

CARLOS HENRIQUE PATSKO

**TEORIA CINÉTICA DE GASES RELATIVÍSTICOS
IONIZADOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Física,
Departamento de Física, Setor de Ciências
Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Kremer

CURITIBA
2001

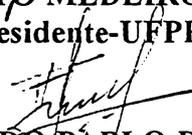
**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

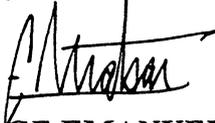
PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Dissertação de Mestrado do estudante CARLOS HENRIQUE PATSKO, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é “TEORIA CINÉTICA DE GASES RELATIVÍSTICOS IONIZADOS”.

Curitiba, 9 de novembro de 2001


Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(Orientador/Presidente-UFPR)


Prof. FERNANDO/PABLO DEVECCHI
(UFPR)


Prof. GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS
(IFT-UNESP)

Gostaria de registrar aqui minha gratidão às seguintes pessoas:

- Ao professor Dr. Gilberto Kremer, pela orientação;
- Ao professor Dr. Alcione Fernandes;
- Ao amigo Fabiano Andrade, pela inestimável ajuda no uso do latex;
- Aos colegas da pós-graduação.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Critério para uma análise relativística	2
1.2	Breve histórico da teoria	3
1.3	Objetivos desta dissertação	4
1.4	Notação e definições	5
2	Fundamentos de teoria cinética relativística	7
2.1	Gases simples não-degenerados	7
2.2	Gases degenerados	12
2.3	A equação de transporte	14
2.4	Descrição macroscópica	16
2.4.1	A descrição de Eckart	18
2.4.2	A descrição de Landau	20
3	A função de distribuição	23
3.1	Gás em equilíbrio	23
3.2	Gás próximo ao equilíbrio	31
4	Gases ionizados	34
4.1	O modelo de Anderson e Witting	34
4.2	Determinação da função de distribuição	37
4.3	Equações de balanço	41

4.3.1	Equação de balanço do quadrifluxo parcial de partículas	41
4.3.2	Equação de balanço do tensor energia-momento parcial	42
4.3.3	Equação de balanço do terceiro momento parcial	42
4.4	Projeções sobre as equações de balanço	46
4.5	Coeficientes de transporte	55
4.5.1	Elétrons ultra-relativísticos	55
4.5.2	Elétrons não-relativísticos	66
5	Considerações finais	75
A	Elementos de mecânica relativística	79
A.1	Algumas definições	79
A.2	Invariantes de Lorentz na teoria cinética	80
B	Dinâmica da colisão binária	83
C	Tensor campo eletromagnético	85
C.1	Introdução	85
C.2	Decomposição em termos da quadri velocidade hidrodinâmica	86
D	Funções especiais	87
D.1	Expansões da função $K_n(\zeta)$	87
D.2	Relações entre as integrais J_{nm} , J_{nm}^\bullet , I_n	88
E	Cálculos relativos à determinação do terceiro momento parcial dos elétrons	89
F	Teorema de Cayley-Hamilton	93

Lista de Figuras

A.1	O referencial inercial (x', y', z') se afasta do referencial inercial (x, y, z) com velocidade \vec{v}	81
-----	--	----

RESUMO

A extensão dos métodos da teoria cinética clássica ao domínio relativístico e às estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein permite o estudo dos fenômenos de transporte em alguns sistemas de grande importância do ponto de vista de suas aplicações. Em astrofísica, por exemplo, freqüentemente se encontram gases relativísticos, degenerados e ionizados. Neste trabalho, estudou-se a condutividade elétrica de misturas de elétrons e íons que constituem o chamado plasma Lorentziano, bem como de misturas de elétrons e fótons. Ambas as misturas estão sujeitas à ação de campos eletromagnéticos suficientemente fracos para que a freqüência de cíclotron dos elétrons seja muito menor do que a freqüência de colisões entre os elétrons e o outro constituinte da mistura. Supõe-se que os fenômenos não se afastam significativamente do equilíbrio, de modo que se utiliza uma teoria linear. Para evitar a complexidade do termo de colisões da equação de Boltzmann relativística e desta forma tornar possível o cálculo dos coeficientes de transporte, utilizou-se a equação modelo de Anderson e Witting. Tal modelo é uma extensão ao domínio relativístico do modelo BGK. São apresentadas expansões dos coeficientes de condutividade para vários limites assintóticos importantes, ou seja, para elétrons ultra-relativísticos ou não-relativísticos e completamente degenerados ou não-degenerados.

ABSTRACT

The methods of classical kinetic theory can be extended to the relativistic domain and to the Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics, allowing the study of transport phenomena in some systems of great importance with respect to its applications. In this work, the electrical and thermal conductivities of mixtures of electrons and ions - the Lorentzian plasma - and of electrons and photons were studied. Both mixtures are supposed to be under the action of electromagnetic fields so weak that the electron cyclotron frequency is much less than the frequency of the collisions between electrons and ions (or photons). The phenomena concerned in this work are supposed as sufficiently close to equilibrium that a linear thermodynamic theory can be applied. The Anderson-Witting relaxation model was used to avoid the complexity of Boltzmann equation's collision term. Under the above mentioned restrictions, the transport coefficients were calculated. Expansions for important asymptotic limits were obtained through computer programs, by considering that the electrons can be modelled as a non-relativistic (or ultra-relativistic) gas and as a non-degenerate (or completely degenerate) gas.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Critério para uma análise relativística

Ao longo deste trabalho, freqüentemente se encontrará o parâmetro ζ . Este parâmetro, definido em termos da temperatura T , da constante de Boltzmann k e da massa de repouso da partícula m , é dado por

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT}. \quad (1.1)$$

Em termos de ζ é que se pode decidir sobre a necessidade de se descrever o gás em termos da teoria cinética relativística. Se T é suficientemente grande, ou m é suficientemente pequeno, $\zeta \rightarrow 0$ e se diz que se trata de um regime ultra-relativístico. Quanto T é suficientemente pequeno, ou m é suficientemente grande, $\zeta \rightarrow \infty$ e o regime é não-relativístico. Valores intermediários para ζ implicam um regime relativístico.

Como ζ depende de m e T , é importante observar que no caso de uma mistura, mesmo que se considere a temperatura de cada componente como sendo a temperatura da mistura, a diferença de massas entre as partículas de cada constituinte pode implicar que diferentes componentes estejam em diferentes regimes.

1.2 Breve histórico da teoria

Poucos anos depois da publicação, em 1905, do famoso artigo de Einstein sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, Jüttner deu os primeiros passos para generalizar a teoria cinética dos gases ao domínio relativístico. Deduzindo em 1911 a forma relativística da função de distribuição de Maxwell em equilíbrio [1, 2] e em 1928 a função de distribuição relativística, em equilíbrio, para sistemas de bósons e férmions [3], ele inicia o desenvolvimento da teoria cinética de gases relativísticos.

O próximo passo no desenvolvimento da teoria foi o estabelecimento da equação de Boltzmann relativística, por volta de 1940. Destaca-se aí o trabalho de Lichnerowicz e Marrot [4], o primeiro a incluir o efeito das colisões.

O cálculo dos coeficientes de transporte para sistemas relativísticos se tornou possível com a adaptação dos métodos clássicos de Chapman-Enskog e Grad, feita na década de 60 por Israel [5], Kelly [6], Chernikov [7], Vignon [8], Marle [9] e pelo grupo liderado por de Groot [11]. Esses cálculos podem se tornar impraticáveis, em virtude da dificuldade de se manipular o termo de colisões da equação de Boltzmann. Isto motivou o desenvolvimento seguinte na teoria cinética relativística, que veio no fim da década de 60, quando modelos do tipo BGK [12] foram propostos para gases relativísticos por Marle [13] e Anderson e Witting [14, 15].

A teoria cinética relativística não se limita à estatística de Maxwell-Boltzmann ou ao caso de gases constituídos de partículas neutras. De fato, muitas de suas aplicações mais importantes se encontram na astrofísica, como o estudo dos fenômenos de transporte em anãs brancas. Como apresentado no clássico trabalho de Chandrasekhar [10], a degenerescência é fundamental para a compreensão de anãs brancas, que por sua vez são constituídas por uma mistura de elétrons e íons, ou seja, trata-se de um gás ionizado.

O estudo de coeficientes de transporte para gases ionizados, relativísticos e degenerados vem sendo realizado praticamente desde o final da década de 60 e, por seu interesse tanto do ponto de vista da teoria cinética quanto por suas potenciais aplicações, prossegue até hoje.

1.3 Objetivos desta dissertação

O cálculo dos coeficientes de transporte para sistemas compostos por gases relativísticos tem despertado interesse nas últimas décadas em especial por suas possíveis aplicações a áreas como a astrofísica. Em particular, pode-se destacar a série de publicações de Erkelens e Leeuwen (de [23] a [24]), que desenvolvem a teoria cinética para um plasma relativístico, chegando a calcular os coeficientes de transporte para várias misturas de partículas tais como elétrons, pósitrons, fótons e prótons. Esses coeficientes, contudo, envolvem integrais muito difíceis de se estimar numericamente, e que se tornam ainda mais complexas quando se consideram gases quânticos. A substituição do termo de colisões da equação de Boltzmann por um modelo como o de Marle [13] ou o de Anderson e Witting [14, 15] permite contornar este problema, facilitando os cálculos.

A condutividade elétrica de uma mistura de elétrons e prótons foi calculada por Kremer [16, 17]. Os cálculos foram feitos com a aproximação que o fluxo de calor na mistura se devia somente aos fluxos de difusão parcial de cada constituinte e utilizando-se o modelo cinético de Marle, que é a primeira extensão relativística do modelo cinético BGK.

Esta dissertação se baseia em metodologia semelhante para estudar a condutividade elétrica em plasmas de Lorentz e em misturas de elétrons e fótons, mas inclui a contribuição do fluxo de calor parcial devido aos elétrons e leva em conta também a possibilidade de degenerescência. Além disso, adota o modelo cinético de Anderson e Witting, adequado para a análise de regimes ultra-relativísticos.

A presença do fluxo de calor devido aos elétrons implica maior complexidade nos cálculos para a obtenção da lei de Ohm para as misturas aqui estudadas. Por isso, optou-se por analisar misturas em que os elétrons se encontram em certos casos-limite, ou seja, regimes ultra-relativísticos ou não relativísticos e completamente degenerados ou não-degenerados.

1.4 Notação e definições

Um quadrivetor é um vetor que se transforma de acordo com ¹

$$A'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} A^{\beta}, \quad (1.2)$$

sendo

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v^1}{c} & -\gamma \frac{v^2}{c} & -\gamma \frac{v^3}{c} \\ -\gamma \frac{v^1}{c} & \frac{\gamma v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3}{|\vec{v}|^2} & \frac{(\gamma-1)v^1 v^2}{|\vec{v}|^2} & \frac{(\gamma-1)v^1 v^3}{|\vec{v}|^2} \\ -\gamma \frac{v^2}{c} & \frac{(\gamma-1)v^2 v^1}{|\vec{v}|^2} & \frac{v^1 v^1 + \gamma v^2 v^2 + v^3 v^3}{|\vec{v}|^2} & \frac{(\gamma-1)v^2 v^3}{|\vec{v}|^2} \\ -\gamma \frac{v^3}{c} & \frac{(\gamma-1)v^3 v^1}{|\vec{v}|^2} & \frac{(\gamma-1)v^3 v^2}{|\vec{v}|^2} & \frac{v^1 v^1 + v^2 v^2 + \gamma v^3 v^3}{|\vec{v}|^2} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde v^1 , v^2 e v^3 são as componentes do vetor velocidade relativa \vec{v} entre dois referenciais inerciais quaisquer e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}}. \quad (1.4)$$

Neste trabalho dois tipos de componentes de quadrivetores são consideradas: as componentes contravariantes, denotadas por A^{α} e as componentes covariantes, denotadas por A_{α} . A relação entre ambas se dá através de

$$A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta}, \quad (1.5)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico do espaço quadridimensional de Minkowski,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

A matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$ é a matriz $g^{\alpha\beta}$ tal que

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad (1.7)$$

¹Neste trabalho se utiliza a convenção de soma de Einstein. Índices gregos repetidos implicam soma sobre os índices de 0 a 3, enquanto que índices latinos repetidos implicam soma sobre os índices de 1 a 3.

O tensor δ_α^γ é o delta de Kronecker, cujas componentes são iguais a 1 sempre que $\alpha = \gamma$ e iguais a 0 quando $\alpha \neq \gamma$.

O tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tem componentes iguais a 1 (ou -1) quando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ é permutação par (ou ímpar) de 0,1,2,3, e componentes iguais a 0 quando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ não é permutação de 0,1,2,3.

Por último, vale comentar que em algumas situações é útil expressar o produto $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ como o determinante

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\nu^\alpha & \delta_\kappa^\alpha & \delta_\lambda^\alpha \\ \delta_\mu^\beta & \delta_\nu^\beta & \delta_\kappa^\beta & \delta_\lambda^\beta \\ \delta_\mu^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\kappa^\gamma & \delta_\lambda^\gamma \\ \delta_\mu^\delta & \delta_\nu^\delta & \delta_\kappa^\delta & \delta_\lambda^\delta \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Fundamentos de teoria cinética relativística

O objetivo deste capítulo é apresentar a equação de Boltzmann relativística para uma mistura de gases degenerados, ao mesmo tempo em que se introduzem conceitos importantes da teoria cinética relativística.

2.1 Gases simples não-degenerados

É conveniente iniciar esta breve exposição dos princípios da teoria cinética relativística analisando um gás simples (no sentido de que não se trata de uma mistura) e não-degenerado, e só depois avançar para o caso de maior interesse para este trabalho, ou seja, misturas de gases ionizados, relativísticos e degenerados.

Cada uma das partículas do gás pode ser caracterizada por suas coordenadas espaço-temporais $x^\alpha = (ct, \vec{x})$ e pelo quadrivetor quantidade de movimento $p^\alpha = (p^0, \vec{p})$. Num nível macroscópico, entretanto, o estudo de um gás relativístico requer grandezas como o quadrifluxo de partículas, o tensor energia-momento e outros momentos da função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$. Esta é definida de modo tal que

$$N(t) = \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3x d^3p = \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) dx^1 dx^2 dx^3 dp^1 dp^2 dp^3 \quad (2.1)$$

é o número de partículas que no instante de tempo t têm quantidade de movimento

entre \vec{p} e $\vec{p} + d\vec{p}$ e ocupam a posição entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$. O espaço hexa-dimensional caracterizado pelas três coordenadas de posição x^1, x^2, x^3 e pelas três coordenadas de quantidade de movimento p^1, p^2, p^3 no instante t será chamado, neste trabalho, de espaço $\mu(t)$.

O número de partículas contidas no elemento de volume $d\mu(t) = d^3x d^3p$ é o mesmo em qualquer sistema de referência, portanto se trata de um invariante de Lorentz. Para saber se a função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ também o é, resta a tarefa de mostrar que $d\mu(t)$ é um invariante de Lorentz; isso é feito no apêndice A. Como o produto $f(\vec{x}, \vec{p}, t)d\mu(t)$ é um invariante de Lorentz, assim como $d\mu(t)$, conclui-se que $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ é um invariante de Lorentz.

É interessante analisar como evolui o número de partículas contidas no elemento de volume $d\mu(t)$ à medida em que o tempo evolui. Seja, como em (2.1),

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{p}, t)d^3x d^3p. \quad (2.2)$$

Como $d\mu(t) = d^3x d^3p$,

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{p}, t)d\mu(t). \quad (2.3)$$

Num tempo $t + \Delta t$,

$$N(t + \Delta t) = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t)d\mu(t + \Delta t). \quad (2.4)$$

Devido às colisões entre as partículas, em geral $N(t + \Delta t)$ é diferente de $N(t)$. É conveniente definir ΔN como

$$\Delta N = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t)d\mu(t + \Delta t) - f(\vec{x}, \vec{p}, t)d\mu(t). \quad (2.5)$$

Considera-se aqui o caso em que cada uma das partículas que compõem o gás está sujeita a uma força externa $\vec{\mathcal{F}}$. Assim, pode-se escrever $\Delta\vec{p} = \vec{\mathcal{F}}\Delta t$. Além disso, é evidente que $\Delta\vec{x} = \vec{v}\Delta t$.

Cada uma das coordenadas do espaço μ no tempo $t + \Delta t$ se relaciona às coordenadas do espaço μ no tempo t de tal forma que se pode expressar $d\mu(t)$ em termos de $d\mu(t + \Delta t)$ através de $d\mu(t + \Delta t) = |J|d\mu(t)$, onde J é o Jacobiano da transformação,

definido por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1(t+\Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial x^1(t+\Delta t)}{\partial x^2(t)} & \cdots & \frac{\partial x^1(t+\Delta t)}{\partial p^3(t)} \\ \frac{\partial x^2(t+\Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial x^2(t+\Delta t)}{\partial x^2(t)} & \cdots & \frac{\partial x^2(t+\Delta t)}{\partial p^3(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p^3(t+\Delta t)}{\partial x^1(t)} & \frac{\partial p^3(t+\Delta t)}{\partial x^2(t)} & \cdots & \frac{\partial p^3(t+\Delta t)}{\partial p^3(t)} \end{vmatrix}.$$

Desprezando termos de ordens iguais ou superiores à quadrática em Δt , J pode ser expresso como

$$J = 1 + \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \Delta t. \quad (2.6)$$

Analisando a (2.5) se observa que resta ainda a tarefa de expressar a função de distribuição no instante $t + \Delta t$ em termos da função de distribuição no instante t ; pode-se fazer isso expandindo $f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t)$ em série de Taylor em torno do ponto (\vec{x}, \vec{p}, t) . Esta expansão pode ser aproximada como

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) \approx f(\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Delta p^i. \quad (2.7)$$

As equações (2.5) a (2.7) e as definições de $\Delta\vec{x}$ e $\Delta\vec{p}$ respectivamente em termos de \vec{v} e $\vec{\mathcal{F}}$ permitem que se obtenha a taxa temporal de variação de N ,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right] d\mu(t). \quad (2.8)$$

Trabalhando no domínio relativístico, sempre é importante identificar quais são as grandezas invariantes de Lorentz. Na equação (2.8), ΔN é um invariante escalar. Se Δt é medido em um referencial em repouso em relação ao gás, $\Delta t = \Delta\tau$ e a razão $\Delta N/\Delta t$ é um invariante escalar. No caso mais geral, a transformação entre Δt e $\Delta\tau$ é dada em termos de γ por

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau, \quad (2.9)$$

de modo que

$$\frac{\Delta N}{\Delta\tau} = \gamma \frac{\Delta N}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.8) por γ a equação se torna uma igualdade entre invariantes escalares

$$\gamma \frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right]$$

$$= \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] + \gamma \left[\frac{\partial f \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right]. \quad (2.11)$$

Para desenvolver o primeiro termo do lado direito da equação (2.11), pode-se utilizar a expressão (A.4) para obter a relação

$$v^i = \frac{cp^i}{p^0}, \quad (2.12)$$

de modo que

$$\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{cp^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \frac{c\gamma}{p^0} p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{1}{m} p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (2.13)$$

No lado direito da equação (2.11) pode-se ainda analisar o termo $\gamma \partial f \mathcal{F}^i / \partial p^i$. Aqui não se trabalha mais simplesmente com a força \mathcal{F}^i , mas com o quadrivetor força de Minkowski $(\mathcal{K}^\alpha) = (\mathcal{K}^0, \vec{\mathcal{K}})$, cuja definição se encontra no apêndice A. Uma análise das expressões (A.1) a (A.5) torna razoável a definição de $\vec{\mathcal{F}}$ em termos de $\vec{\mathcal{K}}$ como

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{mc\vec{\mathcal{K}}}{p^0}. \quad (2.14)$$

Escrevendo cuidadosamente a derivada $\partial / \partial p^i$ em termos de $\partial / \partial p^0$ e $\partial / \partial \vec{p}$ através da regra da cadeia e considerando que, sendo a força de Minkowski ortogonal ao quadrimomento,

$$K^\alpha p_\alpha = K^0 p_0 - \vec{\mathcal{K}} \cdot \vec{p} = 0, \quad (2.15)$$

o termo $\gamma \partial f \mathcal{F}^i / \partial p^i$ pode ser desenvolvido de modo a se verificar que

$$\gamma \frac{\partial f \mathcal{F}^i}{\partial p^i} = \frac{\partial f \mathcal{K}^\alpha}{\partial p^\alpha}. \quad (2.16)$$

Portanto se a força externa for associada a uma força de Minkowski a equação (2.8) pode ser reescrita de forma que ambos os lados são invariantes de Lorentz:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c}{p^0} \left[p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\alpha}{\partial p^\alpha} \right] d\mu(t). \quad (2.17)$$

A determinação da taxa de variação ΔN é feita sob as seguintes hipóteses:

- Somente interações entre pares de partículas são levadas em consideração. Esta aproximação é satisfatória para gases suficientemente diluídos;

- A função de distribuição pode ser considerada constante ao longo de distâncias menores que o livre caminho médio, bem como ao longo de um intervalo de tempo menor do que o tempo transcorrido entre duas colisões;
- O efeito das forças externas não é suficiente para que entre uma colisão e outra a trajetória de cada uma das partículas do gás se curve significativamente;
- Postula-se a ausência de correlações entre as partículas antes e depois de cada colisão.

É conveniente distinguir duas contribuições para a taxa de variação de N ; a primeira corresponde às partículas que entram no elemento de volume, enquanto que a segunda contribuição se relaciona às partículas que saem do elemento de volume. Escrevendo ΔN em termos da diferença entre as taxas de entrada e saída das partículas no elemento de volume,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^+ - \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)^-. \quad (2.18)$$

No apêndice B se discute a dinâmica de uma colisão binária e se encontram as seguintes expressões para $(\Delta N)^+$ e $(\Delta N)^-$ em termos do ângulo sólido Ω , da seção transversal diferencial de choque σ e do módulo da velocidade relativa de Møller g ¹:

$$(\Delta N)^+ = \int_{\Omega'} \int_{\vec{p}_*'} f(\vec{x}, \vec{p}', t) f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) g' \sigma' d\Omega' d^3 p_*' d^3 x' d^3 p' \Delta t', \quad (2.19)$$

$$(\Delta N)^- = \int_{\Omega} \int_{\vec{p}_*} f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) g \sigma d\Omega d^3 p_* d^3 x d^3 p \Delta t. \quad (2.20)$$

Na teoria cinética não-relativística, o módulo das velocidades relativas assintóticas pré e pós-colisionais é sempre igual, ou seja, $g = g'$. No caso relativístico, contudo, g em geral não é igual a g' .

Pelo Teorema de Liouville pode-se afirmar que o elemento de volume do sistema no espaço de fase não se altera, ou seja, é válida a equação

$$g \sigma d\Omega d^3 p_* d^3 x d^3 p \Delta t = g' \sigma' d\Omega' d^3 p_*' d^3 x' d^3 p' \Delta t'. \quad (2.21)$$

¹O asterisco (*) serve para estabelecer uma diferenciação entre as partículas que colidem, enquanto que as linhas (') servem para denotar grandezas pós-colisionais.

No apêndice A mostra-se que $d^3x\Delta t = d^3x'\Delta t'$, de modo que a equação anterior resulta em

$$\int_{\Omega} g\sigma d\Omega d^3p_* d^3p = \int_{\Omega'} g'\sigma' d\Omega' d^3p'_* d^3p'. \quad (2.22)$$

As equações (2.17) a (2.22) podem ser combinadas de tal modo que se obtém

$$\frac{c}{p^0} \left[p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\alpha}{\partial p^\alpha} \right] d^3x d^3p = \int (f'_* f' - f_* f) g\sigma d\Omega d^3p_* d^3x d^3p, \quad (2.23)$$

onde $f'_* = f(\vec{x}, \vec{p}'_*, t)$, $f' = f(\vec{x}, \vec{p}', t)$, $f_* = f(\vec{x}, \vec{p}_*, t)$ e $f = f(\vec{x}, \vec{p}, t)$. Identificando o fluxo invariante de Lorentz F como

$$F = \frac{p^0 p_*^0}{c} g = \frac{p^0 p_*^0}{c} \sqrt{(\vec{v} - \vec{v}_*)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{v}_*)^2}, \quad (2.24)$$

chega-se à equação de Boltzmann relativística, proposta pela primeira vez por Licherowitz e Marrot [4]

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\alpha}{\partial p^\alpha} = \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \frac{d^3p_*}{p_*^0}. \quad (2.25)$$

2.2 Gases degenerados

O lado direito da equação de Boltzmann relativística (2.25) é chamado de termo de colisão. O termo de colisão se altera quando se considera o caso mais geral em que o gás é simples e degenerado, e a equação assim obtida é a chamada equação de Uehling-Uhlenbeck [18].

Para obter a equação de Uehling-Uhlenbeck relativística a partir da equação de Boltzmann, deve-se levar em conta que o número de estados disponíveis a uma partícula com degenerescência de spin g_s num elemento de volume $d^3x d^3p$ é proporcional ao produto entre o elemento de volume e o fator de degenerescência e inversamente proporcional a h^3 , sendo h a constante de Planck² $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s.

²Uma hipótese fundamental da mecânica estatística estabelece que em princípio a probabilidade de uma partícula ocupar um determinado estado quântico é a própria probabilidade que a mesma partícula tem de ocupar um volume h^3 do espaço μ .

Supõe-se assim que o número de estados disponíveis é $g_s d^3x d^3p/h^3$, onde

$$\begin{cases} g_s = 2s + 1 & \text{para partículas de massa de repouso não-nula,} \\ g_s = 2s & \text{para partículas de massa de repouso nula.} \end{cases}$$

Para elétrons, por exemplo, $s = \frac{1}{2}$ e $g_s = 2$.

No caso em que cada um dos estados possíveis num certo elemento de volume está ocupado,

$$f d^3x d^3p = g_s \frac{d^3x d^3p}{h^3}, \quad (2.26)$$

portanto neste caso

$$f = f(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{g_s}{h^3}. \quad (2.27)$$

No caso de **férmions** só podem ocorrer colisões que resultem na entrada de partículas que venham a ocupar estados disponíveis, i.e., não ocupados. O número de estados disponíveis num certo elemento de volume é

$$\left(1 - \frac{f h^3}{g_s}\right) d^3x d^3p. \quad (2.28)$$

No caso de **bósons** ocorrem preferencialmente colisões que levem à entrada de partículas que venham a ocupar estados que já estão preenchidos, ou seja, a presença de uma partícula com coordenadas entre \vec{x}, \vec{p} e $\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{p} + \Delta\vec{p}$ aumenta a probabilidade de entrada de partículas nesse exato elemento de volume do espaço μ . Quanto mais partículas no elemento, maior a probabilidade de entrada de novas partículas nesse mesmo elemento. Analogamente à equação anterior, para bósons é válido afirmar que cada uma das funções de distribuição pós-colisionais que aparecem no termo de colisão da equação de Boltzmann é multiplicada por

$$\left(1 + \frac{f h^3}{g_s}\right), \quad (2.29)$$

enquanto que as funções de distribuição pré-colisionais são multiplicadas por

$$\left(1 + \frac{f' h^3}{g_s}\right). \quad (2.30)$$

Tais considerações resultam na seguinte generalização da equação de Boltzmann para um gás simples, degenerado, relativístico e sujeito à ação de forças externas:

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f \mathcal{K}^\alpha}{\partial p^\alpha} = \int \left[f'_* \left(1 + \epsilon \frac{f_* h^3}{g_s}\right) f' \left(1 + \epsilon \frac{f h^3}{g_s}\right) \right]$$

$$-f_* \left(1 + \epsilon \frac{f'_* h^3}{g_s} \right) f \left(1 + \epsilon \frac{f' h^3}{g_s} \right) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0}, \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{cases} \epsilon = +1 & \text{para bósons,} \\ \epsilon = 0 & \text{para o caso clássico,} \\ \epsilon = -1 & \text{para férmions.} \end{cases}$$

Esta equação é fundamental para qualquer estudo de coeficientes de transporte para gases quânticos relativísticos.

