

TAMIA MARTA YAMAMOTO

Métodos de Determinação de Geóide

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre.

CURITIBA

1983

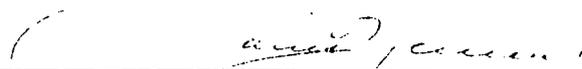
MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

por

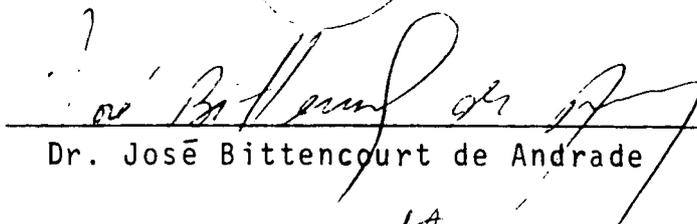
TAMIA MARTA YAMAMOTO

Dissertação aprovada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Ciências
no Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas, pela Comissão formada pelos
Professores:

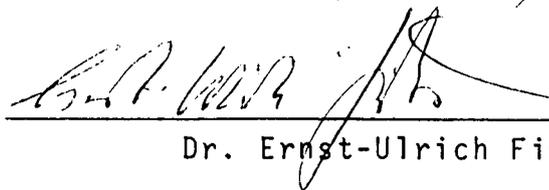
ORIENTADOR:



Dr. Camil Gemael



Dr. José Bittencourt de Andrade



Dr. Ernst-Ulrich Fischer

Curitiba, 8 de julho de 1983

às minhas filhas

Lia e Mayra

A G R A D E C I M E N T O S

Desejamos externar os nossos sinceros agradecimentos:

ao Dr. Camil Gemael, pela orientação, crítica e incentivos na elaboração deste trabalho;

ao Dr. Richard H. Rapp, Professor da The Ohio State University, por ceder o conjunto de anomalias da gravidade;

a todos os Professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, e às pessoas, que de alguma forma, direta ou indiretamente, auxiliaram neste trabalho;

ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, que concedeu o meu afastamento parcial para a realização do Curso;

aos colegas do Curso e familiares.

R E S U M O

Neste trabalho são apresentados: os métodos de determinação do geóide astro-geodésico, gravimétrico, astro-gravimétrico, celeste e o combinado, assim como alguns exemplos de geóides calculados através desses processos.

A autora analisa também as influências das diversas regiões afastadas, no cálculo da ondulação geoidal pela fórmula de Stokes.

S U M Á R I O

	Página
TÍTULO.....	ii
DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS.....	iv
RESUMO.....	v
 <u>CAPÍTULO I</u>	
INTRODUÇÃO.....	1
 <u>CAPÍTULO II</u>	
DETERMINAÇÃO ASTRO-GEODÉSICA DO GEÓIDE	
II.1	3
SISTEMA DE COORDENADAS TERRESTRES, GEODÉSICAS E NATURAIS.....	
II.1.1 Sistema de coordenadas terrestres tridimensionais.....	
II.1.2 Sistema de coordenadas geodésicas.....	
II.1.3 Sistema de coordenadas naturais.....	
II.2	7
DESVIO DA VERTICAL. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NATURAIS EM GEODÉSICAS.....	
II.3	11
PROJEÇÃO DE HELMERT.....	
II.4	12
AZIMUTE ASTRONÔMICO E GEODÉSICO, EQUAÇÃO DE LAPLACE.....	
II.5	15
DETERMINAÇÃO ASTRO-GEODÉSICA DO GEÓIDE.....	
II.6	20
APLICAÇÃO DO MÉTODO ASTRO-GEODÉSICO.....	

CAPÍTULO III

		Página
	METODO GRAVIMÉTRICO	
III.1	INTRODUÇÃO.....	21
III.2	SISTEMA DE REFERÊNCIA DA GRAVIDADE.....	23
III.2.1	Introdução.....	23
III.2.2	IGSN-71.....	24
III.2.3	Linhas de Calibração.....	25
III.2.4	Rede Gravimétrica Nacional.....	26
III.2.5	Densificação Gravimétrica.....	27
III.3	ANOMALIA DA GRAVIDADE.....	27
III.4	POTENCIAL DE ATRAÇÃO EM HARMÔNICOS ESFÉRICOS....	29
III.5	POTENCIAL DA GRAVIDADE OU GEOPOTENCIAL.....	39
III.6	REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS.....	41
III.6.1	Reduções não Isostáticas.....	42
III.6.1.1	Redução do ar-livre, ou "free-air" ou de Faye.....	42
III.6.1.2	Redução de Bouguer.....	42
III.6.2	Redução Isostática.....	43
III.7	FÓRMULA DE STOKES.....	45
III.8	CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE STOKES E DA ONDULAÇÃO GEOIDAL.....	53
III.8.1	Coeficiente dos Quadrados de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$	54
III.8.2	Coeficiente para Quadrados de $5^{\circ} \times 5^{\circ}$...	54
III.8.3	Cálculo da Ondulação Geoidal N.....	55
III.8.4	Regiões Vizinhas.....	55
III.8.5	Programa FORTRAN para Cálculo da Ondulação Geoidal N.....	56

III.9	CARTAS GEOIDAIIS DO BRASIL. GRÁFICOS PARA ANÁLISE DAS INFLUÊNCIAS DAS REGIÕES AFASTADAS.....	56
-------	--	----

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO ASTRO-GRAVIMÉTRICA DO GEÓIDE

IV.1	INTRODUÇÃO.....	67
IV.2	DESVIO DA VERTICAL - FÓRMULA DE VENING MEINESZ..	68
IV.3	ESSÊNCIA DO MÉTODO.....	75
IV.4	GEÓIDE ASTRO-GRAVIMÉTRICO.....	78

CAPÍTULO V

MÉTODO CELESTE E MÉTODO COMBINADO

V.1	MÉTODO CELESTE.....	79
V.1.1	Introdução.....	79
V.1.2	Ondulação Geoidal Calculada Através dos Harmônicos Esféricos.....	80
V.1.3	Método Alternativo para o Cálculo da Ondulação Geoidal Através dos Harmônicos Esféricos.....	80
V.1.4	Altimetria por Satélite.....	81
V.2	MÉTODO COMBINADO.....	85
V.2.1	Introdução.....	85
V.2.2	Cálculo da Ondulação Geoidal Aplicando Harmônicos Esféricos e Gravimetria.....	86
V.2.3	Aplicação do Método Combinado.....	88

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO.....	89
APÊNDICE A.....	91
APÊNDICE B.....	97
SUMMARY.....	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	103

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O geóide é uma determinada superfície equipotencial do campo da gravidade: aquela que mais se aproxima do nível médio dos mares; nos continentes e ilhas (25% da superfície terrestre) acha-se no interior da crosta [7].

Existem vários métodos de determinação do geóide que podemos enumerar como segue:

1. astro-geodésico;
2. gravimétrico;
3. astro-gravimétrico;
4. celeste; e
5. combinado.

O geóide calculado a partir do desvio astro-geodésico, cuja técnica de resolução convencional é por integração de linha ao longo da cadeia de triangulação geodésica, é denominado geóide astro-geodésico. O método de obtenção do mesmo é descrito no capítulo segundo.

O geóide gravimétrico, conhecido como geóide absoluto, pois refere-se ao elipsóide com centro no centro de massa da Terra, e cujo eixo menor coincide com o eixo de rotação terrestre, obtido pela fórmula de Stokes é apresentado no capítulo terceiro, assim como o programa Fortran que calcula a ondulação geoidal no Brasil. A obtenção da carta geoidal gravimétrica precisa

nao é possível, uma vez que não conhecemos as anomalias da gravidade em todo o mundo, e particularmente no Brasil.

O método astro-gravimétrico, é uma combinação dos métodos astro-geodésico e o gravimétrico, de forma complementar, uma vez que o primeiro é restrito às áreas continentais contendo o efeito da Terra toda e o segundo só será confiável se conhecermos as medidas da gravidade estendidas a total superfície terrestre, mas infelizmente, as áreas desconhecidas gravimetricamente são enormes tanto nos mares como nos continentes. Este método apresentamos no quarto capítulo.

Nos anos recentes desenvolveram-se, de maneira considerável, métodos de obtenção do geóide pelos satélites; por exemplo, estabelecendo estações Doppler sobre referências de nível de primeira ordem como vem sendo feito em nosso país pelo IBGE ou calculando a separação geóide-elipsóide através de desenvolvimento em série de harmônicos esféricos.

As observações a satélites podem ser usadas em conjunto com os dados terrestres para determinar o geóide e a este método denominamos método combinado.

Estes dois últimos métodos apresentamos no quinto capítulo deste trabalho.

No cálculo da ondulação geoidal N , pela fórmula de Stokes, muitos geodestas não consideravam as influências das regiões afastadas, devido ao desconhecimento gravimétrico destas áreas. Neste trabalho nos propomos a analisar as influências das diversas regiões no cálculo de N e o apresentamos no sexto capítulo.

CAPÍTULO II

DETERMINAÇÃO ASTRO-GEODÉSICA DO GEÓIDE

II.1 SISTEMA DE COORDENADAS TERRESTRES, GEODÉSICAS E NATURAIS

II.1.1 Sistema de coordenadas terrestres tridimensionais

É um sistema de coordenadas retangulares dextrogino, onde o eixo z poderá ser o eixo de rotação médio da Terra (CIO) ou o eixo de rotação instantâneo, com origem no centro de massa da Terra e o plano xz contendo o meridiano do observatório médio de Greenwich. (Fig. II.1.1)

II.1.2 Sistema de coordenadas geodésicas

As coordenadas geodésicas de um ponto P da superfície física da Terra são ϕ , λ e H , respectivamente; a latitude e a longitude geodésicas e a altitude geométrica. (Fig. II.1.2)

A latitude geodésica ϕ é o ângulo formado pela normal ao elipsóide conduzida a partir do ponto P e sua projeção equatorial, considerada positiva no hemisfério norte.

A normal e o eixo de rotação são coplanares, o plano por eles determinado define o meridiano geodésico de P . O ângulo

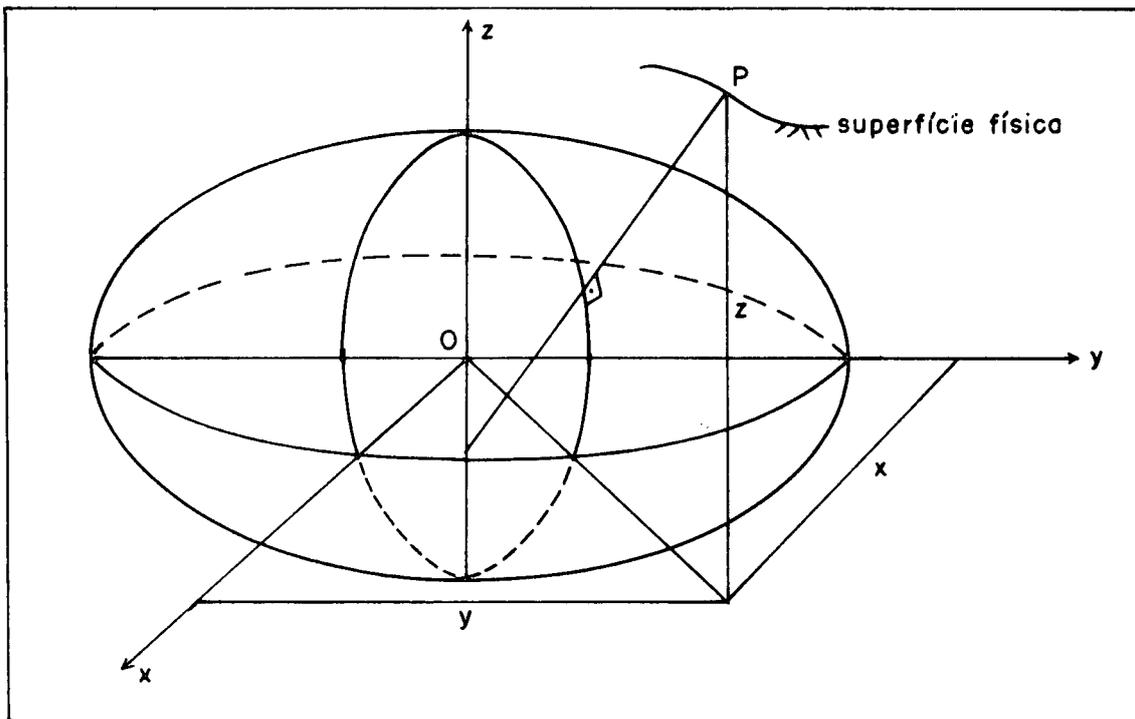


Fig. II.1.1 - Sistema de coordenadas terrestres tridimensionais

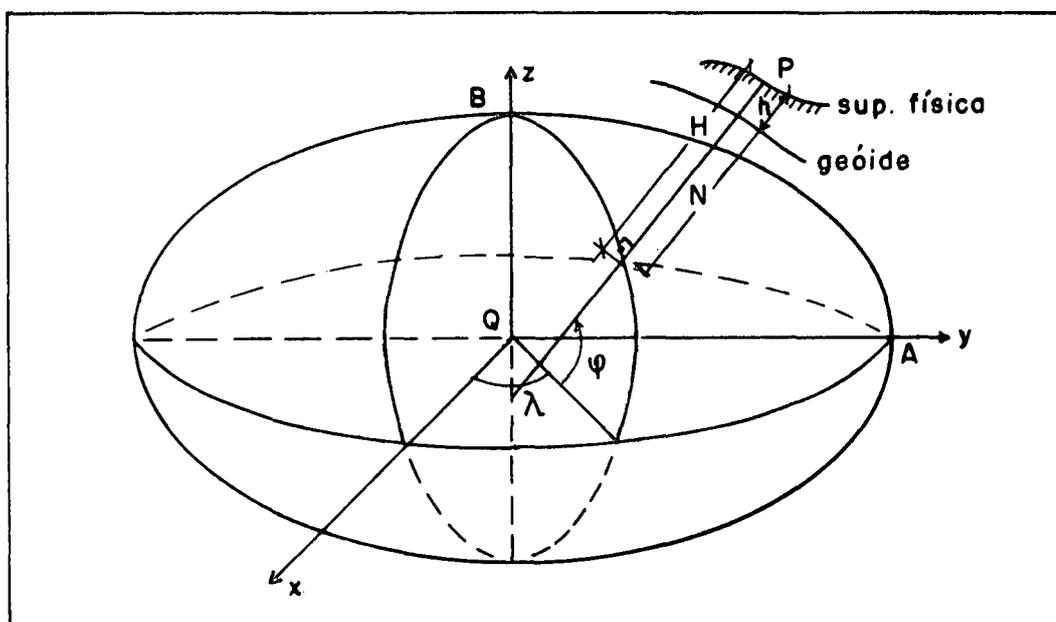


Fig. II.1.2 - Sistema de coordenadas geodésicas

gulo diedro formado pelos meridianos geodésicos de Greenwich (origem) e de P é denominado longitude geodésica λ de P, positiva a leste de Greenwich.

Altitude geométrica H é a distância do ponto P ao elipsóide medida sobre a respectiva normal.

A fim de relacionar as coordenadas dos dois sistemas anteriormente definidos, consideremos o elipsóide com o centro coincidente com o centro de massa da Terra. O raio vetor do ponto P é dado por:

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} (N^*+H) \cos \phi \cos \lambda \\ (N^*+H) \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \\ (N^* \frac{b^2}{a^2} + H) \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \quad (\text{II.1.2.1})$$

onde N^* é o raio de curvatura da seção primeiro vertical, função da latitude geodésica (ϕ), do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (e) do elipsóide:

$$N^* = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (\text{II.1.2.2})$$

Não é necessário condicionarmos que o centro do elipsóide de referência coincida com o centro de massa da Terra (*).

(*) Quando não houver coincidência, a translação dos centros deve ser adicionado à transformação.

A transformação inversa é mais complicada e é usualmente resolvida por um processo iterativo.

II.1.3 Sistema de coordenadas naturais

As coordenadas naturais do ponto P são ϕ_a , λ_a e h , respectivamente a latitude e longitude astronômicas e a altitude ortométrica. Fig. II-1.3.

A latitude astronômica ϕ_a de um ponto P é o ângulo que a vertical deste ponto forma com sua projeção equatorial; por convenção é positiva no hemisfério norte.

A longitude astronômica λ_a , de um ponto P, é o ângulo diedro formado pelos meridianos astronômico médios de Greenwich (origem) e do ponto P, positiva a leste de Greenwich. O meridiano astronômico de um ponto é definido pelo plano vertical deste ponto, e por uma paralela ao eixo de rotação, pois o eixo e a vertical não são necessariamente coplanares.

A altitude ortométrica h de um ponto P é a distância contada sobre a vertical deste ponto ao geóide e pode ser obtida com o nivelamento geométrico associado à gravimetria.

II.2 DESvio DA VERTICAL. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NATURAIS EM GEODÉSICAS

Na figura II.2 representamos por OZ e ON, respectivamente a vertical e a normal relativas a um observador de coordenadas geodésicas (ϕ, λ, H) e naturais (ϕ_a, λ_a, h) . O ângulo i formado

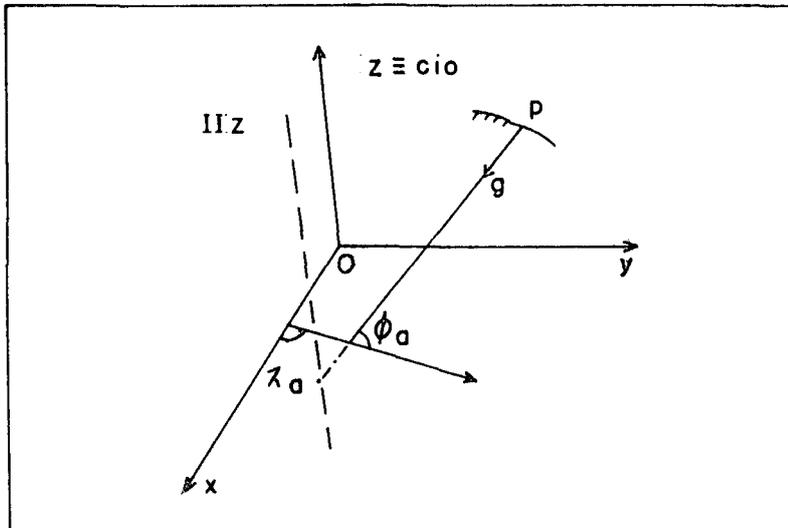


Fig. II.1.3 - Coordenadas naturais

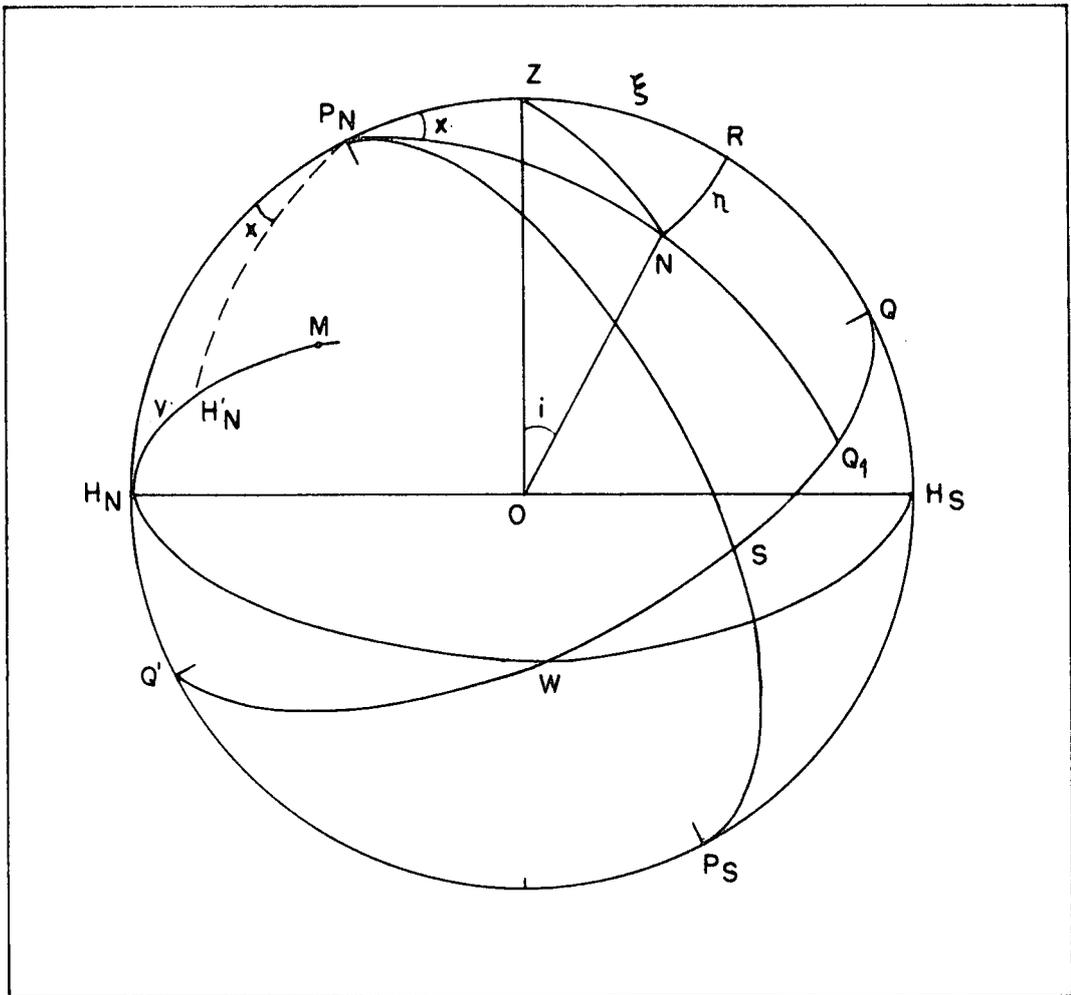


Fig. II. 2.

pela vertical e a normal, denomina-se desvio da vertical que pode ser medido pelo arco ZN e este por sua vez decomposto na componente segundo o meridiano ξ e o primeiro vertical η .

Da mesma figura temos:

$$\widehat{QZ} = \phi_a$$

$$\widehat{NQ_1} = \phi \cong \widehat{RQ}$$

então

$$\phi_a - \phi = \xi, \quad (\text{II.2.1})$$

ξ será positiva quando a vertical se acha ao norte da normal.

Da figura II.1.2 podemos escrever:

$$H \cong h + N. \quad (\text{II.2.2})$$

Do triângulo $NP_N R$, da figura II.2, aplicamos a lei dos senos, obtendo-se:

$$\frac{\text{sen } P_N N}{\text{sen } R} = \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } x} \approx \frac{\eta}{x}$$

$$\text{sen } (90 - \phi) \approx \frac{\eta}{x}$$

$$x \text{ sen } (90 - \phi) = \eta \quad (\text{II.2.3})$$

Da mesma figura tiramos:

$$SQ_1 = \lambda,$$

$$SQ = \lambda_a,$$

$$SQ - SQ_1 = \lambda_a - \lambda = QQ_1 = x. \quad (\text{II.2.4})$$

Substituindo (II.2.4) em (II.2.3) obtemos:

$$(\lambda_a - \lambda) \cos \phi = \eta, \quad (\text{II.2.5})$$

sendo η maior que zero se a vertical estiver situada a leste da normal.

