

NELSON MODRO

MÉTODOS PARA INVERSÃO DE MATRIZES: APLICAÇÕES ÀS CIÊNCIAS GEODÉSICAS

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
para obtenção do grau de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do
Paraná.

CURITIBA
1981

MÉTODOS PARA INVERSÃO DE MATRIZES:
APLICAÇÕES ÀS CIÊNCIAS GEODESICAS

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do Paraná

por

NELSON MODRO, Licenciado em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1980

BANCA EXAMINADORA:

José Bittencourt de Andrade
PhD JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE - Orientador

Denizar Blitzkow
MSc DENIZAR BLITZKOW

Avelino Marcante
MSc AVELINO MARCANTE

A G R A D E C I M E N T O S

Desejamos externar nossos profundos agradecimentos aos professores:

Dr. José Bittencourt de Andrade
e M. Sc. Quintino Dalmolin

respectivamente, orientador e co-orientador do presente trabalho, bem como às pessoas abaixo relacionadas, que contribuíram de forma relevante em várias etapas da confecção do mesmo:

Alcenir Ribeiro Modro, Lic.Matemática;
Alda Alves Ferreira Gonçalves, Lic. Letras;
Camil Gemael, Dr.;
Danusia Wasyluk Santin;
Edicleá Walter, Lic. Letras;
Eliane Stroparo, Lic. Filos., Bel. Bibliotecon.;
Eva Cristina Dalmolin, M.A.
Gilmar Zukowski;
Nelson de Luca, Dr.;
Romualdo Wandresen, M. Sc.;

ao CNPq, pela ajuda financeira
e aos que nos auxiliaram indiretamente.

S I N O P S E

A inversa de uma matriz pode ser calculada por diversos métodos. As principais vantagens de alguns métodos são: economia de tempo e de memória de computador.

No presente trabalho é feita uma análise dos vários métodos, dando-se atenção especial às vantagens acima citadas.

No último capítulo é apresentada uma relação dos tipos de matrizes mais comuns no campo das Ciências Geodésicas, assim como dos métodos mais indicados para a inversão das mesmas.

S Y N O P S I S

The inverse of a matrix can be calculated by various methods. The main advantages of some of them are: time saving and economy of computer memory.

In this work an analysis of theses methods is made, and attention to the above mentioned advantages are given.

A list of the most common types of matrices in the geodetic science field as well as a list of the most appropriate methods to invert special type of matrices are found in the last chapter of the present work.

S U M Á R I O

	Página
TÍTULO	ii
AGRADECIMENTOS	iii
SINOPSE	iv
SYNOPSIS	v
SUMÁRIO	vi

C A P I T U L O P R I M E I R O

INTRODUÇÃO	01
------------------	----

C A P I T U L O S E G U N D O

MÉTODOS PARA INVERSÃO DE MATRIZES

2.1 - Método das transformações elementares	03
2.2 - Método de margeamento	07
2.3 - Método de reforço	13
2.4 - Método de eliminação por substituição	16
2.5 - "SUBROUTINE VERSOL"	23
2.6 - Método dos gradientes conjugados	28

C A P I T U L O T E R C E I R O

Página

MATRIZES DE TIPOS ESPECIAIS

3.1 - Matriz simétrica	30
3.2 - Matriz de blocos diagonais	31
3.3 - Matriz bandada	33
3.4 - Matriz bandada-margeada	36
3.5 - Matriz com submatriz diagonal singular.....	37
3.6 - Matriz singular	38

C A P I T U L O Q U A R T O

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1 - Conclusões	43
4.2 - Recomendações	44

A P E N D I C E

PROGRAMAS (FORTRAN) PARA INVERSÃO DE MATRIZES	46
NOTAS DE REFERÊNCIAS	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

C A P I T U L O P R I M E I R O

I N T R O D U Ç Ã O

A solução de certos sistemas de equações pode ser obtida com o emprego da matriz inversa. Atualmente, porém, existem muitos métodos que possibilitam resolver um sistema de equações sem o emprego da matriz inversa, e até mesmo de maneira mais dinâmica.

Não é o que ocorre, no entanto, quando se quer fazer um estudo estatístico do problema. Até o momento, os métodos pelos quais é realizado este estudo, usam a matriz variância-covariância, que é obtida por intermédio da inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas nas equações normais.

A inversão de uma matriz pode ser um problema relativamente simples se a matriz é de baixa ordem. Por outro lado, se a matriz é de ordem elevada, o que geralmente ocorre nos problemas de ajustamento de Geodésia e Fotogrametria, a operação poderá ultrapassar a capacidade de memória dos computadores disponíveis, tornando-se, assim, impraticável.

Alguns métodos possibilitam minimizar o uso de memória do computador no cálculo da matriz inversa; por esta razão, a importância de tais métodos aumenta com a ordem da matriz.

No caso de matrizes simétricas e definidas positivas, como é o caso das matrizes dos coeficientes das equações normais que se obtém em ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados, existem métodos que possibilitem operar apenas com uma matriz triangular, o que representa duplo ganho, isto é, de tempo e de memória do computador. Como exemplo, cite-se o método dos gradiêntes conjugados e "SUBROUTINE VERSOL".

O presente trabalho apresenta um estudo sobre diversos métodos para a inversão de matrizes, bem como suas principais vantagens e desvantagens.

C A P I T U L O S E G U N D OMÉTODOS PARA INVERSÃO DE MATRIZES2.1 - Método das transformações elementares

O produto de uma matriz por sua inversa é a matriz identidade, isto é, se B é a matriz inversa de A , então:

$$AB = BA = I, \quad (2.1-1)$$

onde A e B são matrizes quadradas e I é a matriz identidade; todas de ordem n .

A característica de uma matriz não se altera quando: $| 1 |$

1. se multiplica cada elemento de uma linha (ou coluna) por um valor constante diferente de zero;
2. se troca entre si duas linhas (ou colunas);
3. se adiciona os elementos de uma linha (ou coluna) multiplicados por um escalar (não-nulo) aos correspondentes elementos de outra linha (ou coluna).

Combinando as propriedades acima, pode-se calcular a matriz inversa por meio de transformações elementares na matriz dada. Este método pressupõe a existência de uma matriz de

transformação T_1 , tal que, pré-multiplicando a matriz dada pela matriz T_1 , a primeira coluna do resultado, R_1 , será igual à primeira coluna da matriz identidade. O produto da matriz R_1 por uma segunda matriz de transformação T_2 , apresentará, no resultado R_2 , as duas primeiras colunas iguais às duas primeiras colunas da matriz identidade. Prossegue-se assim e, ao final, o produto da matriz R_{n-1} pela matriz de transformação T_n dará como resultado uma matriz R_n igual a matriz identidade de ordem n .

Assim, tem-se:

$$T_n \dots T_2 T_1 A = I. \quad (2.1-2)$$

Comparando a (2.1-2) com a (2.1-1), vê-se que:

$$B = T_n \dots T_2 T_1,$$

ou seja,

$$A^{-1} = B = T_n \dots T_2 T_1. \quad (2.1-3)$$

Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.1-4)$$

cuja inversa se quer determinar.

A matriz T_1 pode ser calculada por meio das operações seguintes:

a. Começando pela primeira linha ($i=1$), dividem-se todos os elementos dessa linha da matriz A e também os da matriz identidade pelo elemento a_{11} da matriz A. O elemento a_{11} é, então, denominado pivô.

b. Subtrai-se, de cada elemento das demais linhas, o produto $a_{ki}a_{1j}$ para a matriz A e o produto $a_{ki}a_{1j}$ para a matriz identidade, com $1 \leq i, j, k \leq n$, porém, $k \neq i$, onde a_{ij} é o elemento de ordem ij da matriz identidade.

Estas operações transformam a primeira coluna da matriz A na primeira coluna da matriz identidade.

Logo,

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} \frac{1}{a_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} \frac{1}{a_{11}} & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1-5)$$

e o produto

$$T_1 A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} - \frac{1}{a_{11}} a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} - \frac{1}{a_{11}} a_{1n} \\ 0 & a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} - \frac{a_{n1}}{a_{11}} a_{12} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}} a_{1n} \end{bmatrix} \quad (2.1-6)$$

Usando novos símbolos para o produto $T_1 A$, vem:

$$B = T_1 A = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.1-7)$$

Tomando agora o elemento b_{22} como pivô e aplicando a regra acima, obtém-se a matriz de transformação T_2 :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \frac{1}{b_{22}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -b_{n2} \frac{1}{b_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1-8)$$

cujo produto com a matriz $B = T_1 A$ dā como resultado uma matriz em que a primeira e segunda colunas sāo iguais à primeira e segunda colunas da matriz identidade, ou seja,

$$D = T_2 B = T_2 T_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.1-9)$$

Aplicando n -vezes o processo, o resultado sérá:

$$T_n \dots T_2 T_1 A = I, \quad (2.1-10)$$

equação esta que é a própria (2.1-2) já mencionada.

Na prática, o processo acima pode ser simplificado mediante aplicação à matriz identidade, das mesmas transformações que sāo aplicadas à matriz A . Quando a matriz A tiver se transformado na matriz identidade, então a matriz identidade tērā se transformado na matriz inversa.

Ver programa 01, à página 46.

2.2 - Método de margeamento

Considere-se uma matriz A , particionada conforme o modelo a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1} & U_n \\ V_n & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.2-1)$$

onde:

A_{n-1} representa a matriz A com exceção da última linha e última coluna;

V_n representa a última linha, exceto o elemento a_{nn} ; e

U_n representa a última coluna, exceto o elemento a_{nn} .

Considere-se, também, a inversa da matriz A partionada de modo análogo:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{n-1} & q_n \\ r_n & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}. \quad (2.2-2)$$

Aqui, como antes, B_{n-1} representa uma matriz quadrada, de ordem $n-1$; r_n e q_n , vetores linha e coluna, respectivamente, de ordem $n-1$; e $\frac{1}{\alpha n}$, um escalar.

Efetuando o produto entre as duas matrizes, obtém-se, por definição, a matriz identidade:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \left[\begin{array}{cccc} A_{n-1} & U_n & B_{n-1} & q_n \\ V_n & a_{nn} & r_n & \frac{1}{\alpha n} \end{array} \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} A_{n-1} B_{n-1} + U_n r_n & A_{n-1} q_n + U_n \frac{1}{\alpha n} \\ V_n B_{n-1} + a_{nn} r_n & V_n q_n + a_{nn} \frac{1}{\alpha n} \end{array} \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]. \tag{2.2-3}
 \end{aligned}$$

Da (2.2-3) segue-se que:

$$A_{n-1} B_{n-1} + U_n r_n = I; \tag{2.2-4}$$

$$A_{n-1} q_n + U_n \frac{1}{\alpha n} = 0; \tag{2.2-5}$$

$$V_n B_{n-1} + a_{nn} r_n = 0 \quad \text{e} \tag{2.2-6}$$

$$V_n q_n + a_{nn} \frac{1}{\alpha n} = 1 \tag{2.2-7}$$

Da (2.2-5), obtém-se:

$$A_{n-1} q_n = - U_n \frac{1}{\alpha_n} .$$

Pré-multiplicando ambos os termos da equação acima por A_{n-1}^{-1} , vem,

$$A_{n-1}^{-1} A_{n-1} q_n = - A_{n-1}^{-1} U_n \frac{1}{\alpha_n} \quad \therefore$$

$$q_n = - A_{n-1}^{-1} U_n \frac{1}{\alpha_n} . \quad (2.2-8)$$

Substituindo q_n , dado pela (2.2-8), na (2.2-7), vem:

$$v_n (-A_{n-1}^{-1} U_n \frac{1}{\alpha_n}) + a_{nn} \frac{1}{\alpha_n} = 1 \quad \therefore$$

$$- v_n A_{n-1}^{-1} U_n + a_{nn} = \alpha_n \quad \therefore$$

$$\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} U_n . \quad (2.2-9)$$

Da (2.2-4), obtém-se:

$$A_{n-1} B_{n-1} = I - U_n r_n . \quad (2.2-10)$$

Pré-multiplicando a (2.2-10) por A_{n-1}^{-1} , vem:

$$A_{n-1}^{-1} A_{n-1} B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} (I - U_n r_n) \quad \therefore$$

$$B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1} U_n r_n . \quad (2.2-11)$$

