

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JULIANA ENZWEILER LOPES PACHECO

**CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS COM APLICAÇÃO  
DE SÉRIES DE PRONY E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS**

CURITIBA

2013

JULIANA ENZWEILER LOPES PACHECO

**CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS COM APLICAÇÃO  
DE SÉRIES DE PRONY E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada como requisito para obter o título de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na Área de Concentração em Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira  
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

CURITIBA

2013

Pacheco, Juliana Enzweiler Lopes  
Caracterização de materiais viscoelásticos com aplicação de Séries de Prony e análise por elementos finitos / Juliana Enzweiler Lopes Pacheco.  
- Curitiba, 2013.  
115 f. : il., graf., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Orientador: Jucélio Tomás Pereira  
Coorientador: Carlos Alberto Bavastrri

1. Algoritmos genéticos. 2. Método dos elementos finitos. 3. Viscoelasticidade - Polímeros. I. Pereira, Jucélio Tomás. II. Bavastrri, Carlos Alberto. III. Título.

CDD 532.58

## TERMO DE APROVAÇÃO

JULIANA ENZWEILER LOPES PACHECO

### CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS COM APLICAÇÃO DE SÉRIES DE PRONY E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Luersen  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes  
Universidade Federal do Paraná

Curitiba, 15 de março de 2013.

Ao meu esposo Maurício.  
À minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela vida, bênção e proteção.

Ao Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira, pelos ensinamentos, comprometimento e encorajamento ao longo deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri, pelos ensinamentos e dedicação ao longo deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Fernando Lajarin, pelo suporte no ABAQUS.

Aos Profs. Drs. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, Marco Antônio Luersen e Pablo Andrés Muñoz-Rojas, pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e participação na banca de avaliação.

Ao meu esposo Maurício, pela compreensão e apoio.

À minha família e amigos, pelo encorajamento e compreensão.

A Volvo do Brasil Veículos LTDA., pelo apoio institucional.

A Sabic S.A. pelo fornecimento dos dados do material.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

## EPÍGRAFE

“Se tiverdes fé, nada vos será impossível.”

Matheus 17:20

“A persistência é o melhor caminho para o êxito.”

Charles Chaplin

## RESUMO

O comportamento mecânico dos materiais viscoelásticos (MVEs) é influenciado, entre outros, por parâmetros como tempo e temperatura. O estudo da influência destes parâmetros é objeto frequente de pesquisas que visam buscar uma metodologia mais adequada para determinar seu impacto no comportamento de estruturas construídas com MVEs. Este texto apresenta uma metodologia para a caracterização de MVEs termorreológica e piezorreologicamente simples no domínio do tempo a partir de dados experimentais, utilizando as Séries de Prony e uma técnica mista de otimização baseada em Algoritmos Genéticos (AG) e Programação Não Linear (PNL). O resultado final de caracterização é a obtenção das constantes relacionadas a cada termo da Série de Prony, que foi utilizada na análise por Elementos Finitos (EF) do material viscoelástico (MVE). Além disso, o texto discute também as influências da pressão e da temperatura sobre o comportamento mecânico desses materiais. Os resultados desta análise são comparados aos dados experimentais com o intuito de validar a metodologia. Os resultados finais se mostram bastante promissores e a metodologia se apresenta eficiente para identificação de MVEs.

Palavras-chave: Viscoelasticidade. Caracterização de materiais. Séries de Prony. Otimização. Método dos elementos finitos.



## **ABSTRACT**

The mechanical behavior of viscoelastic materials is influenced, among other factors, by parameters like time and temperature. The study of the influence of those parameters is often the subject of researches, which the main objective is to find a more adequate methodology to determinate their impact in the behavior of structures built with viscoelastic materials. This text presents a methodology for the characterization of viscoelastic materials thermorheologically and piezorheologically simple in the time domain from experimental data, using Prony Series and a mixed technique of optimization based on Genetic Algorithms and Non Linear Programming. The final characterization results are the parameters related to each Prony Series term, which were used in the Finite Element Analysis of the viscoelastic material. Besides that, this text also discusses the influence of pressure and temperature on the mechanical behavior of those materials. The results of this analysis are compared to the experimental data in order to validate the methodology. The final results are very promising and the methodology presents itself effective on the identification of viscoelastic materials.

Keywords: Viscoelasticity. Material characterization. Prony series. Optimization. Finite element method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Teste de Relaxação apresentando o histórico de deformações (a) e de tensões (b). .....	20
Figura 2 - Testes de fluência (a) e teste de fluência mais recuperação de fluência (b). .....	21
Figura 3 - Modelo de Maxwell (a) e Modelo de Maxwell Generalizado (b). .....	22
Figura 4 – Modelo de Wiechert. ....	22
Figura 5 - Modelo de Kelvin (a), Modelo de Kelvin Generalizado (b) .....	23
Figura 6 - Log $\alpha_t$ plotado contra $T - T_S$ para frações de poliestireno (círculos vazios) e poliisobutileno (círculos cheios).....	27
Figura 7 - Curva máster para um material do tipo epóxi modificado. ....	28
Figura 8 – Cinco regiões do comportamento viscoelástico de um polímero. ....	34
Figura 9 – Exemplo de dados transladados com fator de deslocamento para módulos de relaxação com $T_0 < T$ . ....	36
Figura 10 – Módulo versus temperatura para um poliuretano com ligações cruzadas no estado borrachoso.....	37
Figura 11 – Tensões experimentais e de Prony <i>versus</i> deformação para uma determinada taxa de deformação.....	42
Figura 12 – Divisão do intervalo de integração. ....	45
Figura 13 – Janela para entrada de dados associados à função <i>Elastic</i> no ABAQUS. .....	50
Figura 14 – Janela para entrada de dados associados à função <i>Viscoelastic</i> no ABAQUS. ....	51
Figura 15 – Condições de contorno criadas no <i>Step Initial</i> , (a) BC_1, (b) BC_2 e (c) BC_3. ....	53
Figura 16 – Condição de contorno de deslocamento prescrita na direção Y (BC_4). .....	53
Figura 17 – Resultados da análise por elementos finitos no ABAQUS. ....	54
Figura 18 – Esquema do conjunto de rotinas implementadas no software MATLAB para caracterização do material. ....	65

Figura 19– Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através do cálculo da Série de Prony (-) para a temperatura de -35°C e quatro taxas de deformação isoladamente. ....	68
Figura 20 – Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de -35°C e todas as taxas de deformação (ajuste global). ....	69
Figura 21 – Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de -35°C. ....	70
Figura 22 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 23°C e quatro taxas de deformação. ....	71
Figura 23 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 23°C e todas as taxas de deformação (ajuste global). ....	72
Figura 24 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de 23°C. ....	73
Figura 25 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 80°C e quatro taxas de deformação. ....	74
Figura 26 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e aqueles obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 80°C e todas as taxas de deformação (ajuste global). ....	75
Figura 27 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de 80°C. ....	77
Figura 28 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para temperaturas de (a) -35°C, (b) 23°C e (c) 80°C e taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s). ....	79
Figura 29 – Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C. ....	80
Figura 30 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através da Série de Prony para temperaturas de (a) -35°C, (b) 23°C e (c) 80°C e taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s). ....	82
Figura 31 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C. ....	83

Figura 32 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através das Séries de Prony para temperaturas de (a) -35°C, (b) 23°C e (c) 80°C e taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s). .....	84
Figura 33 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C. ....	85
Figura 34 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através das Séries de Prony para temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s). .....	86
Figura 35 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C. ....	87
Figura 36 - Função módulo de relaxação identificada considerando todas as taxas de deformação e temperaturas para $T_s = -18,38^\circ\text{C}$ . .....	89
Figura 37 – Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de -35°C. ....	90
Figura 38 - Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de 23°C. ....	91
Figura 39 - Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de 80°C. ....	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultado do processo de identificação para a temperatura de -35°C....	69
Tabela 2 – Resultado do processo de identificação para a temperatura de 23°C. ....	72
Tabela 3 - Resultado do processo de identificação para a temperatura de 80°C.....	76
Tabela 4 – Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s).....	81
Tabela 5 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s). ....	83
Tabela 6 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s). ....	85
Tabela 7 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s). ....	87
Tabela 8 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para todas as taxas de deformação.....	88

## LISTA DE ABREVIATURAS

AG	Algoritmos Genéticos
DMTA	Análise Dinâmica Térmica e Mecânica
EF	Elementos Finitos
FMT	Modelo de FILLERS – MOONAN – TSCHOEGL
FRFs	Funções Resposta em Frequência
FS	Modelo de FERRY – STRATON
GHM	Modelo de GOLLA – HUGHES – McTAVISH
HIH	Modelo de HAVLÍCEK – ILASVKÝ – HROUZ
KKT	Equações de KARUSH – KUHN – TUCKER
KT	Modelo de KOVACS – TAIT
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVE	Material Viscoelástico
MVEs	Materiais Viscoelásticos
OR	Modelo de O'REILLY
PNL	Programação Não Linear
PSTT	Princípio da Sobreposição de Tempo e Temperatura
RBOP	<i>Rolling Ball on Plate</i>
SS	Modelo de SIMHA – SOMCYNSKY
WLF	Modelo de WILLIAMS – LANDEL - FERRY

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha_P$	fator de deslocamento para a pressão
$\alpha_T$	fator de deslocamento para a temperatura
$\alpha_{T,P}$	fator de deslocamento para temperatura e pressão
$\beta$	constante utilizada no cálculo da função de aptidão da rotina de AG
$\gamma$	deformação de cisalhamento
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon(0)$	deformação acumulada até o instante inicial
$\varepsilon_f$	deformação final
$\dot{\varepsilon}$	taxa de deformação
$\dot{\varepsilon}_i$	i-ésima taxa de deformação
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho_0$	densidade de referência
$\tau$	instante de tempo de relaxação
$\tau_i$	tempo de relaxação associado ao termo de Prony ( $i = 1 a 8$ )
$\tau_l$	tempo de relaxação associado ao l-ésimo termo da Série de Prony
$\sigma$	tensão
$\sigma(t)$	tensão para o histórico de deformações
$\sigma_{jk}$	tensão para a j-ésima temperatura e k-ésimo ponto
$\sigma_k^{exp}$	tensão experimental para o k-ésimo ponto
$\sigma_k^{Prony}$	tensão de Prony para o k-ésimo ponto
$A/d(0)$	fator de fluência
$C$	constante do material para o fator de deslocamento de pressão
$C^{inf}$	limite inferior da variável de projeto $C$
$C^{sup}$	limite superior da variável de projeto $C$
$C_1$	constante do material para o fator de deslocamento de temperatura
$C_1^{inf}$	limite inferior da variável de projeto $C_1$
$C_1^{sup}$	limite superior da variável de projeto $C_1$
$C_2$	constante do material para o fator de deslocamento de temperatura
$C_2^{inf}$	limite inferior da variável de projeto $C_2$

$C_2^{sup}$	limite superior da variável de projeto $C_2$
$D(t)$	módulo de fluência
$E_0$	módulo de relaxação instantâneo
$E_\infty$	módulo de equilíbrio
$E_\infty^{sup}$	limite superior da variável de projeto $E_\infty$
$E_i$	módulo de relaxação associado ao termo de Prony ( $i = 1 a 8$ )
$E_i^{sup}$	limite superior da variável de projeto $E_i$
$E_{kij}$	módulo do erro para k-ésimo ponto, j-ésima temperatura e i-ésima taxa de deformação
$E_l$	módulo de relaxação para l-ésimo termo da Série de Prony
$\bar{E}_T$	erro quadrático médio
$E_T^2$	erro quadrático total
$E(t)$	módulo de relaxação no domínio do tempo
$E(\Omega)$	módulo de relaxação no domínio da frequência
$f_i$	função objetivo para AG
$f_{max}$	valor máximo da função objetivo para AG
$F_i$	função de aptidão para AG
$f(x)$	função objetivo para problema padrão de otimização
$g_i$ Prony	razão do módulo de cisalhamento
$G_i$	módulo de cisalhamento associado a cada termo da Série de Prony
$G_0$	módulo de cisalhamento instantâneo
$k_i$ Prony	razão do módulo volumétrico
$K_i$	módulo volumétrico associado a cada termo da Série de Prony
$K_0$	módulo volumétrico instantâneo
$l_0$	comprimento inicial do cubo
$lb$	limite inferior para variáveis do problema padrão de otimização
$N_g$	número de termos de mini-osciladores
$N_p$	tamanho da população de indivíduos para AG
$NT$	número de termos da Série de Prony
$NTax$	número de taxas de deformação
$NTemp$	número de temperaturas
$NPto$	número de termos de pontos



$P$	pressão para o fator de deslocamento da pressão
$P_0$	pressão de referência
$P_0^{inf}$	limite inferior da variável de projeto $P_0$
$P_0^{sup}$	limite superior da variável de projeto $P_0$
$P_{jp}$	pressão entre os instantes $t_p$ e $t_{p-1}$
$t$	variável de tempo
$t'$	tempo dividido pelo fator de deslocamento
$t_0$	tempo inicial
$t_f$	tempo final
$t_k$	k-ésimo instante de tempo
$t_p$	tempo inicial do intervalo de integração
$t_{p-1}$	tempo final do intervalo de integração
$T$	variável de temperatura
$T_0$	temperatura de referência do fator de deslocamento da temperatura
$T_g$	temperatura de transição vítrea
$T_j$	j-ésima temperatura
$T_m$	temperatura de fusão
$T_s$	temperatura de referência do fator de deslocamento da temperatura
$T_s^{inf}$	limite inferior da variável de projeto $T_s$
$T_s^{sup}$	limite superior da variável de projeto $T_s$
$\tau_i$ Prony	tempo de relaxação associado a cada termo da Série de Prony
$u$	deslocamento
$u$	função auxiliar no processo de integração
$ub$	limite superior para variáveis do problema padrão de otimização

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
1.1	OBJETIVOS .....	15
1.1.1	Objetivos gerais.....	16
1.1.2	Objetivos Específicos .....	16
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO .....	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>18</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	18
2.2	VISCOELASTICIDADE .....	18
2.2.1	Modelos Constitutivos de MVEs .....	18
2.2.2	Influência da Temperatura.....	25
2.2.3	Influência da Pressão .....	28
2.3	CARACTERIZAÇÃO DE MVES .....	29
<b>3</b>	<b>REVISÃO CONCEITUAL .....</b>	<b>32</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	32
3.2	COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES.....	32
3.2.1	Formulação Geral de MVEs .....	32
3.2.2	Influência da Temperatura nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros.....	33
3.2.2.1	Princípio de Sobreposição de Tempo e Temperatura .....	34
3.2.3	Influência da Pressão nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros.....	37
3.2.4	Análise da Influência da Pressão e Temperatura nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros .....	38
<b>4</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MVES NO DOMÍNIO DO TEMPO .....</b>	<b>39</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	39
4.2	PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MVE NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	39
4.2.1	Integral Hereditária .....	40
4.3	ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MVE.....	40
4.4	FORMULAÇÃO DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	41
4.4.1	Influência da Pressão Média sobre o Comportamento Material .....	43
4.4.2	Influência da Temperatura sobre o Comportamento do Material.....	47
4.5	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE PRONY EM SOFTWARE COMERCIAL DE ELEMENTOS FINITOS.....	49
4.5.1	Definição de Condições de Contorno e Carregamentos.....	52
<b>5</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS.....</b>	<b>55</b>
5.1	METODOLOGIA.....	55
5.2	MATERIAIS UTILIZADOS .....	57
5.3	TÉCNICAS E ROTINAS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADAS .....	57
5.3.1	Algoritmos Genéticos.....	57
5.3.2	Programação Não Linear.....	62
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>64</b>

6.1	ESTRUTURA COMPUTACIONAL IMPLEMENTADA .....	64
6.2	IDENTIFICAÇÃO DO MVE CONSIDERANDO TEMPERATURA CONSTANTE E INFLUÊNCIA DA PRESSÃO .....	66
6.2.1	Identificação considerando temperatura constante de -35°C e influência da pressão .....	67
6.2.2	Identificação considerando temperatura constante de 23°C e influência da pressão .....	70
6.2.3	Identificação considerando temperatura constante de 80°C e influência da pressão .....	74
6.3	IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA 77	
6.3.1	Identificação considerando taxa de carregamento 0,0001 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C .....	79
6.3.2	Identificação considerando taxa de carregamento 0,01 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C E 80°C.....	81
6.3.3	Identificação considerando taxa de carregamento 0,1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C .....	84
6.3.4	Identificação considerando taxa de carregamento 1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C .....	86
6.3.5	Identificação considerando todas as taxas de carregamento e temperaturas.....	88
6.4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA EM SOFTWARE COMERCIAL.....	90
6.4.1	Análise de elementos finitos para temperatura de -35°C.....	90
6.4.2	Análise de elementos finitos para temperatura de 23°C .....	91
6.4.3	Análise de elementos finitos para temperatura de 80°C.....	91
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>93</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>96</b>
	<b>APÊNDICES .....</b>	<b>100</b>
	<b>ANEXOS .....</b>	<b>114</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A caracterização de materiais é um processo que demanda tempo e investimentos para a realização de testes, geralmente executados pelos fabricantes para algumas temperaturas, incluindo a temperatura ambiente. Embora com os ensaios realizados se possa ter uma noção adequada da variação do comportamento mecânico do material (por exemplo, dos módulos de relaxação e de fluência), em algumas situações de análise de componentes viscoelásticos se fazem necessários dados em uma maior faixa de temperaturas, a fim de se avaliar o impacto das mesmas na estrutura em estudo.

Pelas características dos materiais em estudo, a relação entre a dependência das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos (MVEs), com as variáveis tempo e temperatura, pode ser utilizada para desenvolver métodos de teste acelerados, a fim de estimar propriedades mecânicas de longo prazo a partir de testes de curto prazo. Assim, o desenvolvimento deste estudo visa aliar estes métodos com ferramentas de simulação de forma a alcançar a previsibilidade das propriedades mecânicas dos MVEs ao longo do tempo considerando variação de temperatura.

A necessidade de previsibilidade das propriedades mecânicas dos MVEs surge da grande aplicabilidade dos materiais poliméricos como materiais estruturais. É preciso também que sejam realizadas análises de tensões/deformações para aumentar a confiabilidade dos projetos que utilizam materiais poliméricos. Assim posto, é necessário ter uma metodologia eficiente que possibilite caracterizar estes materiais de forma adequada para os programas comerciais de elementos finitos, visando garantir a confiabilidade das análises realizadas e de seu uso em projetos que empreguem este tipo de material.

### 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos do trabalho proposto são apresentados nos parágrafos subsequentes.

### 1.1.1 Objetivos gerais

O objetivo geral deste estudo é desenvolver uma metodologia eficiente de identificação de propriedades mecânicas de MVEs termorreológica e piezorreologicamente simples no domínio do tempo, para aplicação em programas comerciais com vistas à análise de tensões com base em algum método numérico (por exemplo, o método dos elementos finitos (MEF)), a fim de se obter cálculos estruturais confiáveis. Com este estudo pretende-se reduzir a necessidade de testes físicos de verificação dos componentes estruturais manufaturados com esses materiais.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos específicos:

1. Proposta de uma metodologia para a caracterização de MVEs no domínio do tempo, utilizando Séries de Prony e MEF;
2. Implementação numérica de uma estrutura computacional que propicie a obtenção dos termos característicos do material.

## 1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

O trabalho desenvolvido é formalizado ao longo desse texto, o qual contém sete capítulos, três apêndices e um anexo. No corrente capítulo é apresentado o problema de caracterização e simulação do comportamento dos MVEs, e sua importância e sua relevância para o desenvolvimento de projetos utilizando MVEs. Também são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho e como o mesmo será exposto em cada capítulo.

A partir do segundo capítulo têm-se a revisão bibliográfica do trabalho, onde são explanadas as teorias e histórico de estudos sobre MVEs, identificação de materiais no domínio do tempo e da frequência, juntamente com a relação entre MEF e sua aplicação no estudo do comportamento dos MVEs.

No terceiro capítulo é apresentada uma revisão conceitual, onde são discutidas as teorias e suas aplicações utilizadas na metodologia e desenvolvimento do trabalho.

O quarto capítulo inclui toda a formulação que deu base ao programa elaborado no ambiente MATLAB.

No quinto capítulo estão descritos a metodologia e os materiais utilizados na realização do trabalho, com a descrição das técnicas de otimização e MEF aplicados.

O sexto capítulo apresenta e discute todos os resultados obtidos nos programas MATLAB e ABAQUS, juntamente com a relação entre estes resultados e aqueles obtidos através de testes físicos realizados pelos fornecedores de MVEs.

Finalmente, no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e sugestões para possíveis trabalhos futuros. Após estes capítulos apresentam-se as referências utilizadas para consulta e documentação em anexo.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma revisão sobre a literatura nos tópicos de viscoelasticidade e modelos de comportamento viscoelástico, juntamente com os diferentes métodos de identificação das propriedades mecânicas viscoelásticas nos domínios do tempo e da frequência. Da mesma forma, são abordados estudos realizados na área do MEF e sua aplicação nas investigações sobre o comportamento dos MVEs.

### 2.2 VISCOELASTICIDADE

Os polímeros são materiais cada vez mais utilizados em projetos de engenharia principalmente devido às suas versatilidade e resistência mecânica. Entretanto, o estudo de seu comportamento, quando submetido a carregamentos mecânicos, ainda está sob desenvolvimento, devido a sua complexa estrutura molecular que molda propriedades mecânicas que mudam conforme o tempo e a temperatura.

A fim de prever o comportamento desse tipo de material, alguns métodos foram desenvolvidos para que, a partir de alguns parâmetros característicos do material, seja possível determinar o resultado da aplicação de diferentes carregamentos ao longo do tempo e sob o efeito de mudanças de temperatura, inerentes ao uso de componentes estruturais empregando MVEs.

#### 2.2.1 Modelos Constitutivos de MVEs

Os materiais elásticos são aqueles nos quais as deformações devido à aplicação de carregamentos externos são reversíveis, instantâneas e cessam completamente quando cessa a aplicação do carregamento. Para um material elástico, linear e isotrópico, em um problema multiaxial de tensões e deformações, a

descrição de seu comportamento é adequadamente feita pela Lei de Hooke Generalizada (LAI, RUBIN e KREMPL, 2010).

MVEs são materiais cujo comportamento mecânico é fortemente dependente da velocidade de aplicação dos carregamentos a uma temperatura constante. Ou seja, a tensão é função, não somente do valor da deformação, mas também das derivadas das deformações. O oposto também se aplica. Assim, a deformação é função do histórico de carregamentos aplicados, assim como a tensão é função do histórico de deformações. Um material pode ser considerado viscoelástico linear quando sua deformação e taxa de deformação são infinitesimais, e a relação tensão-deformação dependente do tempo pode ser expressa através de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Dessa forma, em um experimento, a razão da tensão para a deformação é uma função do tempo, e não da magnitude de tensões (FERRY, 1980). Nos MVEs lineares as relações hereditárias são expressas através do princípio da superposição para viscoelasticidade linear, que utiliza as expressões para os módulos de relaxação e fluência.

O módulo de relaxação  $E(t)$  de um MVE é determinado através do teste de relaxação, um dos métodos fundamentais para caracterizar o comportamento de um polímero dependente do tempo. Nesse teste, uma deformação constante é aplicada a uma barra uniaxial, que é estendida de forma que a deformação permaneça constante (Figura (1)). Dependendo das características do material, termofixo ou termoplástico, a tensão para tempos longos pode de aproximar de um valor constante e diferente de zero ou igual à zero, respectivamente.



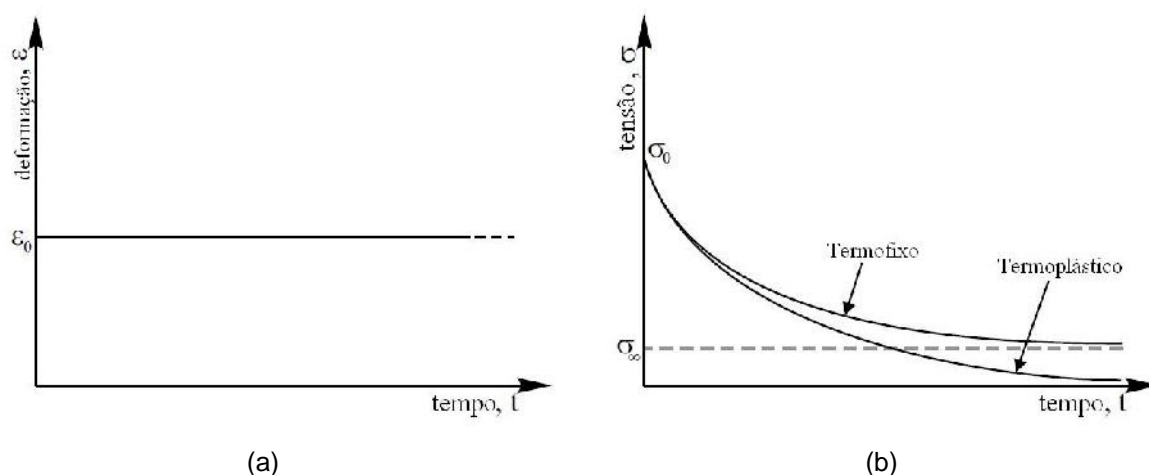


Figura 1 – Teste de Relaxação apresentando o histórico de deformações (a) e de tensões (b).

Fonte: Adaptado de BRINSON e BRINSON (2008).

Juntamente com o teste de relaxação, o teste de fluência possibilita a caracterização do comportamento de fluência de um MVE. Neste teste, uma barra uniaxial é submetida a uma tensão constante, e a deformação sob esta tensão aumenta com o tempo (Figura (2)), definindo a flexibilidade do material (uma medida da flexibilidade do mesmo).

Outro teste apresentado na Figura (2) é o teste de recuperação de fluência, onde a tensão aplicada é removida. Por exemplo, para um material termofixo ideal, a deformação cairá à zero em um intervalo de tempo que pode ser considerado longo se comparado ao tempo de carregamento. Já para um material termoplástico ideal, uma deformação residual (também denominada de deformação permanente ou viscoplástica) permanecerá mesmo após um tempo muito longo. Os mecanismos de deformação associados com a relaxação e a fluência do material são relacionados à longa cadeia molecular da estrutura dos polímeros (BRINSON e BRINSON, 2008).

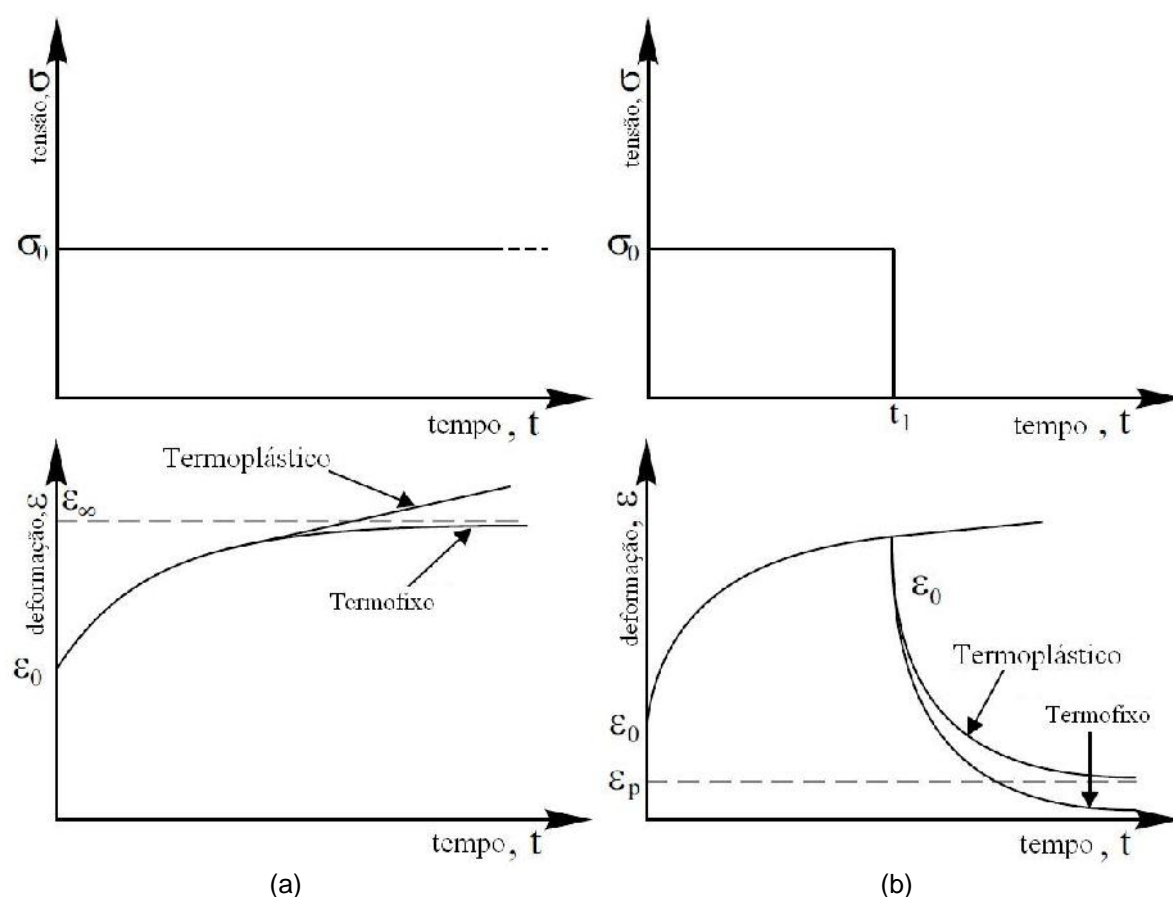


Figura 2 - Testes de fluência (a) e teste de fluência mais recuperação de fluência (b).

Fonte: Adaptado de BRINSON e BRINSON (2008).

