  $\lambda$ ) em Planas UTM (N e E)

A poligonal é apoiada em pontos, de ordem superior, cujas coordenadas elipsóidicas ou planas devem ser conhecidas.

Quando estes pontos possuem coordenadas elipsóidicas e deseja-se fazer um transporte no plano, há necessidade de transformar as coordenadas elipsóidicas em planas UTM.

As coordenadas utilizadas na Fotogrametria para confecção de mapas são, na maioria das vezes, planas UTM. Se o transporte de coordenadas executado foi sobre o elipsóide, há necessidade de transformá-las em planas UTM.

Segue-se, como ilustração, algumas especificações do sistema Universal Transverso de Mercator (UTM).

- Projeção conforme de Gauss.
- 60 fusos com  $6^{\circ}$  de amplitude, cada.
- Módulo de redução escala  $k_0 = 1 - \frac{1}{2500} = 0,9996$ .
- Limitações do sistema: latitudes  $84^{\circ}\text{N}$  e  $80^{\circ}\text{S}$ .
- Designação das coordenadas pelas letras N e E, sendo  $N' = |\text{ordenada}|$  e  $E' = |\text{abscissa}|$  e ainda as convenções seguintes.



Posição de um ponto P em relação ao			
Equador		Meridiano Central	
Norte	Sul	Oeste	Leste
$N = N'$	$N=10.000.000m-N'$	$E=500.000m-E'$	$E=500.000m+E'$

Fórmulas:

As fórmulas, abaixo, foram transcritas de  $|^{14}|$ ,  $|^{15}|$  e  $|^{16}|$ , relacionadas ao elipsóide Referência 1967 e apresentam-se sob dois aspectos:

1º) expressões gerais;

2º) expressões que podem ser adaptadas para tabelas e ábacos.

Expressões gerais

$$N' = k_0 |X_{TM}|$$

$$E' = k_0 |Y_{TM}|$$

$$\begin{aligned}
 X_{TM} = m + \frac{\Delta\lambda^2}{2} N \operatorname{sen}\phi \cos\phi + \frac{\Delta\lambda^4}{24} N \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi (5 - \operatorname{tg}^2\phi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\
 + \frac{\Delta\lambda^6}{720} N \operatorname{sen}\phi \cos^5\phi (61 - 58\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2\phi) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{TM} = \Delta\lambda N \cos\phi + \frac{\Delta\lambda^3}{6} N \cos^3\phi (1 - \operatorname{tg}^2\phi + \eta^2) + \\
 + \frac{\Delta\lambda^5}{120} N \cos^5\phi (5 - 18\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2\phi) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

Expressões Adaptadas

$$N' = I + IIp^2 + IIIp^4 + A_6 \quad (3.1.3)$$

$$E' = IVp + Vp^3 + B_5 \quad (3.1.4)$$

Onde:

TM = Transverso Mercator;

m = comprimento do arco de meridiano, contado sobre o elipsóide, ao longo deste meridiano, desde o equador até um ponto de latitude  $\phi$ .

$\Delta\lambda$  = diferença de longitude, em segundos, referida ao meridiano central:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0, \text{ para leste}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda, \text{ para oeste}$$

$$\lambda_0 = \text{longitude do meridiano central}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} - \text{raio de curvatura da seção 1ª vertical}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} - \text{quadrado da 1ª}$$

excentricidade.

a = 6.378.160,0m semi-eixo maior do elipsóide.

b = 6.356.774,5m semi-eixo menor do elipsóide.

$$\eta^2 = \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2} \right) \cos^2 \phi$$

$$p = |\Delta\lambda''| \times 10^{-4}$$

$$I = k_0 m$$

$$II = \frac{1}{2} N \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 1'' k_0 10^8$$

$$III = \frac{1}{24} N \operatorname{sen} \phi \cos^3 \phi \operatorname{sen}^4 1'' (5 - \operatorname{tg}^2 \phi + 9\eta^2 + 4\eta^4) k_0 10^{16}$$

$$IV = N \cos \phi \operatorname{sen} 1'' k_0 10^4$$

$$V = \frac{1}{6} N \cos^3 \phi \operatorname{sen}^3 1'' (1 - \operatorname{tg}^2 \phi + \eta^2) k_0 10^{12}$$

$$A_6 = \frac{p}{720} N \operatorname{sen} \phi \cos^5 \phi \operatorname{sen}^6 1'' (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 270 \eta^2 - 330 \eta^2 \operatorname{tg}^2 \phi) \times \\ \times k_0 10^{24}$$

$$B_5 = \frac{p}{120} N \cos^5 \phi \operatorname{sen}^5 1'' (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 \operatorname{tg}^2 \phi) k_0 10^{20}$$

### 3.2. Transformação de Coordenadas Planas UTM (N e E) em Elipsóides ( $\phi$ e $\lambda$ )

O problema surge quando se dispõe de coordenadas planas UTM e se deseja efetuar o transporte no elipsóide.

As fórmulas, abaixo, encontram-se nas referências bibliográficas <sup>[17]</sup>, <sup>[18]</sup> e <sup>[19]</sup> e apresentam-se, também, sob dois aspectos:

1º) expressões gerais;

2º) expressões para adaptação a tabelas e âbacos.

#### Expressões gerais

$$\phi = \phi_0 - \left(\frac{Y}{N_0}\right)^2 \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2} (1 + \eta_0^2) + \left(\frac{Y}{N_0}\right)^4 \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{24} (1 + \eta_0^2) (5 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi_0 + \eta_0^2 + 4 \eta_0^2 - 9 \eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \phi_0) - \\ - \left(\frac{Y}{N_0}\right)^6 \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{720} (61 + 90 \operatorname{tg}^2 \phi_0 + 45 \operatorname{tg}^4 \phi_0 + 107 \eta_0^2 - 162 (e')^2 \operatorname{sen} \phi_0 - \\ - 45 (e')^2 \operatorname{tg}^2 \phi_0 \operatorname{sen}^2 \phi_0) + \dots \quad (3.2.1)$$

$$\lambda = \lambda_0 \pm \left(\frac{Y}{N_0}\right) \operatorname{sen} \phi_0 - \left(\frac{Y}{N_0}\right)^3 \frac{\sec \phi_0}{6} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \phi_0 + \eta_0^2) + \left(\frac{Y}{N_0}\right)^5 \frac{\sec \phi_0}{120} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 \phi_0) +$$

$$+ 24 \operatorname{tg}^4 \phi_0 + 6 \eta_0^2 + 8 \eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \phi_0) + \dots \quad (3.2.2)$$

Expressões adaptadas

$$\phi = \phi_0 - \text{VII} q^2 + \text{VIII} q^4 - D^6 \quad (3.2.3)$$

$$\lambda = \lambda_0 \pm (\text{IX} q - X q^3 + E_5) \quad (3.2.4)$$

Onde:

$\phi_0$  - latitude correspondente a um arco de meridiano cuja origem está sobre o equador, contado sobre o meridiano central, e vai do pé da perpendicular baixada de um ponto P ao meridiano central.

$N_0$  - raio de curvatura da seção 1ª vertical na latitude  $\phi_0$ .

Y - ordenada de um ponto genérico P.

$$\eta_0^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \cos^2 \phi_0 \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \text{ quadrado da 2ª excentricidade.}$$

$$q = E' \cdot 10^{-6}$$

$$\text{VII} = \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{2 N_0^2 \operatorname{sen} 1''} (1 + \eta_0^2) \frac{10^{12}}{k_0^2}$$

$$\text{VIII} = \frac{\operatorname{tg} \phi_0}{24 N_0^4 \operatorname{sen} 1''} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 \phi_0 + 6 \eta_0^2 - 6 e'^2 \operatorname{sen}^2 \phi_0 - 3 e'^4 \cos^4 \phi_0 -$$

$$- 9 e'^4 \cos^2 \phi_0 \operatorname{sen}^2 \phi_0) \frac{10^{24}}{k_0^4}$$

$$IX = \frac{\sec\phi_0}{N_0 \text{sen} 1''} \frac{10^6}{k_0}$$

$$X = \frac{\sec\phi_0}{6N_0 \text{sen} 1''} (1 + 2\text{tg}^2\phi_0 + e'^2 \cos^2\phi_0) \frac{10^{18}}{k_0^3}$$

$$D_6 = q^6 \frac{\text{tg}\phi_0}{720N_0^6 \text{sen} 1''} (61 + 90\text{tg}^2\phi_0 + 45\text{tg}^4\phi_0 + 107e'^2 \cos^2\phi_0 - \\ - 162e'^2 \text{sen}^2\phi_0 - 45e'^2 \text{tg}^2\phi_0 \text{sen}^2\phi_0) \frac{10^{36}}{k_0^6}$$

$$E_5 = q^5 \frac{\sec\phi_0}{120N_0^5 \text{sen} 1''} (5 + 28\text{tg}^2\phi_0 + 24\text{tg}^4\phi_0 + 6e'^2 \cos^2\phi_0 + \\ + 8e'^2 \text{sen}^2\phi_0) \frac{10^{30}}{k_0^5}$$

### 3.3. Problema Inverso no Plano Conforme de Gauss

Consiste na determinação dos azimutes e lados planos e elipsóidicos a partir das coordenadas planas de dois pontos dados.

Os azimutes e lados elipsóidicos ou planos devem ser conhecidos ou determinados em função destas coordenadas, bem como as convergências meridianas em cada ponto.

A obtenção dos dados acima é necessária à execução dos transportes de coordenadas, quer seja no elipsóide ou no plano.

A figura 3.3.1 ilustra estas determinações cujas fórmulas estão deduzidas em |<sup>20</sup>|, |<sup>21</sup>|, |<sup>22</sup>| e |<sup>23</sup>|.

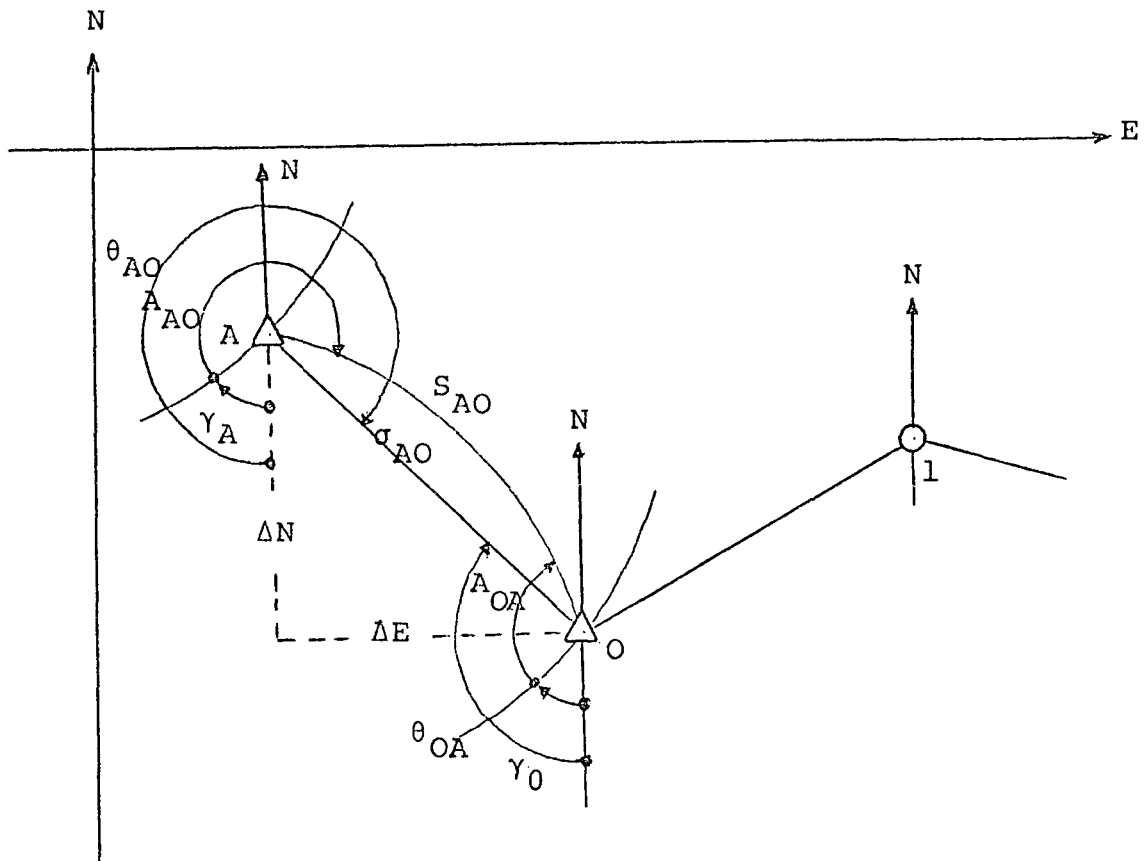


Fig. - 3.3.1

Em que:

- A e O - pontos de ordem superior de coordenadas planas conhecidas.
- $S_{AO}$  - transformada de um arco de geodésica  $s_{AO}$ .
- $\sigma_{AO}$  - corda da transformada  $S_{AO}$  ou lado plano.
- $\theta_{AO}$  e  $\theta_{OA}$  - azimute e contra-azimute planos.
- $A_{AO}$  - azimute elipsóidico da direção A-O.
- $\gamma_A$  - convergência meridiana em A ou azimute plano da transformada do meridiano em A.
- $\Delta N$  e  $\Delta E$  - diferenças de coordenadas planas.
- $A_{OA}$  - azimute elipsóidico da corda.
- $\gamma_O$  - convergência meridiana no ponto O.
- 1 - 1º ponto da poligonal.

Seqüência de cálculo e fórmulas a aplicar.

1º) Azimute e contra-azimute planos de  $\sigma_{AO}$

$$\theta_{AO} = \text{arctg} \frac{\Delta E}{\Delta N} \quad (3.3.1)$$

$$\theta_{OA} = \theta_{AO} + 180^\circ \quad (3.3.2)$$

2º) Convergências meridianas em A e O.

Fórmula geral

$$\begin{aligned} \gamma_A'' = & \frac{\text{tg}\phi_0 \rho''}{N_0} Y - \frac{\text{tg}\phi_0 \rho''}{3N_0} Y^3 (1 + \text{tg}^2 \phi_0 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) + \\ & + \frac{\text{tg}\phi_0 \rho''}{15N_0^5} Y^5 (2 + 5\text{tg}^2 \phi_0 + 3\text{tg}^4 \phi_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Fórmula adaptada para tabelas e âbacos.

$$\gamma_A'' = XVq - XVIq^3 + F_5 \quad (3.3.4)$$

Onde

$$XV = \frac{\text{tg}\phi_0}{N_0 \text{sen} 1''} \frac{10^6}{k_0}$$

$$XVI = \frac{\text{tg}\phi_0}{3N_0^3 \text{sen} 1''} (1 + \text{tg}^2 \phi_0 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) \frac{10^{18}}{k_0^3}$$

$$F_5 = \frac{q^5 \text{tg}\phi_0}{15N_0^5 \text{sen} 1''} (2 + 5\text{tg}^2 \phi_0 + 3\text{tg}^4 \phi_0) \frac{10^{30}}{k_0^5}$$

O argumento é  $\phi_0$  que é calculado entrando-se na tabela própria, coluna I, com N' onde

$$N' = 10.000.000 - N \quad - \text{ Hemisfério Sul}$$

$$N' = N \quad - \text{ Hemisfério Norte}$$

$$q = 0,000001E'$$

Onde:

$E' = 500.000 - E$  - Ponto a W do meridiano central

$E' = E - 500.000$  - Ponto a L do meridiano central

$F_5$  = De gráfico, com argumento  $q$ .

Raciocínio semelhante para  $\gamma_0''$ .

39) Reduções angulares em A e O

$$\delta_{AO}'' = 6,8755 \Delta N 10^{-8} (2E'_A + E'_O) \text{ XVIII} \quad (3.3.5)$$

$$\delta_{OA}'' = -6,8755 \Delta N 10^{-8} (E'_A + 2E'_O) \text{ XVIII} \quad (3.3.6)$$

Em que:

$$\text{XVIII} = \frac{10^{12}}{2R_m^2 k_0^2} - \text{pode ser tabelado com argumento de entrada}$$

$$N_m = \frac{N_A + N_O}{2}$$

$$\Delta N = N_A - N_O$$

$E'_A = 500.000 - E_A$  - ponto a W do meridiano central

$E'_A = E_A - 500.000$  - ponto a L do meridiano central

49) Azimute e contra-azimute elipsóidicos de  $S_{AO}$

$$A_{AO} = \theta_{AO} - \gamma_A - \delta_{AO} \quad (3.3.7)$$

$$A_{OA} = \theta_{OA} - \gamma_O - \delta_{OA} \quad (3.3.8)$$

59) Corda da transformada da geodésica ou lado plano



$$\sigma_{AO} = \frac{\Delta N}{\cos \theta_{AO}} = \frac{\Delta E}{\sin \theta_{AO}} \quad (3.3.9)$$

69) Geodésica ou lado elipsóidico

$$s_{AO} = \frac{\sigma_{AO}}{\bar{m}}$$

Onde:

$$\bar{m} = K_0 (1 + XVIII \bar{q}^2 + 0,00003 \bar{q}^4)$$

$$\bar{q}^2 = \frac{1}{3} (q_A^2 + q_0^2 + q_A q_0)$$

$$q_A = 0,000001 E'_A$$

$$q_0 = 0,000001 E'_0$$

$$K_0 = 0,9996$$

Em que:

$\bar{m}$  - fator de escala ou coeficiente de deformação médio.

### 3.4. Transporte de Coordenadas Elipsóidicas

Para executar o transporte de coordenadas elipsóidicas ou geográficas de um ponto para outro, de uma poligonal, é necessário conhecer:

- as coordenadas elipsóidicas ou geográficas  $\phi_0$  e  $\lambda_0$ , do ponto O;
- a distância geodésica ou lado elipsóidico  $s_{01}$ , medido entre os dois pontos, já com as devidas correções, à geodésica;
- o azimute geodésico ou elipsóidico  $A_{01}$ , contado a partir da direção sul.

Após o transporte tem-se:

- as coordenadas elipsóidicas  $\phi_1$  e  $\lambda_1$ , do ponto 1;
- o contra-azimute ou azimute recíproco  $A_{10}$ , necessário ao prosseguimento do transporte.

Esta operação constitui o "problema direto", ilustrado na figura 3.4.1 e cujas fórmulas de Puissant, deduzidas em <sup>[24]</sup> e <sup>[25]</sup> veremos adiante. Em anexo, um programa para "Transporte de Coordenadas no Elipsóide - Fórmulas de Puissant", conforme <sup>[26]</sup>.

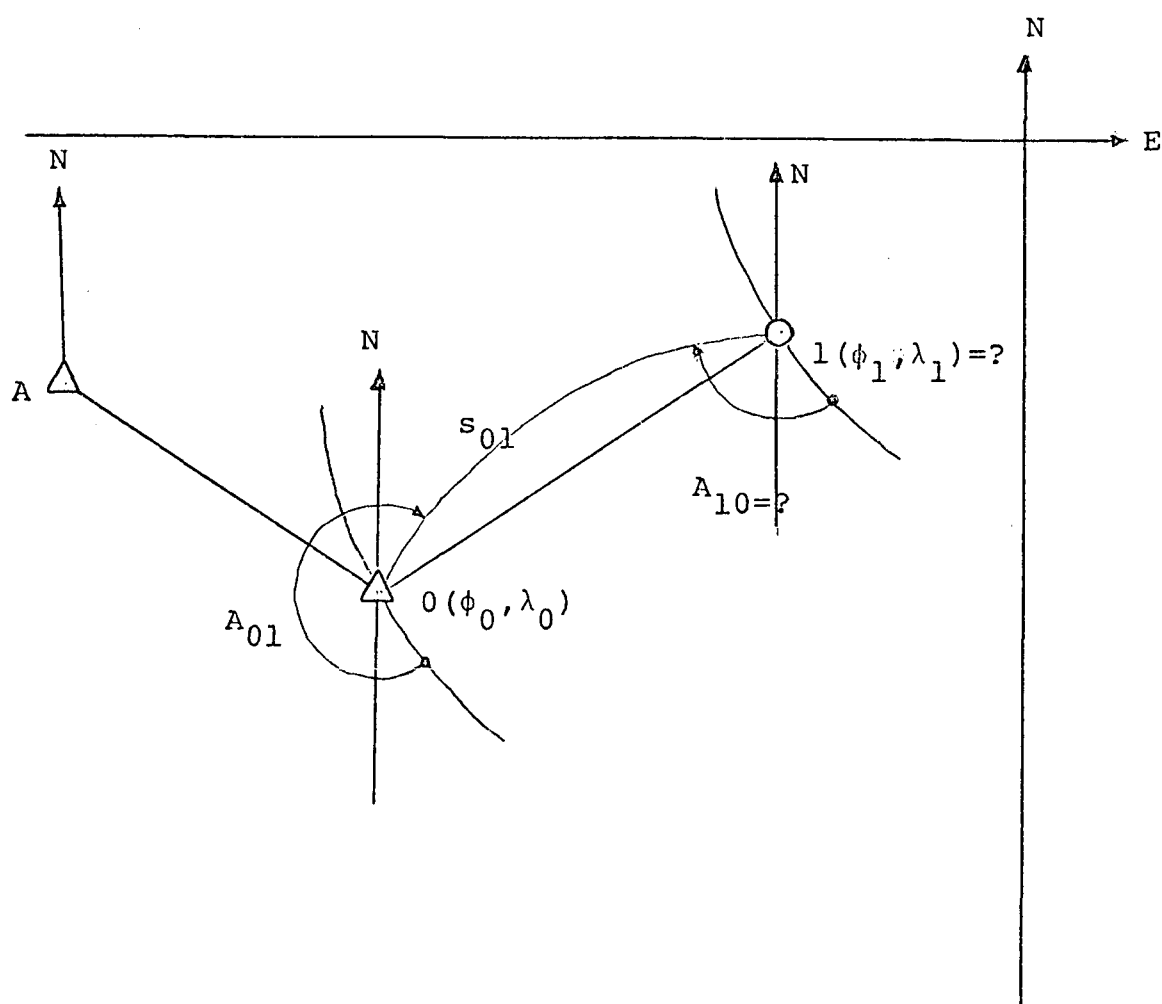


Fig. - 3.4.1

### 3.4.1. Cálculo da Latitude

Fórmulas a empregar:

$$\phi_1 = \phi_0 - \Delta\phi \quad (3.4.1.1)$$

$$\Delta\phi'' = \delta\phi'' + D(\delta\phi'')^2 \quad (3.4.1.2)$$

$$\delta\phi'' = B\text{scos}A_{01} + Cs^2\text{sen}^2A_{01} - Ehs^2\text{sen}^2A_{01} \quad (3.4.1.3)$$

$$h = B \text{scos}A_{01} \quad (3.4.1.4)$$

Cujos coeficientes B, C, D e E foram tabelados, em função de  $\phi$ , para o Elipsóide Referência 1967 conforme programa de computador, anexo, |<sup>27</sup>|

$$B = \frac{1}{R_m \text{sen}l''} \quad (3.4.1.5)$$

$$C = \frac{\text{tg}\phi_0}{2R_m N \text{sen}l''} \quad (3.4.1.6)$$

$$D = \frac{\frac{3}{2} e^2 \text{sen}\phi_0 \cos\phi_0 \text{sen}l''}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_0)} \quad (3.4.1.7)$$

$$E = \frac{1 + 3\text{tg}^2\phi_0}{6N^2} \quad (3.4.1.8)$$

Em que:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_0)^{1/2}}$$

$$R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_m)^{3/2}}$$

Onde cada elemento tem o significado seguinte:

$\phi_0$  - latitude geográfica do ponto 0, conhecida.

$\phi_1$  - latitude geográfica do ponto 1, a determinar.

$\Delta\phi$  - diferença de latitude entre os dois pontos.

$s$  - distância geodésica, medida entre os dois pontos e já corrigida.

$A_{01}$  - azimute geodésico da direção 0-1, conhecido.