Substituindo B_{n-1} , dada pela (2.2-11) na (2.2-6), vem:

$$v_n B_{n-1} + a_{nn} r_n = v_n (A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1} U_n r_n) + a_{nn} r_n = 0 \quad \therefore$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} - v_n A_{n-1}^{-1} U_n r_n + a_{nn} r_n = 0.$$

Substituindo, nesta, o valor de $v_n A_{n-1}^{-1} U_n$ dado pela (2.2-9), vem:

$$v_n A_{n-1}^{-1} - (a_{nn} - \alpha_n) r_n + a_{nn} r_n = 0 \quad \therefore$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} - a_{nn} r_n + \alpha_n r_n + a_{nn} r_n = 0 \quad \therefore$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \alpha_n r_n = 0 \quad \therefore$$

$$r_n = -\frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} \quad (2.2-12)$$

Introduzindo r_n dado pela (2.2-12) na (2.2-11), vem:

$$B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} U_n v_n A_{n-1}^{-1} \frac{1}{\alpha_n} \quad (2.2-13)$$

Finalmente, com base nas equações (2.2-13), (2.2-8) e (2.2-12), pode-se escrever a (2.2-2) como segue:

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{A_{n-1}^{-1} U_n v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & -\frac{A_{n-1}^{-1} U_n}{\alpha_n} \\ -\frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}, \quad (2.2-14)$$

Considere-se uma submatriz de ordem 1, da matriz da
da A , como segue:

$$A_1 = a_{11},$$

para a qual, tem-se:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{a_{11}}.$$

Assim, a matriz de 2a. ordem margeada será:

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2-15)$$

e a matriz de 3a. ordem margeada será, por sua vez,

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_2^{-1} & a_{13} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2-16)$$

Logo, para determinar-se a inversa de uma matriz de ordem n , basta aplicar n -vezes a (2.2-14), onde cada matriz provém do margeamento prévio da inversa da submatriz de ordem imediatamente inferior.

Vide programa 02, à página 47.

2.3 - Método de reforço

Seja B uma matriz não-singular, cuja inversa é conhecida; u e v , vetores coluna e linha, respectivamente. Nestas condições, a matriz A , cuja inversa quer-se determinar, pode ser decomposta em,

$$A = B + uv \quad (2.3-1)$$

Mostra-se que a inversa de A , pode ser determinada pela relação seguinte: [2]

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{y} B^{-1} u v B^{-1}, \quad (2.3-2)$$

onde

$$y = 1 + v B^{-1} u. \quad (2.3-3)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da (2.3-2) por A , vem, atendida a (2.3-1):

$$A A^{-1} = (B + uv)(B^{-1} - \frac{1}{y} B^{-1} u v B^{-1}) \quad \therefore$$

$$I = BB^{-1} - \frac{1}{y} BB^{-1}uvB^{-1} + uvB^{-1} - \frac{1}{y} uvB^{-1}uvB^{-1} \quad \dots$$

$$I = I - \frac{1}{y} uvB^{-1} + uvB^{-1} - \frac{1}{y} u(vB^{-1}u) vB^{-1} \quad \dots \quad (2.3-4)$$

Introduzindo nesta, a expressão de y , dada pela (2.3-3), obtém-se:

$$I = I - \frac{1}{y} uvB^{-1} + uvB^{-1} - \frac{1}{y} u(y-1) vB^{-1} \quad \dots$$

$$I = I - \frac{1}{y} uvB^{-1} + uvB^{-1} - uvB^{-1} + \frac{1}{y} uvB^{-1}$$

e, reduzindo os termos semelhantes, resulta:

$$I = I \quad (2.3-5)$$

Assim, a (2.3-2) é válida e pode ser empregada no cálculo da matriz inversa.

Considere-se o caso particular em que a matriz A pode ser obtida da matriz B pela troca conveniente de uma linha, isto é:

$$A = B + V \quad (2.3-6)$$

onde V é uma matriz, cujos elementos são todos nulos, exceto para os elementos da linha que está sendo trocada. Usando o índice k podemos escrever,

$$V = uv = I_k v$$

onde v é a linha não-nula da matriz V e I_k é um vetor-coluna cujo k -ésimo elemento é 1, e os demais são nulos.

Assim,

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{1+v(B^{-1}I_k)} (B^{-1}I_k)(vB^{-1}) \quad \therefore$$

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{1+v\beta_k} \cdot \beta_k(vB^{-1}) \quad (2.3-7)$$

onde β_k é a k -ésima coluna da matriz B^{-1} . Denotando a j -ésima coluna da matriz A^{-1} por α_j , obtém-se

$$\alpha_j = \beta_j - \frac{1}{1+v\beta_k} \beta_k \cdot (v\beta_j) \quad \therefore$$

$$\alpha_j = \beta_j - \frac{v\beta_j}{1+v\beta_k} \beta_k \quad (2.3-8)$$

A matriz A^{-1} é obtida, aplicando-se n vezes o processo acima. A passagem do j -ésimo pode ser efetuado pela fórmula

$$\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k-1)} - \frac{v_k \alpha_j^{(k-1)}}{1+v_k \alpha_k^{(k-1)}} \alpha_k^{(k-1)} \quad (2.3-9)$$

onde o índice k (ou j) refere-se à coluna que se está calculando e o super-índice refere-se à ordem de sequência.

O programa 03, à página 48, refere-se ao cálculo da inversa de uma matriz pelo método de reforço.

2.4 - Método de eliminação por substituição

O método de eliminação por substituição, para resolver um sistema de equações, tão usual em Geodésia da época pré-computador, com o chamado algoritmo de Gauss-Doolittle, [4] é extremamente prático pelo fato de permitir a cada passo a verificação dos cálculos efetuados.

Tal método pode ser usado para inverter uma matriz quadrada não-singular, mediante algumas adaptações que serão consideradas adiante, neste tópico.

Considere-se o sistema de equações abaixo, com n -equações e n -incógnitas, sobre o qual será aplicado o método citado acima:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = f_2$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = f_n . \quad (2.4-1)$$

Desde que a_{11} não seja nulo, pode-se dividir a pri-

meira equação por esse elemento, que será chamado pivô e obtém-se a equação

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{f_1}{a_{11}}$$

ou, ainda,

$$x_1 + b_{12} x_2 + \dots + b_{1n} x_n = g_1 \quad (2.4-2)$$

onde,

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \text{ com } j > 1,$$

e

$$g_1 = \frac{f_1}{a_{11}}. \quad (2.4-3)$$

Somando-se à 2.^a, 3.^a, ..., n.^a equações (2.4-1) os produtos da (2.4-2), respectivamente por -a₂₁, -a₃₁, ..., -a_{n1}, obtém-se um sistema de equações, no qual não aparece a variável x₁, denominado primeiras reduzidas [5], a saber:

$$a_{22.1} x_2 + \dots + a_{2n.1} x_n = f_{2.1},$$

.....

$$e \quad a_{n2.1} x_2 + \dots + a_{nn.1} x_n = f_{n.1}, \quad (2.4-4)$$

onde

$$a_{ij.1} = a_{ij} - a_{i1} b_{1j}$$

$$e \quad f_{i1} = f_i - a_{i1} g_1, \quad \text{com } i, j \geq 2. \quad (2.4-5)$$

Dividindo-se a primeira equação do sistema assim obtido por $a_{22.1}$, vem

$$x_2 + b_{23} x_3 + \dots + b_{2n} x_n = g_2, \quad (2.4-6)$$

onde

$$b_{2j} = \frac{a_{2j.1}}{a_{22.1}}$$

e

$$g_2 = \frac{f_{2.1}}{a_{22.1}} . \quad (2.4-7)$$

Eliminando x_2 a partir da terceira equação, pelo mesmo artifício usado há pouco, para se obter a (2.4-4), obtém-se o novo sistema de equações transformadas ou terceiras reduzidas, a saber:

$$a_{33.2} x_3 + \dots + a_{3n.2} x_n = f_{3.2},$$

.....

$$e \quad a_{n3.2} x_3 + \dots + a_{nn.2} x_n = f_{n.2}, \quad (2.4-8)$$

nas quais

$$a_{ij.2} = a_{ij.1} - a_{i2.1} b_{2.j}$$

$$e \quad f_{i.2} = f_{i.1} - a_{i2.1} g_2, \quad \text{com } i, j \leq 3. \quad (2.4-9)$$

Para um sistema de n equações a n incógnitas, obtém-se depois de aplicar n vezes o processo acima, a equação:

$$x_n = g_n \quad (2.4-10)$$

Combinando todas as primeiras equações de cada passo, chega-se a um sistema, equivalente ao sistema original, e cuja matriz dos coeficientes das incógnitas é triangular. Tal sistema é o seguinte:

$$x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + \dots + b_{1n} x_n = g_1$$

$$x_2 + b_{23} x_3 + \dots + b_{2n} x_n = g_2$$

• • • • • • • • • • • • • •

$$x_n = g_n. \quad (2.4-11)$$

Admite-se que todos os elementos pivôs não sejam nulos.

Os elementos incógnitos são calculados, na seqüência de x_n para x_1 , por meio da relação seguinte:

$$x_m = g_m - b_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - b_{mn}x_n. \quad (2.4-12)$$

Na (2.4-9), viu-se que

$$a_{ij.k} = a_{ij.k-1} - a_{ik.k-1} b_{kj}$$

ou, ainda,

$$a_{ij.k} = a_{ij.k-1} - c_{ij} b_{kj}$$

$$= a_{i,j,k-2} - c_{i,k,k-1} b_{k-1,j} - c_{i,k} b_{kj}$$

$$= a_{ij} - c_{i1} b_{1j} - c_{i2} b_{2j} - \dots - c_{ik} b_{kj} \quad \text{ou}$$

$$a_{ij.k} = \sum_{\ell=1}^k c_{i\ell} b_{\ell k}. \quad (2.4-13)$$

Assim, todo elemento $a_{ij.k}$ pode ser expresso por meio de somatório, em função de c_{ij} e b_{ij} .

Em particular para os elementos c_{ij} , com $i \geq j$, e b_{ij} , com $i < j$, são válidas as relações seguintes:

$$c_{ij} = a_{ij.j-1} = a_{ij} - \sum_{\ell=1}^{j-1} c_{i\ell} b_{\ell j}, \quad \text{com } i \geq j, \quad (2.4-14A)$$

$$\text{e} \quad b_{ij} = \frac{a_{ij.i-1}}{a_{ii.i-1}} = \frac{a_{ij} - \sum_{\ell=1}^{i-1} c_{i\ell} b_{\ell j}}{c_{ii}}, \quad \text{com } i < j. \quad (2.4-14B)$$

Logo, a matriz A pode ser transformada em um produto de duas matrizes triangulares, isto é:

$$A = CB,$$

sendo os elementos da matriz triangular C definidos pela relação (2.4-14A). Esta propriedade será usada para inverter a matriz A.

Denotando a matriz inversa de A por D, então

$$D = (CB)^{-1} = B^{-1}C^{-1}. \quad |6| \quad (2.4-15)$$

Os elementos d_{ij} da matriz inversa podem ser determinados mesmo sem inverter as matrizes B e C .

