

EDSON LUIZ DA SILVA

**DINÂMICA DE ROTORES: MODELO MATEMÁTICO
DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS**

**CURITIBA
2004**

EDSON LUIZ DA SILVA

**DINÂMICA DE ROTORES: MODELO MATEMÁTICO
DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS**

**Dissertação apresentada como requisito
parcial para a obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Mecânica, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica, Setor
de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador: Prof. Dr. Wiliam Alves Barbosa
Co-Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto
Bavastri**

**CURITIBA
2004**

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre ao meu lado, iluminando todos meus passos.

À minha esposa Delcinete, pelo amor, carinho, compreensão, paciência, enfim, por tudo.

A minha filha Alanis, pelos momentos de alegria e incentivo.

Aos meus pais, pelo afeto, dedicação e ensinamentos.

Ao Prof. Wiliam Alves Barbosa, pela amizade e orientação

Ao Prof. Carlos Alberto Bavastri, pela co-orientação.

Ao Prof. Adriano Scremin, pela amizade e ajuda nos cálculos.

Ao Prof. Fernando Tadeu Boçon, pela amizade e empréstimo de livro.

A WEG pelo fornecimento do programa da Renk, desenho do eixo e apoio financeiro ao projeto.

Ao CEFET-PR pelo apoio ao projeto.

Aos companheiros de turma, pela amizade e pelo ótimo ambiente de estudos.

Aos amigos e família, pela força e torcida.

LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	vi
NOTAÇÃO E NOMENCLATURA	vii
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1. INTRODUÇÃO	14
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
3. OS MANCAIS	25
3.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM MANCAL	28
3.2 MANCAIS HIDRODINÂMICOS SIMPLES	29
3.3 COEFICIENTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO	34
3.3.1 TEORIA DESENVOLVIDA POR VANCE	40
3.3.2 TEORIA DESENVOLVIDA POR CHILDS	41
3.3.3 TEORIA DESENVOLVIDA POR CAPONE	43
4. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	47
4.1 PROCEDIMENTO ADOTADO PARA APLICAÇÃO DO MEF	48
4.1.1 ELEMENTOS DO DISCO	50
4.1.1.1 ENERGIA CINÉTICA DO DISCO	51
4.1.1.2 ENERGIA POTENCIAL DO DISCO	53
4.1.1.3 FORMULAÇÃO MATRICIAL DAS EQUAÇÕES DO DISCO	53
4.2 ELEMENTOS DO EIXO	54
4.2.1 ENERGIA POTENCIAL DO EIXO	55
4.2.1.1 ENERGIA CINÉTICA EIXO	58
4.2.1.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL DAS EQUAÇÕES DO EIXO	60
4.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ROTOR	66
4.4 FORÇAS DE EXCITAÇÃO	67
4.4.1 MASSA DESBALANCEADA	67
4.4.2 FORÇA ASSÍNCRONA	68
4.4.3 FORÇA HARMÔNICA FIXA NO ESPAÇO	68
5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS	69
5.1 MODELO DO SISTEMA GLOBAL	69
5.2 PROBLEMA DE AUTOVALORES	70
5.3 ORTOGONALIDADE	74
5.4 DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE	75
5.4.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS	78
5.4.2 INSTABILIDADE	79
5.4.3 MODO DE VIBRAÇÃO	81
5.4.4 ÓRBITA	82
6 RESPOSTAS E MODOS PARA O MODELO VISCOSO	84
6.1 RESPOSTA NA FREQUÊNCIA - DESBALANCEAMENTO	84
6.2 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO (MASSA DESBALANCEADA)	86
7. RESULTADOS	90
7.1 ANÁLISE DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO	103
7.2 ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS OBJETIVAS	104
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	105
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
APÊNDICE 1	110

LISTA DE TABELAS

TABELA 7.1	– COEFICIENTES OBTIDOS	91
TABELA 7.2	– RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DOS PROGRAMAS	92
TABELA 7.3	– RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 275 mm	92
TABELA 7.4	– RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 250 mm	93
TABELA 7.5	– RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 300 mm	93
TABELA 7.6	– RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 400 mm	93
TABELA 7.7	– RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 400 mm PELO MODELO DE VANCE	94
TABELA 7.8	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm	94
TABELA 7.9	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm PELO MODELO DE VANCE	94
TABELA 7.10	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 400 mm	94
TABELA 7.11	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 400 mm PELO MODELO DE VANCE	94
TABELA 7.12	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm	95
TABELA 7.13	– RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 400 mm PELO MODELO DE VANCE	95

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

(CONTINUA)

FIGURA	1.1 – ROTOR COM MANCAIS DE ROLAMENTO	14
FIGURA	1.2 – ROTOR COM MANCAIS DE DESLIZAMENTO.....	14
FIGURA	3.1 – MODELO DE UM MANCAL	26
FIGURA	3.2 – AS TRÊS POSIÇÕES DO EIXO AO INICIAR SEU FUNCIONAMENTO	28
FIGURA	3.3 – O ÓLEO É ARRASTADO PARA A REGIÃO CONVERGENTE (EFEITO DE "CUNHA").....	29
FIGURA	3.4 – LUGAR GEOMÉTRICO DO PONTO DE EQUILÍBRIO DO ROTOR	33
FIGURA	3.5 – NOMENCLATURA DE UM MANCAL RADIAL	36
FIGURA	3.6 – GRÁFICO PARA ESPESSURA MÍNIMA.....	38
FIGURA	3.7 – GRAFICO PARA DETERMINAR POSIÇÃO MÍNIMA DE DA PELÍCULA DE ÓLEO.....	39
FIGURA	3.8 – DIAGRAMA DE DISTRIBUIÇÃO DA PRESSÃO NA PELÍCULA.....	39
FIGURA	4.1 – MODELO DO DISCO	50
FIGURA	4.2 – SISTEMAS DE COORDENADAS PARA O DISCO ROTACIONANDO EM TORNO DE UM EIXO FLEXÍVEL	51
FIGURA	4.3 – ÂNGULOS DE EULER: PRECESSÃO (ψ), NUTAÇÃO(θ) E GIRO (ϕ).....	52
FIGURA	4.4 – GRAUS DE LIBERDADE NODAIS DE UM ELEMENTO DE ROTOR	53
FIGURA	4.5 – REPRESENTA A SESSÃO TRANSVERSAL DO EIXO	53
FIGURA	4.6 – ELEMENTO DE EIXO	58
FIGURA	4.7 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....	61
FIGURA	4.8 – FORÇA DESBALANCEADA.:	67
FIGURA	5.1 – DIAGRAMA DE CAMPBELL	70
FIGURA	5.2 a – EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE	76
FIGURA	5.2 b – EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE	76
FIGURA	5.3 – EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL	78
FIGURA	5.4 – ANALOGIA PARA A INSTABILIDADE	80
FIGURA	5.5 – INSTABILIDADE DE UM AUTOVALOR.....	81
FIGURA	5.6 – VARIAÇÃO DO SENTIDO DE GIRO EIXO EM UM ROTOR EXCITADO COM MASSA DESBALANCEADA.....	82
FIGURA	5.7 – GIRO HORARIO E GIRO ANTI- HORARIO.....	83
FIGURA	7.1 – GRÁFICO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO.....	91
FIGURA	7.2 – GRÁFICO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ	92
FIGURA	7.3 – DIAGRAMA DE CAMPEBELL OBTIDO SEM DISCO.....	95
FIGURA	7.4 – DIAGRAMA DE CAMPEBELL OBTIDO I.....	96
FIGURA	7.5 – DIAGRAMA DE CAMPEBELL OBTIDO II	96
FIGURA	7.6 – DIAGRAMA DE CAMPEBELL OBTIDO III.....	96
FIGURA	7.7 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO SEM DISCO I.....	97
FIGURA	7.8 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO SEM DISCO II.....	97
FIGURA	7.9 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO SEM DISCO III.....	98
FIGURA	7.10 – DIAGRAMA DE CAMPEBELL OBTIDO COM ROTOR.....	98
FIGURA	7.11 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR I.....	99
FIGURA	7.12 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR II.....	99
FIGURA	7.13 – RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR III.....	99
FIGURA	7.14 – MODOS DE VIBRAR SEM DISCO I	100

(CONTINUA)

FIGURA 7.15	– MODOS DE VIBRAR SEM DISCO II	100
FIGURA 7.16	– MODOS DE VIBRAR SEM DISCO III.....	100
FIGURA 7.17	– MODOS DE VIBRAR SEM DISCO IV	101
FIGURA 7.18	– MODOS DE VIBRAR SEM DISCO IV	101
FIGURA 7.19	– MODOS DE VIBRAR COM ROTOR I	102
FIGURA 7.20	– MODOS DE VIBRAR COM ROTOR II.....	102
FIGURA 7.21	– MODOS DE VIBRAR COM ROTOR III.....	102
FIGURA 7.22	– MODOS DE VIBRAR COM ROTOR IV	103
FIGURA 7.23	– MODOS DE VIBRAR COM ROTOR V	103

NOTAÇÃO E NOMENCLATURA

$\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ são as velocidades instantâneas

θ = giro do disco em torno do novo eixo x (denotado por x_1) (NUTAÇÃO)

ϕ = giro do disco em torno do novo eixo y

κ = parâmetro de amortecimento em um ponto qualquer

γ = ângulo entre a direção da excentricidade e a direção da força externa sobre o rotor
(seu peso por exemplo)

n = coeficiente de Poisson

ρ = densidade de óleo lubrificante (kg/m^3)

ε = excentricidade normalizada

ψ = giro do disco em torno do eixo Z (PRECESSÃO)

\mathbf{y} = ângulo entre centros

Ω = rotação do eixo

$\bar{\omega}$ = velocidade de rotação do rotor

μ = viscosidade do fluido lubrificante (Pa-s)

r_d = densidade.

ρ_E = densidade do eixo

\mathbf{d}_i = vetor deslocamento nodal

(I_D) = Inércia

σ_{ij} = tensor de tensões internas do fluido (N/m^2)

\mathbf{e}_l = deformação linear

(M_D) = Massa

\mathbf{e}_{nl} = deformação não linear

\mathbf{du} e \mathbf{dw} correspondem movimentos nas direções X e Z

[C] é a matriz de elasticidade do material,

C = módulo de elasticidade

$[H^{(m)}]$ = matriz de interpolação dos elementos

$\{\varepsilon\}$ = vetor de deformação considerada em um ponto genérico do corpo,

$\{F^B\}$ = forças do corpo

$\{F^C\}$ = carregamentos concentrados.

$\{F^S\}$ = forças de superfície

$\{\hat{U}^{(m)}\}$ = vetor cujas componentes representam as componentes globais do deslocamento.

$\dot{\mathbf{a}}$ = velocidade perpendicular

\dot{e} = velocidade tangencial

$\{\ddot{U}\}$ = vetor aceleração

$\{U\}$ = vetor deslocamento

$\{\dot{U}\}$ = vetor velocidade

A = área da seção transversal

$B(x, z)$ = ponto genérico de sua seção transversal

C = centro geométrico do eixo

C_r = espessura do filme quando $e = 0$

C_r = folga entre mancal e o eixo, m,

D = diâmetro do eixo

e = excentricidade do rotor

E = modulo de elasticidade do eixo,

E_E = módulo de Young

F = carga estática

f_j = força específica devida a campos externos (N)

F_{q_i} = força generalizada associada a q_i .

G = modulo de Coulomb,

[G] = matriz giroscópica

H (θ, t) = espessura do filme de óleo a cada instante ao longo da circunferência do mancal

$h(\theta, t)$ = espessura normalizada, $h(\theta, t) = H(\theta, t) / C_r$

h = espessura do filme de óleo lubrificante (m)

I_E = momento de inércia da seção transversal em torno do eixo neutro

k = fator de forma da seção transversal do elemento,

L = comprimento do mancal

L_L = comprimento do eixo

M_1 e M_2 são as matrizes de massa “clássicas”,

M_3 e M_4 são as causam os efeitos de inércia rotatória,

M_5 é a matriz que contém o efeito giroscópico

$N_1(y)$ e $N_2(y)$ são funções de interpolação

P = pressão, Pa.

q_i = i -ésima coordenada generalizada e

R = raio do eixo (m)

R = raio externo,

r = raio interno,

S_o = número de Sommerfeld,

S_E = área da seção transversal da viga

T = energia cinética total do rotor,

u = deslocamento translacional da direção x

U = energia potencial,

U_1 = velocidade horizontal do mancal (m/s)

u_j = velocidade do fluido (m/s)

w = deslocamento translacional da direção y

F é o vetor das forças excitadoras do sistema;

M é a matriz de massa global do sistema, obtida a partir das matrizes de massa elementares do disco e do eixo;

C = matriz de amortecimento global obtida a partir da matriz de amortecimento dos mancais,

G = matriz giroscópica global antisimétrica do rotor obtida a partir das matrizes giroscópicas elementares do disco e do eixo

K = matriz de rigidez global simétrica obtida a partir da matriz de rigidez elementar do eixo

k_e = matriz de rigidez elementar dos mancais;

\ddot{y} = vetor de aceleração nodal

\dot{q} = vetor velocidade nodal

q = vetor de deslocamento nodal,.

λ = autovalores

\mathbf{q} = autovetor à direita

\mathbf{y} = autovetor à esquerda

Ω_{rpm} = velocidade de rotação do eixo

\mathbf{v}_i = frequência

a_i = fator amortecimento viscoso

R_i e I_i indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária.

N é a velocidade angular do eixo em rotações por segundo.

RESUMO

O conhecimento preciso das características dinâmicas de maquina rotativas permite prever a resposta vibratória em distintos pontos deste tipo de sistema sujeito a diferentes excitações, entre elas podemos citar: desbalanceamentos, instabilidade nos mancais, defeitos internos da máquina, excitações de fluxo turbulento, entre outros. Para determinar estas características será utilizado um modelo numérico baseado em elementos finitos onde cada elemento do rotor será estudado separadamente dando maior ênfase neste trabalho no modelo de mancais hidrodinâmicos. O estudo deste modelo de mancal e a sua influencia sobre a característica dinâmica resultante do sistema girante será fundamental para melhorar seu comportamento dinâmico, principalmente em estudos de instabilidade. Uma revisão bibliográfica externa sobre estes modelos de mancais permitira entender os modelos utilizados e corroborar os parâmetros estabilizados pelos diferentes fabricantes.

Palavras-chave: Mancais hidrodinâmicos, dinâmica de rotores, matriz de rigidez e amortecimento.

ABSTRACT

The necessary knowledge of the dynamic characteristics of it conspires rotative the allows to predict the vibratory answer in different points of this system type subject to different excitements, among them we can mention: unbalance, instability limps us, internal defects of the machine, excitements of turbulent flow, among others. To determine these characteristics a numeric model it will be used based on finite elements where each element of the rotor will be studied giving larger emphasis in this work in the model separately of you limp hydrodynamic. The study of this bearing model and yours influences on the dynamic characteristic resulting from the system gyroscopic will be fundamental to improve his/her dynamic behavior, mainly in studies of instability. A bibliographical revision expresses on these models of you limp had allowed to understand the used models and to corroborate the parameters stabilized by the different manufacturers.

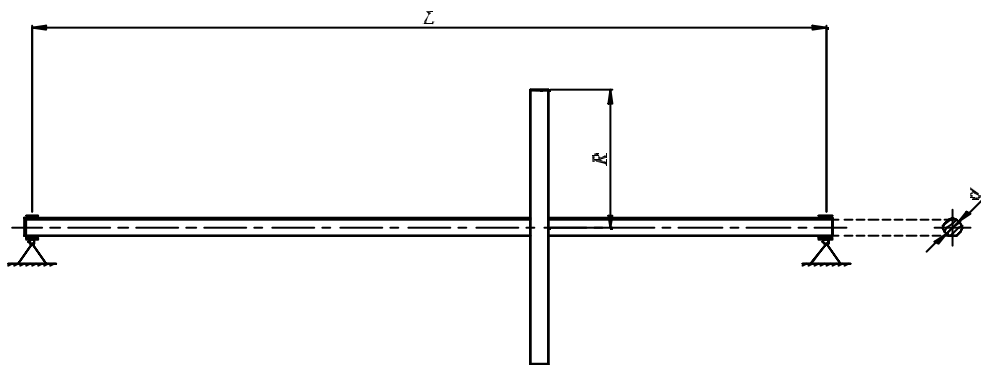
Word-key: hydrodynamic bering, dynamics of rotors, Stiffness and Damping Coefficients

INTRODUÇÃO

A utilização de um mancal hidrodinâmico visa diminuir o atrito entre duas peças metálicas em movimento trocando este por um atrito viscoso de um fluido lubrificante. Este projeto apresenta uma análise geral por elementos finitos, do comportamento dinâmico de um rotor simples a diferentes velocidades de rotação N e para diferentes condições de excitação, obtendo-se assim: os parâmetros modais, frequências naturais, amortecimento e modos de vibrar.

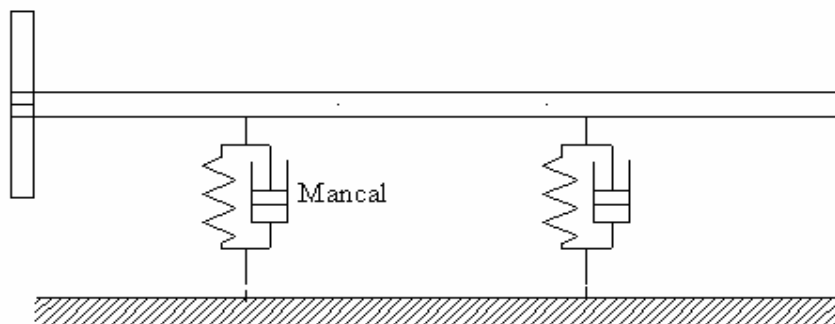
Um rotor se define como um sistema composto basicamente por um eixo árvore, um ou mais discos e também mancais com seus respectivos rolamentos ou buchas de deslizamento como ilustrado na figura 1.1 e no esquema da figura 1.2.

FIG.1.1 ROTOR COM MANCAIS DE ROLAMENTO



Fonte: Santos, Hideraldo L. V. "Dinâmica de Rotores". 2003.

FIG.1.2 ROTOR COM MANCAIS DE DESLIZAMENTO



Fonte: Santos, Hideraldo L. V. "Dinâmica de Rotores". 2003

Como se sabe, o conhecimento preciso destes parâmetros permite determinar ou identificar totalmente as características dinâmicas do sistema. A partir do conhecimento destes parâmetros é possível calcular a resposta do sistema e diferentes tipos de excitação, no domínio do tempo ou no domínio da frequência, estudar as condições de instabilidade do sistema, mostrar os pontos de máxima amplificação do sistema para cada frequência natural do mesmo.

O sistema computacional feito em MATLAB, desenvolvido por Lopez (2002) e Santos (2003), com diferentes simulações, inclui assim, os recursos para modelagem de rotores pelo Método de Elementos Finitos, a determinação de modos de vibração as frequências naturais, resposta a massa desbalanceada.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo para prever a matriz de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos para adicionar ao modelo numérico antes mencionado e já desenvolvido. Mostrar as metodologias desenvolvidas por Vance, Childs e Capone (1991) para encontrar tais matrizes e comparar os resultados encontrados pelo primeiro autor com o programa desenvolvido pela Renk, fabricante de mancais. De este modo encontrar as características dinâmicas de um rotor simples (rotor-mancal-disco), estender à análise dinâmica a incorporação dos efeitos hidrodinâmicos dos mancais.

Os mancais têm sido representados na literatura por duas propriedades básicas: rigidez e amortecimento. Para elevar as velocidades críticas acima da faixa de operação, poder-se-ia imaginar que os mancais e as estruturas a eles associadas deveriam ter a maior rigidez possível. No entanto, quando isto ocorre o amortecimento do sistema é muito reduzido, pois uma alta rigidez não permite movimento suficiente para a ação desse amortecimento. Além disso, praticamente todo o amortecimento responsável pela dissipação de energia - na maioria dos sistemas rotor-mancal está nos suportes Vance (1988). Assim, nos projetos de rotores modernos são especificados

suportes com baixa rigidez, de forma que as duas primeiras velocidades críticas estejam abaixo da faixa de operação, permitindo um efetivo amortecimento nos suportes.

O amortecimento nos suportes é na maioria das aplicações desejável, uma vez que pode reduzir a resposta síncrona ao desbalanceamento próximo de velocidades críticas e suprimir a instabilidade dinâmica.

Este trabalho está dividido em 8 capítulos.

O capítulo 3 apresenta-se os mancais em geral, o princípio de funcionamento de um mancal, os mancais hidrodinâmicos, coeficientes de rigidez e amortecimento, os modelos desenvolvidos por Vance, Childs e Capone (1991). No capítulo 4 apresenta-se o modelo de rotores por Elementos Finitos, onde as matrizes associadas às características de inércia, rigidez e amortecimento são demonstradas para os principais componentes dos rotores, as equações do movimento do rotor e forças de excitação. No capítulo 5 apresenta-se a resolução, como problema de autovalores, ortogonalidade, diagrama de Campbell e instabilidade. No capítulo 6 apresenta-se a resposta na frequência, ou seja, desbalanceamento, resposta no domínio do tempo, massa desbalanceada. No capítulo 7 apresenta-se os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido por Vance e pela Renk para encontrar as matrizes de rigidez e amortecimento e as simulações realizadas usando esses coeficientes e deste modo faz-se uma comparação entre os dois modelos. As conclusões do presente trabalho estão expostas no capítulo 8, e no apêndice encontra-se o desenho do projeto do eixo árvore desenvolvido pela WEG.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura apresenta um farto material sobre a obtenção das equações de movimento de rotores, destacando-se o método das Matrizes de Transferência, Rayleigh-Ritz e elementos finitos, como em Vance (1988), Lalanne e Ferraris (1990) *et al.*(1998), entre outros. Para rotores mais complexos, a análise do comportamento dinâmico geralmente é feita utilizando o método dos elementos finitos. Na sua essência, o método dos elementos finitos expressa o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, ditos pontos nodais, multiplicados por uma função de interpolação. Este método produz resultados satisfatórios no estudo de problemas estruturais, sendo utilizado em um grande número de programas comerciais voltados para a análise estática e dinâmica de sistemas mecânicos.

Vance (1988) diz que existem, também, forças desestabilizadoras produzidas pelo amortecimento interno do eixo de rotor. Medidas experimentais têm mostrado que o amortecimento interno é não viscoso, mas modelá-lo como amortecimento viscoso é uma aproximação útil para análise de estabilidade acima de um intervalo limite de frequências.

Manocorda (1965) estudou o problema de pequenos desalinhamentos de mancais hidrodinâmicos curtos simples, encontrando valor do torque produzido pelo filme do óleo. No instante, ao integrar a pressão no interior do mancal, concluiu que o valor da força resultante produzida pelo mancal hidrodinâmico não se alterou devido a pequenas inclinações, quando comparadas à inclinação máxima possível devido a espessura do filme óleo, do eixo de simetria do rotor no interior do mancal.

Meggiolaro (1996) fez a análise do comportamento de sistemas rotativos do tipo eixo-rotor-mancal onde é estendida para incluir os efeitos da presença de mancais hidrodinâmicos na resposta dinâmica. Estes efeitos estão associados à não-linearidade da força de reação exercida pelos suportes sobre o eixo e dependem dos deslocamentos, velocidades transversais e da rotação própria do rotor. A modelagem estrutural do sistema foi obtida empregando-se o método dos elementos finitos. O eixo foi então representado pelo modelo de viga de Timoshenko com dois nós, quatro

graus-de-liberdade por nó, e a interpolação do campo de deslocamentos foi obtida utilizando-se as funções de Hermite. Os rotores foram, modelados empregando-se elementos de inércia concentrada associada aos graus-de-liberdade de um ponto nodal do modelo. E, na representação dos mancais hidrodinâmicos utilizou-se a equação de Reynolds, com as hipóteses simplificadoras para mancais curtos, obtendo-se a solução para a distribuição de pressão do filme de óleo em forma fechada. Esta distribuição de pressão permitiu a obtenção dos coeficientes das matrizes de rigidez e de amortecimento associadas aos graus de liberdade do eixo no ponto nodal de representação do mancal. Para a integração temporal do sistema de equações diferenciais utilizou o procedimento passo-a-passo, tendo-se implementado os métodos implícitos de Newmark e Wilson-6, na forma incondicionalmente estável. Devido à não-linearidade das equações obtidas com a presença dos mancais hidrodinâmicos, em cada intervalo de tempo utilizou o procedimento de Newton-Raphson modificado para a correção da solução numérica. O desempenho do sistema computacional proposto foi avaliado através da comparação das soluções numéricas obtidas com outros resultados analítico-numéricos disponíveis na literatura.

Rocha (1992) que também fez a análise do comportamento dinâmico de sistemas rotativos do tipo eixo-disco-mancal fala em sua obra que a simulação matemático-computacional é um recurso indispensável, no sentido de se ter um melhor conhecimento do sistema como também atenuar as dificuldades inerentes e corroborar o processo experimental. Além disso, o desconhecimento teórico do comportamento do sistema pode levar em muitos casos à escolha indevida dos pontos de medição. Assim incluiu no seu material, aspectos da dinâmica da rotação, a modelagem de sistemas rotativos pelo Método dos Elementos Finitos, a determinação de modos e frequências naturais, o estudo das propriedades matemáticas do problema de autovalor associado, o cálculo da resposta forçada em regime permanente às excitações síncronas e assíncronas com a rotação e o cálculo da resposta no tempo por superposição modal e integração direta.

Abreu (2001) apresentou um trabalho cujo objetivo principal era conhecer o comportamento dinâmico de um turbogerador a vapor pela análise de vibração de seu

rotor. Onde oscilações do rotor foram medidas através de sensores instalados em seus mancais e modeladas num programa computacional de elementos finitos para sistemas rotativos, a fim de proporcionar um melhor entendimento de seu comportamento operacional nas várias condições de carga e de velocidade a fim de formar uma base de informações para o planejamento de um programa de manutenção preditiva.

Madeira (2003) diz que sistemas rotativos têm características muito particulares, que requerem um tratamento específico. Geralmente em *softwares* comerciais de análise estrutural, o enfoque específico sob o ponto de vista rotodinâmico não é disponível. Sua pesquisa mostra uma análise rotodinâmica realizada como uma ferramenta auxiliar para procedimentos de manutenção preditiva de máquinas rotativas com fenômenos não-lineares agregados. Utilizando o programa ROTMEF[®] que modela e simula o comportamento de sistemas rotor-mancal baseado no Método de Elementos Finitos. O eixo foi modelado como elemento unidimensional de viga de Timoshenko de quarto grau de liberdade por nó. O efeito giroscópio foi considerado, a resposta livre (frequências naturais e modos) e forçada (resposta permanente e transitória) foram calculadas para problemas de flexão. Muitos dos fenômenos envolvidos na investigação de falhas em sistemas rotativos são não-lineares. A estratégia de solução do software permite que qualquer dos elementos possa ter comportamento não-linear.

Curi (2003) desenvolveu um método de monitoramento não evasivo para a detecção do colapso do filme de lubrificação em mancais de deslizamento radial, através do sinal de vibração. Sua dissertação trata de mancais em diversas condições de funcionamento, diagnosticando a transição de regime de lubrificação desde uma condição sem contato até outras condições com contacto, realizada através de análise de sinais de vibração que obteve da bancada construída para estes ensaios; as condições de trabalho no mancais são modificadas pela aplicação de cargas radiais. Atualmente não existe uma técnica que prediz a falha por contacto nos mancais. O regime de lubrificação limite ocorre quando há contato entre o eixo e o mancal. Esta condição foi verificada por meio do monitoramento da resistência entre o eixo e o mancal. Os sinais de vibração foram obtidos por acelerômetros posicionados

verticalmente sobre os mancais hidrodinâmicos. A carga aplicada foi monitorada por meio de uma célula de carga. A experiência consistiu em aplicar diversos carregamentos sobre o eixo e coleta de sinais de vibração e resistência elétrica. Os resultados mostram que os sinais de vibração permitem distinguir entre as duas condições: contato e não contato, através de análises de sinais. A determinação da condição com ou sem contato entre o eixo e o mancal pode ser estabelecida pelo valor de RMS do sinal de vibração. Quando se encontra sem contato o valor de RMS é menor e quase constante, mesmo com a mudança da carga. Ao passo que com contato, o valor de RMS é incrementado de forma proporcional à carga. Os sinais no domínio da frequência são compostos por harmônicas e não harmônicas. As primeiras seis harmônicas da frequência de rotação apresentam características diferentes na condição de contato e não contato. Quando não há contato, o aumento da carga provoca diminuição da amplitude destas harmônicas, quando há contato ocorre o contrario. Portanto, a análise de vibração permite a detecção de falhas de lubrificação em mancais hidrodinâmicos.