$N$  - raio de curvatura da seção 1ª vertical.

$R_m$  - raio de curvatura, no meridiano, para a latitude média.

Constantes referidas ao Elipsóide de Referência 1967 <sup>[28]</sup>  
 $e^2 = 0,006\ 694\ 605\ 328\ 56$ , quadrado da 1ª excentricidade.  
 $a = 6\ 378\ 160,0\text{m}$ , semi-eixo maior.

### 3.4.2. Cálculo da Longitude

Fórmulas utilizando as tabelas do item anterior

$$\lambda_1 = \lambda_0 \pm \Delta\lambda \quad (3.4.2.1)$$

Será (+) se o ponto 1 estiver a oeste do meridiano central do fuso UTM considerado.

$$\Delta\lambda'' = A'_1 \left[ x + (c_1 + c_2) \right] \quad (3.4.2.2)$$

Em que:

$$A'_1 = \sec\phi_1 A' = \sec\phi_1 \frac{1}{N_1 \text{sen} l''}$$

$A'$  - fator que pode ser tabelado tendo como argumento a latitude do ponto 1 <sup>[29]</sup>.

$$c_1 = \frac{2}{3} x^3 \left( \frac{C}{B} \right)^2$$

Correção arco-seno, 1ª parte, em que  $x = s_{01} \text{sen} A_{01}$ .

A correção tem o mesmo sinal de x

$$c_2 = - \frac{4,095 \times y^2}{10^{15}}$$

Correção arco-seno, 2ª parte, em que:

$$x = s_{01} \operatorname{sen} A_{01}$$

$$y = s_{01} \operatorname{cos} A_{01}$$

A correção tem sinal contrário a x.

### 3.4.3. Cálculo do Contra-Azimute

Fórmulas

$$A_{10} = A_{01} + \Delta A + 180^\circ \quad (3.4.3.1)$$

$$\Delta A = - \Delta \lambda'' \operatorname{sen} \phi_m \sec \frac{1}{2} \Delta \phi - F(\Delta \lambda'')^3 \quad (3.4.3.2)$$

Em que:

$$\phi_m = \frac{\phi_0 + \phi_1}{2}$$

$$\Delta \phi = \phi_1 - \phi_0$$

$$F = \frac{1}{12} \operatorname{sen} \phi_m \cos^2 \phi_m \operatorname{sen}^2 1'' \quad |^{\circ 3}|$$

Onde:

$\sec \frac{1}{2} \Delta \phi$  é desprezível, na maioria dos casos, para lados menores que 25km.

$F(\Delta \lambda'')^3$  é desprezível, em trabalhos ordinários de triangulação, para lados menores que 25km ou  $\Delta \lambda < 17'$

Para  $\phi_m = 45^\circ$  e  $\Delta \lambda = 17'$  temos:

$F(\Delta \lambda'')^3 = 0,00073489''$ , desprezível ao milésimo de segundos de arco.

Fórmulas sob outros aspectos:

$$A_{10} = A_{01} + \Delta A \pm 180^\circ \quad (3.4.3.3)$$

$$\Delta_A = -\Delta\lambda \operatorname{sen}\phi_m - c_3 - c_4 \quad (3.4.3.4)$$

Em que:

$$c_3 = \Delta\lambda \operatorname{sen}\phi_m (\sec \frac{1}{2}\Delta\phi'' - 1) - \text{Correção de } \Delta A \text{ com termo em}$$

$$\sec \frac{1}{2}\Delta\phi''$$

$$c_4 = (\Delta\lambda'')^3 - \text{Correção de } F(\Delta\lambda'')^3$$

Ambas as correções são somadas a  $\Delta A$ .

Tem-se como resultado final do transporte de coordenadas sobre o elipsóide, as coordenadas elipsoidais  $\phi_1$  e  $\lambda_1$  e o azimute  $A_{10}$  necessários ao novo transporte.

### 3.5. Transporte de Coordenadas Planas UTM

O transporte de coordenadas planas UTM (Universal Transverso Mercator), de um ponto para outro, exige que se conheçam alguns elementos:

Dados:

- $N_0$  e  $E_0$  - coordenadas planas UTM do 1º ponto.
- $s_{01}$  - distância geodésica medida entre os dois pontos
- $\alpha_1$  - ângulo, medido no ponto 0, entre o lado OA e 01.
- $\theta_{OA}$  - azimute plano da direção O-A.
- $\delta_{OA}$  - redução angular da direção O-A.

Após a execução do transporte no plano, tem-se:

$N_1$  e  $E_1$  - coordenadas planas UTM do 2º ponto.

$\theta_{10}$  - azimuth plano da direção 1-0.

$\delta''_{10}$  - redução angular da direção 1-0.

A figura 3.5.1, abaixo, ilustra o transporte plano UTM.

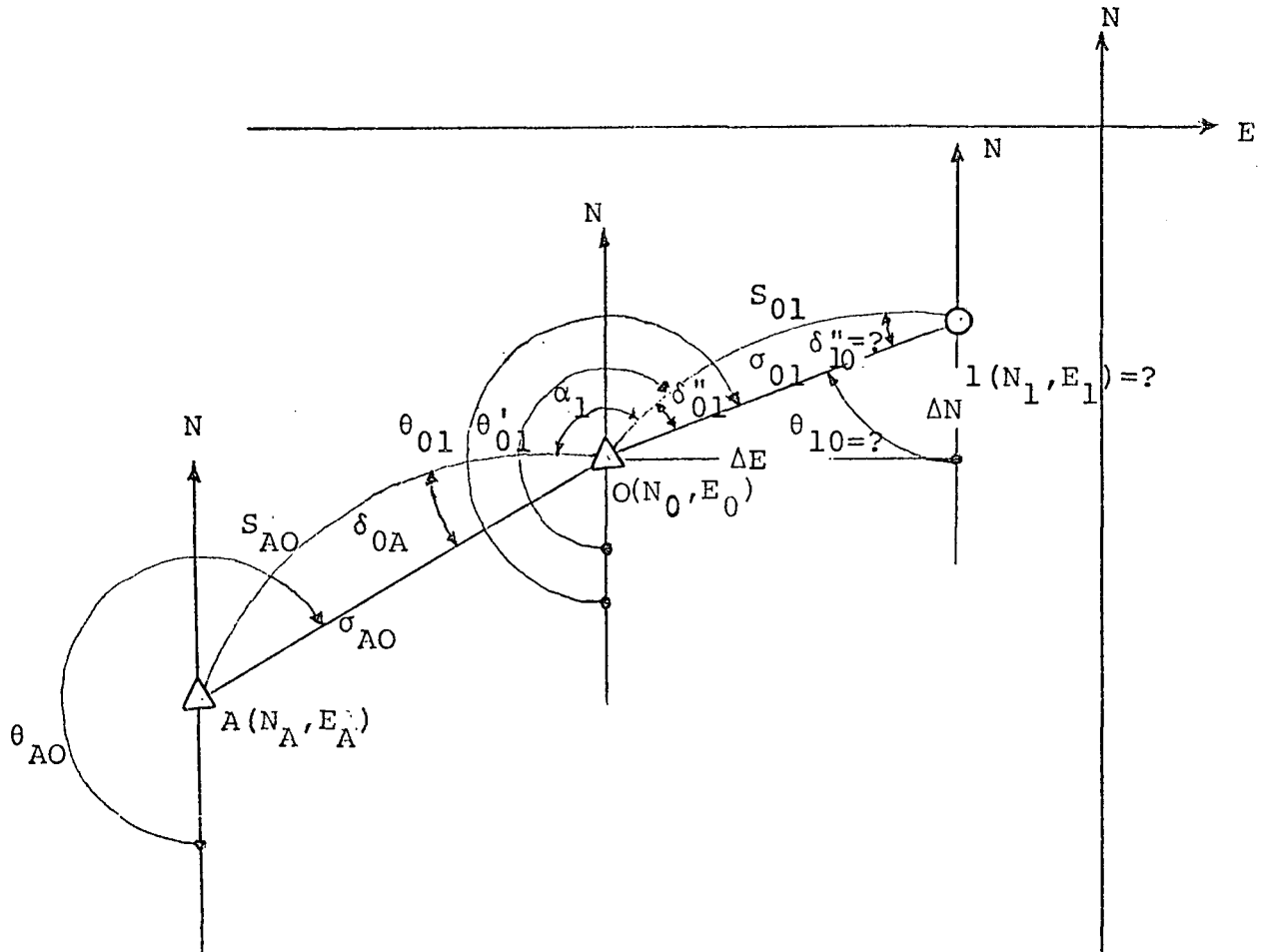


Fig. 3.5.1

Em que:

$S_{AO}$  - transformada de um arco de geodésica  $s_{AO}$ .

$\sigma_{AO}$  - corda da transformada  $S_{AO}$  ou lado plano.

$S_{01}$  - transformada de um arco de geodésica  $s_{01}$ .

$\sigma_{01}$  - corda da transformada  $S_{01}$  ou lado plano.

$\theta_{AO}$  - azimute plano de  $\sigma_{AO}$ .

$\theta_{01}$  - azimute plano de  $\sigma_{01}$ .

$\theta'_{01}$  - azimute plano aproximado de  $\sigma_{01}$ .

$\delta''_{AO}$  - redução angular da direção A-O.

$\delta''_{01}$  - redução angular da direção 0-1.

$\Delta E$  e  $\Delta N$  - diferenças de coordenadas planas UTM.

### 3.5.1. Seqüência de Cálculo

As demonstrações das fórmulas seguintes estão contidas, entre outros, em GEMAEL<sup>[3.1]</sup>, RICHARDUS<sup>[3.2]</sup> e CHAGAS<sup>[3.3]</sup>.

1º) Azimute plano aproximado de  $\sigma_{01}$ .

$$\theta'_{01} = \theta_{AO} - \delta_{OA} + \alpha_1 \pm 180^\circ \quad (3.5.1.1)$$

2º) Diferenças de coordenadas provisórias.

$$(\Delta N) = s_{01} \cos \theta'_{01} \quad (3.5.1.2)$$

$$(\Delta E) = s_{01} \sin \theta'_{01} \quad (3.5.1.3)$$

3º) Reduções angulares.

$$\delta''_{01} = 6,8755 \Delta N 10^{-8} (2E'_0 + E'_1) \text{ XVIII} \quad (3.5.1.4)$$

$$\delta''_{10} = -6,8755 \Delta N 10^{-8} (E'_0 + 2E'_1) \text{ XVIII} \quad (3.5.1.5)$$

Em que:

$$\text{XVIII} = \frac{10^{12}}{2R_m^2 K_0^2}$$

Pode ser tabelado com argumento de entrada

$$N_m = N_1 - \frac{(\Delta N)}{2}$$



$E'_0 = E_0 - 500.000$  Ponto a leste do meridiano central.

$E'_0 = 500.000 - E_0$  Ponto a oeste do meridiano central.

$E'_1 = (E_1) - 500.000$  Ponto a leste do meridiano central.

$E'_1 = 500.000 - (E_1)$  Ponto a oeste do meridiano central.

$$(E_1) = E_0 - (\Delta E)$$

49) Azimute e contra-azimute planos de  $\sigma_{01}$ .

$$\theta_{01} = \theta'_{01} + \delta''_{01} \quad (3.5.1.6)$$

$$\theta_{10} = \theta_{01} + 180^\circ \quad (3.5.1.7)$$

59) Fator de escala médio

$$\bar{m} = K_0 (1 + \text{XVIII} \bar{q}^2 + 0,00003\bar{q}^4) \quad (3.5.1.8)$$

$$\bar{q}^2 = \frac{1}{3} (q_0^2 + q_1^2 + q_0 q_1)$$

$$q_0 = 0,000001 E'_0$$

$$q_1 = 0,000001 (E'_1)$$

$$K_0 = 0,9996$$

69) Corda da transformada da geodésica ou lado plano.

$$\sigma_{01} = \bar{m} s_{01} \quad (3.5.1.9)$$

79) Diferenças de coordenadas planas, definitivas.

$$\Delta N = \sigma_{01} \cos \theta_{01} \quad (3.5.1.10)$$

$$\Delta E = \sigma_{01} \operatorname{sen} \theta_{01} \quad (3.5.1.11)$$

8º) Coordenadas do 2º ponto.

$$N_1 = N_0 - \Delta N \quad (3.5.1.12)$$

$$E_1 = E_0 - \Delta E \quad (3.5.1.13)$$

Tanto no transporte elipsóidico como no plano as fórmulas asseguram uma mesma precisão.

O número de casas decimais de "q" e suas potências, varia com a precisão que se deseja. Quando se usam máquinas de calcular eletrônicas, geralmente o cálculo é realizado utilizando todas as casas decimais disponíveis.

Segue-se uma tabela <sup>34</sup> que ilustra o problema.

Precisão desejada	q = 0,00001E'	q <sup>2</sup>	q <sup>4</sup>
0,1"	6 decimais	6 decimais	5 decimais
0,01"	7 decimais	7 decimais	6 decimais
0,001"	8 decimais	8 decimais	7 decimais

Chega-se, portanto, às coordenadas planas do 2º ponto, ao azimute plano da direção 1-0 e à redução angular desta direção. Estes dois últimos dados são necessários ao prosseguimento do transporte de coordenadas planas através da poligonal.

Calculadas as coordenadas de todos os vértices da poligonal, procede-se ao ajustamento e estudo estatístico da mesma.

### 3.6. Coordenadas de um vértice de Ordem "n"

Segue-se a dedução das fórmulas que conduzem às coordenadas planas de um vértice de ordem "n", bem como o azimuth do enésimo lado, conforme |<sup>35</sup>|.

A figura 3.6.1 ilustra o problema.

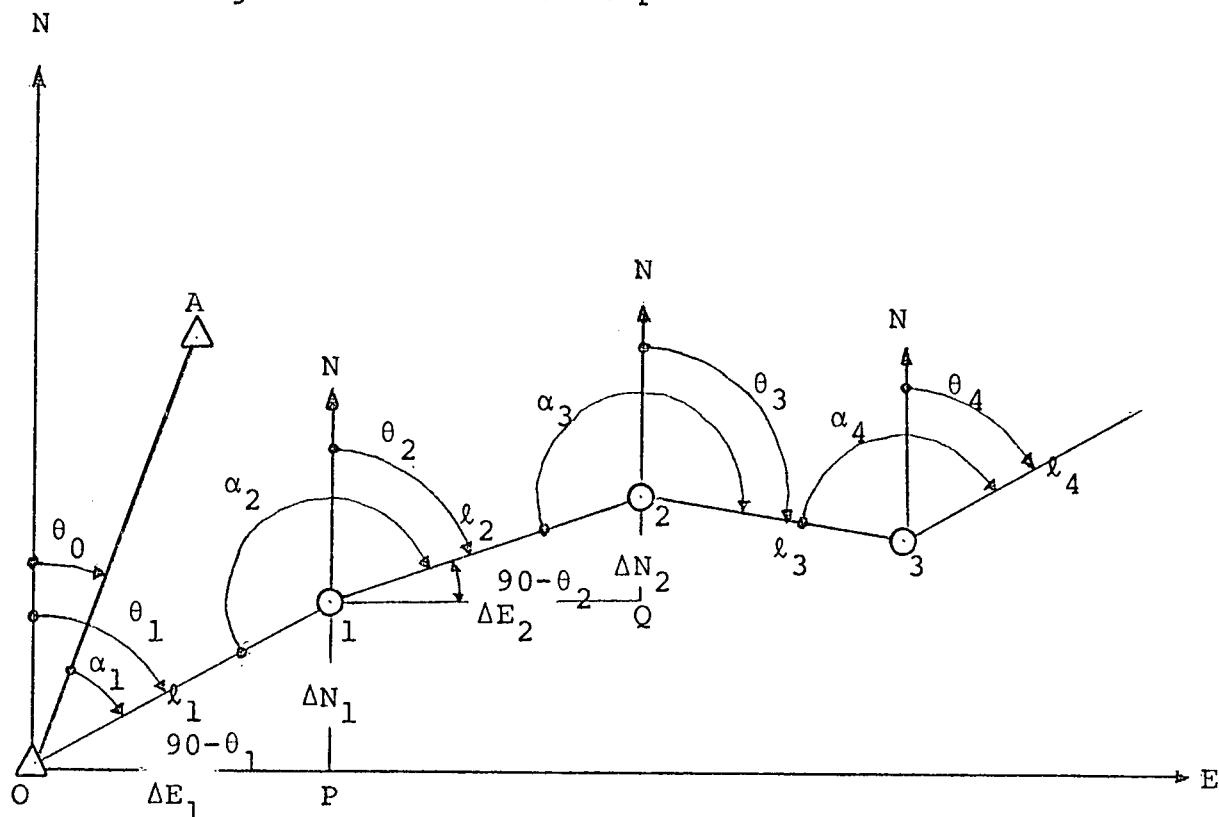


Fig. 3.6.1

Onde:

Os azimutes são contados a partir do norte.

O ponto O é a origem do sistema de coordenadas.

$\theta_{0,1,2,3,\dots,n}$  - são azimutes planos contados do norte.

$\alpha_{1,2,3,\dots,n}$  - são ângulos planos entre as direções observadas.

$\Delta N$  e  $\Delta E$  - são diferenças de coordenadas planas UTM.

A e O - são pontos, de ordem superior, de coordenadas planas UTM conhecidas.

$l_{1,2,3,\dots,n}$  - são lados planos ( $\sigma_{01,12,23,\dots,n} = l_{1,2,3,\dots,n}$  para facilidade de notação)

Pede-se:

$E_n$  e  $N_n$  - coordenadas planas UTM do vértice de ordem "n".

$\alpha_n$  - azimute do enésimo lado.

Dedução:

Coordenadas de um vértice de ordem "n".

Do triângulo O 1 P tiramos:

$$\cos(90-\theta_1) = \frac{\Delta E_1}{l_1} \quad \text{ou} \quad \Delta E_1 = l_1 \cos(90-\theta_1) = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\operatorname{sen}(90-\theta_1) = \frac{\Delta N_1}{l_1} \quad \text{ou} \quad \Delta N_1 = l_1 \operatorname{sen}(90-\theta_1) = l_1 \operatorname{cos}\theta_1$$

Como na origem  $E_0 = N_0 = 0$ , temos no vértice 1:

$$E_1 = E_0 + \Delta E_1 \quad \text{ou} \quad E_1 = E_0 + l_1 \operatorname{sen}\theta_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$N_1 = N_0 + \Delta N_1 \quad \text{ou} \quad N_1 = N_0 + l_1 \operatorname{cos}\theta_1 = l_1 \operatorname{cos}\theta_1$$

Do triângulo 1 2 Q tiramos:

$$\cos(90-\theta_2) = \frac{\Delta E_2}{l_2} \quad \text{ou} \quad \Delta E_2 = l_2 \cos(90-\theta_2) = l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\operatorname{sen}(90-\theta_2) = \frac{\Delta N_2}{l_2} \quad \text{ou} \quad \Delta N_2 = l_2 \operatorname{sen}(90-\theta_2) = l_2 \operatorname{cos}\theta_2$$

No vértice 2 temos:

$$E_2 = E_1 + \Delta E_2 \quad \text{ou} \quad E_2 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$N_2 = N_1 + \Delta N_2 \quad \text{ou} \quad N_2 = l_1 \operatorname{cos}\theta_1 + l_2 \operatorname{cos}\theta_2$$

No vértice 3 temos:

$$E_3 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 + l_3 \operatorname{sen}\theta_3$$

$$N_3 = l_1 \operatorname{cos}\theta_1 + l_2 \operatorname{cos}\theta_2 + l_3 \operatorname{cos}\theta_3$$

No vértice "n" temos:

$$E_n = \sum_{i=1}^n l_i \operatorname{sen}\theta_i \quad (3.6.1)$$

$$N_n = \sum_{i=1}^n l_i \operatorname{cos}\theta_i \quad (3.6.2)$$

Azimute do enésimo lado

Da figura 3.6.1 temos:

$$\theta_1 = \theta_0 + \alpha_1$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \pm 1 \times 180^\circ$$

$$\theta_3 = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pm 2 \times 180^\circ$$

$$\theta_4 = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \pm 3 \times 180^\circ$$

.

.

.

.

.

$$\theta_n = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \dots \alpha_n \pm (n-1) \times 180^\circ$$

$$\theta_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \pm (n-1) \times 180^\circ \quad (3.6.3)$$

## CAPÍTULO 4

PRÓPAGACÃO DE ERRO NA POLIGONAL4.1. Definições

A seguir, recordamos, superficialmente, algumas definições e conceitos que se fazem necessários ao desenvolvimento do presente capítulo. O leitor interessado em maiores detalhes poderá consultar, na variada bibliografia sobre o assunto, por exemplo: GEMAEL <sup>|36|</sup>, <sup>|37|</sup>; BJERHAMMAR <sup>|38|</sup>; HIRVONEN <sup>|39|</sup> e WELLS e KRAKIWSKY <sup>|40|</sup>.

- Momento de ordem r de uma variável aleatória  $\underline{x}$  em relação à sua esperança matemática  $\mu_x$ :

$$M^r = E \left\{ (x - \mu_x)^r \right\} \quad (4.1.1)$$

- Quando  $r=2$  temos a variância:

$$M^2 = E \left\{ (x - \mu_x)^2 \right\} = \text{Var}(x) = \sigma_x^2 = \sigma^2 \quad (4.1.2)$$

- Se extrairmos a raiz quadrada, aritmética da variância temos o desvio-padrão  $\underline{\sigma}$ , de importância fundamental em nosso estudo.

- Covariância  $\sigma_{xy}$ , da variável aleatória bidimensional:

$$\text{Cov}(xy) = \sigma_{xy} = E \left\{ (x - \mu_x)(y - \mu_y) \right\} \quad (4.1.3)$$

- Coefficiente de Correlação

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.1.4)$$

Em que:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

- Se  $\underline{x}$  é uma variável aleatória n-dimensional admitirá  $\underline{n}$  variâncias ( $\sigma_i^2$ ), uma para cada componente e  $n^2 - n$  covariâncias ( $\sigma_{ij}$ ), uma para cada par de componentes. Esses  $\underline{n}^2$  elementos podem ser dispostos de maneira a compor a matriz quadrada:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

de suma importância no Ajustamento de Observações, denominada matriz variância-covariância. Trata-se de uma matriz simétrica ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) cujos elementos diagonais são as variâncias.

Desenvolvendo-se a expressão  $(X - U_x)(X - U_x)^T$  e aplicando-se a esperança, demonstra-se que:

$$\Sigma_x = E \left\{ (X - U_x)(X - U_x)^T \right\} \quad (4.1.6)$$

sendo

$$E \{X\} = U_x$$

- Matriz dos coeficientes de peso:

$$Q_x = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma x \quad (4.1.7)$$

Em que:

$\sigma_0^2$  = variância da componente de peso unitário.

- Matriz dos pesos:

Se a matriz variância-covariância for não-singular:

$$Q_x^{-1} = P_x \quad (4.1.8)$$

- As observações podem ser consideradas como amostras extraídas de uma população contínua e infinita; ou seja, como uma variável aleatória com a sua correspondente distribuição de probabilidade. Pode-se assim falar em esperança matemática, variância, covariância, etc. das observações.

No caso de observações diretas  $\underline{x}_i$ , de mesma confiabilidade, a média aritmética da amostra de tamanho  $\underline{n}$ .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1.9)$$

é um estimador imparcial da média populacional.

- Variância amostral (observação isolada):

$$m^2 = \frac{\Sigma v_i^2}{n - 1} \quad (4.1.10)$$

- Variância da média amostral

$$m_x^2 = \frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)} \quad (4.1.11)$$



sendo

$$v_i = \bar{x} - x_i \quad (4.1.12)$$

os resíduos.

- Desvio-padrão  $\sigma$ :

Tomado com o duplo sinal, é utilizado pelos geodestas com a denominação de "erro médio quadrático".

#### 4.2. Lei de Propagação das Variâncias-Covariâncias - Caso Linear

Seja:

$$Y = GX + C \quad (4.2.1)$$

Em que:

X e Y - são variáveis aleatórias em que Y é função linear de X.