Essas características do comportamento mecânico dos MVEs podem ser representadas, entre outras, através de modelos mecânicos envolvendo molas e amortecedores.

Um dos primeiros modelos desenvolvidos para explicar o comportamento viscoelástico dos materiais poliméricos foi elaborado por James Clerk Maxwell (1831-79), um físico escocês e também professor de física experimental na cidade de Cambridge, na Grã-Bretanha. O Modelo Generalizado de Maxwell, como é conhecido, representa a função de relaxação como o somatório de uma série de termos exponenciais, e pode ser interpretada como um modelo mecânico de elementos como o apresentado na Figura (3), dispostos de forma paralela.

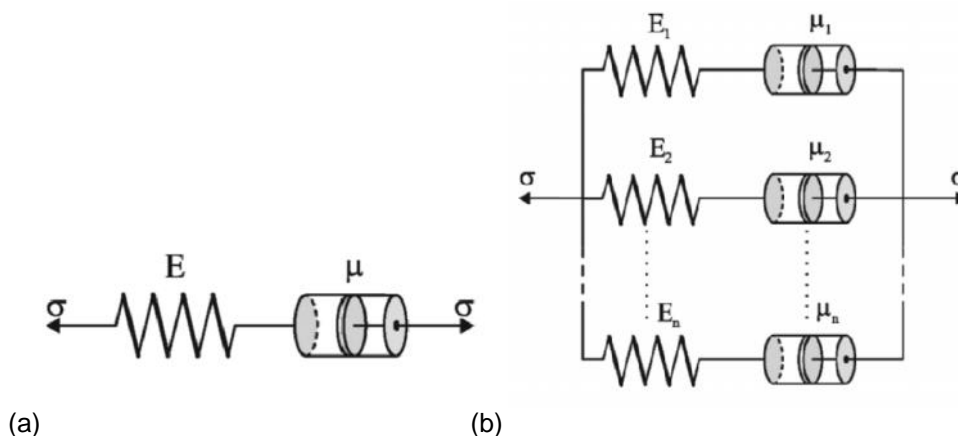


Figura 3 - Modelo de Maxwell (a) e Modelo de Maxwell Generalizado (b).

Fonte: BRINSON e BRINSON (2008).

Com a adição de mais um termo de mola, tem-se o modelo conhecido como modelo de Wiechert (BRINSON e BRINSON, 2008), conforme a Figura (4).

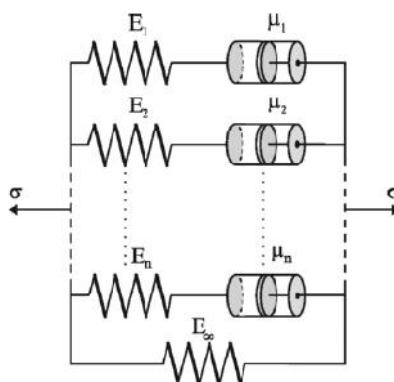


Figura 4 – Modelo de Wiechert.

Fonte: BRINSON e BRINSON (2008).

Outro modelo, também muito conhecido, foi desenvolvido por Lord Kelvin (1824-1907) e é apresentado na Figura (5a). Na Figura (5c) tem-se a representação do modelo de Kelvin / Voigt, que modela uma função de fluência. Nesse caso, o modelo generalizado de Kelvin / Voigt representa uma série de termos envolvendo uma constante mais um somatório de termos exponenciais em associados em série.

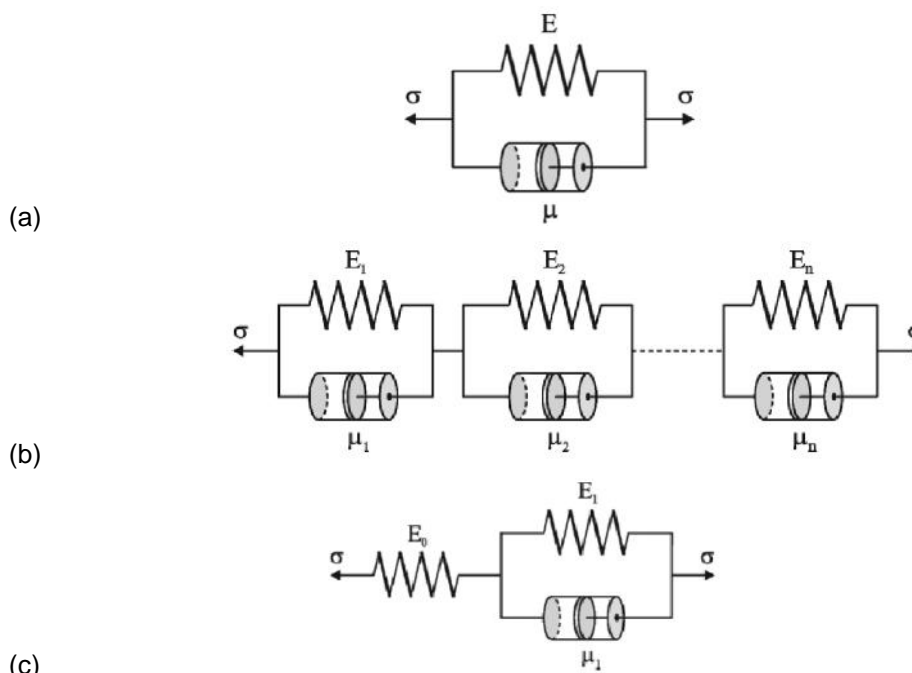


Figura 5 - Modelo de Kelvin (a), Modelo de Kelvin Generalizado (b) e (c) Modelo de Kelvin / Voigt.

Fonte: BRINSON e BRINSON (2008).

Os modelos simples de Maxwell e Kelvin / Voigt buscam representar o comportamento mecânico dos MVEs, entretanto possuem algumas deficiências. Uma maneira de diminuir essas deficiências é adicionando mais termos, como nos modelos generalizados apresentados anteriormente. Nesse caso, o modelo baseado em Séries de Prony, equivalente ao modelo de Maxwell Generalizado, se mostra bastante eficiente e é largamente utilizado na bibliografia.

SOUSSOU *et al.* (1970) desenvolveram um método para descrição de funções viscoelásticas com utilização das séries de Prony e o compararam aos métodos já existentes. O método desenvolvido consiste em impor restrições aos coeficientes das séries, que garantem convergência das funções e representações espectrais discretas, juntamente com uma técnica de otimização. A série resultante utiliza também um método para solução das equações integrais, tendo como resultado uma relação exata entre as funções de relaxação e fluência.

As Séries de Prony também foram utilizadas por PARK e SCHAPERY (1999) para aplicar um método numérico eficiente para relacionar funções de relaxação e fluência de MVEs, o qual foi testado utilizando dados experimentais de alguns materiais poliméricos. Este método é aplicável para a interconversão entre as

funções de relaxação e fluência nos domínios do tempo, frequência e das transformadas de Laplace. Naquele trabalho são mostrados também os efeitos dos diferentes valores dos parâmetros, em especial os tempos de relaxação e retardo, para os materiais polimetilmetacrilato e poliisobutileno, onde as funções dos materiais foram comparadas entre a fonte dos dados e as calculadas através do método desenvolvido.

Os modelos de Maxwell e Kelvin / Voigt apresentados anteriormente são chamados também de modelos de derivada de ordem inteira. Outra abordagem é dada através de modelos que utilizam conceitos de derivada fracionária. Nesses modelos, obtém-se um módulo complexo  $E(\Omega)$ , contendo quatro ou cinco parâmetros determinados experimentalmente, para determinação das características de módulo dinâmico, parte real do módulo complexo, e do fator de perda do material, parte imaginária dividido pela parte real do mesmo, que caracterizam os MVEs no domínio da frequência (PRITZ, 1996).

Um estudo comparando teorias moleculares que descrevem o comportamento de MVEs e os modelos baseados em derivadas fracionárias foi realizado por BAGLEY e TORVIK (1983). Naquele trabalho, foi demonstrado que, a partir de um reduzido número de parâmetros, pode-se prever, com certa exatidão, uma caracterização do comportamento dinâmico destes materiais.

Da mesma forma, PRITZ (1996) utilizou o modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros para descrever a variação de propriedades dinâmicas elásticas e de amortecimento em uma ampla faixa de frequências. Neste estudo foi demonstrada uma relação estrita entre a dispersão do módulo dinâmico, o pico no fator de perda e a inclinação da curva de frequência, o que possibilita também utilizar este modelo para previsão do impacto da faixa de frequência nas propriedades dinâmicas do material.

LOPES *et al.* (2004) utilizaram uma modelagem generalizada, baseada em modelos de cálculo fracionário, para caracterizar, de forma integrada em frequência e temperatura, materiais como borracha butílica e silicone, através das funções de transmissibilidade que foram obtidas experimentalmente em várias temperaturas de ensaio. Assim, aquela metodologia se baseia no problema inverso, usando um modelo de transmissibilidade de um sistema simples composto com material viscoelástico como elemento resiliente e técnicas de otimização não linear, em um

ajuste global de todas as curvas, simultaneamente, onde temperatura e frequência estão presentes.

A partir de funções resposta em frequência (FRFs) medidas em uma viga em balanço, KIM e LEE (2009) calcularam os parâmetros do modelo de derivadas fracionárias para MVEs, utilizando técnicas de otimização com vistas à minimização das diferenças entre as FRFs medidas e as calculadas através do MEF.

### 2.2.2 Influência da Temperatura

Durante o processo de caracterização dos MVEs, torna-se evidente a influência da variação de temperatura no comportamento destes materiais, o que fomenta o estudo contínuo da variação da temperatura e as consequências da mesma nas propriedades mecânicas dos MVEs.

Uma das maneiras de classificar os MVEs é a através da termorreologia. Um material pode ser definido como TERMORREOLOGICAMENTE SIMPLES quando todos os tempos de relaxação são afetados pela temperatura da mesma maneira permitindo, assim, a aplicado ao mesmo o Princípio de Superposição de Tempo-Temperatura (PSTT). Já os materiais TERMORREOLOGICAMENTE COMPLEXOS não permitem a superposição ao longo do tempo ou frequência. Uma forma de determinar se um material é classificado como termorreologicamente simples é realizando testes experimentais de relaxação ou fluência a diferentes temperaturas, constantes em cada experimento, e construir um gráfico mostrando a função em relação ao logaritmo do tempo. Após isso, deve-se transladar as curvas obtidas a diferentes temperaturas, ao longo do eixo logaritmo do tempo, para verificar se as mesmas coincidem para valores definidos da função medida. Caso as curvas coincidam satisfatoriamente, o material pode ser classificado como termorreologicamente simples (SCHWARZL e STAVERMAN, 1952).

Com a aplicação do PSTT a um material termorreologicamente simples, surgem as curvas másters, que utilizam variáveis reduzidas de tempo para abranger um tempo maior de dados de uma determinada função material (FERRY, 1980).

Um das primeiras aplicações do PSTT e das curvas máster foram citadas por LEADERMAN (1943), que comparou vários exemplos de curvas másters obtidas

através do PSTT, com a redução de curvas de tensão a várias temperaturas para uma única curva máster a 25°C para poliisobutileno.

Curvas máster do logaritmo do módulo de relaxação versus logaritmo do tempo foram construídas por TOBOLSKY (1956) a partir de dados experimentais para alguns polímeros. Os dados de módulo de relaxação foram obtidos a diferentes temperaturas e superpostos através de um deslocamento horizontal ao longo do eixo do logaritmo do tempo.

RANGEL-NAFAILE *et al.* (1985) também estudaram os efeitos da temperatura nos valores do módulo de cisalhamento de uma resina de poliéster reforçada com 25% de fibra de vidro. Para isso, amostras de material foram submetidas a carregamento e temperatura constantes, para uma variedade de temperaturas. Com os resultados construiu-se uma curva máster utilizando o PSTT para o módulo de cisalhamento instantâneo, que comparada a resultados experimentais obtidos em longo prazo, apresentou boa concordância.

CHAE *et al.* (2010) realizaram experimentos de relaxação de tensão em componentes poliméricos no domínio do tempo, a fim de determinar sua curva máster de módulo de relaxação com aplicação das séries de Prony para caracterizar o comportamento de relaxação do material. Após a obtenção dos fatores *shift* (fator de deslocamento) e dos coeficientes das Séries de Prony através de dois métodos, a curva máster a uma temperatura de referência foi transferida para as demais temperaturas medidas, em comparação aos dados experimentais.

O estudo de CHAE *et al.* (2010) utiliza uma técnica de sobreposição de curvas características de algumas propriedades mecânicas dos MVEs que começou a ser desenvolvida por WILLIANS, LANDEL e FERRY (1955).

Os fatores de deslocamento podem ser determinados graficamente ou através da equação desenvolvida por WILLIANS, LANDEL e FERRY (1955), também conhecida por equação WLF, sempre com base em experimentos. O método desenvolvido utiliza a razão  $\alpha_T$  (apresentada no capítulo 3), ou fator de deslocamento, de todos os tempos de relaxação a uma temperatura  $T$ , comparados a um valor de temperatura de referência  $T_0$ , para determinar a relação entre temperatura e as características do polímero. Na expressão do fator de deslocamento, a temperatura de referência  $T_0$  é escolhida arbitrariamente, e para o material em estudo, como sugerido pelos autores, fica em torno de 50°C acima da temperatura de transição vítrea,  $T_g$ , que é a temperatura em que o material muda de

um estado rígido para um estado maleável. As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , presentes na equação WLF, variam de polímero para polímero, devendo ser determinadas de forma experimental. Um exemplo dessa função de deslocamento é apresentado para poliestireno e poliisobutileno e pode ser visualizado na Figura (6).

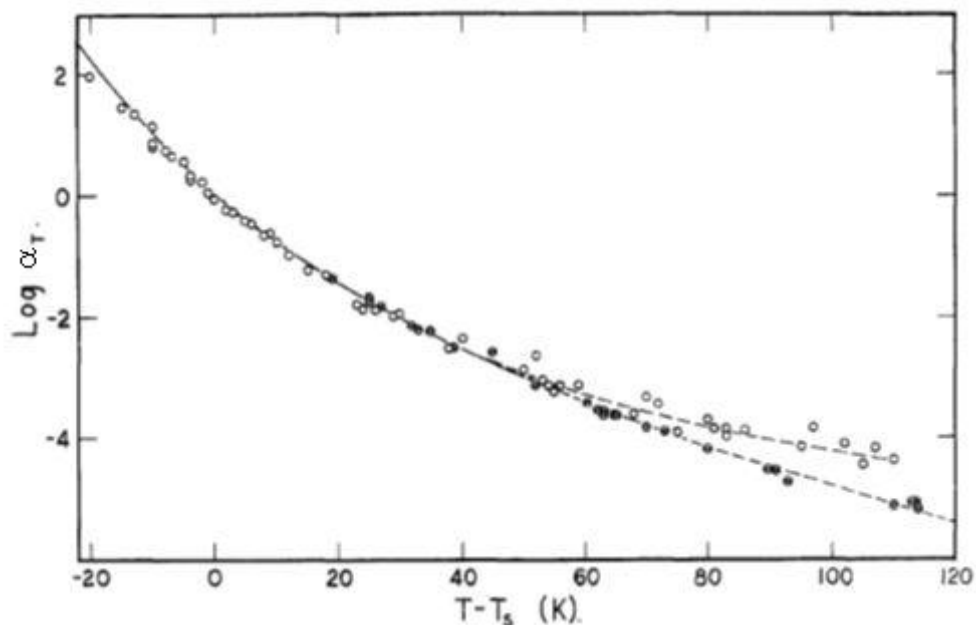


Figura 6 -  $\text{Log } \alpha_t$  plotado contra  $T - T_s$  para frações de poliestireno (círculos vazios) e poliisobutileno (círculos cheios).

Fonte: WILLIANS, LANDEL e FERRY(1955).

O fator de deslocamento obtido experimentalmente é utilizado no princípio de sobreposição de curvas de temperatura e tempo (PSTT), que visa determinar, a partir de um conjunto de dados experimentais, obtidos para um número geralmente reduzido de diferentes temperaturas, uma curva máster que permita prever, de forma ampla, o comportamento do mesmo material em uma única temperatura, conforme a curva na Figura (7).

Um exemplo de curva máster para um material epóxi é apresentado na Figura (7). Para a construção desta curva máster para  $90^\circ\text{C}$ , CARTNER *et al.* (1978) realizaram testes de relaxação de curta duração, em torno de 10 minutos, em temperaturas entre  $70^\circ\text{C}$  e  $120^\circ\text{C}$ , obtendo um período de  $10e^{-6}$  minutos até cerca de dois anos. Esta curva pode ser transferida para a direita, transformando-se na curva máster para  $87^\circ\text{C}$ , que pode produzir dados por até vinte anos.

Utilizando a equação WLF e o PSTT, LI *et al.* (2007) pesquisaram a dependência em temperatura e níveis de tensão dos danos por fadiga no material



polimetilmetacrilato, que foi testado em diferentes condições de temperatura e tensão sob fluência. Através dos dados experimentais, os parâmetros da equação WLF foram obtidos e, portanto, o fator de deslocamento, que permitiu o uso dos resultados para elaboração da curva máster para este material.

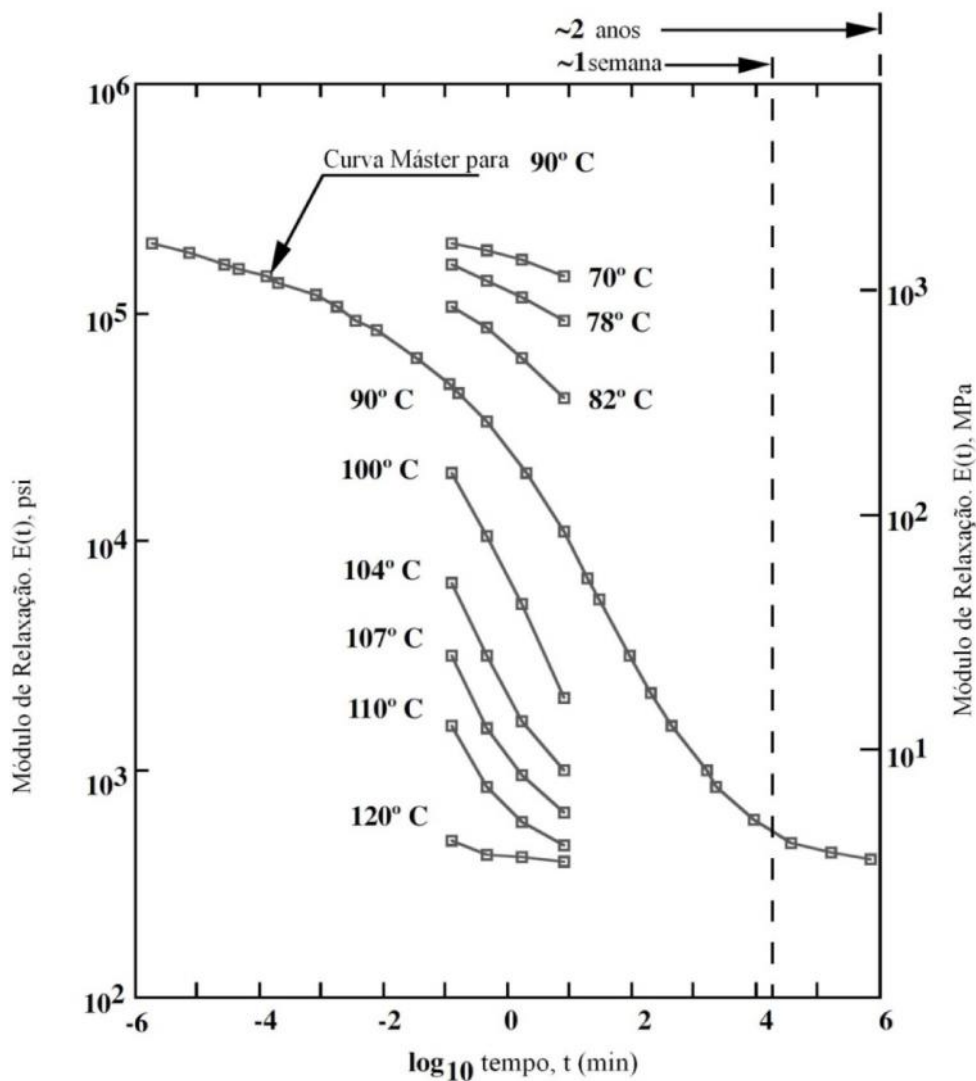


Figura 7 - Curva máster para um material do tipo epóxi modificado.

Fonte: Adaptado de CARTNER *et al.*(1978).

### 2.2.3 Influência da Pressão

Outro fator que apresenta influência no comportamento dos MVEs é a pressão hidrostática, também estudada na análise das propriedades mecânicas dos MVEs.

Analogamente à termorreologia, tem-se a piezorreologia, que determina a influência da pressão no comportamento dos materiais viscoelásticos. Para que se possa realizar a superposição da pressão ao longo do tempo, o material deve ser piezorreologicamente simples, ou seja, todos os tempos de relaxação devem ser afetados pela pressão da mesma maneira, permitindo o cálculo de um fator de deslocamento (FERRY, 1980).

O'REILLY (1962) estudou o efeito da pressão no comportamento do polivinil acetato na região da temperatura de transição vítrea,  $T_g$ , através de técnicas de medição dielétricas e volumétricas. Com isso, desenvolveu um fator de deslocamento considerando o efeito da pressão,  $\alpha_p$ , que considera uma relação exponencial entre uma constante característica do material e a pressão aplicada ao mesmo (como será apresentado no capítulo 3).

Uma comparação entre modelos de fator de deslocamento que avaliam a influência da pressão nas propriedades mecânicas dos materiais foi realizada por TSCHOEGL *et al.* (2002). Dentre estes modelos, o modelo de Ferry-Stratton (FS) se aplica a faixas de baixa pressão, por volta de 10 MPa, pois não leva em conta a dependência da compressibilidade em relação à pressão. Já os modelos de O'Reilly (OR) e Kovacs-Tait (KT) incorporam uma dependência inversa da compressibilidade em relação à pressão.

### 2.3 CARACTERIZAÇÃO DE MVES

A caracterização de MVEs pode ser realizada através de diferentes métodos nos domínios do tempo ou da frequência. Nos parágrafos subsequentes são apresentados alguns exemplos destes diferentes métodos.

Um método para determinação dos coeficientes das Séries de Prony de um módulo viscoelástico foi desenvolvido por CHEN (2000). Foram utilizados dados de carregamento *versus* tempo de teste para diferentes sequências de taxas de carregamento, que foram ajustadas às integrais das Séries de Prony dos materiais testados.

No estudo de LIMA *et al.* (2004), foi estabelecida uma metodologia para modelagem em elementos finitos de vigas e placas retangulares com uma camada de MVE, com o intuito de atenuar o efeito de vibrações nas estruturas. O

comportamento no domínio da frequência dos MVEs foi analisado utilizando o modelo descrito por McTAVISH e HUGHES (1993), conhecido por GHM (sigla que remete aos principais idealizadores do modelo: GOLLA, HUGHES e McTAVISH), onde o módulo de elasticidade do material é dado por uma função que pode ser interpretada como constituída de uma série de  $N_g$  termos de mini-osciladores. Assim, através de simulações numéricas, as FRFs foram obtidas e as propriedades modais calculadas – frequências naturais e fatores de amortecimento modal – e, posteriormente, comparadas aos dados experimentais obtidos em laboratório através de testes de vibração, resultando na avaliação da influência do tratamento superficial no comportamento dinâmico das estruturas.

Outra técnica, recentemente desenvolvida e muito empregada para determinação das propriedades mecânicas de MVEs, é a nanoindentação. Em uma dessas aplicações, HUANG *et al.* (2004) utilizaram nanoindentação com indentador esférico para medir o módulo de flexibilidade de polimetilmetacrilato e policarbonato. Para isso, a solução de Hertz para um problema de indentação elástica foi combinada com a integral hereditária, proposta por LEE e RADOK (1960), para que as funções viscoelásticas complexas fossem obtidas no domínio da frequência. Os dados de carregamentos e os deslocamentos dos testes de indentação em cada frequência foram processados utilizando as fórmulas deduzidas para a determinação das funções viscoelásticas no domínio da frequência. Para a validação dos resultados dos cálculos a partir dos testes de nanoindentação, os mesmos materiais foram também testados utilizando análise mecânica dinâmica, determinando as funções viscoelásticas complexas. Por fim, a comparação dos resultados validou o método.

BEAKE (2006) também utilizou nanoindentação para investigar o comportamento sob fluência de polímeros semicristalinos e amorfos. Os dados experimentais para os primeiros vinte segundos de carregamento foram adaptados a uma equação logarítmica que representa o aumento fracionado de profundidade da penetração durante a fluência. Para polietileno de alto peso molecular e polipropileno, acima de sua temperatura de transição vítrea a uma temperatura ambiente, o parâmetro de fluência  $A/d(0)$  aumentou sob cargas menores e maiores taxas de carregamento com o uso de um indentador Berkovich. Entretanto, polimetilmetacrilato e polietilenotereftalato não demonstraram variação em  $A/d(0)$  e a constante  $\tau$  apresentou variação com a taxa de carregamento. Ajustando os dados

de fluência foi possível prever a extensão e taxa de fluência para combinações de taxa de carregamento e carregamento máximo.

Após a temperatura de transição vítrea, os componentes exibem comportamento viscoelástico mais acentuado. No estudo apresentado por HU *et al.* (2006), um teste de relaxação de tensão foi utilizado para a caracterização da viscoelasticidade de um componente de epóxi, através da determinação do módulo de relaxação do material como função do tempo. Os testes de relaxação de tensão foram conduzidos em um Instron Microtester 5848 equipado com forno. Uma deformação constante de 0,25% foi aplicada ao espécime e o carregamento resultante medido em função do tempo. As propriedades mecânicas viscoelásticas do componente de epóxi são determinadas em termos dos coeficientes das séries de Prony, tempo de relaxação e fatores de deslocamento tempo-temperatura.

Duas abordagens alternativas para estimar funções materiais viscoelásticas a partir de um único experimento sob excitação randômica foram propostas e analisadas por SORVARI e MALINEN (2007). Primeiro, foram utilizados o princípio da superposição de Boltzmann e a regularização de Tikhonov num sistema de equações lineares. Em seguida, a integral foi transformada em uma expressão recursiva, utilizando uma representação com base em Séries de Prony das funções materiais viscoelásticas, onde foi aplicada também técnica de otimização baseada em gradientes. Os resultados foram, então, comparados para validar o método numérico proposto.

Em outro estudo, SORVARI e HÄMÄLÄINEN (2010) avaliaram analítica e numericamente métodos convencionais semi-analíticos e métodos numéricos implícitos de Runge-Kutta, para resolução dos modelos integrais de viscoelasticidade linear com Séries de Prony.

FELHÖS *et al.* (2008) determinaram as propriedades mecânicas viscoelásticas da borracha EPDM através da análise dinâmica térmica e mecânica (DMTA). Para isso, foi utilizado um modelo generalizado de Maxwell de quinze termos que descreveu o comportamento do material dependente do tempo, cujo aspecto friccional foi testado em um dispositivo de *rolling ball on plate* (RBOP). O teste de rolamento foi simulado através do MEF, utilizando as propriedades mecânicas do MVE e os resultados calculados apresentaram boa concordância com os resultados experimentais.

### 3 REVISÃO CONCEITUAL

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma fundamentação conceitual deste trabalho, na qual a metodologia aplicada é baseada para o desenvolvimento da formulação e resolução dos problemas apresentados no capítulo 5, Materiais e Métodos.

#### 3.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES

##### 3.2.1 Formulação Geral de MVEs

Nos MVEs lineares a relação entre as tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\varepsilon$ ), para um caso uniaxial, pode ser expressa através do princípio da superposição para viscoelasticidade linear (CHRISTENSEN, 1971) como

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2)$$

Nas equações (1) e (2),  $\sigma(t)$  e  $\varepsilon(t)$  são as funções históricas de tensão e deformação, respectivamente,  $t$  é o tempo e  $\tau$  é uma variável de integração que representa um instante de tempo no intervalo  $0 \leq \tau \leq t$ . Ademais,  $E(t)$  e  $D(t)$  são funções características do comportamento mecânico do material denominadas módulo de relaxação e módulo de fluência, respectivamente.

Conforme posto por CHRISTENSEN (1971), o modelo generalizado de Maxwell (apresentado na Figura (3)) pode ser representado pela função módulo de relaxação  $E(t)$  posta na forma

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^{NT} E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad (3)$$

onde  $E_{\infty}$  é o módulo de equilíbrio e  $E_i$  e  $\tau_i$  são a componente elástica e o tempo de relaxação associados ao  $i$ -ésimo ( $1 \leq i \leq NT$ ) componente de Maxwell do modelo. Neste caso,  $NT$  é o número total de termos da Série de Prony. Esta função de relaxação, que apresenta o somatório de uma série de termos exponenciais, pode ser interpretada como um modelo mecânico de elementos como o apresentado na Figura (4), dispostos de forma paralela, e também é conhecida como Séries de Prony.

De forma similar, o modelo generalizado de Kelvin / Voigt, que resulta da associação em série do elemento apresentado na Figura (5c), representa uma série de termos envolvendo uma constante mais um somatório de termos exponenciais, dada por

$$D(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{NT} \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right), \quad (4)$$

onde  $D(t)$  é a flexibilidade,  $E_0$  é o módulo instantâneo, e  $E_i$  e  $\tau_i$  são a componente elástica e o tempo de relaxação associados ao  $i$ -ésimo ( $1 \leq i \leq NT$ ) componente de Maxwell do modelo.