No caso de uma mistura de ν gases constituintes, a generalização da equação (2.31) pode ser feita de forma simples, devido à sua estrutura. Em uma mistura, o conjunto de partículas idênticas que forma cada componente a , com $(a = 1, \dots, \nu)$, comporta-se como se fosse um gás único exceto quando colide com partículas de um outro componente da mistura. O lado esquerdo da equação não depende das colisões, portanto permanece inalterado para cada componente da mistura. O lado direito, que é o termo de colisão, é a soma de cada um dos possíveis pares de colisões. Assim, para uma mistura de gases pode-se escrever as ν equações

$$\begin{aligned} p_a^\alpha \frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} + m_a \frac{\partial f_a \mathcal{K}_a^\alpha}{\partial p_a^\alpha} &= \sum_{b=1}^{\nu} \int \left[f'_{a*} \left(1 + \epsilon \frac{f_{a*} h^3}{g_s} \right) f'_b \left(1 + \epsilon \frac{f_b h^3}{g_s} \right) \right. \\ &\quad \left. - f_{a*} \left(1 + \epsilon \frac{f'_{a*} h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f'_b h^3}{g_s} \right) \right] F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_{b*}}{p_{b*}^0}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

com $a = 1, \dots, \nu$.

2.3 A equação de transporte

Cada uma das partículas do gás tem massa de repouso m e carga elétrica q . Neste trabalho se supõe que a força que atua sobre cada partícula é de natureza eletromagnética (cf. apêndice C) de modo que

$$\mathcal{K}^\alpha = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} \frac{p_\beta}{m}. \quad (2.33)$$

Considerando (2.33), multiplicando a equação (2.31) por uma função arbitrária $\psi(x^\alpha, p^\alpha)$ e integrando em $d^3 p/p^0$, o uso de propriedades de simetria do termo de

colisão permite obter a chamada equação geral de transporte:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int \psi p^\alpha f \frac{d^3 p}{p^0} - \int \left[p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} p_\beta \frac{\partial \psi}{\partial p^\alpha} \right] f \frac{d^3 p}{p^0} \\ &= \frac{1}{4} \int (\psi + \psi_* - \psi' - \psi'_*) \left[f'_* \left(1 + \epsilon \frac{f_* h^3}{g_s} \right) f' \left(1 + \epsilon \frac{f h^3}{g_s} \right) \right. \\ & \quad \left. - f_* \left(1 + \epsilon \frac{f'_* h^3}{g_s} \right) f \left(1 + \epsilon \frac{f' h^3}{g_s} \right) \right] F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

O lado direito da equação (2.34) é conhecido como termo de produção e se anula para qualquer função de distribuição quando ψ é tal que

$$\psi + \psi_* = \psi' + \psi'_*, \quad (2.35)$$

sendo que neste caso se diz que ψ é um **invariante de soma**.

Como demonstrado em [19], um invariante de soma é uma combinação linear de uma constante e do quadrivetor energia-momento p^μ , ou seja,

$$\psi = a^* + b_\mu p^\mu, \quad (2.36)$$

onde a^* é uma constante e b_μ é um quadrivetor que não depende de p_μ .

Pode-se obter a equação geral de transporte para o caso de uma mistura. A equação (2.32) foi obtida considerando-se que uma mistura de ν constituintes pode ser caracterizada pelo conjunto de ν funções de distribuição

$$f(\vec{x}, \vec{p}_a, t) = f_a, \quad a = 1, 2, \dots, \nu. \quad (2.37)$$

Analogamente ao que foi exposto pela equação (2.33), cada uma das partículas do constituinte a tem massa de repouso m_a e carga elétrica q_a , de modo que, estando a mistura sob a ação de campos eletromagnéticos,

$$\mathcal{K}_a^\alpha = \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} \frac{p_{a\beta}}{m_a}. \quad (2.38)$$

Para obter a equação de transporte para o constituinte a da mistura no caso em que as partículas estão sob a ação de campos eletromagnéticos, substitui-se (2.38) na

(2.32) e multiplica-se a equação resultante por uma função arbitrária $\psi_a = \psi(x^\mu, p_a^\mu)$.

Integrando sobre todos os valores de $d^3 p_a / p_a^0$ chega-se a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int \psi_a p_a^\alpha f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} - \int \left[p_a^\alpha \frac{\partial \psi_a}{\partial x^\alpha} + \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} p_{a\beta} \frac{\partial \psi_a}{\partial p_a^\alpha} \right] f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\nu} \int (\psi'_a - \psi_a) f_a \left(1 + \epsilon \frac{f'_a h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f'_b h^3}{g_s} \right) F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_b}{p_b^0} \frac{d^3 p_a}{p_a^0}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Somando a equação anterior sobre cada um dos ν constituintes da mistura e utilizando propriedades de simetria do termo de colisão chega-se à equação geral de transporte para a mistura

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sum_{a=1}^{\nu} \int \psi_a p_a^\alpha f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} - \sum_{a=1}^{\nu} \int \left[p_a^\alpha \frac{\partial \psi_a}{\partial x^\alpha} + \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} p_{a\beta} \frac{\partial \psi_a}{\partial p_a^\alpha} \right] f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\nu} \int (\psi'_a + \psi'_b - \psi_a - \psi_b) f_a \left(1 + \epsilon \frac{f'_a h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f'_b h^3}{g_s} \right) F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_b}{p_b^0} \frac{d^3 p_a}{p_a^0}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Um invariante de soma para o constituinte a é uma combinação linear de uma constante e do quadrivetor energia-momento p_a^μ , ou seja,

$$\psi_a = a_a^* + b_{a\mu} p_a^\mu, \quad (2.41)$$

onde a_a^* é uma constante e $b_{a\mu}$ é um quadrivetor que não depende de $p_{a\mu}$.

2.4 Descrição macroscópica

Do ponto de vista da termodinâmica, um gás relativístico pode ser descrito através dos seus campos básicos, que são momentos da função de distribuição. Para um componente a da mistura, os momentos de primeira ordem (quadrifluxo parcial de partículas), segunda ordem (tensor energia-momento parcial) e terceira ordem são respectivamente definidos através das equações

$$N_a^\mu = c \int p_a^\mu f(\vec{x}, \vec{p}_a, t) \frac{d^3 p_a}{p_a^0}, \quad (2.42)$$

$$T_a^{\mu\nu} = c \int p_a^\mu p_a^\nu f(\vec{x}, \vec{p}_a, t) \frac{d^3 p_a}{p_a^0}, \quad (2.43)$$

$$T_a^{\mu\nu\sigma} = c \int p_a^\mu p_a^\nu p_a^\sigma f(\vec{x}, \vec{p}_a, t) \frac{d^3 p_a}{p_a^0}. \quad (2.44)$$

Os momentos de primeira e segunda ordem para a mistura são definidos em termos das somas, sobre todos os ν componentes da mistura, dos respectivos momentos de cada componente:

$$N^\alpha = \sum_{a=1}^{\nu} N_a^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{\nu} T_a^{\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

Para a descrição macroscópica de fluidos relativísticos se introduz a quadrivelocidade hidrodinâmica $U^\mu(x^\nu)$. A quadrivelocidade hidrodinâmica é definida de modo tal que satisfaça a relação

$$U^\mu U_\mu = c^2. \quad (2.46)$$

Define-se a partir da quadrivelocidade hidrodinâmica o projetor

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu. \quad (2.47)$$

O projetor $\Delta^{\mu\nu}$ é tal que $\Delta^{\mu\nu} U_\nu = 0$ e tem as seguintes propriedades:

$$\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\nu\sigma} = \Delta_\sigma^\mu, \quad \Delta_\nu^\mu \Delta^{\nu\sigma} = \Delta^{\mu\sigma}, \quad \Delta_\mu^\mu = 3. \quad (2.48)$$

Um referencial que se desloca junto com o fluido é conveniente para vários cálculos na teoria cinética relativística. Esse referencial é conhecido como referencial de Lorentz em repouso no fluido, sendo representado pelo índice R .

No referencial de Lorentz em repouso no fluido a quadrivelocidade hidrodinâmica e o projetor são respectivamente expressos por

$$U_R = (c, 0, 0, 0), \quad (2.49)$$

$$\Delta_R^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Com o auxílio do projetor pode-se simetrizar um tensor $t^{\mu\nu}$, obtendo o tensor

$$t^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\mu) t^{\sigma\tau}. \quad (2.51)$$

Define-se o deviante de um tensor como

$$t^{(\mu\nu)} = t^{(\mu\nu)} - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau} t^{(\sigma\tau)}. \quad (2.52)$$

A derivada contravariante ∂^μ é decomposta em relação à quadrivelocidade hidrodinâmica U^μ como

$$\partial^\mu = \frac{1}{c^2} U^\mu D + \nabla^\mu, \quad (2.53)$$

onde $D = U^\mu \partial_\mu$ e $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu$ são respectivamente a derivada temporal convectiva e o operador gradiente.

Fisicamente, a quadrivelocidade hidrodinâmica pode ser interpretada de duas maneiras diferentes, que dão origem às descrições de Eckart e de Landau.

2.4.1 A descrição de Eckart

Segundo Eckart [20] a quadrivelocidade hidrodinâmica está relacionada ao quadri-fluxo de partículas N^μ através de

$$U^\mu = c \frac{N^\mu}{\sqrt{N^\alpha N_\alpha}}, \quad (2.54)$$

ou seja,

$$N^\mu = n U^\mu, \quad (2.55)$$

onde $n = c^{-1} \sqrt{N^\alpha N_\alpha}$ é a densidade do número de partículas. De fato $U^\mu U_\mu = c^2$ e em conseqüência a quadrivelocidade hidrodinâmica tem somente 3 componentes independentes.

Quanto ao quadri-fluxo parcial de partículas, nesta descrição ele é decomposto como

$$N_a^\alpha = n_a U^\alpha + J_a^\alpha, \quad (2.56)$$

onde n_a é a densidade do número de partículas do componente a e J_a^α é o fluxo de difusão parcial definido por

$$J_a^\alpha = \Delta_\beta^\alpha c \int p_a^\beta f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0}. \quad (2.57)$$

Considerando que $N^\alpha = \sum_{a=1}^\nu N_a^\alpha$ e $n = \sum_{a=1}^\nu n_a$, as decomposições (2.55) e (2.56) implicam

$$\sum_{a=1}^\nu J_a^\alpha = 0, \quad (2.58)$$

ou seja, existem somente $\nu - 1$ fluxos de difusão parcial linearmente independentes numa mistura de ν componentes.

Com base em Stueckelberg e Wanders [21] e Hebenstreit [22] escreve-se o tensor energia-momento parcial como

$$\begin{aligned} T_a^{\alpha\beta} = & p_a^{(\alpha\beta)} - (p_a + \varpi_a)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}U^\alpha(q_a^\beta + h_E^a J_a^\beta) \\ & + \frac{1}{c^2}U^\beta(q_a^\alpha + h_E^a J_a^\alpha) + \frac{e_a n_a}{c^2}U^\alpha U^\beta, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde p_a e $p_a^{(\alpha\beta)}$ são respectivamente a pressão parcial e o seu deviante, ϖ_a é a pressão dinâmica parcial, q_a^α é o fluxo de calor parcial, $h_E^a = p_a/n_a + e_a$ é a entalpia parcial em equilíbrio por partícula e e_a a energia parcial por partícula. Somando o tensor energia-momento parcial sobre todos os ν componentes da mistura, resulta o tensor energia-momento da mistura

$$T^{\alpha\beta} = p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha) + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta, \quad (2.60)$$

sendo as quantidades da mistura identificadas como

$$p^{(\alpha\beta)} = (\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau})T^{\sigma\tau} = \sum_{a=1}^\nu p_a^{(\alpha\beta)}, \quad (2.61)$$

$$p + \varpi = -\frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^\nu p_a + \sum_{a=1}^\nu \varpi_a, \quad (2.62)$$

$$ne = \frac{1}{c^2}U_\mu T^{\mu\nu} U_\nu = \sum_{a=1}^\nu n_a e_a, \quad (2.63)$$

$$q^\alpha = \Delta_\nu^\mu U_\sigma T^{\nu\sigma} = \sum_{a=1}^\nu (q_a^\alpha + h_E^a J_a^\alpha). \quad (2.64)$$

A pressão dinâmica ϖ , o fluxo de calor q^μ e o deviante do tensor pressão $p^{(\alpha\beta)}$ obedecem às seguintes equações constitutivas, de acordo com a termodinâmica dos fluidos relativísticos para processos próximos do equilíbrio [25]:

$$\varpi = -\eta \nabla_\mu U^\mu, \quad (2.65)$$

$$q^\mu = \lambda \left(\nabla^\mu T - \frac{T}{c^2} D U^\mu \right), \quad (2.66)$$

$$p^{(\mu\nu)} = 2\mu \nabla^{(\mu} U^{\nu)}. \quad (2.67)$$

Essas são as leis de Navier-Stokes e Fourier. As quantidades à esquerda são fluxos termodinâmicos, que por sua vez são proporcionais às forças termodinâmicas. Os coeficientes que aparecem nas leis de Navier-Stokes e Fourier são chamados de coeficientes de transporte: η é a viscosidade volumétrica, μ é a viscosidade de cisalhamento e λ é a condutividade térmica.

2.4.2 A descrição de Landau

Outra decomposição para o quadrifluxo de partículas e para o tensor energia-momento é devida a Landau e Lifshitz [26]. Em termos da quadrivelocidade hidrodinâmica U_L^μ o quadrifluxo de partículas e o tensor energia-momento são dados por

$$N^\alpha = n_L U_L^\alpha + \mathcal{J}^\alpha, \quad (2.68)$$

$$T^{\alpha\beta} = p_L^{\langle\alpha\beta\rangle} - (p_L + \varpi_L) \Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{e_L n_L}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta, \quad (2.69)$$

sendo

$$\Delta_L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U_L^\mu U_L^\nu. \quad (2.70)$$

O quadrivetor \mathcal{J}^α denota a componente do quadrifluxo de partículas que é perpendicular à quadrivelocidade, ou seja, $\mathcal{J}^\alpha U_{L\alpha} = 0$. Para estudar a relação entre a decomposição de Eckart e a de Landau, considera-se que

$$U_L^\alpha = U^\alpha + \mathcal{U}^\alpha. \quad (2.71)$$

Sendo \mathcal{U}^α igual a zero em equilíbrio e $\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha$ desprezível para processos próximos do equilíbrio,

$$U_L^\alpha U_{L\alpha} \approx c^2 + 2U_\alpha \mathcal{U}^\alpha. \quad (2.72)$$

Como $U_L^\alpha U_{L\alpha} = c^2$ conclui-se que nesta aproximação U_α e \mathcal{U}^α são perpendiculares. Quanto ao quadrifluxo de partículas, igualando suas decomposições nas duas descrições citadas,

$$nU^\alpha = n_L U_L^\alpha + \mathcal{J}^\alpha, \quad (2.73)$$

multiplicando a equação (2.73) por $U_{L\alpha}$ e usando as relações $\mathcal{J}^\alpha U_{L\alpha} = 0$, $U^\alpha U_{L\alpha} = c^2$, chega-se a

$$n = n_L. \quad (2.74)$$

Este resultado implica que para processos próximos ao equilíbrio a densidade do número de partículas **não depende da descrição adotada**.

Das equações (2.71) e (2.73),

$$U^\alpha = -\frac{\mathcal{J}^\alpha}{n}. \quad (2.75)$$

Viu-se anteriormente que o tensor energia-momento pode ser decomposto na descrição de Eckart como

$$T^{\alpha\beta} = p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha) + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta. \quad (2.76)$$

Na descrição de Landau, o mesmo tensor é decomposto como exposto na equação (2.69). Para processos próximos do equilíbrio, o uso de (2.71) e a definição de entalpia por partícula $h_{E,L} = e_L + p_L/n_L$ permitem reescrever o tensor energia-momento como

$$T^{\alpha\beta} = p_L^{(\alpha\beta)} - (p_L + \varpi_L)\Delta^{\alpha\beta} - \frac{h_{E,L}}{c^2}(U^\alpha \mathcal{J}^\beta + U^\beta \mathcal{J}^\alpha) + \frac{e_L n_L}{c^2}U^\alpha U^\beta. \quad (2.77)$$

A comparação entre (2.76) e (2.77) permite concluir que

$$p_L = p, \quad e_L = e, \quad \varpi_L = \varpi, \quad p_L^{(\alpha\beta)} = p^{(\alpha\beta)}, \quad \mathcal{J}^\alpha = -\frac{1}{h_E}q^\alpha, \quad (2.78)$$

desta forma o quadrifluxo de partículas e o tensor energia-momento podem ser decompostos, na descrição de Landau, como

$$N^\alpha = nU_L^\alpha - \frac{q^\alpha}{h_E}, \quad (2.79)$$

$$T^{\alpha\beta} = p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{en}{c^2}U_L^\alpha U_L^\beta, \quad (2.80)$$

enquanto que a relação entre as quadrivelocidades hidrodinâmicas em processos próximos ao equilíbrio é dada por

$$U^\alpha = U_L^\alpha - \frac{1}{nh_E}q^\alpha. \quad (2.81)$$

As equações (2.56), (2.81) e (2.60) podem ser combinadas de modo que se obtenha, na descrição de Landau, o quadrifluxo parcial de partículas e o tensor energia-momento parcial:

$$N_a^\alpha = n_a U_L^\alpha + J_a^\alpha - \frac{n_a q^\alpha}{nh_E}, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} T_a^{\alpha\beta} = & p_a^{(\alpha\beta)} - (p_a + \varpi_a) \Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} U_L^\alpha \left(q_a^\beta + h_E^a J_a^\beta - \frac{n_a h_E^a}{nh_E} q^\beta \right) \\ & + \frac{1}{c^2} U_L^\beta \left(q_a^\alpha + h_E^a J_a^\alpha - \frac{n_a h_E^a}{nh_E} q^\alpha \right) + \frac{e_a n_a}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Tais decomposições são importantes e serão utilizadas nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

A função de distribuição

3.1 Gás em equilíbrio

O cálculo dos coeficientes de transporte para um gás relativístico, quer se trate de uma mistura ou de um gás simples, envolve expansões em torno da função de distribuição em equilíbrio. Desta forma, é necessário apresentar as funções de distribuição no equilíbrio e próximo ao equilíbrio.

Inicialmente, é importante definir um quadrivetor que será mencionado ao longo deste capítulo. Trata-se do quadrivetor fluxo de entropia S^μ , que pode ser decomposto como

$$S^\mu = nsU^\mu + \phi^\mu, \quad (3.1)$$

sendo a entropia por partícula definida como $s = S^\mu U_\mu / (nc^2)$ e $\phi^\mu = \Delta^\mu_\nu S^\nu$ correspondendo à componente do quadrivetor fluxo de entropia que é ortogonal à quadri-velocidade hidrodinâmica.

A equação de transporte para o constituinte a de uma mistura de gases degenerados é dada por (2.39). Supondo que o gás analisado se constitua de um só componente, para maior simplicidade, a substituição de ψ dado por

$$\psi = -kc \left[\ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right] \quad (3.2)$$

na equação (2.39) permite que se identifiquem as seguintes grandezas:

$$S^\alpha = \int p^\alpha f \left[-k \ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) + kc \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right] \frac{d^3p}{p^0}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varsigma &= \frac{kc}{4} \int f_* f \ln \frac{f'_* f' (1 + \epsilon fh^3/g_s)(1 + \epsilon f_* h^3/g_s)}{f_* f (1 + \epsilon f' h^3/g_s)(1 + \epsilon f'_* h^3/g_s)} \left(1 + \epsilon \frac{f' h^3}{g_s} \right) \\ &\times \left(1 + \epsilon \frac{f'_* h^3}{g_s} \right) \left[\frac{f'_* f' (1 + \epsilon fh^3/g_s)(1 + \epsilon f_* h^3/g_s)}{f_* f (1 + \epsilon f' h^3/g_s)(1 + \epsilon f'_* h^3/g_s)} - 1 \right] F^\sigma d\Omega \frac{d^3p_*}{p_*^0} \frac{d^3p}{p^0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com as identidades (3.3) e (3.4) se pode escrever a equação de balanço do quadrifluxo de entropia

$$\partial_\alpha S^\alpha = \varsigma. \quad (3.5)$$

Para verificar que o termo de produção ς é positivo semi-definido, identifica-se na (3.4)

$$x = \frac{f'_* f' (1 + \epsilon fh^3/g_s)(1 + \epsilon f_* h^3/g_s)}{f_* f (1 + \epsilon f' h^3/g_s)(1 + \epsilon f'_* h^3/g_s)} \quad (3.6)$$

de modo que, como as funções de distribuição são sempre grandezas positivas, o termo que define o sinal do integrando na (3.4) é a expressão $(x - 1)\ln(x)$, sendo x sempre positivo. As propriedades dos logaritmos permitem afirmar que

$$\begin{cases} (x - 1)\ln(x) > 0 & \text{para todo } x > 0, x \neq 1 \\ (x - 1)\ln(x) = 0 & \text{para } x = 1, \end{cases}$$

de modo que o termo de produção ς é sempre maior ou igual a zero. Este resultado é conhecido em teoria cinética como Teorema \mathcal{H} , e continua válido quando se simplifica o termo de colisão da equação de Boltzmann por meio de modelos de colisão análogos ao BGK. Quando $x = 1$, $\varsigma = 0$, o que significa que a produção de entropia é mínima, ou seja, o gás atingiu o equilíbrio. Assim, no equilíbrio $x = 1$ e conclui-se da (3.6) que

$$f'_* f' \left(1 + \epsilon \frac{fh^3}{g_s} \right) \left(1 + \epsilon \frac{f_* h^3}{g_s} \right) = f_* f \left(1 + \epsilon \frac{f' h^3}{g_s} \right) \left(1 + \epsilon \frac{f'_* h^3}{g_s} \right). \quad (3.7)$$

A função de distribuição f no equilíbrio será denotada por $f^{(0)}$, de modo que a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$f'_* f^{(0)} \left(1 + \epsilon \frac{f^{(0)} h^3}{g_s} \right) \left(1 + \epsilon \frac{f_*^{(0)} h^3}{g_s} \right) = f_*^{(0)} f^{(0)} \left(1 + \epsilon \frac{f^{(0)} h^3}{g_s} \right) \left(1 + \epsilon \frac{f_*^{(0)} h^3}{g_s} \right). \quad (3.8)$$

Comparando (3.8) e (2.31), verifica-se que no equilíbrio o termo de colisão da equação de Boltzmann se anula, ou seja, no equilíbrio o número de pontos destruídos no espaço de fase μ pelas colisões diretas é igual ao número de pontos criados pelas colisões de restituição.

Tomando o logaritmo de ambos os lados da equação (3.8), chega-se a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f^{(0)}}{1 + \epsilon f^{(0)} h^3 / g_s}\right) + \ln\left(\frac{f_*^{(0)}}{1 + \epsilon f_*^{(0)} h^3 / g_s}\right) = \\ \ln\left(\frac{f'^{(0)}}{1 + \epsilon f'^{(0)} h^3 / g_s}\right) + \ln\left(\frac{f_*'^{(0)}}{1 + \epsilon f_*'^{(0)} h^3 / g_s}\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

concluindo-se então que $\ln[f^{(0)} / (1 + \epsilon f^{(0)} h^3 / g_s)]$ é um invariante de soma. De acordo com (2.36), o invariante de soma pode ser escrito como

$$\ln\left(\frac{f^{(0)}}{1 + \epsilon f^{(0)} h^3 / g_s}\right) = -(A + B^\alpha p_\alpha), \quad (3.10)$$

ou seja,

$$f^{(0)} = \frac{g_s / h^3}{e^{-a + B^\alpha p_\alpha} - \epsilon}, \quad (3.11)$$

sendo $a = -A - \ln(g_s / h^3)$. Resta agora determinar os parâmetros a e B^α .

Para determinar esses parâmetros, assume-se inicialmente que num referencial local de Lorentz em repouso no fluido,

$$(B_R^\alpha) = \left(\frac{\zeta}{mc}, \vec{0}\right), \quad (3.12)$$

sendo ζ um parâmetro a ser determinado.

Como B^α é um quadrivetor,

$$B_R^\alpha B_{R\alpha} = B^\alpha B_\alpha = \frac{\zeta^2}{m^2 c^2}. \quad (3.13)$$

Derivando esta equação em relação a B_α ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial B_\alpha} = \frac{(mc)^2}{\zeta} B^\alpha. \quad (3.14)$$

Por outro lado, a substituição da função de distribuição em equilíbrio na definição do quadrifluxo de partículas resulta em

$$N_E^\alpha = c \int p^\alpha \frac{g_s / h^3}{e^{-a + B^\alpha p_\alpha} - \epsilon} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.15)$$

É útil definir a integral \mathcal{I} como

$$\mathcal{I} = \int \frac{g_s/h^3}{e^{-a+B^\alpha p_\alpha} - \epsilon} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.16)$$

de modo que

$$\frac{\partial N_E^\alpha}{\partial a} = -c \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial B_\alpha}. \quad (3.17)$$

No referencial local de Lorentz em repouso no fluido pode-se usar coordenadas esféricas

$$d^3 p = |\vec{p}|^2 \sin\theta d|\vec{p}| d\theta d\phi \quad (3.18)$$

e, como em Chandrasekhar [10], é conveniente introduzir ϑ tal que

$$B_R^\alpha p_\alpha = \frac{p_0 \zeta}{mc} = \zeta \cosh\vartheta, \quad (3.19)$$

$$|\vec{p}|^2 = p_0^2 - m^2 c^2 = m^2 c^2 \sinh^2\vartheta, \quad (3.20)$$

$$\frac{d|\vec{p}|}{p^0} = d\vartheta, \quad (3.21)$$

de modo que as integrais (3.15) e (3.16) podem ser escritas em termos de

$$J_{nm}(\zeta, a) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{e^{\zeta \cosh\vartheta - a} - \epsilon} d\vartheta. \quad (3.22)$$

Como $(U_R^\alpha) = (c, \vec{0})$ implica $N_E^\alpha = nU_R^\alpha = (nc, \vec{0})$, as integrais (3.15) e (3.16) resultam em

$$n = 4\pi (mc)^3 \frac{g_s}{h^3} J_{21}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{I} = 4\pi (mc)^2 \frac{g_s}{h^3} J_{20}. \quad (3.24)$$

Derivando n em relação a a e \mathcal{I} em relação a ζ e usando as relações

$$\frac{\partial J_{nm}}{\partial a} = \frac{n-1}{\zeta} J_{n-2, m+1} + \frac{m}{\zeta} J_{n, m-1}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial J_{nm}}{\partial \zeta} = -\frac{n-1}{\zeta} J_{n-2, m+2} - \frac{m+1}{\zeta} J_{n, m} = -\frac{\partial J_{n, m+1}}{\partial a}, \quad (3.26)$$

chega-se a

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{1}{mc} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \zeta}. \quad (3.27)$$

As equações (3.14), (3.16), (3.27) e a definição do quadrifluxo de partículas permitem identificar o quadri vetor B^α como

$$B^\alpha = \frac{\zeta}{mc^2} U^\alpha. \quad (3.28)$$

Para identificar os dois parâmetros restantes, calcula-se o valor em equilíbrio da entropia por partícula (denotada por s_E), que a partir da função de distribuição em equilíbrio e das expressões para S^α e s é dada por

$$s_E = k \left(\frac{\zeta}{mc^2} e - a + \frac{4\pi\zeta}{3} \frac{m^3 c^3}{n} \frac{g_s}{h^3} J_{40} \right), \quad (3.29)$$

sendo sua diferencial ds_E dada por

$$ds_E = \frac{k\zeta}{mc^2} \left(de - \frac{p}{n^2} dn \right). \quad (3.30)$$

Comparando a equação (3.30) com a equação de Gibbs,

$$ds_E = \frac{1}{T} \left(de - \frac{p}{n^2} dn \right), \quad (3.31)$$

identifica-se o parâmetro ζ como

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT}, \quad (3.32)$$

ou seja, trata-se do mesmo parâmetro apresentado em (1.1) quando se discutiu o critério para a necessidade de uma teoria cinética relativística.