Duarte Junior (1987) fez uma derivação da equação de Reynolds a partir das equações de conservação da massa e quantidade de movimento. E desenvolveu uma metodologia numérica baseada no método das diferenças finitas e o método da relaxação para a solução da equação de Reynolds para mancais sob carregamento estático e dinâmico. Para implementar o algoritmo de solução numérica foram desenvolvidos dois programas de computador chamado MANCAL e LOCUS. Para a simulação de mancais sob carregamento estático e dinâmico, respectivamente. E mostrou como os resultados do programa LOCUS podem auxiliar projetistas de mancais para motores de combustão interna. O programa LOCUS é usado para simular a órbita de um pino dentro do cubo de um pistão. As pressões hidrodinâmicas obtidas são usadas como condições de contorno para uma análise de distribuição de tensões. E mostrou, pela primeira vez, porque algumas modificações geométricas no cubo do pistão diminuem a probabilidade de trincas na superfície do mesmo e aumentam, consideravelmente, a capacidade de carga do mesmo. E também introduziu o conceito de perfilamento axial par a mancais hidrodinâmicos. Mostrando, através de simulações

com o programa LOCUS, que é possível alterar benéficamente os parâmetros operacionais de um mancal através de micro modificações na superfície do mesmo.

Zachariadis (2000) fala em seu trabalho que o desalinhamento angular dos moentes de mancais hidrodinâmicos é um fator que pode assumir papel essencial para a correta análise do comportamento dinâmico desses equipamentos. Desenvolveu diversas formulações e modelos que propiciam descrições qualitativas e quantitativas dos efeitos do desalinhamento angular nas vibrações lineares de máquinas rotativas. Com isso é possível identificar diversas situações em que a utilização do modelo de mancais tradicionalmente empregado no estudo de vibrações lineares de rotores leva a resultados inválidos. Para que não acontecesse propôs o uso do modelo completo de mancais, que inclui no modelo tradicional os esforços decorrentes das vibrações angulares do moente. Os recursos desenvolvidos permitem o cálculo dos esforços hidrodinâmicos em mancais bem como dos coeficientes do modelo completo, e a sua utilização na análise de vibrações de rotores através de modelos de elementos finitos. Os casos enfocados vão desde sistemas muito simples, como o rotor de Jeffcott/Laval, até o estudo de rotores hiperestáticos apoiados em diversos mancais sujeitos a desalinhamentos.

Arndt (2001) apresenta uma nova variação do Método dos Elementos Finitos (MEF), chamado Método dos Elementos Compostos (MC). O MC é desenvolvido combinando a versatilidade do MEF e a alta precisão das soluções analíticas da Teoria Clássica (TC). As soluções analíticas, que satisfazem certas condições de contorno especiais, são adicionadas às funções de forma do MEF formando um novo conjunto de funções de forma. O MC admite dois tipos de refinamentos: h e c. O refinamento h, semelhante ao do MEF, corresponde ao aumento do número de elementos. O refinamento c corresponde ao acréscimo do número de graus de liberdade relativos à TC, denominados graus de liberdade c. Investigou a aplicação do MC na análise de vibrações. Os elementos compostos de treliça, viga de Euler-Bernoulli e pórtico são desenvolvidos. As frequências e modos de vibração obtidos pelo MC são comparados aos resultados do MEF e da TC. Os resultados numéricos mostram que o MC é mais preciso que o MEF com o mesmo número total de graus de liberdade. Observou-se que o refinamento c do MC é hierárquico e leva a uma superconvergência dos resultados.

Yih- Hwang Lin. e Sheng-Cheng Lin (2001) estudou qual o melhor peso para um rotor. Demonstrou que pode ser alcançada uma redução significativa no de peso do rotor estudando a estabilidade do sistema através da parte real do autovalores.

Xingjian Dai, Zupei Shen, e Haigang Wei (2001), fala em seu trabalho que o rolamento magnético permanente e o rolamento espiral hidrodinâmicos de pequenos sulcos, no qual o sistema do volante faz armazenamento de energia, são utilizados como sustentações para rotores. O rolamento hidrodinâmico e o amortecimento da película não necessitam o ciclo do óleo remover o calor causado pela fricção porque a perda da fricção é pequena. O modelo linear da dinâmica com quatro graus de liberdade foi construído para descrever a vibração do sistema do rotor-rolamento do volante. Os amortecedores da folga da película mostram o comportamento bom em suprimir a vibração e em melhorar a estabilidade do sistema do rotor-rolamento. A solução analítica dos coeficientes característicos dinâmicos da folga da película foi conseguida da equação de Reynolds depois que algumas simplificações feitas. A computação numérica mostrou que o desequilíbrio do momento excita a vibração maior do rotor do que o desequilíbrio da força. O amortecedor da parte superior tem um papel importante em ajudar a passagem do rotor na sua velocidade crítica. O coeficiente amortecido dos amortecedores da folga da película deve ser selecionado cuidadosamente.

Silveira (2001) analisou, utilizando o método dos elementos finitos, o comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados. Os rotores são formados por um ou dois discos acoplados à um eixo apoiado em mancais flexíveis. Os eixos são, neste caso, fabricados a partir do bobinamento de fibras impregnadas em resina sobre um mandril. Os discos são considerados rígidos e um elemento do tipo viga com módulo equivalente foi utilizado para modelar o eixo do rotor. Um modelo de amortecimento interno foi introduzido através de um módulo equivalente amortecido. Foram determinadas a resposta a uma massa desbalanceada e as zonas de instabilidade para os modos em flexão de rotores apoiados em mancais com diferentes configurações. Nos modos em torção, foram determinadas as frequências naturais e os respectivos fatores de amortecimento, bem como a resposta em frequência. Os resultados obtidos com o eixo em carbono/epóxi e em vidro/epóxi mostraram que o

ângulo de bobinagem do eixo pode ter forte influência na localização das frequências naturais, tanto nos modos em flexão quanto em torção. O amortecimento interno, proveniente do material composto, pode reduzir consideravelmente os picos de amplitudes de vibrações, porém pode gerar instabilidade no sistema. As vantagens e a flexibilidade oferecidas pelo uso de materiais compostos em rotores, um método de otimização foi utilizado para minimizar picos de amplitude, evitar zonas de instabilidade e determinar a posição ótima das velocidades críticas, tendo como variáveis de projeto o ângulo de bobinagem, as rigidezes dos mancais e a posição do disco no eixo.

Crosby (1982) fez uma análise da estabilidade do movimento plano de um rotor rígido suportados por uma película de óleo que têm um comprimento finito e sujeitos a uma carga externa constante e uma carga de desequilíbrio. O giro do óleo foi investigado para uma película rompida sob circunstâncias de limite de separação. As equações não-lineares de movimento foram resolvidas usando métodos numéricos, onde foram obtidas trajetórias de centro do eixo para condições diferentes de carregamento e da velocidade. A curva de limiar de estabilidade foi traçada e comparada com as curvas de investigadores precedentes obtidas de outras suposições e condições de limite.

D. L. Brown, R. J. Allemang e Ray Zimmerman (1979) utilizaram técnicas de estimação de parâmetros que podem determinar os parâmetros modais como frequência, amortecimento, e a forma dos modos. A resposta da frequência foi medida experimentalmente. Para tal análise foram separados em duas categorias, a primeira com um ajuste da curva de um só grau de liberdade com ou sem resíduos. E a segunda um ajuste da curva de múltiplos graus de liberdade sem resíduos.

A. Muszynska (1986) apresentou um modelo matemático de um rotor simétrico rígido descarregado suportado por um mancal lubrificado por um fluido. O modelo do rotor é representado por parâmetros (modal) generalizados de seu primeiro modo de vibração. O modelo rendeu vibrações síncronas devido ao desequilíbrio do rotor como uma solução particular das equações de movimento, rotor/mancal, frequências naturais do sistema e vibrações alto-excitadas correspondendo como "giro do óleo" e "chicote do óleo." A análise de estabilidade rende o limiar de velocidade rotativa da estabilidade. O modelo dá também uma avaliação falsa da estabilidade das

vibrações síncronas do rotor. Na primeira velocidade ressonância é encontrada na região de equilíbrio mais dois limiares de estabilidade. A largura desta região da estabilidade é relacionada diretamente à quantidade de desequilíbrio do rotor.

J.W.LUND e E. SAIBEL (1967) fez uma análise das oscilações alto-excitadas, conhecido como "chicote de óleo", de um rotor suportado em mancais. A fonte da instabilidade é a força hidrodinâmica do filme fluido do mancal. As equações do movimento são não-lineares, e são estudados para determinar os ciclos do limite do sistema, também chamadas órbitas do giro. As equações não-lineares são resolvidas pelo método de calcular a média donde as órbitas do giro são obtidas diretamente. Os resultados são dimensionais e foram determinados através de gráficos. Mostram sob que órbitas do giro e das circunstâncias podem existir, e a posição e o tamanho das órbitas também são determinados. É visto que as órbitas só são encontradas em um intervalo de velocidade relativamente estreito ao redor da velocidade à qual o equilíbrio estático fica instável.

Capone (1991) propôs um procedimento analítico para a determinação fluidodinâmica estacionária de uma estrutura de rotor lubrificado. Esta análise faz referência a lubrificação de mancais cilíndricos nas condições de lubrificação estacionária hidrodinâmica, em regime de laminar de fluxo isoterma, adotando a teoria dos "mancais curtos". Nos limites de validade das suposições terminadas, é fornecida na forma explícita a relação que o fluido dinâmico tem com o eixo do mancal. Para uma finalidade do exemplo, o modelo proposto foi empregado para a determinação dos movimentos orbitais do eixo de um rotor rígido em mancais cilíndricos lubrificados.

Ola Blom (2002) realizou um estudo usando o programa MathModelica de simulação que é baseado na linguagem objecto-orientado Modelica, que trata os componentes que dão forma às partes do sistema são tratados como componentes distintos. O sistema do estudo foi um gerador consistindo do sistema da geração de energia, engrenagem, turbinas e mancais. Os elementos finitos do feixe foram usados para construir um modelo de rotor e onde as matrizes da rigidez e amortecimento representam os mancais.

3 OS MANCAIS

As características de um sistema rotativo são fortemente influenciadas pelos mancais. Isto porque a rigidez do sistema é determinada pela rigidez dos mancais agindo em série com a rigidez do eixo e o amortecimento do sistema é em grande parte fornecido pelos mancais, Vance (1988).

Mancais são dispositivos responsáveis pela ligação entre a parte móvel e a estrutura fixa de uma máquina rotativa. Além de absorvedor de energia, outra importante função dos mancais é o de guiar ou restringir graus de liberdade durante a movimentação do eixo.

Os mancais são considerados, de uma maneira simplificada, como elementos de suporte, dispostos discretamente ao longo do eixo, e representados por matrizes de rigidez e de amortecimento associados aos deslocamentos u e w no apoio. O efeito é considerado no modelo numérico adicionado-se ao sistema de equações as condições de vínculo elástico e amortecimento entre eixo e apoio rígido. Os mancais são representados por coeficientes K_{xx} , K_{zz} , K_{xz} , K_{zx} , que são de rigidez e C_{xx} , C_{zz} , C_{xz} e C_{zx} que correspondem a elementos de amortecimento.

Há dois tipos de mancais quanto a sua construção: mancais de rolamento e mancais de deslizamento. Os mancais de rolamento avisam previamente antes de ocorrer uma falha, como por exemplo, vibrações em alta frequência e ruídos. O uso da teoria de contato de Hertz, assim como análises experimentais, pode fornecer as propriedades de rigidez e de amortecimento. Porém, se os mancais de rolamento são montados sobre elastômeros, as propriedades de rigidez e amortecimento são fornecidas quase que inteiramente pelo elastômero. Os mancais de fluido são mais usados devido a sua longa vida. A maioria dos mancais de fluido é hidrostática, devido à carga que é suportada pela pressão hidrostática, ou hidrodinâmicos, onde a carga é suportada pela pressão hidrodinâmica gerada pelo movimento do rotor. Nestes casos, as propriedades de rigidez e amortecimento são obtidas a partir da solução da equação de Reynolds, Vance (1988).

Na modelagem há dois tipos básicos de mancais:

Mancais radiais: visam reduzir os deslocamentos transversais do eixo. Neste capítulo serão calculados os coeficiente de rigidez e amortecimento para mancais hidrodinâmicos simples.

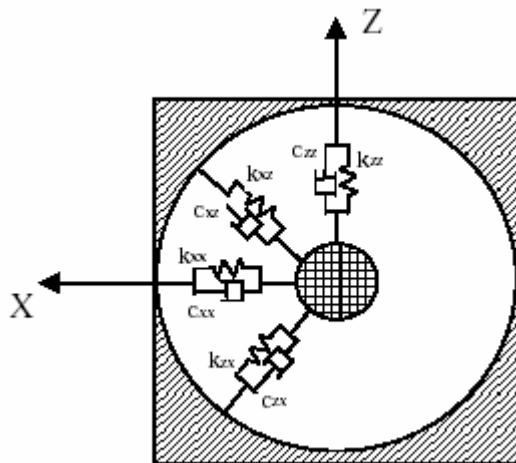
Mancais de escora : visam impedir os deslocamentos axiais do eixo.

A Figura 3.1 mostra graficamente o modelo de um mancal, onde:

- K_{xx} , K_{zz} , C_{xx} e C_{zz} são rigidezes e amortecimentos nas direções X e Z do eixo.
- K_{xz} , C_{xz} são a rigidez e o amortecimento aplicados na direção X porém com efeitos na direção Z .
- K_{zx} , C_{zx} são a rigidez e o amortecimento aplicados na direção Z porém com efeitos na direção X .

Os quatro últimos termos são denominados como termos de acoplamentos.

FIG. 3.1 - MODELO DE UM MANCAL.



Fonte: Zachariadis, Demetrio C., "Estudo dos Efeitos do Desalinhamento Angular de Mancais Hidrodinâmicos nas Vibrações de Rotores Flexíveis" 2000,

Os mancais foram modelados conforme o esquema representado na figura 3.1. Os valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento são previamente calculados de acordo com o tipo de mancal, o qual é descrito no capítulo seguinte. As direções tomadas como referencia estão indicadas na figura 3.1.

O trabalho virtual δW das forças agindo sobre os mancais é dado como, Lalanne e Ferraris (1990) *et al*:

$$\begin{aligned} dW = & -k_{xx}u du - k_{xz}w du - k_{zz}w dw - k_{zx}u dw - \\ & -c_{xx}\dot{u} du - c_{xz}\dot{w} du - c_{zz}\dot{w} dw - c_{zx}\dot{u} dw \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde du e dw são os deslocamentos virtuais nas direções X e Z respectivamente.

Ou também pode-se escrever desta forma:

$$dW = F_u du + F_w dw \quad (3.2)$$

Sendo F_u e F_w os componentes da força generalizada atuante sobre o eixo:

$$\begin{aligned} F_u = & -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \\ F_w = & -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se o mancal localiza-se em um nó i , a expressão matricial do sistema anterior torna-se, presente que $F_q = F_y = 0$, devido que o mancal não provoca nenhum momento de flexão sobre o eixo por ser, este modelo, um elemento “puntual”.

Como $F_q = F_y = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{u_i} \\ F_{w_i} \\ F_q \\ F_{y_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A primeira matriz é a matriz de rigidez do mancal e a segunda, a matriz de amortecimento viscoso do mancal.

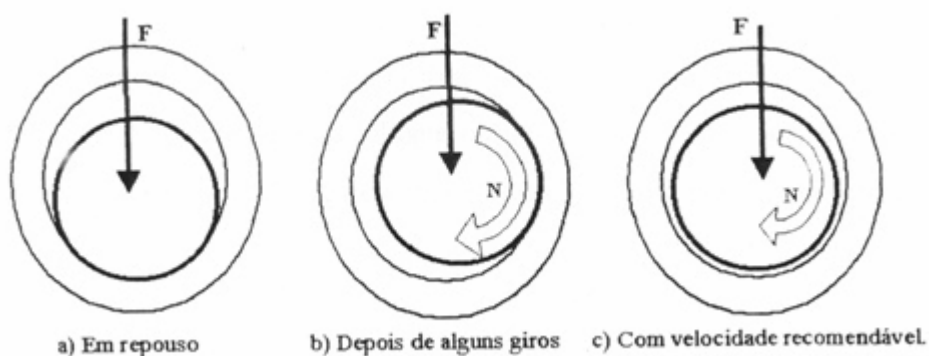
Ainda que o mancal origine forças que atuam sobre o eixo, as quais foram analisadas como forças generalizadas, pode-se observar através da expressão anterior que as forças dependem do deslocamento nodal e da velocidade nodal. Portanto, na resolução do sistema matricial, as matrizes de rigidez e amortecimento dos mancais devem adicionar as respectivas matrizes globais do sistema surgidas a partir da montagem das matrizes elementares.

3.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM MANCAL HIDRODINÂMICO

A condição básica para o mancal de deslizamento funcionar bem é a existência de uma separação causada pelo óleo através de um filme entre o eixo e a bucha. Isto se deve ao equilíbrio entre a pressão do óleo e as provenientes do eixo. A Figura 3.2 esquematiza o princípio de funcionamento do mancal radial de deslizamento:

- Figura a: Inicialmente, encontram-se eixo árvore e mancal em contato;
- Figura b: Depois de iniciado o giro, o eixo árvore tende a subir pela superfície da bucha do mancal, no sentido contrário à rotação;
- Figura c: Devido à presença do óleo e por efeito da cunha dos fluidos, o eixo árvore se posiciona no espaço e devido à pressão hidrodinâmica pode se posicionar sem contato com a bucha. As pressões são geradas porque a rotação do eixo produz um fluxo no lubrificante e mudança da geometria por onde ele circula, modifica as pressões em cada ponto do interior conforme as leis da mecânica dos fluidos, ou seja, a pressão do óleo fica em equilíbrio com as forças atuantes no rotor.

FIG 3.2. AS TRÊS POSIÇÕES DO EIXO AO INICIAR SEU FUNCIONAMENTO

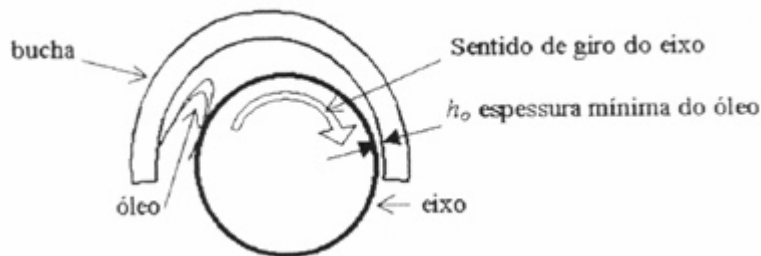


Fonte: Curi, E.I.M.-, "Sistema de Monitoramento e Detecção de Transição de Regime de Lubrificação em Mancal de Deslizamento", 2003

A pressão hidrodinâmica depende de vários fatores, tais como velocidade de rotação, viscosidade do lubrificante, folga do mancal, diâmetro, comprimento da

bucha, e carga aplicada. Se esta pressão hidrodinâmica supera a pressão atuante, gera-se um filme de óleo de espessura mínima h_0 , e por consequência não existe contato entre o eixo e a bucha. Na figura 3.3 é apresentado um esquema do efeito de cunha, pode-se observar a tendência do eixo a puxar óleo desde um espaço maior a outro menor. A pressão em mancais hidrodinâmicos é obtida a partir do movimento de rotação do eixo árvore, obrigando o fluido a escoar em uma fina camada.

FIGURA 3.3. O ÓLEO É ARRASTADO PARA A REGIÃO CONVERGENTE (EFEITO DE "CUNHA").



Fonte: Curi, E.I.M. "Sistema de Monitoramento e Detecção de Transição de Regime de Lubrificação em Mancal de Deslizamento", 2003

3.2 MANCAIS HIDRODINÂMICOS SIMPLES

Childs (1993) propõe uma versão da Equação de Reynolds, sob as considerações:

1. o óleo é um fluido Newtoniano, incompressível, em regime de escoamento laminar, com forças de corpo nulas e viscosidade constante
2. velocidade do óleo é nula na direção radial
3. espessura da camada de óleo é constante na direção axial (eixo de simetria do mancal paralelo ao eixo de simetria do rotor), resultando em

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 12 \mathbf{m} \left[\frac{R}{C_r} \right]^2 \left(\frac{\mathbf{v}}{2} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (3.5)$$

onde:

ω = velocidade de rotação do rotor

e = excentricidade do rotor

C_r = espessura do filme quando $e = 0$

ε = excentricidade normalizada, seja $\varepsilon = e / C_r$

$H(\theta, t)$ = espessura do filme de óleo a cada instante ao longo da circunferência do mancal

$$H(\theta, t) = C_r + e_{(t)} \cos \theta \quad (3.6)$$

$$h(\theta, t) = \text{espessura normalizada, } h(\theta, t) = H(\theta, t) / C_r \quad (3.7)$$

γ = ângulo entre a direção da excentricidade e a direção da força externa sobre o rotor
(seu peso por exemplo)

μ = viscosidade do óleo

R = raio do rotor

Resolvendo-se a eq. (3.5) obtém-se o campo de pressões no rotor do mancal em função do seu movimento. Este campo de tensões, integrado na superfície do eixo do mancal, fornece as forças de reação nos apoios. Neste caso, o campo de pressões no interior do mancal hidrodinâmico apresentado na figura 3.2 é função apenas das coordenadas θ e Z .

Curi (2003) estudou o problema de pequenos desalinhamentos de mancais hidrodinâmicos curtos simples, encontrando o valor do torque produzido pelo filme de óleo. No instante, ao integrar a pressão no interior do mancal, concluiu que o valor da força resultante produzida pelo mancal hidrodinâmico não se alterou devido a pequenas inclinações, quando comparadas à inclinação máxima possível devido à espessura do filme de óleo, do eixo de simetria do rotor no interior do mancal. Com isso a hipótese 3 se mostra satisfatória para essas pequenas inclinações entre eixos.

Quanto à solução analítica da eq. (3.5), esta é factível apenas em dois casos de mancais hidrodinâmicos:

- a) Solução para mancais longos (Sommerfeld) Meggiolaro (1996).

Nesta condição, o gradiente da pressão na direção axial é muito menor do que o gradiente na direção circunferencial, devido as condições de contorno, de modo que a taxa de variação da pressão na coordenada θ é muito menor que na coordenada axial z , e assim pode-se desprezar o segundo termo da eq. (3.5).

b) Solução para mancais curtos (Ocvirk) Meggiolaro (1996):

Nesta configuração, o gradiente da pressão na direção axial z é muito alto em relação ao gradiente na direção circunferencial, devido às condições de contorno. Por este motivo, pode-se desprezar o primeiro termo da eq. (3.5) e a aproximação de Ocvirk é aplicável nas situações em que $L / D < 0,5$ e para razões de excentricidade $\varepsilon < 0,7$.

Nestas condições, a equação de Reynolds (3.5) se reduz:

$$C_r^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 12 \mathbf{m} \left(\frac{\mathbf{v}}{2} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

onde a solução para a eq. (3.2) é obtida, através de integração direta em z :

$$P(z, \mathbf{q}) = \frac{3}{4} \mathbf{m} \mathbf{v} \frac{L^2}{C_r^2} \frac{(x - 2\dot{y}) \sin \mathbf{q} - (y + 2\dot{x}) \cos \mathbf{q}}{h^3} (4z^2 - 1) \quad (3.9)$$

Definida a partir dos parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{C_r} & y &= \frac{Y}{C_r} & z &= \frac{Z}{L} \\ \dot{x} &= \frac{\partial X / \partial t}{\mathbf{v} C_r} & \dot{y} &= \frac{\partial Y / \partial t}{\mathbf{v} C_r} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nota-se que esta solução fornece valores da pressão negativos na região de coordenadas $\alpha - \pi < \theta < \alpha$, onde:

$$\mathbf{a} = \tan^{-1} \frac{(y + 2\dot{x})}{(x - 2\dot{y})} - \frac{\mathbf{p}}{2} \text{sign} \frac{(y + 2\dot{x})}{(x - 2\dot{y})} - \frac{\mathbf{p}}{2} \text{sign}(y + 2\dot{x}) \quad (3.11)$$

$$\text{sign}(p) = \begin{cases} -1, & \text{se } p < 0 \\ 0, & \text{se } p = 0 \\ +1, & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

Considerando que a pressão hidrostática no interior do mancal apresenta uma contribuição ao equilíbrio muito menor que a pressão hidrodinâmica, obtém-se que a pressão na faixa $\alpha - \pi < \theta < \alpha$ é nula. Isso ocorre devido ao fato de os efeitos de cavitação vaporizarem a camada de óleo, Meggiolaro (1996), não permitindo a ocorrência de pressões negativas (vácuo). Essa premissa da fenomenologia envolvida (condição de Gumbel) fornece a solução conhecida como solução para mancais π , que considera os efeitos de cavitação. Há três condições de contorno comumente encontradas na literatura para um mancal circular: Sommerfeld, Gumbel e Reynolds Meggiolaro (1996):

A condição de contorno de Sommerfeld não preconiza a interpretação física do rompimento do filme do óleo, enquanto que a condição de Gumbel corrige o problema da ocorrência na solução analítica da pressão negativa, apresentando no entanto, solução com derivada não continua no ponto $\theta = \pi$. A condição de contorno de Reynolds preconiza ambas condições, mas implica na perda da simplicidade das equações resultantes.

A partir da distribuição de pressão no filme de óleo da eq. (3.3), os coeficientes das matrizes de rigidez e amortecimento para mancais curtos foram obtidos por Childs (1993), com as seguintes aproximações:

- o cálculo é feito apenas nos pontos de equilíbrio estático do rotor devido à uma força externa constante,

- a influência da velocidade de precessão do rotor é desprezada.

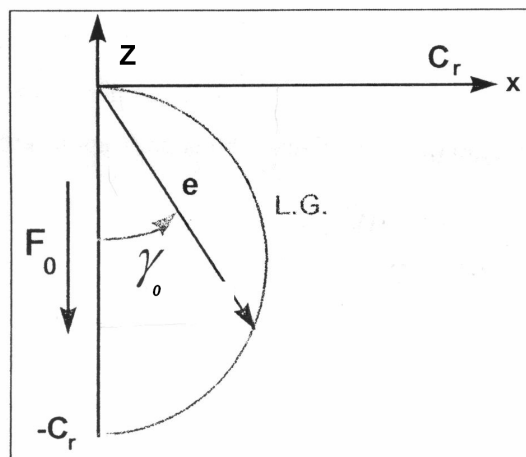
A posição de equilíbrio do rotor sujeito a uma força constante F_0 (o peso, por exemplo), foi obtida considerando-se ϵ_0 a excentricidade do rotor no ponto de equilíbrio e γ_0 a ângulo entre o vetor excentricidade e a força, obtém-se:

$$F_0 = \frac{m\omega RL^3}{4C_r} \frac{\epsilon_0 \sqrt{16\epsilon_0^2 + p^2(1-\epsilon_0)^2}}{(1-\epsilon_0^2)^2} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{g}_0 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{p\sqrt{1-\epsilon_0}}{4\epsilon_0} \right) \quad (3.13)$$

O lugar geométrico dos pontos de equilíbrio do rotor no plano x-z do mancal esta indicado na figura 3.4.

FIG. 3.4.LUGAR GEOMÉTRICO DO PONTO DE EQUILÍBRIO DO ROTOR



Fonte: Meggiolaro, M. A-, "Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos na Simulação de Sistemas Rotativos",1996

Nesta figura observa-se que, associada à reação vertical F_0 , tem-se deslocamentos nas duas direções devido ao acoplamento da matriz rigidez aos deslocamentos nas duas direções no plano do mancal, e para uma pequena força (módulo da excentricidade próximo de zero) essa não linearidade é muito acentuada. Este fato é observado através do valor da derivada do lugar geométrico na região próxima a origem.