G e C - são matrizes formadas por elementos constantes.

Pode-se escrever que:

$$E\{Y\} = U_Y = E\{GX+C\} = GE\{X\} + C \quad (4.2.2)$$

E ainda que:

$$\Sigma_Y = E\left\{(Y-U_Y)(Y-U_Y)^T\right\} \quad (4.2.3)$$

Substituindo-se as (4.2.1) e (4.2.2) em (4.2.3) vem:

$$\Sigma_Y = E\left\{\left[GX+C-GE\{X\}-C\right]\left[GX+C-GE\{X\}-C\right]^T\right\}$$

$$\Sigma_Y = GE\left\{\left[X-E\{X\}\right]\left[X^T G^T - E\{X\}^T G^T\right]\right\}$$

$$\Sigma_Y = GE\left\{\left[X-E\{X\}\right]\left[X^T - E\{X\}^T\right]\right\} G^T$$

$$E \left\{ [X - E\{X\}] [X^T - E\{X\}^T] \right\} = \Sigma_X$$

Logo:

$$\Sigma_Y = G \Sigma_X G^T \tag{4.2.4}$$

O caso não-linear é o que será demonstrado a seguir, item 4.3, e constitui uma generalização da fórmula (4.2.4).

4.3. Lei de Propagação das Variâncias-Covariâncias - Caso não-Linear

4.3.1. Aproximação Linear da Série de Taylor, para uma Função a uma Variável

Inicialmente, é feito um estudo sobre a série de Taylor que nos dá o valor da função  $f(t)$  no ponto  $t=x$  quando conhecemos o valor da função para  $t=a$ . Esta linha de ação nos conduz a uma aproximação linear da série de Taylor e posteriormente à lei de propagação das variâncias e covariâncias, caso não-linear.

A figura 4.3.1 ilustra a aproximação linear da série de Taylor, e cuja demonstração é orientada segundo GEMAEL <sup>[41]</sup>.

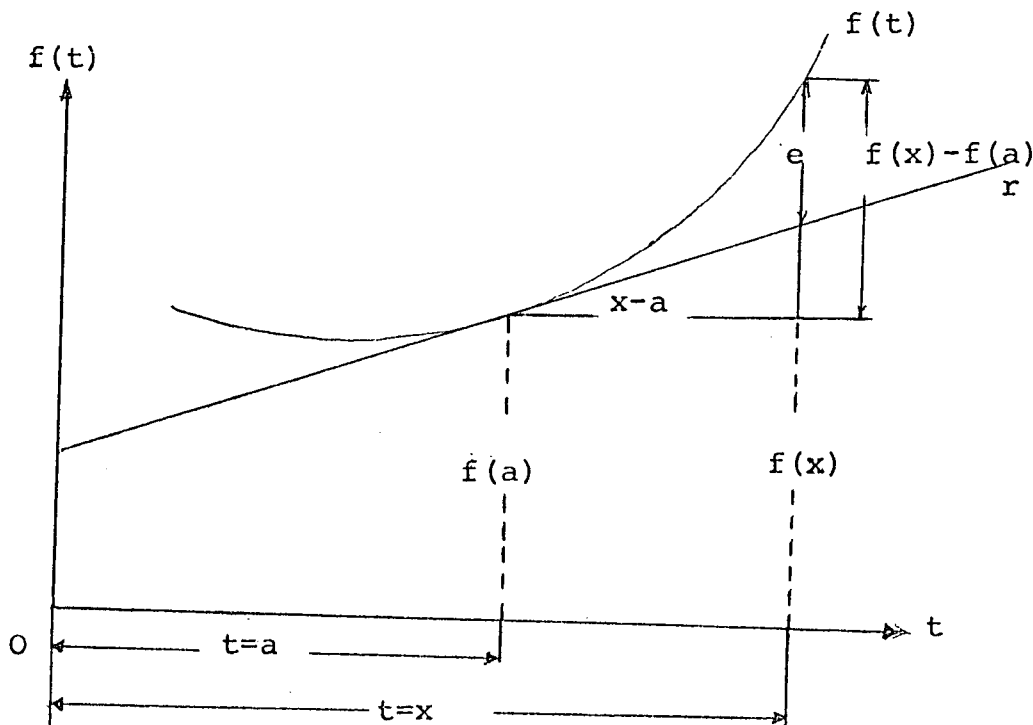


Fig. 4.3.1

Em que:

e - erro cometido quando se substitui a curva pela reta.

Seja:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{x-a}{2!} + \dots \quad (4.3.1.1)$$

Quando  $x$  for muito próximo de  $a$ , negligenciam-se, na maioria dos casos, as potências superiores a  $2^a$ , o que quer dizer que teremos um erro mínimo, e nas proximidades de  $a$ , a curva  $f(t)$  pode ser substituída pela reta  $r$ .

A expressão (4.3.1.1) assume a forma linear:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + m(x-a) \quad (4.3.1.2)$$

Em que:

$f'(a) = m$  é o coeficiente angular da reta.

#### 4.3.2. Aproximação Linear da Série de Taylor, para uma Função a Duas Variáveis

Tratando-se de uma função com duas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , tem-se:

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - a_2) \quad (4.3.1.3)$$

Fazendo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad X_a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta X = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Substituindo os termos acima em (4.3.1.3), resulta:

$$f(X) = f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X_0} \Delta X \quad (4.3.1.4)$$

4.3.3. Aproximação Linear da Série de Taylor para  $m$  Funções a  $n$  Variáveis

Generalizando a (4.3.1.4) temos:

$$f_1(X) = f_1(X_0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X$$

$$f_2(X) = f_2(X_0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X$$

$$f_3(X) = f_3(X_0) + \left. \frac{\partial f_3}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X$$

⋮  
⋮  
⋮

$$f_n(X) = f_n(X_0) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X$$

Fazendo:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad F(X_0) = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ f_3(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} & \frac{\partial f_1}{x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} & \frac{\partial f_2}{x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{x_n} \\ \frac{\partial f_3}{x_1} & \frac{\partial f_3}{x_2} & \frac{\partial f_3}{x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{x_1} & \frac{\partial f_m}{x_2} & \frac{\partial f_m}{x_3} & \dots & \frac{\partial f_m}{x_n} \end{bmatrix}_{X_0} \quad (4.3.3.1)$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ x_3 - x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n - x_0 \end{bmatrix}$$

tem-se a aproximação linear da fórmula de Taylor em forma matricial:

$$F(X) = F(X_0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} \Delta X \quad (4.3.3.2)$$

Chamando:

$$F(X) = Y \text{ e } \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} = D \quad \text{onde } \Delta X = X - X_0 \text{ e } F(X_0) = \text{constante}$$

Vem:

$$Y = F(X_0) + D(X - X_0) \quad (4.3.3.3)$$

A esperança de ambos os membros é:

$$E\{Y\} = F(X_0) + DE\{X-X_0\}$$

$$E\{Y\} = F(X_0) - DX_0 + DE\{X\}$$

$$E\{Y\} = U_Y = F(X_0) - DX_0 + DE\{X\} \quad (4.3.3.4)$$

Mas:

$$\Sigma_Y = E\left\{(Y-U_Y)(Y-U_Y)^T\right\} \quad (4.3.3.5)$$

e substituindo a (4.3.3.3) e a (4.3.3.4) em (4.3.3.5) temos:

$$\Sigma_Y = E\left\{\left[F(X_0)+DX-DX_0 - F(X_0) + DX_0 - DE\{X\}\right] \times \left[F(X_0)+DX-DX_0 - F(X_0)+DX_0 - DE\{X\}\right]^T\right\}$$

$$\Sigma_Y = E\left\{\left[DX-DE\{X\}\right] \times \left[DX-DE\{X\}\right]^T\right\}$$

$$\Sigma_Y = DE\left\{\left[X-E\{X\}\right] \times \left[X^T D^T - E\{X\}^T D^T\right]\right\}$$

$$\Sigma_Y = DE\left\{\left[X-E\{X\}\right] \times \left[X^T - E\{X\}^T\right]\right\} D^T$$

Mas:

$$E\left\{\left[X-E\{X\}\right] \times \left[X^T - E\{X\}^T\right]\right\} = \Sigma_X \quad \text{logo:}$$

$$\Sigma_Y = D \Sigma_X D^T \quad (4.3.3.6)$$

Que é a expressão da lei de propagação da variância-covariância, caso não-linear.

#### 4.4. Matriz Variância-Covariância das Coordenadas Planas de um Vértice de Ordem $n$

As fórmulas que porporcionam as coordenadas planas de um vértice de ordem  $n$ , de uma poligonal, foram deduzidas no Capítulo 3 e, para conveniência do leitor, são repetidas a seguir:

$$E_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{sen}\theta_i$$

$$N_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{cos}\theta_i$$

A matriz variância-covariância de tais coordenadas pode ser obtida a partir da matriz variância-covariância do lado ( $\ell$ ) e azimute ( $\theta$ ), por simples propagação; com efeito aplicando a (4.3.9).

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & = & D & \Sigma_{\ell, \theta} & D^T \\ E, N & & & & \\ 2 \times 2 & & 2 \times k & k \times k & k \times 2 \end{array} \quad (4.4.1)$$

Onde:

$$D = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial E}{\partial \ell_1} & \frac{\partial E}{\partial \ell_2} & \frac{\partial E}{\partial \ell_3} & \cdots & \frac{\partial E}{\partial \ell_n} & \frac{\partial E}{\partial \theta_1} & \frac{\partial E}{\partial \theta_2} & \frac{\partial E}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial E}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial N}{\partial \ell_1} & \frac{\partial N}{\partial \ell_2} & \frac{\partial N}{\partial \ell_3} & \cdots & \frac{\partial N}{\partial \ell_n} & \frac{\partial N}{\partial \theta_1} & \frac{\partial N}{\partial \theta_2} & \frac{\partial N}{\partial \theta_3} & \cdots & \frac{\partial N}{\partial \theta_n} \end{array} \right] \end{array} \quad (4.4.2)$$

$$\Sigma_{\ell, \theta} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\ell} & \bar{0} \\ \bar{0} & \Sigma_{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

A matriz bloco diagonal(4.4.3) pode ser assim explicitada:

$$\Sigma_{\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_{\ell_1}^2 & \sigma_{\ell_1\ell_2} & \sigma_{\ell_1\ell_3} & \dots & \sigma_{\ell_1\ell_n} \\ \sigma_{\ell_2\ell_1} & \sigma_{\ell_2}^2 & \sigma_{\ell_2\ell_3} & \dots & \sigma_{\ell_2\ell_n} \\ \sigma_{\ell_3\ell_1} & \sigma_{\ell_3\ell_2} & \sigma_{\ell_3}^2 & \dots & \sigma_{\ell_3\ell_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\ell_n\ell_1} & \sigma_{\ell_n\ell_2} & \sigma_{\ell_n\ell_3} & \dots & \sigma_{\ell_n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Considerando as medidas de distâncias, entre si independentes, ( $\sigma_{\ell_{ij}} = 0$ ), a correspondente matriz variância-covariância é diagonal ( $\sigma_{\ell_{ii}} = 0$ ) para  $i=1,2,3,\dots,n$ . Por outro lado, na poligonal são medidos ângulos, e não azimutes, o que pressupõe outra propagação:

$$\Sigma_{\theta} = G \Sigma_{\alpha} G^T \quad (4.4.5)$$

$\begin{matrix} \text{nxn} & \text{nxn} & \text{nxn} & \text{nxn} \end{matrix}$

a partir de (3.6.3), deduzida no Capítulo 3, e aqui repetida em benefício da clareza:

$$\theta_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mp (n-1) 180^\circ$$

resultando para  $G$ , caso linear, u'a matriz triangular esquerda, cujos elementos não-nulos são todos unitários.



$$\Sigma_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & & & & 0 \\ & \sigma_{\alpha_2}^2 & & & \\ & & \sigma_{\alpha_3}^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \sigma_{\alpha_n}^2 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ou

$$\Sigma_{\theta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_3}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_3}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_3}^2 + \dots + \sigma_{\alpha_n}^2 \end{bmatrix}$$

(4.4.6)

Da (4.4.6) podem ser deduzidas as seguintes expressões, para as variâncias e covariâncias dos azimutes em função das variâncias dos ângulos:

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \sum_{j=1}^i \sigma_{\alpha_j}^2 \quad (4.4.7)$$

$$\sigma_{\theta_k \theta_i} = \sum_{j=1}^k \sigma_{\alpha_j}^2 \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots,n \\ i \neq k \end{matrix} \quad (4.4.8)$$

Do mesmo modo como se chegou às variâncias-covariâncias dos azimutes planos, pode-se prosseguir na análise da propagação, tomando-se



Considerando as expressões (4.4.4) e (4.4.6), tomando as expressões (4.4.9) e (4.4.10) e efetuando os produtos matriciais  $(D\Sigma_{\ell, \theta} D^T)$ , escreve-se (4.4.11):

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{E_n, N_n} = & \left[ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^n \sigma l_i^2 \text{sen}^2 \theta_i + \sigma_{\alpha 1}^2 l_1 \cos \theta_1 \times \\
 \times \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i + \sigma_{\alpha 2}^2 l_2 \cos \theta_2 \times \\
 \times [l_1 \cos \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n l_i \cos \theta_i] + \dots \\
 \dots + \sigma_{\alpha n}^2 l_n \cos \theta_n [l_1 \cos \theta_1 + \\
 + 2l_2 \cos \theta_2 + \dots + nl_n \cos \theta_n] \\
 \\
 \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sigma l_i^2 \text{sen} 2\theta_i \right) - \sigma_{\alpha 1}^2 l_1 \text{sen} \theta_1 \times \\
 \times \sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \theta_i - \sigma_{\alpha 2}^2 l_2 \text{sen} \theta_2 \times \\
 \times [l_1 \text{sen} \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n l_i \text{sen} \theta_i] - \dots \\
 \dots - \sigma_{\alpha n}^2 l_n \text{sen} \theta_n [l_1 \text{sen} \theta_1 + \\
 + 2l_2 \text{sen} \theta_2 + \dots + nl_n \text{sen} \theta_n] \\
 \\
 \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sigma l_i^2 \cos^2 \theta_i \right) + \sigma_{\alpha 1}^2 l_1 \text{sen} \theta_1 \times \\
 \times \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i + \sigma_{\alpha 2}^2 l_2 \text{sen} \theta_2 \times \\
 \times [l_1 \cos \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n l_i \cos \theta_i] + \dots \\
 \dots + \sigma_{\alpha n}^2 l_n \text{sen} \theta_n [l_1 \cos \theta_1 + \\
 + 2l_2 \cos \theta_2 + \dots + nl_n \cos \theta_n] \\
 \\
 \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sigma l_i^2 \text{sen} 2\theta_i \right) - \sigma_{\alpha 1}^2 l_1 \text{sen} \theta_1 \times \\
 \times \sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \theta_i + \sigma_{\alpha 2}^2 l_2 \text{sen} \theta_2 \times \\
 \times [l_1 \text{sen} \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n l_i \text{sen} \theta_i] + \dots \\
 \dots + \sigma_{\alpha n}^2 l_n \text{sen} \theta_n [l_1 \text{sen} \theta_1 + \\
 + 2l_2 \text{sen} \theta_2 + \dots + nl_n \text{sen} \theta_n]
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(4.4.11)

Ou ainda para um vértice de ordem  $\underline{n}$

$$\Sigma_{E_n, N_n} = \begin{bmatrix} \sigma_{E_n}^2 & \sigma_{E_n N_n} \\ \sigma_{N_n E_n} & \sigma_{N_n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.12)$$

2x2

A (4.4.12) representa a matriz variância-covariância das coordenadas planas transportadas de um vértice de ordem  $n$  de uma poligonal.

Os elementos desta matriz são básicos e indispensáveis ao estudo da elipse dos erros, assunto do item seguinte.

#### 4.5. Elipse dos Erros

Segue-se um estudo da elipse dos erros e das variâncias máxima e mínima em relação aos eixos coordenados, conforme apresentação e deduções constantes de GEMAEL <sup>[42]</sup> e HIRVONEN <sup>[43]</sup>.

A figura 4.5.1 ilustra o problema.

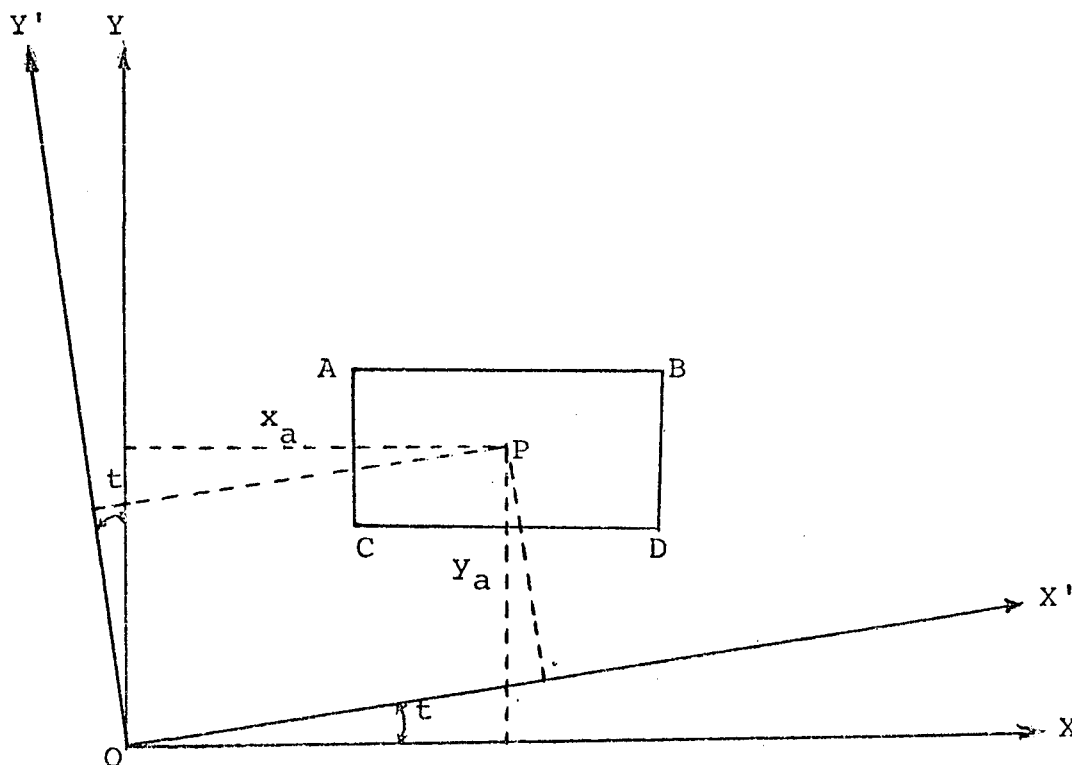


Fig. 4.5.1

Onde:

P - ponto genérico de coordenadas  $(x,y)$  ou  $(x',y')$ .

XOY - sistema de coordenadas inicial ou antigo sistema.

$x_a$  e  $y_a$  - valores ajustados das componentes de uma variável aleatória bidimensional ou coordenadas planas do ponto P.

t - ângulo de rotação dos eixos.

X'OY' - sistema de coordenadas final ou novo sistema.

$\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$  - variâncias na direção dos eixos coordenados X e Y, respectivamente,

A,B,C e D - vértices de um retângulo que representa a dispersão bidimensional.

$$A(x_a - \sigma_x, y_a + \sigma_y) \quad B(x_a + \sigma_x, y_a + \sigma_y)$$

$$C(x_a - \sigma_x, y_a - \sigma_y) \quad D(x_a + \sigma_x, y_a - \sigma_y) - \text{coordenadas dos vértices A, B, C e D.}$$

#### 4.5.1. Variância Máxima e Mínima

Como as variâncias estão vinculadas às direções paralelas aos eixos coordenados, efetuando uma rotação definida pela matriz.

$$R(t) = \begin{bmatrix} \text{cost} & \text{sent} \\ -\text{sent} & \text{cost} \end{bmatrix} \quad (4.5.1.1)$$

podemos escrever as novas coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cost} & \text{sent} \\ -\text{sent} & \text{cost} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.5.1.2)$$

Em que:

$$x' = x \cos t + y \sin t$$

$$y' = -x \sin t + y \cos t$$

Por propagação pode-se obter as variâncias e covariâncias relativas às novas direções  $x'y'$ , então:

$$\Sigma_{x',y'} = \begin{matrix} D & \Sigma_{x,y} & D^T \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \end{matrix} \quad (4.5.1.3)$$

Com:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (4.5.1.4)$$

Resultando:

$$\Sigma_{x',y'} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (4.5.1.5)$$

Ou, ainda:

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 t + \sigma_y^2 \sin^2 t + 2\sigma_{xy} \sin t \cos t \quad (4.5.1.6)$$

$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \sin^2 t + \sigma_y^2 \cos^2 t - 2\sigma_{xy} \sin t \cos t \quad (4.5.1.7)$$

$$\sigma_{x'y'} = -(\cos t \sin t) (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \sigma_{xy} (\cos^2 t - \sin^2 t) \quad (4.5.1.8)$$

Para verificar se as funções (4.5.1.6) e (4.5.1.8) apresentam extremos, isto é, se haverá algum valor de  $t$  para o qual a variância é máxima ou mínima, vamos derivar (4.5.1.6) em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{x'}^2)}{dt} &= -2\sigma_x^2 \cos t \sin t + 2\sigma_y^2 \sin t \cos t + 2\sigma_{xy} \cos^2 t - 2\sigma_{xy} \sin^2 t = \\ &= -2\sin t \cos t (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 2\sigma_{xy} (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ \frac{d(\sigma_{x'}^2)}{dt} &= -(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \sin 2t + 2\sigma_{xy} \cos 2t \end{aligned} \quad (4.5.1.9)$$

Para a segunda derivada temos:

$$\frac{d^2(\sigma_{x'}^2)}{dt^2} = -2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \cos 2t - 4\sigma_{xy} \sin 2t \quad (4.5.1.10)$$

Igualando a (4.5.1.9) a zero, temos os valores críticos da variável independente:

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (4.5.1.11)$$

Analisando a (4.5.1.11), verificamos que ela admite duas raízes:  $t$  e  $t + \frac{\pi}{2}$ , porque  $2t$  e  $2t + \pi$  têm a mesma tangente.

Verifica-se que, substituindo  $t$  por  $t + 90^\circ$  na derivada segunda, a mesma muda de sinal, o que nos adverte que a função em estudo assume valores extremos segundo duas direções entre si perpendiculares.

Podemos escrever a expressão do ângulo crítico da forma abaixo:

$$\sin 2t = \frac{2\sigma_{xy}}{M} \quad (4.5.1.12)$$

$$\cos 2t = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M} \quad (4.5.1.13)$$

Quadrando e somando (4.5.1.12) e (4.5.1.13), temos:

$$M^2 = 4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 \quad (4.5.1.14)$$

E por simples divisão de (4.5.1.12) por (4.5.1.13) reproduzimos (4.5.1.11).

Introduzindo as (4.5.1.12) e (4.5.1.13) na derivada segunda:

$$\frac{d^2(\sigma_x^2)}{dt^2} = -\frac{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{M} - \frac{8\sigma_{xy}^2}{M} \quad (4.5.1.15)$$

Verifica-se que a função passa por um máximo para valores positivos de  $M$  (derivada negativa) e por um mínimo para valores negativos de  $M$  (derivada segunda positiva).

