

VANILDO RODRIGUES

O Nivelamento Trigonométrico como Apoio Altimétrico à Densificação Gravimétrica

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-
Graduação em Ciências Geodésicas para
obtenção do Grau de Mestre em Ciências
pela Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA
1988

O NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO COMO APOIO
ALTIMÉTRICO À DENSIFICAÇÃO GRAVIMÉTRICA

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do Paraná .

Por

VANILDO RODRIGUES, Engenheiro Agrimensor

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1988

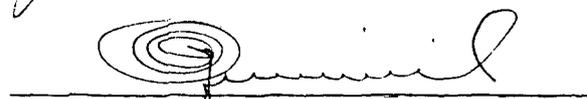
BANCA EXAMINADORA



DR. CAMIL GEMAEI - ORIENTADOR



Ph.D. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE



M.Sc. QUINTINO DALMOLIN

À
minha esposa Zaida
e
minha filha Cassia

AGRADECIMENTOS

O autor deseja externar seus profundos agradecimentos ao Professor Dr. Camil Gemael, orientador do presente trabalho, bem como as pessoas e instituições abaixo relacionadas:

José Bittencourt de Andrade;
Ziocélito José Bardini;
Wanda Cristina Menezes;
Carlos Loch;
Gilberto Oenning;
Hyreval Azevedo;
ESTEC;
FUCRI;
CIA CARBONÍFERA PRÓSPERA;
ICC;
ENGETOP;
UFPr;
CAPES;
ACAFE;

e a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

O presente trabalho consiste na realização de experiências a respeito da determinação de altitudes por **nivelamento trigonométrico**, visando a aplicação do mesmo para apoio cartográfico à densificação gravimétrica. Foi aplicado o método das distâncias zenitais recíprocas, com observações simultâneas e com observações quase simultâneas, sendo as distâncias obtidas eletronicamente; foram também realizados cálculos utilizando observações simultâneas e distâncias gráficas. São apresentadas as altitudes obtidas pelos diferentes processos e a comparação dos resultados.

ABSTRACT

This paper, as herein submitted, consists of experiences developed towards the settling of altitudes by means of **trigonometric leveling** intended to be used as supporting material on gravimetric densification and cartographic purposes. The method used was that of zenith reciprocal distances followed by simultaneous and semi-simultaneous observations, having such distances been obtained by electronic means. Besides, calculations were also carried out by simultaneous observations and graphic distances. Altitudes attained during the various processings, and comparison by results, are also shown.

C O N T E Ú D O

TERMO DE APROVAÇÃO	ii
DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS.....	iv
SUMÁRIO.....	v
ABSTRACT.....	vi
CONTEÚDO	vii
INTRODUÇÃO.....	x
1. DETERMINAÇÃO DE ALTITUDES.....	01
1.1 Introdução.....	01
1.2 Considerações sobre densificação gravimétrica.....	05
1.3 Número geopotencial e altitude dinâmica..	11
1.4 Altitude ortométrica.....	16
1.5 Altitude normal.....	19
1.6 O sistema de altitudes adotado no Brasil.	22
1.6.1 A altitude usada no Brasil.....	22
1.6.2 O datum vertical.....	27
1.7 Considerações sobre determinação dos desníveis por nivelamento geométrico e barométrico.....	29
1.7.1 Nivelamento geométrico.....	29
1.7.2 Nivelamento barométrico.....	31
2. NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO.....	34
2.1 Introdução.....	34
2.2 Influências da curvatura e refração.....	34

2.2.1	Curvatura.....	34
2.2.2	Refração terrestre.....	36
2.2.3	Coeficiente de refração.....	40
2.3	Determinação dos desníveis por distâncias zenitais recíprocas e simultâneas.....	41
2.4	Redução das distâncias zenitais ao marco	47
2.5	Determinação dos desníveis por distâncias zenitais unilaterais.....	47
3.	NIVELAMENTO DE UM TRECHO DA BR-101.....	50
3.1	Introdução.....	50
3.2	Reconhecimento.....	50
3.2.1	Importância.....	50
3.2.2	Reconhecimento e identificação das RNs..	50
3.2.3	Estabelecimento dos pontos intermediários e implantação dos marcos.....	51
3.3	Sinalização.....	54
3.4	Medição.....	55
3.4.1	Material empregado.....	55
3.4.2	Medição linear.....	55
3.4.3	Medição angular.....	55
3.4.4	Critérios de rejeição.....	57
3.4.5	Determinação de RNs auxiliares.....	62
3.5	Trabalho de gabinete.....	63
3.5.1	Transcrição dos valores observados.....	63
3.5.2	Redução das distâncias zenitais ao marco.....	63
3.5.3	Cálculo das altitudes.....	63

3.6	Considerações finais.....	64
4.	RESULTADOS.....	67
4.1	Introdução.....	67
4.2	Resultados.....	67
4.3	Comparação entre os resultados obtidos....	68
4.4	Comparação das altitudes das RNs com os va lores calculados.....	68
4.5	Observações.....	69
5.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	74
5.1	Conclusões.....	74
5.2	Recomendações.....	75
	APÊNDICE	76
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80

INTRODUÇÃO

Existem vários sistemas de altitudes, cada um deles representado por um conjunto de altitudes de uma mesma espécie associadas a todos os pontos de uma determinada região. No Brasil usa-se o chamado sistema de altitudes "ortométricas".

Tradicionalmente as altitudes "ortométricas" tem sido empregadas para fins de mapeamento, pois a definição de um ponto na superfície física da Terra, como elemento básico para a elaboração de uma carta exige, além das suas coordenadas planas, a sua altitude. No entanto, as altitudes tem várias finalidades nem sempre restritas ao âmbito da geodésia.

Uma das importantes aplicações das altitudes, convém lembrar, é o apoio cartográfico à densificação gravimétrica, onde se está interessado na determinação de anomalias da gravidade. Para o cálculo das anomalias da gravidade as estações devem possuir altitudes conhecidas para a redução ao geóide dos valores observados da gravidade.

Um dos objetivos da realização deste trabalho é verificar a possibilidade da aplicação do nivelamento trigonométrico para a determinação de altitudes destinadas ao apoio cartográfico à densificação gravimétrica, tendo em vista que o nivelamento barométrico é pouco preciso e o nivelamento geométrico, em que pese a sua maior precisão, nos parece tornar-se anti-econômico, pois só permite lances curtos - avanço máximo de 100m.

No Capítulo 1, são apresentados os sistemas de altitudes mais importantes, fazendo-se também considerações so-

bre a determinação dos desníveis por nivelamento geométrico e barométrico.

No Capítulo 2 faz-se um estudo sobre o nivelamento trigonométrico, apresentando o método das distâncias zenitais recíprocas e simultâneas e o método das distâncias zenitais unilaterais, bem como, as influências da curvatura e refração terrestre.

No Capítulo 3, faz-se a descrição das experiências realizadas, apresentando todas as etapas de medição e cálculos desenvolvidos durante o nivelamento trigonométrico de um trecho da BR-101, no Estado de Santa Catarina.

No Capítulo 4 apresenta-se os resultados obtidos, com a comparação e análise dos mesmos.

1. DETERMINAÇÃO DE ALTITUDES

1.1 Introdução

Genericamente define-se a altitude de um ponto da superfície física da Terra como sendo a distância, medida ao longo da vertical, deste ponto à superfície equipotencial*, que tem, por convenção altitude zero. No sistema de altitudes ortométricas (seção 1.4), tal superfície, bem definida fisicamente mas não materializada recebe o nome de geóide [12].

A posição relativa de um ponto da superfície física da Terra é dada pela latitude e longitude de sua projeção normal (projeção de HELMERT) sobre o elipsóide de referência adotado. Assim, para a concepção de um terno coerente o posicionamento altimétrico seria então dado pela distância contada sobre a normal ao elipsóide, entre este ponto e a superfície do mesmo, chamada de altitude elipsóidica H. Entretanto, como definido acima, o geóide (em primeira aproximação coincidente com o nível médio dos mares - NMM) tem sido utilizado como superfície de referência para o posicionamento altimétrico.

A altitude elipsóidica H pode ser obtida com a expressão aproximada:

$$H \doteq h^0 + N \quad (1.1)$$

(*) Superfície equipotencial é a superfície que apresenta o mesmo potencial em todos os seus pontos.

onde h^o é a altitude ortométrica e N é a altura geoidal (separação entre o geóide e o elipsóide). O ponto sobre o sinal de igualdade é para enfatizar que a expressão fornece um valor aproximado, pois h^o é contado ao longo da vertical e N ao longo da normal.

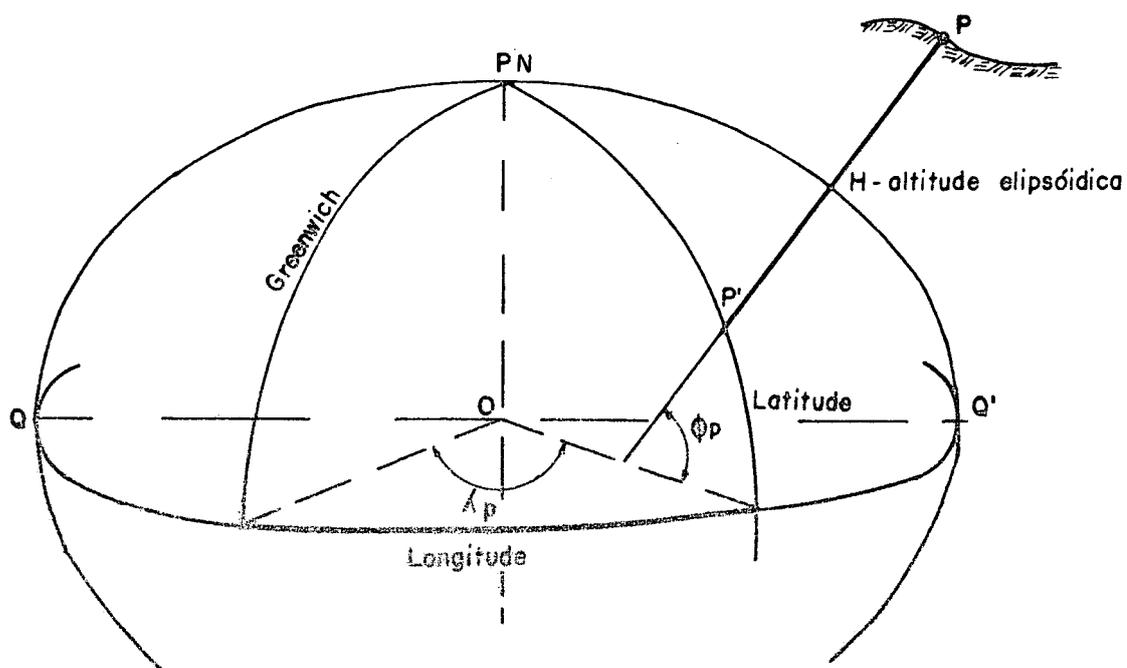


FIGURA 1 - Coordenadas Geodésicas Elipsóidicas.

Tradicionalmente as altitudes tem sido empregadas para fins de mapeamento, entretanto, uma rede de pontos com posições altimétricas bem definidas tem várias finalidades, nem sempre restritas ao âmbito da Geodésia. Por exemplo, as altitudes elipsóidicas são necessárias para a redução ao elipsóide das distâncias medidas entre pontos da superfície terrestre; as estações de uma rede gravimétrica devem possuir altitudes ortométricas conhecidas para reduzir ao geóide os valores observados da gravidade; e também, a detecção de variações de altitudes pressupõe a existência de uma rede de pontos com altitudes bem definidas [08].

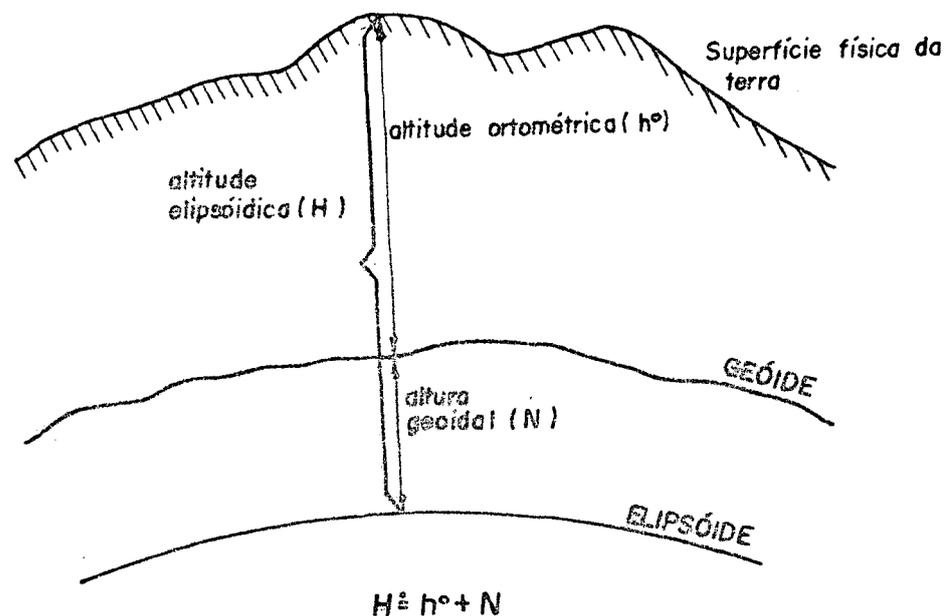


FIGURA 2 - Altitude elipsóidica, altitude ortométrica e altura geoidal.

Também em outros setores das atividades humanas a necessidade da determinação de altitudes se faz presente , tal como em projetos de engenharia, em estudos geológicos , em projetos afetos ao meio ambiente, na Geografia, na Hidrologia, em Urbanismo, etc...

Os três métodos usuais de determinação de altitudes são aqui mencionados rapidamente, na ordem decrescente da precisão que se pode deles esperar: nivelamento geométrico, nivelamento trigonométrico e nivelamento barométrico.

- Nivelamento geométrico

É conduzido com nível de luneta e miras graduadas aparentando certa semelhança com aquele estudado em Topografia. Porém, em Geodésia utiliza-se instrumental mais aperfeiçoado e cerca-se de precauções especiais considerando correções de que o topógrafo não cogita. É um método relativo pois proporciona diferenças de altitude; neste método pode-se falar em precisão da ordem do milímetro.

- Nivelamento trigonométrico

É executado nas triangulações e poligonais geodésicas e baseia-se na leitura de ângulos verticais e na resolução de um triângulo. É também um método relativo, atingindo precisão da ordem de decímetros.

- Nivelamento barométrico

Baseia-se no decréscimo da pressão atmosférica com a altitude; o instrumento utilizado é o aneróide. Trata-se de um método absoluto, propiciando precisão da ordem de metro o que restringe sua utilização às regiões em fase de reconhecimento.

1.2 Considerações sobre densificação gravimétrica

Na introdução foi mencionado como um dos objetivos deste trabalho, a aplicação do nivelamento trigonométrico para dar apoio cartográfico à densificação gravimétrica; portanto, julga-se necessário fazer algumas considerações a este respeito.

A densificação gravimétrica está interessada em obter anomalia da gravidade - elemento comum ao geodesta, ao geólogo e ao geofísico.

A anomalia da gravidade é definida como sendo a diferença entre o valor da gravidade observada g reduzida ao geóide e o valor da gravidade normal γ , calculada sobre o elipsóide de referência:

$$\Delta g = g_o - \gamma \quad (1.2)$$

o índice na (1.2) é para enfatizar que a gravidade concerne a um ponto do geóide.

Para reduzir ao nível médio dos mares a gravidade observada na superfície terrestre introduz-se a chamada **correção do ar livre** ou **correção de FAYE**; então a (1.2) toma a forma |19|:

$$\Delta g_F = g + 0,3086 h - \gamma \quad (1.3)$$

e a anomalia resultante é chamada **anomalia do ar livre** ou **anomalia de FAYE**, sendo g e γ usados em miligal e h em metros.

Podem ainda ser efetuadas outras reduções: por exemplo, a aplicação do teorema de STOKES para a determinação gravimétrica das ondulações do geóide pressupõe a inexistência de massas externas a este, e, a "eliminação"*de tais massas, ditas topográficas, se processa em duas etapas |12|:

- Redução de BOUGUER

Que conduz à anomalia de BOUGUER e que considera as massas topográficas situadas nas "zonas laterais de Hayford"

$$\Delta g_B = \Delta g_F + C_B \quad (1.4)$$

sendo C_B a correção de BOUGUER, que é constituída de três parcelas:

$$C_B = - A - B + C \quad (1.5)$$

onde:

A representa a componente vertical da atração das massas do platô de BOUGUER;

$$A = 0,1118 h$$

B representa a correção que converte o platô em uma "calota" esférica de mesma espessura e com raio de 166,7 km, que se estende até a zona " O " de HAYFORD; é um valor que se encontra tabelado.

(*) Eliminação no sentido matemático.

C é a "correção do terreno" ; sua determinação só é possível com auxílio de cartas altimétricas da região vizinha, ou seja, das zonas numeradas.

- Redução isostática

Que elimina as massas topográficas do resto do mundo, bem como, as correspondentes "massas de compensação":

$$\Delta g_I = \Delta g_B + C_{IZL} + C_{TI}$$

sendo:

C_{IZL} a correção isostática correspondente às zonas literais de HAYFORD;

C_{TI} a correção topo-isostática para as zonas numeradas .