Das equações (II.2.1), (II.2.2) e (II.2.5) concluimos que podemos transformar coordenadas naturais em geodésicas, somente, se conhecermos a ondulação geoidal N e as duas componentes do desvio da vertical ξ e η no ponto P .

As coordenadas geodésicas podem subsequentemente ser transformadas em coordenadas terrestres através do elipsóide de referência sobre a qual as coordenadas geodésicas são conhecidas. Logo podemos concluir que a fim de transformar as coordenadas naturais, que podem ser consideradas "coordenadas observadas", em coordenadas terrestres, devemos conhecer duas superfícies, a do elipsóide de referência e a do geóide.

II.3 PROJEÇÃO DE HELMERT

Os v̄rtices geodésicos materializados na superfície física da Terra devem ser projetados sobre a superfície do elipsóide de referência, uma vez que é sobre esta que a Geodésia Geométrica efetua todos os seus cálculos. Helmert adotou uma solu-

ção bem simples: projetar um ponto $P (\phi, \lambda, H)$ sobre o elipsóide ao longo da normal, obtendo desta forma o ponto correspondente $P_0(\phi, \lambda, 0)$. Fig. II.3

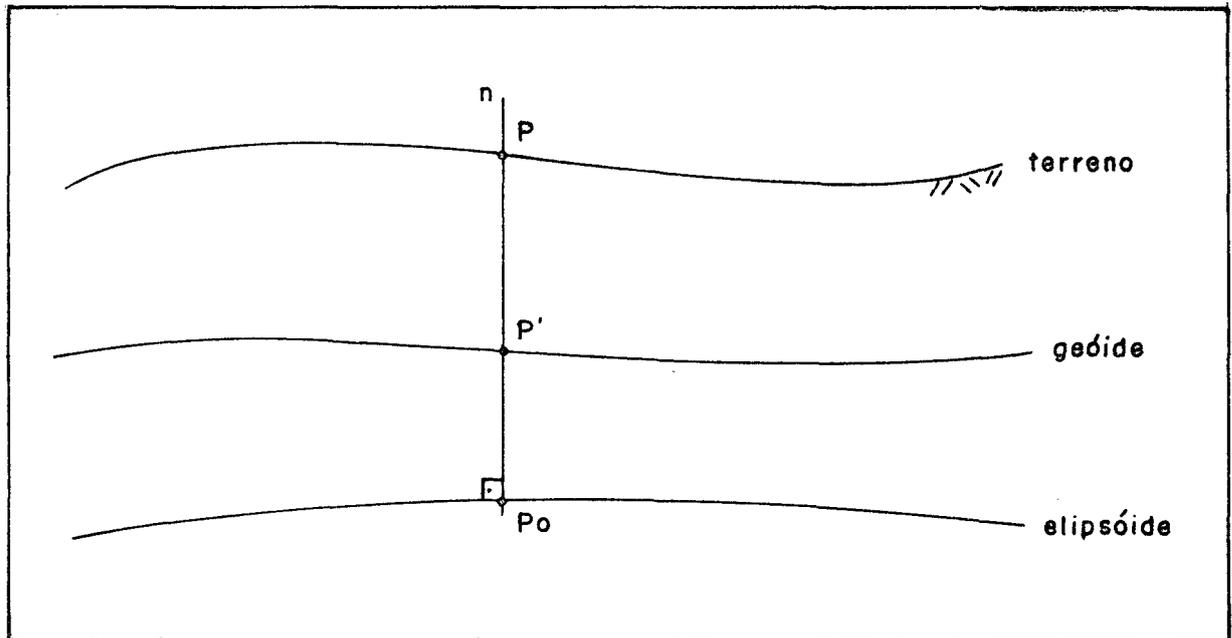


Fig. II.3 Projeção de Helmert

II.4 AZIMUTE ASTRONÔMICO E GEODÉSICO, EQUAÇÃO DE LAPLACE

Em geodésia trabalhamos com dois tipos diferentes de azimute: o astronômico e o geodésico.

O azimute astronômico A_a da direção P_1P_2 é definido como o ângulo entre dois planos verticais do ponto P_1 , onde um deles é o meridiano astronômico de P_1 e o outro contém P_2 . Em astronomia os azimutes são contados do sul por oeste.

O azimute geodésico A_{12} da direção P_1P_2 sobre o elipsóide é o ângulo que o meridiano geodésico do ponto P_1 forma com a geo

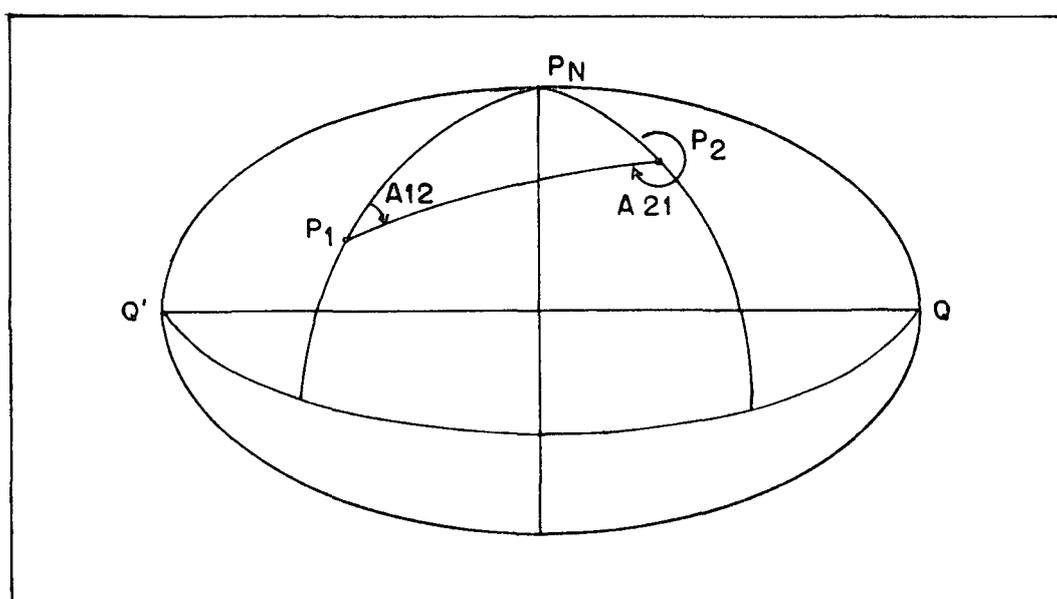


Fig. II.4.1 - Azimute geodésico.

dêsica (*) P_1P_2 , contada do norte, por leste. O azimute A_{21} , da direçãõ de P_2 a P_1 ã denominado contra-azimute de A_{12} .

Da figura II.2

$H_N^M = A_a$ = azimute astronômico de uma direçãõ,

$H_N^M = A$ = azimute geodêsico da mesma direçãõ;

$$A_a - A = y \quad (\text{II.4.1})$$

e do triângulo $P_N H_N H_N^i$ retângulo em H_N^i

$$\text{sen } \phi_a = \frac{\text{sen } y}{\text{sen } x} \approx \frac{y}{x}$$

$$y = x \text{ sen } \phi_a \quad (\text{II.4.2})$$

Fazendo $\text{sen } \phi_a = \text{sen } \phi$ e introduzindo a (II.2.3) na (II.4.2)

$$y = n \text{ tg } \phi \quad (\text{II.4.3})$$

Substituindo (II.4.1) em (II.4.3)

$$(A_a - A) = n \text{ tg } \phi. \quad (\text{II.4.4})$$

As equações (II.2.5) e (II.4.4) dãõ a equaçãõ de controle:

$$A_a - A = (\lambda_a - \lambda) \text{ sen } \phi \quad (\text{II.4.5})$$

(*) Geodêsica ã o menor caminho entre dois pontos sobre a superfície considerada | 7 |.

Esta equação (II.4.5), é denominada equação de Laplace simplificada.

O azimute geodésico determinado a partir de

$$A = A_a - (\lambda_a - \lambda) \operatorname{sen} \phi \quad (\text{II.4.6})$$

é conhecido como azimute de Laplace. Um ponto para o qual o azimute de Laplace foi determinado é chamado ponto de Laplace.

A equação de Laplace ainda nos permite encontrar outra fórmula para η .

$$\lambda_a - \lambda = \eta \operatorname{sec} \phi . \quad (\text{II.4.7})$$

vista anteriormente, deriva

$$\eta = (A_a - A) \operatorname{ctg} \phi \quad (\text{II.4.8})$$

que relaciona a componente primeiro vertical do desvio da vertical e a diferença dos azimutes.

II.5 DETERMINAÇÃO ASTRO-GEODÉSICA DO GEÓIDE

Consideremos dois pontos bastante próximos ligados por um arco elementar ds ; o desnível dN do geóide, referente ao elipsóide, pela figura II.5.1, escreve-se

$$dN = \theta ds \quad (\text{II.5.1})$$

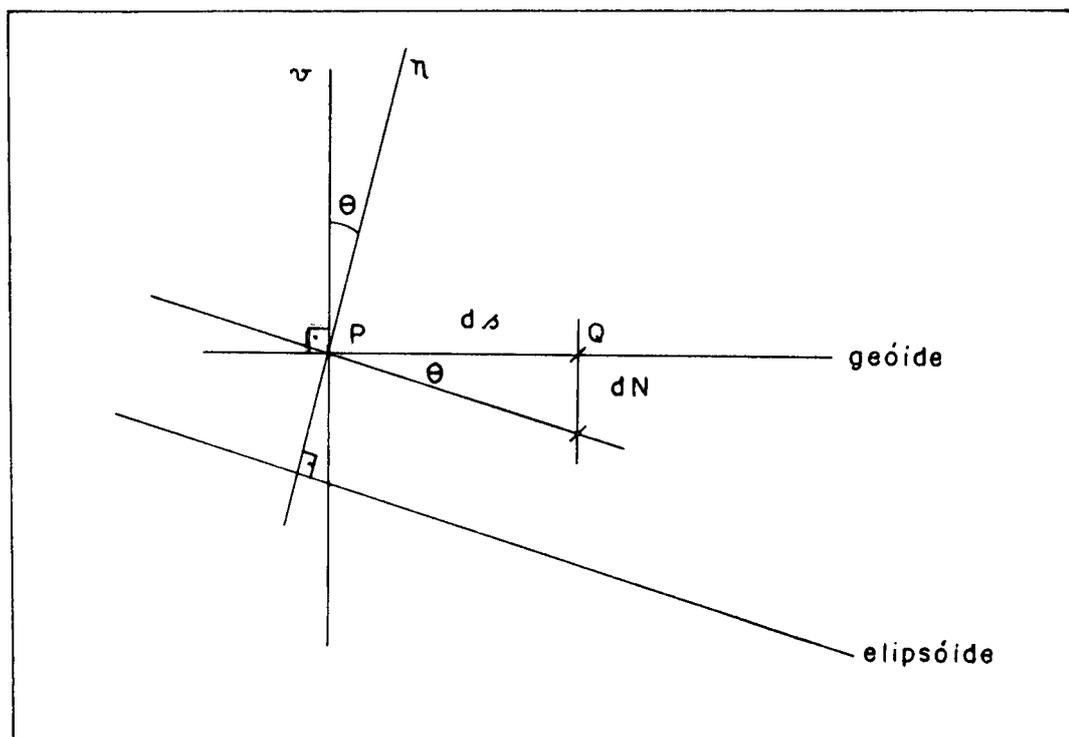


Fig. II.5.1

sendo θ a componente do desvio segundo ds .

Esta equação (II.5.1) pode ser aplicada sucessivamente a uma s\u00e9rie inteira de pontos, onde a soma de todos os dN d\u00e1 a eleva\u00e7\u00e3o total do ge\u00f3ide entre os pontos extremos. Se representarmos estes extremos por P_1 e P_2 teremos:

$$N_2 - N_1 = \int_{P_1}^{P_2} \theta ds \quad (\text{II.5.2})$$

Se entre P_1 e P_2 pudermos admitir uma varia\u00e7\u00e3o linear das componentes do desvio da vertical:

$$N_2 - N_1 = \int_{P_1}^{P_2} \theta ds = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} s \quad (\text{II.5.3})$$

Na figura II.5.2, designando por α_0 o azimute do arco \overline{ZN} , por i o desvio da vertical, as componentes principais s\u00e3o:

$$\xi = i \cos \alpha_0 \quad (\text{II.5.4})$$

$$\eta = i \sin \alpha_0 \quad (\text{II.5.5})$$

Projetando o arco i na dire\u00e7\u00e3o de azimute α e designando por θ a componente segundo essa dire\u00e7\u00e3o:

$$\theta = i \cos (\alpha - \alpha_0)$$

$$\theta = i \cos \alpha \cos \alpha_0 + i \sin \alpha \sin \alpha_0 . \quad (\text{II.5.6})$$

Substituindo (II.5.4) e (II.5.5) em (II.5.6) obtemos

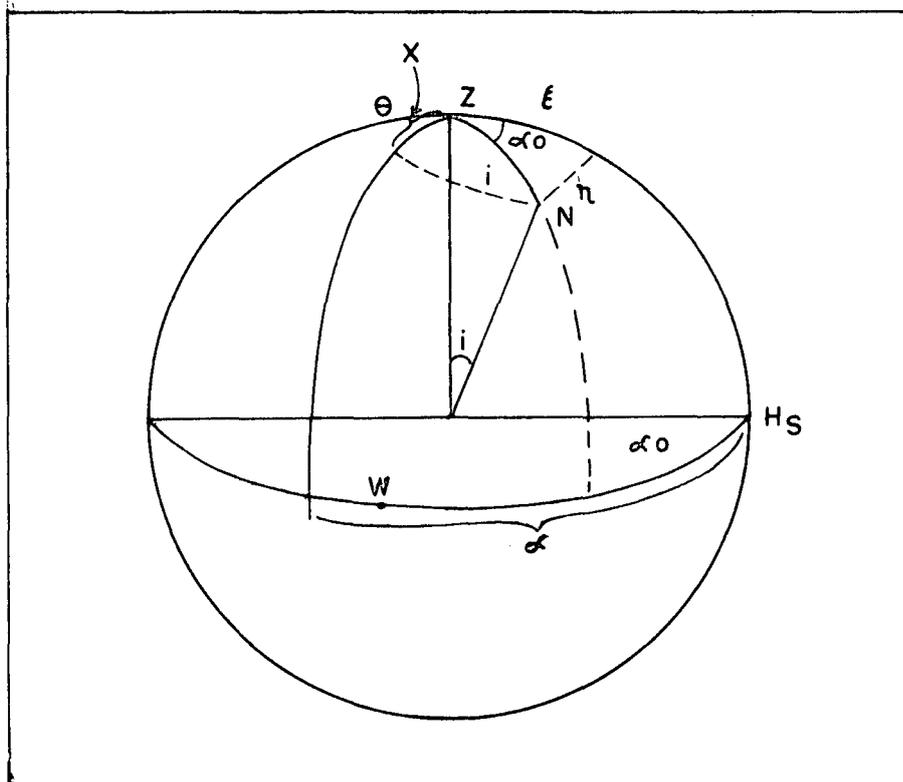


Fig. II.5.2

$$\theta = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (\text{II.5.7})$$

Introduzindo (II.5.7) na (II.5.3)

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} s (\xi_1 \cos \alpha_1 + \eta_1 \sin \alpha_1 + \xi_2 \cos \alpha_2 + \eta_2 \sin \alpha_2) \quad (\text{II.5.8})$$

Fazendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\Delta N = \frac{1}{2} s [\cos \alpha (\xi_1 + \xi_2) + \sin \alpha (\eta_1 + \eta_2)] \quad (\text{II.5.9})$$

Introduzindo as projeções de s sobre o meridiano e sobre o paralelo de raio R e latitude ϕ , obteremos:

$$\Delta N = \frac{1}{2} R [(\xi_1 + \xi_2) \Delta \phi + (\eta_1 + \eta_2) \Delta \lambda \cos \phi] \quad (\text{II.5.10})$$

sendo $\Delta \phi$ e $\Delta \lambda$ as diferenças entre as latitudes e as longitudes extremas de s , respectivamente.

Substituindo por $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ as médias aritméticas entre as componentes do desvio

$$\Delta N = R (\bar{\xi} \Delta \phi + \bar{\eta} \Delta \lambda \cos \phi) \quad (\text{II.5.11})$$

Exprimindo $\Delta \phi$ e $\Delta \lambda$ em minutos e as componentes médias em segundos e $R = 6371 \times 10^5$ cm

$$\Delta N = 0,9 (\bar{\xi}'' \Delta \phi' + \bar{\eta}'' \Delta \lambda \cos \phi) \quad (\text{II.5.12})$$

II.6 APLICAÇÃO DO MÉTODO ASTRO-GEODÉSICO

O método astro-geodésico foi utilizado por Hayford no início do século, por volta de 1909, para obter a primeira carta geoidal dos Estados Unidos. O geodesta canadense Ney, em 1952, efetuou investigações no sul de seu país e Irene Fisher estudou o geóide na América do Sul, em 1965.

CAPÍTULO III

MÉTODO GRAVIMÉTRICO

III.1 INTRODUÇÃO

A idéia básica do método gravimétrico é que as massas anômalas, causam a anomalia da gravidade, Δg , a ondulação do geóide N e o desvio da vertical, mostrados na figura III.1. As anomalias da gravidade Δg , podem ser observadas e a partir delas podemos calcular a ondulação do geóide e o desvio da vertical. As fórmulas matemáticas básicas para o cálculo da ondulação geoidal, usando anomalias da gravidade, foram deduzidas por Stokes em 1849 [30]. As fórmulas correspondentes para o cálculo do desvio da vertical foram deduzidas por Vening Meinesz em 1928 [12], as quais apresentamos no capítulo seguinte.

Existem algumas condições do método gravimétrico que são:

- i) o campo gravífico em todo o mundo deve ser conhecido;
- ii) todas as observações gravimétricas devem ser feitas no mesmo sistema;
- iii) todas as medidas gravimétricas devem ser reduzidas ao geóide, usando métodos de redução convenientes;

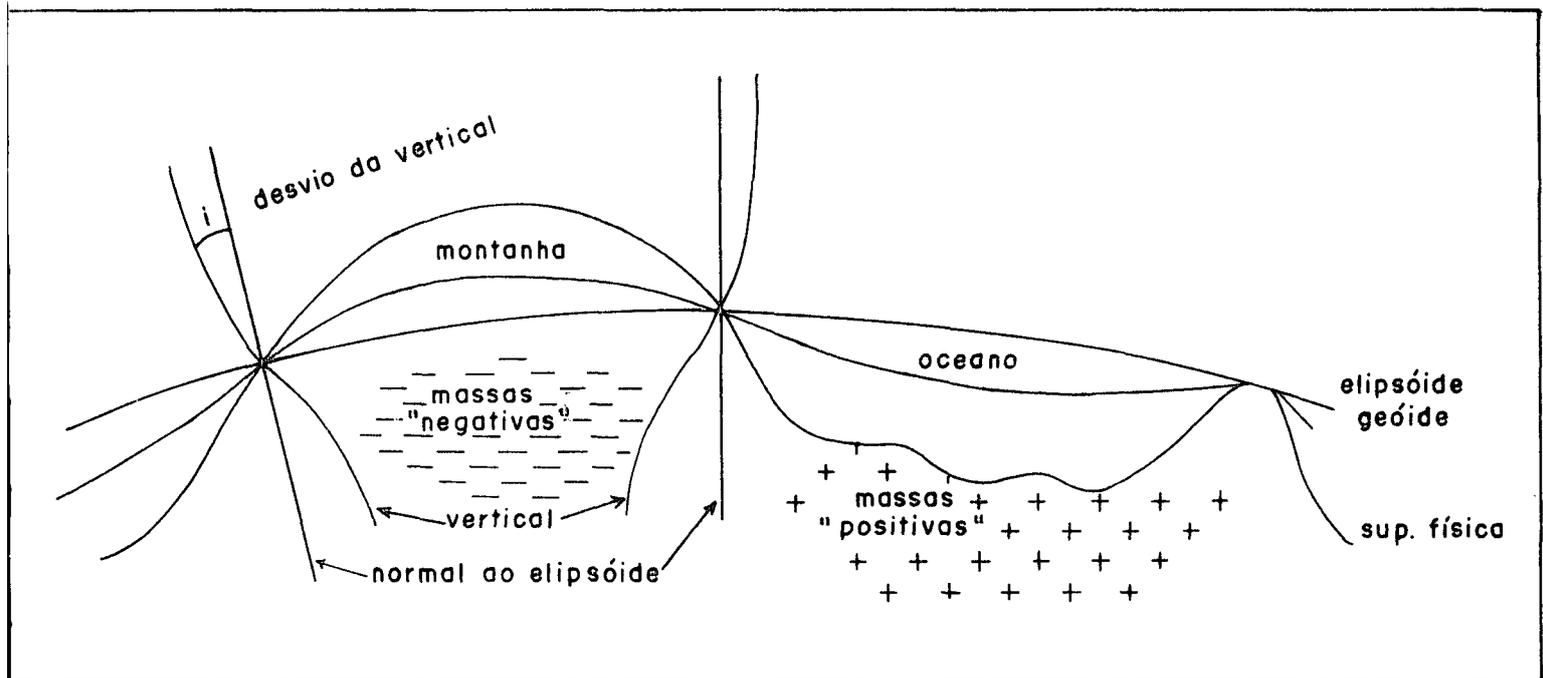


Fig. III.1 - Conceito esquemático da geodésia gravimétrica.

- iv) a gravidade teórica deve ser calculada para a latitude do ponto de observação;
- v) a anomalia da gravidade é a diferença entre o valor da gravidade medida reduzida ao nível dos mares, e a gravidade teórica obtida a partir da fórmula padrão; o que significa que a fórmula da gravidade deve gerar valores teóricos tão próximos quanto possível dos verdadeiros;
- vi) como a condição (i) não é atualmente satisfeita, o campo da gravidade deve ser estendido às áreas não observadas, por métodos de interpolação e/ou extrapolação, que tenham além de base matemática, suporte geofísico.

A seguir apresentaremos estas condições do método gravimétrico, o cálculo da ondulação geoidal e sua discussão.

III.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA DA GRAVIDADE

III.2.1 INTRODUÇÃO

Os geodestas e geofísicos necessitam conhecer a gravidade com grande exatidão sobre toda a superfície da Terra. Programas para prover medidas da gravidade sobre os continentes e oceanos expandiram-se rapidamente e, estamos próximos de ativar medidas gravimétricas a bordo de aviões com exatidão desejada. Um sistema de referência universal homogêneo é então necessário para padronizar estas medidas. Este novo sistema pode fornecer o datum e escala com exatidão compatível com a capacidade do instrumental moderno.

