

JOSÉ DE MORAIS PEREIRA

**FORMAÇÃO DE ILHAS MAGNÉTICAS EM  
TOKAMAKS COM ANÉIS DE CORRENTE**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA

1994



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. JOSÉ DE MORAIS PEREIRA

TÍTULO DA TESE: "Formação de Ilhas Magnéticas em Tokamaks com Anéis de Correntes"

Em sessão pública de defesa de tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 16 de junho de 1994

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Ricardo Luiz Viana  
Presidente/Orientador - UFPR

Prof.Dr. Iberê Luiz Caldas  
Departamento de Física - USP

Prof.Dr. Maria Vittória A.P. Heller  
Departamento de Física - USP

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à todos aqueles que, direta ou indiretamente, ajudaram neste trabalho, em especial:

Ao Professor Ricardo Luiz Viana pela orientação deste trabalho e a cessão das figuras da tese.

Aos meus colegas da Universidade pelo incentivo, carinho e amizade.

Ao colega do grupo Diogenes B. Vasconcelos pelas discussões do trabalho.

À Casa do Estudante Universitário pela moradia e aos colegas moradores: Elton L. Schneider, Airton J. Schneider, Eliseu C. Schneider, Altamir R. da Silva, Silvio A. Netto, Rodrigo A. Gonzales, Marcelo A. Chichanoski, André Cavichia, Eldér O. Guimarães, João F. M. Sampaio e Eli S. Santos que me incentivaram e me deram apoio nas horas difíceis.

Ao Professor Valdir Okano pelas sugestões e apoio computacional.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*Dedico este trabalho aqueles que sempre estiveram ao meu lado me incentivando, em especial à minha família.*

## Resumo

Através do método de Matsuda e Yoshikawa, estimamos analiticamente a largura das ilhas magnéticas para um Tokamak de grande razão de aspecto, devido a campos perturbativos gerados por anéis de corrente. A largura das ilhas magnéticas é proporcional à raiz quadrada da razão entre a componente radial do campo perturbativo e o campo poloidal de equilíbrio e também é inversamente proporcional à raiz quadrada do cisalhamento magnético. A largura das ilhas magnéticas varia com a intensidade da corrente nos anéis e com o número dos mesmos. Obtivemos a secção de Poincaré das linhas de campo magnético fazendo uma superposição do campo de equilíbrio do Tokamak com o campo perturbativo. Usando o método de Adams-Moulton, as equações das linhas de campo magnético foram integradas numericamente. Nas secções de Poincaré aparecem ilhas primárias. Ilhas secundárias surgem devido à correção toroidal introduzida no campo magnético toroidal de equilíbrio. Os resultados obtidos pela integração numérica concordam com os resultados analíticos para a largura das ilhas magnéticas.

## ABSTRACT

We estimate magnetic island widths for a large aspect ratio Tokamak due to perturbing fields generated by ring-shaped coils, through a model introduced by Matsuda and Yoshikawa. Magnetic island width is proportional to the square root of the ratio between the radial component of the perturbing field and equilibrium poloidal field, as well as is inversely proportional to the square root of magnetic shear. Magnetic island widths vary with current strength in ring-shaped coils as well as with the number of them. We have obtained a Poincaré section of the magnetic field lines, making a superposition of the equilibrium Tokamak field with a perturbing field. The magnetic field line equations were integrated numerically, by means of the Adams- Moulton method. Primary islands appear in Poincaré sections, and secondary islands show up when a toroidicity correction is introduced into the toroidal magnetic field. The results obtained by means of numerical integration agree with the ones obtained analytically as far as magnetic island width is concerned.

## Índice

Introdução .....	1
Capítulo 1 - Equilíbrio MHD em Tokamaks	
1.1 - Tokamaks .....	5
1.2 - Equilíbrio MHD .....	7
1.3 - Superfícies Magnéticas .....	9
1.4 - Equilíbrio de uma Coluna Cilíndrica de Plasma .....	11
Capítulo 2 - Campos Perturbativos devido a Anéis de Corrente	
2.1 - Limitador Magnético Ergódico .....	17
2.2 - Método de Matsuda e Yoshikawa .....	19
2.3 - Largura das Ilhas Magnéticas .....	25
2.4 - Componente Radial do Campo Perturbativo .....	26
2.5 - Campo Perturbativo devido a Anéis de Corrente .....	29
2.6 - Exemplo Numérico .....	33
Capítulo 3 - Mapeamento das Linhas de Campo Magnético	
3.1 - Conceitos Básicos	
3.1.1 - Mapeamentos .....	37
3.1.2 - Mapeamento das Linhas de Campo Magnético .....	38
3.1.3 - Correção Toroidal e o Mapeamento .....	42
3.2 - Mapeamento das Linhas de Campo na presença de Anéis de Corrente .....	44
3.3 - Integração Numérica das Equações das Linhas de Campo Magnético .....	45
Conclusões .....	56
Apêndice A - Cálculo do Campo Magnético gerado por um Anel Limitador em Geometria Cilíndrica .....	58
Apêndice B - Verificação dos outros Coeficientes de Fourier .....	65

Referências .....67

## Introdução

O problema da interação entre a coluna de plasma confinada num Tokamak e a sua parede interna constituiu-se num obstáculo à obtenção de correntes de plasma de longa duração. Para diminuir a intensidade desta interação, deseja-se a formação de uma camada periférica da coluna de plasma com baixa temperatura, de modo a reduzir os impactos térmicos sobre a parede interna do Tokamak, e consequentemente a liberação de impurezas por "sputtering".

Sabe-se que o aumento do coeficiente de difusão anômala de partículas nesta camada periférica causa seu resfriamento (Engelhardt e Feneberg, 1978), e pode ser conseguido a partir da ergodização do campo magnético existente nesta região. A aplicação de campos ressonantes externos, gerando cadeias de ilhas magnéticas, é a forma mais utilizada para produzir campos magnéticos estocásticos em sistemas fechados de confinamento.

Os limitadores magnéticos ergódicos (Feneberg e Wolf, 1981), foram concebidos para gerarem campos estocásticos na camada periférica por meio de campos ressonantes criados por correntes externas ao vaso toroidal. Nos últimos anos, várias experiências realizadas no TEXT (Mc Cool et al., 1989), CSTN-II (Takamura et al., 1987) e em outros Tokamaks tem demonstrado a eficiência deste tipo de limitadores, indicando a diminuição de temperatura da camada periférica e a redução no conteúdo de impurezas no interior da coluna de plasma.

Desde a década de setenta são utilizadas hélices enroladas em Tokamaks para criar cadeias de ilhas magnéticas dentro do plasma, a fim de estudar instabilidades de ruptura (Karger, et al. 1975). Existem problemas técnicos na montagem destes enrolamentos, como a existência de várias janelas no toróide, com as finalidades de diagnóstico, vácuo, controle, entre outras. Um problema similar apareceu nos primeiros experimentos de limitadores magnéticos ergódicos, no qual desenvolveu-se uma configuração de hélices enroladas (Karger e Lackner, 1977) e posteriormente outra com espiras em formato de anel (Martin e Taylor,

1984), ocupando uma menor fração do vaso do Tokamak.

Nosso objetivo principal neste trabalho é o de estudar a formação das ilhas magnéticas formadas a partir de uma perturbação externa, devida a anéis de corrente (que por sua vez são componentes essenciais dos limitadores magnéticos ergódicos), numa aproximação de grande razão de aspecto, usando alguns parâmetros do Tokamak TBR-I, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP).

No primeiro capítulo, apresentamos o princípio de funcionamento de uma máquina de confinamento do tipo Tokamak e um resumo geral de sua história. Descrevemos as equações fundamentais do equilíbrio da Magnétohidrodinâmica (MHD), que nos permitem descrever quantitativamente plasmas a temperaturas termonucleares. Um dos problemas em Física de Plasma relacionada com Fusão Termonuclear Controlada é obter correntes de plasma estáveis por um tempo suficientemente longo. O confinamento do plasma em Tokamak é realizado basicamente pela superposição de dois campos magnéticos: o campo poloidal  $B_\theta$ , criado pela própria corrente de plasma  $I_p$  e o campo toroidal  $B_\varphi$ , que é gerado por espiras de corrente localizadas em volta da câmara do Tokamak (Furth, 1975). As linhas de campo magnético repousam sobre superfícies chamadas magnéticas, as quais podem ser caracterizadas por um fluxo magnético  $\Psi = \Psi_0(r)$  (Fernandes et al, 1988). A existência e a estabilidade destas superfícies são condições necessárias ao confinamento MHD de plasmas em Tokamak. Uma grandeza fundamental dessas superfícies é a transformada rotacional, que é o ângulo poloidal varrido pela linha de campo ao longo de uma volta toroidal (Caldas e Vannucci, 1985). Na sequência, descrevemos os campos de equilíbrio de uma coluna cilíndrica de plasma e um perfil de corrente do tipo parabólico, pois será este o tipo de perfil empregado em nosso trabalho.

No segundo capítulo, apresentamos o método de Matsuda e Yoshikawa (Matsuda e Yoshikawa, 1975), que é um método analítico para obter a largura das ilhas magnéticas formadas pela presença de campos magnéticos ressonantes. Aplicamos este método para es-

timar a largura das ilhas magnéticas no Tokamak TBR-I. O método nos leva a fazer uma expansão da transformada rotacional em série de Taylor nas vizinhanças da superfície magnética ressonante. Quando aplicamos uma perturbação ao sistema, as superfícies magnéticas racionais são destruídas. A destruição das superfícies magnéticas implica no aparecimento de um certo número de pontos fixos (Teorema de Poincaré-Birkhoff), e tais ilhas se formarão em torno desses pontos fixos, que podem ser hiperbólicos ou elípticos. Devido à geometria empregada, supomos que o campo radial de equilíbrio é nulo e desprezamos o campo poloidal perturbativo, pois este é muito pequeno comparado com o campo poloidal de equilíbrio. Devido à periodicidade nas variáveis  $\theta$  e  $\varphi$ , expandimos o campo radial perturbativo em série de Fourier dupla.

Tomando os primeiros termos da expansão da transformada rotacional e utilizando a equação das linhas de campo  $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ , chegamos à equação do pêndulo simples (Lichtenberg e Lieberman, 1983), tal que a dinâmica das linhas de campo magnético na vizinhança de uma ressonância é análoga ao movimento de uma partícula em um potencial periódico.

Na sequência, calculamos analiticamente a largura das ilhas magnéticas e demonstramos que o campo radial perturbativo pode ser representado por uma maneira alternativa, em série de Fourier dupla. Comentamos a respeito do limitador magnético ergódico e também sobre como o campo magnético do limitador pode ser calculado num caso simples. Através do campo magnético do limitador chegamos a uma das fórmulas principais para estimar a largura das ilhas magnéticas, que é a componente de Fourier do campo de erro. Além disso, veremos a aplicação numérica das fórmulas teóricas para avaliar a largura das ilhas magnéticas para o TBR-I.

No terceiro capítulo, veremos noções sobre o mapeamento das linhas de campo magnético, via secção de Poincaré. Sabemos que se as linhas de campo fluem sobre superfícies magnéticas racionais elas produzem na secção de Poincaré um número finito

de pontos ao longo do circuito. Se as superfícies forem irracionais, as intersecções das linhas magnéticas com o plano de Poincaré devem preencher densamente uma circunferência. Através da equação das linhas de campo magnético, mostramos a construção de um mapeamento (Viana e Caldas, 1991), com e sem a correção toroidal.

Na sequência, apresentamos um mapeamento analítico para as linhas de campo magnético na presença de anéis de corrente. A idéia básica para este mapeamento é separar o Tokamak em duas regiões, uma chamada de região difusora ou "kick region", que corresponde à extensão do anel, onde as linhas de campo sofrem um salto radial e poloidal. A outra região é chamada de região não perturbadora ou "twist region", na qual as linhas de campo caminham sobre uma superfície magnética de fluxo constante, sofrendo apenas deslocamento poloidal, devido à sua transformada rotacional. Assim o mapa de Poincaré é feito numericamente via integração das equações das linhas de campo. O campo magnético radial e poloidal devido à presença de limitadores é calculado no apêndice A. Existem vários métodos numéricos para integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. O método usado neste trabalho foi o de Adams-Moulton. Finalmente mostramos as figuras referentes à secção de Poincaré para várias simulações numéricas com e sem limitador e o cálculo da largura das ilhas magnéticas analiticamente e numericamente (i.é, diretamente sobre os mapeamentos).

# PRIMEIRO CAPÍTULO

## EQUILÍBRIO MHD EM TOKAMAKS.

Neste capítulo veremos algumas noções básicas de como é o funcionamento de um máquina de confinamento do tipo Tokamak e um resumo geral de sua história. Quando tratamos especificamente de equilíbrio MHD em Tokamaks, é necessário descrever as equações da MHD para um plasma, que é o elemento principal para a utilização deste tipo de máquina. Veremos que através das equações das linhas de campo magnético é possível descrever as superfícies magnéticas, e que também: a) elas podem ser caracterizadas por uma função de fluxo magnético  $\Psi$ ; b) uma grandeza característica desta superfície é o chamado fator de segurança. Ainda neste contexto, abordaremos o equilíbrio de uma coluna cilíndrica de plasma.

### 1.1 Tokamak

As máquinas de confinamento com geometria toroidal têm se mostrado mais convenientes que as de geometria linear, uma vez que as primeiras não possuem extremidades por onde as partículas poderiam escapar. O Tokamak, entre outras máquinas de confinamento, foi a que apresentou resultados mais promissores no que se refere à obtenção da fusão termonuclear controlada. A palavra tokamak é um acrônimo russo para a frase: *"toroidalnaya kamera magneticheskaya katiucha"* (câmara toroidal magnética). Os primeiros conceitos nos quais se baseiam o funcionamento dessa máquina foram desenvolvidos durante a década de 50, principalmente pelo físico russo L.A. Artsimovich. A figura (1.1) ilustra o esquema de como são produzidos os principais campos de equilíbrio de um Tokamak. O campo magnético toroidal  $B_\varphi$  é gerado por uma corrente elétrica que percorre um conjunto de espiras externas enroladas ao redor do torus. A corrente de plasma  $I_p$ , é criada pela variação do fluxo magnético induzido por um transformador elétrico, que por sua vez, gera um campo poloidal  $B_\theta$  (Furth,1977). A combinação entre estas componentes, ditas de "equilíbrio", é a principal responsável pelo confinamento do plasma.

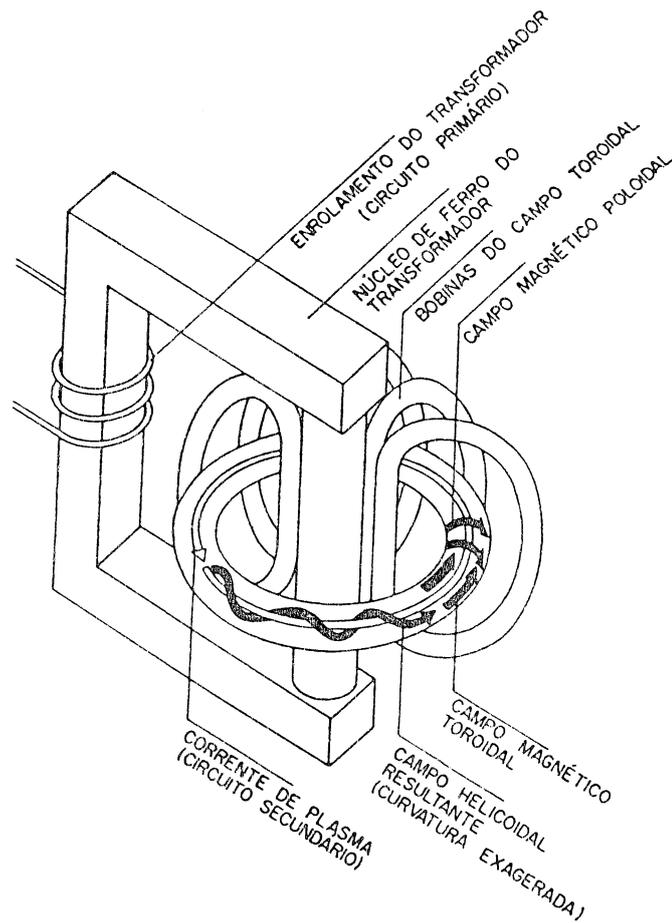


Figura (1. 1) Representação esquemática de um Tokamak.

Já na década de 60, alguns Tokamaks entraram em operação no Instituto Kurchatov em Moscou. Um acontecimento fundamental ocorreu quando físicos ocidentais inspecionaram os tokamaks soviéticos após os resultados experimentais apresentados na conferência de Novosibirsk em 1968, patrocinada pela IAEA. Após um ano, um grupo de físicos britânicos especializados em diagnósticos por laser (espalhamento Thomson), trabalhou no Instituto Kurchatov e confirmou os resultados anunciados pelos russos e que estavam sendo encarados como uma certa incredulidade. Também nesse período, Artsimovich proferiu uma série de conferências no Instituto Tecnológico de Massachussets-EUA. Em 1970, entrava em operação o primeiro Tokamak americano, reconstruído de um Stellarator, na Universidade de Princeton.

Atualmente existem vários Tokamaks em funcionamento em todo mundo. Há os de grande porte, como por exemplo: TFTR de Princeton-EUA e JET na Inglaterra, e outros de médio e menor porte como: ASDEX na Alemanha e o TBR-1 no Brasil, especificamente no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

## 1.2 Equilíbrio MHD

Na teoria MHD ideal o plasma é descrito como um fluido condutor ideal (resistividade nula), com energia interna. O sistema de equações MHD, a ser apresentado adiante, é talvez o sistema de equações mais simples que permite descrever quantitativamente plasmas a temperaturas termonucleares. Este sistema de equações é, no entanto, um sistema não-linear. Suas soluções gerais são ainda quase desconhecidas analiticamente. Mesmo assim, através de técnicas algumas vezes bastante sofisticadas, este sistema de equações tem sido resolvido com sucesso para descrever o equilíbrio e a estabilidade de alguns sistemas de confinamento magnético de plasmas.

Um plasma confinado magneticamente está em equilíbrio quando a força resultante que atua em todo o volume do plasma é nula. Existem basicamente dois tipos de forças na teoria MHD ideal: as forças ocasionadas por gradientes de pressão dentro do plasma e as forças de Lorentz ocasionadas pela interação de correntes que circulam no plasma e campos magnéticos que nele existam. Em um plasma em equilíbrio estas forças se compensam.

Mesmo que este esteja em equilíbrio num sistema de confinamento magnético, este equilíbrio pode ser instável. Isto acontece se um pequeno desvio das condições de equilíbrio leva o plasma a se afastar do equilíbrio, por menor que seja o desvio. No entanto, a preocupação básica em Física de Plasmas relacionada com Fusão Termonuclear Controlada não é obter um plasma absolutamente estável. O objetivo é que o plasma permaneça próximo das condições de equilíbrio durante um tempo suficientemente longo para que a energia produzida por reações termonucleares dentro do plasma seja igual ou maior que a energia gasta para formar o mesmo. Esta condição é expressa pelo critério de Lawson (Wesson, 1987). O sistema de equações MHD é (Bateman, 1978):

Equação de conservação do número de partículas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

Equação de movimento:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \quad (1.2)$$

Lei de Ohm generalizada:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad (1.3)$$

acrescidas das Equações de Maxwell †:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

As grandezas que aparecem nas equações de (1.1) a (1.7) são  $\rho$ : densidade de massa do plasma;  $\vec{v}$ : velocidade macroscópica do plasma;  $\vec{j}$ : densidade de corrente no plasma;  $\vec{B}$ : campo magnético;  $p$ : pressão do plasma;  $\vec{E}$ : campo elétrico; e  $\eta$ : resistividade do plasma.