As definições de n , ne e p em termos do tensor energia-momento permitem encontrar, no equilíbrio, as expressões

$$n = 4\pi(mc)^3 \frac{g_s}{h^3} J_{21}, \quad (3.33)$$

$$ne = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{22}, \quad (3.34)$$

$$p = \frac{4\pi}{3} m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{40}, \quad (3.35)$$

de modo que (3.29) permite identificar o parâmetro a como

$$a = \frac{1}{kT} \left(e - T s_E + \frac{p}{n} \right) = \frac{\mu_E}{kT}, \quad (3.36)$$

onde

$$\mu_E = e - Ts_E + p/n \quad (3.37)$$

é o potencial químico no equilíbrio.

Identificados os parâmetros a , ζ e B^α chega-se à função de distribuição relativística em equilíbrio

$$f^{(0)} = \frac{g_s/h^3}{e^{-\frac{\mu_E}{kT} + \frac{U^\alpha p^\alpha}{kT}} - \epsilon}. \quad (3.38)$$

Com a identificação do parâmetro a , as integrais definidas em (3.22) podem ser escritas como $J_{mn}(\zeta, \mu_E)$. O uso de propriedades das funções trigonométricas hiperbólicas permite reescrever $J_{mn}(\zeta, \mu_E)$ em termos das integrais $I_n(\zeta, \mu_E)$ definidas como

$$I_n(\zeta, \mu_E) = \int_0^\infty \frac{\cosh(n\vartheta)}{e^{-\mu_E/kT + \zeta \cosh\vartheta} - \epsilon} d\vartheta. \quad (3.39)$$

De fato, limitando-se às integrais utilizadas até agora, pode-se verificar que

$$J_{21} = \frac{1}{4}(I_3 - I_1), \quad J_{22} = \frac{1}{8}(I_4 - I_0), \quad J_{40} = \frac{1}{8}(I_4 - 4I_2 + 3I_0), \quad (3.40)$$

sendo que outras relações semelhantes podem ser encontradas no apêndice D.

Quando $\epsilon = 0$ ou no limite em que para $\epsilon \neq 0$, $e^{-\mu_E/kT} \gg 1$, o gás não mais precisa ser considerado quântico e as integrais (3.39) podem ser escritas em termos da função modificada de Bessel de segunda espécie definida por

$$K_n(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta \cosh\vartheta} \cosh(n\vartheta) d\vartheta. \quad (3.41)$$

De fato, analisando (3.39) e (3.41) se conclui que no limite considerado

$$I_n(\zeta, \mu_E) \longrightarrow e^{\mu_E/kT} K_n(\zeta). \quad (3.42)$$

Expansões de $K_n(\zeta)$ em potências de ζ permitem obter os valores assintóticos de várias grandezas termodinâmicas associadas a um gás em cada um dos possíveis limites (não-relativístico ou ultra-relativístico). Tais expansões podem ser consultadas através do apêndice D.

A densidade do número de partículas pode ser expressa, no caso não-degenerado e não relativístico, como

$$n = 4\pi m^2 ckT \frac{g_s}{h^3} \frac{\sqrt{\pi/2\zeta}}{e^\zeta}. \quad (3.43)$$

O caso não degenerado corresponde a $e^{-\mu_E/kT} \gg 1$, e o caso não-relativístico corresponde a $\zeta \gg 1$; assim, um gás não-degenerado e não-relativístico é caracterizado por $e^{-\mu_E/kT+\zeta} \gg 1$. A equação (3.43) juntamente com essas condições resulta na conhecida condição para que um gás possa ser tratado como não-degenerado (vide, por exemplo, [27]):

$$\frac{n}{g_s} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{\frac{3}{2}} \ll 1. \quad (3.44)$$

No caso de um gás relativístico e completamente degenerado, $e^{-\mu_E/kT+\zeta} \ll 1$. É assim conveniente definir $u_0 = \mu_E/kT - \zeta$, e neste caso $e^{-u_0} \ll 1$. Limitando a análise a férmions, pode-se escrever as integrais

$$n = 4\pi(m c)^3 \frac{g_s}{h^3} J_{21} = 4\pi(m c)^3 \frac{g_s}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \vartheta \cosh \vartheta}{e^{-u_0} e^{\zeta(\cosh \vartheta - 1)} - 1} d\vartheta, \quad (3.45)$$

$$n e = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{22} = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \vartheta \cosh^2 \vartheta}{e^{-u_0} e^{\zeta(\cosh \vartheta - 1)} - 1} d\vartheta, \quad (3.46)$$

$$p = \frac{4}{3} \pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{40} = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4 \vartheta}{e^{-u_0} e^{\zeta(\cosh \vartheta - 1)} - 1} d\vartheta, \quad (3.47)$$

como

$$n = 4\pi(m c)^3 \frac{g_s}{h^3} \int_0^{\vartheta_F} \sinh^2 \vartheta \cosh \vartheta d\vartheta, \quad (3.48)$$

$$n e = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \int_0^{\vartheta_F} \sinh^2 \vartheta \cosh^2 \vartheta d\vartheta, \quad (3.49)$$

$$p = \frac{4}{3} \pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \int_0^{\vartheta_F} \sinh^4 \vartheta d\vartheta. \quad (3.50)$$

Ao passar do conjunto de equações (3.45) a (3.47) ao conjunto (3.48) a (3.50), os integrandos foram consideravelmente simplificados a partir da observação de que no primeiro conjunto, a condição de completa degenerescência implica que os denominadores dos integrandos tendem ao infinito quando $\cosh \vartheta > 1 + u_0/\zeta$ e tendem a 1 quando $\cosh \vartheta < 1 + u_0/\zeta$. Deste modo, considerando-se na integração somente os valores de ϑ tais que $\cosh \vartheta < 1 + u_0/\zeta$, mudam os limites superiores da integração, que passa a ser feita somente até o máximo valor de ϑ que torna unitário o denominador do integrando. Da (3.19), $\vartheta = \operatorname{arccosh}(p_0/mc)$; em termos da componente

temporal do momento de Fermi p_0^F , define-se ϑ_F como

$$\begin{aligned}\vartheta_F &= \operatorname{arccosh} \frac{p_0^F}{mc} = \operatorname{arccosh} \sqrt{1 + \frac{p_F^2}{m^2 c^2}} \\ &= \operatorname{arcsenh} \left(\frac{p_F}{mc} \right) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{E_F}{mc^2} + 1 \right).\end{aligned}\quad (3.51)$$

Na (3.51), p_F é o módulo do momento de Fermi e a E_F é a energia de Fermi. A integração das equações (3.48) a (3.50) resulta em

$$n = \frac{4\pi}{3} (mc)^3 \frac{g_s}{h^3} x^3, \quad (3.52)$$

$$ne = \frac{\pi}{6} m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \mathcal{G}(x), \quad (3.53)$$

$$p = \frac{\pi}{6} m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} \mathcal{F}(x), \quad (3.54)$$

onde

$$x = \frac{p_F}{mc}, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{G}(x) = 3x(2x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2} - 3\operatorname{arcsenh}x, \quad (3.56)$$

$$\mathcal{F}(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{1 + x^2} + 3\operatorname{arcsenh}x. \quad (3.57)$$

No caso de gases de férmions completamente degenerados, expansões em potências de x resultam em valores assintóticos para as grandezas termodinâmicas, no regime não-relativístico ($x \ll 1$) ou no regime ultra-relativístico ($x \gg 1$). Tais expansões podem ser feitas facilmente através de programas de manipulação algébrica como o *Maple*.

As integrais $J_{nm}(\mu_E, \zeta)$ são úteis para o caso de um gás constituído por partículas de massa de repouso não-nula. No caso em que isso não se verifica, a substituição de variáveis que foi feita para se obter as integrais $J_{nm}(\mu_E, \zeta)$ não mais é válida; neste caso, a substituição é dada por

$$B_R^\alpha p_\alpha = \frac{cp_0}{kT}, \quad (3.58)$$

$$|\vec{p}|^2 = p_0^2, \quad (3.59)$$

$$x = \frac{cp_0}{kT}, \quad (3.60)$$

de modo que n , ne e p podem ser escritas como

$$n = 4\pi \frac{g_s}{h^3} \left(\frac{kT}{c} \right)^3 i_2, \quad (3.61)$$

$$ne = 4\pi c \frac{g_s}{h^3} \left(\frac{kT}{c} \right)^4 i_3, \quad (3.62)$$

$$p = \frac{1}{3} ne, \quad (3.63)$$

com

$$i_n(\mu_E) = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^{-\mu_E/kT+x} - \epsilon} dx. \quad (3.64)$$

No caso de misturas, no equilíbrio a função de distribuição do constituinte a se reduz a uma função de distribuição da mesma forma que a (3.38):

$$f_a^{(0)} = \frac{g_s/h^3}{e^{-\frac{\mu_{aE}}{kT} + \frac{U_{pa\alpha}}{kT}} - \epsilon}. \quad (3.65)$$

3.2 Gás próximo ao equilíbrio

Neste trabalho o interesse está centrado em misturas de gases relativísticos, em situações próximas ao equilíbrio. A determinação dos coeficientes de transporte, objetivo deste trabalho, requer o conhecimento da função de distribuição fora do equilíbrio, f , em termos de uma expansão em torno da função de distribuição no equilíbrio, $f^{(0)}$. Essa função de distribuição é a função de Grad, que é encontrada através do processo de maximização da entropia por partícula s dada por

$$s = \frac{1}{nc^2} S^\alpha U_{L\alpha} = \frac{k}{nc} U_{L\alpha} \int p^\alpha f \left[\ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right] \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.66)$$

sujeita aos 14 vínculos ¹

$$N^\alpha U_{L\alpha} = c U_{L\alpha} \int p^\alpha f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.67)$$

¹A equação (3.67) fornece um vínculo, a (3.68) fornece quatro vínculos e a (3.69), nove vínculos, perfazendo o total de 14 vínculos.

$$T^{\alpha\beta}U_{L\alpha} = cU_{L\alpha} \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3p}{p^0}, \quad (3.68)$$

$$T^{(\gamma\beta)\alpha}U_{L\alpha} = cU_{L\alpha} \int p^{(\gamma} p^{\beta)} p^\alpha f \frac{d^3p}{p^0}. \quad (3.69)$$

A maximização da entropia sujeita a esses vínculos é equivalente, segundo o cálculo variacional, à maximização do funcional

$$F = -\frac{k}{nc}U_{L\alpha} \int p^\alpha f \left[\ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right] \frac{d^3p}{p^0} \\ - \lambda c U_{L\alpha} \int p^\alpha f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_\alpha c U_{L\beta} \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3p}{p^0} - \lambda_{(\alpha\beta)} c U_{L\gamma} \int p^{(\alpha} p^{\beta)} p^\gamma f \frac{d^3p}{p^0}, \quad (3.70)$$

sendo λ , λ_α e $\lambda_{(\alpha\beta)}$ multiplicadores de Lagrange.

Da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 0 \longrightarrow -\frac{k}{nc} \left\{ \ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right. \\ \left. + f \left[\frac{1}{f} + \frac{g_s}{\epsilon f^2 h^3} \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{1}{\epsilon fh^3/g_s} \right) \frac{\epsilon h^3/g_s}{1 + \epsilon fh^3/g_s} \right] \right\} \\ - \lambda c - \lambda_\alpha c p^\alpha - \lambda_{(\alpha\beta)} c p^\alpha p^\beta = 0. \quad (3.71)$$

Da equação (3.71), após simplificações e operações com os logaritmos, vem

$$f = \frac{g_s/h^3}{\exp[(nc^2/k)(\lambda + \lambda_\alpha p^\alpha + \lambda_{(\alpha\beta)} p^\alpha p^\beta)] - \epsilon}. \quad (3.72)$$

Expressando cada um dos multiplicadores de Lagrange como a soma de termos no equilíbrio e fora do equilíbrio (identificados através do índice NE),

$$\lambda = \lambda^E + \lambda^{NE}, \quad (3.73)$$

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^E + \lambda_\alpha^{NE}, \quad (3.74)$$

$$\lambda_{(\alpha\beta)} = \lambda_{(\alpha\beta)}^{NE}, \quad (3.75)$$

sendo $\lambda_{(\alpha\beta)}^E = 0$, para que no equilíbrio f se reduza à $f^{(0)}$, a (3.72) se torna

$$f = \frac{g_s/h^3}{\exp[(nc^2/k)(\lambda^E + \lambda_\alpha^E p^\alpha)] \exp[(nc^2/k)(\lambda^{NE} + \lambda_\alpha^{NE} p^\alpha + \lambda_{(\alpha\beta)}^{NE} p^\alpha p^\beta)] - \epsilon}. \quad (3.76)$$

Considerando que o gás esteja suficientemente próximo ao equilíbrio, ou seja, que λ^{NE} , λ_{α}^{NE} , $\lambda_{\langle\alpha\beta\rangle}^{NE}$ sejam suficientemente pequenos,

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 - \frac{e^{-a+B^{\alpha}p_{\alpha}}}{e^{-a+B^{\alpha}p_{\alpha}} - \epsilon} \frac{nc^2}{k} [\lambda^{NE} + \lambda_{\alpha}^{NE} p^{\alpha} + \lambda_{\langle\alpha\beta\rangle}^{NE} p^{\alpha} p^{\beta}] \right\}. \quad (3.77)$$

No próximo capítulo a função de distribuição (3.77) será utilizada como aproximação para a função de distribuição de elétrons numa mistura binária, constituída de elétrons+fótons ou elétrons+íons, e os multiplicadores de Lagrange serão encontrados.

Capítulo 4

Gases ionizados

4.1 O modelo de Anderson e Witting

Uma mistura binária de gases relativísticos degenerados pode ser caracterizada pelo conjunto de funções de distribuição

$$f_a = f(x, \vec{p}_a, t), \quad a = 1, 2. \quad (4.1)$$

que satisfazem à equação de Boltzmann na forma

$$\begin{aligned} p_a^\alpha \frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} + m_a \frac{\partial f_a \mathcal{K}_a^\alpha}{\partial p_a^\alpha} = \sum_{b=1}^2 \int \left[f_{a*}' \left(1 + \epsilon \frac{f_{a*} h^3}{g_s} \right) f_b' \left(1 + \epsilon \frac{f_b h^3}{g_s} \right) \right. \\ \left. - f_{a*} \left(1 + \epsilon \frac{f_{a*}' h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f_b' h^3}{g_s} \right) \right] F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_{b*}}{p_{b*}^0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Neste trabalho, se supõe que as partículas que compõem a mistura estão sujeitas à ação de campos eletromagnéticos, de modo que

$$\mathcal{K}_a^\alpha = \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} \frac{p_{a\beta}}{m_a}, \quad (4.3)$$

e assim a equação de transporte para o componente a é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int \psi_a p_a^\alpha f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} - \int \left[p_a^\alpha \frac{\partial \psi_a}{\partial x^\alpha} + \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} p_{a\beta} \frac{\partial \psi_a}{\partial p_a^\alpha} \right] f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} \\ = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 \int (\psi_a' - \psi_a) f_a \left(1 + \epsilon \frac{f_a' h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f_b' h^3}{g_s} \right) F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_b}{p_b^0} \frac{d^3 p_a}{p_a^0}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

e para a mistura,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sum_{a=1}^2 \int \psi_a p_a^\alpha f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} - \sum_{a=1}^2 \int \left[p_a^\alpha \frac{\partial \psi_a}{\partial x_a^\alpha} + \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} p_{a\beta} \frac{\partial \psi_a}{\partial p_a^\alpha} \right] f_a \frac{d^3 p_a}{p_a^0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^2 \int (\psi'_a + \psi'_b - \psi_a - \psi_b) f_a \left(1 + \epsilon \frac{f'_a h^3}{g_s} \right) f_b \left(1 + \epsilon \frac{f'_b h^3}{g_s} \right) F_{ba} \sigma_{ba} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_b}{p_b^0} \frac{d^3 p_a}{p_a^0}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Analisando a equação de Boltzmann (4.2), verifica-se que a complexidade do seu termo de colisões pode tornar impraticável o estudo de uma simples mistura binária. Como comentado na introdução, isso motivou a introdução de equações-modelo, que simplificam o termo de colisão mas preservam propriedades físicas importantes.

O primeiro dos modelos na teoria cinética relativística foi proposto por Marle [13]. O termo de colisão do modelo relativístico de Marle é idêntico ao termo de colisão do modelo clássico BGK [12]:

$$\mathcal{C}(f) = -\frac{m}{\tau}(f - f^{(0)}), \quad (4.6)$$

sendo τ um tempo de relaxação, usualmente da ordem do tempo entre duas colisões sucessivas.

Poucos anos depois, Anderson e Witting [14, 15] propuseram um outro modelo, motivados pelo fato de que o modelo de Marle não era satisfatório para limites ultra-relativísticos (como no caso de fótons, por exemplo). No modelo de Anderson e Witting o termo de colisões da equação de Boltzmann é substituído por

$$\mathcal{C}(f) = -\frac{U_L^\alpha p_\alpha}{c^2 \tau}(f - f^{(0)}). \quad (4.7)$$

A escolha do termo de colisão não é arbitrária; na verdade, ele deve satisfazer às seguintes propriedades:

- Se ψ é um invariante de soma,

$$\int \psi \mathcal{C}(f) \frac{d^3 p}{p^0} = 0; \quad (4.8)$$

- Se ψ é dado por

$$\psi = -kc \left[\ln \left(\frac{fh^3}{g_s} \right) - \left(1 + \frac{g_s}{\epsilon fh^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon fh^3}{g_s} \right) \right], \quad (4.9)$$

então

$$\int \psi \mathcal{C}(f) \frac{d^3p}{p^0} \geq 0. \quad (4.10)$$

A condição (4.8) implica que as leis de conservação do número de partículas, da quantidade de movimento e da energia devem ser preservadas pelo modelo; a condição (4.10) implica que o teorema \mathcal{H} é satisfeito. Para verificar essas condições, usualmente quando se trabalha com o modelo de Marle a descrição adotada é a de Eckart, enquanto que o modelo de Anderson e Witting é utilizado em conjunto com a descrição de Landau.

O objetivo do trabalho é a análise dos fenômenos de transporte em uma mistura binária, seja ela elétrons+fótons ou elétrons+íons. Considera-se que o fluxo de calor total da mistura está relacionado aos fluxos de difusão de ambos os constituintes e ao fluxo de calor parcial devido aos elétrons, como se pode observar através da equação (2.64). Pode-se ainda verificar através da equação (2.58) que o fluxo de difusão parcial devido aos elétrons se relaciona de maneira simples ao fluxo de difusão parcial devido aos íons (ou fótons).

Todo o trabalho pode se basear então na equação de Boltzmann, com o modelo de Anderson e Witting, para os elétrons; a equação de Boltzmann para o outro constituinte da mistura só seria necessária caso se levasse em conta o fluxo de calor parcial devido a esse outro constituinte. O lado direito da equação de Boltzmann envolve um tempo característico τ , relacionado a colisões entre as partículas; para saber quais colisões são importantes e quais podem ser desprezadas, levam-se em conta as seguintes considerações:

- A mistura elétron+íon a ser aqui considerada é o chamado plasma Lorentziano [29, 30, 31], composto por elétrons de carga $-e$ e massa m_e e íons de carga Ze e massa $m_{ion} = Zm_p$, onde m_p é a massa do próton e $Z \gg 1$. Assim, a massa do íon é muito maior do que a massa do elétron. No plasma Lorentziano, se

supõe que os elétrons interagem com os íons, mas não entre si; desta forma, colisões entre elétrons e íons são consideradas como muito mais importantes do que as colisões elétron-elétron. De fato, pode-se mostrar que a frequência ν_{ee} das colisões elétron-elétron é proporcional à densidade do número de elétrons n_e e à secção de choque para tal processo, que por sua vez é proporcional a $(e \cdot e)^2$. Analogamente, a frequência das colisões elétron-íon ν_{ei} é proporcional a¹ $(Ze \cdot e)^2 n_i = e^4 Z n_e$, de modo que se $Z \gg 1$ então $\nu_{ei} \gg \nu_{ee}$;

- Quanto à mistura elétron+fóton, novamente as colisões elétron-elétron são desprezadas face às colisões entre elétrons e fótons (espalhamento Compton, cf. [11]).

A equação de Boltzmann satisfeita pela função de distribuição dos elétrons f_e , no modelo de Anderson-Witting e com as considerações que foram apresentadas, se reduz a uma forma simples:

$$p_e^\alpha \frac{\partial f_e}{\partial x^\alpha} + \frac{q_e}{c} F^{\alpha\beta} p_{e\beta} \frac{\partial f_e}{\partial p_e^\alpha} = -\frac{U_L^\alpha p_{e\alpha}}{c^2 \tau_{eb}} (f_e - f_e^{(0)}), \quad (4.11)$$

sendo τ_{eb} o tempo entre as colisões elétron-íon ($b = i$) ou elétron-fóton ($b = f$).

4.2 Determinação da função de distribuição

Para processos próximos ao equilíbrio, a função de distribuição f_e deve ser encontrada em termos de uma expansão em torno da função de distribuição no equilíbrio, $f_e^{(0)}$.

Para isso, reescreve-se a equação (3.77) como

$$f_e = f_e^{(0)} \left\{ 1 - \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{n_e c^2}{k} [\lambda_e^{NE} + \lambda_{e\alpha}^{NE} p_e^\alpha + \lambda_{e(\alpha\beta)} p_e^\alpha p_e^\beta] \right\}. \quad (4.12)$$

Considerando as decomposições

$$\lambda_{e\alpha}^{NE} = \tilde{\lambda}_e U_{L\alpha} + \tilde{\lambda}_{e\beta} \Delta_{L\alpha}^\beta, \quad (4.13)$$

¹Pela condição de quase-neutralidade, as concentrações de elétrons e íons estão ligadas entre si pela relação $n_e = Z n_i$.

$$\lambda_{e(\alpha\beta)} = \Lambda_e U_{L\alpha} U_{L\beta} + \frac{1}{2} \Lambda_{e\gamma} (\Delta_{L\alpha}^\gamma U_{L\beta} + \Delta_{L\beta}^\gamma U_{L\alpha}) + \Lambda_{e\gamma\delta} \left(\Delta_{L\alpha}^\gamma \Delta_{L\beta}^\delta - \frac{1}{3} \Delta_L^{\gamma\delta} \Delta_{L\alpha\beta} \right), \quad (4.14)$$

obtém-se da (4.12)

$$f_\epsilon = f_\epsilon^{(0)} \left\{ 1 - \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{n_e c^2}{k} \left[\lambda_e^{NE} + \tilde{\lambda}_e U_{L\alpha} p_e^\alpha + \tilde{\lambda}_{e\beta} \Delta_{L\alpha}^\beta p_e^\alpha + \Lambda_e U_{L\alpha} U_{L\beta} p_e^\alpha p_e^\beta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \Lambda_{e\gamma} (\Delta_{L\alpha}^\gamma U_{L\beta} + \Delta_{L\beta}^\gamma U_{L\alpha}) p_e^\alpha p_e^\beta + \Lambda_{e\gamma\delta} \left(\Delta_{L\alpha}^\gamma \Delta_{L\beta}^\delta - \frac{1}{3} \Delta_L^{\gamma\delta} \Delta_{L\alpha\beta} \right) p_e^\alpha p_e^\beta \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Identificando

$$B_e^\alpha = \frac{\zeta_e}{m_e c^2} U_L^\alpha, \quad (4.16)$$

e fazendo a substituição de variáveis

$$B_e^\alpha p_{e\alpha} = \frac{p_e^0 \zeta_e}{m_e c} = \zeta_e \cosh x, \quad (4.17)$$

seguem as igualdades, utilizando coordenadas polares

$$d^3 p_e = |\vec{p}_e|^2 \sin\theta d|\vec{p}_e| d\theta d\phi, \quad (4.18)$$

$$|\vec{p}_e|^2 = p_{e0}^2 - m_e c^2 = m_e^2 c^2 \sinh^2 x, \quad (4.19)$$

$$\frac{d|\vec{p}_e|}{p_{e0}} = dx. \quad (4.20)$$

Os cálculos serão feitos, por conveniência, no referencial de Lorentz em repouso no fluido. Neste referencial, $(U^\alpha) = (c, \vec{0})$ e

$$\Delta_{L\beta}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Para encontrar os multiplicadores de Lagrange, é útil considerar que o quadrifluxo parcial de elétrons é definido, na descrição de Landau, como segue da (2.82)

$$N_e^\alpha = \int c p_e^\alpha f_e \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = n_e U_L^\alpha + J_e^\alpha - \frac{n_e q^\alpha}{n h_E}. \quad (4.22)$$

No referencial de Lorentz em repouso no fluido o quadrifluxo de partículas é tal que sua projeção em $U_{L\alpha}$ é dada por

$$N_e^\alpha U_{L\alpha} = n_e c^2, \quad (4.23)$$

e como n_e é interpretado como a densidade parcial do número de elétrons, que é uma grandeza em equilíbrio, a parte fora do equilíbrio da projeção $N_e^\alpha U_{L\alpha}$ é nula, ou seja,

$$\int cp_e^\alpha (f_e - f_e^{(0)}) \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = 0. \quad (4.24)$$

Com o auxílio de (4.16) a (4.20) e da definição das integrais $J_{nm}(\zeta_e, a_e)$

$$J_{nm}(\zeta_e, a_e) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{e^{\zeta_e \cosh \vartheta - a_e} - \epsilon} d\vartheta, \quad (4.25)$$

a equação (4.24) fornece

$$\lambda_e^{NE} \frac{\partial J_{21}}{\partial a_e} + \zeta_e kT \tilde{\lambda}_e \frac{\partial J_{22}}{\partial a_e} + \Lambda_e (\zeta_e kT)^2 \frac{\partial J_{23}}{\partial a_e} = 0. \quad (4.26)$$

Por outro lado, a projeção $\Delta_{L\alpha}^\beta N_e^\alpha$ fornece

$$\tilde{\lambda}_{e\beta} \frac{\partial J_{40}}{\partial a_e} + \zeta_e kT \Lambda_{e\beta} \frac{\partial J_{41}}{\partial a_e} = \frac{3kh^3}{4\pi n_e g_s m_e^4 c^7} \left(J_{e\beta} - \frac{n_e q_\beta}{nh_E} \right). \quad (4.27)$$

As equações (4.26) e (4.27) são tudo o que se pode obter com o primeiro momento da função de distribuição dos elétrons, ou seja, o quadrifluxo de elétrons. Para encontrar todos os 6 multiplicadores de Lagrange são necessárias mais 4 equações, que serão obtidas a partir do segundo momento da função de distribuição dos elétrons, ou seja, a partir do tensor energia-momento parcial devido aos elétrons.

