UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Lilian Cordeiro Brambila

GRUPOIDES SIMPLÉTICOS E GEOMETRIA DE POISSON

Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Lilian Cordeiro Brambila

GRUPOIDES SIMPLÉTICOS E GEOMETRIA DE POISSON

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Cristián Ortiz González.

Curitiba, 2013.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação da candidata **Lilian Cordeiro Brambila** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 11 de março de 2013.

Prof. Dr. Cristián Andrés Gonzaléz Ortiz
Presidente

Prof. Dr. Alejandro Cabrera
Titular

Prof. Dr. Olivier Brahic
Titular

Aos meus pais, pelo apoio e amor incondicionais!

Agradecimentos

Nestas linhas espero expressar a gratidão que sinto por tantas pessoas que passaram pela minha vida e direta ou indiretamente me influenciaram a seguir estudando.

Começo agradecendo à CAPES pelo apoio financeiro e ao PPGMA pela oportunidade de seguir com o mestrado.

Ao meu orientador, o professor Cristián Ortiz. Sua preocupação foi essencial para que este trabalho fosse concluído. Posso dizer que realmente aprendi muito devido a sua dedicação e seriedade em fazer um bom trabalho.

Aos professores Eduardo Hoefel e Alexandre Kirilov que durante toda a minha graduação me motivaram a seguir em frente.

A todos os meus amigos e colegas. Aqui cito pessoas essenciais: Pamela, Minero, Físico, Kelly, May, Fernando e Cris. Pessoas que tornaram essa jornada mais leve.

Ao Ricardo, pelos maravilhosos anos que já vivemos e pelos que estão por vir. Mesmo morando a alguns quilômetros de distância, sempre esteve presente, me apoiando e ajudando a seguir em frente. Certamente eu não chegaria até aqui sem toda a compreensão, a alegria que me proporciona e o amor que dedica a mim.

Finalmente, aos meus sobrinhos, Maria Luiza e João Vitor, que ainda tão pequenos me motivam a seguir em frente, sua alegria de criança me renova. Ao meu irmão Ricardo, um grande amigo e por quem tenho um profundo amor. E mais importante, meus pais, pessoas essenciais em minha vida. Se hoje tenho algo bom devo a eles, que me dão ótimos exemplos de amor e dedicação. Sinto-me imensamente grata por todo seu esforço em realizar meus sonhos e se abdicarem do que for necessário para me tornar uma pessoa melhor e feliz. Não existem palavras suficientes que expressem todo o amor e gratidão que tenho por ambos.

"Sempre em frente, não temos tempo a perder."'

Renato Russo

Resumo

Nesta dissertação estudamos o conceito de grupoide simplético e sua relação com a geometria de Poisson. Seguindo a referência [3], mostramos que a base M de um grupoide simplético $(\mathscr{G}, \omega)$ herda uma única estrutura de Poisson π de forma que o algebroide de Lie $A(\mathscr{G})$ de $\mathscr{G}$ é isomorfo ao algebroide de Lie T^*M canonicamente associado à variedade de Poisson (M, π). Posteriormente, introduzimos o conceito de grupoide G-Hamiltoniano e mostramos que o espaço de órbitas de uma ação de Poisson numa variedade de Poisson integrável, é também integrável como variedade de Poisson e, é possível construir um grupoide simplético que integra esta variedade de Poisson via redução de Marsden-Weinstein para grupoides G-Hamiltonianos. Finalmente, relacionamos nossos resultados com os obtidos por Mikami e Weinstein em [20].

Palavras-chave: *ações Hamiltonianas, algebroides de Lie, variedades de Poisson, grupoides simpléticos.*

Abstract

In this dissertation we study the notion of symplectic groupoid and its relation with Poisson geometry. Following [3], we show that the base M of a symplectic groupoid $(\mathscr{G},\omega)$ inherits a unique Poisson structure π in such a way that the Lie algebroid $A(\mathscr{G})$ of $\mathscr{G}$ is canonically isomorphic to the Lie algebroid T^*M associated to the Poisson manifold (M,π). Then, we introduce G-Hamiltonian groupoids, proving the main result of this work which says that the orbit space M/G of a Poisson action on an integrable Poisson manifold M, is always integrable, when M/G is smooth. Moreover, a symplectic groupoid integrating M/G is constructed via Marsden-Weinstein reduction for G-Hamiltonian groupoids. Finally, we relate our results with the ones obtained by Mikami and Weinstein in [20].

Keywords: *Hamiltonian actions, Lie algebroids, Poisson manifolds, symplectic groupoids.*

Sumário

Introdução

É conhecido que na formulação Hamiltoniana da mecânica clássica, os objetos geométricos que representam espaços de fase correspondem a variedades simpléticas. Uma **variedade simplética** é um par (M,ω), onde M é uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma 2-forma em M que é fechada e não-degenerada. Similarmente, o estudo de sistemas mecânicos com simetrias se traduz matematicamente numa ação de um grupo de Lie G numa variedade simplética (M,ω), preservando a estrutura simplética $\omega \in \Omega^2(M)$. Se G for compacto e a ação de G em M é livre, então o espaço de órbitas M/G é uma variedade diferenciável, mas não necessariamente uma variedade simplética. De fato, M/G herda uma *estrutura de Poisson*.

De forma concreta, uma **variedade de Poisson** é um par $(N,\{\cdot,\cdot\})$, onde N é uma variedade diferenciável e $\{\cdot,\cdot\}$ é uma estrutura de Poisson na álgebra de funções suaves $C^\infty(N)$. Isto é,

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(N) \times C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(N)$$

é um colchete de Lie, tal que, para cada $f \in C^\infty(N)$, tem-se que $\{f,\cdot\} \in \mathrm{Der}(C^\infty(N))$ é uma derivação na álgebra $C^\infty(N)$. Por um lado, um resultado clássico garante que existe uma correspondência 1-1 entre grupos de Lie simplesmente conexos e álgebras de Lie de dimensão finita. Por outro lado, a álgebra de funções $(C^\infty(N),\{\cdot,\cdot\})$ de uma variedade de Poisson é naturalmente uma álgebra de Lie (de dimensão infinita). Uma questão natural é a seguinte:

Pergunta 1: *Qual é o objeto global associado à álgebra de Lie* $(C^\infty(N),\{\cdot,\cdot\})$*?*

Esta dissertação trata esta questão. Embora a álgebra de Lie $(C^\infty(N),\{\cdot,\cdot\})$ tenha dimensão infinita, o fato que $\{f,\cdot\} \in \mathrm{Der}(C^\infty(N))$ é uma derivação, para cada $f \in C^\infty(N)$, permite associar à variedade de Poisson $(N,\{\cdot,\cdot\})$ um objeto geométrico de dimensão finita chamado algebroide de Lie.

O conceito de algebroide de Lie unifica as noções de álgebra de Lie, folheação regular e fibrado tangente, e corresponde à versão infinitesimal do conceito de grupoide de Lie. Desta forma, a pergunta 1 pode ser reformulada da seguinte maneira:

Pergunta 2: *Qual a geometria global associada ao algebroide de Lie de uma variedade de Poisson?*

Neste trabalho, veremos que a versão global de uma variedade de Poisson é um **grupoide simplético**. Um grupoide simplético é um grupoide de Lie munido de uma forma simplética compatível com a multiplicação de grupoide, veja [3]. Grupoides simpléticos foram introduzidos de forma independente por A. Weinstein e M. V. Karasev em conexão com problemas de quantização. *Grosso modo*, grupoides simpléticos estão para grupos de Lie, como variedades de Poisson estão para algebroides de Lie.

O objetivo principal desta dissertação consiste em explicar em que sentido variedades de Poisson correspondem ao análogo infinitesimal de grupoides simpléticos. Para tal, usamos a referência [3]. Em particular, estamos interessados em descrever grupoides simpléticos associados a variedades de Poisson da forma M/G, onde M é uma variedade de Poisson e G é um grupo de simetrias de M.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

O capítulo 1, cujas principais referências são [1] e [6], consiste numa introdução à Geometria simplética. Definimos variedades simpléticas e apresentamos os exemplos principais destes objetos. Em seguida, estudamos morfismos entre variedades simpléticas e finalizamos o capítulo com o estudo de espaços G-Hamiltonianos.

No capítulo 2, usamos principalmente as referências [5], [8], apresentamos os conceitos de grupoide de Lie e algebroide de Lie. Também explicamos de forma detalhada a construção do funtor de Lie entre a categoria dos grupoides de Lie e a categoria dos algebroides de Lie.

No capítulo 3, usamos [8] e [15], são apresentados os conceitos fundamentais da geometria de Poisson. Explicamos a relação entre estruturas de Poisson e bivetores de Poisson e, também estudamos os exemplos principais destas estruturas e o conceito de morfismo de Poisson. Finalmente, mostramos o Teorema de Libermann sobre estruturas de

Poisson na base de uma submersão cujo espaço total é uma variedade simplética.

O capítulo 4, cujas referências foram [3], [8] e [24], é a parte central desta dissertação. Explicamos em detalhe a relação entre grupoides simpléticos e variedades de Poisson, seguindo a referência [3]. Mostramos que toda variedade de Poisson $(N, \{\cdot,\cdot\})$ induz canonicamente uma estrutura de algebroide de Lie no fibrado cotangente T^*N. Terminamos este capítulo com um resultado devido a Coste-Dazord-Weinstein [3], que mostra que a base N de um grupoide simplético $(\mathscr{G}, \omega) \rightrightarrows N$ herda uma única estrutura de Poisson de forma que o algebroide de Lie de $\mathscr{G}$ é isomorfo ao algebroide de Lie T^*N determinado por $(N, \{\cdot,\cdot\})$.

O capítulo 5 apresenta os resultados principais deste trabalho. Introduzimos o conceito de grupoide G-Hamiltoniano, isto é, grupoides simpléticos munidos de uma ação Hamiltoniana compatível com a estrutura de grupoide. Mostramos que o espaço de órbitas de uma ação de Poisson numa variedade de Poisson integrável, é também integrável como variedade de Poisson e, é possível construir um grupoide simplético que integra esta variedade de Poisson via redução de Marsden-Weinstein para grupoides G-Hamiltonianos. Finalmente, relacionamos nossos resultados com os obtidos por Mikami e Weinstein em [20].

Capítulo 1

Geometria Simplética

Neste capítulo fizemos uma introdução às variedades simpléticas. Começamos definindo e dando alguns exemplos de variedades simpléticas. Em seguida estudamos morfismos entre variedades simpléticas e subvariedades. Finalmente, estudamos simetrias de variedades simpléticas e apresentamos o Teorema de Marsden - Weinstein sobre quocientes simpléticos.

1.1 Variedades Simpléticas

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma em M. Dizemos que ω é **não-degenerada** se, para todo $p \in M$, vale o seguinte: se $\omega_p(u, v) = 0$ para todo $u \in T_pM$, então $v = 0$, $v \in T_pM$.

Definição 1.1. *Uma **variedade simplética** é um par (M, ω), onde M é uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma forma simplética. Isto é, ω é uma 2 - forma fechada e não-degenerada.*

Observação 1.1. Se (M, ω) é uma variedade simplética e $p \in M$, então a forma bilinear $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é não-degenerada e anti-simétrica. Com isto, se A é a matriz associada a ω, então A é não-singular e

$$(-1)^n \det(A) = \det(-A) = \det(A^T) = \det(A).$$

Decorre do anterior que toda variedade simplética tem dimensão par.

Vamos agora exibir alguns exemplos de variedades simpléticas.

Exemplo 1.1. *Seja $M=\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$. Considere a 2-forma*

$$\omega_0=\sum_{j=1}^{n} dx_j\wedge dy_j.$$

Afirmamos que $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ é uma variedade simplética. Note que ω_0 é fechada, de fato é exata

$$\omega_0=d\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\,dy_j\right).$$

Vejamos que ω_0 é não-degenerada. Seja $v\in T_pM$, tal que $\omega_0(u,v)=0$, para todo $u\in T_pM$. Vamos mostrar que $v=0$. Tome $u=\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_j}$, $j=1,\cdots,n$, então

$$dx_j(v)=\omega_0\left(\frac{\partial}{\partial y_j},v\right)=0=\omega_0\left(\frac{\partial}{\partial x_j},v\right)=dy_j(v)\qquad j=1,\cdots,n.$$

Ou seja, $dx_j(v)=dy_j(v)=0$, para todo $j=1,\cdots,n$. Isto é, $v=0$. Portanto, ω_0 é uma forma simplética em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2. *Considere o espaço $\mathbb{C}^n=\{(z_1,\cdots,z_n)\mid z_j\in\mathbb{C}, j=1,\cdots,n\}$. Usando a identidade $\mathbb{R}^{2n}\simeq\mathbb{C}^n$ dada por $(x,y)\mapsto x+iy$, a forma simplética do exemplo anterior induz uma forma simplética em $\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$ dada por*

$$\omega_0=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j\wedge d\bar{z}_j.$$

Segue que $\mathbb{C}^n$ é naturalmente uma variedade simplética.

Exemplo 1.3. *Sejam $(M_1,\omega_1),(M_2,\omega_2)$ variedades simpléticas. Considere $M=M_1\times M_2$ a variedade produto com as projeções canônicas*

$$\mathrm{pr}_j: M\to M_j\qquad j=1,2.$$

Então $\omega:=\mathrm{pr}_1^*\omega_1+\mathrm{pr}_2^*\omega_2$ define uma forma simplética em M. Observe que ω é fechada, pois

$$d\omega=\mathrm{pr}_1^*d\omega_1+\mathrm{pr}_2^*d\omega_2=0,$$

onde usamos o fato de ω_1,ω_2 serem fechadas. Vejamos que ω é não-degenerada.

Sejam $(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in T_pM$, *sendo* $p=(p_1,p_2)\in M_1\times M_2$, *então*

$$\begin{aligned}\omega_p((u_1,u_2),(v_1,v_2)) &= (\mathrm{pr}_1^*\omega_1)_{p_1}((u_1,u_2),(v_1,v_2))+(\mathrm{pr}_2^*\omega_2)_{p_2}((u_1,u_2),(v_1,v_2))\\ &= (\omega_1)_{p_1}(u_1,v_1)+(\omega_2)_{p_2}(u_2,v_2).\end{aligned}$$

Suponha que (v_1,v_2) *é tal que, para todo* $(u_1,u_2)\in T_pM$, *tem-se*

$$\omega_p((u_1,u_2),(v_1,v_2))=(\omega_1)_{p_1}(u_1,v_1)+(\omega_2)_{p_2}(u_2,v_2)=0.$$

Então, tomando $u_1=0$ *e* $u_2\neq 0$ *e usando o fato de* ω_2 *ser não-degenerada, segue que* $v_2=0$. *De modo análogo, segue que* $v_1=0$. *Portanto,* $\omega=\mathrm{pr}_1^*\omega_1+\mathrm{pr}_2^*\omega_2$ *define uma forma simplética em* $M=M_1\times M_2$.

Exemplo 1.4 (Fibrado Cotangente)**.** *Seja* M *uma variedade de dimensão n com coordenadas* $(x_1,\cdots,x_n)$. *O fibrado cotangente de* M *é definido por,*

$$T^*M:=\coprod_{p\in M}T_p^*M.$$

Considere a projeção canônica:

$$\begin{array}{rcccl}\mathrm{pr} & : & T^*M & \longrightarrow & M\\ & & \xi_p & \longmapsto & p.\end{array}$$

Para cada $\xi_p\in T_p^*M$, *considere a derivada*

$$D\mathrm{pr}(\xi_p):T_{\xi_p}(T_p^*M)\longrightarrow T_pM.$$

Definimos a 1***-forma tautológica*** $\alpha\in\Omega^1(T^*M)$ *por,*

$$\alpha_{\xi_p}(v):=\xi(D\mathrm{pr}(\xi_p)(v)),\qquad \xi\in T^*M,\, v\in T_{\xi_p}(T^*M). \tag{1.1}$$

A partir disso, definimos a 2***-forma canônica*** $\omega_{\mathrm{can}}\in\Omega^2(T^*M)$, *por*

$$\omega_{\mathrm{can}} := -d\alpha. \tag{1.2}$$

Proposição 1.1. *A* 2*-forma* $\omega_{\mathrm{can}}\in\Omega^2(T^*M)$ *é uma forma simplética.*

Demonstração: *De* (1.2) *segue que* ω_{can} *é fechada. Vejamos que* ω_{can} *é não-degenerada.*

Considere coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ *em* M. *Isto induz coordenadas locais* $(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ *em* T^*M, *onde cada ponto* $\xi_p \in T_p^*M$ *tem a expressão*

$$\xi_p = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j(p).$$

Considere a seguinte base para $T_{\xi_p}(T^*M)$:

$$B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right\}.$$

Então, temos a seguinte expressão local para a 1*-forma tautológica*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j.$$

Localmente $\alpha = \sum_{j=1}^{n}(a_j dx_j) + \sum_{j=1}^{n}(b_j d\xi_j)$, *onde* $a_j, b_j \in C^\infty(M)$ *serão determinadas a seguir. Note que,*

$$D\mathrm{pr}(\xi_p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\xi_p}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \quad \text{e} \quad D\mathrm{pr}(\xi_p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right|_{\xi_p}\right) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} a_j(\xi_p) &= \alpha_{\xi_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\xi_p}\right) = \xi\left(D\mathrm{pr}(\xi_p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\xi_p}\right)\right) \\ &= \xi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \xi_j(\xi_p). \end{aligned}$$

Ou seja, $\xi_j = \alpha_j$, *para todo* $j = 1, \cdots, n$. *De modo análogo, temos que* $\beta_j = 0$, *para todo* $j = 1, \cdots, n$. *Portanto,*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j.$$

Logo,

$$\omega_{\text{can}} := -d\alpha = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j.$$

Ou seja, localmente, ω_{can} *é a forma simplética canônica em* $\mathbb{R}^{2n}$. *Portanto* ω_{can} *é uma* *forma simplética em T^*M.* □

Seja M uma variedade diferenciável. Denotamos por $\Omega^k(M)$ o espaço das k-formas em M. Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos os seguintes operadores:

1. **Contração**:
$$\begin{array}{rcccc} \imath_X & : & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(M) \\ & & \eta & \longmapsto & \eta(X, \cdot, \cdots, \cdot) \end{array}$$

2. **Derivada de Lie**: Seja $\varphi_t : M \to M$ o fluxo de X, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com ϵ suficientemente pequeno. Então,
$$\begin{array}{rcccc} \mathfrak{L}_X & : & \Omega^k(M) & \longrightarrow & \Omega^k(M) \\ & & \eta & \longmapsto & \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* \eta. \end{array}$$

A derivada de Lie e o operador de contração estão relacionados através da **Fórmula de Cartan**:

$$\mathfrak{L}_X \eta = d(\imath_X \eta) + \imath_X(d\eta). \tag{1.3}$$

Para uma demonstração da fórmula de Cartan veja [23].