III.2.2 IGSN-71

O primeiro sistema de referência internacional da gravidade aceito foi o sistema de Viena, adotado em 1900, no XII Congresso da Associação Internacional de Geodésia, em Paris, e teve uma precisão relativa estimada em ± 10 mGal [25].

O sistema de Potsdam foi introduzido logo depois e internacionalmente aceito em 1909, na reunião da Associação Internacional de Geodésia (IAG) em Londres. A precisão relativa do sistema foi estimado em ± 3 mGal e corrigiu o sistema de Viena de -16 mGal. Medidas absolutas realizadas em vários laboratórios nas últimas décadas e transportadas a Potsdam, entretanto, indicavam um erro da ordem de 14 mGal no valor absoluto de Potsdam, determinado no início do século com pêndulos reversíveis.

A publicação de dois ajustamentos independentes (Morelli e Hirvonen) demonstrou a falta de precisão e a distribuição insuficiente das observações gravimétricas existentes, e induziu Woolard a empreender seu trabalho pioneiro de promover o uso de novos instrumentos geodésicos, como gravímetro LaCoste & Romberg, Worden e pêndulos Gulf, para fornecer novas e mais exatas medidas relativas da gravidade em todo o mundo.

O International Gravity Standardization Net-1971 (IGSN-71) tem suas raízes no pós-Segunda Guerra Mundial, quando ficou evidenciada a necessidade de definir um novo sistema que interligasse estações absolutas e relativas disseminadas por todo o mundo, e cujas observações fossem submetidas a um único ajustamento. Uma rede universal que resultou do ajustamento de 24000

medidas por gravímetro, 1200 por pêndulos e 10 determinações ab solutas, coletadas em 20 anos, foi adotada pela IAG na XV Assem blêia Geral da União Internacional de Geodêsia e Geofísica, em agosto de 1971, em Moscou, e recebeu a denominação de IGSN-71.

O conceito do IGSN-71 difere dos primeiros sistemas de referência da gravidade porque o datum é determinado, não por um valor adotado em uma estação simples, mas pelos valo res da gravidade de 1854 estações, obtidas de um simples ajusta mento do material gravimétrico acima mencionado. Os desvios padrão dos valores da gravidade do IGSN-71 são menores que 0,1 mGal.

III.2.3 LINHAS DE CALIBRAÇÃO

Diferenças da gravidade foram medidas entre as estações de ordem inferior e estações da Rede Gravimétrica Internacional (IGSN-71), algumas vezes diretamente e algumas vezes via outras estações. Em muitos casos, quando estas estações foram ligadas entre si e à IGSN-71, os cientistas notaram que diferentes instrumentos de medidas dão diferenças sistemáticas entre as mesmas estações. Desta forma foi necessário estabelecer longas linhas de calibração afim de assegurar calibração uniforme.

Uma destas linhas se situa na América, partindo de Point Barrow, no Alasca (Oceano Ártico) vai através do Panamá à Punta Arenas no Chile, extremidade meridional da América do Sul. A linha de calibração euro-africana estende-se de Hamerfeste, na Noruega, à Capetown, na África do Sul. Uma linha foi proposta à Ásia, partindo de um lugar próximo a Salekhard,

USSR, indo até Colombo no Ceilon, e outra tem início em Hokkaido, Japão, e vai até Mac-Murdo Sound, na Antártida, com estações na Austrália e Nova Zelândia.

Ao longo destas linhas de calibração o intervalo entre as estações foi selecionado de tal forma que a diferença da gravidade é de cerca de 200 mGal. Todas estas estações tem sido ocupadas por pêndulos, e entre elas, estações secundárias são estabelecidas, as quais são medidas por gravímetros(*).

III.2.4 REDE GRAVIMÉTRICA NACIONAL

Das 1854 (§) estações que constituem o IGSN-71, cerca de cinquenta se localizam no nosso país.

Em breve vamos dispor de uma rede Gravimétrica Nacional ajustada e coerente com a IGSN-71, pois a Universidade Federal do Paraná e o Observatório Nacional iniciaram o trabalho pioneiro de implantação de estações gravimétricas de primeira ordem, bem distribuída geograficamente, por todo o território nacional.

(*) O rápido desenvolvimento dos gravímetros absolutos, cuja precisão quase aproxima ao nível do μGal , certamente irá revolucionar este assunto.

(§) Que existiam na época de sua implantação, porque a destruição de tais estações, pelo menos no nosso país, continua.

III.2.5 DENSIFICAÇÃO GRAVIMÉTRICA

Estabelecida a Rede Gravimétrica Nacional, segue-se naturalmente o problema da densificação ou dos levantamentos gravimétricos regionais.

A primeira fornece, através das suas estações de primeira ordem, os pontos de partida para os levantamentos regionais; estes comumente têm uma destinação específica, conforme a natureza da instituição que os promove. O geodesta, por exemplo, visa a determinação da ondulação geoidal, e do desvio da vertical, enquanto o geofísico, visa os trabalhos de prospecção.

III.3 ANOMALIA DA GRAVIDADE

O geopotencial (W) é o potencial da gravidade (\bar{g}):

$$\bar{g} = \text{grad } W = \text{grad } V + \text{grad } Q \quad (\text{III.3.1})$$

sendo V a atração das massas terrestres e Q a força centrífuga atuantes sobre uma partícula de massa unitária.

Terra normal é o elipsóide de revolução ao qual atribuímos a mesma massa (incluindo a massa atmosférica), e a mesma velocidade angular (w) da Terra real com a injunção de que a sua superfície tenha potencial constante (U_0).

O esferopotencial (U) é o potencial de atração mais o potencial de rotação da Terra Normal e seu gradiente define a gra

vidade normal $\bar{\gamma}$ ou:

$$\bar{\gamma} = \text{grad}(U) \quad (\text{III.3.2})$$

Esferope são as superfícies equipotenciais do campo da gravidade normal.

Tomemos um ponto P sobre o geóide, cujo geopotencial é W_0 , e sua projeção P' sobre o elipsóide, de esferopotencial U_0 ; considerando os vetores \bar{g}_p e $\bar{\gamma}_p$, (Fig. III.3.1), definimos o vetor anomalia da gravidade no ponto P:

$$\Delta\bar{g}_p = \bar{g}_p - \bar{\gamma}_p \quad (\text{III.3.3})$$

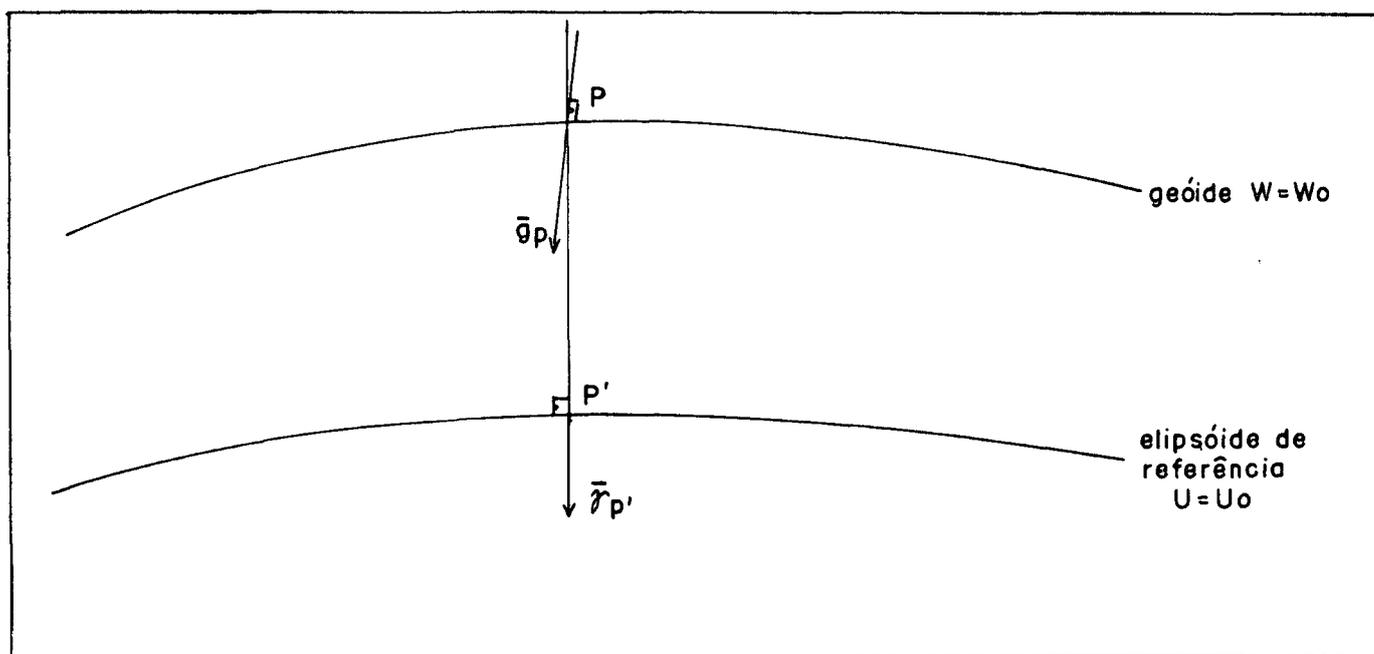


Fig. III.3.1

A anomalia da gravidade é o escalar

$$\Delta g_p = g_p - \gamma_p, \quad (\text{III.3.4})$$

ou seja, a diferença entre as intensidades dos vetores da gravidade real em P e da gravidade normal em P'.

Distúrbio da gravidade (δg) é a diferença entre os módulos g e γ no mesmo ponto P,

$$\delta g = g_p - \gamma_p \quad (\text{III.3.5})$$

III.4 POTENCIAL DE ATRAÇÃO EM HARMÔNICOS ESFÉRICOS

O potencial gravitacional ou newtoniano, engendrado por um corpo de massa M, em um ponto de massa unitária P é dado por:

$$V = k \int_M \frac{dm}{\ell} \quad (\text{III.4.1})$$

onde dm é o elemento de massa, ℓ a distância do ponto P a esse elemento e k a constante gravitacional, que no sistema SI tem o valor:

$$k = 6,672 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}.$$

O símbolo M sob o sinal de integração indica que esta deve ser estendida à total massa M.

Da figura III.4.1 podemos escrever

$$\ell^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \psi = r^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r} \cos \psi \right] \quad (\text{III.4.2})$$

ou

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \psi \right]^{-1/2} \quad (\text{III.4.3})$$

normalmente usa-se a notação simplificada:

$$t = \cos \psi. \quad (\text{III.4.4})$$

Desenvolvendo (III.4.3) pela fórmula do binômio temos que

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right) P_1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 P_2 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 P_3 + \dots \right] \quad (\text{III.4.5})$$

ou

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n, \text{ para } \rho < r \quad (\text{III.4.6})$$

onde P_n é o polinômio de Legendre de grau n definido por

$$P_n(t) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (\text{III.4.7})$$

ou por

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^I \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2k-1)}{2^k k! (n-2k)!} (-1)^k t^{n-2k} \quad (\text{III.4.7'})$$

I significa o maior inteiro contido em $n/2$.

Substituindo (III.4.6) em (III.4.1) teremos:

$$V = \frac{k}{r} \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n \, dm. \quad (\text{III.4.8})$$

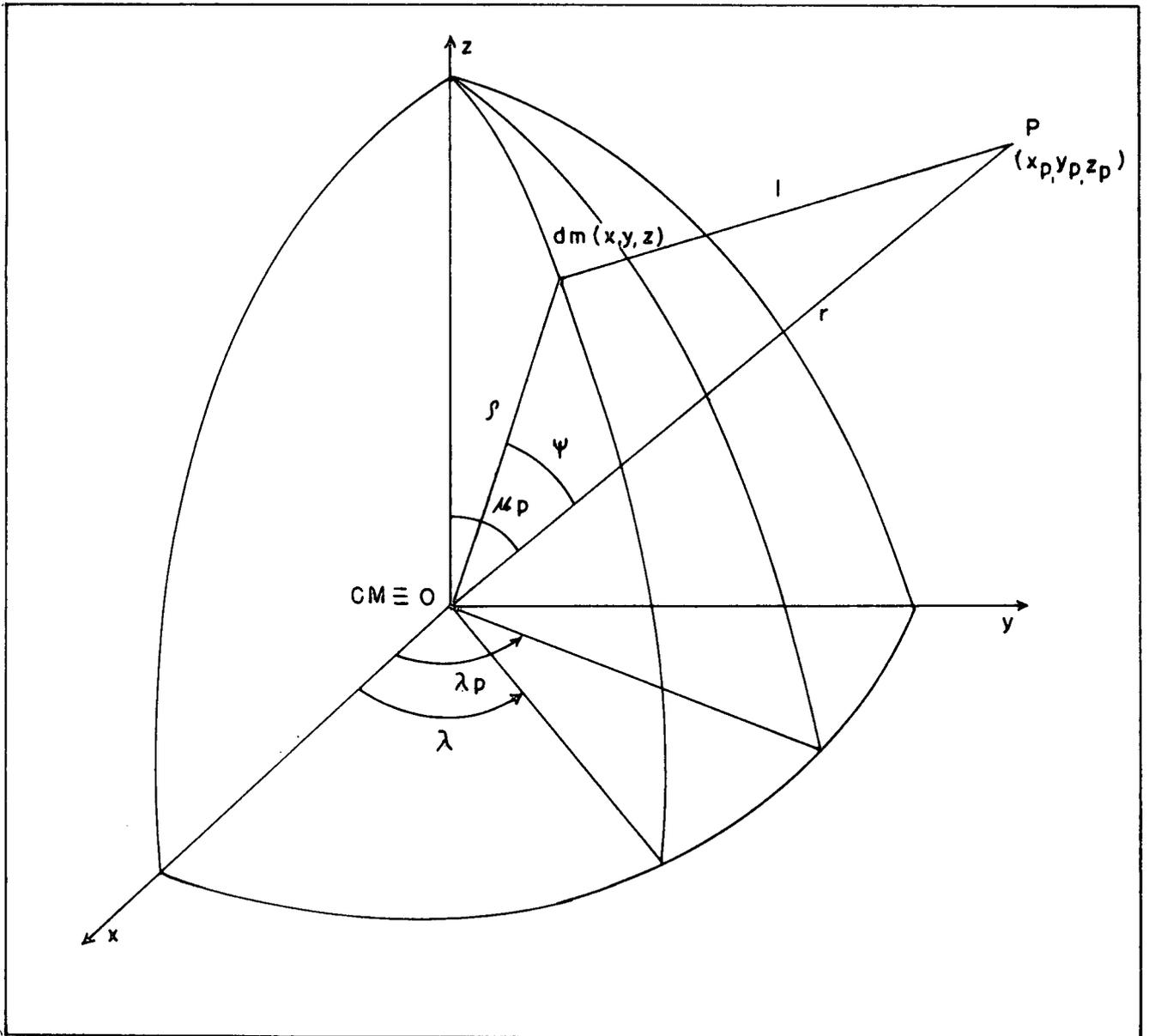


Fig. III.4.1

Consideremos agora dois pontos P e P' de coordenadas (u, λ, r) e (u', λ', r') respectivamente, e suas projeções sobre a superfície de uma esfera com centro na origem do sistema cartesiano como mostra a figura III.4.2.

Considerando o triângulo esférico $P_0 P'_0 P_N$ na figura III.4.2 podemos escrever:

$$P_1(\cos \psi) = \cos \psi = \cos u \cos u' + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (\text{III.4.9})$$

Adotando o duplo índice e fazendo $\cos u = P_{10}(u)$, $\operatorname{sen} u = P_{11}(u)$ e análogamente para as funções em u' na (III.4.9):

$$\begin{aligned} P_1(\cos \psi) &= P_{10}(\cos u) P_{10}(\cos u') + \\ &+ P_{11}(\cos u) P_{11}(\cos u') \cos(\lambda - \lambda') \end{aligned} \quad (\text{III.4.10})$$

Substituindo (III.4.9) no polinômio de Legendre de segundo grau em ψ , desenvolvendo e fazendo-se as substituições:

$$P_{20}(\cos u) = \frac{3}{2} \cos^2 u - \frac{1}{2}$$

$$P_{21}(\cos u) = 3 \cos u \operatorname{sen} u$$

$$P_{22}(\cos u) = 3 \operatorname{sen}^2 u$$

chegamos a expressão:

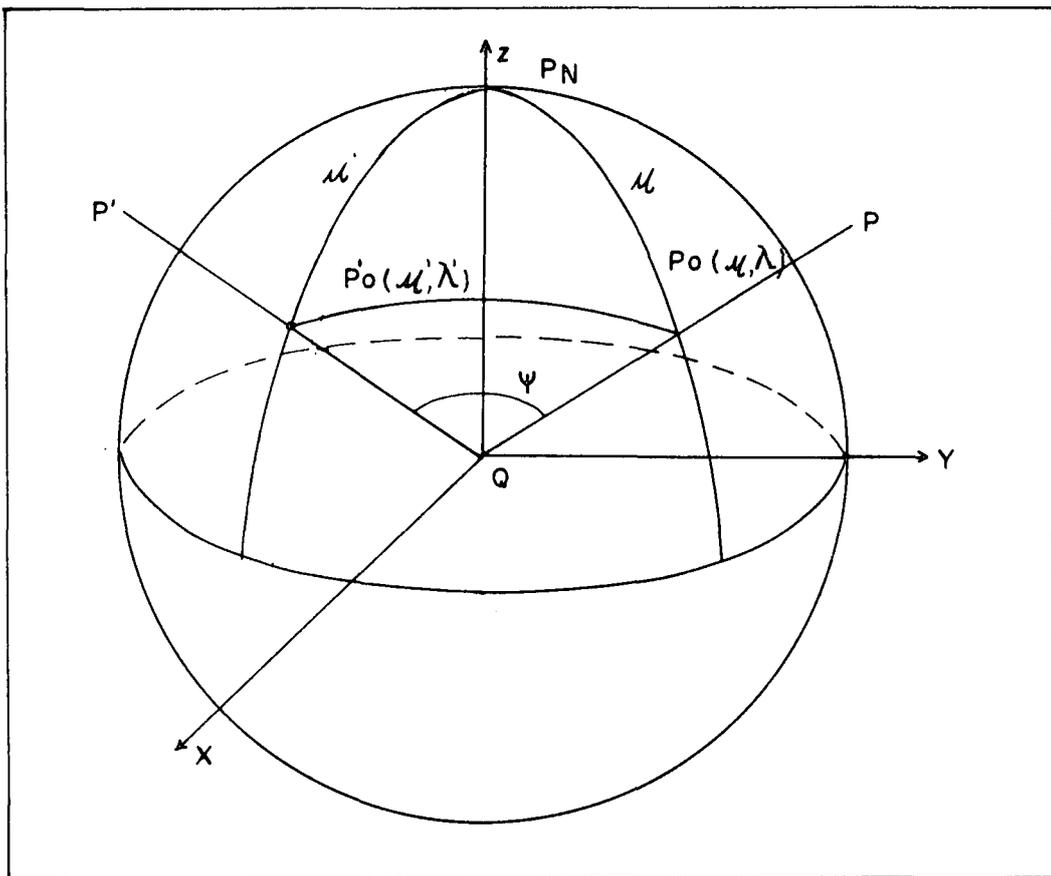


Fig. III.4.2

$$\begin{aligned}
P_2(\cos \psi) &= P_{20}(\cos u) P_{20}(\cos u') + \\
&+ \frac{1}{3} P_{21}(\cos u) P_{21}(\cos u') \cos (\lambda - \lambda') + \\
&+ \frac{1}{12} P_{22}(\cos u) P_{22}(\cos u') \cos 2 (\lambda - \lambda') = \\
&= P_{20}(\cos u) P_{20}(\cos u') + \\
&+ \sum_{m=1}^2 \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{2m}(\cos u) P_{2m}(\cos u') \cos m(\lambda - \lambda') .
\end{aligned}
\tag{III.4.11}$$

Com transformações semelhantes obtemos o polinômio de Legendre de terceiro grau em ψ , expresso em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
P_3(\cos \psi) &= P_{30}(\cos u) P_{30}(\cos u') + \\
&+ \sum_{m=1}^3 \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{3m}(\cos u) P_{3m}(\cos u') \cos m (\lambda - \lambda') .
\end{aligned}
\tag{III.4.12}$$

E assim sucessivamente; de uma forma geral podemos escrever o polinômio de Legendre de n -ésimo grau da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
P_n(\cos \psi) &= S_n = P_{n0}(\cos u) P_{n0}(\cos u') + \\
&+ \sum_{m=1}^n \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos u) P_{nm}(\cos u') \cos m(\lambda - \lambda') ,
\end{aligned}
\tag{III.4.13}$$

ou

$$P_n(\cos \psi) = S_n = \sum_{m=0}^n D P_{nm}(\cos u) P_{nm}(\cos u') \cos m(\lambda - \lambda')$$

onde

$$D = 1 \text{ se } m = 0$$

$$D = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \text{ se } m \neq 0 .$$

(III.4.13a)

Aplicando a identidade trigonométrica no último fator , transformamos o polinômio (III.4.13) à forma

$$S_n = \sum_{m=0}^n D P_{nm}(\cos u) P_{nm}(\cos u') (\cos m \lambda \cos m \lambda' + \operatorname{sen} m \lambda \operatorname{sen} m \lambda')$$

(III.4.14)

Após as multiplicações podemos substituir os fatores constantes por:

$$a_{nm} = D P_{nm}(\cos u') \cos m \lambda'$$

$$b_{nm} = D P_{nm}(\cos u') \operatorname{sen} m \lambda'$$

obtendo desta forma a equação:

$$S_n = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m \lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m \lambda) P_{nm}(\cos u); \quad (\text{III.4.15})$$

esta função \bar{s} depende das coordenadas do ponto P'_0 se considerarmos P_0 fixo, e é denominada harmônico esférico de superfície do grau n ; a_{nm} e b_{nm} são os coeficientes constantes a determi -

nar e é fácil de verificar que são em número de $(2n+1)$.

Cada termo de S_n é um harmônico esférico e recebe denominação distinta:

- a) harmônico esférico zonal, se $m = 0$;
- b) função associada de Legendre de grau n e ordem m , se $m \neq 0$;
pode ainda ser:
 - b.1) harmônico esférico sectorial se $m = n$
 - b.2) harmônico esférico tesseral se $m \neq n$.