Na descrição de Landau, da equação (2.83) vem que

$$\begin{aligned} T_e^{\alpha\beta} &= p_e^{(\alpha\beta)} - (p_e + \varpi_e) \Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} U_L^\alpha \left(q_e^\beta + h_E^e J_e^\beta - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q^\beta \right) \\ &+ \frac{1}{c^2} U_L^\beta \left(q_e^\alpha + h_E^e J_e^\alpha - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q^\alpha \right) + \frac{e_e n_e}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Fazendo a projeção $U_{L\alpha} U_{L\beta} T_e^{\alpha\beta}$, chega-se à equação

$$\lambda_e^{NE} \frac{\partial J_{22}}{\partial a_e} + (\zeta_e kT) \tilde{\lambda}_e \frac{\partial J_{23}}{\partial a_e} + (\zeta_e kT)^2 \Lambda_e \frac{\partial J_{24}}{\partial a_e} = 0. \quad (4.29)$$

A projeção $\Delta_{L\alpha\beta}T_e^{\alpha\beta}$ resulta em

$$\lambda_e^{NE} \frac{\partial J_{40}}{\partial a_e} + \tilde{\lambda}_e(\zeta_e kT) \frac{\partial J_{41}}{\partial a_e} + \Lambda_e(\zeta_e kT)^2 \frac{\partial J_{42}}{\partial a_e} = -\frac{3kh^3}{4\pi m_e^4 c^7 g_s n_e} \varpi_e, \quad (4.30)$$

enquanto que a projeção $\Delta_{L\alpha}^\gamma T_e^{\alpha\beta}$ fornece

$$\tilde{\lambda}_{e\gamma} \frac{\partial J_{41}}{\partial a_e} + \zeta_e kT \Lambda_{e\gamma} \frac{\partial J_{42}}{\partial a_e} = \frac{3kh^3}{4\pi m_e^5 c^9 g_s n_e} \left(q_{e\gamma} + h_E^e J_{e\gamma} - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q_\gamma \right). \quad (4.31)$$

A última das equações de que se necessita para determinar os multiplicadores de Lagrange é obtida a partir da projeção

$$\left(\Delta_{L\alpha}^\gamma \Delta_{L\beta}^\delta - \frac{1}{3} \Delta_L^{\gamma\delta} \Delta_{L\alpha\beta} \right) T_e^{\alpha\beta}$$

e corresponde a

$$-\frac{8}{15} \frac{\pi g_s n_e m_e^6 c^9}{kh^3} \frac{\partial J_{60}}{\partial a_e} \Lambda_e^{\gamma\delta} = p_e^{(\gamma\delta)}. \quad (4.32)$$

Dispondo das 6 equações (4.26) a (4.32) pode-se determinar os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_e^{NE} = -\frac{3}{4} \frac{kh^3}{n_e c^7 \pi m_e^4 g_s} \frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2), \quad (4.33)$$

$$\tilde{\lambda}_e = \frac{3}{4} \frac{h^3}{n_e c^7 \pi m_e^4 g_s T \zeta_e} \frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} (J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet - J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet), \quad (4.34)$$

$$\Lambda_e = -\frac{3}{4} \frac{h^3}{n_e c^7 \pi m_e^4 g_s T^2 \zeta_e^2 k} \frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{e\alpha} = & \frac{3}{4} \frac{kh^3}{m_e^5 c^9 g_s n_e \pi n h_E} [-J_{41}^\bullet (q_{e\alpha} n h_E + h_E^e J_{e\alpha} n h_E - n_e h_E^e q_\alpha) \\ & + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_{e\alpha} n h_E - m_e c^2 n_e q_\alpha)] / (J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{e\alpha} = & -\frac{3}{4} \frac{h^3}{m_e^5 c^9 T \zeta_e g_s n_e \pi n h_E} [J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_{e\alpha} n h_E - m_e c^2 n_e q_\alpha) \\ & - J_{40}^\bullet (q_{e\alpha} n h_E + h_E^e J_{e\alpha} n h_E - n_e h_E^e q_\alpha)] / (J_{40}^\bullet J_{42}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\Lambda_{e\alpha\beta} = -\frac{15kh^3}{8\pi g_s n_e m_e^6 c^9 J_{60}^\bullet} p_{e(\alpha\beta)}. \quad (4.38)$$

Para expressar de maneira mais compacta os multiplicadores de Lagrange, utilizaram-se as seguintes definições:

$$J_{nm}^\bullet(\zeta_e, a_e) = \frac{\partial J_{nm}(\zeta_e, a_e)}{\partial a_e}, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} J_{21}^\bullet & J_{22}^\bullet & J_{23}^\bullet \\ J_{22}^\bullet & J_{23}^\bullet & J_{24}^\bullet \\ J_{40}^\bullet & J_{41}^\bullet & J_{42}^\bullet \end{vmatrix}. \quad (4.40)$$

4.3 Equações de balanço

Uma vez encontrados os multiplicadores de Lagrange (4.33) a (4.38) pode-se determinar a função de distribuição dos elétrons para processos próximos ao equilíbrio (4.12). Desta forma, pode-se obter o terceiro momento da função de distribuição dos elétrons, i.e., o terceiro momento parcial, e sua respectiva equação de balanço. Projeções sobre as equações de balanço do terceiro momento parcial e do tensor energia-momento parcial, juntamente com a equação de balanço do quadrifluxo parcial de partículas, permitirão a obtenção do quadrivetor corrente elétrica e do fluxo de calor parcial devido aos elétrons.

4.3.1 Equação de balanço do quadrifluxo parcial de partículas

Multiplicando a equação (4.11) por $cd^3 p_e/p_e^0$, integrando e levando em conta a definição do quadrifluxo parcial de partículas como o primeiro momento da função de distribuição f_e , chega-se a

$$\frac{\partial N_e^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{U_L^\alpha}{c^2 \tau_{eb}} (N_{e\alpha} - N_{e\alpha}|E), \quad (4.41)$$

sendo que, na descrição de Landau,

$$N_e^\alpha = n_e U_L^\alpha + J_e^\alpha - \frac{n_e q^\alpha}{nh_E}. \quad (4.42)$$

Identificando

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha = \frac{1}{c^2} U_{L\alpha} D + \nabla_\alpha, \quad (4.43)$$

levando em conta a definição do fluxo de difusão parcial e recordando que os processos são próximos ao equilíbrio, a equação de balanço do quadrifluxo parcial de partículas,

ou equação da continuidade, é expressa por

$$Dn_e + n_e \nabla^\alpha U_{L\alpha} + \nabla^\alpha J_{e\alpha} = 0. \quad (4.44)$$

4.3.2 Equação de balanço do tensor energia-momento parcial

Para obter a equação de balanço para o tensor energia-momento parcial devido aos elétrons, novamente deve-se partir da equação de Boltzmann para os elétrons, no modelo de Anderson e Witting. De fato a multiplicação da equação (4.11) por $cp_e^\alpha d^3 p_e / p_e^0$ e subsequente integração resulta em

$$\partial_\phi T_e^{\alpha\phi} - \frac{q_e}{c} F^{\alpha\phi} N_{e\phi} = -\frac{U_{L\phi}}{c^2 \tau_{eb}} (T_e^{\alpha\phi} - T_e^{\alpha\phi}|_E), \quad (4.45)$$

sendo

$$T_e^{\alpha\phi}|_E = -p_e \Delta_L^{\alpha\phi} + \frac{e_e n_e}{c^2} U_L^\alpha U_L^\phi, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} T_e^{\alpha\beta} = & p_e^{\langle\alpha\beta\rangle} - (p_e + \varpi_e) \Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} U_L^\alpha \left(q_e^\beta + h_E^e J_e^\beta - \frac{n_e h_E^e}{n h_E} q^\beta \right) \\ & + \frac{1}{c^2} U_L^\beta \left(q_e^\alpha + h_E^e J_e^\alpha - \frac{n_e h_E^e}{n h_E} q^\alpha \right) + \frac{e_e n_e}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta. \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.3.3 Equação de balanço do terceiro momento parcial

Como mencionado anteriormente, o cálculo dos multiplicadores de Lagrange e conseqüentemente o conhecimento da função de distribuição f_e permite que se obtenha o terceiro momento parcial, de cuja equação de balanço resultam, através de projeções apropriadas, equações de campo que envolvem o fluxo de calor parcial dos elétrons, o fluxo de difusão parcial (relacionado ao quadri vetor corrente elétrica), e as viscosidades volumétrica e de cisalhamento.

O terceiro momento da função de distribuição f_e é definido por

$$T_e^{\alpha\beta\gamma} = c \int f_e p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0}. \quad (4.48)$$

A função de distribuição (4.15), com os multiplicadores de Lagrange (4.33) a (4.34), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
f_e = f_e^{(0)} & \left\{ 1 - \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{3h^3}{4\pi m_e^4 c^5 g_s} \left[-\frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2) \right. \right. \\
& - \frac{U_{L\alpha} p_e^\alpha}{m_e c^2} \frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} (J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet) - \frac{\varpi_e (U_{L\alpha} p_e^\alpha)^2}{\mathcal{D} (m_e c^2)^2} (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2) \\
& + \frac{p_e^\alpha}{m_e c^2 n h_E} \left[\frac{-J_{41}^\bullet (q_{e\alpha} n h_E + h_E^e J_{e\alpha} n h_E - n_e h_E^e q_\alpha) + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_{e\alpha} n h_E - m_e c^2 n_e q_\alpha)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& - \frac{U_{L\beta} p_e^\beta p_e^\alpha}{m_e^2 c^4 n h_E} \left[\frac{J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_{e\alpha} n h_E - m_e c^2 n_e q_\alpha) - J_{40}^\bullet (q_{e\alpha} n h_E + h_E^e J_{e\alpha} n h_E - n_e h_E^e q_\alpha)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& \left. \left. - \frac{5 p_{e(\alpha\beta)} p_e^\alpha p_e^\beta}{2 m_e^2 c^4 J_{60}^\bullet} \right] \right\}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

A substituição da função de distribuição (4.49) na definição (4.48) resulta em várias integrais que se reduzem a combinações das seguintes integrais

$$\int f_e^{(0)} \phi_n p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \tag{4.50}$$

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \tag{4.51}$$

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \tag{4.52}$$

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta p_e^\phi \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \tag{4.53}$$

onde $\phi_n = (p_{e\alpha} U_L^\alpha)^n$, com n inteiro.

As integrais (4.50) a (4.53) podem ser reescritas em termos das seguintes representações, que envolvem a quadrivelocidade hidrodinâmica e o projetor na descrição de Landau:

$$\begin{aligned}
\int f_e^{(0)} \phi_n p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0} & = \mathcal{A}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma \\
& + \mathcal{A}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha), \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0} & = \mathcal{B}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma \\
& + \mathcal{B}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha), \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{C}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta \\
& + \mathcal{C}_2 (\Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\beta\gamma} + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\delta\beta} + \Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\delta\gamma}) + \mathcal{C}_3 (\Delta_L^{\delta\alpha} U_L^\beta U_L^\gamma \\
& + \Delta_L^{\delta\beta} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\delta\gamma} U_L^\beta U_L^\alpha + \Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\delta U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta U_L^\delta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha U_L^\delta), \quad (4.56) \\
& \int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{D}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta U_L^\phi + \mathcal{D}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\gamma\delta} U_L^\phi \\
& + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\beta\delta} U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\phi + \Delta_L^{\beta\gamma} \Delta_L^{\delta\phi} U_L^\alpha + \Delta_L^{\beta\delta} \Delta_L^{\gamma\phi} U_L^\alpha \\
& + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\delta\phi} U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\gamma\phi} U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\gamma\phi} U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\delta\phi} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\phi} \Delta_L^{\beta\delta} U_L^\gamma \\
& + \Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\beta\phi} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\beta\phi} U_L^\delta + \Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\gamma\phi} U_L^\delta + \Delta_L^{\alpha\phi} \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\delta) + \mathcal{D}_3 (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma U_L^\delta U_L^\phi \\
& + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta U_L^\delta U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\delta} U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\phi} U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha U_L^\delta U_L^\phi + \Delta_L^{\beta\delta} U_L^\alpha U_L^\gamma U_L^\phi \\
& + \Delta_L^{\beta\phi} U_L^\alpha U_L^\gamma U_L^\delta + \Delta_L^{\gamma\delta} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\phi + \Delta_L^{\gamma\phi} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\delta + \Delta_L^{\delta\phi} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma). \quad (4.57)
\end{aligned}$$

Os coeficientes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{D}_3$ podem ser determinados através de um processo que, embora trabalhoso, envolve somente propriedades simples da quadrivelocidade hidrodinâmica e do projetor, bem como substituições de variáveis que já foram utilizadas anteriormente neste trabalho. Parte do trabalho necessário para encontrar cada um dos coeficientes está descrito no apêndice E. Com estas considerações, o terceiro momento parcial dos elétrons pode ser finalmente escrito como

$$\begin{aligned}
T_e^{\alpha\beta\gamma} = & \left\{ 4\pi m_e^5 c^3 (g_s/h^3) J_{23} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - \frac{4\pi}{3} m_e^5 c^5 (g_s/h^3) J_{41} (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma \right. \\
& \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha) + \frac{\varpi_e m_e}{\mathcal{D}} \left[\frac{3}{c^2} J_{23}^\bullet (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - J_{41}^\bullet (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2) \right. \\
& \times (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha) + \frac{3}{c^2} J_{24}^\bullet (J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma \\
& - J_{42}^\bullet (J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet) (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha) \\
& + \frac{3}{c^2} J_{25}^\bullet (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma \\
& \left. - J_{43}^\bullet (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2) (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha) \right] \\
& - \frac{1}{5} \frac{m_e}{n h_E} J_{60}^\bullet \left[\frac{-J_{41}^\bullet (q_{e\sigma} n h_E + h_E^e J_{e\sigma} n h_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} n h_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& \times (\Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\gamma\sigma} + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\beta\sigma} + \Delta_L^{\alpha\sigma} \Delta_L^{\beta\gamma})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_e}{nh_E c^2} J_{42}^\bullet \left[\frac{-J_{41}^\bullet (q_{e\sigma} nh_E + h_E^e J_{e\sigma} nh_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} nh_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& \quad \times (\Delta_L^{\alpha\sigma} U_L^\beta U_L^\gamma + \Delta_L^{\beta\sigma} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\gamma\sigma} U_L^\alpha U_L^\beta) \\
& + \frac{1}{5} \frac{m_e}{nh_E} J_{61}^\bullet \left[\frac{-J_{40}^\bullet (q_{e\sigma} nh_E + h_E^e J_{e\sigma} nh_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} nh_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& \quad \times (\Delta_L^{\alpha\sigma} \Delta_L^{\beta\gamma} + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\beta\sigma} + \Delta_L^{\alpha\sigma} \Delta_L^{\beta\gamma}) \\
& - \frac{m_e}{nh_E c^2} J_{43}^\bullet \left[\frac{-J_{40}^\bullet (q_{e\sigma} nh_E + h_E^e J_{e\sigma} nh_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} nh_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\
& \quad \times (\Delta_L^{\alpha\sigma} U_L^\beta U_L^\gamma + \Delta_L^{\beta\sigma} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\gamma\sigma} U_L^\alpha U_L^\beta) \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{p_e(\delta\phi)}{J_{60}^\bullet} m_e J_{61}^\bullet \left[U_L^\gamma (\Delta_L^{\alpha\phi} \Delta_L^{\beta\delta} + \Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\beta\phi}) + U_L^\alpha (\Delta_L^{\beta\phi} \Delta_L^{\gamma\delta} + \Delta_L^{\beta\delta} \Delta_L^{\gamma\phi}) \right. \\
& \quad \left. + U_L^\beta (\Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\gamma\phi} + \Delta_L^{\alpha\phi} \Delta_L^{\gamma\delta}) \right] \}. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

No equilíbrio, (4.58) se reduz a

$$T_e^{\alpha\beta\gamma}|_E = 4\pi m_e^5 c^3 (g_s/h^3) J_{23} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - \frac{4\pi}{3} m_e^5 c^5 (g_s/h^3) J_{41} (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha). \tag{4.59}$$

Para encontrar a equação de balanço de $T_e^{\alpha\beta\gamma}$ basta multiplicar a equação modelo (4.11) por $cp_e^\beta p_e^\gamma d^3 p_e/p_e^0$. Integrando a equação resultante, chega-se a

$$\partial_\alpha T_e^{\alpha\beta\gamma} - \frac{q_e}{c} (F^\beta_\sigma T_e^{\sigma\gamma} + F^\gamma_\sigma T_e^{\sigma\beta}) = -\frac{U_{L\alpha}}{c^2 \tau_{eb}} (T_e^{\alpha\beta\gamma} - T_e^{\alpha\beta\gamma}|_E). \tag{4.60}$$

A substituição de (4.58) e (4.59) na equação de balanço (4.60) resulta na seguinte equação, após serem descartados os produtos de termos ortogonais entre si e os termos de ordem superior em relação às grandezas fora do equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \partial_\alpha \left\{ 4\pi m_e^5 c^3 (g_s/h^3) J_{23} U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - \frac{4\pi}{3} m_e^5 c^5 (g_s/h^3) J_{41} (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma \right. \\
& \quad \left. + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha) \right\} - \frac{q_e}{c} \left\{ F^{\beta\sigma} \left[p_{e(\sigma}^{\gamma)} - (p_e + \varpi_e) \Delta_{L\sigma}^\gamma \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{c^2} U_{L\sigma} (q_e^\gamma + h_E^e J_e^\gamma - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q^\gamma) + \frac{1}{c^2} U_L^\gamma (q_{e\sigma} + h_E^e J_{e\sigma} - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q_\sigma) \right. \\
& \quad \left. + \frac{e_e n_e}{c^2} U_{L\sigma} U_L^\gamma \right] + F^{\gamma\sigma} \left[p_{e(\sigma}^{\beta)} - (p_e + \varpi_e) \Delta_{L\sigma}^\beta \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{c^2} U_{L\sigma} (q_e^\beta + h_E^e J_e^\beta - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q^\beta) + \frac{1}{c^2} U_L^\beta (q_{e\sigma} + h_E^e J_{e\sigma} - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q_\sigma) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e_e n_e}{c^2} U_{L\sigma} U_L^\beta \Big] \Big\} \\
= & - \frac{U_{L\alpha}}{c^2 \tau_{eb}} \left\{ \frac{\varpi_e}{\mathcal{D}} m_e \left[\frac{3}{c^2} J_{23}^\bullet (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - J_{41}^\bullet (J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2) \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha \right. \right. \\
& + \frac{3}{c^2} J_{24}^\bullet (J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - J_{42}^\bullet (J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet) \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha \\
& \left. \left. + \frac{3}{c^2} J_{25}^\bullet (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2) U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma - J_{43}^\bullet (J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2) \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha \right] \right. \\
& + \frac{m_e}{nh_E c^2} J_{42}^\bullet \left[\frac{-J_{41}^\bullet (q_{e\sigma} n h_E + h_E^e J_{e\sigma} n h_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} n h_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right. \\
& \quad \left. \times (\Delta_L^{\beta\sigma} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\gamma\sigma} U_L^\alpha U_L^\beta) \right. \\
& - \frac{m_e}{nh_E c^2} J_{43}^\bullet \left[\frac{-J_{40}^\bullet (q_{e\sigma} n h_E + h_E^e J_{e\sigma} n h_E - n_e h_E^e q_\sigma) + J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_{e\sigma} n h_E - m_e c^2 n_e q_\sigma)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right. \\
& \quad \left. \times (\Delta_L^{\beta\sigma} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\gamma\sigma} U_L^\alpha U_L^\beta) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{p_e(\delta\phi)}{J_{60}^\bullet} m_e J_{61}^\bullet U_L^\alpha (\Delta_L^{\beta\phi} \Delta_L^{\gamma\delta} + \Delta_L^{\beta\delta} \Delta_L^{\gamma\phi}) \right] \right\} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

4.4 Projeções sobre as equações de balanço

Pode-se tomar algumas projeções sobre as equações de balanço para se obter um sistema de equações que, uma vez resolvido, resulta em expressões para o fluxo de calor parcial devido aos elétrons, o quadrivetor corrente elétrica, a pressão dinâmica parcial e o deviante do tensor pressão parcial. Ao longo dos cálculos realizados no intuito de obter as projeções aqui apresentadas, utilizaram-se propriedades do tensor campo eletromagnético que são apresentadas no apêndice C. Note-se em especial a decomposição do tensor campo eletromagnético em termos da quadrivelocidade hidrodinâmica.

Como visto em (4.44), a equação de balanço do primeiro momento parcial, ou seja, do quadrifluxo parcial de partículas, é dada por

$$Dn_e + n_e \nabla^\alpha U_{L\alpha} + \nabla^\alpha J_{e\alpha} = 0. \quad (4.62)$$

A projeção $U_{L\alpha}$ sobre a equação de balanço do tensor energia-momento parcial devido aos elétrons (4.45) resulta em

$$n_e D e_e + p_e \nabla_\alpha U_L^\alpha + \nabla_\alpha \left(q_e^\alpha + h_E^e J_e^\alpha - \frac{n_e h_E^e}{nh_E} q^\alpha \right) = 0, \quad (4.63)$$

que é a equação de balanço da energia por partícula.

No caso de um fluido não-viscoso e não-condutor de calor, as equações (4.62) e (4.63) se reduzem às equações de um fluido de Euler:

$$Dn_e + n_e \nabla_\alpha U^\alpha = 0, \quad (4.64)$$

$$n_e D e_e + p_e \nabla_\alpha U_L^\alpha = 0. \quad (4.65)$$

Outra projeção importante sobre a equação (4.45) é $\Delta_{L\nu}^\alpha$, que resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} (p_e + e_e n_e) D U_L^\nu - \nabla^\nu p_e - n_e q_e E^\nu + \frac{q_e}{c} B^{\nu\beta} J_{e\beta} - \frac{q_e}{c} \frac{n_e}{n h_E} B^{\nu\beta} q_\beta \\ & = -\frac{1}{c^2 \tau_{eb}} \left(q_e^\nu + h_E^e J_e^\nu - \frac{n_e h_E^e}{n h_E} q^\nu \right), \end{aligned} \quad (4.66)$$

que é a equação de balanço para o momento linear parcial.

A projeção $U_{L\beta} U_{L\gamma}$ sobre a equação de balanço do terceiro momento parcial (4.61) fornece

$$\begin{aligned} & 4\pi m_e^5 c^7 (g_s/h^3) \left(J_{23}^\bullet D a_e + J_{24}^\bullet \frac{\zeta_e}{T} D T + J_{23}^\bullet \nabla_\alpha U_L^\alpha \right) + \frac{8\pi}{3} m_e^5 c^7 (g_s/h^3) J_{41}^\bullet \nabla_\alpha U_L^\alpha \\ & = -3 \frac{m_e c^2 \varpi_e}{\tau_{eb} D} \left\{ J_{23}^\bullet [J_{24}^\bullet J_{22}^\bullet - (J_{23}^\bullet)^2] + J_{24}^\bullet [J_{23}^\bullet J_{22}^\bullet - J_{21}^\bullet J_{24}^\bullet] + J_{25}^\bullet [J_{21}^\bullet J_{23}^\bullet - (J_{22}^\bullet)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

A projeção $\Delta_{L\beta}^\lambda U_{L\gamma}$ sobre (4.61) resulta em

$$\begin{aligned} & 4\pi m_e^5 c^5 (g_s/h^3) J_{23}^\bullet D U_L^\lambda - \frac{4\pi}{3} m_e^5 c^5 (g_s/h^3) [-2J_{41}^\bullet D U_L^\lambda \\ & + c^2 \left(J_{42}^\bullet \frac{\zeta_e}{T} \nabla^\lambda T + J_{41}^\bullet \nabla^\lambda a_e \right)] + \frac{q_e}{c} B^{\lambda\sigma} \left(q_{e\sigma} + h_E^e J_{e\sigma} - \frac{n_e h_E^e}{n h_E} q_\sigma \right) \\ & - q_e p_e E^\lambda - q_e e_e n_e E^\lambda = -\frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E} J_{42}^\bullet \\ & \times \left[\frac{-J_{41}^\bullet (q_e^\lambda n h_E + h_E^e J_e^\lambda n h_E - n_e h_E^e q^\lambda) + J_{42}^\bullet (m_e c^2 J_e^\lambda n h_E - m_e c^2 n_e q^\lambda)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right] \\ & + \frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E} J_{43}^\bullet \left[\frac{-J_{40}^\bullet (q_e^\lambda n h_E + h_E^e J_e^\lambda n h_E - n_e h_E^e q^\lambda) + J_{41}^\bullet (m_e c^2 J_e^\lambda n h_E - m_e c^2 n_e q^\lambda)}{J_{42}^\bullet J_{40}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2} \right], \end{aligned} \quad (4.68)$$

e finalmente a projeção $\Delta_{L\beta}^\lambda \Delta_{L\gamma}^\tau - (1/3)\Delta_L^{\lambda\tau} \Delta_{L\beta\gamma}$ permite obter a equação

$$-\frac{8\pi}{3}m_e^5c^5(g_s/h^3)J_{41}\nabla^{\langle\tau}U_L^{\lambda\rangle} + \frac{q_e}{c}(B^{\lambda\sigma}p_{e(\sigma}^{\tau)} + B^{\tau\sigma}p_{e(\sigma}^{\lambda)}) = -\frac{m_e}{\tau_{eb}}\frac{J_{61}^\bullet}{J_{60}^\bullet}p_e^{\langle\lambda\tau\rangle}. \quad (4.69)$$

Para encontrar a Lei de Ohm e a expressão para o fluxo de calor parcial devido aos elétrons, utilizam-se as equações (4.66) e (4.68). Contudo, é necessário observar que:

- O fluxo de calor é expresso pela (2.64), que, no caso de uma mistura binária constituída por elétrons (índice e) e fótons ou íons (índice b), pode ser escrita como

$$q^\alpha = \Delta_\nu^\alpha U_\sigma T^{\nu\sigma} = (q_e^\alpha + q_b^\alpha + h_E^e J_e^\alpha + h_E^b J_b^\alpha). \quad (4.70)$$

Neste trabalho, como já comentado anteriormente, se supõe que o fluxo de calor total está relacionado aos fluxos de difusão parcial de cada constituinte e ao fluxo de calor devido aos elétrons. Desta forma, se despreza q_b^α .

- Na descrição macroscópica de gases relativísticos ionizados sujeitos a campos eletromagnéticos é conveniente introduzir o quadrivetor corrente elétrica, definido em termos dos fluxos de difusão parcial como

$$I^\alpha = q_e J_e^\alpha + q_b J_b^\alpha. \quad (4.71)$$

Com o auxílio desta definição, as equações (4.66) e (4.68) podem ser reescritas em termos do quadrivetor corrente, uma vez conhecida a natureza da mistura.