Exemplo 1.5 (Órbitas Coadjuntas)**.** *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A representação coadjunta de G em $\mathfrak{g}^*$ é dada por*

$$\begin{array}{rcccccc} k: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*) & & & \\ & g & \mapsto & k_g : & \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & & & & \xi & \mapsto & (\mathrm{Ad}_{g^{-1}})^* \circ \xi, \end{array}$$

Seja $\xi \in \mathfrak{g}^*$ e considere $\mathcal{O}_\xi$ a órbita coadjunta que passa por ξ. Então,

$$T_\xi \mathcal{O}_\xi = \left\{ \mathrm{ad}_u^* \xi ; u \in \mathfrak{g} \right\}.$$

De fato, sejam $\xi \in \mathfrak{g}^*$ e $u \in \mathfrak{g}$. Considere a seguinte aplicação

$$\xi(t) = k_{g(t)}(\xi),$$

sendo, $g : [0,1] \to G$ tal que $g(0) = e \in G$ e $g'(0) = u$. Então $\xi(t)$ é uma curva em $\mathscr{O}_\xi$ que satisfaz $\xi(0) = \xi$. Sendo assim,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \xi(t), v\rangle = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}(t)}(v)\rangle.$$

Logo,

$$\langle \xi'(0), v\rangle = -\langle \xi, \mathrm{ad}_u(v)\rangle = -\langle \mathrm{ad}_u^*(\xi), v\rangle$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$. Portanto $\xi'(0) = -\mathrm{ad}_u^*(\xi)$ e segue que

$$T_\xi \mathscr{O}_\xi = \{\mathrm{ad}_u^* \xi; u \in \mathfrak{g}\}.$$

A partir disso, definimos uma forma bilinear, anti-simétrica em $T_\xi \mathscr{O}_\xi$, por

$$\omega_\xi(\mathrm{ad}_u^*(\xi), \mathrm{ad}_v^*(\xi)) = \langle \xi, [u, v]\rangle. \tag{1.4}$$

Desta maneira, obtemos uma 2-forma em $\mathscr{O}_\xi$.

Proposição 1.2. *Seja $\delta \in \mathscr{O}_\xi$, arbitrário. Então $\mathscr{O}_\xi$ admite a seguinte estrutura simplética:*

$$\omega_\delta(\mathrm{ad}_u^*(\delta), \mathrm{ad}_v^*(\delta)) = \langle \delta, [u, v]\rangle.$$

Demonstração: *Para todo $u \in \mathfrak{g}$ e $\delta \in \mathfrak{g}^*$ temos a representação coadjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}^*$*

$$\begin{array}{rcccccc} \mathrm{ad}^*: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*) & & & \\ & u & \longmapsto & \mathrm{ad}_u^*: & \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & & & & \delta & \longmapsto & \delta \circ \mathrm{ad}_u. \end{array}$$

Vamos verificar que $\omega \in \Omega^2(\mathscr{O}_\xi)$ é suave. Observe que ω é invariante por tranformações coadjuntas. De fato, sejam $u, v \in \mathfrak{g}$ e $\delta \in \mathfrak{g}^*$, como a ação adjunta $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ preserva colchetes de Lie, então

$$\langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*(\delta), [\mathrm{Ad}_g(u), \mathrm{Ad}_g(v)]\rangle = \langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*(\delta), \mathrm{Ad}_g[u, v]\rangle = \langle \delta[u, v]\rangle.$$

Além disso, estas ações são transitivas em $\mathscr{O}_\xi$. Ou seja, $\omega \in \Omega^2(\mathscr{O}_\xi)$ é suave.

Precisamos verificar que ω está bem-definida, pois $\mathrm{ad}_u^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ é um campo de vetores em $\mathfrak{g}$. Sejam

$$\mathrm{ad}_u^*(\delta), \mathrm{ad}_{\tilde{u}}^*(\delta), \mathrm{ad}_v^*(\delta), \mathrm{ad}_{\tilde{v}}^*(\delta) \in \mathfrak{g}^*,$$

tais que

$$\mathrm{ad}^*_u(\delta)=\mathrm{ad}^*_{\bar{u}}(\delta) \quad e \quad \mathrm{ad}^*_v(\delta)=\mathrm{ad}^*_{\bar{v}}(\delta).$$

Então,

$$\omega(\mathrm{ad}^*_u(\delta),\mathrm{ad}^*_v(\delta))=\langle\delta,[u,v]\rangle=\langle\delta,[\bar{u},\bar{v}]\rangle=\omega(\mathrm{ad}^*_{\bar{u}}(\delta),\mathrm{ad}^*_{\bar{v}}(\delta)).$$

Ou seja,

$$\omega(\mathrm{ad}^*_u(\delta),\mathrm{ad}^*_v(\delta))=\omega(\mathrm{ad}^*_{\bar{u}}(\delta),\mathrm{ad}^*_{\bar{v}}(\delta)).$$

Portanto, ω está bem-definida.

Note que ω é não-degenerada. Suponha que, para cada $\mathrm{ad}^*_v(\delta),\delta\in\mathfrak{g}^*$

$$\omega(\mathrm{ad}^*_u(\delta),\mathrm{ad}^*_v(\delta))=0,$$

então, de (1.4), *temos*

$$\langle\delta,[u,v]\rangle=0.$$

Mas,

$$\langle\delta,[u,v]\rangle=\langle\delta,\mathrm{ad}_u v\rangle=\delta\circ\mathrm{ad}_u(v)=\mathrm{ad}^*_u(\delta)(v)$$

para todo $v\in\mathfrak{g}$, ou seja, $\mathrm{ad}^*_u(\delta)=0$. *Portanto, ω é não-degenerada.*

Finalmente ω é fechada. Para $u\in\mathfrak{g}$ arbitrário, temos que du define uma 1-forma em $\mathfrak{g}^*$, tal que, para quaisquer $\eta\in\mathfrak{g}^*$ e $\delta\in\mathfrak{g}^*$, temos,

$$(du)_\eta(\delta)=\delta(u),$$

Logo,

$$(du)_\eta(\mathrm{ad}^*_v(\delta))=\mathrm{ad}^*_v(\delta)(u)=(\delta\circ\mathrm{ad}_v)(u)=\delta(\mathrm{ad}_v(u))= \tag{1.5}$$
$$=\delta([v,u])=\langle\delta,[v,u]\rangle.$$

Por outro lado,

$$(\iota_{\mathrm{ad}^*_u(\delta)}\omega)(\mathrm{ad}^*_v(\delta))=\omega(\mathrm{ad}^*_u(\delta),\mathrm{ad}^*_v(\delta))=\langle\delta,[u,v]\rangle. \tag{1.6}$$

Ou seja, de (1.5) *e* (1.6), *segue que*

$$\iota_{\mathrm{ad}^*_u}\omega=-du.$$

E com isso temos que $\iota_{\mathrm{ad}_u^*}\omega$ é exata. Então $d(\iota_{\mathrm{ad}_u^*}\omega) = 0$. Pela fórmula de Cartan, segue que

$$\iota_{\mathrm{ad}_u^*} d\omega = \mathfrak{L}_{\mathrm{ad}_u^*}\omega - d(\iota_{\mathrm{ad}_u^*}\omega) = 0.$$

Isto é, para cada $u, w \in \mathfrak{g}$ temos que $d(\omega(\mathrm{ad}_u^*, w)) = 0$, ou seja, $d\omega = 0$. Portanto, ω é uma 2-forma fechada e temos que ω é uma forma simplética em $\mathscr{O}_\xi$. □

1.2 Simplectomorfismos

Nesta seção introduzimos o conceito de morfismo entre variedades simpléticas.

Definição 1.2. *Sejam $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ duas variedades simpléticas da mesma dimensão. Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ é um **simplectomorfismo** entre (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) se $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Isto é, para cada $p \in M_1$ e $u, v \in T_pM_1$,*

$$(\omega_2)_{\varphi(p)}(D\varphi(p)u, D\varphi(p)v) = (\omega_1)_p(u, v).$$

Sejam M_1, M_2 variedades diferenciáveis. O objetivo do próximo resultado é mostrar como um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis induz um simplectomorfismo entre os fibrados cotangentes correspondentes. Para isto, considere $\varphi : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. O **levantamento cotangente** de φ é a aplicação

$$\hat{\varphi} := (D\varphi^{-1})^* : T^*M_1 \to T^*M_2.$$

Note que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*M_1 \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & T^*M_2 \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \end{tikzcd},$$

comuta, onde $\mathrm{pr}_j : T^*M_j \to M_j$, $j = 1, 2$, são as projeções canônicas.

Proposição 1.3. *Sejam α_1, α_2 as formas tautológicas em T^*M_1 e T^*M_2, respectivamente. Então*

$$\hat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1.$$

Demonstração: Sejam $p_j \in M_j$ e $\xi_j \in T^*M_j$, $j = 1,2$. Sabemos de (1.1) que

$$(\alpha_j)_{(\xi_j)_{p_j}} = \xi_j(D\mathrm{pr}_j(\xi_j)_{p_j})$$

pelo visto no Exemplo (1.4). Se $\hat{\varphi}(\xi_1) = \xi_2$ e $v \in T_{(\xi_1)_{p_1}}(T^*M_1)$,

$$\begin{aligned}
\left(\hat{\varphi}^*\alpha_2\right)_{\xi_1}(v) &= (\alpha_2)_{\xi_2}\left(D\hat{\varphi}(\xi_1)(v)\right) = \xi_2(D\mathrm{pr}_2(\xi_2))\left(D\hat{\varphi}(\xi_1)(v)\right)\\
&= \xi_2(D(\mathrm{pr}_2 \circ \hat{\varphi})(\xi_1)(v))\\
&= \xi_2(D(\varphi \circ \mathrm{pr}_1)(\xi_1)(v))\\
&= (D\mathrm{pr}_1(\xi_1))^*(D\varphi(p_1))^*(\xi_2)(v)\\
&= (D\mathrm{pr}_1(\xi_1))^*(\xi_1)(v)\\
&= (\alpha_1)_{\xi_1}(v).
\end{aligned}$$

□

Seja $\omega_j = -d\alpha_j \in \Omega^2(T^*M_j)$, a 2-forma canônica em T^*M_j, $j = 1,2$. O seguinte resultado é consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 1.4. *O difeomorfismo $\hat{\varphi} : T^*M_1 \to T^*M_2$ é um simplectomorfismo.*

Demonstração: Basta observar que

$$\hat{\varphi}^*\omega_2 = \hat{\varphi}^*(-d\alpha_2) = \hat{\varphi}^*(d(-\alpha_2)) = -d\left(\hat{\varphi}^*\alpha_2\right) = -d\alpha_1 = \omega_1.$$

□

1.3 Subvariedades

Diremos que (V,Ω) é um **espaço vetorial simplético** quando V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial munido de uma forma $\mathbb{R}$-bilinear Ω que é anti-simétrica e não-degenerada. Considere $W \subseteq V$ um subespaço vetorial. O **ortogonal simplético** de W é o conjunto,

$$W^\Omega := \{u \in V \mid \Omega(u,v) = 0,\ v \in W\}.$$

Diremos que W é um subespaço:

1. **Simplético** se $W \cap W^\Omega = \{0\}$;

2. **Isotrópico** se $W \subseteq W^\Omega$;

3. **Coisotrópico** se $W^\Omega \subseteq W$;

4. **Lagrangiano** se $W = W^\Omega$.

Observação 1.2. Se W é um subespaço isotrópico de V, então $\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$. Com isto, subespaços lagrangianos são subespaços isotrópicos de dimensão máxima.

Definição 1.3. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Uma subvariedade $N \hookrightarrow M$ é dita **lagrangiana** (respectivamente simplética, isotrópica e coisotrópica) se, para todo $p \in N$, T_pN é um subespaço lagrangiano (respectivamente simplético, isotrópico e coisotrópico) de (T_pM, ω_p).*

Para os próximos exemplos vamos considerar o fibrado cotangente munido da estrutura simplética definida pela fórmula (1.2).

Exemplo 1.6. *Considere a seção nula Z do fibrado cotangente T^*M definida da seguinte forma*

$$\begin{array}{rccc} Z: & M & \longrightarrow & T^*M \\ & p & \longmapsto & (p, 0_p). \end{array}$$

Vejamos que a imagem de Z é uma subvariedade lagrangiana de T^*M. De fato, sabemos que localmente, a forma simplética em T^*M tem a seguinte expressão,

$$\omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j,$$

como cada $\xi_j = 0$ em Z, segue que $\omega_{\text{can}}|_Z = 0$. Além disso, como os pontos em Z são da forma $(p, 0_p)$, então, $\dim Z = \dim M = \frac{1}{2}\dim(T^*M)$. Portanto, Z é subvariedade lagrangiana de T^*M.

Exemplo 1.7. *Cada fibra T_p^*M do fibrado cotangente T^*M é uma subvariedade lagrangiana de T^*M. De fato, temos que $\dim(T_p^*M) = \dim M = \frac{1}{2}\dim(T^*M)$. Vejamos que $\omega_{\text{can}}|_{T_p^*M} = 0$. Sejam $(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ coordenadas locais em T^*M, então, nessas coordenadas,*

$$\omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j.$$

Como $p \in M$ está fixado, então as coordenadas x_j, em T_p^*M, para todo $j = 1, \cdots, n$, são constantes. Logo $dx_j|_{T_p^*M} = 0$, daí, $\omega_{\text{can}}|_{T_p^*M} = 0$. Portanto, cada fibra T_p^*M de T^*M é uma subvariedade lagrangiana de T^*M.

Exemplo 1.8. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $N \hookrightarrow M$ uma subvariedade de dimensão k. Então o* ***fibrado conormal*** *de N, definido por,*

$$C^*N = \left\{ (p, \xi) \in T^*M \mid p \in M, \xi \in T_p^*M \ e \ \xi|_{T_pN} = 0 \right\}$$

é uma subvariedade lagrangiana de $(T^*M, \omega_{\text{can}})$. De fato, tome coordenadas locais $(x_1, \cdots, x_n)$ em M tais que $(x_1, \cdots, x_k)$ são coordenadas induzidas em N e $(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ são coordenadas induzidas em T^*M. Da definição de C^*N, temos que $(x_1, \cdots, x_k, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_n)$ são as coordenadas induzidas em C^*N. Então, $\dim(C^*N) = \dim M = \frac{1}{2}\dim(T^*M)$. *Vejamos que $\omega_{\text{can}}|_{C^*N} = 0$. Sabemos que $\omega_{\text{can}} = -d\alpha$, então basta verificar que $\alpha|_{C^*N} = 0$. Como, localmente,*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dx_j$$

então claramente $\alpha|_{C^*N} = 0$. Portanto, C^*N é uma subvariedade lagrangiana de T^*M.

Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. O próximo resultado nos dá uma condição para verificar quando um difeomorfismo $\varphi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ é um simplectomorfismo.

Proposição 1.5. *Sejam (M_1, ω_1), e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ é um simplectomorfismo se, e somente se,* $\text{Graf}(\varphi) := \left\{ (p, \varphi(p)) \mid p \in M_1 \right\}$ *é uma subvariedade lagrangiana de $M_1 \times \overline{M}_2$, onde $\overline{M}_2$ está munida da forma simplética* $(-\omega_2)$.

Demonstração: Vejamos que $\text{Graf}(\varphi) \subset M_1 \times \overline{M}_2$ é subvariedade lagrangiana. Note que $\dim\text{Graf}(\varphi) = \dim M_1 = \frac{1}{2}\dim\left(M_1 \times \overline{M}_2\right)$. Além disso,

$$T_{(p,\varphi(p))}\text{Graf}(\varphi) = \text{Graf}(D\varphi(p)) \subset T_pM_1 \times T_{\varphi(p)}\overline{M}_2.$$

Para mostrar que $\text{Graf}(\varphi)$ é isotrópico considere $(u, D\varphi(p)u), (v, D\varphi(p)v) \in T_{(p,\varphi(p))}\text{Graf}(\varphi)$. Então,

$$\omega_{(p,\varphi(p))}(u, D\varphi(p)u), (v, D\varphi(p)v) = (\omega_1)_p(u, v) - (\omega_2)_{\varphi(p)}(D\varphi(p)u, D\varphi(p)v)$$

Daí, $\omega|_{\mathrm{Graf}(\varphi)} = 0$ se, e somente se, $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. □

1.4 Espaços G-Hamiltonianos

1.4.1 Ações Hamiltonianas

Definição 1.4. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $\psi : G \times M \to M$ uma ação suave de um grupo de Lie G em M. Diremos que ψ é uma* ***ação simplética****, se para todo $g \in G$, $\psi_g : M \to M, p \mapsto \psi(g,p)$, é um simplectomorfismo.*

Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e $u \in \mathfrak{g}$, considere $u_M \in \mathfrak{X}(M)$ o gerador infinitesimal associado a u, cujo fluxo é $\varphi_t = \psi_{\exp t\cdot u} : M \to M$. Logo,

$$\mathfrak{L}_{u_M}\omega = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi^*_{\exp t\cdot u}\omega = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega = 0,$$

pois a ação de G em M é simplética. Além disso, como ω é fechada, segue da fórmula de Cartan que

$$0 = \mathfrak{L}_{u_M}(\omega) = d(\iota_{u_M}\omega).$$

Ou seja, para cada $u \in \mathfrak{g}$, a 1-forma $\iota_{u_M}\omega \in \Omega^1(M)$ é fechada. Estamos interessados em encontrar primitivas de $\iota_{u_M}\omega$. A seguinte definição aponta nesta direção.

Definição 1.5. *Dizemos que a ação simplética $\psi : G \times M \to M$ é uma* ***ação Hamiltoniana*** *se existe uma aplicação, que chamaremos de* ***aplicação momento****, $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ que satifaz:*

1. *μ é equivariante com respeito à ação coadjunta. Isto é, para cada $g \in G$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_g} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

   é comutativo.

2. *Para cada $u \in \mathfrak{g}$ a função*

$$\begin{aligned} \mu^u : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \mu(p)(u) \end{aligned}$$

satifaz $d\mu^u = \iota_{u_M}\omega$.

Neste caso (M,ω,G,μ) é denominado um **espaço G-Hamiltoniano.**

Definição 1.6. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $f \in C^\infty(M)$. O* ***campo Hamiltoniano*** *de f é o único campo de vetores $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$\iota_{X_f}\omega = df. \tag{1.7}$$

Observação 1.3. Pode-se mostrar, pela não-degenerescência de ω, que X_f está bem-definido.