Pós-multiplicando a (2.4-15) por C , obtém-se

$$DC = B^{-1}, \quad (2.4-16)$$

onde B^{-1} [7] é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais $n(n-1)/2$ elementos iguais a 0, isto é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ X & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ X & X & X & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4-17)$$

Por outro lado, pré-multiplicando a (2.4-15) por B , obtém-se:

$$BD = C^{-1}. \quad (2.4-18)$$

A matriz C^{-1} é triangular inferior e $n(n-1)/2$ de seus elementos serão nulos [8]:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ X & 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ X & X \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4-19)$$

Com base nas (2.4-16), (2.4-17), (2.4-18) e (2.4-19), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 & i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 c_{11}d_{i1} + c_{21}d_{i2} + \dots + c_{n1}d_{in} &= 1 \quad 0 \quad 0 \dots 0 \\
 c_{22}d_{i2} + \dots + c_{n2}d_{in} &= 1 \quad 0 \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots &= \dots \dots \dots \\
 c_{nn}d_{in} &= 1 \quad (2.4-20)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & j = 2, 3, \dots, n. \\
 d_{1j} + b_{12}d_{2j} + b_{13}d_{3j} + \dots + b_{1n}d_{nj} &= 0 \quad 0 \dots 0 \\
 d_{2j} + b_{23}d_{3j} + \dots + b_{2n}d_{nj} &= 0 \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots &= \dots \dots \dots \\
 d_{n-1j} + b_{n-1n}d_{nj} &= 0. \quad (2.4-21)
 \end{aligned}$$

A retro-solução de modo alternado das (2.4-20) para $i = n, n-1, \dots, 1$, de (2.4-21), para $j = n, n-1, \dots, 2$, necessará os elementos d_{ij} , respectivamente, para $i \geq j$ e $i < j$.

Com base nas (2.4-20) e (2.4-21), pode-se formar o algoritmo:

$$d_{nn} = \frac{1}{c_{nn}} ;$$

$$d_{ij} = - \frac{\sum_{\ell=j+1}^n c_{\ell j} d_{i\ell}}{c_{jj}}, \text{ para } i > j;$$

$$d_{ij} = - \sum_{\ell=j+1}^n b_{i\ell} d_{\ell j}, \text{ para } i < j; \quad \text{e}$$

$$d_{ij} = \frac{1 - \sum_{\ell=j+1}^n c_{\ell j} d_{i\ell}}{c_{jj}}, \text{ para } i = j < n.$$

Vide programa 04, à página 49.

2.5 - "SUBROUTINE VERSOL"

A inversa de uma matriz pode ser determinada pela relação seguinte

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A. \quad |9|$$

Assim, se a matriz $n \times n = [a_{ij}]$, tem dimensões 1×1 , então A é um escalar, e sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{A} = \frac{1}{a_{11}} \quad (2.5-1)$$

Se A tem dimensões 2×2 , então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.5-2)$$

$$|A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12};$$

logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.5-3)$$

Considere-se a matriz A , da (2.5-1), aumentada conforme o modelo seguinte:

$$A^I = \begin{bmatrix} A & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5-4)$$

Dividindo por a_{11} a primeira linha da matriz assim obtida, resulta:

$$A^{II} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_{11}} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5-5)$$

A matriz considerada inicialmente é de ordem 1×1 . Aplicando, então, a regra prática de Chio, |10| para abaixamento da ordem de um determinante, desenvolvido segundo a primeira linha e primeira coluna, obtém-se:

$$A^{III} = 0 - (-1)^{1+1}(-1)\left(\frac{1}{a_{11}}\right) = \frac{1}{a_{11}}. \quad (2.5-6)$$

Comparando as (2.5-1) e (2.5-6), vê-se que:

$$A^{III} = A^{-1}. \quad (2.5-7)$$

Considere-se também, a matriz da (2.5-2), quadrada e de ordem 2, que será aumentada duas vezes, sucessivamente, conforme o modelo (2.5-4), e os respectivos determinantes serão baixados de uma ordem m , pela regra prática de Chiō. Assim:

$$A^I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{II} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{III} = \begin{bmatrix} a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & - a_{21}\frac{1}{a_{11}} \\ 0 - (-1)\frac{a_{12}}{a_{11}} & - (-1)\frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}.$$

Usando novos símbolos para os elementos da matriz A^{III} e aplicando pela segunda vez o processo acima, vem

$$A^{IV} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 1 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^V = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} & \frac{1}{c_{11}} \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{VI} = \begin{bmatrix} c_{22} - c_{21} \frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 - c_{21} \frac{1}{c_{11}} \\ 0 - (-1) \frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 - (-1) \frac{1}{c_{11}} \end{bmatrix} \quad (2.5-9)$$

Comparando entre si os elementos a_{12} das (2.5-3) e (2.5-9), respectivamente, vem

$$\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = -c_{21} \frac{1}{c_{11}}$$

$$= -\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{1}{a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}}$$

$$= -\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{1}{\frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}} \quad \dots$$

$$\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad . \quad (2.5-10)$$

Procedendo-se de modo idêntico com os demais elementos das duas matrizes, verifica-se serem também iguais entre si, o que mostra serem iguais entre si as duas matrizes das (2.5-3) e (2.5-9), sendo ambas a inversa da matriz A, que de-

monstra-se ser única. |11|

Logo, para se calcular a inversa de uma matriz quadrada, não-singular de ordem n , é suficiente aplicar n -vezes o processo acima descrito.

O presente processo apresenta uma vantagem insofismável, sobre os demais, pelo fato de que os elementos calculados em cada uma das n -vezes poderem ocupar os mesmos espaços dos elementos anteriores.

Assim, são necessárias $n + n^2$ posições de memória de computador para inverter uma matriz quadrada de ordem n , não simétrica, e $n + n^2/2$ posições de memória, se a matriz for simétrica, enquanto os demais processos, com exceção do método dos gradientes conjugados, exigem $2n^2$ posições de memória no computador para realizar a mesma operação.

Alguém, cuja identidade infelizmente desconhecemos, reconhecendo sua vantagem, programou o método, com o nome de "SUBROUTINE VERSOL", cujo teor é o seguinte:

SUBROUTINE VERSOL (A, B, I)

IMPLICIT REAL (A-H, 0-3)

DIMENSION A(I,I); B(I)

IF (I.EQ.1) GO TO 10

IM = I - 1

DO 5 K = 1, I

DO 2 J = 1, IM

```

2      B(J) = A(1, J+1)/A(1,1)
      B(I) = 1/A(1,1)
      DO 4 L = 1, IM
      DO 3 J = 1, IM
3      A(L,J) = A(L+1,J+1) - A(L+1,1) * B(J)
4      A(L,I) = - A(L+1,1) * B(I)
      DO 5 J = 1, I
5      A(I,J) = B(J)
      RETURN
10     A(1,1) = 1/A(1,1)
      RETURN
      END.

```

Ver programa 05 à página 50.

2.6 - Método dos gradientes conjugados

Segundo [12], a inversa de uma matriz simétrica e positiva definida pode ser determinada pelo Método dos Gradientes Conjugados, empregando-se o algoritmo seguinte:

$$1. \quad N q_r - e_r = 0;$$

$$2. \quad q_{r(0)}^{(0)} = 0;$$

$$3. \quad R^{(0)} = - e_r;$$

Passos iterativos $k = 0, 1, 2, \dots$

$$4. \quad E_k = \frac{R^{(k)T} N H^{(k)}}{H^{(k)T} N H^{(k)}}, \quad k \geq 1;$$

$$5. H^{(k+1)} = -R^{(k)} + E_k H^{(k)}, \quad k \geq 1;$$

$$6. \lambda_{k+1} = -\frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{H^{(k+1)T} N H^{(k+1)}};$$

$$7. q_r^{(k+1)} = q_r^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)};$$

$$8. R^{(k+1)} = R^{(k)} + \lambda_{k+1} N H^{(k+1)};$$

9. TESTE DE CONVERGÊNCIA

$$\left| q_r^{(k+1)} - q_r^{(k)} \right| < \epsilon$$

onde,

N representa a matriz a ser invertida,

r a ordem do vetor coluna,

k o número de iterações,

e_r o vetor coluna de ordem r da matriz identidade,

q_r o vetor coluna de ordem r (inicialmente arbitrário) da matriz inversa,

R um vetor coluna,

E_k um vetor-coluna na iteração de ordem k ,

H^{k+1} um vetor-coluna dado pela iteração de ordem $k+1$,

λ_{k+1} um escalar obtido na iteração de ordem $k+1$.

O correspondente programa encontra-se à página 51.

C A P I T U L O T E R C E I R O

MATRIZES DE TIPOS ESPECIAIS

No campo das Ciências Geodésicas ocorrem, com muita freqüência, matrizes com características especiais. Tais matrizes podem, com grande vantagem, ser invertidas mediante uso de métodos e programas específicos.

Nos tópicos que se seguem, serão analisadas algumas dessas matrizes, bem como os métodos mais adequados para cada caso. Os programas respectivos poderão ser encontrados no apêndice do presente trabalho.

3.1 - Matriz simétrica

Considere-se a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de dimensões $n \times n$. Diz-se que A é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Logo, o número de elementos repetidos em uma matriz simétrica é da ordem de $n(n-1)/2$. Portanto, ao se inverter matrizes simétricas, pode-se considerá-las como se fossem matrizes triangulares, e trabalhar apenas com a parte não-nula destas. Assim, vê-se, de imediato, a grande vantagem desse tipo de tratamento para essas matrizes, quando se objetiva economizar tempo e memória de computador.

A matriz dos coeficientes das incógnitas das equações normais é sempre uma matriz simétrica e positiva definida, razão porque este tipo de tratamento é de grande valia nes-

te campo.

A economia em tempo de computador é da ordem de quase 50%, uma vez que é suficiente inverter uma matriz triangular ao invés de uma matriz quadrada. Esta economia, porém, dependerá do método utilizado no processo.

Excetuando-se a "SUBROUTINE VERSOL" e o método dos gradientes conjugados, os demais métodos analisados no presente trabalho, requerem pelo menos $2n^2$ entradas para a determinação da inversa de uma matriz de ordem n , ao passo que a "subroutine" versol requer apenas $2n + n(n+1)/2$ entradas para a realização do mesmo cálculo.

Tome-se como exemplo, uma matriz quadrada de dimensões 100×100 . A maioria dos métodos requerem 20.000 posições de memória para invertê-la, ao passo que a "SUBROUTINE VERSOL" pode realizar a mesma operação utilizando apenas 5.250 posições de memória do computador. O exemplo supra dá uma ideia da versatilidade do método.

O correspondente programa 08 encontra-se no apêndice à página 54.

3.2 - Matriz de blocos diagonais

A matriz de blocos diagonais é uma matriz em que, quando particionada de maneira conveniente, só não serão nulas as submatrizes que possuem elementos na diagonal principal.

Este tipo de matriz ocorre com certa freqüência no campo da Geodésia e Fotogrametria.

A inversa de uma matriz deste tipo pode ser calculada, invertendo-se apenas as submatrizes não nulas separadamente, isto é, uma a uma.

Seja A , uma matriz de blocos diagonais e Q , a sua inversa, como segue:

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

onde, B , C , ..., K_{11} , K_{12} , ..., K_{nn} , são blocos ou submatrizes.

Pela propriedade do produto de uma matriz por sua inversa, pode-se escrever:

$$AQ = I = \begin{bmatrix} BK_{11} & BK_{12} & \dots & BK_{1n} \\ CK_{21} & CK_{22} & \dots & CK_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ NK_{n1} & NK_{n2} & \dots & NK_{nn} \end{bmatrix},$$

assim,

$$BK_{11} = CK_{22} = \dots = NK_{nn} = 1,$$

$$BK_{12} = BK_{13} = \dots = BK_{1n} = 0,$$

.....

$$\text{e } NK_{n1} = NK_{n2} = \dots = NK_{nn-1} = 0.$$

Os cálculos acima mostram que os $k_{ij} = 0$, para $i \neq j$, satisfazem as equações supra, com exceção da primeira, pois que B , C , ..., N , são, por definição, matrizes não nulas. Logo, é suficiente calcular as matrizes k_{ii} , para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ver programa 09 à página 55.