Segundo Shigley (2001) as soluções da Equação de Reynolds para mancais, se reduzem aos gráficos adimensionais de Raimondi e Boyd. Estes gráficos estão em função do número de Sommerfeld (S) que esta definido em 3.3. Estas cartas gráficas foram publicadas em 1958. As notas de Raimondi e Boyd foram publicadas em três partes e contém 45 gráficos detalhados e 6 tabelas de informação numérica.

Segundo Curi (2003) "Nos EUA utilizam-se estes gráficos para o projeto de mancais hidrodinâmicos. Na Europa utilizam-se procedimentos (ISO/dis 7902-1 ou DIN 31652) baseados em resultados aproximados da equação de Reynolds".

Com relação aos diagramas citados, eles estão em função de $L/D = 1/4, 1/2, 1$ e ∞ . Suas escalas são logarítmicas com exceção de uma proporção linear entre zero e

0,01. Para valores de L/D intermediários é utilizada a seguinte equação de interpolação, dada por Raimondi e Boyd e utilizados para as figuras 3.6 e 3.7:

$$y = \frac{1}{\left(\frac{L}{D}\right)^3} \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{8} \left(1 - \frac{L}{D}\right) \left(1 - \frac{2L}{D}\right) \left(1 - \frac{4L}{D}\right) y_{\infty} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2L}{D}\right) \left(1 - \frac{4L}{D}\right) y_1 - \\ &-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{L}{D}\right) \left(1 - \frac{4L}{D}\right) y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \left(1 - \frac{L}{D}\right) \left(1 - \frac{2L}{D}\right) y_{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right] \quad (3.14)$$

onde y é a variável desejada de comportamento para qualquer proporção L/D maior de $\frac{1}{4}$ e $y_{\infty}, y_1, y_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{4}}$ são os valores dessa variável nas suas respectivas razões.

O gráfico da figura 3.6 também mostra que a lubrificação hidrodinâmica tem uma faixa limitada por duas curvas, a de carga máxima que está à direita e a de atrito mínimo à esquerda. Fora daquela faixa ou perto dela a situação é desfavorável.

O método de Raimondi e Boyd, chamada meio dos gráficos experimentais ou cartas gráficas, foi utilizado para encontrar através do número de Sommerfeld, a excentricidade ϵ , correspondente à relação L/D . Esta escolha foi feita, porque os gráficos propõem faixas de número de Sommerfeld que garantem uma lubrificação hidrodinâmica. Com a ajuda da carta gráfica, pode-se prever a tendência da lubrificação. Estas faixas mostram uma zona ótima de lubrificação hidrodinâmica.

As cartas gráficas fornecem informações sobre os diversos parâmetros dependentes, mesmo que estes se encontrem fora da faixa de lubrificação hidrodinâmica. Além de fornecer informações para os dados de projeto em geral, permite também estudar diversos casos com outros dados de forma simultânea, que prediz o seu comportamento devido à ocorrência de pequenas ou grandes variações.

3.3 COEFICIENTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO

A seguir serão descritos quatro metodologias usadas, que a priori partem do mesmo princípio, mas que ao longo do desenvolvimento diferem entre si.

O modelo desenvolvido pela Renk, a qual é fabricante de mancais, que também calcula estes coeficientes, faz adaptações nas metodologias apresentadas, e

ainda leva em conta a influencia da temperatura, alterando assim a viscosidade, a folga existente entre rotor e mancal. Este modelo não fornece como a base de cálculo dos coeficientes estáticos, utilizados por ele para compor os dinâmicos.

No modelo desenvolvido por Vance, assim como Childs, há necessidade de se encontrar o número de Sommerfeld.

Defini-se o número característico do mancal ou número de Sommerfeld pela equação:

$$S_o = \frac{\mu N_{RPS} R^2}{C_r^2 P} \quad (3.15)$$

Onde

S_o é o número de Sommerfeld,

μ é a viscosidade absoluta, Pa. s,

R é o raio do mancal

C_r é a folga entre mancal e o eixo, m,

P é a pressão, Pa.

N_{RPS} é o numero de rotações por segundo

Sendo que

$$P = \frac{W}{LD} \quad (3.16)$$

Onde W é o peso do mancal

L é o comprimento do mancal

D é o diâmetro do eixo

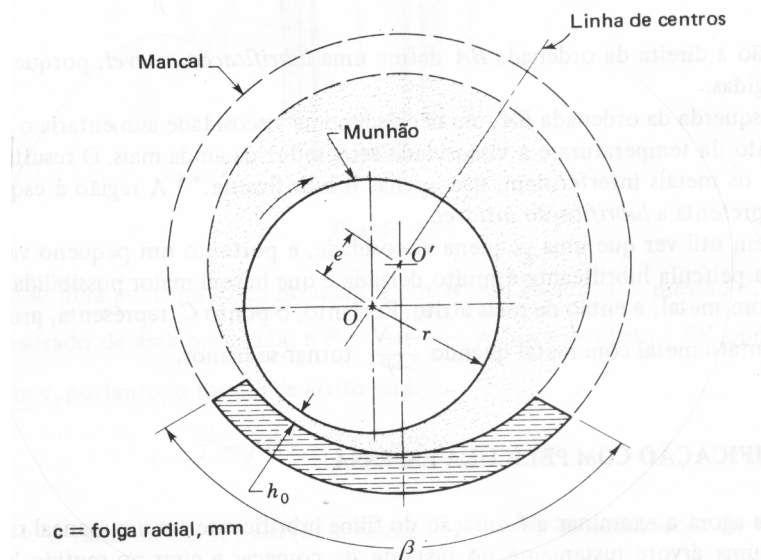
O número de Sommerfeld contém todas as variáveis normalmente especificadas, é adimensional e tem sido usado como abscissa nos gráficos.

Com base no número de Sommerfeld encontra-se uma importante variável na avaliação de desempenho do mancal que é a espessura mínima de película de óleo h_o . Se for menor do que um certo valor de segurança, haverá perigo de contato de metal com metal durante a sobrecarga ou de que a película sendo tão delgada não permita a passagem de alguma partícula de impureza contida no óleo. Além disso, o fluxo de

óleo depende da espessura mínima da película; com pequeno fluxo, o aumento de temperatura poderá ser excessivo.

A variável da espessura mínima da película é h_0/Cr e é determinada na Fig. 3.6.

FIG. 3.5. NOMENCLATURA DE UM MANCAL RADIAL.



Fonte: Shigley J.E. Elementos de Máquinas.1981.

Um outro parâmetro útil é a relação de excentricidade ϵ :

$$\epsilon = \frac{e}{C_r} \quad (3.17)$$

Onde

ϵ é a excentricidade normalizada

e é a excentricidade do rotor a qual varia com sua rotação

A Fig. 3.5, mostra se $\epsilon = 0$, o mancal está centrado e $h_0 = Cr$; isto corresponde a uma carga muito leve ou nula, e a relação de excentricidade é zero. Quando a carga aumenta, a árvore é forçada para baixo e atinge a posição limite quando $h_0 = 0$ e $e = Cr$; isto é, a eixo árvore está tocando o mancal. Para esta condição a relação de excentricidade é a unidade. Então

$$h_0 = Cr - e \quad (3.18)$$

dividindo-se ambos os membros por Cr , tem-se

$$\frac{h_0}{Cr} = 1 - \epsilon \quad (3.19)$$

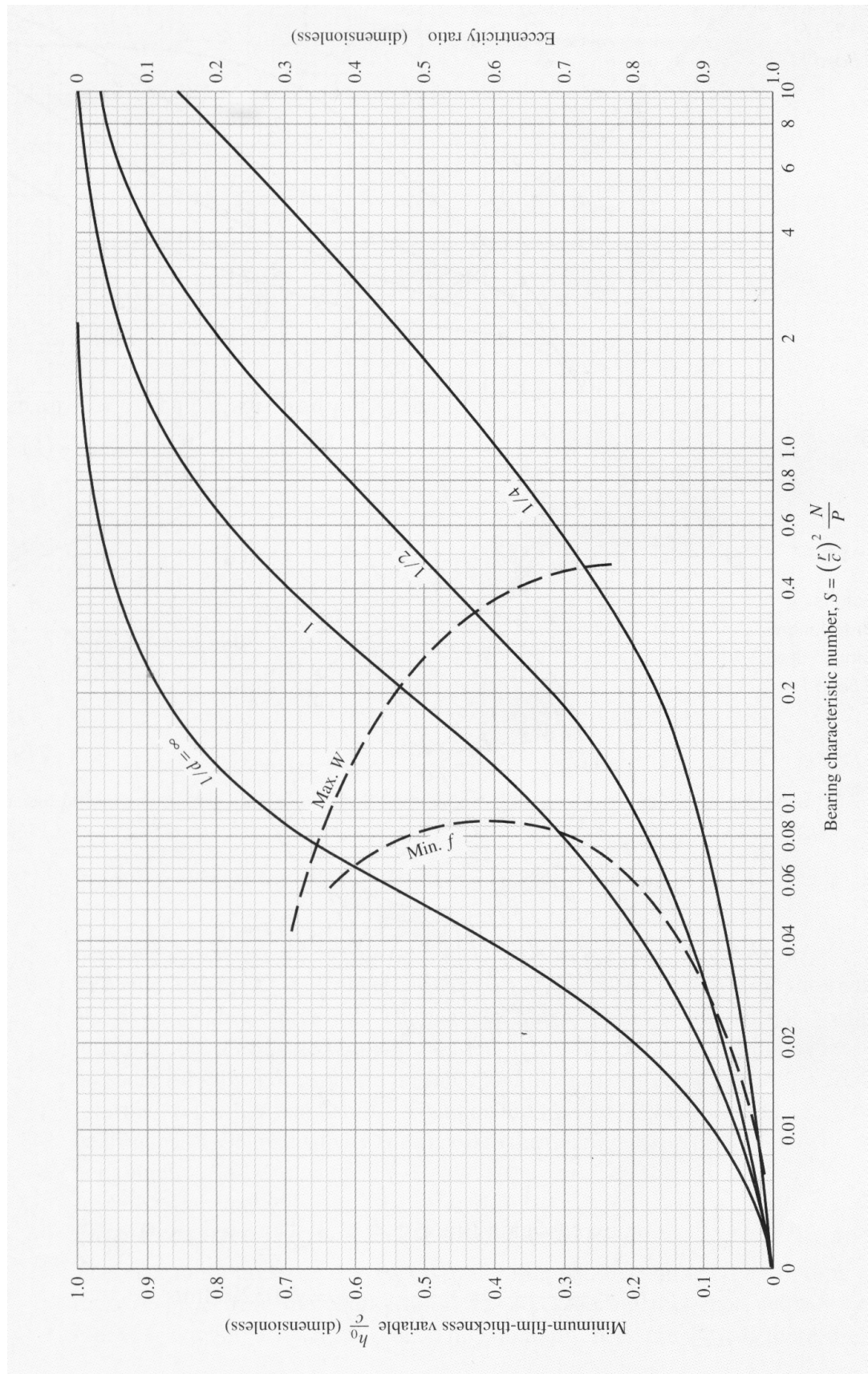
Assim pode-se usar a curva da variável da espessura mínima para a relação de excentricidade e este elemento também poderá ser determinado na Fig. 3.6.

Projetos ótimos, usados frequentemente, são descarga máxima ou perda de potência mínima. As linhas tracejadas da Fig. 3.6, para ambas as condições, foram traçadas de modo que pudessem ser encontrados facilmente os valores ideais de h_0 ou ϵ . Pode-se considerar, portanto, a zona delimitada entre os limites definidos por essas duas condições ótimas, como a zona de operação recomendada.

Desta discussão conclui-se que os mancais, com cargas leves, operam com número de Sommerfeld grande, enquanto os mancais com cargas pesadas operam com número pequeno.

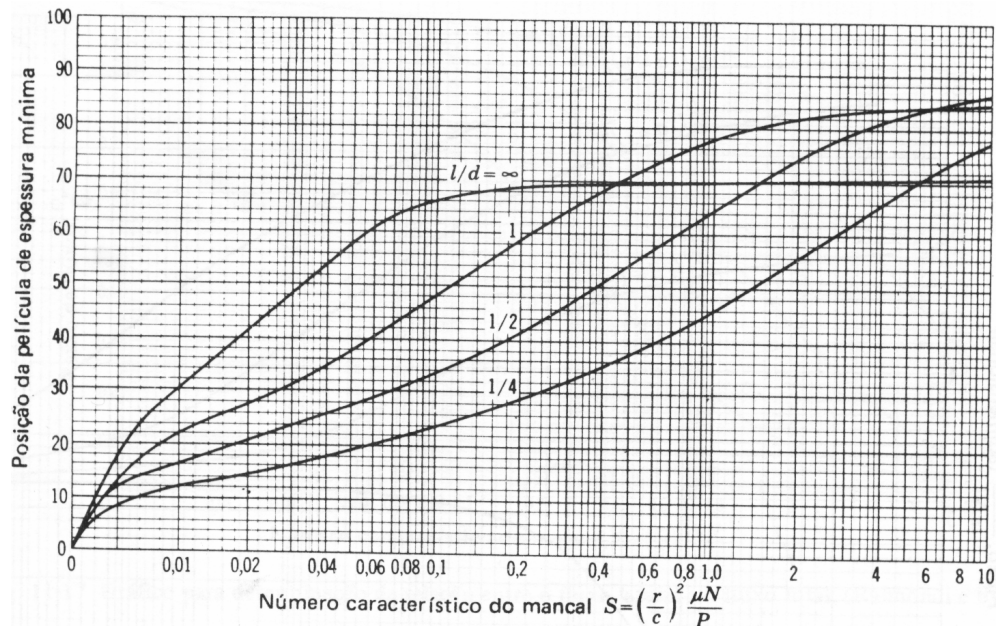
A Fig. 3.7 dá a localização da espessura mínima do filme como está definido na Fig.3.8.

Fig.3.6. GRÁFICO PARA ESPESSURA MÍNIMA.



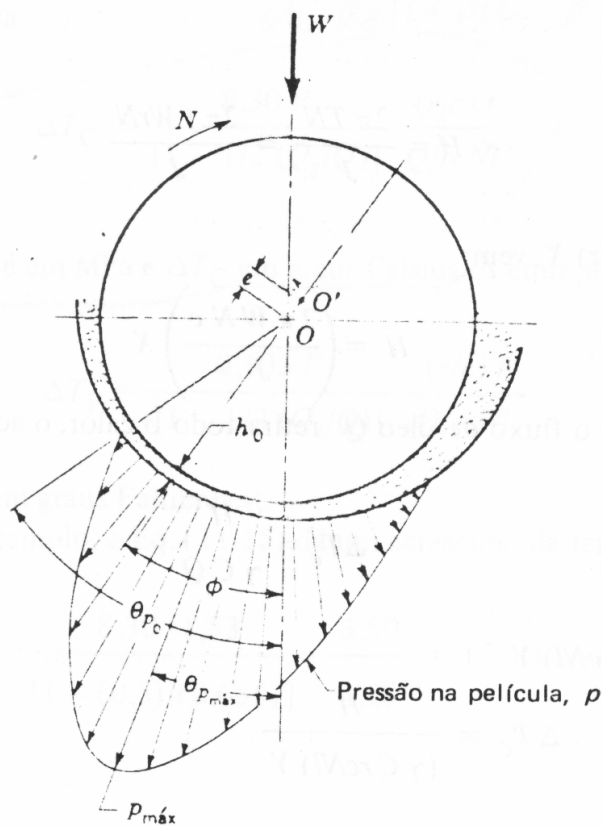
Shigley J.E Mechanical Engineering Design. -2001.

Fig. 3.7. GRÁFICO PARA DETERMINAR A POSIÇÃO MÍNIMA DE DA PELÍCULA DE ÓLEO h_0



Fonte: Shigley J.E. Elementos de Máquinas..1981

Fig.3.8..DIAGRAMA DE DISTRIBUIÇÃO DA PRESSÃO NA PELÍCULA.



Fonte: Shigley J.E. Elementos de Máquinas..1981

3.3.1. MODELO DESENVOLVIDO POR VANCE

Este modelo apresenta a seguinte metodologia.

Para análise de dinâmica de rotores a posição de equilíbrio é importante como o ponto de partida, mas as forças dinâmicas mostram que deve ser avaliado para os movimentos longe da posição de equilíbrio. Adequadamente, as componentes de força dados por integração de equações (3.20), (3.21) com ε , $\gamma_0 = 0$, para as distribuições de pressão são apropriadas para cada um dos tipos de mancais descritos na seção anterior.

$$F_r = F \cos(\mathbf{g}_0) = \int_0^1 R \int_0^{2p} p(\mathbf{q}, z) \cos(\mathbf{q}) d\mathbf{q} dz \quad (3.20)$$

$$F_t = F \sin(\mathbf{g}_0) = \int_0^1 R \int_0^{2p} p(\mathbf{q}, z) \sin(\mathbf{q}) d\mathbf{q} dz \quad (3.21)$$

Vance (1988) coloca dois grupos de parâmetros diferentes que são usados para calcular os coeficientes de rigidez e o amortecimento, um através de gráficos pré estabelecidos e outro através de equações definidas, como segue:

$$a) K_{ij} = \frac{m\omega R}{2} \left(\frac{L}{C_r} \right)^3 \bar{k}_{ij} \quad C_{ij} = \frac{mR}{2} \left(\frac{L}{C_r} \right)^3 \bar{c}_{ij} \quad (3.22)$$

onde $i, j = 1, 2$, e $1 - X, 2 - Z$.

\bar{k}_{ij} e \bar{c}_{ij} são coeficientes encontrados através de gráficos em função de ε para uma relação L/D . Neste trabalho não foi utilizada esta metodologia.

$$b) K_{ij} = \frac{F}{C_r} k_{ij} \quad C_{ij} = \frac{F}{C_r} c_{ij} \quad (3.23)$$

onde F é a carga estática

Para programar e calcular os valores de K_{ij} e C_{ij} é usado expressões matemáticas para os coeficientes:

É necessário antes definir uma função Q

$$Q(\mathbf{e}) = \frac{1}{\{ \mathbf{p}^2 + (16 - \mathbf{p}^2) \mathbf{e}^2 \}^{3/2}} \quad (3.24)$$

Assim podem-se calcular os coeficientes estáticos.

$$k_{xx} = 4 \{ 2\mathbf{p}^2 + (16 - \mathbf{p}^2) \mathbf{e}^2 \} Q(\mathbf{e}) \quad (3.25)$$

$$k_{xz} = \frac{p\{-p^2 + 2p^2e^2 + (16-p^2)e^4\}Q(e)}{e(1-e^2)^{1/2}} \quad (3.26)$$

$$k_{zx} = \frac{p\{p^2 + (32+p^2)e^2 + 2(16-p^2)e^4\}Q(e)}{e(1-e^2)^{1/2}} \quad (3.27)$$

$$k_{zz} = \frac{4\{p^2 + (32+p^2)e^2 + 2(16-p^2)e^4\}Q(e)}{(1-e^2)} \quad (3.28)$$

$$c_{xx} = \frac{2p(1-e^2)^{1/2}\{p^2 + 2(p^2-8)e^2\}Q(e)}{e} \quad (3.29)$$

$$c_{xz} = 8\{p^2 + 2(p^2-8)e^2\}Q(e) \quad (3.30)$$

$$c_{zx} = c_{xz} \quad (3.31)$$

$$c_{zz} = \frac{2p\{p^2 + 2(24-p^2)e^2 + p^2e^4\}}{e(1-e^2)^{1/2}} \quad (3.32)$$

E assim calculado os coeficientes dinâmicos

$$K_{xx} = \frac{m\omega RL^3 k_{xx}}{2C_r^3}, \quad K_{xy} = \frac{m\omega RL^3 k_{xz}}{2C_r^3}, \quad K_{yx} = \frac{m\omega RL^3 k_{zx}}{2C_r^3}, \quad K_{yy} = \frac{m\omega RL^3 k_{zz}}{2C_r^3} \quad (3.33)$$

$$C_{xx} = \frac{mRL^3 c_{xx}}{2C_r^3}, \quad K_{xy} = \frac{mRL^3 c_{xz}}{2C_r^3}, \quad K_{yx} = \frac{mRL^3 c_{zx}}{2C_r^3}, \quad K_{yy} = \frac{mRL^3 c_{zz}}{2C_r^3} \quad (3.34)$$

3.3.2. MODELO DESENVOLVIDO POR CHILDS

Para uma determinada velocidade corrente, o procedimento de análise a ser seguido consiste nos passos seguintes:

(a) A posição de equilíbrio para o mancal é calculada em termos da relação de excentricidade de equilíbrio ε e ângulo de equilíbrio γ . Este passo é realizado primeiro

calculando o número de Sommerfeld e após calcular ε e γ através das Eqs. (3.35) e (3.36). Sendo que σ é o número de Sommerfeld modificado.

$$\mathbf{s} = \frac{(1 - \mathbf{e}^2)^2}{\mathbf{e}[16\mathbf{e}^2 + \mathbf{p}^2(1 - \mathbf{e}^2)]^{1/2}} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{t}g^{-1} \frac{\mathbf{p}(1 - \mathbf{e}^2)^{1/2}}{4\mathbf{e}} \quad (3.36)$$

(b) As matrizes de rigidez e amortecimento $[\mathbf{K}_{ij}]$ e $[\mathbf{C}_{ij}]$ são determinadas da Eq. (3-38) como uma função de ε .

A reação de força de equilíbrio é:

$$fe = \mathbf{s}4\mathbf{e}^2(1 - \mathbf{e}^2)^{-2} \quad (3.37)$$

$$fb = \mathbf{s}\mathbf{p}\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)^{-3/2}$$

onde fe é a força de equilíbrio na direção z e

fb é a força de equilíbrio na direção x

Em termos destes parâmetros, os coeficientes de rigidez e amortecimento podem ser descritos como uma função de ε e assim podem-se calcular os coeficientes estáticos.

$$k_{xx} = \frac{fe(fe^2 + 1 - \mathbf{e}^2)}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}, \quad k_{xz} = \frac{-fb(fe^2 + 1 - \mathbf{e}^2)}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}$$

$$k_{zx} = \frac{-fb(fe^2 + 1 + 2\mathbf{e}^2)}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}, \quad k_{zz} = \frac{fe(fb^2 + 1 + 2\mathbf{e}^2)}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}$$

$$c_{xx} = \frac{2fb[(2 + \mathbf{e}^2)(fb)^2 - 1 + \mathbf{e}^2]}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}, \quad c_{xz} = \frac{-2fe[(2 + \mathbf{e}^2)(fb)^2 - 1 + \mathbf{e}^2]}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)}$$

$$c_{zx} = c_{xz}, \quad c_{zz} = \frac{2fb[(2 + \mathbf{e}^2)(fe)^2 + 1 - \mathbf{e}^2]}{\mathbf{e}(1 - \mathbf{e}^2)} \quad (3.38)$$

E assim calculado os coeficientes dinâmicos

$$K_{XX} = \frac{Wk_{XX}}{C_r}, \quad K_{XY} = \frac{Wk_{XZ}}{C_r}, \quad K_{YX} = \frac{Wk_{ZX}}{C_r}, \quad K_{YY} = \frac{Wk_{ZZ}}{C_r} \quad (3.39. a)$$

$$C_{XX} = \frac{Wc_{XX}}{2wC_r}, \quad C_{XZ} = \frac{Wc_{XZ}}{2wC_r}, \quad C_{ZX} = \frac{Wc_{ZX}}{2wC_r}, \quad C_{ZZ} = \frac{Wc_{ZZ}}{2wC_r} \quad (3.39. b)$$

3.3.3. MODELO DESENVOLVIDO POR CAPONE

Para as posições de equilíbrio apresentadas na Fig. 3.4, as matrizes de rigidez e de amortecimento estão apresentadas em Childs (1993). Observa-se no caso da matriz de rigidez que os elementos extra-diagonais possuem sinais contrários para excentricidades menores do que 0.6, enquanto que a matriz de amortecimento é simétrica. No entanto, as simplificações apresentadas em Childs (1993) comprometem a generalidade da solução, pois na análise dinâmica de rotores os valores das matrizes de rigidez e de amortecimento em qualquer posição e para qualquer velocidade absoluta do rotor são requeridas.

Para contornar esta dificuldade, Capone (1991) propôs uma solução que permite o cálculo da força de reação do mancal sobre o rotor, cujas características estão apresentadas a seguir. Tomando-se a equação (3.9) e integrando-se nos intervalos $0,5 < z < 0,5$ e $a < \theta < a+p$ obtém-se as forças hidrodinâmicas de reação:

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \left[\int_{-0,5}^{0,5} \int_a^{a+p} P(z, \mathbf{q}) \begin{Bmatrix} \cos \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{q} \end{Bmatrix} (Rd\mathbf{q})(Ldz) \right] \quad (3.40)$$

No cálculo em questão, foi definida uma função G, cujas derivadas em x e y resultam nos resultados da integral da equação (3.40). A solução obtida por Capone (1991) é:

$$\vec{F} = -k \frac{n}{m} \vec{W} \quad (3.41)$$

Onde

$$k = m\omega \frac{RL^3}{4Cr^2} \quad (3.42)$$

$$u = y + 2\dot{x} \quad v = x - 2\dot{y} \quad (3.43)$$

$$n = \sqrt{u^2 + v^2} \quad m = 1 - x^2 - y^2 \quad (3.44)$$

$$\mathbf{a} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{\mathbf{p}}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{\mathbf{p}}{2} \operatorname{sign}(u) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} p &= y \cos(\mathbf{a}) - x \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \\ q &= x \cos(\mathbf{a}) + y \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\vec{W} = \begin{cases} 3xV - G \operatorname{sen}(\mathbf{a}) - 2F \cos(\mathbf{a}) \\ 3yV + G \cos(\mathbf{a}) - 2F \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$V = \frac{2 + pG}{m} \quad (3.48)$$

$$G = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{m}}\right) \quad (3.49)$$

$$F = \frac{q}{1 - q^2} \quad (3.50)$$

A partir dos componentes do vetor força definida na equação (3.40), os coeficientes das matrizes de rigidez e amortecimentos são obtidos os derivando em relação a x, y, \dot{x} e \dot{y} respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{F}}{\partial X} &= -\frac{1}{C_r} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \left(k \left(\frac{v}{mn} + \frac{2xn}{m^2} \right) \vec{W} + k \frac{n}{m} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \right) \frac{1}{C_r} \\ -\frac{\partial \vec{F}}{\partial Y} &= -\frac{1}{C_r} \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \left(k \left(\frac{u}{mn} + \frac{2yn}{m^2} \right) \vec{W} + k \frac{n}{m} \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} \right) \frac{1}{C_r} \\ -\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{X}} &= -\frac{1}{\mathbf{w}C_r} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{x}} = \left(k \frac{2u}{mn} \vec{W} + k \frac{n}{m} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \dot{x}} \right) \frac{1}{\mathbf{w}C_r} \\ -\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{Y}} &= -\frac{1}{\mathbf{w}C_r} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{y}} = \left(k \frac{2v}{mn} \vec{W} + k \frac{n}{m} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \dot{y}} \right) \frac{1}{\mathbf{w}C_r} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Em que as seguintes definições para as derivadas das componentes do vetor \vec{W} foram utilizadas:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = \begin{cases} 3V + 3x \frac{\partial V}{\partial x} - G \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{sen}(\mathbf{a}) + 2F \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\mathbf{a}) \\ 3y \frac{\partial V}{\partial x} - G \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} \cos(\mathbf{a}) - 2F \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \operatorname{sen}(\mathbf{a}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{W}}{\partial y} &= \left\{ \begin{array}{l} 3x \frac{\partial V}{\partial y} - G \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} \text{sen}(\mathbf{a}) + 2F \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial y} \cos(\mathbf{a}) \\ 3y + 3y \frac{\partial V}{\partial y} - G \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \cos(\mathbf{a}) - 2F \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial y} \text{sen}(\mathbf{a}) \end{array} \right\} \\
\frac{\partial \bar{W}}{\partial \dot{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} 3x \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - G \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \text{sen}(\mathbf{a}) + 2F \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} - 2 \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cos(\mathbf{a}) \\ 3y \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - G \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \cos(\mathbf{a}) - 2F \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} - 2 \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \text{sen}(\mathbf{a}) \end{array} \right\} \\
\frac{\partial \bar{W}}{\partial \dot{y}} &= \left\{ \begin{array}{l} 3x \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} - G \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \text{sen}(\mathbf{a}) + 2F \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} - 2 \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \cos(\mathbf{a}) \\ 3y \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} - G \text{sen}(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \cos(\mathbf{a}) - 2F \cos(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} - 2 \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \text{sen}(\mathbf{a}) \end{array} \right\} \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Cujos parâmetros estão a seguir apresentados:

- Derivadas de \mathbf{a} definido na eq. (3.9) em relação a x , y , \dot{x} e \dot{y} , resulta em:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \frac{-u}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} = \frac{2v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \quad (3.54)$$

- Derivadas da função V :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\left[p \frac{\partial G}{\partial x} - \left(q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \text{sen}(\mathbf{a}) \right) G \right] m + 2x(2 + pG)}{m^2} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\left[p \frac{\partial G}{\partial y} - \left(q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} - \cos(\mathbf{a}) \right) G \right] m + 2y(2 + pG)}{m^2} \\
\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} &= \frac{\left[p \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} - q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} G \right]}{m} & \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} &= \frac{\left[p \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} - q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} G \right]}{m} \quad (3.55)
\end{aligned}$$

- Derivadas da função G :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{x}{m\sqrt{m}} \left(\mathbf{p} + 2tg^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{m}} \right) \right) + 2 \frac{\frac{px}{m} - q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} - \text{sen} \mathbf{a}}{m + p^2} \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{y}{m\sqrt{m}} \left(\mathbf{p} + 2tg^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{m}} \right) \right) + 2 \frac{\frac{py}{m} - q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos \mathbf{a}}{m + p^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = \frac{-2q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}}}{m + p^2} \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} = \frac{-2q \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}}}{m + p^2} \quad (3.56)$$

- Derivadas da função F:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \left(p \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos(\mathbf{a}) \right) \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2} & \frac{\partial F}{\partial y} &= \left(p \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \text{sen}(\mathbf{a}) \right) \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= p \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{x}} \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2} & \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= p \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{y}} \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Os coeficientes das matrizes de rigidez e amortecimento de mancais curtos para uma posição e velocidade de precessão quaisquer do rotor são então obtidas das equações (3.42 - 3.57), através das expressões em (3.58).

$$\begin{pmatrix} K_{xx} \\ K_{yx} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial X}, \quad \begin{pmatrix} K_{xy} \\ K_{yy} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial Y}, \quad \begin{pmatrix} C_{xx} \\ C_{yx} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{X}}, \quad \begin{pmatrix} C_{xy} \\ C_{yy} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{Y}}, \quad (3.58)$$

Os coeficientes de rigidez e amortecimento calculados desta forma são em função das dimensões do mancal, da viscosidade do óleo, da velocidade de rotação (?), da posição (X,Y) e da velocidade (\dot{X}, \dot{Y}) de precessão do rotor. Assim, os resultados obtidos são mais gerais do que os apresentados em Childs (1993) e Vance (1988), pois a velocidade de precessão do rotor é considerada e as coordenadas X e Y da posição do centro do rotor não são necessariamente as posições de equilíbrio mostradas na Fig. 3.4. Portanto, os coeficientes das matrizes podem ser obtidos em qualquer posição do rotor.