### 3.2.2 Influência da Temperatura nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros

Os polímeros termoplásticos apresentam cinco regiões de comportamento, vítreo, de transição, borrachosa, fluido borrachoso, e líquido. Por sua vez, os polímeros termorrígidos apresentam apenas as três primeiras regiões, embora tenha sido observado que a temperaturas suficientemente altas eles se degradem e tenham suas propriedades mecânicas modificadas significativamente. As cinco regiões de comportamento dos polímeros podem ser visualizadas na Figura (8), que mostra o módulo de um polímero variando consideravelmente com a temperatura, com um comportamento vítreo abaixo da temperatura de transição vítrea,  $T_g$ , e, acima de  $T_g$ , o polímero terá características “semelhantes ao couro” na região de transição, ou com aspecto de borracha na região borrachosa. Nota-se também que os dois polímeros identificados na Figura (8) não têm uma  $T_m$ , ou temperatura de

fusão, mas exibem degradação das propriedades mecânicas para temperaturas acima de  $T_g$ .

A aparência geral das cinco regiões de comportamento de termoplásticos e termorrígidos como função da temperatura é usualmente ilustrada na literatura utilizando-se dados de módulos de 10 segundos. Contudo, as várias regiões também podem ser observadas utilizando dados de 30 segundos, 5 minutos ou ainda de uma hora dependendo apenas das características mecânicas do polímero sendo testado e da duração dos testes. As várias regiões do comportamento também podem ser observadas utilizando dados de flexibilidade.

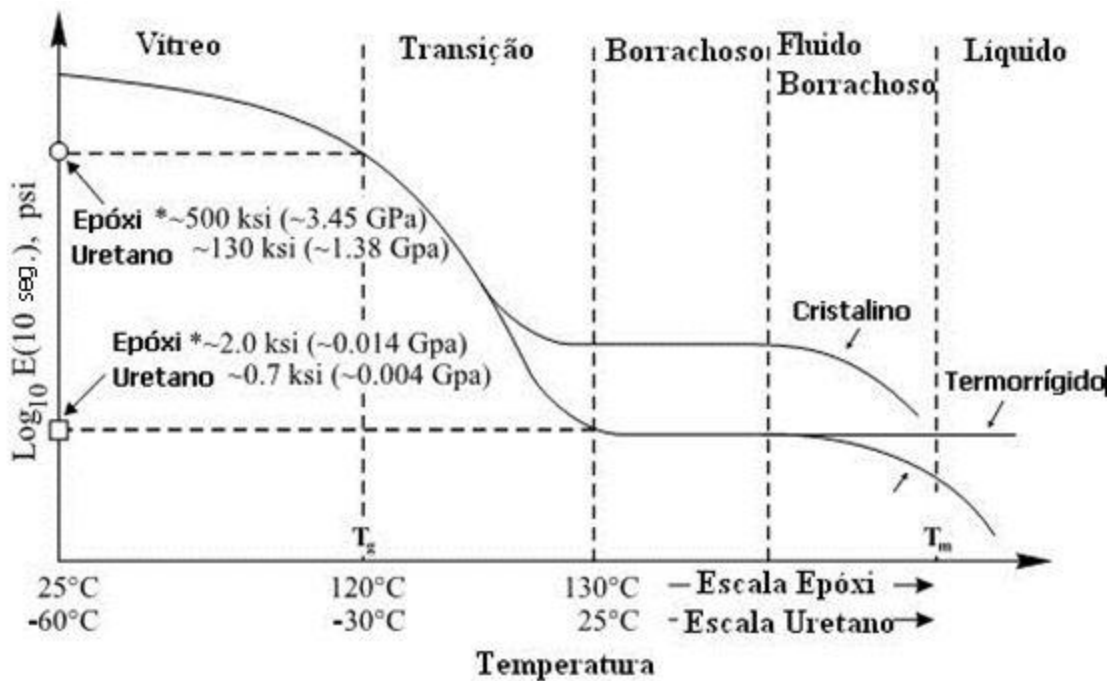


Figura 8 – Cinco regiões do comportamento viscoelástico de um polímero.

Fonte: Adaptado de BRINSON e BRINSON (2008).

### 3.2.2.1 Princípio de Sobreposição de Tempo e Temperatura

Examinando as Figuras (7) e (8) pode-se notar a similaridade entre a variação do módulo de relaxação (ou da flexibilidade) com o tempo e a temperatura. O formato das curvas é genérico, mas os dados dos estados vítreo e borrachoso são mostrados para o epóxi e uretano (BRINSON, 1976). Por esta razão, as variações

com o tempo e a temperatura dos módulos de um polímero podem ser relacionadas como equivalentes. Esta aparente equivalência levou LEADERMAN (1943) do NBS (*National Bureau of Standards*) a propor o PSTT na década de 1940. O PSTT foi verificado utilizando a Teoria Cinética dos Polímeros e este método foi estudado e estendido para muitas aplicações por TOBOLSKY (1962), dentre outros.

As teorias previamente estudadas foram desenvolvidas para soluções diluídas de polímeros acima da temperatura de transição vítrea,  $T_g$ . Posteriormente, esta abordagem foi estendida para polímeros inteiros em estado borrachoso. Com isso, pode-se supor que:

- Cada segmento de polímero tem um tempo de relaxação, portanto, o polímero tem um espectro muito amplo com muitos tempos de relaxação;
- Não é possível calcular um tempo de relaxação médio para um polímero baseado na estrutura molecular do tempo de relaxação para o p-ésimo segmento de uma molécula de polímero em solução diluída, e então extrapolar para o caso de uma molécula de polímero movendo-se através de um meio viscoso de seu próprio tipo.

Visto que o método PSTT é uma extrapolação da Teoria Cinética dos Polímeros, o mesmo é válido somente após  $T_g$ . Uma regra básica é que o PSTT pode ser usado abaixo de  $T_g$  se os dados forem movíveis para formar uma curva máster suave (BRINSON e BRINSON, 2008).

Pode-se desenvolver a expressão do PSTT considerando o módulo de relaxação viscoelástico como uma Série de Prony, tal que

$$E(T_0, t) = \rho^0 T_0 \sum_i^N E_i e^{-t/\tau_i(T_0)}, \quad (5)$$

onde os tempos de relaxação na temperatura de referência  $T_0$  podem ser relacionados àqueles em qualquer outra temperatura pelo fator de deslocamento desenvolvido por WILLIAMS, LANDEL e FERRY (1955) e dado por:

$$\log_{10} a_T = \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}, \quad (6)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes do material e  $T_0$ , neste trabalho também chamado de  $T_s$ , representa a temperatura de referência.



Nesse caso,  $E(t', T_0)$  é encontrado a partir de  $E(t, T)$  movendo-se os dados verticalmente e horizontalmente, como mostrado na Figura (9).

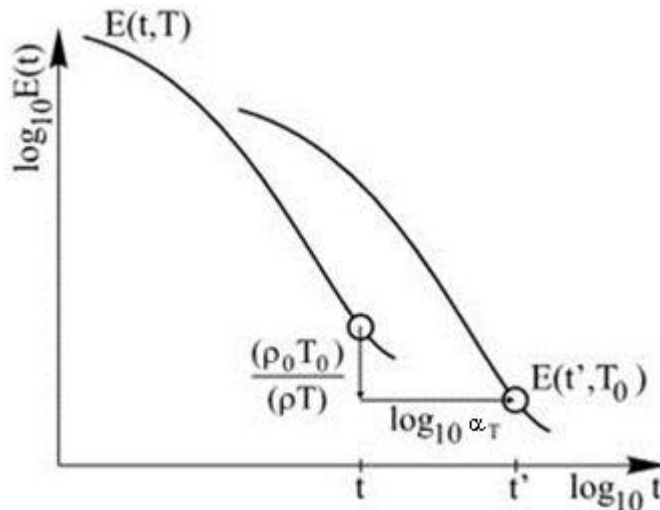


Figura 9 – Exemplo de dados transladados com fator de deslocamento para módulos de relaxação com  $T_0 < T$ .

Fonte: BRINSON e BRINSON (2008).

Por vezes, o fator  $(\rho_0 T_0)/(\rho T)$  é próximo de 1, e, portanto, pode ser negligenciado (FERRY, 1980). Desta forma, a equação da PSTT pode ser escrita como

$$E(t'; T_0) = E(t = \alpha^T t'; T). \quad (7)$$

Dados de uma borracha de poliuretano são mostrados *versus* a temperatura absoluta na Figura (10). Os dados são apresentados para temperaturas entre  $T = 300\text{K}$  ( $27^\circ\text{C}$ ) até  $T = 425\text{K}$  ( $152^\circ\text{C}$ ) e são acima de  $T_g$ , que é cerca de  $25^\circ\text{C}$ . Até  $T = 375\text{K}$  o material é bastante borrachoso, embora polímeros de ligações cruzadas não devessem apresentar esta região. Para uma temperatura suficientemente alta, as ligações cruzadas da cadeia se rompem de um lado e reatam do outro lado. Assim ocorre a deformação permanente, que não pode ser recuperada pelo reaquecimento, como seria feito para os termoplásticos.

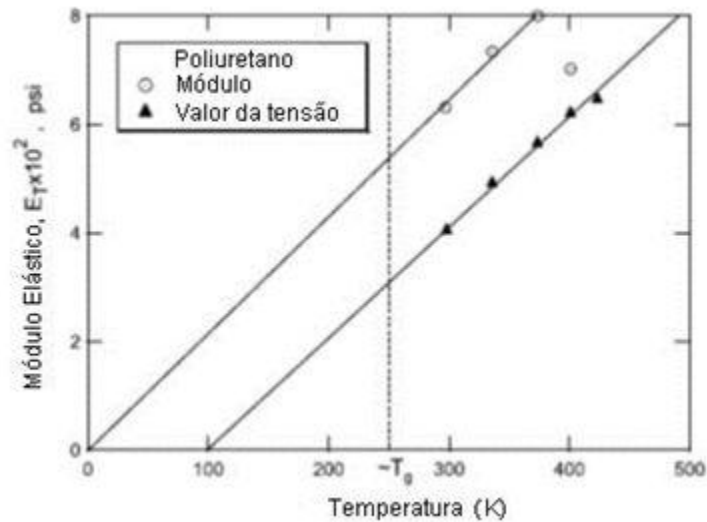


Figura 10 – Módulo versus temperatura para um poliuretano com ligações cruzadas no estado borrachoso.

Fonte: BRINSON (1976).

### 3.2.3 Influência da Pressão nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros

A pressão também pode ter efeito significativo sobre o comportamento dos MVEs, através de sua influência no volume livre dos materiais. O efeito da pressão é visualizado de forma mais evidente quando alta velocidade de impacto é aplicada ao material ou também quando este é submetido a altas pressões.

Assim, da mesma forma que o fator de deslocamento aplicado à temperatura, o modelo OR desenvolvido por O'REILLY (1962) também propõe um fator de deslocamento para a pressão na forma

$$\log \alpha_P = \frac{C(P - P_0)}{C(P - P_0)} \quad (8)$$

onde  $\alpha_P$  denota a relação entre os tempos de relaxação submetidos a pressões  $P$  e  $P_0$ , sendo esta última um valor de pressão de referência, e  $C$  é uma constante característica do material. Os parâmetros  $C$  e  $P_0$  são obtidos através de dados experimentais.

### 3.2.4 Análise da Influência da Pressão e Temperatura nas Propriedades Mecânicas Viscoelásticas dos Polímeros

Da mesma forma que foram estabelecidos fatores de deslocamento para a temperatura e para a pressão, há também uma abordagem para um fator que combina temperatura e pressão,  $\alpha_{T,P}$ , analisados também por TSCHOEGL *et al.* (2002).

Dentre os modelos que associam temperatura e pressão, estão os de Simha-Somcynsky (SS), Havlí ek-llasvký-Hrouz (HIH) e Fillers-Moonan-Tschoegl (FMT). MOONAN e TSCHOEGL (1985) realizaram uma comparação entre estes modelos, onde concluíram que o modelo HIH precisou de alguns ajustes para ser aplicado, pois necessitava representar melhor a mudança na capacidade calorífica do material, que não estava em concordância com os dados calorimétricos. Desta forma, os modelos SS e FMT mostraram-se de mais fácil aplicação.

Aliando as influências da temperatura e da pressão e expressando-as no módulo de relaxação, tem-se o módulo de relaxação representado através das seguintes variáveis,

$$E = F(C; E^0; \tau^0; C; C_1; C_2). \quad (9)$$

Nesse caso,  $C$  é a constante associada ao fator de deslocamento da pressão e  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes associadas ao fator de deslocamento da temperatura.

## 4 IDENTIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MVES NO DOMÍNIO DO TEMPO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar os principais conceitos e métodos utilizados na identificação das propriedades mecânicas do MVE no domínio do tempo. Também são apresentados neste capítulo alguns conceitos das técnicas de otimização utilizadas (Algoritmos Genéticos e Programação Não Linear).

A metodologia proposta parte de curvas obtidas experimentalmente, em diferentes temperaturas e taxas de carregamento, em corpos de prova de MVEs. A partir destas curvas, identificam-se as propriedades mecânicas desse material no domínio do tempo, utilizando o modelo de Prony. Com isso, são obtidos os parâmetros adequados para uma análise por EF.

### 4.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MVE NO DOMÍNIO DO TEMPO

Conforme posto por BRINSON & BRINSON (2008), o modelo constitutivo do MVE aqui adotado é dado por

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^{NT} E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}; \quad (10)$$

onde  $E(t)$  é a função módulo de relaxação,  $E_{\infty}$  é o módulo de equilíbrio, característico no modelo de Wiechert (Figura (4)),  $E_i$  é o módulo elástico e  $\tau_i$  é o tempo de relaxação ambos correspondentes ao  $i$ -ésimo componente da série.

Analisando a função módulo de relaxação  $E(t)$  (equação (10)), em função do tempo, tem-se que, para  $t=0$ ,

$$E(t=0) = E_{\infty} + \sum E_i \geq 0 = E_0 > 0, \quad (11)$$

sendo que  $E_0$  representa o módulo de relaxação instantâneo. Tomando o limite para um tempo muito elevado, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = E_{\infty} \geq 0. \quad (12)$$

Nesse caso,  $E_{\infty}$  é o módulo de equilíbrio.

Derivando a função de relaxação em função do tempo tem-se, para qualquer instante  $t$ , que

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \sum \frac{E_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i} = \dot{E}(t) \leq 0 \quad (13)$$

Analisando também para  $t = 0$ ,

$$\dot{E}(t = 0) = - \sum \frac{E_i}{\tau_i} \quad (14)$$

Tomando o limite para um tempo elevado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{E}(t) = 0 \quad (15)$$

#### 4.2.1 Integral Hereditária

A formulação para o comportamento do MVE baseada na Integral Hereditária (FLÜGGE, 1975) pode ser apresentada como

$$\sigma(t) = E_{\infty} \varepsilon(t) + \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (16)$$

sendo que seu propósito é obter a tensão  $\sigma(t)$  a partir do histórico de deformações e das características do material, sendo  $E_{\infty}$  o módulo de equilíbrio,  $\varepsilon(0)$  a deformação acumulada até o instante inicial ( $t = 0$ ) e  $E(t)$  a função módulo de relaxação do material.

#### 4.3 ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MVE

Os experimentos foram realizados com o MVE em questão de acordo com a norma ISO 527/1B (ISO, 2012), que estabelece as normas para ensaio de identificação de materiais poliméricos. Durante os experimentos, o material foi submetido a três conjuntos de ensaios de tração pura, cada um com uma temperatura diferente e constante (-35°C, 23°C e 80°C). Em cada uma dessas temperaturas, o material foi submetido a quatro taxas de deformação diferentes,

constantes ao longo de cada particular ensaio (0,0001(mm/mm)/s, 0,01(mm/mm)/s, 0,1(mm/mm)/s e 1(mm/mm)/s). Com a realização dos ensaios, foi possível obter os dados de tensão e deformação experimentais para cada taxa de deformação e para cada temperatura. Esses dados constituem o arquivo de entrada para o cálculo de cada curva no programa em MATLAB e são colocados de forma explícita no Apêndice 1.

#### 4.4 FORMULAÇÃO DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A presente seção objetiva apresentar a formulação para identificação de propriedades mecânicas de um MVE no domínio do tempo considerando o modelo de Wiechert. Para tanto é analisada uma família de pontos obtidos experimentalmente através de ensaios de tração realizados segundo a norma ISO 527/1B (ISO, 2012), com experimentos de taxa de deformação constante, como mencionado no item 4.3, e deformação inicial nula. Ou seja,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \text{constante para qualquer tempo } t. \quad (17)$$

Logo, tem-se a seguinte expressão reduzida relacionando os históricos de tensão e deformação

$$\sigma(t) = \varepsilon \int_0^t E(t-\tau) d\tau. \quad (18)$$

Uma visualização gráfica dos valores de tensão experimental e tensão obtida numericamente (modelo de Prony) para um par qualquer de taxa de deformação e temperatura é ilustrada na Figura (11).

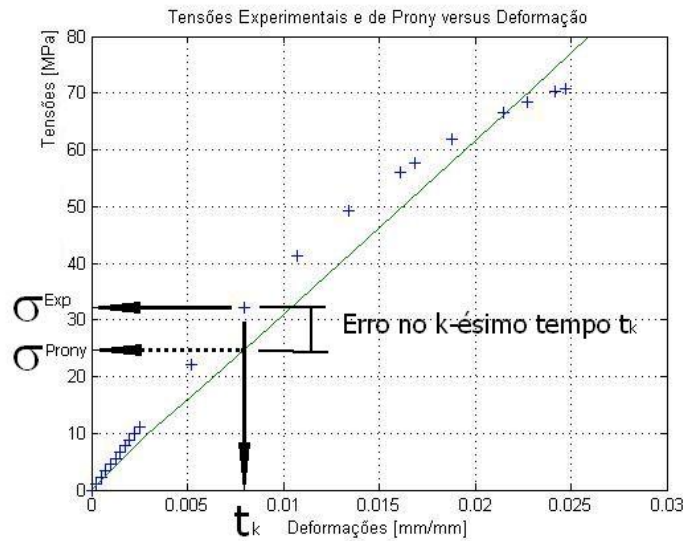


Figura 11 – Tensões experimentais e de Prony versus deformação para uma determinada taxa de deformação.

Nesse caso, a tensão obtida através da Série de Prony  $\sigma^{Prony}$  pode ser explicitada como

$$\sigma^{Prony} = \sigma^{Prony}(\dot{\epsilon} E^\infty t, E^i) = \dot{\epsilon} \sum_{i=1}^{NT} E_i \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} d\tau. \quad (19)$$

Definindo o número total de temperaturas como  $NTemp$ , o número total de taxas de deformação como  $NTax$  e o número de pontos amostrados de cada curva  $NPto$ , pode-se calcular o módulo do erro associado ao k-ésimo ponto ( $1 \leq k \leq NPto$ ) amostrado, para a j-ésima temperatura ( $1 \leq j \leq NTemp$ ) e a i-ésima taxa de deformação ( $1 \leq i \leq NTax$ ),  $E_{kij}$ , o qual pode ser visualizado na Figura (11) como

$$E_{kij} = |\sigma_k^{exp}(\dot{\epsilon}^i, T^j) - \sigma_k^{Prony}(\dot{\epsilon}^i, T^j)|. \quad (20)$$

Nesse caso,  $\sigma_k^{Prony}$  é a tensão avaliada segundo o modelo constitutivo de Prony, calculada através da integral hereditária (equação (16)), e  $\sigma_k^{exp}$  é a tensão experimental medida, ambas obtidas no k-ésimo ponto amostrado e  $|\cdot|$  é o módulo.

Uma medida do erro total associado ao modelo pode ser obtida através do erro quadrático total  $E_T^2$ , dado por

$$E_T^2 = \sum_{j=1}^{NTemp} \sum_{i=1}^{NTax} \sum_{k=1}^{NPTS} (E_{kij})^2 \quad (21)$$

Nesse ponto, o erro quadrático é dividido pelo número total de pontos no qual as curvas foram divididas, obtendo-se o erro quadrático médio ( $\overline{E_T^2}$ ) como

$$\overline{E_T^2} = \frac{E_T^2}{N^{\circ} \text{ total de pontos}} \quad (22)$$

Essa função escalar será utilizada no processo de otimização como a função objetivo, a qual, pela forma como foi definida, torna-se diferenciável em qualquer ponto do conjunto das variáveis de projeto, gerando maior estabilidade numérica.

Em geral, em um problema inverso de identificação, o objetivo é obter os parâmetros do modelo tal que a diferença entre a resposta teórica e os dados experimentais seja mínima. Assim, tem-se o problema de otimização

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \overline{E_T}(\mathbf{x}): R^r \rightarrow R, \\ \text{onde } \mathbf{x} = (E_{\infty}, E_i) \\ \text{Restrições } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq E_{\infty} \leq E_{\infty}^{sup} \\ 0 \leq E_i \leq E_i^{sup} \quad (i = 1, \dots, NT) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (23)$$

onde  $E_{\infty}^{sup}$  representa o limite superior do módulo de equilíbrio, enquanto  $E_i^{sup}$  denota o limite superior do módulo elástico para o i-ésimo termo da Série de Prony.

Note-se que nesse problema de otimização, os tempos de relaxação são tomados como constantes.

#### 4.4.1 Influência da Pressão Média sobre o Comportamento Material

Uma modificação no modelo constitutivo anterior procura considerar a influência da pressão hidrostática média (decorrente do campo de tensões) sobre a resposta material. Essa possível influência é relatada por TSCHOEGL (1989).

Uma forma bastante comum de considerar tal influência é através da transformação da função módulo de relaxação ao longo do tempo, de maneira similar à influência devido à temperatura. Nesse caso, considerando um valor de



pressão de referência  $P_0$ , no qual é definido o módulo de relaxação  $E(t; P_0)$ , a resposta material para uma pressão qualquer é trasladada no formato

$$E(t; P_0) = E(t'; P) = E\left(\frac{t}{\alpha_P}, P\right), \quad (24)$$

sendo que, com isso, a expressão para o módulo de relaxação, considerando a influência da pressão hidrostática no instante  $t$ , pode ser escrita como

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^{NT} E_i \cdot e^{-\frac{t}{\alpha_P \tau_i}}, \quad (25)$$

sendo que o fator de translação para a pressão é descrito por

$$\alpha_P = 10^C (P - P_0). \quad (26)$$

Substituindo a expressão para o módulo de relaxação  $E(t)$  (equação(25)) na integral de convolução (equação (18)) tem-se a tensão em um instante  $t$  qualquer dada por

$$\sigma^{Prony}(t) = \sigma^{Prony}(E_\infty, E_i) = \dot{\epsilon} E_\infty t + \dot{\epsilon} \sum_{i=1}^{NT} E_i \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha_P \tau_i}} d\tau. \quad (27)$$

Dividindo o intervalo de integração de acordo com os pontos amostrados (Figura (12)) e considerando a pressão  $P$  constante em cada um dos intervalos entre amostragens (entre cada um dos pontos  $t_p$  e  $t_{p-1}$ ), aqui denotada  $P_{jp}$ , tem-se a expressão para a tensão no  $k$ -ésimo instante de tempo ( $t_k$ ) e para a curva associada à  $j$ -ésima taxa de deformação:

$$\sigma_{kj}^{Prony} = \underbrace{E_\infty \cdot \dot{\epsilon}_j \cdot t_k}_{\text{Termo 1}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{NT} E_l \cdot \dot{\epsilon}_j \cdot \sum_{p=2}^k I_{pkl}}_{\text{Termo 2}} \quad (28)$$

sendo

$$I_{pkl} = \int_{t_{p-1}}^{t_p} e^{-\frac{(t_k - \tau)}{\alpha_P \tau_l}} d\tau. \quad (29)$$

Na equação acima, o primeiro termo corresponde a uma resposta puramente elástica, entre os instantes inicial  $t_0$  e final  $t_k$ . Já o segundo termo representa o somatório de todos os termos da Série de Prony ( $1 \leq l \leq NT$ ) ao longo do tempo

total (de 0 a  $t_k$ ), mas considerando uma discretização sobre o mesmo. Como a pressão é considerada constante no intervalo  $t_{p-1}$  a  $t_p$  ( $1 \leq p \leq k$ ), o mesmo ocorre para o fator de translação  $\alpha_p$ . Nesse caso, esse parâmetro é denotado  $\bar{\alpha}_p = 10^{C(P-P_0)}$ , onde  $P$  é a pressão média no intervalo.

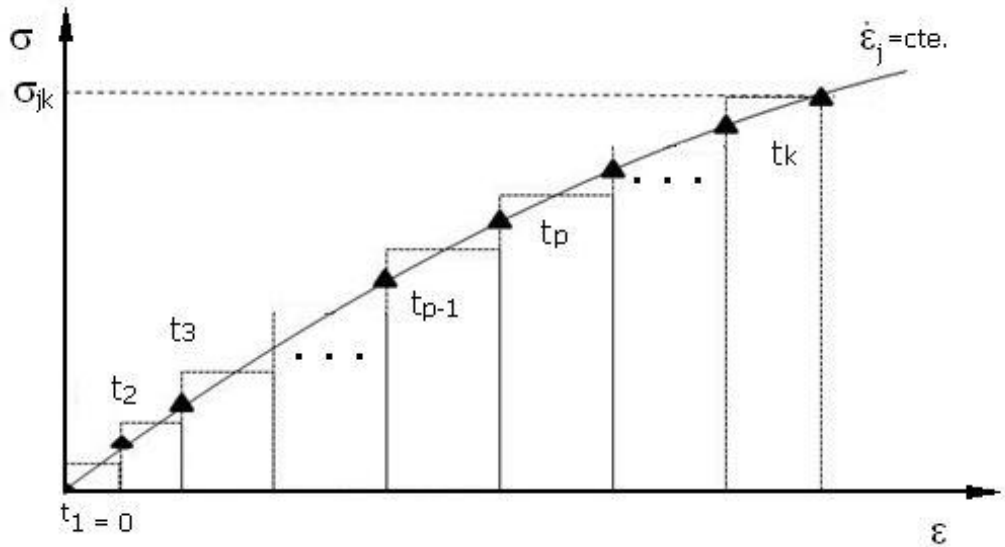


Figura 12 – Divisão do intervalo de integração.

Assim, para o termo 2, resolve-se analiticamente a integral  $I_{pkl}$  (equação (29)) com uma transformação de variáveis,

$$u = \frac{t - t_{p-1}}{\tau_l} = \frac{t - t_{p-1}}{\alpha_p \tau_l} = u, \tag{30}$$

e suas respectivas derivadas,

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\alpha_p \tau_l} \Rightarrow d\tau = \alpha_p \tau_l du. \tag{31}$$

Substituindo em  $I_{pkl}$

$$I_{pkl} = \int_{t_{p-1}}^{t_k} \frac{1 - t}{\tau_l} e^{u} \left( \frac{1 - t}{\alpha_p \tau_l} \right) du = \left( \frac{1 - t_k}{\alpha_p \tau_l} \right) e^u \Big|_{\frac{t_{p-1} - t_k}{\alpha_p \tau_l}}^{\frac{t_k - t_k}{\alpha_p \tau_l}}, \tag{32}$$

resultando em

$$\sigma_{pk} = \bar{p} \cdot \tau_l \cdot e^{\frac{t_{p-1} - t_k}{E_i \cdot \tau_l}} \cdot \left[ e^{\frac{t_{p-1} - t_k}{E_i \cdot \tau_l}} - 1 \right]. \quad (33)$$

Logo, a expressão resultante para determinação do valor da tensão fica

$$\sigma_{kj}^{prony} = E_{\infty} \cdot \dot{\epsilon}_j \cdot t_k + \sum_{p=2}^k \left[ \sum_{l=1}^{NT} (E_l \cdot \dot{\epsilon}_j \cdot \tau_l) \cdot e^{\frac{t_{p-1} - t_k}{E_l \cdot \tau_l}} \left( e^{\frac{t_{p-1} - t_k}{E_l \cdot \tau_l}} - 1 \right) \right]. \quad (34)$$

Com os valores das tensões de Prony calculados para cada ponto, o passo seguinte é avaliar o erro no k-ésimo ponto, resultante da comparação com valor obtido experimentalmente. A partir deste, tem-se o erro quadrático médio obtido para todo o conjunto de curvas.

A fim de considerar uma possível influência da pressão média no material sobre o seu comportamento, mas considerando uma dada temperatura constante, define-se um novo problema padrão de otimização, na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \overline{E_T}(\mathbf{x}) \\ \text{onde } \mathbf{x} = (E_{\infty}, E_i, P_0, C) \\ \text{Restrições } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq E_{\infty} \leq E_{\infty}^{sup} \\ 0 \leq E_i \leq E_i^{sup} \quad (i = 1, \dots, NT) \\ C^{inf} \leq C \leq C^{sup} \\ \bar{P}_0^{inf} \leq \bar{P}_0 \leq P_0^{sup} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (35)$$

Nesse caso,  $E_{\infty}^{sup}$ ,  $E_i^{sup}$ ,  $C^{inf}$ ,  $C^{sup}$ ,  $P_0^{inf}$  e  $P_0^{sup}$  são os valores arbitrados que representam os limites superior e inferior das variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ . O objetivo é minimizar o erro  $\overline{E_T}$ , sendo as variáveis de projeto o módulo de equilíbrio  $E_{\infty}$ , o conjunto de componentes do módulo de relaxação  $E_i$ , a constante de material  $C$  e a pressão de referência  $P_0$ .