A fim de obter a fórmula que proporciona diretamente o valor máximo da função, escrevemos novamente a (4.5.1.6), após transformações trigonométricas:

$$\sigma_x^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 0,5(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\cos 2t + \sigma_{xy}\sin 2t \quad (4.5.1.16)$$

Substituindo os valores críticos, vem:

$$\begin{aligned} \text{Máx}\sigma^2 &= 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 0,5(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M} + \sigma_{xy} \frac{2\sigma_{xy}}{M} = \\ &= 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2M} \left[ (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right] \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes é  $M^2$ , logo:

$$\text{Máx}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{M}{2}$$



$$\text{Máx}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M) \quad (4.5.1.17)$$

A fim de obter o valor mínimo, partimos de (4.5.1.7) e chegamos a:

$$\text{Mín}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M) \quad (4.5.1.18)$$

Resumindo:

$$\begin{array}{l} \text{Máx} \\ \text{Mín} \end{array} \sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm M) \quad (4.5.1.19)$$

#### 4.5.2. Variância Máxima e Mínima em Função dos Coeficientes das Equações Normais

Dadas as equações normais, em notação clássica:

$$[a \ a] x + [a \ b] y + [a \ \ell] = 0 \quad (4.5.2.1)$$

$$[b \ b] y + [b \ \ell] = 0$$

a matriz dos coeficientes das incógnitas escreve-se:

$$N = \begin{bmatrix} [a \ a] & [a \ b] \\ [b \ a] & [b \ b] \end{bmatrix} \quad (4.5.2.2)$$

e sua inversa

$$N^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} [b \ b] & -[a \ b] \\ -[a \ b] & [a \ a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \Sigma_{xy} \quad (4.5.2.3)$$

Resulta:

$$\sigma_x^2 = \frac{[b \ b]}{\Delta} \quad \sigma_y^2 = \frac{[a \ a]}{\Delta} \quad \sigma_{xy} = -\frac{[a \ b]}{\Delta} \quad (4.5.2.4)$$

Sendo  $\Delta$  o determinante de N:

$$\Delta = [a \ a] [b \ b] - [a \ b]^2 \quad (4.5.2.5)$$

Podemos escrever as fórmulas (4.5.1.11) e (4.5.1.19), respectivamente, sob forma matricial.

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{-2 [a \ b]}{[b \ b] - [a \ a]} \quad (4.5.2.6)$$

$$\begin{matrix} \text{Máx} \\ \text{Mín} \end{matrix} \sigma^2 = 0,5 \left[ \frac{[b \ b] + [a \ a]}{\Delta} \pm M \right] \quad (4.5.2.7)$$

E ainda:

$$M^2 = \frac{4[a \ b]^2 + \{[b \ b] - [a \ a]\}^2}{\Delta} \quad (4.5.2.8)$$

$$M \operatorname{sen} 2t = \frac{-2[a \ b]}{\Delta} \quad (4.5.2.9)$$

$$M \operatorname{cos} 2t = \frac{[b \ b] - [a \ a]}{\Delta} \quad (4.5.2.10)$$

#### 4.5.3. Propriedades da Elipse dos Erros

Conforme apresentação e deduções de GEMAEL |<sup>44</sup>|:

1ª) A soma das variâncias em duas direções ortogonais é invariante em relação a uma rotação dos eixos ortogonais:

$$\text{Máx}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M)$$

$$\text{Mín}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M)$$

---


$$\text{Máx}\sigma^2 + \text{Mín}\sigma^2 = 0,5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + M + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - M) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Ou:

$$\text{Máx}\sigma^2 + \text{Mín}\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = C^{te} \quad (4.5.3.1)$$

2ª) É invariante, nas mesmas condições a expressão:

$$\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 = C^{te} \quad (4.5.3.2)$$

3ª) Se as duas coordenadas forem independentes, ( $\sigma_{xy}=0$ ) a matriz variância-covariância se reduz à diagonal principal

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (4.5.3.3)$$

E nestas mesmas condições a expressão:

$$\text{tg}2t = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (4.5.3.4)$$

revela que os eixos da elipse são paralelos aos eixos coordenados. Neste caso a equação da elipse:

$$(\sigma_y^2 x^2 + \sigma_x^2 y^2 - 2\sigma_{xy} xy) = F$$

Onde:

$$F = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 = \text{Det} (\Sigma_{xy})$$

se reduz a

$$\frac{x^2}{\text{Máx}\sigma^2} + \frac{y^2}{\text{Mín}\sigma^2} = 1 \quad (4.5.3.5)$$

O que confirma que os semi-eixos maior e menor da elipse dos erros são dados, respectivamente, pelo desvio-padrão máximo e mínimo das coordenadas do ponto.

$$\sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\text{Máx}\sigma^2} = \text{Máx}\sigma = \sigma_x$$

$$\sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\text{Mín}\sigma^2} = \text{Mín}\sigma = \sigma_y$$

No caso das equações normais, a não-correlação entre as duas coordenadas implica que  $[a \ b] = 0$ , o que resulta:

$$\Delta = [a \ a] [b \ b]$$

$$\sigma_x^2 = \frac{[b \ b]}{\Delta} = \frac{1}{[a \ a]} \quad \sigma_y^2 = \frac{[a \ a]}{\Delta} = \frac{1}{[b \ b]}$$

4<sup>a</sup>) No caso das equações normais assumirem o aspecto:

$$[a \ a] x + 0y + [a \ l] = 0$$

$$0x + [a \ a] y + [b \ l] = 0$$

A elipse degenera numa circunferência. As condições supra  $[aa]=[bb] \quad [ab]=[ba] = 0$  ou suas equivalentes:  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$  e

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$  implicam em  $M=0$ , conforme equação (4.5.1.14) o que indica, conforme (4.5.1.11) que, no caso, o ângulo  $t$  é indeterminado.

## CAPÍTULO 5

EXEMPLOS SIMULADOS5.1. Problema geral

Desejamos ligar dois vértices de duas redes básicas por meio de uma poligonal e dispomos do equipamento abaixo:

Distanciômetro A e Teodolito B ou

Distanciômetro C e Teodolito D.

Analizaremos as principais hipóteses que tornam o trabalho de campo mais vantajoso.

A fig. 5.1 mostra um gráfico geral da poligonal B,1,2 e 3 em que o ponto B é a origem do sistema e o ângulo  $\theta_0 = 45^\circ$ .

Escalas da figura 5.16: poligonal 1/100 000 e elipse 1/25

Demais figuras : poligonal 1/1000000 e elipse 1/25

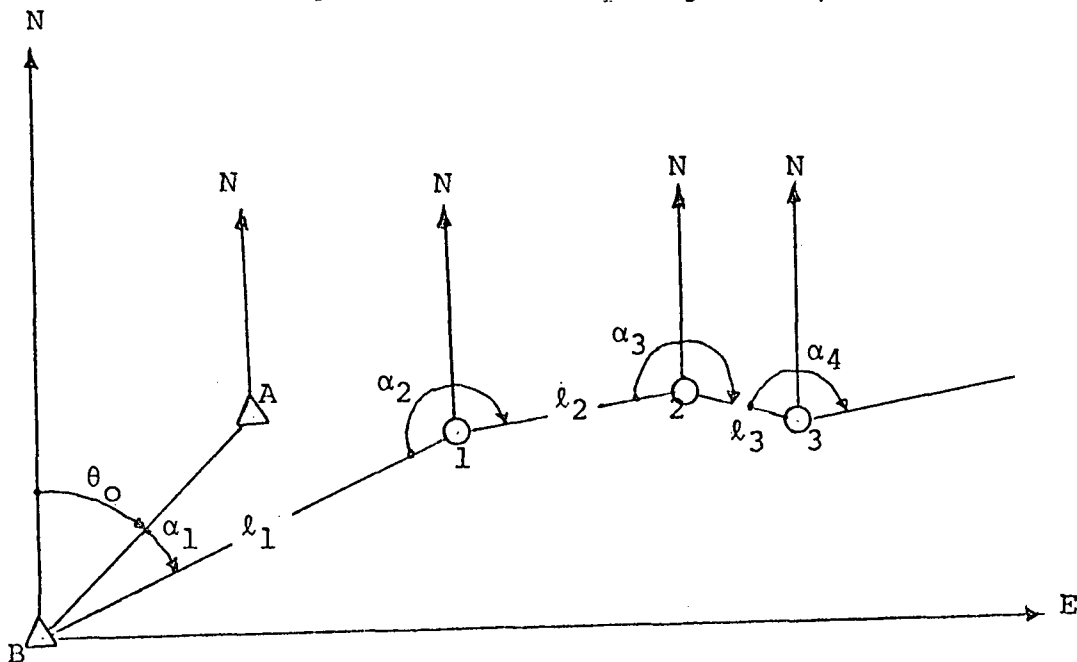


Fig. 5.1

5.2. ExemplosExemplo nº 1

Com o distanciômetro A e o teodolito B, as medidas tiradas de um croqui da poligonal e admitindo os erros médios quadráticos abaixo:

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_\ell$
$\alpha_1$	$20^\circ$	1"	$\ell_1$	60000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_2$	$210^\circ$	1"	$\ell_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$220^\circ$	1"	$\ell_3$	15000m	1,5cm+3ppm

- Calcular a matriz variância-covariância das coordenadas do vértice 3:  $\Sigma_{E_3, N_3}$ .
- Construir a elipse dos erros do ponto 3.

Solução

Fórmulas a empregar:

$$E_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{sen} \theta_i$$

$$N_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{cos} \theta_i$$

$$\theta_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \pm (n-1) 180^\circ$$

$$\Sigma_{E_3, N_3} = D \Sigma_{\ell, \theta} D^T \quad \Sigma_\theta = G \Sigma_\alpha G^T$$

$$\Sigma_{\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_{\ell_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ell_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ell_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \pm \sqrt{4\sigma_{EN}^2 + (\sigma_E^2 - \sigma_N^2)^2}$$

$$\text{Máx}\sigma_3^2 = 0,5 (\sigma_E^2 + \sigma_N^2 + M)$$

$$\text{Min}\sigma_3^2 = 0,5 (\sigma_E^2 + \sigma_N^2 - M)$$

$$\text{sen}2t = \frac{2\sigma_{E_3N_3}}{M_3}$$

$$2t = \text{arctg} \frac{2\sigma_{EN}}{\sigma_E^2 - \sigma_N^2}$$

$$\text{cos}2t = \frac{\sigma_E^2 - \sigma_N^2}{M_3}$$

a. Cálculo de  $\Sigma_{\ell, \theta} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\ell} & \bar{0} \\ \bar{0} & \Sigma_{\theta} \end{bmatrix}$

$$\sigma_{\ell_1}^2 = 60 \times 3 \text{ppm} + 15 \text{mm} = 195^{(2)} \text{mm} = 0,038025 \text{m}^2$$

$$\sigma_{\ell_2}^2 = 30 \times 3 \text{ppm} + 15 \text{mm} = 105^{(2)} \text{mm} = 0,011025 \text{m}^2$$

$$\sigma_{\ell_3}^2 = 15 \times 3 \text{ppm} + 15 \text{mm} = 60^{(2)} \text{mm} = 0,003600 \text{m}^2$$

$$\Sigma_{\ell} = \begin{bmatrix} 195^2 & 0 \\ 0 & 105^2 & 0 \\ 0 & 0 & 60^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,038025 & 0 & 0 \\ 0 & 0,011025 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003600 \end{bmatrix}$$

3x3



$$\Sigma_{\theta} = G \Sigma_{\alpha} G^T$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 3$

$$\theta_1 = \theta_0 + \alpha_1 - 0 \times 180^\circ = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \times 180^\circ = 45^\circ + 20^\circ + 210^\circ - 180^\circ = 95^\circ$$

$$\theta_3 = \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2 \times 180^\circ = 45^\circ + 20^\circ + 210^\circ + 220^\circ - 360^\circ = 135^\circ$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0^\circ \\ -180^\circ \\ -360^\circ \end{bmatrix}$$

ou:  $Y = G X + C_1 + C_2$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1''(2) & 0 & 0 \\ 0 & 1''(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1''(2) \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\Sigma_{\theta} = G \Sigma_{\alpha} G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1''(2) & 1''(2) & 1''(2) \\ 1''(2) & 2''(2) & 2''(2) \\ 1''(2) & 2''(2) & 3''(2) \end{bmatrix}$$

Homogeneizando as unidades vem:

$$\text{sen}1'' = 4,8481368 \times 10^{-6}$$

$$\text{sen}(1'')^2 = 2,3504430 \times 10^{-11}$$

$$1''(2) \times 2,350443 \times 10^{-11} = 2,350443 \times 10^{-11}$$

$$2''(2) \times 2,350443 \times 10^{-11} = 4,700886 \times 10^{-11}$$

$$3''(2) \times 2,350443 \times 10^{-11} = 7,051329 \times 10^{-11}$$

$$\Sigma_{\theta} = \begin{bmatrix} 2,350443 \times 10^{-11} & 2,350443 \times 10^{-11} & 2,350443 \times 10^{-11} \\ 2,350443 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} \\ 2,350443 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} & 7,051329 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\ell, \theta} = \begin{bmatrix} 0,038025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,011025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,350443 \times 10^{-11} & 2,350443 \times 10^{-11} & 2,350443 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 & 2,350443 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 & 2,350443 \times 10^{-11} & 4,700886 \times 10^{-11} & 7,051329 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

b. Cálculo de D e D<sup>T</sup>

$$D = \begin{matrix} 2 \times 6 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial E_3}{\partial \ell_1} & \frac{\partial E_3}{\partial \ell_2} & \frac{\partial E_3}{\partial \ell_3} & \frac{\partial E_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial E_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial E_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \ell_1} & \frac{\partial N_3}{\partial \ell_2} & \frac{\partial N_3}{\partial \ell_3} & \frac{\partial N_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial N_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial N_3}{\partial \theta_3} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Derivadas parciais

$$\frac{\partial E_3}{\partial \ell_1} = \text{sen} \theta_1 = 0,90630779$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \ell_2} = \text{sen} \theta_2 = 0,9961947$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \ell_3} = \text{sen} \theta_3 = 0,70710678$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \theta_1} = \ell_1 \cos \theta_1 = 60000 \text{m} \times \cos 65^\circ = 25357,0956 \text{m}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \theta_2} = \ell_2 \cos \theta_2 = 30000 \text{m} \times \cos 95^\circ = -2614,6723 \text{m}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial \theta_3} = \ell_3 \cos \theta_3 = 15000 \text{m} \times \cos 135^\circ = -10606,6017 \text{m}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \ell_1} = \cos \theta_1 = 0,42261826$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \ell_2} = \cos \theta_2 = -0,087155743$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \ell_3} = \cos \theta_3 = -0,70710678$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \theta_1} = -\ell_1 \text{sen} \theta_1 = -60000 \text{m} \times 0,90630779 = -54378,4674 \text{m}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \theta_2} = -\ell_2 \text{sen} \theta_2 = -30000 \text{m} \times 0,9961947 = -29885,8410 \text{m}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \theta_3} = -l_3 \operatorname{sen} \theta_3 = -15000 \operatorname{mx} 0,70710678 = -10606,6017 \text{m}$$

c. Cálculo de  $\Sigma_{E_3, N_3}$

$$\Sigma_{E_3, N_3} = \begin{bmatrix} 0,054189311 \text{m}^2 & -2,670333 \times 10^{-5} \text{m}^2 \\ -2,670333 \times 10^{-5} \text{m}^2 & 0,261409571 \text{m}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{E_3}^2 & \sigma_{E_3, N_3} \\ \sigma_{N_3, E_3} & \sigma_{N_3}^2 \end{bmatrix}$$

d. Cálculo da elipse dos erros no ponto 3

$$M_3 = \sqrt{4\sigma_{E_3, N_3}^2 + (\sigma_{E_3}^2 - \sigma_{N_3}^2)^2}$$

$$M_3 = \sqrt{4(-2,670333 \times 10^{-5})^2 + (0,054189311 + 0,261409531)^2} = 0,207220226 \text{m}^2$$

$$\text{Máx} \sigma_3^2 = 0,5(\sigma_{E_3}^2 + \sigma_{N_3}^2 + M) = 0,054189311 + 0,261409571 + 0,207220226$$

$$\text{Máx} \sigma_3^2 = 0,261409554$$

$$\text{Máx} \sigma_3 = 0,511282264 \text{m} = a$$

$$\text{Min} \sigma_3^2 = 0,5(\sigma_{E_3}^2 + \sigma_{N_3}^2 - M) = 0,054189311 + 0,261409571 - 0,207220226$$

$$\text{Min} \sigma_3^2 = 0,054189328$$

$$\text{Min} \sigma_3 = 0,232786013 \text{m} = b$$

Logo: semi-eixo maior da elipse:  $a = 0,511 \text{m}$

semi-eixo menor da elipse:  $b = 0,233 \text{m}$

Ângulo crítico:

$$2\hat{\xi} = \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{E_3 N_3}}{2\sigma_{E_3} - \sigma_{N_3}} = \operatorname{arctg} \frac{2x(-2,670333 \times 10^{-5})}{0,054189311 - 0,261409571}$$

$$2\hat{\xi} = \operatorname{arctg} 2,5772894 \times 10^{-4} = 0^\circ 0' 53,16''$$

$$\hat{\xi} = 0^\circ 0' 26,58'' \quad - \quad 1^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrantes}$$

Análise:

$$\operatorname{sen} 2\hat{\xi} = \frac{2\sigma_{E_3 N_3}}{M_3} = \frac{2x(-2,670333 \times 10^{-5})}{0,207220226} = -2,577289 \times 10^{-4}$$

$$2\hat{\xi} = \operatorname{arcsen}(-2,577289 \times 10^{-4})$$

$$2\hat{\xi} = -0^\circ 0' 53,16''$$

$$\hat{\xi} = -0^\circ 0' 26,58'' \quad - \quad 3^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrantes}$$

Logo: o ângulo de orientação  $\hat{\xi}$  pertence ao 3º quadrante

$$\hat{\xi} = 180^\circ + 0^\circ 0' 26,58'' = 180^\circ 0' 26,58''$$

Resumo:  $a = 0,511\text{m}$

$b = 0,233\text{m}$

$\hat{\xi} = 180^\circ 00'$

Representação gráfica:

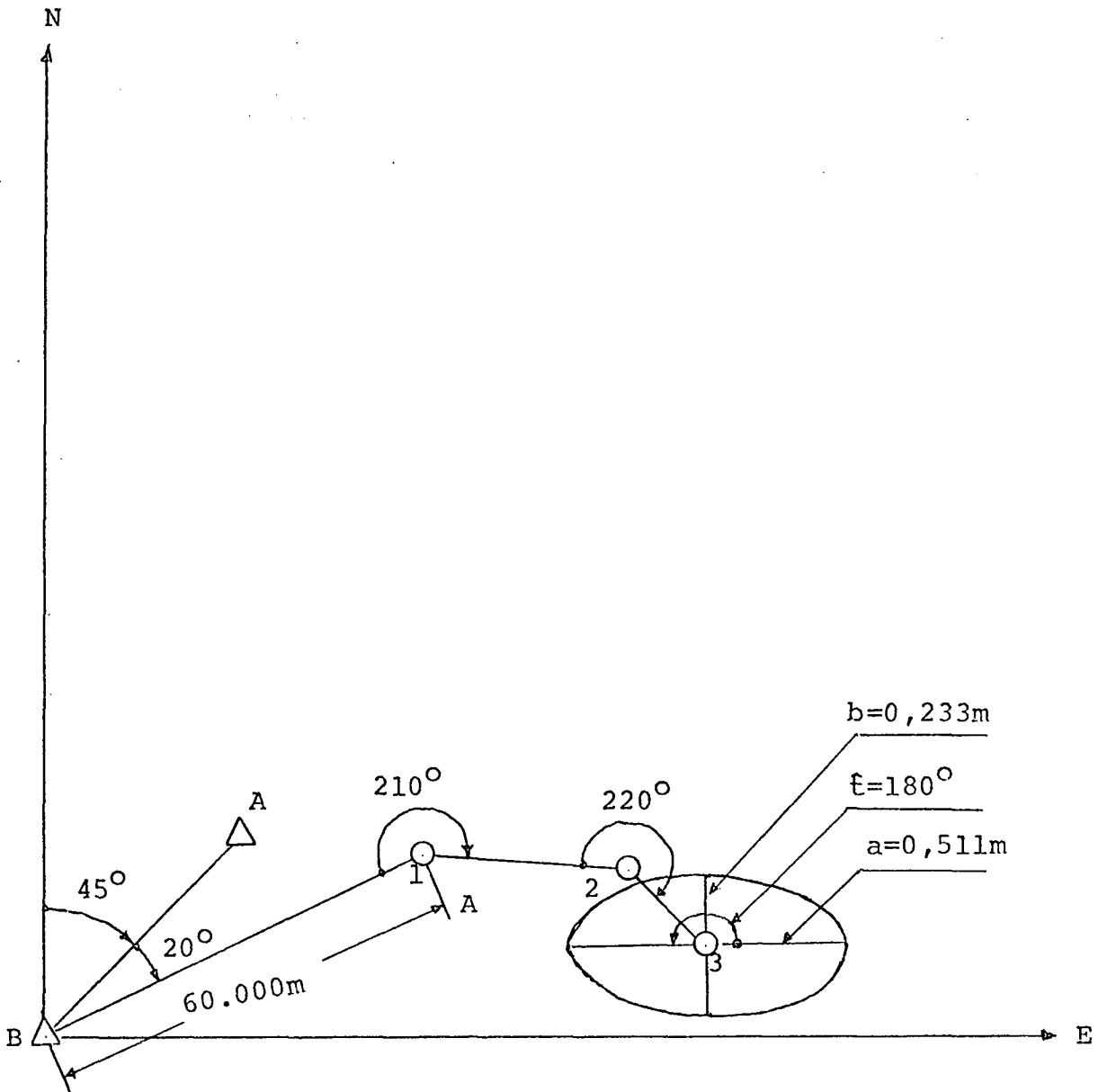


Fig. 5.2





Exemplo nº 3

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_\ell$
$\alpha_1$	$310^\circ$		1"	$\ell_1$	
$\alpha_2$	$240^\circ$	1"	$\ell_2$	30000m	
$\alpha_3$	$70^\circ$	1"	$\ell_3$	15000m	

Resultados:  $a=0,449\text{m}$  $b=0,220\text{m}$  $\xi=-7^\circ 9'$ 

Gráfico:

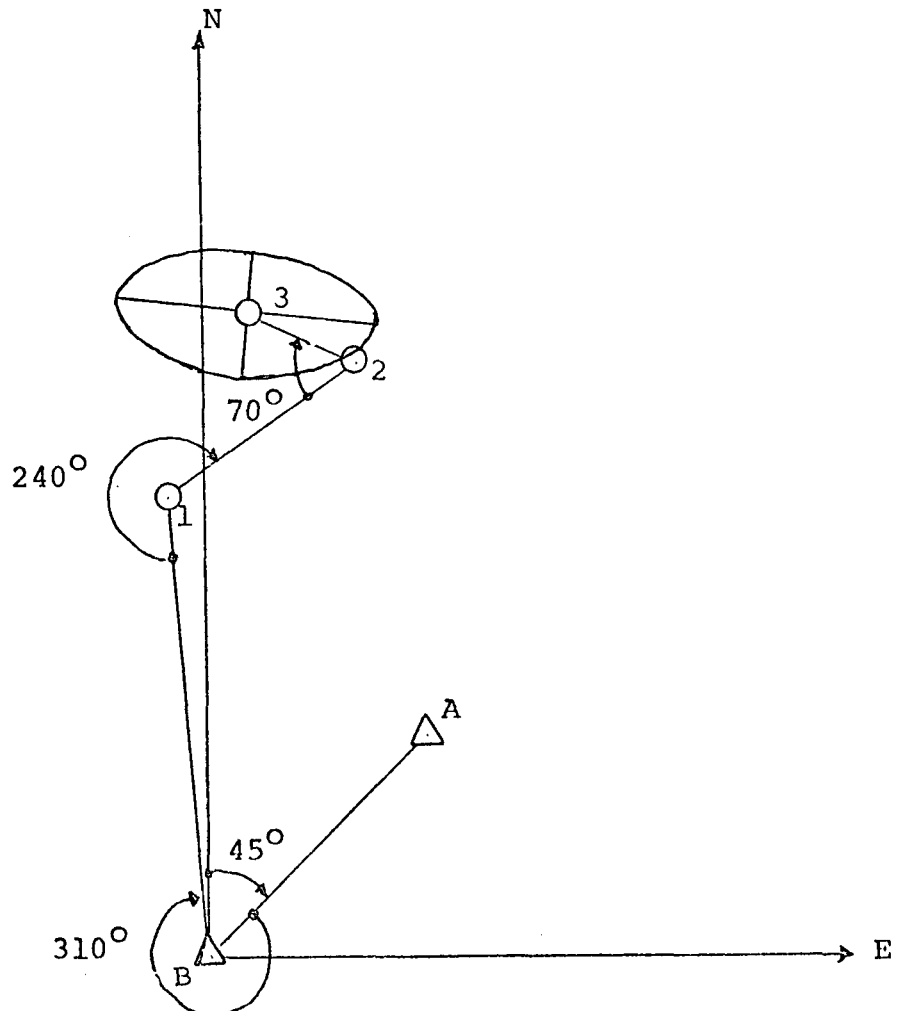


Fig. 5.4

Exemplo nº 4

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$335^\circ$		1"	$l_1$	
$\alpha_2$	$240^\circ$	1"	$l_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$70^\circ$	1"	$l_3$	15000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,449\text{m}$  $b=0,220\text{m}$  $\hat{t}=327^\circ 51'$ 