No capítulo seguinte utilizando um modelo matemático clássico de análise estrutural, representando o sistema por seus mecanismos de deformação, relações construtivas, apresenta-se o modelo de rotores por Elementos Finitos, onde as matrizes associadas às características de inércia, rigidez e amortecimento são demonstradas para os principais componentes dos rotores, tais como disco eixo árvore e mancais.

4. MODELO DE ROTORES POR ELEMENTOS FINITOS

O Método de Elementos Finitos, o MEF, é um método matemático computacional que visa identificar o provável comportamento de uma estrutura através de um conjunto de elementos estruturais independentes, de tal forma que cada elemento obedeça às condições de equilíbrio independente e condições de compatibilidade geométrica estejam asseguradas. O método permite que a peça em estudo tenha forma geométrica, carregamento e condições de contorno quaisquer.

O equilíbrio estático ou dinâmico de uma estrutura é expressa através da imposição da minimização da energia potencial total. Esta condição considerada para um corpo elástico linear contínuo resulta na equação de equilíbrio global. Bathe (1996).

Lees e Hirdaris (1999) mostraram que para estruturas esbeltas, o comportamento dinâmico é bem representado utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, mas quando a relação entre dimensões torna-se menor, é necessário utilizar a modelo de Timoshenko.

Primeiramente, serão determinadas a energia cinética T e a energia de deformação U do sistema rotativo. Em seguida, o método dos elementos finitos é empregado, e por fim, as equações de movimento serão determinadas através das Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (4.1)$$

Neste caso:

T é a energia cinética total do rotor,

U sua energia potencial,

q_i a i -ésima coordenada generalizada e F_{q_i} a força generalizada associada a q_i .

Determinadas as equações de movimento do rotor, um método de redução modal é utilizado para diminuir o número de graus de liberdade e conseqüentemente, o custo computacional. Em seguida, as frequências naturais, zonas de instabilidades e

resposta em frequência determinadas a partir de soluções clássicas da dinâmica de rotores, Lalande e Ferraris (1990) *et al.*

4.1 PROCEDIMENTO ADOTADO PARA APLICAÇÃO DO MEF

O rotor é modelado de forma que as propriedades de inércia e rigidez correspondam ao elemento de viga de Timoshenko, que consiste em uma barra prismática homogênea de seção circular, com consideração de deformação por cisalhamento e do momento de inércia transversal.

O potencial total de um corpo deformável de volume V é representado pelo funcional π :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_V \{e\}^T [C] \{e\} dV - \left[\int_V \{U\}^T (\rho \ddot{U}) - k \dot{U} \right] dV - \\ & - \left\{ \int_V \{U\}^T \{F^B\} dV + \int_V \{U^S\}^T \{F^S\} dV + \sum_{i=1}^m \{U^C\}^T \{F^C\} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

$\{e\}$ é o vetor de deformação considerada em um ponto genérico do corpo,

$[C]$ é a matriz de elasticidade do material,

$\{U\}$, $\{\dot{U}\}$ e $\{\ddot{U}\}$ são os vetores deslocamento, velocidade e aceleração de um ponto qualquer do corpo na configuração indeformada.

ρ é a densidade de massa de um ponto qualquer,

k é o parâmetro de amortecimento em um ponto qualquer

$\{F^B\}$, $\{F^S\}$, $\{F^C\}$ representam todos os esforços externos, forças e reações aplicados ao corpo e são respectivamente forças do corpo, forças de superfície e carregamentos concentrados.

O primeiro termo da equação representa a energia total de deformação do sistema, o segundo termo em conchetes representa o potencial das forças de inércia e

de amortecimento do corpo, e os termos restantes representam o potencial de carregamento externo.

O corpo é discretizado em elementos interconectados por pontos nodais nos contornos. O sistema de coordenadas x, y, z é escolhido de acordo com a geometria do corpo, onde os deslocamentos do elemento são funções dos N pontos nodais. Assim, para um elemento (m) , a aproximação do campo de deslocamento é expressa por:

$$\{U^{(m)}(x, y, z)\} = [H^{(m)}(x, y, z)]\{\hat{U}^{(m)}\}, \quad (4.3)$$

onde:

$[H^{(m)}]$ é a matriz de funções de interpolação dos elementos e $\{\hat{U}^{(m)}\}$ é um vetor cujas componentes representam as componentes globais do deslocamento.

O método consiste em uma estrutura através de um conjunto de elementos estruturais independentes de forma que cada elemento obedeça às condições de equilíbrio e que a compatibilidade geométrica seja assegurada.

Uma das formas de expressar o equilíbrio estático ou dinâmico de uma estrutura é através da imposição da minimização da energia potencial total. Esta condição considerada para um corpo elástico linear contínuo resulta na equação de equilíbrio global. Bathe (1996).

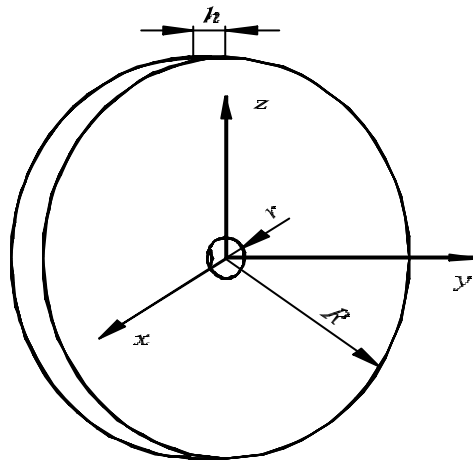
Na análise estrutural usada no método de Elementos Finitos, o domínio do corpo é discretizado em elementos interconectados por pontos nodais nos contornos dos elementos. Os deslocamentos do elemento, referidos a um sistema local de coordenadas x, y, z , convenientemente escolhido de acordo com a geometria do corpo, são funções dos deslocamentos dos N pontos nodais.

Para determinar as equações de movimento do sistema eixo-rotor-mancal, cada componente é tratado separadamente. Desse modo, os elementos acoplados ao eixo são considerados como discos rígidos, o eixo como um sistema elástico discretizado pela aplicação do método dos elementos finitos, e os mancais como elementos de suporte, linearizados com coeficientes de rigidez e amortecimento direcionais.

A formulação é baseada no conhecimento das parcelas de energia cinética e potencial do sistema.

4.1.1 Elementos do Disco

FIG. 4.1. MODELO DO DISCO



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores".2003.

A geometria adotada para identificar os discos é ilustrada na figura 4.1. neste caso, R é o raio externo, r o raio interno, h a espessura e ρ_D a densidade. Assim, pode-se calcular a massa e os momentos de inércia como segue:

- Massa (M_D):

$$M_D = \rho (R^2 - r^2) \cdot h \cdot \rho_D \quad (4.1)$$

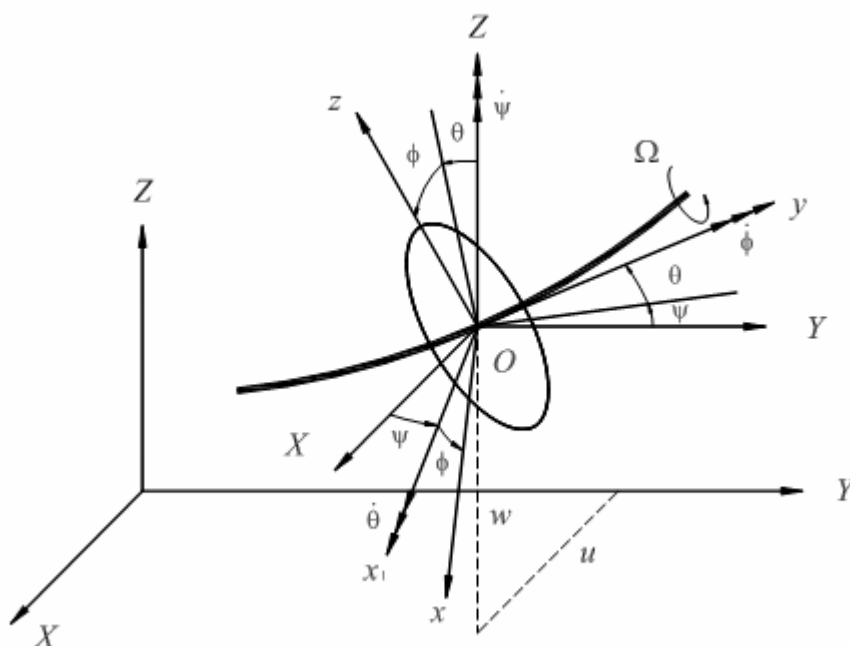
- Inércia (I_D) formada pelos eixos de referência:

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{onde, } \begin{cases} I_{Dx} = I_{Dz} = \frac{M_D}{12} (3r^2 + 3R^2 + h^2) \\ I_{Dy} = \frac{M_D}{2} (r^2 + R^2) \end{cases} \quad (4.3)$$

onde M_D é a massa do disco, u e w são os deslocamentos do centro de inércia do disco, I_{Dx} e I_{Dy} são os momentos de inércia do disco em relação ao sistema de coordenadas posicionadas em seu centro de genaridade (sobre o eixo/rotor) e paralelo ao sistema de coordenadas de referência. A velocidade de rotação do rotor é ω e \dot{q} e \dot{y} são as velocidades instantâneas, Figura 4.2.

FIG 4.2 SISTEMAS DE COORDENADAS PARA O DISCO ROTACIONANDO EM TORNO DE UM EIXO FLEXÍVEL



Fonte: Santos, Hideraldo L. V., "Dinâmica de Rotores".2003.

4.1.1.1 Energia cinética do disco

A energia cinética de um elemento de um rotor em flexão pode ser determinada a partir da definição do campo de deslocamentos e das velocidades angulares instantâneas, Lalanne e Ferraris (1990) *et al.* O disco, sendo considerado rígido, é caracterizado somente pela energia cinética, que é da seguinte forma:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{q}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\dot{y}\mathbf{q}) \quad (4.4)$$

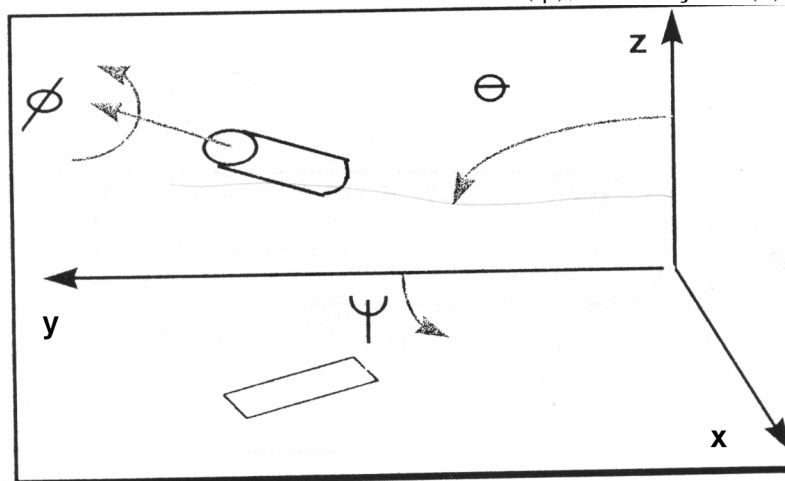
A primeira parcela representa a energia devida ao movimento de translação no plano do disco, a segunda é a rotação em torno dos eixos x e y, e a terceira é a rotação em torno do eixo z de simetria incluindo-se o efeito do momento giroscópico resultante do acoplamento de \dot{q} e \dot{y} com $\bar{\omega}$.

Na expressão anterior, pode-se observar que o termo $\frac{1}{2} I_{Dy} \mathbf{v}^2$ é uma constante não tem nenhuma influência nas equações e representa a energia do disco que gira a

uma velocidade angular Ω . O último termo $I_{Dy} \mathbf{v} \dot{\mathbf{y}} \mathbf{q}$ representa o efeito giroscópico ou de Coriolis.

A representação da rotação de cada elemento do rotor, em relação a um sistema de coordenadas fixa, utiliza os ângulos de Euler, sendo o vetor total dado pela combinação das rotações: precessão, nutação e giro, como mostra a figura 4.3.

FIG. 4.3 ÂNGULOS DE EULER: PRECESSÃO (ψ), NUTAÇÃO (θ) E GIRO (ϕ).



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores".2003.

Assumindo que o disco é rígido, este pode ser totalmente caracterizado por sua energia cinética. Deste modo, é possível expressar a energia cinética de um disco e, a partir das equações de Lagrange, montar a equação do movimento do disco. Considerando o eixo de simetria do disco paralelo ao eixo z. Para tal, define-se $R_0 (X, Y, Z)$ como o sistema de coordenadas inercial e $R (x, y, z)$, um sistema fixo no disco com origem no seu centro (figura 4.3). A notação é a seguinte:

ψ - giro do disco em torno do eixo Z

θ - giro do disco em torno do novo eixo x (denotado por x_1)

ϕ - giro do disco em torno do novo eixo y

ω - rotação do eixo

u - deslocamento eixo na direção X

w - deslocamento do eixo na direção Y

4.1.1.2 Energia potencial de deformação do disco

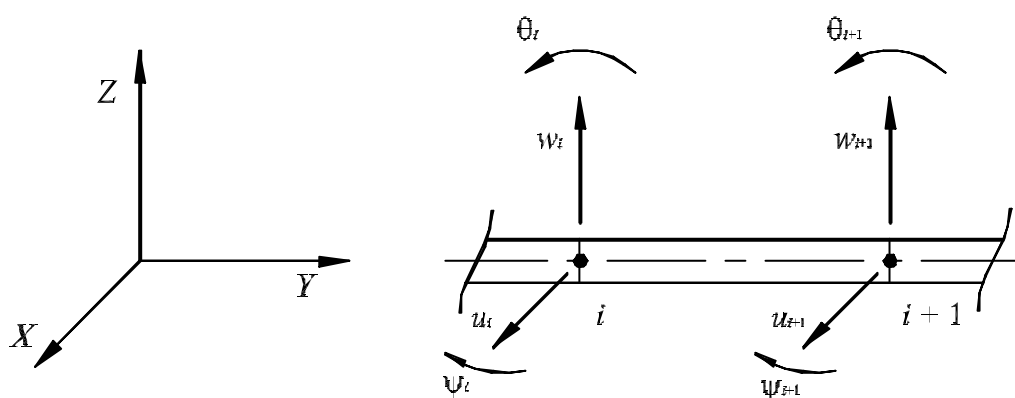
Considera-se neste trabalho que o disco possui uma rigidez infinita, sendo suas deformações nulas, portanto a contribuição da energia potencial de deformação do disco é nula.

4.1.1.3 Formulação matricial das equações do disco

Na solução do problema através do para o método de elementos finitos, considera-se que cada nó do rotor possui quatro graus de liberdade: dois deslocamentos u e w nas direções Z e X , respectivamente e dois giros θ e ψ em torno dos eixos X e Z , respectivamente como mostra a figura 4.4. Sendo assim, para um nodo i o vetor deslocamento nodal q_i se escreve como:

$$q_i = [u_i, w_i, \theta_i, \psi_i]^T \quad (4.5)$$

FIG. 4.4 GRAUS DE LIBERDADENODAIS DE UM ELEMENTO DE ROTOR.



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores".2003.

A aplicação das equações de Lagrange equação 4.1 ao disco isolado tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (4.6)$$

Dependendo do ponto de fixação do disco e da sua espessura com relação ao diâmetro do eixo, pode-se considerar que sua influência sobre o sistema ocorre

somente em um nó. Assim a participação do disco na matriz de massa é dada pela equação abaixo, colocada na matriz global de forma coerente com o nó onde está o disco.

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

O disco contribui com a matriz giroscópica com a expressão abaixo, também colocada na matriz global de forma coerente com o nó onde está o disco.

$$G_d = \mathbf{v} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

logo:

$$\begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{w}_i \\ \ddot{q}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} + \mathbf{v} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{q}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.2 ELEMENTOS DO EIXO ÁRVORE

O eixo foi modelado como uma viga de seção transversal circular de diâmetro d :

$$S_E = \frac{\mathbf{p} \cdot d^2}{4} \quad (4.10)$$

e momento de inércia de área

$$I_E = \frac{\mathbf{p} \cdot d^4}{64} \quad (4.11)$$

Também é caracterizado pela energia potencial e energia cinética. Considera-se que o material do eixo possui uma densidade constante \mathbf{r} , módulo de Young E_E e coeficiente de Poisson \mathbf{n} .

4.2.1 Energia Potencial do Eixo Arvore

Sendo E_E o módulo de Young do material que compõe o eixo arvore, a energia de deformação é dada por:

$$U_E = \frac{E_E I_E}{2} \int_0^{L_L} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.12)$$

onde

ρ_E - densidade do eixo

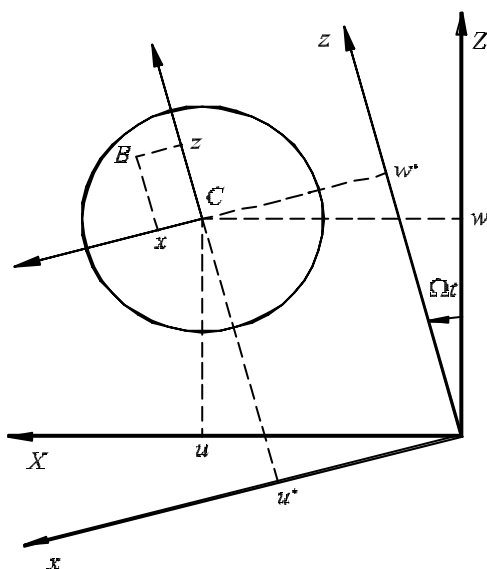
S_E - área da seção transversal da viga

L_L - comprimento do eixo

I_E - momento de ordem de área (inércia da seção transversal) em torno do eixo neutro

Sendo que C é o centro geométrico do eixo e $B(x, z)$ um ponto genérico de sua sessão transversal como na figura 4.5. e que \mathbf{e} e \mathbf{s} representam a deformação e tensão respectivamente e, que as coordenadas de C dos eixos x, z são u^* e w^* .

FIG 4.5 REPRESENTA A SESSÃO TRANSVERSAL DO EIXO



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores".2003.

A relação tensão-deformação é então tomada como sendo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_{nl} \quad (4.13)$$

sendo:

\mathbf{e}_l a deformação linear

\mathbf{e}_{nl} a deformação não linear.

Considerando termos de segunda ordem, a deformação do ponto B pode ser escrita como segue:

$$\mathbf{e} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (4.14)$$

A energia potencial se calcula como:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_t \mathbf{e}^T \mathbf{s} dt \quad (4.15)$$

Utilizando a proporcionalidade entre a deformação unitária e a tensão, expressada mediante a lei de Hooke

$$\mathbf{s} = E \mathbf{e} \quad (4.16)$$

tem-se

$$U_E = \frac{1}{2} \int_t (\mathbf{e}_l + \mathbf{e}_{nl}) E (\mathbf{e}_l + \mathbf{e}_{nl}) dt \quad (4.17)$$

$$U_E = \frac{E}{2} \int_t (\mathbf{e}_l^2 + 2\mathbf{e}_l \mathbf{e}_{nl} + \mathbf{e}_{nl}^2) dt \quad (4.18)$$

Dada a simetria da seção transversal do eixo com respeito aos eixos x, z ; verifica-se:

$$\int_t \mathbf{e}_{nl} \mathbf{e}_l dt = 0 \quad (4.19)$$

O terceiro termo dentro da integral na equação (4.18) é de segunda ordem e é desprezado. Então, a expressão para calcular a energia potencial resulta

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (4.20)$$

Ou seja,

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (4.21)$$

Devido a simetria que possui a seção transversal do eixo, o terceiro termo da expressão integral anterior é nulo.

Os momentos de inércia da seção transversal com respeito aos eixos x e z são, respectivamente,

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (4.22)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (4.23)$$

Introduzindo as equações (4.22) e (4.23) na equação (4.21) para a energia potencial, tem-se

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S x^2 dS + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S z^2 dS + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \int_S xz dS \right] dy$$

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.24)$$

Para expressar a energia potencial em função dos deslocamentos u e w medidos na referência R_0 , utilizam-se as seguintes relações, as quais podem ser deduzidas através da figura 4.5.

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \mathbf{v} t - w \sin \mathbf{v} t \\ w^* &= u \sin \mathbf{v} t + w \cos \mathbf{v} t \end{aligned} \quad (4.25)$$

A equação 4.24 pode ser escrita como

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \mathbf{v} t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \mathbf{v} t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \mathbf{v} t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \mathbf{v} t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.26)$$

Desenvolvendo a integral, e pela simetria do eixo ($I_x = I_z = I$), a expressão para energia potencial se reduz a:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.27)$$

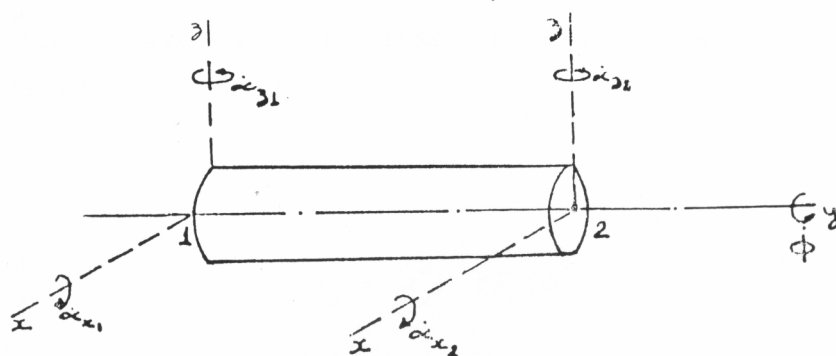
Na equação anterior da energia potencial, não considera forças auxiliares que poderiam atuar sobre o eixo. No caso de existir alguma força auxiliar, deve-se adicionar um termo na energia potencial determinada com a equação (4.27) Lalanne e Ferraris (1990).

4.2.1.1 Energia cinética do eixo arvore

Um elemento de eixo do rotor é representado como sendo uma viga de seção transversal circular e é caracterizado pela energia cinética e pela energia de deformação. A formulação geral da energia cinética para o eixo é uma extensão da formulação da energia cinética do disco.

Na modelagem do eixo considera-se a dinâmica de viga reta com seção transversal circular, com graus de liberdade de rotação e de deslocamentos transversais independentes, ou seja, o modelo de viga usado é do tipo Timoshenko. Com discretização Hermitiana, dois nós por elemento e quatro graus de liberdade por nó, dois deslocamentos translacionais e duas rotações, como mostra a figura 4.6..

FIG. 4.6 ELEMENTO DE EIXO.



Fonte: Rocha, R.O., "Modelagem e Simulação Computacional em Dinâmica de Rotores via Método dos Elementos Finitos", 1992.

A energia cinética em cada elemento de comprimento L_L de eixo é:

$$T_E = \frac{r_E S_E}{2} \int_0^{L_L} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{r_E I_E}{2} \int_0^{L_L} (\dot{y}^2 + \dot{q}^2) dy + r_E I_E L_L \mathbf{v}^2 + 2r_E I_E \mathbf{v} \int_0^{L_L} \dot{y} \dot{q} dy \quad (4.28)$$

A primeira parcela representa a energia cinética devida ao movimento de translação do eixo, a segunda é devida a rotação entorno dos eixos x e y, e a terceira é devida a rotação em torno do eixo z de simetria e devido ao momento giroscópico resultante do acoplamento de \dot{q} e \dot{y} com \mathbf{v} .

Um efeito adicional Lalanne e Ferraris (1990), está diretamente ligado à deformação elástica do elemento e, conseqüentemente, à sua energia potencial. Este

efeito é derivado de uma força axial externa, constante, aplicada ao elemento do eixo, e só é ativado quando há precessão. Neste caso, como ocorre encurtamento do comprimento do eixo, uma força axial provoca um trabalho de deformação em que o deslocamento axial é expresso em função dos deslocamentos transversais u e w . Este efeito é de segunda ordem e, no entanto, o grau de liberdade associado ao deslocamento axial não é considerado.

Em rotores verticais, essa força é o peso do rotor e pode-se considerar ainda a superposição de uma força axial trativa ou até mesmo compressiva devido a ação de outros elementos que exercem alguma resistência sobre o rotor.

Energia potencial armazenada, segundo a viga de Timoshenko, se deve a duas parcelas:

1. devido a flexão:

$$V_F = \frac{1}{2} \int_0^{L_L} EI \left[\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (4.29)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade do eixo,

L_L é o comprimento

θ e ψ são os ângulos de rotação da seção reta nas direções dos eixos x e y .