Este conjunto de equações MHD é obtido a partir de equações mais gerais que descrevem o plasma fazendo-se algumas aproximações. Por isso, algumas condições têm que ser satisfeitas para que este sistema forneça uma descrição quantitativa razoável do plasma. Em particular, notemos que a corrente de deslocamento foi desprezada na Lei de Faraday, eq.(1.6). Por isso, as equações MHD só são úteis para descrever fenômenos relativamente lentos. Além disso, está incluída no sistema de equações MHD a hipótese de que o plasma é localmente quase-neutro, isto é,  $n_e |q_e| = n_i |q_i|$ . Por esta razão, as distribuições macroscópicas de carga elétrica não fazem parte do conjunto de equações MHD.

Em se tratando de equilíbrio MHD, vamos agora considerar o equilíbrio do plasma confinado por campos magnéticos. Em geral, quando tentamos confinar um plasma

---

† usamos unidades do sistema MKSA(SI)

por um campo magnético externo, o plasma modifica este campo. Do ponto de vista global do plasma, não é necessário que se conheçam as funções de distribuição de seus diferentes tipos de partículas. Na maioria dos casos basta conhecer as correntes macroscópicas que circulam no plasma, a sua pressão, e os campos externos aplicados. Por isso, as equações MHD são usualmente empregadas para o estudo de equilíbrio de plasmas em altas temperaturas.

### 1.3 Superfícies Magnéticas.

O confinamento de plasmas em Tokamaks é realizado basicamente pela superposição de dois campos: o campo magnético poloidal  $B_\theta$ , criado pela própria corrente de plasma  $I_p$  e o campo magnético toroidal  $B_\varphi$ , que é criado por espiras de corrente localizadas em volta da câmara do Tokamak, de tal forma que o campo de equilíbrio é:

$$\vec{B}^{(0)} = \vec{B}_\varphi + B_\theta(r)\hat{\theta} \quad (1.8)$$

Desprezaremos os efeitos de curvatura toroidais adotando uma aproximação cilíndrica periódica. Nessa configuração as linhas de campo magnéticas são hélices cilíndricas. A equação que descreve esta linha é:

$$\vec{B}^{(0)} \times d\vec{l} = 0 \quad (1.9)$$

e, em coordenadas cilíndricas, é expressa por:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} \quad (1.10)$$

Essas linhas repousam sobre superfícies chamadas magnéticas, e devido ao caráter periódico do modelo, são fechadas. Pela geometria usada, essas superfícies são cilindros coaxiais, e podem ser caracterizadas por uma função de fluxo magnético  $\Psi = \Psi_0(r)$ , que é constante para cada superfície e dado por:

$$\vec{B}^{(0)} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (1.11)$$

Consideremos um plasma em equilíbrio ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) e em repouso ( $\vec{v} = 0$ ), com condutividade infinita. Então da eq.(1.2) podemos obter que:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.12)$$

onde  $p$  é a pressão e  $\vec{j}$  é a densidade de corrente de plasma. Usando a eq.(1.12), obtemos:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.13)$$

e

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.14)$$

Essas equações mostram que as linhas de campo e as linhas de corrente têm que estar sobre as superfícies  $p = \text{constante}$  do plasma, as quais são também chamadas de isobáricas. Elas funcionam como diques que impedem a dissolução da própria coluna de plasma. A existência e a estabilidade das superfícies magnéticas são condições necessárias ao confinamento MHD de plasmas em Tokamaks.

Uma grandeza característica dessa superfície é o chamado fator de segurança definido para as linhas de campo como:

$$q(r) = \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (1.15)$$

Usando a eq.(1.10),  $B_z = B_0$  e  $dz = R_0 d\varphi$ , temos:

$$q(r) = \frac{r B_0}{R_0 B_\theta(r)} \quad (1.16)$$

Podemos escrever:

$$q(r) = \frac{2\pi}{\iota(r)} \quad (1.17)$$

onde  $\iota$  é a chamada transformada rotacional da linha de campo, que é o ângulo poloidal varrido pela linha de campo ao longo de uma volta toroidal (Caldas e Vannucci, 1985). O fator de segurança, caso seja um número racional, ou seja, a razão de dois números inteiros, primos entre si, é dado por:

$$q = \frac{m}{n} \quad (1.18)$$

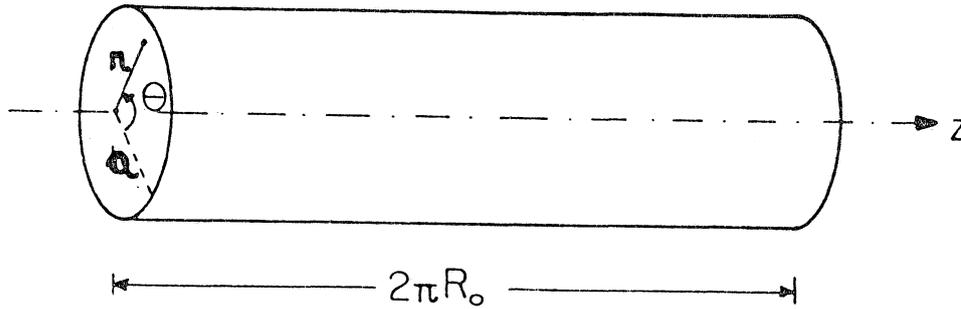


Figura (1. 2) Coluna Cilíndrica de Plasma, onde  $a$  é o raio da coluna.

onde uma linha sobre tal superfície magnética fecha-se sobre si própria após  $n$  voltas na direção poloidal e  $m$  voltas na direção toroidal. Tais superfícies são ditas racionais; caso contrário são irracionais, e as linhas de campo nunca se fecham, preenchendo densamente a superfície.

#### 1.4 Equilíbrio de uma coluna cilíndrica de plasma.

A princípio podemos tratar o equilíbrio MHD em quaisquer coordenadas que desejarmos, dependendo da geometria do sistema de confinamento. Evidentemente, dificuldades aparecem quando resolvemos um problema em que as coordenadas empregadas não são apropriadas, ou seja, não condizem com a geometria do problema. Consideremos uma coluna cilíndrica de plasma, com coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , como mostra a figura (1.2). Supomos que as grandezas de equilíbrio não possuem gradientes longitudinais ou azimutais, isto é,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ , e que o plasma esteja em repouso. Então, usando a equação (1.7), obtemos em função desta coordenadas a seguinte expressão:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (1.19)$$

Supondo  $B_\theta = B_\theta(r)$  e  $B_z = B_0 = \text{constante}$ , em sistemas cilíndricos com simetria longitudinal e azimutal, não existe componente radial  $B_r$  do campo magnético. Tomando somente a componente radial da eq.(1.8) obtemos:

$$\frac{dp}{dr} = j_\theta B_z - j_z B_\theta \quad (1.20)$$

onde  $B_z$  e  $B_\theta$  são os campos magnéticos na direção longitudinal e azimutal e  $j_\theta$  e  $j_z$  são as densidades de corrente, onde  $j_\theta = 0$  para a coluna. Essas densidades de corrente podem ser escritas em função dos campos magnéticos através da lei de Amperè, eq.(1.6) como:

$$j_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} \quad (1.21)$$

e

$$j_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} \quad (1.22)$$

Substituindo a eq.(1.21) e a eq.(1.22) na eq.(1.20), a expressão para o gradiente da pressão fica:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_z^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \frac{B_\theta^2}{r} = 0 \quad (1.23)$$

cujo resultado é a equação básica para o equilíbrio de colunas de plasmas com simetria cilíndrica e que nos relaciona três perfis:  $p(r)$ ,  $B_z(r)$  e  $B_\theta(r)$ .

Em vários trabalhos teóricos sobre Tokamaks (Fernandes, Heller e Caldas, 1988), e também nesta tese, é utilizado um perfil de densidade de corrente de plasma do tipo parabólico (peaked model), que é expresso por:

$$\vec{j}_z(r) = j_0 \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{a^2} \right) \right]^\gamma \hat{z} \quad (1.24)$$

Se  $I_p$  for a corrente elétrica total da coluna de plasma, então a sua densidade superficial será  $j_z = \frac{dI_p}{ds}$ , onde  $ds = 2\pi r dr$ . Integrando essa expressão e usando a eq.(1.24), obtemos:

$$I_p = \frac{\pi a^2 j_0}{\gamma + 1} \quad (1.25)$$

onde  $\gamma$  e  $j_0$  são constantes positivas. Portanto, na ausência de campos elétricos, a lei de Amperé fornece para o campo poloidal na região  $0 < r < a$ , a expressão:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r} \int^r r' j_z(r') dr' \quad (1.26)$$

Se substituirmos a eq.(1.24) na eq.(1.26) e integrarmos obtemos:

$$B_{\theta}(r) = \frac{a^2 \mu_0 j_0}{2r(\gamma + 1)} \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{\gamma+1} \right] \quad (1.27)$$

sendo:

$$B_{\theta}(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a} \quad (1.28)$$

Substituindo a eq.(1.25) e eq.(1.28) na eq.(1.27) obtemos:

$$B_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{aB_{\theta}(a)}{r} \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{\gamma+1} \right] & 0 < r < a; \\ \frac{aB_{\theta}(a)}{r}, & a < r < b \end{cases} \quad (1.29)$$

O fator de segurança conforme definido pela eq.(1.16), é:

$$q(r) = \begin{cases} \frac{2\pi r B_0}{\mu_0 I_p R_0} r^2 \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{\gamma+1} \right]^{-1} & 0 < r < a; \\ \frac{2\pi B_0}{\mu_0 R_0 I_p} r^2, & a < r < b \end{cases} \quad (1.30)$$

Tomando o limite  $r \rightarrow 0$ , temos que:

$$q(a) = (\gamma + 1)q(0) \quad (1.31)$$

Assim o fator de segurança pode ser reescrito como:

$$q(r) = \begin{cases} q(a) \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{\gamma+1} \right]^{-1} & 0 < r < a; \\ q(a) \left( \frac{r}{a} \right)^2, & a < r < b \end{cases} \quad (1.32)$$

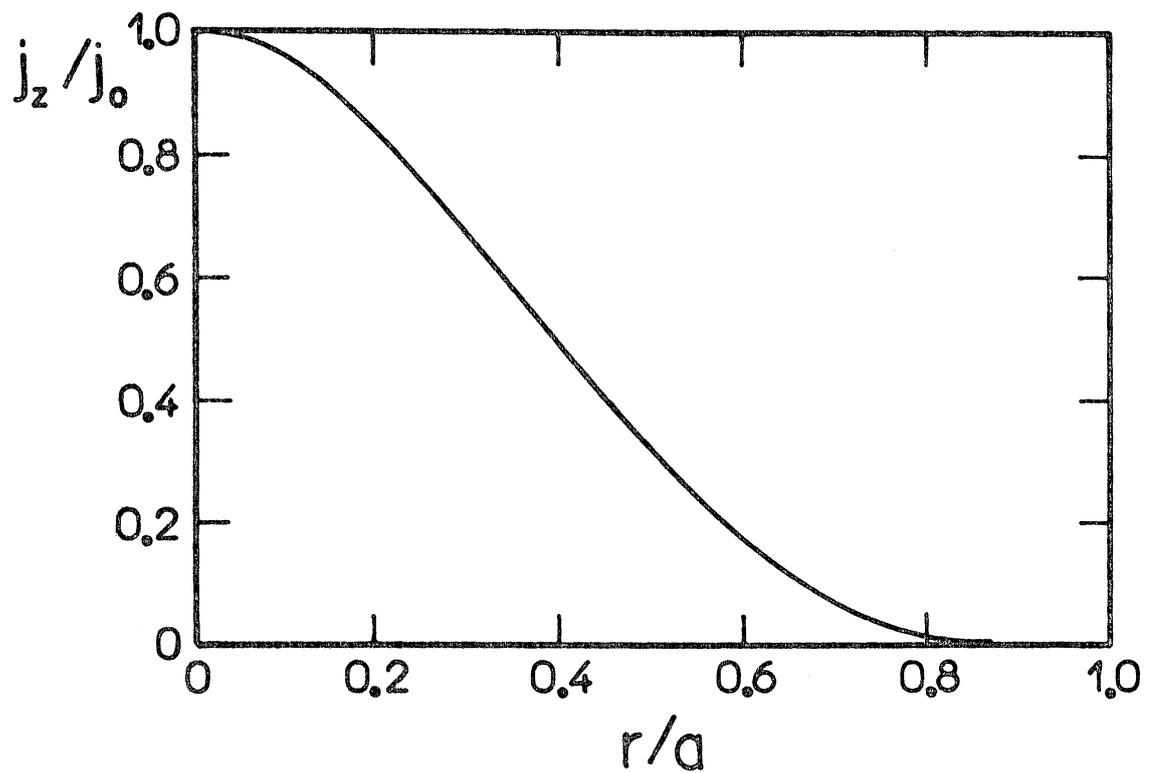
Outra condição importante para a coluna cilíndrica de plasma é a chamada transformada rotacional da linha de campo definido na secção (1.3), e que é expressa como:

$$\iota(r) = \frac{2\pi}{q(r)} \quad (1.33)$$

ou

$$\iota(r) = \begin{cases} \frac{2\pi}{q(a)} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^{\gamma+1} \right] & 0 < r < a; \\ \frac{2\pi}{q(a)} \left( \frac{a}{r} \right)^2, & a < r < b \end{cases} \quad (1.34)$$

Nas figuras (1.3), (1.4) e (1.5) vemos os gráficos referentes ao Perfil da Densidade Radial de Corrente, Perfil Radial do Campo Poloidal e o Perfil Radial do Fator de Segurança respectivamente.



**Figura (1. 3)** Perfil Radial da Densidade de Corrente de Plasma no TBR-I (aproximação cilíndrica), com  $a = 0,08m$ ,  $q(a) = 5,0$ ,  $(\gamma = 4,0)$  e  $j_0 = 2,63 \times 10^6 A/m^2$

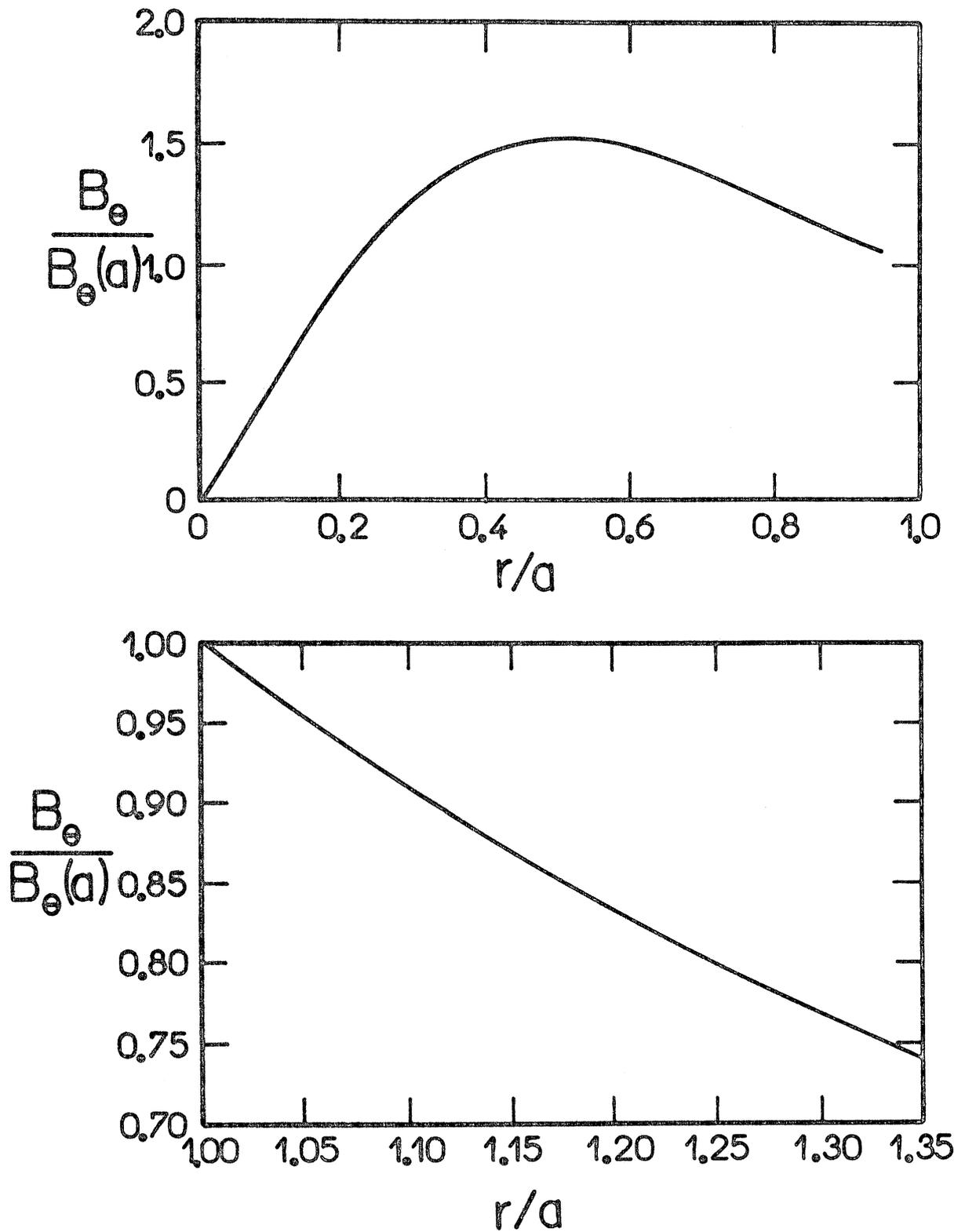


Figura (1. 4) Perfil Radial do Campo Poloidal no TBR-I (aproximação cilíndrica), com os mesmo dados anteriores e  $B_\theta(a) = 0,02T$

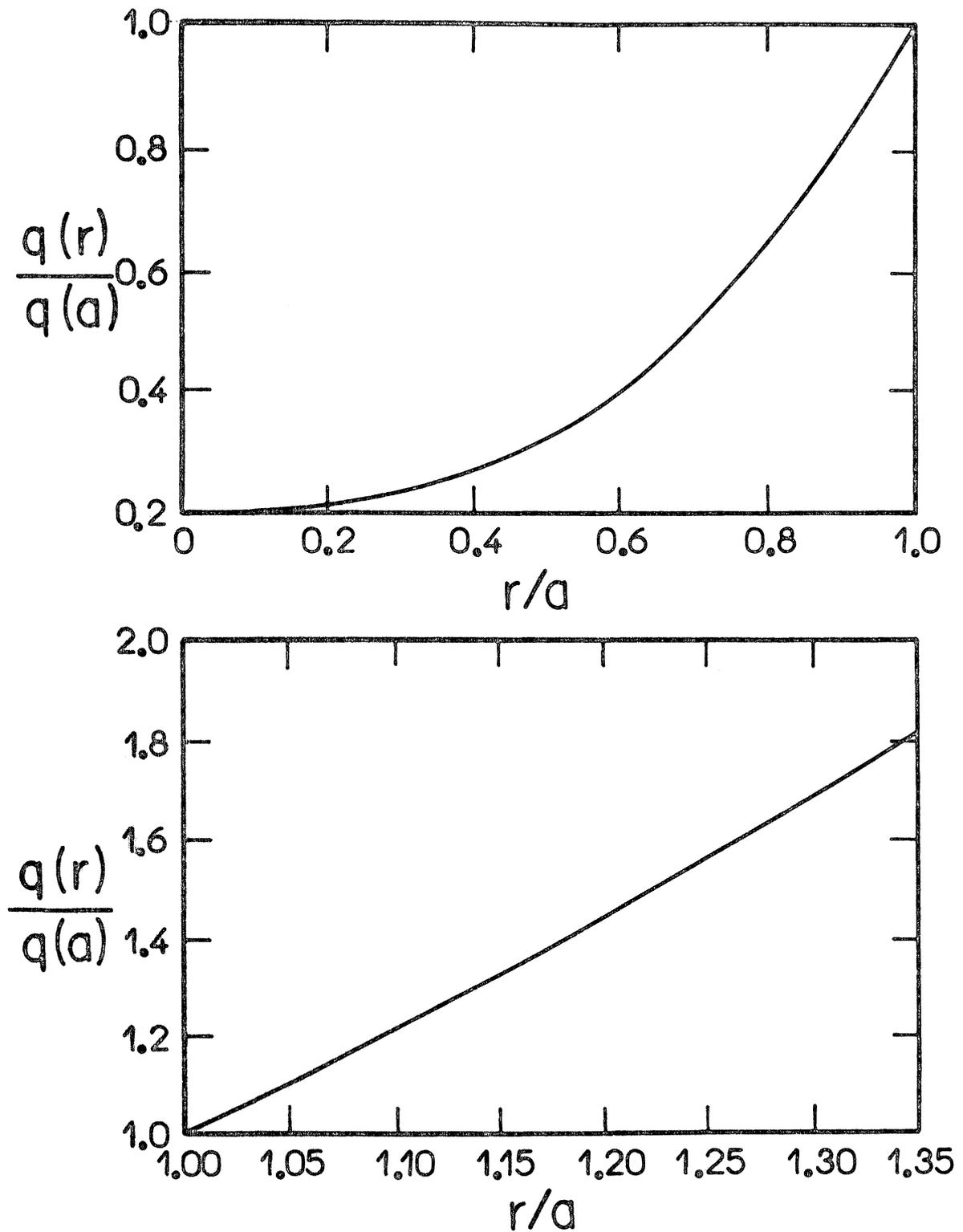


Figura (1. 5) Perfil Radial do Fator de Segurança no TBR-I (aproximação cilíndrica), com os mesmos dados das figuras anteriores

## SEGUNDO CAPÍTULO

### CAMPOS PERTURBATIVOS DEVIDO A ANÉIS DE CORRENTE

Neste capítulo mostraremos um método devido a Matsuda e Yoshikawa, que é na verdade um método analítico para obter a largura das ilhas formadas pela presença de campos magnéticos ressonantes devidos a anéis de corrente. Faremos uma expansão da transformada rotacional nas vizinhanças de uma superfície magnética ressonante. Através da equação da linha de campo magnético e suposições de que o campo magnético poloidal perturbativo é muito pequeno e que o campo radial não perturbado é nulo, chegaremos na eq.(2.9), que é uma das equações fundamentais para o cálculo da largura da ilha magnética.