3.3 - Matriz bandada

A matriz bandada é constituída de zeros, com exceção da diagonal principal e uma ou mais filas diagonais junto a esta. A largura da banda é definida pelo número máximo de elementos não nulos de uma linha.

Considere-se a matriz

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccccc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{nn} \end{array} \right],$$

de banda igual a três e dimensões $n \times n$, igualmente, a sua inversa.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} .$$

Considere-se o particionamento seguinte, para a ma
triz A:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} ,$$

onde B é uma submatriz 2×2 ; C, uma $2 \times (n-2)$; D, uma $(n-2) \times 2$; e E, uma $(n-2) \times (n-2)$.

Particionando, de maneira idêntica, a matriz Q, ob
tém-se

$$Q = \begin{bmatrix} R & S \\ T & L \end{bmatrix} .$$

Efetuando o produto AQ, vem

$$AQ = \begin{bmatrix} BR + CT & BS + CL \\ DR + ET & DS + EL \end{bmatrix} = I ,$$

com

$$BS + CL = 0$$

e

$$DR + ET = 0$$

ou

$$BS = - CL$$

e

$$ET = - DR.$$

Examinando as expressões acima pode-se ver que a matriz inversa Q , não possui zeros ou submatrizes nulas localizáveis a priori.

Porém, um exame da expressão geradora da nova matriz, em cada uma das n -aplicações da "SUBROUTINE VERSOL", mostra que este método permite que se trabalhe apenas com os elementos da banda na primeira aplicação. À medida que as demais aplicações se vão processando, outros elementos não nulos vão surgindo a partir do extremo superior direito e do extremo inferior esquerdo. Assim, uma adaptação do método, que atenda a esse particular, poderá economizar tempo de computador, que será tanto maior quanto menor for a largura da banda, em relação às dimensões da matriz, no processo de inversão da mesma.

Ilustrando isto, tome-se como exemplo uma matriz de dimensões 100×100 , cuja banda tem largura igual a cinco. Ao invertê-la pelo processo acima descrito, a economia de tempo de computador é da ordem de 63%.

Isto porque na primeira aplicação da "SUBROUTINE VERSOL" adaptada, é suficiente calcular cerca de 502 elementos; na segunda, cerca de 510 elementos; e, assim, sucessivamente, com cerca de 370.330 elementos calculados, ao final das 100 aplicações contra 1.000.000 de elementos calculados pelo mesmo processo, sem adaptação.

Vide programa 11 à página 58.

3.4 - Matriz bandada-margeada

A matriz bandada-margeada possui além da banda (parágrafo anterior), uma ou mais colunas no extremo direito e uma ou mais linhas no extremo inferior, cujos elementos não são nulos.

Este tipo de matriz também ocorre com certa freqüência em problemas geodésicos e fotogramétricos e sua inversa, como no caso anterior, não possui elementos especificamente nulos.

Como na matriz bandada, se ao invertê-la usa-se a "SUBROUTINE VERSOL", os elementos não nulos vão surgindo a partir das margens direita e inferior.

Assim, o uso da "SUBROUTINE VERSOL", com algumas adaptações, para inverter matrizes deste tipo, proporciona economia de tempo de computador.

Ver programa 12 à página 60.

Uma matriz de banda igual a três e margem igual a p , é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n-p} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & a_{2n-p} \dots a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & a_{3n-p} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-p1} & a_{n-p2} & \dots & & & & a_{n-pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3.5 - Matriz com submatriz diagonal singular

Se a matriz a ser invertida possui uma submatriz diagonal, segundo a ordem crescente da diagonal principal, singular, o método da "SUBROUTINE VERSOL" produz resultados absurdos, visto que o elemento pivô a_{11} torna-se nulo na iteração correspondente à ordem da matriz singular. Um tal problema pode ser contornado de duas maneiras diferentes, a saber:

- a. Tomar o elemento a_{nn} como pivô, calcular os elementos da matriz inversa em função deste elemento, na ordem de a_{nn} para a_{11} .

Ver programa 14, à página 65,

b. Trocar entre si duas linhas, tais que uma delas possua elementos pertencentes à submatriz singular e a outra não e cujos elementos não sejam todos iguais entre si.

Ver programa 15, à página 66.

3.6 - Matriz singular

O ajustamento de observações é um assunto de elevada importância no campo da Geodésia e Fotogrametria. Dependendo dos parâmetros fixados desde o princípio, o ajustamento pode conduzir a uma matriz singular. Ocorre, porém, que a matriz singular não possui inversa na álgebra de Cayley.

Dado um sistema de equações do tipo

$$m^A n^n X_1 = n^L_1 , \quad (3.6-1)$$

a sua solução pode ser obtida com as operações seguintes:

a. Pré-multiplicando ambos os membros da (4.6-1) por A^T (matriz transposta de A), isto é,

$$A^T A X = A^T L \quad (3.6-2)$$

b. Pré-multiplicando ambos os membros da (3.6-2) por $(A^T A)^{-1}$, ou seja:

$$(A^T A)^{-1} A^T A X = (A^T A)^{-1} A^T L \therefore$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L. \quad (3.6-3)$$

A (3.6-3) somente é verdadeira no caso em que $A^T A$ não é singular.

Se $A^T A$ é singular, então a solução para a (3.6-3) é obtida por meio da matriz pseudo-inversa.

O estudo das inversas generalizadas é um campo relativamente novo dentro do contexto da Matemática, no qual existem, ainda, alguns pontos que requerem mais pesquisas.

Neste tópico, porém, limitar-se-á ao estudo da pseudo-inversa, de grande interesse no campo de aplicação da Geodésia, sem, no entanto, se deter em certas particularidades teóricas, para não fugir aos objetivos do presente trabalho.

A teoria neste campo é bastante extensa e complexa e, crê-se, justificaria um trabalho específico neste sentido.

Considerese a matriz ${}_m A_n$ e sua característica $C(A)$. [13]

$$\text{Se } C(A) = n, \text{ então } C(A^T A) = n. \quad (3.6-4)$$

Se $(A^T A)^{-1}$ existe e satisfaz à equação

$$(A^T A)^{-1} A^T A = \left[(A^T A)^{-1} A^T \right] A = I, \quad (3.6-5)$$

então a matriz $(A^T A)^{-1} A^T$ é denominada inversa à esquerda da matriz A . |14|

Por outro lado, se

$$C(A) = m, \text{ então } C(AA^T) = m. \quad (3.6-6)$$

Se $(AA^T)^{-1}$ existe e satisfaz à equação

$$AA^T (AA^T)^{-1} = A \quad \left| A^T (AA^T)^{-1} \right| = I. \quad (3.6-7)$$

$A^T (AA^T)^{-1}$ é denominava inversa à direita de A . Estas, no entanto, não são inversas generalizadas.

Dentre os vários tipos de inversas generalizadas, não necessariamente únicas, existe uma que é única e que se denomina pseudo-inversa.

Do ponto de vista geodésico, a única que interessa é a pseudo-inversa, uma vez que pode ser empregada nos problemas de ajustamento.

D E F I N I Ç Õ E S

Seja $m \times n$ uma matriz qualquer e $n \times m$ a sua inversa generalizada, IG , então: |15|

$$A G A = A, \quad (3.6-8)$$

$$G A G = G, \quad (3.6-9)$$

$$(GA)^T = GA \quad (3.6-10)$$

e

$$(A G)^T = A G . \quad (3.6-11)$$

notando-se que:

G satisfazendo à condição:	é chamada:	sendo simbolizada por:
(3.6- 8)	Inversa generalizada	A^G
(3.6- 8) e (3.6- 9)	IG reflexiva	A^r
(3.6- 8), (3.6- 9) e (3.6-10)	IG fraca à esquerda	A^c
(3.6- 8), (3.6- 9) e (3.6-11)	IG fraca à direita	A^d
(3.6- 8), (3.6- 9), (3.6-10) e (3.6-11)	Pseudo-inversa	A^T

QUADRO 1.

A pseudo-inversa de uma matriz quadrada singular , pode ser obtida pela relação seguinte:[16]

$$N^T = \left[N(NN)^G \right]^2 N. \quad (3.6-12)$$

Para se obter $(NN)^G$, procede-se da maneira seguinte:

a. Determina-se a característica $C(NN)$ da matriz produto NN .

b. Eliminam-se k linhas e k colunas da matriz produto NN , onde k representa a singularidade dada por $k=n-C(NN)$

onde n representa as dimensões da matriz quadrada ($N \times N$).

c. Calcula-se a inversa da matriz resultante do item b., acima, usando qualquer dos métodos analisados no presente trabalho.

d. Restituem-se as linhas e colunas eliminadas no item b., acima, substituindo-as por zeros.

As demais operações são efetuadas normalmente, obedecendo às regras do produto matricial.

O programa 13, à página 61, fundamenta o cálculo da pseudo-inversa de uma matriz quadrada singular.

Neste programa, a singularidade da matriz é determinada por meio da proporcionalidade entre as filas.

C A P I T U L O Q U A R T O

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1 - Conclusões

Do que foi visto nos parágrafos anteriores pode-se afirmar que, no processo de inversão de uma matriz de ordem elevada, é muito importante que se escolha um método que se adapte melhor às características da mesma. Tal método poderá proporcionar economia de tempo, ou de memória de computador ou, ainda, de ambas as coisas simultaneamente.

A economia que se pode conseguir é proporcional à ordem da matriz. Assim, a importância da escolha do método aumenta com a ordem da matriz.

No campo da Geodésia, as matrizes dos coeficientes das incógnitas nas equações normais são sempre simétricas, razão porque sempre se pode optar por um método que proporcione dupla vantagem, isto é, economia de tempo e de memória de computador.

A economia de memória pode tornar-se crucial, em determinados casos, nos quais se tem uma matriz de ordem elevada para ser invertida por um computador de pequeno ou médio porte.

Por outro lado, a economia de tempo pode ser de sua importância para um usuário que pague pelo tempo de uso do computador.

Cabe ao programador a decisão de qual método utilizar em seu trabalho, todavia, encontra-se no Quadro 2, uma relação dos tipos de matrizes mais comuns e os programas mais indicados a cada caso específico.

Todos os programas citados estão relacionados no apêndice do presente trabalho.

4.2 - Recomendações

Tipo de matriz	Programa recomendado
Não simétrica	1, 2, 3, 4 ou 5*
Simétrica	6, 7 ou 8*
De blocos diagonais	9
De blocos diagonais simétrica	10
Bandada	11
Bandada-margeada	12
Singular	13
Com submatriz diagonal singular	14 ou 15

* O mais indicado.

QUADRO 2.

Obs.:

- a. Os programas 1, 2, 3 e 4 são gerais, sendo, por tanto, aplicáveis a qualquer tipo de matriz, com

exceção da matriz singular.

- b. Os dados de entrada para os programas 6, 7, 8 e 10 são os elementos da matriz triangular superior, por colunas.
- c. Para os demais programas os dados de entrada são os elementos da matriz dada, por linhas.