Os produtos dos harmônicos esféricos de superfície S_n por r^n ou pelo inverso de r^{n+1} são funções harmônicas denominados harmônicos esféricos sólidos; e a soma destas funções é também solução da equação de Laplace. Logo:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n \quad \text{e} \tag{III.4.16}$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{r^{n+1}}$$

são também harmônicos esféricos sólidos e podem ser escritos na forma:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m \lambda + b_{nm} \text{sen } m \lambda) P_{nm} \tag{III.4.17}$$

e

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum (a_{nm} \cos m \lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m \lambda) P_{nm} \quad (\text{III.4.17.a})$$

Podemos expressar (III.4.6) em função dos harmônicos esféricos de superfície:

$$\frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_{nm} \cos m \lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m \lambda) P_{nm}(\cos u) \quad (\text{III.4.18})$$

o que permite escrever o potencial de atração (III.4.1) como segue:

$$V = \frac{k}{r} \int_M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_{nm} \cos m \lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m \lambda) P_{nm}(\cos u) dm \quad (\text{III.4.19})$$

onde $P_{nm}(\cos u)$ pode ser calculado pela fórmula de Ferrer [7]

$$P_{nm}(t) = \sqrt{\frac{D(n-m)!}{h_{nm}(n+m)!}} \frac{d^m p_n(t)}{dt^m} \operatorname{sen}^m(t) \quad (\text{III.4.20})$$

sendo $t = \cos u$ e

$$D = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

A (III.4.20) recebe denominações diferentes dependendo do valor de h_{nm} :

a) harmônicos esféricos convencionais se:

$$h_{nm} = \frac{D(n-m)!}{(n+m)!} \quad (\text{III.4.21})$$

b) harmônicos esféricos normalizados se:

$$h_{nm} = 1 \quad (\text{III.4.22})$$

c) harmônicos esféricos plenamente normalizados se:

$$h_{nm} = (2n+1)^{-1} \quad (\text{III.4.23})$$

É comum usar coeficientes A_{nm} e B_{nm} em (III.4.19), onde as relações entre estes e os coeficientes anteriores são:

$$A_{nm} = km \int \rho^n a_{nm} dm \quad (\text{III.4.24})$$

$$B_{nm} = km \int \rho^n b_{nm} dm . \quad (\text{III.4.25})$$

Substituindo em (III.4.19) resulta:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (A_{nm} \cos m \lambda + B_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(u) \quad (\text{III.4.26})$$

A fórmula recomendada pela União Astronômica Internacional é:

$$V = \frac{kM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(u) \right] \quad (\text{III.4.27})$$

onde os termos do primeiro grau são nulos quando o centro de massa da Terra coincide com a origem do sistema, a_e é o raio equatorial da Terra; a relação destes coeficientes, que são adimensionais, com os anteriores é dada por:

$$C_{nm} = \frac{A_{nm}}{km a_e^n} \quad (\text{III.4.28})$$

$$S_{nm} = \frac{A_{nm}}{km a_e^n} \quad (\text{III.4.29})$$

Outra forma também encontrada na literatura é:

$$V = \frac{kM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(u) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \text{sen } m\lambda) P_{nm}(u) \right\} \quad (\text{III.4.30})$$

com

$$J_n = - C_{n0}$$

$$J_{nm} = - C_{nm} \quad (\text{III.4.31})$$

$$K_{nm} = - S_{nm}$$

III.5 POTENCIAL DA GRAVIDADE OU GEOPOTENCIAL

Potencial da gravidade ou geopotencial W é a soma do potencial gravitacional V e do potencial da força centrífuga Q . Assim

$$W = V + Q \quad (\text{III.5.1})$$

onde V pode ser substituído pela fórmula (III.4.30); o potencial centrífugo é dado pela (3.2.5) de [7]:

$$Q = \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2) \quad \text{onde } w \text{ é a velocidade de rotação da Terra.}$$

ou em coordenadas esféricas

$$Q = \frac{w^2 r^2 \sin^2 u}{2} . \quad (\text{III.5.1a})$$

A (III.5.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$W = \frac{kM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\cos u) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m \lambda + K_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(\cos u) + \frac{w^2 r^2 \sin^2 u}{2 kM} \right\} \quad (\text{III.5.2})$$

Admitindo o modelo piriforme, onde há apenas simetria rotacional, a (III.5.2) pode ser simplificada:

$$W' = \frac{kM}{r} \left\{ 1 - \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 J_2 P_2 - \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 J_3 P_3 - \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 J_4 P_4 - \dots \right\} + \frac{w^2 r^2 \sin^2 u}{2} \quad (\text{III.5.3})$$

sem os termos de ordem ímpar além de $n=3$.

Considerando a Terra Normal, o esferopotencial pode ser obtido de (III.5.3) admitindo simetria equatorial

$$U = \frac{kM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos u) \right\} + \frac{w^2 r^2 \sin^2 u}{2} \quad (\text{III.5.4})$$

O potencial perturbador T que é a diferença entre o geopotencial W e o esferopotencial U será obtido das (III.5.2) e (III.5.4):

$$T = W - U = -\frac{kM}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty*} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(u) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(u) \right\} \quad (\text{III.5.5})$$

onde o $*$ representa o somatório dos termos que não aparecem em (III.5.4), isto é, o somatório dos termos da subtração $W-U$.

III.6 REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS

Para obter Δg , a anomalia da gravidade, temos que conhecer a gravidade observada e reduzida ao geóide.

Como veremos, a utilização da fórmula de Stokes pressupõe a inexistência das massas externas ao geóide; a simples eliminação de tais massas implicaria em significativa alteração do geopotencial. Utilizando o conceito de isostasia podemos simplesmente transferir tais massas para o interior do geóide; mas a solução desse problema é apenas aproximada, face ao nosso imperfeito conhecimento sobre a densidade do material que compõem a crosta terrestre.

Dependendo de como estas massas são tratadas, temos diferentes métodos de redução que descrevemos neste item.

III.6.1 REDUÇÕES NÃO ISOSTÁTICAS

III.6.1.1 Redução do ar-livre, ou "free - air" ou de Faye

A definição de anomalia da gravidade nos conduz a redução do ar-livre, ou seja, se g é observada sobre a superfície topográfica da Terra deve ser reduzida ao geóide, mediante a correção:

$$C_F = - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot h \quad (\text{III.6.1.1})$$

sendo h a altitude da estação e $\frac{\partial g}{\partial h}$ o gradiente vertical da gravidade.

Nos trabalhos rotineiros da geodésia podemos utilizar o gradiente da gravidade normal

$$C_F = 0,3086 h \quad (\text{III.6.1.2})$$

com C_F em mGAL e h em m [7].

A anomalia da gravidade correspondente

$$\Delta g_F = g + C_F - \gamma \quad (\text{III.6.1.3})$$

é conhecida como a anomalia free-air, do ar livre ou de Faye.

III.6.1.2 Redução de Bouguer

A redução de Bouguer corresponde à eliminação das massas externas ao geóide que se estendem desde a estação

até a zona 0 de Hayford (166,7 km); visa legitimizar a aplicação da fórmula de Stokes:

$$C_B = - 0,1119h - B + C.$$

O primeiro termo corresponde à eliminação das massas do famoso "platô de Bouguer" (introduzida em 1749 por Bouguer quando da medida do arco do Peru); o segundo termo, tabelado em função de h (altitude da estação em metros) converte o platô numa "calota". Finalmente o terceiro termo, denominado .. "correção do terreno" considera as irregularidades da superfície física em relação à "calota", o seu cálculo é bastante laborioso, além de exigir boas cartas altimétricas.

A expressão da anomalia de Bouguer é:

$$\Delta g_B = \Delta g_F - 0,1119 h - B + C \quad (\text{III.6.1.2.1})$$

III.6.2 REDUÇÃO ISOSTÁTICA

A isostasia teve sua origem na Índia, em meados do século XIX, quando, no estabelecimento de uma rede de triangulação, os ingleses verificaram a existência de uma diferença entre as latitudes astronômica e geodésica, no vértice Kaliana, no sopé do Himalaia, da ordem de 5", diferença esta considerada inadmissível.

Pratt atribuiu-a à atração da cordilheira, mas efetuando os cálculos concluiu que a ação do Himalaia deveria ser 15" e não 5". Mais tarde Airy e Pratt postularam que deveria haver uma

deficiência de massas localizada sob a cordilheira. Por este prisma surgiu a isostasia que estabelece a existência de um estado de equilíbrio na crosta terrestre sob o efeito da ação da gravidade. Aos excessos e deficiências de massa, respectivamente montanhas e oceanos, em relação ao geóide, correspondem massas internas de compensação de "sinal contrário".

Se em uma região o equilíbrio isostático for atingido, dizemos que a região foi compensada, sub-compensada se o equilíbrio ainda não se completou, e super-compensada se o equilíbrio for ultrapassado.

A isostasia permite a transferência das massas topográficas para o interior do geóide, uma vez admitido que o equilíbrio completo tenha sido atingido.

Os sistemas preconizados por Pratt e Airy foram modernamente sistematizados, respectivamente por Hayford e por Heiskanen que, inclusive prepararam tabelas que facilitam os cálculos; por essa razão aqueles sistemas são conhecidos em nossos dias sob as denominações Pratt-Hayford e Airy-Heiskanen.

Uma anomalia isostática escreve-se:

$$\Delta g_I = g + 0,3086h - 0,1119h - B - C + C_I + C_{EI} - \gamma \quad (\text{III.6.2.1})$$

sendo C_I a correção isostática, num dos sistemas mencionados e C_{EI} a chamada correção de Bowie ou do efeito indireto, cujo significado é explicado a seguir. Com a aplicação da isostasia evitamos a "eliminação" das massas topográficas, elas são apenas

"transferidas" para o interior do geóide. Com isso a massa total da Terra não se altera, mas há uma redistribuição de massas que altera o geopotencial, a Terra transformada tem uma nova superfície equipotencial básica denominada co-geóide. A correção do efeito indireto visa reduzir g do geóide ao co-geóide.

III.7 FÓRMULA DE STOKES

A fórmula de Stokes é de fundamental importância em Geodésia Física, pois proporciona a separação geóide - elipsóide em função das anomalias da gravidade.

Somente após Vening-Meinesz dar início às determinações gravimétricas oceânicas a bordo de um submarino, com o seu dispositivo tri-pendular, é que esta fórmula adquiriu o prestígio de que hoje goza.

O potencial da Terra real ou o geo-potencial W pode ser expresso por:

$$W = U + T \quad (\text{III.7.1})$$

onde U é o potencial da Terra Normal ou esfero-potencial e T o potencial perturbador produzido pelas massas anômalas, "positivas e negativas".

A gravidade no ponto P é (Fig. III.7.1)

$$g = \left(-\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \left(-\frac{\partial U}{\partial n}\right)_P - \frac{\partial T}{\partial n} = \left(-\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} N - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III.7.2})$$

onde N é a separação entre o geóide e o elipsóide e n indica a normal ao geóide (vertical).

Da expressão anterior, confundindo a normal e a vertical, podemos escrever:

$$g = \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III.7.3})$$

ou

$$g - \gamma = \Delta g = N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III.7.4})$$

a primeira parcela do último membro é conhecida como termo de Bruns, e esta equação é denominada equação diferencial da geodésia física.

Se adotarmos no lugar do elipsóide uma esfera de raio R , não rotante, teremos:

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q \approx \gamma_0 = \frac{km}{R^2} \quad (\text{III.7.5})$$

$$\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right)_Q \approx \frac{\partial \gamma}{\partial n} \approx -\frac{2km}{R^3} = -\frac{2\gamma_0}{R} \quad (\text{III.7.6})$$

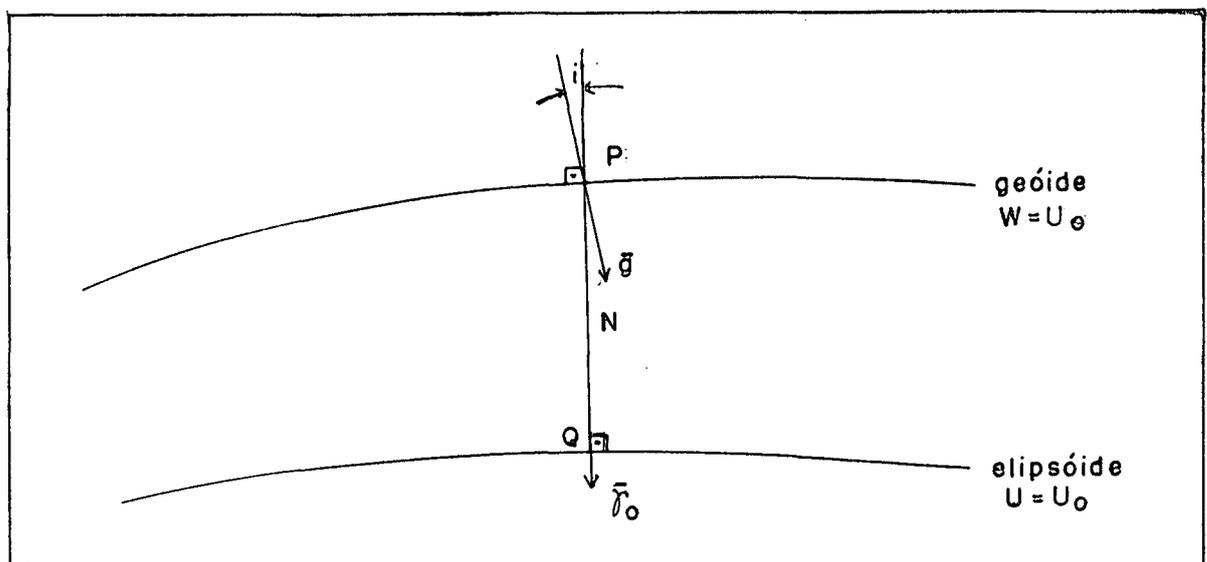


Fig. III.7.1

onde γ_0 é a gravidade normal sobre a esfera.

A fórmula (III.7.2) toma a forma:

$$g = \gamma_0 - \frac{2\gamma_0}{R} N - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III.7.7})$$

O geopotencial sobre o geóide é:

$$W_p = U_p + T = U_Q + \frac{\partial U}{\partial n} N + T \quad (\text{III.7.8})$$

para $W_p = U_Q$ teremos:

$$T = \gamma N, \quad (\text{III.7.9})$$

expressão conhecida como equação de Bruns.

Substituindo esta equação em (III.7.7) teremos a equação fundamental da geodésia Física em sua aproximação esférica:

$$-\Delta g = \frac{2T}{R} + \frac{\partial T}{\partial R} \quad (\text{III.7.10})$$

Isto significa que a anomalia é igual a soma da atração das massas anômalas e do chamado "Termo de Bruns". T é uma função harmônica, sendo portanto possível expressar Δg em harmônicos esféricos:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n \quad (\text{III.7.11})$$

com

$$\Delta g_n = \sum_{m=0}^n \left[A_{nm} \cos m \lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m \lambda \right] P_{nm}(\cos u) \quad (\text{III.7.12})$$

$$A_{nm} = D \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g(u', \lambda') \cdot \cos m \lambda' P_{nm}(\cos u') d\sigma$$

$$B_{nm} = D \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} g(u', \lambda') \operatorname{sen} m \lambda' P_{nm}(\cos u') d\sigma \quad (\text{III.7.13})$$

sendo $d\sigma$ o elemento de superfície da esfera de raio unitário; o valor de D é dado pela (III.4.13a.) e com linhas representamos as variáveis de integração. Substituindo estes valores na expressão de Δg_n obtemos:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} P_{n0}(\cos u) \int_{\sigma} \Delta g(u', \lambda') P_{n0}(\cos u') d\sigma +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2\pi} P_{nm}(\cos u) \left[\cos m \lambda \int_{\sigma} \Delta g \cos m \lambda' P_{nm}(\cos u') d\sigma + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} m \lambda \int_{\sigma} \Delta g \operatorname{sen} m \lambda' P_{nm}(\cos u') d\sigma \right] \quad (\text{III.7.14})$$

Colocando o sinal de integração fora do somatório obtemos:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g(u', \lambda') \left\{ P_{n0}(\cos u) P_{n0}(\cos u') + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos u) P_{nm}(\cos u') \left[\cos m \lambda \cos m \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin m \lambda \sin m \lambda' \right] \right\} d\sigma \quad (\text{III.7.15})
\end{aligned}$$

A expressão entre chaves \bar{e} é igual a $P_n(\cos \psi)$, com ψ representando a distância esférica entre os pontos (u, λ) para os quais Δg_n são calculados e os pontos (u', λ') envolvidos na integral. Então podemos escrever:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g(u', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma \quad (\text{III.7.16})$$

O potencial perturbador T sobre o elipsóide desenvolvido em harmônicos esféricos pode ser expresso por [35]:

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n \quad (\text{III.7.17})$$

Substituindo Δg_n pelo valor obtido anteriormente teremos:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{R}{n-1} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g P_n(\cos \psi) d\sigma \right] \\
T &= \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right] d\sigma \quad (\text{III.7.18})
\end{aligned}$$

válido para o elipsóide cujo centro coincide com o centro de massa da Terra; a série entre colchetes \bar{e} é conhecida como função

de Stokes, $S(\psi)$.

Usando a fórmula de Bruns, a ondulação geoidal pode ser calculada a partir de T :

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (\text{III.7.19})$$

esta expressão é conhecida por fórmula de Stokes, talvez a mais importante da Geodésia Física.

A função de Stokes pode ser expressa sem usar a série infinita, por:

$$S(\psi) = 2 \frac{R}{\ell} + 1 - 3 \frac{\ell}{R} - \cos \psi \left[5 + 3 \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\ell}{2R} \right) \right]$$

ou

$$S(\psi) = \csc \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

(III.7.20)

É fácil ver que a anomalia da gravidade sobre toda a Terra contribui no valor de N . O valor de Δg para os pontos próximos contribui mais para a separação geóide elipsóide, portanto para usar a fórmula de Stokes devemos conhecer melhor os valores das anomalias particularmente para as vizinhanças do ponto de cálculo.

A fórmula de Stokes pode ser escrita de várias formas di

ferentes. Mencionaremos duas delas: na primeira escolhemos o ponto de interesse como a origem de coordenadas polares e obtemos

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{R}{4\pi\gamma_m} \int_{A'=0}^{\Pi} \int_{\psi=0}^{\Pi} \Delta g(u', \psi') \operatorname{sen}(\psi) \, d\psi \, dA \\
 N &= \frac{R}{2\gamma_m} \int_{\psi=0}^{\Pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{A=0}^{2\pi} \Delta g(A, \psi) \, dA \right| \cdot S(\psi) \operatorname{sen} \psi \, d\psi \\
 N &= \frac{R}{\gamma_m} \int_{\psi=0}^{\Pi} \Delta \bar{g}(\psi) F(\psi) \, d\psi \tag{III.7.21}
 \end{aligned}$$

onde

$$F(\psi) = \frac{1}{2} S(\psi) \operatorname{sen} \psi$$

e $\Delta \bar{g}$ é a anomalia média ao longo da circunferência definida pelo raio esférico ψ e com centro no ponto de interesse. Os gráficos das funções $F(\psi)$ e $S(\psi)$ apresentamos na figura III.7.2

A outra alternativa para N é expressar a integral \int_{σ} em coordenadas geográficas:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') S(\psi) \cos \phi' \, d\phi' \, d\lambda' \tag{III.7.22}$$

onde

$$\psi = \arccos(\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda)).$$

$$\tag{III.7.23}$$

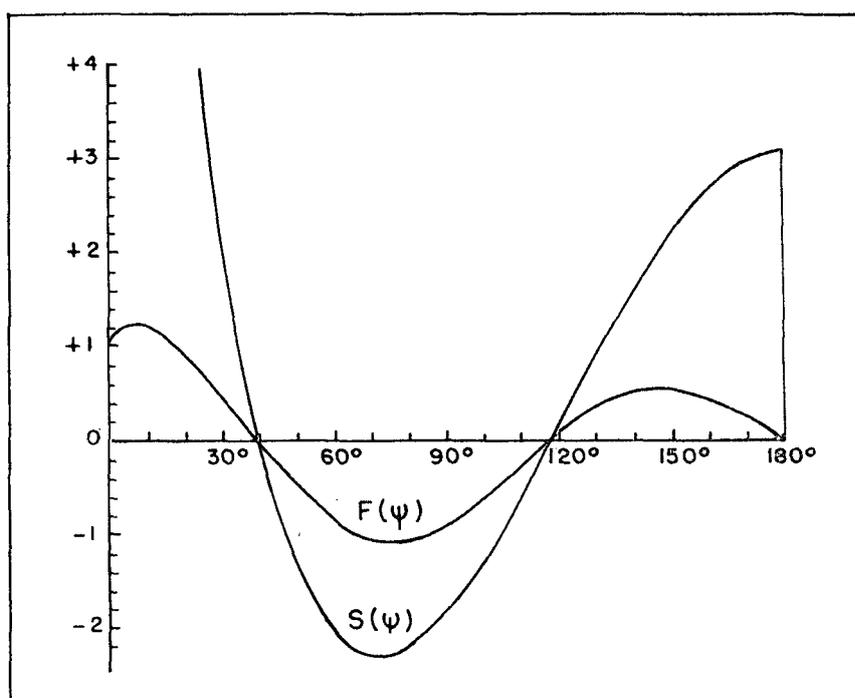


Fig. III.7.2 - Funções $F(\psi)$ e de Stokes $S(\psi)$

A integral (III.7.22) pode ser substituída por:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \sum_i \sum_j \Delta g_m(\phi_i, \lambda_j) S(\psi)_q \quad (\text{III.7.24})$$

onde $\Delta g_m(\phi_i, \lambda_j)$ é a anomalia média do compartimento q , cujo ponto central tem coordenadas ϕ_i, λ_j .

Nos cálculos numéricos a soma (III.7.24) pode ser dividida em duas partes: a primeira

$$C(\phi_i, \lambda_j) = \frac{R}{4\pi\gamma_m} S(\psi)_q \quad (\text{III.7.25})$$

denominada coeficiente de Stokes, que contém as constantes, o valor da função de Stokes e o fator de área; a segunda parte depende do campo da gravidade.

III.8 CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE STOKES E DA ONDULAÇÃO GEODAL

Hirvonen introduziu o método dos "quadrados", no qual a superfície terrestre é dividida por meio de paralelos e meridianos em "quadrados" de $1^0 \times 1^0$ dentro de uma área de $20^0 \times 30^0$ nas vizinhanças do ponto de cálculo e "quadrados" de $5^0 \times 5^0$ além deste entorno.

III.8.1 COEFICIENTE DOS QUADRADOS DE $1^{\circ} \times 1^{\circ}$

Para calcular o coeficiente de Stokes podemos assumir $R = 6371$ km e $\gamma_m = 979,8$ Gal; q é a área do "quadrado" de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ sobre a esfera de raio unitário [7].

$$q = 2 \Delta \lambda \text{ sen } \Delta \phi \text{ cos } \phi_m \quad (\text{III.8.1.1})$$

sendo $\Delta \phi$ e $\Delta \lambda$ as amplitudes do "quadrado" de latitude média ϕ_m ; neste caso

$$q = 0,0006 \text{ cos } \phi_m. \quad (\text{III.8.1.2})$$

Para o cálculo de $S(\psi)$, a distância tem que ser determinada entre o ponto de cálculo (ϕ, λ) e o centro do "quadrado" em questão (ϕ', λ') pela fórmula (III.4.9).

Uma vez conhecido ψ , $f(\psi) = \frac{1}{2} S(\psi)$ é calculado diretamente por uma das fórmulas (III.7.20) ou retirado das tabelas de Lambert e Darling [18].