Tais considerações permitem reescrever as equações (4.66) e (4.68) respectivamente como

$$\begin{aligned} & -\frac{n_e h_E^e}{T} \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} D U_L^\nu \right) - n_e (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu) + \frac{q_e h_E^b}{c h_E (q_e - q_b)} B^{\nu\beta} I_\beta - \frac{q_e n_e}{c n h_E} B^{\nu\beta} q_{e\beta} \\ & = -\frac{1}{c^2 \tau_{eb}} \frac{n_b h_E^b}{n h_E} q_e^\nu - \frac{1}{c^2 \tau_{eb}} \frac{h_E^b h_E^e}{h_E (q_e - q_b)} I^\nu, \quad (4.72) \\ & -\frac{p_e m_e \zeta_e J_{42}^\bullet c^2}{J_{40} T} \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} D U_L^\nu \right) - n_e h_E^e (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q_e n_b h_E^b}{c n h_E} B^{\nu\sigma} q_{e\sigma} + \frac{q_e h_E^e h_E^b}{c (q_e - q_b) h_E} B^{\nu\sigma} I_\sigma \\
= & - \frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E (J_{40}^\bullet J_{42}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2)} \left\{ q_e^\nu [n_b h_E^b (J_{40}^\bullet J_{43}^\bullet - J_{41}^\bullet J_{42}^\bullet) + m_e c^2 n_e (J_{41}^\bullet J_{43}^\bullet - (J_{42}^\bullet)^2)] \right\} \\
& - \frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E (J_{40}^\bullet J_{42}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2) (q_e - q_b)} \\
& \times \left\{ I^\nu [n h_E^e h_E^b (J_{40}^\bullet J_{43}^\bullet - J_{41}^\bullet J_{42}^\bullet) - m_e c^2 n h_e^b (J_{41}^\bullet J_{43}^\bullet - (J_{42}^\bullet)^2)] \right\}. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Para que fique mais claro o tipo de inversão de tensores que será necessária para a determinação da lei de Ohm e do fluxo de calor parcial devido aos elétrons, reescrevem-se as equações (4.72) e (4.73) como

$$A f_h^\nu + C f_e^\nu + I^\phi [D B_\phi^\nu + G g_\phi^\nu] + q_e^\phi [\mathcal{E} B_\phi^\nu + F g_\phi^\nu] = 0, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{H} f_h^\nu + C f_e^\nu + I^\phi [D B_\phi^\nu + \mathcal{L} g_\phi^\nu] + q_e^\phi [\mathcal{J} B_\phi^\nu + \mathcal{K} g_\phi^\nu] = 0, \quad (4.75)$$

onde

$$f_h^\nu = \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} D U_L^\nu \right), \quad (4.76)$$

$$f_e^\nu = (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (4.77)$$

$$A = -\frac{n_e h_E^e}{T}, \quad (4.78)$$

$$C = -n_e, \quad (4.79)$$

$$D = \frac{q_e h_E^b}{c h_E (q_e - q_b)}, \quad (4.80)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{q_e n_e}{c n h_E}, \quad (4.81)$$

$$\mathcal{F} = \frac{n_b h_E^b}{c^2 \tau_{eb} n h_E}, \quad (4.82)$$

$$G = \frac{h_E^b h_E^e}{c^2 \tau_{eb} (q_e - q_b) h_E}, \quad (4.83)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{p_e m_e \zeta_e c^2 J_{42}^\bullet}{h_E^e T J_{40}^\bullet}, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{J} = \frac{q_e n_b h_E^b}{c n h_E h_E^e}, \quad (4.85)$$

$$\mathcal{K} = \frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E h_E^e (J_{40}^\bullet J_{42}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2)} [n_b h_E^b (J_{40}^\bullet J_{43}^\bullet - J_{41}^\bullet J_{42}^\bullet)]$$

$$+m_e c^2 n_e (J_{41}^\bullet J_{43}^\bullet - (J_{42}^\bullet)^2)], \quad (4.86)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m_e}{\tau_{eb} n h_E h_E^\epsilon (J_{40}^\bullet J_{42}^\bullet - (J_{41}^\bullet)^2) (q_e - q_b)} [n h_E^\epsilon h_E^b (J_{40}^\bullet J_{43}^\bullet - J_{41}^\bullet J_{42}^\bullet) - m_e c^2 n h_E^b (J_{41}^\bullet J_{43}^\bullet - (J_{42}^\bullet)^2)]. \quad (4.87)$$

Para resolver o sistema de equações (4.74), (4.75) é necessário inverter tensores do tipo

$$X^{\alpha\beta} = K_1 g^{\alpha\beta} + K_2 B^{\alpha\beta} + K_3 B_\gamma^\alpha B^{\gamma\beta} + K_4 B_\gamma^\alpha B^\gamma B^{\tau\beta}, \quad (4.88)$$

o que pode ser feito assumindo-se uma representação matricial genérica para o tensor $(X^{-1})^{\alpha\beta}$ e resolvendo a equação matricial que resulta do produto de $X^{\alpha\beta}$ por sua inversa. Isso foi feito através do programa de manipulação algébrica *Maple*, e a inversa encontrada é

$$\begin{aligned} (X^{-1})^{\alpha\beta} = & K^{-1} \left\{ K_1^2 + \frac{1}{4} K_3^2 x^2 + K_1 K_3 x - \frac{1}{2} K_2^2 x - \frac{1}{2} K_2 K_4 x^2 - \frac{1}{8} K_4^2 x^3 \right\} g^{\alpha\beta} \\ & - K_1 K_2 B^{\alpha\beta} + \left\{ -\frac{1}{2} K_3^2 x - K_1 K_3 + K_2^2 + K_2 K_4 x + \frac{1}{4} K_4^2 x^2 \right\} B_\gamma^\alpha B^{\gamma\beta} \\ & - K_1 K_4 B_\gamma^\alpha B^\gamma B^{\tau\beta}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

sendo

$$x = B^{\lambda\xi} B_{\xi\lambda} \quad (4.90)$$

e

$$K = K_1^3 + \frac{1}{4} K_1 K_3^2 x^2 + K_1^2 K_3 x - \frac{1}{2} K_1 K_2^2 x - \frac{1}{2} K_1 K_2 K_4 x^2 - \frac{1}{8} K_1 K_4^2 x^3. \quad (4.91)$$

O uso de (4.89) resulta em expressões para o fluxo de calor parcial devido aos elétrons e para o quadrivetor corrente elétrica da forma

$$\begin{aligned} q_e^\sigma = & [\mathcal{A}_q^0 \delta_\nu^\sigma + \mathcal{A}_q^I B_\nu^\sigma + \mathcal{A}_q^{II} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \mathcal{A}_q^{III} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau + \mathcal{A}_q^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\xi^\tau B_\nu^\xi \\ & + \mathcal{A}_q^V B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\lambda^\tau B_\xi^\lambda B_\nu^\xi] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} D U_L^\nu \right) \\ & + [\mathcal{B}_q^0 \delta_\nu^\sigma + \mathcal{B}_q^I B_\nu^\sigma + \mathcal{B}_q^{II} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \mathcal{B}_q^{III} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau + \mathcal{B}_q^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\xi^\tau B_\nu^\xi \\ & + \mathcal{B}_q^V B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\lambda^\tau B_\xi^\lambda B_\nu^\xi] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
I^\sigma = & [\mathcal{A}_i^0 \delta_\nu^\sigma + \mathcal{A}_i^I B_\nu^\sigma + \mathcal{A}_i^{II} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \mathcal{A}_i^{III} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau + \mathcal{A}_i^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\xi^\tau B_\nu^\xi \\
& + \mathcal{A}_i^V B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\lambda^\tau B_\xi^\lambda B_\nu^\xi] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) \\
& + [\mathcal{B}_i^0 \delta_\nu^\sigma + \mathcal{B}_i^I B_\nu^\sigma + \mathcal{B}_i^{II} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \mathcal{B}_i^{III} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau + \mathcal{B}_i^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\xi^\tau B_\nu^\xi \\
& + \mathcal{B}_i^V B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\lambda^\tau B_\xi^\lambda B_\nu^\xi] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \tag{4.93}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_i^0, \dots, \mathcal{B}_i^V$ são combinações² de $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{L}$ e de $x = B^{\lambda\xi} B_{\xi\lambda}$.

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, exposto no apêndice F com base em [32], o fluxo de calor parcial devido aos elétrons e a lei de Ohm podem ser reescritos de maneira equivalente, porém mais compacta:

$$\begin{aligned}
q_e^\sigma = & [\Phi^I \delta_\nu^\sigma + \Phi^{II} B_\nu^\sigma + \Phi^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) \\
& + [\Phi^V \delta_\nu^\sigma + \Phi^{VI} B_\nu^\sigma + \Phi^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \tag{4.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^\sigma = & [\Omega^I \delta_\nu^\sigma + \Omega^{II} B_\nu^\sigma + \Omega^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) \\
& + [\Omega^V \delta_\nu^\sigma + \Omega^{VI} B_\nu^\sigma + \Omega^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \tag{4.95}
\end{aligned}$$

sendo $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ combinações de $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{L}$ e de $\beta(1), \dots, \beta(4)$, cujas definições se encontram no apêndice F. Os termos Φ^I, \dots, Φ^{IV} são os coeficientes de condutividade térmica; $\Omega^V, \dots, \Omega^{VIII}$ são os coeficientes de condutividade elétrica; os demais são termos cruzados. De fato, $\Phi^V, \dots, \Phi^{VIII}$ são os coeficientes do efeito eletro-térmico (i.e., a parte do fluxo de calor associada ao campo elétrico) enquanto que $\Omega^I, \dots, \Omega^{IV}$ são os coeficientes do efeito termo-elétrico (i.e., a parte da corrente elétrica associada ao gradiente de temperatura).

É impraticável trabalhar com a lei de Ohm ou com o fluxo de calor dados nesta forma. Assim, optou-se por certos casos limite, analisando-se misturas de íons ou fótons com

1. Elétrons ultra-relativísticos e não-degenerados;

²Tais combinações - bem como as que aparecem logo a seguir quando se apresentam os coeficientes $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ - são excessivamente extensas, de modo que se optou por não incluí-las no texto desta dissertação.

2. Elétrons **não-relativísticos e não-degenerados**;
3. Elétrons **não-relativísticos e completamente degenerados**;
4. Elétrons **ultra-relativísticos e completamente degenerados**.

Nos casos 1 e 2, o parâmetro ζ_e foi considerado como o mais importante para as simplificações e expansões em série de potências. Nos casos 3 e 4, dois parâmetros se apresentavam como igualmente importantes. Trata-se dos parâmetros ζ_e e x_F ; este último é definido pela equação (3.56). Observe-se que ζ_e e x_F^{-1} têm igual comportamento assintótico nos limites não-relativísticos e ultra-relativísticos. Considerou-se que $x_F^{-1} \approx \alpha \zeta_e$, onde α é um parâmetro auxiliar introduzido para estabelecer uma relação entre x_F^{-1} e ζ_e de modo que as expansões em séries fossem feitas em termos de x_F^{-1} .

Quando se tratava de misturas de elétrons e íons, considerava-se ainda que

$$\xi = \frac{m_e}{m_{ion}} \ll 1, \quad (4.96)$$

de modo que se dispunha de mais um parâmetro para efeito de simplificações.

Outro parâmetro importante nas expressões que seguem é a frequência de cíclotron (ou de Larmor) do elétron ω_{ci} definida em termos da intensidade B do vetor indução magnética por

$$\omega_{ci} = \frac{2\pi}{\tau_{ci}} = \frac{eB}{m_e}. \quad (4.97)$$

Utilizando ω_{ci} , uma simplificação adicional para os coeficientes de transporte pode ser obtida observando uma das condições assumidas como válidas na dedução da equação de Boltzmann relativística. De fato, se o efeito das forças externas não é suficiente para curvar significativamente a trajetória das partículas entre duas colisões sucessivas, pode-se afirmar que o tempo característico para uma translação completa do elétron, τ_{ci} , é muito maior do que o tempo característico entre duas colisões elétron-íon, τ_{ei} , ou elétron-fóton, τ_{ef} . Desta forma,

$$\frac{\tau_{ef}}{\tau_{ci}} \ll 1 \quad (4.98)$$

e

$$\frac{\tau_{ei}}{\tau_{ci}} \ll 1. \quad (4.99)$$

Levando em conta a definição (4.97), pode-se afirmar que

$$\omega_{ci}\tau_{ei} \ll 1 \quad (4.100)$$

e

$$\omega_{ci}\tau_{ef} \ll 1. \quad (4.101)$$

Para proceder a uma análise dos coeficientes, levam-se em conta novamente as expressões para o fluxo de calor e a lei de Ohm:

$$q_e^\sigma = [\Phi^I \delta_\nu^\sigma + \Phi^{II} B_\nu^\sigma + \Phi^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Phi^V \delta_\nu^\sigma + \Phi^{VI} B_\nu^\sigma + \Phi^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (4.102)$$

$$I^\sigma = [\Omega^I \delta_\nu^\sigma + \Omega^{II} B_\nu^\sigma + \Omega^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Omega^V \delta_\nu^\sigma + \Omega^{VI} B_\nu^\sigma + \Omega^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu). \quad (4.103)$$

Algumas comparações entre os coeficientes de transporte podem ser feitas. Antes disso, é conveniente reescrever as duas últimas equações como

$$q_e^\sigma = [\Phi^{*I} \delta_\nu^\sigma + \Phi^{*II} B_\nu^{*\sigma} + \Phi^{*III} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Phi^{*IV} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Phi^{*V} \delta_\nu^\sigma + \Phi^{*VI} B_\nu^{*\sigma} + \Phi^{*VII} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Phi^{*VIII} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (4.104)$$

$$I^\sigma = [\Omega^{*I} \delta_\nu^\sigma + \Omega^{*II} B_\nu^{*\sigma} + \Omega^{*III} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Omega^{*IV} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Omega^{*V} \delta_\nu^\sigma + \Omega^{*VI} B_\nu^{*\sigma} + \Omega^{*VII} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Omega^{*VIII} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (4.105)$$

onde se definem

$$B_\nu^{*\mu} = \frac{B_\nu^\mu}{cB},$$

$$\Phi^{*I} = \Phi^I,$$

$$\Phi^{*II} = \Phi^{II}(cB) = \Phi^{II} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right),$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{*III} &= \Phi^{III}(cB)^2 = \Phi^{III} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^2, \\
\Phi^{*IV} &= \Phi^{IV}(cB)^3 = \Phi^{IV} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^3, \\
\Phi^{*V} &= \Phi^V, \\
\Phi^{*VI} &= \Phi^{VI}(cB) = \Phi^{VI} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right), \\
\Phi^{*VII} &= \Phi^{VII}(cB)^2 = \Phi^{VII} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^2, \\
\Phi^{*VIII} &= \Phi^{VIII}(cB)^3 = \Phi^{VIII} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^3, \\
\Omega^{*I} &= \Omega^I, \\
\Omega^{*II} &= \Omega^{II}(cB) = \Omega^{II} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right), \\
\Omega^{*III} &= \Omega^{III}(cB)^2 = \Omega^{III} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^2, \\
\Omega^{*IV} &= \Omega^{IV}(cB)^3 = \Omega^{IV} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^3, \\
\Omega^{*V} &= \Omega^V, \\
\Omega^{*VI} &= \Omega^{VI}(cB) = \Omega^{VI} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right), \\
\Omega^{*VII} &= \Omega^{VII}(cB)^2 = \Omega^{VII} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^2, \\
\Omega^{*VIII} &= \Omega^{VIII}(cB)^3 = \Omega^{VIII} \left(\frac{cm_e \omega_{ci}}{e} \right)^3.
\end{aligned}$$

Escrevendo o fluxo de calor e a lei de Ohm na forma (4.104), (4.105), é possível comparar de forma simples cada um dos coeficientes que multiplica os mesmos gradientes. As comparações serão feitas entre os coeficientes dentro de cada conjunto

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

sendo esses conjuntos tais que cada um deles reúne coeficientes de **mesma dimensão**.

4.5 Coeficientes de transporte

Os coeficientes de transporte obtidos através de expansões realizadas por programas que utilizam o *Maple* estão listados a seguir. Uma primeira observação é que em praticamente todos os coeficientes obtidos para o caso de elétrons **ultra-relativísticos** não aparecem os fatores $\beta(1)$, ..., $\beta(4)$. A única exceção é o coeficiente Ω^{VII} para uma mistura de elétrons ultra-relativísticos e completamente degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados. Quando se trata dos casos de elétrons **não-relativísticos**, por outro lado, a situação se altera: em quase todos os coeficientes obtidos aparece a dependência em relação a $\beta(1)$, ..., $\beta(4)$, ou seja, aparece explicitamente uma dependência em relação ao campo magnético.

Vale observar que $x_e = n_e/n$ e $x_f = n_f/n$ são respectivamente as frações parciais dos elétrons e dos fótons nas misturas consideradas.

4.5.1 Elétrons ultra-relativísticos

Seguem os coeficientes obtidos para misturas em que os elétrons se encontram no regime ultra-relativístico.

Elétrons ultra-relativísticos e não-degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados

Neste caso,

$$\zeta_e \ll 1$$

e

$$\xi = \frac{m_e}{m_{ion}} \ll 1.$$

Efetuarão-se inicialmente expansões para $\zeta_e \rightarrow 0$ e posteriormente expansões para $\xi \rightarrow 0$. Nenhum dos coeficientes assim obtidos depende do campo magnético, pois não aparecem os fatores $\beta(1)$, ..., $\beta(4)$.

$$\Phi^I = 0.060 \frac{k\tau_{ei}n_e c^2}{Z\xi} \zeta_e,$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{II} &= 0.23 \frac{k\tau_{ei}^2 c n_e e}{m_e} \zeta_e, \\
\Phi^{III} &= 0.12 \frac{k\tau_{ei}^3 n_e e^2}{m_e^2} \zeta_e^2, \\
\Phi^{IV} &= -0.099 \frac{k\tau_{ei}^4 n_e e^3}{c m_e^3} \zeta_e^3, \\
\Phi^V &= 0.25 n_e c^2 \tau_{ei}, \\
\Phi^{VI} &= 0.12 \frac{n_e c \tau_{ei}^2 e}{m_e} \zeta_e, \\
\Phi^{VII} &= 0.048 \frac{n_e \tau_{ei}^3 e^2}{m_e^2} \zeta_e^2, \\
\Phi^{VIII} &= 0.0096 \frac{n_e \tau_{ei}^4 e^3}{c m_e^3} \zeta_e^3, \\
\Omega^I &= 12.24 \frac{n_e k e \tau_{ei} Z^3 \xi^2}{m_{ion} \zeta_e^2}, \\
\Omega^{II} &= -18.72 \frac{n_e k e^2 \tau_{ei}^2 Z^4 \xi^2}{c m_{ion}^2 \zeta_e^2}, \\
\Omega^{III} &= 23.04 \frac{n_e k e^3 \tau_{ei}^3 Z^5 \xi^2}{c^2 m_{ion}^3 \zeta_e^2}, \\
\Omega^{IV} &= -10.56 \frac{n_e k e^4 \tau_{ei}^4 Z^6 \xi^2}{c^3 m_{ion}^4 \zeta_e^2}, \\
\Omega^V &= 3.12 \frac{n_e e \tau_{ei} Z^3 \xi^2}{m_{ion} \zeta_e^2}, \\
\Omega^{VI} &= -4.8 \frac{n_e e^2 \tau_{ei}^2 Z^4 \xi^2}{c m_{ion}^2 \zeta_e^2}, \\
\Omega^{VII} &= 6 \frac{n_e e^3 \tau_{ei}^3 Z^5 \xi^2}{c^2 m_{ion}^3 \zeta_e^2}, \\
\Omega^{VIII} &= -2.64 \frac{n_e e^4 \tau_{ei}^4 Z^6 \xi^2}{c^3 m_{ion}^4 \zeta_e^2}.
\end{aligned}$$

No caso que está sendo analisado, os coeficientes Φ^{*I} , Φ^{*V} , Ω^{*I} e Ω^{*V} são os mais importantes. De fato, dentro de cada um dos conjuntos

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

a ordem de magnitude dos coeficientes diminui da esquerda para a direita de um fator multiplicativo $\omega_{ci}\tau_{ei} \ll 1$.

Desta forma, é possível reescrever o fluxo de calor e a lei de Ohm para este caso como

$$q_e^\sigma = \left[0.060 \frac{k\tau_{ei}n_e c^2}{Z\xi} \zeta_e \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} DU_L^\sigma \right) + [0.25n_e c^2 \tau_{ei}]$$

$$\times (kT\nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma), \quad (4.106)$$

$$I^\sigma = \left[12.24 \frac{n_e k e \tau_{ei} Z^3 \xi^2}{m_{ion} \zeta_e^2} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} DU_L^\sigma \right) + \left[3.12 \frac{n_e e \tau_{ei} Z^3 \xi^2}{m_{ion} \zeta_e^2} \right] (kT\nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \quad (4.107)$$

Outra comparação que pode ser feita é entre os coeficientes associados ao fluxo de calor e os correspondentes coeficientes associados à lei de Ohm. De fato, analisando o módulo das razões entre os coeficientes dominantes Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V e deixando de lado fatores numéricos chega-se a

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{\zeta_e^3}{Z^4 \xi^4} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{\zeta_e^2}{Z^3 \xi^3} \right| \ll 1,$$

pois se considera que no limite de elétrons ultra-relativísticos $\zeta_e \rightarrow 0$. Desta forma, no caso aqui analisado, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Elétrons ultra-relativísticos e não-degenerados e fótons

Neste caso,

$$\zeta_e \ll 1.$$

Efetuarão-se expansões para $\zeta_e \rightarrow 0$. Nenhum dos coeficientes assim obtidos depende do campo magnético, pois não aparecem os fatores $\beta(1), \dots, \beta(4)$. Pode-se perceber ainda que, à medida em que a fração parcial dos elétrons x_e diminui, o módulo de cada um dos coeficientes também diminui.

$$\begin{aligned}
\Phi^I &= -0.077 \frac{c^2 k n x_e \tau_{ef}}{0.026 x_e - 0.28}, \\
\Phi^{II} &= -0.00038 \frac{(-62 + 4.5 x_e) c x_e n k \tau_{ef}^2 e}{m_e (0.026 x_e - 0.28)^2} \zeta_e, \\
\Phi^{III} &= -0.00038 \frac{e^2 \tau_{ef}^3 k n x_e (7.4 - 0.92 x_e + 0.025 x_e^2)}{m_e^2 (0.026 x_e - 0.28)^3} \zeta_e^2, \\
\Phi^{IV} &= 0.00038 \frac{e^3 \tau_{ef}^4 k n x_e (0.024 x_e^2 - 0.27 x_e - 0.83)}{m_e^3 c (0.026 x_e - 0.28)^3} \zeta_e^3, \\
\Phi^V &= -0.070 \frac{n x_e c^2 \tau_{ef}}{0.026 x_e - 0.28}, \\
\Phi^{VI} &= -0.00010 \frac{(-91 + 3.9 x_e) c \tau_{ef}^2 e n x_e}{m_e (0.026 x_e - 0.28)^2} \zeta_e, \\
\Phi^{VII} &= -0.00010 \frac{n x_e e^2 \tau_{ef}^3 (0.025 x_e^2 - 0.87 x_e + 10)}{m_e^2 (0.026 x_e - 0.28)^3} \zeta_e^2, \\
\Phi^{VIII} &= 0.00010 \frac{n x_e e^3 \tau_{ef}^4 (-0.64 x_e + 0.059 x_e^2 - 1.3)}{m_e^3 c (0.026 x_e - 0.28)^3} \zeta_e^3, \\
\Omega^I &= -20 e k x_e n \zeta_e \tau_{ef} [-0.22 x_e^9 10^7 + 0.20 x_e^2 10^7 - 440000 x_e + 17000 x_e^{12} - 1200 x_e^{13} \\
&+ 39 x_e^{14} + 0.56 x_e^8 10^7 - 0.10 x_e^7 10^8 - 130000 x_e^{11} + 650000 x_e^{10} - 0.56 x_e^3 10^7 - 0.13 x_e^5 10^8 \\
&+ 0.10 x_e^4 10^8 + 0.14 x_e^6 10^8 + 43000] / [m_e (-32 + 32 x_e^3 + 95 x_e - 95 x_e^2) \\
&\times (15 x_e - 28) (x_e^5 - 15 x_e^4 + 72 x_e^3 - 120 x_e^2 + 98 x_e - 30)^2], \\
\Omega^{II} &= -500 \tau_{ef}^2 e^2 k x_e n \zeta_e^2 [0.22 x_e^9 10^7 - 860000 x_e^2 + 170000 x_e - 40000 x_e^{12} + 4600 x_e^{13} \\
&- 320 x_e^{14} - 0.44 x_e^8 10^7 + 0.70 x_e^7 10^7 + 220000 x_e^{11} - 800000 x_e^{10} + 11 x_e^{15} + 0.26 x_e^3 10^7 \\
&+ 0.78 x_e^5 10^7 - 0.52 x_e^4 10^7 - 0.88 x_e^6 10^7 - 14000] / [m_e^2 c (-32 + 32 x_e^3 + 95 x_e - 95 x_e^2) \\
&\times (15 x_e - 28)^2 (x_e^5 - 15 x_e^4 + 72 x_e^3 - 120 x_e^2 + 98 x_e - 30)^2], \\
\Omega^{III} &= -800 n x_e k \tau_{ef}^3 e^3 \zeta_e^3 [0.22 x_e^9 10^{11} - 0.25 x_e^2 10^9 \\
&+ 0.33 x_e 10^8 - 0.53 x_e^{12} 10^{10} + 0.21 x_e^{13} 10^{10} - 0.68 x_e^{14} 10^9 \\
&- 0.24 x_e^8 10^{11} + 0.20 x_e^7 10^{11} + 0.10 x_e^{11} 10^{11} - 0.17 x_e^{10} 10^{11} + 0.17 x_e^{15} 10^9 \\
&+ 0.11 x_e^3 10^{10} + 0.78 x_e^5 10^{10} - 0.35 x_e^4 10^{10} - 0.14 x_e^6 10^{11} + 22 x_e^{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -230000 + 35000x_e^{19} - 1500x_e^{20} - 500000x_e^{18} + 0.45x_e^{17}10^7 \\
& \quad - 0.33x_e^{16}10^8]/[m_e^3c^2(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \quad \times (15x_e - 28)^3(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^3], \\
\Omega^{IV} = & -400nx_eke^4\tau_{ef}^4\zeta_e^4[0.75x_e^910^{10}+0.30x_e^210^8-0.70x_e10^7-0.25x_e^{12}10^{10}+0.11x_e^{13}10^{10} \\
& -0.39x_e^{14}10^9 - 0.70x_e^810^{10} + 0.50x_e^710^{10} + 0.46x_e^{11}10^{10} - 0.65x_e^{10}10^{10} + 0.11x_e^{15}10^9 \\
& -0.42x_e^310^8 + 0.10x_e^510^{10} - 0.15x_e^410^9 - 0.28x_e^610^{10} + 33x_e^{21} + 34000x_e^{19} \\
& -1500x_e^{20} - 410000x_e^{18} + 0.35x_e^{17}10^7 - 0.22x_e^{16}10^8 \\
& +650000]/[m_e^4c^3(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)^3(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^3], \\
\Omega^V = & -40[nx_ee\tau_{ef}(9x_e^9 - 4500x_e^2 + 1500x_e - 130x_e^8 + 800x_e^7 + 7500x_e^3 - 210 \\
& + 6000x_e^5 - 8500x_e^4 - 2700x_e^6)\zeta_e/[m_e(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)], \\
\Omega^{VI} = & -40nx_ee^2\tau_{ef}^2\zeta_e^2[(0.87x_e^910^7 - 0.32x_e^210^7 + 620000x_e - 150000x_e^{12} \\
& + 19000x_e^{13} - 1200x_e^{14} - 0.17x_e^810^8 + 0.29x_e^710^8 + 840000x_e^{11} - 0.33x_e^{10}10^7 - 56000 + 33x_e^{15} \\
& + 0.99x_e^310^7 + 32x_e^510^8 - 0.20x_e^410^8 - 0.34x_e^610^8)]/[cm_e^2(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)^2(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^2], \\
\Omega^{VII} = & -1600\tau_{ef}^3e^3x_en\zeta_e^3[0.33x_e^910^{10} - 0.43x_e^210^8 + 0.58x_e10^7 - 0.73x_e^{12}10^9 \\
& + 0.30x_e^{13}10^9 - 0.93x_e^{14} - 0.93x_e^{14}10^8 - 0.33x_e^810^{10} + 0.30x_e^710^{10} + 0.15x_e^{11}10^{10} \\
& - 0.24x_e^{10}10^{10} + 0.24x_e^{15}10^8 + 0.18x_e^310^9 - 380000 + 0.13x_e^510^{10} \\
& - 0.55x_e^410^9 - 0.22x_e^610^{10} + 3x_e^{21} + 4500x_e^{19} \\
& - 190x_e^{20} - 63000x_e^{18} + 630000x_e^{17} - 0.48x_e^{16}10^7]/[m_e^3c^2(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)^3(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^3], \\
\Omega^{VIII} = & -800\tau_{ef}^4e^4x_en\zeta_e^4[0.13x_e^910^{10} + 0.22x_e^210^7 - 650000x_e - 0.40x_e^{12}10^9 + 0.18x_e^{13}10^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.65x_e^{14}10^8 - 0.12x_e^810^{10} + 0.85x_e^710^9 + 0.75x_e^{11}10^9 - 0.11x_e^{10}10^{10} + 0.18x_e^{15}10^8 \\
& + 0.18x_e^310^7 + 65000 + 0.18x_e^510^9 - 0.41x_e^410^8 - 0.45x_e^610^9 + 9x_e^{21} \\
& + 7500x_e^{19} - 350x_e^{20} - 80000x_e^{18} + 600000x_e^{17} \\
& - 0.38x_e^{16}10^7]/[m_e^4c^3(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)^3(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^3].
\end{aligned}$$

Assim como no caso anterior, aqui também os coeficientes Φ^{*I} , Φ^{*V} , Ω^{*I} e Ω^{*V} são os mais importantes. De fato, em cada um dos quatro conjuntos de coeficientes

$$\begin{aligned}
& [\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}], \\
& [\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}], \\
& [\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}], \\
& [\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],
\end{aligned}$$

a ordem de magnitude cai de um fator multiplicativo $\omega_{ci}\tau_{ef}\zeta_e \ll 1$ da esquerda para a direita.