2. devido ao cisalhamento

$$V_C = \frac{1}{2} \int_0^L kGA^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \mathbf{q} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{y} \right)^2 \right] dz \quad (4.28)$$

onde:

k é o fator de forma da seção transversal do elemento,

G é o módulo de Coulomb ou cisalhamento

A é a área da seção transversal

u deslocamento translacional da direção x

w deslocamento translacional da direção z

A parcela de trabalho de deformação é portanto, para uma força axial externa trativa F :

$$W_A = -\frac{F}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (4.29)$$

assim o potencial total do elemento de eixo é representado por

$$\mathbf{p} = (V_F + V_C - T_E) - W_A \quad (4.30)$$

Para efetuar as integrais ao longo de cada elemento e em seguida minimizar o funcional π , utilizam-se as funções de formas Hermitianas η_1, η_2, η_3 e η_4 relação aos deslocamentos translacionais associados à deformação por flexão e cisalhamento.

Como também v_1, v_2, v_3 e v_4 só que agora está relacionada aos deslocamentos rotacionais:

$$\mathbf{h}_1 = 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad \mathbf{h}_2 = -y + \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \mathbf{h}_3 = \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad \mathbf{h}_4 = \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{6y}{L^2} - \frac{6y^3}{L^3} \quad \mathbf{n}_2 = 1 - \frac{4y}{L} + \frac{3y^2}{L^2} \quad \mathbf{n}_3 = \frac{6y}{L^2} + \frac{6y^2}{L^3} \quad \mathbf{n}_4 = \frac{2y}{L} + \frac{3y^2}{L^2} \quad (4.32)$$

$$\begin{Bmatrix} u(y,t) \\ w(y,t) \\ \mathbf{q}(y,t) \\ \mathbf{y}(y,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & 0 & 0 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & 0 & 0 & \mathbf{h}_4 \\ 0 & \mathbf{h}_1 & -\mathbf{h}_2 & 0 & 0 & \mathbf{h}_3 & \mathbf{h}_4 & 0 \\ 0 & -\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & 0 & 0 & -\mathbf{n}_3 & \mathbf{n}_4 & 0 \\ \mathbf{n}_1 & 0 & 0 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 & 0 & 0 & \mathbf{n}_4 \end{bmatrix} \{q\} \quad (4.33)$$

$$\{q\}^T = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2\} \quad (4.34)$$

4.2.1.2. Formulação matricial das equações do eixo

Na formulação mediante elementos finitos, o eixo se divide em n elementos de comprimento Dy^e (Dy do elemento), como pode observar através da figura 4.7. Cada elemento possui uma seção circular constante, não sendo necessariamente iguais os diâmetros do eixo entre elementos distintos; e, como citado anteriormente, cada nodo possui quatro graus de liberdade: dois deslocamentos u e w , dos giros q e y em torno dos eixos X e Z respectivamente, conforme ilustra a figura 4.7.

Se os deslocamentos u e w são pequenos, as relações entre deslocamentos e os giros são

$$\mathbf{q} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.36)$$

Um vetor deslocamento nodal \mathbf{d}_i , sobre o elemento i , é definido, de acordo com a notação utilizada na figura 4.7

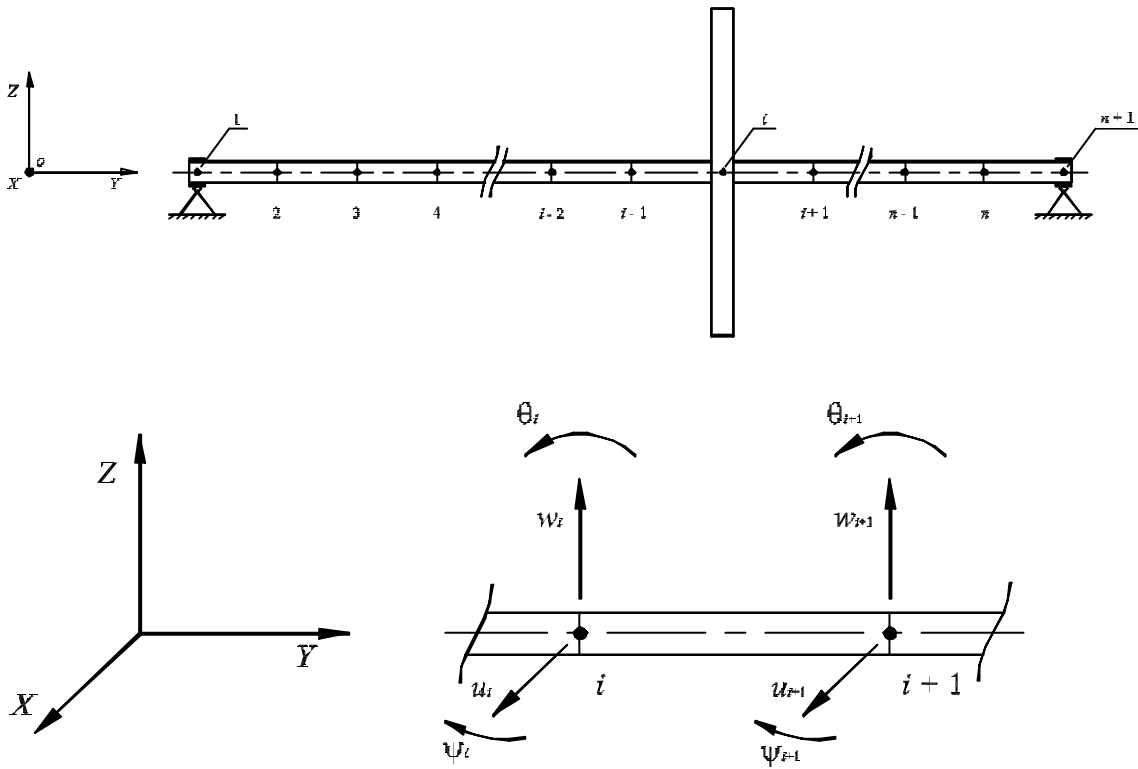
$$\mathbf{d}^e = [u_i, w_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{y}_i, u_{i+1}, w_{i+1}, \mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}]^T \quad (4.37)$$

onde os deslocamentos $\mathbf{d}u$ e $\mathbf{d}w$ correspondem aos movimentos nas direções X e Z , respectivamente,

$$\mathbf{d}u = [u_i, \mathbf{y}_i, u_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}]^T \quad (4.38)$$

$$\mathbf{d}w = [w_i, \mathbf{q}_i, w_{i+1}, \mathbf{q}_{i+1}]^T \quad (4.39)$$

FIG.4.7: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores".2003.

As variáveis u e w são representada do seguinte modo

$$u = N_1(y)\mathbf{d}u \quad (4.40)$$

$$w = N_2(y)\mathbf{d}w \quad (4.41)$$

onde $N_1(y)$ e $N_2(y)$ são funções de interpolação. Lalanne e Ferraris (1990):

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.42)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.43)$$

onde $L = Dy^e$, indica a longitude do elemento.

Introduzindo as equações (4.40) e (4.41) na equação (4.26) da energia cinética do eixo e obedecendo as relações (4.35) e (4.36), se tem

$$\begin{aligned} T_E = & \frac{rS}{2} \int_0^L [\mathbf{d}\dot{u}^T N_1^T N_1 \mathbf{d}\dot{u} + \mathbf{d}\dot{w}^T N_2^T N_2 \mathbf{d}\dot{w}] dy \\ & + \frac{rI}{2} \int_0^L \left[\mathbf{d}\dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \mathbf{d}\dot{u} + \mathbf{d}\dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \mathbf{d}\dot{w} \right] dy \\ & - 2rI\Omega \int_0^L \mathbf{d}\dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \mathbf{d}\dot{w} dy + rIL\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Somente N_1 , N_2 e suas derivadas são em função de y , logo é possível extrair do símbolo da integral os vetores de deslocamentos nas direções X e Z , então

$$\begin{aligned} T_E = & \frac{rS}{2} \left[\mathbf{d}\dot{u}^T \int_0^L N_1^T N_1 dy \mathbf{d}\dot{u} + \mathbf{d}\dot{w}^T \int_0^L N_2^T N_2 dy \mathbf{d}\dot{w} \right] + \\ & + \frac{rI}{2} \left[\mathbf{d}\dot{u}^T \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} dy \mathbf{d}\dot{u} + \mathbf{d}\dot{w}^T \int_0^L \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy \mathbf{d}\dot{w} \right] - \\ & - 2rI\Omega \mathbf{d}\dot{u}^T \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy \mathbf{d}\dot{w} + rIL\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

A equação anterior pode ser simplificada. O produto $N_1^T N_1$ forma uma matriz de 4×4 , segundo a equação (4.42), N_1 é um vetor com quatro elementos (quatro funções, uma para cada deslocamento na direção X contidos em $\mathbf{d}u$). Logo,

$$T_E = \frac{1}{2} \mathbf{d}\dot{u}^T M_1 \mathbf{d}\dot{u} + \frac{1}{2} \mathbf{d}\dot{w}^T M_2 \mathbf{d}\dot{w} + \frac{1}{2} \mathbf{d}\dot{u}^T M_3 \mathbf{d}\dot{u} + \frac{1}{2} \mathbf{d}\dot{w}^T M_4 \mathbf{d}\dot{w} + \mathbf{d}\dot{u}^T M_5 \mathbf{d}\dot{w} + rIL\Omega^2 \quad (4.46)$$

Os elementos das matrizes M_j ($1 \leq j \leq 5$), são as integrais que podem ser identificadas na equação (4.45). Uma vez calculadas as integrais, os arranjos matriciais antes citados tomam a seguinte forma:

$$M_1 = \frac{\mathbf{r}SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$M_2 = \frac{\mathbf{r}SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$M_3 = \frac{\mathbf{r}I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$M_4 = \frac{\mathbf{r}I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$M_5 = \frac{\mathbf{r}I\mathbf{v}}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

onde:

M_1 e M_2 são as matrizes de massa “clássicas”,

M_3 e M_4 provêm o efeito de inércia giratória, e

M_5 é a matriz que contém o efeito giroscópico, Lalanne e Ferraris (1990).

Aplicando a equação de Lagrange na energia cinética do eixo dada pela equação (4.46), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_E}{\partial \dot{\mathbf{d}}^e} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial \mathbf{d}^e} = (M_{Ec} + M_{Eg}) \ddot{\mathbf{d}}^e + C \dot{\mathbf{d}}^e \quad (4.52)$$

onde \mathbf{d}^e é o vetor de deslocamento do elemento dado pela equação (4.37), M_{Ec} surge de M_1 e M_2 , M_{Eg} de M_3 e M_4 e C de M_5 . A seguir são descritas estas três matrizes

$$M_{Ec} = \frac{\mathbf{r} SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$M_{Eg} = \frac{\mathbf{r} I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

O termo M_{Ec} é matriz de inércia de translação devido a energia cinética que é simétrica e positiva, e o M_{Eg} é o termo da matriz de massa devido a inércia diametral I do elemento de eixo também chamado de massa de efeito secundário de Rayleigh.

A matriz (4.55) de efeito giroscópio do eixo (anti-simétrica) devido a energia cinética, sendo I_0 o momento de inércia polar da seção reta do eixo.

$$G = \frac{\mathbf{r} I_0 \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Aplicando um procedimento análogo ao anterior, pode obter-se a matriz de rigidez do elemento. Substituindo na equação da energia potencial do eixo, dada pela equação (4.25) a definição das funções u e w , se tem:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\mathbf{du}^T \frac{d^2 N_1}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \mathbf{du} + \mathbf{dw}^T \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \mathbf{dw} \right] dy$$

$$U_E = \frac{EI}{2} \mathbf{du}^T \left[\int_0^L \frac{d^2 N_1}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right] \mathbf{du} + \mathbf{dw}^T \left[\int_0^L \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right] \mathbf{dw} \quad (4.56)$$

Escrevendo a equação anterior em forma matricial

$$U_E = \frac{1}{2} \mathbf{du}^T K_1 \mathbf{du} + \frac{1}{2} \mathbf{dw}^T K_2 \mathbf{dw} \quad (4.57)$$

Sendo K_1 e K_2 as matrizes de rigidez “clássicas”, Lalanne e Ferraris (1990).

Aplicando a equação de Lagrange na energia potencial, obtém-se a matriz de rigidez do elemento

$$\frac{\partial U_E}{\partial \mathbf{d}} = K \mathbf{d} \quad (4.58)$$

Para obter soluções mais “realistas”, é necessário introduzir o efeito das tensões de cisalhamento, que estão caracterizadas pela quantidade

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (4.29)$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.60)$$

é o módulo elástico do cisalhamento.

Ao introduzir os efeitos das tensões de cisalhamento na energia potencial do eixo, se obtém a seguinte matriz de rigidez, Lalanne e Ferraris (1990).

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

K é a matriz de rigidez equivalente de flexão e cisalhamento, sendo a o fator de influência do efeito de cisalhamento.

4.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ROTOR

O sistema de equações diferenciais que descreve o movimento do rotor é obtido através da montagem das matrizes elementares do(s) disco(s), do eixo e dos mancais, e pode ser colocado na forma:

$$M\ddot{q} + (C + G)\dot{q} + Kq = F(t) \quad (4.62)$$

onde

- F é o vetor das forças excitadoras do sistema;
- M é a matriz de massa global do sistema, obtida a partir das matrizes de massa elementares do disco e do eixo;
- C é a matriz de amortecimento global obtida a partir da matriz de amortecimento dos mancais,
- G é a matriz giroscópica global antisimétrica do rotor obtida a partir das matrizes giroscópicas elementares do disco e do eixo
- K é a matriz de rigidez global simétrica obtida a partir das matrizes de rigidez elementares do eixo ke e da matriz de rigidez elementar dos mancais;
- \ddot{q} , \dot{q} e q são os vetores de aceleração nodal, velocidade nodal e deslocamento nodal, respectivamente.

4.4 FORÇAS DE EXCITAÇÃO

As distintas excitações que serão consideradas neste trabalho, são aquelas que com maior frequência podem apresentar-se na prática usual com rotores Lalanne e Ferraris (1990). Na continuação discutem-se estes tipos de forças.

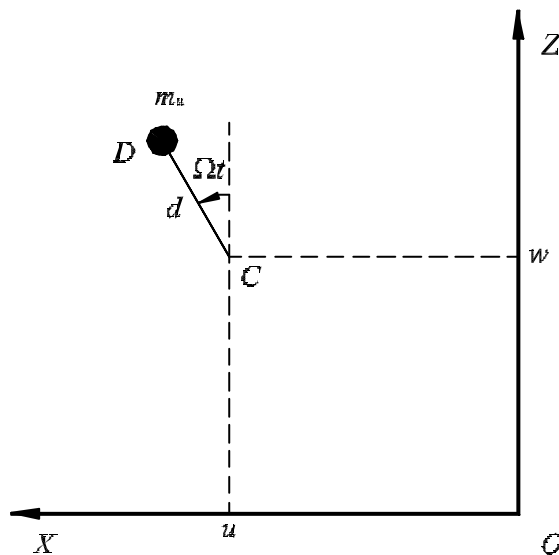
4.4.1 Massa Desbalanceada

A definição de massa desbalanceada é definida como sendo uma massa m_u situada a uma distancia d medida do centro geométrico do eixo, como se observa na figura 4.8. A massa permanece em um plano perpendicular ao eixo y e é uma coordenada constante.

Da figura 4.8, deduz-se que a força atuante sobre o eixo é:

$$\begin{aligned} F_u &= m_u \Omega^2 d \sin(\Omega t) \\ F_w &= m_u \Omega^2 d \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

FIG.4.8 FORÇA DESBALANCEADA.:



Fonte: - López, Ezequiel J.-, "Dinámica de Rotores". 2002

Aplicando a equação de Lagrange na energia cinética de uma massa desbalanceada e introduzindo esta excitação na equação de movimento. Como se observa as expressões anteriores, as forças provocadas pela massa desbalanceada

possuem uma frequência idêntica a frequência de rotação do eixo. Devido ao desbalanciamento da massa presente no disco, ao escrever na forma matricial o sistema de equações, as forças dadas por (4.63) deverão ficar no vetor de forças generalizadas na posição correspondente ao nó onde se encontre o disco desbalanceado.

4.4.2 Força Assíncrona

Uma força assíncrona é uma excitação que pode atuar em rotores em certas condições de operação. A relação entre a frequência da força assíncrona e a frequência de rotação do eixo pode-se expressar-se mediante um escalar s . A amplitude da força é F_a , tal que:

$$\begin{aligned} F_u &= F_a \operatorname{sen}(s\Omega t) \\ F_w &= F_a \operatorname{cos}(s\Omega t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Um exemplo de este tipo de força encontra-se na excitação que produzem os mancais de película grossa sobre o eixo, a qual possui uma frequência igual a metade da frequência de rotação, $s = 0,5$, López (2002).

4.4.3 Força Harmônica Fixa no Espaço

Neste caso se considera que o rotor gira a velocidade constante. A força atuante é externa, e possui frequência ω e amplitude F_0 . As componentes de esta excitação ao largo dos eixos X e Z se escrevem como:

$$\begin{aligned} F_u &= F_{0x} \operatorname{sen}(\omega t) \\ F_w &= F_{0z} \operatorname{cos}(\omega t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

No capítulo seguinte partir das matrizes elementares, obtém-se um sistema de equações globais que governa o movimento de um rotor dinâmico. Considerando o efeito giroscópio e modelando os mancais por matrizes de rigidez e amortecimento apresenta-se a resolução para o problema de autovalores, ortogonalidade, diagrama de Campbell e instabilidade.

5 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DINÂMICAS

5.1 MODELO DO SISTEMA GLOBAL

A partir das matrizes elementares, do eixo, do(s) disco(s), e dos mancais dos correspondentes, obtém-se um sistema de equações globais que governa o movimento de um rotor dinâmico. Considerando o efeito giroscópio e modelando os mancais por matrizes de rigidez e amortecimento, tem-se a seguinte equação global do movimento:

$$[M + M_D]\{\ddot{q}(t)\} + [C_M + G\Omega + G_D]\{\dot{q}(t)\} + [K_M + K_{FC} + K_A + K_{ST}]\{q(t)\} = F(t) \quad (5.1)$$

onde

$[M]$ e $[M_D]$ é a matriz elementar de inércia do disco e do eixo

$[C_M]$ é matriz de amortecimento dos mancais,

$[G]$ e $[G_D]$ é a matriz giroscópica do eixo e do disco que são anti-simétrica

$[K_M]$ é matriz de rigidez elementar dos mancais;

$[K_{FC}]$ é matriz de rigidez do eixo devido a flexão e ao cisalhamento

$[K_{ST}]$ é matriz de rigidez do eixo devido a aceleração angular própria do rotor, a qual não será considerado

$[K_A]$ é matriz de rigidez do eixo relacionado a força axial externa, a qual não será considerado

$F(t)$ é o vetor das forças excitadoras do sistema

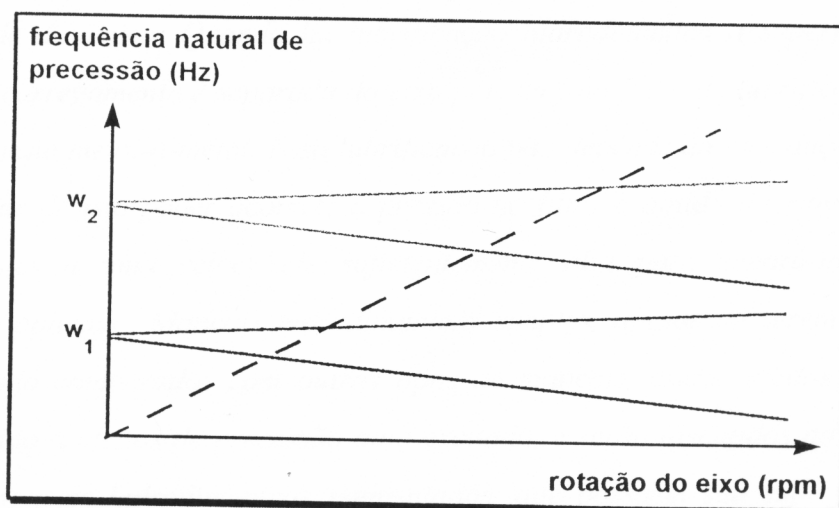
\ddot{q} , \dot{q} e q são os vetores de aceleração nodal, velocidade nodal e deslocamento nodal, respectivamente sendo q é o vetor de coordenadas generalizadas, que ao adotar uma discretização de n elementos, possui uma dimensão $4(n + 1) \times 1$, pois tem-se $n + 1$ nós e quatro graus de liberdade por nó.

Observa-se, na presença da matriz de efeito giroscópio (G) na eq. (5.1), a velocidade de rotação própria do rotor afeta o valor das frequências naturais do sistema. Esse fato justifica a relação entre as frequências naturais de precessão e a rotação própria do rotor, representada pelo diagrama de Campbell (figura 5.1). A forma anti-simétrica da matriz G implica em $2n$ frequências naturais distintas para cada velocidade de rotação do eixo, uma maior e outra menor do que cada uma das n

freqüências naturais do sistema sem rotação, correspondendo em geral aos modos de precessão direta e retrograda, respectivamente.

No caso de um rotor não simétrico, mesmo para o sistema com velocidade angular nula há duas freqüências naturais distintas, de modo que cada par de curvas do diagrama não necessariamente se encontre no ponto onde a rotação do eixo é nula.

FIG.5.1 DIAGRAMA DE CAMPBELL



Fonte: Meggiolaro, M. A, "Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos na Simulação de Sistemas Rotativos", 1996

Para o cálculo das velocidades críticas, basta traçar a reta [freqüência – rotação], cujas interseções com as curvas de Campbell definirão os pontos onde a velocidade de rotação coincide com uma freqüência natural. Nas velocidades de precessão direta, qualquer desbalanceamento do rotor provoca uma excitação síncrona com essa freqüência natural, amplificando as amplitudes de oscilação nesse modo de vibração, diz-se então, que o sistema entrou em ressonância.

5.2 PROBLEMA DE AUTOVALORES

Em Espíndola (1990), tomando-se a equação do movimento para o sistema giroscópio apresentada em (6.1), anteriormente

$$[M + M_D]\{\ddot{q}(t)\} + [C_M + G\Omega_{RPM} + G_D]\{\dot{q}(t)\} + [K_M + K_{FC} + K_A + K_{ST}]\{q(t)\} = F(t) \quad (5.2)$$

ou de uma maneira simplificada:

$$M\ddot{q}(t) + (G\Omega_{RPM} + C)\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) , \quad (5.3)$$

sendo M , C e K matrizes reais e simétricas e G uma matriz real e anti-simétrica.

Dessa forma, para um sistema de N coordenadas generalizadas, a equação (5.3) toma-se:

$$M_{N \times N} \ddot{q}_{N \times 1} + [G_{N \times N} + C_{N \times N}] \dot{q}_{N \times 1} + K_{N \times N} q_{N \times 1} = f_{N \times 1} \quad (5.4)$$

Como o efeito giroscópio é função da rotação do eixo, K é uma matriz real, a equação (6.3) toma a seguinte forma:

$$M \ddot{q}(t) + [C + G(\Omega_{rpm})] \dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (5.5)$$

Equação válida para uma excitação senoidal de frequência $\Omega = \Omega_{rpm}$. Para generalizar esta expressão é possível representar a mesma no domínio da frequência através da Transformada de Fourier.

$$[-\Omega^2 M + i\Omega[C + G(\Omega_{rpm})] + K]Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (6.6)$$

Supondo-se solução da homogênea forma:

$$q(t) = \{f\} e^{st} = \{f\} e^{i\Omega t} \quad (6.7)$$

com $f = \{0\}$

Substituindo na equação (5.3), torna-se:

$$[s^2 M + s(G + C) + K]\{f\} = \{0\} \quad (5.8)$$

A solução desse tipo de sistema constitui um problema de autovalores complexo. Nesse caso resultam $2N$ autovalores que aparecem em pares conjugados. Isto é inevitável pelo fato de todos os coeficientes da equação característica serem reais. Os autovetores associados também aparecem em pares complexo conjugado.

A forma de padrão para a solução de problemas de autovalores obriga colocar o problema apresentado na equação (5.3) com uma ordem de derivada a menos. Para resolver o problema de autovalores e autovetores, se propõe uma transformação de coordenadas generalizadas para o espaço de estado. A solução desse tipo de sistema constitui um problema de autovalores complexo, através do determinante abaixo:

$$\det[s^2 M + s(C + G(\Omega_{rpm}) + K)] = 0 \quad (5.9)$$

Para obter soluções não triviais:

$$\det[s^2 M + s(C + G(\Omega_{rpm}) + K)] = 0 \quad (5.10)$$

Encontra-se um polinômio característico na forma

$$p_{2n}s^{2n} + p_{2n-1}s^{2n-1} + \dots + p_1s + p_0 = 0 \quad (5.11)$$

onde p_1, p_{2n-1}, p_{2n} são reais

e s^{2n}, s^{2n-1}, s^1 são raízes de (6.11) (autovalores)

ou seja cada “ s_j ” corresponde a um $\{\phi\}_j$

Logo, define-se um novo vetor de coordenadas $y(t)$ que possui ordem $2n \times 1$ que contém ambos os deslocamentos e velocidades do espaço original

$$y(t) = [q(t) \quad \dot{q}(t)]^T \quad (5.12)$$

Aplicando (5.12) em (5.8) resulta:

$$[(G+C) \quad ; \quad M] \dot{y}(t) + [K \quad ; \quad 0] y(t) = f(t) \quad (5.13)$$

Adicionando a identidade:

$$[M \quad ; \quad 0] \dot{y}(t) + [0 \quad ; \quad -M] y(t) = \{0\} \quad (5.14)$$

Tomando-se o sistema de equações formado por (5.13) e (5.14), a equação final no espaço de estado fica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G(\Omega_{rpm}) + C & ; & M \\ \dots & ; & \dots \\ M & ; & 0 \end{bmatrix}}_A \dot{y}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} K(\Omega) & ; & 0 \\ \dots & ; & \dots \\ 0 & ; & -M \end{bmatrix}}_B y(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Podendo ser escrita na forma mais compacta:

$$A \dot{y}(t) + B y(t) = \{F_y(t)\} \quad (5.16)$$

Supondo uma solução homogênea do tipo:

$$y(t) = \{q\} e^{st} \quad (5.17)$$

$$q = [f \quad ; \quad sf]^T = [f \quad ; \quad -I f]^T \quad (5.18)$$

$$F(t) = \{0\} \quad (5.19)$$

E substituindo na equação (5.16), se chega a equação que permitirá encontrar sua solução.

$$[sA + B]q = 0 \quad (5.20)$$

Se $s = - ?$.

Para resolver a equação (5.20), encontrar a solução \mathbf{f} , diferente do trivial, a equação

$$\det[sA + B] = 0 \quad (5.21)$$

deve ser satisfeita. Esta equação é conhecida como equação característica e suas raízes dão os autovalores do problema (5.20), substituindo cada um destes autovalores em (5.21) se acham os autovetores correspondentes.

$$[sA + B]\{\mathbf{q}\} = \{0\} \quad (5.22)$$

ou

$$[i\Omega A + B]\{\mathbf{q}\} = \{0\}$$

Assim, o problema de autovalores é dado por:

$$B\mathbf{q} = I A \mathbf{q} \quad (5.23)$$

com $I = -s = -iO$

Como a matriz A e/ou B serem matrizes não simétricas, o problema de autovalores é não-adjunto e os coeficientes da equação característica quadrática são complexos se encontram 2n autovalores complexos e diferentes Assim deve-se resolver o problema adjunto, autovalores à direita e autovalores à esquerda:

Autovalores à direita:

$$B\mathbf{q} = I A \mathbf{q} \quad (5.24)$$

Autovalores à esquerda (problema adjunto):

$$B^T \mathbf{y} = I A^T \mathbf{y} \quad (5.25)$$

sendo:

λ - autovalores

\mathbf{q} - autovetor à direita

\mathbf{y} - autovetor à esquerda

Fixando Ω_{rpm} , A e B são constantes. Calculando o problema de autovalores, é possível encontrar o Diagrama de Campbell, sendo que este representa a característica do sistema.