A parte constante será:

$$\frac{R}{2\pi\gamma_m} = 1.035,41 \text{ seg}^2. \quad (\text{III.8.1.3})$$

III.8.2 COEFICIENTE PARA QUADRADOS DE $5^{\circ} \times 5^{\circ}$

Este cálculo é semelhante ao anterior, exceto que neste caso os coeficientes são calculados para os quadrados

que estão fora da vizinhança retangular de 20° de latitude e 30° de longitude do ponto de cálculo e

$$q = 0,0152 \cos \phi_m. \quad (\text{III.8.2.1})$$

III.8.3 CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL N

Com base nos dados gravimétricos disponíveis avalia-se a anomalia média de cada "quadrado"; um simples produto com os respectivos coeficientes proporciona a contribuição de cada "quadrado" e o somatório destas, a ondulação do geóide no ponto considerado.

III.8.4 REGIÕES VIZINHAS

No método dos quadrados o valor de $S(\psi)$ tende ao infinito quando ψ tende a zero, portanto a fórmula (III.7.20) é inadequada para o cálculo da ondulação geoidal, considerando as regiões vizinhas da estação; assim surge a necessidade de se considerar N formado por duas parcelas

$$N = N_1 + N_2 \quad (\text{III.8.4.1})$$

onde N_2 representa a contribuição de todas as áreas cobertas quando ψ varia de 1° a 180° e N_1 representa a contribuição das regiões vizinhas, ou seja quando $\psi < 1^{\circ}$ e pode ser obtido com a fórmula |12|:

$$N_1 = \Delta g_p \cdot \frac{S_0}{\gamma_m}$$

sendo Δg_p a anomalia na própria estação e $S_0 = R\psi$.

III.8.5 PROGRAMA FORTRAN PARA CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL N

Apresentamos um programa FORTRAN, no apêndice A, para o cálculo da ondulação geoidal N.

Para tanto é necessário fornecer as anomalias médias em "quadrados" de $1^\circ \times 1^\circ$ de todo o mundo, seguindo o esquema apresentado na publicação da Força Aérea Americana (USAF)-1971 [27]. Para a leitura destes dados o programa fixa a latitude, no intervalo +90 a -89, e varia a longitude de 0° a 359° . Após a entrada destes dados, fornecemos a latitude e a longitude de um ponto onde desejamos determinar N.

O programa imprime a ondulação geoidal, considerando as influências das regiões para diversos valores de ψ , de grau em grau para $\psi < 10^\circ$ e de dez em dez graus para $10^\circ < \psi < 180^\circ$.

Desta forma podemos analisar as influências das regiões afastadas.

III.9 CARTAS GEOIDAIS DO BRASIL. GRÁFICOS PARA ANÁLISE DAS INFLUÊNCIAS DAS REGIÕES AFASTADAS.

Construímos quadro cartas geoidais, sendo as três primeiras relativas ao elipsóide de referência 67 geocêntrico, e a última para o mesmo elipsóide, porém não geocêntrico. Utilizamos

as anomalias publicadas pela Força Aérea Americana-1971 [27] na primeira carta; na segunda utilizamos as mesmas anomalias (na sua maioria interpoladas), acrescidas das cedidas pela Petrobrás (determinadas), com o intuito de melhorar a influência das regiões próximas.

Na terceira carta nos valem das anomalias fornecidas pelo Dr. Rapp da The Ohio State University, que se caracterizam por uma distribuição geográfica mais adequada.

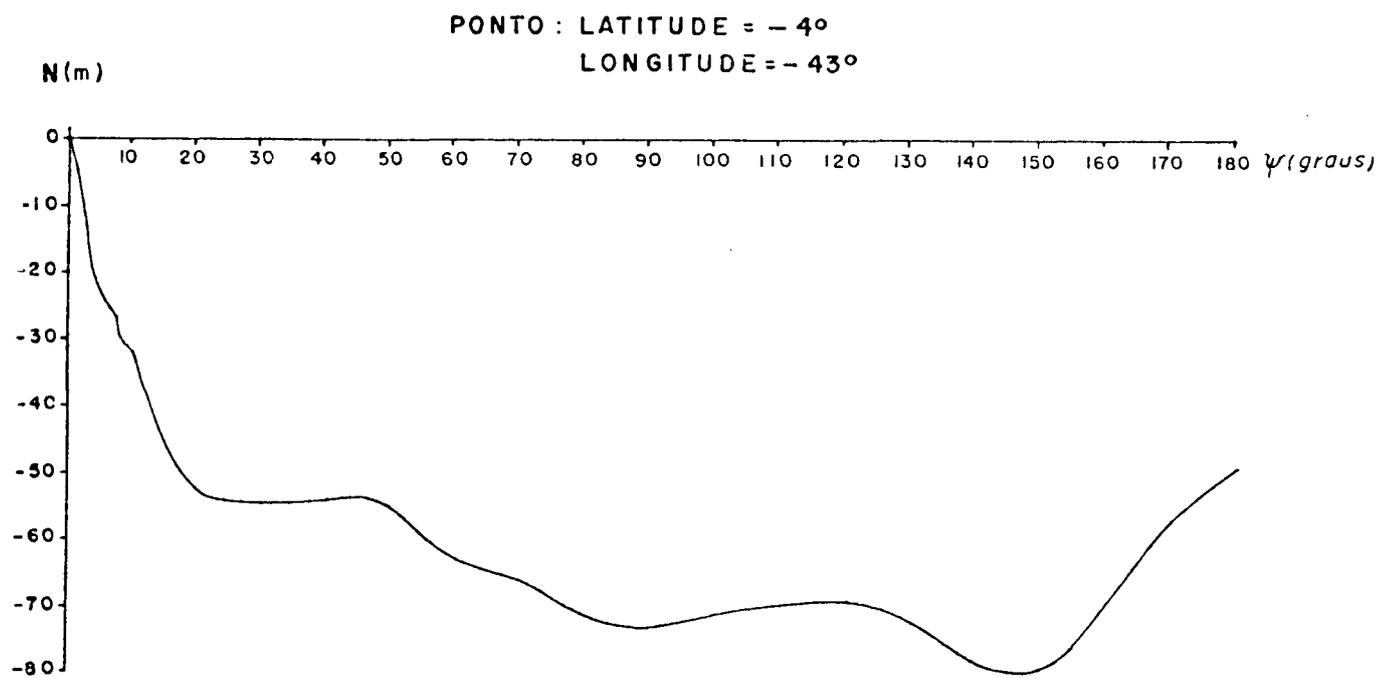
A quarta carta foi obtida através das anomalias usadas na terceira, só que neste caso, as ondulações foram reduzidas ao sistema brasileiro. Para translação do elipsóide geocêntrico para o nosso sistema foram utilizados os parâmetros $X = 80,8$ m, $Y = 14,81$ m e $Z = 44,01$ m [3] na fórmula [9]:

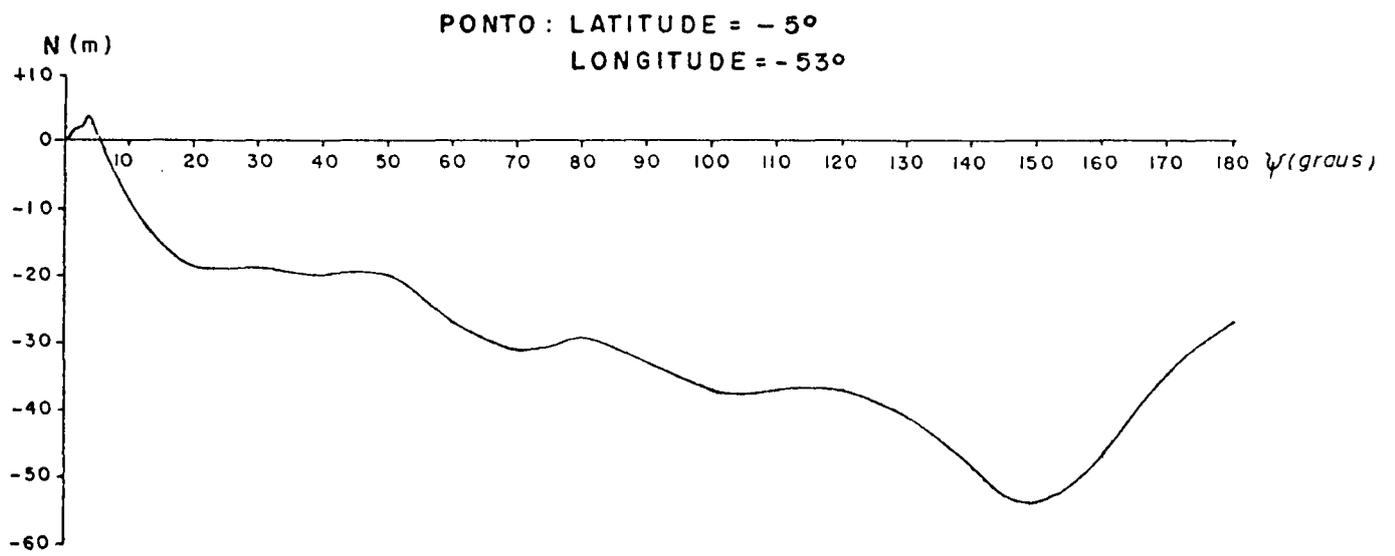
$$N_{\omega} = N_c + X \cos\phi \cos\lambda + Y \cos\phi \sin\lambda + Z \sin\phi$$

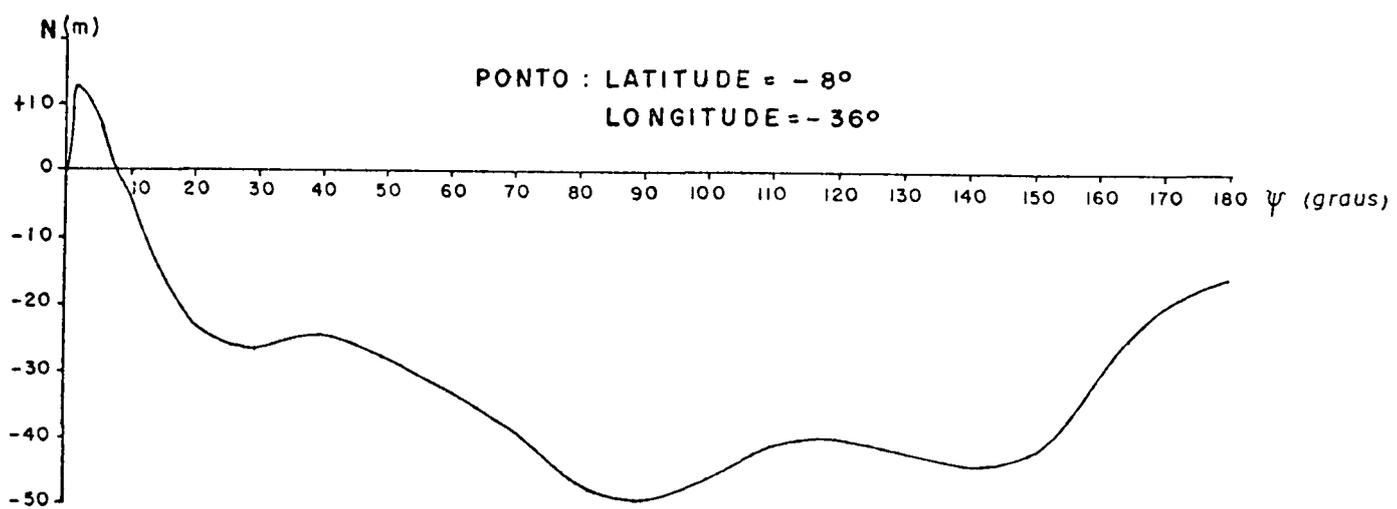
sendo N_c a ondulação geoidal referida ao elipsóide geocêntrico e N_{ω} a ondulação obtida após a translação do sistema.

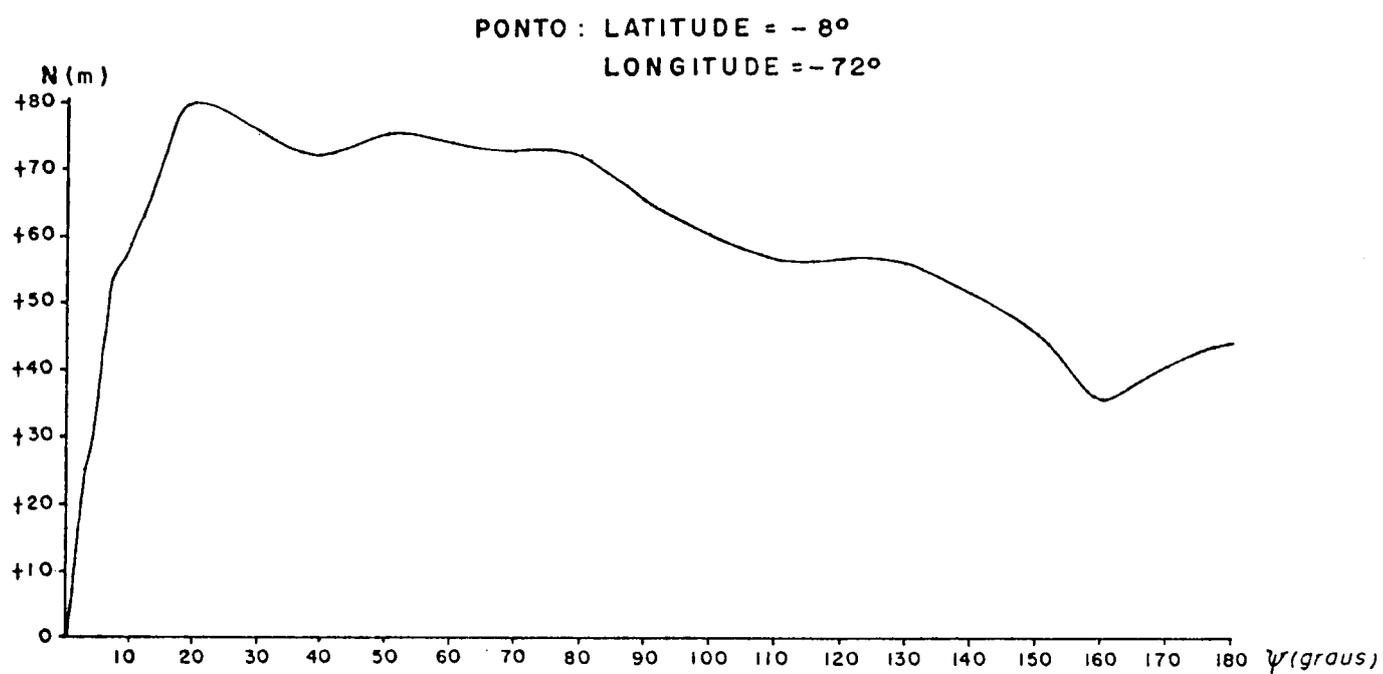
As quatro cartas geoidais acima referidas apresentamos no apêndice B.

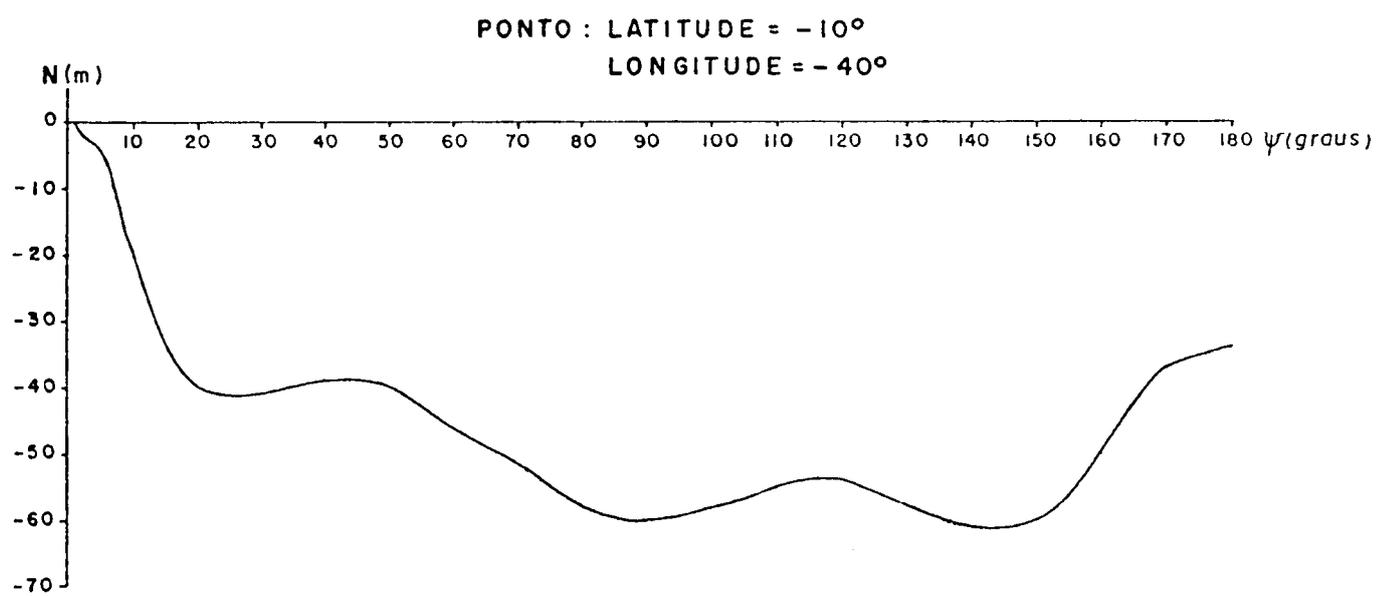
Os gráficos que relacionam o valor de N para ψ entre 1° e 180° mostramos a seguir para a análise das influências das regiões afastadas.

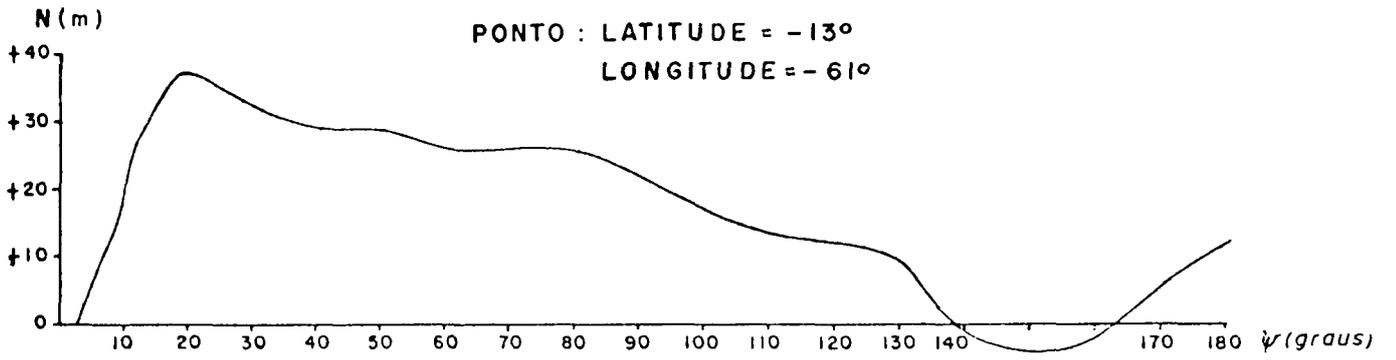


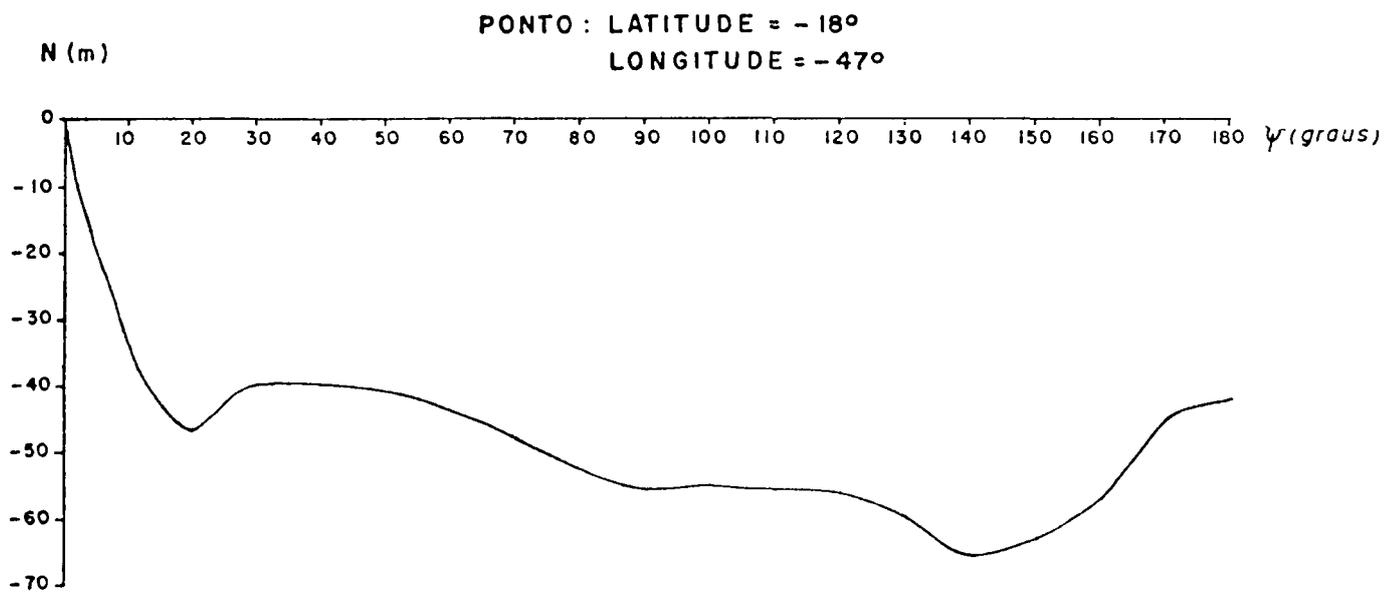


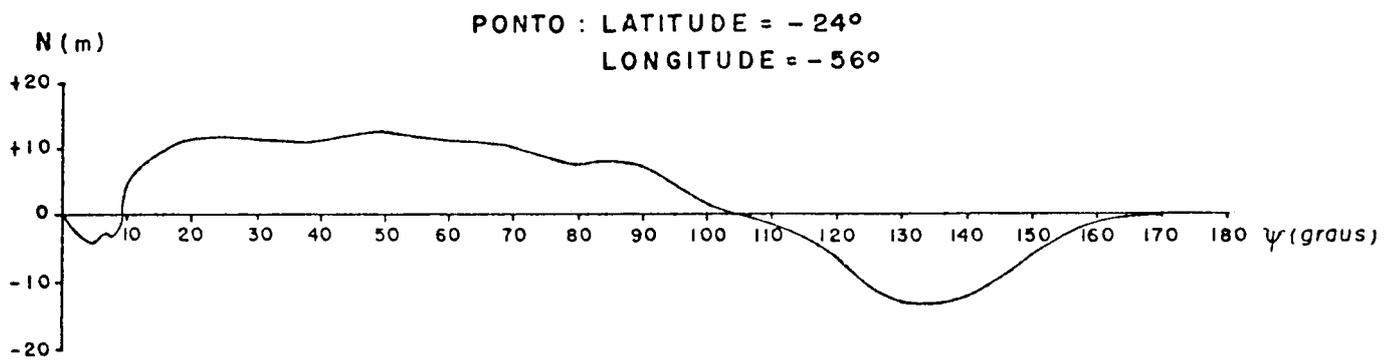


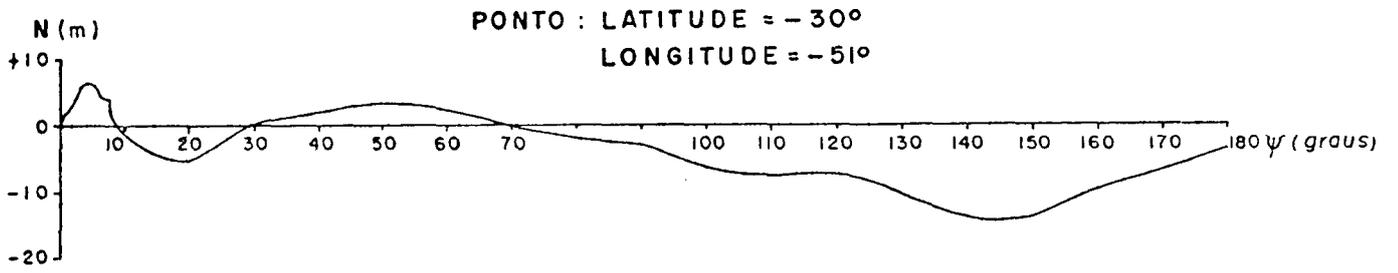












CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO ASTRO-GRAVIMÉTRICA DO GEÓIDE

IV.1 INTRODUÇÃO

O geóide com relação ao elipsóide de referência pode ser calculado a partir do desvio astro-geodésico da vertical, utilizando a integração de linha ao longo da cadeia de triangulação geodésica. Os desvios astro-geodésicos são esparsos, portanto, o geóide baseado nele é inconsistente em muitas regiões. Uma aproximação alternativa foi introduzida por Molodenski, que usa observações gravimétricas em combinação com o desvio astro-geodésico, para obter o geóide denominado geóide astro-gravimétrico.