Desta forma, é possível reescrever o fluxo de calor e a lei de Ohm para este caso como

$$\begin{aligned}
q_e^\sigma = - \left[0.077 \frac{c^2 k n x_e \tau_{ef}}{0.026 x_e - 0.28} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right) - \left[0.070 \frac{n x_e c^2 \tau_{ef}}{0.026 x_e - 0.28} \right] \\
\times (k T \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma), \tag{4.108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^\sigma = - \{ 20 e k x_e n \zeta_e \tau_{ef} [-0.22x_e^9 10^7 + 0.20x_e^2 10^7 - 440000x_e + 17000x_e^{12} - 1200x_e^{13} \\
+ 39x_e^{14} + 0.56x_e^8 10^7 - 0.10x_e^7 10^8 - 130000x_e^{11} + 650000x_e^{10} - 0.56x_e^3 10^7 - 0.13x_e^5 10^8 \\
+ 0.10x_e^4 10^8 + 0.14x_e^6 10^8 + 43000]/[m_e(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
\times (15x_e - 28)(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)^2] \} \\
\times \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right) \\
- \{ 40[n x_e e \tau_{ef}(9x_e^9 - 4500x_e^2 + 1500x_e - 130x_e^8 + 800x_e^7 + 7500x_e^3 - 210
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6000x_e^5 - 8500x_e^4 - 2700x_e^6)\zeta_e]/[m_e(-32 + 32x_e^3 + 95x_e - 95x_e^2) \\
& \times (15x_e - 28)(x_e^5 - 15x_e^4 + 72x_e^3 - 120x_e^2 + 98x_e - 30)]\} \\
& \times (kT\nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \tag{4.109}
\end{aligned}$$

Para comparar entre si os coeficientes associados à lei de Ohm e ao fluxo de calor, pode-se efetuar as divisões Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V . Para obter uma primeira aproximação, tomaram-se os módulos de cada coeficiente, desprezaram-se fatores numéricos e a complexa dependência em x_e :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| & \approx \left| \frac{1}{\zeta_e} \right| \gg 1, \\
\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| & \approx \left| \frac{1}{\zeta_e} \right| \gg 1,
\end{aligned}$$

pois no caso de elétrons ultra-relativísticos, $\zeta_e \rightarrow 0$. Deste modo, para este caso os coeficientes associados ao fluxo de calor são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados à lei de Ohm.

Elétrons ultra-relativísticos e completamente degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\zeta_e & \ll 1, \\
x_F^{-1} & \ll 1, \\
\xi & = \frac{m_e}{m_{ion}} \ll 1.
\end{aligned}$$

Efetuarão-se inicialmente expansões para $x_F^{-1} \approx \alpha\zeta_e \rightarrow 0$ e posteriormente expansões para $\xi \rightarrow 0$. Apenas o coeficiente Ω^{VII} depende do campo magnético, através de $\beta(2)$.

$$\begin{aligned}
\Phi^I & = \frac{16}{3} \frac{x_F^4 \zeta_e m_e^3 c^5 \pi \tau_{ei} k}{h^3}, \\
\Phi^{II} & = -\frac{32}{3} \frac{x_F^3 \zeta_e m_e^2 c^4 \pi e \tau_{ei}^2 k}{h^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{III} &= \frac{64 x_F^2 \zeta_e m_e c^3 \pi e^2 \tau_{ei}^3 k}{3 h^3}, \\ \Phi^{IV} &= \frac{16 x_F \zeta_e c^2 \pi e^3 \tau_{ei}^4 k}{3 h^3}, \\ \Phi^V &= \frac{1}{2} \frac{c^2 n_e \tau_{ei}}{x_F^4}, \\ \Phi^{VI} &= -\frac{1}{2} \frac{c n_e e \tau_{ei}^2}{m_e x_F^5}, \\ \Phi^{VII} &= \frac{3 n_e e^2 \tau_{ei}^3}{2 m_e^2 x_F^6}, \\ \Phi^{VIII} &= \frac{1}{2} \frac{n_e e^3 \tau_{ei}^4}{c m_e^3 x_F^7}, \\ \Omega^I &= \frac{16 \tau_{ei} k x_F^3 \zeta_e \pi n_e e m_{ion}^2 c^3 \xi^2}{3 n h^3}, \\ \Omega^{II} &= \frac{16 \tau_{ei}^2 k x_F^3 \zeta_e \pi n_e e^2 m_{ion} c^2 \xi^2 Z}{3 n h^3}, \\ \Omega^{III} &= -\frac{128 e^3 n_e \xi^3 \pi^3 x_F^2 \zeta_e k \tau_{ei}^5 c Z^3}{3 h^3 n \tau_{ci}^2}, \\ \Omega^{IV} &= \frac{16 e^4 n_e \xi \pi x_F^2 \zeta_e k \tau_{ei}^4 Z^2}{3 h^3 m_{ion} n}, \\ \Omega^V &= \frac{Z e n_e^2 \tau_{ei}}{m_{ion} n}, \\ \Omega^{VI} &= 4 \frac{e^2 n_e^2 \tau_{ei}^4 Z^4 \xi^2 \pi^2}{c m_{ion}^2 n \tau_{ci}^2}, \\ \Omega^{VII} &= \frac{Z^4 \tau_{ei}^5 n_e^2 e^5 \beta(2)}{x_F n c^4 m_{ion}^5} \xi^{-1}, \\ \Omega^{VIII} &= \frac{e^4 n_e^2 \tau_{ei}^4 Z^4}{n c^3 m_{ion}^4}.\end{aligned}$$

Novamente os coeficientes Φ^{*I} , Φ^{*V} , Ω^{*I} e Ω^{*V} são os mais importantes. De fato, analisando cada um dos quatro conjuntos de coeficientes

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

a ordem de magnitude cai de um fator multiplicativo $\omega_{ci}\tau_{ei}/x_F \ll 1$ da esquerda para a direita nos dois primeiros conjuntos de coeficientes, enquanto que nos dois últimos (os que se relacionam à lei de Ohm) a análise é um pouco mais delicada. Mesmo assim, observando as dependências em $\omega_{ci}\tau_{ei} \ll 1$ e especialmente em $x_F \gg 1$, pode-se concluir que Ω^{*I} e Ω^{*V} são os termos dominantes. Desta forma, é possível reescrever o fluxo de calor e a lei de Ohm para este caso como

$$q_e^\sigma = \left[\frac{16 x_F^4 \zeta_e m_e^3 c^5 \pi \tau_{ei} k}{3 h^3} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} DU_L^\sigma \right) + \left[\frac{1}{2} \frac{c^2 n_e \tau_{ei}}{x_F^4} \right] \times (kT \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma), \quad (4.110)$$

$$I^\sigma = \left[\frac{16 \tau_{ei} k x_F^3 \zeta_e \pi n_e e m_{ion}^2 c^3 \xi^2}{3 n h^3} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} DU_L^\sigma \right) + \left[\frac{Z e n_e^2 \tau_{ei}}{m_{ion} n} \right] \times (kT \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \quad (4.111)$$

Efetuada as divisões Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V em uma primeira aproximação, tomaram-se os módulos de cada coeficiente e desprezaram-se fatores numéricos, de modo que

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{x_F n}{n_e} \right| \gg 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{n}{Z x_F^4 n_e \xi} \right| \ll 1,$$

pois no caso de elétrons ultra-relativísticos, $x_F \rightarrow \infty$. Deste modo, para este caso o coeficiente de condutividade térmica é mais significativo do que o coeficiente do efeito termo-elétrico, enquanto que no caso dos coeficientes associados ao gradiente de potencial químico ($\nabla^\nu a_e$) a situação se inverte: o coeficiente de condutividade elétrica é mais significativo do que o coeficiente do efeito eletro-térmico.

Elétrons ultra-relativísticos e completamente degenerados e fótons

Neste caso,

$$\zeta_e \ll 1$$

e

$$x_F^{-1} \ll 1.$$

Efetuarão-se expansões para $x_F^{-1} \approx \alpha \zeta_e \rightarrow 0$. Novamente nenhum dos coeficientes obtidos depende do campo magnético, pois os fatores $\beta(1), \dots, \beta(4)$ estão ausentes; além disso, à medida em que x_e diminui, o módulo dos coeficientes relacionados ao gradiente de potencial químico ($\nabla^\sigma a_e$) também diminui.

$$\begin{aligned}
\Phi^I &= \frac{16 c^5 x_F^4 \zeta_e k \tau_{ef} \pi m_e^3}{3 h^3}, \\
\Phi^{II} &= -\frac{32 c^4 m_e^2 x_F^3 \zeta_e \pi \tau_{ef}^2 k e}{3 h^3}, \\
\Phi^{III} &= \frac{64 e^2 \zeta_e x_F^2 k \tau_{ef}^3 \pi c^3 m_e}{3 h^3}, \\
\Phi^{IV} &= \frac{16 c^2 k x_F \zeta_e \tau_{ef}^4 e^3 \pi}{3 h^3}, \\
\Phi^V &= \frac{1}{2} \frac{x_e n \tau_{ef} c^2}{x_F^4}, \\
\Phi^{VI} &= -\frac{1}{2} \frac{c \tau_{ef}^2 e x_e n}{m_e x_F^5}, \\
\Phi^{VII} &= \frac{3}{2} \frac{\tau_{ef}^3 x_e n e^2}{x_F^6 m_e^2}, \\
\Phi^{VIII} &= \frac{1}{2} \frac{n x_e e^3 \tau_{ef}^4}{x_F^7 m_e^3 c}, \\
\Omega^I &= \frac{16 \tau_{ef} x_F^3 \zeta_e k \pi e m_e^2 c^3 (1 - x_e)}{3 h^3}, \\
\Omega^{II} &= \frac{4 \tau_{ef}^2 x_F^2 \zeta_e k \pi e^2 c^2 m_e (4 - 4x_e - x_F \zeta_e x_e)}{3 h^3}, \\
\Omega^{III} &= \frac{4 (x_F \zeta_e x_e + 12x_e - 12) \tau_{ef}^3 k x_F \zeta_e \pi e^3 c}{3 h^3}, \\
\Omega^{IV} &= -\frac{1}{3} \zeta_e k \tau_{ef}^4 e^4 \pi [(x_F^5 \zeta_e^5 x_e^5 + 20 x_F^4 \zeta_e^4 x_e^5 \\
&\quad - 20 x_F^4 \zeta_e^4 x_e^4 + 208 x_e^5 x_F^3 \zeta_e^3 - 416 x_e^4 x_F^3 \zeta_e^3 + 208 x_F^3 \zeta_e^3 x_e^3 + 1600 x_e^5 x_F^2 \zeta_e^2 - 4800 x_e^4 x_F^2 \zeta_e^2 \\
&\quad + 4800 x_e^3 x_F^2 \zeta_e^2 - 1600 x_e^2 x_F^2 \zeta_e^2 + 7680 x_e^5 x_F \zeta_e - 30720 x_e^4 x_F \zeta_e + 46080 x_e^3 x_F \zeta_e - 30720 x_e^2 x_F \zeta_e \\
&\quad + 7680 x_F \zeta_e x_e + 6144 x_e^5 - 30720 x_e^4 + 61440 x_e^3 - 61440 x_e^2 + 30720 x_e - 6144)] / \\
&\quad [(-1 + x_e)(-4 + 4x_e + x_F \zeta_e x_e)^3 m_e h^3], \\
\Omega^V &= \frac{1}{4} \frac{\tau_{ef} e x_e n (4 + x_F \zeta_e x_e - 4x_e)}{m_e x_F},
\end{aligned}$$

$$\Omega^{VI} = \frac{1}{4} \frac{\tau_{ef}^2 e^2 x_e n (4 + x_F \zeta_e x_e - 4x_e)}{m_e^2 c x_F^2},$$

$$\Omega^{VII} = \frac{1}{4} \frac{\tau_{ef}^3 e^3 x_e n (4 + x_F \zeta_e x_e - 4x_e)}{m_e^3 c^2 x_F^3},$$

$$\Omega^{VIII} = -\frac{1}{256} \tau_{ef}^4 e^4 x_e n [(4 + x_F \zeta_e x_e - 4x_e)(-9216 x_e^2 x_F^2 \zeta_e^2 + 36864 x_e^3 x_F^2 \zeta_e^2$$

$$+ 179200 x_e^5 x_F \zeta_e - 358400 x_e^4 x_F \zeta_e + 358400 x_e^3 x_F \zeta_e - 179200 x_e^2 x_F \zeta_e - 16 x_F^5 \zeta_e^5 x_e^5$$

$$- 9216 x_e^6 x_F^2 \zeta_e^2 + x_e^6 x_F^6 \zeta_e^6 + 48 x_e^6 x_F^4 \zeta_e^4 - 96 x_F^4 \zeta_e^4 x_e^5 + 48 x_F^4 \zeta_e^4 x_e^4$$

$$+ 2496 x_e^5 x_F^3 \zeta_e^3 - 2496 x_e^4 x_F^3 \zeta_e^3 + 832 x_F^3 \zeta_e^3 x_e^3 + 36864 x_e^5 x_F^2 \zeta_e^2 - 55296 x_e^4 x_F^2 \zeta_e^2$$

$$+ 98304 x_e + 16 x_e^6 x_F^5 \zeta_e^5 - 832 x_e^6 x_F^3 \zeta_e^3 - 35840 x_e^6 x_F \zeta_e + 35840 x_F \zeta_e x_e$$

$$- 245760 x_e^2 + 98304 x_e^5 - 245760 x_e^4 + 327680 x_e^3 - 16384 x_e^6$$

$$- 16384)] / [m_e^4 c^3 (-1 + x_e)^3 (-4 + 4x_e + x_F \zeta_e x_e)^3 x_F^4].$$

Os coeficientes Φ^{*I} , Φ^{*V} , Ω^{*I} e Ω^{*V} são os mais importantes. De fato, em cada um dos quatro conjuntos de coeficientes

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

a ordem de magnitude cai de um fator multiplicativo $\omega_{ci} \tau_{ef} / x_F \ll 1$ da esquerda para a direita.

Desta forma, é possível reescrever o fluxo de calor e a lei de Ohm para este caso como

$$q_e^\sigma = \left[\frac{16}{3} \frac{c^5 x_F^4 \zeta_e k \tau_{ef} \pi m_e^3}{h^3} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right) + \left[\frac{1}{2} \frac{x_e n \tau_{ef} c^2}{x_F^4} \right] (k T \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma), \quad (4.112)$$

$$I^\sigma = \left[\frac{16}{3} \frac{\tau_{ef} x_F^3 \zeta_e k \pi e m_e^2 c^3 (1 - x_e)}{h^3} \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right)$$

$$+ \left[\frac{1}{4} \frac{\tau_{ef} e x_e n (4 + x_F \zeta_e x_e - 4x_e)}{m_e x_F} \right] (k T \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \quad (4.113)$$

Para comparar entre si os coeficientes associados ao fluxo de calor e à lei de Ohm, pode-se efetuar as divisões Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V . Para obter uma primeira aproximação, tomaram-se os módulos de cada coeficiente e desprezaram-se fatores numéricos, de modo que as razões são dadas por

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx |x_F| \gg 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{1}{x_F^3} \right| \ll 1,$$

pois no caso de elétrons ultra-relativísticos, $x_F \rightarrow \infty$. Deste modo, para este caso o coeficiente de condutividade térmica é mais significativo que o coeficiente do efeito termo-elétrico, enquanto que para os coeficientes associados ao gradiente de potencial químico ($\nabla^\nu a_e$), a situação se inverte.

4.5.2 Elétrons não-relativísticos

Simplificações muito significativas são possíveis para os casos de misturas com elétrons não-relativísticos, cujos coeficientes em geral dependem dos parâmetros $\beta(1)$, ..., $\beta(4)$. Para isso, basta considerar (4.98) a (4.101) e, para facilitar eventuais comparações de ordens de grandeza dos termos que compõem **cada coeficiente**, escrever

$$\beta(n) = (cB)^n \beta^*(n) \quad (4.114)$$

e considerar que a equação (4.97) fornece

$$B^n = \left(\frac{m_e}{e} \omega_{ci} \right)^n. \quad (4.115)$$

Os coeficientes obtidos pelos programas foram submetidos a tais simplificações. Para não estender desnecessariamente esta dissertação, optou-se por mostrar aqui somente os coeficientes já simplificados.

Elétrons e íons não-relativísticos e não-degenerados

Neste caso,

$$\zeta_e \gg 1$$

e

$$\xi = \frac{m_e}{m_{ion}} \ll 1.$$

Efetuarão-se inicialmente expansões para $\zeta_e \rightarrow \infty$ e posteriormente expansões para $\xi \rightarrow 0$. Pode-se observar que todos os coeficientes dependem do campo magnético através de $\beta(1), \dots, \beta(4)$.

$$\begin{aligned} \Phi^I &= -5 \frac{\tau_{ei}^6 k n_e e^5 \beta(1) \beta(4)}{m_{ion}^5 c^3} \xi^{-5}, \\ \Phi^{II} &= 5 \frac{\tau_{ei}^6 k n_e e^5 (-\beta(4) + \beta(1) \beta(3))}{m_{ion}^5 c^3} \xi^{-5}, \\ \Phi^{III} &= -5 \frac{\tau_{ei}^6 k n_e e^5 (-\beta(3) + \beta(1) \beta(2))}{m_{ion}^5 c^3} \xi^{-5}, \\ \Phi^{IV} &= 5 \frac{\tau_{ei}^6 k n_e e^5 (\beta(1)^2 - \beta(2))}{m_{ion}^5 c^3} \xi^{-5}, \\ \Phi^V &= \frac{635}{8} \frac{\tau_{ei}^6 n_e e^5 \beta(1) \beta(4)}{m_{ion}^5 c^3 \zeta_e^2} \xi^{-5}, \\ \Phi^{VI} &= \frac{635}{8} \frac{\tau_{ei}^6 n_e e^5 (\beta(4) - \beta(1) \beta(3))}{m_{ion}^5 c^3 \zeta_e^2} \xi^{-5}, \\ \Phi^{VII} &= \frac{635}{8} \frac{\tau_{ei}^6 n_e e^5 (\beta(1) \beta(2) - \beta(3))}{m_{ion}^5 c^3 \zeta_e^2} \xi^{-5}, \\ \Phi^{VIII} &= -\frac{635}{8} \frac{\tau_{ei}^6 n_e e^5 (\beta(1)^2 - \beta(2))}{m_{ion}^5 c^3 \zeta_e^2} \xi^{-5}, \\ \Omega^I &= \frac{1}{16} \frac{e^6 n_e k \tau_{ei}^6 \zeta_e \beta(1) \beta(4)}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \\ \Omega^{II} &= -\frac{1}{16} \frac{e^6 n_e k \tau_{ei}^6 \zeta_e (\beta(1) \beta(3) - \beta(4))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \\ \Omega^{III} &= \frac{1}{16} \frac{e^6 n_e k \tau_{ei}^6 \zeta_e (\beta(1) \beta(2) - \beta(3))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \\ \Omega^{IV} &= -\frac{1}{16} \frac{e^6 n_e k \tau_{ei}^6 \zeta_e (\beta(1)^2 - \beta(2))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \\ \Omega^V &= \frac{1}{16} \frac{n_e e^6 \tau_{ei}^6 \beta(1) \beta(4)}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \\ \Omega^{VI} &= -\frac{1}{16} \frac{n_e e^6 \tau_{ei}^6 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}, \end{aligned}$$

$$\Omega^{VII} = \frac{1}{16} \frac{n_e e^6 \tau_{ei}^6 (\beta(1)\beta(2) - \beta(3))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6},$$

$$\Omega^{VIII} = -\frac{1}{16} \frac{n_e e^6 \tau_{ei}^6 (\beta(1)^2 - \beta(2))}{c^5 m_{ion}^6} \xi^{-6}.$$

Neste caso, todos os coeficientes dependem do campo magnético, através dos parâmetros $\beta(1), \dots, \beta(4)$. Uma análise dos conjuntos de coeficientes

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

revela neste caso que não se pode destacar alguns coeficientes como sendo os dominantes. De fato, cada um dos conjuntos se compõe de coeficientes de mesma dimensão.

Para comparar os coeficientes relacionados ao fluxo de calor com os correspondentes coeficientes da lei de Ohm, optou-se por analisar as razões Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V , sujeitas às mesmas simplificações já citadas anteriormente:

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{1}{\zeta_e} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{1}{\zeta_e^2} \right| \ll 1,$$

pois no limite de elétrons não-relativísticos, $\zeta_e \rightarrow \infty$. Desta forma, neste caso os coeficientes de condutividade associados à lei de Ohm são mais significativos do que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Elétrons não-relativísticos e não-degenerados e fótons

Neste caso,

$$\zeta_e \gg 1.$$

Efetuaram-se expansões para $\zeta_e \rightarrow \infty$. Neste caso, todos os coeficientes que aparecem na lei de Ohm dependem do campo magnético; o mesmo não acontece com

os coeficientes associados ao fluxo de calor. Pode-se ainda observar que o módulo de todos os coeficientes diminui à medida em que x_e se aproxima de zero.

$$\begin{aligned}\Phi^I &= \frac{45}{2} x_e n k \tau_{ef} c^2, \\ \Phi^{II} &= 40 \frac{x_e n k \tau_{ef}^2 e c}{m_e}, \\ \Phi^{III} &= \frac{115}{2} \frac{x_e n k \tau_{ef}^3 e^2}{m_e^2}, \\ \Phi^{IV} &= \frac{45}{2} \frac{x_e n k \tau_{ef}^4 e^3}{c m_e^3}, \\ \Phi^V &= \frac{35}{2} \frac{n x_e \tau_{ef} c^2}{\zeta_e}, \\ \Phi^{VI} &= 35 \frac{n x_e \tau_{ef}^2 e c}{m_e \zeta_e}, \\ \Phi^{VII} &= \frac{115}{2} \frac{n x_e \tau_{ef}^3 e^2}{m_e^2 \zeta_e}, \\ \Phi^{VIII} &= \frac{35}{2} \frac{n x_e \tau_{ef}^4 e^3}{m_e^3 c \zeta_e}, \\ \Omega^I &= \frac{1}{256} \frac{\tau_{ef}^4 x_e^4 \tau_{ci}^2 e^6 k n \beta(4) \beta(1) \zeta_e^4}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{II} &= -\frac{1}{256} \frac{k n \tau_{ef}^4 e^2 x_e^4 (e^4 \tau_{ci}^4 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4)) + 16 \pi^4 m_e^4 c^4) \zeta_e^4}{c^5 m_e^6 \pi^2 \tau_{ci}^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{III} &= \frac{1}{256} \frac{e^6 \tau_{ef}^4 \tau_{ci}^2 x_e^4 k n (\beta(1) \beta(2) - \beta(3)) \zeta_e^4}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{IV} &= -\frac{1}{256} \frac{\tau_{ef}^4 x_e^4 e^4 k n (8 \pi^2 m_e^2 c^2 + e^2 \tau_{ci}^2 (\beta(1)^2 - \beta(2))) \zeta_e^4}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^V &= \frac{1}{256} \frac{x_e^4 n e^6 \tau_{ef}^4 \tau_{ci}^2 \beta(1) \beta(4) \zeta_e^3}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{VI} &= -\frac{1}{256} \frac{x_e^4 n e^2 \tau_{ef}^4 (e^4 \tau_{ci}^4 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4)) + 16 \pi^4 m_e^4 c^4) \zeta_e^3}{c^5 m_e^6 \pi^2 \tau_{ci}^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{VII} &= \frac{1}{256} \frac{x_e^4 n e^6 \tau_{ef}^4 \tau_{ci}^2 (\beta(1) \beta(2) - \beta(3)) \zeta_e^3}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}, \\ \Omega^{VIII} &= -\frac{1}{256} \frac{x_e^4 n e^4 \tau_{ef}^4 (8 \pi^2 m_e^2 c^2 + e^2 \tau_{ci}^2 (\beta(1)^2 - \beta(2))) \zeta_e^3}{c^5 m_e^6 \pi^2 (1 - x_e)^2}.\end{aligned}$$

Neste caso, é necessário fazer uma distinção entre os coeficientes associados ao fluxo de calor e os coeficientes relacionados à lei de Ohm. De fato, os coeficientes associados aos conjuntos

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

são tais que Φ^{*I} e Φ^{*V} são os termos dominantes; em cada conjunto, da esquerda para a direita os coeficientes são cada vez menores, por um fator multiplicativo $\omega_{ci}\tau_{ef} \ll 1$.

Assim, o fluxo de calor pode ser escrito como

$$q_e^\sigma = \left[\frac{45}{2} x_e n k \tau_{ef} c^2 \right] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right) + \left[\frac{35}{2} \frac{n x_e \tau_{ef} c^2}{\zeta_e} \right] \times (k T \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \quad (4.116)$$

Quanto aos coeficientes associados aos conjuntos

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

são todos de mesma ordem, dentro de cada conjunto.