Observação 1.4. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue de (1.7) que

$$\omega(X_f, X) = \iota_{X_f}\omega(X) = df(X) = X(f) = \mathfrak{L}_X(f). \tag{1.8}$$

Observação 1.5. Se (M,ω,G,μ) é um espaço G-Hamiltoniano, para cada $u \in \mathfrak{g}$ o campo $u_M \in \mathfrak{X}(M)$ é o campo Hamiltoniano de $\mu^u \in C^\infty(M)$.

Exemplo 1.9. *Seja (M,ω,G,μ) um espaço G-Hamiltoniano. Denote por $\psi_g : M \to M$ a ação Hamiltoniana de G em M. Sabemos que $(M\times\overline{M},\Omega)$, onde $\Omega = \mathrm{pr}_1^*\omega - \mathrm{pr}_2^*\omega$, é uma variedade simplética. Então, se $g \in G$, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_g : M\times\overline{M} & \longrightarrow & M\times\overline{M} \\ (p,q) & \longmapsto & (\psi_g(p),\psi_g(q)), \end{array}$$

define uma ação Hamiltoniana de G em $M\times\overline{M}$, com a seguinte aplicação momento:

$$\begin{array}{rcl} J : M\times\overline{M} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ (p,q) & \longmapsto & \mu(p)-\mu(q). \end{array}$$

1.4.2 Redução Simplética

Nesta seção estamos interessados em construir quocientes na categoria de variedades simpléticas. Para tal, vamos considerar um espaço G-Hamiltoniano (M,ω,G,μ), com ação Hamiltoniana $\psi_g : M \to M, g \in G$. Para demonstrar tal fato, precisamos de alguns resultados:

Lema 1.6. *Suponha que* $0 \in \mathfrak{g}^*$ *é um valor regular de* μ *e que* G *age livremente em* $\mu^{-1}(0)$. *Então* $T_p\mu^{-1}(0) = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega}$, *onde* $\mathcal{O}_p \subset M$ *é a órbita que passa pelo ponto* $p \in \mu^{-1}(0)$.

Demonstração: Como a ação de G em M é livre, então $T_p\mathcal{O}_p = \{u_M(p) \mid u \in \mathfrak{g}\}$. Logo

$$\begin{aligned} v \in \ker D\mu(p) &\Leftrightarrow \left\langle D\mu(p)v, u\right\rangle = 0 \qquad \text{para cada } u \in \mathfrak{g}, \\ &\Leftrightarrow \omega(u_M(p), v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega} \end{aligned}$$

Portanto,

$$(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega} = T_p\mu^{-1}(0).$$

□

Lema 1.7. *Seja* (V, Ω) *um espaço vetorial simplético e* $W \subset V$ *um subespaço isotrópico. Então* Ω *induz uma estrutura simplética canônica* Ω_{red} *em* W^{Ω}/W.

Demonstração: Sejam $[u], [v] \in W^{\Omega}/W$. Defina,

$$\Omega_{\text{red}}([u],[v]) = \Omega(u, v).$$

Vamos mostrar que Ω_{red} está bem-definida. Para tal, observe que para cada $w_1, w_2 \in W$,

$$\begin{aligned} \Omega(u + w_1, v + w_2) &= \Omega(u, v) + \Omega(u, w_2) + \Omega(w_1, v) + \Omega(w_1, w_2) \\ &= \Omega(u, v) \end{aligned}$$

pois $\Omega(u, w_2) = \Omega(w_1, v) = \Omega(w_1, w_2) = 0$, já que $u, v \in W^{\Omega}$, $w_1, w_2 \in W$ e $w_1, w_2 \in [0]$. Falta mostrar que Ω_{red} é não-degenerada. Suponha que

$$\Omega_{\text{red}}([u],[v]) = 0, \qquad [u] \in W^{\Omega}/W.$$

Queremos mostrar que $[v] = [0]$. Mas

$$\Omega(u, v) = \Omega_{\text{red}}([u],[v]) = 0,$$

Segue da não-degenerescência de Ω que $[v] = [0]$. □

Feito isso, podemos agora dar uma demonstração para o teorema a seguir, devido a Marsden, Weinstein e Meyer.

Teorema 1.8 (Redução Simplética. [19],[17]). *Seja* (M,ω,G,μ) *um espaço* G*-Hamiltoniano para um grupo de Lie* G *compacto. Suponha que* $0\in\mathfrak{g}^*$ *é valor regular de* μ*. Seja* $\imath:\mu^{-1}(0)\hookrightarrow M$ *a inclusão canônica. Assuma que* G *age livremente em* $\mu^{-1}(0)$*. Então,*

1. *O espaço de órbitas* $M_{\text{red}}=\mu^{-1}(0)/G$ *é uma variedade diferenciável;*
2. *Existe uma única forma simplética* ω_{red} *em* M_{red} *tal que,*

$$\imath^*\omega=\text{pr}^*\omega_{\text{red}}.$$

Demonstração:

1. Como $0\in\mathfrak{g}^*$ é valor regular de $\mu:M\to\mathfrak{g}^*$, então $\mu^{-1}(0)$ é uma subvariedade de M. Além disso, a ação de G em $\mu^{-1}(0)$ é livre e G é compacto, daí,

$$M_{\text{red}}=\mu^{-1}(0)/G$$

é uma variedade diferenciável. Para tal fato, consulte [6], Teorema 23.4.

2. Vamos mostrar que $T_p\mathcal{O}_p$ é subespaço isotrópico de T_pM. Sejam $u_M(p),v_M(p)\in T_p\mathcal{O}_p$ quaisquer, então,

$$\omega_p(u_M(p),v_M(p))=\mu^{[u,v]}(p)=\big\langle\mu(p),[u,v]\big\rangle=0.$$

Portanto, $\omega_p|_{T_p\mathcal{O}_p}=0$, ou seja, $T_p\mathcal{O}_p\subset(T_p\mathcal{O}_p)^\omega=T_p\mu^{-1}(0)$. Segue do Lema (1.7), que existe ω_{red} em $(T_p\mu^{-1}(0))/(T_p\mathcal{O}_p)$ não-degenerada. No ponto $[p]\in M_{\text{red}}$ temos que

$$T_{[p]}M_{\text{red}}\simeq(T_p\mu^{-1}(0))/(T_p\mathcal{O}_p).$$

Vejamos que vale $\imath^*\omega=\text{pr}^*\omega_{\text{red}}$. Sejam $p\in\mu^{-1}(0)$ e $u,v\in T_p\mu^{-1}(0)$, então,

$$(\imath^*\omega)_p(u,v)=\omega_p\big(D\imath(p)(u),D\imath(p)(v)\big)=\omega_p(u,v).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}^*\omega_{\mathrm{red}})_p(u,v) &= \omega_{\mathrm{red}_{[p]}}\big(D\mathrm{pr}(p)(u), D\mathrm{pr}(p)(v)\big)\\ &= \omega_{\mathrm{red}_{[p]}}([u],[v])\\ &= \omega_p(u,v)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\imath^*\omega = \mathrm{pr}^*\omega_{\mathrm{red}}.$$

Falta mostrar que ω_{red} é fechada. Mas isso segue de $\imath^*\omega = \mathrm{pr}^*\omega_{\mathrm{red}}$, e do fato de $\mathrm{pr}^*: \Omega^2(M_{\mathrm{red}}) \to \Omega^2(\mu^{-1}(0))$ ser injetora, pois

$$\mathrm{pr}^*(d\omega_{\mathrm{red}}) = d(\mathrm{pr}^*\omega_{\mathrm{red}}) = d(\imath^*\omega) = \imath^*(d\omega) = 0.$$

□

Definição 1.7. *A variedade simplética* $(M_{\mathrm{red}}, \omega_{\mathrm{red}})$ *é chamada o* ***quociente de Marsden-Weinstein*** *de* (M,ω) *com respeito a* (G,μ).

Este resultado nos dá um método para achar novas variedades simpléticas a partir de variedades simpléticas conhecidas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.10. *Considere a variedade simplética* $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ *do exemplo* (1.2)

$$\omega_0 = \frac{i}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j = \sum dx_j \wedge dy_j.$$

Em coordenadas polares, $x_j = r_j\cos(\theta_j)$ *e* $y_j = r_j\sin(\theta_j)$*. Nestas coordenadas, temos a seguinte expressão para* ω_0

$$\omega_0 = \sum r_j\, dr_j \wedge d\theta_j.$$

O grupo $\mathbb{S}^1$ *age em* $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ *via*

$$\psi_{\exp(it)}(z) = \exp(it)z.$$

O gerador infinitesimal associado é

$$u_M = \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_n}.$$

Considere a aplicação $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$*, dada por* $\mu(z) = -\frac{|z|^2}{2}$*. Como* $\mathbb{S}^1$ *é abeliano, a ação coadjunta é trivial. Além disso,* μ *é invariante por rotação. Segue que*

$$\mu \circ \psi_t = \mu, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Precisamos verificar que vale

$$\iota_{u_M}\omega = d\mu.$$

Como

$$\mu(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2 + y_j^2}{2} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^2}{2},$$

então

$$d\mu = -\sum_{j=1}^{n} 2\frac{r_j}{2} d r_j.$$

Por outro lado

$$\iota_{u_M}\omega(v) = \omega(u_M, v) = \sum_{j=1}^{n} r_j d r_j \wedge d\theta_j \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \theta_n}, v \right) = -\sum_{j=1}^{n} 2\frac{r_j}{2} d r_j(v).$$

E segue que

$$\iota_{u_M}\omega = d\mu.$$

Além disso,

$$\mu^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbb{S}^{2n-1}.$$

E com isso temos que

$$M_{\text{red}} = \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^{n-1}.$$

Pode-se mostrar que,

$$\omega_{\text{red}} = \omega_{FS},$$

onde $(\omega_{\text{FS}})_{[z]} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$ *é a 2-forma de Fubini-Study em* $\mathbb{CP}^{n-1}$*, para tal consulte* [6].

Capítulo 2

Grupoides e Algebroides de Lie

Neste capítulo introduzimos o conceito de grupoides de Lie e suas versões infinitesimais, isto é, algebroides de Lie. Construímos o funtor de Lie entre a categoria de grupoides de Lie e a categoria de algebroides de Lie. Finalizamos este capítulo com alguns resultados sobre integração de algebroides de Lie.

2.1 Grupoides de Lie

Definição 2.1. *Um **grupoide** sobre um conjunto de pontos M é um conjunto $\mathscr{G}$, munido de aplicações estruturais $s, t : \mathscr{G} \to M$ (**source, target**), um **produto** parcialmente definido $m : \mathscr{G}_{(2)} \to \mathscr{G}$, onde $\mathscr{G}_{(2)} = \left\{(g,h) \in \mathscr{G} \times \mathscr{G} \mid s(g) = t(h)\right\}$, uma **seção identidade** $\varepsilon : M \to \mathscr{G}$ e uma **inversão** $\iota : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$;
2. $s(g \cdot h) = s(h)$ *e* $t(g \cdot h) = t(g)$;
3. $\varepsilon(t(g)) \cdot g = g = g \cdot \varepsilon(s(g))$;
4. $g \cdot \iota(g) = \varepsilon(t(g))$
5. $\iota(g) \cdot g = \varepsilon(s(g))$;

Em geral, escrevemos $\iota(g) = g^{-1}$.

Diremos que $\mathscr{G}$ é o conjunto das flechas e que M é o conjunto dos pontos de base, ou simplesmente, base do grupoide $\mathscr{G}$. Denotaremos um grupoide $\mathscr{G}$ sobre um conjunto M por $\mathscr{G} \rightrightarrows M$.

Exemplo 2.1. *Um grupo G é um grupoide sobre um conjunto unitário $M = \{p\}$. Neste caso as aplicações source e target são constantes, a multiplicação $m(g,h) = g \cdot h$ é a multiplicação do grupo G, $\varepsilon(p) = e \in G$ é a identidade do grupo G e $\iota(g) = g^{-1}$ é a inversão do grupo G.*

Exemplo 2.2. *O grupoide trivial $M \rightrightarrows M$.*

- *As aplicações source e target são $s, t = \mathrm{Id}_M : M \to M$.*
- *O produto é definido da seguinte maneira,*

$$m(p,p) := p.$$

- *A seção identidade é,*

$$\begin{array}{rcccc} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & M \\ & & p & \longmapsto & p. \end{array}$$

- *A inversão é,*

$$\begin{array}{rcccc} \iota & : & M & \longrightarrow & M \\ & & p & \longmapsto & p. \end{array}$$

Exemplo 2.3. *O grupoide do par $M \times M \rightrightarrows M$.*

- *As aplicações source e target são:*

$$\begin{array}{rcccc} s & : & M \times M & \longrightarrow & M \\ & & (p,q) & \longmapsto & p. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} t & : & M \times M & \longrightarrow & M \\ & & (p,q) & \longmapsto & q. \end{array}$$

- *Como $(M \times M)_{(2)} = \left\{(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in M \times M \mid p_1 = q_2\right\}$, definimos o produto da seguinte maneira,*

$$m((q,p_2),(p_1,q)) := (p_1,p_2).$$

- *A seção identidade é,*

$$\begin{array}{rcccc} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & M \times M \\ & & p & \longmapsto & (p,p). \end{array}$$

- *A inversão é,*

$$\begin{array}{rcccl} \iota & : & M\times M & \longrightarrow & M\times M \\ & & (p,q) & \longmapsto & (q,p). \end{array}$$

Exemplo 2.4. *O grupoide fundamental* $\Pi(M)\rightrightarrows M$*,*

$$\Pi(M)=\{[\alpha]\,|\,\alpha:[0,1]\to M\}.$$

onde cada $[\alpha]$ *é uma classe de homotopia de uma curva* $\alpha:[0,1]\to M$ *com extremos fixos.*

- *As aplicações source e target são,*

$$\begin{array}{rcccl} s & : & \Pi(M) & \longrightarrow & M \\ & & [\alpha] & \longmapsto & \alpha(0) \end{array}$$

  e

$$\begin{array}{rcccl} t & : & \Pi(M) & \longrightarrow & M \\ & & [\alpha] & \longmapsto & \alpha(1). \end{array}$$

- *Temos que* $(\Pi(M))_{(2)}=\big\{([\alpha],[\beta])\in\Pi(M)\times\Pi(M)\,|\,\alpha(0)=\beta(1)\big\}$. *A multiplicação é*

$$[\alpha]\cdot[\beta]:=[\alpha\cdot\beta],$$

  onde $\alpha\cdot\beta$ *é a curva obtida através da concatenação de caminhos.*

- *A seção identidade é*

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & \Pi(M) \\ & & p & \longmapsto & [p], \end{array}$$

  onde $[p]$ *é a classe de homotopia do laço constante*

- *A inversão é*

$$\begin{array}{rcccl} \iota & : & \Pi(M) & \longrightarrow & \Pi(M) \\ & & [\alpha] & \longmapsto & [\alpha^{-1}], \end{array}$$

  onde $\alpha^{-1}(r)=\alpha(1-r), r\in[0,1]$.

Agora, apresentamos o conceito de morfismo entre grupoides. Se $\mathscr{G}\rightrightarrows M, \mathscr{H}\rightrightarrows N$ são dois grupoides, denotamos por s,t,m,ε,ι as aplicações estruturais em $\mathscr{G},\mathscr{H}$, quando não houver ambiguidade.

Definição 2.2. *Um **morfismo entre grupoides** é dado por aplicações* $\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ *e* $\varphi : M \to N$ *tais que, para cada* $g, g_1, g_2 \in \mathscr{G}$*, com* $s(g_1) = t(g_2)$

1. $\varphi(s(g)) = s(\Phi(g))$;
2. $\varphi(t(g)) = t(\Phi(g))$;
3. $\Phi(\varepsilon(s(g))) = \varepsilon(\varphi(s(g)))$;
4. $\Phi(g_1 \cdot g_2) = \Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2)$.

Neste caso, é comum dizer que $\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ é um morfismo de grupoides cobrindo $\varphi : M \to N$.

Exemplo 2.5. *A aplicação*

$$\begin{aligned} s \times t : \quad \Pi(M) &\longrightarrow M \times M \\ [\alpha] &\longmapsto (\alpha(0), \alpha(1)) \end{aligned}$$

é um morfismo de grupoides entre o grupoide fundamental e o grupoide do par. Explicitamente $\Phi = s \times t$*, onde* $s, t : \Pi(M) \to M$*, são o source e o target em* $\Pi(M)$*, respectivamente, e* $\varphi = \mathrm{Id}_M$.

Observação 2.1. É importante observar que $s \times t$ é um morfismo de grupoides quando trocamos $\Pi(M)$ por um grupoide $\mathscr{G}$ qualquer.

A partir de agora estaremos interessados no caso em que $\mathscr{G}$ e M são variedades diferenciáveis.

Definição 2.3. *Um **grupoide de Lie** é um grupoide* $\mathscr{G} \rightrightarrows M$*, onde* $\mathscr{G}$ *e* M *são variedades diferenciáveis, as aplicações estruturais são diferenciáveis e* $s, t : \mathscr{G} \to M$ *são submersões sobrejetoras de* $\mathscr{G}$ *em* M.

Observação 2.2. A condição de $s, t : \mathscr{G} \to M$ serem submersões sobrejetoras garante que $\mathscr{G}_{(2)} \subset \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ é uma subvariedade de $\mathscr{G} \times \mathscr{G}$. Portanto, requerer que $m : \mathscr{G}_{(2)} \to \mathscr{G}$ seja suave faz sentido.