A correção isostática pode ser efetuada nos sistemas PRATT - HAYFORD ou AIRY - HEISKANEN, com auxílio das correspondentes tabelas e cartas de iso-correção.

É fácil perceber que o cálculo da anomalia da gravidade de pressupõe a caracterização cartográfica da estação gravimétrica, pois a altitude é indispensável ao cálculo das correções de FAYE e BOUGUER, esta última exigindo ainda, quando se considera a "correção do terreno", mapas altimétricos que cubram as zonas literais de Hayford; a latitude da estação é necessária para o cálculo da gravidade normal.

Numa rápida análise da (1.3), verifica-se que um erro de 1 metro na determinação da altitude implica num erro de 0,3 miligal na anomalia de FAYE; por outro lado, utilizando

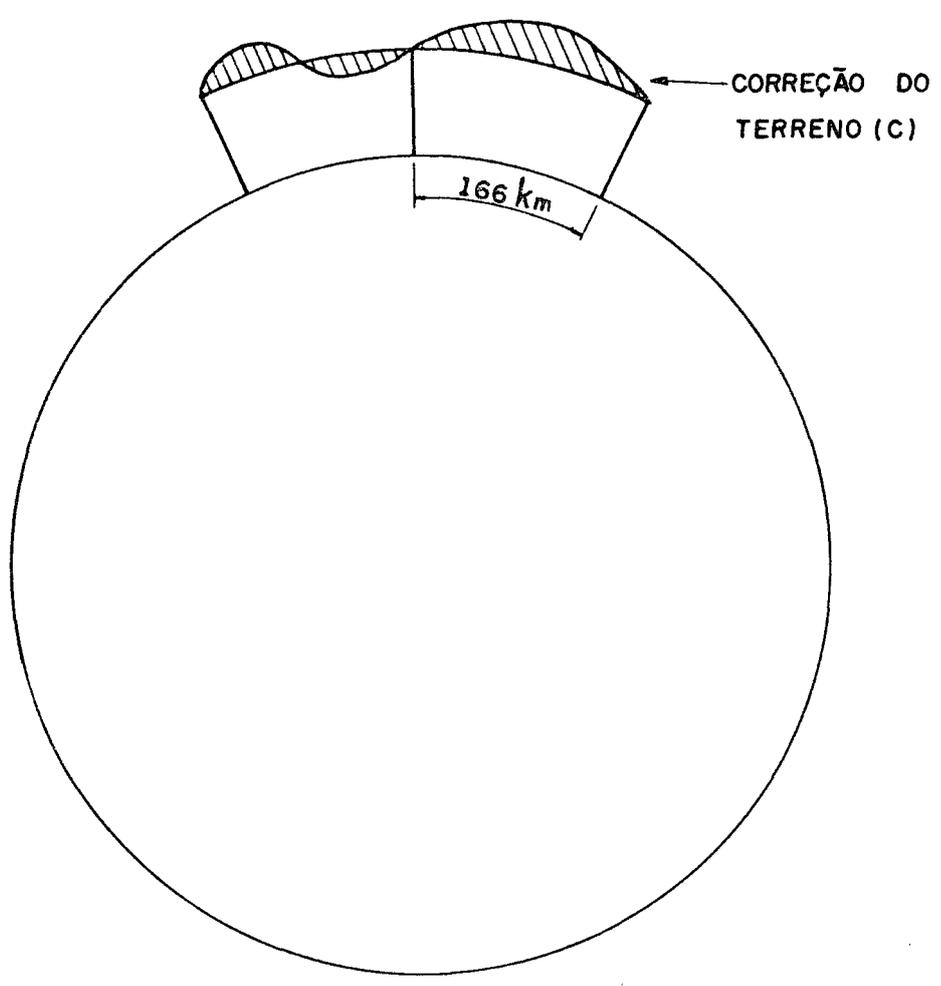
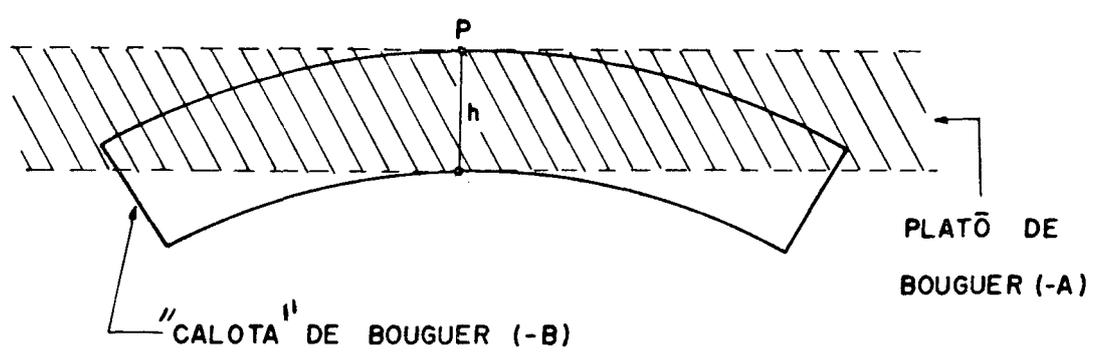


FIGURA 3 - Correção de BOUGUER

um gravímetro, como por exemplo, o Wordem ou LaCoste Romberg, para a determinação de "g" , pode-se falar em precisão da ordem de, respectivamente, 0,1 e 0,01 miligal.

A latitude pode ser retirada de cartas; a altitude, para uso geral, pode também ser retirada de cartas ou obtida por qualquer dos três métodos de nivelamento aqui apresentados.

A **interpolação** do valor de h em cartas de escala 1:50.000, nas quais a equidistância vertical entre curvas de nível é 20 metros, pode proporcionar erro bem superior a 1 metro, pois geralmente o terreno é irregular .

O **nivelamento barométrico** é rápido e exige pequeno efetivo das turmas de trabalho porém, é de baixa precisão.

O **nivelamento geométrico**, convém recordar, é o mais preciso dos três mas, por outro lado é muito lento, permitindo o avanço máximo de 100 metros por lance, e exige grande efetivo das turmas de trabalho.

O **nivelamento trigonométrico** é menos preciso que o geométrico porém, é mais rápido, permitindo lances de vários quilômetros, e exige um efetivo relativamente pequeno das turmas de trabalho, constituindo-se num método mais econômico em tempo e custo. É importante lembrar que a precisão dentro do decímetro (quadro 4.4), satisfaz as necessidades da densificação gravimétrica.

1.3 Número geopotencial e altitude dinâmica

A figura 4 lembra o princípio do nivelamento geométrico, que é conduzido com nível de luneta e miras graduadas e que fornece desníveis ou diferenças de altitude. A diferença das leituras l_1 e l_2 efetuadas sobre as miras postadas nos pontos 1 e 2 respectivamente é a diferença de altitude.

$$\Delta h_{1-2} = l_1 - l_2 \quad (1.7)$$

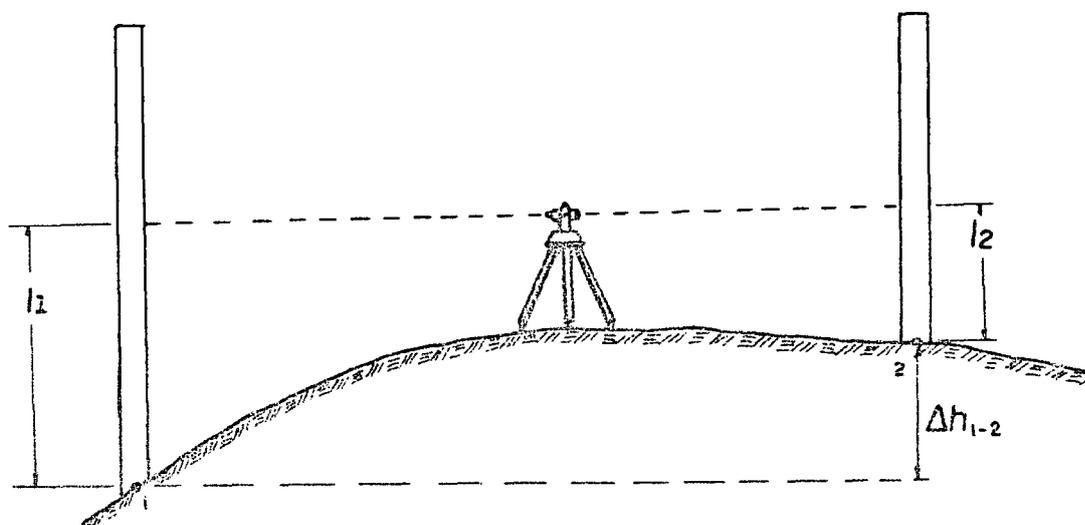


FIGURA 4 - Nivelamento geométrico.

Quando se realiza um circuito de nivelamento (que é uma linha fechada de nivelamento) a soma algébrica dos desníveis, em geral, não será exatamente zero, mesmo que as observações sejam realizadas com a mais perfeita exatidão; isto ocorre devido ao não paralelismo das superfícies equipotenciais.

A figura 5 ilustra o procedimento aplicado ao nivelamento geométrico, conduzido de A até B. Então, a soma dos desníveis brutos obtidos em cada seção nivelada não será igual a diferença entre as altitudes ortométricas h_A^o e h_B^o . Tal ocorrência se verifica porque o nivelamento é incrementado por uma diferença Δz_i que é diferente do correspondente incremento Δh_i da altitude h_B^o (figura 5), devido ao já mencionado não paralelismo das superfícies equipotenciais

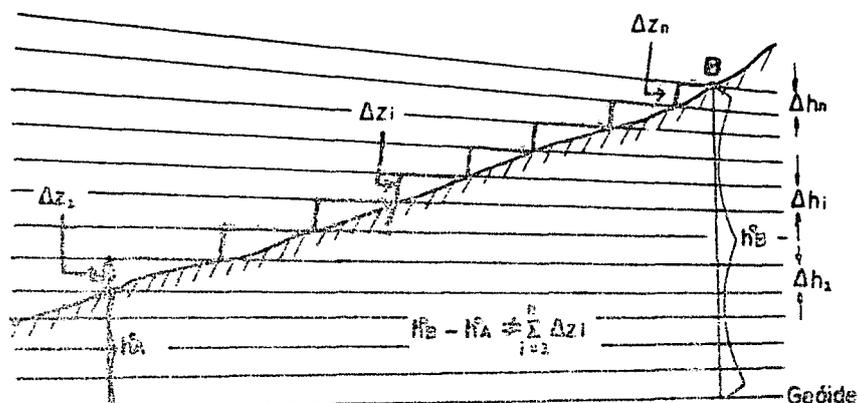


FIGURA 5 - Nivelamento e diferença de altitude.

Considerando duas superfícies equipotenciais infinitamente próximas, separadas por um deslocamento dz ; a diferença de geopotencial dW representa o trabalho elementar dT da gravidade, para transportar uma partícula de massa unitária

(*) Geopotencial - é o potencial do campo da gravidade terrestre.

ria de uma superfície à outra, ou seja:

$$dW = dT = gdz \quad (1.8)$$

Então, a diferença de geopotencial entre os pontos A e B é determinado com a integral abaixo:

$$W_B - W_A = \int_A^B gdz \quad (1.9)$$

A integral é conduzida ao longo da superfície terrestre entre os pontos A e B, sendo então g o valor observado da gravidade no referido trecho.

Considerando-se agora uma linha de nivelamento que liga um ponto O da superfície do geóide a um ponto P qualquer da superfície física da Terra - de geopotencial W_P -, a diferença de geopotencial entre os dois pontos será, com base na (1.9).

$$W_O - W_P = \int_O^P gdz = C_P \quad (1.10)$$

que é o número geopotencial do ponto P.

Então, o número geopotencial - C_P - de um ponto P qualquer da superfície física da Terra pode ser definido como a diferença entre os geopotenciais do geóide e do geope* que contém o referido ponto.

(*) Geope - é a denominação dada às superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre.

Como na prática não se dispõe de uma distribuição contínua das grandezas envolvidas no cálculo do número geopotencial, a integral que se faz presente na expressão (1.10) pode ser substituída por uma soma finita de termos e o valor aproximado do número geopotencial no ponto P é:

$$C_P = W_O - W_P = \sum_0^P g_i \Delta z_i \quad (1.11)$$

Sendo Δz_i os desníveis brutos fornecidos pela operação de nivelamento e g_i as médias aritméticas dos valores observados da gravidade nos extremos de cada seção nivelada.

O número geopotencial é nulo para os pontos pertencentes ao geóide, negativo para os pontos situados abaixo e positivo para os pontos situados acima deste, sendo constante para um mesmo geope.

O número geopotencial W_O é desconhecido, portanto atribui-se a ele o mesmo valor do esferopotencial* referente a superfície do modelo [14]: Elipsóide de referência 1967

$$W_O = U_O = 6.263.703 \text{ ugp}$$

sendo ugp a unidade geopotencial, onde

$$\begin{aligned} 1 \text{ ugp} &= 1 \text{ kilogal.metro} = 1000 \text{ gal.metro} = \\ &= 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

Como se pode perceber, os números geopotenciais não são expressos em unidades de comprimento o que se consti

(*) Esferopotencial - é o potencial do campo da gravidade normal.

tui num problema para usá-los como sistema de referência para o posicionamento altimétrico.

A conversão dos números geopotenciais em unidades de comprimento requer uma divisão por um valor de gravidade. Quando tal valor é a gravidade normal * para uma latitude padrão arbitrária, obtém-se as chamadas **altitudes dinâmicas**. Normalmente usa-se a gravidade normal para uma latitude de 45° , podendo-se no entanto usar uma latitude média para a região considerada. A **altitude dinâmica** de um ponto P é então dada por:

$$h_P^D = \frac{C_P}{\gamma(\phi)} \quad (1.12)$$

onde:

C_P é o número geopotencial do ponto P e

$\gamma(\phi)$ é a gravidade normal para a latitude padrão ϕ , que pode ser obtida com precisão de segunda ordem com a expressão [12]:

$$\gamma(\phi) = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \phi + \beta' \sin^2 2\phi) \quad (1.13)$$

Na (1.13), γ_e é a gravidade normal no equador, β e β' são coeficientes que dependem das dimensões do elipsóide de referência e da velocidade de rotação.

Para a elipsóide de referência 1967, a (1.13) assume a forma:

(*) Gravidade normal é a gravidade da terra normal, isto é, do modelo elipsóidico utilizado como a aproximação da Terra real.

$$\gamma(\phi) = 978,031846(1+0,005\ 302\ 3655 \sin^2\phi - 0,000\ 005\ 9 \sin^2\ 2\phi) \text{ gal} \quad (1.14)$$

A **diferença de altitude dinâmica** entre dois pontos A e B é dada por

$$\Delta h_{AB}^D = h_B^D - h_A^D = \frac{C_B - C_A}{\gamma_{45^\circ}} = \frac{\Delta C_{AB}}{\gamma_{45^\circ}} \quad (1.15)$$

Na prática mede-se desníveis Δz_{AB} que podem ser transformados em diferenças de altitudes mediante correções adequadas. Então a diferença de altitude dinâmica entre os dois pontos nivelados é dada por |14|:

$$\Delta h_{AB}^D = \Delta z_{AB} + CD_{AB}, \quad (1.16)$$

sendo CD_{AB} a correção dinâmica, obtida coma expressão:

$$CD_{AB} = \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta z_i, \quad (1.17)$$

Obviamente a **altitude dinâmica** não tem significado geométrico, pois a divisão por um γ de valor constante somente obscurece o significado físico inerente aos números geopotenciais. Na realidade, tanto o sistema de números geopotenciais como o das altitudes dinâmicas representam grandezas físicas não muito intuitivas, pois descrevem pontos sobre a mesma superfície equipotencial como sendo igualmente elevados.

1.4 Altitude ortométrica

A altitude ortométrica de um ponto P da superfície da Terra é a distância, medida ao longo da vertical, entre o ponto P e o geóide. A altitude ortométrica do ponto P é obtida com a expressão:

$$h_P^O = \frac{C_P}{\bar{g}} \quad (1.18)$$

onde

\bar{g} é o valor médio da gravidade ao longo da vertical de P.