A P E N D I C E

```

C      PROGRAMA 01
C
C      INVERSAO DE MATRIZES POR TRANSFORMACOES
C      ELEMENTARES.
C      DIMENSION A(10,10),B(10,10)
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      N=10
C      LEITURA E LISTAGEM DA MATRIZ DADA.
C      READ (2,2)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
2      FORMAT(10G)
C      WRITE(3,26)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
25     FORMAT(10F5.1)
C      FORMACAO DA MATRIZ IDENTIDADE.
C      DO 3 I=1,N
C      DO 3 J=1,N
C      B(I,J)=0
C      DO 4 I=1,N
3      B(I,I)=1
DO 4 I=1,N
4      B(I,I)=1
C      INICIO DAS TRANSFORMACOES.
DO 16 K=1,N
C=A(K,K)
DO 5 I=1,N
A(K,I)=A(K,I)/C
B(K,I)=B(K,I)/C
5      CONTINUE
IF(K-1)6,6,8
6      DO 7 I=2,N
D=A(I,K)
DO 7 J=1,N
B(I,J)=B(I,J)-D*B(K,J)
A(I,J)=A(I,J)-D*A(K,J)
7      CONTINUE
GO TO 16
8      DO 11 I=1,K-1
D=A(I,K)
DO 18 J=1,N
IF(J-K)9,10,10
9      B(I,J)=B(I,J)-D*B(K,J)
GO TO 18
10     A(I,J)=A(I,J)-D*A(K,J)
B(I,J)=B(I,J)-D*B(K,J)
18     CONTINUE
11     CONTINUE
IF(K-N)12,15,15
12     DO 17 I=K+1,N
D=A(I,K)
DO 23 J=1,N
IF(J-K)13,14,14
13     B(I,J)=B(I,J)-D*B(K,J)
GO TO 23
14     A(I,J)=A(I,J)-D*A(K,J)
B(I,J)=B(I,J)-D*B(K,J)
23     CONTINUE
17     CONTINUE
16     CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
15     WRITE(3,19)
19     FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
C      WRITE(3,21)((B(I,J),J=1,N),I=1,N)
21     FORMAT(2(5F12.7,/,))
END

```

```

C      PROGRAMA 02
C
C      INVERSAO DE MATRIZES PELO METODO DE MARGEAMENTO.
C      DIMENSION A(10,10),B(10),C(10).
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      N=10.
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,28)((A(L,J),J=1,N),L=1,N)
28      FORMAT(10G)
        WRITE(3,65)
65      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
        WRITE(3,66)((A(L,J),J=1,N),L=1,N)
66      FORMAT(10F5.1)
        DO 4 I=1,N
        IF(I-1)5,5,6
5          A(I,I)=1/A(I,I)
        GO TO 4
6          I1=I-1
        DO 1 L=1,I1
        B(L)=0
        C(L)=0
        DO 2 J=1,I1
        B(L)=B(L)-A(L,J)*A(J,I)
2          C(L)=C(L)-A(I,J)*A(J,L)
1          CONTINUE
        D=0
        DO 3 L=1,I1
3          D=D+A(I,L)*B(L)
        D=A(I,I)+D
        DO 8 L=1,I1
        DO 8 J=1,I1
8          A(L,J)=A(L,J)+(B(L)*C(J))/D
        DO 9 J=1,I1
        A(J,I)=B(J)/D
9          A(I,J)=C(J)/D
        A(I,I)=1/D
4          CONTINUE
C          SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
        WRITE(3,67)
67      FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
        WRITE(3,60) ((A(L,J),J=1,N),L=1,N)
60      FORMAT(2(5F12.7,/))
        END

```

```

C      PROGRAMA 03
C
C      INVERSAO DE MATRIZ PELO METODO DE REFORCO.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(10,10),B(10,10),R(10),W(10),C(10)
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      N=10
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,1)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
1      FORMAT(10G)
C      WRITE(3,18)
18     FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
C      WRITE(3,19)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
19     FORMAT(10F5.1)
DO 11 I=1,N
C(I)=A(I,I)
DO 11 J=1,N
11     A(I,J)=A(I,J)/C(I)
DO 3 I=1,N
3      A(I,I)=0
C      FORMACAO DA MATRIZ IDENTIDADE.
DO 25 I=1,N
DO 25 J=1,N
25     B(I,J)=0
DO 2 I=1,N
2      B(I,I)=1
C      COMECO DO CICLO ITERATIVO.
DO 5 K=1,N
DO 6 L=1,N
R(L)=0
DO 6 I=1,N
6      R(L)=R(L)+A(K,I)*B(I,L)
DO 7 L=1,N
7      W(L)=R(L)/(1+R(K))
DO 8 I=1,K
CO=B(I,K)
DO 8 J=1,N
8      B(I,J)=B(I,J)-W(J)*CO
CONTINUE
C      AS LINHAS DA MATRIZ DADA FORAM DIVIDIDAS PELOS
C      ELEMENTOS DIAGONAIS, DEPOIS DE ZERADA A DIAGONAL
C      OBTIVE-SE DUAS MATRIZES TRIANGULARES. A CORRECAO
C      E FEITA MULTIPLICANDO-SE AS COLUNAS DA MATRIZ IN-
C      VERSA PELOS MESMOS ELEMENTOS DIAGONAIS.
DO 12 J=1,N
DO 12 I=1,N
12     B(I,J)=B(I,J)/C(J)
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
C      WRITE(3,20)
20     FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
C      WRITE(3,10)((B(I,J),J=1,N),I=1,N)
10     FORMAT(2(5F12.7,/,))
END

```

```

C      PROGRAMA 04
C
C      INVERSAO DE MATRIZES PELO METODO DE ELIMINACAO
C      POR SUBSTITUICAO.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
C      I=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      I=10
C      I=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ (2,2)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
2      FORMAT(10G)
      WRITE(3,65)
65      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
      WRITE(3,66)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
66      FORMAT(10F5.1)
C      CALCULO DA MATRIZ "C".
      DO 3 J=1,I
3      C(J,1)=A(J,1)
      DO 4 J=2,I
4      C(1,J)=A(1,J)/C(1,1)
      DO 5 J=2,I
      DO 5 L=2,I
      IF(L-J)7,8,8
8      C(L,J)=0
      DO 9 K=1,J-1
9      C(L,J)=C(L,J)+C(L,K)*C(K,J)
      C(L,J)=A(L,J)-C(L,J)
      GO TO 5.
7      C(L,J)=0
      DO 10 K=1,L-1
10     C(L,J)=C(L,J)+C(L,K)*C(K,J)
      C(L,J)=(A(L,J)-C(L,J))/C(L,L)
5      CONTINUE
C      CALCULO DA MATRIZ INVERSA OCUPANDO A
C      POSICAO DA MATRIZ DADA.
C      DA MATRIZ DADA.
      DO 11 L=0,I-1
      DO 11 J=L,I-1
      M=I-L
      N=I-J
      IF(I-M)12,12,13
12     IF(I-N)14,14,13
14     A(M,N)=1/C(I,I)
      GO TO 11
13     A(M,N)=0
      DO 15 K=N+1,I
15     A(M,N)=A(M,N)-C(K,N)*A(M,K)
      IF(M-N)17,16,17
16     A(M,N)=(1+A(M,N))/C(N,N)
      GO TO 11
17     A(M,N)=A(M,N)/C(N,N)
      A(N,M)=0
      DO 18 K=N+1,I
18     A(N,M)=A(N,M)-C(N,K)*A(K,M)
      CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
      WRITE(3,67)
67     FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
      WRITE(3,60)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
60     FORMAT(2(5F12.7,/))
      END

```

```

C      PROGRAMA 05
C
C      SUBROUTINE VERSO L PARA INVERTER UMA MATRIZ.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(11,11),B(11)
C      I=10
C      IM=I-1
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,15)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
15      FORMAT(10G)
C      WRITE(3,16)
16      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
C      WRITE(3,17)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
17      FORMAT(10F5.1)
C      DO 5 K=1,I
C      IF(A(1,1).EQ.0.0)GO TO 28
12      DO 2 J=1,IM
2      B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
      B(I)=1/A(1,1)
      DO 4 L=1,IM
      DO 3 J=1,IM
3      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
4      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
      DO 9 J=1,I
9      A(I,J)=B(J)
5      CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
C      WRITE(3,7)
7      FORMAT(//,8X, 'MATRIZ INVERSA',/)
C      WRITE(3,8)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
8      FORMAT(2(5F12.7,/,))
C      GO TO 31
28      WRITE(3,29)(K)
29      FORMAT(//,8X, 'HA UMA SUBMATRIZ DIAGONAL SINGULAR
DE OREM',I3, '/')
      WRITE(3,30)
30      FORMAT(//,8X, 'TENTE O PROGRAMA 14 OU 15')
31      END

```

```

C      PROGRAMA 6
C
C      PROG06.FOR
C      METODO ITERATIVO GRADIENTES CONJUGADOS PARA
C      OBTER A MATRIZ INVERSA, DA MATRIZ SIMETRICA,
C      POSITIVA DEFINIDA.
C      DIMENSION A(45),E(9),XN(9),R(9),P(9),S(9),
C      1U(9),I(9),T(9),XINV(9,9)
C      N=DIMENSOES DA MATRIZ DADA.
C      N=9
C      DADOS DE ENTRADA: MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR FOR COLUNAS,
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA
C      READ(2,1)(A(I),I=1,45)
1      FORMAT(9G)
C      WRITE(3,65)
65      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
DO 67 I=1,N
DO 66 J=1,N
CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
66      XN(J)=A(IJ)
C      WRITE(3,68)(XN(L),L=1,N)
68      FORMAT(9F4.0)
67      CONTINUE
C      FORMACAO DA MATRIZ IDENTIDADE.
DO 2 J=1,N
2      E(J)=1
RE=0.0000001
N=9
L=0
3      L=L+1
DO 10 I=1,N
XN(I)=0
10      CONTINUE
DO 20 I=1,N
J=L
IF(I-J)14,12,14
12      T(I)=E(I)
GO TO 15
14      T(I)=0
15      R(I)=-T(I)
P(I)=-R(I)
S(I)=R(I)
U(I)=P(I)
20      CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO.
ITER=0
25      ITER=ITER+1
E1=0
T1=0
DO 40 I=1,N
D(I)=0
DO 30 J=1,N
CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
D(I)=D(I)+A(IJ)*P(J)
30      CONTINUE
T1=T1+S(I)*P(I)

```

```

        E1=E1+U(I)*D(I)
40      CONTINUE
        A1=-T1/E1
        DO 42 I=1,N
        XN(I)=XN(I)+A1*F(I)
        R(I)=R(I)+A1*D(I)
        S(I)=R(I)
42      CONTINUE
        V1=0
        DO 50 I=1,N
        V1=V1+S(I)*D(I)
50      CONTINUE
        B1=V1/E1
        DO 60 I=1,N
        F(I)=-R(I)+B1*F(I)
        U(I)=F(I)
60      CONTINUE
        DO 350 I=1,N
        IF(ABS(R(I))-RE)350,350,25
350    CONTINUE
        IF(L-1)36,36,38
36      WRITE(3,37)
37      FORMAT(1H1,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
38      WRITE(3,600)(XN(I),I=1,N)
600    FORMAT(5F12.7,//,4F12.7,//)
        IF(L-N)3,605,605
605    STOP
        END

```

```

C      LOC.FOR
SUBROUTINE LOC(I,J,IJ,N,M,MS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
IX=I
JX=J
IF(MS-1)10,20,30
10     IJX=N*(JX-1)+IX
      GO TO 36
20     IF(IX-JX)22,24,24
22     IJX=IX+(JX*JX-JX)/2
      GO TO 36
24     IJX=JX+(IX*IX-IX)/2
      GO TO 36
30     IJX=0
      IF(IX-JX)36,32,36
32     IJX=IX
36     IJ=IJX
      RETURN
      END