Exemplo 2.6. *Um grupo de Lie* G *é exatamente um grupoide de Lie cuja base é um conjunto unitário.*

Exemplo 2.7. *Se M é uma variedade diferenciável, o grupoide do par $M \times M \rightrightarrows M$ é um grupoide de Lie.*

Exemplo 2.8. *Seja M uma variedade diferenciável. Então o fibrado cotangente T^*M tem estrutura de grupoide de Lie sobre M, definida da seguinte maneira:*

- *As aplicações source e target são dadas pela projeção canônica* $\mathrm{pr} : T^*M \to M$.
- *Como* $(T^*M)_{(2)} = \{((p_1, \xi_1), (p_2, \xi_2)) \in T^*M \times T^*M \mid p_1 = p_2\}$, *definimos a multiplicação em T^*M da seguinte forma*

$$m((p, \xi_1), (p, \xi_2)) := (p, \xi_1 + \xi_2).$$

- *A seção identidade é*

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & T^*M \\ & & p & \longmapsto & (p, 0_p). \end{array}$$

- *A inversão é*

$$\begin{array}{rccc} \iota & : & T^*M & \longrightarrow & T^*M \\ & & (p, \xi) & \longmapsto & (p, -\xi). \end{array}$$

Exemplo 2.9 (Grupoide de transformação)**.** *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Considere uma ação $\psi : G \times M \to M$ de G em M. Então $G \times M$ é um grupoide de Lie sobre M com a seguinte estrutura:*

- *Considere o source da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{rccc} s & : & G \times M & \longrightarrow & M \\ & & (g, p) & \longmapsto & p \end{array}$$

  e o target

$$\begin{array}{rccc} t & : & G \times M & \longrightarrow & M \\ & & (g, p) & \longmapsto & \psi_g(p). \end{array}$$

- *Como* $(G \times M)_{(2)} = \{((g_1, p_1), (g_2, p_2)) \in (G \times M) \times (G \times M) \mid p_1 = \psi_{g_2}(p_2)\}$, *então,*

$$m((g_1, \psi_{g_2}(p)), (g_2, p)) := (g_1 \cdot g_2, p).$$

- *A seção identidade é*

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : & M & \longrightarrow & G \times M \\ & & p & \longmapsto & (e, p). \end{array}$$

- *A inversão é*

$$\begin{array}{rcccl} \iota & : & G \times M & \longrightarrow & G \times M \\ & & (g, p) & \longmapsto & (g^{-1}, \psi_g(p)). \end{array}$$

Exemplo 2.10. *No exemplo anterior, se $M = \mathfrak{g}^*$ e a ação de G em M é pela ação coadjunta obtemos um grupoide de Lie $G \times \mathfrak{g}^* \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$.*

Exemplo 2.11. *Seja M uma variedade diferenciável. Então o grupoide fundamental é um grupoide de Lie. De fato, como $s \times t : \Pi(M) \longrightarrow M \times M$ é um recobrimento diferenciável de $\Pi(M)$, então $\Pi(M)$ admite estrutura de variedade diferenciável, que torna $\Pi(M)$ um grupoide de Lie.*

Definição 2.4. *Um **morfismo entre grupoides de Lie** $\mathscr{G} \rightrightarrows M, \mathscr{H} \rightrightarrows N$, é um morfismo entre grupoides, $\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ cobrindo $\varphi : M \to N$, onde Φ e φ são aplicações diferenciáveis.*

Exemplo 2.12. *Se M é uma variedade diferenciável, então $s \times t : \Pi(M) \longrightarrow M \times M$ é morfismo de grupoides de Lie.*

2.2 Algebroides de Lie

Nesta seção introduzimos o conceito de algebroide de Lie e apresentamos alguns exemplos.

Definição 2.5. *Um **algebroide de Lie** sobre uma variedade M é uma tripla $(A, \rho, [\cdot,\cdot]_A)$, onde $A \to M$ é um fibrado vetorial, $\rho : A \to TM$ é um morfismo de fibrados (**aplicação âncora**) e $[\cdot,\cdot]_A$ é um colchete de Lie no espaço de seções $\Gamma(A)$ de A, tais que vale a regra de Leibniz,*

$$[a, f \cdot b]_A = f \cdot [a, b]_A + \mathfrak{L}_{\rho(a)}(f) \cdot b,$$

para cada $a, b \in \Gamma(A)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Proposição 2.1. *Seja $(A, \rho, [\cdot,\cdot]_A)$ um algebroide de Lie sobre M. Então a âncora $\rho : A \to TM$ preserva colchetes, isto é, para cada $a, b \in \Gamma(A)$ tem-se*

$$\rho[a, b]_A = [\rho(a), \rho(b)],$$

onde o colchete do lado direito é o colchete de Lie de campos vetoriais em M.

Demonstração: Sejam $a, b, c \in A$ e $f \in C^{\infty}(M)$. Sabemos que

$$\rho[a,b]_A(f) = \mathfrak{L}_{\rho[a,b]_A}(f) \tag{2.1}$$

e

$$[\rho(a),\rho(b)](f) = \mathfrak{L}_{\rho(a)}(\mathfrak{L}_{\rho(b)}(f)) - \mathfrak{L}_{\rho(b)}(\mathfrak{L}_{\rho(a)}(f)) \tag{2.2}$$

Daí, pela identidade de Jacobi e regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
0 &= [[a,b]_A, f\cdot c]_A + [[b, f\cdot c]_A, a]_A + [[f\cdot c, a]_A, b]_A \\
&= f\cdot[[a,b]_A, c]_A + \mathfrak{L}_{\rho[a,b]_A}(f)\cdot c + [f\cdot[b,c]_A, a]_A + [\mathfrak{L}_{\rho(b)}(f)\cdot c, a]_A \\
&- f\cdot[[a,c]_A, b]_A - [\mathfrak{L}_{\rho(a)}(f)\cdot c, b]_A \\
&= f\cdot[[a,b]_A, c]_A + \mathfrak{L}_{\rho[a,b]_A}(f)\cdot c - f\cdot[a,[b,c]_A]_A - \mathfrak{L}_{\rho(a)}(f)\cdot[b,c]_A \\
&- \mathfrak{L}_{\rho(b)}(f)\cdot[a,c]_A - \mathfrak{L}_{\rho(a)}(\mathfrak{L}_{\rho(b)}(f))\cdot c + f\cdot[b,[a,c]_A]_A - \mathfrak{L}_{\rho(b)}(f)\cdot[a,c]_A \\
&+ \mathfrak{L}_{\rho(a)}(f)\cdot[b,c]_A + \mathfrak{L}_{\rho(b)}(\mathfrak{L}_{\rho(a)}(f))\cdot c \\
&= \mathfrak{L}_{\rho[a,b]_A}(f)\cdot c - (\mathfrak{L}_{\rho(a)}(\mathfrak{L}_{\rho(b)}(f))\cdot c - \mathfrak{L}_{\rho(b)}(\mathfrak{L}_{\rho(a)}(f))\cdot c).
\end{aligned}$$

Como a, b, c e f são arbitrários, segue, de (2.1) e (2.2), que

$$\rho[a,b]_A = [\rho(a),\rho(b)].$$

□

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.13. *Uma álgebra de Lie é exatamente um algebroide de Lie sobre um ponto.*

Exemplo 2.14 (Algebroide canônico)**.** *Seja M uma variedade diferenciável, então o fibrado tangente $TM \to M$ é um algebroide de Lie: a âncora é a aplicação identidade, $\mathrm{Id}_{TM} : TM \to TM$ e o colchete de Lie é o colchete de Lie usual para campos vetoriais em M.*

Definição 2.6. *Sejam $(A_1, \rho_1, [\cdot,\cdot]_{A_1})$ e $(A_2, \rho_2, [\cdot,\cdot]_{A_2})$ algebroides de Lie sobre a mesma variedade base M. Um* ***morfismo entre algebroides de Lie*** *é um morfismo de fibrados vetoriais $\Psi : A_1 \to A_2$ tal que:*

1. $\rho_2 \circ \Psi = \rho_1$;

2. *se* $a, b \in A_1$*, então* $\Psi[a,b]_{A_1} = [\Psi(a), \Psi(b)]_{A_2}$.

Um **isomorfismo de algebroides de Lie** é um morfismo de algebroides de Lie que é invertível.

Observação 2.3. Existe o conceito de morfismo entre algebroides de Lie sobre bases distintas, para tal consulte [22]. Porém, neste trabalho é suficiente estudar morfismos entre algebroides de Lie sobre a mesma base e cobrindo a identidade.

2.3 O funtor de Lie

2.3.1 O algebroide de Lie de um grupoide de Lie

Seja $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie, com source s e target t. Para todo $g \in \mathscr{G}$, com $s(g) = p$ e $t(g) = q$, a **translação à direita** pelo elemento g é definida por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{R_g} & : & s^{-1}(q) & \longrightarrow & s^{-1}(p) \\ & & h & \longmapsto & h \cdot g. \end{array}$$

Um campo vetorial X em $\mathscr{G}$ é **invariante à direita** se X é tangente às s-fibras e

$$X_{h\cdot g} = D\mathrm{R_g}(h) X_h,$$

para cada $g \in \mathscr{G}$, com $h \in s^{-1}(t(g))$. O conjunto dos campos invariantes à direita será denotado por $\mathfrak{X}^R(\mathscr{G})$. Como $s : \mathscr{G} \to M$ é uma submersão sobrejetora, temos

$$T_g s^{-1}(s(g)) = \ker D s(g), \qquad g \in \mathscr{G}.$$

Em particular, se $p \in M$, tem-se

$$T_p s^{-1}(p) = \ker D s(p).$$

Observe que, campos invariantes à direita em $\mathscr{G}$ estão completamente determinados pela sua restrição à seção identidade $M \longrightarrow \mathscr{G}$. De fato,

$$X_g = X_{t(g)\cdot g} = D\mathrm{R_g}(t(g)) X_{t(g)}.$$

Portanto, podemos identificar campos invariantes à direita em $\mathscr{G}$ com as seções do fibrado vetorial $\ker Ds|_M \to M$. Considere o fibrado vetorial sobre M

$$A(\mathscr{G}) := \ker Ds|_M.$$

Nosso próximo passo é definir uma estrutura de algebroide de Lie em $A(\mathscr{G})$. Para cada $a \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$, considere o campo de vetores em $\mathscr{G}$ dado por:

$$a^r_g := D\mathrm{R_g}(t(g))a_{t(g)}, \qquad g \in \mathscr{G}$$

Vejamos que a^r é um campo invariante à direita em $\mathscr{G}$. De fato, sejam $g, h \in \mathscr{G}$ tais que $s(h) = t(g)$, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{DR_g}(h)a^r_h &= D\mathrm{R_g}(h)D\mathrm{R_h}(t(h))a_{t(h)} \\
&= D(\mathrm{R_g} \circ \mathrm{R_h})(t(h))a_{t(h)} \\
&= D(\mathrm{R_{h\cdot g}})(t(h\cdot g))a_{t(h\cdot g)} \\
&= a^r_{h\cdot g}.
\end{aligned}$$

Com isto, temos uma aplicação $\mathbb{R}$-linear

$$\begin{array}{rccc}
F & : & \Gamma(A(\mathscr{G})) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^R(\mathscr{G}) \\
 & & a & \longmapsto & a^r.
\end{array}$$

Vejamos que $F : \Gamma(A(\mathscr{G})) \to \mathfrak{X}^R(\mathscr{G})$ é bijetora. Para mostrar que F é injetora considere $a \in \ker F$, então,

$$a^r = 0.$$

Isto é, $D\mathrm{R_g}(t(g))a_{t(g)} = 0$, para todo $g \in \mathscr{G}$. Como $\mathrm{R_g} : s^{-1}(t(g)) \to s^{-1}(s(g))$ é um isomorfismo, segue que $a_{t(g)} = 0$, para todo $g \in \mathscr{G}$. Portanto $a = 0$ e com isto temos que F é injetora. Vejamos que F é sobrejetora. Seja $X \in \mathfrak{X}^R(\mathscr{G})$, então

$$X_g = X_{t(g)\cdot g} = D\mathrm{R_g}(t(g))X_{t(g)} \qquad g \in \mathscr{G}.$$

Vejamos que $X = a^r$, para algum $a \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$. Defina,

$$\begin{array}{rcccc}
a & : & M & \longrightarrow & A(\mathscr{G}) \\
 & & p & \longmapsto & X_p.
\end{array}$$

Então, $X_g = D\mathrm{R}_g(t(g))X_{t(g)} = D\mathrm{R}_g(t(g))a_{t(g)} = a^r_g$. Portanto, F é sobrejetora. Com isto, temos um isomorfismo,

$$\Gamma(A(\mathscr{G})) \simeq \mathfrak{X}^R(\mathscr{G}).$$

Analogamente ao caso de grupos de Lie, temos que $\mathfrak{X}^R(\mathscr{G})$ é fechado com respeito ao colchete de Lie de campos vetoriais. Daí, o isomorfismo $\mathfrak{X}^R(\mathscr{G}) \simeq \Gamma(A(\mathscr{G}))$ induz um colchete de Lie em $\Gamma(A(\mathscr{G}))$.

Definição 2.7. *Dados $a, b \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$, definimos o colchete de Lie em $A(\mathscr{G})$ por*

$$[a,b]^r_{A(\mathscr{G})} := [a^r, b^r].$$

Com esta definição temos um colchete de Lie em seções de $A(\mathscr{G})$. O próximo resultado nos garante a existência da âncora $\rho : \Gamma(A(\mathscr{G})) \to TM$.

Proposição 2.2. *A aplicação*

$$\rho : \Gamma(A(\mathscr{G})) \longrightarrow TM,$$

obtida pela restrição de $Dt : T\mathscr{G} \to TM$ a $A(\mathscr{G}) = \ker Ds|_M \subset T\mathscr{G}$ satisfaz a regra de Leibniz. Isto é, se $a, b \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$ e $f \in C^\infty(M)$

$$[a, f\cdot b]_{A(\mathscr{G})} = f\cdot [a,b]_{A(\mathscr{G})} + \mathfrak{L}_{\rho(a)}(f)\cdot b.$$

Demonstração: Sejam $b \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$ e $p \in M$ arbitrários, então, se $f \in C^\infty(M)$

$$(f\cdot b)^r(p) = f(p)\cdot b^r_p = f(t(p))\cdot b^r_p = (f\circ t)(p)\cdot b^r_p = (f\circ t)\cdot b^r(p).$$

Ou seja,

$$(f\cdot b)^r = (f\circ t)\cdot b^r. \tag{2.3}$$

Além disso, sejam $a, b \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$ e $f \in C^\infty(M)$, então

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{a^r}(f\circ t)(g) &= D(f\circ t)(g)(a^r_g) \\ &= D(f(t(g)))D(g)(t(g))(a^r_g) \\ &= D(t(g))(f(t(g)))\rho(a^r_g) \\ &= \mathfrak{L}_{\rho(a^r_g)}(f(t(g))) = \mathfrak{L}_{\rho(a^r)}(f\circ t)(g). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Segue das igualdades (2.3) e (2.4), que

$$\begin{aligned}
[a, f\cdot b]^r_{A(\mathscr{G})} &= [a^r, (f\cdot b)^r] = [a^r, (f\circ t)\cdot b^r] \\
&= (f\circ t)\cdot[a^r, b^r] + \mathfrak{L}_{a^r}(f\circ t)\cdot b^r \\
&= (f\circ t)\cdot[a^r, b^r] + \mathfrak{L}_{\rho(a^r)}(f\cdot b)^r \\
&= (f\circ t)\cdot[a^r, b^r] + [(\rho(a))^r, (f\cdot b)^r] \\
&= (f\circ t)\cdot[a, b]^r_{A(\mathscr{G})} + [\rho(a), (f\cdot b)]^r_{A(\mathscr{G})} \\
&= \left(f\cdot[a,b]_{A(\mathscr{G})}\right)^r + (\mathfrak{L}_{\rho(a)}(f\cdot b))^r.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.8. *A tripla $(A(\mathscr{G}), \rho, [\cdot,\cdot]_{A(\mathscr{G})})$ é denominada o **algebroide de Lie** do grupoide de Lie $\mathscr{G}$. Denotaremos $(A(\mathscr{G}), \rho, [\cdot,\cdot]_{A(\mathscr{G})})$ simplesmente por $A(\mathscr{G})$.*

Seja $(A, \rho, [\cdot,\cdot]_A)$ um algebroide de Lie sobre M. Dizemos que A é **integrável** se existe um grupoide de Lie $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ tal que

$$A \simeq A(\mathscr{G}).$$

2.3.2 O funtor de Lie em morfismos

Sejam $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ grupoides de Lie sobre a mesma base M e $\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ um morfismo de grupoides de Lie cobrindo a identidade. Para todo $g \in \mathscr{G}$,

$$D\Phi(g) : T_g\mathscr{G} \longrightarrow T_{\Phi(g)}\mathscr{H}.$$

Como $\Phi \circ \varepsilon = \varepsilon$ segue que,

$$D\Phi(p) : T_p\mathscr{G} \longrightarrow T_p\mathscr{H}.$$

Por outro lado, da identidade $s_{\mathscr{H}} \circ \Phi = s_{\mathscr{G}}$, segue que

$$D s_{\mathscr{H}}(p) \circ D\Phi(p) = D s_{\mathscr{G}}(p).$$

Como consequência, a derivada $D\Phi(g) : T_g\mathscr{G} \longrightarrow T_{\Phi(g)}\mathscr{H}$ se restringe a um morfismo de fibrados

$$A(\Phi) : A(\mathscr{G}) \longrightarrow A(\mathscr{H}).$$

Explicitamente,

$$A(\Phi)(a_p) = D\Phi(p)a_p.$$

Proposição 2.3. *$A(\Phi): A(\mathscr{G}) \to A(\mathscr{H})$ é um morfismo de algebroides de Lie.*

Demonstração: Vejamos que $A(\Phi)(a_p) \in A(\mathscr{H})$. Como $a_p \in \ker(Ds(p))$, então,

$$\begin{aligned} Ds(\Phi(p))D\Phi(p)a_p &= D(s_{\mathscr{H}} \circ \Phi)(p)a_p \\ &= Ds_{\mathscr{G}}(p)a_p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $A(\Phi): A(\mathscr{G})_p \to A(\mathscr{H})_p$ é linear para cada $p \in M$, segue que $A(\Phi): A(\mathscr{G}) \to A(\mathscr{H})$ é morfismo de fibrados. Vejamos agora que $A(\Phi)$ preserva âncoras, isto é,

$$\rho_{A(\mathscr{H})} \circ A(\Phi) = \rho_{A(\mathscr{G})}.$$

Para tal, lembre que $\rho_{A(\mathscr{G})}: A(\mathscr{G}) \to TM$ é tal que $\rho_{\mathscr{G}} = Dt|_{A(\mathscr{G})}$. Seja $a_p \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$, então,

$$\begin{aligned} (\rho_{A(\mathscr{H})} \circ D\Phi)(p)(a_p) &= Dt_{\mathscr{H}}(\Phi(p))D\Phi(p)(a_p) \\ &= D(t_{\mathscr{H}} \circ \Phi)(p)(a_p) \\ &= Dt_{\mathscr{G}}(p)(a_p) \\ &= \rho_{A(\mathscr{G})}(p)(a_p) \end{aligned}$$

Portanto, $\rho_{A(\mathscr{H})} \circ D\Phi = \rho_{A(\mathscr{G})}$.