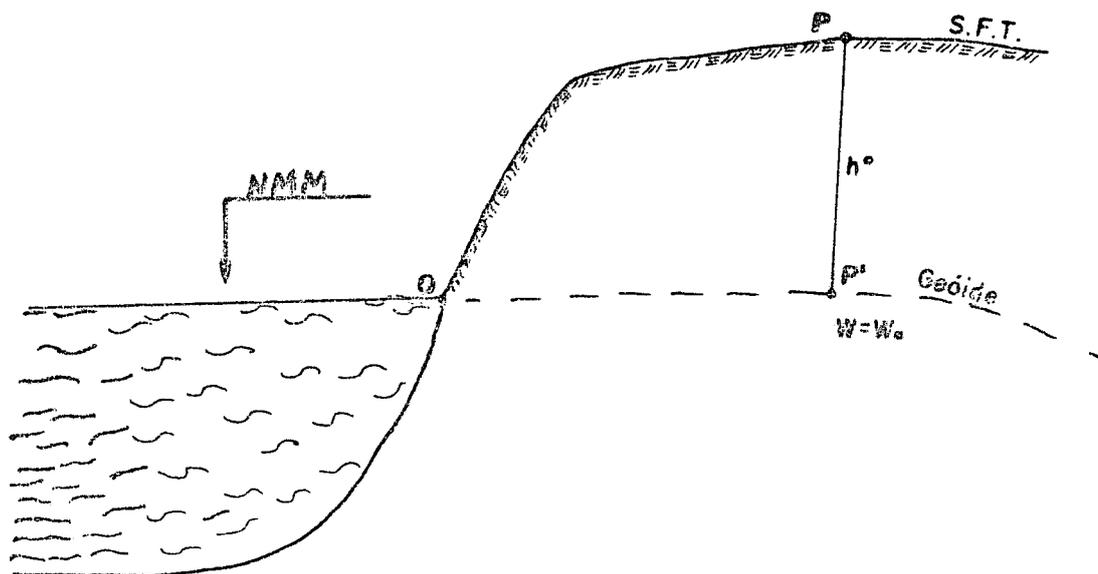


FIGURA 6 - Altitude ortométrica

Percebe-se então que, para determinar a altitude ortométrica do ponto P é necessário obter a gravidade no interior da crosta; e esta não pode ser determinada com rigor,

posto que não se conhece a verdadeira distribuição de densidade ao longo da vertical de P. Isto mostra o caráter puramente teórico da altitude ortométrica, pois não é possível introduzir na crosta terrestre para efetuar observações da gravidade entre o geóide e o geope que contém o referido ponto. Necessita-se então de um gradiente de gravidade baseado em hipóteses simplificativas a respeito da densidade do material que compõe a crosta.

Então, devido a impossibilidade de se obter o valor médio da gravidade \bar{g} entre o geóide e o geope do ponto P, alguns geodestas desenvolveram expressões para o cálculo aproximado desta quantidade, numa tentativa de se conseguir um valor para a altitude de um ponto da superfície física da Terra, bem próximo da altitude ortométrica. Estas altitudes, juntamente com a altitude ortométrica, são denominadas altitudes científicas.

HELMERT, por exemplo, desenvolveu a seguinte expressão para o cálculo de \bar{g} [15]:

$$\bar{g} = g + 0,0424 h \quad (1.19)$$

sendo g expresso em gals e h em quilômetros.

Usando na (1.18) o valor de \bar{g} dado pela (1.19), obtém-se a chamada altitude de HELMERT

$$h_P^H = \frac{C_P}{g + 0,0424 h} \quad (1.20)$$

sendo C_p expresso em gals.metro

A expressão desenvolvida por HELMERT adota o gradiente de gravidade de POINCARÉ-PREY, $-0,0848$ mgal/m, como sendo representativo para qualquer ponto entre a superfície terrestre e o geóide. Tal gradiente pressupõe uma densidade constante para a crosta de $2,67$ g/cm³ e, sendo constante implica numa variação linear da gravidade ao longo da vertical de P [08].

Por analogia à (1.16) a diferença de altitude ortométrica entre dois pontos A e B já nivelados é dada por

$$\Delta h_{AB}^o = h_B^o - h_A^o = \Delta z_{AB} + CO_{AB} \quad (1.21)$$

sendo CO_{AB} a correção ortométrica, obtida com a expressão [14]:

$$CO_{AB} = \sum_A^B \frac{(\bar{g}_i - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} \Delta z_i + \frac{(\bar{g}_A - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} h_A - \frac{(\bar{g}_B - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} h_B \quad (1.22)$$

onde

\bar{g}_A e \bar{g}_B podem ser obtidos com a (1.19) e,

h_A e h_B são as altitudes de A e B, as quais não precisam ser conhecidas com muito rigor [15]

1.5 Altitude normal

Com base nas seções anteriores, sabe-se que a redução dos valores observados da gravidade para o geóide envolve hipóteses sobre a distribuição de densidade das massas que compõe a crosta. Este é um problema que afeta vários outros cálculos geodésicos convencionais, além da altitude. A altitude elipsóidica H é obtida pela soma da altitude ortométrica h^O e a altura geoidal N ; assim,

$$H \doteq h^O + N \quad (1.23)$$

O cálculo da altitude ortométrica de um ponto da superfície terrestre requer, por exemplo, a adoção do gradiente de POINCARÉ-PREY para a obtenção do valor médio da gravidade entre este ponto e o geóide, ao longo da sua vertical. Para evitar aproximações deste tipo MOLODENSKY propôs a concepção de altitude normal [15].

A figura 7 mostra um ponto P da superfície terrestre projetado sobre o elipsóide ao longo da sua normal. Seja Q um ponto situado sobre esta normal de modo que o esferopotencial de Q seja igual ao geopotencial de P , isto é, $U_Q = W_P$. O deslocamento do ponto P sobre a superfície terrestre faz com que o ponto Q descreva uma superfície, a qual HIRVONEN denominou teluróide. A distância contada ao longo da normal, entre o teluróide e o elipsóide é a altitude normal h^N para o ponto P . A separação entre o teluróide e a superfície terrestre é denominada anomalia de altitude ζ , que é a diferença entre a altitude normal e a altitude elipsóidica.

$$H_P = h_P^N + \zeta \quad (1.24)$$

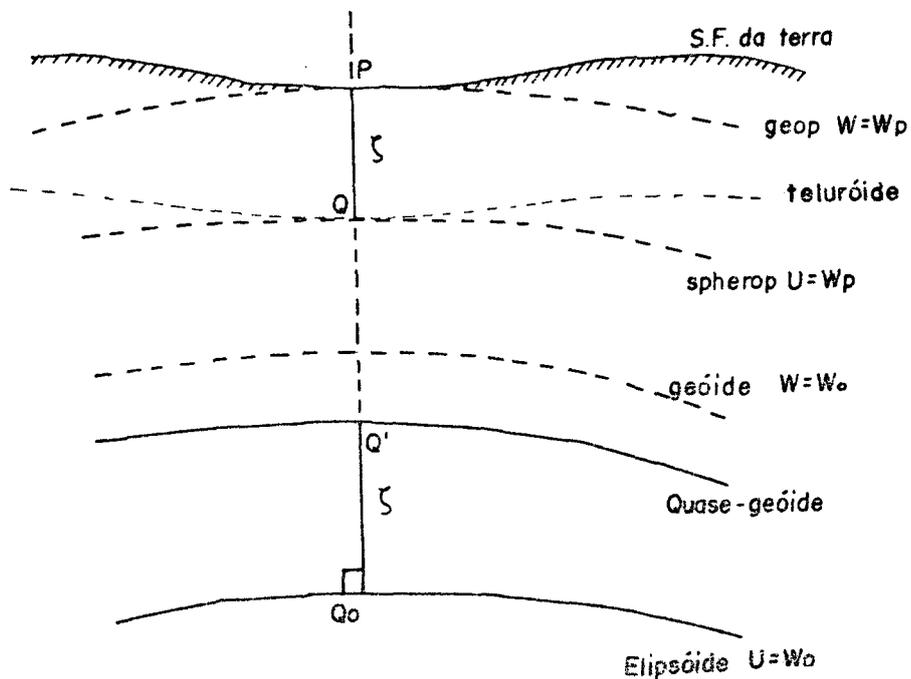


FIGURA 7 - Altitude normal

A altitude normal e o teluróide podem ser determinados a partir de observações gravimétricas combinadas com nivelamento geométrico. A altitude normal pode então ser obtida pela expressão [15]:

$$h_P^N = \frac{C_P}{\gamma(\phi)} \left[1 + (1 + n + \alpha - 2\alpha \sin^2 \phi) \frac{C_P}{a\gamma(\phi)} + \left(\frac{C_P}{a\gamma(\phi)} \right)^2 \right] \quad (1.25)$$

onde:

$\gamma(\phi)$ é a gravidade normal para o ponto Q_0 sobre o elipsóide,

α é o achatamento do elipsóide,

a é o semi-eixo maior e

n é um parâmetro geodésico, cujo valor para o elipsóide de referência 1967 é: $n = 0,003\ 449\ 801\ 4$.

As anomalias de altitude podem também ser referidas ao elipsóide. Isto conduz a uma superfície que coincide com o geóide nas regiões oceânicas e nas demais regiões apresenta discrepâncias com relação a este, de alguns centímetros. Nas regiões montanhosas esta discrepância pode atingir alguns metros [08]. MOLODENSKY denominou esta superfície de quase-geóide, e as altitudes normais são então consideradas altitudes acima deste.

Também, por analogia a (1.16) a diferença de altitude normal entre dois pontos A e B já nivelados é dada por

$$\Delta h_{AB}^N = h_B^N - h_A^N = \Delta z_{ZB} + CN_{AB}, \quad (1.26)$$

sendo CN_{AB} a correção normal, obtida com a expressão [14]:

$$CN_{AB} = \sum_A^B \frac{(g_i - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} \Delta z_i + \frac{(\bar{\gamma}_A - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} h_A - \frac{(\bar{\gamma}_B - \gamma_{45^\circ})}{\gamma_{45^\circ}} h_B \quad (1.27)$$

Na (1.27) $\bar{\gamma}_A$ e $\bar{\gamma}_B$ são obtidos com a expressão

$$\bar{\gamma} = \gamma(\phi) \left[1 - (1 + \alpha + n - 2\alpha \sin^2 \phi) \frac{h^N}{a} + \left(\frac{h^N}{a} \right)^2 \right] \quad (1.28)$$

1.6 O sistema de altitudes adotado no Brasil

1.6.1 A altitude usada no Brasil

No Brasil há dificuldades para designar o sistema de altitudes utilizado embora, do ponto de vista da comunidade cartográfica, sejam as altitudes denominadas ortométricas. As operações de nivelamento geométrico conduzidas pelas entidades governamentais primam pela ausência de determinações gravimétricas, que são fundamentais para a determinação das altitudes ortométricas. Talvez se possa dizer simplesmente que para obter a altitude de B soma-se à altitude de A o desnível bruto obtido pelo nivelamento e corrigido do não paralelismo das superfícies equipotenciais δh |14|, então:

$$h_B = h_A + \sum \Delta z_i + \delta h \quad (1.29)$$

Após estas considerações, julga-se importante mostrar como obter a mencionada correção.

Lembrando que o trabalho realizado pela gravidade para transportar a unidade de massa entre duas superfícies equipotenciais independe do caminho percorrido, pode-se escrever, com auxílio da figura 8.

$$g\delta h = g'\delta h' = \text{constante} \quad (1.30)$$

onde

δh e $\delta h'$ são as distâncias entre as duas superfícies equipotenciais, contadas sobre a vertical, a partir de cada ponto;

g e g' são os valores da gravidade nos respectivos pontos.

Como a intensidade da gravidade cresce com a latitude, é óbvio que as superfícies equipotenciais não são paralelas, e convergem para os polos.

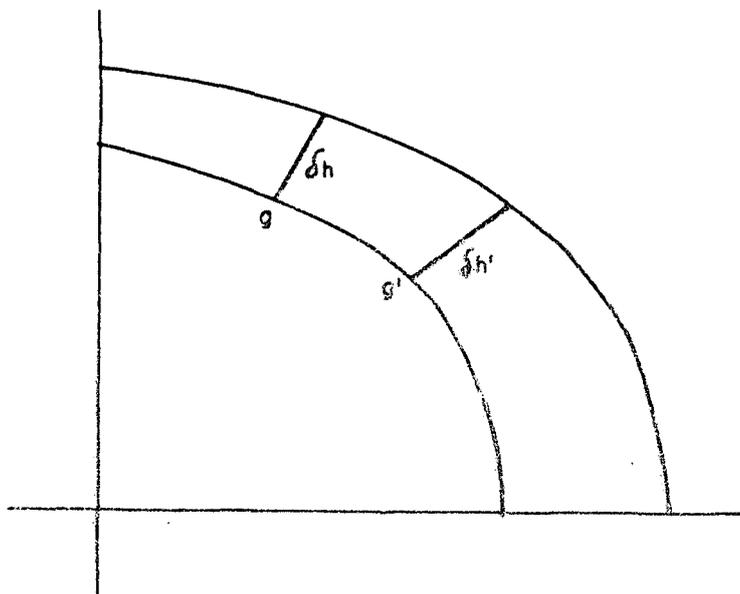


FIGURA 8 - Altura entre superfícies equipotenciais

Lembrando ainda que o trabalho realizado para transportar a unidade de massa do geóide, altitude zero, até o ponto de altitude h é dado por:

$$T = \int_0^h g dh \quad (1.31)$$

que independe do caminho percorrido. Então, resolvendo a integral citada em (1.31) temos:

$$T = g \cdot h = \text{constante} \quad (1.32)$$

cuja diferencial é

$$h \, dg + g \, dh = 0 \quad e, \quad (1.33)$$

$$dh = - \frac{h \cdot dg}{g} \quad (1.34)$$

Como já mencionado, as operações de nivelamento no Brasil não são acompanhadas por determinações gravimétricas, então, reduzindo-se o problema à superfície do modelo elipsóidico e desprezando o último termo da (1.13) faz-se

$$g = \gamma(\phi) = \gamma_e(1 + \beta \operatorname{sen}^2 \phi) \quad (1.35)$$

que diferenciada em relação a ϕ , fornece:

$$dg = d\gamma = \gamma_e \beta \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi \quad (1.36)$$

Introduzindo os valores de g e dg , na (1.34) obtém-se:

$$dh = - \frac{h \cdot \gamma_e \cdot \beta \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi}{\gamma_e(1 + \beta \operatorname{sen}^2 \phi)} \quad (1.37)$$

onde

β é um coeficiente oriundo do campo da gravidade normal, cujo valor para o elipsóide de referência 1967 é $\beta = 0,005302365$;

h é a altitude média da linha;
 ϕ é a latitude média da linha;
 $d\phi$ é a diferença de latitude entre os dois pontos,
expressa em radianos;
 dh é a correção do não paralelismo das superfícies
equipotenciais.

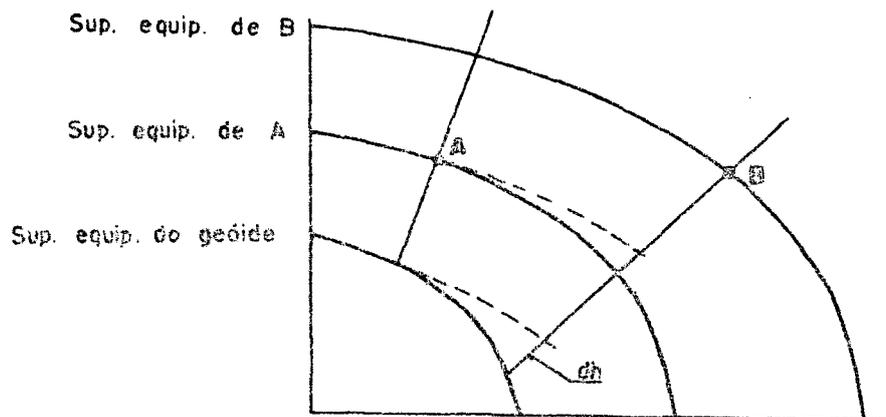


FIGURA 9 - Correção do não paralelismo das superfícies equipotenciais.

Geralmente a (1.37) é simplificada para

$$dh = h\beta \operatorname{sen}\phi^2 d\phi, \quad (1.38)$$

sem prejuízo para a correção dh .

Expressando $d\phi$ em minutos de arco sexagesimal, a (1.38) toma a forma |14|:

$$dh = 1542 \times 10^{-9} h \operatorname{sen}\phi^2 \Delta\phi' \quad (1.39)$$

Assim, no extremo sul do Brasil (latitude $\sim 33^\circ$), uma linha de nivelamento no sentido norte-sul, com um minuto de amplitude e com altitude média da ordem de 1.000 metros teria uma correção $dh = \pm 1,4$ mm. A correção toma o sinal positivo quando o nivelamento se aproxima do equador e, como é óbvio, estando os dois pontos nivelados sobre um mesmo paralelo a correção será nula.

1.6.2 O datum vertical

Datum vertical é a superfície de referência à qual estão vinculadas todas as altitudes de uma determinada rede altimétrica. Recordando que a altitude ortométrica de um ponto é definida como a distância, contada sobre a vertical, do ponto ao geóide, é fácil perceber que a superfície de referência é então o geóide. Contudo, as altitudes tem sido tradicionalmente referidas ao nível médio dos mares, o que implica em sua coincidência com o geóide.

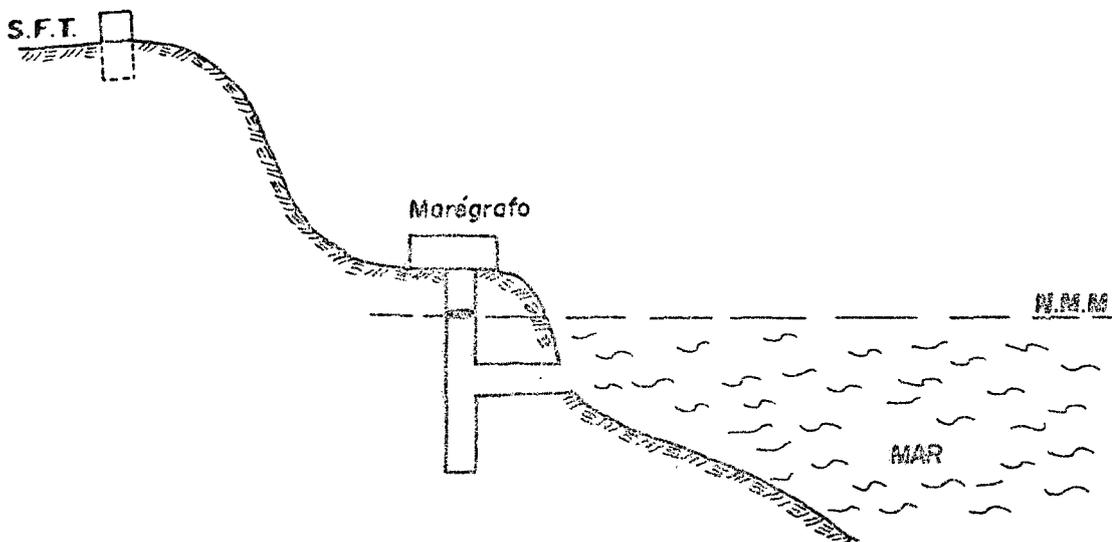


FIGURA 10 - Altitudes referidas ao N.M.M.