Para comparar os coeficientes associados ao fluxo de calor e à lei de Ohm, pode-se analisar as razões Φ^I/Ω^I e Φ^V/Ω^V . Com as simplificações já mencionadas anteriormente, e definindo os fatores adimensionais

$$\beta^*(1) = \frac{\beta(1)}{cB}, \quad (4.117)$$

$$\beta^*(4) = \frac{\beta(4)}{(cB)^4}, \quad (4.118)$$

chega-se a

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{(1-x_e)^2}{\zeta_e^4 x_e^3 \beta^*(1) \beta^*(4) (\omega_{ci} \tau_{ef})^3} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{(1-x_e)^2}{\zeta_e^4 x_e^3 \beta^*(1) \beta^*(4) (\omega_{ci} \tau_{ef})^3} \right| \ll 1,$$

pois no limite de elétrons não-relativísticos, $\zeta_e \rightarrow \infty$. Desta forma, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Elétrons não-relativísticos e completamente degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados

Neste caso,

$$\begin{aligned}\zeta_e &\gg 1, \\ x_F^{-1} &\gg 1, \\ \xi &= \frac{m_e}{m_{ion}} \ll 1.\end{aligned}$$

Efetuarão-se inicialmente expansões para $x_F^{-1} \approx \alpha\zeta_e \rightarrow \infty$ e posteriormente expansões para $\xi \rightarrow 0$. Pode-se observar que, com a exceção de Ω^{IV} , todos os coeficientes obtidos dependem do campo magnético.

$$\begin{aligned}\Phi^I &= -512 \frac{Z e^5 x_F^9 n_e \tau_{ei}^6 \zeta_e k \beta(1) \beta(4)}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{II} &= -512 \frac{Z e^5 n_e \tau_{ei}^6 \zeta_e k x_F^9 (\beta(4) - \beta(1) \beta(3))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{III} &= -512 \frac{Z e^5 x_F^9 n_e \tau_{ei}^6 \zeta_e k (\beta(1) \beta(2) - \beta(3))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{IV} &= 512 \frac{Z e^5 x_F^9 n_e \tau_{ei}^6 \zeta_e k (\beta(1)^2 - \beta(2))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^V &= 4096 \frac{Z e^5 x_F^{12} n_e \tau_{ei}^6 \beta(1) \beta(4)}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{VI} &= -4096 \frac{Z e^5 x_F^{12} n_e \tau_{ei}^6 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{VII} &= 4096 \frac{Z e^5 x_F^{12} n_e \tau_{ei}^6 (\beta(1) \beta(2) - \beta(3))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Phi^{VIII} &= -4096 \frac{Z e^5 x_F^{12} n_e \tau_{ei}^6 \tau_{ci}^2 (\beta(1)^2 - \beta(2))}{c^3 m_{ion}^5} \xi^{-4}, \\ \Omega^I &= \frac{1}{4096} \frac{n_e^2 e^5 k \zeta_e \tau_{ci}^6 \beta(4)}{x_F^6 \tau_{ei} Z^2 c^4 n \pi^6 m_{ion}^5} \xi^{-7}, \\ \Omega^{II} &= -\frac{1}{4096} \frac{\zeta_e k e^5 n_e^2 \tau_{ci}^6 \beta(3)}{x_F^6 \tau_{ei} Z^2 c^4 n \pi^6 m_{ion}^5} \xi^{-7}, \\ \Omega^{III} &= \frac{1}{4096} \frac{n_e^2 e^5 k \zeta_e \tau_{ci}^6 \beta(2)}{x_F^6 \tau_{ei} Z^2 c^4 n \pi^6 m_{ion}^5} \xi^{-7},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{IV} &= \frac{1}{4096} \frac{\zeta_e k e^4 n_e^2 \tau_{ci}^6}{x_F^6 \tau_{ei}^2 c^3 n Z^3 \pi^6 m_{ion}^4} \xi^{-7}, \\ \Omega^V &= -\frac{1}{131072} \frac{\tau_{ci}^8 e^6 n_e^2 \beta(1) \beta(4)}{x_F^9 Z^3 c^5 n \tau_{ei}^2 \pi^8 m_{ion}^6} \xi^{-9}, \\ \Omega^{VI} &= \frac{1}{131072} \frac{e^6 n_e^2 \tau_{ci}^8 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4))}{x_F^9 Z^3 c^5 n \tau_{ei}^2 \pi^8 m_{ion}^6} \xi^{-9}, \\ \Omega^{VII} &= -\frac{1}{131072} \frac{\tau_{ci}^8 e^6 n_e^2 (\beta(1) \beta(2) - \beta(3))}{x_F^9 Z^3 c^5 n \tau_{ei}^2 \pi^8 m_{ion}^6} \xi^{-9}, \\ \Omega^{VIII} &= \frac{1}{131072} \frac{n_e^2 e^6 \tau_{ci}^8 (\beta(1)^2 - \beta(2))}{x_F^9 Z^3 c^5 n \tau_{ei}^2 \pi^8 m_{ion}^6} \xi^{-9}.\end{aligned}$$

Neste caso, cada um dos conjuntos de coeficientes

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}],$$

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

se constitui de termos de mesma ordem de grandeza. Não é possível determinar os termos dominantes. Desta forma, o que resta a fazer é comparar entre si os coeficientes associados ao fluxo de calor e à lei de Ohm, através das razões

$$\left| \frac{e\Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{n Z^3 \xi^3 x_F^{15} \beta^*(1) (\omega_{ci} \tau_{ei})^7}{n_e} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{e\Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{n Z^4 x_F^{21} \xi^4}{n_e} \right| \ll 1,$$

pois para elétrons não-relativísticos, $x_F \rightarrow 0$. Deste modo, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos do que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Elétrons não-relativísticos e completamente degenerados e fótons

Neste caso,

$$\zeta_e \gg 1$$

e

$$x_F^{-1} \gg 1.$$

Efetuarão-se expansões para $x_F^{-1} \approx \alpha \zeta_e \rightarrow \infty$. Todos os coeficientes relacionados à lei de Ohm dependem do campo magnético, ao contrário dos demais coeficientes. Além disso, com exceção dos coeficientes de condutividade elétrica (i.e., $\Omega^V, \dots, \Omega^{VIII}$) o módulo dos coeficientes diminui quando x_e se aproxima de zero.

$$\begin{aligned} \Phi^I &= x_e \zeta_e k \tau_{ef} n c^2, \\ \Phi^{II} &= \frac{x_e \zeta_e k \tau_{ef}^2 n e c}{m_e}, \\ \Phi^{III} &= \frac{x_e \zeta_e k \tau_{ef}^3 n e^2}{m_e^2}, \\ \Phi^{IV} &= \frac{x_e \zeta_e k \tau_{ef}^4 n e^3}{m_e^3 c}, \\ \Phi^V &= \frac{1}{4} n x_e \tau_{ef} x_F^4 c^2, \\ \Phi^{VI} &= \frac{1}{2} \frac{n x_e \tau_{ef}^2 e x_F^4 c}{m_e}, \\ \Phi^{VII} &= \frac{3}{4} \frac{n x_e \tau_{ef}^3 e^2 x_F^4}{m_e^2}, \\ \Phi^{VIII} &= \frac{1}{4} \frac{n x_e \tau_{ef}^4 e^3 x_F^4}{m_e^3 c}, \\ \Omega^I &= -\frac{1}{1024} \frac{k \zeta_e n x_e \tau_{ef}^2 e^6 \tau_{ci}^4 \beta(1) \beta(4) (-1 + x_e)}{x_F^6 c^5 \pi^4 m_e^6}, \\ \Omega^{II} &= \frac{1}{1024} \frac{k \zeta_e n x_e \tau_{ef}^2 e^2 (-16 \pi^4 c^4 m_e^4 + e^4 \tau_{ci}^4 (\beta(4) - \beta(1) \beta(3))) (1 - x_e)}{x_F^6 c^5 \pi^4 m_e^6}, \\ \Omega^{III} &= -\frac{1}{1024} \frac{k \zeta_e n x_e \tau_{ef}^2 e^6 \tau_{ci}^4 (\beta(3) - \beta(1) \beta(2)) (1 - x_e)}{x_F^6 c^5 \pi^4 m_e^6}, \\ \Omega^{IV} &= -\frac{1}{1024} \frac{k \zeta_e n x_e \tau_{ef}^2 e^4 \tau_{ci}^2 (-8 c^2 m_e^2 \pi^2 + e^2 \tau_{ci}^2 \beta(2) - e^2 \tau_{ci}^2 \beta(1)^2) (1 - x_e)}{x_F^6 c^5 \pi^4 m_e^6}, \\ \Omega^V &= -\frac{1}{2048} \frac{\tau_{ef}^2 e^6 n \tau_{ci}^4 \beta(1) \beta(4) (1 - x_e)^2}{x_F^9 \zeta_e c^5 \pi^4 m_e^6}, \\ \Omega^{VI} &= \frac{1}{2048} \frac{\tau_{ef}^2 e^2 n (e^4 \tau_{ci}^4 (\beta(1) \beta(3) - \beta(4)) + 16 \pi^4 c^4 m_e^4) (1 - x_e)^2}{x_F^9 \zeta_e c^5 \pi^4 m_e^6}, \end{aligned}$$

$$\Omega^{VII} = -\frac{1}{2048} \frac{\tau_{ef}^2 e^6 n \tau_{ci}^4 (1-x_e)^2 (\beta(1)\beta(2) - \beta(3))}{x_F^9 \zeta_e c^5 \pi^4 m_e^6},$$

$$\Omega^{VIII} = \frac{1}{2048} \frac{\tau_{ef}^2 e^4 n \tau_{ci}^2 (1-x_e)^2 (e^2 \tau_{ci}^2 (\beta(1)^2 - \beta(2)) + 8c^2 m_e^2 \pi^2)}{x_F^9 \zeta_e c^5 \pi^4 m_e^6}.$$

É conveniente analisar inicialmente os coeficientes associados ao fluxo de calor, ou seja,

$$[\Phi^{*I}, \Phi^{*II}, \Phi^{*III}, \Phi^{*IV}],$$

$$[\Phi^{*V}, \Phi^{*VI}, \Phi^{*VII}, \Phi^{*VIII}].$$

Neste caso, os coeficientes mais importantes são Φ^{*I} e Φ^{*V} . Dentro de cada conjunto de coeficientes, da esquerda para a direita os sucessivos coeficientes diminuem por um fator $\omega_{ci} \tau_{ef} \ll 1$. Desta forma, pode-se reescrever o fluxo de calor como

$$q_e^\sigma = [x_e \zeta_e k \tau_{ef} n c^2] \left(\nabla^\sigma T - \frac{T}{c^2} D U_L^\sigma \right) + \left[\frac{1}{4} n x_e \tau_{ef} x_F^4 c^2 \right]$$

$$\times (k T \nabla^\sigma a_e + q_e E^\sigma). \quad (4.119)$$

Quanto aos coeficientes associados à lei de Ohm,

$$[\Omega^{*I}, \Omega^{*II}, \Omega^{*III}, \Omega^{*IV}],$$

$$[\Omega^{*V}, \Omega^{*VI}, \Omega^{*VII}, \Omega^{*VIII}],$$

em cada conjunto de coeficientes, não há diferença de ordem de grandeza. Pode-se apenas comparar os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor e à lei de Ohm através de razões entre Φ^I e Ω^I e entre Φ^V e Ω^V :

$$\left| \frac{e \Phi^I}{m_e c^2 \Omega^I} \right| \approx \left| \frac{x_F^6}{\beta^*(1) \beta^*(4) (x_e - 1) (\omega_{ci} \tau_{ef})} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{e \Phi^V}{m_e c^2 \Omega^V} \right| \approx \left| \frac{x_e x_F^{13}}{\beta^*(1) \beta^*(4) (x_e - 1)^2 (\omega_{ci} \tau_{ef})} \right| \ll 1,$$

pois no limite de elétrons não-relativísticos, $x_F \rightarrow 0$. Desta forma, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, obtiveram-se os coeficientes de condutividade térmica e elétrica e os coeficientes associados a efeitos cruzados para misturas de elétrons com fótons ou íons de carga $Z \gg 1$, submetidos a campos eletromagnéticos. Por razões de ordem prática, os coeficientes apresentados correspondem a certos limites importantes calculados com ajuda computacional. Tais limites se referem aos casos de elétrons não-relativísticos ou ultra-relativísticos e não-degenerados ou completamente degenerados.

Para proceder a uma análise dos coeficientes, levam-se em conta novamente as expressões para o fluxo de calor e a lei de Ohm:

$$q_e^\sigma = [\Phi^I \delta_\nu^\sigma + \Phi^{II} B_\nu^\sigma + \Phi^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Phi^V \delta_\nu^\sigma + \Phi^{VI} B_\nu^\sigma + \Phi^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (5.1)$$

$$I^\sigma = [\Omega^I \delta_\nu^\sigma + \Omega^{II} B_\nu^\sigma + \Omega^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Omega^V \delta_\nu^\sigma + \Omega^{VI} B_\nu^\sigma + \Omega^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu). \quad (5.2)$$

Para facilitar a comparação entre

- Coeficientes de uma mesma lei (i.e., fluxo de calor ou lei de Ohm) e associados aos mesmos gradientes;
- Coeficientes de leis diferentes, mas associados aos mesmos gradientes,

pode-se reescrever (5.1) e (5.2) como

$$q_e^\sigma = [\Phi^{*I} \delta_\nu^\sigma + \Phi^{*II} B_\nu^{*\sigma} + \Phi^{*III} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Phi^{*IV} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Phi^{*V} \delta_\nu^\sigma + \Phi^{*VI} B_\nu^{*\sigma} + \Phi^{*VII} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Phi^{*VIII} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (5.3)$$

$$I^\sigma = [\Omega^{*I} \delta_\nu^\sigma + \Omega^{*II} B_\nu^{*\sigma} + \Omega^{*III} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Omega^{*IV} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) + [\Omega^{*V} \delta_\nu^\sigma + \Omega^{*VI} B_\nu^{*\sigma} + \Omega^{*VII} B_\mu^{*\sigma} B_\nu^{*\mu} + \Omega^{*VIII} B_\mu^{*\sigma} B_\tau^{*\mu} B_\nu^{*\tau}] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu). \quad (5.4)$$

Pode-se resumir a análise dos coeficientes obtidos comentando algumas características de cada uma das misturas consideradas:

- **Elétrons ultra-relativísticos e não-degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados:** Nenhum dos coeficientes $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ depende do campo magnético; os coeficientes relacionados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor;
- **Elétrons ultra-relativísticos e não-degenerados e fótons:** Nenhum dos coeficientes $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ depende do campo magnético; os coeficientes associados ao fluxo de calor são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados à lei de Ohm;
- **Elétrons ultra-relativísticos e completamente degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados:** Somente o coeficiente Ω^{VII} depende do campo magnético; os coeficientes de condutividade térmica são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados à lei de Ohm; para os coeficientes de condutividade associados ao gradiente de potencial químico ($\nabla^\sigma a_e$), a situação se inverte;
- **Elétrons ultra-relativísticos e completamente degenerados e fótons:** Nenhum dos coeficientes $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ depende do campo magnético; assim como no caso anterior, os coeficientes de condutividade térmica são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados à lei de Ohm; para

os coeficientes de condutividade associados ao gradiente de potencial químico ($\nabla^\sigma a_e$), a situação se inverte;

- **Elétrons e íons não-relativísticos e não-degenerados:** Todos os coeficientes $\Phi^I, \dots, \Omega^{VIII}$ dependem do campo magnético; os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor;
- **Elétrons não-relativísticos e não-degenerados e fótons:** Os coeficientes $\Phi^I, \dots, \Phi^{VIII}$ não dependem do campo magnético, enquanto que os coeficientes associados à lei de Ohm dependem do campo, através de $\beta(1), \dots, \beta(4)$; os coeficientes relacionados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes do fluxo de calor;
- **Elétrons não-relativísticos e completamente degenerados e íons não-relativísticos e não-degenerados:** O único coeficiente que não depende do campo magnético é Ω^{IV} ; novamente, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes relacionados ao fluxo de calor;
- **Elétrons não-relativísticos e completamente degenerados e fótons:** Os coeficientes $\Phi^I, \dots, \Phi^{VIII}$ não dependem do campo magnético, enquanto que os demais coeficientes dependem; mais uma vez, os coeficientes associados à lei de Ohm são mais significativos que os correspondentes coeficientes associados ao fluxo de calor.

Numa análise dos coeficientes que foram obtidos, um dos aspectos que se nota com mais clareza é o fato de que no regime de elétrons ultra-relativísticos, quase nenhum dos coeficientes depende do campo magnético através de $\beta(1), \dots, \beta(4)$. No caso de elétrons não-relativísticos, a situação é inversa, ou seja, praticamente todos os coeficientes incluem os fatores $\beta(1), \dots, \beta(4)$.

Outra característica interessante é que para elétrons não-relativísticos, os coeficientes de condutividade associados à lei de Ohm apresentaram-se sempre mais

significativos que os correspondentes coeficientes de condutividade associados ao fluxo de calor.

Por último, considerando a possibilidade de seqüência do trabalho, deve-se levar em conta que certos procedimentos matemáticos utilizados neste trabalho - tais como a inversão de tensores e o uso do teorema de Cayley-Hamilton num espaço quadridimensional que admite a métrica de Minkowski - são úteis para o estudo da viscosidade de cisalhamento, obtida a partir da equação (4.69). Provavelmente não serão necessárias modificações muito significativas nos programas utilizados para o estudo do fluxo de calor e da lei de Ohm.

Apêndice A

Elementos de mecânica relativística

Reúnem-se aqui algumas definições e resultados da mecânica relativística que foram utilizados ao longo desta dissertação.

A.1 Algumas definições

A **velocidade** de uma partícula é definida em termos do quadrivetor

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (\text{A.1})$$

tal que $u^\alpha u_\alpha = c^2$. Na equação acima, $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é a diferencial do tempo próprio; além disso, $(x^\alpha) = (x^0, \vec{x})$, sendo $x^0 = ct$.

O quadrivetor **aceleração** é definido como

$$\omega^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau}. \quad (\text{A.2})$$

Em termos da massa de repouso m de uma partícula, o quadrivetor **quantidade de movimento** é definido como

$$p^\alpha = mu^\alpha, \quad (\text{A.3})$$

e suas componentes contravariantes são

$$(p^\alpha) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = (p^0, \vec{p}). \quad (\text{A.4})$$

O quadrivetor **força** é definido através de

$$\mathcal{K}^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{du^\alpha}{d\tau} = m\omega^\alpha, \quad (\text{A.5})$$

sendo \mathcal{K}^α conhecido como força de Minkowski. Como $u^\alpha u_\alpha = c^2$, pode-se verificar que a força de Minkowski é ortogonal à quadrivelocidade e ao quadrimomento, ou seja,

$$\mathcal{K}^\alpha u_\alpha = 0, \quad \mathcal{K}^\alpha p_\alpha = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Invariantes de Lorentz na teoria cinética

Se A^α é um quadrivetor,

$$A'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha A^\beta, \quad (\text{A.7})$$

e o elemento de volume no espaço quadridimensional gerado pelo quadrivetor é um invariante escalar, pois

$$dA'^0 dA'^1 dA'^2 dA'^3 = |J| dA^0 dA^1 dA^2 dA^3 \quad (\text{A.8})$$

e pode ser verificado que para esta transformação o Jacobiano é igual a 1.

Em teoria cinética é comum encontrar razões como $dA^1 dA^2 dA^3 / A^0$. Pode-se mostrar que essa razão é um invariante escalar, ainda que o seu numerador não o seja.

Para maior facilidade de cálculo, considera-se aqui o caso de dois sistemas inerciais de referência, R e R' , de modo que R' se desloca com velocidade de módulo v em relação a R , sendo essa velocidade na direção do eixo x (cf. figura A.1). A matriz Λ_β^α neste caso se reduz a

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

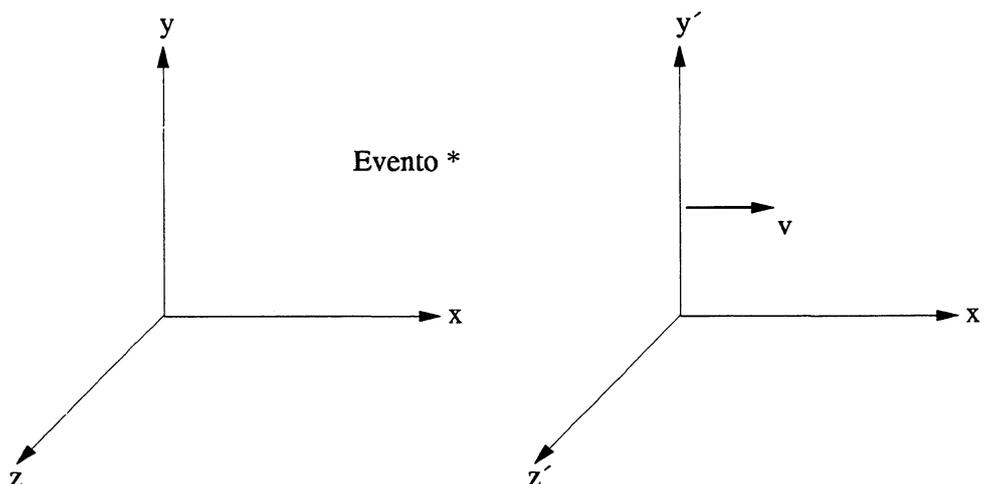


Figura A.1: O referencial inercial (x', y', z') se afasta do referencial inercial (x, y, z) com velocidade \vec{v} .

ou seja,

$$A'^0 = \frac{A^0 - A^1 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A'^1 = \frac{A^1 - A^0 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3. \quad (\text{A.10})$$

A transformação de (A^1, A^2, A^3) para (A'^1, A'^2, A'^3) é tal que

$$dA^1 dA^2 dA^3 = |J| dA'^1 dA'^2 dA'^3, \quad (\text{A.11})$$

sendo J dado por

$$J = \begin{vmatrix} \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \frac{\partial A^0}{\partial A^1}\right) & -\gamma \frac{v}{c} \frac{\partial A^0}{\partial A^2} & -\gamma \frac{v}{c} \frac{\partial A^0}{\partial A^3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$= \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \frac{\partial A^0}{\partial A^1}\right). \quad (\text{A.12})$$

Supondo que o produto $A^\alpha A_\alpha$ é constante, e utilizando a propriedade

$$A^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial A^\gamma} = A_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial A^\gamma} \quad (\text{A.13})$$

chega-se a

$$\frac{\partial A^0}{\partial A^1} = -\frac{A_1}{A_0}. \quad (\text{A.14})$$

O Jacobiano da transformação, com o auxílio das equações anteriores, pode ser escrito como

$$J = \frac{A'_0}{A_0}, \quad (\text{A.15})$$

assim a equação (A.11) implica que a razão considerada é de fato um invariante escalar:

$$\frac{dA^1 dA^2 dA^3}{A^0} = \frac{dA'^1 dA'^2 dA'^3}{A'^0}. \quad (\text{A.16})$$

Como já foi mencionado no início do capítulo 2, o estado do gás no espaço de fase μ e num referencial inercial R é caracterizado por uma função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, de modo que o número de partículas do gás contidas no elemento de volume $d\mu(t) = d^3x d^3p$ é

$$N(t) = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\mu(t). \quad (\text{A.17})$$

O número de partículas contidas no elemento de volume $d\mu(t) = d^3x d^3p$ é um invariante escalar. Além disso, como o quadrimomento $(p^\alpha) = (p^0, \vec{p})$ é um quadrivetor, segue do que foi visto anteriormente que d^3p/p^0 também é um invariante escalar.

Escolhendo agora um referencial inercial denotado por R' como sendo o referencial em repouso, e considerando que R se afasta de R' com velocidade de módulo v ao longo do eixo x , a transformação entre os elementos de volume em cada um dos referenciais é dada por

$$d^3x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d^3x' = \frac{1}{\gamma} d^3x', \quad (\text{A.18})$$

além disso segue da (A4) que

$$p'^0 = \frac{1}{\gamma} p^0. \quad (\text{A.19})$$

Das equações (A.18) e (A.19) e do fato de que d^3p/p^0 é um invariante de Lorentz segue que

$$d^3x d^3p = d^3x \frac{d^3p}{p^0} p^0 = \frac{1}{\gamma} d^3x' \frac{d^3p'}{p'^0} p^0 = \frac{1}{\gamma} d^3x' d^3p' \gamma = d^3x' d^3p'. \quad (\text{A.20})$$

Conclui-se que o elemento de volume $d\mu(t) = d^3x d^3p$ é um invariante de Lorentz.

Apêndice B

Dinâmica da colisão binária

Considere-se o caso em que dois feixes de partículas colidem. Um dos feixes se compõe de partículas com velocidade $\vec{v} = c\vec{p}/p^0$, enquanto que o outro feixe é denotado pelo índice $*$ e tem velocidade $\vec{v}_* = c\vec{p}_*/p_*^0$.

A colisão será analisada inicialmente sob o ponto de vista do referencial no qual as partículas sem índice estão em repouso, ou seja, $\vec{v} = \vec{0}$. Neste referencial, o número de partículas contidas no elemento de volume d^3p será denotado por $dn = f(\vec{x}, \vec{p}, t)d^3p$, e conseqüentemente o número de partículas contidas no elemento de volume $d^3x d^3p$ é dado por $dn d^3x$.

As partículas do feixe $*$ colidem com as partículas do feixe que está em repouso no referencial aqui adotado. Tomando um elemento de volume próprio $d^3x_* = dV_*$, o número total de partículas aí contidas é $dn_* dV_* = dn_* dV / \sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}$, onde v_{rel} é a velocidade relativa entre os feixes. O elemento de volume dV pode ser escrito em termos do cilindro de colisão de base $\sigma d\Omega$ e altura $v_{rel} dt$, sendo dt a diferencial do tempo próprio e σ a secção de choque para este processo de espalhamento. Com isso, pode-se escrever o número total de colisões como o produto dos números de partículas com velocidades \vec{v} e \vec{v}_*

$$dn d^3x \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} dV = dn d^3x \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} (\sigma d\Omega v_{rel} \Delta t). \quad (\text{B.1})$$

Considerando agora o caso mais geral em que $\vec{v} \neq \vec{0}$ com o auxílio da equação

(A.4) e da velocidade relativa de Møller, conveniente para simplificações,

$$g = \sqrt{(\vec{v}^2 - \vec{v}_*^2) - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{v}_*)^2} = v_{rel} \frac{p_\alpha p_*^\alpha}{p^0 p_*^0} \quad (\text{B.2})$$

onde se define como em [16],

$$v_{rel} = \frac{1}{1 - (\vec{v} \cdot \vec{v}_*/c^2)} \sqrt{(\vec{v}^2 - \vec{v}_*^2) - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{v}_*)^2}, \quad (\text{B.3})$$

a equação (B.1) se torna

$$dn d^3x \frac{dn_*}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} dV = f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) d^3p_* g \sigma d\Omega d^3x \Delta t. \quad (\text{B.4})$$

Integrando a última equação sobre as quantidades de movimento \vec{p}_* e sobre o ângulo sólido Ω , encontra-se o número de partículas que deixam o elemento de volume $d^3x d^3p$:

$$(\Delta N)^- = \int_{\Omega} \int_{\vec{p}_*} f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_*, t) g \sigma d\Omega d^3p_* d^3x d^3p \Delta t. \quad (\text{B.5})$$

Considerando agora uma colisão entre dois feixes de partículas com velocidades $\vec{v}_* = c\vec{p}_*/p_*'^0$ e $\vec{v}' = c\vec{p}'/p'^0$, o número de partículas que deixam o elemento de volume $d^3x' d^3p'$ e entram no elemento de volume $d^3x d^3p$ pode ser obtido por análise semelhante à utilizada para encontrar a (B.5):

$$(\Delta N)^+ = \int_{\Omega'} \int_{\vec{p}_*'} f(\vec{x}, \vec{p}', t) f(\vec{x}, \vec{p}_*', t) g' \sigma' d\Omega' d^3p_*' d^3x' d^3p' \Delta t'. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Tensor campo eletromagnético

C.1 Introdução

O tensor campo eletromagnético é um tensor anti-simétrico tal que

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

sendo $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ o vetor campo elétrico e $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ o vetor indução magnética.

Em termos do tensor campo eletromagnético $F^{\alpha\beta}$, a equação de movimento de uma partícula com carga elétrica q no campo eletromagnético é dada por

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta, \quad (\text{C.3})$$

e suas componentes espaciais se reduzem à expressão da força de Lorentz

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]. \quad (\text{C.4})$$

C.2 Decomposição em termos da quadrivelocidade hidrodinâmica

De acordo com van Erkelens e van Leeuwen [23] pode-se decompor o tensor campo eletromagnético $F^{\alpha\beta}$ em duas partes, uma paralela à quadrivelocidade U^α e a outra perpendicular a ela:

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}(F^{\alpha\gamma}U_\gamma U^\beta - F^{\beta\gamma}U_\gamma U^\alpha) + \Delta_\gamma^\alpha F^{\gamma\delta} \Delta_\delta^\beta. \quad (\text{C.5})$$

Introduzindo o quadrivetor E^α e o tensor $B^{\alpha\beta}$ definidos por

$$E^\alpha = \frac{1}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta, \quad B^{\alpha\beta} = -\Delta_\gamma^\alpha F^{\gamma\delta} \Delta_\delta^\beta, \quad (\text{C.6})$$

pode-se escrever $F^{\alpha\beta}$ como

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}(E^\alpha U^\beta - E^\beta U^\alpha) - B^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.7})$$

Num referencial de Lorentz em repouso no fluido as componentes espaciais da quadrivelocidade hidrodinâmica se anulam. De fato, $(U_R^\alpha) = (c, \vec{0})$ e em consequência da definição do tensor campo eletromagnético e da sua decomposição em termos da quadrivelocidade hidrodinâmica, considera-se que

$$(E^\alpha) = (0, \vec{E}), \quad B^{0\alpha} = B^{\alpha 0} = 0, \quad B^{ij} = -c\epsilon^{ijk} B_k, \quad (\text{C.8})$$

de modo que se pode identificar E^α com o campo elétrico e $B^{\alpha\beta}$ com o tensor fluxo de indução magnética. Para obter uma decomposição análoga do tensor campo eletromagnético em termos da quadrivelocidade na descrição de Landau, basta substituir U^α por U_L^α .

Apêndice D

Funções especiais

Na teoria cinética relativística é muito importante a identificação de certas funções especiais, cujas propriedades, muitas delas tabeladas em manuais, tornam mais práticos cálculos que de outra maneira seriam extremamente trabalhosos. Algumas das expansões em séries e relações entre várias das funções especiais utilizadas ao longo deste trabalho são aqui apresentadas.