```

```

C      PROGRAMA 07
C
C      INVERSAO DE MATRIZ SIMETRICA PELO METODO DE
C      MARGEAMENTO
C      DIMENSION A(55),B(9),U(9),C(10)
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      N=10
C      M=DIMENSAO DA MATRIZ DE TRABALHO, CONSTITUIDA DA
C      MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR, SENDO A SEQUENCIA DE
C      ENTRADA POR COLUNAS.
C      M=55
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,20)(A(J),J=1,M)
20    FORMAT (11G)
      WRITE(3,65)
65    FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
      DO 67 L=1,N
      DO 66 I=1,N
      CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
66    C(I)=A(LI)
      WRITE(3,68)(C(I),I=1,N)
68    FORMAT(10F5.1)
67    CONTINUE
      DO 4 I=1,N
      IF(I-1)5,5,6
5     A(I)=1/A(I)
      GO TO 4
6     I1=I-1
      DO 7 L=1,I1
      CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
7     U(L)=A(LI)
      DO 2 L=1,I1
      B(L)=0
      DO 2 J=1,I1
      CALL LOC(J,L,JL,N,N,1)
2     B(L)=B(L)-A(JL)*U(J)
      D=0
      DO 3 L=1,I1
      CALL LOC(I,L,IL,N,N,1)
3     D=D+A(IL)*B(L)
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      D=D+A(II)
      DO 8 L=1,I1
      DO 8 J=1,L
      CALL LOC(J,L,JL,N,N,1)
8     A(JL)=A(JL)+B(J)*B(L)/D
      DO 9 L=1,I1
      CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
9     A(LI)=B(L)/D
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      A(II)=1/D
4     CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
      WRITE(3,75)
75    FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',/)
      DO 77 L=1,N
      DO 76 I=1,N
      CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
76    C(I)=A(LI)
      WRITE(3,78)(C(I),I=1,N)
78    FORMAT(5F12.7,//,5F12.7,/)

77    CONTINUE
      END

```

```

C      PROGRAMA 08
C
C      INVERSAO DE MATRIZ SIMETRICA USANDO SUBROUTINE
C      VERSOL.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(55),B(10),C(9)
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ A SER INVERTIDA.
C      ENTRADA: MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR POR COLUNAS.
C      M=DIMENSAO DA MATRIZ DE TRABALHO, DADA POR
C      M=N(N+1)/2
C      N=10
C      M=55
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,15)(A(I),I=1,M)
15      FORMAT(11G)
C      WRITE(3,20)
20      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
DO 19 L=1,N
DO 18 I=1,N
CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
18      B(I)=A(LI)
C      WRITE(3,22)(B(I),I=1,N)
22      FORMAT(10F5.1)
19      CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO.
IM=N-1
M=(N*(N+1))/2
DO 5 K=1,N
DO 2 J=1,IM
L=J+1
I=1
CALL LOC(I,L,IL,N,N,1)
CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
2      B(J)=A(IL)/A(II)
CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
B(N)=1/A(II)
DO 7 L=1,IM
J=L+1
CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
C(L)=A(IJ)
7      CONTINUE
DO 4 I=1,IM
DO 3 J=I,IM
M=I+1
L=J+1
CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
CALL LOC(M,L,ML,N,N,1)
A(IJ)=A(ML)-C(I)*B(J)
3      CONTINUE
CALL LOC(I,N,IN,N,N,1)
A(IN)=-C(I)*B(N)
4      CONTINUE
CALL LOC(N,N,NN,N,N,1)
A(NN)=-B(N)
5      CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
C      WRITE(3,21)
21      FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
DO 16 L=1,N
DO 17 I=1,N
CALL LOC(L,I,LI,N,N,1)
17      B(I)=-A(LI)
C      WRITE(3,10)(B(I),I=1,N)
10      FORMAT(2(5F12.7,/))
16      CONTINUE
STOP
END

```

```

C      PROGRAMA 09
C
C      INVERSAO DE MATRIZES COM BLOCOS DIAGONAIS, USANDO
C      'SUBROUTINE' VERSOL.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(9,9),B(9)
C      N1=DIMENSAO DE CADA SUB-MATRIZ
C      N2=ELEMENTO CORRESPONDENTE A A(1,1) DA ULTIMA
C      SUB-MATRIZ.
C      L1=DIMENSAO DA MATRIZ A SER INVERTIDA.
C      N1=3
C      N2=7
C      M1=N1-2
C      M=1
C      L1=9
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,2)((A(L,J),J=1,L1),L=1,L1)
2       FORMAT(9G)
C      WRITE(3,16)
16     FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',//)
C      WRITE(3,17)((A(L,J),J=1,L1),L=1,L1)
17     FORMAT(9F5.1)
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO.
3       DO 10 K=1,N1
        DO 4 J=0,M1
        B(M+J)=A(M,M+J+1)/A(M,M)
        N=M+N1-1
        B(N)=1/A(M,M)
        DO 6 L=0,M1
        DO 5 J=0,M1
        R=M+L
        P=M+J
        A(R,P)=A(M+L+1,M+J+1)-A(M+L+1,M)*B(M+J)
        6      A(R,N)=-A(M+L+1,M)*B(M+N1-1)
        DO 8 J=0,M1
        A(N,M+J)=B(M+J)
        8      A(N,N)=B(N)
        M=M+N1
        IF(M-N2)3,3,15
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
15     WRITE(3,18)
18     FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
        WRITE(3,12)((A(I,J),J=1,L1),I=1,L1)
12     FORMAT(5F12.7,,4F12.7,/)
        END

```

```

C      PROGRAMA 10
C
C      INVERSAO DE MATRIZ SIMETRICA COM BLOCOS DIAGONAIS,
C      USANDO 'SUBROUTINE' VERSOL
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(45),B(9),C(8)
C      L1=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      M2=DIMENSAO DA MATRIZ DE TRABALHO, DADA POR
C      M2=N*(N+1)/2, E COMPOSTA DA MATRIZ TRIANGULAR
C      SUPERIOR, A ENTRADA E FOR COLUNAS.
C      N1=DIMENSAO DAS SUBMATRIZES (BLOCOS).
C      N2= ELEMENTO CORRESPONDENTE AO A(1,1) DO ULTIMO
C      BLOCO.
C      L1=9
C      L2=N-1
C      N1=3
C      N2=7
C      N3=N-1
C      M1=N1-2
C      M=1
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,2)(A(I),I=1,45)
2      FORMAT(9G)
C      WRITE(3,16)
16     FORMAT(//,8X,'MATRIZ DADA',//)
DO 20 I=1,L1
DO 19 J=1,L1
CALL LOC(I,J,IJ,L1,L1,1)
19     B(J)=A(IJ)
C      WRITE(3,17)(B(J),J=1,L1)
17     FORMAT(9F5.1)
20     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO.
C
3      DO 11 K=1,N1
DO 4   J=0,M1
I=M+J+1
L=M+J
CALL LOC(M,I,MI,L1,L1,1)
CALL LOC(M,M,MM,L1,L1,1)
4      B(L)=A(MI)/A(MM)

N=M+N1-1
CALL LOC(M,M,MM,L1,L1,1)
B(N)=1/A(MM)
DO 9   I=M,M+M1
J=I+1
CALL LOC(M,J,MJ,L1,L1,1)
C(I)=A(MJ)
9      CONTINUE
DO 6   I1=0,M1
DO 5   J1=I1,M1
I=M+I1
J=M+J1
N=I+1

```

```
L=J+1
CALL LOC(I,J,IJ,L1,L1,1)
CALL LOC(N,L,NL,L1,L1,1)
5   A(IJ)=A(NL)-C(I)*B(J)
CALL LOC(I,L,IL,L1,L1,1)
6   A(IL)=-C(I)*B(L)
CALL LOC(L,L,LL,L1,L1,1)
11  A(LL)=-B(L)
M=M+N1
IF(M=N2)3,3,15
C   SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
15  WRITE(3,21)
21  FORMAT(8X,'MATRIZ INVERSA',//)
DO 8 N=1,L1
DO 13 L=1,L1
CALL LOC(N,L,NL,L1,L1,1)
13  B(L)=-A(NL)
WRITE(3,12)(B(L),L=1,L1)
12  FORMAT(5F12.7,/,4F12.7,/)
8   CONTINUE
STOP
END
```

```

C      PROGRAMA 11
C
C      INVERSAO DE MATRIZ BANDADA COM BANDA DE LARGURA
C      IGUAL A 2M+1.
C      ONDE 2M+1 REPRESENTA O NUMERO MAXIMO DE ELEMENTOS
C      NAO NULOS,
C      DE UMA LINHA.
C      SUBROUTINE VERSOL
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(10,10),B(10)
C      I=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      I=10
C      I1=I-1
C      M=2
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,2)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
C      2      FORMAT(10G)
C      WRITE(3,65)
C      65    FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
C      WRITE(3,66)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
C      66    FORMAT(10F5.1)
C      C      INICIO DO CICLO ITERATIVO.
C      DO 5 K=1,I
C      DO 3 J=i,I1
C      3      B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
C      B(I)=1/A(1,1)
C      IF(K-1)4,4,6
C      4      DO 8 L=1,M+1
C      DO 7 J=1,L+M
C      7      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      8      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 9 L=M+2,I-M-1
C      DO 9 J=L-M,L+M
C      9      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      DO 11 L=I-M,I1
C      DO 10 J=L-M,I1
C      10    A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      11    A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 12 J=1,M
C      12    A(I,J)=B(J)
C      DO 33 J=I-M,I
C      33    A(I,J)=B(J)
C      GO TO 5
C      6      IF(K-M-2)13,14,14
C      13    DO 16 L=1,M+1
C      DO 15 J=1,L+M
C      15    A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      DO 35 J=I-K+1,I1
C      35    A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      16    A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 17 L=M+2,I-M-1
C      DO 17 J=L-M,L+M
C      17    A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      DO 19 L=I-M,I1
C      DO 36 J=1,M

```

```

36      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
      DO 18 J=L-M,I1
18      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
19      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
      DO 20 J=1,M
20      A(I,J)=B(J)
      DO 40 J=I-M,I
40      A(I,J)=B(J)
      GO TO 5
14      IF(K-(I-2*M))21,22,22
21      DO 24 L=1,M+1
      DO 23 J=1,L+M
23      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
      DO 45 J=I-K+L,I1
45      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
24      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
      DO 25 L=M+2,I-K
      DO 25 J=L-M,L+M
25      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
      DO 27 L=I-K+1,I1
      DO 26 J=1,M
26      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
      DO 50 J=I-K,I1
50      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
27      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
      DO 28 J=1,M
28      A(I,J)=B(J)
      DO 56 J=I-K,I
56      A(I,J)=B(J)
      GO TO 5
22      DO 30 L=1,I1
      DO 29 J=1,I1
29      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
30      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
      DO 31 J=1,I
31      A(I,J)=B(J)
5      CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
      WRITE(3,67)
67      FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',//)
      WRITE(3,60)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
      FORMAT(2(5F12.7,/))
60      END

```

```

C      PROGRAMA 12
C
C      PROGRAMA PARA INVERTER UMA MATRIZ BANDADA-MARGEADA
C
C      CUJA BANDA TEM LARGURA 2*M+1 E A MARGEM TEM
C      M1 FILAS.
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(10,10),B(10)
C      I=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      I=10
C      I1=I-1
C      M=1
C      M1=2
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ (2,2)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
C      2      FORMAT(10G)
C      WRITE(3,65)
C      65     FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
C      WRITE(3,66)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
C      66     FORMAT(10F5.0)
C      COMECO DO CICLO ITERATIVO.
C      DO 5 K=1,I
C      DO 3 J=1,I1
C      3      B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
C      B(I)=1/A(1,1)
C      IF(K-(I-2*M-M1-2))4,4,6
C      4      DO 8 L=1,M+1
C      DO 7 J=1,L+M
C      7      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      DO 20 J=I-M1-K+1,I1
C      20     A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      8      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 10 L=M+2,I-M-K-M1
C      DO 9 J=L-M,L+M
C      9      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      DO 21 J=I-K-M1+1,I1
C      21     A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      10     A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 12 L=I-M-K-M1+1,I1
C      DO 11 J=1,I1
C      11     A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      12     A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 13 J=1,I
C      13     A(I,J)=B(J)
C      GO TO 5
C      6      DO 15 L=1,I1
C      DO 14 J=1,I1
C      14     A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
C      15     A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
C      DO 16 J=1,I
C      16     A(I,J)=B(J)
C      5      CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
C      WRITE(3,67)
C      67     FORMAT(//,8X,'MATRIZ INVERSA',/)
C      WRITE(3,60)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
C      60     FORMAT(2(5F12.7,/,))
C      END