Há algumas décadas acreditava-se que a discrepância entre o geóide e o nível médio dos mares*, denominada topografia da superfície do mar, era negligenciável, definindo-se então o geóide como o prolongamento do nível médio dos

(*) Esta discrepância pode atingir vários metros.

mares através dos continentes . Com esta aproximação o problema de posicionar o geóide reduz-se à determinação do nível médio dos mares |08|.

Segundo GEMAEL |14|, observações maregráficas de um ou mais anos permitem determinar um nível médio dos mares local e, a altitude de uma referência de nível - RN - próxima à estação de marégrafo* é (figura 11):

$$h = d + \Delta h_{RN-M} - M \quad (1.40)$$

sendo d a distância do NMM ao marégrafo e Δh_{RN-M} obtido por nivelamento.

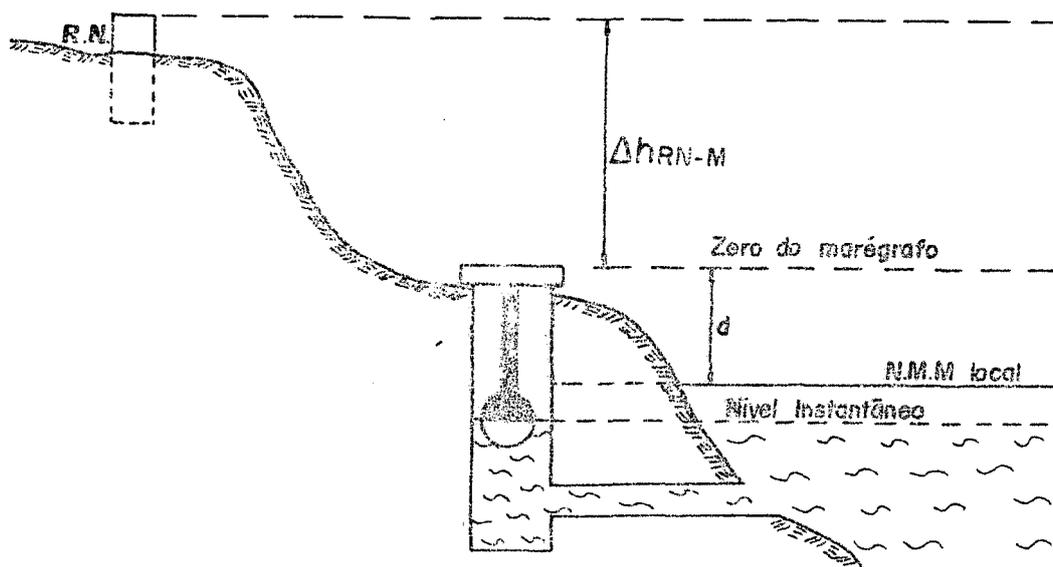


FIGURA 11 - Topografia da superfície do mar.

(*) RN inicial

A altitude h é então transportada por meio de linhas de nivelamento geométrico as demais RNs que compõe a rede.

No Brasil, a RN inicial acha-se junto ao marégrafo de Imbituba, no litoral de Santa Catarina. Em tais condições o datum vertical brasileiro é o geope que passa pelo ponto desse marégrafo que assinala o NMM local, para a época em que foi determinado.

Ocorre porém, que o NMM não é uma superfície equipotencial; os oceanos, por exemplo, apresentam diferentes níveis médios; ou ainda, se forem instalados vários marégrafos em um mesmo litoral, o nível médio apresentará diferenças de um para outro.

1.7 Considerações sobre determinação dos desníveis por nivelamento geométrico e barométrico

1.7.1 Nivelamento geométrico

Nivelamento geométrico é a operação geodésica que tem por finalidade a medida do desnível entre dois pontos da superfície terrestre.

Como já foi mencionado na introdução deste capítulo, o princípio do nivelamento geométrico utilizado em Geodésia não difere daquele estudado em Topografia; a diferença das leituras efetuadas sobre as miras graduadas postadas

nos pontos A e B (figura 4 pág.10) conduz ao desnível do lance. Porém há de se considerar a qualidade das operações geodésicas de nivelamento, que além de utilizar instrumental mais aperfeiçoado, cercam-se de precauções especiais e consideram correções não cogitadas em Topografia.

Segundo a Diretoria do Serviço Geográfico do Exército |06|, em cada seção, os resultados do nivelamento de ida e volta devem estar dentro da tolerância de $4\text{mm} \sqrt{R}$ para a 1ª ordem e $6\text{mm} \sqrt{R}$ para 2ª ordem, sendo R o comprimento da seção em quilômetros; será repetido o nivelamento das seções que não se enquadrem nessa exigência.

Para garantir a boa qualidade do nivelamento geométrico é necessário que a linha de visada seja rigorosamente horizontal - tangente ao geope que passa pela luneta do nível - e que as miras, com suas graduações perfeitamente calibradas estejam rigorosamente verticalizadas.

A colocação do nível a igual distância das duas miras acarreta não só a eliminação da influência da esfericidade e refração, como também evita o possível erro de colimação vertical da luneta* |04|.

As linhas de nivelamento estendem-se normalmente ao longo das vias terrestres de comunicação, seja porque a altura das miras - 3 metros - não possibilita o nivelamento em regiões íngremes e, também para permitir fácil acesso aos usuários. O trecho da linha de nivelamento compreendido entre

(*) É a defasagem angular entre a linha de visada real e a linha horizontal.

duas referências de nível - RN - consecutivas recebe o nome de seção, sendo seu comprimento da ordem de dois à três quilômetros. Tais seções são niveladas e contra-niveladas com visadas de comprimento inferior a 50 metros e materializadas no trecho através da implantação das RNs. Uma referência de nível é constituída por uma peça metálica chumbada sobre um bloco de concreto ao longo das estradas, e em locais importantes e protegidos como soleiras das portas das igrejas ou edifícios públicos, bases de monumentos, plataformas de estações ferroviárias, etc.

1.7.2 Nivelamento barométrico

Dentre os métodos de nivelamento citados neste trabalho, o barométrico é sem dúvida o de mais baixa precisão. Sua maior aplicação é na determinação do apoio altimétrico para aerotriangulação e restituição imediata, visando a confecção de cartas em escalas iguais e menores que 1:100.000 [03]. Num país de grande extensão territorial como o Brasil, que acha-se ainda em fase de reconhecimento, o nivelamento barométrico não deve ser descartado, pois suas vantagens em relação aos demais métodos topográficos são indiscutíveis na sua faixa de emprego, pela rapidez de execução, simplicidade dos equipamentos e pequeno efetivo das turmas de trabalho.

O nivelamento barométrico baseia-se na determinação da altitude em função da pressão atmosférica observada em dois pontos distintos.

Evidentemente, os equipamentos são utilizados sob

condições diferentes da atmosfera padrão adotada pelo fabricante por isso, as leituras barométricas devem sofrer certas correções.

A chamada fórmula completa de LAPLACE relaciona o desnível entre os dois pontos com a correspondente diferença de pressão atmosférica, envolvendo também os fatores que influem na pressão |14|:

$$\Delta h = h - h' = 18.400 (\log P' - \log P) (1 + \delta t) \left[1 + 0,189 \left(\frac{f}{P} + \frac{f'}{P'} \right) \left(\frac{\gamma 45}{g} \right) \right] \quad (1.41)$$

onde:

- P e P' são os valores da pressão atmosférica nas duas estações,
- t e g os valores médios da temperatura e da gravidade nestas estações,
- f e f' a tensão do vapor d'água e
- δ é o coeficiente de dilatação volumétrica, que para os gases perfeitos vale 1:273,16.

Nas aplicações de campo usa-se o barômetro aneróide, que é um equipamento portátil, de fácil transporte e manejo. O barômetro aneróide é constituído, basicamente, por uma cápsula metálica em cujo interior se produz vácuo, o que o torna sensível às variações da pressão atmosférica. As deformações sofridas por esta cápsula são transmitidas mecanicamente a

um ponteiro associado a uma escala graduada em milímetros de mercúrio ou milibares.

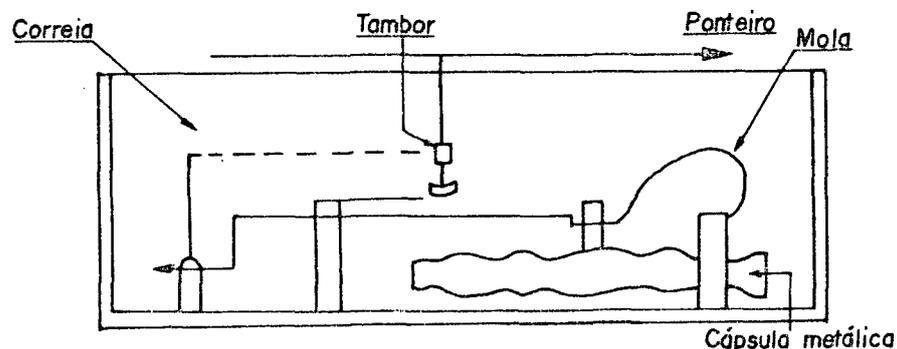


FIGURA 12 - Esquema do barômetro aneróide

Dentre os vários processos de nivelamento barométrico, o processo de base simples é o de uso mais generalizado, por requisitar menor efetivo, menor número de viaturas e prescindir do uso de rádios. Neste processo são utilizados dois grupos de altímetros, sendo um fixo na base, executando leituras a intervalos de tempo pré-determinados e outro que se desloca até os pontos a determinar, executando as leituras em instantes coincidentes com as leituras da base.

Existem ainda o processo de base dupla, que requer a utilização de três grupos de aneróides e apresenta resultados ligeiramente melhores que o de base simples, e, os processos de salto, onde o mais conhecido é o chamado salto de rã que utiliza dois grupos móveis e que não oferece resultados melhores que o de base simples|03|.

2. NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO

2.1 Introdução

No nivelamento trigonométrico a diferença de nível entre dois pontos é obtida em função da distância e dos ângulos zenitais observados entre ambos, e a posterior resolução de um triângulo.

Antigamente o nivelamento trigonométrico era também designado por nivelamento geodésico, pela circunstância de ser executado nas triangulações geodésicas. O advento da medida eletrônica de distância abriu novos horizontes à geodésia, possibilitando a execução econômica e a curto prazo do apoio geodésico para o mapeamento. Assim, o prestígio do nivelamento trigonométrico aumentou face ao importante papel que passou a desempenhar nas poligonais que fornecem apoio terrestre às operações de mapeamento.

2.2 Influências da curvatura e refração

2.2.1 Curvatura

Adotando-se um modelo esférico para representar a superfície terrestre, figura 13, e considerando dois pontos A e B no mesmo nível, a horizontal de A encontra a de B na posição B'; o segmento BB' materializa então a influência da esfericidade.

Chamado de S a distância entre os dois pontos, a figura 13 nos proporciona de maneira aproximada:

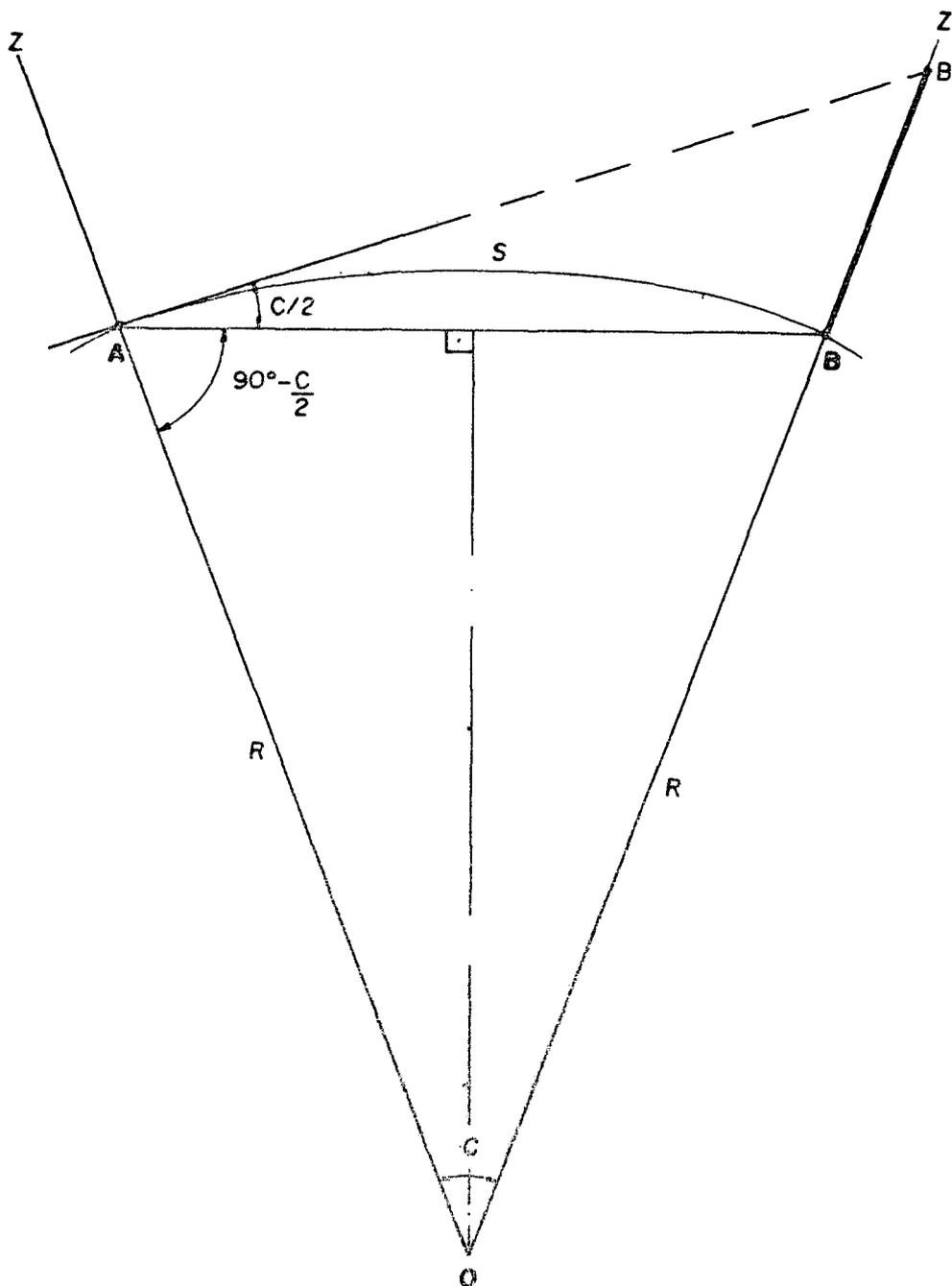


FIGURA 13 - Efeito da curvatura terrestre.

$$\overline{BB'} = S \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \quad (2.1)$$

mas,

$$C = \frac{S}{R},$$

donde

$$\overline{BB'} = \text{Stg} \frac{S}{2R} \quad (2.2)$$

Confundindo o arco com a tangente,

$$\overline{BB'} = \frac{S^2}{2R} \quad (2.3)$$

Adotando-se $R = 6.371$ km apresenta-se abaixo alguns exemplos:

S (m)	$\overline{BB'}$ (m)
1.000	0,078
5.000	1,962
10.000	7,848
20.000	31,392

2.2.2 Refração terrestre

Um dos grandes problemas das ciências geodésicas é o fenômeno da refração. Devido às variações da densidade do ar ao longo do caminho percorrido pela luz, ocorrem mudanças contínuas na direção da propagação. A complexidade da composição atmosférica, bem como, das variações de sua densidade tornam a determinação da refração extremamente difícil.

No caso das determinações astronômicas a trajetória do raio luminoso provindo de um astro, ao atravessar as dife

rentes camadas atmosféricas, se transforma numa curva, volta da para o solo, e o observador percebe o astro numa posição aparente segundo a tangente a curva e, numa altura superior a verdadeira.

Da mesma forma, nas visadas de um vértice a outro a refração terrestre - assim chamada porque o alvo é terrestre - levanta o alvo, obtendo-se, ao medir a sua distância zenital, um valor aparente menor que o verdadeiro. No nivelamento trigonométrico o alvo está situado próximo ao horizonte, precisamente na região em que as incertezas da refração são maiores |14|.

Os problemas relacionados à refração não foram ainda, totalmente, solucionados; o nivelamento trigonométrico, porém, apoia-se nas hipóteses simplificadas de BIOT e BOUGUER, admitindo-se |13|.