Falta mostrar que $A(\Phi): A(\mathscr{G}) \to A(\mathscr{H})$ preserva colchetes. Como $a \in \Gamma(A(\mathscr{G}))$, então a_p coincide com um campo vetorial invariante à direita em $\mathscr{G}$. Vamos mostrar que $D\Phi(p)a_p$ também é um campo vetorial invariante à direita em $\Phi(\mathscr{G})$. De fato,

$$\begin{aligned} D\mathrm{R}_{\Phi(\mathrm{g})}(\Phi(p))D\Phi(p)(a_p) &= D(\mathrm{R}_{\Phi(\mathrm{g})} \circ \Phi)(p)(a_p) \\ &= D(\Phi \circ \mathrm{R}_{\Phi(\mathrm{g})})(p)(a_p) \\ &= D(g)D\mathrm{R}_{\mathrm{g}}(p)(a_p) \\ &= D\Phi(g)a_g. \end{aligned}$$

Pois $\Phi \circ \mathrm{R}_{\mathrm{g}} = \mathrm{R}_{\Phi(\mathrm{g})} \circ \Phi$. Vejamos que $A(\Phi): A(\mathscr{G}) \to A(\mathscr{H})$ preserva colchetes. Observe que,

$$[a_p, b_p]^r = [a_p^r, b_p^r].$$

Logo, para $p \in M$ temos

$$\begin{aligned}
D\Phi(p)[a_p, b_p]^r &= D\Phi(p)[a_p^r, b_p^r] \\
&= [D\Phi(p)a_p^r, D\Phi(p)b_p^r] \\
&= [(D\Phi(p)a_p)^r, (D\Phi(p)b_p)^r] \\
&= [(D\Phi(p)a_p), (D\Phi(p)b_p)]^r.
\end{aligned}$$

Como $D\Phi(p)[a_p, b_p]^r = [(D\Phi(p)a_p), (D\Phi(p)b_p)]^r$, então,

$$D\Phi(p)[a_p, b_p] = [(D\Phi(p)a_p), (D\Phi(p)b_p)].$$

Ou seja, $\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ induz um morfismo de algebroides de Lie

$$A(\Phi) : A(\mathscr{G}) \longrightarrow A(\mathscr{H}).$$

$\square$

Observação 2.4. É possível definir o morfismo de algebroides de Lie $A(\Phi) : A(\mathscr{G}) \longrightarrow A(\mathscr{H})$ no caso em que $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ são grupoides de Lie sobre bases distintas. Para tal fato, consulte [22].

Desta forma obtemos um funtor entre a categoria dos grupoides de Lie a categoria dos algebroides de Lie, definido em objetos por:

$$\mathscr{G} \longmapsto A(\mathscr{G})$$

e em morfismo

$$(\Phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}) \longmapsto (A(\Phi) : A(\mathscr{G}) \to A(\mathscr{H})).$$

2.4 Integração de algebroides de Lie

Finalizamos este capítulo com um resultado sobre integração de algebroides de Lie. Para mais detalhes, incluindo demonstração, veja [5].

Definição 2.9. *Seja $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. Dizemos que $\mathscr{G}$ é* s***-simplesmente conexo*** *se as s-fibras de $\mathscr{G}$ são simplesmente conexas.*

Observação 2.5. É importante observar que estamos assumindo as s-fibras e t-fibras conexas.

Na seção anterior, vimos que existe um funtor $\mathscr{F} : \mathscr{G}\mathscr{L} \to \mathscr{A}\mathscr{L}$ entre a categoria dos grupoides de Lie e a categoria dos algebroides de Lie. Porém, este funtor não é uma equivalência de categorias. Concretamente, existem algebroides de Lie não integráveis (veja [5]). Porém, quando um algebroide de Lie é integrável, existe uma única integração s-simplesmente conexa, conforme o próximo resultado.

Teorema 2.4. *Seja $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie com algebroide de Lie $A(\mathscr{G})$. Então existe um único grupoide de Lie s-simplesmente conexo, a menos de isomorfismo, $\widetilde{\mathscr{G}}$ cujo algebroide de Lie é $A(\mathscr{G})$.*

Para uma demonstração deste resultado, veja [5].

Capítulo 3

Geometria de Poisson

Neste capítulo fizemos uma breve introdução às variedades de Poisson. Começamos definindo estruturas e variedades de Poisson, apresentando alguns exemplos que serão importantes posteriormente. Em seguida, definimos morfismos entre variedades de Poisson e discutimos alguns exemplos. Finalmente, mostramos o Teorema de Libermann sobre a existência de uma estrutura de Poisson na base de uma submersão sobrejetora cujo domínio é uma variedade simplética.

3.1 Estruturas de Poisson

Definição 3.1. *Uma **álgebra de Poisson** é um par* $(A, \{\cdot,\cdot\})$*, onde* A *é uma álgebra associativa munida de uma função* $\mathbb{R}$*-bilinear, anti-simétrica*

$$\begin{array}{rccc} \{\cdot,\cdot\} & : & A\times A & \longrightarrow & A \\ & & (f,g) & \longmapsto & \{f,g\} \end{array}$$

que satisfaz a regra de Leibniz,

$$\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f,h\}$$

e a identidade de Jacobi,

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0,$$

para cada $f, g, h \in A$.

Definição 3.2. *Uma* ***variedade de Poisson*** *é uma variedade diferenciável M tal que $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ é uma álgebra de Poisson.*

Se $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ é uma álgebra de Poisson, diremos que $\{\cdot,\cdot\}$ é uma **estrutura de Poisson** em M. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Então, $\{f,g\} := 0$, para cada $f,g \in C^\infty(M)$, define uma estrutura de Poisson em M.*

Exemplo 3.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então o espaço dual $\mathfrak{g}^*$ herda uma estrutura de Poisson definida da seguinte forma: se $f,g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, então*

$$\begin{array}{rcl} \{f,g\} : \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \xi([df(\xi), dg(\xi)]). \end{array}$$

Onde $df(\xi), dg(\xi) : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ são vistos como elementos de $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$. Esta estrutura é denominado estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}^*$. Vejamos que $\{\cdot,\cdot\}$ define uma estrutura de Poisson em $\mathfrak{g}^*$.

Segue diretamente da definição que $\{\cdot,\cdot\}$ é $\mathbb{R}$-bilinear, anti-simétrica e que satisfaz a identidade de Jacobi. Para mostrar a regra de Leibniz, sejam $f,g,h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$, então

$$\begin{aligned} \{f, g\cdot h\}(\xi) &= \xi([df(\xi), d(g\cdot h)(\xi)]) \\ &= \xi([df(\xi), (dg(\xi))\cdot h + g\cdot(dh(\xi))]) \\ &= \xi([df(\xi), dg(\xi)]\cdot h + g\cdot[df(\xi), dh(\xi)]) \\ &= (\{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f, dh\})(\xi). \end{aligned}$$

Portanto, o par $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot,\cdot\})$ define uma variedade de Poisson.

Exemplo 3.3. *Seja (M,ω) uma variedade simplética. Definimos, para cada $f,g \in C^\infty(M)$*

$$\{f,g\} := \omega(X_f, X_g), \tag{3.1}$$

onde $X_f, X_g \in \mathfrak{X}(M)$ são os campos Hamiltonianos associados a f,g, respectivamente. Afirmamos que $\{\cdot,\cdot\}$ define uma estrutura de Poisson em M. De fato, a anti-simetria e a $\mathbb{R}$-bilinearidade seguem do fato de ω ser uma 2-forma em M. Para mostrar a regra de

Leibniz observe que, de (1.8) *e* (3.1) *segue que*

$$\{f,g\} = X_g(f) = \mathfrak{L}_{X_g}(f).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\{f, g\cdot h\} &= \omega(X_f, X_{g\cdot h})\\
&= -X_f(g\cdot h)\\
&= -\big(X_f(g)\cdot h + g\cdot X_f(h)\big)\\
&= \omega(X_f, X_g)\cdot h + g\cdot\omega(X_f, X_h)\\
&= \{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f,h\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f,h\}$.

Finalmente vamos mostrar a identidade de Jacobi. Sejam X_f, X_g, X_h *os campos Hamiltonianos associados a* $f, g, h \in C^\infty(M)$*, respectivamente. Como* ω *é fechada, temos que:*

$$\begin{aligned}
0 = d\,\omega(X_f, X_g, X_h) &= \mathfrak{L}_{X_f}(\omega(X_g, X_h)) - \mathfrak{L}_{X_g}(\omega(X_f, X_h)) + \mathfrak{L}_{X_h}(\omega(X_f, X_g))\\
&- \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f)\\
&= \{\{g,h\},f\} - \{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\} + \{\{h,g\},f\} - \{\{h,f\},g\}\\
&- \{\{g,h\},f\} + \{\{g,f\},h\} + \{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\}\\
&= -\big(\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\}\big),
\end{aligned}$$

de onde segue a identidade de Jacobi para $\{\cdot,\cdot\}$.

Exemplo 3.4. *Seja* (M,ω) *uma variedade simplética e* $\psi : G\times M \to M$ *uma ação simplética livre de um grupo de Lie compacto* G *em* M*. Então* M/G *é uma variedade diferenciável e herda uma estrutura de Poisson da seguinte maneira: temos uma projeção natural* $\mathrm{pr} : M \to M/G$*, dada por*

$$\mathrm{pr}(p) = \{\psi_g(p) \mid g \in G\} = [p].$$

Note que $C^\infty(M/G)$ *se identifica com o conjunto* $C^\infty(M)^G$ *das funções constantes em* M *que são* G*-invariantes, isto é, funções constantes ao longo das órbitas da ação de* G *em* M*. Explicitamente, a correspondência é dada por*

$$f \in C^\infty(M/G) \mapsto f\circ\mathrm{pr} \in C^\infty(M)^G.$$

Observe que $C^\infty(M)^G$ é fechado pela estrutura de Poisson induzida por ω. Logo, $C^\infty(M)^G$ herda uma estrutura de Poisson.

3.2 Bivetores de Poisson

Seja M uma variedade diferenciável. Um elemento $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ é chamado **bivetor** em M. De forma concreta, um bivetor é uma aplicação $\pi : M \to \Lambda^2(TM)$, tal que, para todo $p \in M$, $\pi(p) \in \Lambda^2(T_pM)$. Sejam $(x_1, \cdots, x_n)$ coordenadas locais num aberto $U \subset M$, então com respeito a estas coordenadas, π se escreve na forma:

$$\pi(p) = \sum_{i<j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{3.2}$$

onde $\pi_{ij} \in C^\infty(M)$ são funções tais que $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$, $i, j = 1, \cdots, n$. Um bivetor π determina uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \pi(\alpha, \beta). \end{array}$$

Seja $\{\cdot,\cdot\}_\pi : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definida por,

$$\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg). \tag{3.3}$$

Então $\{\cdot,\cdot\}_\pi$ é $\mathbb{R}$-bilinear e anti-simétrica. Vejamos que $\{\cdot,\cdot\}_\pi$ satisfaz a regra de Leibniz: sejam $f, g, h \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, então

$$\begin{array}{rcl} \{f, g \cdot h\}_\pi(p) & = & \pi(p)(df(p), d(g \cdot h)(p)) \\ & = & \pi(p)(df(p), dg(p)) \cdot h(p) + g(p) \cdot \pi(p)(df(p), dh(p)) \\ & = & (\{f, g\}_\pi \cdot h + g \cdot \{f, h\}_\pi)(p). \end{array}$$

Como $p \in M$ é arbitrário, segue que $\{\cdot,\cdot\}_\pi$ é uma biderivação em M. Reciprocamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Se uma aplicação $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ anti-simétrica, $\mathbb{R}$-bilinear é uma biderivação, então $\{\cdot,\cdot\}$ define um bivetor em M, onde π é dado pela fórmula* (3.3).

Demonstração: Para ver que π pode ser definido por (3.3) devemos mostrar que $\{f,g\}(p)$ só depende dos valores de df, dg no ponto p. Suponha que, $df(p)=0$, então existem funções $g_j, h_j \in C^\infty(M)$, $j=1,\cdots,n$, e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tais que, $g_j(p)=h_j(p)=0$ e $f = c+\sum_{j=1}^{n} g_j \cdot h_j$. Então,

$$\begin{aligned} \{f,g\}_\pi(p) &= \{c+\sum_{j=1}^{n}(g_j\cdot h_j), g\}(p) \\ &= c\{1,g\}(p)+\sum_{j=1}^{n}(\{g_j,g\}(p)\cdot h_j(p))+\sum_{j=1}^{n}(g_j(p)\cdot\{h_j,g\}(p)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $\{f,g\}(p)=\pi(df(p),dg(p))$ define um bivetor em M. □

Considere o **colchete de Schouten**:

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^2(M)\times\mathfrak{X}^2(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^3(M).$$

dado por, $[\pi,\pi](df,dg,dh) = \{f,\{g,h\}\} + \circlearrowleft$. Como consequência da discussão feita acima e da Proposição (3.1) temos uma correspondência entre as estruturas de Poisson em M e o conjunto dos bivetores π em M tais que $[\pi,\pi]=0$.

3.3 Morfismos de Poisson

Assim como um simplectomorfismo entre duas variedades simpléticas preserva as estruturas simpléticas, um morfismo de Poisson entre duas variedades de Poisson preserva as estruturas de Poisson.

Definição 3.3. *Sejam $(M_1,\{\cdot,\cdot\}_1),(M_2,\{\cdot,\cdot\}_2)$ duas variedades de Poisson. Um **morfismo de Poisson** é uma aplicação diferenciável $\phi : M_1 \to M_2$ tal que, se $f,g \in C^\infty(M_2)$, então*

$$\phi^*\{f,g\}_2 = \{\phi^* f, \phi^* g\}_1,$$

onde $\phi^* f = f\circ\phi$.

Se o morfismo de Poisson $\phi : (M_1,\{\cdot,\cdot\}_1) \to (M_2,\{\cdot,\cdot\}_2)$ for um difeomorfismo dizemos que ϕ é um **isomorfismo de Poisson**.

Exemplo 3.5. *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um morfismo de álgebras de Lie. Então a aplicação dual $\phi := \varphi^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$ é um morfismo de Poisson. De fato, se $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}^*}, \{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{h}^*}$ são os colchetes de Lie em $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $C^\infty(\mathfrak{h}^*)$, respectivamente, então para cada $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $\xi \in \mathfrak{h}^*$*

$$\begin{aligned}
\{\phi^* f, \phi^* g\}_{\mathfrak{h}^*}(\xi) &= \xi[d(\phi^* f)(\xi), d(\phi^* g)(\xi)]\\
&= \xi[d(f\circ\phi)(\xi), d(g\circ\phi)(\xi)]\\
&= \xi[df(\phi(\xi))\circ d\phi(\xi), dg(\phi(\xi))\circ d\phi(\xi)]\\
&= \xi[df(\xi)\circ\phi, dg(\xi)\circ\phi]\\
&= \xi[df(\xi), dg(\xi)]\circ\phi\\
&= \phi^*(\xi[df(\xi), dg(\xi)])\\
&= \phi^*\{f,g\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6. *Seja (M,ω,G,μ) um espaço G-Hamiltoniano. Então $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ é um morfismo de Poisson com respeito à estrutura de Poisson em M do exemplo* (3.3) *e à estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}^*$.*

3.3.1 O Teorema de Libermann

Sejam (M,ω) uma variedade simplética, N uma variedade diferenciável e $F : M \to N$ uma submersão sobrejetora. Suponha que as fibras $F^{-1}(q) \subset M$, $q \in N$, são conexas. Como F é uma submersão, dado $p \in F^{-1}(q)$ tem-se

$$T_p F^{-1}(q) = \ker DF(p).$$

Denote por K o subfibrado de TM cuja fibra em $p \in M$ é $K_p = \ker DF(p) \subseteq T_pM$. Considere o ortogonal simplético de K

$$K^\omega \subseteq TM.$$

Lema 3.2. *Seja $g \in C^\infty(N)$, então $g\circ F \in C^\infty(M)$ é constante ao longo das fibras da submersão $F : M \to N$.*

Demonstração: Sejam $g \in C^\infty(N)$ e $q \in N$. Então, para todo $p \in F^{-1}(q)$

$$\begin{aligned}
(g\circ F)(p) &= g(F(p))\\
&= g(q).
\end{aligned}$$

Isto é, $g \circ F$ é constante ao longo das fibras de F. □

Lema 3.3. *Se $f \in C^\infty(M)$ é constante ao longo das fibras de F, então o campo Hamiltoniano de f satisfaz: $X_f(p) \in K_p^\omega$, para todo $p \in M$.*

Demonstração: Seja $f \in C^\infty(M)$ constante ao longo das fibras de F, então existe $g \in C^\infty(N)$ tal que $f = g \circ F$. Se $X \in \Gamma(\ker TF)$, então,

$$dF(X) = 0.$$

Se X_f é o campo hamiltoniano associado a f, então,

$$\omega(X_f, X) = (\imath_{X_f}\omega)(X) = df(X) = d(g \circ F)(X) = dg(DF(X)) = 0.$$

Como $X \in \Gamma(\ker TF)$, então $X_f \in \Gamma(K^\omega)$. □

Sendo assim, agora podemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 3.4 ([15])**.** *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, N uma variedade diferenciável e $F : M \to N$ uma submersão sobrejetora cujas fibras são conexas. Considere $K \subseteq TM$ dado por $K_p = \ker DF(p)$, para todo $p \in M$. Então existe uma única estrutura de Poisson em N tornando $F : M \to N$ um morfismo de Poisson se, e somente se, K^ω é involutivo.*

Demonstração: Queremos definir uma estrutura de Poisson

$$\{\cdot,\cdot\}_N : C^\infty(N) \times C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(N)$$

Por hipótese, temos uma estrutura de Poisson em M dada por

$$\{f_1, f_2\}_M = \omega(X_{f_1}, X_{f_2}), \qquad f_1, f_2 \in C^\infty(M),$$

onde X_{f_1}, X_{f_2} são os campos Hamiltonianos associados a f_1 e f_2, respectivamente. Sejam $g_1, g_2 \in C^\infty(N)$, basta mostrar que $\{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M$ é constante ao longo das fibras de F. Se $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ são constantes ao longo das fibras de F, queremos mostrar que $\{f_1, f_2\}_M$ também o é. De fato

$$\begin{aligned} d\left(\{f_1, f_2\}_M\right)X &= X\left(\{f_1, f_2\}_M\right) \\ &= X\left(\omega(X_{f_1}, X_{f_2})\right). \end{aligned}$$

Porém, $d\omega(X_{f_1}, X_{f_2}, X) = 0$. Pelo Lema (3.3), temos

$$\omega(X_{f_2}, X) = \omega(X, X_{f_1}) = 0, \tag{3.4}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \omega([X_{f_2}, X], X_{f_1}) &= d(f_1)([X_{f_2}, X]) = [X_{f_2}, X](f_1) = -(X_{f_2} \circ X - X \circ X_{f_2})(f_1) \\ &= X_{f_2}(X(f_1)) - X(X_{f_2}(f_1)) = -X(X_{f_2}(f_1)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

pois f é constante ao longo das fibras e X é um campo vetorial em $\ker TF$. De modo análogo,

$$\omega([X, X_{f_1}], X_{f_2}) = -X(X_{f_2}(f_1)). \tag{3.6}$$

Daí, segue de $(3.4), (3.5)$ e (3.6), que

$$\begin{aligned} 0 = d\omega(X_{f_1}, X_{f_2}, X) &= X_{f_1}\left(\omega(X_{f_2}, X)\right) - X_{f_2}\left(\omega(X, X_{f_1})\right) + X\left(\omega(X_{f_1}, X_{f_2})\right) \\ &- \omega([X_{f_1}, X_{f_2}], X) + \omega([X_{f_2}, X], X_{f_1}) - \omega([X, X_{f_1}], X_{f_2}) \\ &= X\left(\omega(X_{f_1}, X_{f_2})\right) - \left(\omega([X_{f_1}, X_{f_2}], X)\right), \end{aligned}$$

ou seja, $X\left(\omega(X_{f_1}, X_{f_2})\right) - \left(\omega([X_{f_1}, X_{f_2}], X\right) = 0$. Portanto, $d\left(\{f_1, f_2\}_M\right)X = X\left(\omega(X_{f_1}, X_{f_2})\right) = 0$ se, e somente se, K^{ω} é involutivo. Além disso, se $g_1 \circ F, g_2 \circ F$ são constantes ao longo das fibras de F, então $\{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M$ também o é. Logo, existe única $h \in C^{\infty}(N)$ tal que,

$$\{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M = h \circ F.$$

Defina $\{g_1, g_2\}_N := h$. Vamos mostrar que $\{\cdot, \cdot\}_N$ é uma estrutura de Poisson. Para tal, sejam $g_1, g_2, g_3 \in C^{\infty}(N)$. Então

$$\begin{aligned} \{g_1, g_2\}_N \circ F &= \{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M \\ &= -\{g_2 \circ F, g_1 \circ F\}_M \\ &= -\{g_2, g_1\}_N \circ F. \end{aligned}$$

Portanto, $\{g_1, g_2\}_N = -\{g_2, g_1\}_N$. Isto é, $\{\cdot, \cdot\}_N$ é anti-simétrico.