Veremos como é calculada a largura da ilha magnética, assim como a componente radial do campo perturbativo que é expresso em termos de uma série de Fourier dupla. O campo de erro devido a um anel de corrente é mostrado no Apêndice A, tal que esse resultado nos leva a calcular a componente de Fourier necessária para estimar a largura da ilha magnética correspondente.

#### 2.1 Limitador Magnético Ergódico

Como já comentamos na Introdução, um dos grandes obstáculos à obtenção da Fusão Termonuclear Controlada, através de máquinas de confinamento toroidal do tipo Tokamak, é a impossibilidade de produzir uma corrente de plasma estável por um tempo suficientemente longo. Alguns fatores conspiram contra esse objetivo, tais como a contaminação de plasma por impurezas internas do Tokamak, que deterioram a qualidade do confinamento. A liberação destas impurezas costuma ocorrer quando há uma sobrecarga de energia sobre uma região do vaso toroidal de aço, ou mesmo, quando a própria coluna de plasma toca essa região.

Para diminuir a intensidade da interação entre a coluna de plasma confinada num Tokamak e a sua parede interna, deseja-se a formação de uma camada periférica da

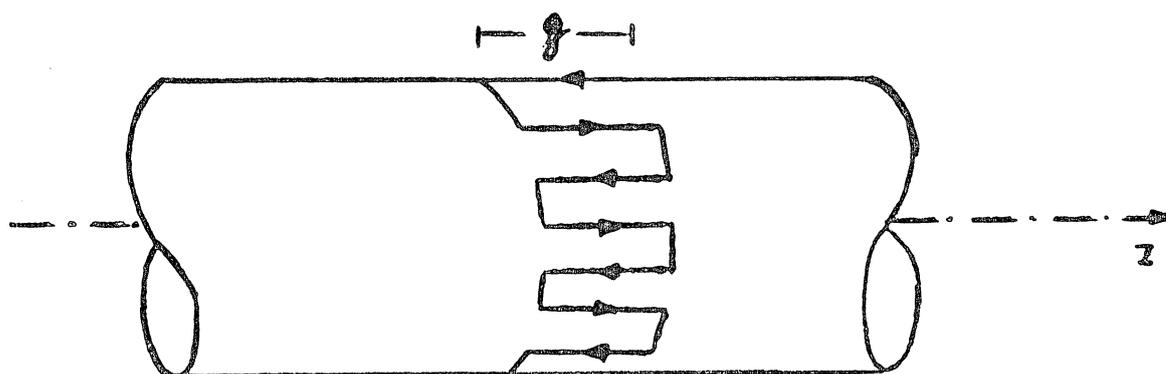


Figura (2. 1) Anel de corrente como limitador magnético ergódico.

coluna de plasma com baixa temperatura, de modo a reduzir os impactos sobre a parede interna do Tokamak, e conseqüentemente a liberação de impurezas por "sputtering".

Dispositivos destinados a reduzir essa interação são denominados limitadores. Em torno de 1977, Karger, Feneberg e colaboradores do Instituto Max Planck de Munique, propuseram a ergodização do campo magnético periférico em Tokamak, como princípio de funcionamento de um limitador que distribísse uniformemente ao longo do Tokamak o fluxo radial de energia. Este limitador foi batizado de Magnético Ergódico (Feneberg, 1977).

Inicialmente foi proposta a utilização de hélices condutoras enroladas em torno do Tokamak, mas o projeto evoluiu para o uso de anéis de corrente, restritos a uma porção do vaso toroidal. Os limitadores magnéticos ergódicos foram propostos para gerarem campos estocásticos na camada periférica por meio de campos ressonantes criados por correntes externas no vaso toroidal (Feneberg e Wolf , 1981).

Nos últimos anos, várias experiências, nas máquinas: TEXT, CSTN-II, HYBTOK e outras, têm demonstrado a eficiência desse tipo de limitadores, indicando a diminuição da temperatura da camada periférica e a redução no conteúdo de impurezas no interior da coluna de plasma (Takamura et al., 1987).

A geometria básica do limitador é mostrada na figura (2.1), de tal forma

que o anel é constituído por  $m$  pares de segmentos de fios condutores na direcção toroidal, de comprimento  $g$ , pelos quais passam a corrente  $I$ . Desprezamos os efeitos de borda causado pelas porções do enrolamento na direcção poloidal; e os segmentos de fios vizinhos, ou seja adjacentes, conduzem correntes eléctricas em sentidos contrários.

## 2.2 Método de Matsuda e Yoshikawa.

Usaremos um sistema de coordenadas pseudo-toroidais  $(r, \theta, \varphi)$  para descrever superfícies magnéticas toroidais e as linhas de forças magnéticas, onde  $r$  é a coordenada radial,  $\theta$  é a coordenada angular e  $\varphi$  é a coordenada azimutal. Consideremos a figura (2.2). Nesse sistema as equações das linhas de campo magnético ( $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ ) são escritas como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\varphi}{B_\varphi} \quad (2.1)$$

onde  $R_0$  é o raio maior do Tokamak e fizemos  $z = R_0\varphi$  na aproximação de grande razão de aspecto. Podemos também descrever o fator de segurança e a transformada rotacional como sendo:

$$q(r) = \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{rB_\varphi}{R_0B_\theta} \quad (2.2)$$

$$\iota(r) = \frac{2\pi}{q(r)} = \frac{2\pi d\theta}{d\varphi} \quad (2.3)$$

ou

$$\iota(r) = \frac{2\pi R_0 B_0}{rB_\varphi} \quad (2.4)$$

Seja  $r_0$  (como mostra a figura (2.3)), a posição radial de uma superfície magnética toroidal ressonante, de tal forma que em torno desse ponto, ilhas magnéticas desenvolvem-se conforme a perturbação aplicada. Quando aplicamos ao sistema uma perturbação, as superfícies magnéticas racionais são destruídas. A destruição dessas superfícies implica no aparecimento de um certo número de pontos fixos (Teorema de Poincaré- Birkhoff) (Lichtenberg e Lieberman, 1983). Em torno destes pontos são formadas as ilhas magnéticas.

Expandiremos  $\iota(r)$  em série de Taylor nas vizinhanças da posição da superfície magnética ressonante, ou seja em  $r = r_0$ .

$$\iota(r) = \iota(r_0) + (r - r_0) \left. \frac{d\iota}{dr} \right|_{r=r_0} + o(r - r_0)^2 \quad (2.5)$$

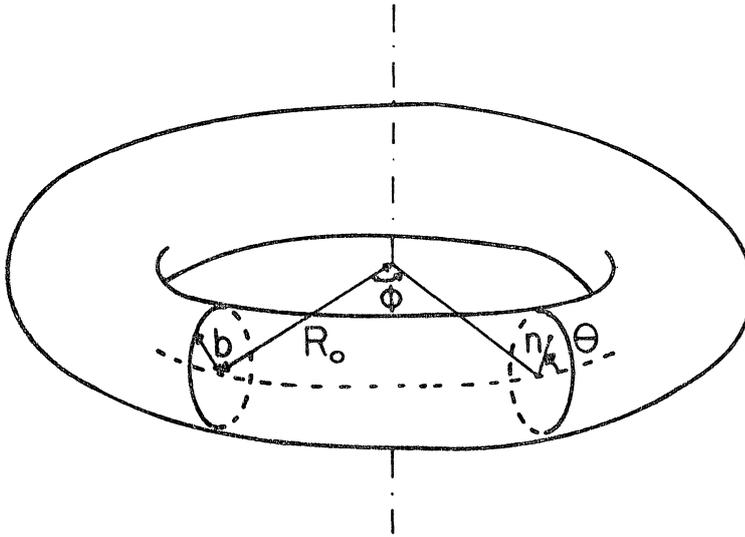


Figura (2. 2) Coordenadas Pseudo-Toroidais.

Definimos:

$$x = r - r_0$$

$$\iota_0 = \iota(r_0) \quad (2.6)$$

$$\iota' = \left. \frac{d\iota}{dr} \right|_{r=r_0}$$

Usando a eq.(2.3) obtemos a seguinte relação:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}(\iota_0 + x\iota') \quad (2.7)$$

Fazendo uma superposição dos campos de equilíbrio  $B^{(0)}$  e da perturbação  $B^{(1)}$ , temos que as equações das linhas de campo ficam:

$$\frac{dr}{B_r^{(0)} + B_r^{(1)}} = \frac{rd\theta}{B_\theta^{(0)} + B_\theta^{(1)}} = \frac{R_0 d\varphi}{B_\varphi^{(0)} + B_\varphi^{(1)}} \quad (2.8)$$

Supomos que o campo radial sem perturbação é nulo (aproximação de grande razão de aspecto no equilíbrio cilíndrico), e que o campo poloidal perturbativo é muito pequeno em comparação ao campo poloidal de equilíbrio, ou seja:  $B_\theta^{(1)} \ll B_\theta^{(0)}$ . Após estas considerações temos que:

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{B_r^{(1)}}{B_\theta^{(0)}}$$

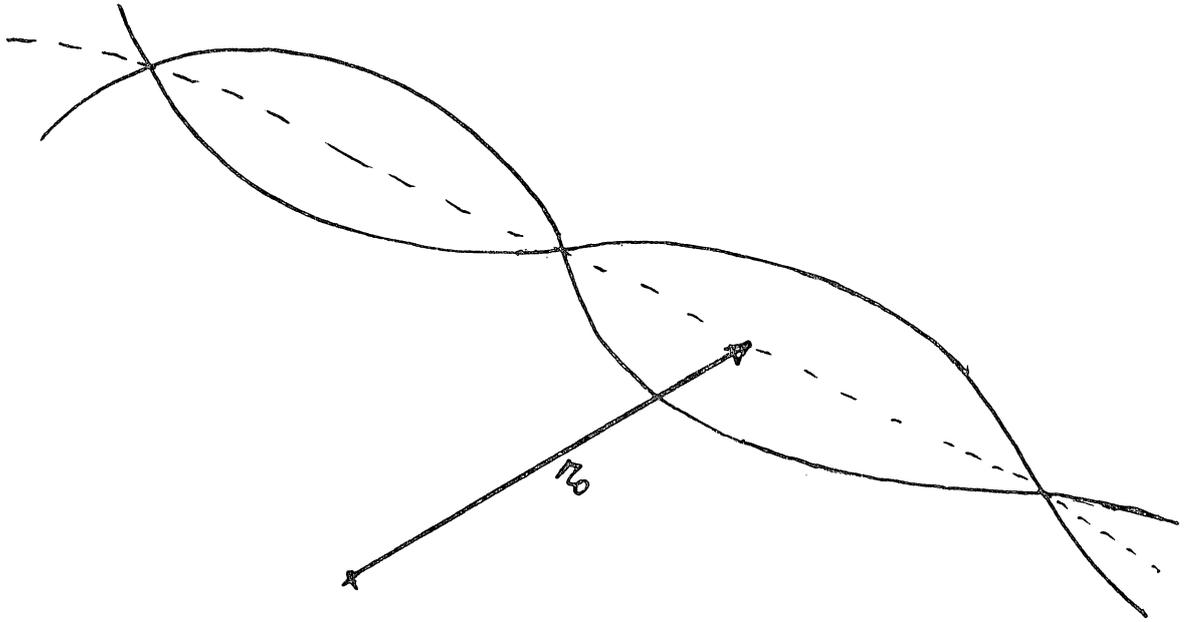


Figura (2. 3) Superfície Magnética Ressonante e Ilha Magnética.

sendo  $dx = d(r - r_0) = dr$ , então:

$$\frac{dx}{rd\theta} = \frac{B_r^{(1)}(r, \theta, \varphi)}{B_\theta^{(0)}(r)} \quad (2.9)$$

Se admitirmos que ilhas magnéticas sejam pequenas, então podemos desprezar a variação radial em  $B_r^{(1)}$  e  $B_\theta^{(0)}$ . Assim o campo radial perturbativo é função somente de  $(r_0, \theta, \varphi)$  e o campo poloidal somente de  $r_0$ . Devido à periodicidade em  $\theta$  e  $\varphi$ , podemos expandir o campo radial perturbativo em série de Fourier dupla.

$$B_r^{(1)}(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} [a_{m,n} \sin(m\theta - n\varphi) + a'_{m,n} \sin(m\theta + n\varphi) + c_{m,n} \cos(m\theta - n\varphi) + c'_{m,n} \cos(m\theta + n\varphi)] \quad (2.10)$$

onde  $a_{m,n}$ ,  $a'_{m,n}$ ,  $c_{m,n}$ ,  $c'_{m,n}$  são coeficientes de Fourier calculados em  $r = r_0$ . Os únicos termos relevantes nesta série são aqueles que caracterizam ressonâncias.

$$q(r_0) = \frac{m}{n} \quad (2.11)$$

Na posição da superfície ressonante temos que:

$$q(r_0) = \frac{2\pi}{\iota_0} = \frac{m}{n} \quad (2.12)$$

e da eq.(2.2) tiramos a expressão que caracteriza a condição de ressonância:

$$d(m\theta - n\varphi) = 0 \quad (2.13)$$

Essa equação nos mostra que nas ressonâncias a fase é constante e nas suas vizinhanças ela oscila lentamente. Os demais termos em  $(m\theta - n\varphi)$  oscilam muito rapidamente e em média se anulam.

Tomando apenas um modo  $\frac{m}{n}$  da componente radial do campo perturbativo:

$$B_r^{(1)}(r_0, \theta, \varphi) = a_{m,n} \sin(m\theta - n\varphi) + c_{m,n} \cos(m\theta - n\varphi) \quad (2.14)$$

definimos que:

$$b_{m,n} = \sqrt{a_{m,n}^2 + c_{m,n}^2} \quad (2.15)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{c_{m,n}}{a_{m,n}}\right) \quad (2.16)$$

donde o campo radial perturbativo será:

$$B_r^{(1)}(r_0, \theta, \varphi) = b_{m,n} \sin(m\theta - n\varphi + \beta) \quad (2.17)$$

Também definimos:

$$\alpha = m\theta - n\varphi + \beta \quad (2.18)$$

assim:

$$B_r^{(1)}(r_0, \theta, \varphi) = b_{m,n} \sin \alpha \quad (2.19)$$

Substituindo a eq.(2.9) na eq.(2.19), obtemos:

$$\frac{dx}{r_0 d\theta} = \frac{b_{m,n} \sin \alpha}{B_\theta^{(0)}(r_0)} \quad (2.20)$$

Se derivarmos  $\alpha$  em relação a  $\theta$  temos que:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = m - n \frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\beta}{d\theta} \quad (2.21)$$

e, como  $\beta$  é uma função somente de  $c_{m,n}$  e  $a_{m,n}$ , então  $\frac{d\beta}{d\theta} = 0$ . Usando a eq.(2.7) obtemos:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = m - \frac{2n\pi}{(\iota_0 + \iota'x)} \quad (2.22)$$

Agora, se derivarmos a eq.(2.22), obteremos uma equação periódica.

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{2n\pi\iota' dx}{\iota_0^2 d\theta} \quad (2.23)$$

Se substituirmos a eq.(2.9) na eq.(2.23), obtemos:

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{2n\pi r_0 \iota' b_{m,n}}{\iota_0^2 B_\theta^0(r_0)} \quad (2.24)$$

Definindo:

$$A = -\frac{2n\pi r_0 \iota' b_{m,n}}{\iota_0^2 B_\theta^0(r_0)} \quad (2.25)$$

a equação não linear é reescrita como:

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = -A \sin \alpha \quad (2.26)$$

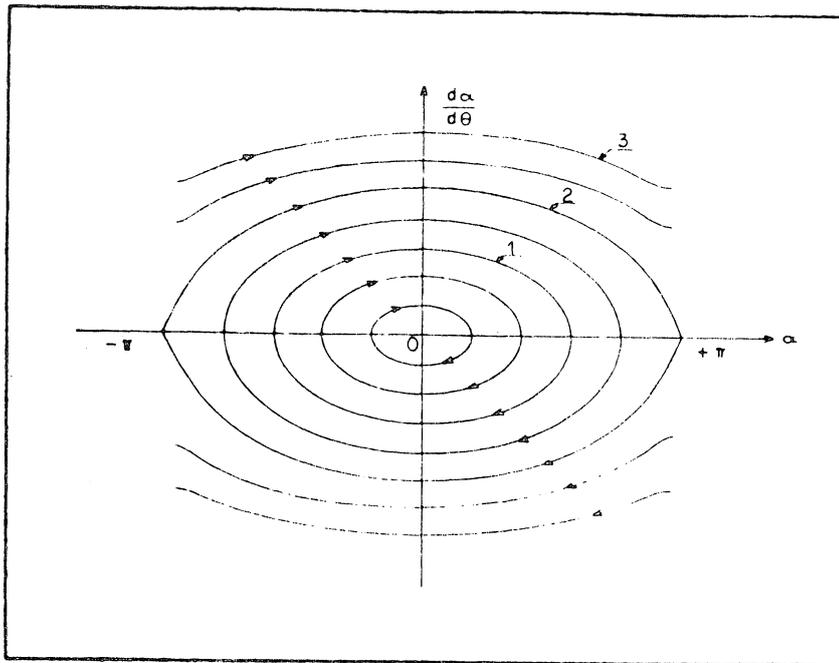
Podemos tomar  $A$  maior ou igual a zero sem perda de generalidade. Se ocorrer que  $A < 0$ , tomamos simplesmente o seu módulo ou redefinimos o ângulo  $\alpha$  como:  $m\theta - n\varphi + \beta = \alpha + \pi$  tal que

$$\sin(m\theta - n\varphi + \beta) = -\sin(\alpha),$$

portanto

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{2n\pi r_0 \iota' b_{m,n}}{\iota_0^2 B_\theta^0(r_0)} (-\sin(\alpha)) = -|A| \sin(\alpha) \quad (2.27)$$

Fazendo uma comparação, vemos que a eq.(2.27) é a equação do pêndulo simples não linear (Lichtenberg e Lieberman, 1983) e seu comportamento no espaço de fase é mostrado na figura (2.4). Portanto a dinâmica das linhas de campo magnético na vizinhança



**Figura (2. 4)** Plano de fase das trajetórias de fase do pêndulo simples. O número 1 representa no plano de fase as curvas de rotação, onde  $E > 2A$ . O número 2 representa as curvas de libração, onde  $E < 2A$ . O número 3 representa a separatriz de uma ilha, onde  $E = 2A$ .

de uma ressonância é análoga ao movimento de uma partícula em um potencial periódico. Se multiplicarmos a eq.(2.24) por  $\frac{d\alpha}{d\theta}$  e integrarmos em  $\theta$ , temos que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right)^2 = -A(1 - \cos \alpha) + A \quad (2.28)$$

Sendo a energia total do pêndulo dada por:  $E = A$ , logo temos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right)^2 = E - A(1 - \cos \alpha) \quad (2.29)$$

Definindo:

$$k^2 = \frac{E}{2A} \quad (2.30)$$

temos que, se  $A$  maior ou igual a zero, (então  $k$  maior que zero) temos:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 2\sqrt{A}\left(k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

Assim as variáveis  $\alpha$  e  $\frac{d\alpha}{d\theta}$  descrevem no plano de fase as características do sistema próximo as ressonâncias, onde formam-se as ilhas magnéticas que são formadas a partir da destruição das superfícies magnéticas racionais.