Com base nos dados gravimétricos podemos calcular o desvio da gravidade através da fórmula de Vening Meinesz; para que o resultado seja digno de confiança é necessário que estes dados estejam uniformemente distribuídos na total superfície da Terra. Infelizmente ainda existem grandes áreas desconhecidas gravimetricamente, tanto nos continentes como, e principalmente nos oceanos. Podemos suprir estas falhas utilizando dados astro-geodésicos para avaliar a influência da região gravimetricamente desconhecida.

O método de cálculo do geóide astro-gravimétrico será exposto neste capítulo.

IV.2 DESVIO DA VERTICAL - FÓRMULA DE VENING MEINESZ

A fórmula de Stokes permite o cálculo da ondulação geoidal e serviu de base para Vening Meinesz deduzir duas fórmulas integrais, que hoje levam o seu nome, para o cálculo das componentes principais do desvio da vertical.

A Figura IV.2.1 mostra a interseção do geóide e do elipsóide por um plano vertical de azimuth arbitrário. Se ϵ é a componente do desvio da vertical neste plano, então:

$$dN = - \epsilon ds \quad (\text{VI.2.1})$$

ou

$$\epsilon = - \frac{dN}{ds} \quad (\text{IV.2.2})$$

o sinal negativo é uma convenção usada para dar as componentes ξ e η do desvio da vertical com sinal correto correspondente à definição de:

$$\xi = \phi_a - \phi \quad (\text{VI.2.3})$$

e

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \phi. \quad (\text{IV.2.4})$$

Podemos expressar a diferencial do deslocamento sobre a

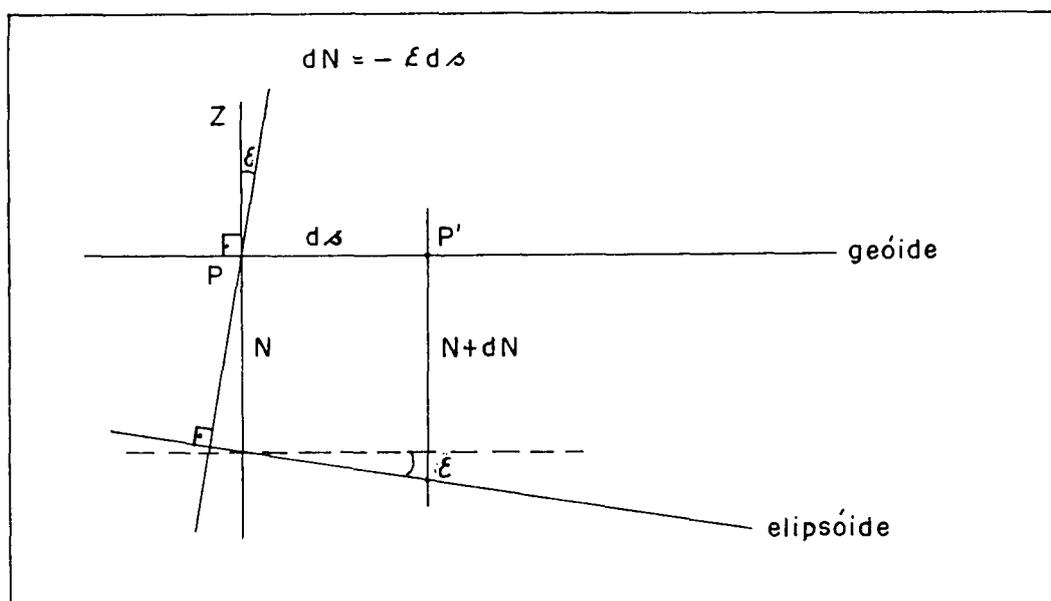


Fig. IV.2.1 - Relação entre ondulação geoidal e o desvio da vertical.

esfera de raio R em função de ϕ e λ por:

$$ds^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\lambda^2. \quad (\text{IV.2.5})$$

Na direção norte-sul:

$$\epsilon = \xi \quad \text{e} \quad ds = ds_\phi = R d\phi, \quad (\text{IV.2.6})$$

e na direção leste-oeste:

$$\epsilon = \eta \quad \text{e} \quad ds = ds_\lambda = R \cos \phi d\lambda. \quad (\text{IV.2.7})$$

Levando a (IV.2.6) e (IV.2.7) em (IV.2.2) encontramos:

$$\xi = - \frac{dN}{ds_\phi} = - \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} \quad (\text{IV.2.8})$$

$$\eta = - \frac{dN}{ds_\lambda} = - \frac{1}{R \cos \phi} \cdot \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (\text{IV.2.9})$$

que dão as relações das componentes do desvio no meridiano e primeiro vertical com a ondulação geoidal.

Como N pode ser expresso pela integral de Stokes, noso problema é derivá-lo em relação a ϕ e λ . Para este propósito usamos a fórmula (III.7.22):

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta(\phi', \lambda') S(\psi) \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (\text{IV.2.10})$$

onde ψ é função de ϕ , λ , ϕ' e λ' .

Pela derivação em relação a ϕ e a λ encontramos:

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} \cos \phi' d\phi' d\lambda'$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (\text{IV.2.11})$$

Da derivada de função composta temos que:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{dS}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{dS}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (\text{IV.2.12})$$

escrevendo ψ na forma:

$$\cos \psi = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (\text{IV.2.13})$$

e derivando sucessivamente em relação a ϕ e a λ obtemos:

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \cos \phi \sin \phi' - \sin \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (\text{IV.2.14})$$

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos \phi \cos \phi' \sin(\lambda' - \lambda).$$

Agora, introduziremos o azimute A , como mostra a figura IV.2.2 . Do triângulo esférico da mesma figura, usando as fôr-

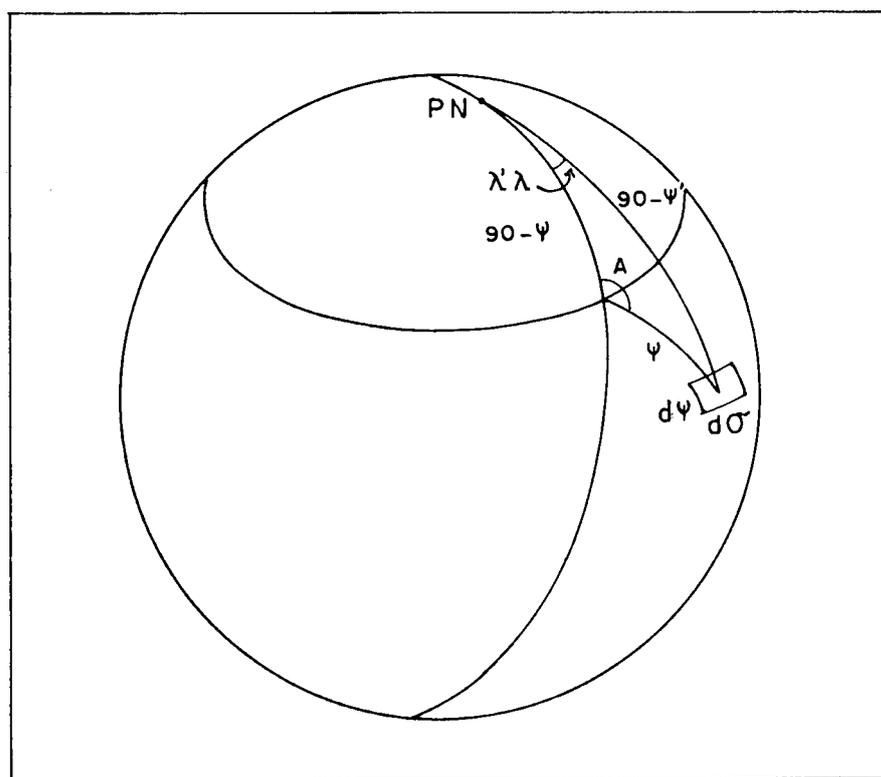


Fig. IV.2.2 - Relação entre coordenadas geográficas e polares.

mulas conhecidas da trigonometria esférica, "cinco elementos" e "analogia dos senos", podemos escrever:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \psi \cos A &= \cos \phi \operatorname{sen} \phi' - \operatorname{sen} \phi \cos \phi' \cos (\lambda' - \lambda) \\ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} A &= \cos \phi' \operatorname{sen} (\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{IV.2.15})$$

Substituindo (IV.2.15) nas (IV.2.14) obtemos as expressões

$$\frac{d\psi}{d\phi} = -\cos A \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{d\lambda} = -\cos \phi \operatorname{sen} A \quad (\text{IV.2.16})$$

e aplicando as (IV.2.12)

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} = -\frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A \quad (\text{IV.2.17})$$

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = -\frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \phi \operatorname{sen} A$$

Finalmente, substituindo em (IV.2.11), chegamos a:

$$\begin{aligned} \xi(\phi, \lambda) &= \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A \cos \phi' d\phi' d\lambda' \\ \eta(\phi, \lambda) &= \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \operatorname{sen} A \cos \phi' d\phi' d\lambda' \end{aligned} \quad (\text{IV.2.18})$$

ou na forma abreviada com $d\sigma = \cos \phi' d\phi' d\lambda'$

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \int \Delta g \frac{dS}{d\psi} \cos A \, d\sigma \quad (\text{IV.2.19})$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \int \Delta g \frac{dS}{d\psi} \operatorname{sen} A \, d\sigma$$

Estas são as fórmulas de Vening Meinesz. Derivando a função de Stokes $S(\psi)$, com relação a ψ obtemos a função de Vening Meinesz

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\psi} = & - \frac{\cos(\psi/2)}{2\operatorname{sen}^2(\psi/2)} + 8 \operatorname{sen} \psi - 6 \cos \psi/2 - 3 \frac{1-\operatorname{sen}\psi/2}{\operatorname{sen} \psi} + \\ & + 3 \operatorname{sen} \psi \ln [\operatorname{sen} \psi/2 + \operatorname{sen}^2 \psi/2]. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.20})$$

O azimute A é dado pela fórmula:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos \phi' \operatorname{sen} (\lambda' - \lambda)}{\cos \phi \operatorname{sen} \phi' - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi' \cos (\lambda' - \lambda)} \quad (\text{IV.2.21})$$

que é consequência imediata das (IV.2.15).

A fórmula (IV.2.18), como a fórmula de Stokes, pode também ser expressa em função das coordenadas esféricas polares ψ e A :

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, A) \cos A \frac{dS}{d\psi} \operatorname{sen} \psi \, d\psi \, dA$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, A) \sin A \frac{dS}{d\psi} \sin \psi \, d\psi \, dA.$$

(IV.2.22)

As fórmulas de Vening Meinesz são válidas para qualquer elipsóide de referência geocêntrico enquanto que a fórmula de Stokes deve ser modificada pela adição de uma constante N_0 quando o elipsóide não tiver a mesma massa que a Terra e $W_0 \neq U_0$. Se derivarmos a fórmula de Stokes em relação a ϕ e λ , para obter as fórmulas de Vening Meinesz, então esta constante desaparecerá e obteremos as fórmulas (IV.2.19).

As fórmulas $\frac{dS}{d\psi}$ e as fórmulas relativas estão tabeladas em Sollins (1947) [32].

IV.3 ESSÊNCIA DO MÉTODO

A debilidade do método astro-geodésico visto no Capítulo II está na interpolação linear do desvio astro-geodésico entre quaisquer dois pontos adjacentes. Portanto é necessário ter estes pontos de desvio tão próximos quanto possível.

Uma forma para superar a necessidade de se ter tantos pontos astro-geodésicos é usar o conhecimento do campo da gravidade local para suplementar estes pontos, com auxílio da fórmula de Vening Meinesz.

Seja σ uma região gravimetricamente conhecida e no seu in

terior uma sub-região σ_0 , pequena tal que possamos considerá-la plana e que contenha pelo menos três pontos astro-geodésicos. E Σ a região exterior a σ , onde o campo gravimétrico é desconhecido, o que nos impede de calcular a sua influência gravimétrica sobre as estações P e Q situados na sub-região σ_0 .

Numa primeira aproximação é possível admitir que a influência da região Σ seja igual em P e Q, ou com um erro menor, que ela varie linearmente no interior desta sub-região.

Representaremos por $\theta(P)$ o desvio gravimétrico total ou interpolado em P e por $\theta(P, \sigma)$ o desvio gravimétrico no ponto P devido à influência da região σ .

Resulta das considerações anteriores e da figura IV.3.1 que:

$$\begin{aligned} \theta(R) &= \theta(R, \sigma) + \theta(R, \Sigma) = \\ &= \theta(R, \sigma) + \theta(P, \Sigma) + \left[\theta(Q, \Sigma) - \theta(P, \Sigma) \right] \frac{d_1}{d} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.1})$$

Podemos calcular a influência astro-geodésica da região $\Sigma + \sigma$ e considerar a influência da região Σ como sendo a diferença desta influência e a influência gravimétrica da região σ .

$$\theta(P, \Sigma) = \theta(P, \Sigma + \sigma) - \theta(P, \sigma) \quad (\text{IV.3.2})$$

$$\theta(Q, \Sigma) = \theta(Q, \Sigma + \sigma) - \theta(Q, \sigma)$$

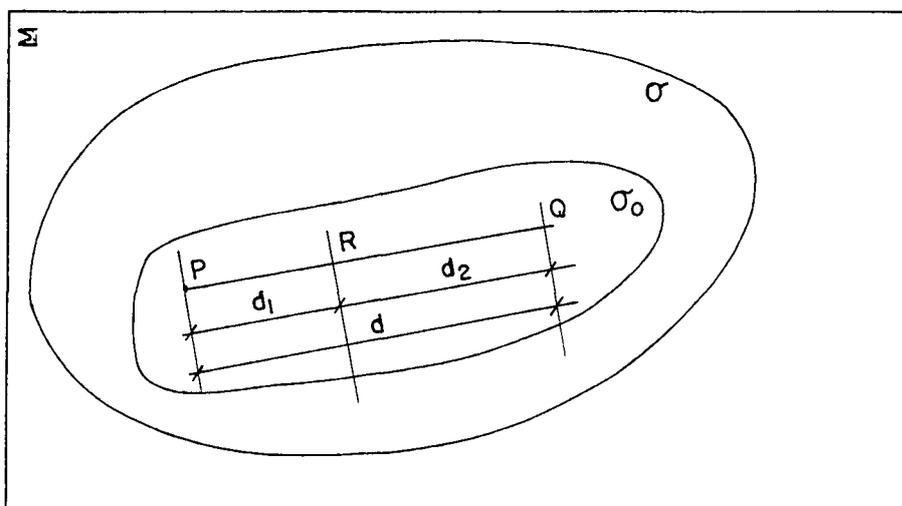


Fig. IV.3.1 - Região de divisão para cálculo dos desvios interpolados.

Introduzindo as (IV.3.2) em (IV.3.1) obtemos:

$$\theta(R) = \theta(R, \sigma) + \theta(P, \Sigma + \sigma) - \theta(P, \sigma) + \\ + [\theta(Q, \Sigma + \sigma) - \theta(Q, \sigma)] \frac{d_1}{d} - [\theta(P, \Sigma + \sigma) - \theta(P, \sigma)] \frac{d_1}{d} ,$$

que simplificada apresenta a forma:

$$\theta(R) = \theta(R, \sigma) + \frac{d_2}{d} [\theta(P, \Sigma + \sigma) - \theta(P, \sigma)] + \frac{d_1}{d} [\theta(Q, \Sigma + \sigma) - \theta(Q, \sigma)] .$$

(IV.3.3)

Desde que possamos considerar a região σ_0 plana, um ponto P_i sobre a mesma pode ser definida pelas coordenadas cartesianas retangulares planas (x_i, y_i) e façamos:

$$\theta(P_i, \sigma) = A x_i + B y_i + C .$$

Havendo mais de três pontos astro-geodésicos, ou seja $i > 3$, física e gravimetricamente conhecidos, podemos aplicar o método dos mínimos quadrados para calcular os coeficientes A , B e C consideradas constantes em σ e desta forma calcularmos

$$\theta(R) = \theta(R, \sigma) + Ax + By + C$$

IV.4 GEÓIDE ASTRO-GRAVIMÉTRICO

Temos conhecimento do geóide calculado astro-gravimetricamente na Rússia [24], onde se originou o método, na Alemanha [33] e no Canadá [22].

CAPÍTULO V

MÉTODO CELESTE E MÉTODO COMBINADO

V.1 MÉTODO CELESTE

V.1.1 INTRODUÇÃO

Desde o lançamento dos satélites, aumentaram sensivelmente as informações sobre o geóide. O rastreamento dos mesmos em órbita no espaço, possibilita a investigação do campo gravitacional da Terra, através das determinações dos coeficientes dos harmônicos esféricos para estabelecer o potencial gravitacional.

Quanto maior for a qualidade dos coeficientes determinados, assim como o número dos mesmos, melhor será a aproximação do potencial gravitacional, e conseqüentemente a precisão na determinação da ondulação geoidal.

A qualidade destes coeficientes depende entre outros fatores, das técnicas de observação usadas e das órbitas dos satélites artificiais. Para determinar harmônicos de alto grau, é necessário observar satélites em órbitas próximas da Terra, aumentar o número dos satélites rastreados e estes devem apresentar diferentes inclinações.

Nas seções seguintes, referentes ao método celeste,

partimos do pressuposto de que estes coeficientes já foram determinados; o geóide assim calculado é conhecido por geóide celeste ou geóide satélite [2].

V.1.2 ONDULAÇÃO GEOIDAL CALCULADA ATRAVÉS DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS.

Vimos no Capítulo III que o potencial perturbador T pode ser desenvolvido em harmônicos esféricos pela fórmula (III.5.5):

$$T = - \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(u) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) P_{nm}(u) \quad (\text{V.1.2.2})$$

Introduzindo este valor na fórmula de Bruns

$$N = T/\gamma$$

resulta:

$$N = - \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \left[J_n P_n(u) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) \right] P_{nm}(u), \quad (\text{V.1.2.3})$$

fórmula que exprime a ondulação geoidal N , em série de harmônicos esféricos.

V.1.3 MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL ATRAVÉS DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS.

Supondo conhecidos os valores do potencial W_0 , da latitude e da longitude de um ponto sobre a superfície geoidal, o valor de r na equação (III.5.2) pode ser calculado. Portanto, podemos expressar r como função destes elementos e dos coeficientes J_{nm} e K_{nm} :

$$r = f(W_0, \phi, \lambda, J_{nm}, K_{nm}), \quad (\text{V.1.3.1})$$

e determiná-lo por interação; ou diretamente se definirmos esta função f [21].

Podemos calcular o raio geocêntrico r_e de um ponto do elipsóide de referência

$$r_e = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \phi}} \quad (\text{V.1.3.2})$$

onde e é a excentricidade do elipsóide.

Da figura V.1.3

$$N = r - r_e. \quad (\text{V.1.3.3})$$

Sabemos que a ondulação geoidal N é medida sobre a normal ao elipsóide, portanto, este método não é exato e segundo Rapp o erro máximo pode atingir um valor aproximado a $Nf^2/2$.

V.1.4. ALTIMETRIA POR SATÉLITE

O radar altimétrico a bordo do satélite mede a dis

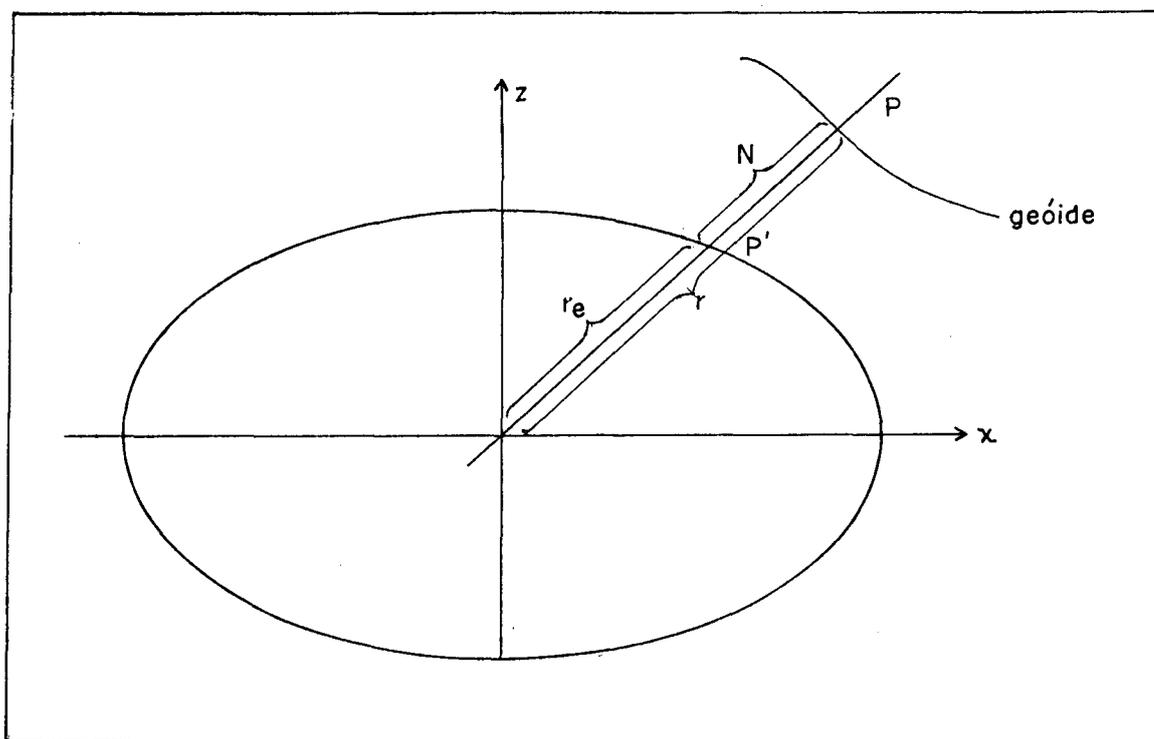


Fig. V.1.3 - Raios vetores de P e P' e ondulação geoidal N .

tância do satélite ao nível instantâneo do oceano. Entre os dados fornecidos pelo satélite altimétrico, devem constar: a posição do satélite, o instante referente a esta posição e informações relativas às condições meteorológicas. Estes dados podem ser analisados para uma determinação geométrica da superfície topográfica do oceano ou do geóide, assim como obter detalhes do campo gravífico [28].