Sejam $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, então h é $\mathbb{R}$- bilinear:

$$\begin{aligned}
\{g_1, l_1 \cdot g_2 + l_2 \cdot g_3\}_N \circ F &= \{g_1 \circ F, (l_1 \cdot g_2) \circ F\}_M + \{g_1 \circ F, (l_2 \cdot g_3) \circ F\}_M \\
&= l_1 \cdot \{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M + l_2 \cdot \{g_1 \circ F, g_3 \circ F\}_M \\
&= l_1 \cdot \{g_1, g_2\}_N \circ F + l_2 \cdot \{g_1, g_3\}_N \circ F \\
&= \big(l_1 \cdot \{g_1, g_2\}_N + l_2 \cdot \{g_1, g_3\}_N\big) \circ F.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{g_1, l_1 \cdot g_2 + l_2 \cdot g_3\}_N = \big(l_1 \cdot \{g_1, g_2\}_N + l_2 \cdot \{g_1, g_3\}_N\big)$. Da anti-simetria, segue que $\{\cdot,\cdot\}_N$ é $\mathbb{R}$-bilinear.

Temos que $\{\cdot,\cdot\}_N$ satisfaz a regra de Leibniz, de fato:

$$\begin{aligned}
\{g_1, g_2 \cdot g_3\}_N \circ F &= \{g_1 \circ F, (g_2 \cdot g_3) \circ F\}_M \\
&= \{g_1 \circ F, g_3 \circ F\}_M \cdot g_2 + g_3 \cdot \{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M \\
&= \{g_1, g_3\}_N \circ F \cdot g_2 + g_3 \cdot \{g_1, g_2\}_N \circ F \\
&= \big(\{g_1, g_3\}_N \cdot g_2 + g_3 \cdot \{g_1, g_2\}_N\big) \circ F.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{g_1, g_2 \cdot g_3\}_N = \big(\{g_1, g_3\}_N \cdot g_2 + g_3 \cdot \{g_1, g_2\}_N\big)$.

Finalmente, $\{\cdot,\cdot\}$ satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\big(\{g_1, \{g_2, g_3\}_N\}_N + \circlearrowleft\big) \circ F &= \{g_1, \{g_2, g_3\}_N\}_N \circ F + \circlearrowleft \\
&= \{g_1 \circ F, \{g_2, g_3\}_N \circ F\}_M + \circlearrowleft \\
&= \{g_1 \circ F, \{g_2 \circ F, g_3 \circ F\}_M\}_M + \circlearrowleft \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{g_1, \{g_2, g_3\}_N + \circlearrowleft = 0$.

E, segue que $\{\cdot,\cdot\}_N$ é uma estrutura de Poisson em N. Como

$$\{g_1 \circ F, g_2 \circ F\}_M = \{g_1, g_2\}_N \circ F,$$

então $F : (M, \omega) \to (N, \pi)$ é um morfismo de Poisson. $\square$

Capítulo 4

Teoria de Lie e Geometria de Poisson

Começamos este capítulo mostrando que toda variedade de Poisson induz uma estrutura de algebroide de Lie no seu fibrado cotangente. Em seguida, introduzimos o conceito de grupoide simplético e apresentamos alguns exemplos. Finalizamos com um resultado devido a Coste-Dazord-Weinstein [3], que estabelece que variedades de Poisson correspondem à versão infinitesimal de grupoides simpléticos.

4.1 O algebroide de Lie de uma estrutura de Poisson

Sejam M uma variedade diferenciável e $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ um bivetor. Sabemos que π corresponde a uma biderivação $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ em M, da seguinte maneira

$$\{f,g\} := \pi(df,dg).$$

Considere

$$\chi_\pi(df,dg,dh) = \{f,\{g,h\}\} + \circlearrowleft$$

e a aplicação de fibrados:

$$\pi^\sharp : T^*M \to TM, \qquad \eta(\pi^\sharp(\xi)) := \pi(\xi,\eta),$$

onde $\xi,\eta \in T^*M$. Considere o operador $\mathbb{R}$-bilinear,

$$\begin{array}{rcccl} [\cdot,\cdot]_\pi & : & \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & & (\xi,\eta) & \longmapsto & [\xi,\eta]_\pi, \end{array}$$

onde $[\xi,\eta]_\pi := (\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta) - (\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi) - d\pi(\xi,\eta)$.

Proposição 4.1. *Para cada $\xi,\eta,\gamma \in \Omega^1(M)$ valem as seguintes igualdades:*

1. $\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi = [\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)] + \chi_\pi(\xi,\eta,\cdot)$, *onde* $[\cdot,\cdot]$ *é o colchete usual de campos vetoriais em* M;
2. $\left[\xi,\left[\eta,\gamma\right]_\pi\right]_\pi + \circlearrowleft = -(\mathfrak{L}_{\chi_\pi(\xi,\eta,\cdot)}\gamma + \circlearrowleft) - 2d\chi_\pi(\xi,\eta,\gamma)$.

Demonstração: Primeiro observe que é suficiente mostrar que valem 1 e 2 para formas exatas, pois, localmente, 1-formas são combinações $C^\infty(M)$-lineares de formas exatas.

1. Sejam $f,g,h \in C^\infty(M)$, então df, dg e $dh \in \Omega^1(M)$ são 1-formas em M. Daí,

$$dh(\pi^\sharp[df,dg]_\pi) = dh(\pi^\sharp(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(df)}(dg) - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(dg)}(df) - d\pi(df,dg))) \tag{4.1}$$

Como df, dg são 1-formas exatas, segue da fórmula de Cartan que

$$\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(df)}(dg) = d(\iota_{\pi^\sharp(df)}dg) + \iota_{\pi^\sharp(df)}(d^2g) = d(\iota_{\pi^\sharp(df)}dg). \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2), temos

$$\begin{aligned}
dh(\pi^\sharp[df,dg]_\pi) &= dh(\pi^\sharp(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(df)}(dg) - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(dg)}(df) - d\pi(df,dg))) \\
&= dh(\pi^\sharp(d(\iota_{\pi^\sharp(df)}dg) - d(\iota_{\pi^\sharp(dg)}df) - d\pi(df,dg))) \\
&= dh(\pi^\sharp(d(dg(\pi^\sharp(df))) - d(df(\pi^\sharp(dg))) - d\pi(df,dg))) \\
&= dh(\pi^\sharp(d\pi(df,dg) - d\pi(dg,df) - d\pi(df,dg))) \qquad (4.3)\\
&= dh(\pi^\sharp(-d\pi(dg,df))) = dh(\pi^\sharp(d\pi(df,dg))) \\
&= dh(\pi^\sharp(d\{f,g\})) = \pi(d\{f,g\},dh) = \{\{f,g\},h\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
dh[\pi^\sharp(df),\pi^\sharp(dg)] &= [X_f,X_g](h) = X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\
&= X_f\{h,g\} - X_g\{h,f\} \qquad (4.4)\\
&= \{\{h,g\},f\} - \{\{h,f\},g\} \\
&= -\{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\}.
\end{aligned}$$

Portanto, das igualdades (4.3) e (4.4), temos que

$$dh\big(\pi^\sharp[df,dg]_\pi\big)-dh\big([\pi^\sharp(df),\pi^\sharp(dg)]\big)=\chi_\pi(df,dg,dh).$$

Como $dh\in\Omega^1(M)$ é arbitrário

$$\pi^\sharp[df,dg]_\pi=[\pi^\sharp(df),\pi^\sharp(dg)]+\chi_\pi(df,dg,\cdot).$$

Daí,

$$\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi=[\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)]+\chi_\pi(\xi,\eta,\cdot).$$

2. Sejam df,dg e $dh\in\Omega^1(M)$, 1-formas em M. Como dg,dh são 1-formas exatas em M, então $d[dg,dh]_\pi=0$. Daí, pela fórmula de Cartan

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(df)}[dg,dh]_\pi &= d(\iota_{\pi^\sharp(df)}[dg,dh]_\pi)+\iota_{\pi^\sharp(df)}(d[dg,dh]_\pi)\\ &= d(\iota_{\pi^\sharp(df)}[dg,dh]_\pi)=d\pi(df,[dg,dh]_\pi).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Além disso, pelo item 1, temos que

$$\mathfrak{L}_{\pi^\sharp[dg,dh]_\pi}df=\mathfrak{L}_{[\pi^\sharp(dg),\pi^\sharp(dh)]_\pi}df+\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df.\tag{4.6}$$

Combinando as igualdades (4.5) e (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}\big[df,\big[dg,dh\big]_\pi\big]_\pi &= (\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(df)}\big[dg,dh\big]_\pi)-(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp\left[dg,dh\right]_\pi}df)-d\pi\big(df,\big[dg,dh\big]_\pi\big)\\ &= d\pi\big(df,\big[dg,dh\big]_\pi\big)-\mathfrak{L}_{[\pi^\sharp(dg),\pi^\sharp(dh)]}df\\ &- \mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d\pi\big(df,\big[dg,dh\big]_\pi\big)\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-\mathfrak{L}_{[\pi^\sharp(dg),\pi^\sharp(dh)]}df\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d\iota_{[\pi^\sharp(dg),\pi^\sharp(dh)]}df\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d(df[\pi^\sharp(dg),\pi^\sharp(dh)])\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d([X_g,X_h](f))\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d(\{g,\{h,f\}\}-\{h,\{g,f\}\})\\ &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dg,dh,\cdot)}df-d(\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}).\end{aligned}\tag{4.7}$$

De modo análogo temos,

$$
\begin{aligned}
\left[dg,\left[dh,df\right]_\pi\right]_\pi &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(dh,df,\cdot)}dg - d(\{h,\{f,g\}\}+\{f,\{g,h\}\}) && (4.8)\\
\left[dh,\left[df,dg\right]_\pi\right]_\pi &= -\mathfrak{L}_{\chi_\pi(df,dg,\cdot)}dh - d(\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}). && (4.9)
\end{aligned}
$$

Somando as igualdades (4.7), (4.8) e (4.9) obtemos

$$\left[df,\left[dg,dh\right]_\pi\right]_\pi + \circlearrowleft = -(\mathfrak{L}_{\chi_\pi(df,dg,\cdot)}dh + \circlearrowleft) - 2d\chi_\pi(df,dg,dh).$$

Portanto

$$\left[\xi,\left[\eta,\gamma\right]_\pi\right]_\pi + \circlearrowleft = -(\mathfrak{L}_{\chi_\pi(\xi,\eta,\cdot)}\gamma + \circlearrowleft) - 2d\chi_\pi(\xi,\eta,\gamma).$$

□

Como consequência deste resultado, obtemos a seguinte caracterização de um bivetor de Poisson numa variedade diferenciável M.

Teorema 4.2. *Sejam $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ e $[\cdot,\cdot]_\pi$ como na Proposição* (4.1). *São equivalentes as seguintes afirmações,*

1. $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ *é bivetor de Poisson;*

2. $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ *preserva colchetes. Isto é, para cada* $\xi,\eta \in \Omega^1(M)$

$$\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi = [\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)];$$

3. *O colchete* $[\cdot,\cdot]_\pi$ *em* $\Omega^1(M)$ *satisfaz a identidade de Jacobi;*

4. *A tripla* $\left(T^*M,\pi^\sharp,[\cdot,\cdot]_\pi\right)$ *é um algebroide de Lie.*

Demonstração: Suponha que vale 1, mostraremos que vale 2. Como π é bivetor de Poisson, tem-se

$$\chi_\pi(\xi,\eta,\cdot) = 0 \qquad \xi,\eta \in \Omega^1(M).$$

Segue, da afirmação 1, da Proposição (4.1), que

$$\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi = [\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)].$$

Portanto, $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ preserva colchetes.

Suponha que vale 2, mostraremos que vale 3. Como $\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi = [\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)]$, pela afirmação 1, da Proposição (4.1), segue que

$$\chi_\pi(\xi,\eta,\cdot) = 0.$$

Decorre da afirmação 2, da Proposição (4.1), que

$$\left[\xi,\left[\eta,\gamma\right]_\pi\right]_\pi + \circlearrowleft = 0.$$

Portanto, $[\cdot,\cdot]_\pi$ satisfaz a identidade de Jacobi.

Suponha que vale 3, mostraremos que vale 4. Vejamos que $[\cdot,\cdot]_\pi$ é um colchete de Lie em $\Gamma(T^*M)$. De fato, $[\cdot,\cdot]_\pi$ é anti-simétrico:

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta]_\pi &= \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi - d\pi(\xi,\eta) \\
&= -\left(-\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta + \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi - d\pi(\eta,\xi)\right) \\
&= -[\eta,\xi]_\pi.
\end{aligned}$$

Além disso, $[\cdot,\cdot]_\pi$ é $\mathbb{R}$-bilinear:

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta + l\cdot\gamma]_\pi &= \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta + l\cdot\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\gamma - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi - l\cdot\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\gamma)}\xi \\
&- d\pi(\xi,\eta) - l\cdot d\pi(\xi,\gamma) \\
&= \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi - d\pi(\xi,\eta) \\
&+ l\cdot\left(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\gamma - \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\gamma)}\xi - d\pi(\xi,\gamma)\right) \\
&= [\xi,\eta]_\pi + l\cdot[\xi,\gamma]_\pi.
\end{aligned}$$

Como $[\cdot,\cdot]_\pi$ é anti-simétrico, então $[\eta + l\cdot\gamma,\xi]_\pi = [\eta,\xi]_\pi + l\cdot[\gamma,\xi]_\pi$. Segue que $[\cdot,\cdot]_\pi$ é $\mathbb{R}$-bilinear.

Por hipótese, $[\cdot,\cdot]_\pi$ satisfaz a identidade de Jacobi. Portanto, $[\cdot,\cdot]_\pi$ é um colchete de Lie em $\Gamma(T^*M)$. Vejamos que $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ é uma âncora para T^*M. Note que, para cada $X \in TM$ e $\xi,\eta \in \Omega^k(M)$, tem-se

$$\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}(f\cdot\eta) = \left(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}f\right)\eta + f\cdot\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta, \tag{4.10}$$

$$d\pi(\xi,f\cdot\eta) = f\cdot d\pi(\xi,\eta) + \pi(\xi,\eta)\cdot df. \tag{4.11}$$

e, da fórmula de Cartan, segue que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{(f\cdot X)}\xi &= d(\iota_{(f\cdot X)}\xi)+\iota_{(f\cdot X)}(d\xi)\\
&= d(\xi(f\cdot X))+d\xi(f\cdot X)\\
&= d(f\cdot\xi(X))+f\cdot d\xi(X)\\
&= f\cdot d\iota_X\xi+\xi(X)\cdot df+f\cdot\iota_X d\xi\\
&= f\cdot(d\iota_X\xi+\iota_X d\xi)+\xi(X)\cdot df.
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Em particular, se $f\in C^\infty(M)$ e $\xi,\eta\in\Omega^1(M)$, combinando (4.10), (4.11) e (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
[\xi,f\cdot\eta]_\pi &= \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}(f\cdot\eta)-\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(f\cdot\eta)}\xi-d\pi(\xi,f\cdot\eta)\\
&= \left(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}f\right)\eta+f\cdot\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta-f\cdot d\pi(\xi,\eta)-\pi(\xi,\eta)\cdot df\\
&- (f\cdot(d\iota_{\pi^\sharp}(\eta)\xi+\iota_{\pi^\sharp}(\eta)d\xi+\xi(\pi^\sharp(\eta)df)))\\
&= \left(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}f\right)\eta+f\cdot(\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta-\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\eta)}\xi-d\pi(\xi,\eta))\\
&= f\cdot[\xi,\eta]_\pi+\mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\xi)}(f)\cdot\eta
\end{aligned}$$

Portanto, a tripla $\left(T^*M,\pi^\sharp,[\cdot,\cdot]_\pi\right)$ é um algebroide de Lie.

Suponha que vale 4, mostraremos que vale 1. Temos que $\left(T^*M,\pi^\sharp,[\cdot,\cdot]_\pi\right)$ é um algebroide de Lie, então pelo Lema (2.1)

$$\pi^\sharp[\xi,\eta]_\pi=[\pi^\sharp(\xi),\pi^\sharp(\eta)].$$

Pela afirmação 1, da Proposição (4.1), segue que $\chi_\pi=0$. Isto é, π é um bivetor de Poisson.

□

4.2 Grupoides simpléticos

Definição 4.1. *Um **grupoide simplético** é um par $(\mathscr{G},\omega)$ onde $\mathscr{G}$ é um grupoide de Lie sobre uma variedade M e $\omega\in\Omega^2(\mathscr{G})$ é uma forma simplética tal que*

$$\mathrm{Graf}(m)=\{(g,h,g\cdot h)\in\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\mathscr{G}\mid(g,h)\in\mathscr{G}_{(2)}\}$$

é uma subvariedade lagrangiana de $\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}$, sendo $\overline{\mathscr{G}}$ a variedade $\mathscr{G}$ munida da forma simplética $(-\omega)$.