1 - Numa mesma estação o ângulo de refração r é proporcional ao comprimento da visada $-S-$, ou seja, ao ângulo central $-C-$ correspondente.

$$r = m.C \quad (2.4)$$

sendo m o coeficiente de refração.

2 - No caso de visadas recíprocas e simultâneas, os ângulos de refração podem ser considerados iguais.

$$r_a = r_b \quad (2.5)$$

$$\beta' = 180^\circ - \alpha' - (90^\circ - \frac{C}{2}) - C = 90^\circ - \alpha' + \frac{C}{2} - C \quad (2.8)$$

substituindo em (2.7) o valor de β' dado pela (2.8),

$$z'_b = 90^\circ - r_b + \alpha' + \frac{C}{2} \quad (2.9)$$

Somando membro a membro às (2.8) e (2.9),

$$z'_a + z'_b = 180^\circ + C - (r_a + r_b)$$

donde

$$r_a + r_b = 180^\circ - (z'_a + z'_b) + C$$

Com base na segunda hipótese simplificativa, o ângulo de refração r será:

$$r = \frac{180^\circ - (z'_a + z'_b) + C}{2} \quad (2.10)$$

ANDRADE [01] desenvolveu a seguinte fórmula para cálculo do ângulo de refração:

$$r = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{2(R + h_A)}{2R + h_A + h_B} \cdot \operatorname{sen} z' \right] \times \frac{\left[1 + (105,247 \frac{P_A}{t_A} - 16,4 \frac{f_A}{t_A}) \times 10^{-6} \right]}{\left[1 + (105,247 \frac{P_B}{t_B} - 16,4 \frac{f_B}{t_B}) \times 10^{-6} \right]} \quad (2.11)$$

onde

h_A = altitude do ponto A;

h_B = altitude do ponto B;

Z' = ângulo zenital observado;

P_A = pressão atmosférica no ponto A, em mmHg;

P_B = pressão atmosférica no ponto B, em mmHg;

t_A = temperatura no ponto A, em $^{\circ}\text{K}$;

t_B = temperatura no ponto B, em $^{\circ}\text{K}$;

f_A = tensão do vapor d'água no ponto A, em mmHg;

f_B = tensão do vapor d'água no ponto B, em mmHg.

O ângulo de refração sofre variações com o tempo e o espaço, pois os raios solares percorrem a atmosfera, que varia a cada instante, com a pressão, a temperatura e a umidade. Experiências realizadas revelam que o ângulo de refração apresenta uma grande variação durante o dia, passando por um valor máximo nas primeiras horas da manhã e nas últimas da tarde, sendo sua variação maior nestas horas do dia [11]. Apesar da grande variação diária, o seu valor é mínimo por volta das 12 horas verdadeiras, e, salvo casos de perturbações esse valor mínimo é sensivelmente constante numa região ao longo dos dias de uma mesma estação do ano.

2.2.3 Coeficiente de refração

O coeficiente de refração \underline{m} pode ser obtido a partir da 1^a hipótese simplificativa onde:

$$r = m.C = m \cdot \frac{S}{R} \quad (2.12)$$

Igualando (2.10) e (2.12), resulta para o coeficiente de refração:

$$m = \frac{1}{2} + \frac{[180^\circ - (z'_a + z'_b)] \cdot R}{2S} \quad (2.13)$$

O Serviço Geográfico do Exército determinou em algumas regiões do Brasil, onde tem estabelecidas suas Redes Geodésicas, o valor $2m$, que corresponde ao dobro do coeficiente de refração, obtendo os seguintes resultados |05|:

Região	$2m$
Rio de Janeiro	0,17
Juiz de Fora	0,15
Litoral do Nordeste	0,11
Ponta Grossa	0,07
Resende	0,13

Os valores acima apresentados correspondem ao mínimo em cada região, isto é, aquele que se manifesta por volta do meio dia.

2.3 Determinação dos desníveis por distâncias zenitais recíprocas e simultâneas

Pela 2ª hipótese simplificativa (2.5), a determinação dos desníveis por este processo, independe do valor do

coeficiente de refração.

Na figura (15), A e B são duas estações, de altitudes h_A e h_B , cujas distâncias zenitais medidas são Z'_a e Z'_b ; r representa o efeito da refração.

O desnível $\Delta h = h_2 - h_1$ pode ser calculado, resolvendo o triângulo ABB' |11|, onde:

$$\Delta h = \overline{AB}' \cdot \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } \beta'} \quad (2.14)$$

mas,

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= (R + h_A) \text{sen } \frac{C}{2} \quad \text{e,} \\ \overline{AB}' &= 2 \cdot \overline{AM} = 2(R + h_A) \text{sen } \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde

$$\Delta h = 2(R + h_A) \text{sen } \frac{C}{2} \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } \beta'} ; \quad (2.16)$$

ainda do triângulo ABB' :

$$\alpha' = 180^\circ - \beta' - (90^\circ + \frac{C}{2}) = 90^\circ - \beta' - \frac{C}{2} \quad (2.17)$$

mas, no semi-plano de B ,

$$\beta' = 180^\circ - Z'_b - r \quad (2.18)$$

então,

$$\alpha' = -90^\circ + Z'_b + r - \frac{C}{2} \quad (2.19)$$

Considerando uma paralela a \underline{BO} , passando pela estação \underline{A} :

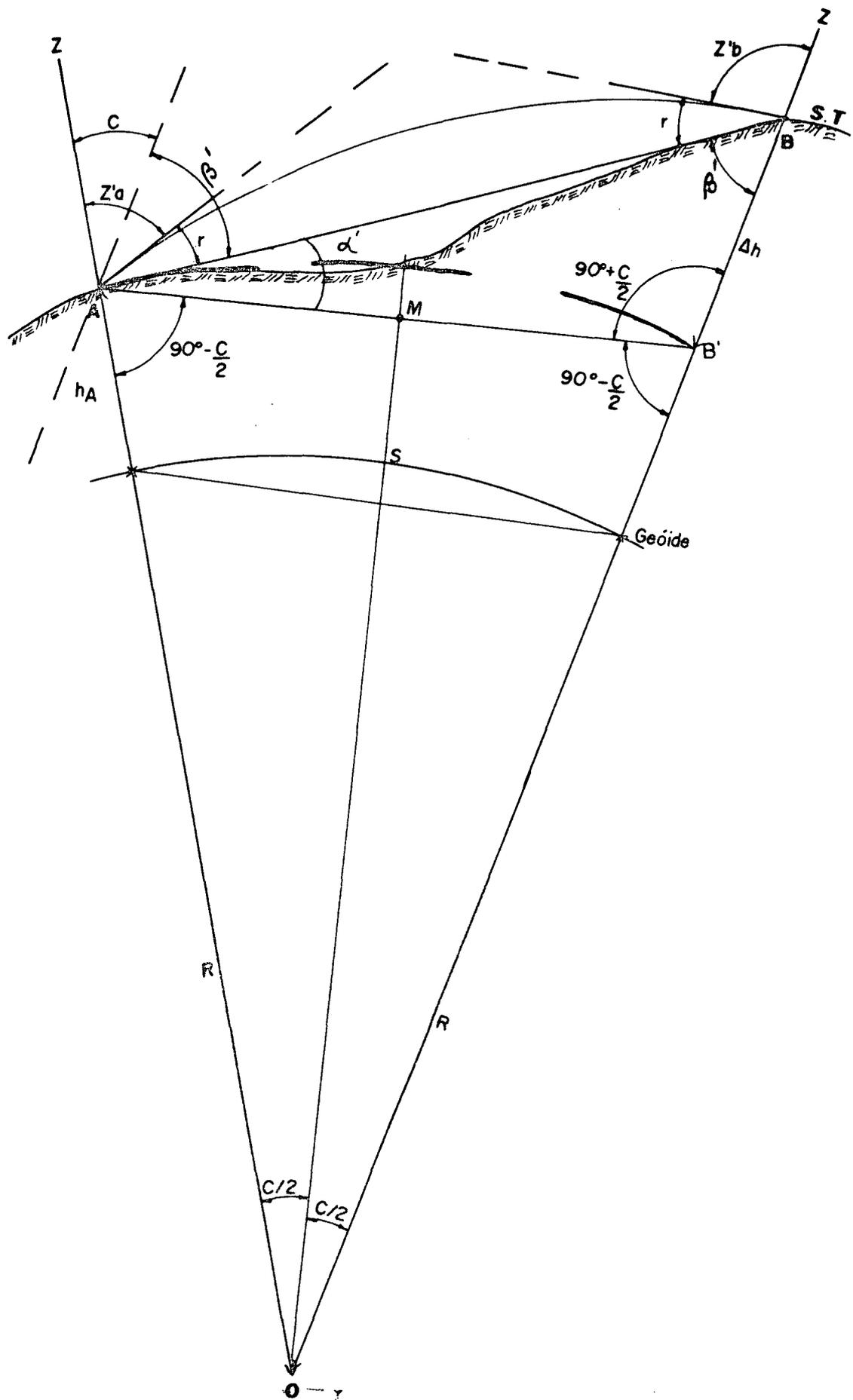


FIGURA 15 - Observações recíprocas e simultâneas

$$\beta' = z'_a + r - C \quad e, \quad (2.20)$$

no semi-plano de A,

$$\alpha' = 180^\circ - z'_a - r - (90^\circ - \frac{C}{2}) = 90^\circ - z'_a - r + \frac{C}{2} \quad (2.21)$$

Somando membro a membro às (2.19) e (2.21) resulta para α'

$$\alpha' = \frac{z'_b - z'_a}{2} = \Delta Z \quad (2.22)$$

Repetindo a operação para às (2.18) e (2.20), resulta para β' :

$$\beta' = 90^\circ - (\Delta Z + \frac{C}{2}) \quad (2.23)$$

Substituindo os valores de α' e β' dados pelas (2.22) e (2.23) na (2.16):

$$\Delta h = 2(R+h_A) \cdot \text{sen} \frac{C}{2} \cdot \frac{\text{sen} \Delta Z}{\text{sen} \left[90^\circ - (\Delta Z + \frac{C}{2}) \right]}, \quad (2.24)$$

mas da trigonometria sabe-se que

$$\text{sen} \left[90^\circ - (\Delta Z + \frac{C}{2}) \right] = \cos (\Delta Z + \frac{C}{2}),$$

então,

$$\Delta h = 2(R+h_A) \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta Z}{\cos(\Delta Z + \frac{C}{2})} \quad (2.25)$$

A expressão acima proporciona o desnível entre dois pontos independente da refração, mas tal expressão pode ainda tomar outra forma. Desenvolvendo o denominador,

$$\Delta h = 2(R+h_A) \frac{\operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \Delta Z}{\cos \Delta Z \cdot \cos \frac{C}{2} - \operatorname{sen} \Delta Z \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2}} \text{ e, } (2.26)$$

dividindo ambos os termos da fração por

$$\cos \Delta Z \cos \frac{C}{2} \text{ resulta,}$$

$$\Delta h = \frac{2(R+h_A) \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \Delta Z}{1 - \operatorname{tg} \Delta Z \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}} \quad (2.27)$$

Substituindo C por $\frac{S}{R}$, desenvolvendo em série a tangente ($\frac{S}{2R}$) e desprezando os termos de ordem superior a 3ª no numerador e de ordem superior a 1ª no denominador,

$$\Delta h = \frac{2(R+h_A) \operatorname{tg} \Delta Z \left(\frac{S}{2R} + \frac{S^3}{24R^3} + \dots \right)}{1 - \operatorname{tg} \Delta Z \cdot \frac{S}{2R}}, \quad (2.28)$$

$$\Delta h = \frac{\operatorname{tg} \Delta Z \left(S + \frac{S^3}{12R^2} + \frac{h_A S}{R} + \frac{h_A S^3}{12R^3} \right)}{1 - \operatorname{tg} \Delta Z \cdot \frac{S}{2R}}, \quad (2.29)$$

$$\Delta h = S \operatorname{tg} \Delta Z \left(1 + \frac{S^2}{12R^2} + \frac{h_A}{R} + \frac{h_A S^2}{12R^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{S}{2R} \operatorname{tg} \Delta Z \right)^{-1} \quad (2.30)$$

$$\Delta h = S \operatorname{tg} \Delta Z \left(1 + \frac{S^2}{12R^2} \right) \left(1 + \frac{h_A}{R} \right) \left(1 + \frac{S}{2R} \operatorname{tg} \Delta Z \right) \quad (2.31)$$

ou fazendo

$$A = 1 + \frac{h_A}{R} ;$$

$$B = 1 + \frac{S}{2R} \operatorname{tg} \Delta Z ;$$

$$C = 1 + \frac{S^2}{12R^2} .$$

resulta finalmente para a expressão do desnível:

$$\Delta h = S \operatorname{tg} \Delta Z \cdot A \cdot B \cdot C \quad (2.32)$$

onde:

R é o raio médio de curvatura e

S é a distância elipsóidica.

No nivelamento trigonométrico conduzido ao longo das triangulações é conhecido o comprimento do lado elipsóidico, obtido da resolução do triângulo geodésico; nas poligonais eletrônicas é conhecida a distância inclinada (D_i) entre os dois pontos, então a (2.32) pode tomar a forma:

$$\Delta h = D_i \operatorname{sen} \Delta Z \cdot A \cdot B \cdot C \quad (2.33)$$

2.4 Redução das distâncias zenitais ao marco

A fim de uniformizar as diferenças de nível, as distâncias zenitais recíprocas observadas devem ser reduzidas ao marco, principalmente nos trabalhos conduzidos ao longo das triangulações, onde são utilizadas torres para garantir a intervisibilidade entre os vértices. A fórmula adotada é a seguinte:

$$Z = Z' + \delta z \quad (2.34)$$

sendo

$$\delta z = \frac{(hs - hi) \operatorname{sen} Z'}{S \operatorname{sen} l''} \text{ e,}$$

Z a distância zenital reduzida;

Z' a distância zenital observada;

hs a altura do sinal;

hi a altura do instrumento;

S a distância elipsóidica.

2.5 Determinação dos desníveis por distâncias zenitais unilaterais

As observações recíprocas nem sempre são possíveis; por outro lado, sendo conhecido o coeficiente de refração m e a distância entre os vértices pode-se determinar o desnível entre estes pontos por meio da distância zenital observada de uma só estação. Admitindo-se então que se tenha observado apenas a distância zenital Z'_a (figura 15), e, lembrando a expressão (2.21):

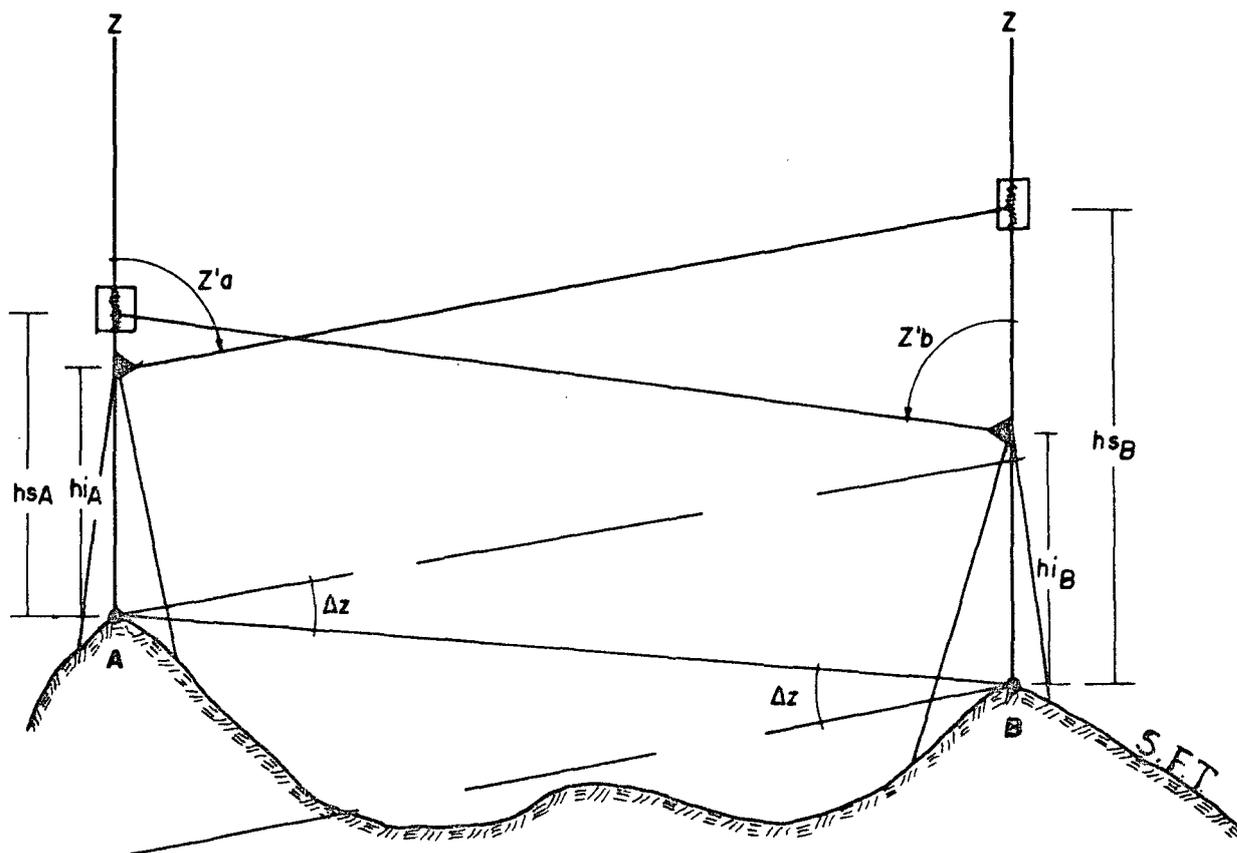


FIGURA 16 - Redução das distâncias zenitais

$$\Delta Z = \alpha' = 90^{\circ} - z' - r + \frac{C}{2} .$$

mas,

$$r = m \cdot \frac{S}{R}$$

donde

$$\Delta Z = 90^{\circ} - z' + \frac{S}{R} \left(\frac{1}{2} - m \right) \quad (2.35)$$

e,

$$\operatorname{tg} \Delta Z = \operatorname{tg} \left[90^{\circ} - z' + \frac{S}{R} \left(\frac{1}{2} - m \right) \right] \quad (2.36)$$

fazendo

$$K'' = \left(\frac{1}{2} - m \right) \cdot \frac{S}{R \text{sen} l''}$$

a (2.36) assume a forma:

$$\text{tg} \Delta Z = \text{tg} (90^\circ - Z' + K). \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.32), resulta para o desnível:

$$\Delta h = A.B.C.S. \text{tg} (90^\circ - Z' + K). \quad (2.38)$$

Obviamente a distância zenital observada deve ser reduzida ao marco; caso contrário soma-se ao desnível Δh a altura do instrumento h_i e subtrai-se a altura do sinal h_s .