4.4.2 Influência da Temperatura sobre o Comportamento do Material

Procedendo da mesma forma que na seção anterior, utiliza-se o modelo constitutivo do MVE, acrescido de  $\alpha_T$ , variável que denota a influência da temperatura. Nesse caso, a função módulo de relaxação pode ser escrita como

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^{NT} E_i \cdot e^{-\frac{t}{\alpha_T \tau_i}} \tag{36}$$

sendo que o fator de deslocamento para a temperatura pode ser posto na forma

$$\alpha_T = 10^{(-C_1(T-T_0))/(C_2+(T-T_0))} \tag{37}$$

Assim, a integral de convolução pode ser definida por

$$\sigma^{Prony}(t) = \sigma^{Prony}(E_\infty, \dot{\epsilon}_j) + \int_0^t (E_\infty + \sum_{l=1}^{NT} E_l \cdot e^{-\frac{t-\tau}{\alpha_T \tau_l}}) \dot{\epsilon}_j d\tau \tag{38}$$

Para obter a expressão da tensão no k-ésimo instante de tempo ( $t_k$ ) e para a j-ésima taxa de deformação,  $\dot{\epsilon}_j$ , a expressão da tensão de Prony fica

$$\sigma^{Prony}(t_k) = \dot{\epsilon}_j \left[ \underbrace{E_\infty \cdot t_k}_{\text{Termo 1}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{NT} E_l \cdot I_{kl}}_{\text{Termo 2}} \right] \tag{39}$$

sendo

$$I_{kl} = \int_0^{t_k} e^{-\frac{t_k-\tau}{\alpha_T \tau_l}} d\tau \tag{40}$$

O primeiro termo corresponde à resposta puramente elástica, entre os instantes 0 e  $t_k$ , e, para o mesmo intervalo de tempo, o segundo termo representa o somatório de todos os termos da Série de Prony ( $1 \leq l \leq NT$ ) ao longo do tempo total (de 0 a  $t_k$ ). No termo 2, para resolver a integral  $I_{kl}$  aplica-se a transformação de variáveis

$$u = \frac{t_k - \tau}{\alpha_T \tau_l} \tag{41}$$

cuja derivada é,

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{\alpha_T \tau_l} \therefore d\tau = -\alpha_T \tau_l du \tag{42}$$

Executando a substituição em  $I_{kl}$  resulta em

$$\sigma_{jkl} = \int_{\frac{-\epsilon_k}{\alpha_T \cdot \tau_l}}^0 e^u (\alpha^T \cdot \tau_l) du = (\alpha^T \cdot \tau_l) \cdot e^{\frac{-\epsilon_k}{\alpha_T \cdot \tau_l}} \quad (43)$$

Assim a expressão da integral resulta em

$$\sigma_{jkl} = \alpha^T \cdot \tau_l \cdot \left[ 1 - e^{\frac{-\epsilon_k}{\alpha_T \cdot \tau_l}} \right] \quad (44)$$

e por sua vez a expressão resultante para determinação do valor da tensão é dada por

$$\sigma_{jk} = E_{\infty} \cdot \epsilon_j \cdot t^k + \sum_{l=1}^{NT} (E_l \cdot \epsilon_j \cdot \tau_l \cdot \alpha^T) \cdot \left( 1 - e^{\frac{-\epsilon_k}{\alpha_T \cdot \tau_l}} \right) \quad (45)$$

Com os valores das tensões de Prony calculados para cada ponto, segue-se avaliando o erro no k-ésimo ponto, resultante da comparação com valor obtido experimentalmente. A partir deste, tem-se o erro quadrático médio obtido para todo o conjunto de curvas.

A fim de determinar a influência do fator de deslocamento da temperatura, da mesma maneira em que foi definida para a influência da pressão, define-se o problema padrão de otimização, com seus respectivos limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \overline{E_T}(\mathcal{A}_t) \cdot R^{NT+1} \\ \text{onde } \mathbf{x} = (E_{\infty}, E_i, C_1, C_2, T_s) \\ \text{Restrições } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq E_{\infty} \leq E_{\infty}^{sup} \\ 0 \leq E_i \leq E_i^{sup} \quad (i = 1, \dots, NT) \\ C_1^{inf} \leq C_1 \leq C_1^{sup} \\ C_2^{inf} \leq C_2 \leq C_2^{sup} \\ T_s^{inf} \leq T_s \leq T_s^{sup} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (46)$$

onde  $E_{\infty}^{sup}$ ,  $E_i^{sup}$ ,  $C_1^{inf}$ ,  $C_1^{sup}$ ,  $C_2^{inf}$ ,  $C_2^{sup}$ ,  $T_s^{inf}$  e  $T_s^{sup}$  são os valores arbitrados dos limites superiores e inferiores das variáveis de projeto. Neste problema padrão, semelhante ao caso da pressão na seção anterior, tem-se como objetivo minimizar o erro  $\overline{E_T}$ , sendo as variáveis de projeto o módulo de equilíbrio  $E_{\infty}$ , o módulo de relaxação  $E_i$ , e as constantes de material  $C_1$  e  $C_2$ , juntamente com a temperatura de referência  $T_s$ .

#### 4.5 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE PRONY EM SOFTWARE COMERCIAL DE ELEMENTOS FINITOS

A aplicação da técnica de identificação apresentada nas seções anteriores possibilita a obtenção dos coeficientes que caracterizam o modelo de MVE obtido a partir das Séries de Prony, para uma temperatura de referência  $T_s$  e considerando uma temperatura  $T$  (ou conjunto de temperaturas  $T_i$ ) de ensaio. Têm-se, dessa forma, todas as constantes relacionadas à função módulo de relaxação (equação (36)). Note-se que essa função módulo de relaxação  $E(t)$  é válida para um ensaio de tração/compressão. Portanto, ela é análoga ao módulo de elasticidade longitudinal para um material Hookeano. Nessa análise considera-se também o fator de deslocamento para a temperatura,  $\alpha_T$ , com valor unitário, uma vez que a temperatura de referência  $T_s$  e a temperatura de teste  $T$  possuem o mesmo valor.

Entretanto, no software ABAQUS, o formato de entrada desses parâmetros é ligeiramente diferente. Nesse caso, o conjunto de dados característicos do material é estabelecido através da associação de suas características elásticas e viscoelásticas, juntamente com outras características, como a densidade. Na parte elástica (Figura (13)), introduzida através da função *Elastic*, os dados de entrada são o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Para o Módulo de Young há opção de entrada com o módulo elástico ou o módulo instantâneo. Para esta análise foi adotado o módulo instantâneo, dado pelo somatório do módulo de equilíbrio e dos módulos de relaxação associados a cada termo da Série de Prony (equação (11)). O coeficiente de Poisson e a densidade foram informados pelo fornecedor do material STAMAX. Neste trabalho, conforme informado pelo fornecedor, o coeficiente de Poisson foi assumido como constante.



Figura 13 – Janela para entrada de dados associados à função *Elastic* no ABAQUS.

Na definição das características viscoelásticas do material, que são informadas dentro da função *Viscoelastic* (Figura (14)), são empregados os parâmetros correspondentes à razão módulo de cisalhamento  $g_i$  *Prony*, razão módulo volumétrico  $k_i$  *Prony* e os tempos de relaxação,  $\tau_{i}$  *Prony*.

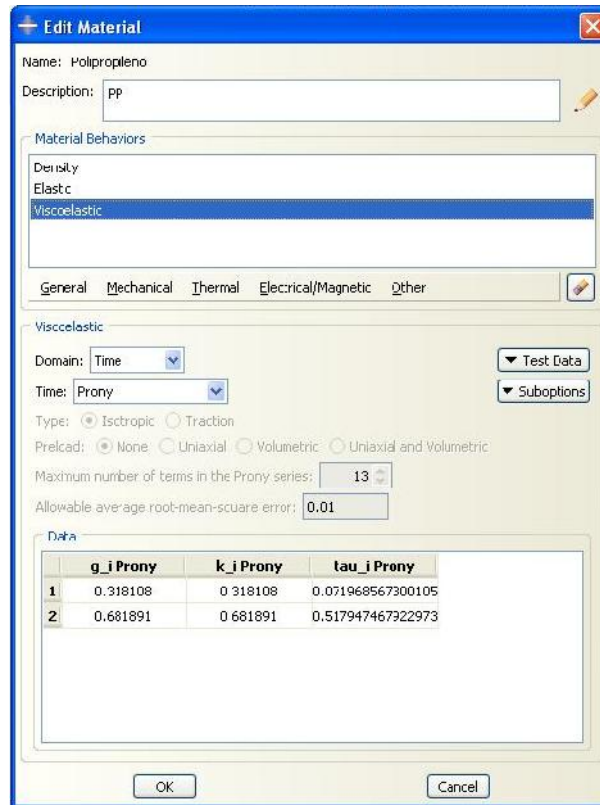


Figura 14 – Janela para entrada de dados associados à função *Viscoelastic* no ABAQUS.

Os valores de entrada para os tempos de relaxação são exatamente aqueles valores fixos e utilizados no processo de caracterização realizado no MATLAB,  $\tau_i$ , correspondentes aos módulos de relaxação para cada termo da Série de Prony,  $E_i$ .

Já os parâmetros  $g_i \text{ Prony}$ , ou razão do módulo de cisalhamento, e  $k_i \text{ Prony}$ , ou razão do módulo volumétrico são definidos através das seguintes equações:

$$g_i \text{ Prony} = \frac{G_i}{G_0}, \quad (47)$$

e

$$k_i \text{ Prony} = \frac{K_i}{K_0}, \quad (48)$$

onde  $G_i$  e  $K_i$  são os módulos de cisalhamento e volumétrico associados a cada termo da Série de Prony e por sua vez  $G_0$  e  $K_0$  são os módulos de cisalhamento e volumétrico instantâneos.



A obtenção dos módulos de cisalhamento e volumétrico a partir dos módulos de relaxação e coeficiente de Poisson pode ser realizada através das equações (LAI, RUBIN e KREMPL, 2010)

$$G^i = \frac{E_i}{2(1+\nu)} \quad e \quad G^0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (49)$$

e

$$K^i = \frac{E_i}{3(1-2\nu)} \quad e \quad K^0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu)}. \quad (50)$$

Desta forma, é possível utilizar os dados obtidos através da caracterização via Série de Prony adequando os valores para o software comercial.

#### 4.5.1 Definição de Condições de Contorno e Carregamentos

Após a definição das características do material, foi utilizado um modelo de um cubo sólido (dimensões 10 x 10 x 10 mm) representando a região central do corpo de prova, a fim de reproduzir o teste experimental. No teste experimental um deslocamento foi aplicado a uma determinada taxa de deformação constante com uma temperatura de aplicação fixa (-35°C, 23°C ou 80°C). Na construção da malha, foram utilizados 64 elementos hexaédricos de dimensões 2,5 x 2,5 x 2,5 mm, com funções de interpolação lineares.

Desta forma, para execução da análise foram aplicados dois *Steps*, um inicial (*Initial*) e um *Step* do tipo *Visco*, aplicado à análise de materiais viscoelásticos. As condições de contorno definidas para cada *Step* são apresentadas nas Figuras (15) e (16).

No *Step Initial*, foram criadas as condições de contorno de simetria. Para isso, foram estabelecidas condições de contorno de simetria nas três direções, Z (BC\_1) (Figura (15a)), X (BC\_2) (Figura (15b)), e Y (BC\_3) (Figura (15c)), que representam a simetria das tensões e deformações ao longo dos eixos de simetria perpendiculares aos planos do cubo.

Já no *Step Visco*, propagam-se as condições de contorno criadas no *Step Initial* e é aplicado um deslocamento uniforme na face na direção normal, eixo Y (BC\_4), conforme apresentado na Figura (16).

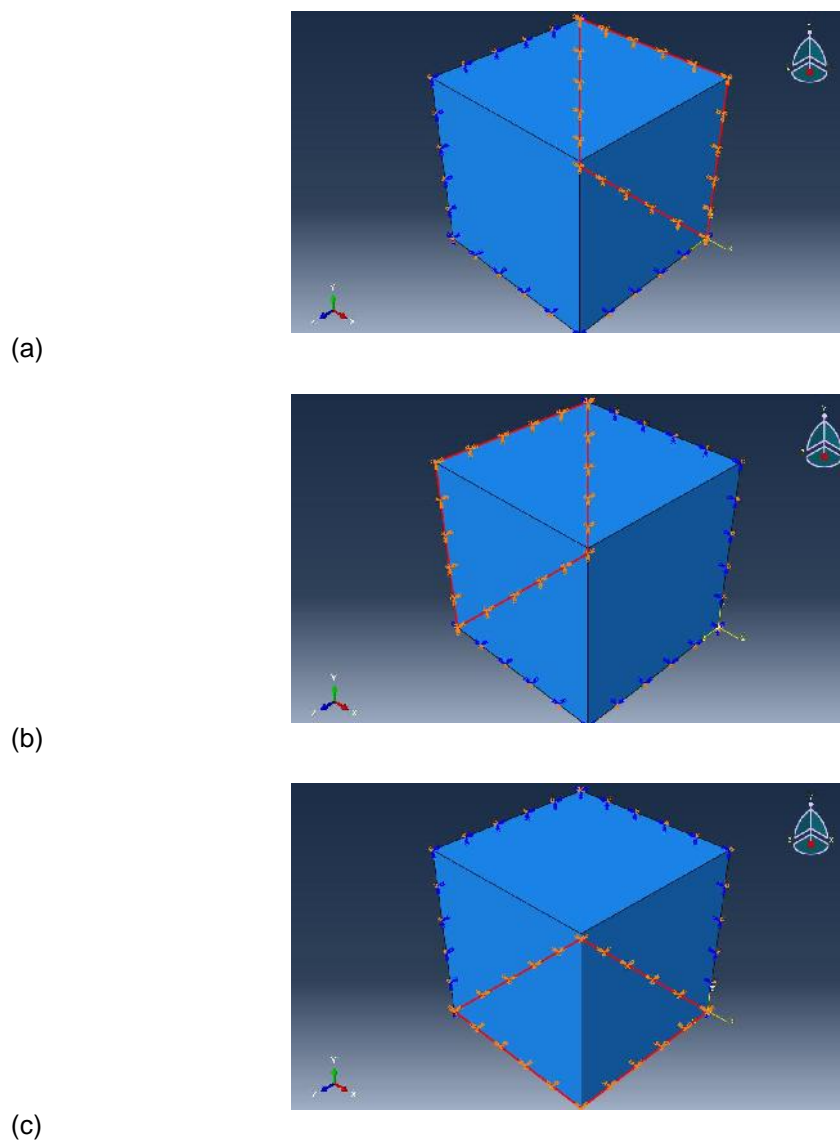


Figura 15 – Condições de contorno criadas no *Step Initial*, (a) BC\_1, (b) BC\_2 e (c) BC\_3.

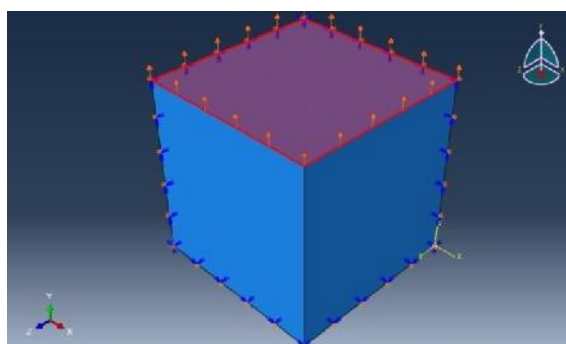


Figura 16 – Condição de contorno de deslocamento prescrita na direção Y (BC\_4).

O deslocamento aplicado na direção Y foi calculado por

$$u = \dot{\epsilon}_f \cdot L_0, \quad (51)$$

onde  $\epsilon_f$  é a deformação normal (longitudinal) final obtida para uma determinada temperatura e taxa de deformação aplicada e  $L_0$  é o comprimento inicial dos lados do cubo.

Para a definição dos parâmetros do Step Visco ainda foi definido o tempo de aplicação do mesmo,  $t_f$ , calculado através de:

$$t_f = \frac{\epsilon_f}{\dot{\epsilon}}, \quad (52)$$

onde  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação aplicada ao ensaio uniaxial experimental.

Assim, executando a análise, são obtidos os resultados conforme mostrado na Figura (17), de onde são geradas as curvas tensão - deformação apresentadas na seção 6.4 em comparação com as curvas de ensaio experimental.

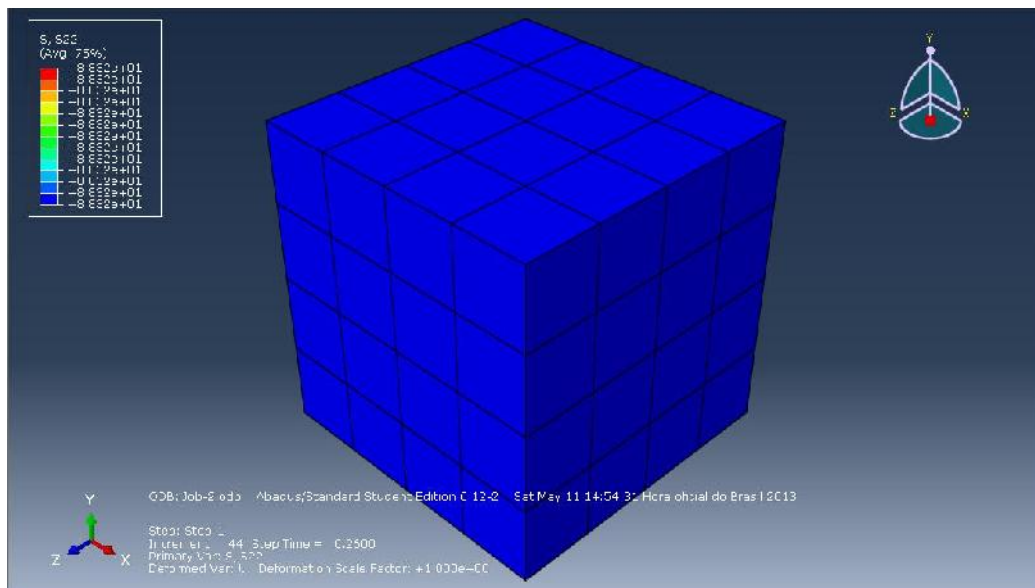


Figura 17 – Resultados da análise por elementos finitos no ABAQUS.

## 5 MATERIAL E MÉTODOS

### 5.1 METODOLOGIA

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste estudo é apresentada de forma sequencial conforme descrito a seguir:

1. Realização dos ensaios no MVE considerando diferentes temperaturas e diferentes taxas de carregamento;

Para esta primeira etapa foram utilizados dados de ensaios experimentais obtendo curvas de tensão-deformação em um número discreto de tempos. Esses ensaios foram realizados pelo fornecedor do material (Empresa Sabic, com sede em Riade, Arábia Saudita).

O material testado é o STAMAX 30YM240 (composição no Anexo 1). De acordo com dados fornecidos pelo fabricante, este material tem uma matriz de polipropileno e um volume de fibra de vidro em 30%, no qual as fibras longas foram quimicamente adicionadas, proporcionando altas dureza e resistência mecânica ao material. Sua temperatura de transição vítrea ( $T_g$ ) é de aproximadamente 0°C, e sua temperatura de derretimento ( $T_m$ ) encontra-se na faixa entre 200°C e 280°C, assim como sua temperatura de molde está entre 20°C e 80°C. A estrutura da matriz de polipropileno é composta por uma cadeia linear principal e apresenta cristalinidade parcial, ou seja, possui regiões cristalinas dispersas no material amorfo restante (CALLISTER, 2002).

Conforme descrito na seção 4.3, os ensaios foram realizados segundo a norma ISO 527/01B (ISO, 2012). Nesses ensaios, o material foi submetido a três ensaios de tração pura, cada um com uma temperatura diferente e constante (-35°C, 23°C e 80°C), sendo que para cada uma das temperaturas o material experimentou quatro taxas de deformação diferentes, constantes ao longo do ensaio (0,0001(mm/mm)/s, 0,01(mm/mm)/s, 0,1(mm/mm)/s e 1(mm/mm)/s). A realização dos ensaios proporcionou a obtenção de dados de tensão e deformação experimentais para cada taxa de deformação e para cada temperatura. Desta forma, foram calculados os

tempos correspondentes a cada deformação, e em seguida, o arquivo de entrada para o cálculo de cada curva no programa em MATLAB. Esses conjuntos de valores são apresentados no Apêndice 1.

2. Identificação no domínio do tempo, das propriedades mecânicas de MVEs utilizando o modelo material de Wiechert cuja representação matemática é conhecida por Séries de Prony.

Na segunda etapa, as tabelas de dados retirados das curvas experimentais são utilizadas como dados de entrada em um conjunto de rotinas implementadas no software MATLAB. Essas rotinas utilizam o modelo de Séries de Prony e técnicas de otimização para minimização do erro quadrático. Ao final, são obtidos os parâmetros de tempos de relaxação e módulos de relaxação que caracterizam o comportamento viscoelástico do material, conforme esquema apresentado na Figura (18), no Capítulo 6.

3. Utilização dos dados obtidos como dados de entrada para análise por elementos finitos de MVE.

Na terceira etapa, os parâmetros de tempos de relaxação e módulos de relaxação são utilizados como dados de entrada no software ABAQUS. Nesse caso, o objetivo é modelar um sólido cúbico (que representa uma parte do material) e simular os ensaios realizados, com  $\alpha_T = 1$ , conforme descrito na seção 4.5.

4. Comparação dos resultados obtidos às curvas experimentais a fim de validar a análise por elementos finitos.

Nesta etapa, os resultados obtidos da análise por elementos finitos serão comparados às curvas experimentais, com o intuito de validar a metodologia como um todo.

## 5.2 MATERIAIS UTILIZADOS

Para o desenvolvimento deste estudo, foram utilizados recursos próprios em termos de hardware, e também recursos privados da empresa Volvo do Brasil Veículos LTDA e da Universidade Federal do Paraná, conforme relação abaixo:

- 1 microcomputador;
- Software MATLAB;
- Dados experimentais fornecidos pela empresa SABIC, segundo a norma ISO 527/1B (ISO, 2012);
- Software ABAQUS.

## 5.3 TÉCNICAS E ROTINAS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADAS

Com o intuito de otimizar a função objetivo (dada pelo erro quadrático médio obtido pela comparação entre os valores de tensões medidos e aqueles avaliados segundo o modelo de Prony), e identificar o ponto ótimo (que representa as propriedades mecânicas do MVE), utilizam-se técnicas de otimização, que são incorporadas à rotina implementada no software MATLAB. As técnicas utilizadas são Algoritmos Genéticos (AG) e Programação Não Linear (PNL), cujos conceitos são discutidos rapidamente a seguir. Na rotina implementada foi adotada uma programação mista: AG realiza uma busca global e obtém um ponto de ótimo global aproximado, e a PNL utiliza esse ponto como ponto de partida para obtenção de um valor mais preciso para o ótimo aproximado. Essa técnica híbrida foi adotada após tentativas iniciais do uso da PNL para o problema de otimização, cujos resultados foram inconsistentes, uma vez que o ponto de mínimo encontrado por PNL era apenas um mínimo local, e não o ponto de mínimo global. Portanto, com a associação de AG, foi possível encontrar um ponto de ótimo global aproximado, facilitando a PNL a finalizar o processo de otimização.

### 5.3.1 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos, segundo GOLDBERG (1989) e ARORA (2004), são baseados na Teoria da Seleção Natural de Darwin. Seu princípio básico é de

que um conjunto de indivíduos, ou população, deve ser gerado a partir de um conjunto de indivíduos inicial, de forma que esta nova população tenha um desempenho melhor que o do grupo anterior, ou seja, uma população mais evoluída. Este processo deve ocorrer até que um critério de parada seja satisfeito ou que o número de iterações exceda o limite previamente especificado.

Existem três operadores genéticos principais que executam esta tarefa: reprodução, cruzamento e mutação. A reprodução é um operador que copia um conjunto de dados para uma nova população, de maneira a obter uma população mais evoluída. O cruzamento consiste em permitir que os membros selecionados de uma população troquem características entre si, e a mutação é o passo que previne uma perda prematura de material genético durante a reprodução e o cruzamento. Há ainda a função de aptidão, que define a importância relativa do processo de otimização e é definida por

$$F_i = \frac{1}{c} \left( 1 + \beta \cdot (f_{max} - f_i) \right) \quad (53)$$

onde  $f_i$  é a função objetivo,  $f_{max}$  é o valor máximo da função objetivo e  $\beta$  é um pequeno valor que previne algum problema numérico quando  $F_i$  tem valor zero.

Um Algoritmo Genético básico pode ser estabelecido da seguinte maneira, considerando  $Np$  o tamanho da população (ARORA, 2004):

- 1) Definir um esquema para representar os objetivos do projeto. Os  $Np$  membros da população inicial são randomicamente gerados. O contador de gerações é zerado ( $k=0$ ) e uma função de aptidão (equação (53)) é definida para o problema;
- 2) Calcular os valores de ajuste utilizando a função de aptidão para todas as configurações da população. Os contadores devem seguir para  $k=k+1$  e  $Ic=1$  (contador de cruzamentos);
- 3) Reprodução: selecionar as configurações da população corrente de acordo com o processo de seleção da roleta, de onde são selecionados membros do cruzamento e da mutação;
- 4) Cruzamento: selecionar duas configurações e randomicamente escolher dois locais nas cadeias genéticas e trocar as cadeias de zeros e uns entre os locais escolhidos.  $Ic = Ic + 1$ ;

- 5) Mutação: escolher uma fração pequena ( $Pm$ ) dos membros e trocar um zero por um ou vice versa em um local randomicamente selecionado na cadeia escolhida. Se nas gerações anteriores consecutivas ( $lg$ ) o membro de menor custo permanecer o mesmo, a fração de mutação  $Pm$  dobra;
- 6) Se o membro com menor função objetivo permanecer o mesmo por duas gerações consecutivas, então  $Imax$ , parâmetro que controla a quantidade de cruzamentos, deve ser aumentado. Se  $Ic < Imax$ , seguir para o quarto passo. Senão, continuar;
- 7) Critério de parada: se após a fração de mutação  $Pm$  ser dobrada, e o melhor valor de ajuste não for atualizado por  $lg$  gerações consecutivas, deve-se parar. Senão, retornar ao passo dois.

Na implementação no software MATLAB, foi utilizada a função de Algoritmos Genéticos *gaoptimset*, que cria a estrutura de algoritmos genéticos. O problema padrão pode ser definido como

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \\ x = ga(\text{fitnessfcn}, nvars, lb, ub), \\ \text{Restrições } \{lb \leq x \leq ub\} \end{cases} \quad (54)$$

onde *fitnessfcn* é a função de aptidão, *nvars* é o número de variáveis e *lb* e *ub* são os limites superior e inferior de  $x$ .

Dentre as opções de configuração desta função, foram escolhidas para a programação executada as seguintes:

*Display* – especifica quanta informação é mostrada enquanto o algoritmo genético está sendo executado. Nesta opção foi escolhido o parâmetro *iter*, no qual as informações são mostradas a cada iteração;

*Population size* - especifica o número de indivíduos de cada geração. Com uma grande população, o algoritmo genético faz a busca no espaço da solução de maneira mais extensiva, reduzindo a chance de que o algoritmo converja para um mínimo local que não seja um mínimo global. Por outro lado, provoca uma elevação no tempo de processamento;

*Generations* – número inteiro positivo que denota a quantidade de iterações que devem ocorrer antes que a execução da rotina termine;



- Tolcon* – é a tolerância de término da execução da rotina de algoritmos genéticos, que está entre as violações de restrições. Este parâmetro representa o valor máximo que os outros parâmetros podem violar a restrição estabelecida e ainda assim convergir;
- Tolfun* – é a tolerância de término mais provável da função objetivo. Uma convergência de sucesso ocorre quando o valor desta função muda em um valor inferior ao estabelecido por *Tolfun*;
- MutationFcn* – determina a função de mutação. Neste parâmetro foi utilizada a função *@mutationadaptfeasible*, que randomicamente cria direções adaptáveis que dizem respeito à última geração que teve sucesso ou fracasso. A região factível é determinada pelas restrições e inequações de restrição, e um tamanho de passo é escolhido em cada direção para que as restrições e os limites sejam satisfeitos;
- CreationFcn* – especifica a função que cria a população inicial. Neste parâmetro a função *default* é *Uniform*, que cria uma população inicial randômica com distribuição uniforme;
- CrossoverFcn* – função que o algoritmo utiliza para criar os resultados do cruzamento. A função *default* é *@crossoversscattered* que cria um vetor binário randômico e seleciona os genes onde o vetor tem valor 1 dos primeiros pais, e os genes onde o vetor é 0 dos segundos pais, combinando os genes para gerar a próxima geração;
- CrossoverFraction* – número escalar positivo, que denota a fração da população na próxima geração, exceto a elite da população, que é criada pela função de cruzamento;
- DistanceMeasureFcn* – função que computa a medida da distância dos indivíduos, sendo que a função *default phenotype* computa na variável do espaço;
- EliteCount* – número inteiro positivo que especifica quantos indivíduos na geração corrente irão garantidamente sobreviver para a próxima geração;
- FitnessLimit* – número escalar que faz o algoritmo parar caso a função de aptidão (*FitnessFcn*) atinja este valor;
- FitnessScalingFcn* – função que escala os valores para a função de aptidão. A opção *default* é *@fitscalingrank*, que escala os resultados baseada no *ranking* de cada indivíduo ao invés de seu valor;

- HybridFcn* – função que continua a otimização após o término do AG. A opção *default* é de não se utilizar esta função;
- InitialPenalty* – número escalar positivo que determina o valor inicial do parâmetro de pênalti;
- InitialPopulation* – população inicial (matriz) utilizada para alimentar o algoritmo;
- InitialScores* – vetor coluna com os valores iniciais utilizados para determinar o ajuste da função;
- MigrationDirection* – direção de migração, cuja opção *default* é *forward*, em que a migração segue em direção à última subpopulação;
- MigrationFraction* – de valor *default* 0.2, é um escalar entre 0 e 1 que especifica a fração dos indivíduos em cada subpopulação que migra para uma subpopulação diferente;
- MigrationInterval* – número inteiro positivo que especifica o número de gerações que ocorrem entre as migrações individuais entre as subpopulações. O número *default* é 20;
- OutputFcns* – função que *ga* chama a cada iteração, cuja opção *default* é de não se utilizar esta função;
- ParetoFraction* – com valor *default* de 0.35, é um número escalar entre 0 e 1 que especifica a fração dos indivíduos que são mantidos na primeira análise de Pareto enquanto o *solver* seleciona indivíduos de outras fontes;
- PenaltyFactor* – atualiza o parâmetro de penalidade, que é um número escalar positivo com valor *default* 100;
- PlotFcns* – funções que plotam dados computados pelo algoritmo, sendo a opção *default* a de não se utilizar esta função;
- PlotInterval* – número inteiro positivo que especifica o número de gerações entre as chamadas para as funções de plotagem;
- PopInitRange* – matriz ou vetor que especifica o espectro de indivíduos provenientes da população individual;
- PopulationType* – define o tipo da população. A opção *default* é *double vector*, em que os indivíduos da população são do tipo *double*;
- SelectionFcn* – função que seleciona os pais do cruzamento e os resultados da mutação. A opção *default* é *@selectionstochunif*, que alinha os pais correspondentes em uma seção da linha e o algoritmo se move ao longo desta linha em passos de mesmo tamanho;

*StallGenLimit* – de valor *default* 50, é um número inteiro positivo que faz o algoritmo parar se não há melhora na função objetivo por este número de gerações consecutivas;

*StallTimeLimit* – o algoritmo para se não há melhora na função objetivo por um tempo de *StallTimeLimit* segundos;

*TimeLimit* – escalar positivo que faz o algoritmo parar após este tempo em segundos;

*UseParallel* – computa as funções de ajuste de uma população em paralelo. A opção *default* é de que nunca seja computado em paralelo;

*Vectorized* – especifica se a computação da função de aptidão é vetorizada. A opção *default* é de que esteja desativada.