5.3 ORTOGONALIDADE

Os autovetores ortonormalizados são obtidos fazendo:

$$\frac{\mathbf{q}_i}{\sqrt{a_i}} \text{ e } \frac{\Psi_i}{\sqrt{a_i}}, \quad (5.26)$$

$$\text{com } a_i = \Psi_i^T A \Theta_i^T. \quad (5.27)$$

Verificando a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}]^T A [\mathbf{q}] &= [I] \\ [\mathbf{y}]^T B [\mathbf{q}] &= [\mathbf{l}_i] \\ \Psi &= [\mathbf{y} \quad s\mathbf{y}]^T \\ \mathbf{q} &= [\mathbf{f} \quad s\mathbf{f}]^T \end{aligned} \quad (5.28)$$

As seguintes propriedades de ortogonalidade são demonstráveis a partir de (5.28)

1ª Condição de ortogonalidade

$$- \mathbf{l}_j \mathbf{l}_k \mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{f}_k + \mathbf{y}_j^T \mathbf{K} \mathbf{f}_k = b_j \mathbf{d}_{jk} \quad (5.29)$$

2ª Condição de ortogonalidade

$$- (\mathbf{l}_j + \mathbf{l}_k) \mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{f}_k + \mathbf{y}_j^T (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \mathbf{f}_k = a_j \mathbf{d}_{jk} \quad (5.30)$$

Como os valores de λ são complexos, eles podem ser denotados da seguinte maneira:

$$\mathbf{l}_j = \mathbf{d}_j + i\mathbf{u}_j \quad (5.31)$$

Tomando-se valores de $j \neq k$, mas com $\lambda_j = \lambda_k^*$ (onde o * denota complexo conjugado), e aplicando-os nas relações de ortogonalidade resulta:

$$2\mathbf{d}_j = \frac{\mathbf{y}_j^T (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \mathbf{f}_k}{\mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{f}_k} = \frac{c_j}{m_j} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{l}_j \mathbf{l}_j^* = \mathbf{d}_j^2 + \mathbf{u}_j^2 = \frac{\mathbf{y}_j^T \mathbf{K} \mathbf{f}_k}{\mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{f}_k} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j = |\mathbf{l}_j| \quad (5.33)$$

$$\mathbf{z}_j = \frac{c_j}{2m_j \Omega_j} = \frac{\mathbf{d}_j}{\Omega_j} \quad (5.34)$$

5.4 DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE

Como a matriz **A** contempla o efeito giroscópico do sistema, o problema de autovalores deve ser resolvido para cada velocidade de rotação do rotor. A particularidade desse problema está no fato da matriz **A** ser dependente da rotação do eixo e a matriz **B** ser dependente da frequência. Dessa forma, o problema de autovalores deverá ser calculado com dois laços simultâneos (rotação e frequência). Isto é, para uma determinada rotação da máquina, o problema de autovalores é resolvido através de um diagrama de Campbell ($\Omega_J \times \Omega$). Daquele gráfico, são retiradas as frequências naturais do sistema de forma equivalente ao trabalho. Assim, o cálculo do problema de autovalores, deve ser repetido para todas as rotações da máquina, o que implica em um diagrama de Campbell, de onde se pode retirar qualquer informação sobre as rotações críticas do sistema. O diagrama de Campbell ($\Omega_J \times \Omega_{RPM}$) determina a característica dinâmica do sistema eixo-rotor.

Da resolução desse problema de autovalores podem ser retirados não só as frequências críticas do sistema, mas também todos os parâmetros modais relacionados sejam para excitações assíncronas ou devido à instabilidade nos mancais ou desbalanceamento.

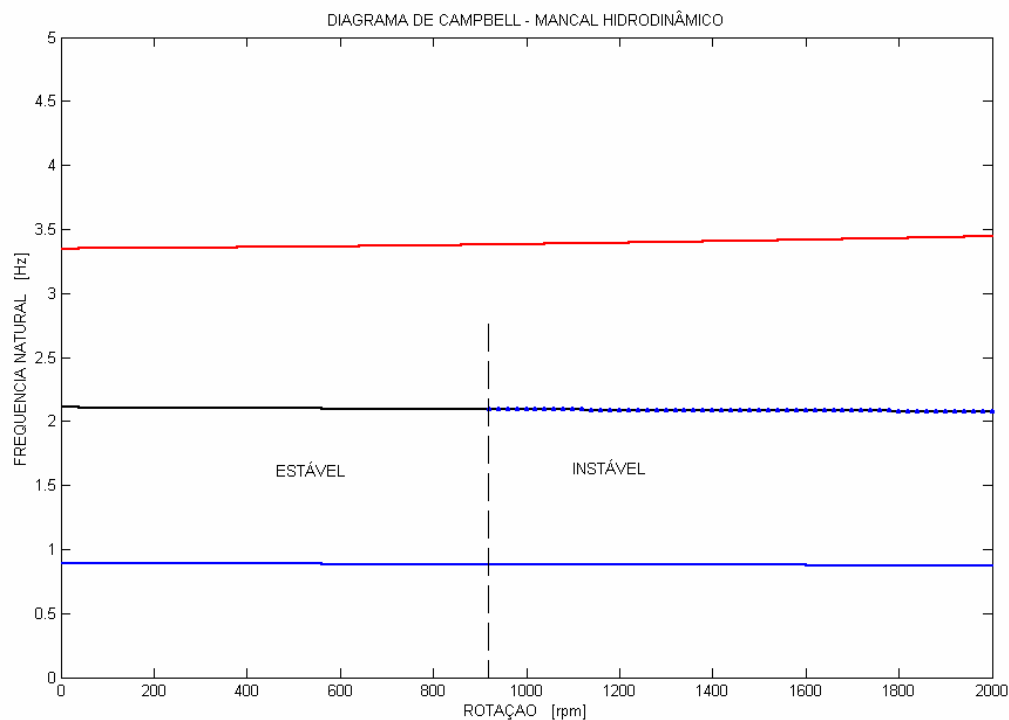
O diagrama de Campbell ilustra a variação das frequências naturais do sistema em função das frequências de rotação do rotor, como ilustrado nas figuras 5.1 e 5.2.

A instabilidade é analisada a partir do sinal da parte real dos valores característicos. Se estes resultarem positivos, a resposta aumenta indefinidamente e a solução é instável. Caso contrário, a estabilidade é garantida, como pode ser observado pela imposição da equação (5.35):

$$q(t) = \{\mathbf{f}\}e^{s t} \quad (5.35)$$

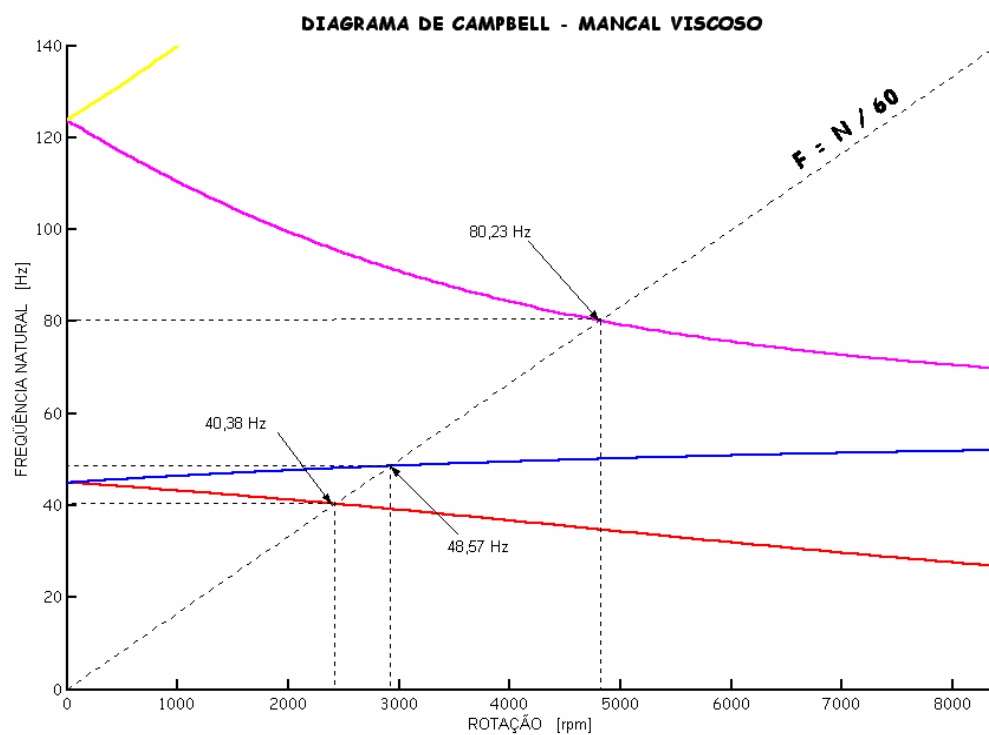
Onde $s_j = -I_j$.

FIG. 5.2.a: EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores". 2003

FIG. 5.2.b: EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL E INSTABILIDADE



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores". 2003

Dessa forma, se qualquer par dos $2N$ autovalores que apresentarem a parte real negativa estará acusada a instabilidade.

As características dinâmicas do rotor estão dadas pelos parâmetros modais encontrados em “todo” o diagrama de Campbell. Por exemplo, traçando-se uma reta a 45° no diagrama, podem-se retirar as rotações críticas devido ao desbalanceamento do disco. Análises semelhantes podem ser feitas com outros tipos de excitação, vide Lalanne e Ferraris (1990).

Os pontilhados nas linhas do gráfico do mancal hidrodinâmico representam regiões de instabilidades, o primeiro pontilhado no sentido crescente do eixo X determina a rotação limite para o sistema estável.

Da resolução desse problema de autovalores podem ser retirados não só as frequências críticas do sistema, mas também todos os parâmetros modais relacionados sejam para excitações assíncronas ou devido à instabilidade nos mancais ou desbalanceamento bem como achar a resposta em qualquer ponto ou realizar estudos de estabilidade.

No diagrama de Campbell, podem ser representadas duas retas dadas pelas seguintes equações:

$$f_1 = \frac{N}{60} \quad (5.36)$$

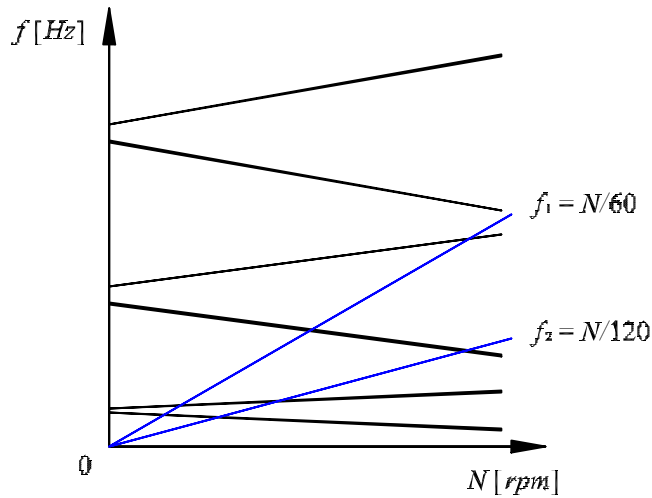
e

$$f_2 = \frac{1}{2} \frac{N}{60} \quad (5.37)$$

onde N é a velocidade de rotação do eixo (Ω_{rpm}). Estas duas retas representam a resposta do sistema às forças de excitação mais freqüentes que se apresentam na prática: massa desbalanceada, cuja freqüência coincide com a rotação do eixo (reta f_1) e a excitação produzida pelos mancais de película grossa, a qual possui uma freqüência igual um meio de N (reta f_2).

A figura 5.3 representa as retas f_1 (massa desbalanceada) e f_2 (excitação produzida pelos mancais) acima citadas.

FIG. 5.3: EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL



Fonte: Santos, Hideraldo L. V., "Dinâmica de Rotores". 2003

5.4.1 Frequências Naturais

Para achar as frequências naturais e os modos de vibrar, deve-se achar os autovalores e seus autovetores associados.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_p \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

onde P é a ordem das matrizes A e B (se o eixo possuem n elementos, $P = 8(n + 1)$).

Os autovalores e autovetores resultantes são quantidades complexas, devido os coeficientes das matrizes A e B serem números reais, os valores e vetores próprios devem ser complexos conjugados. Considerando o i -ésimo autovalor e seu conjugado

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{a}_i \pm j\mathbf{w}_i \quad (5.40)$$

Os autovetores associados serão

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i \pm j\mathbf{l}_i \quad (5.41)$$

Como se observa na equação (5.40), a frequência correspondente ao i -ésimo autovalor é w_i , a qual é a parte imaginária de I_i . De esta forma se determinam as frequências naturais do rotor para uma velocidade de rotação do eixo dado. Ao variar esta velocidade desde zero a um valor máximo, o sistema de equação dinâmica, também varia devido a influencia do efeito giroscópico. Então, para cada W do eixo, se tem distintos autovalores, o qual implica que as frequências naturais do rotor dependem da velocidade de giro. Representam-se graficamente as frequências naturais do rotor, geralmente medidas em Hz, em função da velocidade de rotação, em geral, expressada em rpm. Assim obtém-se um diagrama como o esquematizado na figura 5.2 e 5.3, denominado diagrama de Campbell.

5.4.2 Instabilidade

A palavra instabilidade implica que o movimento pode tender a um acréscimo de amplitude sem limite, e isso ocorre algumas vezes com conseqüências destrutivas. Muitas vezes o problema era atribuído ao rompimento de película de óleo ou fricção interna nos mancais. Atualmente os problemas devido à instabilidade podem ser associados também com as altas velocidades de rotação do eixo.

A instabilidade dinâmica é diferente de rotação crítica. Rotação crítica é definida como a velocidade para máxima resposta síncrona ao desbalanceamento, trata-se de uma excitação permanente cuja frequência coincide com uma frequência natural do sistema girante.

O entendimento da instabilidade pode ser feito com uma analogia como a usada na figura 6.4. Fisicamente pode-se observar que um pequeno deslocamento do sistema a partir do equilíbrio dinâmico se transforma em um grande deslocamento que pode comprometer a integridade estrutural do sistema.

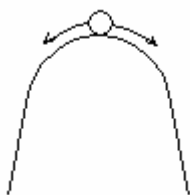
No caso do rotor, ele está em equilíbrio dinâmico rotacionando e ao mesmo tempo vibrando excitado permanentemente por um desbalanceamento, por exemplo. Se nessa situação de velocidade de rotação o sistema for instável, ele poderá entrar em estado caótico a qualquer momento sem possibilidade de controle.

Em termos matemáticos a instabilidade é definida como a equação diferencial linear do movimento, caracterizada por um autovalor complexo com a parte real positiva (solução da homogênea). A parte real do autovalor fornece o fator de crescimento ou decrescimento da solução; a parte imaginária fornece a oscilação da resposta. Traduzindo dentro do domínio de dinâmica de rotores, a solução é uma função que descreve a dependência com o tempo da amplitude de vibração. A figura 5.5 mostra como uma solução instável é descrita pelos seus autovalores. O movimento associado com a instabilidade torna-se infinitamente grande com o tempo, se a teoria linear da instabilidade é mantida. A vibração com amplitude crescente causaria danos aos retentores ou pás, a não ser que esse crescimento seja cessado devido as não linearidades do sistema. Um exemplo de tal não linearidade é o coeficiente de amortecimento que aumenta com a amplitude de vibração.

Assim, a teoria linear de instabilidade pode prever o começo e a frequência de uma instabilidade com muita precisão.

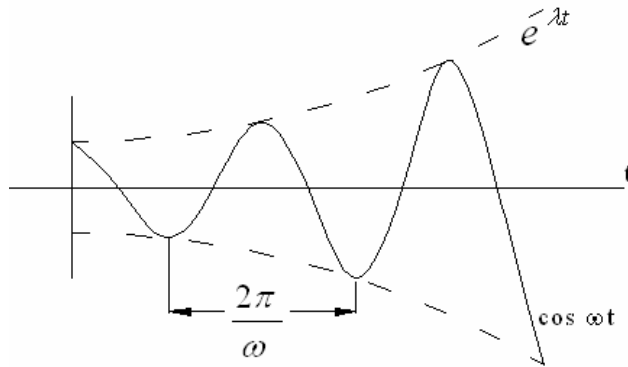
Para analisar a estabilidade do rotor, basta determinar o sinal da parte real dos autovalores: se o sinal é positivo, o sistema é estável, caso contrario, ou seja, negativo, o sistema é instável. No caso particular que a parte real do valor resulte em ser nula, a solução do sistema será oscilatória com uma amplitude constante no tempo.

FIG.5.4 ANALOGIA PARA A INSTABILIDADE



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores". 2003

FIG. 6.5 INSTABILIDADE DE UM AUTOVALOR



Fonte: Santos, Hideraldo L. V.-, "Dinâmica de Rotores". 2003

5.4.3 Modo de Vibração

Lalanne e Ferraris (1990) mostra uma resolução para autovalores e autovetores usando o método Q.R. com o método direto. Neste trabalho para não ficar confusa a notação utilizada será exposta a equação definitiva, sem sua demonstração.

$$\frac{q}{2e^{-a_i t}} = R_i \cos \mathbf{w}_i t + I_i \operatorname{sen} \mathbf{w}_i t \quad (5.42)$$

onde:

\mathbf{w}_i é a frequência

a_i é o fator amortecido viscoso

R_i e I_i indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária.

Em relação aos modos de vibrar, a equação (5.42) pode separar-se em deslocamento na direção X (deslocamento u) e na direção Y (deslocamento w):

$$u = u_R \cos \mathbf{w}_i t + u_I \operatorname{sen} \mathbf{w}_i t \quad (5.43)$$

$$w = w_R \cos \mathbf{w}_i t + w_I \operatorname{sen} \mathbf{w}_i t \quad (5.44)$$

Para a representação gráfica dos modos, substitui-se as expressões de u e w dadas respectivamente por (5.43) e (5.44), tem-se:

$$u = N_1(y) (\mathbf{d}^e u_R \cos \mathbf{w}_i t + \mathbf{d}^e u_I \operatorname{sen} \mathbf{w}_i t) \quad (6.45)$$

$$w = N_2(y) (\mathbf{d}^e w_R \cos \mathbf{w}_i t + \mathbf{d}^e w_I \operatorname{sen} \mathbf{w}_i t) \quad (6.46)$$

A definição de $N_1(y)$ e $N_2(y)$, equações (5.43) e (5.44), são funções correspondentes de interpolação para os ângulos onde se anulam nos nodos do elemento.

$$N_1(0) = [1,0,0,0] \quad N_1(L) = [0,0,1,0] \quad (5.47)$$

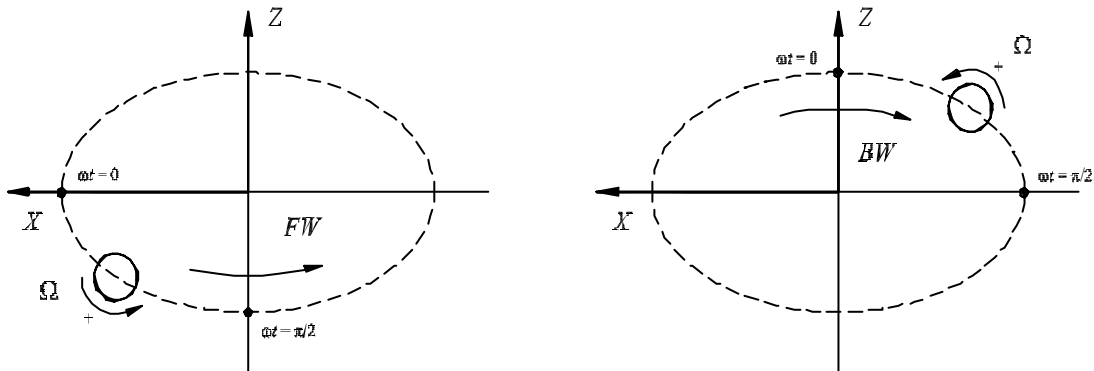
$$N_2(0) = [1,0,0,0] \quad N_2(L) = [0,0,1,0] \quad (5.48)$$

A forma anterior implica que para a representação dos modos. Somente devem considerar-se os deslocamentos nodais $u_i (w_i)$ e não os giros nodais $y_i (q_i)$.

5.4.4 Órbita

Nas expressões (5.43) e (5.44), pode observar-se que a secção transversal do eixo arvore descreve uma órbita circular ou elíptica, ao redor do seu centro geométrico estático, dada pela variação temporal dos deslocamentos u e w . Em geral, os deslocamentos não são iguais em ambas as direções, formando então órbitas elípticas. No caso do rotor excitado por uma massa desbalanceada a órbita é elíptica, como mostra a figura 5.6.

FIG 5.6: VARIAÇÃO DO SENTIDO DE GIRO EIXO EM UM ROTOR EXCITADO COM MASSA DESBALANCEADA.



Fonte: Santos, Hideraldo L. V., "Dinâmica de Rotores". 2003

Se o rotor é simétrico a órbita é uma circunferência, caso contrario, a órbita descrita é uma elipse. Uma particularidade quanto ao sentido de giro empregado pelo eixo para descrever as mencionadas órbitas à respeito do sentido da velocidade de rotação \vec{W} . Supondo que o eixo gira com velocidade angular positiva: $\vec{W} = |\vec{W}| \vec{j}$, ver figura 5.6, as órbitas são descritas em um mesmo sentido, diz-se que o rotor se

encontra na situação de giro horária. “*forward whirl*” (FW). Se o sentido em qual se descrevem as órbitas é contrário ao de \bar{W} , o rotor se encontra em situação de giro anti-horário “*backward whirl*” (BW). O conceito anterior ilustra-se na figura 5.6.

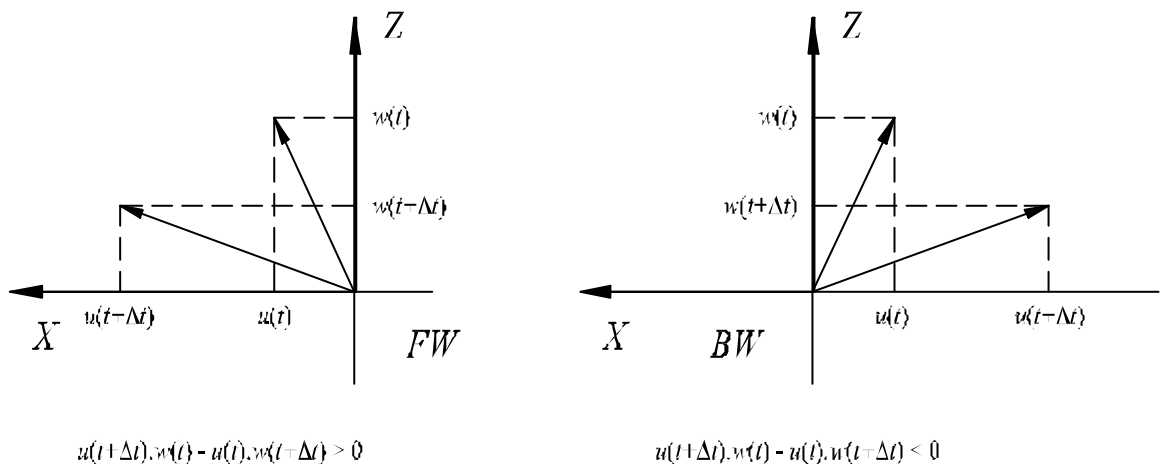
A determinação do tipo de giro de cada nó do rotor é obtida através do produto vetorial entre os vetores posição u_i e w_i para os tempos t e $t + \Delta t$, onde o sinal deste produto indica o movimento do rotor, FW ou BW.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_i(t) & 0 & w_i(t) \\ u_i(t+\Delta t) & 0 & w_i(t+\Delta t) \end{vmatrix} = (u_i(t+\Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t+\Delta t))\hat{j} \quad (5.49)$$

Se $(u_i(t+\Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t+\Delta t))j > 0 \Rightarrow$ FW. O movimento do giro é horário. O eixo gira com velocidade angular positiva ($\bar{\Omega} = |\Omega|\hat{j}$) e a órbita é descrita no mesmo sentido, como mostra a figura 5.7.

Se $(u_i(t+\Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t+\Delta t))j < 0 \Rightarrow$ BW. O movimento do giro é anti-horário. O sentido descrito pela órbita é contrário ao da velocidade angular ($\bar{\Omega}$), como mostra a figura 5.7.

FIG. 5.7 GIRO HORÁRIO E GIRO ANTI- HORÁRIO



Fonte: López, Ezequiel J.-, "Dinámica de Rotores".2002,

No capítulo seguinte apresenta-se a resposta na frequência, ou seja, desbalanceamento, reposta no domínio do tempo, massa desbalanceada.

6. RESPOSTAS E MODOS PARA O MODELO VISCOZO

6.1 RESPOSTA NA FREQUÊNCIA - DESBALANCEAMENTO

Partindo do sistema de equações diferenciais no espaço de estado dada pela expressão abaixo e segundo Espíndola (1990):

$$A\dot{y}(t) + By(t) = f_y(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Sendo

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Supondo uma solução do tipo

$$y(t) = \Theta p(t) \quad (6.3)$$

e substituindo na equação acima onde ainda é pré multiplicada por Z^T (Y autovetores a direita e Z autovetores a esquerda). Eles são correspondentes a massa desbalanceada.

Desta forma a equação, no espaço de estado, no espaço modal:

$$\Psi^T A \Theta \dot{p}(t) + \Psi^T B \Theta p(t) = \Psi^T f_y(t) \quad (6.4)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & b_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T f_y(t) \quad (6.5)$$

ou ainda, se os autovetores foram ortonormalizados através da matriz A

$$I \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & I_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T f_y(t) \quad (6.6)$$

No domínio da frequência, aplicando a Transforma de Fourier:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & i\Omega I + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & I_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} P(\Omega) = \Psi^T F_y(\Omega) = \Psi^T \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

ou

$$\left[\begin{array}{c} \ddots \\ i\Omega \left[\begin{array}{c} a_j \\ \vdots \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b_j \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right] P(\Omega) = \Psi^T F_y(\Omega) \quad (6.8)$$

e conseqüentemente

$$P(\Omega) = \left[\begin{array}{c} \ddots \\ i\Omega a_i + b_j \\ \vdots \end{array} \right]^{-1} \Theta^T F_y(\Omega) \quad (6.9)$$

e resulta, no espaço de estado

$$\Theta(\Omega) = \Theta \left[\begin{array}{c} \ddots \\ i\Omega a_i + b_j \\ \vdots \end{array} \right]^{-1} \Psi^T F_y(\Omega) \quad (6.10)$$

em forma compacta conhecida

$$Y(\Omega) = [\mathbf{a}(\Omega)] F_y(\Omega) \quad (6.11)$$

onde é denominada matriz de receptância no espaço de estado. É uma matriz cujos coeficientes são complexos e função da frequência. Esta é uma matriz característica do sistema quando encontra-se submetido a uma excitação do tipo massa desbalanceada.

Um coeficiente dessa matriz $[\mathbf{a}(\Omega)]$ será, segundo Espíndola (1990):

$$\mathbf{a}_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{Y_{kj} Z_{sj}}{i\Omega a_j + b_j} \quad (6.12)$$

Particionando a equação anterior:

$$\left\{ \begin{array}{c} Q(\Omega) \\ \dots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{11}(\Omega) \quad \vdots \quad \mathbf{a}_{12}(\Omega) \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \\ \mathbf{a}_{21}(\Omega) \quad \vdots \quad \mathbf{a}_{22}(\Omega) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F(\Omega) \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

$$\Rightarrow Q(\Omega) = [\mathbf{a}_{11}(\Omega)] F(\Omega) \quad (6.15)$$

onde $[\mathbf{a}_{11}(\Omega)]$ é a matriz de receptância do sistema no espaço de configuração.