3. NIVELAMENTO DE UM TRECHO DA BR-101

3.1 Introdução

Apresenta-se um trabalho de nivelamento trigonométrico realizado ao longo da rodovia BR-101, no trecho que liga os Municípios de Tubarão e Morro Azul, no Estado de Santa Catarina. O trabalho se desenvolveu em várias etapas, as quais são aqui comentadas, desde o reconhecimento para a seleção da região de trabalho até os processos de medição e cálculo empregados.

3.2 Reconhecimento

3.2.1 Importância

O reconhecimento tem importância primordial na execução dos trabalhos geodésicos e topográficos, seja no estabelecimento de poligonais, triangulações, etc. Para a execução deste, o reconhecimento foi de muita importância na identificação das RNs e no estabelecimento de pontos intermediários.

3.2.2 Reconhecimento e identificação das RNs

O reconhecimento sobre o terreno deve ser precedido de um trabalho de gabinete [07]; portanto, de posse de cartas em escala 1:50.000 e manuais de descrição das RNs do Estado de Santa Catarina, procedeu-se uma cuidadosa análise de gabinete, identificando e assinalando nas cartas os locais ,

onde de acordo com as descrições, estas se localizavam. Concluída esta etapa, partiu-se para uma identificação "in-loco", que permitiu também a definição do trecho da rodovia onde seriam realizadas as medições, o qual tem início na RN-2001 P, situada no quilômetro 357, no Município de Jaguaruna, e término na RN-2000 V, situada no quilômetro 330 no Município de Tubarão. A figura 17 mostra o trecho nivelado e a localização das RNs, que são em número de oito, cuja descrição é apresentada no quadro 3.1

3.2.3 Estabelecimento dos pontos intermediários e implantação dos marcos.

O estabelecimento dos pontos que compõe a poligonal altimétrica requer também uma cuidadosa análise de gabinete. Nesta etapa, a principal preocupação foi a de escolher pontos situados entre as RNs que permitissem a perfeita visibilidade entre os mesmos, sem a necessidade de construções especiais. Esta etapa foi seguida do reconhecimento "in-loco", materializando-se no terreno os pontos escolhidos, assegurando-se da fácil identificação dos mesmos na carta, como objetivo de medir distâncias graficamente, as quais são fundamentais numa das experiências aqui realizadas; cálculo de altitudes por nivelamento trigonométrico, usando distâncias gráficas. No reconhecimento foram usados dois teodolitos, dois binóculos, dois rádios intercomunicadores, alvos pintados em "madeira" como mostra a figura 18, duas viaturas e, um efetivo de quatro pessoas.

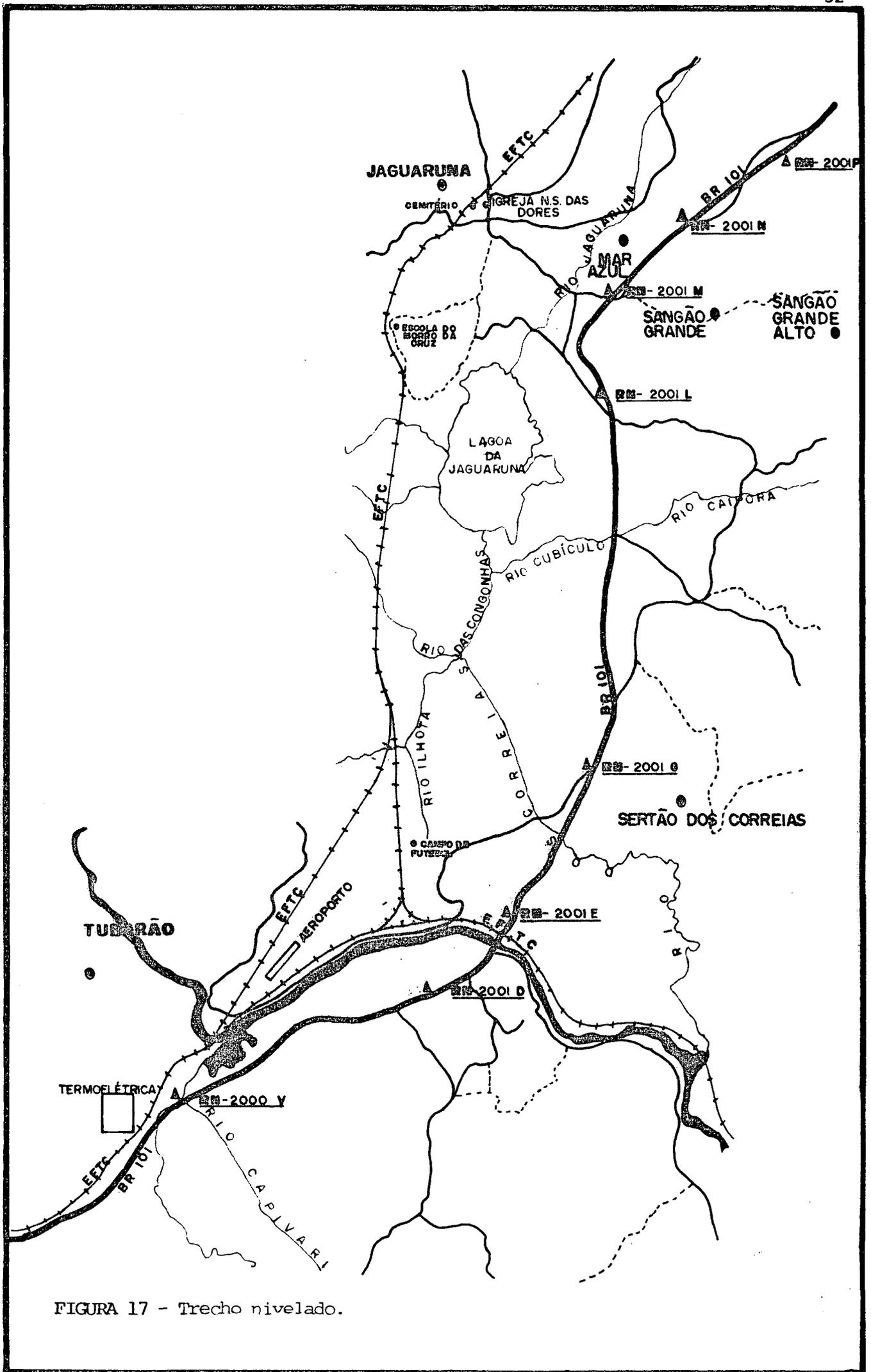


FIGURA 17 - Trecho nivelado.

QUADRO 3.1 - Localização das RNS

RN	ALTITUDE (m)	LOCALIZAÇÃO
2000 V	8.2819	70 metros além da casa de bomba e 50 metros aquém da balança da Usina Termelétrica Jorge Lacerda de Tubarão e 1,5 km da RN-2000 U.
2001 D	10,2551	Chapa cravada à direita da entrada principal do prédio onde funciona o escritório do DNER-169 R-16-1, situado no km 336 da BR-101.
2001 E	24,5601	10 metros à direita; 200 metros além da ponte de concreto sobre o Rio Tubarão; 250 metros aquém do km 338 e 1,72 km da RN-2001 E.
2001 G	6,9948	15 metros à esquerda; em frente ao mastro da bandeira no Posto da Polícia Rodoviária Federal, situado no km 342 e 4,6 km além da RN-2001 E.
2001 L	12,1030	10 metros à direita; canteiro central do Posto de gasolina São Bernardo; 400 metros além do km 349 e 2,3 km além da RN-2001 J.
2001 N	28,4758	50 metros à direita, na Escola Isolada de Morro Azul; 50 metros além do km 354 e 2,15 km além da RN-2001 M.
2001 M	9,7564	10 metros à esquerda, canteiro central do trevo que dá acesso à cidade de Jaguaruna e 2,43 km além da RN-2001 L.
2001 P	39,2175	35 metros à direita; 600 metros além do km 356, sob uma rede de alta tensão, 50 metros além de uma casa de madeira, e 2,8 km além da RN-2001 N.

3.3 Sinalização

Os atuais métodos de levantamento se utilizam de alvos luminosos, instalados sobre tripês, estruturas metálicas ou de madeira* os quais eliminam alguns erros comuns e outros tipos de alvos [07]. Entretanto, para a realização deste trabalho, devido a impossibilidade de se obter alvos do tipo mencionado e também porque as distâncias entre os pontos não são muito longas**, fez-se uso de pequenos alvos de papel colocados à base do teodolito para distâncias abaixo de 1.500m e alvos do tipo apresentado na figura 18 para distâncias acima de 1500m.

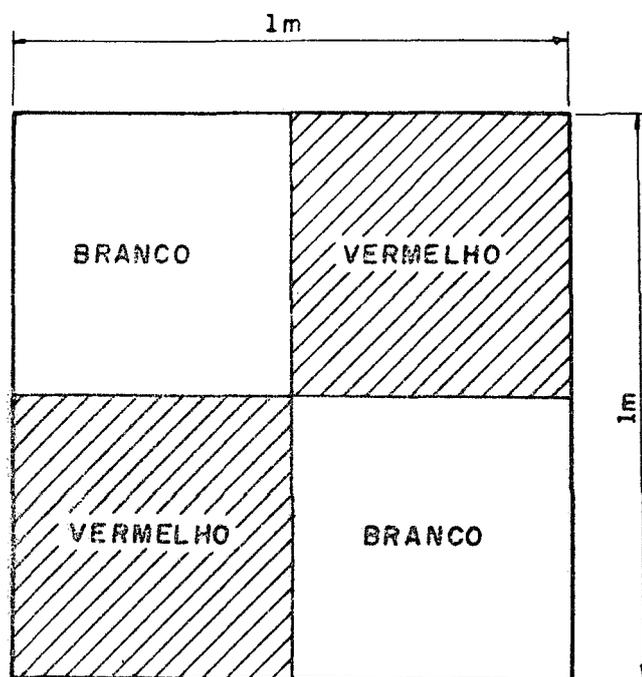


FIGURA 18 - Alvos pintados em "madeira".

(*) Heliotrôpio ou lâmpada de sinalização.

(**) Distância máxima ~8.000m.

3.4 Medição

3.4.1 Material empregado

- 1 distanciômetro eletrônico tipo WILD CITATION CI 450;
- 3 teodolitos tipo WILD - T2;
- 2 binóculos;
- 1 nível FUJI - KOH;
- 2 miras verticais;
- 3 viaturas;
- 3 rádios intercomunicadores; e,
alvos para observação angular, formulários para anotação de observações lineares e angulares e cartas da região em escala 1:50.000.

3.4.2 Medição linear

As distâncias entre os pontos foram medidas com o distanciômetro eletrônico mencionado acima, e, o valor adotado para cada linha foi obtido da média de cinco leituras. As observações lineares foram registradas no formulário modelo 004.

3.4.3 Medição angular

O método empregado foi o das distâncias zenitais recíprocas, com quatro séries de medidas em posição direta e inversa. As observações recíprocas foram realizadas por dois processos: no primeiro foram feitas observações rigoro

samente simultâneas e no segundo observações quase-simultâneas, separadas por um intervalo médio de 15 minutos*. Para o presente trabalho, no segundo processo mediu-se a distância zenital em apenas uma direção (por exemplo, Z''_a , figura 19), aproveitando o valor da direção recíproca observada no primeiro processo (Z'_b); assim, Z''_a e Z'_b constituem as chamadas observações quase-simultâneas para a direção AB.

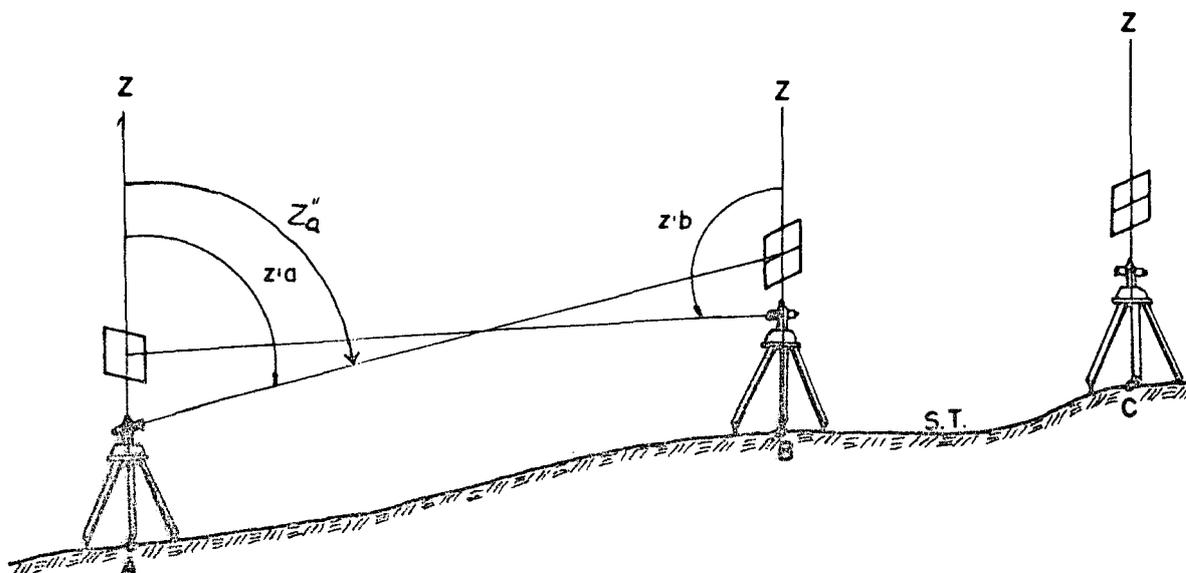


FIGURA 19 - Observações zenitais. (Como se trata de uma figura esquemática, não estamos considerando o efeito da refração).

Os ângulos zenitais devem ser medidos com muito cuidado, não esquecendo de verificar para cada posição a bolha bipartida.

As medidas foram executadas num período de seis

(*) Médio, por que este intervalo variou de 12 a 18 minutos.

dias, sendo os ângulos observados normalmente das nove horas às dezessete horas e trinta minutos. As observações zenitais foram registradas no formulário modelo 003.

3.4.4 Critérios de rejeição

- Medidas lineares:

Calculado o valor médio entre as leituras, foram rejeitadas as observações que se afastavam mais de 5 centímetros deste valor, refazendo-se as observações quando houve mais de duas rejeições.

- Medidas angulares:

Calculado o valor médio de uma direção, foram rejeitadas as observações que se afastavam mais de 5" deste valor.

Segundo |09|, até dois ângulos isolados podem estar fora desta variação; neste caso são remedidos e, um novo valor médio é calculado. Havendo mais de duas rejeições as quatro séries devem ser remedidas. Tomando como exemplo as observações entre as estações V-13 e V-14, cujos formulários são apresentados, mostra-se como obter o valor médio.