Gráfico: N

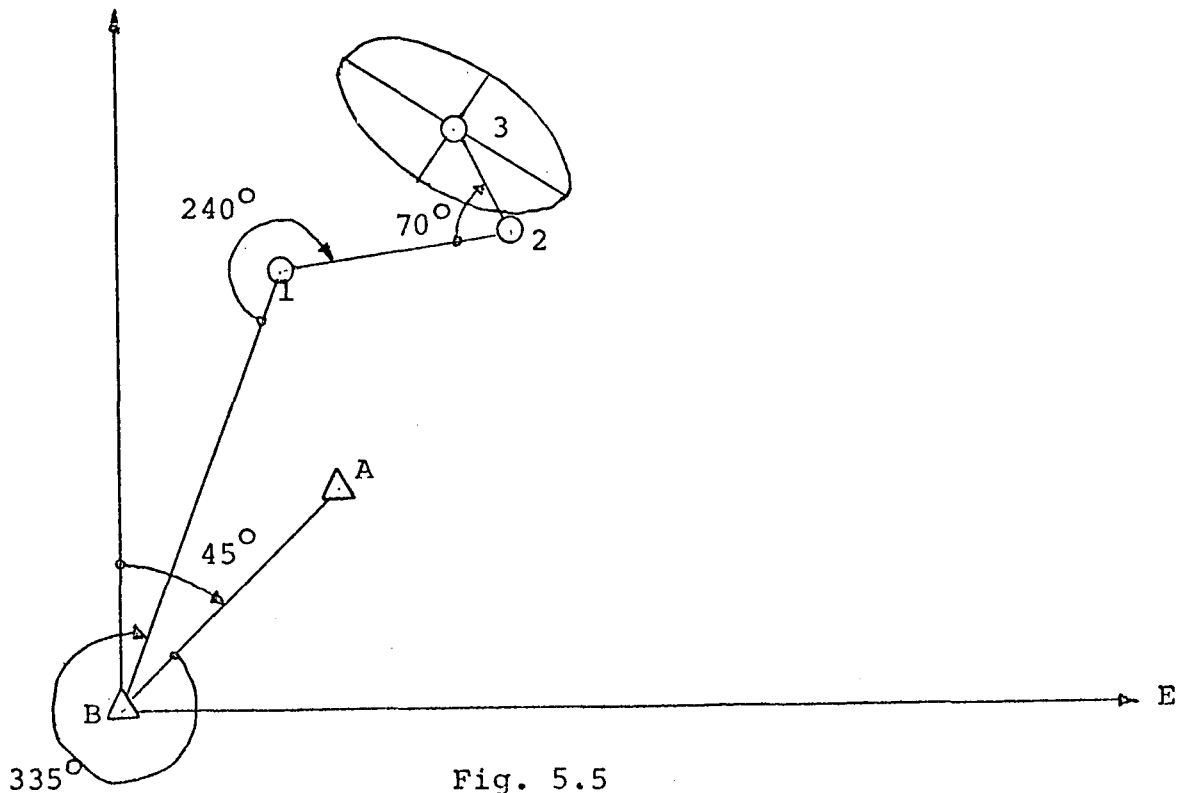


Fig. 5.5

Exemplo nº 5

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$20^\circ$		1"	$l_1$	
$\alpha_2$	$240^\circ$	1"	$l_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$70^\circ$	1"	$l_3$	15000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,449\text{m}$  $b=0,220\text{m}$  $\xi=192^\circ 51'$ 

Gráfico:

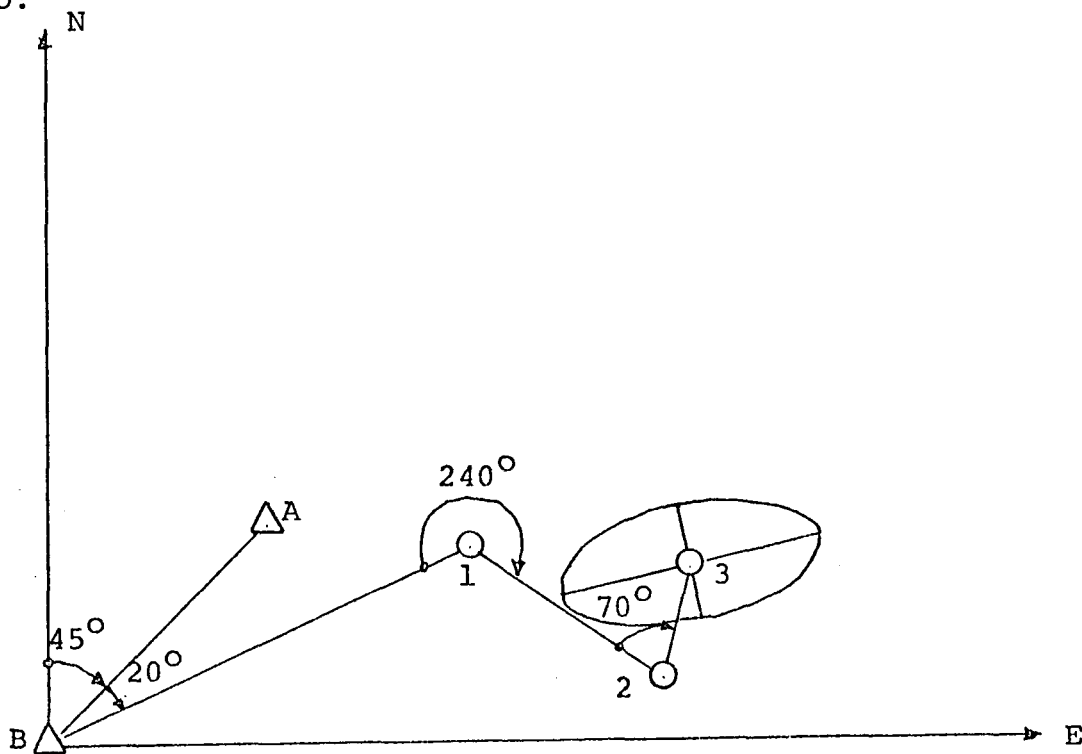


Fig. 5.6

Exemplo nº 6

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_\ell$
$\alpha_1$	$315^\circ$		1"	$\ell_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	1"	$\ell_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	1"	$\ell_3$	15000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,559m$  $b=0,229m$  $\xi=0^\circ \quad \bar{\xi}=90^\circ$ 

Gráfico:

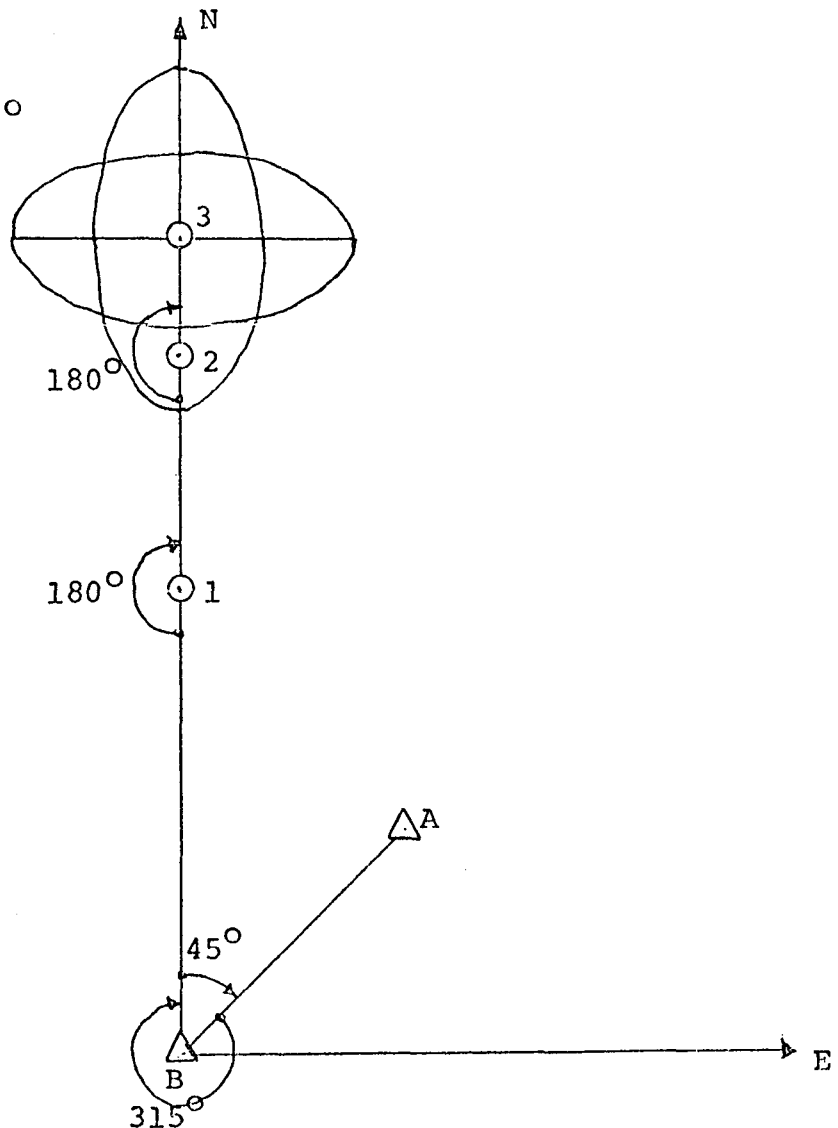


Fig. 5.7

Exemplo nº 7

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$0^\circ$		1"	$l_1$	
$\alpha_2$	$18^\circ$	1"	$l_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	1"	$l_3$	15000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,559\text{m}$  $b=0,229\text{m}$  $\hat{t}=45^\circ \quad \hat{t}=135^\circ$ 

Gráfico:

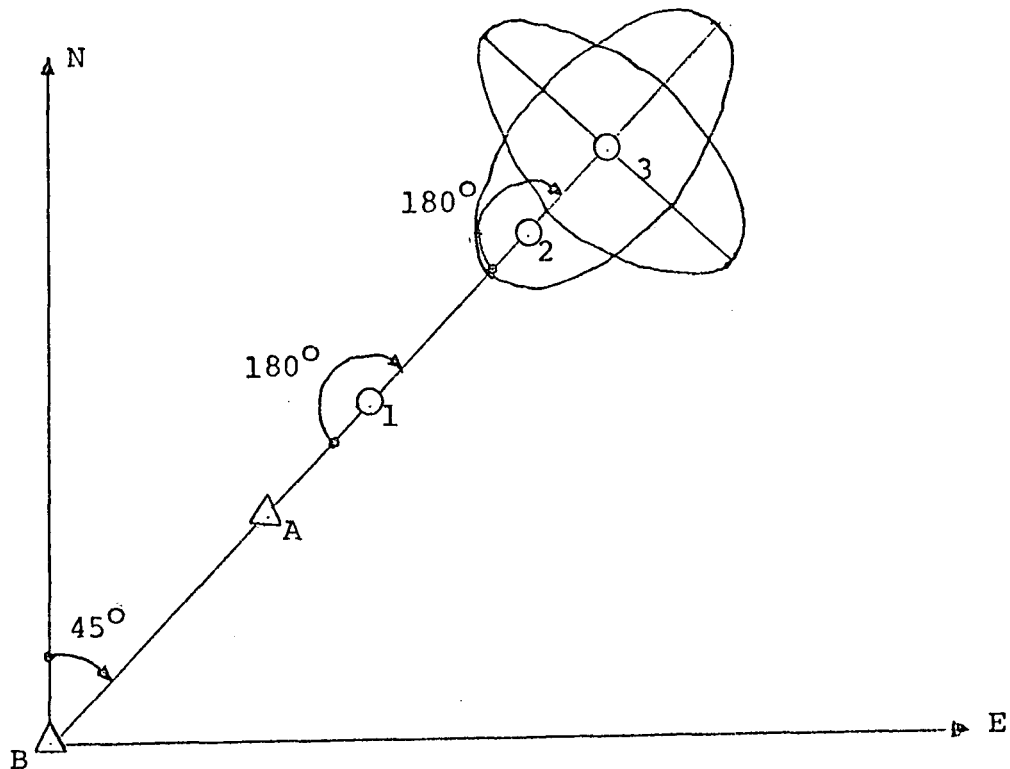


Fig. 5.8

Exemplo nº 8

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_\ell$
$\alpha_1$	$45^\circ$		$1''$	$\ell_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	$1''$	$\ell_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	$1''$	$\ell_3$	15000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,559\text{m}$  $b=0,229\text{m}$  $\xi=0^\circ$   $\zeta=90^\circ$ 

Gráfico:

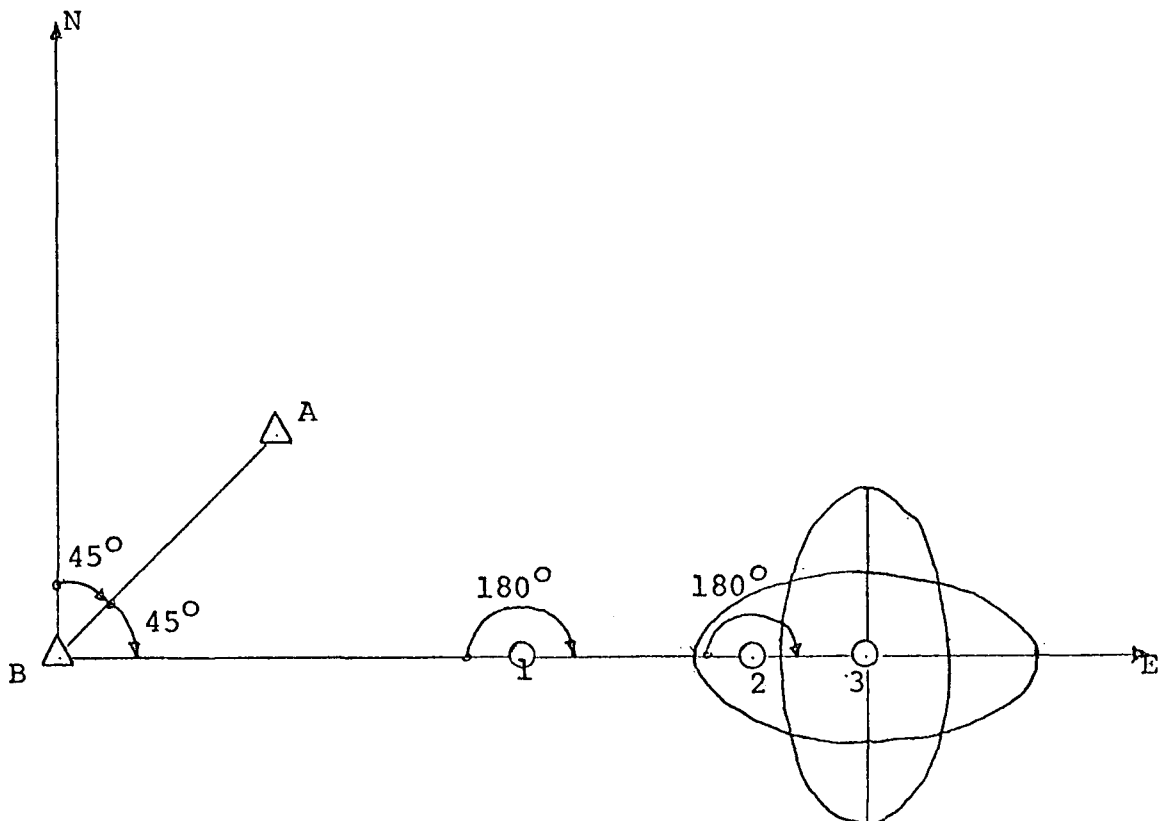


Fig. 5.9

Exemplo nº 9

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$20^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$210^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$220^\circ$	0,3"	$l_3$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,154m$  $b=0,076m$  $\hat{t}=179^\circ 13'$ 

Gráfico:

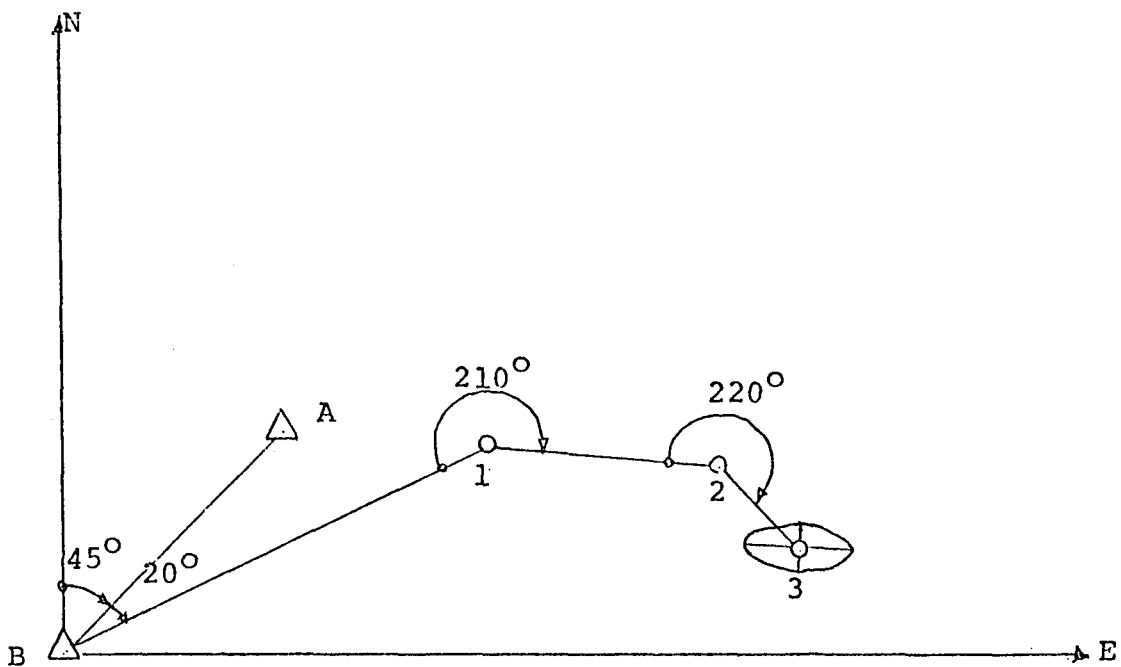


Fig. 5.10

Exemplo nº 10

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$45^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$270^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$90^\circ$	0,3"	$l_3$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,133\text{m}$  $b=0,070\text{m}$  $t=148^\circ 9'$ 

Gráfico:

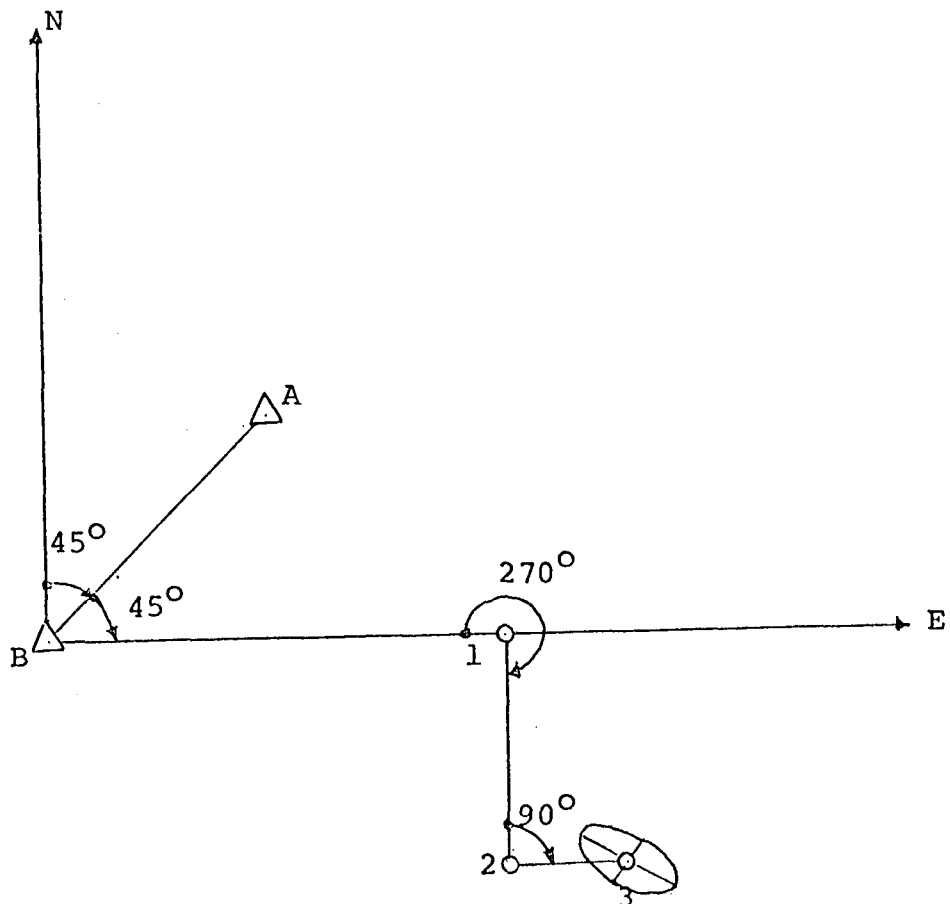


Fig. 5.11



Exemplo nº 11

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$310^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$240^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$70^\circ$	0,3"	$l_3$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,136\text{m}$  $b=0,072\text{m}$  $\hat{t}=-7^\circ 30'$ 

Gráfico:

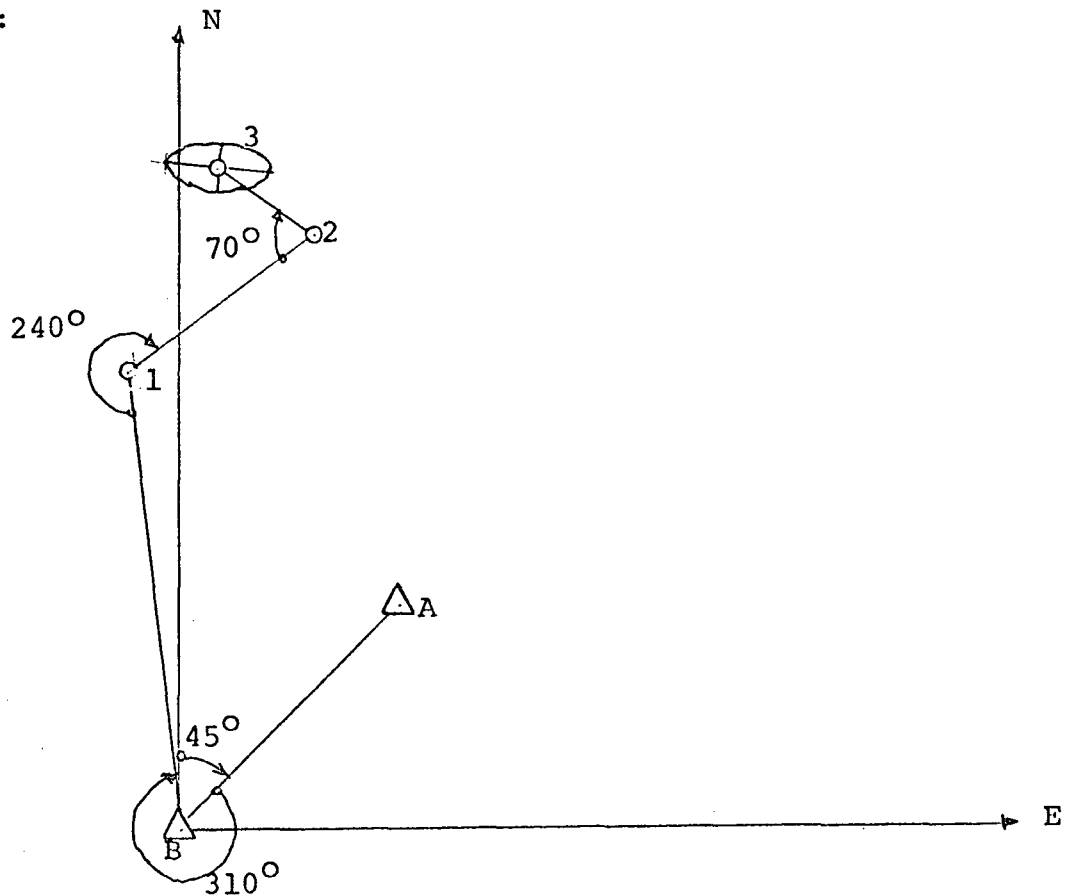


Fig. 5.12

Exemplo nº 12

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$315^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	0,3"	$l_3$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,168\text{m}$  $b=0,076\text{m}$  $t=0^\circ$   $t=90^\circ$ 

Gráfico:

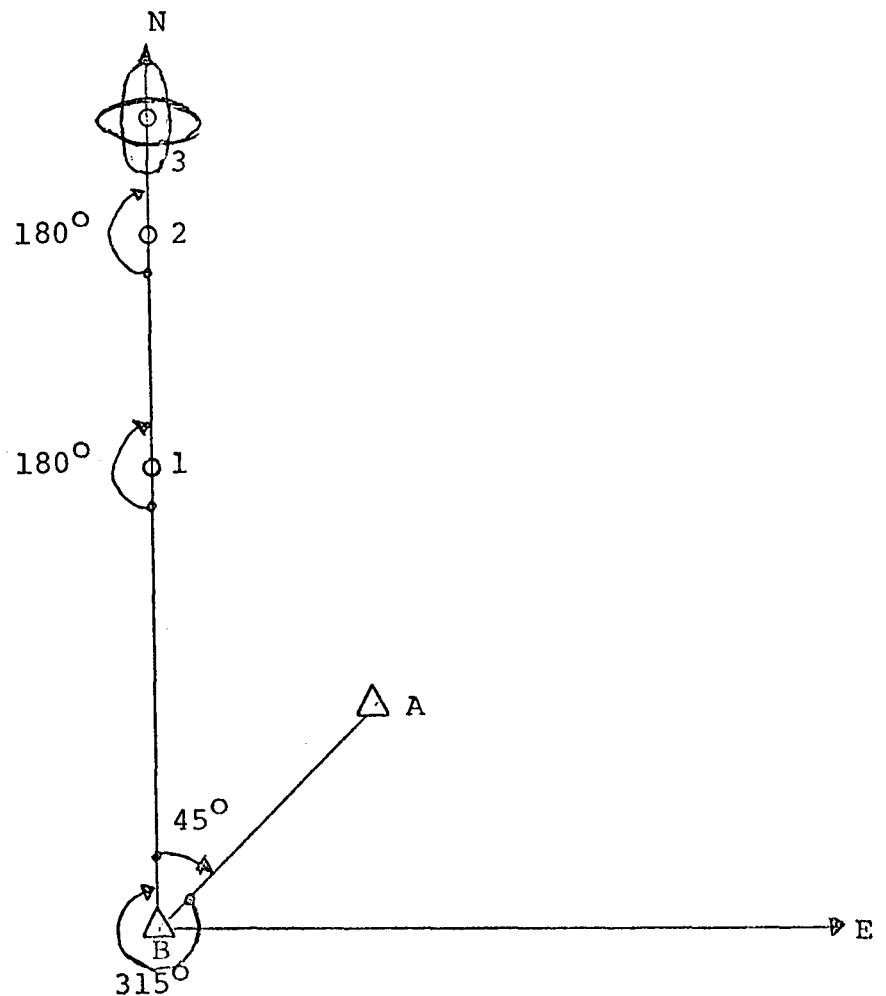


Fig. 5.13

Exemplo nº 13

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$\alpha_2$		$l_1$	$l_2$	
$0^\circ$	$180^\circ$	0,3"	60000m	30000m	5mm+1ppm
$180^\circ$	$180^\circ$	0,3"	15000m		5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,168m$  $b=0,076m$  $\hat{t}=45^\circ$   $\hat{t}=135^\circ$ 

Gráfico:

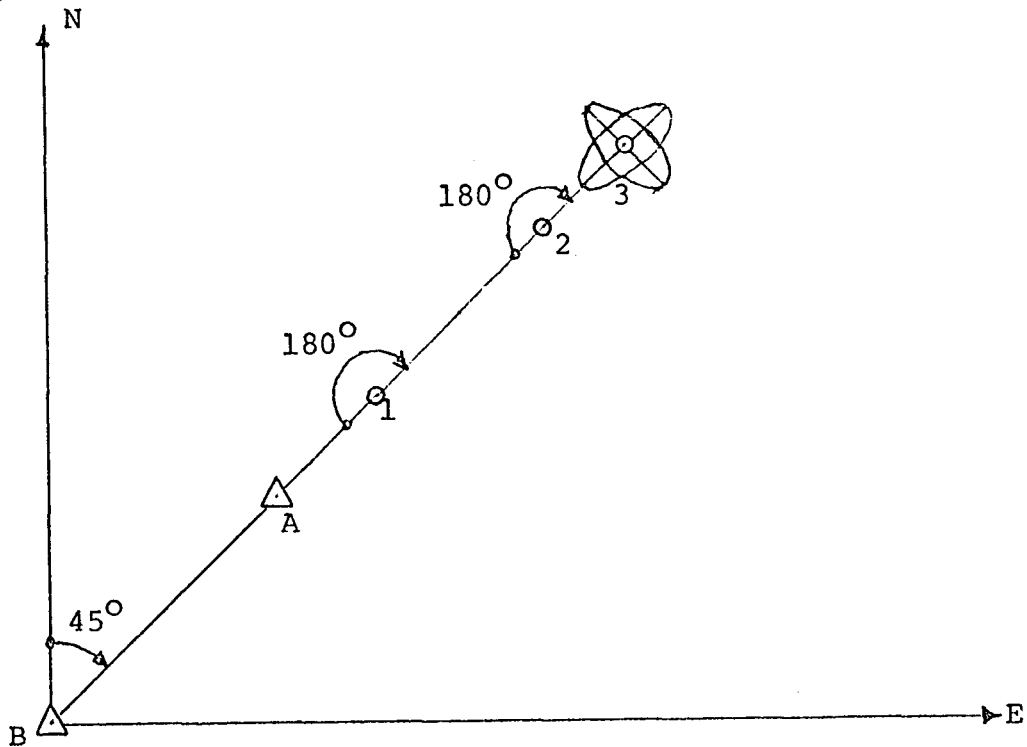


Fig. 5.14

Exemplo nº 14

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_{\alpha}$	DISTÂNCIAS		$\sigma_{\ell}$
$\alpha_1$	$45^{\circ}$		$\ell_1$	60000m	
$\alpha_2$	$180^{\circ}$	0,3"	$\ell_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$180^{\circ}$	0,3"	$\ell_3$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,168\text{m}$  $b=0,076\text{m}$  $\xi=0^{\circ}$   $\xi=90^{\circ}$ 

Gráfico:

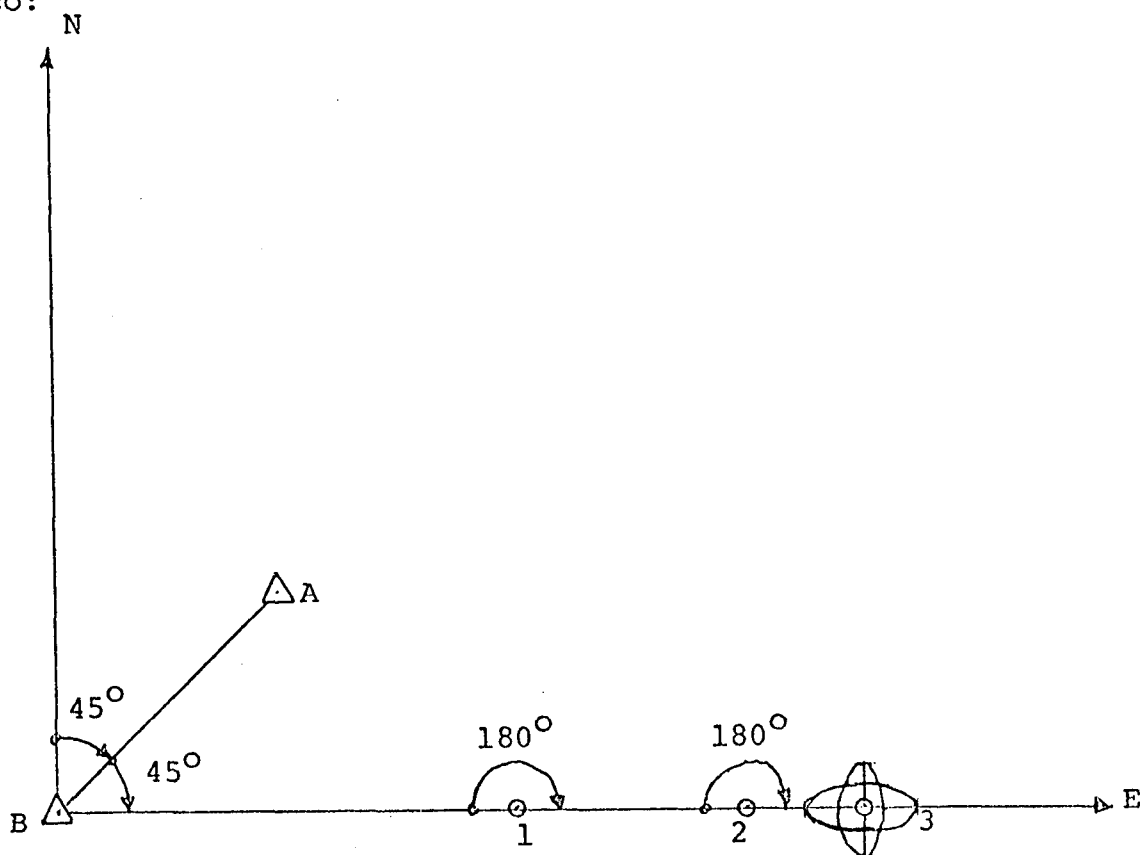


Fig. 5.15

Exemplo nº 15

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$20^\circ$		1"	$l_1$	
$\alpha_2$	$210^\circ$	1"	$l_2$	3000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$220^\circ$	1"	$l_3$	1500m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,504m$  $b=0,106m$  $f=182^\circ 46'$ 

- Escala da poligonal: 1/100000

- Escala da elipse: 1/25

Gráfico:

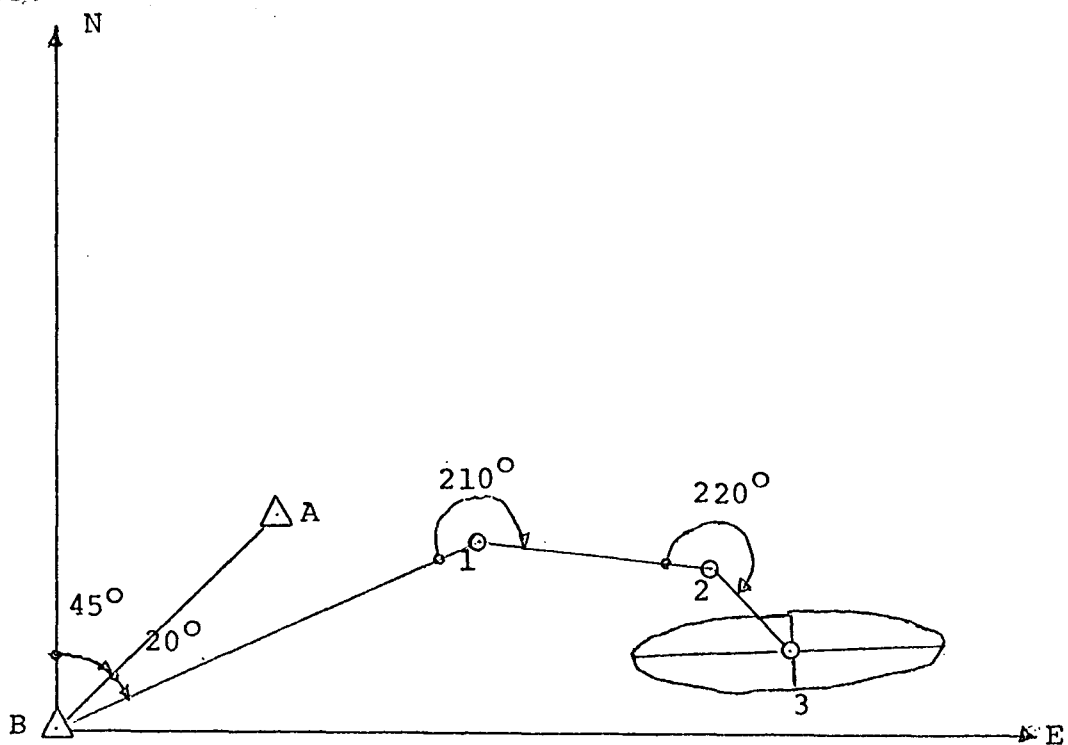


Fig. 5.16

Exemplo nº 16

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$310^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$240^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$90^\circ$	0,3"	$l_3$	35000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,177m$  $b=0,081m$  $t=0^\circ 56'$ 

Gráfico:

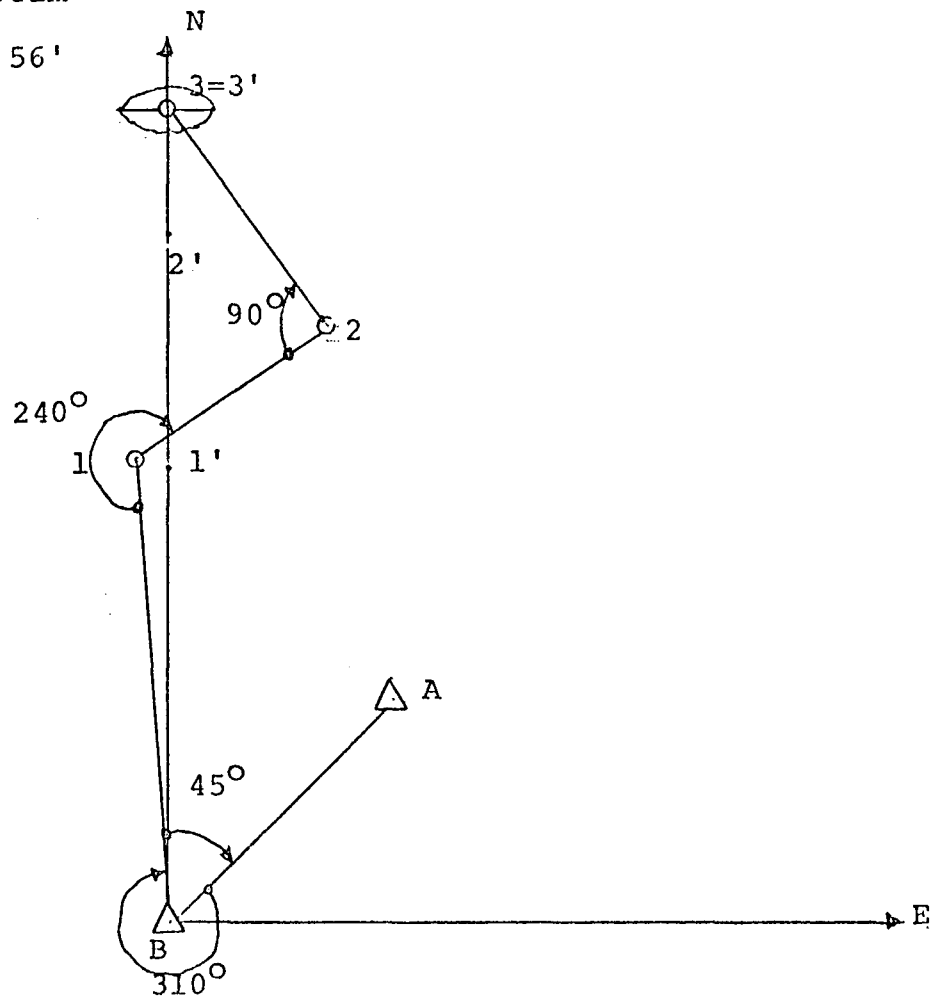


Fig. 5.17

Exemplo nº 17

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_i$			$l_i$		
$\alpha_1$	$310^\circ$	0,3"	$l_1$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_2$	$210^\circ$	0,3"	$l_2$	40000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$100^\circ$	0,3"	$l_3$	35000m	5mm+1ppm
$\alpha_4$	$270^\circ$	0,3"	$l_4$	25000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,207m$

$b=0,070m$

$t=0^\circ 49'$

Gráfico:

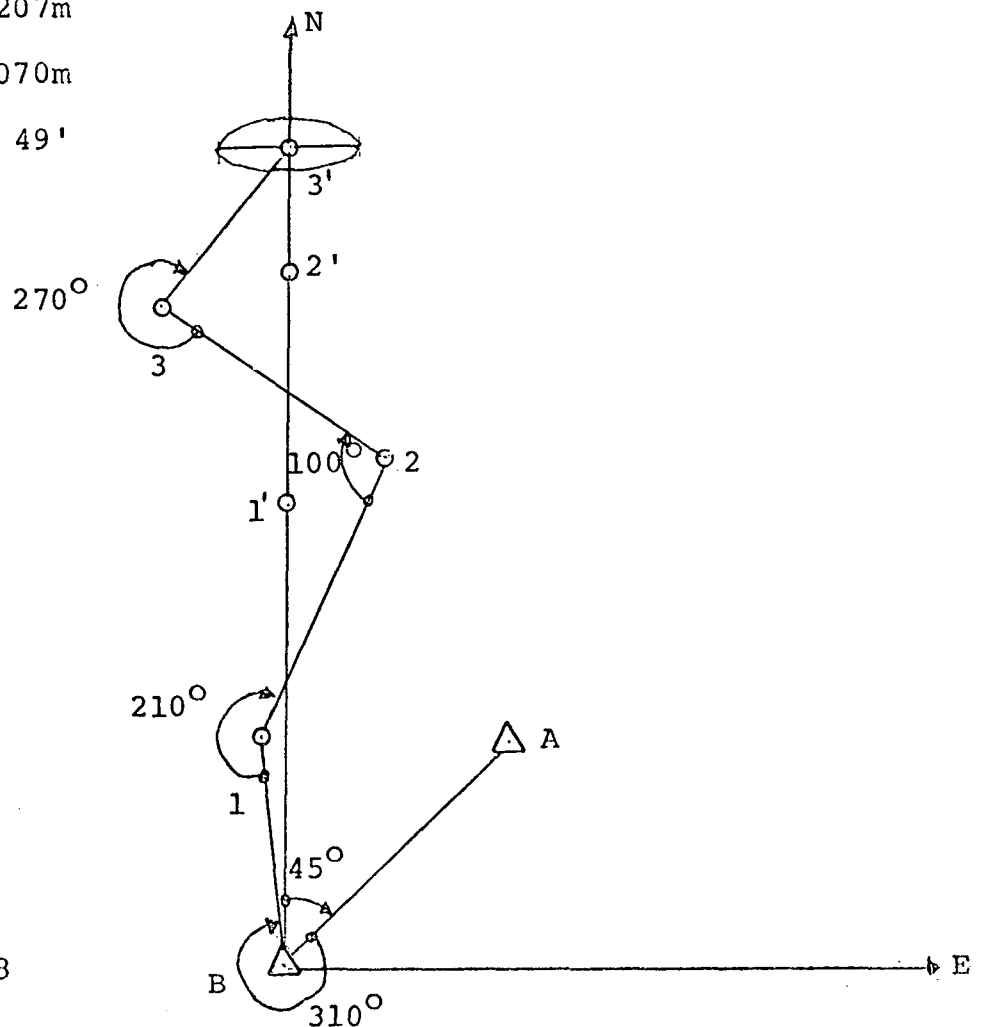


Fig. 5.18

Exemplo nº 18

Dados:

Distanciômetro A

Teodolito B

ÂNGULOS		$\alpha_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$40^\circ$		1"	$l_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	1"	$l_2$	30000m	1,5cm+3ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	1"	$l_3$	30000m	1,5cm+3ppm

Resultados:  $a=0,564\text{m}$  $b=0,191\text{m}$  $\xi=185^\circ$ 

Gráfico:

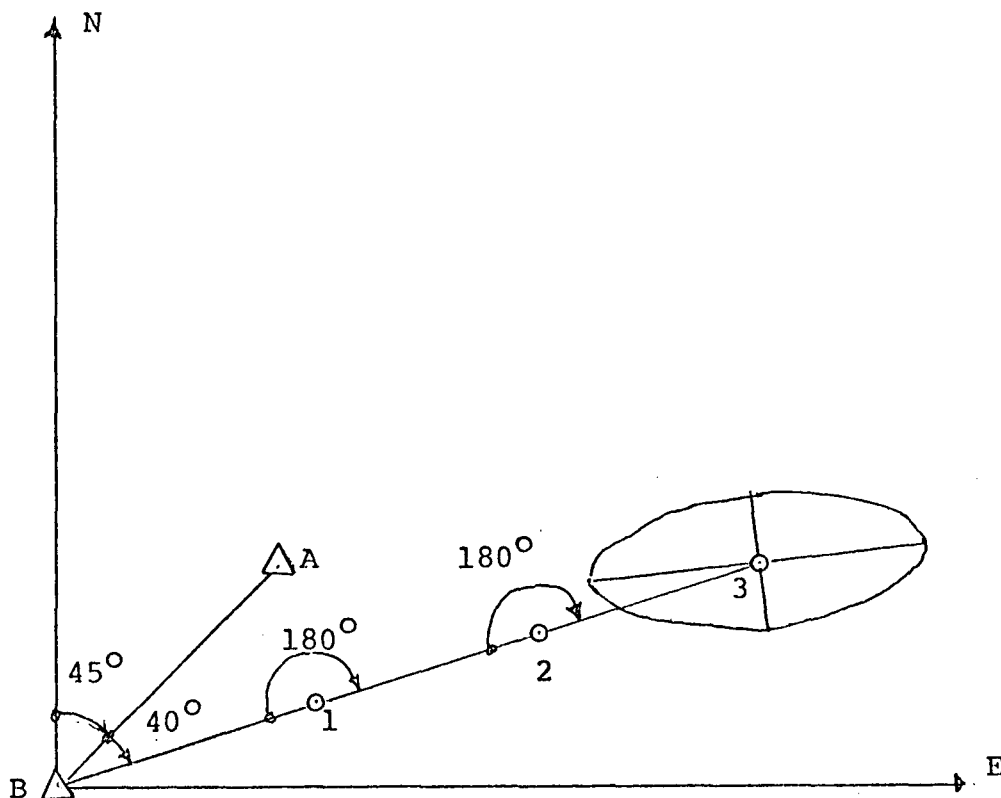


Fig. 5.19



Exemplo nº 19

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_\ell$
$\alpha_1$	$335^\circ$		0,3"	$\ell_1$	
$\alpha_2$	$270^\circ$	0,3"	$\ell_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$250^\circ$	0,3"	$\ell_3$	15000m	5mm+1ppm
$\alpha_4$	$238^\circ$	0,3"	$\ell_4$	57000m	5mm+1ppm