```

```

C      PROGRAMA 13
C
C      CALCULO DA PSEUDO-INVERSA DE UMA MATRIZ
C      QUADRADA SINGULAR
C      DIMENSION A(3,3),B(3,3),D(3,3),C(3),F(3),E(3)
C      N=DIMENSAO DA MATRIZ A SER INVERTIDA.
C      N=3
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ A
C      READ(2,2)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
2      FORMAT(3G)
      WRITE(3,200)
200    FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
      WRITE(3,205)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
205    FORMAT(3F5.1)
C      DETERMINACAO DAS LINHAS PROPORCIONAIS.
DO 23 I=1,N
23    C(I)=1
      DO 16 K=1,N-1
      IF(C(K))18,17,18
17    GO TO 16
18    L=1
3      C1=A(K,L)
      IF(C1)7,5,7
5      L=L+1
      IF(N-L)6,6,7
6      GO TO 3
7      DO 8 J=1,N
8      B(K,J)=A(K,J)/C1
      DO 9 I=K+1,N
      C2=A(I,L)
      IF(C2)105,4,105
4      DO 104 J=1,N
104    B(I,J)=0
      GO TO 9
105    DO 14 J=1,N
14      B(I,J)=A(I,J)-C2*B(K,J)
9       CONTINUE
      DO 13 I=K+1,N
      DO 12 J=1,N
      IF(B(I,J))11,10,11
10     C(I)=0
      GO TO 12
      GO TO 13
11     C(I)=1
      GO TO 13
12     CONTINUE
13     CONTINUE
16     CONTINUE
C      DETERMINACAO DAS COLUNAS PROPORCIONAIS.
DO 24 I=1,N
      IF(C(I))26,25,26
25     DO 27 J=1,N
27     B(I,J)=0
      GO TO 24
26     DO 24 J=1,N

```

```

          B(I,J)=A(I,J)
24      CONTINUE
          DO 94 I=1,N
94      F(I)=1
          DO 40 K=1,N-1
             IF(F(K))95,40,95
             IF(F(K))95,40,95
95      L=1
31      C1=B(L,K)
             IF(C1)30,28,30
28      L=L+1
             IF(L-N)31,31,30
30      DO 32 I=1,N
32      D(I,K)=B(I,K)/C1
             DO 93 J=K+1,N
                 C2=B(L,J)
                 DO 35 I=1,N
35      D(I,J)=B(I,J)-C2*D(I,K)
93      CONTINUE
             DO 36 J=K+1,N
             DO 37 I=1,N
                 IF(D(I,J))38,33,38
33      F(J)=0
                 GO TO 37
                 GO TO 36
38      F(J)=1
                 GO TO 36
37      CONTINUE
36      CONTINUE
40      CONTINUE
C      PRODUTO MATRICIAL A*A
C      CALL PROD(A,A,B,N,N,N)
C      ELIMINACAO DAS LINHAS E COLUNAS NULAS E
C      FORMACAO DA MATRIZ NAO SINGULAR.
NC=0
          DO 42 I=1,N
             IF(C(I))43,42,43
43      NC=NC+1
42      CONTINUE
NF=0
          DO 44 I=1,N
             IF(F(I))45,44,45
45      NF=NF+1
44      CONTINUE
I=0
50      IF(NF-NC)46,47,48
46      I=I+1
             IF(I-N)80,47,47
80      IF(F(I))50,49,50
49      IF(C(I))51,50,51
51      C(I)=F(I)
NC=NC-1
          GO TO 50
48      I=I+1
             IF(I-N)81,47,47

```

```

81      IF(C(I))50,52,50
52      IF(F(I))53,50,53
53      F(I)=C(I)
      NF=NF-1
      GO TO 50
C      FORMACAO DA MATRIZ NAO SINGULAR.
47      NI=0
      DO 65 I=1,N
      IF(C(I))58,59,53
59      NI=NI+1
      GO TO 65
58      NJ=0
      DO 61 J=1,N
      IF(F(J))62,63,62
63      NJ=NJ+1
      GO TO 61
62      D(I-NI,J-NJ)=B(I,J)
61      CONTINUE
65      CONTINUE
      DO 64 I=1,N
      DO 64 J=N-NJ+1,N
      D(I,J)=0
      DO 57 I=N-NI+1,N
      DO 57 J=1,N
      D(I,J)=0
57      C      INVERSAO DA MATRIZ NAO SINGULAR.
      M=NC
      IM=M-1
      DO 67 K=1,M
      DO 68 J=1,IM
68      E(J)=D(1,J+1)/D(1,1)
      E(M)=1/D(1,1)
      DO 69 I=1,IM
      DO 70 J=1,IM
70      D(I,J)=D(I+1,J+1)-D(I+1,1)*E(J)
69      D(I,M)=-D(I+1,1)*E(M)
      DO 71 J=1,M
71      D(M,J)=E(J)
67      CONTINUE
C      RECONSTITUICAO DAS LINHAS E COLUNAS NULAS
C      NA MATRIZ INVERSA.
      NI=0
      DO 78 I=1,N
      IF(C(I))72,73,72
73      DO 90 J=1,N
90      B(I,J)=0
      NI=NI+1
      GO TO 78
72      NJ=0
      DO 74 J=1,N
      IF(F(J))75,76,75
76      B(I,J)=0
      NJ=NJ+1
      GO TO 74
75      B(I,J)=D(I-NI,J-NJ)

```

```

74      CONTINUE
78      CONTINUE
99      FORMAT(3G)
C      PRODUTO DA MATRIZ A PELA MATRIZ INVERSA
C      GENERALIZADA.
C      CALL PROD(A,B,D,N,N,N)
C      PRODUTO (AXA')*(AXA'), ONDE A'=INVERSA GENERALIZADA.
C      CALL PROD(D,D,B,N,N,N)
C      PRODUTO (AXA')*(AXA')*A, ONDE A=MATRIZ DADA E
C      A'=MATRIZ INVERSA GENERALIZADA
C      CALL PROD(B,A,D,N,N,N)
C      SAIDA DA MATRIZ PSEUDO INVERSA.
C      WRITE(3,106)
106     FORMAT(//,8X,'PSEUDO INVERSA',//)
C      WRITE(3,77)((D(I,J),J=1,N),I=1,N)
77      FORMAT(3F12.7)
      END

```

```

C      PROD.FOR (PRODUTO MATRICIAL),
C      SUBROUTINE PROD(A,B,D,N,M,L)
C      DIMENSION A(3,3),B(3,3),D(3,3)
C      DO 2 K=1,N
C      DO 2 I=1,L
C      D(K,I)=0
C      DO 2 J=1,M
C      D(K,I)=D(K,I)+A(K,J)*B(J,I)
2       CONTINUE
      RETURN
      END

```

```
C      PROGRAMA 14
C
C      INVERSAO DE UMA MATRIZ USANDO SUB-ROUTINE VERSOL
C      E A(N,N) COMO PIVO.
C      ESTE METODO E INDICADO QUANDO A(1,1)=0.
C      DIMENSION A(11,11),B(11)
C      I=DIMENSAO DA MATRIZ DADA.
C      I=10
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
C      READ(2,2)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
2      FORMAT(10G)
      WRITE(3,15)
15      FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
      WRITE(3,16)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
16      FORMAT(10F5.0)
      I1=I-1
      M1=I+1
      DO 10 K=1,I
      DO 3 J=1,I1
3      B(J)=A(I,I-J)/A(I,I)
      B(I)=1/A(I,I)
      DO 5 L=1,I1
      DO 4 J=1,I1
4      A(M1-L,M1-J)=A(I-L,I-J)-A(I-L,I)*B(J)
5      A(M1-L,1)=-A(I-L,I)*B(I)
      DO 6 J=1,I
6      A(1,M1-J)=B(J)
10     CONTINUE
C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
      WRITE(3,17)
17     FORMAT(8X,'MATRIZ INVERSA',/)
      WRITE(3,12)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
12     FORMAT(2(5F12.7,/,))
      END
```

```

C      PROGRAMA 15
C
C      PESQUISA O MAIOR ELEMENTO DA PRIMEIRA COLUNA E
C      O USA COMO PIVO.
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(10,10),B(10)
      I=10
      IM=I-1
C      LEITURA E IMPRESSAO DA MATRIZ DADA.
      READ(2,15)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
15    FORMAT(10G)
      WRITE(3,17)
17    FORMAT(8X,'MATRIZ DADA',/)
      WRITE(3,18)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
18    FORMAT(10F5.1)
      M=1
      C=A(1,1)
      DO 16 N=2,I
      IF(ABS(C)-ABS(A(N,1)))6,16,16
6       M=N
      C=A(N,1)
16    CONTINUE
      IF(M-1)12,12,11
11    DO 9 L=1,I
      B(L)=A(1,L)
      A(1,L)=A(M,L)
      A(M,L)=B(L)
9     CONTINUE
12    DO 5 K=1,I
      DO 2 J=1,IM
2       B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
      B(I)=1/A(1,1)
      DO 4 L=1,IM
        DO 3 J=1,IM
3       A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
4       A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
        DO 5 J=1,I
5       A(I,J)=B(J)
        DO 10 L=1,I
          B(L)=A(L,1)
          A(L,1)=A(L,M)
          A(L,M)=B(L)
10      C      SAIDA DA MATRIZ INVERSA.
          WRITE(3,19)
19      FORMAT(8X,'MATRIZ INVERSA',/)
          WRITE(3,8)((A(L,J),J=1,I),L=1,I)
8       FORMAT(2(5F12.7,/))
      END

```

OBS.: os programas constantes do presente trabalho encontram-se em forma de subrotina, arquivados na biblioteca de programas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPr.

Dado que os diversos métodos apresentaram a mesma precisão até a 7.^a decimal, apresentamos aqui a solução comum aos programas, 01, 02, 03, 04, 05, 07, 08 e 11.

MATRIZ DADA

2.0	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	1.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	4.0	2.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-1.0	1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	2.0	3.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	1.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.0	1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0	2.0	-3.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.0	1.0	2.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	3.0	0.0

MATRIZ INVERSA

0.1556188	0.2295875	-0.1741110	0.5701280	-0.3721195
0.0238976	-0.0990043	-0.0034139	0.0307255	-0.0204836
0.2295875	-0.1530583	0.1160740	-0.3800853	0.2480797
-0.0159317	0.0660028	0.0022760	-0.0204836	0.0136558
-0.1741110	0.1160740	0.1015647	-0.3325747	0.2170697
-0.0139403	0.0577525	0.0019915	-0.0179232	0.0119488
0.5701280	-0.3800853	-0.3325747	-2.1854908	1.4264580
-0.0916074	0.3795164	0.0130868	-0.1177809	0.0785206
-0.3721195	0.2480797	0.2170697	1.4264580	-0.6046942
0.0388336	-0.1608819	-0.0055477	0.0499289	-0.0332859
0.0238976	-0.0159317	-0.0139403	-0.0916074	0.0388336
-0.0667141	0.2763869	0.0095306	-0.0857752	0.0571835
-0.0990043	0.0660028	0.0577525	0.3795164	-0.1608819
0.2763869	-0.1093172	-0.0037696	0.0339260	-0.0226174
-0.0034139	0.0022760	0.0019915	0.0130868	-0.0055477
0.0095306	-0.0037696	0.0343528	-0.3091750	0.2061166
0.0307255	-0.0204836	-0.0179232	-0.1177809	0.0499289
-0.0857752	0.0339260	-0.3091750	-0.2174253	0.1449502
-0.0204836	0.0136558	0.0119488	0.0785206	-0.0332859
0.0571835	-0.0226174	0.2061166	0.1449502	0.2366999

Solução correspondente ao programa 05.