### 2.3 Largura das Ilhas Magnéticas

Consideremos a figura (2.5). Sendo  $x = r - r_0$ , podemos calcular a largura da ilha magnética como:

$$\delta = \int_{ilha} dx \quad (2.32)$$

Substituindo a eq.(2.20) na eq.(2.32), e usando a eq.(2.31), a largura das ilhas magnéticas torna-se:

$$\delta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b_{m,n} r_0 \sin(\alpha)}{B_{\theta}^0(r_0)} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}} d\theta \quad (2.33)$$

Usando a eq.(2.25), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{r_0 b_{m,n}}{B_{\theta}^0(r_0)} = -\frac{\iota^2 A 2\pi}{\pi \iota'}$$

Na separatriz de uma ilha  $k = 1$ . Retornando a eq.(2.33) e substituindo a relação acima obtemos:

$$\delta = -\frac{\iota^2 A 2\pi}{\pi \iota' 2\sqrt{A}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}} = -\frac{\iota^2 A 2\pi T}{\pi \iota' 2\sqrt{A}} \quad (2.34)$$

onde definimos:

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}} \quad (2.35)$$

Introduzindo os limites de integração e simplificando a expressão na raiz, temos:

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} \quad (2.36)$$

Fazendo a seguinte transformação de variável:  $v = \cos \alpha$ ,  $dv = -\sin \alpha d\alpha$  e depois chamando  $y = 1 + v$  e  $dy = dv$ , temos que:

$$T = -2\sqrt{2} \int_{y=2}^{y=0} \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = 8 \quad (2.37)$$

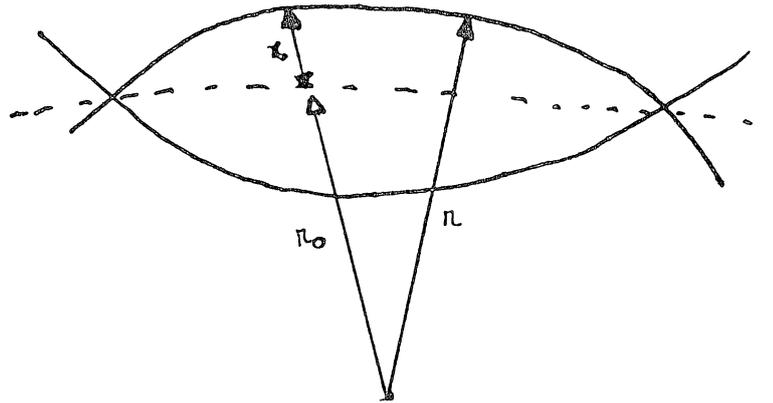


Figura (2. 5) Perfil de uma ilha magnética.

Substituindo a eq.(2.37) na eq.(2.34), obtemos:

$$\delta = \frac{4r_0 b_{m,n}}{B_\theta^0(r_0) \sqrt{A}} \quad (2.38)$$

onde o valor de  $A$  é expresso como sendo:

$$A = \frac{-nr_0 \iota' 2\pi}{\iota_0^2} \frac{b_{m,n}}{B_\theta^0(r_0)} \quad (2.39)$$

Se substituirmos a eq.(2.39) na eq.(2.38), obteremos a equação que fornece a largura das ilhas magnéticas, dada por:

$$\delta_{m,n} = \frac{4r_0}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{b_{m,n}}{B_\theta^0(r_0)}} \sqrt{\left| \frac{\iota_0}{-r_0 \iota'} \right|} \quad (2.40)$$

## 2.4 Componente Radial do Campo Perturbativo

Como  $B_r^{(1)} = B_r(r_0, \theta, \varphi)$  é periódica em ambas as variáveis angulares  $\theta$  e  $\varphi$ , podemos escrevê-la numa série de Fourier dupla como na eq.(2.10). Uma maneira alternativa de representá-la é

$$B_r(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \left[ A_{m',n'} \cos\left(\frac{2\pi m' \theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n' \varphi}{T_2}\right) + B_{m',n'} \sin\left(\frac{2\pi m' \theta}{T_1}\right) \sin\left(\frac{2\pi n' \varphi}{T_2}\right) + \right.$$

$$D_{m',n'} \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \sin\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) + E_{m',n'} \sin\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad (2.41)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são os períodos fundamentais da variação de  $\theta$  e  $\varphi$ , respectivamente e  $m',n'$  são números positivos que caracterizam os modos da expansão. As constantes  $A_{m',n'}, B_{m',n'}, D_{m',n'}, E_{m',n'}$  são coeficientes de Fourier, onde:

$$A_{m',n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\theta d\varphi B_r(r, \theta, \varphi) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad (2.42)$$

Podemos mostrar este fato, se substituirmos a eq.(2.42) na eq.(2.41), obtendo:

$$\begin{aligned} & \sum_{m'',n''}^{\infty} \frac{4}{T_1 T_2} \left\{ A_{m'',n''} \int d\theta \cos\left(\frac{2\pi m''\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \int d\varphi \cos\left(\frac{2\pi n''\varphi}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \right. \\ & + B_{m'',n''} \int d\theta \sin\left(\frac{2\pi m''\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \int d\varphi \sin\left(\frac{2\pi n''\varphi}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \\ & + D_{m'',n''} \int d\theta \cos\left(\frac{2\pi m''\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \int d\varphi \sin\left(\frac{2\pi n''\varphi}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \\ & \left. + E_{m'',n''} \int d\theta \sin\left(\frac{2\pi m''\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \int d\varphi \cos\left(\frac{2\pi n''\varphi}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \right\} \quad (2.43) \end{aligned}$$

Sendo  $T$  o período fundamental associado a variável  $x$ , então são válidas as relações (Arfken, 1987):

$$\int_0^T \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{T}{2} \delta_{m,n} & \text{se } m \neq 0; \\ 0 & \text{se } m=0 \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\int_0^T \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{T}{2} \delta_{m,n} & \text{se } m \neq 0; \\ T & \text{se } m=n=0 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\int_0^T \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{para todo } m, n \quad (2.46)$$

Retornando a eq.(2.43), e usando as fórmulas acima, chegamos a:

$$\sum_{m'',n''}^{\infty} \frac{4A_{m'',n''}}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} d\theta \cos\left(\frac{2\pi m''\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \int_0^{T_2} d\varphi \cos\left(\frac{2\pi n''\varphi}{T_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right)$$

$$\sum_{m'',n''}^{\infty} \frac{4A_{m'',n''}}{T_1 T_2} \frac{T_1}{2} \delta_{m'',m'} \frac{T_2}{2} \delta_{n'',n'} = A_{m',n'}$$

Analogamente;

$$B_{m'',n''} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\theta d\varphi B_r(r_0, \theta, \varphi) \sin\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \sin\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad (2.47)$$

$$D_{m'',n''} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\theta d\varphi B_r(r_0, \theta, \varphi) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \sin\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad (2.48)$$

$$E_{m'',n''} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\theta d\varphi B_r(r_0, \theta, \varphi) \sin\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad (2.49)$$

Se  $B_r$  for simétrico em relação ao plano  $\varphi = 0$ , então temos que  $B_r(r_0, \theta, \varphi) = B_r(r_0, \theta, -\varphi)$  é uma função par em  $\varphi$  e neste caso só existe a série em cossenos em  $\varphi$ . Portanto tiramos que:

$$B_{m',n'} = 0 \quad (2.50)$$

$$D_{m',n'} = 0$$

Se  $B_r$  for simétrico em relação ao plano  $\theta = 0$ , então  $B_r(r_0, \theta, \varphi) = B_r(r_0, -\theta, \varphi)$  é uma função par em  $\theta$  e somente existe a série em cossenos em  $\theta$ , onde concluímos que:

$$B_{m',n'} = 0 \quad (2.51)$$

$$E_{m',n'} = 0$$

Usando:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

Obetmos para a eq.(2.41):

$$B_r(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{m',n'}^{\infty} \left\{ \left( \frac{A_{m',n'}}{2} - \frac{B_{m',n'}}{2} \right) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1} + \frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{A_{m',n'}}{2} + \frac{B_{m',n'}}{2} \right) \cos\left( \frac{2\pi m'\theta}{T_1} - \frac{2\pi n'\varphi}{T_2} \right) \\
& + \left( \frac{D_{m',n'}}{2} + \frac{E_{m',n'}}{2} \right) \sin\left( \frac{2\pi m'\theta}{T_1} + \frac{2\pi n'\varphi}{T_2} \right) \\
& + \left. \left( \frac{E_{m',n'}}{2} - \frac{D_{m',n'}}{2} \right) \sin\left( \frac{2\pi m'\theta}{T_1} - \frac{2\pi n'\varphi}{T_2} \right) \right\} \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Definiremos  $m$  e  $n$  e os coeficientes de Fourier como:

$$m = \frac{2\pi m'}{T_1} \quad (2.53)$$

$$n = \frac{2\pi n'}{T_2}$$

$$a_{m,n} = \frac{E_{m',n'} - D_{m',n'}}{2} \quad (2.54)$$

$$a'_{m,n} = \frac{E_{m',n'} + D_{m',n'}}{2} \quad (2.55)$$

$$c_{m,n} = \frac{A_{m',n'} + B_{m',n'}}{2} \quad (2.56)$$

$$c'_{m,n} = \frac{A_{m',n'} - B_{m',n'}}{2} \quad (2.57)$$

Substituindo as definições acima na eq.(2.52), chegamos na eq.(2.10):

$$\begin{aligned}
B_r(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{m',n'}^{\infty} & \left[ a_{m,n} \sin(m\theta - n\varphi) + a'_{m,n} \sin(m\theta + n\varphi) + \right. \\
& \left. c_{m,n} \cos(m\theta - n\varphi) + c'_{m,n} \cos(m\theta + n\varphi) \right] \quad (2.58)
\end{aligned}$$

## 2.5 Campo Perturbativo devido a Anéis de Corrente.

Vamos investigar o efeito de  $p$  anéis de corrente, cada qual com  $L$  trechos de fios, orientados na direção ( $\varphi$ ), conduzindo correntes em sentidos contrários para fios adjacentes, tal que existem  $\frac{L}{2}$  pares de fios. A disposição desses anéis é simétrica como mostra a figura (2.6).

Os períodos fundamentais nas direções poloidal e toroidal são dados por:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2\pi \\
T_2 &= \frac{2\pi}{p} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

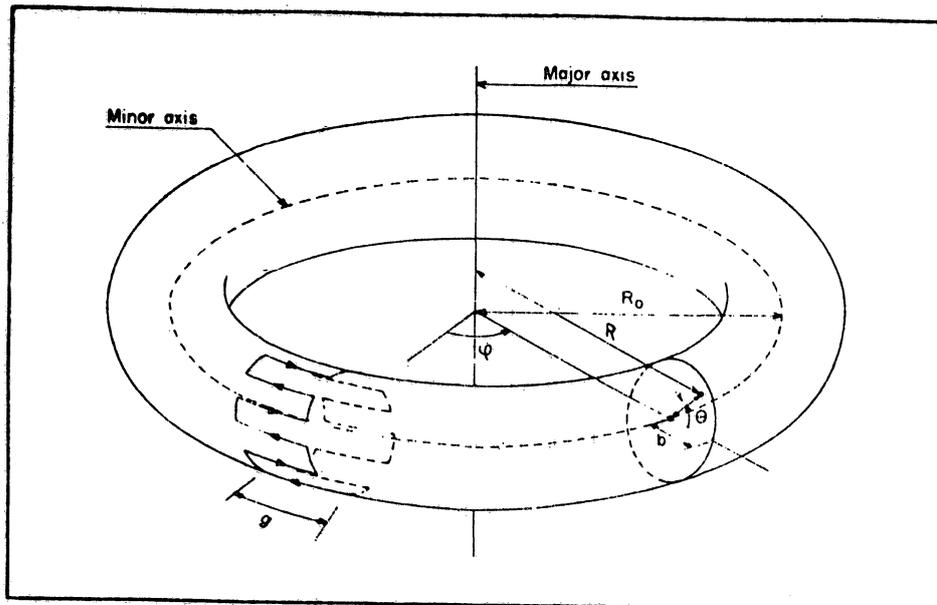


Figura (2. 6) Disposição de um anel de corrente no torus.

Cada anel tem largura  $g$  e desprezamos o campo criado pelos trechos de fios na direção poloidal, desde que o campo toroidal de equilíbrio seja maior do que esta contribuição. Desprezando o efeito de borda causado pela extensão finita dos fios, então, podemos escrever a componente radial do campo perturbativo como (cf. apêndice A):

$$B_r^{(1)}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} \sin\left(\frac{L}{2}\theta\right) \quad (2.60)$$

onde  $I$  é a corrente em cada anel e  $b$  é o raio menor do Tokamak.

O campo  $B_r(r_0, \theta, \varphi)$  é simétrico em relação a troca de  $(\varphi \rightarrow -\varphi)$ . Desenvolvendo este campo em série de Fourier dupla, observa-se que somente existe um único termo não nulo dos coeficientes de Fourier que é  $E_{m', n'}$ . A demonstração da nulidade dos outros coeficientes encontra-se no Apêndice B.

Trataremos a ação dos anéis de corrente como uma perturbação sobre o sistema em equilíbrio MHD, sendo esta perturbação dado pela eq.(2.60). Se a dimensão

"g" do limitador for consideravelmente menor que o comprimento do cilindro (i.e.,  $2\pi R_0$ ), podemos modelar a perturbação como uma seqüência de pulsos do tipo função delta. Como o cilindro tem periodicidade  $2\pi R_0$ , a perturbação é aplicada em  $z = 0, \pm 2\pi R_0, \pm 4\pi R_0, etc$ , já que as linhas de campo podem percorrer o cilindro um número arbitrariamente grande de vezes. Assim pode-se simular este comportamento escrevendo:

$$B_1(r, \theta, z) = \tilde{B}_1(r, \theta)g \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - 2\pi R_0 j)$$

onde  $\tilde{B}_1(r, \theta)$  é dado pela eq.(2.60) (Viana e Caldas, 1992).

Entretanto, nesta tese usaremos outra dependência em  $z$  para o campo do anel. A figura (2.7) mostra a disposição dos limitadores na forma de pulso quadrado que usaremos neste trabalho. A expressão para o campo perturbativo será:

$$B_1(r, \theta, z) = \begin{cases} \tilde{B}_1(r, \theta) & , -\frac{g}{2} \leq z < \frac{g}{2}; \\ 0 & , \frac{g}{2} < z \leq \frac{\pi R_0}{2} - \frac{g}{2} \end{cases}$$

Se substituirmos os intervalos de integração, os períodos fundamentais expressos pela eq.(2.59) e o campo gerado por um anel, eq.(2.60), a eq.(2.49) torna-se:

$$E_{m', n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \Lambda(r_0) \int_0^{2\pi} d\theta \sin\left(\frac{L}{2}\theta\right) \sin(m'\theta) \int_{-\frac{g}{2R_0}}^{\frac{g}{2R_0}} d\varphi \cos(pn'\varphi) \quad (2.61)$$

onde definimos:

$$\frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} = \Lambda(r_0) \quad (2.62)$$

Usando a eq.(2.44), a integral em  $\theta$  da eq.(2.61) reduz-se a:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \sin\left(\frac{L}{2}\theta\right) \sin(m'\theta) = \pi \delta_{\frac{L}{2}, m'} \quad (2.63)$$

e a outra integral em:

$$\int_{-\frac{g}{2R_0}}^{\frac{g}{2R_0}} d\varphi \cos(pn'\varphi) = \frac{2}{pn'} \sin\left(\frac{pn'g}{2R_0}\right) \quad (2.64)$$

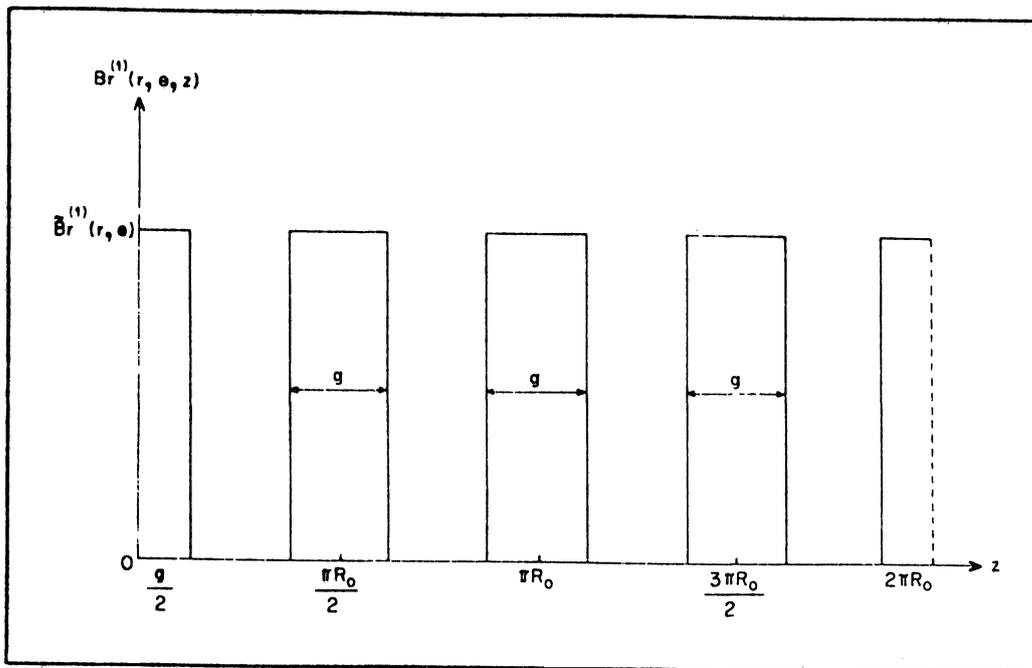


Figura (2. 7) Seqüência de Pulsos quadrados para os campos perturbativos.