Resultado:  $a=0,155\text{m}$  $b=0,096\text{m}$  $t=316^\circ 57'$ 

Gráfico:

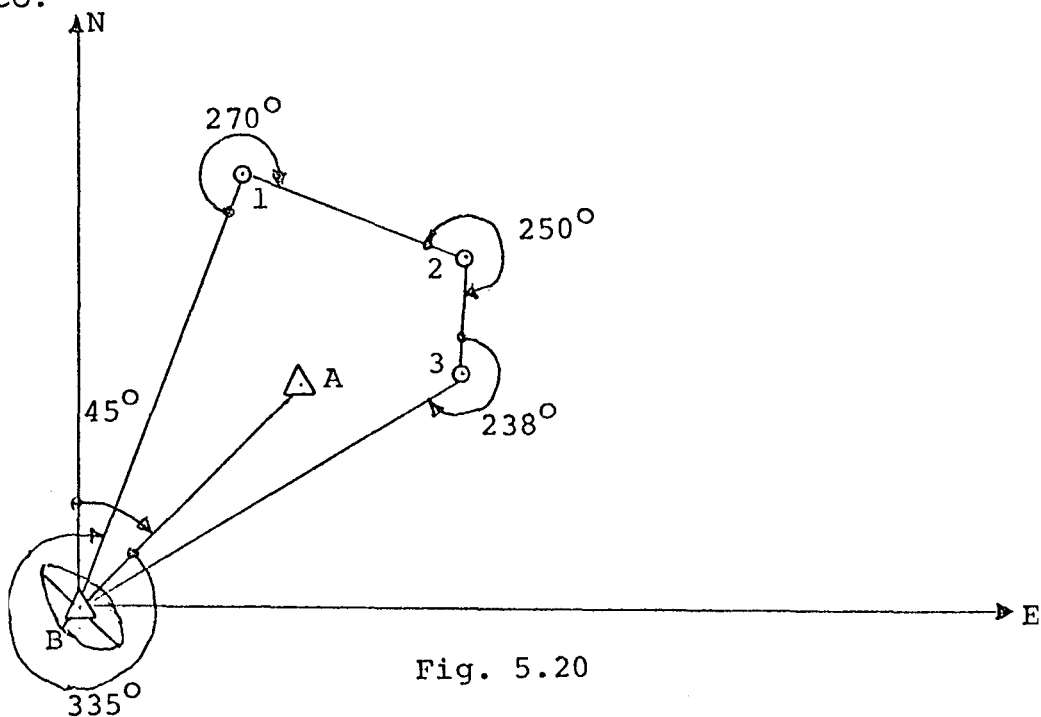


Fig. 5.20

Exemplo nº 20

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$315^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	0,3"	$l_2$	45000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,166m$  $b=0,082m$  $\xi=0^\circ \quad \xi=90^\circ$ 

Gráfico:

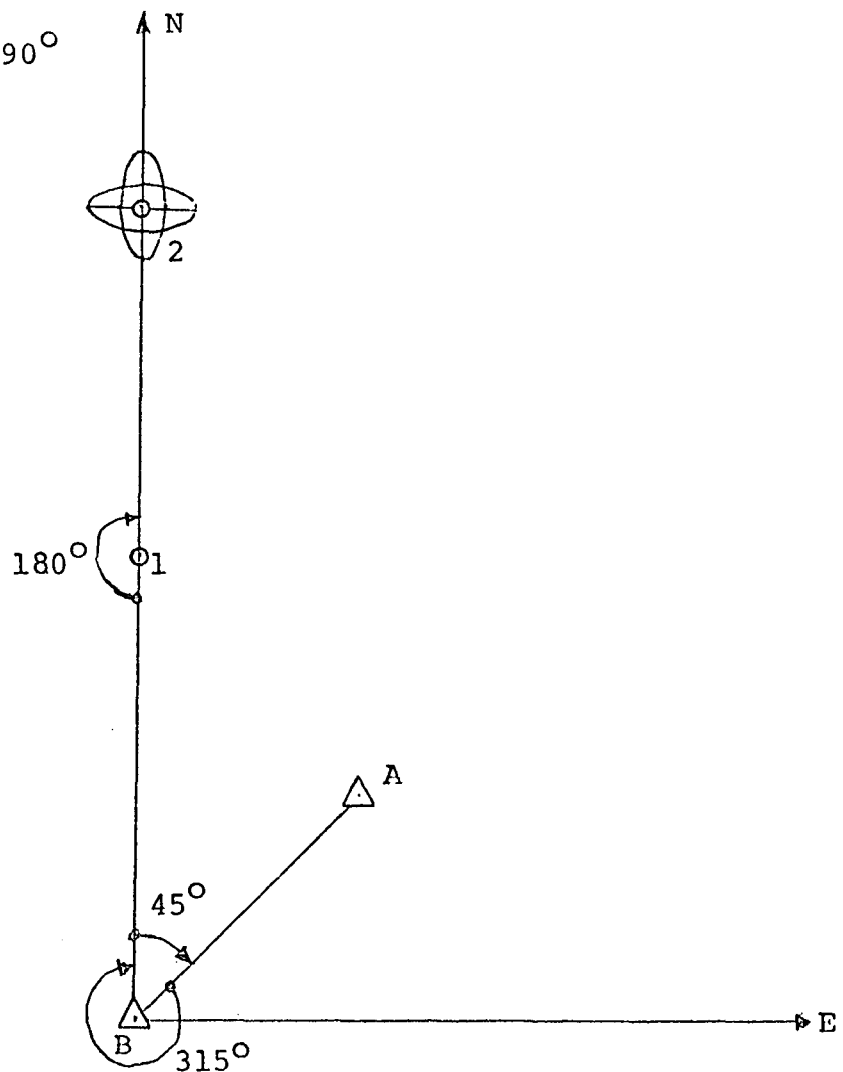


Fig. 5.21

Exemplo nº 21

Dados:

Distanciômetro C

Teodolito D

ÂNGULOS		$\sigma_\alpha$	DISTÂNCIAS		$\sigma_l$
$\alpha_1$	$315^\circ$		0,3"	$l_1$	
$\alpha_2$	$180^\circ$	0,3"	$l_2$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_3$	$180^\circ$	0,3"	$l_3$	30000m	5mm+1ppm
$\alpha_4$	$180^\circ$	0,3"	$l_4$	15000m	5mm+1ppm

Resultados:  $a=0,200\text{m}$  $b=0,064\text{m}$  $\xi=0^\circ \quad \xi=90^\circ$ 

Gráfico:

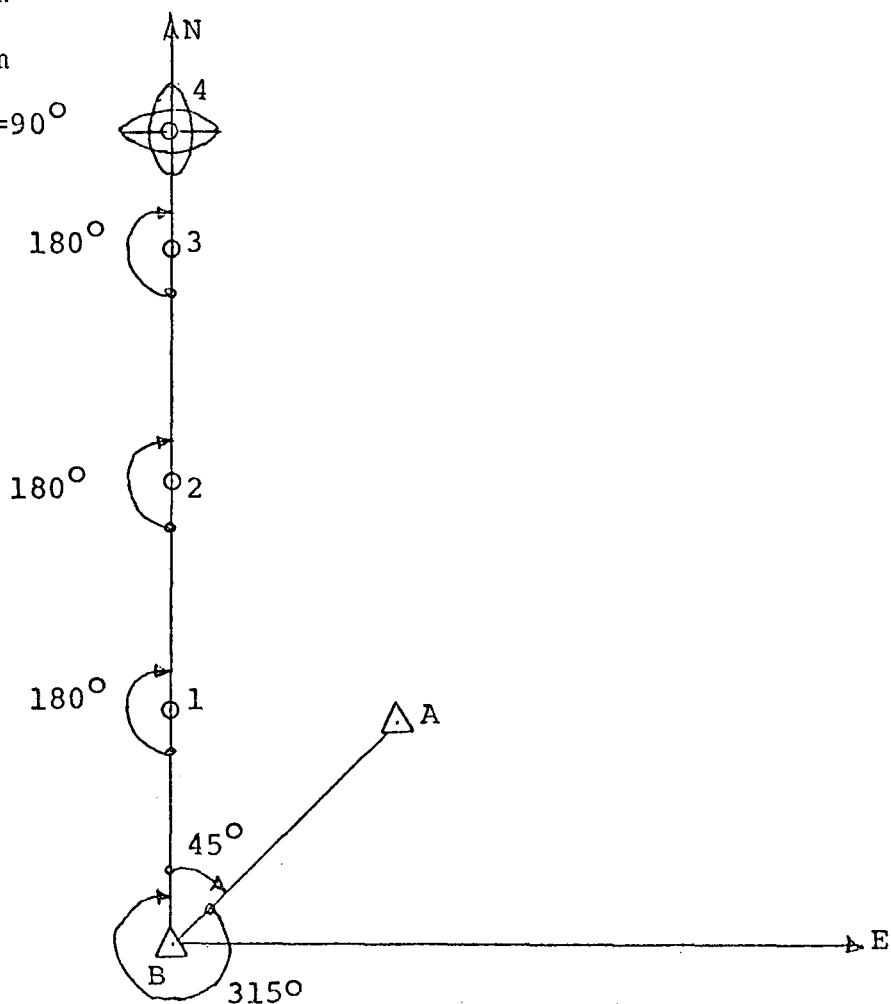


Fig. 5.22

5.3. Análise dos resultadosQuadro-Resumo

Exemplo nº	Equipamento	máxσ (m)	minσ (m)	t
1	A e B	0,511	0,233	180° 27'
2	A e B	0,437	0,215	118° 50'
3	A e B	0,449	0,220	-7° 9'
4	A e B	0,449	0,220	327° 51'
5	A e B	0,449	0,220	192° 51'
6	A e B	0,559	0,229	0° ou 90°
7	A e B	0,559	0,229	45° ou 135°
8	A e B	0,559	0,229	0° ou 90°
9	C e D	0,154	0,076	179° 13'
10	C e D	0,133	0,070	148° 9'
11	C e D	0,136	0,072	-7° 30'
12	C e D	0,168	0,076	0° ou 90°
13	C e D	0,168	0,076	45° ou 135°
14	C e D	0,168	0,076	0° ou 90°
15	A e B	0,504	0,106	182° 46'
16	C e D	0,177	0,181	0° 56'
17	C e D	0,207	0,070	0° 49'
18	A e B	0,564	0,191	185°
19	C e D	0,155	0,096	316° 57'
20	C e D	0,166	0,082	0° ou 90°
21	C e D	0,200	0,064	0° ou 90°

Da análise deste quadro-resumo, com restrições que estudos posteriores poderão ou não confirmar face a pequenez da amostra, parecem razoáveis as sugestões seguintes:

- pelos grupos de exemplos 3,4 e 5; 6,7 e 8 e 12,13 e 14 que a mudança de orientação de um mesmo tipo de poligonal não altera a propagação;

- pelos grupos de exemplos números 3, 4 e 5 e 6, 7 e 8; que para as mesmas distâncias, a propagação é maior para as poligonais em linha reta. Este fato é confirmado também comparando os grupos de exemplos números 9, 10 e 11 e 12, 13 e 14;

- pelos exemplos números 1 e 15, que diminuindo as distâncias de 10 vezes a propagação é quase a mesma;

- Pelos exemplos 9 e 19, que não há sensível diferença entre uma poligonal que liga 2 pontos e uma que parte e chega no mesmo ponto; sendo a 2ª 1,5 vezes maior que a 1ª ;

- pelos exemplos números 20 e 21, que para vencer u'a mesma distância de 105 km, a poligonal com maior número de lados tem maior propagação;

- pelos exemplos números 20 (2 lados), 12 (3 lados) e 21 (4 lados), que quanto maior o número de lados maior a propagação.

- pelo exemplo nº 2 que temos a menor propagação com instrumentos A e B e pelo exemplo nº 10 que temos a menor propagação com instrumentos C e D; em ambos os casos com ângulos  $270^{\circ}$  e  $90^{\circ}$  .

## CONCLUSÃO

A otimização, auxiliada substancialmente pelas técnicas computacionais, é uma poderosa ferramenta de trabalho utilizada nas grandes redes geodésicas e nas poligonais.

Com as dificuldades inerentes ao campo, principalmente em regiões de difícil acesso, com o alto custo do equipamento e as exigências de precisão cada vez mais rígidas, faz-se necessário um estudo prévio das poligonais.

À luz da precisão exigida pelo usuário, em termos de erro médio quadrático, pode-se, utilizando as técnicas de simulação computacional, saber qual a solução mais vantajosa em termos econômicos, para uma poligonal entre dois pontos.

NOTAS DE REFERÊNCIA

|<sup>01</sup>| CASTELLO BRANCO FILHO, Moysés. Ajustamento das poligonais geodésicas eletrônicas pelo método dos mínimos quadrados. s.l., Ministério da Guerra. Estado Maior do Exército, 1966. p.36-41.

|<sup>02</sup>| Ibid., p.41.

|<sup>03</sup>| NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION. Classification, standards of accuracy, and general specifications of geodetic control surveys. Rockville, 1974. p.6-7.

|<sup>04</sup>| Ibid., p.4-5.

|<sup>05</sup>| Ibid., p.5.

|<sup>06</sup>| CHRZANOWSKI, Adam. Design and error analysis of surveying projects, Lecture Notes, New Brunswick, (47):9. 1977.

|<sup>07</sup>| DOUBEK, Álvaro. CG-160 Levantamentos Eletrônicos - 2ª parte. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. p.128.

|<sup>08</sup>| BRASIL. Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Instrumentos eletrônicos de distâncias; Manual técnico. Brasília, n.p., no prelo.

|<sup>09</sup>| DOUBEK, p.160.

|<sup>10</sup>| BRASIL, n.p.

|<sup>11</sup>| Ibid., n.p.

|<sup>12</sup>| DOUBEK, p.195.

|<sup>13</sup>| CHRZANOWSKI, p.10.

|<sup>14</sup>| ESTADOS UNIDOS. Department of the Army and the Air Force. The universal grid systems. Washington, 1951. p.317-8.

|<sup>15</sup>| GEMAEL, Camil. Sistemas de projeção. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. p.67-78.

|<sup>16</sup>| RICHARDUS, Peter & ADLER, Ron K. Map projections. Amsterdam, North-Holland, 1972. p.137-43.

|<sup>17</sup>| ESTADOS UNIDOS, p.317-19.

|<sup>18</sup>| GEMAEL, p.67-78.

|<sup>19</sup>| RICHARDUS, p.99-102, 137-43, 163-67.

|<sup>20</sup>| CHAGAS, Carlos Braga. Teoria e prática do sistema UTM da projeção conforme de Gauss; publicação especial, Rio de Janeiro, s.ed., 1959. p.7-26.

- |<sup>21</sup>| GEMAEL, p.74-5, .77-8.
- |<sup>22</sup>| RICHARDUS, p.137-43, 161-2.
- |<sup>23</sup>| THOMAS, Paul D. Conformal projections in geodesy and cartography. Washington, D.C. Government Printing Office, 1952. p.77.
- |<sup>24</sup>| BRASIL. Serviço Geográfico do Exército. Tabelas para o cálculo de transporte de coordenadas geográficas. Rio de Janeiro, 1944. p.2-12.
- |<sup>25</sup>| HOSMER, George L. Geodesy. 2.ed., New York, John Wiley, 1946. p.206-26.
- |<sup>26</sup>| MITISHITA, Edson Aparecido. Transporte de coordenadas no elipsóide - Fórmulas de Puissant, programa de computador apresentado no Curso de Cartografia da Universidade Federal do Paraná em 1981.
- |<sup>27</sup>| ROMÃO, Verônica Maria Costa & CORDINI, Jucilei. Transporte de coordenadas: coeficientes para aplicação das fórmulas de E.M. Sodano relativas ao problema geodésico direto. Curitiba. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas 1979, (Congresso Brasileiro de Cartografia, 9., Curitiba 4-9 fevereiro de 1979). p.8-9.
- |<sup>28</sup>| ASSOCIATION INTERNATIONALE DE GEODESIE. Systeme geodesique de reference 1967. Paris, 1971. p.56.
- |<sup>29</sup>| ROMÃO, p.8.
- |<sup>30</sup>| Ibid., p.9.
- |<sup>31</sup>| GEMAEL, p.61-2, 74-8.
- |<sup>32</sup>| RICHARDUS, p.138-44.
- |<sup>33</sup>| CHAGAS, p.7-26, 40-7.
- |<sup>34</sup>| Ibid., p.30.
- |<sup>35</sup>| LIMA, Jacaono Batista de. Ajustamento de Observações. Curitiba, 1980. Trabalho Prático nº 1 de Ajustamento de Observações, 2ª parte, apresentado no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- |<sup>36</sup>| GEMAEL, Camil. Aplicação do cálculo matricial em geodésia - 2ª parte - Ajustamento de observações. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. p.2-8.
- |<sup>37</sup>| GEMAEL, Camil. Ajustamento de observações geodésicas - Noções de estatística. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. p.5-10, 24-5.
- |<sup>38</sup>| BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverses. Amsterdam, Elsevier, 1973. p.56-72, 90-1.



|<sup>39</sup>| HIRVONEN, R.A. Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry. New York, Frederick Ungar Publishing Co. 1965. p.4-20, 36-43.

|<sup>40</sup>| WELLS, D.E. & KRAKIWSKI, E.J. The method of least squares, Lecture Notes. New Brunswick, (18), 1971.

|<sup>41</sup>| GEMAEL, Camil. Aplicação do cálculo matricial ... p.7-8, 18-20.

|<sup>42</sup>| GEMAEL, Camil. Elipse e elipsóide dos erros. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. p.1-8.

|<sup>43</sup>| HIRVONEN, p.165-72.

|<sup>44</sup>| GEMAEL, Camil. Elipse... p.7-8.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. ADLER, R.K. & SHMUTTER, B. Precise traverse in major geodetic networks. The canadian surveyor le géomètre canadien. Ottawa, 25(4):389-97, 1971.
02. ASSOCIATION INTERNATIONALE DE GEODESIE. Systeme geodesique de Reference 1967. Paris, 1971. 115p.
03. BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverse. Amsterdam, Elsevier, 1973. 420p.
04. BLAHA, Georges. Étude sur l'exactitude des polygonales régulières en fonction de la précision des observations. The canadian surveyor le géomètre canadien. Ottawa, 27(1):10-22, 1973.
05. BOLETIN KERN. Aarau. n.24, mar. 1977.
06. BOMFORD, G. Geodesy. 3.ed. Oxford, At the Claredon Press, 1971. 731p.
07. BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Instrumentos eletrônicos de distâncias; Manual técnico. Brasília, n.p., no prelo.
08. \_\_\_\_\_. Poligonação eletrônica: manual técnico. Brasília, 1976. n.p.
09. BRASIL. Serviço Geográfico do Exército. Tabelas para o cálculo de transporte de coordenadas geográficas. Rio de Janeiro, 1944. 71p.
10. BURFORD, B.J. An empirical analysis of controlling geodetic terrestrial networks with Doppler observations and a very precise traverse. Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying. Kensington, (33):1-26, 1980.
11. CASTELLO BRANCO FILHO, Moysés. Ajustamento das poligonais geodésicas eletrônicas pelo método dos mínimos quadrados. s.l., Ministério da Guerra. Estado Maior do Exército, 1966. 117p.
12. CASTELLO BRANCO FILHO, Moysés; CHAGAS, Teófilo Portela; CARRILHO, Adahil Santos. Estudos sobre as investigações de precisão da medida eletrônica de distâncias. Anuário da Diretoria do Serviço Geográfico. Rio de Janeiro, (17): 121-31, 1968.
13. CHAGAS, Carlos Braga. Emprego da poligonação no aerolevanteamento. s.l., Ministério da Guerra. Serviço Geográfico do Exército, 1953. 83p.
14. \_\_\_\_\_. Teoria e prática do sistema UTM da projeção conforme de Gauss; publicação especial. Rio de Janeiro, s.ed., 1959. 75p.
15. CHAGAS, Teófilo Portela. Relatório provisório sobre a utilização dos equipamentos eletrônicos de medida de distâncias. Anuário da Diretoria do Serviço Geográfico, Rio de Janeiro, (16):117-28. 1966.

16. CHRZANOWSKI, Adam. Design and error analysis of surveying projects. Lecture Notes, New Brunswick, (47):1-55. 1977.
17. \_\_\_\_\_. Optimization of the breakthrough accuracy in tunneling surveys. The canadian surveyor le géomètre canadien. Ottawa, 35(1):5-16, 1981.
18. DOUBEK, Álvaro. CG-160 Levantamentos eletrônicos - 1ª parte. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 123p.
19. \_\_\_\_\_. CG-160 Levantamentos Eletrônicos - 2ª parte. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 205p.
20. \_\_\_\_\_. Poligonais Geodésicas. s.l., Divisão de Geografia. Secção de levantamento, 1969. 49p.
21. ESTADOS UNIDOS. Departments of the Army and the Air Force: The universal grid systems. Washington, 1951. 324p.
22. GEMAEI, Camil. Ajustamento de observações geodésicas - Noções de Estatística. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. 95p.
23. \_\_\_\_\_. Ajustamento: variação de coordenadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 50p.
24. \_\_\_\_\_. Aplicação do cálculo matricial em geodésia - 2ª parte - Ajustamento de Observações. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 95p.
25. \_\_\_\_\_. Elipse e elipsóide dos erros. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 33p.
26. \_\_\_\_\_. Levantamentos Eletrônicos. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1970. n.p.
27. \_\_\_\_\_. Sistemas de Projeção. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 127p.
28. HAZAY, I. Adjusting calculations in surveying. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970. 596p.
29. HIRVONEN, R.A. Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry. New York, Frederick Ungar Publishing Co. 1965, 261p.
30. HOSMER, George L. Geodesy. 2.ed. New York, John Wiley, 1946. 461p.
31. INSTITUTO PANAMERICANO DE GEOGRAFIA E HISTÓRIA. Glossario de terminos geodésicos. Argentina, 1977. 148p.

32. JENA, Veb Carl Zeiss. Novidades de JENA. República Democrática Alemã. s.d., n.p.
33. KERN. Instrumentos geodésicos. Aárau, s.d., n.p.
34. LEVALLOIS, J.J. Géodésie Générale Tome I. Paris Ve, L'Institut Géographique National, 1969. 401p.
35. LIMA, Jacaono Batista de. Ajustamento de Observações. Curitiba 1980. Trabalho Prático nº 1 de Ajustamento de Observações, 2ª parte, apresentado no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
36. MITISHITA, Edson Aparecido. Transporte de coordenadas no elip-sóide - Fórmulas de Puissant, programa de computador, apresentado no Curso de Cartografia da Universidade Federal do Paraná em 1981.
37. NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION. Classification standards of accuracy and general specifications of geodetic control surveys. Rockville, 1974. 12p.
38. OLIVEIRA, Cênrio. Dicionário cartográfico. Rio de Janeiro, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 1980. 448p.
39. PHILLIPS, John O. Specifications to support classification, standards of accuracy and general specification of geodetic control surveys. Rockville, National Oceanic and Atmospheric Administration, 1975. 45p.
40. RICHARDUS, Peter; ADLER, Ron K. Map projections. Amsterdam - North-Holland, 1972. 174p.
41. ROMÃO, Verônica Maria Costa & CORDINI, Jucilei. Transporte de coordenadas: coeficientes para aplicação das fórmulas de E.M. Sodano relativas ao problema geodésico direto. Curitiba. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas 1979, 14p. (Congresso Brasileiro de Cartografia, 9., Curitiba 4-9 fevereiro de 1979).
42. SANTOS, Leonildo dos. Geodésia III. Rio de Janeiro, 1981. Trabalho de Geodésia III apresentado no Curso de Cartografia do IME.
43. THOMAS, Paul D. Conformal projections in geodesy and cartography. Washington, D.C. Government Printing Office, 1952. 142p.
44. UOTILA, U.A. Statistical tests as guidelines in analyses of adjustment of control nets. Surveying and mapping. Washington, D.C. (1):47-52, 1975.
45. WELLS, D.E. & KRAKIWSKI, E.J. The method of least squares, Lecture Notes. New Brunswick, (18), 1971. 180p.
46. WILD. Princípios básicos de los instrumentos topográficos modernos. Heerbrugg, s.d., n.p.