Observação 4.1. Se $(\mathscr{G},\omega)\rightrightarrows M$ é um grupoide simplético então $\omega\in\Omega^2(\mathscr{G})$ é uma forma **multiplicativa**, isto é,

$$m^*\omega=\mathrm{pr}_1^*\omega+\mathrm{pr}_2^*\omega.$$

Exemplo 4.1. *Seja* (M,ω) *uma variedade simplética. O grupoide do par* $(M\times M,\Omega)\rightrightarrows M$, *com estrutura de grupoide dada em* (2.3), *munido da forma simplética* $\Omega=\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega$, *é um grupoide simplético. Considere* $\mathscr{G}=M\times M$. *Sabemos que* $\mathscr{G}\rightrightarrows M$ *admite estrutura de grupoide de Lie. Vejamos que* $\mathrm{Graf}(m)$ *é uma subvariedade lagrangiana de* $\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}$. *A forma simplética em* $\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}$ *é dada por*

$$\hat{\Omega}=\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega+\mathrm{pr}_3^*\omega-\mathrm{pr}_4^*\omega-\mathrm{pr}_5^*\omega+\mathrm{pr}_6^*\omega.$$

Vejamos $\hat{\Omega}|_{\mathrm{Graf}(m)}=0$. *Sejam* $p\in\mathrm{Graf}(m)$ *e* $u,v\in T_p\mathrm{Graf}(m)$

$$p=((p_3,p_2),(p_1,p_3),(p_1,p_2)),\quad u=(u_1,u_2,u_3,u_1,u_3,u_2)\ e\ \ v=(v_1,v_2,v_3,v_1,v_3,v_2).$$

Então,

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_p(u,v)&=\omega_{p_3}(u_1,v_1)-\omega_{p_2}(u_2,v_2)+\omega_{p_1}(u_3,v_3)-\omega_{p_3}(u_1,v_1)-\omega_{p_1}(u_3,v_3)+\omega_{p_2}(u_2,v_2)\\&=0.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\dim(\mathrm{Graf}(m))=3\dim M=\frac{6}{2}\dim M=\frac{1}{2}\dim(\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}).$$

Portanto, $(M\times\overline{M},\Omega)\rightrightarrows M$ *é um grupoide simplético.*

Exemplo 4.2. *Sejam* (M,ω) *uma variedade simplética e* $\Omega=(s\times t)^*(\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega)\in\Omega^2(\Pi(M))$, *onde*

$$\begin{aligned}s\times t:\ \Pi(M)&\longrightarrow M\times M\\ [\alpha]&\longmapsto(\alpha(0),\alpha(1)).\end{aligned}$$

Então $(\Pi(M),\Omega)\rightrightarrows M$ *é um grupoide simplético. Vejamos que* $\Omega=(s\times t)^*(\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega)\in\Omega^2(\Pi(M))$ *é uma forma simplética. De fato, como,*

$$d\Omega=(s\times t)^*(\mathrm{pr}_1^*d\omega-\mathrm{pr}_2^*d\omega)=0$$

então $\Omega \in \Omega^2(\Pi(M))$ *é fechada. Seja* $v \in T_{[\alpha]}\Pi(M)$ *tal que, para todo* $u \in T_{[\alpha]}\Pi(M)$

$$\Omega_{[\alpha]}(u,v) = 0.$$

Considere $\hat{\Omega} = \mathrm{pr}_1^*\omega - \mathrm{pr}_2^*\omega$, *então*

$$\begin{aligned} \Omega_{[\alpha]}(u,v) &= ((s\times t)^*\hat{\Omega})_{[\alpha]}(u,v) \\ &= \hat{\Omega}_{(\alpha(0),\alpha(1))}(D(s\times t)([\alpha])u, D(s\times t)([\alpha])v). \end{aligned}$$

Como $\hat{\Omega}$ *é simplética, então* $D(s\times t)([\alpha])v = 0$. *Porém,* $s\times t : \Pi(M) \longrightarrow M\times M$ *é um difeomorfismo local, logo* $v = 0$. *Falta verificar que* Ω *é uma forma multiplicativa. Como* $s\times t : \Pi(M) \to M\times M$ *é um morfismo de grupoides de Lie, então*

$$\begin{aligned} m^*\Omega &= (s\times t)^* m^*\hat{\Omega} \\ &= (s\times t)^*(\mathrm{Pr}_1^* + \mathrm{Pr}_2^*)\hat{\Omega} \\ &= \mathrm{Pr}_1^*\Omega + \mathrm{Pr}_2^*\Omega. \end{aligned}$$

onde $\mathrm{Pr}_j : \Pi(M)_{(2)} \to \Pi(M)$, $j = 1,2$. *Portanto* $(\Pi(M),\Omega) \rightrightarrows M$ *é um grupoide simplético.*

Exemplo 4.3. *Seja* G *um grupo de Lie. Sabemos que* T^*G *admite a estrutura simplética* $\omega_{\mathrm{can}} \in \Omega^2(T^*G)$ *(veja Exemplo* (1.4)*). Além disso, como* T^*G *é isomorfo a* $G\times\mathfrak{g}^*$, *então* T^*G *admite estrutura de grupoide de Lie. Pode-se mostrar que* $(T^*G,\omega_{\mathrm{can}}) \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$ *é um grupoide simplético.*

O próximo teorema nos fornece propriedades importantes a respeito de grupoides simpléticos.

Teorema 4.3 ([8],[20])**.** *Seja* $(\mathscr{G},\omega) \rightrightarrows M$ *um grupoide simplético com aplicações estruturais*
$s, t, m, \iota, \varepsilon$, *então*

1. *A dimensão de cada* s *- fibra e cada* t *- fibra de* $\mathscr{G}$ *é igual a* $\dim\mathscr{G} - \dim M$;
2. $\dim M = \frac{1}{2}\dim\mathscr{G}$;
3. M *é subvariedade lagrangiana de* $\mathscr{G}$ *(*M *está identificado com* $\varepsilon(M)$*);*
4. *Para todo* $g \in \mathscr{G}$, $T_g s^{-1}(s(g)) = (T_g t^{-1}(t(g)))^{\omega}$;

5. *A inversão $\iota : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ é um anti-simplectomorfismo:*
$$\iota^*\omega = -\omega;$$

6. *Para cada $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$,*
$$\{s^* f_1, t^* f_2\} = 0;$$

7. *Para cada $f \in C^\infty(M)$, o campo Hamiltoniano associado X_{s^*f} é tangente às t-fibras de $\mathscr{G}$ e invariante em relação à translação à esquerda em $\mathscr{G}$. Similarmente, X_{t^*f} é tangente às s-fibras e invariante em relação à translação à direita em $\mathscr{G}$.*

8. *Existe uma única estrutura de Poisson π em M tal que $t : (\mathscr{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$ é morfismo de Poisson $s : (\mathscr{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$ é anti-morfismo de Poisson.*

Demonstração:

1. Como $s : \mathscr{G} \to M$ é uma submersão sobrejetora então, para todo $g \in \mathscr{G}$,
$$T_g s^{-1}(s(g)) = \ker D s(g).$$
Além disso, $D s(g) : T_g\mathscr{G} \to T_{s(g)}M$, então $\mathrm{Im} D s(g) = T_{s(g)}M$. Pelo teorema do Núcleo e da Imagem temos
$$\begin{aligned} \dim T_g\mathscr{G} &= \dim(\ker D s(g)) + \dim(T_{s(g)}M) \\ &= \dim\left(s^{-1}(s(g))\right) + \dim M. \end{aligned}$$
Como, $\dim T_g\mathscr{G} = \dim\mathscr{G}$, segue que $\dim\mathscr{G} = 2\dim M$. Logo
$$\dim\left(s^{-1}(s(g))\right) = \dim\mathscr{G} - \dim M.$$
De modo análogo,
$$\dim\left(t^{-1}(t(g))\right) = \dim\mathscr{G} - \dim M.$$
É importante observar que isto vale para grupoides de Lie, em geral.

2. Como Graf(m) é subvariedade lagrangiana de $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \times \bar{\mathscr{G}}$ então,
$$\dim(\mathrm{Graf}(m)) = \frac{3}{2}\dim\mathscr{G}.$$

Por outro lado
$$\dim(\text{Graf}(m)) = \dim(\mathscr{G}_{(2)}) = 2\dim\mathscr{G} - \dim M$$

Portanto,
$$\dim M = \frac{1}{2}\dim\mathscr{G}.$$

3. Basta mostrar que $\omega|_M = 0$. Como $\varepsilon : M \to \mathscr{G}$, então,

$$D\varepsilon(p) : T_pM \to T_{\varepsilon(p)}\mathscr{G}.$$

Dados $u, v \in T_pM$, os vetores, $U = (u, u, u)$ e $V = (v, v, v)$ são tangentes a $P = (p, p, p)$ em Graf(m). A forma simplética em $\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}$ é dada por $\Omega = \text{pr}_1^*\omega + \text{pr}_2^*\omega - \text{pr}_3^*\omega$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_P(U, V) \\ &= \omega_p(u, v) + \omega_p(u, v) - \omega_p(u, v) \\ &= \omega_p(u, v) \end{aligned}$$

Isto mostra que $M \subset \mathscr{G}$ é uma subvariedade isotrópica de $\mathscr{G}$. Do item 2, sabemos que $\dim\mathscr{G} = \frac{1}{2}\dim M$. Portanto M é subvariedade lagrangiana de $\mathscr{G}$.

4. Sejam $g \in \mathscr{G}$ e $u \in T_g s^{-1}(s(g))$. Vejamos que para todo $v \in T_g t^{-1}(t(g))$

$$\omega_g(u, v) = 0.$$

Sejam $(g, g^{-1}, g\cdot g^{-1}) \in \text{Graf}(m)$ e $\alpha : [0,1] \to \mathscr{G}_{(2)}$, tais que $\alpha(r) = (\alpha_1(r), \alpha_2(r))$, onde $\alpha_1(0) = g, \alpha_1'(0) = u, \alpha_2(r) = \imath(\alpha_1(r))$ então

$$\begin{aligned} Dm(\alpha(r)) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \alpha_1(r).\alpha_2(r) \\ &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \alpha_1(r).\imath(\alpha_1(r)) \\ &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} g^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isto temos que $U = (u, D\imath(g)u, 0), \in T_{(g, g^{-1}, g\cdot g^{-1})}\text{Graf}(m)$. Considere $\beta : [0,1] \to$

$\mathscr{G}_{(2)}$, tal que $\beta(r) = (\beta_1(r), \beta_2(r))$, onde $\beta_1(0) = g, \beta_1'(0) = v, \beta_2(r) = g^{-1}$ então

$$\begin{aligned} Dm(\beta(r)) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \beta_1(r).\beta_2(r) \\ &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \beta_1(r) \cdot g^{-1} \\ &= D\mathrm{R}_{g^{-1}}(g)v. \end{aligned}$$

Portanto $V = (v, 0, D\mathrm{R}_{g^{-1}}(g)v) \in T_{(g,g^{-1},g\cdot g^{-1})}\mathrm{Graf}(m)$. Como ω é multiplicativa

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_{(g,g^{-1},g\cdot g^{-1})}(U, V) \\ &= \omega_g(u, v) + \omega_{g^{-1}}(D\imath(g)u, 0) - \omega_{g\cdot g^{-1}}(0, D\mathrm{R}_{g^{-1}}(g)v) \\ &= \omega_g(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, $T_g s^{-1}(s(g)) \subseteq (T_g t^{-1}(t(g)))^{\omega}$. Pelo item 1 temos que

$$\dim T_g s^{-1}(s(g)) = \frac{1}{2}\dim(T_g t^{-1}(t(g)))^{\omega}.$$

Ou seja,

$$T_g s^{-1}(s(g)) = (T_g t^{-1}(t(g)))^{\omega}.$$

5. Sejam $(g, g^{-1}, t(g)) \in \mathrm{Graf}(m)$ e $\alpha : [0,1] \to \mathscr{G}_{(2)}$, tais que $\alpha(r) = (\alpha_1(r), \alpha_2(r))$, onde $\alpha_1(0) = g, \alpha_1'(0) = u, \alpha_2(0) = \imath(\alpha_1(r))$ então

$$\begin{aligned} Dm(\alpha(r)) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \alpha_1(r).\alpha_2(r) \\ &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \alpha_1(r).\imath(\alpha_1(r)) \\ &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} t(\alpha_1(r)) \\ &= Dt(g)u \end{aligned}$$

Portanto, $U = (u, D\imath(g)u, Dt(g)u) \in T_{(g,g^{-1},t(g))}\mathrm{Graf}(m)$. De modo análogo,

$$V = (v, D\imath(g)v, Dt(g)v) \in T_{(g,g^{-1},t(g))}\mathrm{Graf}(m).$$

Como Graf(m) é subvariedade lagrangiana de $\mathscr{G}\times\mathscr{G}\times\overline{\mathscr{G}}$, concluímos que

$$\begin{aligned}0 &= \Omega_{(g,g^{-1},t(g))}(U,V)\\ &= \omega_g(u,v)+\omega_{g^{-1}}(D\imath(g)u,D\imath(g)v)-\omega_{t(g)}(Dt(g)u,Dt(g)v)\\ &= \omega_g(u,v)+\omega_{g^{-1}}(D\imath(g)u,D\imath(g)v),\end{aligned}$$

pois $Dt(g)u, Dt(g)v\in T_{t(g)}M$ e M é subvariedade lagrangiana de $\mathscr{G}$. Portanto,

$$\imath^*\omega_g(u,v)=\omega_{g^{-1}}(D\imath(g)u,D\imath(g)v)=-\omega_g(u,v).$$

Isto é,

$$\imath^*\omega=-\omega.$$

6. Sejam $g\in\mathscr{G}$, $f_1,f_2\in C^\infty(M)$, $Y\in T_g t^{-1}(t(g))=\ker Dt(g)$ arbitrário e $X_{t^*f_2}\in\mathfrak{X}(\mathscr{G})$, o campo Hamiltoniano associado a $t^*f_2\in C^\infty(\mathscr{G})$, então

$$\begin{aligned}\omega_g(X_{t^*f_2}(g),Y(g)) &= \imath_{X_{t^*f_2}(g)}\omega_g(Y(g))\\ &= D(f_2(t(g)))Y(g)\\ &= D(f_2(t(g)))Dt(g)Y(g)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Pois $Y(g)\in\ker Dt(g)$. Portanto, $X_{t^*f_2}\in(T_g t^{-1}(t(g)))^\omega$. De modo análogo,

$$X_{s^*f_1}\in T_g t^{-1}(t(g)).$$

Do item 4, sabemos que $T_g t^{-1}(t(g))=(T_g s^{-1}(s(g)))^\omega$, daí, segue que

$$\{s^*f_1,t^*f_2\}=\omega(X_{s^*f_1},X_{t^*f_2})=0.$$

7. Do item 6 temos que $X_{s^*f}\in T_g t^{-1}(t(g))$. Disso, segue diretamente que $X_{s^*f}\in\mathfrak{X}(\mathscr{G})$ é invariante à esquerda. De modo análogo, $X_{t^*f_1}\in T_g s^{-1}(s(g))$ e é invariante à direita.

8. Pelo item 4, sabemos que $T_g s^{-1}(s(g))=(T_g t^{-1}(t(g)))^\omega$, para todo $g\in\mathscr{G}$. Pela identi-

dade de Jacobi e pelo item 6 temos

$$\begin{aligned} 0 &= \{\{t^*f_1, t^*f_2\}, s^*f_3\} + \{\{t^*f_2, s^*f_3\}, t^*f_1\} + \{\{s^*f_3, t^*f_1\}, t^*f_2\} \\ &= \{\{t^*f_1, t^*f_2\}, s^*f_3\}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$0 = \omega(X_{\{t^*f_1, t^*f_2\}}, X_{s^*f_3}) = \omega([X_{t^*f_1}, X_{t^*f_2}], X_{s^*f_3}).$$

Portanto, $T_g s^{-1}(s(g)) = (T_g t^{-1}(t(g)))^\omega$ é involutivo. Segue do Teorema de Libermann (Teorema (3.4)), que existe uma única estrutura de Poisson π em M tal que $t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi)$ é um morfismo de Poisson. Como $s = t \circ \iota$, então,

$$\begin{aligned} s^*\{f_1, f_2\} &= (t \circ \iota)^*\{f_1, f_2\} = \iota^*\{t^*f_1, t^*f_2\} \\ &= -\{t^*f_1, t^*f_2\} = -\{-t^*f_1, -t^*f_2\} \\ &= -\{\iota^*(s^*f_1), \iota^*(t^*f_2)\} = -\{(t \circ \iota)^*f_1, (t \circ \iota)^*f_2\} \\ &= -\{s^*f_1, s^*f_2\}. \end{aligned}$$

Portanto, com a mesma estrutura de Poisson definida acima em M, segue que $s : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi_M)$ é um anti-morfismo de Poisson.

$\square$

4.3 O algebroide de Lie de um grupoide simplético

Na seção anterior (Teorema (4.3)), mostramos que se $(\mathcal{G}, \omega)$ é um grupoide simplético sobre M, então existe uma única estrutura de Poisson $\pi_M \in \mathfrak{X}^2(M)$, que torna $t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi_M)$ um morfismo de Poisson. Nesta seção, mostraremos que variedades de Poisson correspondem à versão infinitesimal de grupoides simpléticos. Este resultado é devido à Coste-Dazord-Weinstein, [3], e é um dos resultados principais apresentados neste trabalho.

Teorema 4.4 ([3])**.** *Sejam $(\mathcal{G}, \omega) \rightrightarrows M$ um grupoide simplético e $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ a única estrutura de Poisson tal que $t : (\mathcal{G}, \omega) \to (M, \pi)$ é morfismo de Poisson. Então*

$$\begin{aligned} \sigma \quad : \quad A(\mathcal{G}) &\longrightarrow (T^*M)_\pi \\ a_p &\longmapsto \omega_p(a_p, \cdot)|_{T_pM}, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de algebroides de Lie, onde $(T^*M)_\pi$ *denota o algebroide de Lie induzido por* π.