Portanto temos que:

$$E_{m',n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \Lambda(r_0) \pi \delta_{\frac{L}{2}, m'} \frac{2}{pn'} \sin\left(\frac{pn'g}{2R_0}\right) \quad (2.65)$$

Usando a eq.(2.53) e a eq.(2.59) temos a seguinte condição de ressonância:

$$m = m' \quad (2.66)$$

$$n = pn' \quad (2.67)$$

Além disso, para que o único coeficiente de Fourier relevante  $E_{m',n'}$  seja não nulo na eq.(2.65), a delta de Kroneker só será diferente de zero se:

$$\frac{L}{2} = m' \quad (2.68)$$

Reunindo todas essas exigências:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{n}{p} \\ m' = m = qn &= \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

e substituindo na eq.(2.65) obtemos que:

$$E_{m',n'} = \frac{2p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r_0}{b}\right)^{(qn-1)} \sin\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \quad (2.70)$$

Das eq.(2.54), eq.(2.55), eq.(2.56) e da eq.(2.57) podemos tirar que:

$$a_{m,n} = \frac{p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r_0}{b}\right)^{(qn-1)} \sin\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \quad (2.71)$$

$$a'_{m,n} = a_{m,n} \quad (2.72)$$

$$c_{m,n} = 0 \quad (2.73)$$

$$c'_{m,n} = 0 \quad (2.74)$$

Assim, através da eq.(2.15), vemos que a componente de Fourier do campo perturbativo necessária para estimar a largura das ilhas magnéticas é dada por:

$$b_{m,n} = \frac{p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r_0}{b}\right)^{(qn-1)} \sin\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \quad (2.75)$$

onde  $p$  representa o número de anéis.

## 2.6 Exemplo Numérico

Neste exemplo numérico estimaremos o valor da largura da ilha magnética para um pequeno Tokamak, o TBR-1, que está em operação no IFUSP. Os parâmetros, nas unidades MKSA são citados no quadro abaixo ( Nascimento, Caldas e Galvão, 1993):

Raio maior ( $R_0$ )	0,30m
Raio menor ( $b$ )	0,11m
Razão de Aspecto ( $\tilde{A} = \frac{R_0}{b}$ )	2,7
Raio da coluna de plasma ( $a$ )	0,08m
Campo Toroidal ( $B_0$ )	0,50T
Corrente de plasma ( $I_p$ )	10,0kA

Consideremos o efeito de  $p = 1$  e  $p = 4$  anéis de largura  $g = 0,08m$  e com  $L = 14$  fios e  $m = 7$  pares. Usaremos as seguintes condições de equilíbrio: fator de segurança

$q(0) = 1$ ,  $q(a) = 5,0$  e o expoente do perfil de corrente como sendo  $\gamma = 4$ . Neste caso, temos o campo poloidal na borda do plasma  $B_\theta(a) = 0,02T$ .

Para esse exemplo, escolheremos a superfície magnética ressonante com um  $q = 7$  para estudar a formação da ilha, dentro e fora da coluna de plasma. Da condição de ressonância dada pela eq.(2.69), temos que ( $m = 7$  e  $n = 1$ ) esta localizada fora e ( $m = 7$  e  $n = 2$ ) está localizada dentro da coluna de plasma.

Para avaliarmos a largura da ilha magnética dada pela eq.(2.40) é necessário sabermos: i) a posição da superfície ressonante  $r_0$ , ii) a componente de Fourier do campo de erro  $b_{m,n}$ , iii) o campo poloidal na superfície ressonante  $B_\theta^0(r_0)$  e a iv) transformada rotacional e a sua derivada na superfície ressonante  $\iota_0$  e  $\iota'$ .

Podemos calcular a posição radial da superfície magnética ressonante através de duas maneiras: Se  $r_{m/n} < a$  temos da eq.(2.11) e da eq.(1.32):

$$\left[1 - \left(\frac{r_{m/n}}{a}\right)^2\right]^{\gamma+1} + \frac{n}{m}q(a)\left(\frac{r_{m/n}}{a}\right)^2 - 1 = 0$$

Se  $r_{m/n} > a$  temos:

$$r_{m/n} = a\sqrt{\frac{m}{nq(a)}}$$

Ainda, para que possamos calcular a largura da ilha magnética deste exemplo, precisamos derivar a transformada rotacional dada pela eq.(1.34) na posição radial ressonante, cujo resultado é:

$$\iota' = \begin{cases} -\frac{4\pi a^2}{(\gamma+1)r_0^3} \left[1 - \left[1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right]^{\gamma+1}\right] + \frac{4\pi}{r_0} \left[1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right]^\gamma & 0 < r < a; \\ -\frac{4\pi a^2}{(\gamma+1)r_0^3}, & a < r < b \end{cases}$$

Apresentamos em seguida uma tabela que contém os raios de algumas superfícies magnéticas

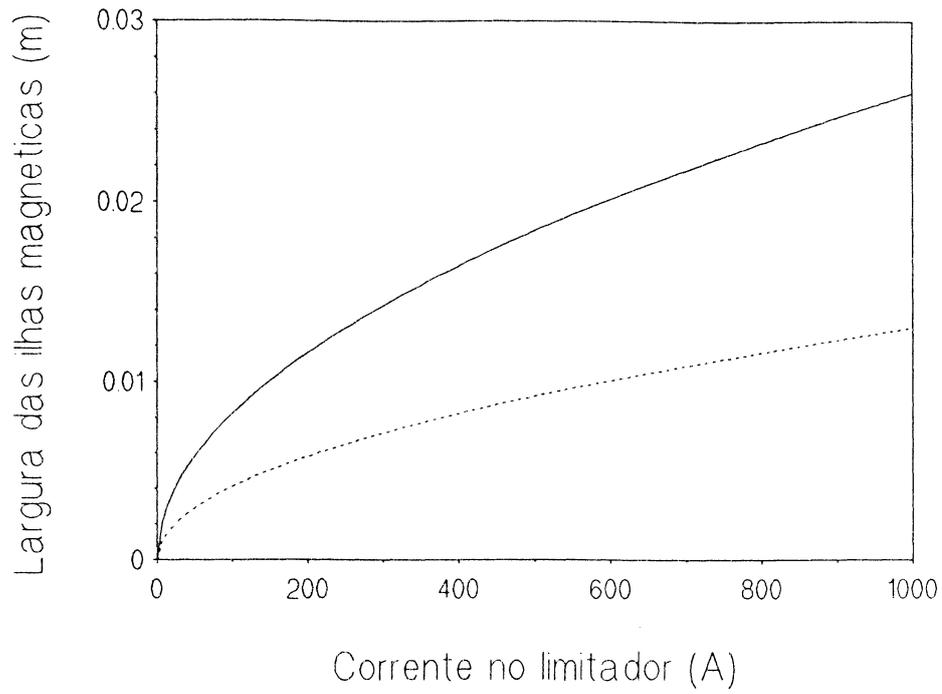
racionais para o TBR-I (Viana, 1991) com ( $\gamma = 4$ ;  $q(a) = 5,0$  e  $a = 0,08m$ ).

m	n	q	$r_{m/n}(cm)$
7	1	7,0	9,4
7	2	3,5	6,7
7	3	2,3	5,3
7	4	1,7	4,3
7	5	1,4	3,3
7	6	1,1	2,1
7	7	1,0	0,0
8	1	8,0	10,1
8	2	4,0	7,2
8	3	2,6	5,8
8	4	2,0	4,8
8	5	1,6	3,9
8	6	1,3	3,0
8	7	1,1	2,1
8	8	1,0	0,0

Utilizando uma corrente de 60A e as devidas equações, construímos abaixo um quadro que mostra os valores necessários para estimar a largura das ilhas magnéticas para este exemplo numérico e o valor da largura.

$q = \frac{m}{n}$	7/1	7/2
$r_0(m)$	0,094	0,067
$b_{m,n}(T)$	$1,006 \times 10^{-4}$	$1,308 \times 10^{-5}$
$B_\theta(r_0)(T)$	0,017	0,024
$\iota_0$	0,89	1,79
$\iota'(m^{-1})$	-19,36	-51,86
$\delta(m)$	0,0076	0,0016

Na figura (2.8), mostramos o gráfico de como a largura das ilhas magnéticas varia em função da corrente no limitador.



**Figura (2. 8)** A curva pontilhada e a cheia referem-se as curvas teóricas obtidas através da eq.(2.40) para um e quatro anéis.

## TERCEIRO CAPÍTULO

### MAPEAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO.

Neste capítulo veremos noções sobre mapeamentos, secção de Poincaré, e como as linhas de campo magnético são mapeadas na presença e na ausência de campo perturbativos, ou seja com e sem anéis de corrente. Introduziremos a correção toroidal apenas no campo  $B_\varphi$ , para verificarmos o aparecimento de ilhas secundárias. O comportamento das linhas de campo será estudado através da integração numérica das equações das linhas de campo a partir do método de Adams-Moulton. Como exemplo deste método, veremos a sua aplicação ao Tokamak TBR-1 com 1 e 4 limitadores.

#### 3.1 Conceitos Básicos.

##### 3.1.1 Mapeamento

Podemos definir mapeamento como sendo sistemas dinâmicos parametrizados por uma variável discreta  $n$ , na forma:†

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (3.1)$$

onde  $X_n$  é um vetor  $m$ -dimensional de variáveis  $(X_1)_n, (X_2)_n, \dots, (X_m)_n$  e  $F : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  é uma função destas componentes. A partir da condição inicial  $(X_1)_0, \dots, (X_m)_0$ , a dinâmica do mapeamento resulta por iterações sucessivas da eq.(3.1). Um ponto inicial  $X_0 \in \mathfrak{R}^m$  gera uma órbita progressiva, ou seja;  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n = F(X_{n-1}) \equiv F^n(X_0)$ , onde  $n \geq 1$ . Se  $F$  for inversível, teremos uma órbita regressiva;  $X_0, X_{-1}, \dots, X_n = F^{-1}(X_{n+1})$ . Normalmente, a iteração de um mapeamento é computacionalmente mais rápida que a solução numérica de um sistema de equações diferenciais.

Uma técnica freqüentemente utilizada é a da superfície de secção de Poincaré no espaço de fase, para o fluxo gerado por sistema de equações diferenciais.

---

† a evolução no tempo "físico" não é considerado em nosso modelo.

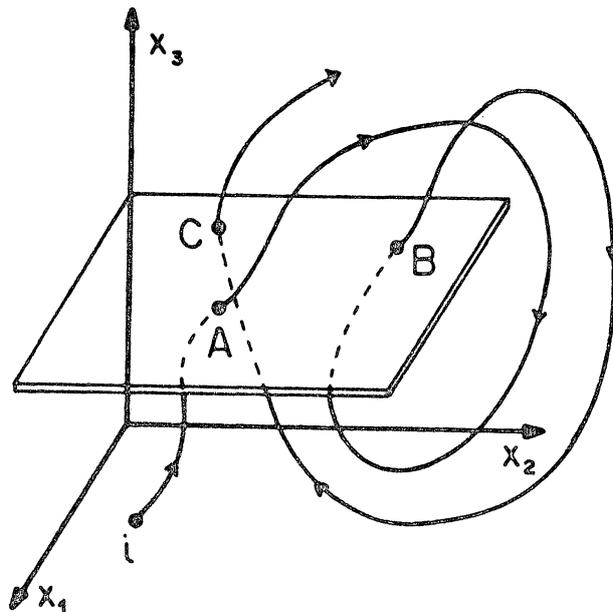


Figura ( 3. 1) Superfície de secção de Poincaré no espaço de fase tridimensional. Os pontos de intersecção de uma trajetória com ela formam um mapeamento,  $C = f(B) = f(f(A))$ , etc.

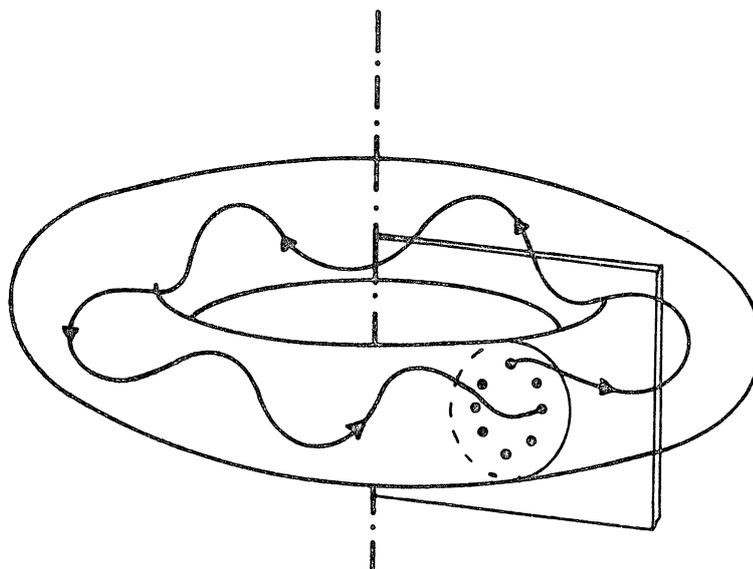
Tomamos os pontos de intersecção das trajetórias de fase geradas pela solução do sistema com a superfície de secção. A figura (3.1) ilustra que as coordenadas de  $A$  determinam univocamente as coordenadas de  $B$  e assim por diante, de tal forma que podemos criar um mapeamento:

$$B = f(A), C = f(B) = f(f(A)) = f^2(A), etc$$

que pode ser iterado para achar qualquer ponto da intersecção a partir de um ponto inicial. Este é conhecido como mapeamento de Poincaré das trajetórias de fase do sistema.

### 3.1.2 Mapeamento das Linhas de Campo Magnético

Analisaremos o comportamento das linhas magnéticas através de uma secção



**Figura ( 3. 2)** Mapeamento de linha de campo magnético por uma secção de Poincaré.

de Poincaré para o fluxo gerado pelas equações das linhas de campo. Inicialmente usaremos o mapeamento na ausência de limitadores, conforme a figura (3.2).

Devido ao caráter periódico do modelo, as linhas de campo fluem sobre superfície racionais e produzem na secção de Poincaré um número finito de pontos ao longo do circuito. Se a superfície magnética for irracional, as intersecções das linhas com o plano de Poincaré devem preencher densamente uma curva. Pode ocorrer que os pontos de intersecção acabam espalhando-se por uma região da superfície, como mostra a figura (3.3). Essa região é conhecida na literatura como região estocástica, caótica ou ergódica, e aparece quando as superfícies magnéticas são destruídas.

A princípio, sem a inclusão de limitadores é possível determinar analiticamente a forma deste mapeamento, graças à integrabilidade do sistema. Consideremos o nosso modelo cilíndrico com aproximação de grande razão de aspecto. As equações das linhas de campo são expressas por:

$$\vec{B}^{(0)} \times d\vec{l} = 0 \quad (3.2)$$

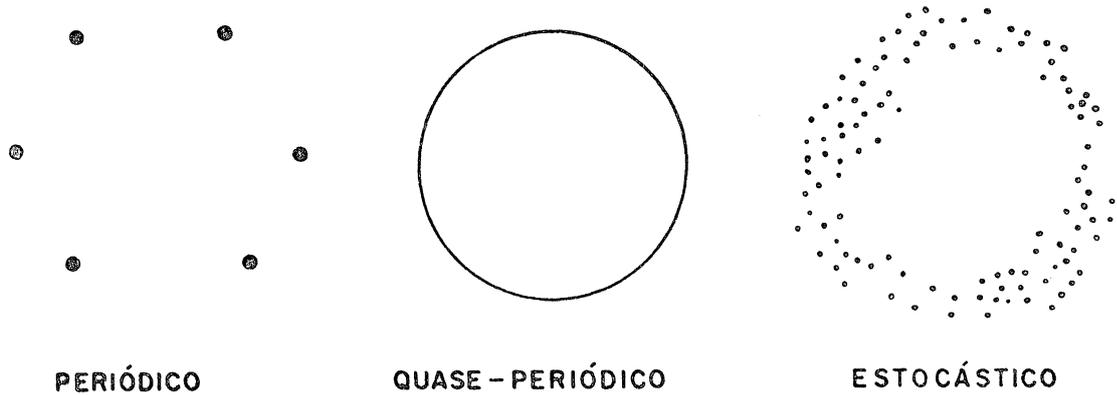


Figura ( 3. 3) Diferentes comportamentos das linhas de campo através da secção de Poincaré.

onde temos que, em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_0} \quad (a)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta(r)}{rB_0} \quad (b)$$

(3.3)

Usando a eq.(1.20), o campo de equilíbrio no Tokamak é dado por:

$$B_r = 0 \quad (3.4)$$

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{aB_\theta(a)}{r} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] & r < a; \\ \frac{aB_\theta(a)}{r}, & r > a \end{cases} \quad (3.5)$$

$$B_z = B_0 = cte \quad (3.6)$$

onde  $B_\theta(a)$  é o campo poloidal dentro da coluna de plasma,  $a$  é o raio da coluna de plasma e  $\gamma$  é o expoente do perfil de corrente. Tomando o plano de secção em  $z = 0$ , denotaremos por  $(r_n, \theta_n), (r_n^*, \theta_n^*)$ , como mostra a figura (3.4), as coordenadas polares dos pontos de intersecção

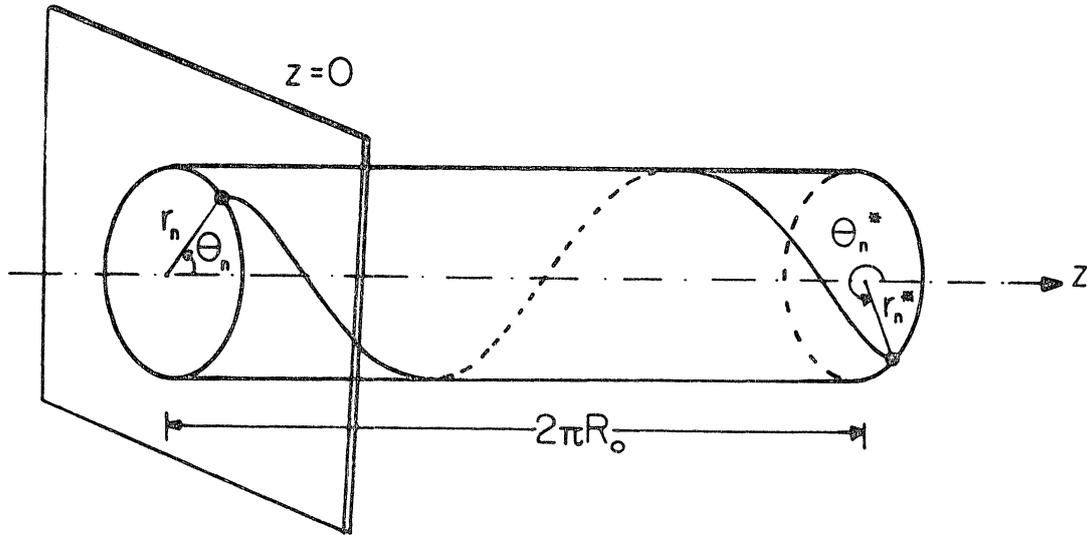


Figura ( 3. 4) Coordenadas de pontos do mapeamento na geometria cilíndrica.

das soluções da eq.(3.2) antes e depois de uma volta completa, respectivamente. Devido à periodicidade do cilindro, o plano  $z = 0$  é equivalente aos planos  $z = \pm 2\pi R_0, \pm 4\pi R_0, etc.$  Assim após uma volta completa a eq.(3.3a) torna-se:

$$r_n = r_n^* \tag{3.7}$$

Se integrarmos a eq.(3.3b) obtemos:

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi R_0 B_\theta(r_n)}{r_n B_0} \tag{3.8}$$

tal que  $r$  é constante ao longo da integração. Fisicamente, as eq.(3.5) e eq.(3.6), ilustram o fato de que as superfícies magnéticas são cilindros concêntricos, (como já foi visto na secção (1.3)), sobre os quais fluem as linhas de campo sob a ação de uma transformada rotacional  $\iota$ . Usando a eq.(1.34), podemos reescrever a eq.(3.8) como:

$$\theta_n^* = \theta_n + \iota \tag{3.9}$$

### 3.1.3 Correção Toroidal e o Mapeamento.

A correção toroidal pode ser vista de duas maneiras. A primeira maneira é usar sistemas de coordenadas apropriadas desde que conheçamos um equilíbrio MHD com tal simetria (Kucinski et al., 1989). O campo poloidal  $B_\theta$  como o campo toroidal  $B_\varphi$  diferem quando se passa à análise-los numa geometria toroidal. A outra, é a adição de correções aos campos  $B_\theta$  e  $B_\varphi$ , principalmente neste último em relação a seus valores numa geometria cilíndrica, o que é feito neste trabalho. O efeito principal dessa correção é a deformação das superfícies magnéticas e conseqüentemente o aparecimento de ilhas satélites dentro e fora da coluna de plasma nas vizinhanças da ilha principal. A correção no campo toroidal (Viana, 1991), é:

$$B_\varphi(r, \theta) = \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \quad (3.10)$$

onde  $B_0$  é o campo uniforme utilizado no modelo cilíndrico e continuam sendo válidas, apenas a eq.(3.4) e a eq.(3.5). Consideremos a figura (3.5), o plano de secção está em  $\varphi = 0$ , que equivale a  $\varphi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, etc$ , de modo que a convenção para as coordenadas na secção de Poincaré ainda é a mesma. Mesmo empregando esta correção toroidal, supomos que a secção de Poincaré de uma superfície magnética ainda seja circular. Esta suposição pode ser empregada se a pressão sobre a coluna de plasma for pequena (isto é, o eixo da coluna de plasma ainda coincida com o eixo geométrico da câmara). Num tratamento mais sofisticado (Carmargo e Caldas, 1990) pode-se observar uma deformação da secção circular das superfícies magnéticas. Nessas condições, a eq.(3.3a) deve fornecer:

$$r_n = r_n^* \quad (3.11)$$

indicando que as superfícies magnéticas são toróide aninhados. De  $dz = R_0 d\varphi$ , obtem-se o análogo toroidal da eq.(3.3b).