### 5.3.2 Programação Não Linear

A programação não-linear visa encontrar o mínimo de uma função não-linear com restrições e, desta forma, foi implementada no software MATLAB com o auxílio da função *optimset*, que cria a estrutura de otimização necessária para executar a rotina de otimização propriamente dita, *fmincon*. Nessa rotina, o problema padrão é:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{Restrições } \{lb \leq x \leq ub\} \end{cases} \quad (55)$$

onde  $x$ ,  $lb$ , e  $ub$  são vetores e  $f(x)$  é uma função que retorna um número escalar. No caso dos vetores de projeto apresentados no Capítulo 4, somente restrições de desigualdade das variáveis de projeto são utilizados.

Dentre as opções de configuração desta função, foram escolhidas para a programação executada as seguintes:

*Display* – especifica quais informações são mostradas enquanto a rotina de otimização está sendo executada. Nesta opção foi escolhido o parâmetro *iter*, no qual as informações são mostradas a cada iteração;

*FunValCheck* – verifica se os valores da função objetivo são válidos. Quando está acionada (*on*) mostra uma mensagem de erro quando a função objetivo

retorna valores complexos ou com divisão com denominador próximo de zero (*NaN – not a number*). A opção *default* é que esteja desligada (*off*);

*MaxFunEvals* – é um número inteiro positivo que denota o número máximo de avaliações da função que são permitidos;

*MaxIter* – número inteiro positivo que define o número máximo de iterações permitido;

*Algorithm Active-Set* – dentre os algoritmos que podem ser utilizados para execução do *solver fmincon*, o *Active-set* é uma rotina que tem por objetivo resolver as equações de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A solução destas equações forma a base de muitos algoritmos de programação não-linear, que computam os multiplicadores de Lagrange diretamente e juntamente com os métodos restritos de quasi-Newton, que garantem uma convergência linear pelo acúmulo de dados de segunda ordem das equações KKT.

## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados alguns resultados da implementação numérica da formulação apresentada anteriormente, com o objetivo de identificar as propriedades considerando três temperaturas e quatro taxas de deformação. Na Seção 6.1 é apresentada, em forma gráfica, a estrutura computacional implementada. Na Seção 6.2 são mostrados os resultados obtidos na análise da influência da pressão. A Seção 6.3 apresenta os resultados obtidos na análise da influência da temperatura e, por fim, a Seção 6.4 mostra os resultados da implementação dos dados obtidos em um software comercial por aplicação do MEF.

### 6.1 ESTRUTURA COMPUTACIONAL IMPLEMENTADA

O objetivo desta seção é ilustrar através de um esquema simples a estrutura computacional implementada para obtenção dos parâmetros de caracterização do material no software MATLAB. Esse esquema, em formato resumido, pode ser visualizado na Figura (18). O primeiro passo é a leitura dos dados provenientes dos testes experimentais, seguido da preparação da rotina de AG e sua execução. Em seguida, o melhor ponto obtido pelo processo de otimização utilizando AG serve de dado de entrada para preparação da rotina de programação não linear e sua execução. O resultado final chega ao ponto ótimo global. Por fim, os resultados são mostrados.

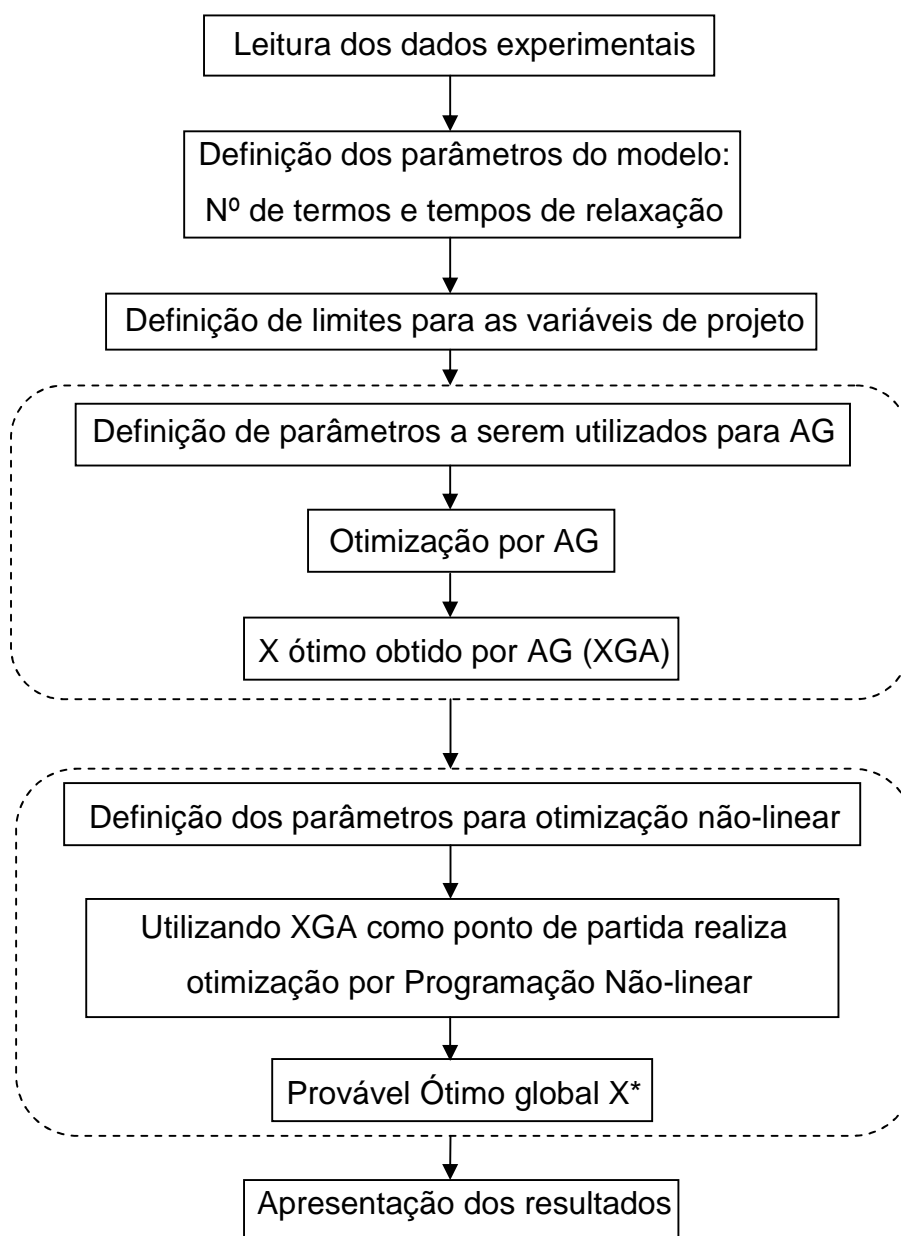


Figura 18 – Esquema do conjunto de rotinas implementadas no software MATLAB para caracterização do material.

## 6.2 IDENTIFICAÇÃO DO MVE CONSIDERANDO TEMPERATURA CONSTANTE E INFLUÊNCIA DA PRESSÃO

Os resultados apresentados nesta seção consideram o modelo do material com um termo de mola conforme a Figura (4), ou modelo de Wiechert, que contém um termo representando o comportamento puramente elástico.

Desta forma, o objetivo é obter o erro mínimo resultante da comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através da implementação das Séries de Prony, e analisando a influência da pressão, com temperatura constante.

Em todas as análises realizadas e apresentadas a seguir, alguns parâmetros do processo de otimização são comuns, quais sejam:

### **Algoritmos genéticos:**

Número de indivíduos na população: 200

Número de gerações: 200

TolCon: 1e-4

TolFun: 1e-6

MutationFcn: *@mutationadaptfeasible,0.02*

### **Programação não-linear:**

MaxFunEvals: 100

MaxIter: 400

Algorithm: active-set

### **Limites simples sobre as variáveis de projeto:**

Módulo de equilíbrio:  $0 \text{ MPa} \leq E \leq 10000 \text{ MPa}$

Termos componentes da Série de Prony:  $0,0 \text{ MPa} \leq E_i \leq 5000 \text{ MPa}$

( $i = 1 \dots NT$ )

### **Constantes associadas ao modelo O'Reily:**

Constante material C:  $-0,04 \leq C \leq 0,04$

Pressão de referência  $P_0$ :  $-3 \cdot P_{med} \leq P_0 \leq P_{med}$ , onde  $P_{med}$  equivale a um terço da tensão máxima da curva.

### **Número total de termos da Série de Prony:**

NT = 8

**Tempos de relaxação:**

$\tau = \{0,01 \ 0,07197 \ 0,51795 \ 3,72759 \ 26,82696 \ 193,06977 \ 1389,49549 \ 10000\}$ ,

sendo  $\tau_i/\tau_{i-1} = 7,197$ , ou seja, os tempos de relaxação crescem em uma progressão geométrica.

A faixa de Pressão de referência foi arbitrada no intervalo de  $-3 \cdot P_{med}$  a  $P_{med}$  com o intuito de imprimir maior flexibilidade ao ajuste. Como os resultados experimentais foram obtidos com valor de pressão iniciando em zero, no Apêndice 2 estão apresentadas tabelas com resultados baseados neste intervalo alternativo.

### 6.2.1 Identificação considerando temperatura constante de $-35^\circ\text{C}$ e influência da pressão

Nesta seção são apresentados os resultados para a temperatura constante de  $-35^\circ\text{C}$ , com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo da Série de Prony. Os primeiros resultados contemplam a comparação para cada uma das taxas de deformação separadamente, e em seguida são apresentados os resultados considerando um ajuste global contendo os históricos de tensões e deformações obtidos nos ensaios com todas as taxas de deformação, mas para uma temperatura fixa de  $-35^\circ\text{C}$ .



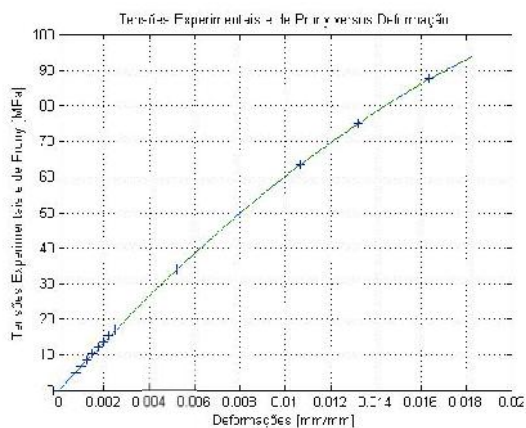
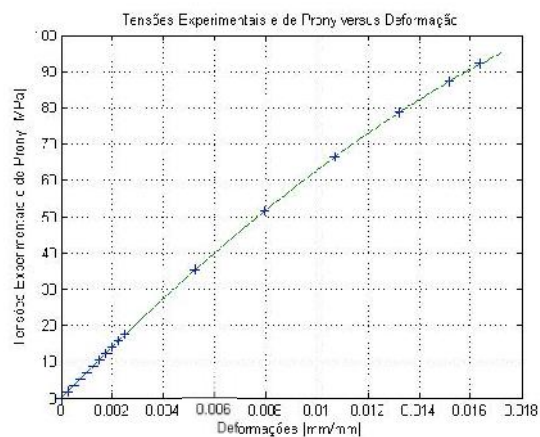
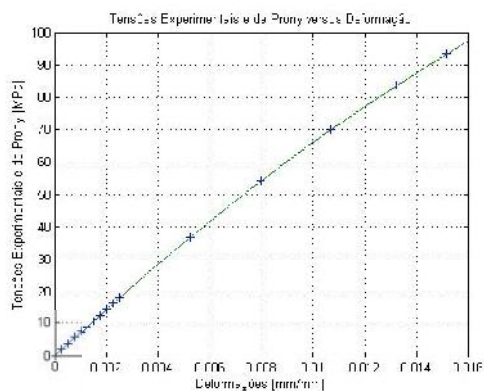
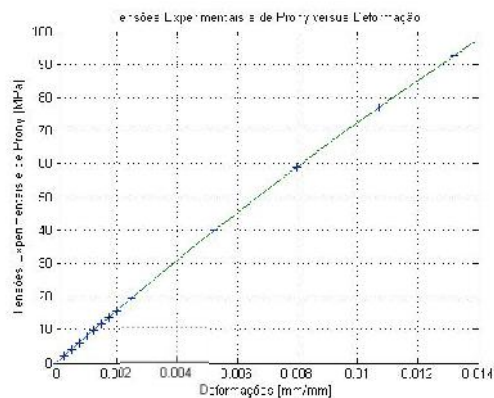
(a)  $\dot{\epsilon} = 0,0001 ((\text{mm}/\text{mm})/\text{s})$ (b)  $\dot{\epsilon} = 0,01 ((\text{mm}/\text{mm})/\text{s})$ (c)  $\dot{\epsilon} = 0,1 ((\text{mm}/\text{mm})/\text{s})$ (d)  $\dot{\epsilon} = 1 ((\text{mm}/\text{mm})/\text{s})$ 

Figura 19– Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através do cálculo da Série de Prony (-) para a temperatura de  $-35^{\circ}\text{C}$  e quatro taxas de deformação isoladamente.

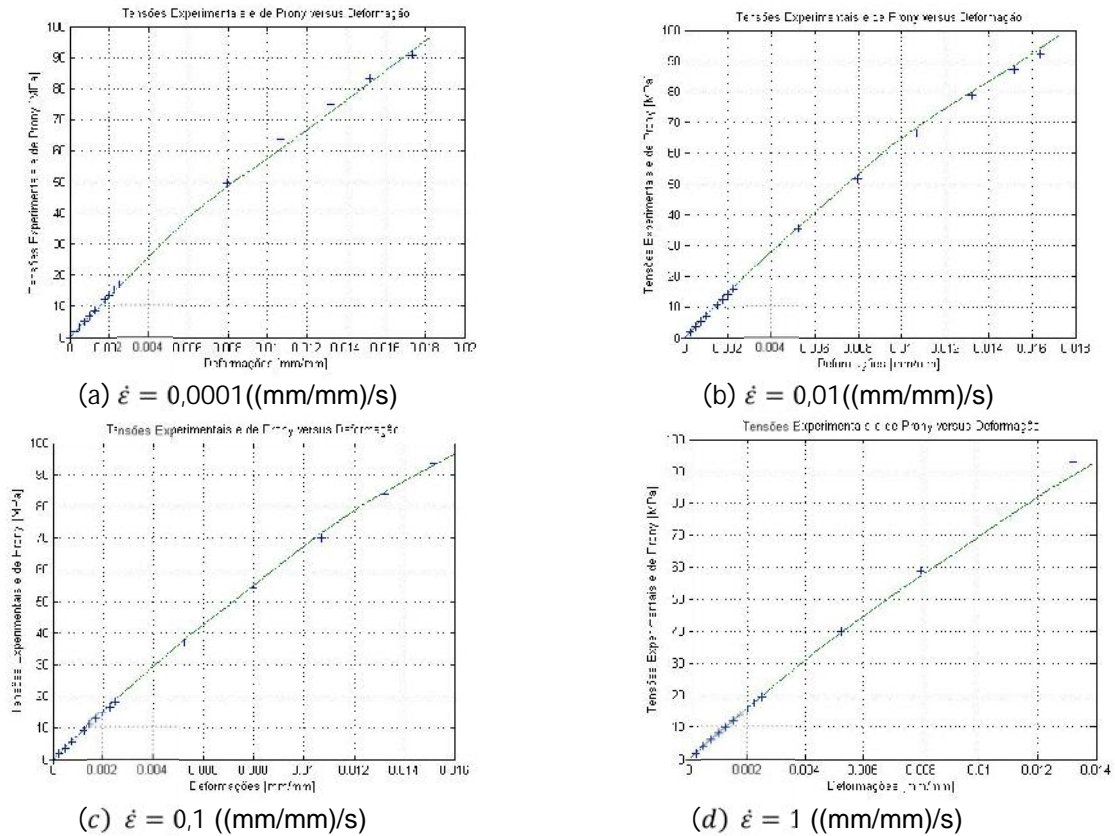


Figura 20 – Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de -35°C e todas as taxas de deformação (ajuste global).

Tabela 1 – Resultado do processo de identificação para a temperatura de -35°C.

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)			do pr $\dot{\epsilon} = 0,0001$	ident $\dot{\epsilon} = 0,01$	ara a $\dot{\epsilon} = 0,1$	ra de $\dot{\epsilon} = 1$	Ajuste global
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ (a)	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_1}$ (MPa)	1009,1	713,8	499,0	205,4	595,2
$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ (a)	0,07197	$\frac{E_2}{E_2}$ (MPa)	206,2	259,8	149,7	11,5	0,0
$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$ (a)	0,51795	$\frac{E_3}{E_3}$ (MPa)	0,0	0,0	0,0	146,0	739,3
$\frac{\sigma_4}{\epsilon_4}$ (a)	3,72759	$\frac{E_4}{E_4}$ (MPa)	0,0	121,2	155,2	78,8	0,0
$\frac{\sigma_5}{\epsilon_5}$ (a)	26,82696	$\frac{E_5}{E_5}$ (MPa)	187,6	368,7	323,6	355,2	0,0
$\frac{\sigma_6}{\epsilon_6}$ (a)	193,06977	$\frac{E_6}{E_6}$ (MPa)	825,6	500,9	406,1	57,6	0,0
$\frac{\sigma_7}{\epsilon_7}$ (a)	1389,49549	$\frac{E_7}{E_7}$ (MPa)	3189,2	554,4	435,9	92,7	1139,5
$\frac{\sigma_8}{\epsilon_8}$ (a)	$10^4$	$\frac{E_8}{E_8}$ (MPa)	1856,7	1094,3	806,9	622,2	448,0
E (MPa)			1045,6	4646,0	5373,7	6574,6	4947,3
$\frac{E_1}{E_8}$ (MPa)			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\frac{E_2}{E_8}$ (MPa)			11,6369	14,9452	20,3969	10,5366	-4,8053
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,0298	2,1177	0,7736	0,5757	2,9194
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			2,1678E-04	3,4934E-05	1,9042E-05	2,9437E-06	1,1756

Analisando os resultados da Tabela (1), pode-se afirmar que a taxa de deformação aplicada no ensaio experimental tem grande influência sobre as constantes que caracterizam o comportamento do módulo de relaxação e sobre a pressão de referência  $P_0$ , que apresentam valores significativamente diferentes para cada taxa de deformação. Já o valor da constante  $C_0$  apresentou um valor baixo para todas as taxas de deformação. Nota-se também que o módulo de equilíbrio mostrou valores diferentes de zero para todas as taxas de deformação.

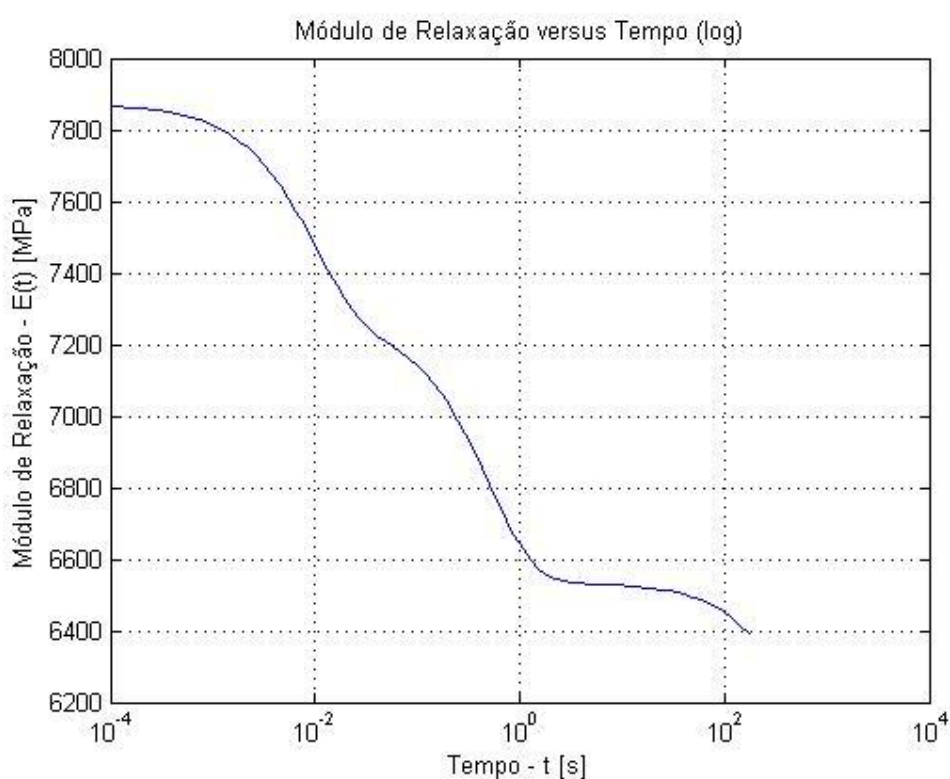


Figura 21 – Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de  $-35^{\circ}\text{C}$ .

Substituindo os valores obtidos na Tabela (1) na equação (25), obtém-se a função módulo de relaxação, que pode ser visualizada na Figura (21).

### 6.2.2 Identificação considerando temperatura constante de $23^{\circ}\text{C}$ e influência da pressão

Nesta seção são apresentados os resultados para a temperatura constante de  $23^{\circ}\text{C}$ , pela comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do

modelo baseado em Séries de Prony. Como na seção anterior, inicialmente, os resultados contemplam a comparação para cada uma das taxas de deformação separadamente, e, em seguida, são apresentados os resultados para um ajuste global, considerando o histórico dos resultados para todas as taxas de deformação.

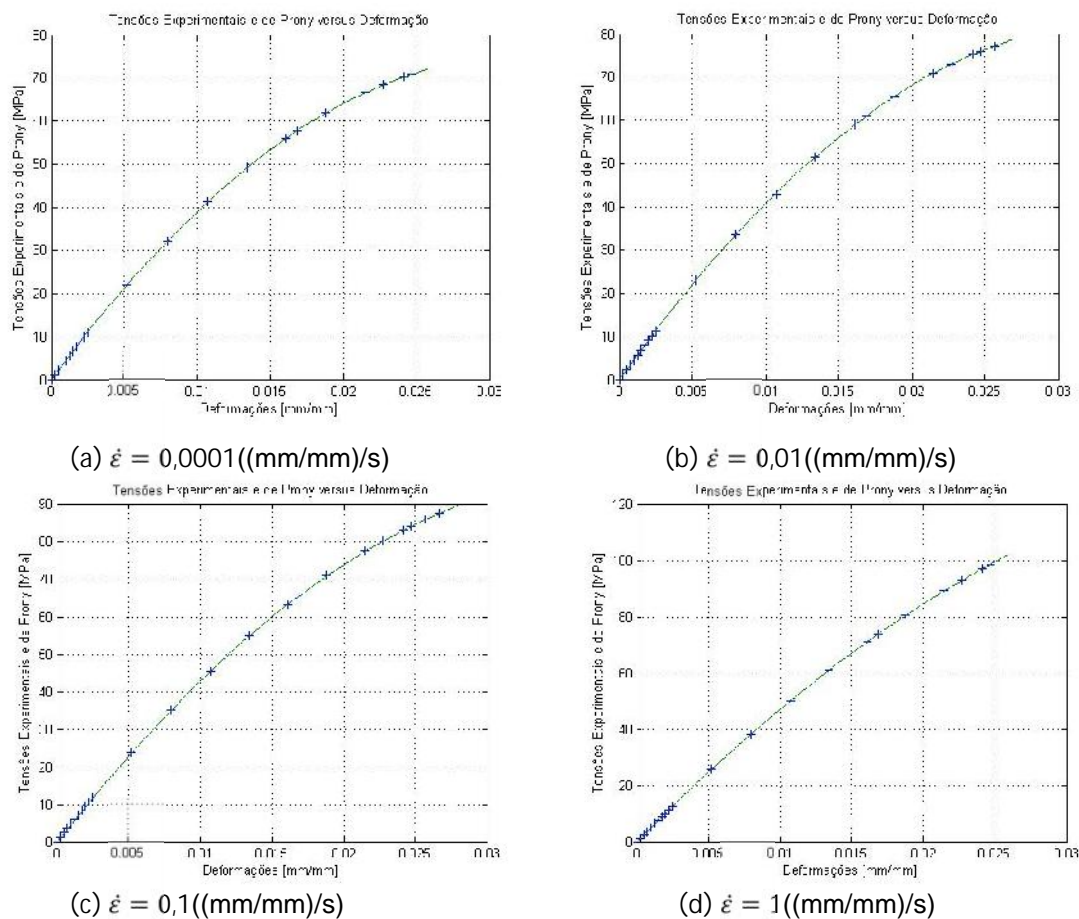


Figura 22 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 23°C e quatro taxas de deformação.

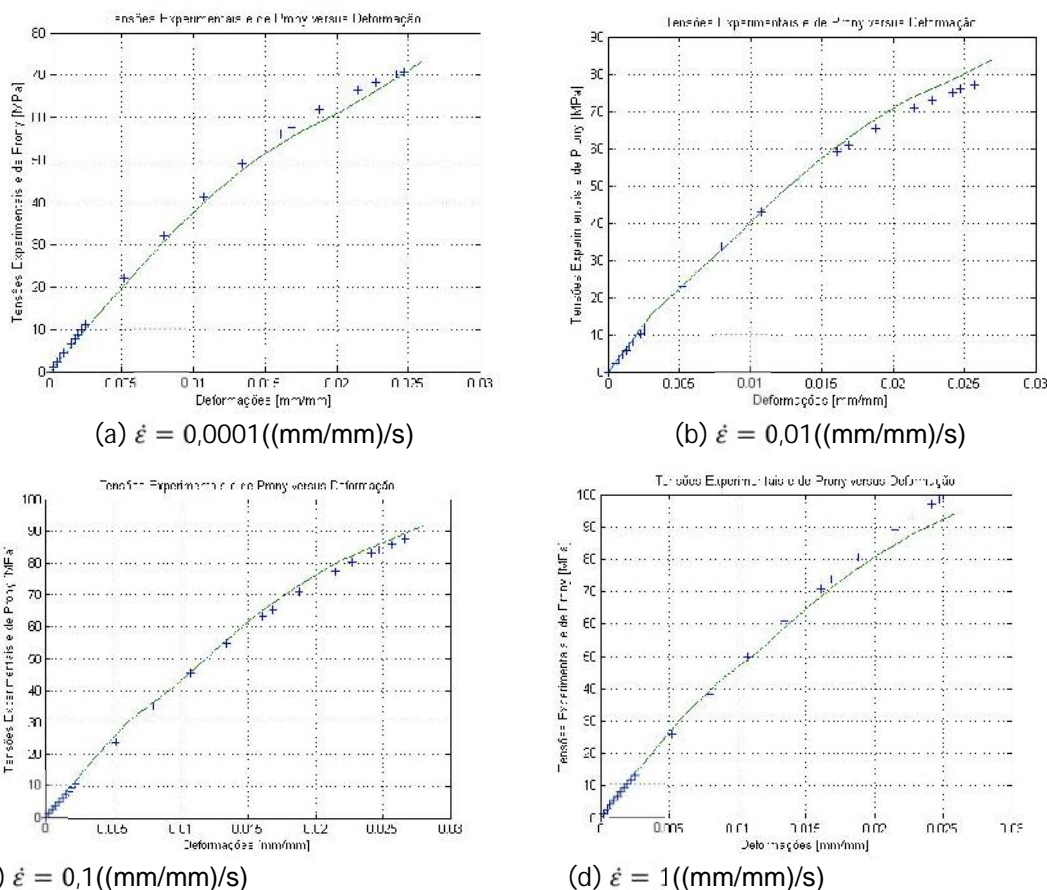


Figura 23 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 23°C e todas as taxas de deformação (ajuste global).

Tabela 2 – Resultado do processo de identificação para a temperatura de 23°C.