1 - Seja a 1ª série de observações da direção V-13
V-14:

	Grau	minuto	coincidências	
Pd	88	03	02"	04"
Pi	271	57	23"	21"

FUNDAÇÃO EDUCACIONAL DE CRICIÚMA - FUCRI
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA - ESTEC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS TÉCNICAS - DCT

POLIGONAL: Medição de distância

PROJETO: Tese **DATA:** 19/12/87

INSTRUMENTO: **OPERADOR:** Vanildo

DADOS METEOROLÓGICOS

ESTAÇÃO	HORA	TEMPERATURA		BARÔMETRO		DISTÂNCIA (m)
		ÚMIDA	SÊCA	LEITURA	PRESSÃO	
A -V ₉						2615,512
B -V ₁₀						502
						510
						499
						510
SOMA						
MÉDIA						2615,507
A -V ₈						2144,061
B -V ₉						090
						089
						070
						075
SOMA						
MÉDIA						2144,077
A - V ₁₂						1044,314
B - V ₁₃						307
						315
						314
						310
SOMA						
MÉDIA						1044,312

REGISTRO E CÁLCULO DE ÂNGULOS VERTICAIS

ESTAÇÃO: V13 **INSTRUMENTO:** WILD T2 171013 **DATA:** 09/01/88
OPERADOR: Vanildo **ANOTADOR:** Gilberto
OBJETO OBSERVADO: V14 **hs:** 0,490m **hi:** 1,655m

SÉRIE / HORA	POSICÃO Pd - Pi	LEITURAS		COINCIDENCIAS			SOMA Pd + Pi	RESUMO	
		Grau	Min.	1º	2º	Média			
I	15:48	Pd	88	03	02	04	03	25	88°02'50,5"
		Pi	271	57	21	23	22		
II		Pd	88	03	03	01	02	23,5	50,2
		Pi	271	57	20	23	21,5		
III		Pd	88	02	57	57	57	21,5	46,0
		Pi	271	57	25	24	24,5		
IV	16:04	Pd	88	03	07	05	06	29,0	51,5
		Pi	271	57	22	24	23		
V									
VI									

OBSERVAÇÕES: **MÉDIA:** 49,6"
Z' : 88°02'49,6"
 Tempo bom, com sol parcialmente coberto.

ESTAÇÃO: _____ **INSTRUMENTO:** _____ **DATA:** _____
OPERADOR: _____ **ANOTADOR:** _____
OBJETO OBSERVADO: _____ **hs:** _____ **hi:** _____

SÉRIE / HORA	POSICÃO Pd - Pi	LEITURAS		COINCIDENCIAS			SOMA Pd + Pi	RESUMO
		Grau	Min	1º	2º	Média		
I								
II								
III								
IV								
V								
VI								

MÉDIA: _____
Z' : _____

REGISTRO E CÁLCULO DE ÂNGULOS VERTICAIS

ESTACÃO: V₁₄ INSTRUMENTO: WILD T2 DATA: 09/01/88

OPERADOR: _____ ANOTADOR: _____

OBJETO OBSERVADO: V₁₃ No: 1,190m Di: 1,440m

SÉRIE / HORA	POSICÃO Pd - Pi	LEITURAS		COINCIDÊNCIAS			SOMA Pd + Pi	RESUMO
		Grav	Min.	1º	2º	Média		
I	15,50	Pd	91	59	42	43	43	92°00'10,5"
		Pi	267	59	20	24	22	
II		Pd	91	59	47	49	48	11,5
		Pi	267	59	23	27	25	
III		Pd	91	59	46	44	45	10,0
		Pi	267	59	25	25	25	
IV		Pd	91	59	46	48	47	11,5
		Pi	267	59	26	22	24	
V	16:05	Pd	91	59	43	45	44	09,5
		Pi	267	59	27	25	26	
VI								

OBSERVAÇÕES:

MÉDIA: 10,5"

Z' = 92°00'10,5"

ESTACÃO: V₁₄ INSTRUMENTO: _____ DATA: _____

OPERADOR: _____ ANOTADOR: _____

OBJETO OBSERVADO: V₁₃ No: 1,19m Di: 1,440m

SÉRIE / HORA	POSICÃO Pd - Pi	LEITURAS		COINCIDÊNCIAS			SOMA Pd + Pi	RESUMO
		Grav	Min	1º	2º	Média		
I	16:19	Pd	91	59	49	45	47	09,0
		Pi	267	59	28	30	29	
II		Pd	91	59	50	48	49	06,5
		Pi	267	59	35	37	36	
III		Pd			49	51	50	08,5
		Pi			32	35	33,5	
IV		Pd			48	50	49	10,5
		Pi			29	27	28	
V	16:35	Pd	91	59	48	52	50	08,5
		Pi	267	59	34	32	33	
VI								

MÉDIA: 08,6

Z' = 92°00'08,6"

A média de cada observação é obtida pela semi-soma das coincidências;

$$\frac{02 + 04}{2} = 03'' \quad \text{e} \quad \frac{23 + 21}{2} = 22'' ,$$

resultando na 1ª série os seguintes valores:

$$Pd = 88^{\circ} 03' 03,0''$$

$$Pi = 271^{\circ} 57' 22,0''$$

2 - A soma das leituras em posição direta -Pd- e inversa -Pi- deve resultar 360° , portanto, a metade da falta ou excesso deve ser somada ou subtraída da média em posição direta; assim, para o exemplo acima:

$$88^{\circ} 03' 03,0'' + 271^{\circ} 57' 22,0'' = 360^{\circ} 00' 25,0''.$$

Houve um excesso de $25,0''$, portanto, neste caso deve-se subtrair $12,5''$ de $88^{\circ} 03' 03,0''$, resultando para o primeiro ângulo zenital:

$$88^{\circ} 02' 50,5'' .$$

3 - A média das quatro observações fornece o valor final da distância zenital, que é, para a direção V 13 - V 14:

$$88^{\circ} 02' 49,6''$$

- Pelo critério de rejeição adotado, todas observações isoladas devem estar entre os extremos

$$88^{\circ} 02' 44,6'' \quad \text{e} \quad 88^{\circ} 02' 54,6''$$

3.4.5 Determinação de RNs auxiliares

Conforme já mencionado, o nivelamento trigonométrico foi realizado ao longo da BR-101, nas imediações da qual se encontram as RNs utilizadas. Em certas ocasiões, não foi possível fazer a observação diretamente sobre a RN mas, próximo a esta; para evitar a necessidade de mais um lance quando tal situação se fazia presente, optou-se por fazer as observações num ponto auxiliar, e, através de um lance de nivelamento geométrico transportar a altitude. A estes pontos, deu-se a denominação de RNs auxiliares, sendo os desníveis obtidos da média de três observações, ou seja, cada desnível foi determinado três vezes, sendo tomada a média destes como valor final.

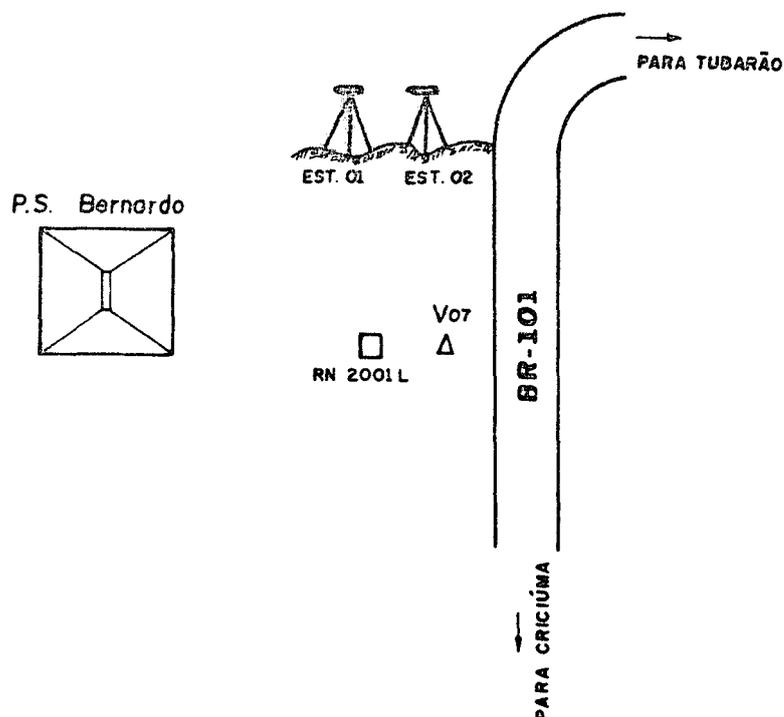


FIGURA 20 - Determinação de RNs auxiliares.

3.5 Trabalho de gabinete

3.5.1 Transcrição dos valores observados

A transcrição dos ângulos zenitais obtidos e verificados no campo, conforme formulário modelo 003, é simplesmente a transferência do valor médio final para o formulário modelo 005; o valor médio das distâncias também é transferido para este formulário. Estes valores devem ser verificados novamente, no escritório, antes dos cálculos.

3.5.2 Redução das distâncias zenitais ao marco

Pelo exposto na seção 2.4, as distâncias zenitais devem ser reduzidas ao marco através da expressão (2.34), aqui recordada:

$$Z = Z' + \frac{(h_s - h_i) \operatorname{sen} Z'}{S \cdot \operatorname{sen} 1''}$$

A redução das distâncias zenitais foi feita no formulário modelo 005 e os valores reduzidos são apresentados nos quadros A₁ e A₂ (Apêndice).

3.5.3 Cálculo das altitudes

As altitudes foram calculadas por nivelamento trigonométrico, cuja, expressão, quando são realizadas observações recíprocas e simultâneas é:

$$\Delta h = S \cdot \text{tg} \Delta Z . A . B . C \quad \text{ou,}$$

$$\Delta h = D_i \cdot \text{sen} \Delta Z . A . B . C . ,$$

sendo a última a mais usada nas poligonais eletrônicas, onde se possui as distâncias inclinadas D_i entre as estações .

As altitudes foram calculadas considerando-se as seguintes situações:

- 1 - uso de distâncias zenitais recíprocas e simultâneas, com distâncias medidas eletronicamente;
- 2 - uso de distâncias zenitais recíprocas e quase-simultâneas, com distâncias medidas eletronicamente;
- 3 - Cálculo com distâncias obtidas graficamente.

3.6 Considerações finais

- 1 - As observações quase-simultâneas foram realizadas com o objetivo de verificar a sua precisão no cálculo de altitudes e a possibilidade do emprego do nivelamento trigonométrico usando apenas um teodolito, com a conseqüente redução dos custos.
- 2 - Embora as medições tenham sido executadas com bastante cuidado, tomando as precauções necessárias, estas não foram realizadas por pessoal habituado

NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO

MÉTODO DAS DISTÂNCIAS ZENITAIS RECÍPROCAS E SIMULTÂNEAS

LOCAL:			DATA:		
ESTAÇÃO A: V ₁₃			ESTAÇÃO B: V ₁₄		
z'a = 88° 02' 49,6"		CONTROLE DAS ZENITAIS		z'b = 92° 00' 10,0"	
hsb	1,190m	z'b		hso	0,490m
hio	1,655	z'a		hib	1,440
hsb-hio = (1)		z'o+z'b = (1)		hso-hib = (1)	
1/sen1" = (2)	206 265	(1)-180° = E		1/sen1" = (2)	206 265
sen z'a = (3)		E"		sen z'b = (3)	
(1).(2).(3) = (4)		De		(1).(2).(3) = (4)	
(4)/S		cte = De/E"		(4)/S	
redução	-31,3144"	ALTITUDE H _b		redução	-63,9738"
z'a	88 02' 49,6"	z _b - z _a		z'b	92 00' 10,00"
z _a	88° 02' 18,286"	$\frac{1}{2}(z_b - z_a) = \Delta z$	1,973297309	z _b	91° 59' 06,626"
COEFICIENTES		tg Δz	0,034454159	FORMULÁRIO	
H _a		S	3061,20m	H = A.B.C.S.tg Δz, ou	
R	6366509,87m	A.B.C =		H = A.B.C.Di sen Δz	
$1 + \frac{H_a}{R} = A$	1,000001046	Δ H	105,4711	A = 1 + H _a /R	
S = (1)		+ H _a	6,6597m	B = 1 + $\frac{S}{2R}$ tg Δz	
tg Δz = (2)		H _b	112,1308m	C = 1 + S ² /12R ²	
2R ± (3)		OBSERVAÇÕES		R = Raio Médio de	
(1)(2)/(3) = (4)				Curvatura	
1 + (4) = B	1,000008524			Δz = $\frac{1}{2}(z_b - z_a)$	
S ² = (1)				cte = $\frac{De}{(z'a + z'b - 180°)''}$	
12R ² = (2)					
(1)/(2) = (3)					
1 + (3) = C	1,000000000			VISTO	

a tal tipo de trabalho;isto de certa forma contribuiu para tornar as observações um pouco lentas, Também há de se considerar aqui, que o trabalho se desenvolveu ao longo da BR-101, sendo as visadas quase rasantes ao asfalto e com constante tráfego de veículos.

4. RESULTADOS

4.1 Introdução

São apresentados os resultados obtidos em cada uma das situações mencionadas na seção 3.5.3, a comparação entre os mesmos, e também a comparação das altitudes fixas com as calculadas, das RNs.

4.2 Resultados

No quadro 4.1 encontram-se as altitudes calculadas, pelos três processos, e também, as altitudes fixas das RNs; já o quadro 4.2 apresenta apenas os desníveis obtidos em cada lance. Convém recordar que o trecho nivelado contém oito RNs, entre as quais foram selecionados pontos intermediários em número necessário e suficiente para permitir o nivelamento de cada uma delas.

Os objetivos do presente trabalho foram:

- verificar o erro proveniente do transporte de altitudes pelo nivelamento trigonométrico e, a consequente utilização deste método para dar apoio cartográfico à densificação gravimétrica;
- verificar a precisão e a possibilidade do uso do nivelamento trigonométrico com observações quase simultâneas.

4.3 Comparação entre os resultados obtidos

O quadro 4.3 apresenta as diferenças entre as altitudes calculadas pelos três processos; verifica-se aqui, que a diferença máxima entre as altitudes calculadas com observações simultâneas e quase-simultâneas não atinge 6 centímetros e, a média no trecho nivelado fica em torno de 2 centímetros. Por outro lado, as altitudes calculadas com distâncias tomadas graficamente apresentam diferenças com relação as primeiras, que atingem e até mesmo ultrapassam 2 metros.

Numa rápida análise ao quadro 4.2, percebe-se que as diferenças entre os desníveis obtidos com observações simultâneas e quase-simultâneas, em cada lance isolado, permanece abaixo de 6 centímetros, já os desníveis obtidos com distâncias gráficas, mesmo isoladamente, apresentam discrepâncias consideráveis (da ordem de metros).

4.4 Comparação das altitudes das RNs com os valores calculados

No quadro 4.4 encontram-se as diferenças entre as altitudes fixas e as altitudes calculadas das RNs. Percebe-se que a segunda e a terceira colunas apresentam resultados muito parecidos, enquanto a quarta coluna, como já era de se esperar, apresenta resultados bastantes discrepantes.

4.5 Observações

1 - As distâncias entre as estações, aqui niveladas, são menores que 8 km, o que normalmente ocorrerá na densificação gravimétrica.

2 - Além das experiências aqui realizadas, o autor teve a oportunidade de acompanhar os cálculos de um trabalho de nivelamento trigonométrico realizado por engenheiros agrimensores da Mineração Santa Catarina, estabelecida no Município de Morro da Fumaça, no Estado de Santa Catarina. O trecho nivelado tem 105 km de extensão, envolvendo uma RN inicial e uma RN final, encontrando-se um erro de fechamento de 45 cm. O método aplicado foi o das distâncias zenitais recíprocas e simultâneas e as distâncias foram medidas com o telurômetro MRA - II.

QUADRO 4.1 - Altitudes

ESTAÇÃO	$h_f(m)$	$h_s(m)$	$h_{qs}(m)$	$h_{sg}(m)$
RN-2001 P	39,2179	-	-	-
A ₂	-	53,9260	53,9247	54,630
A ₃	-	49,9376	49,9378	51,1399
A ₄	-	34,8952	34,8971	35,6883
RN-2001 N	28,4758	28,4825	28,4881	29,2625
V ₁	-	27,7434	27,7550	28,4724
V ₂	-	9,6449	9,6629	10,8514
RN-2001 M	9,7564	9,8664	9,8841	11,2175
V ₃	-	26,0690	26,0869	26,3873
V ₄	-	36,4557	36,4736	37,5873
V ₅	-	28,7150	28,7333	29,3443
V ₆	-	24,0195	24,0371	23,4685
RN-2001 L	12,1030	12,2281	12,2400	11,4023
V ₈	-	15,4973	15,5104	14,8361
V ₉	-	6,2265	6,2483	5,3232
V ₁₀	-	8,7375	8,7535	7,7712
V ₁₁	-	18,7923	18,8125	17,2152
V ₁₂	-	12,1842	12,2072	11,5037
RN-2001 G	6,9948	6,9887	7,0137	6,5497
V ₁₄	-	112,1308	112,1822	114,3912
RN-2001 E	24,5601	24,6556	24,7097	24,3055
RN-2001 D	10,2551	10,0626	10,1224	3,9478
RN-2000 V	8,2819	8,5890	8,6076	9,4740

h_f = altitude conhecida (fixa) da RN,

h_s = altitude obtida com observações simultâneas e distâncias medidas;

h_{qs} = altitude obtida com observações quase-simultâneas e distâncias medidas;

h_{sg} = altitude obtida com observ. simultâneas e distâncias gráficas.