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_0} (1 + \epsilon(r) \cos \theta) \quad (3.12)$$

onde  $\epsilon(r) = \frac{r}{R_0}$  é uma medida local do grau de toroidicidade. Em particular, se  $r = b$ ,  $\epsilon$  é o

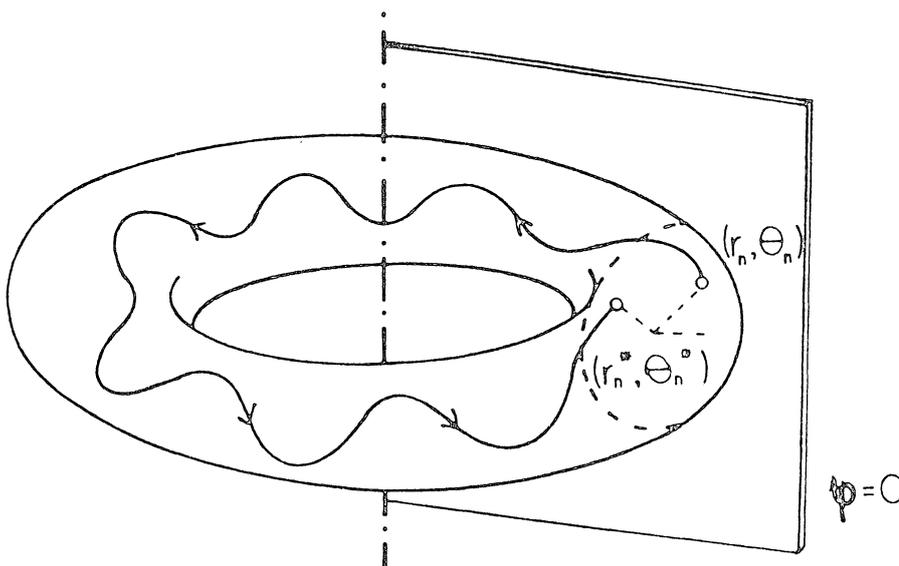


Figura ( 3. 5) Coordenadas de pontos no mapeamento na geometria toroidal.

inverso da razão de aspecto. Se integrarmos a eq.(3.12)

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n^*} \frac{d\theta}{1 + \epsilon(r) \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_0} d\varphi$$

Usando novamente o fato que  $r$  e  $\epsilon$  são constante ao longo da integração, e a fórmula (Abramovitz e Stegun, 1965):

$$\int \frac{d\theta}{1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \left[ \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \tan \frac{\theta}{2} \right]$$

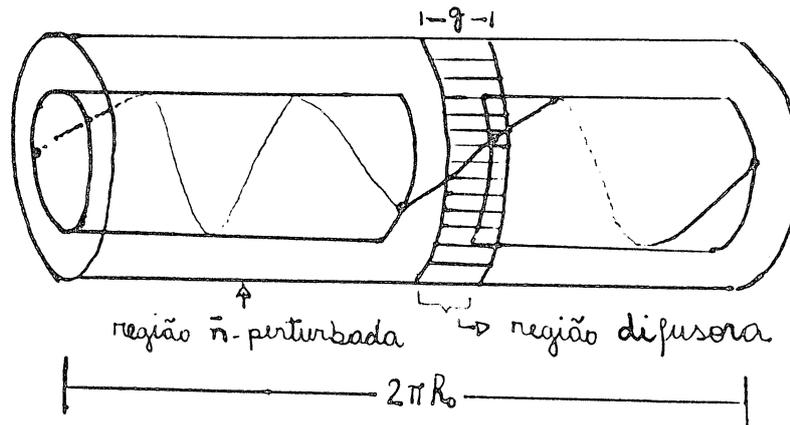
encontramos (Viana, 1991)

$$\theta_n^* = 2 \arctan \left\{ \lambda(r_n) \tan \left[ \frac{\pi R_0 B_\theta(r) (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{B_0 \lambda(r_n) r_n} \right] + \arctan \left[ \frac{1}{\lambda(r_n)} \tan \frac{\theta_n}{2} \right] \right\} + 2\pi \quad (3.13)$$

onde fizemos

$$\lambda(r_n) = \frac{1 - \epsilon(r_n)}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (3.14)$$

Quando tomamos o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$ , a eq.(3.13) reduz-se a eq.(3.8), que expressa a geometria cilíndrica, sem o efeito toroidal.



**Figura ( 3. 6)** Divisão do Tokamak na aproximação de grande razão de aspecto em duas regiões: região difusora e região não perturbada na presença de um anél limitador.

### 3.2 Mapeamento das Linhas de Campo Magnético na presença de Anéis de Correntes.

A idéia básica para esse mapeamento é separarmos o Tokamak em duas regiões, conforme a figura (3.6). Denotaremos por região difusora ou "kick region", aquela correspondente a extensão do anel, onde as linhas de campo sofrem um salto radial e poloidal. A outra é chamada de região não perturbada ou "twist region", na qual as linhas de campo caminham sobre superfícies magnéticas de fluxo  $\Psi = \text{constante}$ , sofrendo apenas deslocamento poloidal, devido à transformada rotacional. O mapeamento da região não perturbadora é descrito na secção (3.1.2), de tal forma que precisamos apenas descrever o mapeamento para a região difusora.

Usando a equação da linha de campo magnético expressa pela eq.(1.10) em coordenadas cilíndricas temos,

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} = \frac{dz}{B_0}, \quad (3.15)$$

onde os campos radial e poloidal para essa região são (cf apêndice A),

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (3.16)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (3.17)$$

tal que,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_0} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi B_0 b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (3.18)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{B_0} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi r B_0 b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (3.19)$$

Para obtermos a posição  $(r_{n+1}^*, \theta_{n+1}^*)$  a partir de uma posição inicial  $(r_n^*, \theta_n^*)$  devido a ação do limitador, podemos integrar de forma aproximada as equações de campo sobre a extensão  $g$  do limitador. Assim, a eq.(3.11) e eq.(3.13) tornam-se (Viana e Caldas, 1992),

$$r_{n+1}^* = r_n^* - \frac{\mu_0 m I g}{\pi B_0 b} \left(\frac{r_n^*}{b}\right)^{m-1} \sin(m\theta_n^*) \quad (3.20)$$

$$\theta_{n+1}^* = \theta_n^* - \frac{\mu_0 m I g}{\pi B_0} \left(\frac{r_n^*}{b}\right)^{m-2} \cos(m\theta_n^*) \quad (3.21)$$

A princípio, não usaremos este mapa, pois faremos um procedimento numérico.

### 3.3 Integração Numérica das Equações das Linhas de Campo Magnético.

O estudo da influência de campos perturbativos sobre o equilíbrio pode ser feito considerando a superposição de dois campos (equilíbrio + perturbativo). A análise da superposição dos campos é feita através do mapeamento das linhas de campo magnético em uma secção reta do Tokamak, de tal forma que as linhas de campo magnético devem satisfazer a equação:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0 \quad (3.22)$$

Se o campo magnético possui simetria translacional, axial ou helicoidal, então existe uma função de fluxo  $\Psi$  que define superfícies magnéticas e é constante para cada superfície. Quando introduzimos o campo magnético perturbativo, o sistema perde sua simetria original e não sabemos se podemos definir uma função que descreva o comportamento das linhas de

campo nesta região. Desta forma, a maneira mais adequada é integrarmos numericamente a eq.(3.22) para obtermos o mapa de Poincaré. As equações das linhas de campo integradas numericamente foram as seguintes:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r^{(0)}}{B_z^{(0)}} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta^{(0)}}{rB_z^{(0)}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r B_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma-1} \right] & r < a; \\ \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r B_0}, & r > a \end{cases} \quad (3.24)$$

para o campo de equilíbrio e,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r^{(0)} + B_r^{(1)}}{B_z^{(0)}} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \left( \frac{r}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (3.25)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta^{(0)} + B_\theta^{(1)}}{B_z^{(0)}} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r B_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma-1} \right] - \frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} \left( \frac{r}{b} \right)^{m-1} \cos(m\theta), \quad (3.26)$$

para o campo de equilíbrio mais o campo dos anéis.

Para o nosso modelo, com aproximação cilíndrica, a superposição dos campos mencionados acima resulta no aparecimento de ilhas magnéticas ao redor das superfícies ressonantes. No outro caso, com a correção toroidal, como é feita na secção (3.1.3), é esperado que apareçam ilhas secundárias ao redor das ilhas principais.

Na literatura existem vários métodos numéricos para se integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Estes métodos numéricos podem ser de um passo (método de Euler, método de Runge-kutta, etc), e de múltiplos passos (Adams-Bashforth, Adams-Moulton, etc). No método de um passo, é necessário conhecer apenas o ponto inicial para obter os pontos consecutivos, enquanto que no método de múltiplos passos calcula-se o ponto posterior considerando os pontos anteriores calculados. Neste trabalho de mestrado damos ênfase ao método de Adams-Moulton.

A seguir, veremos os mapeamentos obtidos usando este método com os parâmetros do TBR-I para um e quatro limitadores com e sem correção toroidal. Os cálculos

da largura † das ilhas magnéticas estão anexos em cada figura, calculadas analiticamente e numericamente. Somente não realizamos o cálculo da largura das ilhas magnéticas com a correção toroidal, pois, efetivamente a fórmula é diferente e nesse trabalho somente introduzimos a correção para verificarmos o aparecimento de ilhas secundárias. Os parâmetros empregados nas simulações numéricas são os mesmos da secção (2.6). Todas as figuras que envolvem os mapeamentos foram integradas a partir de uma condição inicial. Em função da tabela dos raios das superfícies ressonantes, tornou-se mais fácil estabelecer esta condição. Em todos os mapeamentos com um ou quatro anéis, sem e com correção toroidal, começamos a integração numérica a partir de  $r = 0,02m$  até o raio menor do Tokamak TBR-I  $b = 0,11m$  e com um ângulo poloidal inicial  $\theta = 0$ . O número de órbitas nas figuras não foram mantidas fixas, e nem o intervalo entre duas órbitas, pois este foi variado conforme a proximidade de uma superfície ressonante.

A figura (3.7) mostra o mapeamento com  $I = 0$ , onde as superfícies magnéticas são perfeitas, pois não existe perturbação no sistema e conseqüentemente as ilhas magnéticas não aparecem, concordando com a teoria. Nas figuras (3.8), (3.9) e (3.10) são mostrados os mapeamentos com o modo ressonante (7/1) para um anel com correntes de 50A, 100A e 200A respectivamente. O outro modo ressonante (7/2) não aparece, porque a perturbação no sistema não é suficiente para excitar significativamente esse modo bem como os demais. Como existe corrente nos anéis, espera-se que em torno das superfícies ressonantes apareçam ilhas magnéticas. Conforme a intensidade da corrente for aumentada nos anéis, as larguras das ilhas torna-se mais evidente, como mostram as figuras seguintes. As figuras (3.11), (3.12) e (3.13) mostram os mapeamentos com quatro anéis com corrente de 50A, 100A e 200A respectivamente. Com quatro anéis os modos de ressonância internos são mais evidentes do que com apenas um anel e, por exemplo, aparece o modo ressonante (7/2). Neste caso as larguras das ilhas é mais evidente e além de variar com a corrente,

---

† denominamos de  $\delta_1$  a largura referente ao cálculo analítico obtida a partir da eq.(2.40) e  $\delta_2$  referente ao cálculo numérico, isto é, a estimativa é feita diretamente sobre o mapeamento das linhas de campo.

as larguras também variam com o número de anéis. Nas figuras (3.14), (3.15) e (3.16) mostramos os mapeamentos com correção toroidal para um anel com corrente de 50A, 100A e 200A respectivamente. Quando introduzimos a correção toroidal no sistema, é esperado que apareçam ilhas secundárias em torno das superfícies ressonantes e essas ilhas são mais evidentes numa certa região mapeamento. As figuras (3.17), (3.18) e (3.19) mostram os mapeamentos com correção toroidal para quatro anéis com corrente de 50A, 100A e 200A respectivamente. Nestas figuras a região estocástica é mais evidente, pois esta aumenta com a corrente no anel. Este aumento pode ser causado devido à superposição das ilhas magnéticas. Nestes mapeamentos, devido a correção toroidal, as superfícies magnéticas são deformadas.

Em nossos mapeamentos, tornou-se mais evidente o aparecimento das ilhas magnéticas em torno das superfícies ressonantes quando a corrente nos anéis era aumentada e também em função do número destes anéis. Através destes mapeamentos, a largura das ilhas magnéticas foram medidas diretamente com uma régua. Os resultados obtidos numericamente quando, comparados com a previsão teórica exposta no segundo capítulo, foram ótimos e demonstraram que o método de Matsuda e Yoshikawa para o nosso modelo cilíndrico é satisfatório. A tabela a seguir mostra os valores das larguras das ilhas magnéticas obtidas analiticamente e numericamente.

Número de anéis	Corrente (A)	$\delta_1(m)$	$\delta_2(m)$	Porcentagem
4	200	$1,5 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-2}$	6,6
4	100	$1,06 \times 10^{-2}$	$9,6 \times 10^{-3}$	9,4
4	50	$7,5 \times 10^{-3}$	$6,5 \times 10^{-3}$	13,3
1	200	$7,5 \times 10^{-3}$	$6,5 \times 10^{-3}$	13,3
1	100	$5,3 \times 10^{-3}$	$4,7 \times 10^{-3}$	11,3
1	50	$3,7 \times 10^{-3}$	$3,2 \times 10^{-3}$	13,5

onde:

$\delta_1$  é a largura das ilhas medida analiticamente.

$\delta_2$  é a largura das ilhas medida numericamente.

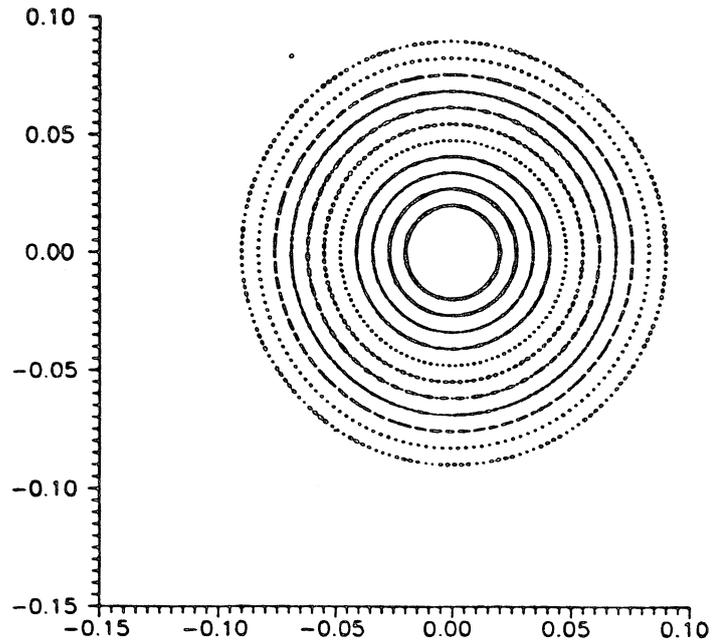


Figura ( 3. 7) Mostra o mapeamento com  $I = 0$ , na qual as superfícies magnéticas são perfeitas.

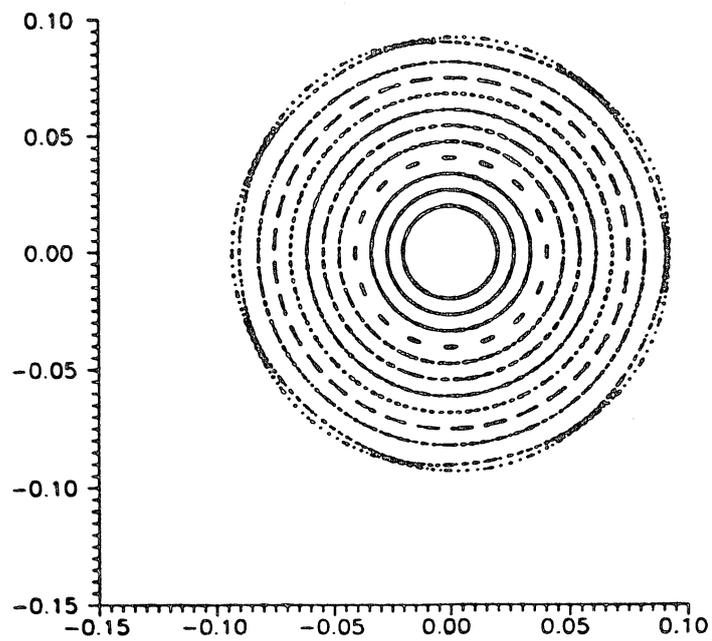


Figura ( 3. 8) Mostra o mapeamento com um limitador,  $I = 50A$  e com  $\delta_1 = 3,7 \times 10^{-3}m$  e  $\delta_2 = 3,2 \times 10^{-3}m$ .

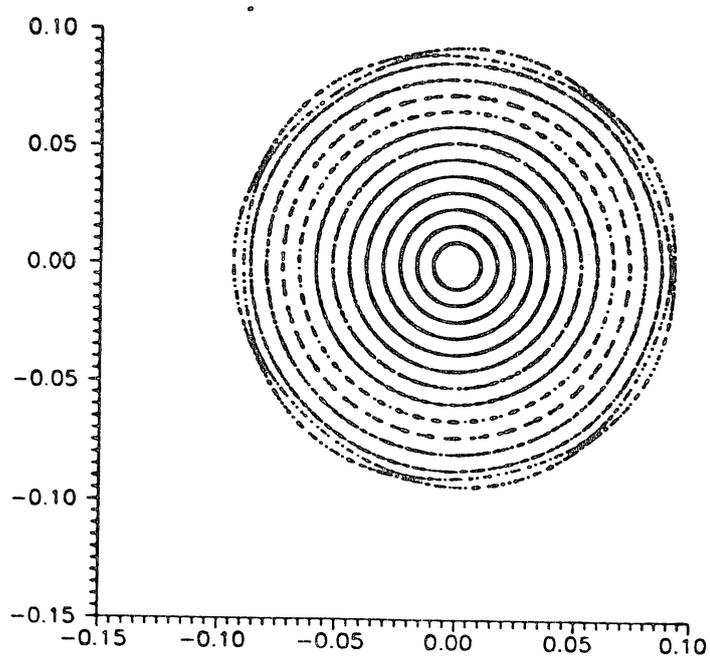


Figura ( 3. 9) Mostra o mapeamento com um anel,  $I = 100A$  e com  $\delta_1 = 5,3 \times 10^{-3}m$  e  $\delta_2 = 4,7 \times 10^{-3}m$ .