47. WILD. Teodolitos. Heerbrugg, s.d., n.p.
48. ZEISS, Carl. Distanciómetros y taquímetros electroópticos. Oberkochen, s.d., n.p.
49. ZEISS, Carl. Instrumentos geodésicos. Oberkochen, s.d. 48p.

APÊNDICE  
PROGRAMAS FORTRAN

CONFECÇÃO DE TABELA PARA TRANSPORTE DE COORDENADAS  
COEFICIENTES A, B, C, D, E e F.

## ARQUIVO DE DADOS

6378160.      6.69460532856D-3      1.



EXEMPLO

*LATITUDE*	A	B	C	D	E	F
41 0 0	0.3229260610-01	0.324165740E-01	-0.2205861150-08	-0.2417593370-07	0.1334579560-13	-0.7319326660-12
41 0 30	0.3229259250-01	0.3241652700-01	-0.2206504970-08	-0.2417604440-07	0.1335142490-13	-0.7318700060-12
41 1 0	0.3229257690-01	0.3241648070-01	-0.2207148870-08	-0.2417705300-07	0.1335685710-13	-0.7318072610-12
41 1 30	0.3229256120-01	0.3241643370-01	-0.2207792970-08	-0.2417805960-07	0.1336229230-13	-0.7317444310-12
41 2 0	0.3229254560-01	0.3241638670-01	-0.2208437230-08	-0.2417906410-07	0.1336773050-13	-0.7316815170-12
41 2 30	0.3229253000-01	0.3241633970-01	-0.2209081660-08	-0.2418006860-07	0.1337317170-13	-0.7316185170-12
41 3 0	0.3229251440-01	0.3241629260-01	-0.2209726240-08	-0.2418107310-07	0.1337861560-13	-0.7315554320-12
41 3 30	0.3229249880-01	0.3241624560-01	-0.2210370970-08	-0.2418207760-07	0.1338405950-13	-0.7314922630-12
41 4 0	0.3229248320-01	0.3241619860-01	-0.2211015900-08	-0.2418308210-07	0.1338950340-13	-0.7314290940-12
41 4 30	0.3229246760-01	0.3241615150-01	-0.2211660970-08	-0.2418408660-07	0.1339494730-13	-0.7313659250-12
41 5 0	0.3229245200-01	0.3241610450-01	-0.2212306210-08	-0.2418509110-07	0.1340039120-13	-0.7313027560-12
41 5 30	0.3229243640-01	0.3241605740-01	-0.2212951600-08	-0.2418609560-07	0.1340583510-13	-0.7312395870-12
41 6 0	0.3229242080-01	0.3241601040-01	-0.2213597160-08	-0.2418710010-07	0.1341127900-13	-0.7311764180-12
41 6 30	0.3229240520-01	0.3241596340-01	-0.2214242800-08	-0.2418810460-07	0.1341672290-13	-0.7311132490-12
41 7 0	0.3229238960-01	0.3241591630-01	-0.2214888670-08	-0.2418910910-07	0.1342216680-13	-0.7310500800-12
41 7 30	0.3229237400-01	0.3241586930-01	-0.2215534810-08	-0.2419011360-07	0.1342761070-13	-0.7309869110-12
41 8 0	0.3229235840-01	0.3241582220-01	-0.2216181020-08	-0.2419111810-07	0.1343305460-13	-0.7309237420-12
41 8 30	0.3229234280-01	0.3241577520-01	-0.2216827390-08	-0.2419212260-07	0.1343849850-13	-0.7308605730-12
41 9 0	0.3229232720-01	0.3241572810-01	-0.2217473920-08	-0.2419312710-07	0.1344394240-13	-0.7307974040-12
41 9 30	0.3229231160-01	0.3241568110-01	-0.2218120620-08	-0.2419413160-07	0.1344938630-13	-0.7307342350-12
41 10 0	0.3229229600-01	0.3241563400-01	-0.2218767480-08	-0.2419513610-07	0.1345483020-13	-0.7306710660-12
41 10 30	0.3229228040-01	0.3241558690-01	-0.2219414500-08	-0.2419614060-07	0.1346027410-13	-0.7306078970-12
41 11 0	0.3229226480-01	0.3241553990-01	-0.2220061680-08	-0.2419714510-07	0.1346571800-13	-0.7305447280-12
41 11 30	0.3229224920-01	0.3241549280-01	-0.2220709030-08	-0.2419814960-07	0.1347116190-13	-0.7304815590-12
41 12 0	0.3229223360-01	0.3241544580-01	-0.2221356540-08	-0.2419915410-07	0.1347660580-13	-0.7304183900-12
41 12 30	0.3229221800-01	0.3241539870-01	-0.2222004220-08	-0.2420015860-07	0.1348204970-13	-0.7303552210-12
41 13 0	0.3229220240-01	0.3241535160-01	-0.2222652050-08	-0.2420116310-07	0.1348749360-13	-0.7302920520-12
41 13 30	0.3229218680-01	0.3241530460-01	-0.2223300000-08	-0.2420216760-07	0.1349293750-13	-0.7302288830-12
41 14 0	0.3229217120-01	0.3241525750-01	-0.2223948220-08	-0.2420317210-07	0.1349838140-13	-0.7301657140-12
41 14 30	0.3229215560-01	0.3241521040-01	-0.2224596550-08	-0.2420417660-07	0.1350382530-13	-0.7301025450-12
41 15 0	0.3229214000-01	0.3241516330-01	-0.2225245040-08	-0.2420518110-07	0.1350926920-13	-0.7300393760-12
41 15 30	0.3229212440-01	0.3241511630-01	-0.2225893700-08	-0.2420618560-07	0.1351471310-13	-0.7299762070-12
41 16 0	0.3229210880-01	0.3241506920-01	-0.2226542820-08	-0.2420719010-07	0.1352015700-13	-0.7299130380-12
41 16 30	0.3229209320-01	0.3241502210-01	-0.2227191500-08	-0.2420819460-07	0.1352560090-13	-0.7298498690-12
41 17 0	0.3229207760-01	0.3241497500-01	-0.2227840450-08	-0.2420919910-07	0.1353104480-13	-0.7297867000-12
41 17 30	0.3229206200-01	0.3241492790-01	-0.2228489760-08	-0.2421020360-07	0.1353648870-13	-0.7297235310-12
41 18 0	0.3229204640-01	0.3241488090-01	-0.2229139440-08	-0.2421120810-07	0.1354193260-13	-0.7296603620-12
41 18 30	0.3229203080-01	0.3241483380-01	-0.2229789060-08	-0.2421221260-07	0.1354737650-13	-0.7295971930-12
41 19 0	0.3229201520-01	0.3241478670-01	-0.2230438800-08	-0.2421321710-07	0.1355282040-13	-0.7295340240-12
41 19 30	0.3229199960-01	0.3241473960-01	-0.2231088850-08	-0.2421422160-07	0.1355826430-13	-0.7294708550-12
41 20 0	0.3229198400-01	0.3241469250-01	-0.2231739190-08	-0.2421522610-07	0.1356370820-13	-0.7294076860-12
41 20 30	0.3229196840-01	0.3241464540-01	-0.2232389720-08	-0.2421623060-07	0.1356915210-13	-0.7293445170-12
41 21 0	0.3229195280-01	0.3241459830-01	-0.2233040500-08	-0.2421723510-07	0.1357459600-13	-0.7292813480-12
41 21 30	0.3229193720-01	0.3241455120-01	-0.2233691660-08	-0.2421823960-07	0.1358003990-13	-0.7292181790-12
41 22 0	0.3229192160-01	0.3241450410-01	-0.2234343180-08	-0.2421924410-07	0.1358548380-13	-0.7291550100-12
41 22 30	0.3229190600-01	0.3241445700-01	-0.2234995210-08	-0.2422024860-07	0.1359092770-13	-0.7290918410-12
41 23 0	0.3229189040-01	0.3241440990-01	-0.2235647820-08	-0.2422125310-07	0.1359637160-13	-0.7290286720-12
41 23 30	0.3229187480-01	0.3241436280-01	-0.2236300600-08	-0.2422225760-07	0.1360181550-13	-0.7289655030-12
41 24 0	0.3229185920-01	0.3241431570-01	-0.2236953600-08	-0.2422326210-07	0.1360725940-13	-0.7289023340-12
41 24 30	0.3229184360-01	0.3241426860-01	-0.2237606800-08	-0.2422426660-07	0.1361270330-13	-0.7288391650-12
41 25 0	0.3229182800-01	0.3241422150-01	-0.2238260200-08	-0.2422527110-07	0.1361814720-13	-0.7287759960-12
41 25 30	0.3229181240-01	0.3241417440-01	-0.2238913800-08	-0.2422627560-07	0.1362359110-13	-0.7287128270-12
41 26 0	0.3229179680-01	0.3241412730-01	-0.2239567600-08	-0.2422728010-07	0.1362903500-13	-0.7286496580-12
41 26 30	0.3229178120-01	0.3241408020-01	-0.2240221600-08	-0.2422828460-07	0.1363447890-13	-0.7285864890-12
41 27 0	0.3229176560-01	0.3241403310-01	-0.2240875800-08	-0.2422928910-07	0.1363992280-13	-0.7285233200-12
41 27 30	0.3229175000-01	0.3241398600-01	-0.2241530200-08	-0.2423029360-07	0.1364536670-13	-0.7284601510-12
41 28 0	0.3229173440-01	0.3241393890-01	-0.2242184800-08	-0.2423129810-07	0.1365081060-13	-0.7283969820-12
41 28 30	0.3229171880-01	0.3241389180-01	-0.2242839600-08	-0.2423230260-07	0.1365625450-13	-0.7283338130-12
41 29 0	0.3229170320-01	0.3241384470-01	-0.2243494600-08	-0.2423330710-07	0.1366169840-13	-0.7282706440-12
41 29 30	0.3229168760-01	0.3241379760-01	-0.2244149800-08	-0.2423431160-07	0.1366714230-13	-0.7282074750-12

TRANSPORTE DE COORDENADAS NO ELIPSÓIDE  
FÓRMULAS DE PUISSANT

```

00001      IMPLICIT REAL* 8(A-H,O-Z)
00002      C      CONFECCAO DE TABELA PARA TRANSPORTE DE COORDENADAS
00003      20     READ(2,1)A,EE,N
00004      1      FORMAT(26,I)
00005      IF(N=0)3,4,3
00006      3      WRITE(3,6)
00007      6      FORMAT('1',////,36X,'TRANSPORTE DE
00008      1COORDENADAS',//,35X,'TABELA DE COEFICIENTES PARA APLICAC
00009      2AO DAS FORMULAS',//,48X,'DE',5X,'PUISSANT',//,35X,'ELIPS
00010      3OIDE REFERENCIA - 1967')
00011      WRITE(3,7)
00012      7      FORMAT(//,44X,'ELABORADA PELO PROFESSOR JUCILEI',//,44X,'COR
00013      1DINI.AUXILIAR DE ENSINO DA',//,44X,'CADEIRA DE ASTRONOMIA E
00014      2 GEODESIA',//,44X,'NA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA',//,44X
00015      3,'CATARINA - U.F.S.C.',//,60X,'JUNHO/1978')
00016      WRITE(3,8)
00017      8      FORMAT('1')
00018      WRITE(3,9)
00019      9      FORMAT(2X,'*LATITUDE*',8X,'A',8X,'*',8X,'B',8X,'*',8X,'C',
00020      18X,'*',8X,'B',8X,'*',8X,'E',8X,'*',8X,'F',7X,'*',//,2X,118('*'))
00021      PI=4.000*DATAN(1.000)
00022      XX=(1.00/3600.00)*(PI/180.00)
00023      FATOR=SIN(XX)
00024      I=1
00025      FIG=0.00
00026      FIM=0.00
00027      FIS=0.00
00028      50     R=(FIS/60.00)+FIM
00029      RR=(R/60.00)+FIG
00030      FAR=(RR*PI)/180.00
00031      FIR=-1.00*FAR
00032      FIME=FIR
00033      X=SIN(FIR)
00034      Y=COS(FIR)
00035      Z=SIN(FIME)
00036      H=COS(FIME)
00037      T=X/Y
00038      XN=A/(1.00-EE*XX**2.)*0.5
00039      XM=A*(1.00-EE)/(1.00-EE*XX**2.)*1.5
00040      C      CALCULO DOS COEFICIENTES
00041      AL=1.00/(XN*FATOR)
00042      B=1.00/(XM*FATOR)
00043      C=T/(2.00*XM*XN*FATOR)
00044      D=(3.00*EE*X*Y*FATOR)/(2.00*(1.00-EE*XX**2.))
00045      E=(1.00+3.00*T**2.)/(6.00*XN**2.)
00046      F=(Z*H**2.*FATOR**2.)/12.00
00047      IFIG=FIG
00048      IFIM=FIM
00049      IFIS=FIS
00050      WRITE(3,11)IFIG,IFIM,IFIS,AL,B,C,D,E,F
00051      11     FORMAT(3X,I2,1X,I2,1X,I2,2X,D16.9,2X,D16.9,2X,D16.9,
00052      12X,D16.9,2X,D16.9,2X,D16.9)
00053      FIS=FIS+30.00
00054      I=I+1
00055      IF(I=60)12,12,13
00056      12     IF(FIS=60.00)14,15,14

```

```
00057 14 GO TO 50
00058 15 GO TO 100
00059 13 I=I-60
00060 WRITE(3,16)
00061 16 FORMAT('1')
00062 WRITE(3,55)
00063 55 FORMAT(2X,'*LATITUDE*',8X,'A',8X,'*',8X,'B',8X,'*',8X,'C',
00064 18X,'*',8X,'D',8X,'*',8X,'E',8X,'*',8X,'F',7X,'*',/,2X,
00065 2118('*'))
00066 100 FIS=0.00
00067 FIM=FIM+1.00
00068 IF(FIM-60.00)18,19,18
00069 18 GO TO 50
00070 19 FIM=0.00
00071 FIG=FIG+1.00
00072 IF(FIG-90.00)21,21,22
00073 21 GO TO 50
00074 22 GO TO 20
00075 4 CALL EXIT
00076 END
```

```

00001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00002      GRAD= 4.00*DATAN(1.00)/180.00
00003      READ(2,100) NUF,XLAG,XLAM,XLAS,XLOG,XLOM,XLOS
00004 100    FORMAT(7G)
00005      XLAT=(XLAG+XLAM/60.00+XLAS/3600.00)*GRAD
00006      XLONG=(XLOG+XLOM/60.00+XLOS/3600.00)*GRAD
00007      READ(2,101) A,E,XCAZG,XCAZM,XCAZS
00008 101    FORMAT(5G)
00009      XAZ=(XCAZG+XCAZM/60.00+XCAZS/3600.00)*GRAD
00010      WRITE(3,102)
00011 102    FORMAT(5(/),28X,70('*'),/,43X,'TRANSPORTE DE COORDENADAS
00012      1NO ELIPSOIDE',/,28X,70('*'),3(/),38X,50('*'),/,54X,'FOR
00013      1MULAS DE FUISSANT',/,38X,50('*'),5(/))
00014      XLAM= DABS(XLAM)
00015      XLAS= DABS(XLAS)
00016      XLOM= DABS(XLOM)
00017      XLOS= DABS(XLOS)
00018      WRITE(3,103) XLAG,XLAM,XLAS,XLOG,XLOM,XLOS,XCAZG,XCAZM,XCAZS
00019 103    FORMAT(53X,'VERTICE DE ORIGEM',5(/),43X,'LATITUDE DA ORIGEM
00020      1=',F5.0,2X,F3.0,2X,F6.3,3(/),43X,'LONGITUDE DA ORIGEM=',
00021      1F5.0,2X,F3.0,2X,F6.3,3(/),43X,'*AZIMUTE*' DA ORIGEM=',
00022      1F5.0,2X,F3.0,2X,F6.3)
00023      DO 104 I=1,NUF
00024      READ(2,101) NF,XDIST,XALFG,XALFM,XALFS
00025      XALF= (XALFG+XALFM/60.00+XALFS/3600.00)*GRAD
00026      XAZ= XAZ+XALF
00027      XF=8.00*DATAN(1.00)
00028      IF(XAZ.GT.XF) XAZ= XAZ-XF
00029      CALL TRASGE(A,E,XDIST,XAZ,XLAT,XLONG)
00030      XLAT1=XLAT
00031      XLONG1=XLONG
00032      XAZ1=XAZ
00033      CALL TRANSF(XLAT1,XLONG1,XAZ1,IALAT,IMLAT,DXGS,IALON,IMLON,
00034      1DXGLS,IAZI,MAZI,DSAZI)
00035      WRITE(3,106)NF,XALFG,XALFM,XALFS,XDIST,IALAT,IMLAT,DXGS,
00036      1IALON,IMLON,DXGLS,IAZI,MAZI,DSAZI
00037 106    FORMAT(8(/),53X,'NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL=',I4,5(/),
00038      143X,'ANGULO HORIZ OBSERVADO=',F5.0,2X,F3.0,2X,F6.3,3(/),
00039      143X,'DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR=',F12.4,3(/),43X,'LATITUDE
00040      1 DO PONTO DA POLIGONAL=',I4,2X,I2,2X,F6.3,3(/),43X,'LONGITUDE
00041      1 DO PONTO DA POLIGONAL=',I4,2X,I2,2X,F6.3,3(/),43X,'CONTRA
00042      1AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL=',I4,2X,I2,2X,F6.3)
00043 104    CONTINUE
00044      STOP
00045      END

```

```

00001      SUBROUTINE TRASGE(A,E,XDIST,XAZ,XLAT,XLON)
00002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00003      XN=(A/(1.D0-E*(DSIN(XLAT))**2)**0.5D0)
00004      XM=(A*(1.D0-E))/((1.D0-E*(DSIN(XLAT))**2)**1.5D0)
00005      XRO=(4.D0*DATAN(1.D0))/(180.D0*3600.D0)
00006      XB=(1.D0)/(XM*XRO)
00007      XC=((DSIN(XLAT)/DCOS(XLAT)))/(2.D0*XN*XM*XRO)
00008      XD=(3.D0*E*DSIN(XLAT)*DCOS(XLAT)*XRO)/(2.D0*(1.D0-E*(DSIN(
00009      1XLAT))**2))
00010      XH=(XDIST*DCOS(XAZ))/(XM*XRO)
00011      XE=(1.D0+3.D0*(DSIN(XLAT)/DCOS(XLAT))**2)/(6.D0*XN**2)
00012      XDEL1=XDIST*XB*DCOS(XAZ)+XDIST**2*XC*(DSIN(XAZ))**2-XH*
00013      1XDIST**2*XE*(DSIN(XAZ))**2
00014      XDEL2=XD*XDEL1**2
00015      RAD=4.D0*DATAN(1.D0)/180.D0
00016      XDEL=-((XDEL1+XDEL2)/3600.D0)*RAD
00017      XLAT1= XLAT+XDEL
00018      XN1=(A/(1.D0-E*(DSIN(XLAT))**2)**0.5D0)
00019      XA=(XDIST)/(XN1)
00020      XA1=DSIN(XA)
00021      XDELO=(XA1*(DSIN(XAZ)/DCOS(XLAT1)))
00022      XDELOS=ASIN(SNGL(XDELO))
00023      XDELOS=(XDELOS*180.D0*3600.D0)/(4.D0*DATAN(1.D0))
00024      XDELON=(XDELOS/3600.D0)*RAD
00025      IF(XLON.LT.0) GO TO 1
00026      XLON1=XLON+XDELON
00027      GO TO 2
00028      1 XLON1=XLON-XDELON
00029      2 XLATM=(XLAT+XLAT1)/2.D0
00030      XLATM1=(XLAT-XLAT1)/2.D0
00031      XDAZO=(DSIN(XLATM)/DCOS(XLATM1))
00032      XF=((DSIN(XLATM)*(DCOS(XLATM))**2)*XRO**2)/12.D0
00033      XDEAZ=- (XDELOS*XDAZO+XDELOS**3*XF)
00034      XDEAZR=(XDEAZ/3600.D0)*RAD
00035      XAZ1=XAZ+XDEAZR+4.D0*DATAN(1.D0)
00036      XF=(8.D0*DATAN(1.D0))
00037      IF(XAZ1.GT.XF) XAZ1= XAZ1-XF
00038      XLAT=XLAT1
00039      XLON=XLON1
00040      XAZ=XAZ1
00041      RETURN
00042      STOP
00043      END

```

```
00001      SUBROUTINE TRANSF(XALAT,ALON,XAZI,IALAT,IMLAT,DXGS,IALON,
00002      IIMLON,DXGLS,IAZI,MAZI,DIAZI)
00003      IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z)
00004      RAD= (180.D0)/(4.D0*DATAN(1.D0))
00005      XALAT= XALAT*RAD
00006      ALON= ALON*RAD
00007      XAZI=XAZI*RAD
00008      IALAT=XALAT
00009      IALON=ALON
00010      IAZI=XAZI
00011      DXG=DABS((XALAT-IALAT)*60.D0)
00012      DXGL=DABS((ALON-IALON)*60.D0)
00013      DIAZI=DABS((XAZI-IAZI)*60.D0)
00014      IMLAT= DABS(DXG)
00015      IMLON= DABS(DXGL)
00016      MAZI=DABS(DIAZI)
00017      DXGS= DABS((DXG-IMLAT)*60.D0)
00018      DXGLS= DABS((DXGL-IMLON)*60.D0)
00019      DMAZI=DABS((DIAZI-MAZI)*60.D0)
00020      RETURN
00021      STOP
00022      END
```



## ARQUIVO DE DADOS

7 -27, -49, -17.8961 -50, -11, -32.1980  
6378160, 6.694541854D-3 190, 25, 18.19  
01 9417.05 273, 58, 23.84  
02 5656.11 123, 20, 5.05  
03 5356.18 210, 29, 52.49  
04 5789.06 289, 22, 8.64  
05 15398.98 226, 31, 51.47  
06 7815.84 208, 8, 39.67  
07 13500.00 288, 8, 59.45

EXEMPLO

\*\*\*\*\*  
 TRANSPORTE DE COORDENADAS NO ELIPSOIDE  
 \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
 FORMULAS DE PUISSANT  
 \*\*\*\*\*

VERTICE DE ORIGEM

LATITUDE DA ORIGEM= -27. 49. 17.896

LONGITUDE DA ORIGEM= -50. 11. 32.198

\*\*AZIMUTE\*\* DA ORIGEM= 190. 25. 18.190

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 1

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 273. 58. 23.840

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 9417.0500

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 48 1.730

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 17 5.424

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 284 26 17.499

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 2

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 123. 20. 5.050

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 5656.1100

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 50 5.196

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 19 38.480

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 227 47 33.974

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 3

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 210. 29. 52.490

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 5356.1800

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 50 40.472

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 22 50.159

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 258 18 55.978

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 4

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 289. 22. 8.640

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 5789.0600

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 47 34.097

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 22 21.881

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 7 40 51.421

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 5

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 226, 31, 51.470

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 15398.9800

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 42 41.343

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 14 45.913

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 54 9 10.571

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 6

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 208, 8, 39.670

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 7815.8400

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 42 7.231

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 10 3.212

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 82 15 38.800

NUMERO DO PONTO DA POLIGONAL= 7

ANGULO HORIZ OBSERVADO= 288. 8. 59.450

DISTANCIA DO PONTO ANTERIOR= 13500.0000

LATITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -27 49 18.568

LONGITUDE DO PONTO DA POLIGONAL= -50 11 32.350

CONTRA AZIMUTE DO PTO DA POLIGONAL= 190 25 19.770