QUADRO 4.2 - Desníveis

EST. A	EST. B	$\Delta h_s(m)$	$\Delta h_{qs}(m)$	$\Delta h_{sg}(m)$
RN-2001 P	A ₂	+ 14,7081	+ 14,7068	+15,4119
A ₂	A ₃	- 3,9884	- 3,9886	- 3,4899
A ₃	A ₄	- 15,0424	- 15,0406	-15,4516
A ₄	RN-2001 N	- 6,4127	- 6,4090	- 6,4258
RN-2001 N	V ₁	- 0,7391	- 0,7331	- 0,7901
V ₁	V ₂	- 18,0984	- 18,0920	- 17,6200
V ₂	RN-2001 M	+ 0,2215	+ 0,2212	+ 0,3651
RN-2001 M	V ₃	+ 16,2026	+ 16,2028	+15,1698
V ₃	V ₄	+ 10,3867	+ 10,3867	+11,2000
V ₄	V ₅	- 7,7407	- 7,7404	- 8,2430
V ₅	V ₆	- 4,6956	- 4,6961	- 5,8758
V ₆	RN-2001 L	- 11,7914	- 11,7971	-12,0662
RN-2001 L	V ₈	+ 3,2692	+ 3,2704	3,4338
V ₈	V ₉	- 9,2708	- 9,2621	- 9,5129
V ₉	V ₁₀	+ 2,5110	+ 2,5053	+ 2,4480
V ₁₀	V ₁₁	+ 10,0548	+ 10,0548	+ 9,4440
V ₁₁	V ₁₂	- 6,6081	- 6,6053	- 5,7115
V ₁₂	RN-2001 G	- 5,1955	- 5,1935	- 4,9540
RN-2001 G	V ₁₄	+105,1421	+105,1685	+107,8415
V ₁₄	2001 E	- 87,4751	- 87,4725	- 90,0857
V ₁₄	2001 D	-102,0682	-102,0524	-104,4434
V ₁₄	2000 V	-103,8508	-103,9022	-104,9172

Δh_s = desnível obtido com observações simultâneas - dist. medidas;
 Δh_{sg} = desnível obtido com observações simultâneas - dist. gráficas;
 Δh_{qs} = desnível obtido com observações quase-simultâneas - dist. medidas.

QUADRO 4.3 - Diferença entre as altitudes calculadas.

ESTAÇÃO	$(h_s - h_{qs})$ cm	$(h_s - h_{sg})$ cm
RN 2001 P	-	-
A ₂	+ 0,13	- 70,40
A ₃	- 0,02	- 121,21
A ₄	- 0,19	- 79,31
RN 2001 N	- 0,56	- 78,00
V ₁	- 1,16	- 72,90
V ₂	- 1,80	- 120,65
RN 2001 M	- 1,77	- 135,11
V ₃	- 1,79	- 31,83
V ₄	- 1,79	- 113,16
V ₅	- 1,83	- 62,93
V ₆	- 1,76	+ 55,10
RN 2001 L	- 1,19	+ 82,58
V ₈	- 1,31	+ 66,12
V ₉	- 2,18	+ 90,33
V ₁₀	- 1,60	+ 96,63
V ₁₁	- 2,02	+ 157,62
V ₁₂	- 2,30	+ 68,05
RN 2001 G	- 2,50	+ 43,90
V ₁₄	- 5,14	- 226,04
RN 2001 E	- 5,41	+ 35,01
RN 2001 D	- 5,98	+ 11,48
RN 2000 V	- 1,86	- 88,50
MÉDIA	- 2,001	- 22,374

h_s = altitude obtida com observações simultâneas e distâncias medidas;

h_{qs} = altitude obtida com observações quase simultâneas e distâncias medidas;

h_{sg} = altitude obtida com observ. simultâneas e distâncias gráficas.

QUADRO 4.4 - Diferenças entre as altitudes fixas e calculadas das RNs.

RN	$(h_f - h_s) \text{ cm}$	$(h_f - h_{qs}) \text{ cm}$	$(h_f - h_{sg}) \text{ cm}$
2001 P	-	-	-
2001 N	- 0,70	- 01,23	- 78,67
2001 M	- 11,00	- 12,77	- 146,11
2001 L	- 12,50	- 13,70	+ 70,07
2001 G	+ 0,61	- 01,89	+ 44,51
2001 E	- 9,56	- 14,96	+ 25,46
2001 D	+ 19,25	+ 13,27	+ 30,73
2000 V	- 30,90	- 32,76	- 119,40
MÉDIA	- 06,40	- 9,15	- 24,773

h_f = altitude conhecida (fixa) da RN;

h_s = altitude obtida com observações simultâneas e distâncias medidas;

h_{qs} = altitude obtida com observações quase simultâneas e distância medidas;

h_{sg} = altitude obtida com observ. simultâneas e distâncias gráficas.

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 Conclusões

É importante lembrar que o trecho nivelado tem uma extensão de 27 km (região relativamente pequena), cujos resultados e análises apresentados no Capítulo 4. nos permitem concluir:

- que, dentro dos limites destes trabalhos, o nivelamento trigonométrico pode ser empregado para a determinação de altitudes destinadas à densificação gravimétrica, posto que a diferença máxima encontrada, em 22 lançes, foi de 30,9cm (quadro 4.4). Observa-se ainda neste quadro, que as diferenças se alternam sendo as vezes positivas e outras vezes negativas, não ocorrendo assim tendenciosidade nas medições.

- que o processo de utilizar observações quase simultâneas no nivelamento trigonométrico é também viável, sem comprometer a precisão das altitudes e conseqüentemente da densificação gravimétrica (quadro 4.3). Desta forma, as medições podem ser realizadas com apenas um teodolito, reduzindo assim o efetivo das turmas de trabalho e principalmente os custos.

- que as distâncias gráficas, aqui utilizadas para cálculo das altitudes (obtidas em cartas de escala 1:50.000), não são adequadas para a aplicação proposta, tendo em vista que as diferenças apresentadas no quadro 4.3 ultrapassam 2 metros e, chegam a 1,46 metro no quadro 4.4. Ainda com relação a estas, o autor gostaria de salientar, que as distâncias

curtas podem conduzir a um maior valor de ΔZ , e, que os erros cometidos ao medi-las graficamente pode afetar consideravelmente os resultados. Tomando como exemplo os lances $V_9 - V_{10}$ (com distância de ~2615m e ΔZ 03'20") e $V_{13} - V_{14}$ (com distância de ~3060m e ΔZ de 1°58'24"); o erro gráfico cometido no 1º lance foi de 66m e no 2º lance foi de 70m e, os erros nos desníveis foram, respectivamente, 0,06m e 2,70m. Portanto, recomenda-se muito cuidado ao usar distâncias gráficas para estas finalidades.

5.2 Recomendações

Após as conclusões acima, baseadas nos resultados e análises do capítulo 4, o autor recomenda a aplicação do nivelamento trigonométrico para a determinação de altitudes destinadas a densificação gravimétrica, dentro dos limites deste trabalho. É importante lembrar que nas regiões onde existem mapas, a latitude geodésica, também necessária para o cálculo da anomalia da gravidade, pode ser retirada destes; e, nas regiões onde não existem mapas, pode ser necessário o uso de poligonais para determinar tal valor.

O autor recomenda ainda, o uso de observações quase-simultâneas, quando se dispõe de apenas um teodolito, posto que tal processo não causa prejuízos significativos para as altitudes, somando-se a isto a maior economia de custo, pelo fato de reduzir uma equipe de campo.

A P Ê N D I C E

Quadro A.1 - Distâncias zenitais observadas e reduzidas (observações simultâneas).

Quadro A.2 - Distâncias zenitais observadas e reduzidas (observações quase-simultâneas).

Quadro A.3 - Distâncias entre as estações.

QUADRO A.1 - Distâncias zenitais observadas e reduzidas
(Observações simultâneas).

ESTAÇÃO A	ESTAÇÃO B	Distância Zenital Observada	REDUÇÃO	Distância Zenital Reduzida
RN - A1	A2	87° 13' 20,0"	- 62,057"	87° 12' 17,943"
A2	RN-A1	92 53 30,8	-328,096	92 48 02,704
A2	A3	90 36 46,8	-141,800	90 34 25,000
A3	A2	89 28 00,6	-128,910	89 25 51,690
A3	A4	90 44 33,0	- 54,257	90 43 38,740
A4	A3	89 17 43,4	- 26,698	89 17 16,700
A4	RN-A5	90 02 47,8	-110,835	90 00 56,960
RN - A5	A4	90 00 55,3	- 75,838	89 59 39,460
RN-2001 N	V1	90 03 50,0	- 32,576	90 03 17,424
V1	RN-2001 N	89 58 41,0	- 93,969	89 57 07,031
V1	V2	90 48 46,4	- 41,736	90 48 04,660
V2	V1	89 13 23,4	- 19,689	89 13 03,710
V2	RN-2001 M	90 09 58,0	-1342,665	89 47 35,330
RN-2001 M	V2	90 10 08,5	+152,962	90 12 41,462
RN-2001 M	V3	88 16 35,5	- 44,398	88 15 51,102
V3	RN-2001 M	91 46 42,5	-138,981	91 44 23,519
V3	V4	88 01 41,2	- 97,299	88 00 03,901
V4	V3	92 04 45,7	-241,842	92 00 43,858
V4	V5	91 23 00,8	-122,342	91 20 58,458
V5	V4	88 42 31,5	-207,048	88 39 04,452
V5	V6	91 11 37,5	-264,944	91 07 12,556
V6	V5	88 55 43,0	-189,254	88 52 33,746
V6	RN-V7	90 40 08,2	- 66,160	90 39 02,039
RN - V7	V6	89 22 19,5	- 27,807	89 21 51,693
RN-2001 L	V8	89 01 47,3	- 43,325	89 01 03,975
V8	RN-2001 L	91 07 13,5	-487,385	90 59 06,115
V8	V9	90 16 24,1	- 54,644	90 15 29,456
V9	V8	89 47 33,8	-108,135	89 45 45,665
V9	V10	89 58 01,2	- 44,321	89 57 16,879
V10	V9	90 05 11,0	- 78,075	90 03 52,926
V10	V11	89 28 20,1	- 23,247	89 27 56,853
V11	V10	90 32 08,1	+ 44,557	90 32 52,657
V11	V12	90 52 16,0	-178,260	90 49 17,739
V12	V11	89 13 52,5	-164,848	89 11 07,652
V12	RN-V13	90 20 20,3	-162,947	90 17 37,350
RN - V13	V12	89 45 48,0	-134,309	89 43 33,691
RN - V13	V14	88 02 49,6	- 31,314	88 02 18,286
V14	RN-V13	92 00 10,0	- 63,974	91 59 06,026
V14	RN-2001 E	97 21 59,0	-102,327	97 20 16,673
RN-2001 E	V14	82 41 05,0	- 48,159	82 40 16,841
V14	RN-V15	92 34 38,5	- 84,214	92 33 14,286
RN - V15	V14	87 28 30,4	- 30,525	87 27 51,875
V14	RN-2000 V	90 47 13,6	- 11,645	90 47 01,949
RN-2000 V	V14	89 17 52,2	- 26,524	89 17 25,676

QUADRO A.2 - Distâncias zenitais observadas e reduzidas
(observações quase-simultâneas).

ESTAÇÃO A	ESTAÇÃO B	Distância Zenital Observada	REDUÇÃO	Distância Zenital Reduzida
RN - A1	A2	87° 13' 23,0"	- 62,057"	87° 12' 20,943"
A2	RN-A1	92 53 30,8	-328,096	92 48 02,704
A2	A3	90 36 45,3	-141,800	90 34 23,501
A3	A2	89 28 00,6	-128,910	89 25 51,690
A3	A4	90 44 32,4	- 54,257	90 43 38,140
A4	A3	89 17 43,4	- 26,698	89 17 16,700
A4	RN-A5	90 02 45,0	-110,835	90 00 54,165
RN - A5	A4	90 00 55,3	- 75,838	89 59 39,460
RN - 2001 N	V1	90 03 47,0	- 32,576	90 03 14,424
V1	RN-2001 N	89 58 41,0	- 93,969	89 57 07,031
V1	V2	90 48 44,4	- 41,736	90 48 02,660
V2	V1	89 13 23,4	- 19,689	89 13 03,710
V2	RN-2001 M	90 09 60,0	-1342,665	89 47 37,330
RN - 2001 M	V2	90 10 08,5	+152,962	90 12 41,462
RN - 2001 M	V3	88 16 35,3	- 44,398	88 15 50,902
V3	RN-2001 M	91 46 42,5	-138,981	91 44 23,519
V3	V4	88 01 41,2	- 97,299	88 00 03,901
V4	V3	92 04 45,8	-241,842	92 00 43,958
V4	V5	91 23 00,8	-122,342	91 20 58,458
V5	V4	88 42 32,0	-207,048	88 39 04,952
V5	V6	91 11 38,7	-264,944	91 07 13,756
V6	V5	88 55 43,0	-189,254	88 52 33,746
V6	RN-V7	90 40 08,2	- 66,160	90 39 02,039
RN - V7	V6	89 22 17,3	- 27,807	89 21 49,493
RN - 2001 L	V8	89 01 47,3	- 43,325	89 01 03,975
V8	RN-2001 L	89 07 16,3	-487,385	90 59 08,915
V8	V9	90 16 24,1	- 54,644	90 15 29,456
V9	V8	89 47 35,5	-108,135	89 45 47,365
V9	V10	89 58 01,2	- 44,321	89 57 16,879
V10	V9	90 05 10,1	- 78,075	90 03 52,026
V10	V11	89 28 18,5	- 23,247	89 27 55,253
V11	V10	90 32 08,1	+ 44,557	90 32 52,657
V11	V12	90 52 16,0	-178,260	90 49 17,739
V12	V11	89 13 55,0	-164,848	89 11 10,152
V12	RN-V13	90 20 20,3	-162,947	90 17 37,350
RN - V13	V12	89 45 48,8	-134,309	89 43 34,491
RN - V13	V14	92 00 08,5	- 63,974	91 59 06,331
V14	RN-V13	88 02 49,6	- 31,314	88 02 18,286
V14	RN-2001 E	97 21 58,0	-102,327	97 20 15,673
RN - 2001 E	V14	82 41 05,0	- 48,159	82 40 16,841
V14	RN-V15	92 34 37,0	- 84,214	92 33 12,786
RN - V15	V14	87 28 30,4	- 38,525	87 27 51,875
V14	RN-2000 V	90 47 13,6	- 11,645	90 47 01,949
RN-2000 V	V14	89 17 50,5	- 26,524	89 17 23,976

QUADRO A-3 - Distâncias entre os vértices

ESTAÇÃO A	ESTAÇÃO B	DISTÂNCIAS (m)
A ₁	A ₂	265,929
A ₂	A ₃	400,030
A ₃	A ₄	1197,512
A ₄	A ₅	530,366
2001-N	V ₁	823,136
V ₁	V ₂	1309,541
2001-M	V ₃	534,027
V ₃	V ₄	296,611
V ₄	V ₅	328,668
V ₅	V ₆	239,733
V ₆	V ₇	1075,513
2001-L	V ₈	190,407
V ₈	V ₉	2144,000
V ₉	V ₁₀	2615,477
V ₁₀	V ₁₁	1064,683
V ₁₁	V ₁₂	462,786
V ₁₂	V ₁₃	1044,300
V ₁₃	V ₁₄	3061,200
2001-E	V ₁₄	679,707
V ₁₄	2001-D	2300,122
V ₁₄	2000-C v	7970,250

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |01| ANDRADE, J.B. Refração nas observações angulares. S.N.T. (Apresentado no 9º CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, Curitiba, 1979).
- |02| BONFORD, B.G. Geodesy. 3. ed. Oxford, Universidade Press, 1971. 731 p.
- |03| BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Nivelamento barométrico; manual técnico. Brasília, 1984. 53p.
- |04| BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Nivelamento geométrico. Manual técnico. Brasília, 1975. 110 p.
- |05| BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Nivelamento trigonométrico. Manual técnico. Brasília, 1975. 48 p.
- |06| BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Normas gerais para operações geodésicas, astronômicas, topográficas e fotogramétricas; Manual técnico. 2. ed. Brasília, 1982. 42 p.
- |07| BRASIL, Ministério do Exército. Estado Maior do Exército. Poligonização Eletrônica; Manual técnico. Brasília, 1984. 158 p.
- |08| D'ALGE, J.C.L. Estabelecimento de um sistema de altitudes a partir do nivelamento geométrico. Curitiba, 1986. 98 p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- |09| DOUBEK, A. Poligonais geodésicas. Curitiba, DGTC, 1969. 49 p.
- |10| ERWING, C.E. & MITCHELL, M.M. Introduction to geodesy. New York, Elsevier, 1970. 304 p.
- |11| GANDARIAS, V. Geodésia e hidrografia. Madri, Dossat, 1956. 334 p.
- |12| GEMAEL, C. Geodésia física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. 163 p.
- |13| GEMAEL, C. Introdução a geodésia geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. 267 p.

- | 14 | GEMAEL, C. Introdução à Geodésia Geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1987. 101 p.
- | 15 | HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. Physical geodesy. San Francisco, W.H. Freeman, 1967. 364 p.
- | 16 | HOSMER, G.L. Geodesy. 2. ed. New York, Wiley, 1946. 461 p.
- | 17 | HOAR, G.J. Satellite surveying. Califórnia, Magnavox, 1982, 145 p.
- | 18 | IBGE. Diretoria de Geodésia e Cartografia. Descrição das referências de nível do Estado de Santa Catarina. Rio de Janeiro, 1986. 270p.
- | 19 | LEITE, O.H. S. da. Sobre um processo de automatização da correção do terreno. Curitiba, 1979. 70 p. Dissertação, Mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- | 20 | LIMA, J.B. de. Controle de zenitais recíprocas e simultâneas. Rio de Janeiro. 22p. (inédito).