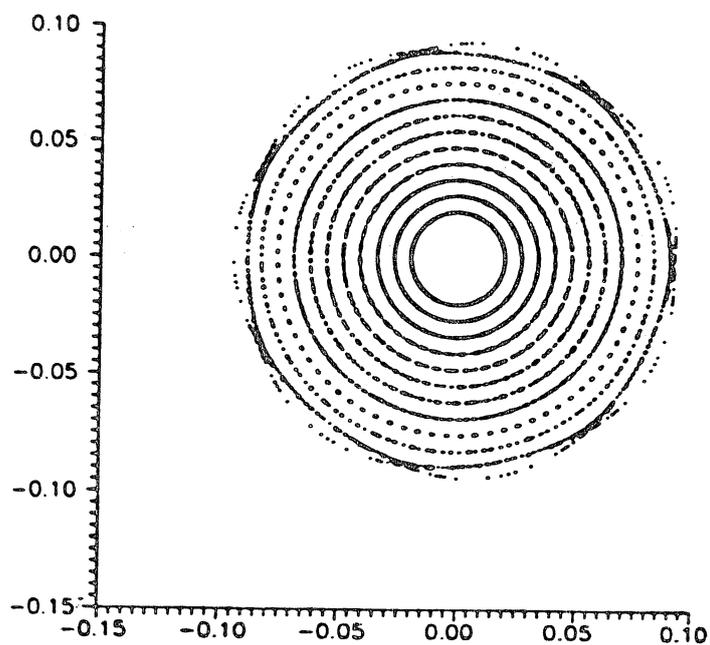


Figura ( 3. 10) Mostra o mapeamento com um anel,  $I = 200A$  e com  $\delta_1 = 7,5 \times 10^{-3}m$  e  $\delta_2 = 6,5 \times 10^{-3}m$ .

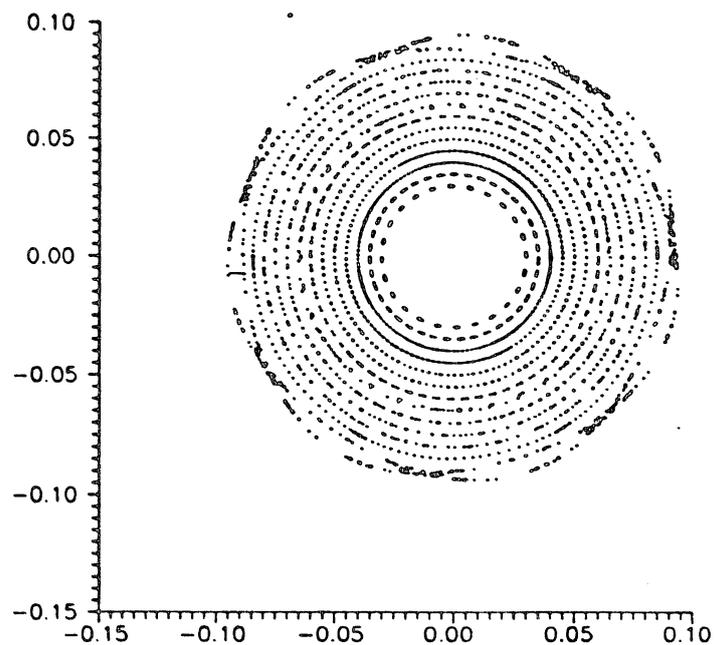


Figura ( 3. 11) Mostra o mapeamento com quatro anéis,  $I = 50A$  e com  $\delta_1 = 7,5 \times 10^{-3}m$  e  $\delta_2 = 6,5 \times 10^{-3}m$ .

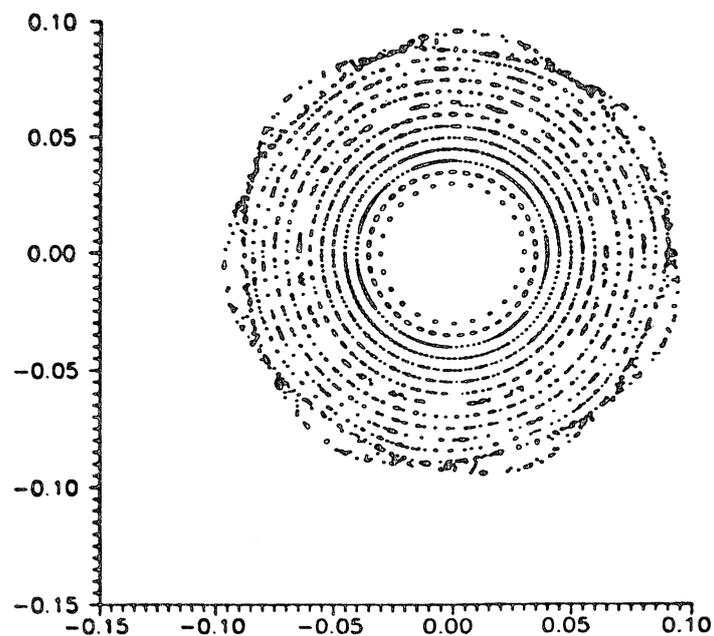


Figura ( 3. 12) Mostra o mapeamento com quatro anéis,  $I = 100A$  e com  $\delta_1 = 1,06 \times 10^{-2}m$  e  $\delta_2 = 9,6 \times 10^{-3}m$ .

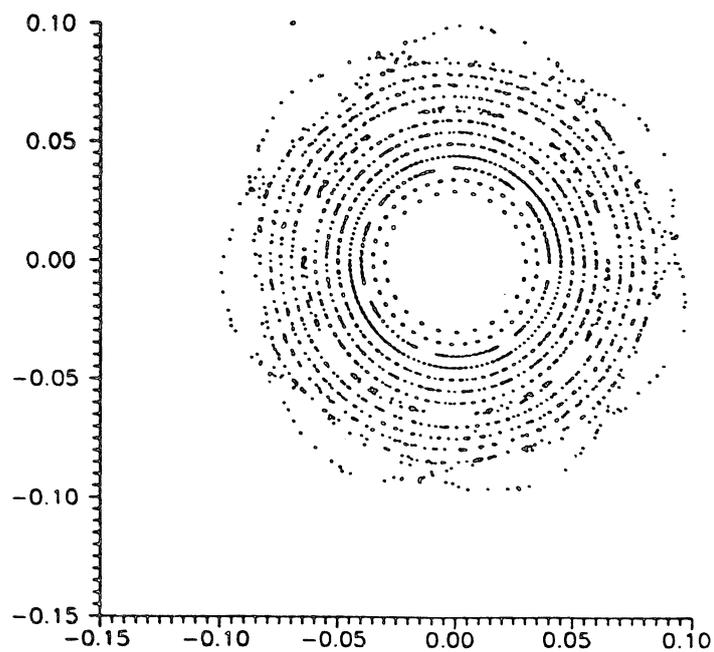


Figura ( 3. 13) Mostra o mapeamento com quatro anéis,  $I = 200A$  e com  $\delta_1 = 1,5 \times 10^{-2}m$  e  $\delta_2 = 1,47 \times 10^{-2}m$ .

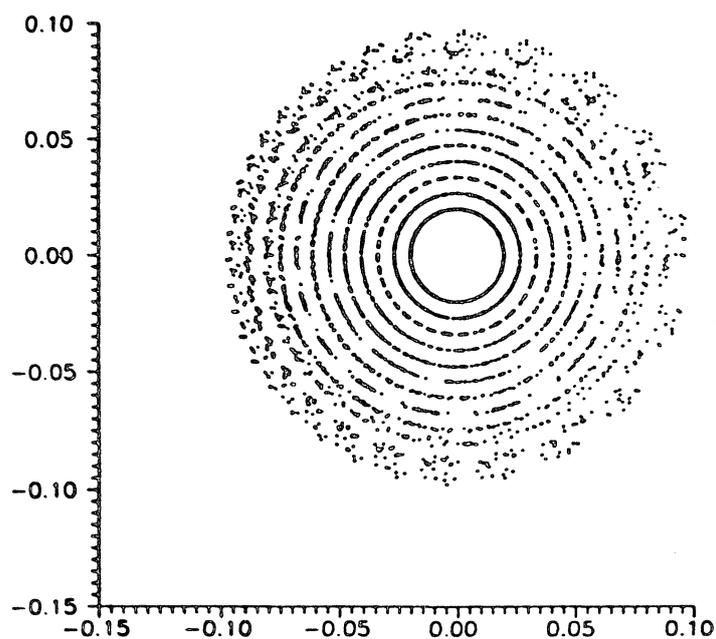


Figura ( 3. 14) Mostra o mapeamento para um anel com correção toroidal,  $I = 50A$ .

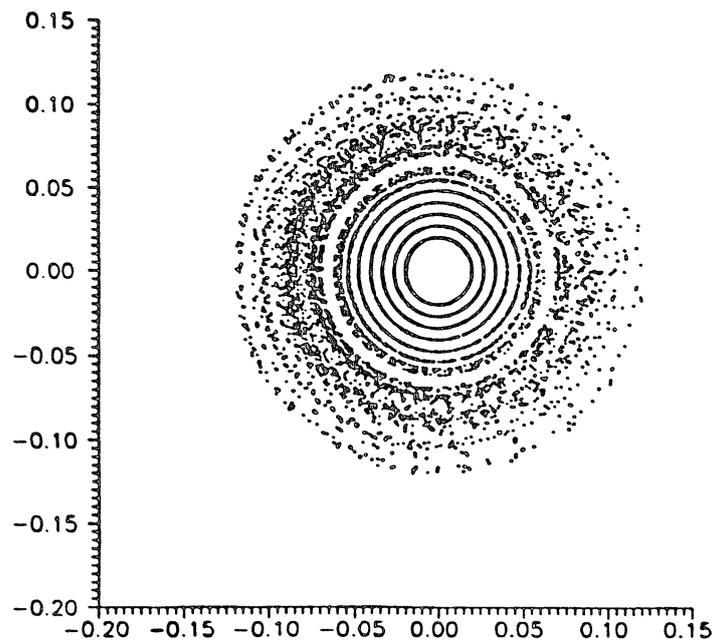


Figura ( 3. 15) Mostra o mapeamento para um anel com correção toroidal,  $I = 100A$ .

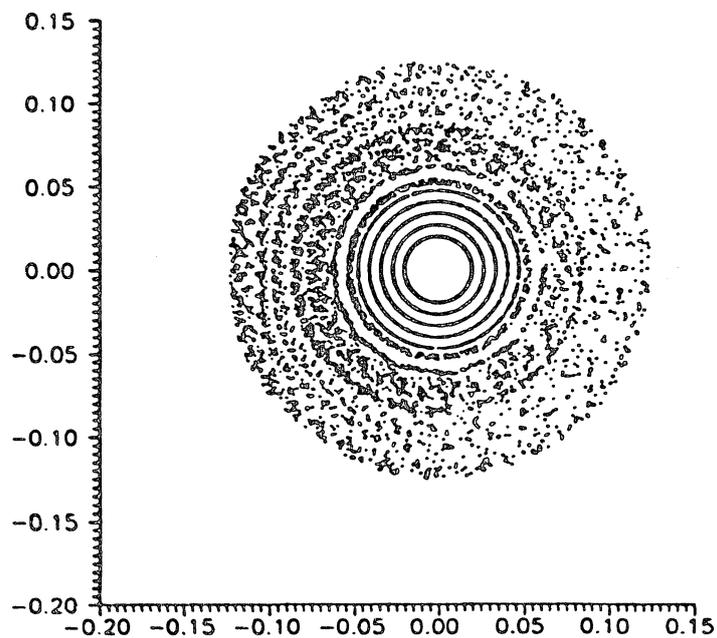


Figura ( 3. 16) Mostra o mapeamento para um anel com correção toroidal,  $I = 200A$ .

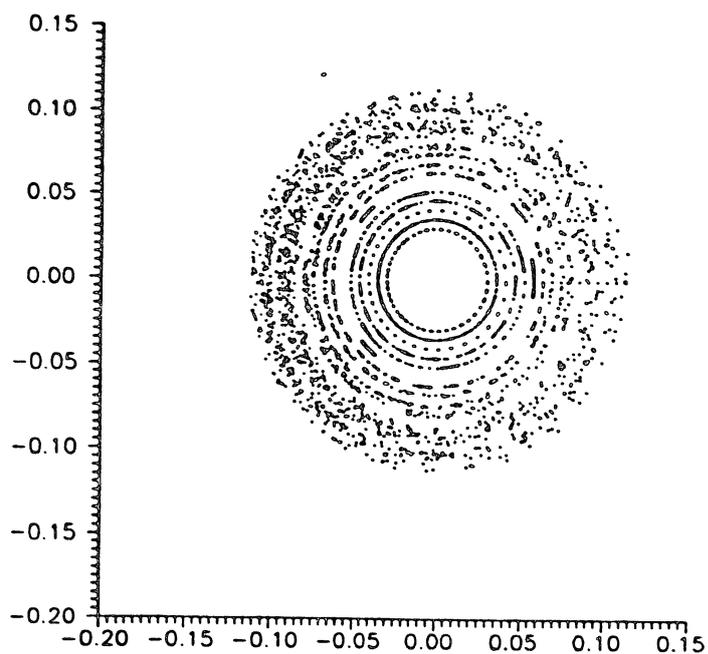


Figura ( 3. 17) Mostra o mapeamento para quatro anéis com correção toroidal,  $I = 50\text{ A}$ .

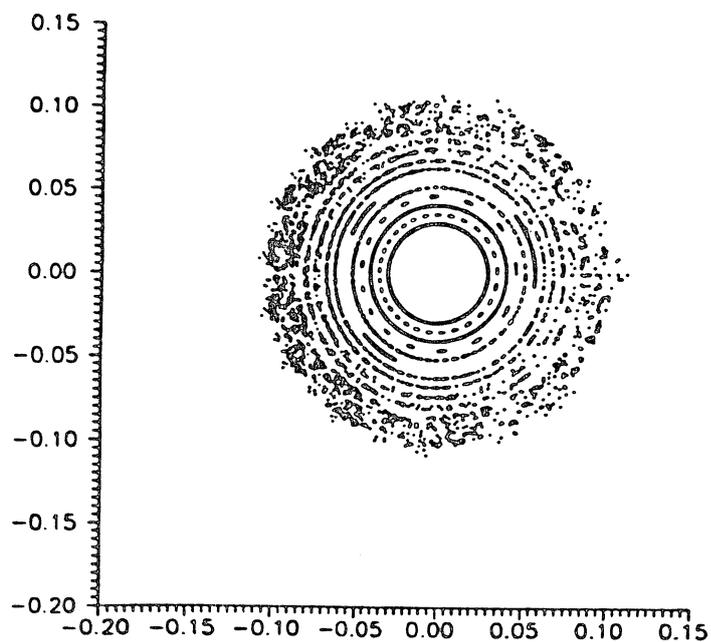
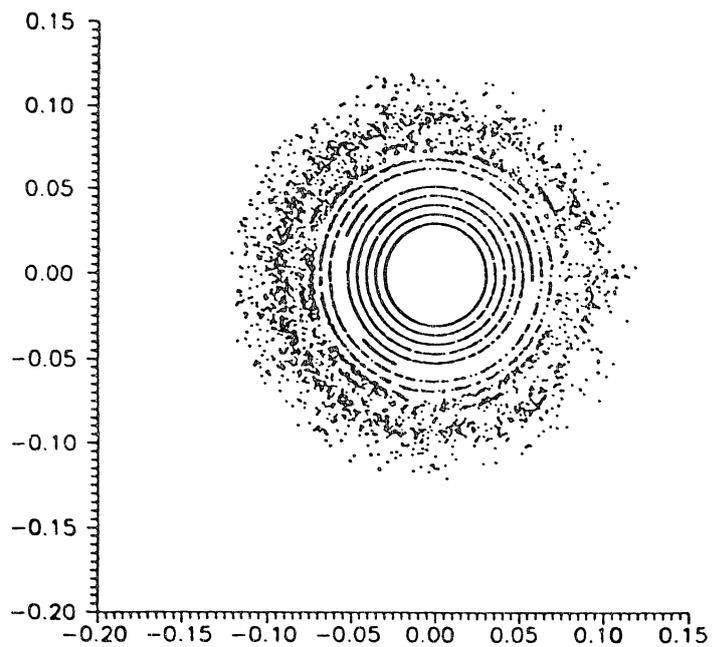


Figura ( 3. 18) Mostra o mapeamento para quatro anéis com correção toroidal,  $I = 100\text{ A}$ .



**Figura ( 3. 19)** Mostra o mapeamento para quatro anéis com correção toroidal,  $I = 200\text{ A}$ .

## Conclusão

Como vimos no início da introdução, os anéis de corrente são componentes essenciais dos Limitadores Magnéticos Ergódicos, dentro da concepção original de Martin e Taylor (1984), posteriormente aperfeiçoado por Yu e De Grassie (1986). Nosso tratamento de anéis de corrente está mais diretamente vinculado à concepção de Martin e Taylor, que supõe pares de fios igualmente espaçados; ao passo que as modificações introduzidas pelo projeto de Yu e De Grassie ( e posteriormente por Takamura e colaboradores (1988)) visam espaçar os trechos de fios no limitador de maneira a reproduzir o passo das linhas de campo numa geometria efetivamente toroidal. Um estudo deste tipo está sendo conduzido, no momento, no Instituto de Física da USP para o Tokamak TBR-I (Silva e Caldas, 1993).

A ênfase maior deste trabalho, no entanto, reside na descrição de anéis de corrente como elementos passíveis de criar campos magnéticos ressonantes em Tokamaks, com o objetivo de favorecer o aparecimento de ilhas magnéticas. Quando tais ilhas são criadas na periferia da câmara toroidal, as condições são propícias para o emprego deste tipo de dispositivo como Limitador Magnético Ergódico. Entretanto, a obtenção de uma região periférica predominantemente estocástica de linhas de campo magnético só é possível com a introdução de uma correção toroidal no campo de equilíbrio.

Este fato, claramente observado nas simulações numéricas do terceiro capítulo, pode ser explicado pelo fato de que a correção toroidal no campo  $B_{\varphi}^{(0)}$  provoca o aparecimento de ilhas magnéticas satélites às ilhas principais geradas pelo campo perturbativo dos anéis de corrente. A interação entre tais ilhas, via mecanismos de "overlapping", por exemplo (Lichtenberg e Lieberman, 1983), está associada à formação de estocasticidade em larga escala.

Entretanto, a ferramenta teórica empregada nesta tese, o método de Matsuda e Yoshikawa, ainda não é suficientemente poderosa para levar este tipo de efeito (correção toroidal). Pretendemos na seqüência imediata desta dissertação, estudar o método empregado na mesma para a descrição destes e outros efeitos. Desta forma, acreditamos ser possível fornecer uma

descrição teórica bastante satisfatória nas situações mais realistas do projeto e construção do Limitador Magnético Ergódico na nova máquina toroidal do IFUSP, atualmente em fase de montagem.

Isto porque, grande parte dos estudos sobre formação e destruição de ilhas magnéticas em Tokamaks são feitas a partir do uso da Teoria Canônica de Perturbações (Hamiltoniana), cujo emprego é limitado pelas dificuldades matemáticas encontradas (Viana, 1993). O método usado nesta dissertação, pelo contrário, é simples de adaptar em circunstâncias diversas, desde que conheçamos em detalhe a expansão em séries de Fourier dos campo perturbativos.

Em particular, na ausência de correção toroidal, o acordo entre as previsões teóricas do método (para as larguras das ilhas) e os resultados estimados diretamente sobre os mapeamentos obtidos numericamente é bastante bom, levando em conta as diversas simplificações existentes em nosso modelo. Outro ponto a ser ressaltado é o uso de mais anéis ( $p = 4$  por exemplo), é recomendado por aumentar a eficiência dos mesmos em relação ao caso de um único anel (como no modelo de Martin e Taylor).