Pode-se calcular a distância h_0 da superfície instantânea do oceano ao elipsóide de referência, pela equação:

$$h_0 = h - (A + R + b) \quad (\text{V.1.4.1})$$

onde h é a distância do altímetro ao elipsóide de referência; os elementos orbitais propiciam a distância do satélite ao centro do elipsóide e desta distância subtraímos r_e calculado por (V.1.3.2), obtendo h ; A é a medida altimétrica, R a correção da refração e b a incerteza a priori do altímetro.

Se admitíssemos a superfície do geóide coincidente com o nível instantâneo do oceano, então h_0 seria a ondulação geoidal; isto corresponderia a uma precisão na determinação do geóide inferior a 1 m; podemos calcular a ondulação N em função de h_0 e da altitude t da superfície instantânea do oceano, desde que consideremos as duas superfícies paralelas dentro de uma certa região. Pela figura V.1.4 podemos escrever:

$$h_0 = N + t. \quad (\text{V.1.4.2})$$

Isolando a ondulação geoidal N de t , que requer in

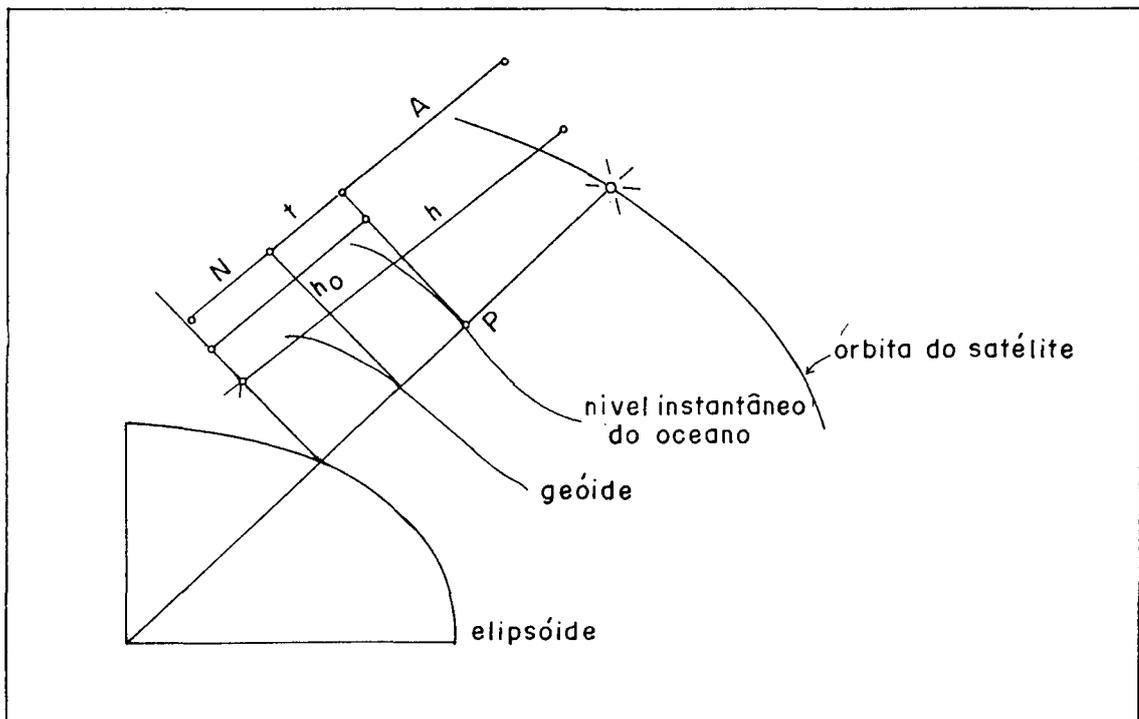


Fig. V.1.4 - Posição do satélite com relação às superfícies: oceânica, geoidal e elipsoidal.

formações oceânicas adicionais, geralmente fornecido pelos oceanógrafos, obtemos:

$$N = h_0 - t \quad (V.1.4.3)$$

V.2 MÉTODO COMBINADO

V.2.1 INTRODUÇÃO

Os satélites geodésicos estão em órbita a uma distância da Terra tal que não são influenciados pelas pequenas massas anômalas regionais. Por esta razão, podemos afirmar que o método que emprega harmônicos esféricos não dá uma informação detalhada do geóide, principalmente se considerarmos regiões pequenas, mas apenas informações globais.

As anomalias da gravidade, e o desvio da vertical calculados por observações terrestres, são influenciados por estas pequenas massas; portanto os métodos terrestres são melhores para fornecer as informações regionais, mas apresentam a desvantagem de não conhecermos os dados distribuídos contínua e uniformemente sobre toda a superfície da Terra.

O método atualmente usado para determinar o geóide com precisão maior, denominado combinado, reúne os métodos anteriormente citados (de forma complementar, visto que apresentam vantagens e desvantagens).

Nas próximas seções pretendemos apresentar um dos

procedimentos usados para cálculo da ondulação geoidal pelo método combinado.

Nas publicações mais recentes encontramos o método combinado aplicando collocation, que é uma forma generalizada de ajustamento e predição. Não o apresentamos neste trabalho para não nos extendermos demais.

V.2.2 CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL APLICANDO HARMÔNICOS ESFÉRICOS E GRAVIMETRIA

A ondulação geoidal N pode ser considerada como soma de três parcelas, a saber:

$$N = N_1 + N_2 + N_3; \quad (V.2.2.1)$$

N_1 é calculado através de harmônicos esféricos, pela fórmula:

$$N_1 = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} (\bar{C}_{\ell m}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{\ell m} \sin m\lambda) \bar{P}_{\ell m}(\sin \bar{\phi}) \quad (V.2.2.2)$$

onde kM é a constante gravitacional geocêntrica, r é a distância geocêntrica do ponto P onde queremos calcular a ondulação geoidal, a é o raio equatorial, γ é a gravidade normal média e $C_{\ell m}^*$, as diferenças entre os coeficientes do geopotencial e do esferopotencial, (os primeiros são observados e os segundos são calculados); ℓ_{\max} é o coeficiente de maior grau disponível e P é o

polinômio de Legendre plenamente normalizado para a latitude geocêntrica $\bar{\phi}$.

Na prática temos:

$$\bar{c}_{20}^* = \bar{c}_{20}(\text{OBS}) - \bar{c}_{20}(\text{CAL}) \quad (\text{V.2.2.3})$$

$$\bar{c}_{40}^* = \bar{c}_{40}(\text{OBS}) - \bar{c}_{40}(\text{CAL}),$$

os outros C com valores iguais aos observados.

A parcela N_2 é calculada pela fórmula de Stokes:

$$N_2 = \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma_c} (\Delta \bar{g}_F - \Delta \bar{g}_S) S(\psi) d\sigma \quad (\text{V.2.2.4})$$

onde R é o raio médio da Terra, G o valor da gravidade média, Δg_F a anomalia média de free-air e Δg_S é a anomalia média calculada através dos coeficientes dos harmônicos esféricos implicados em (V.2.2.2); σ_c é uma "calota" limitada com centro no ponto de cálculo e amplitude ψ_c .

O valor de Δg_S é calculado por:

$$\Delta g_S = \frac{kM}{r^2} \sum_{\ell=2}^{\ell} (\ell-1) \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} (\bar{c}_{\ell}^* \cos m\lambda + \bar{s}_{\ell m} \sin m\lambda) P_{\ell m}(\sin \phi). \quad (\text{V.2.2.5})$$

O termo N_3 é calculado por:

$$N_3 = \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma-\sigma_c} (\Delta \bar{g}_F - \Delta \bar{g}_S) S(\psi) d\sigma,$$

onde $\sigma - \sigma_c$ representa o globo subtraído da "calota" σ_c , escolhido de tal forma que este termo seja negligenciável.

Rapp e Rumell efetuaram uma pesquisa do desvio padrão da ondulação causado pelo truncamento dos coeficientes para diversos l_{\max} , e para as amplitudes da calota ψ_0 variando de 0° a 30° . Por exemplo, para $l_{\max} = 22$ e $\psi_0 = 30^\circ$ eles obtiveram desvio padrão igual a 0,4m.

V.2.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO COMBINADO

O método descrito na seção anterior foi aplicado, em 1972, por Talwani para cálculo do geóide no Atlântico Norte, em 1973 por Kahle e Talwani para o Oceano Índico e, no mesmo ano por Vicente e Marsh para todo o globo.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

Conforme o exposto no Capítulo III, as anomalias publicadas pela USAF foram acrescidas das anomalias fornecidas pela Petrobrás, na faixa de latitude $+1^{\circ}$ e -5° e na região litorânea, numa faixa de aproximadamente 6° , com maior concentração nas vizinhanças do Datum.

Comparando as cartas geoidais (B.1), obtidas com os dados da USAF, e B.2, obtidas da anterior acrescidas de informações da Petrobrás, notamos uma mudança maior nestas regiões.

Se observarmos a carta (B.1) notamos uma descontinuidade na linha de ondulação nula, na parte oeste do Amazonas, e na linha de ondulação $-10m$, na parte leste do Brasil. Enquanto na carta (B.2) as duas linhas apresentam continuidade e um leve deslocamento para leste na primeira linha e para oeste na segunda.

Se o conhecimento gravimétrico mundial for maior, como nos dados cedidos pelo Dr. Rapp, percebemos uma alteração bastante grande em todas as linhas (B.3).

Analisando as influências nas regiões afastadas, através dos gráficos apresentados no Capítulo III, notamos que elas diferem bastante para $0^{\circ} < \psi < 20^{\circ}$, onde a oscilação é maior.

Para $20^{\circ} < \psi < 50^{\circ}$ ela é praticamente paralela à horizontal. Para $50^{\circ} < \psi < 160^{\circ}$ há um decréscimo no valor de N , atingindo o mínimo no entorno de 150° e para $160^{\circ} < \psi < 180^{\circ}$ ela cresce.

Com base nas análises anteriormente apresentadas reforçamos o conceito vigente para o cálculo da ondulação geoidal pelo método gravimétrico, utilizando a Fórmula de Stokes, deve estender a integral à total superfície da Terra.

APENDICE A

```

          DIMENSION DG(180,360),ONDL(27)
C-----
C----- LEITURA DAS ANOMALIAS E GERACAO DAS COORDENADAS
C-----
          WRITE(3,500)
500      FORMAT(15X,'CALCULO DA ONDULACAO GEOIDAL-FORMULA DE SICKES')
          READ(2,900)((DG(I,J),J=1,360),I=1,180)
900      FORMAT(18F5.0)
          DO 17 I=1,180
          XLATI=(91-I)*3.141593/180.
          DO 17 J=1,360
          IF(DG(I,J))24,17,24
24      DG(I,J)=DG(I,J)+3.2-13.6*SIN(XLATI)**2
17      CONTINUE
          DO 16 IVLA=0,40
          LATP=6-IVLA
          DO 16 IVLO=0,40
          LONP=-34-IVLO
          WRITE(3,600)LATP
600      FORMAT(/25X,'PONTO: LATITUDE= ',I3)
          WRITE(3,700)LONP
700      FORMAT(32X,'LONGITUDE= ',I3)
          CHAV1=0.
          CHAV2=0.
          CHAV3=0.
          CHAV4=0.
          CHAV5=0.
          CHAV6=0.
          CHAV7=0.
          CHAV8=0.
C-----
C----- CALCULO DAS REGIOES DISTANTES (5X5)
C-----
          DO 13 L=1,27
13      ONDL(L)=0.
          LAT=91-LATP
          IF(LONP)1,2,2
1      LON=LONP+361
          GO TO 3
2      LON=LONP+1
3      CONTINUE
          ILAT=LAT-LAT/5*5
          ILCN=LON-LCN/5*5
          LATL=0
          LCNL=0
          XLATM=LATL
          XLONM=LCNL
          ANOM=0.
          IF(ILAT)20,20,21
          IF(ILCN)20,20,21
21      CONTINUE
          DO 10 I=1,ILAT
          LCNL=0
          LATL=LATL+1
          DO 10 J=1,ILCN
          LCNL=LCNL+1
10      ANOM=ANOM+DG(LATL,LCNL)
          XLATM=XLATM+ILAT/2.
          XLONM=XLONM+ILCN/2.
          DLAT=ILAT
          DILCN=ILCN
          ANOM=ANOM/(ILAT*ILCN)
          CALL OND(LATP,LONP,DLAT,DILCN,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)

```

```

20      ANOM=0.
      LATL=0.
      ALON=LONL
      XLATM=LATL
      XLONM=LONL
      IF(ILAT)40,40,33
33      DO 30 I=1,ILAT
      LATL=LATL+1
      LONL=XLONM
      DO 30 J=1,5
      CHAV2=0.
      LONL=LONL+1
      IF(LONL-360)34,34,31
31      LONL=LONL-1
      CHAV2=1.
      GO TO 30
34      ANOM=ANOM+DG(LATL,LONL)
30      CONTINUE
      XLATM=XLATM+ILAT/2.
      DLON=LONL-ALON
      XLONM=XLONM+DLON/2.
      ANOM=ANOM/(DLON+ILAT)
      DLAT=ILAT
      CALL OND(LATP,LONP,ELAT,ELON,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)
      IF(CHAV2)20,20,39
39      LATL=ILAT
40      ANOM=0.
      LONL=0.
      XLATM=LATL
      XLONM=LONL
      ALON=LONL
      ALAT=LATL
      IF(ILON)60,60,42
42      DO 50 I=1,5
      LATL=LATL+1
      IF(LATL-180)41,41,51
41      LONL=XLONM
      DO 50 J=1,ILON
      LONL=LONL+1
50      ANOM=ANOM+DG(LATL,LONL)
      GO TO 53
51      LATL=LATL-1
      CHAV3=1.
53      CONTINUE
      DLAT=LATL-ALAT
      XLATM=XLATM+DLAT/2.
      DLON=LONL-ALON
      XLONM=XLONM+DLON/2.
      ALAT=LATL
      ALON=LONL
      ANOM=ANOM/(DLAT*ELON)
      CALL OND(LATP,LONP,ELAT,ELON,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)
      IF(CHAV3)40,40,60
60      CONTINUE
111     DO 130 K=1,36
      LONL=ILON
62      LATL=ILAT+(K-1)*5
404     FORMAT(10G)
      CHAV5=0.
110     ANOM=0.
      ALAT=LATL
      ALON=LONL
      XLATM=LATL

```

```

XLONM=LONL
126 DO 120 I=1,5
    LATL=LATL+1
    DILA=ABS(LAT-LATL)
    IF(LATL-LAT)11,11,12
12 DILA=DILA-1
11 CONTINUE
    IF(LATL-180)122,122,123
122 LONL=XLONM
    DO 120 J=1,5
    LONL=LONL+1
    DILC=ABS(LON-LONL)
    CHAV6=0.
    IF(LONL-LON)15,15,14
14 DILC=DILC-1
15 CONTINUE
    IF(DILO-15.)112,114,114
112 IF(DILA-10.)120,114,114
127 LONL=LONL+30
    ALON=LONL-1
114 IF(LONL-360)121,121,124
124 LONL=LONL-1
    CHAV6=1.
    GO TO 120
121 ANOM=ANOM+DG(LATL,LONL)
120 CONTINUE
    GO TO 125
123 LATL=LATL-1
    CHAV5=1.
125 CONTINUE
128 DLON=LONL-ALON
    DLAT=LATL-ALAT
    XLATM=XLATM+DLAT/2.
    XLONM=XLONM+DLON/2.
    IF(DLAT)130,130,107
107 IF(DLON)130,130,108
108 CONTINUE
    ANOM=ANOM/(DLAT*DLON)
    CALL ONC(LATP,LONP,DLAT,DLON,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)
130 IF(CHAV6)62,62,140
140 CONTINUE
    IF(CHAV5)139,139,141
139 CHAV6=0.
    LONL=ILON
138 CONTINUE
141 CONTINUE
C-----
C----- CALCULO DAS INFLUENCIAS DA REGIOES PROXIMAS (1X1)
C----- E NAS VIZINHANÇAS DO PONTO
C-----
    LATL=LAT-10
90 DO 105 I=1,20
    LATL=LATL+1
    IF(LATL-180)92,92,101
92 LONL=LON-15
143 DO 105 J=1,30
    LONL=LONL+1
    XLATM=LATL
    XLONM=LONL
    IF(LONL-360)100,100,102
100 ANOM=DG(LATL,LONL)
    GO TO 103
101 LATL=LATL-1

```

```

      CHAV7=1.
      GO TO 103
102   LONL=LONL-1
      CHAV8=1.
103   CONTINUE
      XLATM=XLATM+0.5
      XLONM=XLONM+0.5
      DLAT=1.
      DLON=1.
      CALL OND(LATP,LONP,DLAT,DLON,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)
      IF(CHAV8)105,105,106
106   IF(CHAV7)109,109,142
109   CHAV8=0.
105   CONTINUE
142   CONTINUE
      WRITE(3,250)(ONDL(I),I=1,27)
250   FORMAT(10(F10.2,2X))
16    CONTINUE
      STOP
      END

```

```

C-----
C----- SUB-ROTINA QUE CALCULA A INFLUENCIA DE CADA "QUADRADO"
C-----
      SUBROUTINE OND(LATP,LCNP,DLAT,DLON,XLATM,XLONM,ANOM,ONDL)
      DIMENSION ONDL(27)
      IF(XLONM-181)200,200,210
200   XLON=XLONM-1
      GO TO 220
210   XLON=XLONM-361.
      CONTINUE
220   CONS=3.141593/180.
      XLAT=91-XLATM
      PLAT=LATP*CONS
      PLON=LONP*CONS
      XLON=XLON*CONS
      XLAT=XLAT*CONS
      SIG=2*DLON*CONS*SIN(DLAT*CONS)*COS(XLAT)
      DLON=XLON-PLON
      PSI=ACOS(SIN(PLAT)*SIN(XLAT)+COS(PLAT)*COS(XLAT)*COS(DLON))
      PSIM=PSI/2.
      IF(PSI-0.0174532925)13,13,15
13    ONDU=6502.347417*PSI*ANOM
      GO TO 11
15    CONTINUE
      FPSI=0.5*(1./SIN(PSIM)+1.-6.*SIN(PSIM)-5.*COS(PSI)-3.*COS(PSI
1ALOG(SIN(PSIM)+SIN(PSIM)**2))
      COE=1.034880700*FPSI*SIG*1000.
      ONDU=COE*ANOM
11    CONTINUE
      PSI=PSI/CONS
      DO 22 L=1,27
      IF(L-10)19,19,18
18    IND=(L-9)*10
      GO TO 20
19    IND=L
20    CONTINUE
      IF(PSI-IND)21,21,22
21    ONDL(L)=ONDL(L)+ONDU
22    CONTINUE
      RETURN
      END

```

CALCULO DA ONDULACAO (CECIDPL-FORMULA DE SICKES)

PCNTC: LATITUDE= 6 N
LONGITUDE= -34

65462.72	66627.90	68571.18	69243.18	69019.12	68134.96	68287.21	67906.52	66847.75	66155.25
56180.17	54362.51	55183.93	52414.62	49795.65	45411.14	43510.27	45918.29	50138.55	54170.49
54923.78	54173.80	55036.08	57507.92	60918.12	66489.40	72863.41			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -35

61063.06	61806.73	62420.00	62264.70	62059.63	63316.02	62710.10	61991.33	61219.72	60267.21
49181.73	47399.39	48133.42	45557.66	42676.71	38842.39	36580.51	38843.09	42767.44	46778.72
47586.00	46819.22	47401.87	49919.86	53558.20	59406.36	65306.29			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -36

61528.43	59673.77	58440.91	59735.81	61011.92	61002.19	60346.10	59512.00	58550.95	57875.46
45499.03	43619.27	44345.00	41729.92	38964.55	35129.37	32771.65	35443.96	38717.66	42592.87
43491.56	42644.13	42959.21	45531.53	49185.40	55508.27	60947.11			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -37

62053.57	60096.55	57582.95	57470.65	59407.99	59241.29	58541.59	57313.27	56866.13	56211.87
42966.30	40622.96	41840.24	38957.83	36322.54	32107.40	30035.06	32999.89	36035.47	39568.82
40511.99	39536.66	39766.26	42217.79	45838.23	52196.20	57607.01			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -38

60584.95	60210.88	58283.81	55918.66	55888.91	56528.56	55459.55	54672.36	54193.35	53187.05
39609.03	38889.24	38156.38	35249.93	32738.86	28766.82	26423.95	29560.19	32373.01	35763.04
36706.36	35762.68	35855.94	38691.00	41650.74	48231.71	53487.06			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -39

59137.44	57891.42	54886.47	53801.65	53554.88	52168.99	52189.03	51851.46	51098.58	49629.24
36122.20	32791.37	34337.66	31251.08	28624.26	25024.90	22562.03	25857.75	28276.09	31618.61
32574.83	31738.62	31418.10	33784.71	37481.52	43848.35	49038.99			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -40