MATRIZ DADA

3.0	2.0	4.0	5.0	2.0	1.0	4.0	3.0	1.0	2.0
2.0	1.0	2.0	3.0	1.0	4.0	-1.0	3.0	-2.0	1.0
4.0	5.0	10.0	4.0	2.0	-1.0	3.0	1.0	4.0	2.0
0.0	3.0	4.0	2.0	5.0	6.0	7.0	1.0	3.0	2.0
4.0	3.0	1.0	2.0	5.0	2.0	0.0	1.0	3.0	0.0
3.0	3.0	2.0	1.0	3.0	4.0	6.0	1.0	8.0	1.0
5.0	4.0	3.0	2.0	7.0	1.0	4.0	5.0	0.0	3.0
3.0	1.0	4.0	3.0	1.0	2.0	1.0	5.0	6.0	1.0
4.0	3.0	1.0	2.0	6.0	1.0	4.0	0.0	3.0	2.0
1.0	3.0	1.0	2.0	4.0	3.0	1.0	4.0	0.0	1.0

HA UMA SUBMATRIZ DIAGONAL SINGULAR DE ORDEM 3

TENTE O PROGRAMA 14 OU 15

Solução correspondente ao programa 13.

MATRIZ DADA

1.0	2.0	2.0
2.0	4.0	4.0
2.0	4.0	3.0

PSEUDO INVERSA

-0.1200000	-0.2400000	0.3999999
-0.2400000	-0.4800000	0.7999999
0.3999999	0.7999999	-0.9999999

Solução correspondente aos programas 06, 09 e 10.

MATRIZ DADA

1.0	2.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	,0.0
2.0	3.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-1.0	2.0	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0	-3.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	-3.0	1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0	2.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	1.0	3.0	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	-1.0	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0	-1.0	1.0		

MATRIZ INVERSA

-0.2777778	0.4444444	-0.3888889	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
0.4444444	-0.1111111	0.2222222	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
-0.3888889	0.2222222	0.0555556	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000	-0.2857143
0.1428571	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2857143	-0.0612245
0.1020408	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1428571	0.1020408
0.1632653	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.2500000	0.2500000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.2500000	0.4375000	-0.3125000	
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.2500000	-0.3125000	-0.0625000	

Solução correspondente aos programas 12 e 14.

MATRIZ DADA

2.	3.	0.	0.	0.	0.	0.	2.	1.
3.	1.	2.	0.	0.	0.	0.	1.	2.
0.	2.	3.	1.	0.	0.	0.	3.	2.
0.	0.	1.	2.	1.	0.	0.	1.	1.
0.	0.	0.	1.	1.	3.	0.	0.	1.
0.	0.	0.	0.	3.	1.	4.	0.	1.
0.	0.	0.	0.	0.	4.	2.	3.	1.
0.	0.	0.	0.	0.	3.	2.	1.	0.
2.	1.	3.	1.	0.	1.	1.	2.	1.
1.	2.	2.	1.	1.	0.	2.	0.	1.

MATRIZ INVERSA

0.0649472	0.3540445	-0.1207503	0.0126612	0.2618992
-0.0445487	-0.1788980	0.2811254	-0.0255569	-0.1409144
0.3540445	-0.8100821	-0.4091442	0.0293083	-0.7456038
0.0820633	0.3821806	-0.8862637	0.6260258	0.4701055
-0.1207503	-0.4091442	-0.1617820	-0.0199296	-0.6529895
0.1441970	0.3001172	-0.7573271	0.6143025	0.2403283
0.0126612	0.0293083	-0.0199296	0.1613130	0.7441970
-0.3083236	-0.4644783	0.7298945	-0.0663541	0.0194607
0.2618992	-0.7456038	-0.6529895	0.7441970	-1.8283705
0.6037515	1.0403283	-1.9205159	0.7200469	0.2729191
-0.0445487	0.0820633	0.1441970	-0.3083236	0.6037515
-0.0633060	-0.1805393	0.2837046	-0.0257913	-0.1055100
-0.1788980	0.3821805	0.3001172	-0.4644783	1.0403283
-0.1805393	-0.6407972	1.1498242	-0.3772568	-0.0342321
0.2811254	-0.8862637	-0.7573271	0.7298945	-1.9205159
0.2837046	1.1498242	-1.6640094	0.8785463	0.3395076
-0.0255569	0.6260258	0.6143025	-0.0663541	0.7200469
-0.0257913	-0.3772567	0.8785463	-0.6253224	-0.5763189
-0.1409144	0.4701055	0.2403283	0.0194607	0.2729191
-0.1055100	-0.0342321	0.3395076	-0.5763189	0.0241501

Solução correspondente ao programa 15.

MATRIZ DADA

3.0	2.0	4.0	5.0	2.0	1.0	4.0	3.0	1.0	2.0
2.0	1.0	2.0	3.0	1.0	4.0	-1.0	3.0	-2.0	1.0
4.0	5.0	10.0	4.0	2.0	-1.0	3.0	1.0	4.0	2.0
0.0	3.0	4.0	2.0	5.0	6.0	7.0	1.0	3.0	2.0
4.0	3.0	1.0	2.0	5.0	2.0	0.0	1.0	3.0	0.0
3.0	3.0	2.0	1.0	3.0	4.0	6.0	1.0	8.0	1.0
5.0	4.0	3.0	2.0	7.0	1.0	4.0	5.0	0.0	3.0
3.0	1.0	4.0	3.0	1.0	2.0	1.0	5.0	6.0	1.0
4.0	3.0	1.0	2.0	6.0	1.0	4.0	0.0	3.0	2.0
1.0	3.0	1.0	2.0	4.0	3.0	1.0	4.0	0.0	1.0

MATRIZ INVERSA

0.0490725	0.1353450	-0.0304486	-0.0776104	0.1435351
0.1446619	0.1740971	-0.0920194	-0.1531805	-0.2859448
-0.0492592	0.0474003	0.1499556	-0.2369708	-0.1735861
0.2442421	-0.1179741	-0.2275834	0.0624907	0.4374308
-0.0412768	-0.0241454	0.0510292	0.1606988	0.1375314
-0.1121925	0.1053978	0.0564603	-0.1823478	-0.2125228
0.2317250	-0.0440762	-0.0282459	-0.0236766	0.0335336
-0.0919457	-0.2149983	0.0157452	0.1348766	0.1359134
-0.0218368	-0.1467126	-0.0576492	0.1820310	0.1956490
-0.2329968	0.0466420	0.1109693	0.0080423	-0.0923606
-0.0820125	0.1831093	-0.0165131	0.0488464	-0.0002923
0.0700050	-0.0144412	-0.0236383	-0.0165297	-0.0537347
0.2170727	-0.1189900	-0.0669282	0.0542460	0.1120745
0.1038447	0.1278601	-0.1219655	-0.2617555	-0.1317395
0.0571283	-0.0914726	-0.0491813	-0.0174772	0.0224335
0.0206692	0.1154624	0.0575989	-0.1897214	0.0653205
-0.0848682	-0.0374888	0.0159479	-0.0274540	-0.0860248
-0.0036619	-0.1125525	0.1325694	0.1734713	0.0920449
-0.4356690	0.3571546	0.1298338	-0.1838229	-0.8109029
-0.0458539	-0.2285306	0.2054266	0.9163642	0.3154522

N O T A S D E R E F E R E N C I A S

- |1| WYLIE, C. R. JR. Advanced engineering mathematics. New York, McGraw-Hill Book Company, terceira edição, 1966, p. 439.
- |2| FADDEEV, D. K. & FADDEVA, V. N. Computational methods of linear algebra. San Francisco, W. H. Freeman, 1963 . p. 174.
- |3| IBID, p. 174.
- |4| GEMAEL, Camil. Introdução à Geodésia Geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas , 1975. p. 116-27.
- |5| IBID, p. 117.
- |6| DALMOLIN, Quintino. Ajustamento de observações pelo processo iterativo. Curitiba, 1976. p. 14. Tese. Mestrado. Universidade Federal do Paraná.
- |7| FADDEEV, D. K. & FADDEVA, V. N. p. 149.
- |8| IBID.
- |9| DALMOLIN, Quintino. p. 14.
- |10| SCHOR, Damian & TIZZIOTTI, José Guilherme. Matemática ; segundo grau. S. Paulo, Ática, 1975. V. 2, p. 132-3.
- |11| DI PIERRO NETTO, Scipione & GÖES, Célia Contin. Matemática na escola renovada; 2a. série do 2º grau. S.Paulo, Saraiva S.A., 1973. p. 84-5.

- |12| WANDRESEN, Romualdo. Métodos iterativos para a solução de sistemas de equações normais. Curitiba, 1980. p. 129-30. Tese. Mestrado. Universidade Federal do Paraná.
- |13| DALMOLIN, Quintino. p. 15.
- |14| GEMAEL, Camil. Ajustamento livre: inversas generalizadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. p. 2.
- |15| IBID, p. 3.
- |16| IBID, p. 13.

REFERÉNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEN-ISRAEL, Adi & GREVILLE, Thomas N. E. Generalized inverses: theory and applications. New York, John Wiley & Sons, 1974. 395 p.
- BOULLION, Thomas L. & ODELL, Patrick L. Generalized inverse matrices. New York, Wiley-Interscience, 1971, 101 p.
- DALMOLIN, Quintino. Ajustamento de observações pelo processo iterativo. Curitiba, 1976. 96 p. Tese. Mestrado. Universidade Federal do Paraná.
- DI PIERRO NETTO, Scipione & GÖES, Célia Contin. Matemática na escola renovada; 2a. série do 2º grau. S.Paulo, Saraiva S.A., 1973. 270 p.
- FADDEEV, D. K. & FADDEEVA, V.N. Computational methods of linear algebra. San Francisco, W. H. Freedman and Company, 1973. 621 p.
- GEMAEI, Camil. Introdução à Geodésia Geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. 267 p.
- GEMAEI, Camil. Ajustamento livre: inversas generalizadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. 30 p.
- NOBLE, Ben. Applied linear algebra. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1969. 523 p.
- RAO, C. Radhakrishna & MITRA, Sujit Kunar. Generalized inverse matrices and its applications. New York, John Wiley & Sons, 1971. 240 p.

SAXENA, Narendra K. Improvement of a geodetic triangulation through control points established by means of satellites or precision traversing. Reports of the Department of Geodetic Science, (177): 1-79, 1972.

SCHOR, Damian & TIZZIOTTI, José Guilherme. Matemática; segundo grau. S. Paulo, Ática, 1975. V.2. 269 p.

THOMPSON, E. H. An introduction to the algebra of matrices with some applications. Toronto, The University of Toronto Press, 1969. 229 p.

WANDRESEN, Romualdo. Métodos iterativos para a solução de equações normais. Curitiba, 1980. 214 p. Tese. Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

WESTLAKE, Joan R. A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations. New York, John Wiley & Sons, 1968. 171 p.

WYLIE, C. R. JR. Advanced engineering mathematics. New York, McGraw-Hill Book Company, terceira edição, 1966. 813 p.