Podemos chamar a atenção, também, sobre as possibilidades do uso deste tipo de configuração na geração de ilhas magnéticas no interior da coluna de plasma, e não só na periferia. Além da liberdade de escolher o valor de  $m = \frac{L}{2}$  pares de fios, que determina a localização das superfícies ressonantes que cedem lugar às ilhas; é possível observar mesmo no caso de  $m = 7$  (ilha  $(7/1)$  bastante periférica) o aparecimento de outras ilhas, como a  $(7/2)$  que pode ser observadas em algumas figuras do capítulo 3. Isto nos fez especular sobre o possível uso de anéis de corrente no lugar de hélices enroladas no vaso toroidal, que apresentam problemas técnicos associados à exiguidade de espaço útil ao longo do vaso toroidal do Tokamak. Este estudo sistemático está sendo planejado como uma das extensões futuras a serem feitas a partir deste trabalho.

## Apêndice A

### Cálculo do campo magnético gerado por um anel de corrente em geometria cilíndrica.

Introduzimos este apêndice em nosso trabalho para deixar claro de onde a eq.(2.60) foi obtida. Reproduzimos aqui somente os passos essenciais do cálculo para a obtenção do campo magnético gerado por um anel de corrente de extensão infinita em geometria cilíndrica que não é encontrado na literatura. Primeiramente, vamos considerar a ausência de correntes internas ( $\nabla \times \vec{B} = 0$ ) no problema. Como  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , o campo magnético pode ser obtido a partir de um potencial escalar magnético  $\Phi_i$ , sendo:

$$\vec{B} = \nabla \Phi_i \longrightarrow \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (A - 1)$$

O laplaciano deste potencial em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  é dado por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (A - 2)$$

Nosso problema consiste na superposição de campos gerados por grades de fios retos e muitos longos na direção  $z$  (que gera campos nas direções radiais e azimutais) e um campo magnético uniforme  $B_0 \hat{z}$ . A solução da eq.(A-2) deve ser consistente com este fato:

$$\Phi(r, \theta, z) = B_0 z + \Psi(r, \theta) \quad (A - 3)$$

tal que  $B_z = (\nabla \Phi)_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = B_0$ . Logo, precisamos resolver a equação:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (A - 4)$$

Agora faremos a seguinte separação de variável:

$$\Psi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (A - 5)$$

Se substituirmos a eq.(A-5) na eq.(A-4), obtemos:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \quad (A - 6)$$

e

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda \quad (A-7)$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação. A solução da eq.(A-7) será:

$$\Theta(\theta) = \alpha \exp(\sqrt{\lambda}\theta) + \beta \exp(-\sqrt{\lambda}\theta) \quad (A-8)$$

As soluções em  $\theta$  devem ser periódicas, i.é.

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$$

e para garantir a univocidade da solução, temos que impor:

$$\lambda = -N^2 \quad (A-9)$$

donde:

$$\Theta(\theta) = A \sin N\theta + B \cos N\theta \quad (A-10)$$

É suficiente tomar apenas a solução senoidal, ou seja  $B = 0$ . A eq.(A-6), em vista da eq.(A-9) fica:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - N^2 R = 0 \quad (A-11)$$

A solução geral desta equação é da forma (Jackson, 1983):

$$R(r) = ar^N + br^{-N} \quad (A-12)$$

A partir da eq.(A-12) e da eq.(A-10), a solução geral será uma superposição dos diversos harmônicos (em  $N$ ):

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} (ar^N + br^{-N}) A \sin N\theta$$

onde faremos  $aA = A_N$  e  $bA = B_N$ . Assim a eq.(A-3) torna-se:

$$\Phi(r, \theta, z) = B_0 z + \sum_{N=1}^{\infty} (A_N r^N + B_N r^{-N}) \sin N\theta \quad (A-13)$$

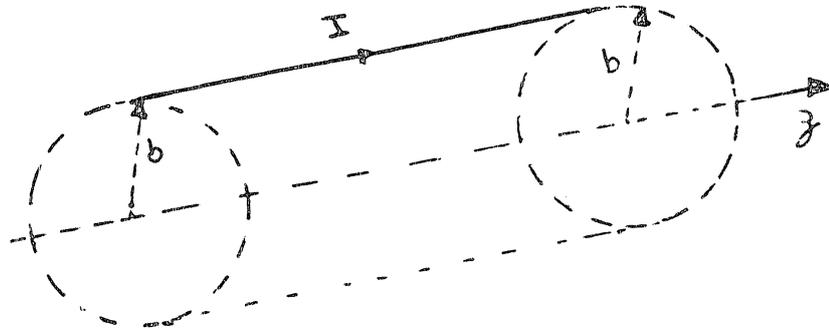
Se adotássemos  $N = 0$ , teríamos soluções do tipo  $\ln r$ , as quais divergem na origem. Na região interna do Tokamak ( $0 < r < b$ ), a solução em  $r^{-N}$  diverge na origem, e deve ser excluída fazendo  $B_N = 0$ . Assim:

$$\Phi^i(r, \theta, z) = B_0 z + \sum_{N=1}^{\infty} A_N r^N \sin N\theta \quad (A - 14)$$

Na região externa do Tokamak ( $r > b$ ) não deve haver campo magnético na direção  $z$  (como num solenoide infinito). Portanto não há o termo uniforme  $B_0 z$ . Além disso, o potencial deve anular-se assintoticamente ( $r \rightarrow \infty$ ), o que exclui os termos do tipo  $r^N$ . Assim  $A_N = 0$ , donde:

$$\Phi^e(r, \theta, z) = \sum_{N=1}^{\infty} B_N r^N \sin N\theta \quad (A - 15)$$

Analisaremos agora o caso de um fio retilíneo (em  $r = b$  e  $\theta = 0$ ). Consideremos a figura (A-1):



**Figura (A-1)** Secção de um Tokamak na aproximação de grande razão de aspecto.

A densidade superficial de corrente é:

$$\vec{i} = i_z \hat{z} \quad (A - 16)$$

Onde  $i_z$  é singular, pois representa o efeito de um fio retilíneo fino, dado por:

$$i_z = \frac{I}{b} \delta(\theta) \quad (A - 17)$$

Desenvolvendo a função delta em série de Fourier de modo a reter os harmônicos em  $N$ ,

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos N\theta \quad (A-18)$$

tal que

$$i_z = \frac{I}{2\pi b} + \frac{I}{\pi b} \sum_{N=1}^{\infty} \cos N\theta$$

ou

$$i_z = i_{z0} + \sum_{N=1}^{\infty} (i_z)_N$$

onde

$$i_{z0} = \frac{I}{2\pi b} \quad (A-19)$$

e

$$(i_z)_N = \frac{I}{\pi b} \cos N\theta \quad (A-20)$$

Na parede do Tokamak ( $r = b$ ) devem ser satisfeitas condições de contorno para os campos, e podemos tomá-los diretamente sobre os harmônicos da corrente eq.(A-19) e eq.(A-20) e dos potenciais internos ou externos:

$$\Phi^i = \Phi_0^i + \sum_{N=1}^{\infty} (\Phi^i)_N \quad (A-21)$$

$$(\Phi^i)_N = A_N r^N \sin N\theta \quad (A-22)$$

$$\Phi^e = \sum_{N=1}^{\infty} (\Phi^e)_N \quad (A-23)$$

$$(\Phi^e)_N = B_N r^{-N} \sin N\theta \quad (A-24)$$

Assim as componentes radiais do campo magnético nas regiões externa e interna são:

$$(B_r^i)_N = N A_N r^{N-1} \sin N\theta \quad (A-25)$$

$$(B_r^e)_N = N B_N r^{-N-1} \sin N\theta \quad (A-26)$$

Usando o mesmo procedimento, podemos expressar o campo poloidal externo e interno, tal que:

$$(B_\theta^i)_N = N A_N r^{N-1} \cos N\theta \quad (A-27)$$

$$(B_{\theta}^e)_N = NB_N r^{-N-1} \cos N\theta \quad (A-28)$$

Para calcularmos os coeficientes  $A_N$  e  $B_N$ , usaremos duas condições de contorno fundamentais sobre os vetores de campo. A primeira condição é que a componente normal do campo magnético seja contínua através da interface. Assim:

$$(\vec{B}^e - \vec{B}^i) \cdot \hat{r} |_{r=b} = 0 \quad (A-29)$$

Em termos dos harmônicos temos:

$$(B_r^e)_N = (B_r^i)_N \quad (A-30)$$

Se substituirmos a eq.(A-25) e eq.(A-26) na eq.(A-30), obtemos que:

$$B_N = -b^{2N} A_N \quad (A-31)$$

A outra condição de contorno sobre o campo  $\vec{H}$  pode ser obtida pela aplicação da lei circuital de Ampère dada pela eq.(1.6). Logo temos que (Jackson, 1983):

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}^e - \vec{H}^i) |_{r=b} = \vec{i} \quad (A-32)$$

onde essa equação mostra a descontinuidade da componente tangencial da intensidade magnética na interface em  $r = b$ , tal que:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Portanto temos que:

$$(B_{\theta}^e)_N = (B_{\theta}^i)_N = \mu_0 (i_z)_N \quad (A-33)$$

Agora se substituirmos a eq.(A-27), eq.(A-28) e eq.(A-20) na eq.(A-33), obtemos o seguinte resultado para o coeficiente  $A_N$ :

$$A_N = -\frac{\mu_0 I}{2\pi N b^N} \quad (A-34)$$

e conseqüentemente:

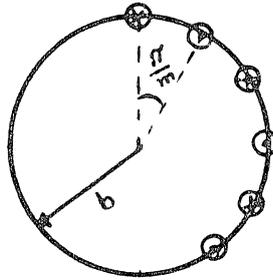
$$B_N = \frac{\mu_0 I b^N}{2\pi N} \quad (A-35)$$

Com os resultados dos  $A_N$  e  $B_N$ , os potenciais interno e externo tornam-se respectivamente:

$$\Phi^i(r, \theta, z) = B_0 z - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{r}{b}\right)^N \sin N\theta \quad (A - 36)$$

$$\Phi^e(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{r}{b}\right)^{-N} \sin N\theta \quad (A - 37)$$

Consideremos agora o caso de  $2m$  fios retilíneos e figura (A - 2):



**Figura (A-2)** Secção reta de um Tokamak na aproximação de grande razão de aspecto.

Conforme a figura (A-2), um fio genérico  $j$  será descrito pelas equações.

$$\begin{aligned} r &= b \\ \theta &= j \frac{\pi}{m} \end{aligned} \quad (A - 38)$$

A contribuição do  $j$ -ésimo fio será no interior do Tokamak e o duplo sinal refere-se aos sentidos alternados da corrente em segmentos opostos da grade de fios. Assim,

$$\Phi_{(j)}^i = B_0 z - \frac{\mu_0(\pm I)}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{r}{b}\right)^N \sin\left[N\left(\theta - \frac{j\pi}{m}\right)\right] \quad (A - 39)$$

tal que a contribuição dos  $2m$  fios será a soma das contribuições individuais ao potencial.

$$\begin{aligned} \Phi^i &= \sum_{j=0}^{2m-1} \Phi_{(j)}^i (-1)^j \\ \Phi^i &= \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j B_0 z - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{r}{b}\right)^N \sin N\left(\theta - \frac{j\pi}{m}\right) \end{aligned} \quad (A - 40)$$

tal que

$$B_0 z \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j = 0$$

logo

$$\Phi^i = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{r}{b}\right)^N \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \sin\left[N\left(\theta - \frac{j\pi}{m}\right)\right] \quad (A-41)$$

A segunda somatória da eq.(A-42) pode ser expressa por (Viana e Caldas, 1991):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j \sin N\left[m\left(\theta - \frac{j\pi}{m}\right)\right] &= \begin{cases} 2m \sin N\theta & \text{se } N = (2p+1)l ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= 2m \sin(N\theta) \delta_{N,(2p+1)m} \end{aligned} \quad (A-42)$$

onde fizemos  $l = m$  e  $Nm = N$  e  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Substituindo a eq.(A-43) na eq.(A-42), obtemos:

$$\Phi^i = -\frac{\mu_0 m I}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^N \sin \frac{N\theta}{N} \delta_{N,(2p+1)m} \quad (A-43)$$

O potencial interno é diferente de zero se  $N = (2p+1)m$  for igual a  $m$ . Tomando o primeiro termo, ou seja usando  $p = 0$ , o potencial interno não é nulo, logo temos que:

$$\Phi^i = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{r}{b}\right)^m \sin m\theta \quad (A-44)$$

Logo as componentes do campo magnético são:

$$B_r^i(r, \theta) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \sin m\theta \quad (A-45)$$

$$B_\theta^i(r, \theta) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \cos m\theta \quad (A-46)$$

## Apêndice B

### Verificação dos outros coeficientes de Fourier.

Neste apêndice demonstraremos que  $A_{m',n'}$ ,  $B_{m',n'}$  e  $D_{m',n'}$  são coeficientes nulos. Usando a eq.(2.38) temos:

$$A_{m',n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\theta d\varphi B_r(r, \theta, \varphi) \cos\left(\frac{2\pi m' \theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n' \varphi}{T_2}\right) \quad (B - 1)$$

Substituindo os períodos fundamentais  $T_1$  e  $T_2$ , os intervalos de integração e o próprio campo magnético  $B_r(r, \theta, \varphi)$  dado pela eq.(2.59), obtemos que:

$$A_{m',n'} = \frac{4}{2\pi \frac{2\pi}{p}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{q}{2k_0}}^{\frac{q}{2k_0}} d\varphi \Lambda(r_0) \sin \frac{L\theta}{2} \cos\left(\frac{2\pi m' \theta}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{2\pi n' \varphi}{\frac{2\pi}{p}}\right) \quad (B - 2)$$

onde fizemos

$$\Lambda(r_0) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{1}{2}-1} \quad (B - 3)$$

tal que

$$A_{m',n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \Lambda(r_0) \int_0^{2\pi} \sin \frac{L\theta}{2} \cos(m' \theta) d\theta \int_{-\frac{q}{2k_0}}^{\frac{q}{2k_0}} \cos(pn' \varphi) d\varphi \quad (B - 4)$$

Usando a eq.(2.45) temos que:

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{L\theta}{2} \cos(m' \theta) d\theta = 0 \quad (B - 5)$$

portanto

$$A_{m',n'} = 0 \quad (B - 6)$$

Tomando a eq.(2.39) e fazendo o mesmo procedimento temos:

$$B_{m',n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \Lambda(r_0) \int_0^{2\pi} \sin \frac{L\theta}{2} \sin(m' \theta) d\theta \int_{-\frac{q}{2k_0}}^{\frac{q}{2k_0}} \sin(pn' \varphi) d\varphi \quad (B - 7)$$

sendo

$$\int_{-\frac{q}{2k_0}}^{\frac{q}{2k_0}} \sin(pn' \varphi) d\varphi = 0 \quad (B - 8)$$

pois essa integral tem intervalo simétrico e a função é ímpar. Logo,

$$B_{m',n'} = 0 \quad (B - 9)$$

Fazendo o mesmo procedimento e usando a eq.(2.40) temos:

$$D_{m',n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \Lambda(r_0) \int_0^{2\pi} \sin \frac{L\theta}{2} \cos(m'\theta) d\theta \int_{-\frac{g}{2k_0}}^{\frac{g}{2k_0}} \sin(pn'\varphi) d\varphi \quad (B - 10)$$

Conforme a eq.(B-5) e a eq.(B-8), temos que:

$$D_{m',n'} = 0 \quad (B - 11)$$

o que comprovam que estes coeficientes de Fourier são nulos.

## Referências

- Abramovitz, M. ; Stegun, I.A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, N.Y.
- Arfken, G. (1985), *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc, N.Y.
- Bateman, G. (1978), *MHD Instabilities* (The Mit Press, Mass.)
- Caldas, I.L. ; Vannucci, A. (1985), *Equilíbrio e Instabilidade do Plasma em Tokamaks*, Publicações Internas do IFUSP p-523
- Camargo, S.J. ; Caldas, I.L. (1990) *Average Magnetic Surface in Tokamak*, Publicações Internas do IFUSP p-825
- Chapra, C.S. ; Canale, P.R. (1988), *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Book Company
- Chen, F.F. (1975), *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, N.Y.
- Silva, E.C. ; Caldas, I.L. (1993), *Ergodic Magnetic Limiter Design for Tokamaks*, Segundo Encontro Brasileiro de Física de Plasmas, 291
- Engelhardt, W. ; Feneberg, W. (1978), *Influence of an Ergodic Magnetic Limiter on the Impurity Content in a Tokamak*, J. Nucl. Mat. **76,77**,518
- Feneberg, W. (1977), *Use of External Helical Windings for the Production of a Screening Layer in Asdex and a Tokamak with Material Limiter*, in Proceedings of 8<sup>th</sup> European Conference of Controlled Fusion and Plasma Physics, vol.1, pg.3
- Feneberg, W. ; Wolf, G.H. (1981), *A Helical Magnetic Limiter for Boundary Layer Control in Large Tokamaks*, Nucl. Fusion **27**,669
- Fernandes, A.S. ; Heller, M.V.A.P. ; Caldas, I.L. (1988), *The Destruction of Magnetic Surfaces by Resonant Helical Fields*, Plas. Phys. Contr. Fus. **30**.1203
- Furth, H.P. (1975), *Tokamak Research*, Nucl. Fus. **15**,487
- Karger, F. et al. (1975), Proc. 5th. Int. Conf. Plasma Physics and Nucl. Fusion research, Tokio (1,p.207)

- Karger, F. ; Lackner, K. (1977), *Phys. Lett. A* **61**,385
- Kucinski, M.Y. ; Caldas, I.L. ; Monteiro, L.H.A. ; Okano, V. (1990), *Toroidal Plasma Equilibrium with Arbitrary Current Distribution*, *J. Plasma Physics*, **44**,303
- Jackson, J.D. (1983), *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro
- Lichtenberg, A.J. ; Lieberman, M.A. (1983), *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, N.Y.
- Martin, T.J. ; Taylor, J.B. (1984), *Ergodic Behaviour in a Magnetic Limiter*, *Plas. Phys. Control. Fus.* **26**,321
- McCool, S.C. et al. (1989), *Electron Thermal Confinement Studies with Applied Resonant Fields on Text*, *Nucl. Fus.* **29**,547
- Matsuda, S. ; Yoshikawa, M. (1975), *Magnetic Island Formation Due to Error Field in the JFT-2 Tokamak*, *Japn. J. Appl. Phys.* **14**,87
- Nascimento, I.C. ; Caldas, I.L. ; Galvão, R.M.O. (1993), *Tokamak Research at University of São Paulo*, *J. Fusion Energy*, vol.12, **529**
- Takamura, S. ; Ohnishi, N ; Yamada, H. ; Okuda, T. (1987), *Electric and Magnetic Structure of an Edge Plasma in a Tokamak with a Helical Magnetic Limiter*, *Phys. Fluids* **30**,144
- Takamura, S. ; Tamakoshi, T. ; Miyake, M. ; Yamada, H. ; Okuda, T. (1988), *Field Line Structure at the Plasma Edge on ergodic Magnetic Limiter*, *Contr. Plas. Phys.* **28**,393
- Viana, R.L; Caldas, I.L. (1992), *Peripheral Stochasticity in Tokamaks- The Martin Taylor Model Revisited*, *Zeitschrift für Naturforschung* **47**,941
- Viana, R.L. ; Caldas, I.L. (1991), *Comments on the Magnetic Field Generated by an Infinite Current Grid*; *Eur. J. Phys.* **12**,293
- Viana, R.L. (1991) *Problemas Não-Lineares com Perturbação Impulsiva e Aplicações em Física de Plasmas*, Tese de Doutorado, não publicada IFUSP

- Viana, R.L. (1993) *Magnetic Field Line Hamiltonian for some Perturbed MHD e Equilibria in Cylindrical Geometry*, Rev. Mex. Fís. **39**,902
- Wesson, J. (1987), *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford
- Yu, X.Y. ; De Grassie, J.S. (1986), *Mapping Techniques for the GA Ergodic Magnetic Limiter on Text*, Texas Fusion Research Center Report, 292