Ainda $[\mathbf{a}_{11}(\Omega)]$ pode ser encontrada em forma explícita através das seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{c} Q(\Omega) \\ \dots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \Theta_{11} \quad \vdots \quad \Theta_{12} \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \\ \Theta_{21} \quad \vdots \quad \Theta_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_{11} \quad \vdots \quad 0 \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \\ 0 \quad \vdots \quad \mathbf{g}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Psi_{11}^T \quad \vdots \quad \Psi_{21}^T \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \\ \Psi_{12}^T \quad \vdots \quad \Psi_{22}^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.16)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{i\Omega + \mathbf{I}_j} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ com autovetores ortonormalizados} \quad (6.17)$$

$$\begin{Bmatrix} Q(\Omega) \\ \dots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \vdots & \Theta_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \Theta_{21} & \vdots & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{11} \Psi_{11}^T F \\ \dots \\ \mathbf{g}_{22} \Psi_{12}^T F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta_{11} \mathbf{g}_{11} \Psi_{11}^T F + \Theta_{12} \mathbf{g}_{21} \Psi_{12}^T \\ \dots \\ \Theta_{21} \mathbf{g}_{11} \Psi_{11}^T F + \Theta_{22} \mathbf{g}_{22} \Psi_{12}^T F \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\{Q(\Omega)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{i\Omega + \mathbf{I}_j} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11}^T \\ \dots \\ \Psi_{12}^T \end{Bmatrix} F(\Omega) \quad (6.19)$$

$$\text{Definindo } \mathbf{g}_{kj}^1 \in \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \Psi_{sj}^1 \in \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow [a(\Omega)] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{i\Omega + \mathbf{I}_j} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{11} \\ \dots \\ \Psi_{12} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{a}_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mathbf{g}_{kj}^1 \Psi_{sj}^1}{i\Omega + \mathbf{I}_j} \quad (6.22)$$

6.2 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO (MASSA DESBALANCEADA)

$$\Omega = \Omega_{\text{rpm}}$$

Para achar a resposta no domínio do tempo é preciso partir da equação diferencial (5.3):

$$M\ddot{q}(t) + (G + C)\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (5.3)$$

Sendo que $C(\Omega)$ e $K(\Omega)$ neste presente trabalho, essas matrizes são constantes.

No espaço de estado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G(\Omega_{\text{rpm}}) + C(\Omega) & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{y}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} K(\Omega) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

na forma simplificada:

$$A\dot{y}(t) + By(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} = \{f_y(t)\} \quad (6.25)$$

Fazendo a seguinte transformação de coordenada:

$$Y(t) = \Theta p(t) \quad (6.26)$$

e pré-multiplicando por Ψ^T , sendo que ambas matrizes modais foram ortonormalizadas pelos coeficientes a_j , $j = 1, 2n$

$$\Psi^T A \Theta \dot{p}(t) + \Psi^T B \Theta p(t) = \Psi^T \{f_y(t)\} \quad (6.27)$$

$$I \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{I}_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T \{f_y(t)\} \quad (6.28)$$

$$I \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{I}_j & \\ & & \ddots \end{bmatrix} p(t) = \{N_y(t)\} \quad (6.29)$$

Tomando a k -ésima linha:

$$\dot{p}_k(t) + \mathbf{I}_j p_k(t) = N_y^k(t) \quad (6.30)$$

onde:

$$\Psi_j^T = [\Psi_j^T \quad \vdots \quad -I \Psi^T] \quad (6.31)$$

$$\{f_y(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_u \\ F_w \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_u d\Omega^2 \text{sen}\Omega t \\ m_u d\Omega^2 \text{cos}\Omega t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha } 4(i-1)+1 \\ \leftarrow \text{linha } 4(i-1)+2 \end{array} \quad (6.33)$$

onde i é o numero do nó onde o deslocamento existe no rotor

$$\{N_y(t)\} = m_u e\Omega^2 [\Psi^T(:, 4i-3)\text{sen}\Omega t + \Psi^T(:, 4i-2)\text{cos}\Omega t] \quad (6.34)$$

$$N_y^k(t) = m_u e\Omega^2 [\Psi^T(k, 4i-3)\text{sen}\Omega t + \Psi^T(k, 4i-2)\text{cos}\Omega t] \quad (6.35)$$

A solução da equação (6.35) e (6.36), para k -éssima coordenada principal, é dada ou proposta pela equação:

$$\dot{p}_k(t) + \mathbf{I}_k p_k(t) = N_y^k(t) \quad (6.36)$$

$$p_k(t) = A \text{sen}\Omega t + B \text{cos}\Omega t \quad (6.37)$$

Substituindo a equação (6.36) em (6.37):

$$\begin{aligned} (A\Omega \text{cos}\Omega t - B\Omega \text{sen}\Omega t) + \mathbf{I}_k (A \text{sen}\Omega t + B \text{cos}\Omega t) = \\ = m_u e\Omega^2 [\Psi^T(k, 4i-3)\text{sen}\Omega t + \Psi^T(k, 4i-2)\text{cos}\Omega t] \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$c = m_u e\Omega^2 \quad (6.39)$$

$$a_1 = \Psi^T(k, 4i-3) \quad (6.40)$$

$$b_1 = \Psi^T(k, 4i-2) \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} (A\Omega + \mathbf{I}_k B)\text{cos}\Omega t + (\mathbf{I}_k A + B\Omega)\text{sen}\Omega t = \\ = c[a_1 \text{sen}\Omega t + b_1 \text{cos}\Omega t] \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} A\Omega + \mathbf{I}_k B = b_1 c \\ \mathbf{I}_k A - B\Omega = a_1 c \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ equações com } 2 \text{ incógnitas} \end{array} \quad (6.43)$$

$$A = \frac{b_1 c - \mathbf{I}_k B}{\Omega} \quad (6.44)$$

$$\text{e } \frac{\mathbf{I}_k}{\Omega} [b_1 c - \mathbf{I}_k B] - B\Omega = a_1 c \quad (6.45)$$

de (6.45)

$$B = \frac{-a_1 c + \frac{I_k}{\Omega} b_1 c}{\frac{I_k}{\Omega} + \Omega} \quad (6.46)$$

$$B = \frac{-a_1 c + \frac{I_k}{\Omega} b_1 c}{\frac{I_k + \Omega^2}{\Omega}} \quad (6.46a)$$

$$B = \frac{-a_1 c \Omega + I_k b_1 c}{I_k + \Omega^2} \quad (6.46b)$$

e

$$A = \frac{b_1 c - I_k \left[\frac{(-a_1 c \Omega + b_1 c I_k)}{(I_k + \Omega^2)} \right]}{\Omega} \quad (6.47)$$

$$A = \frac{b_1 c}{\Omega} - \left(\frac{I_k}{\Omega} \right) \left[\frac{(-a_1 c \Omega + b_1 c I_k)}{(I_k + \Omega^2)} \right] \quad (6.47a)$$

$$A = \frac{\frac{b_1 c}{\Omega} (I_k + \Omega^2) + \frac{I_k}{\Omega} a_1 c \Omega - b_1 c I_k \frac{I_k}{\Omega}}{(I_k + \Omega^2)} \quad (6.47b)$$

$$A = \frac{I_k a_1 c + \Omega b_1 c}{(I_k + \Omega^2)} \quad (6.47c)$$

$$p_k(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \quad (6.48)$$

Uma vez calculado os $p_k(t)$ com $k = 1, 2n$, calcula-se

$$y(t) = \Theta p(t) \quad (6.49)$$

Como

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}, \text{ as primeiras } n \text{ componentes representam a solu\c{c}\~{o} da coordenada}$$

generalizada.

No capitulo seguinte apresenta-se os resultados obtidos para encontrar as matrizes de rigidez e amortecimento e as simula\c{c}\~{o}es realizadas, usando esses coeficientes, faz-se assim, uma compara\c{c}\~{o} entre dois modelos testados.

7. RESULTADOS

Os resultados dos coeficientes de rigidez e amortecimento foram obtidos através do método desenvolvido por Vance e pelo programa desenvolvido pela Renk. A tabela 7.1 mostra estes coeficientes obtidos. Também foi usado como referencia:

- o óleo ISO-VG 32 cuja viscosidade $\mu = 0,0275 \text{ Pa} \cdot \text{s}$,
- rotação: 3600 RPM.
- temperatura ambiente 40°C ,
- coeficiente de Poisson; $\nu = 0,3$
- modulo de elasticidade: $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- peso específico do aço: $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
- Dimensões do eixo: conforme desenho no anexo 1,
- Dimensões dos discos: $d = 250 \text{ mm}, 300 \text{ mm}, 400 \text{ mm}$,
- Espessura dos discos: $h = 10 \text{ mm}, 30 \text{ mm}, 50 \text{ mm}$,

O número de Sommerfeld é calculado e através dele é usado para encontrar graficamente outras relações como ϵ , h_0 .

$$So = 2,12$$

$\epsilon = 0,10$ é encontrado através do gráfico da figura 3.6.

A temperatura no programa da Renk é levada em consideração, uma vez que ela afeta a viscosidade do óleo. Já o cálculo desenvolvido não leva em conta este dado, pois, admite que ela não varie.

Os resultados obtidos foram:

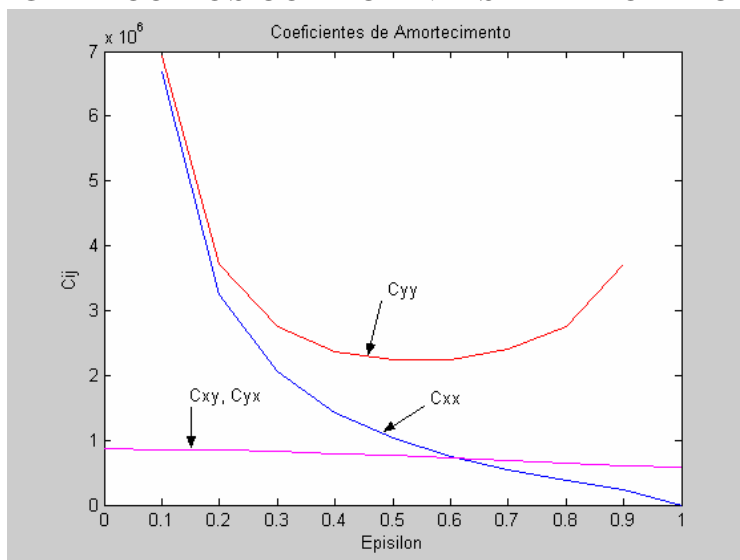
Tabela 7.1- Coeficientes obtidos:

Coeficientes obtidos pelo Vance		Coeficientes obtidos pela Renk:	
Estático	Dinâmico	Estático	Dinâmico
Klxx: 2,531	Kxx: 5,373 x 10 ⁶ N/m	Klxx: 0,057	Kxx: 4,060 x 10 ⁶ N/m
Klxy: -9,758	Kxy: -20,717 x 10 ⁶ N/m	Klxy: -0,263	Kxy: -18,909 x 10 ⁶ N/m
Klyx: 0,3811	Kyx: 22,041 x 10 ⁶ N/m	Klyx: 0,755	Kyx: 54,223 x 10 ⁶ N/m
Klyy: 1,3284	Kyy: 2,820 x 10 ⁶ N/m	Klyy: 0,058	Kyy: 4,159 x 10 ⁶ N/m
Clxx: 19,790	Cxx: 0,111 x 10 ⁶ Ns/m	Clxx: 0,539	Cxx: 0,103 x 10 ⁶ Ns/m
Clxy: 2,532	Cxy: 0,014 x 10 ⁶ Ns/m	Clxy: 0,062	Cxy: 0,012 x 10 ⁶ Ns/m
Clyx: 2,532	Cyx: 0,014 x 10 ⁶ Ns/m	Clyx: 0,062	Cyx: 0,012 x 10 ⁶ Ns/m
Clyy: 20,487	Cyy: 0,115 x 10 ⁶ Ns/m	Clyy: 1,509	Cyy: 0,288 x 10 ⁶ Ns/m

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

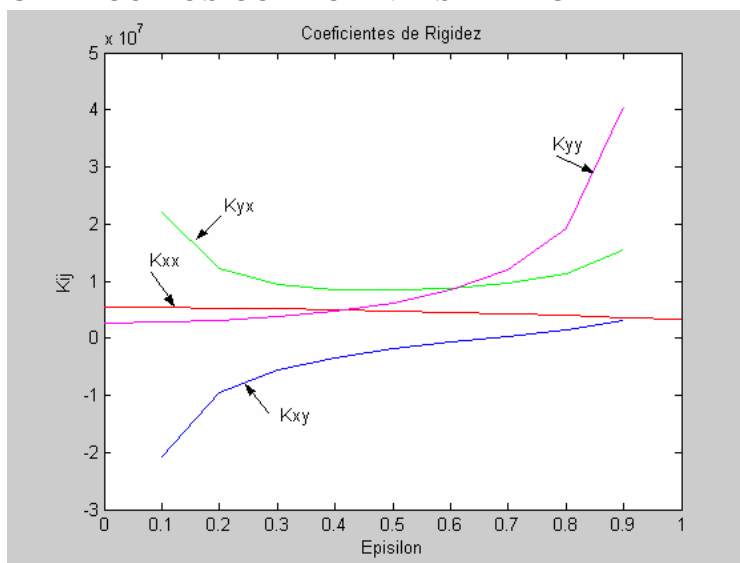
Mantendo-se os mesmos dados iniciais, com exceção de ϵ (excentricidade), a qual varia de 0 a 1, foi traçado um gráfico dos coeficientes de amortecimento fig. (7.1) e rigidez fig. (7.2) em relação a ϵ .

FIG. 7.1 GRÁFICO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.2 GRÁFICO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

Um problema o qual apareceu na simulação diz a respeito quanto as dimensões do eixo. Na região onde apóia-se o mancal, há entre ele, uma variação de diâmetro e espessura sendo esta considerada muito delgada em relação ao diâmetro. Ocasionalmente assim resultados errôneos, pois, o programa perde-se numericamente, problema ainda não solucionado.

As tabelas abaixo mostram as frequências naturais, encontradas na simulação. Para obter esses resultados numéricos, foi avaliado um projeto de um eixo arvore desenvolvido pela WEG o qual encontra-se no Apêndice 1.

TABELA 7.2. RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DOS PROGRAMAS:

Método	Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
Renk	Sem disco		29,946	29,953			
Vance	Sem disco		30,846	30,933			

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.3. RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 275 mm

Método	Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
Renk	0,370	0,724	27,560*	30,953	39,726	43,640	* instável
Vance	0,370	0,724	27,593*	30,886	39,586	45,193	* instável

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.4. RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 250 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
		Renk		Vance		
0,010	0,2925	29,946	29,953	30,853	30,940	
0,030	0,2925	29,946		30,866	30,940	
0,050	0,2925	29,926	29,946	30,873	30,926	
0,010	0,724	29,946	29,953	30,846	30,946	
0,030	0,724	29,946	29,953	30,846	30,960	
0,050	0,724	29,940	29,946	30,846	30,966	
0,010	1,1555	29,940	29,953	30,853	30,940	
0,030	1,1555	29,946		30,866	30,940	
0,050	1,1555	29,926	29,946	30,873	30,926	

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.5. RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 300 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
		Renk		Vance		
0,010	0,2925	29,946	29,953	30,860	30,940	
0,030	0,2925	29,933	29,943	30,873	30,933	
0,050	0,2925	29,906	29,953	30,880	30,906	
0,010	0,724	29,946	29,953	30,846		
0,030	0,724	29,946		30,846	30,966	
0,050	0,724	29,926	29,946	30,853	30,966	
0,010	1,1555	29,946	29,953	30,860	30,940	
0,030	1,1555	29,933	29,943	30,873	30,933	
0,050	1,1555	29,906	29,953	30,880	30,906	

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

As tabelas 7.6, 7.8, 7.10 e 7.12, mostram as frequências naturais obtidas dos coeficientes utilizados no programa utilizado pela Renk.

TABELA 7.6. RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 400 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
		Renk		Vance		
0,010	0,2925	29,946				
0,030	0,2925	29,900	29,953			
0,050	0,2925	29,800	29,953			
0,010	0,724	29,946	29,953			
0,030	0,724	29,920	29,946			
0,050	0,724	29,846	29,946	61,666	62,453	
0,010	1,1555	29,946				
0,030	1,1555	29,900	29,953			
0,050	1,1555	29,800	29,953			

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

As tabelas 7.7, 7.9, 7.11 e 7.13, mostram as frequências naturais obtidas dos coeficientes utilizados no modelo utilizado pelo Vance.

TABELA 7.7. RESULTADO OBTIDO COM UM DISCO DE 400 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
0,010	0,2925	30,866	30,940			
0,030	0,2925	30,880	30,900			
0,050	0,2925	30,773	30,886			
0,010	0,724	30,846	30,960			
0,030	0,724	30,853	30,960			
0,050	0,724	30,860	30,900	61,566	62,413	
0,010	1,1555	30,866	30,940			
0,030	1,1555	30,880	30,900			
0,050	1,1555	30,773	30,886			

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.8. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. natural				Obs.
0,010	0,2925/0,724/1,1555	29,946				
0,030	0,2925/0,724/1,1555	29,873	29,953			
0,050	0,2925/0,724/1,1555	29,733	29,946	62,740		

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.9. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. Natural				Obs.
0,010	0,2925/0,724/1,1555	30,873	30,946			
0,030	0,2925/0,724/1,1555	30,866	30,906			
0,050	0,2925/0,724/1,1555	30,700	30,926	62,493		

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.10. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 400 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. Natural				Obs.
0,010	0,2925/0,724/1,1555	29,920	29,953			
0,030	0,2925/0,724/1,1555	29,700	29,953	57,393		
0,050	0,2925/0,724/1,1555	29,246	29,913*	48,126		* instável

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.11. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 400 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. Natural				Obs.
0,010	0,2925/0,724/1,1555	30,893	30,940			
0,030	0,2925/0,724/1,1555	30,646	30,940	53,226		
0,050	0,2925/0,724/1,1555	29,933*	30,926	47,960		* instável

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

TABELA 7.12. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. Natural				Obs.
0,010	0,629/0,724/0,829	29,946				
0,030	0,629/0,724/0,829	29,846	29,946	61,726	62,526	
0,050	0,629/0,724/0,829	29,560*	29,946	52,540	53,760	* instável

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

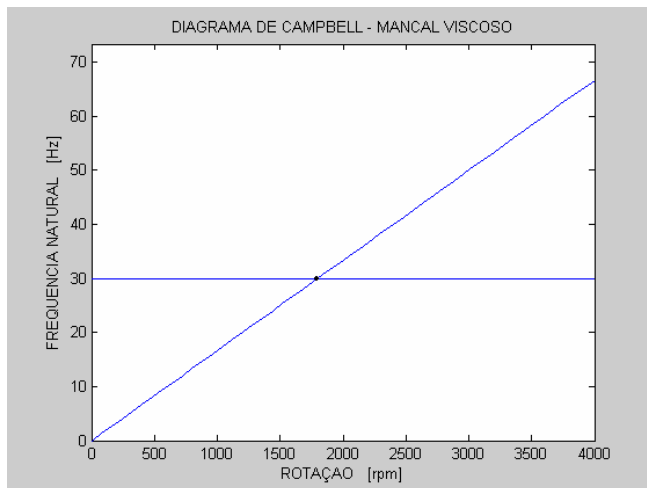
TABELA 7.13. RESULTADO OBTIDO COM TRÊS DISCOS DE 300 mm

Espessura do disco	Posição do disco	Freq. Natural				Obs.
0,010	0,629/0,724/0,829	30,853	30,966			
0,030	0,629/0,724/0,829	30,860	30,900	61,613	62,473	
0,050	0,629/0,724/0,829	30,473	30,886	52,413	53,973	* instável

Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

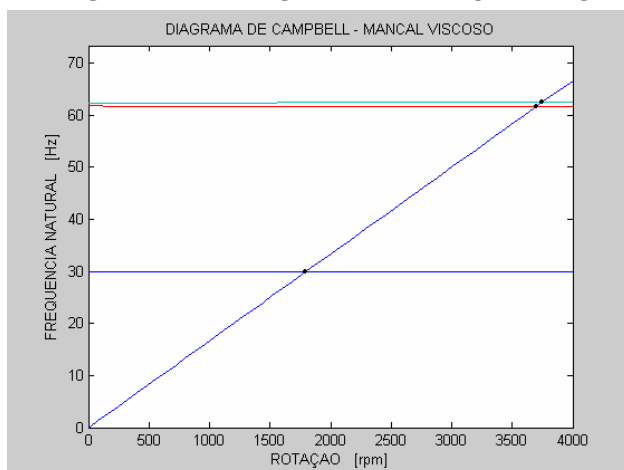
Os diagramas de Campbell foram obtidos utilizando-se os coeficientes de rigidez e amortecimento obtidos pelo programa da Renk, uma vez que utilizando-se os dados do modelo de Vence, são praticamente os mesmos, mudando-se somente os valores das frequências, como mostra as figuras

FIG. 7.3 DIAGRAMA DE CAMPBELL OBTIDO SEM DISCO



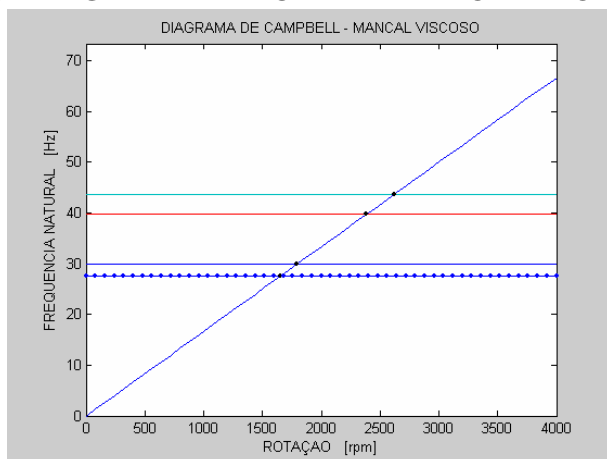
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.4 DIAGRAMA DE CAMPBELL OBTIDO I



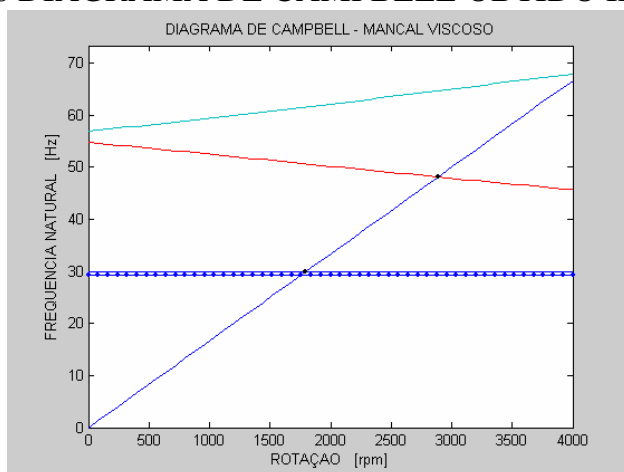
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab
Com 1 disco: $d = 400$, espessura do disco = 0,50mm posição do disco = 724mm

FIG. 7.5 DIAGRAMA DE CAMPBELL OBTIDO II



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab
Com 1 disco: $d = 275$, espessura do disco = 370mm, posição do disco = 724mm

FIG. 7.6 DIAGRAMA DE CAMPBELL OBTIDO III

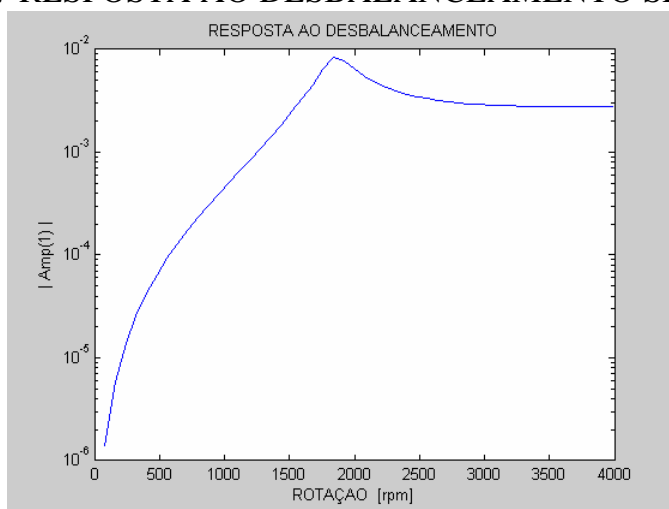


Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab
Com 3 discos: $d = 400$, espessura do disco = 50mm, posição do disco = 724mm

O mesmo acontece com os gráficos de das respostas da frequência, diagramas do tempo e modos de vibrar. Neste trabalho são mostrados apenas alguns gráficos obtidos.

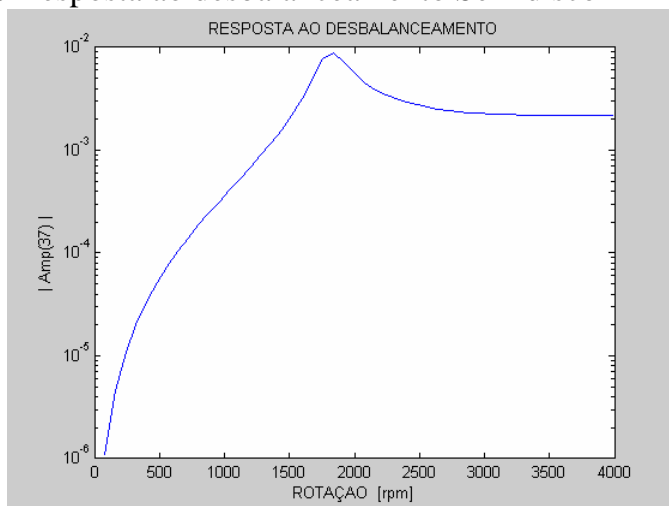
As figuras 7.7, 7.8 e 7.9 mostram as respostas ao desbalanceamento em suas rotações onde o pico corresponde com a frequência natural do rotor e sua amplitude. Deve-se observar que não há discos engastados no eixo.

FIG. 8.7 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO SEM DISCO I



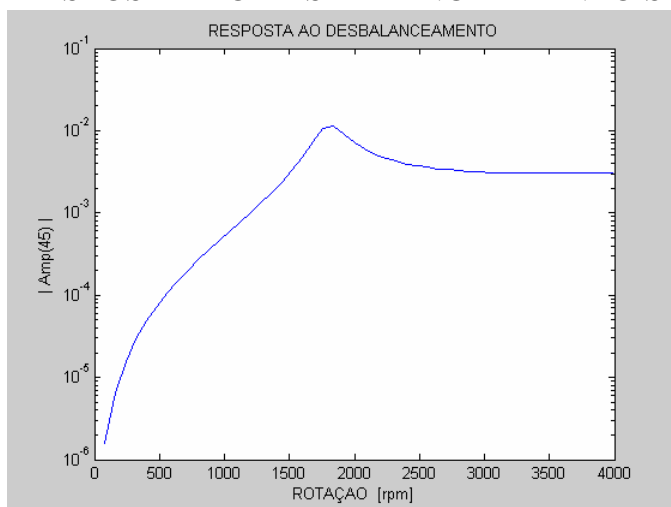
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.8 Resposta ao desbalanceamento Sem disco II



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

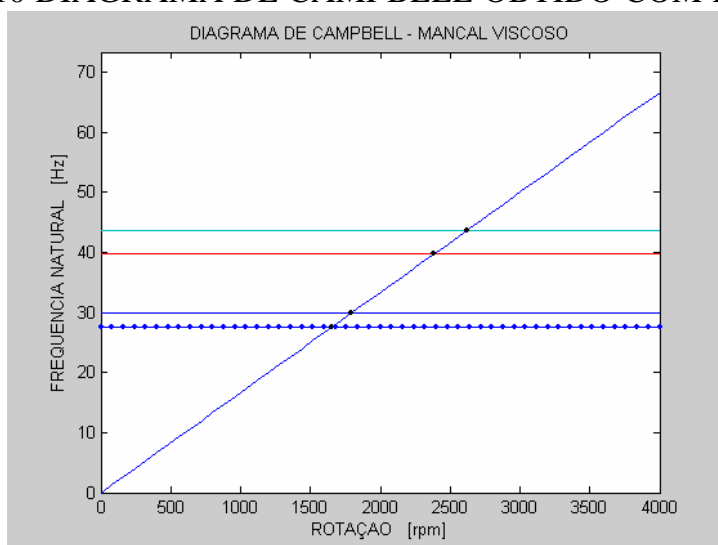
FIG. 7.9 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO SEM DISCO III



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

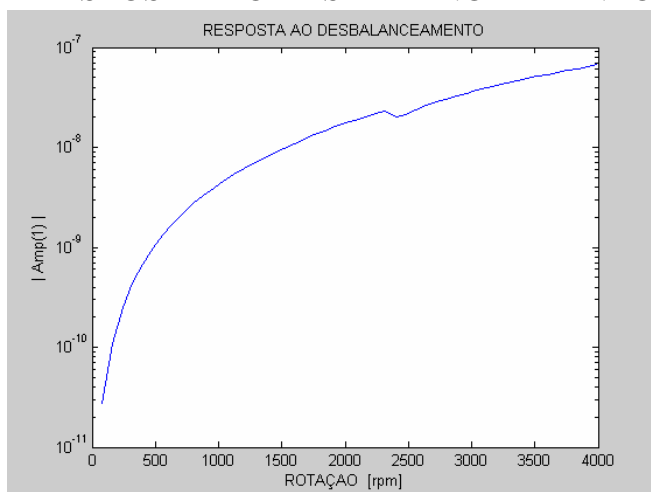
Já as figuras 7.10, 7.11, 7.12 e 7.13, há um rotor de diâmetro 275 mm, 370 mm de largura e seu centro de massa, tido como referencia está localizado no centro do eixo, ou seja, 724 mm.