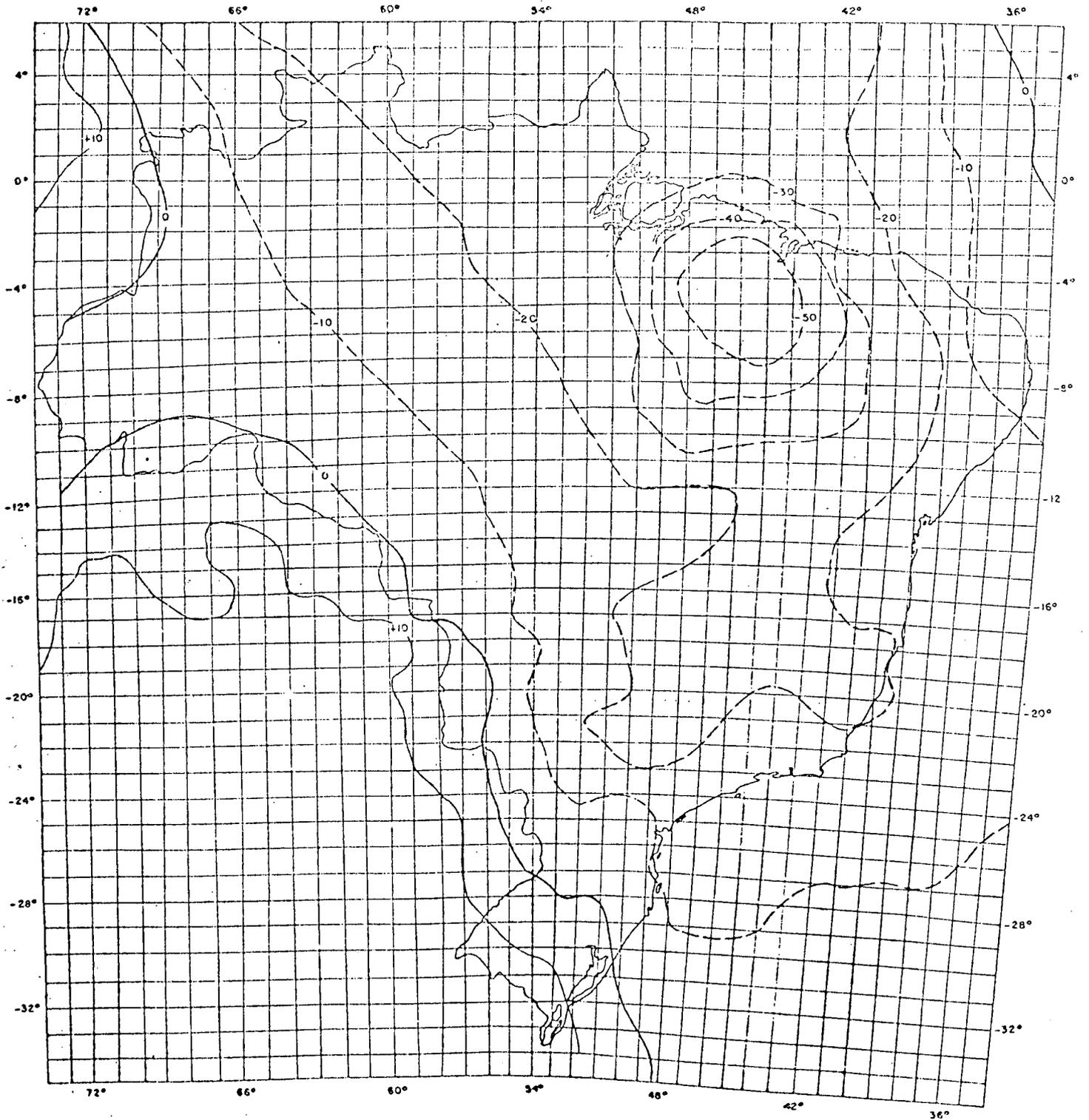
57126.78	54757.30	52424.35	51832.67	50176.74	48784.35	47608.67	47572.85	46740.13	45347.54
31928.80	27913.72	29625.00	26454.26	24320.20	20542.78	17874.31	21015.28	23464.08	26601.30
27617.84	26789.01	26459.23	28408.21	32553.76	38976.39	43766.03			

PCNTC: LATITUDE= 6
LONGITUDE= -41

52857.08	50334.58	47544.31	47116.77	45242.89	44036.84	42052.51	41345.68	40317.53	39416.11
25232.05	21645.56	23663.86	20251.53	18076.07	14743.34	11809.32	14856.79	17099.75	20091.16
21031.84	20157.86	19753.52	21225.49	25490.85	32466.11	36794.04			

APENDICE B

CARTA GEOIDAL DO BRASIL

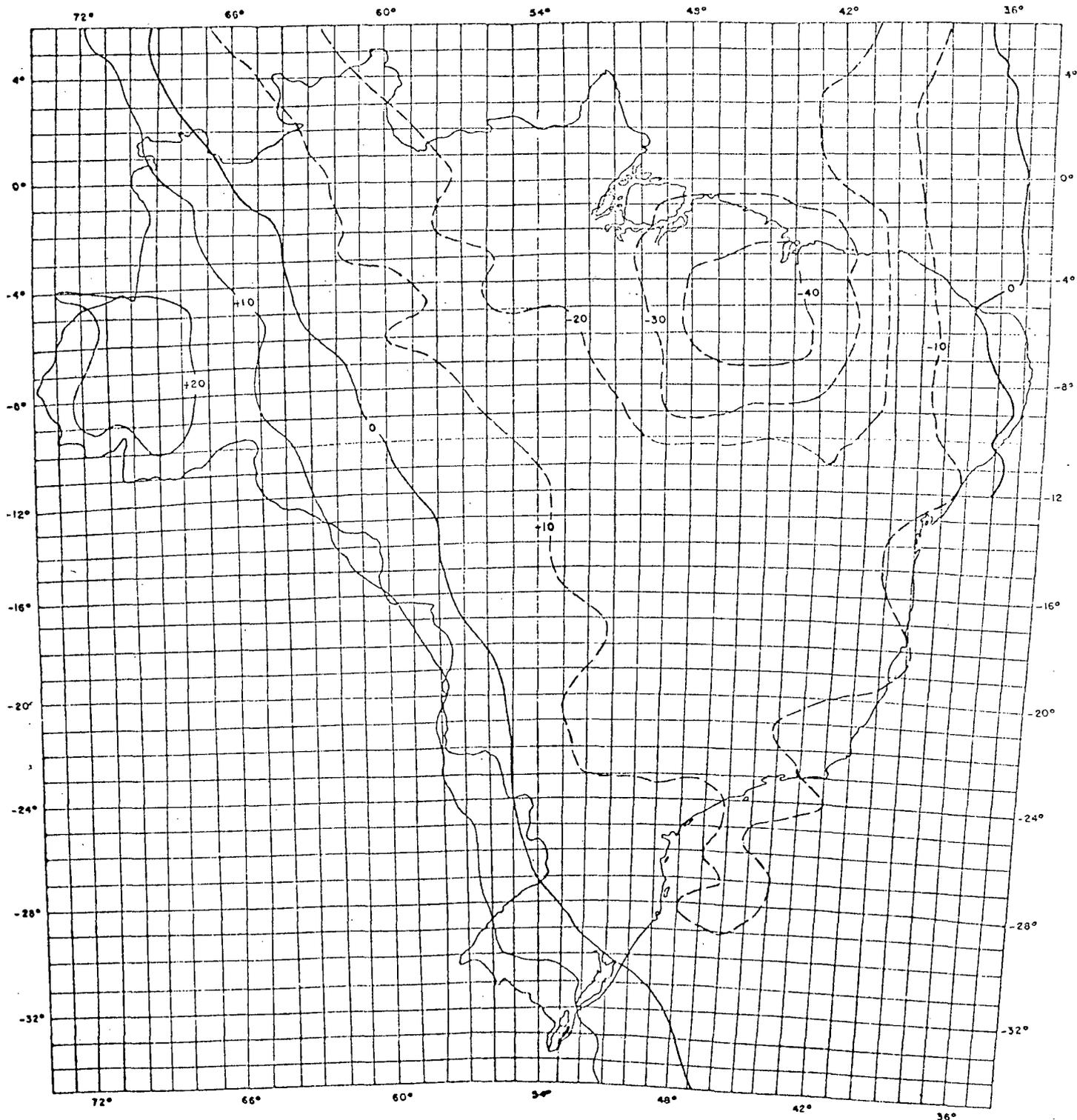


Derivada de Determinações Através da Fórmula de Stokes.
Anomalias da F.A.A. (Geocêntrico)

- SISTEMA DE REFERÊNCIA - DATUM SUL AMERICANO 1969
- ELIPSOIDE UGGI 1947
- SEMI-ELIX MAIOR - 6.378 160 m
- ACHATAMENTO - 1/298 25
- COORDENADAS DA ORIGEM "CHUA"
- LAT. 16°45'41"4527 S
- LONG. 48°00'04"0658 W
- AFASTAMENTO GEOIDAL "CHUA" 8 m

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO - UFPR (1983)
B-1

GARTA GEODAL DO BRASIL

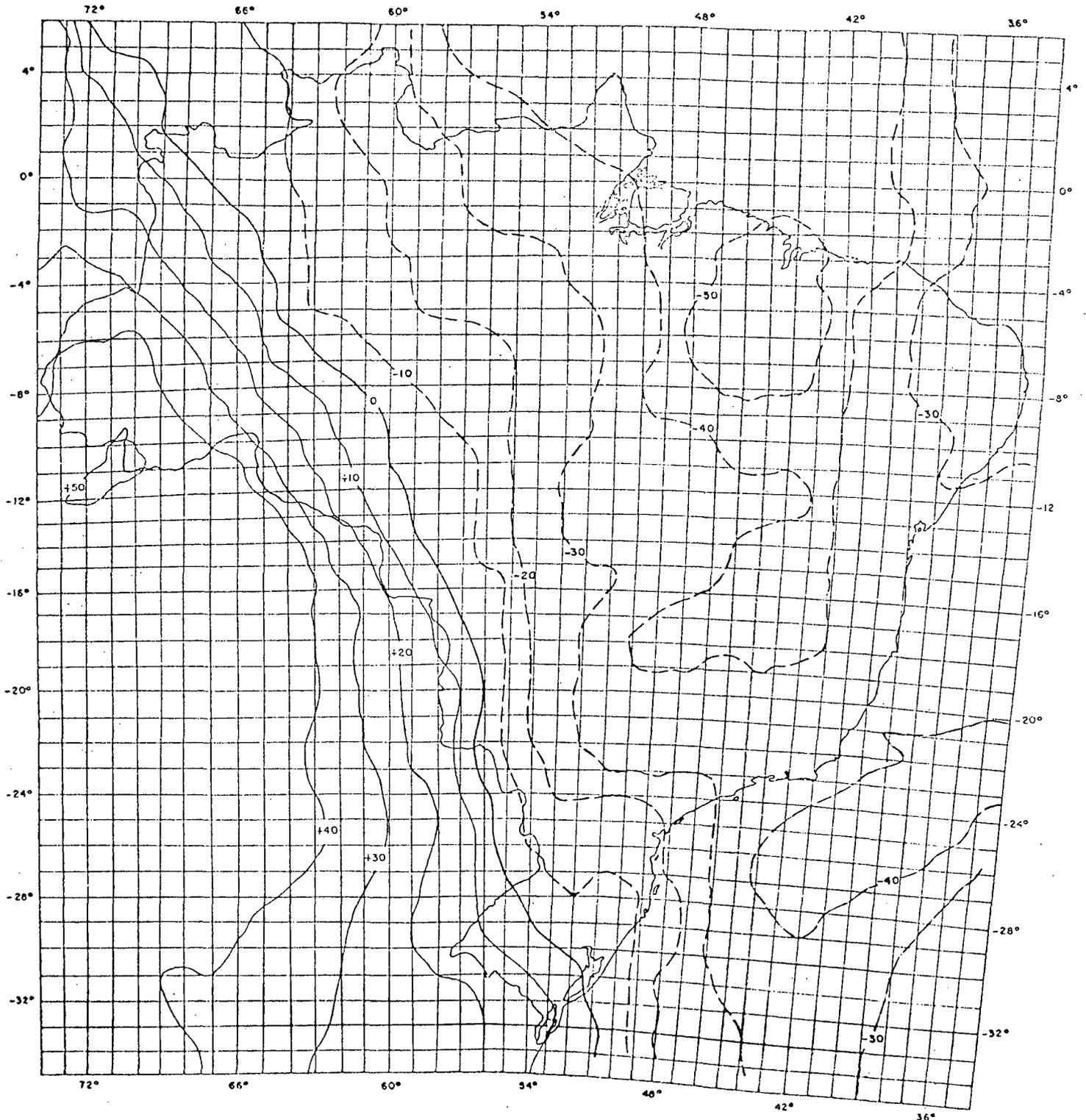


Derivada de Determinações Aéreas da Fórmula de Stokes.
Anomalias da F.A.A. e Petrobrás (Geocêntrica)

- SISTEMA DE REFERÊNCIA - DATUM SUL AMERICANO 1969
 ELIPSOIDE UTM 1967
 SEMI - EIXO MAIOR = 6 378 160 m
 ACHATAMENTO = 1/298 25
 - COORDENADAS DA ORIGEM "CUBA"
 LAT. 19°45'41"6327 S
 LONG. 49°04'04"0689 W
 - AFASTAMENTO GEODAL "CUBA" = 0

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO - UFPR (1983)
 B-2

CARTA GEOIDAL DO BRASIL



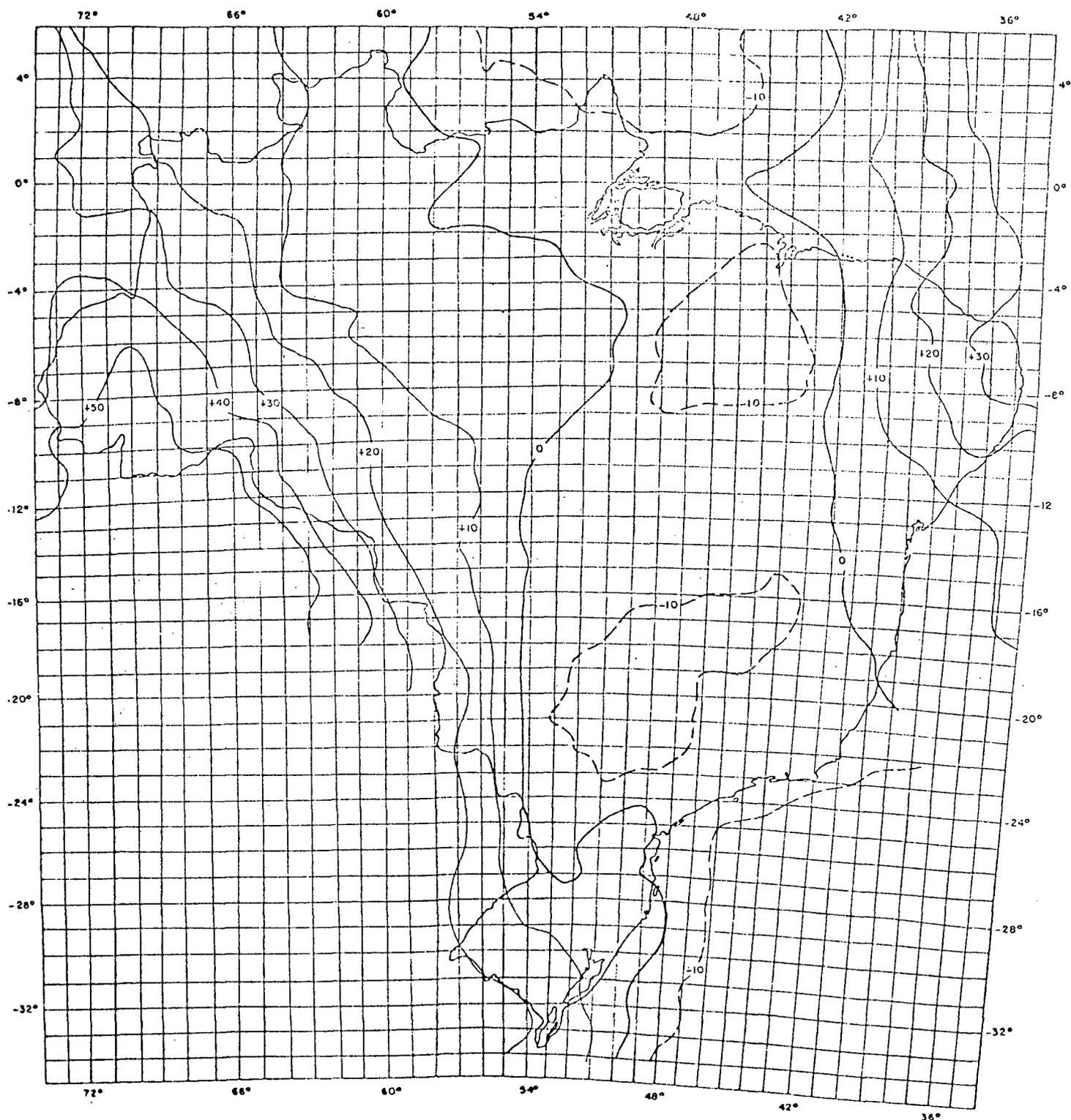
Derivada de Determinações Através da Fórmula de Stokes.
Anomalias cedidas pelo Dr. Rapp (Geocêntrico)

- SISTEMA DE REFERENCIA - DATUM SUL AMERICANO 1969
- ELIPSOIDE UGSA 1967
- SEMI-EIXO MAIOR = 6 378 160 m
- ACHATAMENTO = 1/29825
- COORDENADAS DA ORIGEM "CHUA"
- LAT. 19° 43' 41" 6327 S
- LONG. 48° 08' 04" 0473 W
- AFASTAMENTO GEOIDAL "CHUA" = 0

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO - UFPR (1983)

B-3

CARTA GEOIDAL DO BRASIL



Derivada de Determinações Através da Fórmula de Stokes.
Anomalias cedidas pelos Dr. Rapp (Sistema Brasileiro)

- SISTEMA DE REFERÊNCIA-DATUM SUL AMERICANO 1969
 ELIPSOIDE URSI 1967
 SEMI-ELIXO MAIOR $a = 6378160$
 ACHATAMENTO $f = 1/29825$
 - COORDENADAS DA ORIGEM "CHUA"
 LAT $10^{\circ}41'41.6327$ S
 LONG $44^{\circ}37'04.0089$ W
 - AFASTAMENTO GEODÉSICO "CHUA" = 0

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO - UFPR (1983)

B-4

S U M M A R Y

In this thesis the author presents the methods: astro-geodetic, gravimetric, astro-gravimetric, celestial and combined, for determination of the geoid, as well as some examples of geoids computed through them.

The author also analyses the influence of the different remote regions in the geoidal undulations computed through Stoke's formula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 ANDRADE, José Bittencourt. I seminário de computação eletrônica aplicada às ciências geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1973. 138 p.
- 02 BJERHAMMAR, A. The space geoid. In: VEIS, George. The use of artificial satellites for geodesy. Athens, Publication of the National Technical University, 1967. p. 455-66.
- 03 BLITZKOW, Denizar. Referenciais cartesianos. Curitiba 1982. Comunicação pessoal concedida em 12-82.
- 04 BOMFORD, G. Geodesy. 3 ed., Oxford, at the Clarendon Press, 1971. 731 p.
- 05 GEMAEEL, Camil. Elementos de trigonometria esférica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Departamento de Geociências, 1978, 92 p.
- 06 _____. CG-142 Geodésia II (Notas complementares). Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós - Graduação em Ciências Geodésicas. 1972. p. 34-60.
- 07 _____. Geodésia física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. 166 p.
- 08 _____. Geodésia geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 1977. 148 p.
- 09 _____. Referenciais cartesianos utilizados em geodésia. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós - Graduação em Ciências Geodésicas. 1981. 78 p.
- 10 HALMOS, F. Geoid determination on the basis of satellite observations. Acta Geodaetica Geophy. Et Montanistica Acad. Sci. Hung, 15 (1): 5-16, 1980.
- 11 HEISKANEN, W.A. & Vening Meinesz. The earth and its gravity field. New York, MacGraw Hill, 1958. 470 p.
- 12 _____, & MORITZ, H. Physical geodesy. London, W. H. Freeman. 1967. 364 p.
- 13 JEKELI, Christopher. Global accuracy estimates of point and mean undulation differences obtained from gravity disturbances, gravity anomalies and potential coefficients. Reports of the Department of Geodetic Science. Columbus, (288). 1979.
- 14 JORDAN, S.K. Jordan's hand-book of geodesy. Washington, Army Map Service, 1962. Vol. III.

- 15 KRAKIWISKI, E. & WELLS, D.E. Coordinates systems in geodesy. Lecture Notes, Fredericton (16), 1971.
- 16 KRYNSKY, J. & SCHWARZ, K.P. Improvement of the geoid in local areas by satellite gradiometry. Bulletin Géodésique, 51 (3): 163-176, 1977.
- 17 LACHAPELLE, G. Determination of the geoid using heterogeneous data. Mitteilungen der Geodatische Institute der Technischen Universität Graz, (19), 1975.
- 18 LAMBERT, W.D. & DARLING, F.W. Table for determining the form of the geoid and its indirect effect on gravity. Washington. U.S. of Commerce. Coast and Geodetic Survey. 1936, 130 p.
- 19 LEJAY, R. P. PIERRE. Développments modernes de la gravimétrie Gauthier - Villars, 1947. 54 p.
- 20 LEITE, Oziel Henrique da Silva. Sobre um processo de automa- tização no cálculo da correção do terreno. Tese de Mes- trado em Ciências Geodésicas. Curitiba.
- 21 MACMILLAN, W.D. The theory of the potential. New York. Dover, 1958. 469 p.
- 22 MERRY, Charles L. Studies towards an astrogravimetric geoid for Canada. Technical Report, (31): 129. February 1975.
- 23 _____, & VANICEK, P. A method for astro-gravimetric geoid de- termination. Technical Report, (27): March 1974. 74 p.
- 24 MOLODENSKII, M.S. et alli. Methods for study of the gravita- tion field and figure of the earth. Jerusalem, Israel Pro- gran for Scientist Translations, 1962. 248 p.
- 25 MORELLI, C. The international gravity standartization net - 1971. Paris, Bureau Central de L'Association Internatio- nale de Géodésie, s.d. 194 p.
- 26 MUELLER, Ivan I. Introduction to satellite geodesy. New York, F. Ungar, 1964. 415 p.
- 27 $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ mean free-air gravity anomalies. ACIC Reference Pu- blication, St Louis, (29), 1971.
- 28 RAPP, R. H. Mean gravity anomalies and sea surface heigth de- rived from Geos - 3 altimeter data. Reports of the Depart- ment of Geodetic Science. Columbus, (268). 1977.
- 29 _____. Methods for the computation of geoid undulation from potencial coeficient. Bulletin Geodesique, Paris, (101): 283-97, 1971.
- 30 _____. The geoid definition and determination. Transaction American Geophysical Union, 55 (3): 118-126, March 1974.
- 31 RAPP, R.H. & RUMMEL, R. Methods for the computation of de- tailed geoids and their accuracy. Reports of the Depart- ment of Geodetic Science, Columbus, (233), 1975.

- 32 SOLLINS, A.D. Tables for the computation of deflections of the vertical from gravity anomalies. Bulletin Gēodēsique, Paris, (6): 279-300, October, 1947.
- 33 TORQUE, Wolfgang. Geodesy. Berlin, Walter de Grauyter, 1980, 254 p.
- 34 UOTILA, U.A. Investigation on the gravity field and shape of the earth. Publication of the Isostatic Institute of International Association of Geodesy, (33): 1-92, 1960.
- 35 VANICEK, P. Physical Geodesy, Lecture notes, Fredericton , (43), 1976.
- 36 _____ & MERRY, C. A method for astrogravimetric geoid determination. Technical Report. Fredericton, (27), 1974.