D.1 Expansões da função $K_n(\zeta)$

A função modificada de Bessel de segunda espécie é muito útil quando se consideram gases não-degenerados. Expansões para $K_n(\zeta)$ em potências de ζ permitem analisar situações nos limites em que o gás se encontra no regime ultra-relativístico ou no regime não-relativístico.

Sendo $K_n(\zeta)$ definida por

$$K_n(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta \cosh \vartheta} \cosh(n\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{D.1})$$

sua expansão para $\zeta \gg 1$ é

$$K_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \frac{1}{e^\zeta} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8\zeta} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8\zeta)^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!(8\zeta)^3} + \dots \right], \quad (\text{D.2})$$

enquanto que para $\zeta \ll 1$,

$$K_n(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n-2k}} + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\ln \frac{\zeta}{2} - \frac{1}{2} \psi(k+1) - \frac{1}{2} \psi(n+k+1) \right], \quad (\text{D.3})$$

sendo $\psi(n)$ definida em termos da constante de Euler $\gamma = 0.577215\dots$ como

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -\gamma. \quad (\text{D.4})$$

D.2 Relações entre as integrais J_{nm} , J_{nm}^\bullet , I_n

As integrais $J_{nm}(\zeta, \mu_E)$, e $I_n(\zeta, \mu_E)$ são respectivamente definidas como

$$J_{nm}(\zeta, a) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{e^{\zeta \cosh \vartheta - a} - \epsilon} d\vartheta, \quad (\text{D.5})$$

$$I_n(\zeta, \mu_E) = \int_0^\infty \frac{\cosh(n\vartheta)}{e^{-\mu_E/kT + \cosh \vartheta} - \epsilon} d\vartheta, \quad (\text{D.6})$$

e a integral $J_{nm}^\bullet(\zeta, \mu_E)$ é a derivada de $J_{n,m}(\zeta, \mu_E)$ em relação a $a = \mu_E/kT$. O uso de relações simples entre as funções trigonométricas hiperbólicas permitem verificar as seguintes relações, que são muito úteis:

$$J_{21} = \frac{1}{4}(I_3 - I_1), \quad J_{22} = \frac{1}{8}(I_4 - I_0), \quad (\text{D.7})$$

$$J_{40} = \frac{1}{8}(I_4 - 4I_2 + 3I_0), \quad J_{41} = \frac{1}{16}(I_5 - 3I_3 + 2I_1), \quad (\text{D.8})$$

$$J_{21}^\bullet = \frac{1}{\zeta}(I_2), \quad J_{22}^\bullet = \frac{1}{4\zeta}(3I_3 + I_1), \quad (\text{D.9})$$

$$J_{23}^\bullet = \frac{1}{2\zeta}(I_4 + I_2), \quad J_{24}^\bullet = \frac{1}{16\zeta}(5I_5 + 9I_3 + 2I_1), \quad (\text{D.10})$$

$$J_{40}^\bullet = \frac{3}{4\zeta}(I_3 - I_1), \quad J_{41}^\bullet = \frac{1}{2\zeta}(I_4 - I_2), \quad (\text{D.11})$$

$$J_{42}^\bullet = \frac{1}{16\zeta}(5I_5 - 3I_3 - 2I_1), \quad J_{43}^\bullet = \frac{3}{16\zeta}(I_6 - I_2), \quad (\text{D.12})$$

$$J_{60}^\bullet = \frac{5}{16\zeta}(I_5 - 3I_3 + 2I_1), \quad J_{61}^\bullet = \frac{1}{16\zeta}(3I_6 - 8I_4 + 5I_2). \quad (\text{D.13})$$

Apêndice E

Cálculos relativos à determinação do terceiro momento parcial dos elétrons

Para encontrar o terceiro momento parcial dos elétrons, é necessário escrever as integrais envolvidas no cálculo em termos de certas representações, mostradas em (4.54) a (4.57). Essas representações envolvem coeficientes cuja determinação requer determinadas projeções, bem como substituições de variáveis e identificações das integrais resultantes em termos de J_{nm} e J_{nm}^* . Neste apêndice, se esboça o procedimento utilizado para encontrar tais coeficientes.

- Da (4.54),

$$\int f_e^{(0)} \phi_n p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{A}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma + \mathcal{A}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha). \quad (\text{E.1})$$

A projeção $U_{L\alpha} U_{L\beta} U_{L\gamma}$ sobre a equação (E.1) resulta em

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{c^6} \int (p_e^\alpha U_{L\alpha})^{3+n} f_e^{(0)} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (\text{E.2})$$

enquanto que a projeção $U_{L\alpha} \Delta_{L\alpha\gamma}$ fornece

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{3c^2} \int (p_e^\alpha U_{L\alpha})^{1+n} \Delta_{L\beta\gamma} p_e^\beta p_e^\gamma f_e^{(0)} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}. \quad (\text{E.3})$$

- Da (4.55),

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{B}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma + \mathcal{B}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha). \quad (\text{E.4})$$

A projeção $U_{L\alpha} U_{L\beta} U_{L\gamma}$ sobre a equação (4.55) resulta em

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{c^6} \int (p_e^\alpha U_{L\alpha})^{3+n} f_e^{(0)} \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (\text{E.5})$$

e a projeção $U_{L\alpha} \Delta_{L\beta\gamma}$ permite afirmar que

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{3c^2} \int (p_e^\alpha U_{L\alpha})^{1+n} \Delta_{L\beta\gamma} p_e^\beta p_e^\gamma f_e^{(0)} \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}. \quad (\text{E.6})$$

- Da (4.56),

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{C}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta + \mathcal{C}_2 (\Delta_L^{\alpha\delta} \Delta_L^{\beta\gamma} + \Delta_L^{\alpha\gamma} \Delta_L^{\delta\beta} + \Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\delta\gamma}) + \mathcal{C}_3 (\Delta_L^{\delta\alpha} U_L^\beta U_L^\gamma + \Delta_L^{\delta\beta} U_L^\alpha U_L^\gamma + \Delta_L^{\delta\gamma} U_L^\beta U_L^\alpha + \Delta_L^{\alpha\beta} U_L^\delta U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma} U_L^\beta U_L^\delta + \Delta_L^{\beta\gamma} U_L^\alpha U_L^\delta), \quad (\text{E.7})$$

A projeção $U_{L\alpha} U_{L\beta} U_{L\gamma} U_{L\delta}$ sobre (E.7) resulta em

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{c^8} \int (U_{L\alpha} p_e^\alpha)^{4+n} \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (\text{E.8})$$

a projeção $\Delta_{L\alpha\beta} \Delta_{L\gamma\delta}$ fornece

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{15} \int (U_{L\alpha} p_e^\alpha)^n (\Delta_{L\alpha\beta} p_e^\alpha p_e^\beta) (\Delta_{L\gamma\delta} p_e^\gamma p_e^\delta) \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (\text{E.9})$$

e por fim a projeção $\Delta_{L\alpha\beta} U_{L\gamma} U_{L\delta}$ resulta em

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{3c^4} \int (\Delta_{L\alpha\beta} p_e^\alpha p_e^\beta) (U_{L\alpha} p_e^\alpha)^{2+n} \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}. \quad (\text{E.10})$$

- Da (4.57),

$$\int f_e^{(0)} \phi_n \frac{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e + B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} p_e^\alpha p_e^\beta p_e^\gamma p_e^\delta \frac{d^3 p_e}{p_e^0} = \mathcal{D}_1 U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta U_L^\phi + \mathcal{D}_2 (\Delta_L^{\alpha\beta} \Delta_L^{\gamma\delta} U_L^\phi$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta_L^{\alpha\gamma}\Delta_L^{\beta\delta}U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\delta}\Delta_L^{\beta\gamma}U_L^\phi + \Delta_L^{\beta\gamma}\Delta_L^{\delta\phi}U_L^\alpha + \Delta_L^{\beta\phi}\Delta_L^{\gamma\delta}U_L^\alpha + \Delta_L^{\beta\delta}\Delta_L^{\gamma\phi}U_L^\alpha \\
& +\Delta_L^{\alpha\gamma}\Delta_L^{\delta\phi}U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\phi}\Delta_L^{\gamma\delta}U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\delta}\Delta_L^{\gamma\phi}U_L^\beta + \Delta_L^{\alpha\beta}\Delta_L^{\delta\phi}U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\phi}\Delta_L^{\beta\delta}U_L^\gamma \\
& +\Delta_L^{\alpha\delta}\Delta_L^{\beta\phi}U_L^\gamma + \Delta_L^{\alpha\gamma}\Delta_L^{\beta\phi}U_L^\delta + \Delta_L^{\alpha\beta}\Delta_L^{\gamma\phi}U_L^\delta + \Delta_L^{\alpha\phi}\Delta_L^{\beta\gamma}U_L^\delta + \mathcal{D}_3(\Delta_L^{\alpha\beta}U_L^\gamma U_L^\delta U_L^\phi \\
& +\Delta_L^{\alpha\gamma}U_L^\beta U_L^\delta U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\delta}U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\phi + \Delta_L^{\alpha\phi}U_L^\beta U_L^\gamma U_L^\delta + \Delta_L^{\beta\gamma}U_L^\alpha U_L^\delta U_L^\phi + \Delta_L^{\beta\delta}U_L^\alpha U_L^\gamma U_L^\phi \\
& +\Delta_L^{\beta\phi}U_L^\alpha U_L^\gamma U_L^\delta + \Delta_L^{\gamma\delta}U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\phi + \Delta_L^{\gamma\phi}U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\delta + \Delta_L^{\delta\phi}U_L^\alpha U_L^\beta U_L^\gamma). \quad (E.11)
\end{aligned}$$

A projeção $U_{L\alpha}U_{L\beta}U_{L\gamma}U_{L\delta}U_{L\phi}$ sobre a (E.11) resulta em

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{c^{10}} \int (U_{L\alpha}p_e^\alpha)^{5+n} \frac{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (E.12)$$

a projeção $\Delta_{L\alpha\beta}\Delta_{L\gamma\delta}U_{L\phi}$ fornece

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{15c^2} \int (\Delta_{L\alpha\beta}p_e^\alpha p_e^\beta)(\Delta_{L\gamma\delta}p_e^\gamma p_e^\delta)(p_{e\phi}U_{L\phi})^{1+n} \frac{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}, \quad (E.13)$$

e através da projeção $\Delta_{L\alpha\beta}U_{L\gamma}U_{L\delta}U_{L\phi}$, se verifica que

$$\mathcal{D}_3 = \frac{1}{3c^6} \int (\Delta_{L\alpha\beta}p_e^\alpha p_e^\beta)(p_e^\phi U_{L\phi})^{3+n} \frac{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}}}{e^{-a_e+B_e^\alpha p_{e\alpha}} + 1} \frac{d^3 p_e}{p_e^0}. \quad (E.14)$$

Os coeficientes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{D}_3$ podem ser escritos em termos de

$$J_{nm}(\zeta_e, a_e) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{e^{\zeta_e \cosh \vartheta - a_e} + 1} d\vartheta, \quad (E.15)$$

e

$$J_{nm}^\bullet(\zeta_e, a_e) = \int_0^\infty \sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta \frac{e^{\zeta_e \cosh \vartheta}}{(e^{\zeta_e \cosh \vartheta - a_e} + 1)^2} d\vartheta, \quad (E.16)$$

bastando para isso considerar um referencial de Lorentz em repouso no fluido e utilizar a substituição de variáveis

$$B_e^\alpha p_{e\alpha} = \frac{p_e^0 \zeta_e}{m_e c} = \zeta_e \cosh \vartheta, \quad (E.17)$$

e as igualdades

$$d^3 p_e = |\vec{p}_e|^2 \sinh \vartheta d|\vec{p}_e| d\theta d\phi, \quad (E.18)$$

$$|\vec{p}_e|^2 = p_{e0}^2 - m_e^2 c^2 = m_e^2 c^2 \sinh^2 \vartheta, \quad (E.19)$$

$$\frac{d|\vec{p}_e|}{p_{e0}} = d\vartheta. \quad (E.20)$$

Convém lembrar que no referencial de Lorentz em repouso no fluido o projetor toma a forma

$$\Delta_{LR}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.21})$$

de maneira que se pode considerar

$$\Delta_{L\alpha\beta} p_e^\alpha p_e^\beta = -((p_e^1)^2 + (p_e^2)^2 + (p_e^3)^2) = -|\vec{p}_e|^2. \quad (\text{E.22})$$

Apêndice F

Teorema de Cayley-Hamilton

De acordo com a equação (1.7),

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}, \quad (\text{F.1})$$

sendo que δ_{α}^{γ} pode ser representado por

$$\delta_{\alpha}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2})$$

Neste apêndice, é conveniente introduzir as notações

$$T_{1\beta_1}^{\alpha_1} T_{2\beta_2}^{\alpha_2} \cdots T_{n\beta_n}^{\alpha_n} = \frac{1}{n!} \delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} T_{1\beta_1}^{\tilde{\alpha}_1} T_{2\beta_2}^{\tilde{\alpha}_2} \cdots T_{n\beta_n}^{\tilde{\alpha}_n}, \quad (\text{F.3})$$

$$T_{1[\beta_1}^{\alpha_1} T_{2\beta_2}^{\alpha_2} \cdots T_{n\beta_n}^{\alpha_n}] = \frac{1}{n!} \delta_{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_n}^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} T_{1\tilde{\beta}_1}^{\alpha_1} T_{2\tilde{\beta}_2}^{\alpha_2} \cdots T_{n\tilde{\beta}_n}^{\alpha_n}, \quad (\text{F.4})$$

$$T_{1[\beta_1}^{\alpha_1} T_{2\beta_2}^{\alpha_2} \cdots T_{n\beta_n}^{\alpha_n}] = \frac{1}{(n!)^2} \delta_{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_n}^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} \delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} T_{1\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} T_{2\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2} \cdots T_{n\tilde{\beta}_n}^{\tilde{\alpha}_n}, \quad (\text{F.5})$$

onde T_1, T_2, \dots, T_n são tensores de segunda ordem num espaço m -dimensional, e

$$\delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \epsilon_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_n}, \quad (\text{F.6})$$

$$\delta_{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_n}^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} = \epsilon^{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \cdots \tilde{\beta}_n} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}, \quad (\text{F.7})$$

sendo $\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}, \dots, \epsilon_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$ tensores de Levi-Civita de n-ésima ordem que obedecem a relações análogas à (1.8):

$$\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\epsilon_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\dots\tilde{\alpha}_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_1} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_1} & \dots & \delta_{\tilde{\alpha}_n}^{\alpha_1} \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_2} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_2} & \dots & \delta_{\tilde{\alpha}_n}^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_n} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_n} & \dots & \delta_{\tilde{\alpha}_n}^{\alpha_n} \end{vmatrix}, \quad (\text{F.8})$$

$$\epsilon^{\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\dots\tilde{\beta}_n}\epsilon_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_1} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_1} & \dots & \delta_{\beta_n}^{\tilde{\beta}_1} \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_2} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_2} & \dots & \delta_{\beta_n}^{\tilde{\beta}_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_n} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_n} & \dots & \delta_{\beta_n}^{\tilde{\beta}_n} \end{vmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

Em quatro dimensões pode-se verificar que é válida a seguinte identidade:

$$T_{[\beta_1}^{\alpha_1} T_{\beta_2}^{\alpha_2} T_{\beta_3}^{\alpha_3} T_{\beta_4}^{\alpha_4} \delta_{\beta_5}^{\alpha_5}] = 0, \quad (\text{F.10})$$

que é um caso específico de uma relação mais geral, válida para qualquer tensor T de segunda ordem: se o espaço é m-dimensional,

$$T_{[\beta_1}^{\alpha_1} T_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots T_{\beta_m}^{\alpha_m} \delta_{\beta_{m+1}}^{\alpha_{m+1}}] = 0. \quad (\text{F.11})$$

Pode-se reescrever a equação (F.10) através da equação (F.5) como

$$\delta_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_4\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} \delta_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5}^{\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_4\tilde{\beta}_5} T_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} T_{\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2} T_{\tilde{\beta}_3}^{\tilde{\alpha}_3} T_{\tilde{\beta}_4}^{\tilde{\alpha}_4} \delta_{\tilde{\beta}_5}^{\tilde{\alpha}_5} = 0, \quad (\text{F.12})$$

ou, em termos de determinantes como em (F.8) e (F.9),

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 T_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} T_{\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2} T_{\tilde{\beta}_3}^{\tilde{\alpha}_3} T_{\tilde{\beta}_4}^{\tilde{\alpha}_4} \delta_{\tilde{\beta}_5}^{\tilde{\alpha}_5} = 0, \quad (\text{F.13})$$

onde

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_1} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_1} & \delta_{\tilde{\alpha}_3}^{\alpha_1} & \delta_{\tilde{\alpha}_4}^{\alpha_1} & \delta_{\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_1} \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_2} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_2} & \delta_{\tilde{\alpha}_3}^{\alpha_2} & \delta_{\tilde{\alpha}_4}^{\alpha_2} & \delta_{\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_2} \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_3} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_3} & \delta_{\tilde{\alpha}_3}^{\alpha_3} & \delta_{\tilde{\alpha}_4}^{\alpha_3} & \delta_{\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_3} \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_4} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_4} & \delta_{\tilde{\alpha}_3}^{\alpha_4} & \delta_{\tilde{\alpha}_4}^{\alpha_4} & \delta_{\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_4} \\ \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_5} & \delta_{\tilde{\alpha}_2}^{\alpha_5} & \delta_{\tilde{\alpha}_3}^{\alpha_5} & \delta_{\tilde{\alpha}_4}^{\alpha_5} & \delta_{\tilde{\alpha}_5}^{\alpha_5} \end{vmatrix} \quad (\text{F.14})$$

e

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_1} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_1} & \delta_{\beta_3}^{\tilde{\beta}_1} & \delta_{\beta_4}^{\tilde{\beta}_1} & \delta_{\beta_5}^{\tilde{\beta}_1} \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_2} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_2} & \delta_{\beta_3}^{\tilde{\beta}_2} & \delta_{\beta_4}^{\tilde{\beta}_2} & \delta_{\beta_5}^{\tilde{\beta}_2} \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_3} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_3} & \delta_{\beta_3}^{\tilde{\beta}_3} & \delta_{\beta_4}^{\tilde{\beta}_3} & \delta_{\beta_5}^{\tilde{\beta}_3} \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_4} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_4} & \delta_{\beta_3}^{\tilde{\beta}_4} & \delta_{\beta_4}^{\tilde{\beta}_4} & \delta_{\beta_5}^{\tilde{\beta}_4} \\ \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_5} & \delta_{\beta_2}^{\tilde{\beta}_5} & \delta_{\beta_3}^{\tilde{\beta}_5} & \delta_{\beta_4}^{\tilde{\beta}_5} & \delta_{\beta_5}^{\tilde{\beta}_5} \end{vmatrix}. \quad (\text{F.15})$$

Desenvolvendo os determinantes (F.14) e (F.15) que aparecem na equação (F.13) e utilizando a definição (F.5), chega-se à expressão do teorema de Cayley-Hamilton para o tensor de segunda ordem T num espaço quadridimensional:

$$\begin{aligned} & \delta_{\beta}^{\alpha} T_{[\beta_1}^{\alpha_1} T_{\beta_2}^{\alpha_2} T_{\beta_3}^{\alpha_3} T_{\beta_4}^{\alpha_4]} - T_{\beta}^{\alpha} T_{[\beta_1}^{\alpha_1} T_{\beta_2}^{\alpha_2} T_{\beta_3}^{\alpha_3}] + T_{\gamma}^{\alpha} T_{\beta}^{\gamma} T_{[\beta_1}^{\alpha_1} T_{\beta_2}^{\alpha_2]} \\ & - T_{\gamma}^{\alpha} T_{\sigma}^{\gamma} T_{\beta}^{\sigma} T_{[\beta_1}^{\alpha_1]} + T_{\gamma}^{\alpha} T_{\sigma}^{\gamma} T_{\lambda}^{\sigma} T_{\beta}^{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Para o tensor fluxo de indução magnética B^{α}_{β} , o teorema de Cayley-Hamilton pode ser escrito como

$$\delta^{\alpha}_{\beta} \beta(4) - B^{\alpha}_{\beta} \beta(3) + B^{\alpha}_{\gamma} B^{\gamma}_{\beta} \beta(2) - B^{\alpha}_{\gamma} B^{\gamma}_{\sigma} B^{\sigma}_{\beta} \beta(1) + B^{\alpha}_{\gamma} B^{\gamma}_{\sigma} B^{\sigma}_{\lambda} B^{\lambda}_{\beta} = 0, \quad (\text{F.17})$$

onde se definiram $\beta(1)$, $\beta(2)$, $\beta(3)$ e $\beta(4)$ como

$$\beta(1) = B_{[\beta_1}^{[\alpha_1]} = \delta_{\tilde{\alpha}_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_1}^{\tilde{\beta}_1} B_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1}, \quad (\text{F.18})$$

$$\beta(2) = B_{[\beta_1}^{[\alpha_1} B_{\beta_2}^{\alpha_2]} = \frac{1}{4} \delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\beta_1 \beta_2}^{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2} B_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} B_{\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2}, \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{aligned} \beta(3) &= B_{[\beta_1}^{[\alpha_1} B_{\beta_2}^{\alpha_2} B_{\beta_3}^{\alpha_3]} \\ &= \frac{1}{36} \delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3} B_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} B_{\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2} B_{\tilde{\beta}_3}^{\tilde{\alpha}_3}, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

$$\begin{aligned} \beta(4) &= B_{[\beta_1}^{[\alpha_1} B_{\beta_2}^{\alpha_2} B_{\beta_3}^{\alpha_3} B_{\beta_4}^{\alpha_4]} \\ &= \frac{1}{576} \delta_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_4}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}^{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \tilde{\beta}_4} B_{\tilde{\beta}_1}^{\tilde{\alpha}_1} B_{\tilde{\beta}_2}^{\tilde{\alpha}_2} B_{\tilde{\beta}_3}^{\tilde{\alpha}_3} B_{\tilde{\beta}_4}^{\tilde{\alpha}_4}. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Com o auxílio da equação (F.17) é que se passou de expressões da forma (4.92), (4.93) às equações

$$q_e^{\sigma} = [\Phi^I \delta_{\nu}^{\sigma} + \Phi^{II} B_{\nu}^{\sigma} + \Phi^{III} B_{\mu}^{\sigma} B_{\nu}^{\mu} + \Phi^{IV} B_{\mu}^{\sigma} B_{\tau}^{\mu} B_{\nu}^{\tau}] \left(\nabla^{\nu} T - \frac{T}{c^2} D U_L^{\nu} \right)$$

$$+ [\Phi^V \delta_\nu^\sigma + \Phi^{VI} B_\nu^\sigma + \Phi^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Phi^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (\text{F.22})$$

$$I^\sigma = [\Omega^I \delta_\nu^\sigma + \Omega^{II} B_\nu^\sigma + \Omega^{III} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{IV} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] \left(\nabla^\nu T - \frac{T}{c^2} DU_L^\nu \right) \\ + [\Omega^V \delta_\nu^\sigma + \Omega^{VI} B_\nu^\sigma + \Omega^{VII} B_\mu^\sigma B_\nu^\mu + \Omega^{VIII} B_\mu^\sigma B_\tau^\mu B_\nu^\tau] (kT \nabla^\nu a_e + q_e E^\nu), \quad (\text{F.23})$$

como exposto no capítulo 4. Neste processo se introduzem nos coeficientes de transporte os fatores $\beta(1), \dots, \beta(4)$.

Bibliografia

- [1] Jüttner, F.: Die Dynamik eines bewegten Gases in der Relativtheorie *Ann. Physik* **34** (1911) 145-161
- [2] Jüttner, F.: Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie *Ann. Physik* **34** (1911) 856-882
- [3] Jüttner, F.: Die relativistische Quantentheorie des idealen Gases *Z. Physik* **47** (1928) 542-566
- [4] Lichnerowitz, A. e Marrot, R.: Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité restreinte *C. R. Acad. Sci. Paris* **210** (1940) 759-761
- [5] Israel, W.: Relativistic kinetic theory of a simple gas *J. Math. Phys.* **4** (1963) 1163-1181
- [6] Kelly, D.C.: The kinetic theory of a relativistic gas (não publicado) *Miami University, Oxford* (1963)
- [7] Chernikov, N.A.: Microscopic foundation of relativistic hydrodynamics *Acta Phys. Polon.* **27** (1964) 465-489
- [8] Vignon, B.: Une méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A10** (1969) 31-66
- [9] Marle, C.: Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs - I. L'équation de Boltzmann relativiste, II. Méthodes de

- résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste *Ann. Inst. Henri Poincaré* **A10** (1969) 67-194
- [10] Chandrasekhar, S.: An introduction to the study of stellar structure *Dover, Nova Iorque* (1989)
- [11] de Groot, S.R., van Leeuwen, W.A. e van Weert, C.G.: Relativistic kinetic theory *North-Holland, Amsterdam* (1980)
- [12] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. e Krook, M.: A model for collision processes in gases - I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems *Phys. Rev.* **94** (1954) 511-525
- [13] Marle, C.: Modèle cinétique pour l'établissement des lois de la conduction de la chaleur et de la viscosité en théorie de la relativité *C. R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965) 6539-6541
- [14] Anderson, J.L. e Witting, H.R.: A relativistic relaxation-time model for the Boltzmann equation *Physica* **74** (1974) 466-488
- [15] Anderson, J.L. e Witting, H.R.: Relativistic quantum transport coefficients *Physica* **74** (1974) 489-495
- [16] Kremer, G.M.: Uma introdução à teoria cinética relativística *Editores da UFPR, Curitiba* (1998)
- [17] Kremer, G.M.: Transport processes in ionized gases *Braz. Journal of Physics* **27** (1997) 402-406
- [18] Uehling, E.A. e Uhlenbeck, G.E.: Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases - I *Phys. Rev.* **43** (1933) 552-561
- [19] Cercignani, C. e Kremer, G.M.: On relativistic collisional invariants *J. Stat. Phys.* **96** (1999) 439-445

- [20] Eckart, C.: The thermodynamics of irreversible processes - III: Relativistic theory of the simple fluid *Phys. Rev.* **58** (1940) 919-924
- [21] Stueckelberg, E.C.G. e Wanders, G.: Thermodynamique en relativité général *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 307-316
- [22] Hebenstreit, H.: Balance equations for a relativistic plasma *Physica* **117A** (1983) 631-652
- [23] van Erkelens, H. e van Leeuwen, W.A.: Relativistic Boltzmann theory for a plasma - I. The entropy production *Physica* **89A** (1977) 113-126
- [24] van Erkelens, H. e van Leeuwen, W.A.: Relativistic Boltzmann theory for a plasma - X. Electrical conduction of the cosmological fluid *Physica* **123A** (1984) 72-98
- [25] Müller, I. e Ruggeri, T.: Extended thermodynamics *Springer Verlag, Berlim* (1988)
- [26] Landau, L.D. e Lifshitz, E.M.: Course of theoretical physics - volume 6 (Fluid mechanics) - segunda edição *Pergamon Press* (1987)
- [27] Pathria, R.K.: Statistical mechanics *Pergamon Press, Oxford* (1972)
- [28] Abramowitz, M. e Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions *Dover, Nova Iorque* (1968)
- [29] Lifshitz, E.M. e Pitaevskii, L.P.: Physical kinetics *Pergamon Press, Oxford* (1993)
- [30] Chapman, S. e Cowling, T.G.: The mathematical theory of non-uniform gases *Cambridge University Press, Cambridge* (1970)
- [31] Alexandrov, A.F., Bogdankevich, L.S. e Rukhadze, A.A.: Principles of plasma electrodynamics *Springer Verlag, Berlim* (1984)

- [32] Eringen, C. A.: Continuum physics - volume 1: Mathematics *Academic Press*,
Nova Iorque 1971