Taxa de Deformação (mm/mm)/s)			$\frac{do p}{\dot{\epsilon} = 0,0001}$	$\frac{iden}{\dot{\epsilon} = 0,01}$	$\frac{ara a}{\dot{\epsilon} = 0,1}$	$\frac{ra de}{\dot{\epsilon} = 1}$	Ajuste global
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} (\dot{\epsilon})$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{\epsilon_1} (MEPa)$	0,0	668,9	3,1	0,0	1360,0
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_2} (\dot{\epsilon})$	0,07197	$\frac{E_1}{\epsilon_2} (MEPa)$	0,0	0,2	88,6	133,8	0,0
$\frac{\sigma_2}{\epsilon_3} (\dot{\epsilon})$	0,51795	$\frac{E_2}{\epsilon_3} (MEPa)$	0,0	18,2	220,2	176,4	0,0
$\frac{\sigma_3}{\epsilon_4} (\dot{\epsilon})$	3,72759	$\frac{E_3}{\epsilon_4} (MEPa)$	0,0	256,4	266,3	224,2	0,0
$\frac{\sigma_4}{\epsilon_5} (\dot{\epsilon})$	26,82696	$\frac{E_4}{\epsilon_5} (MEPa)$	142,9	327,7	314,0	258,7	169,0
$\frac{\sigma_5}{\epsilon_6} (\dot{\epsilon})$	193,06977	$\frac{E_5}{\epsilon_6} (MEPa)$	408,8	473,5	410,7	299,7	498,3
$\frac{\sigma_6}{\epsilon_7} (\dot{\epsilon})$	1389,49549	$\frac{E_6}{\epsilon_7} (MEPa)$	4061,2	493,2	420,5	325,2	0,0
$\frac{\sigma_7}{\epsilon_8} (\dot{\epsilon})$	$10^4$	$\frac{E_7}{\epsilon_8} (MEPa)$	0,0	1233,6	888,9	544,6	968,4
E (MPa)			0,0	1899,1	2257,1	3190,6	2298,6
C			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\frac{E_0}{\epsilon_0} (MPa)$			10,4866	6,6922	4,8971	8,6670	-8,1043
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,0780	1,2155	4,5771	3,1873	24,8423
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			4,5059E-04	3,7662E-04	2,8556E-04	3,5241E-05	4,7076



Com os resultados da Tabela (2), visualiza-se que a velocidade de aplicação do carregamento no teste experimental também tem grande influência no comportamento do módulo de relaxação, com o módulo de equilíbrio para a taxa 0,0001 ((mm/mm)/s) igual a zero. A influência está presente da mesma forma na pressão de referência, que tem uma clara variação de valores para as diferentes taxas. Ademais, a constante  $C$  continua com um valor baixo para a temperatura de 23°C.

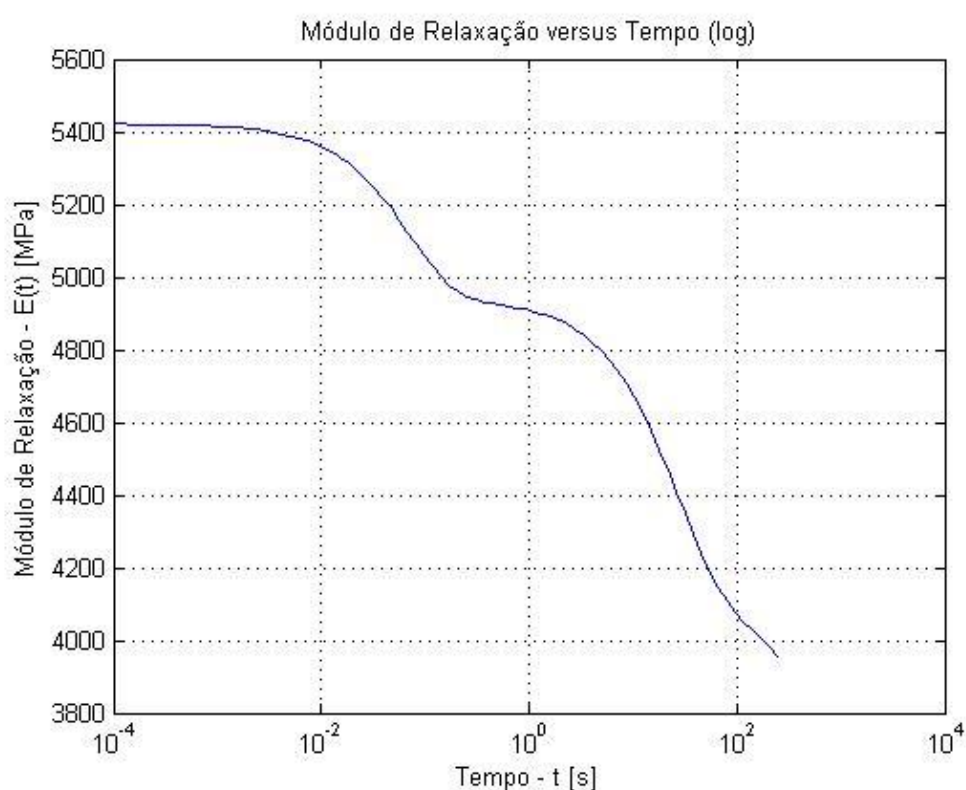


Figura 24 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de 23°C.

Com a substituição dos valores obtidos na Tabela (2) na equação (25), tem-se a função módulo de relaxação considerando a influência da pressão para a temperatura de 23°C, ilustrada na Figura (24).

### 6.2.3 Identificação considerando temperatura constante de 80°C e influência da pressão

A seguir são apresentados os resultados para a temperatura constante de 80°C com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do modelo baseado em Séries de Prony. Os resultados na Figura (25) apresentam a comparação para cada uma das taxas de deformação separadamente e na Figura (26) são mostrados os resultados para um ajuste global, o qual considera o histórico de todas as taxas de deformação.

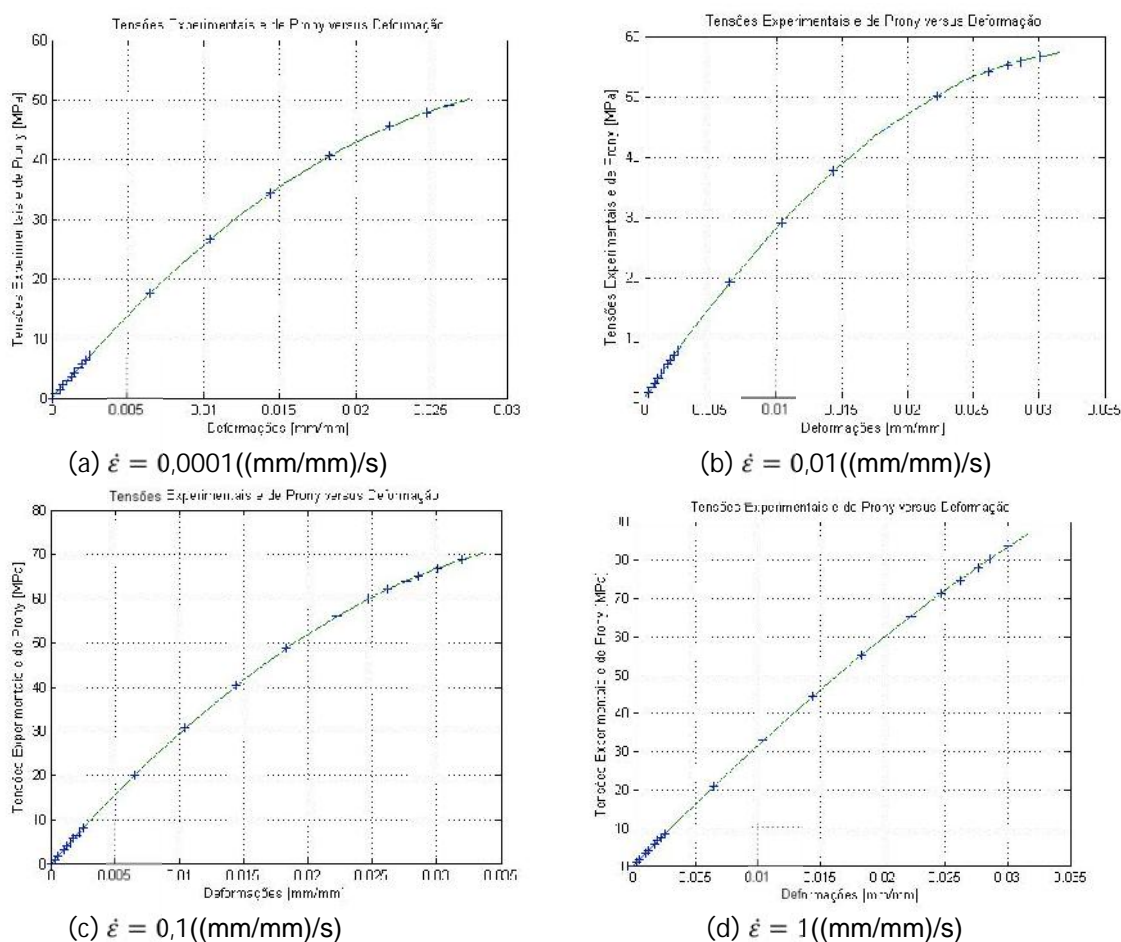


Figura 25 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 80°C e quatro taxas de deformação.

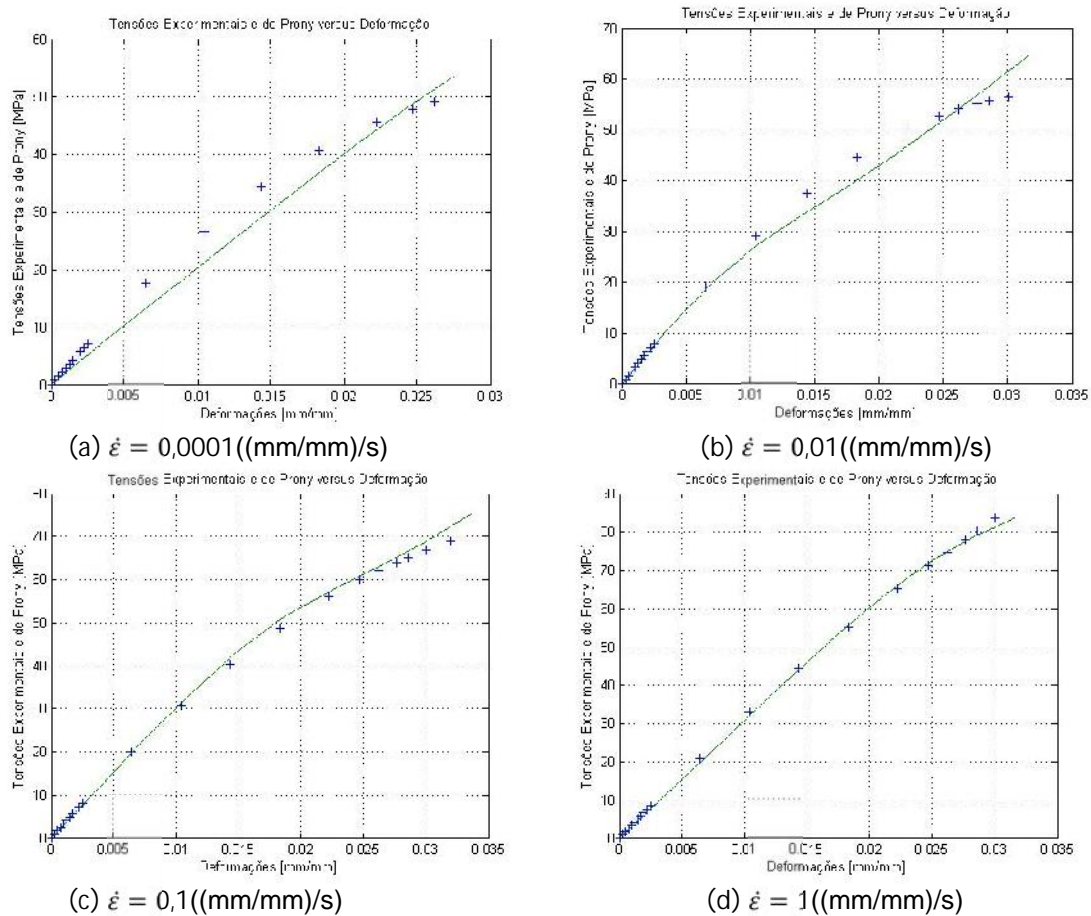


Figura 26 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e aqueles obtidos através da Série de Prony (-) para a temperatura de 80°C e todas as taxas de deformação (ajuste global).



Tabela 3 - Resultado do processo de identificação para a temperatura de 80°C.

Taxa de Deformação (mm/mm/s)			do pi $\dot{\epsilon} = 0,0001$	iden $\dot{\epsilon} = 0,01$	ara a $\dot{\epsilon} = 0,1$	ra de $\dot{\epsilon} = 1$	Ajuste global
$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_2}$ (s)	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_2}$ (MPa)	403,3	0,0	28,5	547,6	1051,6
$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_2}$ (s)	0,07197	$\frac{E_1}{E_2}$ (MPa)	739,8	0,0	81,6	0,0	0,0
$\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_3}$ (s)	0,51795	$\frac{E_2}{E_3}$ (MPa)	24,4	49,5	9,4	18,1	0,0
$\frac{\dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_4}$ (s)	3,72759	$\frac{E_3}{E_4}$ (MPa)	0,0	258,8	198,4	108,2	0,0
$\frac{\dot{\epsilon}_4}{\dot{\epsilon}_5}$ (s)	26,82696	$\frac{E_4}{E_5}$ (MPa)	28,3	251,6	231,6	117,2	234,6
$\frac{\dot{\epsilon}_5}{\dot{\epsilon}_6}$ (s)	193,06977	$\frac{E_5}{E_6}$ (MPa)	305,5	469,6	363,4	169,8	892,9
$\frac{\dot{\epsilon}_6}{\dot{\epsilon}_7}$ (s)	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7}$ (MPa)	467,9	336,9	357,4	155,4	743,3
$\frac{\dot{\epsilon}_7}{\dot{\epsilon}_8}$ (s)	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8}$ (MPa)	1426,4	1818,7	1021,5	304,4	153,9
E (MPa)			746,2	66,7	1105,9	2451,0	0,0
$\frac{E_1}{E_2}$ (MPa)			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\frac{E_1}{E_3}$ (MPa)			4,6617	4,5691	11,8814	15,8864	-19,9772
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			2,4149	0,4917	6,9701	1,6843	31,7086
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			1,9481E-04	1,4531E-04	1,5176E-05	2,1193E-05	3,0427

Os resultados da Tabela (3) mostram que mesmo na maior temperatura de teste os valores da constante  $C$  permanecem com valor baixo. O módulo de equilíbrio para o ajuste global é igual à zero, diferentemente das análises para as taxas de deformação realizadas individualmente. Uma diferença com relação às temperaturas anteriores é o valor de  $P_0$ , que aumentou conforme aumentaram as taxas de deformação.

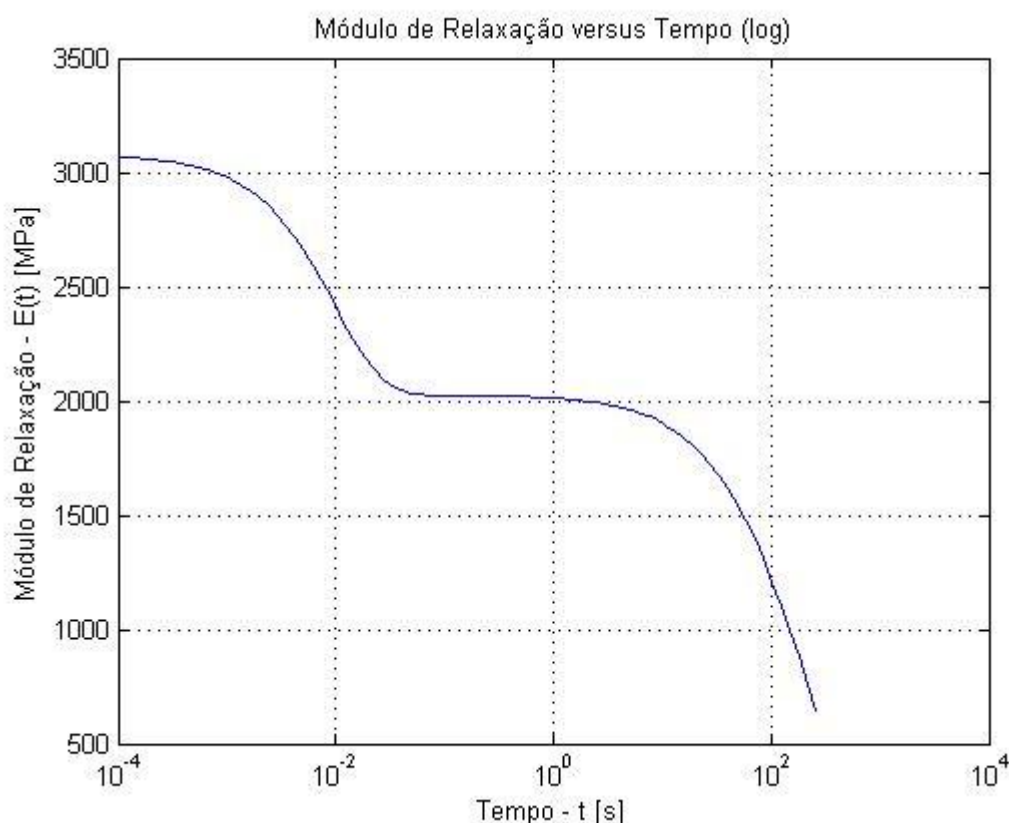


Figura 27 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxas de deformação e temperatura de 80°C.

Utilizando os valores obtidos na Tabela (3) e substituindo na equação (25), resulta na função módulo de relaxação para a temperatura de 80°C, mostrada na Figura (27).

### 6.3 IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA

Os resultados apresentados nas seções subsequentes também consideram o modelo de Wiechert, que contém um termo representando o comportamento puramente elástico.

Nesse caso, obtém-se o erro mínimo resultando da comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através da implementação do modelo baseado em Séries de Prony desta feita analisando a influência da temperatura. Frise-se que esses resultados não consideram a influência da pressão média no ponto.

Nas análises realizadas e apresentadas a seguir, alguns parâmetros do processo de otimização são comuns:

**Algoritmos genéticos:**

Número de indivíduos na população: 200

Número de gerações: 200

TolCon: 1e-4

TolFun: 1e-6

MutationFcn: *@mutationadaptfeasible,0.02*

**Programação não-linear:**

MaxFunEvals: 100

MaxIter: 400

Algorithm: active-set

**Limites simples sobre as variáveis de projeto:**

Módulo de equilíbrio:  $0 \text{ MPa} \leq E \leq 10000 \text{ MPa}$

Termos componentes da Série de Prony:  $0,0 \text{ MPa} \leq E_i \leq 5000 \text{ MPa}$

( $i = 1 \dots NT$ )

**Constantes associadas ao modelo WFL:**

Constante material  $C_1$ :  $-10,0 \leq C_1 \leq 10,0$

Constante material  $C_2$ :  $-200,0 \leq C_2 \leq 200,0$

Temperatura de referência  $T_s$ :  $-90,0 \leq T_s \leq 90,0$

**Número total de termos da Série de Prony:**

$NT = 8$

**Tempos de relaxação:**

$\tau = \{0,01 \ 0,07197 \ 0,51795 \ 3,72759 \ 26,82696 \ 193,06977 \ 1389,49549 \ 10000\}$ ,

sendo  $\tau_i/\tau_{i-1} = 7,197$ .

De acordo com os parâmetros apresentados acima, o intervalo de  $-90^\circ\text{C}$  a  $90^\circ\text{C}$  para a Temperatura de referência foi arbitrado com o intuito de proporcionar uma flexibilidade maior ao ajuste do parâmetro. Entretanto, como os resultados experimentais foram obtidos na faixa de  $-35^\circ\text{C}$  a  $80^\circ\text{C}$ , os valores resultantes para este intervalo alternativo são apresentados no Apêndice 3.

### 6.3.1 Identificação considerando taxa de carregamento 0,0001 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C

Nesta seção são apresentados os resultados para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C, com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo das Séries de Prony, para a taxa de deformação de 0,0001 (mm/mm)/s.

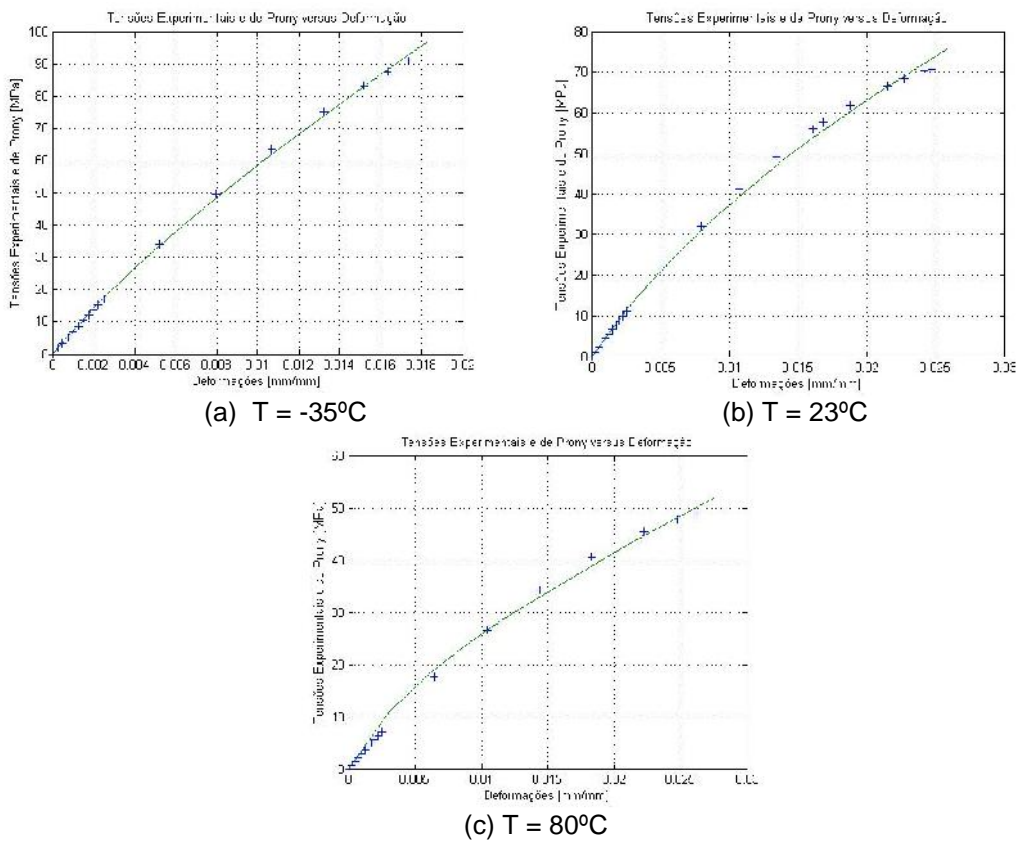


Figura 28 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão (+) e os obtidos através da Série de Prony (-) para temperaturas de (a) -35°C, (b) 23°C e (c) 80°C e taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s).

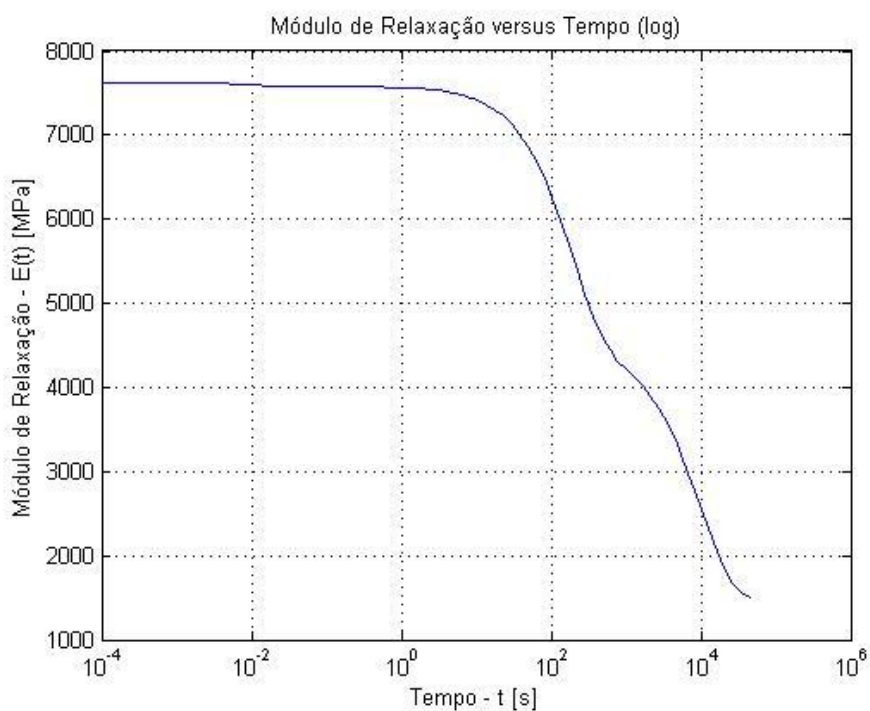


Figura 29 – Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C.

Substituindo os valores obtidos na Tabela (4) na equação (36), obtém-se a função módulo de relaxação somente para a taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s). Essa função pode ser visualizada na Figura (29).

Tabela 4 – Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		para a: 0,0001 $\dot{\epsilon} = 0,$
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_2} (MPa)$ a) 163,2
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1}{E_2} (MPa)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2}{E_3} (MPa)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3}{E_4} (MPa)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4}{E_5} (MPa)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5}{E_6} (MPa)$ a) 3090,2
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7} (MPa)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8} (MPa)$ a) 3031,4
$E_{\infty}$ (MPa)		1459,3
$C_1$		3,9445
$C_2$		81,8965
$T_s$ (°C)		-48,0900
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		2,0159
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		1,4347

### 6.3.2 Identificação considerando taxa de carregamento 0,01 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C E 80°C

A seguir são apresentados os resultados para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C, com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo das Séries de Prony, para a taxa de deformação de 0,01 (mm/mm)/s.

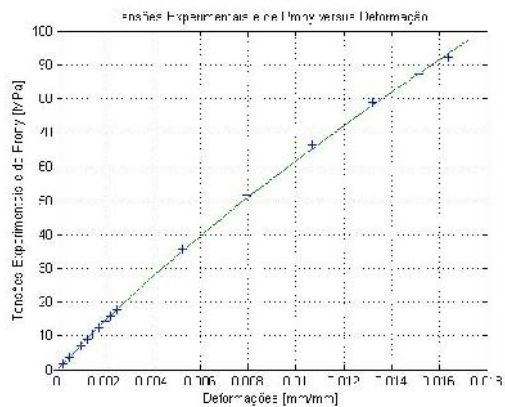
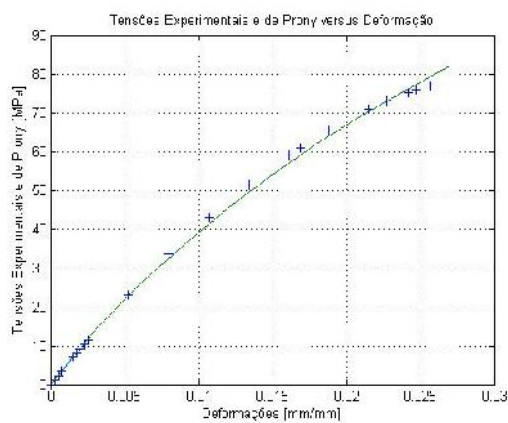
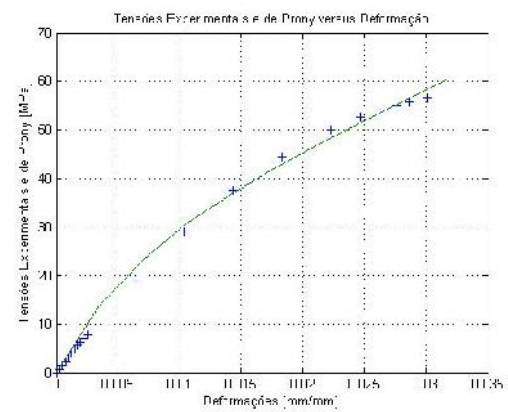
(a)  $T = -35^{\circ}\text{C}$ (b)  $T = 23^{\circ}\text{C}$ (c)  $T = 80^{\circ}\text{C}$ 

Figura 30 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através da Série de Prony para temperaturas de (a)  $-35^{\circ}\text{C}$ , (b)  $23^{\circ}\text{C}$  e (c)  $80^{\circ}\text{C}$  e taxa de deformação de  $0,01 \text{ ((mm/mm)/s)}$ .

Tabela 5 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		ra as 0,01 $\dot{\epsilon} = 0,01$
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_1} (ME)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1}{E_2} (ME)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2}{E_3} (ME)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3}{E_4} (ME)$ a) 2930,0
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4}{E_5} (ME)$ a) 0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5}{E_6} (ME)$ a) 2213,2
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7} (ME)$ a) 2015,4
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8} (ME)$ a) 528,3
$E_\infty$ (MPa)		0,0
$C_1$		3,7601
$C_2$		47,2190
$T_s$ (°C)		-47,4315
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		1,9726
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		1,3741

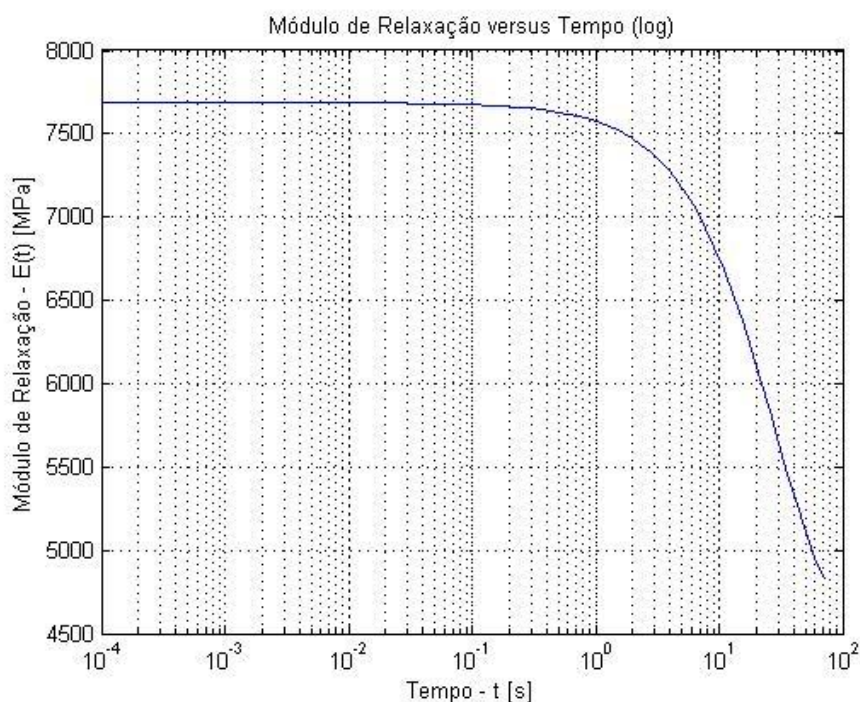


Figura 31 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C.