FIG. 7.10 DIAGRAMA DE CAMPBELL OBTIDO COM ROTOR



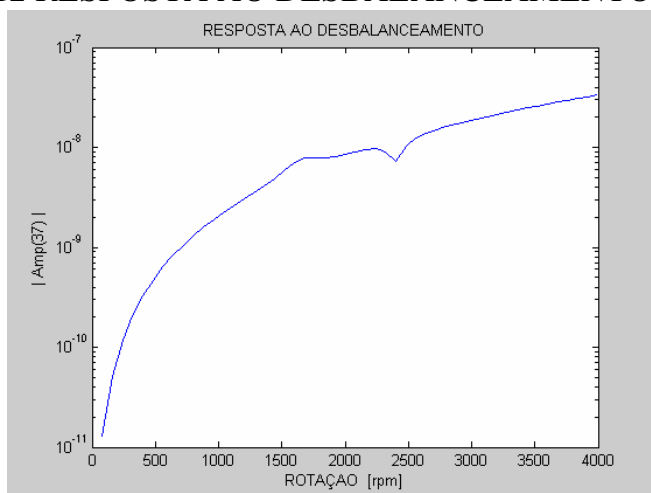
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.11 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR I



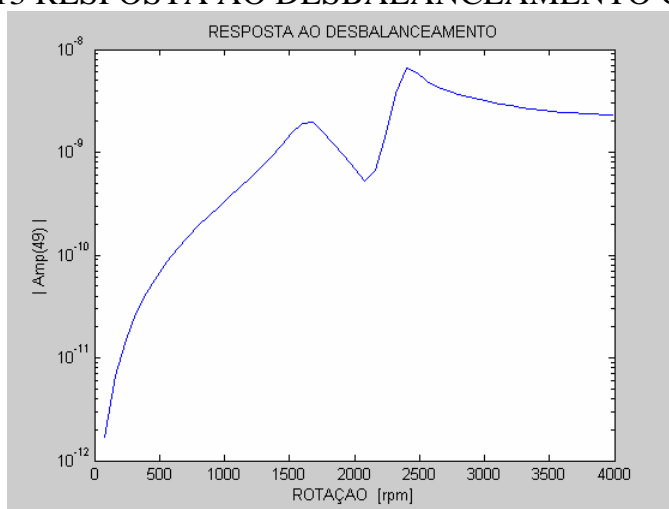
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.12 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR II



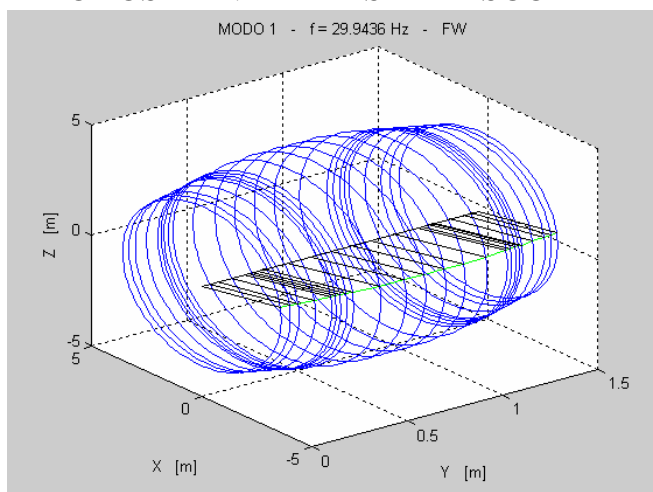
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.13 RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO COM ROTOR III



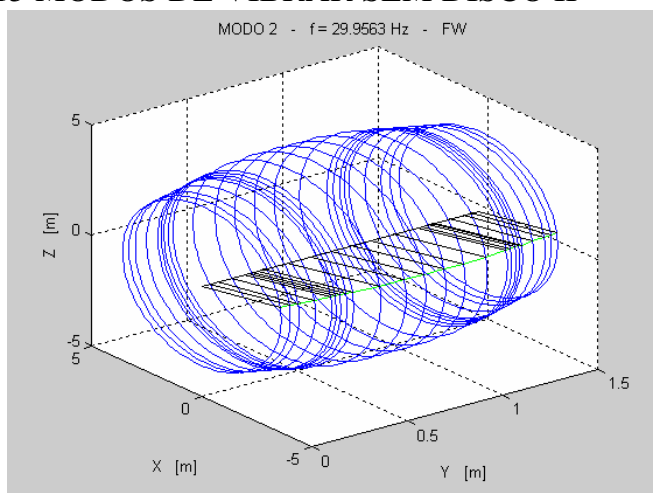
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.14 MODOS DE VIBRAR SEM DISCO I



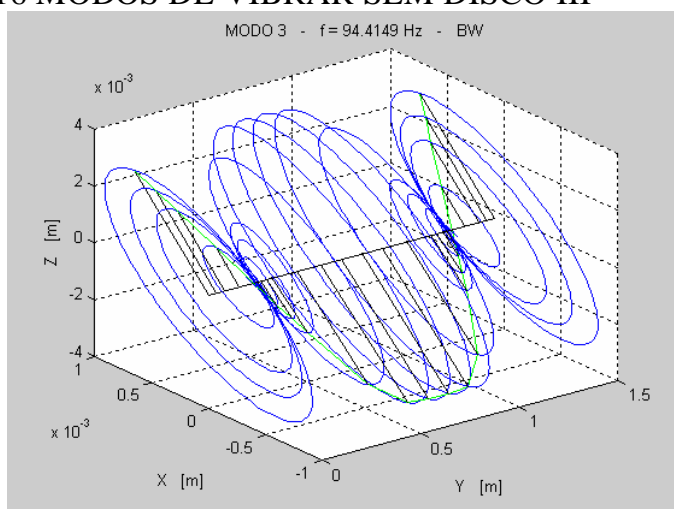
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.15 MODOS DE VIBRAR SEM DISCO II



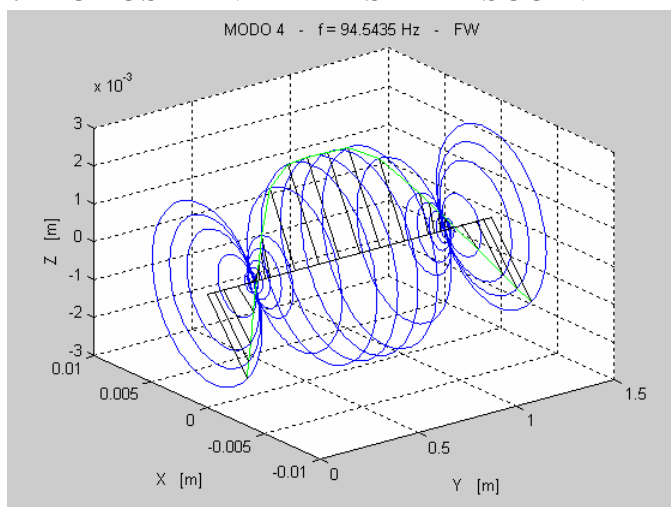
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.16 MODOS DE VIBRAR SEM DISCO III



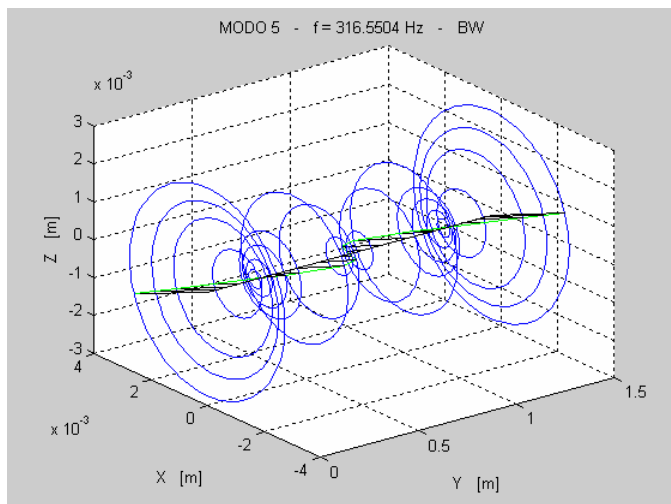
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.17 MODOS DE VIBRAR SEM DISCO IV



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.18 MODOS DE VIBRAR SEM DISCO V



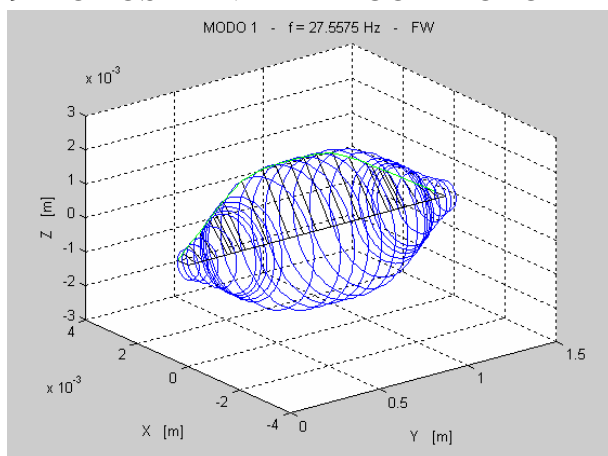
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

As figuras 7.14, 7.15, 7.16, 7.17 e 7.18 mostram os modos de vibração devido ao desbalanceamento, excentricidade, em relação à suas frequências críticas as rotações onde observa-se o comportamento do eixo. Descrevendo este o primeiro e o segundo harmônico, bem como a sua amplitude. Deve-se observar que não há discos engastados no eixo, e este descreve uma órbita elíptica entorno do seu centro.

As figuras 7.19, 7.20, 7.21, 7.22 e 7.23 mostram os modos de vibração devido ao desbalanceamento, excentricidade, em relação à suas frequências críticas as rotações onde observa-se o comportamento do eixo. Descrevendo este o primeiro e o segundo harmônico, bem como a sua amplitude. Deve-se observar que há um disco engastado no eixo de diâmetro

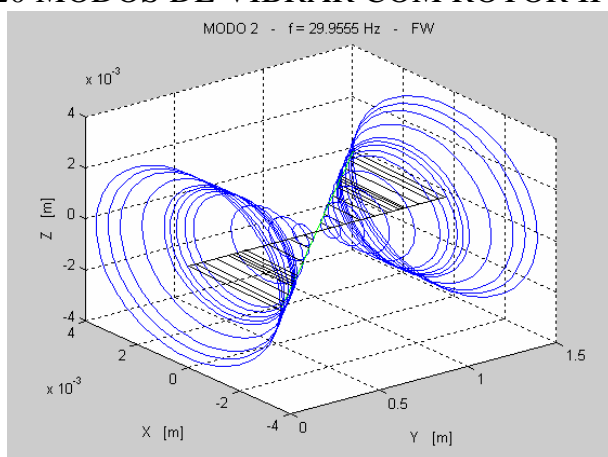
275 mm, 370 mm de largura e seu centro de massa, tido como referencia está localizado no centro do eixo, ou seja, 724 mm, e o rotor descreve uma órbita elíptica entorno do seu centro.

FIG. 7.19 MODOS DE VIBRAR COM ROTOR I



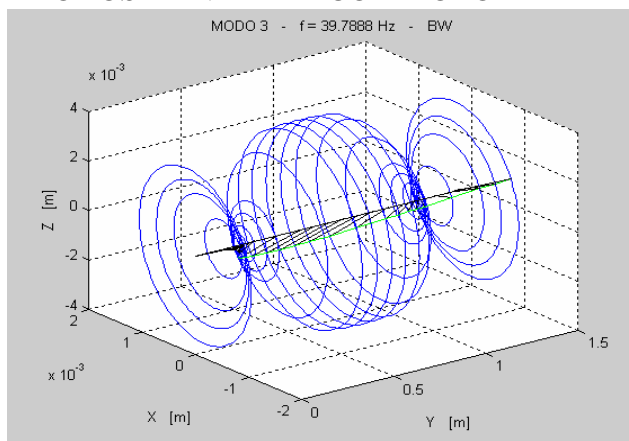
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.20 MODOS DE VIBRAR COM ROTOR II



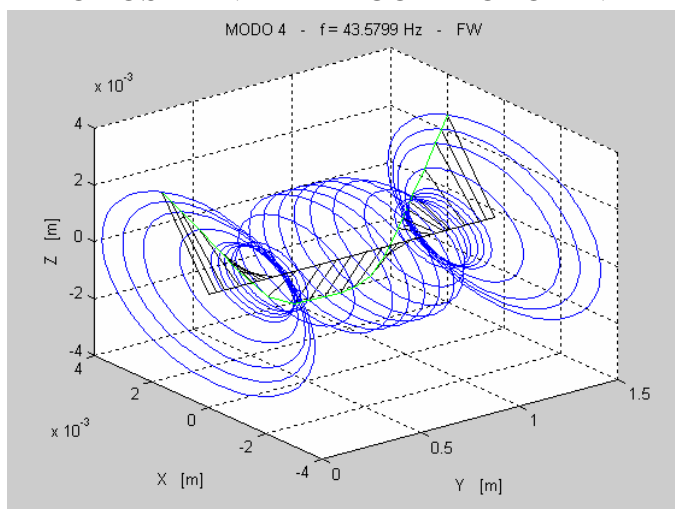
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.21 MODOS DE VIBRAR COM ROTOR III



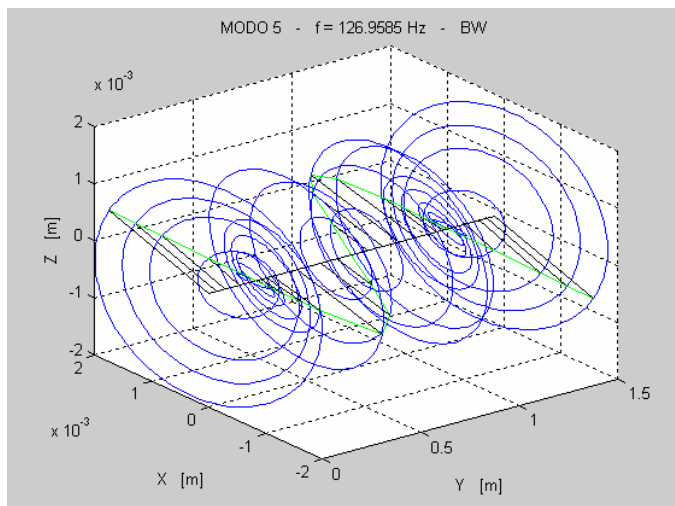
Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.22 MODOS DE VIBRAR COM ROTOR IV



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

FIG. 7.23 MODOS DE VIBRAR COM ROTOR V



Fonte: obtido no programa desenvolvido no Matlab

7.1 ANÁLISE DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO

O conhecimento dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais hidrodinâmicos permite que sejam feitas linearizações do modelo do rotor para velocidades de rotação própria e desbalanceamentos específicos. Os valores dos coeficientes das matrizes de rigidez e amortecimento dos mancais do rotor foram então avaliadas em cada uma das simulações anteriores, quando as órbitas finais foram alcançadas em cada caso (regime quasi-permanente).

Os coeficientes da diagonal principal da matriz de rigidez, K_{xx} e K_{yy} , apresentaram grande variação em Vance e se aproximam na Renk. Há variação dos desses coeficientes de rigidez para várias velocidades de rotação. Os coeficientes de acoplamento da matriz de rigidez do mancal, K_{xy} e K_{yx} , são constantes para cada velocidade de rotação própria no ciclo limite, o mesmo ocorrendo com os coeficientes da diagonal principal da matriz de amortecimento do mancal, C_{xx} e C_{yy} . Além deste fato, em cada instante, os coeficientes K_{xy} e K_{yx} são simétricos, e os termos C_{xx} e C_{yy} são essencialmente os mesmos. Nota-se também que os termos C_{xx} e C_{yy} permaneceram praticamente constantes, independentes do valor da velocidade de rotação. Quanto aos coeficientes de acoplamento da matriz de amortecimento do mancal, C_{xy} e C_{yx} , estes são iguais, variando no tempo em torno do valor nulo.

Os valores de K_{ij} e C_{ij} , ou seja, os coeficientes de rigidez e amortecimento, estes são fundamentais para predizer a característica dinâmica de um rotor.

7.2 ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS OBTIDAS.

Como o programa da Renk fornece os coeficientes de rigidez e amortecimento, estes foram então para rodar no programa desenvolvido. Através dele obteve-se o diagrama de Campbell, a resposta no domínio do tempo, da frequência bem como os modos de vibrar.

As frequências obtidas através dos programas são praticamente iguais. Sendo que a diferença não ultrapassa 5%, considerando-se então os resultados satisfatórios. Também notou-se a simetria nos valores obtidos nos extremos. Verificou-se também que o sistema fica instável com a frequência abaixo de 29,5 Hz.

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os coeficientes de rigidez e amortecimento são parâmetros que têm grande influência sobre a dinâmica do rotor. É uma das bases deste trabalho, e por não dizer umas das mais difíceis, pois, sem um modelo experimental, aumenta a dificuldade em prever qual a teoria que mais se aproxima da realidade.

Neste trabalho estendeu-se à análise dinâmica a incorporação dos efeitos de mancais hidrodinâmicos simples, implicando na adaptação da metodologia de cálculo do sistema às condições de não-linearidade das reações desses mancais com os deslocamentos e velocidades transversais do rotor. Com um sistema computacional de elementos finitos visando a modelagem e análise numérica do comportamento de máquinas rotativas em geral, introduziu-se estes vetores neste modelo numérico.

Soluções analíticas para os coeficientes das matrizes de rigidez e amortecimento associadas aos graus-de-liberdade do modelo de elementos finitos foram obtidas para mancais hidrodinâmicos simples. Devido à presença desses mancais, torna-se necessário efetuar a análise dinâmica temporal, pelo método de integração direta passo-a-passo, iterações no cálculo dos deslocamentos dentro de cada intervalo de tempo, para uma melhor aproximação da realidade.

A validação dos modelos e a avaliação dos resultados foram realizadas através de análises numéricas comparativas, verificando-se que os modelos propostos são capazes de capturar os fenômenos de "oil whirl" e "oil whip" para mancais hidrodinâmicos simples.

A análise foi feita para valores de rigidez e amortecimento de mancais reais. Para acusação de instabilidades foram usados dados de mancais hidrodinâmicos resultantes do *software* de cálculo SBCALC da RENK.

A construção de uma bancada experimental é essencial para avaliar os resultados obtidos da previsão numérica. Esta deve ser capaz não só de avaliar as frequências críticas, mas também de verificar órbitas e os modos de vibrar do rotor, bem como validar os coeficientes de rigidez e amortecimento.

Também para se fazer um novo levantamento de ε (excentricidade) em relação ao número de Sommerfeld, para diferentes tipos, de mancais e suas relações de L/D , pois as curvas utilizadas tratam-se do ano de 1958. Bem como um modelo para encontrar os coeficientes de rigidez e amortecimento em função da rotação do eixo árvore.

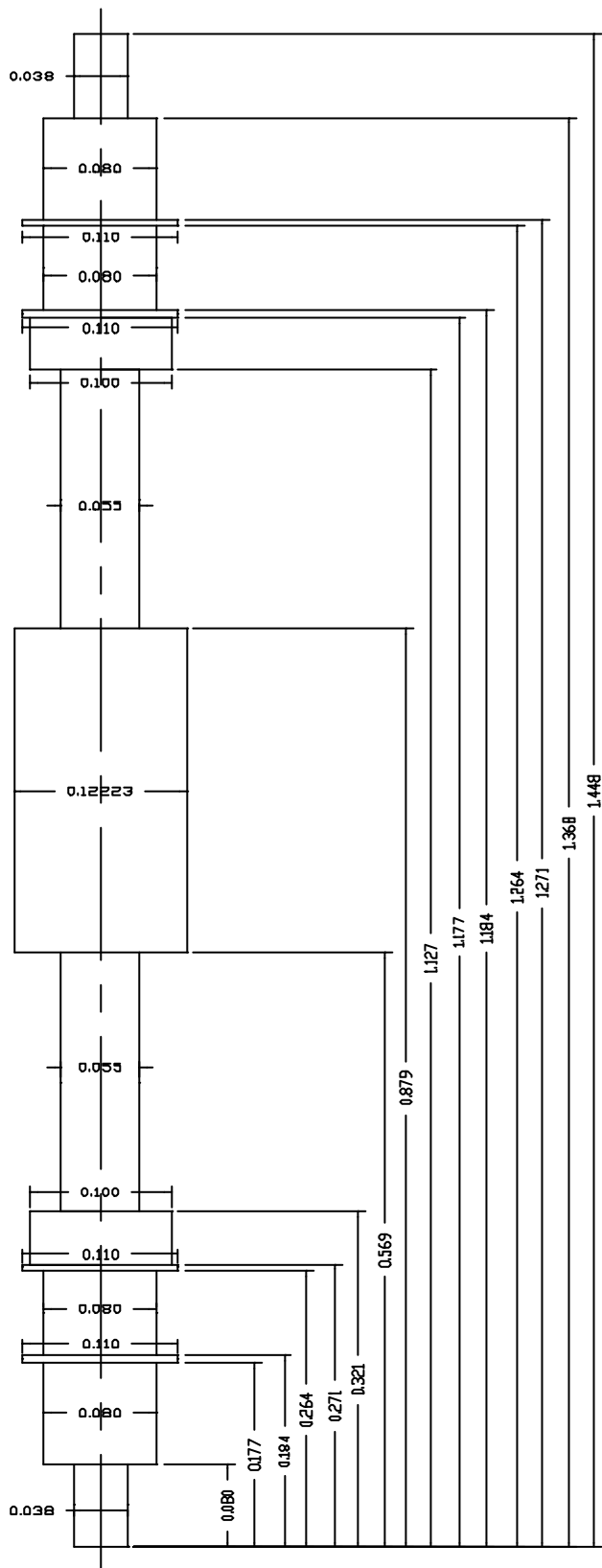
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Vance, J.M., "**Rotordynamics of Turbomachinery**". John Wiley & Sons, 1988.
2. Rocha, R.O., "**Modelagem e Simulação Computacional em Dinâmica de Rotores via Método dos Elementos Finitos**", Dissertação de Mestrado na UFRJ, 1992.
3. Meggiolaro, M. A., "**Modelagem de Mancais Hidrodinâmicos na Simulação de Sistemas Rotativos**", Tese de M.Sc. na PUC-RJ, 1996.
4. Shigley J.E. "**Mechanical Engineering Design**." Mc Graw - Hill Book Company-2001.
5. Shigley J.E. "**Elementos de Máquinas**". Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.1981.
6. Abreu, L. G. P. - "**Análise de vibrações de um Turbogenerador a Vapor**", Tese de M.Sc. na COPPE/UFRJ-RJ, 2001.
7. Madeira, I. M.-, "**Modelagem em Elementos Finitos de Maquinas Rotativas com Efeitos Não Lineares**", Tese de M.Sc. na COPPE/UFRJ-RJ, 2003.
8. Curi, E.I.M.-, "**Sistema de Monitoramento e Detecção de Transição de Regime de Lubrificação em Mancal de Deslizamento**", Tese de M.Sc. na COPPE/UFRJ-RJ, 2003.
9. Kwon, Young W, "**The Finite Element Method Using MATLAB**". CRC Press, -2000.
10. Lalanne, M., Ferraris, G., "**Rotordynamics Prediction in Engineering**". John Wiley & Sons Inc, 1990.
11. Childs, D.W., "**Turbomachinery Rotordynamics - Phenomena. Modeling and Analysis**", John Wiley & Sons, 1993, p, 132.
12. SBCALC, **Version 3.0 for Windows 32-Bit Operating Systems for the Calculation of RENK Standard Slide Bearings under Steady-State Conditions, User's Guide**.
13. Arndt, Marcos, "**O método dos elementos compostos aplicado à análise de vibrações**". Tese de M.Sc. na UFPR, 2001
14. Capone (1991), G., "**Descrizione analítica dei campo di forze fluidodinamico nei cuscinetti cilindrici lubrificati**", L'Energia Elettrica, V.68 n.3, p.15-20, 1991.
15. Santos, Hideraldo L. V. "**Dinâmica de Rotores**". Trabalho de graduação. Engenharia Mecânica, UFPR, 2003.
16. López, Ezequiel J. "**Dinámica de Rotores**". Trabalho de graduação .Engenharia Mecânica, Universidad Nacional del Comahue, 2002.
17. Ewins, D.J., "**Modal Testing Theory and Practice**". RSP- Research Studies Press,1984.

18. Adams Jr, Maurice L., "**Rotating Machinery Vibration**". Marcel Dekker, Inc, 2001.
19. Almeida, Márcio T., "**Vibrações Mecânicas para Engenheiros**". Editora Edgard Blücher Ltda, 1987.
20. Zachariadis, Demetrio C., "**Estudo dos Efeitos do Desalinhamento Angular de Mancais Hidrodinâmicos nas Vibrações de Rotores Flexíveis**". Tese de Doutor. na EP/USP, 2000.
21. Duarte Jr, Durval, "**Modelagem Matemática e Simulação em Mancais Hidrodinâmicos**". Tese de Doutor. na EP/USP, 1987
22. Dimarogonas, Andrew, "**Vibration for Engineers**" 2.Ed.. Washington University. Prentice-Hall International, Inc., 1996.
23. Brown, D.L., Allemang, R.J. e Zimmerman, Ray, "**Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis**", Society of Automotive Engineers, 1979.
24. Crosby, W. A., "**The Stability of a Rigid Rotor in Ruptured Finite Journal Bearings**", Elsevier Sequoia / Printed in The Netherlands, 1982, p.333-346.
25. Panda, K. C. e Dutt, J. K., "**Optimum Support Characteristics for Rotor-Shaft System With Preloaded Rolling Element Bearings**", Journal of Sound and Vibration 260, 2002, p.731-755.
26. Dai, Xingjian, Shen, Zupei e Wei, Haigang, "**On the vibration of rotor-bearing system with squeeze film damper in an energy storage flywheel**", International Journal of mechanical Sciences 43, 2001, p.2525-2540.
27. Silveira, Márcio E. "**Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em Eixos Bobinados**" Tese de M.Sc. na UFSC, 2001
28. Ola Blom. "**Multi-domain analysis in rotordynamics**", Avdelning, institution, Institutionen för Konstruktions- och Produktionsteknik, 2002.
29. Bathe, K. "**Finite element Procedures**". New Jersey: Prentice Hall, 1996.
30. Lees, A.W., e Hirdaris, S. E. "**Models for thick beams and frames**". In: International Modal Analysis Conference, 17., 1999, P. 1531-1537.
31. Espíndola, João Carlos Espíndola Ferreira. "**Apostila de Fundamentos de vibrações**", Curso de Pós-Graduação em Eng. Mecânica da UFSC, 1990.
32. Niemann, Gustav. "**Elementos de Máquinas**", Editora Edgard Blücher, 1971.
33. Yih- Hwang Lin. e Sheng-Cheng Lin "**Optimal weight desing of rotor systems with oil-film bearings subjected to frequency constraints**". Finite Elements in Analysis and Desing 37 , 2001, P. 777-798.

34. A. Muszynska “**Whirl and whip – rotor/bearing stability problems**”. Journal of Sound and vibration 110, 1986, P. 443-462.
35. J.W.LUND e E. SAIBEL “**Oil Whip Whirl Orbits of a Rotor in Sleeve Bearings**”. Journal of Engineering for Industry, 1967, P. 813-823.
36. Manocorda, L. G., Capriz, G. “**Torque Produced by Misalignment in Short Lubricated Bearings**”, Journal of Engineering, 1965, p. 847.

APENDICE 1



Fonte: WEG. Dimensões: mm