Com a substituição dos valores obtidos na Tabela (5) na equação (36), tem-se a função módulo de relaxação, que pode ser visualizada na Figura (31).



### 6.3.3 Identificação considerando taxa de carregamento 0,1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C

Em seguida os resultados para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C são apresentados, contemplando a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo das Séries de Prony, para a taxa de deformação de 0,1 (mm/mm)/s.

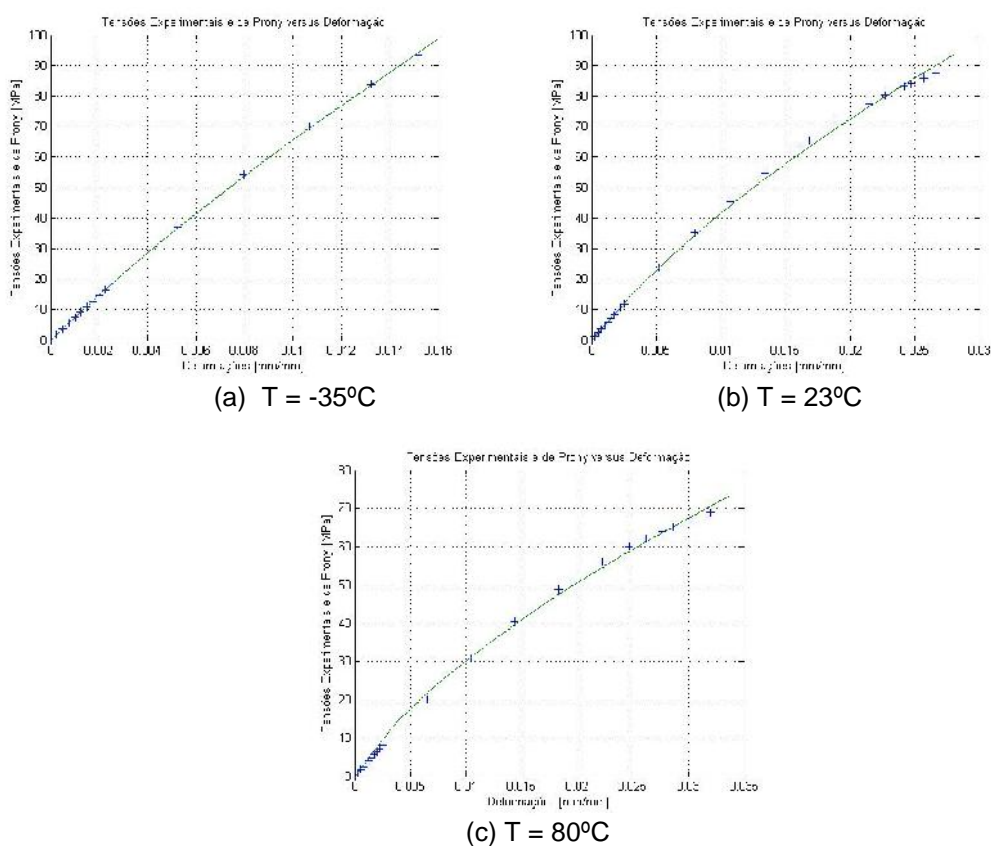


Figura 32 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através das Séries de Prony para temperaturas de (a) -35°C, (b) 23°C e (c) 80°C e taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s).

Tabela 6 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação (mm/mm/s)		$\frac{a \text{ as } t}{0,1 \left( \frac{1}{\dot{\epsilon} = 0,1} \right)}$	
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_1} (ME)$ a)	0,0
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1}{E_2} (ME)$ a)	0,0
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2}{E_3} (ME)$ a)	0,0
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3}{E_4} (ME)$ a)	2382,5
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4}{E_5} (ME)$ a)	0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5}{E_6} (ME)$ a)	2553,7
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7} (ME)$ a)	0,0
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8} (ME)$ a)	2873,6
$E_\infty$ (MPa)			0,0
$C_1$			6,8448
$C_2$			86,8369
$T_s$ (°C)			-65,9448
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			2,4328
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			1,2930

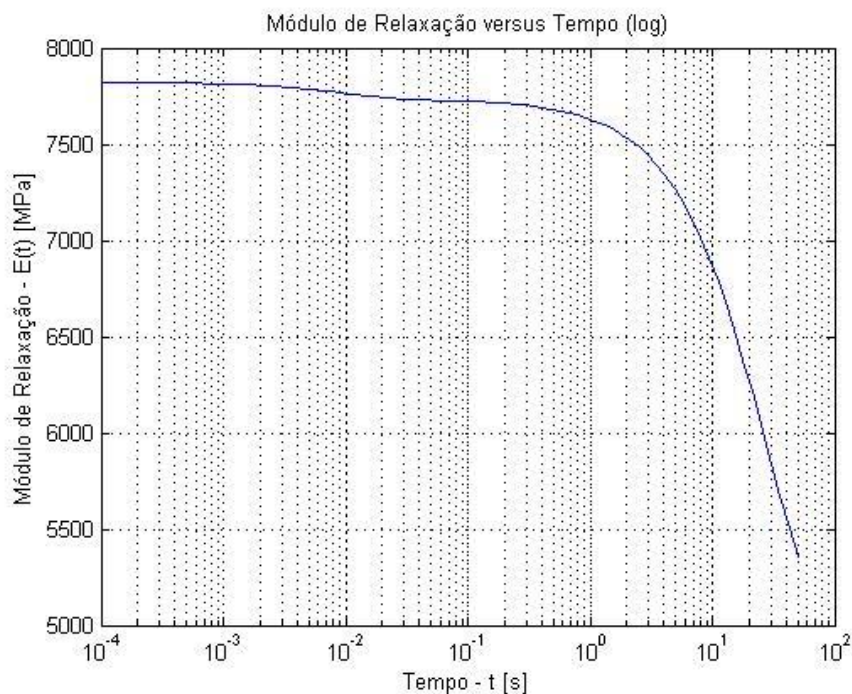


Figura 33 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C.

Os valores obtidos na Tabela (6), quando aplicados à equação (36), geram o a função módulo de relaxação, que pode ser visualizada na Figura (33).

### 6.3.4 Identificação considerando taxa de carregamento 1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C

A seguir são apresentados os resultados para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C, com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo das Séries de Prony, para a taxa de deformação de 1 (mm/mm)/s.

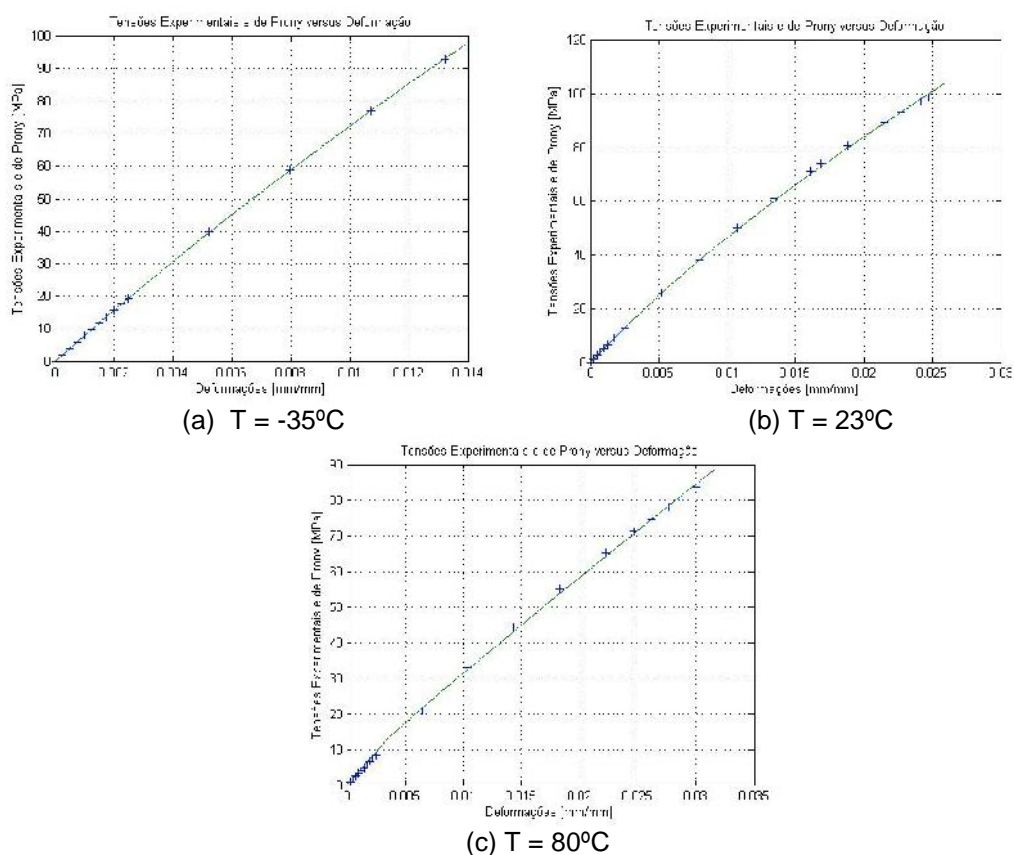


Figura 34 - Comparação entre os resultados experimentais de tensão e os obtidos através das Séries de Prony para temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s).

Tabela 7 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		Parâmetros	Valor
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_2} (ME)$	0,0
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1}{E_2} (ME)$	0,0
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2}{E_3} (ME)$	2524,9
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3}{E_4} (ME)$	0,0
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4}{E_5} (ME)$	0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5}{E_6} (ME)$	2301,1
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7} (ME)$	0,0
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8} (ME)$	1021,0
$E_\infty$ (MPa)			2217,5
$C_1$			10,0
$C_2$			103,8183
$T_s$ (°C)			-55,4621
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,6899
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			0,3051

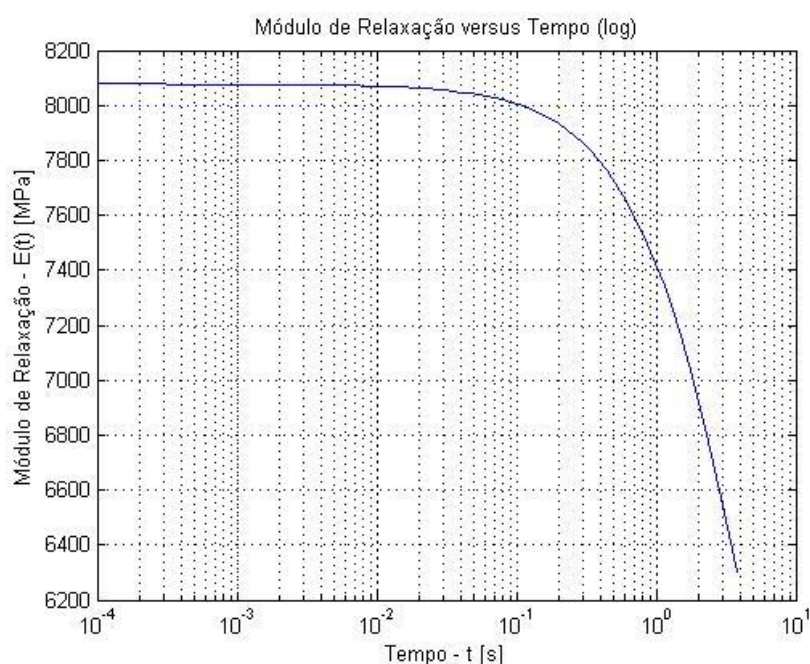


Figura 35 - Função módulo de relaxação identificada considerando taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C.

Na Figura (35) é apresentada a função módulo de relaxação para a temperatura de -55,46°C, obtida através da substituição dos valores da Tabela (7) na equação (36).

Comparando os resultados das Tabelas (4), (5), (6) e (7), que contêm as três temperaturas e resultados para cada taxa de deformação, fica clara a influência não somente da temperatura, mas também da taxa de deformação aplicada ao carregamento no teste do material, com variação nos valores do módulo de equilíbrio e nas constantes relativas a cada componente da série.

### 6.3.5 Identificação considerando todas as taxas de carregamento e temperaturas

Nesta seção têm-se os resultados para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C, com a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos através do cálculo das Séries de Prony, para todas as taxas de deformação apresentadas anteriormente.

Tabela 8 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para todas as taxas de deformação.

Taxa de Deformação (mm/mm/s)		Ajuste Global
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} (\dot{\epsilon})$	$10^{-2}$	$\frac{E_1}{E_1} (MVE)$
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\dot{\epsilon})$	0,07197	$\frac{E_1}{E_2} (MVE)$
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\dot{\epsilon})$	0,51795	$\frac{E_2}{E_3} (MVE)$
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\dot{\epsilon})$	3,72759	$\frac{E_3}{E_4} (MVE)$
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\dot{\epsilon})$	26,82696	$\frac{E_4}{E_5} (MVE)$
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5}{E_6} (MVE)$
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6}{E_7} (MVE)$
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7}{E_8} (MVE)$
$E_\infty$ (MPa)		2369,4
$C_1$		10,0
$C_2$		101,1856
$T_s$ (°C)		-18,38
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		22,2881
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		21,2534

Os resultados apresentados na Tabela (8), que utilizou o modelo de Wiechert, obteve módulo de equilíbrio maior que zero. Isso denota a influência do comportamento puramente elástico no comportamento do MVE.

Pode-se também comprovar a influência da temperatura, através da variação das constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e da temperatura de referência  $T_s$ , parâmetros utilizados para calcular o fator de deslocamento de temperatura,  $a_T$ .

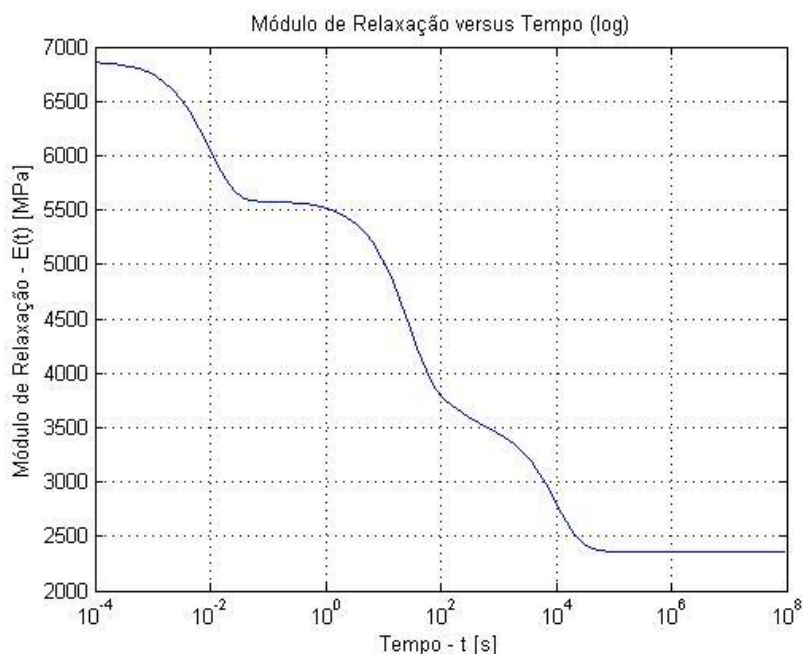


Figura 36 - Função módulo de relaxação identificada considerando todas as taxas de deformação e temperaturas para  $T_s = -18,38^\circ\text{C}$ .

Substituindo os valores obtidos na Tabela (8) na equação (36), obtém-se a função módulo de relaxação. Na Figura (36) essa função pode ser visualizada, sendo que ela considera o histórico de todas as temperaturas e taxas de deformação, constituindo a curva máster para a temperatura de referência, de aproximadamente  $-18,38^\circ\text{C}$ , obtida pelo processo de otimização. É possível construir uma curva máster considerando todas as variáveis independentes (tempo e temperatura, por exemplo), através de uma variável única chamada tempo reduzido,  $t_r$  (BRINSON e BRINSON, 2008). Isso não foi implementado neste trabalho, sendo uma oportunidade para realização de trabalhos futuros.

A temperatura de transição vítrea do material analisado é de  $0^\circ\text{C}$ , e na literatura pesquisada diferentes opções foram adotadas para a temperatura de referência do fator de deslocamento da temperatura WLF, modelo adotado neste trabalho. Após testes com diferentes opções de temperatura de referência  $T_s$ , desde adotar a temperatura de transição vítrea quanto adotá-la em  $50^\circ\text{C}$  acima como feito



em alguns trabalhos consultados, decidiu-se deixar este parâmetro livre, com limites entre +/- 90°C.

## 6.4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA EM SOFTWARE COMERCIAL

Os dados obtidos através do processo de identificação implementado no MATLAB forneceu os parâmetros característicos do material, e que são utilizados como dados de entrada para a análise com MEF no software comercial ABAQUS. Os resultados apresentados nas Seções 6.4.1, 6.4.2 e 6.4.3 foram obtidos para curvas de três temperaturas diferentes (-35°C, 23°C e 80°C) e para a taxa de deformação de 0,1 (mm/mm)/s.

### 6.4.1 Análise de elementos finitos para temperatura de -35°C

Nesta seção são apresentados os resultados da comparação entre as curvas experimental e a obtida como resultado da análise de elementos finitos para a temperatura de -35°C e taxa de deformação de 0,1 (mm/mm)/s (Figura (37)).

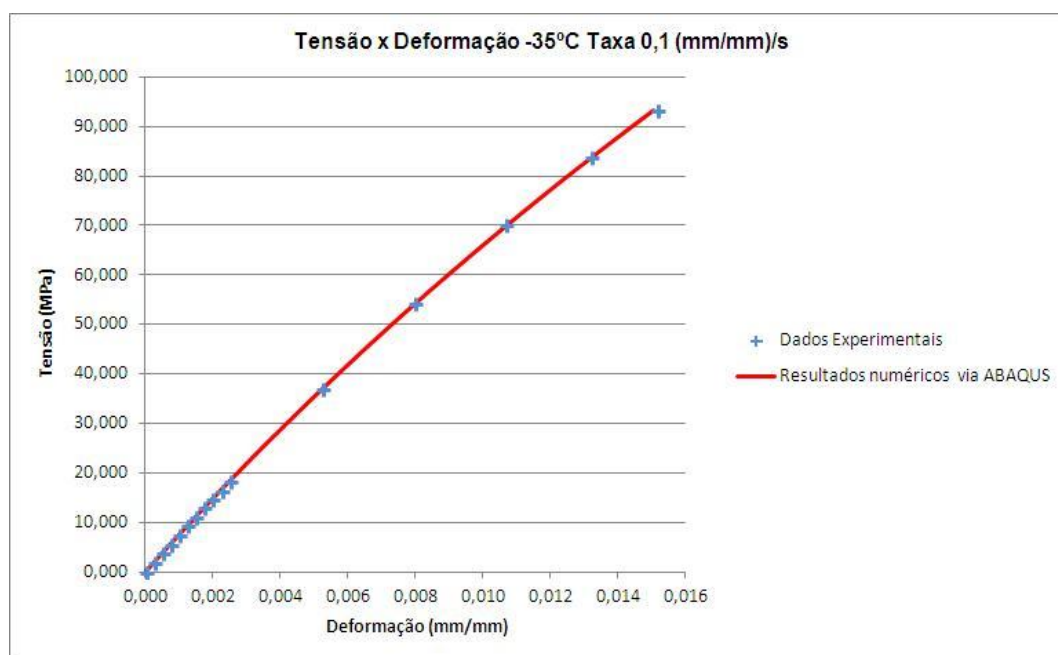


Figura 37 – Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de -35°C.

#### 6.4.2 Análise de elementos finitos para temperatura de 23°C

A seguir tem-se comparação entre os resultados das curvas experimental e daquela obtida por análise de elementos finitos para a temperatura de 23°C e taxa de deformação de 0,1 (mm/mm)/s (Figura (38)).

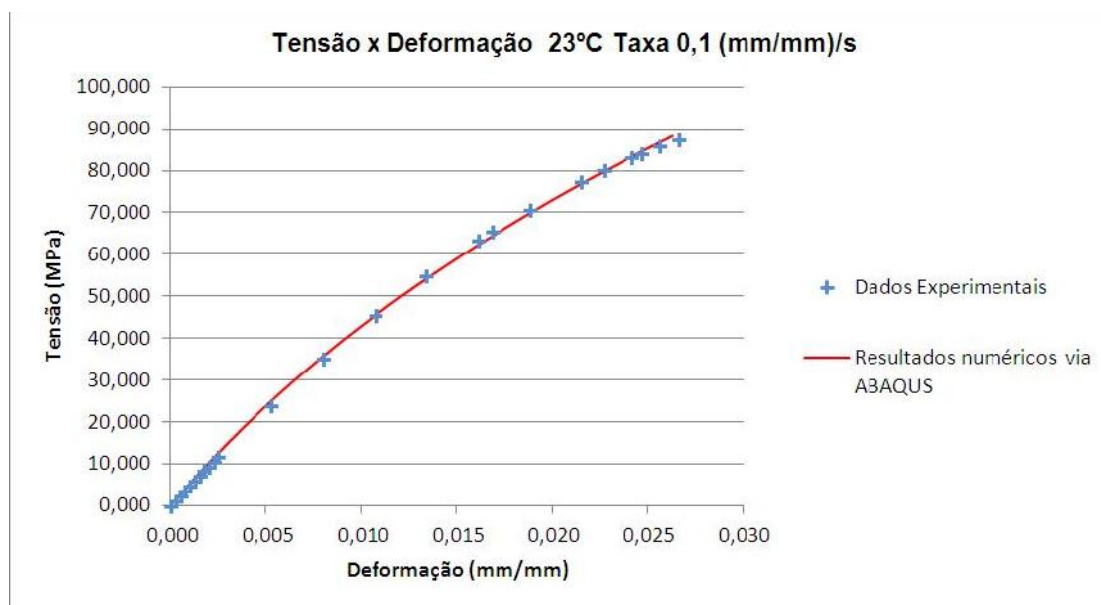


Figura 38 - Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de 23°C.

#### 6.4.3 Análise de elementos finitos para temperatura de 80°C

Por fim, a comparação entre os resultados das curvas experimental e daquela obtida por análise de elementos finitos para a temperatura de 80°C e taxa de deformação de 0,1 (mm/mm)/s é apresentada na Figura (39).



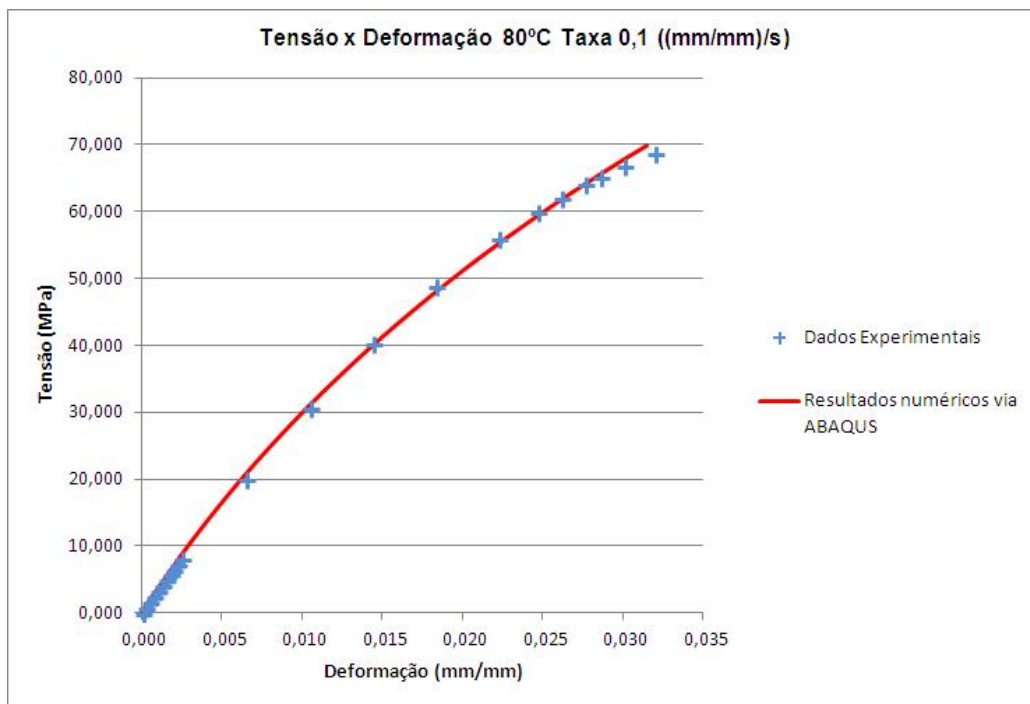


Figura 39 - Comparação entre os resultados obtidos no ABAQUS (-) e os dados experimentais (+) para a temperatura de 80°C.

Considerando os resultados apresentados nas Figuras (37), (38) e (39), observa-se uma boa concordância entre os dados obtidos experimentalmente e os resultados gerados pelas análises numéricas utilizando os parâmetros materiais caracterizados através da corrente formulação.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para caracterização de MVEs através de um problema inverso de identificação. Para tal fim, dados experimentais no domínio do tempo, extraídos de curvas de tensão *versus* deformação, a diferentes taxas de deformação e temperaturas, foram utilizados. A metodologia desenvolvida permite caracterizar, no domínio do tempo, materiais viscoelásticos com comportamento termorreologicamente e piezorreologicamente simples.

A revisão bibliográfica realizada buscou mostrar as principais metodologias aplicadas à caracterização de materiais viscoelásticos, tanto no domínio do tempo quanto da frequência, abordando também os fatores que influenciam o comportamento dos MVEs, como pressão e temperatura. Os principais modelos utilizados para reproduzir matematicamente o desempenho destes materiais também foram apresentados.

Foi revisado o comportamento viscoelástico e sua interação com os diferentes modelos representativos como Maxwell Generalizado, Kelvin / Voigt e Wiechert, modelo adotado na metodologia desenvolvida neste trabalho. Para considerar a influência dos fatores de deslocamento da pressão e da temperatura, foram adotados os modelos de O'Reilly e WLF, respectivamente.

A formulação implementada foi baseada no modelo constitutivo de Séries de Prony. No processo inverso de identificação foi utilizada uma técnica híbrida de otimização (AG e PNL).

A partir dos códigos numéricos implementados no MATLAB e de um conjunto de dados experimentais, as propriedades mecânicas do material em estudo, assumindo como reologicamente simples em temperatura e piezorreologicamente simples em pressão, foram identificadas considerando os seguintes casos:

Caso 1 - Uma única taxa de deformação para uma única temperatura;

Caso 2 - Várias taxas de deformação em uma única temperatura;

Caso 3 - Uma única taxa de deformação para várias temperaturas;

Caso 4 - Várias taxas de deformação para várias temperaturas.

No caso 1, onde as curvas são ajustadas individualmente, os erros quadráticos finais foram da ordem de  $10^{-04}$  MPa<sup>2</sup> a  $10^{-06}$  MPa<sup>2</sup>, o que indica que o

modelo constitutivo utilizado pode ser adequado para o material em estudo e a metodologia empregada se mostrou eficiente para a identificação das propriedades mecânicas.

Para o caso 2, onde várias curvas são ajustadas para uma única temperatura, o erro foi da ordem de 1 MPa<sup>2</sup> a 4 MPa<sup>2</sup>. Esse aumento no erro médio resultante do ajuste pode ser atribuído ao fato do modelo escolhido para avaliar a influência da pressão ser linear. Esta questão merece ser discutida em trabalhos futuros, utilizando modelos do deslocamento da pressão mais robustos.

No caso 3, onde várias temperaturas são ajustadas para a mesma taxa de deformação, os erros foram baixos, mas superiores ao caso 1. Isso pode ser atribuído ao fato de que a influência da pressão não foi considerada, somente a influência da temperatura. Deve-se, em trabalhos futuros, utilizar um fator de deslocamento combinando temperatura e pressão. Um exemplo de modelo com estas características é o modelo FMT (TSCHOEGL *et al.*, 2002), o qual não foi abordado no presente trabalho.

Por fim, para o caso 4, onde ocorre um ajuste global considerando todas as taxas de deformação e todas as temperaturas disponíveis, o erro foi da ordem de 21 MPa<sup>2</sup>. Apesar de superior aos erros encontrados para os outros casos, ainda é considerado satisfatório, pois representa um erro médio de cerca de 5% em cada ponto amostrado.

Para avaliar os resultados obtidos através desta metodologia, foi implementado no ABAQUS um modelo sólido simples, de situações no caso 1. Uma transformação dos parâmetros das Séries de Prony para realizar a simulação no ABAQUS foi apresentada. Os resultados obtidos pelo MEF, para três temperaturas diferentes, mostraram muito boa concordância.

Os resultados mostram que a metodologia implementada pode ser considerada adequada para este tipo de problema de identificação no domínio do tempo, embora resultados melhores possam ser obtidos pela utilização de modelos mais precisos que contabilizem a influência da pressão, a influência da temperatura e a influência combinada da pressão e da temperatura. Há que se salientar também que o material investigado pode não ser termorreologicamente e piezorreologicamente simples, sendo que um estudo a fim de confirmar tal afirmação pode ser desenvolvido futuramente.

Ainda, comparações desta metodologia com aquelas implementadas no domínio da frequência possibilitariam agregar novas informações a respeito dos modelos utilizados em cada uma delas. Por fim, outra possibilidade de trabalho futuro é a construção de um nomograma, considerando todas as variáveis independentes, através de uma variável única chamada tempo reduzido, ou  $t_r$  (BRINSON e BRINSON, 2008).

## REFERÊNCIAS

1. ABAQUS, versão 6.12. Dassault Systèmes, 2012.
2. ARORA, J. S. Introduction to Optimum Design. San Diego, CA: Elsevier Academic Press, 2004.
3. BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, Vol. 27, nº 3, pp. 201-210, 1983.
4. BEAKE, B. Modelling indentation creep of polymers: a phenomenological approach. **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 39, pp. 4478-4485, 2006.
5. BRINSON, H. F. The Behavior of Photoelastic Polyurethane at Elevated Temperatures. **Experimental Mechanics**, Vol. January 1976, pp. 1-4, 1976.
6. BRINSON, H. L.; BRINSON, L. C. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity**. New York: Springer Science, 2008.
7. CALLISTER, W. D. Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
8. CARTNER, J. S.; GRIFFITH, W. I.; BRINSON, H. F. The viscoelastic behavior of composite materials for automotive applications. **Composite Materials in the Automotive Industry**. New York: ASME, 1978.
9. CHAE, S.-H.; ZHAO, J.-H.; EDWARDS, D. R.; HO P. S. Characterization of the viscoelasticity of molding compounds in the time domain. **Journal of Electronic Materials**. Vol. 39, nº 4, pp. 419-425, 2010.
10. CHEN, T. Determining a Prony Series for a viscoelastic material from time varying strain data. National Technical Information Service, Relatório interno, NASA, 2000.
11. CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity**. New York: Academic Press, 1971.

12. FELHÖS, D.; XU, D.; SCHLARB, A. K.; VÁRADI, K.; GODA T. Viscoelastic characterization of an EPDM rubber and finite element simulation of its dry rolling friction. **eXPRESS Polymer Letters**, Vol. 2, nº 3, pp. 157-164, 2008.
13. FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. New York: John Wiley & Sons, 1980.
14. FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. New York: Springer Verlag, 1975.
15. GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization and machine learning**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
16. HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
17. HU, G.; TAY, A. A. O.; ZHANG Y.; ZHU, W.; CHEW. S. Characterization of viscoelastic behaviour of a molding compound with application to delamination analysis in IC packages. **Electronics Packaging Technology Conference**, pp. 53-59, 2006.
18. HUANG, G.; WANG, B.; LU, H. Measurements of viscoelastic functions of polymers in the frequency-domain using nanoindentation. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, Vol. 8, nº 4, pp. 345-364, 2004.
19. ISO 527/1B. 2012, **Plastics – Determination of tensile properties**. Geneva, Switzerland: International Organization Standardization.
20. KIM, S.-Y.; LEE, D.-H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 324, pp. 570-586, 2009.
21. LAI, M. W.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. B-H Elsevier, 2010.
22. LEADERMAN, H. **Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymers**. Washington, D. C.: The Textile Foundation, 1943.
23. LEE, E. H.; RADOK, J. R. M. The contact problem for viscoelastic bodies. **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 27, pp. 438-444, 1960.
24. LI, Z.-D.; LIU, H.-J.; ZHANG, R.-F.; YI, H. Time-temperature-stress superposition principle of PMMA's crazing damages under creep condition. **Journal of Central South University of Technology**. Vol. 14, p. 318-323, 2007.
25. LIMA, A.M.G.; STOPPA, M.H.; RADE, D.A. Finite element modeling and experimental characterization of beams and plates treated with constraining

- damping layers. **ABCM Symposium Series in Mecatronics**, Vol. 1, pp. 311-320, 2004.
26. LOPES, E. M. O.; BAVASTRI, C. A.; NETO, J. M. S.; ESPÍNDOLA, J. J. Caracterização dinâmica integrada de elastômeros por derivadas generalizadas. **III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM)**, Belém, Brasil, 2004.
27. MATLAB, versão R2007a. The MathWorks, 2007.
28. McTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C. Modelling of linear viscoelastic space structures. **Journal of Vibration and Acoustics**, Vol. 115, nº 1, pp. 103-113, 1993.
29. MOONAN, W. K.; TSCHOEGL, N. W. The effect of pressure on the mechanical properties of polymers. IV. Measurements in torsion. **Journal of Polymer Science, Polymer Physics**, Vol. 23, pp. 623-651, 1985.
30. O'REILLY, J. M. The effect of pressure on glass temperature and dielectric relaxation time of polyvinyl acetate. **Journal of Polymer Science**, Vol. 57, pp. 429-444, 1962.
31. PARK, S. W.; SCHAPERY, R. A. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I – a numerical method based on Prony Series. **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 36, pp. 1653-1675, 1999.
32. PRITZ, T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 195, pp. 103-115, 1996.
33. RANGEL-NAFAILE, C.; GARCÍA-REJÓN, A. Long-term shear modulus of short fibre-reinforced polyester through the time-temperature superposition principle. **Composites**, Vol. 16, nº 3, 1985.
34. SCHWARZL, F.; STAVERMAN, A. J. Time Temperature Dependence of Linear Viscoelastic Behavior. **Journal of Applied Physics**, Vol. 23, pp. 838, 1952.
35. SORVARI, J.; HÄMÄLÄINEN, J. Time integration in linear viscoelasticity – a comparative study. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, Vol. 14, nº 3, pp. 307-328, 2010.
36. SORVARI, J.; MALINEN, M. On the direct estimation of creep and relaxation functions. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, Vol. 11, nº 2, pp. 143-157, 2007.

37. SOUSSOU, J. E.; MOAVENZADEH, F.; GRADOWCZYK, M. H. Application of Prony Series to linear viscoelasticity. **Journal of Rheology**, Vol. 14, pp. 573-584, 1970.
38. TOBOLSKY, A. V. Stress relaxation studies of the viscoelastic properties of polymers. **Journal of Applied Physics**, Vol. 27, pp. 673, 1956.
39. TOBOLSKY, A. V.; Properties and Structure of Polymers. New York: John Wiley & Sons, 1962.
40. TSCHOEGL, N. W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
41. TSCHOEGL, N. W.; KNAUSS, W. G.; EMRI, I. The effect of temperature and pressure on the mechanical properties of Thermo- and/or Piezorheologically Simple Polymeric Materials in Thermodynamic Equilibrium – A Critical Review. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, Vol. 6, pp. 53-99, 2002.
42. WILLIAMS, M. L.; LANDEL, R. F.; FERRY, J. D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. **Journal of the American Chemical Society**, Vol. 77, n° 14, pp. 3701-3706, 1955.



## APÊNDICES

## APÊNDICE 1 – DADOS DE TESTE EXPERIMENTAL PARA TODAS AS TAXAS DE DEFORMAÇÃO E TEMPERATURAS DE -35°C, 23°C E 80°C

Nesta seção estão apresentados os dados experimentais para tensão e deformação fornecidos pelo fornecedor do material STAMAX para taxas de deformação de 0,0001, 0,01, 0,1 e 1 ((mm/mm)/s) e temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C.

Tabela A.1.1 – Dados experimentais para temperatura de -35°C e Taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000	0,000000
0,000250	1,757970
0,000500	3,502835
0,000750	5,234583
0,001000	6,953206
0,001249	8,658691
0,001499	10,351029
0,001748	12,030210
0,001998	13,696222
0,002247	15,349055
0,002497	16,988700
0,005236	34,151298
0,007968	49,702776
0,010693	63,629183
0,013212	75,078506
0,015184	83,065019
0,016365	87,435287
0,017349	90,834579

Tabela A.1.2 – Dados experimentais para temperatura de -35°C e Taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,814182200
0,000499875	3,615712054
0,000749719	5,404579398
0,000999500	7,180774068
0,001249219	8,944285900
0,001498876	10,695104729
0,001748471	12,433220390
0,001998003	14,158622720
0,002247473	15,871301554
0,002496880	17,571246729
0,005236267	35,427315077
0,007968170	51,727851947
0,010692630	66,459328622
0,013212331	78,705590025
0,015184135	87,351326751
0,016365354	92,131624462

Tabela A.1.3 – Dados experimentais para temperatura de -35°C e Taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,870857894
0,000499875	3,730443830
0,000749719	5,578748659
0,000999500	7,415763230
0,001249219	9,241478392
0,001498876	11,055884993
0,001748471	12,858973884
0,001998003	14,650735913
0,002247473	16,431161930
0,002496880	18,200242784
0,005236267	36,908734285
0,007968170	54,231174103
0,010692630	70,155382539
0,013212331	83,661452493
0,015184135	93,399564150

Tabela A.1.4 – Dados experimentais para temperatura de -35°C e  
Taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s)

Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,987723753
0,000499875	3,966242740
0,000749719	5,935549315
0,000999500	7,895635834
0,001249219	9,846494651
0,001498876	11,788118122
0,001748471	13,720498601
0,001998003	15,643628443
0,002247473	17,557500005
0,002496880	19,462105640
0,005236267	39,799030026
0,007968170	59,003676839
0,010692630	77,065870634
0,013212331	92,784735303

Tabela A.1.5 – Dados experimentais para temperatura de 23°C e  
Taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s)

Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)
0,000000	0,000000
0,000250	1,138259
0,000500	2,268033
0,000750	3,389315
0,001000	4,502098
0,001249	5,606374
0,001499	6,702138
0,001748	7,789383
0,001998	8,868101
0,002247	9,938286
0,002497	10,999931
0,005236	22,112459
0,007968	32,181811
0,010693	41,198953
0,013410	49,154851
0,016119	56,040471
0,016857	57,731429
0,018822	61,846778
0,021517	66,564739
0,022739	68,347039
0,024205	70,185319
0,024693	70,725000

Tabela A.1.6 – Dados experimentais para temperatura de 23°C e  
Taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,174656091
0,000499875	2,341119975
0,000749719	3,499385072
0,000999500	4,649444800
0,001249219	5,791292578
0,001498876	6,924921825
0,001748471	8,050325959
0,001998003	9,167498400
0,002247473	10,276432566
0,002496880	11,377121875
0,005236267	22,938661528
0,007968170	33,493017600
0,010692630	43,031430447
0,013409687	51,545140425
0,016119382	59,025387891
0,016857117	60,884942400
0,018821754	65,463413200
0,021516843	70,850456709
0,022739487	72,949311600
0,024204689	75,177758775
0,024692613	75,850000000
0,025667747	77,088304800

Tabela A.1.7 – Dados experimentais para temperatura de 23°C e  
Taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,211352763
0,000499875	2,415407100
0,000749719	3,612157088
0,000999500	4,801596800
0,001249219	5,983720313
0,001498876	7,158521700
0,001748471	8,325995038
0,001998003	9,486134400
0,002247473	10,638933863
0,002496880	11,784387500
0,005236267	23,897858513
0,007968170	35,113881600
0,010692630	45,424570588
0,013409687	54,822039300
0,016119382	63,298401563
0,016857117	65,449238400
0,018821754	70,845771200
0,021516843	77,456262038
0,022739487	80,149185600
0,024204689	83,121987900
0,024692613	84,050000000
0,025667747	85,811356800
0,026641931	87,446174400

Tabela A.1.8 – Dados experimentais para temperatura de 23°C e Taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	1,287021675
0,000499875	2,568083400
0,000749719	3,843180225
0,000999500	5,112307200
0,001249219	6,375459375
0,001498876	7,632631800
0,001748471	8,883819525
0,001998003	10,129017600
0,002247473	11,368221075
0,002496880	12,601425000
0,005236267	25,769282175
0,007968170	38,204006400
0,010692630	49,899009225
0,013409687	60,847702200
0,016119382	71,043496875
0,016857117	73,692633600
0,018821754	80,479804800
0,021516843	89,150037525
0,022739487	92,836022400
0,024204689	97,047606600
0,024692613	98,400000000

Tabela A.1.9 – Dados experimentais para temperatura de 80°C e Taxa de deformação de 0,0001 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000	0,000000
0,000250	0,740421
0,000500	1,475680
0,000750	2,205773
0,001000	2,930697
0,001249	3,650447
0,001499	4,365019
0,001748	5,074409
0,001998	5,778612
0,002247	6,477625
0,002497	7,171444
0,006479	17,562684
0,010445	26,606053
0,014396	34,284568
0,018331	40,581244
0,022251	45,479096
0,024693	47,822366
0,026155	48,961139

Tabela A.1.10 – Dados experimentais para temperatura de 80°C e Taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	0,807246506
0,000499875	1,608983070
0,000749719	2,405205258
0,000999500	3,195908637
0,001249219	3,981088775
0,001498876	4,760741238
0,001748471	5,534861595
0,001998003	6,303445411
0,002247473	7,066488254
0,002496880	7,823985692
0,006478966	19,186152268
0,010445258	29,109403049
0,014395880	37,575580947
0,018330957	44,566528876
0,022250609	50,064089750
0,024692613	52,733636837
0,026154957	54,050106483
0,027615167	55,151461894
0,028587457	55,765718085
0,030044121	56,506421988

Tabela A.1.11 – Dados experimentais para temperatura de 80°C e Taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	0,822800920
0,000499875	1,641201274
0,000749719	2,455197456
0,000999500	3,264785859
0,001249219	4,069962874
0,001498876	4,870724897
0,001748471	5,667068318
0,001998003	6,458989532
0,002247473	7,246484930
0,002496880	8,029550907
0,006478966	19,953261742
0,010445258	30,727342459
0,014395880	40,337018400
0,018330957	48,767514910
0,022250609	56,004057335
0,024692613	59,914026630
0,026154957	62,031871017
0,027615167	63,977660239
0,028587457	65,178882094
0,030044121	66,836181302
0,031983046	68,774905590



Tabela A.1.12 – Dados experimentais para temperatura de 80°C e Taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s)

<b>Deformação (mm/mm)</b>	<b>Tensão (MPa)</b>
0,000000000	0,000000000
0,000249969	0,833061686
0,000499875	1,663745346
0,000749719	2,492048886
0,000999500	3,317970211
0,001249219	4,141507227
0,001498876	4,962657838
0,001748471	5,781419949
0,001998003	6,597791467
0,002247473	7,411770295
0,002496880	8,223354340
0,006478966	20,881299129
0,010445258	32,917062763
0,014395880	44,322064974
0,018330957	55,087725496
0,022250609	65,205464063
0,024692613	71,196215278
0,026154957	74,666700407
0,027615167	78,043658311
0,028587457	80,242780567
0,030044121	83,462854263

## APÊNDICE 2 – RESULTADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO MVE CONSIDERANDO TEMPERATURA CONSTANTE E INFLUÊNCIA DA PRESSÃO COM LIMITE ALTERNATIVO

Nesta seção são apresentados os valores resultantes para um limite alternativo da Pressão de referência, mais próximo do limite físico considerando os resultados experimentais, com Pressão de referência  $P_0: 0 \leq P_0 \leq P_{med}$ .

Tabela A.2.1 - Resultado do processo de identificação para a temperatura de -35°C.

Taxa de Deformação (mm/mm/s)		processo $\dot{\epsilon} = 0,0001$	identificação $\dot{\epsilon} = 0,01$	alternativo $\dot{\epsilon} = 0,1$	le -3ε $\dot{\epsilon} = 1$	Ajuste global	
$\dot{\epsilon}_1$ (s)	$10^{-2}$	$E_1$ (MPa)	11	811,0665	193,4073	0,0	0,0
$\dot{\epsilon}_2$ (s)	0,07197	$E_2$ (MPa)	576,6	0,0	0,0	65,6648	440,3
$\dot{\epsilon}_3$ (s)	0,51795	$E_3$ (MPa)	0,0	0,0	92,8018	127,9094	0,0
$\dot{\epsilon}_4$ (s)	3,72759	$E_4$ (MPa)	0,0	207,4769	267,7091	150,9229	871,3
$\dot{\epsilon}_5$ (s)	26,82696	$E_5$ (MPa)	398,6	365,1911	304,9558	225,5274	0,0
$\dot{\epsilon}_6$ (s)	193,06977	$E_6$ (MPa)	675,3	473,8395	391,8396	178,2301	0,0
$\dot{\epsilon}_7$ (s)	1389,49549	$E_7$ (MPa)	1086,3	489,6474	402,3294	82,0013	0,0
$\dot{\epsilon}_8$ (s)	$10^4$	$E_8$ (MPa)	1671,3	990,5730	710,0237	573,6803	1471,5
E (MPa)			3227,7	4752,8	5334,3	6571,2	5083,9
σ (MPa)			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
E (MPa)			0,0325	11,0039	12,7457	10,1322	0,0
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,0623	3,2471	0,8265	0,7361	2,7131
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			7,4532E-05	8,0573E-05	1,0036E-06	4,0293E-07	1,2180

Tabela A.2.2 - Resultado do processo de identificação para a temperatura de 23°C.

Taxa de Deformação (mm/mm/s)		processo $\dot{\epsilon} = 0,0001$	identificação $\dot{\epsilon} = 0,01$	atenuação $\dot{\epsilon} = 0,1$	le 23°C $\dot{\epsilon} = 1$	Ajuste global	
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ (a)	$10^{-2}$	$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ (MPa)	589,9	528,5	19,3227	77,9162	0,0
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_2}$ (a)	0,07197	$\frac{\sigma_1}{\epsilon_2}$ (MPa)	125,3	0,0	57,3641	174,5730	0,0
$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ (a)	0,51795	$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ (MPa)	0,0	0,0	210,6208	161,2045	480,0
$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$ (a)	3,72759	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$ (MPa)	0,0	116,0	270,1276	233,6858	0,0
$\frac{\sigma_4}{\epsilon_4}$ (a)	26,82696	$\frac{\sigma_4}{\epsilon_4}$ (MPa)	335,0	300,7	319,3789	226,9681	0,0
$\frac{\sigma_5}{\epsilon_5}$ (a)	193,06977	$\frac{\sigma_5}{\epsilon_5}$ (MPa)	580,6	502,7	418,4786	284,5532	813,9
$\frac{\sigma_6}{\epsilon_6}$ (a)	1389,49549	$\frac{\sigma_6}{\epsilon_6}$ (MPa)	2397,3	553,6	438,8727	284,0771	0,0
$\frac{\sigma_7}{\epsilon_7}$ (a)	$10^4$	$\frac{\sigma_7}{\epsilon_7}$ (MPa)	0,0	1490,1	919,7985	493,8387	1043,3
$\frac{\sigma_8}{\epsilon_8}$ (a)		$\frac{\sigma_8}{\epsilon_8}$ (MPa)					
E (MPa)			1294,9	1781,3	2228,9	3217,3	3082,1
C			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ (MPa)			0,0	14,4325	6,0311	4,2601	23,17
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,6618	0,5844	7,8055	3,2897	13,3010
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			0,0014	4,5169E-04	2,8985E-04	2,9264E-05	5,8059

Tabela A.2.3 - Resultado do processo de identificação para a temperatura de 80°C.

Taxa de Deformação (mm/mm/s)		processo $\dot{\epsilon} = 0,0001$	identificação $\dot{\epsilon} = 0,01$	atenuação $\dot{\epsilon} = 0,1$	le 80°C $\dot{\epsilon} = 1$	Ajuste global	
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ (a)	$10^{-2}$	$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ (MPa)	1170,2	91,9	674,5495	49,9092	60,2801
$\frac{\sigma_1}{\epsilon_2}$ (a)	0,07197	$\frac{\sigma_1}{\epsilon_2}$ (MPa)	2,6	0,0	0,0	102,1039	80,6963
$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ (a)	0,51795	$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ (MPa)	0,0	105,0	0,0	124,3923	20,6481
$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$ (a)	3,72759	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$ (MPa)	0,0	247,1	176,0181	165,9190	0,0
$\frac{\sigma_4}{\epsilon_4}$ (a)	26,82696	$\frac{\sigma_4}{\epsilon_4}$ (MPa)	156,4	252,9	205,1470	161,1502	272,7577
$\frac{\sigma_5}{\epsilon_5}$ (a)	193,06977	$\frac{\sigma_5}{\epsilon_5}$ (MPa)	309,6	458,9	340,3541	282,9713	71,1621
$\frac{\sigma_6}{\epsilon_6}$ (a)	1389,49549	$\frac{\sigma_6}{\epsilon_6}$ (MPa)	350,2	328,3	308,9649	63,2925	946,6132
$\frac{\sigma_7}{\epsilon_7}$ (a)	$10^4$	$\frac{\sigma_7}{\epsilon_7}$ (MPa)	994,0	1681,5	854,9152	21,4025	0,0
$\frac{\sigma_8}{\epsilon_8}$ (a)		$\frac{\sigma_8}{\epsilon_8}$ (MPa)					
E (MPa)			1162,4	188,5835	1404,2	2368,3	1980,3
C			0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ (MPa)			0,0	3,45	11,9910	4,5817	20,0870
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			0,0217	2,0341	4,5474	1,8148	6,0613
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			1,7728E-04	1,7159E-04	2,1076E-04	3,1931E-06	3,0118

### APÊNDICE 3 – RESULTADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO MVE CONSIDERANDO INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA COM LIMITE ALTERNATIVO

Nesta seção são apresentados os valores resultantes para um limite alternativo da temperatura de referência, mais próximo do limite físico considerando os resultados experimentais, com Temperatura de referência  $T_s$ :  $-35,0 \leq T_s \leq 80,0$ .

Tabela A.3.1 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de  $-35^\circ\text{C}$ ,  $23^\circ\text{C}$  e  $80^\circ\text{C}$  e para taxa de deformação de  $0,0001$  ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		para $\dot{\epsilon} = 0,0001$
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} (\dot{\epsilon})$	$10^{-2}$	$\frac{E_1^{(MVE)}}{E_1^{(MVE)}} (a)$ 124,4
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2} (\dot{\epsilon})$	0,07197	$\frac{E_2^{(MVE)}}{E_2^{(MVE)}} (a)$ 642,8
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_3} (\dot{\epsilon})$	0,51795	$\frac{E_3^{(MVE)}}{E_3^{(MVE)}} (a)$ 370,2
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_4} (\dot{\epsilon})$	3,72759	$\frac{E_4^{(MVE)}}{E_4^{(MVE)}} (a)$ 0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_5} (\dot{\epsilon})$	26,82696	$\frac{E_5^{(MVE)}}{E_5^{(MVE)}} (a)$ 0,0
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_6^{(MVE)}}{E_6^{(MVE)}} (a)$ 0,0
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_7^{(MVE)}}{E_7^{(MVE)}} (a)$ 0,0
$\frac{\epsilon_8}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_8^{(MVE)}}{E_8^{(MVE)}} (a)$ 4662,6
$E_\infty$ (MPa)		2707,8
$C_1$		4,3115
$C_2$		-27,3010
$T_s$ ( $^\circ\text{C}$ )		-13,7637
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		40,4154
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		39,6591

Tabela A.3.2 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,01 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		para a 0,01 $\dot{\epsilon} = 0,01$
$\frac{\epsilon_1}{E_1} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{\epsilon_1}{E_1} (MPa)$ 761,5
$\frac{\epsilon_1}{E_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{\epsilon_1}{E_2} (MPa)$ 524,0
$\frac{\epsilon_2}{E_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{\epsilon_2}{E_3} (MPa)$ 343,6
$\frac{\epsilon_3}{E_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{\epsilon_3}{E_4} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_4}{E_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{\epsilon_4}{E_5} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_5}{E_6} (s)$	193,06977	$\frac{\epsilon_5}{E_6} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_6}{E_7} (s)$	1389,49549	$\frac{\epsilon_6}{E_7} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_7}{E_8} (s)$	$10^4$	$\frac{\epsilon_7}{E_8} (MPa)$ 5130,7
$E_\infty$ (MPa)		2626,5
$C_1$		6,8289
$C_2$		-18,0176
$T_s$ (°C)		-11,5966
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		64,3505
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		64,1089

Tabela A.3.3 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 0,1 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		para a 0,1 ((mm/mm)/s) $\dot{\epsilon} = 0,1$
$\frac{\epsilon_1}{E_1} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{\epsilon_1}{E_1} (MPa)$ 72,0
$\frac{\epsilon_1}{E_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{\epsilon_1}{E_2} (MPa)$ 914,6
$\frac{\epsilon_2}{E_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{\epsilon_2}{E_3} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_3}{E_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{\epsilon_3}{E_4} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_4}{E_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{\epsilon_4}{E_5} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_5}{E_6} (s)$	193,06977	$\frac{\epsilon_5}{E_6} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_6}{E_7} (s)$	1389,49549	$\frac{\epsilon_6}{E_7} (MPa)$ 0,0
$\frac{\epsilon_7}{E_8} (s)$	$10^4$	$\frac{\epsilon_7}{E_8} (MPa)$ 5720,1
$E_\infty$ (MPa)		2635,4
$C_1$		7,3541
$C_2$		-16,7079
$T_s$ (°C)		-2,3475
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )		64,3945
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )		63,9858

Tabela A.3.4 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para taxa de deformação de 1 ((mm/mm)/s).

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		para as 1 ((mm/mm)/s) $\dot{\epsilon} = 1$	
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1^{(a)}}{E_2^{(ME)}}$	10,0
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1^{(a)}}{E_2^{(ME)}}$	291,4
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2^{(ME)}}{E_3^{(ME)}}$	250,4
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3^{(ME)}}{E_4^{(ME)}}$	1572,6
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4^{(ME)}}{E_5^{(ME)}}$	0,0
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5^{(ME)}}{E_6^{(ME)}}$	0,0
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6^{(ME)}}{E_7^{(ME)}}$	0,0
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7^{(ME)}}{E_8^{(ME)}}$	4102,3
$E_{\infty}$ (MPa)			1777,7
$C_1$			6,3074
$C_2$			-37,6175
$T_s$ (°C)			-14,6177
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			46,7234
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			46,3972

Tabela A.3.5 - Resultado do processo de identificação para as temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C e para todas as taxas de deformação.

Taxa de Deformação ((mm/mm)/s)		Ajuste Global	
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	$10^{-2}$	$\frac{E_1^{(a)}}{E_2^{(ME)}}$	995,2
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\phi)$	0,07197	$\frac{E_1^{(a)}}{E_2^{(ME)}}$	94,3
$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} (\phi)$	0,51795	$\frac{E_2^{(ME)}}{E_3^{(ME)}}$	698,1
$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} (\phi)$	3,72759	$\frac{E_3^{(ME)}}{E_4^{(ME)}}$	378,9
$\frac{\epsilon_4}{\epsilon_5} (\phi)$	26,82696	$\frac{E_4^{(ME)}}{E_5^{(ME)}}$	272,8
$\frac{\epsilon_5}{\epsilon_6} (s)$	193,06977	$\frac{E_5^{(ME)}}{E_6^{(ME)}}$	393,4
$\frac{\epsilon_6}{\epsilon_7} (s)$	1389,49549	$\frac{E_6^{(ME)}}{E_7^{(ME)}}$	459,4
$\frac{\epsilon_7}{\epsilon_8} (s)$	$10^4$	$\frac{E_7^{(ME)}}{E_8^{(ME)}}$	2346,0
$E_{\infty}$ (MPa)			2642,6
$C_1$			3,5673
$C_2$			-40,8290
$T_s$ (°C)			-17,8290
Erro GA (MPa <sup>2</sup> )			79,2138
Erro mínimo (MPa <sup>2</sup> )			60,3349

**ANEXOS**

## ANEXO 1- COMPOSIÇÃO DO MATERIAL STAMAX

Neste anexo são apresentadas informações sobre a composição do material STAMAX 30YM240 e algumas de suas propriedades mecânicas, como fornecidas pelo fornecedor/produztor.



### SABIC® STAMAX 30YM240 PP LGF reinforced for Automotive injection moulding

#### Description:

SABIC® STAMAX 30YM240 is a 30% long glass fiber reinforced grade. The glass fibres are chemically coupled to the PP matrix, resulting in high stiffness and strength.

The pellet size of SABIC® STAMAX 30YM240 is 12 mm.

IMDS ID: 16496906

Typical values			Revision 20091109
Properties	Unit (SI)	Values	Testmethods
<b>Polymer properties</b>			
<b>Density</b>	kg/m <sup>3</sup>	1120	ISO 1183
<b>Glass fibre content</b>	%	30	ISO 3451
<b>Coeff. of linear thermal expansion</b>			ASTM D 696
23 °C to 80 °C	µm/mK	41	
-30 °C to 30 °C	µm/mK	51	
<b>Mechanical properties</b> <sup>1)</sup>			
<b>Tensile modulus</b>			ISO 527/1B
at 23 °C	MPa	6650	
at 80 °C	MPa	4600	
at 120 °C	MPa	3500	
<b>Tensile strength</b>			ISO 527/1B
at 23 °C	MPa	110	
at 80 °C	MPa	70	
at 120 °C	MPa	51	
<b>Tensile elongation at break</b>			ISO 527/1B
at 23 °C	%	2,3	
<b>Flexural modulus</b>			ISO 178
at 23 °C	MPa	5900	
at 80 °C	MPa	4200	
<b>Flexural strength</b>			ISO 178
at 23 °C	MPa	147	
at 80 °C	MPa	86	
<b>Charpy impact notched</b>			ISO 179/1eA
at 23 °C	kJ/m <sup>2</sup>	19	
at -30 °C	kJ/m <sup>2</sup>	25	
<b>Charpy impact unnotched</b>			ISO 179/1eU
at 23 °C	kJ/m <sup>2</sup>	52	
at -30 °C	kJ/m <sup>2</sup>	36	
<b>Falling dart</b>			ISO 6603-2
total energy at 23 °C	J/mm	5,8	
total energy at -40 °C	J/mm	-	
<b>Thermal properties</b>			
<b>Heat deflection temperature</b>			ISO 75/A
at 1.80 MPa (HDT/A)	°C	156	