Para demonstrar o Teorema acima, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 4.5. *Seja* $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ *um grupoide de Lie com algebroide de Lie* $A(\mathscr{G})$. *Seja* $g \in \mathscr{G}$, *com* $s(g) = p$ *e* $t(g) = q$. *Então, para cada* $v_g \in T_g\mathscr{G}$ *e* $a_q \in A_q\mathscr{G}$ *valem as seguintes igualdades:*

1. $v_g = Dm(q,g)(Dt(g)v_g, v_g)$;
2. $D\mathrm{R}_g(q)a_q = Dm(q,g)(a_q, Dt(g)v_g)$;
   Em particular, se $\omega \in \Omega^2(\mathscr{G})$ *é multiplicativa em* $\mathscr{G}$, *então*

$$\omega_g(D\mathrm{R}_g(q)a_q, v_g) = \omega_q(a_q, Dt(g)v_g).$$

Demonstração:

1. Observe que $\mathrm{Id}_\mathscr{G} = m \circ (t, \mathrm{Id}_\mathscr{G})$. Se $v_g \in T_g\mathscr{G}$, então

$$\begin{aligned} D(m\circ(t,\mathrm{Id}_\mathscr{G}))(g)(v_g) &= Dm(t(g),g)(D(t,\mathrm{Id}_\mathscr{G})(g))(v_g) \\ &= Dm(q,g)(Dt(g)v_g, D\mathrm{Id}_\mathscr{G})(g)(v_g) \\ &= Dm(q,g)(Dt(g)v_g, v_g) \end{aligned}$$

Mas $D(m\circ(t,\mathrm{Id}_\mathscr{G}))(g)(v_g) = D\mathrm{Id}_\mathscr{G}(g)v_g = v_g$. Portanto,

$$v_g = Dm(q,g)(Dt(g)v_g, v_g).$$

2. Considere uma curva $\alpha : [0,1] \to \mathscr{G}_{(2)}$, tal que $\alpha(r) = (\alpha_1(r), \alpha_2(r))$, sendo $\alpha_1(0) = q$ e $\alpha_1'(0) = a_q$ e $\alpha_2(r) = g$, para todo $r \in [0,1]$. Então,

$$\begin{aligned} Dm(q,g)(a_q, Dt(g)v_g) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} m(\alpha(r)) \\ &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \alpha_1(r)\cdot g \\ &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \mathrm{R}_g(\alpha_1(r)) \\ &= D\mathrm{R}_g(q)a_q. \end{aligned}$$

Dos itens 1 e 2 segue que

$$\begin{aligned}
\omega_g(D\mathrm{R}_g(q)a_q, v_g) &= \omega_g(Dm(q,g)(a_q,0), Dm(q,g)(Dt(g)v_g, v_g)) \\
&= (m^*\omega)_g((a_q,0),(Dt(g)v_g, v_g)) \\
&= (\mathrm{pr}_1^*\omega - \mathrm{pr}_2^*\omega)_g((a_q,0),(Dt(g)v_g, v_g)) \\
&= \omega_q(a_q, Dt(g)v_g) - \omega_g(0, v_g) \\
&= \omega_q(a_q, Dt(g)v_g)
\end{aligned}$$

□

Lema 4.6. *Sejam $(M_1,\pi_1),(M_2,\pi_2)$ duas variedades de Poisson. Se $\phi : M_1 \to M_2$ é um morfismo de Poisson, então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
T_pM_1 \arrow[r, "D\phi(p)"] & T_{\phi(p)}M_2 \\
T_p^*M_1 \arrow[u, "\pi_1^\sharp"] & T_{\phi(p)}^*M_2 \arrow[l, "(D\phi(p))^*"] \arrow[u, "\pi_2^\sharp"']
\end{tikzcd}.$$

Demonstração: Seja $\{f,g\}_j = \pi_j(df, dg)$ a estrutura de Poisson correspondente em M_j, $j = 1,2$. Como $\phi : M_1 \to M_2$ é um morfismo de Poisson, para cada $f, g \in C^\infty(M_2)$

$$\{f,g\}_2 \circ \phi = \{f\circ\phi, g\circ\phi\}_1 \tag{4.13}$$

Reescrevendo a igualdade (4.13), em termos de bivetores, temos

$$\pi_2(df, dg)\circ\phi = \pi_1(d(f\circ\phi), d(g\circ\phi)).$$

Sejam $df, dg \in T^*M_2$, então

$$\begin{aligned}
dg(\phi(p))\circ(D\phi(p)\circ\pi_1^\sharp\circ(D\phi(p))^*)(df(\phi(p))) &= dg(\phi(p))(D\phi(p)(\pi_1^\sharp(df(\phi(p)\circ D\phi(p))))) \\
&= \pi_1(d(f\circ\phi)(p), d(g\circ\phi)(p)) \\
&= \pi_2(df(\phi(p)), dg(\phi(p)))\circ\phi(p) \\
&= dg(\phi(p))(\pi_2^\sharp(df(\phi(p)))).
\end{aligned}$$

Como $p \in M_1$ e $df, dg \in T^*M_2$ são arbitrários, concluímos que

$$D\phi(p) \circ \pi_1^\sharp \circ (D\phi(p))^* = \pi_2^\sharp.$$

Isto segue do fato que, localmente, elementos em T^*M_2 são combinações $C^\infty(M_2)$-lineares de 1-formas exatas. $\square$

Podemos, fazer uma demonstração do Teorema (4.4):
Demonstração: Vejamos que $\sigma : A(\mathscr{G}) \to T^*M$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais. Se $a_p \in \ker \sigma$ e $v_p \in T_pM$ então

$$\omega_p(a_p, v_p) = 0.$$

Como $t : \mathscr{G} \to M$ é uma submersão sobrejetora, existe $v_g \in T_g\mathscr{G}$ tal que $Dt(g)v_g = v_p$, para todo $v_p \in T_pM$. Além disso, pelo Lema (4.5)

$$\omega_p(a_p, v_p) = \omega_p(a_p, Dt(g)v_g) = \omega_p(D\mathrm{R}_g(p)a_p, v_g) = 0.$$

Como ω é não-degenerada, segue que

$$D\mathrm{R}_g(p)a_p = 0.$$

Mas $D\mathrm{R}_g(p) : s^{-1}(q) \to s^{-1}(p)$ é um isomorfismo, então $a_p = 0$. Ou seja, $\sigma : A(\mathscr{G}) \to T^*M$ é injetora. Além disso, pelo item 2, do Teorema (4.3), temos

$$\dim M = \frac{1}{2}\dim \mathscr{G}.$$

Assim, $\dim T^*M = 2\dim M = \dim \mathscr{G}$. Como

$$\dim(A(\mathscr{G})) = \dim(\ker Ds) + \dim M = 2\dim M,$$

segue que

$$\dim A(\mathscr{G}) = \dim T^*M.$$

Portanto, $\sigma : A(\mathscr{G}) \to T^*M$ é um isomorfismo de fibrados.

Vejamos que $\sigma : A(\mathscr{G}) \to (T^*M)_\pi$ é compatível com a âncora $\rho : A(\mathscr{G}) \to TM$ em $A(\mathscr{G})$ e com a âncora $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ em $(T^*M)_\pi$. Por um lado, para cada $q \in M$ a âncora em $A_q\mathscr{G}$ é definida por $\rho_q = Dt(q)|_{A_q\mathscr{G}}$. Por outro lado, como $t : (\mathscr{G}, \omega) \to (M, \pi)$ é morfismo de Poisson, pelo Lema (4.6), segue que

$$\rho_q = \pi^\sharp \circ \omega^\sharp.$$

Daí, temos que

$$\rho_q = \pi^\sharp \circ \sigma_q.$$

Vejamos que $\sigma : A(\mathscr{G}) \to (T^*M)_\pi$ preserva colchetes. Para tal, vejamos que vale a seguinte igualdade

$$t^*(\sigma[a,b]_{A(\mathscr{G})}) = t^*[\sigma(a),\sigma(b)]_\pi.$$

Como, $[\sigma(a),\sigma(b)]_\pi = \mathfrak{L}_{\rho(a)}(\sigma(b)) - \mathfrak{L}_{\rho(b)}(\sigma(a)) - d(\sigma(b)(\pi^\sharp(\sigma(a))))$, então

$$t^*[\sigma(a),\sigma(b)]_\pi = t^*(\mathfrak{L}_{\rho(a)}(\sigma(b))) - t^*(\mathfrak{L}_{\rho(b)}(\sigma(a))) - t^*d(\sigma(b)(\pi^\sharp(\sigma(a))))$$

Da fórmula de Cartan, segue que

$$\begin{aligned}
t^*[\sigma(a),\sigma(b)]_\pi &= t^*\iota_{\rho(a)}(d\sigma)(b) + t^*d(\iota_{\rho(a)}\sigma)(b)\\
&- t^*\iota_{\rho(b)}(d\sigma)(a) + t^*d(\iota_{\rho(b)}\sigma)(a) - t^*\iota_{\rho(a)}(d\sigma)(b)\\
&= t^*d(\iota_{\rho(a)}\sigma)(b) - t^*\iota_{\rho(b)}(d\sigma)(a) - t^*(\iota_{\rho(a)}d\sigma)(b)\\
&= t^*d(\omega(b,\rho(a))) - t^*d(\omega(a,\rho(b))) - t^*(d\omega)(a,\rho(b))\\
&= d(t^*\omega(b,\rho(a))) - d(t^*\omega(a,\rho(b))) - (dt^*\omega)(a,\rho(b)) \qquad (4.14)\\
&= d(t^*\omega(b,Dt(a))) - d(t^*\omega(a,Dt(b))) - (dt^*\omega)(a,Dt(b))\\
&= d(t^*\omega(D\mathrm{R}(b),a)) - d(t^*\omega(D\mathrm{R}(a),b)) - (dt^*\omega)(D\mathrm{R}(a),b)\\
&= -\iota_{b^r}(dt^*\sigma)(a) + \iota_{b^r}(dt^*\sigma)(a) + d(\iota_{a^r}t^*\sigma)(b).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema (4.5), vale a seguinte igualdade: $t^*\sigma(a) = \iota_{a^r}\omega$. Logo,

$$\begin{aligned}
t^*(\sigma[a,b]_{A(\mathscr{G})}) &= \iota_{[a^r,b^r]}\omega = (\mathfrak{L}_{a^r}(\iota_{b^r}\omega)) - (\iota_{b^r}(\mathfrak{L}_{a^r}\omega))\\
&= d(\iota_{a^r}t^*\sigma)(b) + \iota_{a^r}(dt^*\sigma)(b) - \iota_{b^r}(d(\iota_{a^r}\omega) + \iota_{a^r}(d\omega)) \qquad (4.15)\\
&= d(\iota_{a^r}t^*\sigma)(b) + \iota_{a^r}(dt^*\sigma)(b) - \iota_{b^r}(dt^*\sigma)(a).
\end{aligned}$$

Portanto, das igualdades (4.14) e (4.15) segue que

$$t^*(\sigma[a,b]_{A(\mathscr{G})}) = t^*[\sigma(a),\sigma(b)]_\pi.$$

Como $t : \mathscr{G} \to M$ é uma submersão sobrejetora, segue que

$$\sigma[a,b]_{A(\mathscr{G})} = [\sigma(a), \sigma(b)]_{\pi}.$$

$\square$

Reciprocamente, vale o seguinte resultado

Teorema 4.7 ([2], [4])**.** *Seja* (M,π) *é uma variedade de Poisson tal que* $(T^*M)_\pi$ *se integra a um grupoide de Lie* $\mathscr{G}$ s*-simplesmente conexo. Então existe uma única forma simplética* $\omega \in \Omega^2(\mathscr{G})$ *que torna* $(\mathscr{G},\omega)$ *um grupoide simplético sobre* M *tal que* $t : \mathscr{G} \to M$ *é morfismo de Poisson e* $s : \mathscr{G} \to M$ *anti-morfismo de Poisson.*

Com este resultado mostra-se que existe uma correspondência $1-1$ entre grupoides simpléticos e variedades de Poisson integráveis da seguinte maneira

$$((\mathscr{G},\omega) \rightrightarrows M) \longmapsto (M,\pi),$$

onde π é dada pelo item 8 do Teorema (4.3).

Exemplo 4.4. *Seja* (M,ω) *uma variedade simplética. No Exemplo* (4.1) *vimos que o grupoide do par* $M \times M \rightrightarrows M$ *é um grupoide simplético. É fácil ver que* $(M \times \overline{M}, \Omega) \rightrightarrows M$ *integra* (M,ω) *vista como variedade de Poisson. Note que* $M \times M \rightrightarrows M$ *não necessariamente é um grupoide* s*-simplesmente conexo.*

Exemplo 4.5. *Se* (M,ω) *é uma variedade simplética, o grupoide fundamental* $\Pi(M) \rightrightarrows M$ *herda a estrutura de grupoide simplético (Exemplo* (4.2)*). Neste caso,* $(\Pi(M),\Omega) \rightrightarrows M$ *integra* (M,ω) *vista como variedade de Poisson. Como* $\Pi(M) \rightrightarrows M$ *tem* s*-fibras simplesmente conexas, segue do Teorema* (4.7) *que* $\Pi(M) \rightrightarrows M$ *é o único grupoide* s*-simplesmente conexo que integra* (M,ω)*.*

Exemplo 4.6. *Considere o grupoide simplético* $T^*G \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$ *do Exemplo* (4.3)*. Neste caso,* T^*G *integra a variedade de Poisson* $\mathfrak{g}^*$ *com a estrutura de Lie-Poisson (Exemplo* (3.2)*).*

Capítulo 5

Grupoides G-Hamiltonianos

Neste capítulo estudamos grupoides G-Hamiltonianos, isto é, grupoides simpléticos munidos de uma ação Hamiltoniana compatível com a estrutura de grupoide. Apresentamos o resultado principal deste trabalho, que mostra que o espaço de órbitas de uma ação de Poisson numa variedade de Poisson integrável, é também integrável como variedade de Poisson e, é possível construir um grupoide simplético que integra esta variedade de Poisson via redução de Marsden-Weinstein para grupoides G-Hamiltonianos. Finalmente, relacionamos nossos resultados com os obtidos por Mikami e Weinstein em [20].

5.1 Ações em grupoides de Lie

Sejam $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie e G um grupo de Lie compacto que age em $\mathscr{G}$ por automorfismos de grupoide. Ou seja, para cada $g \in G$, temos um isomorfismo de grupoides de Lie $\Psi_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ cobrindo um difeomorfismo $\psi_g : M \to M$, tal que $\Psi_g \circ \Psi_h = \Psi_{g \cdot h}$, $g, h \in G$. Note que $g \mapsto \psi_g$ define uma ação de G em M.

Neste capítulo, G denotará sempre um grupo de Lie *compacto*.

Proposição 5.1. *Se a ação de G em $\mathscr{G}$ é livre, então o espaço de órbitas $\mathscr{G}/G$ herda uma estrutura de grupoide de Lie sobre o espaço de órbitas M/G, tal que a projeção canônica* $\mathrm{Pr} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}/G$ *é morfismo de grupoides de Lie cobrindo a projeção* $\mathrm{pr} : M \to M/G$.

Demonstração: Como as ações de G em $\mathscr{G}$ e em M são livres e G é compacto, então os espaços de órbitas $\mathscr{G}/G$ e M/G admitem estrutura de variedade diferenciável, tais que as respectivas projeções, $\mathrm{Pr}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}/G$ e $\mathrm{pr}:M\to M/G$, são submersões sobrejetoras. Vejamos que $\mathscr{G}/G\rightrightarrows M/G$ é um grupoide de Lie. Para isto, considere s,t,m,ε,ι as aplicações estruturais em $\mathscr{G}$. Denotaremos por $\Psi_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ a ação de G em $\mathscr{G}$ e por $\psi_g:M\to M$ a ação de G em M e $\overline{\alpha}$ a órbita de $\alpha\in\mathscr{G}$. Temos a seguinte estrutura de grupoide em $\mathscr{G}/G$:

- source:
$$\begin{array}{rccc}\overline{s} & : & \mathscr{G}/G & \longrightarrow & M/G\\ & & \overline{\alpha} & \longmapsto & \overline{s(\alpha)},\end{array}$$

- target:
$$\begin{array}{rccc}\overline{t} & : & \mathscr{G}/G & \longrightarrow & M/G\\ & & \overline{\alpha} & \longmapsto & \overline{t(\alpha)},\end{array}$$

- multiplicação: Sejam $\overline{\alpha},\overline{\beta}\in\mathscr{G}/G$ tais que $\overline{s}(\overline{\alpha})=\overline{t}(\overline{\beta})$. De forma equivalente, existe um único $g\in G$, pois a ação é livre, tal que $\psi_g(s(\alpha))=t(\beta)$. Logo, definimos
$$\overline{m}(\overline{\alpha},\overline{\beta})=\overline{m(\Psi_g(\alpha),\beta)}.$$

- seção identidade:
$$\begin{array}{rccc}\overline{\varepsilon} & : & M/G & \longrightarrow & \mathscr{G}/G\\ & & \overline{p} & \longmapsto & \overline{\varepsilon(p)},\end{array}$$

- inversão:
$$\begin{array}{rccc}\overline{\iota} & : & \mathscr{G}/G & \longrightarrow & \mathscr{G}/G\\ & & \overline{\alpha} & \longmapsto & \overline{\alpha^{-1}}.\end{array}$$

É fácil verificar que $\mathscr{G}/G\rightrightarrows M/G$ com as aplicações $\overline{s},\overline{t},\overline{m},\overline{\varepsilon},\overline{\iota}$, é grupoide de Lie. Por construção, $\mathrm{Pr}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}/G$ é morfismo de grupoides, cobrindo $\mathrm{pr}:M\to M/G$. □

5.2 Ações Hamiltonianas em grupoides simpléticos

Motivaremos os objetos de estudo desta seção com o seguinte exemplo:

Exemplo 5.1. *Seja* (M,ω) *uma variedade simplética. O grupoide do par* $M\times M\rightrightarrows M$ *é naturalmente um grupoide simplético (veja Exemplo* (4.1)). *Suponha que* $\mu:M\to\mathfrak{g}^*$ *é uma aplicação momento para uma ação simplética* $\psi:G\times M\to M$ *de um grupo de Lie* *(compacto) G em M. Então, a ação diagonal de G em $M \times \overline{M}$ é simplética com aplicação momento*

$$\begin{array}{rcl} J : M \times \overline{M} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ (p,q) & \longmapsto & \mu(p) - \mu(q). \end{array}$$

Observe que a ação diagonal é uma ação por automorfismos de grupoide. Além disso, a aplicação momento $J : M \times \overline{M} \to \mathfrak{g}^*$ satisfaz

$$J(\alpha \cdot \beta) = J(\alpha) + J(\beta),$$

onde cada $\alpha, \beta \in (M \times M)_{(2)}$. Em particular, se $0 \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular de $J : M \times \overline{M} \to \mathfrak{g}^*$, então $J^{-1}(0)$ é um subgrupoide de $M \times M$, cuja base é M. Suponha que G age livremente em $J^{-1}(0)$. Pela Proposição (5.1), o espaço reduzido

$$(M \times \overline{M})_{\mathrm{red}} := J^{-1}(0)/G$$

é um grupoide de Lie sobre M/G. Sabemos que M/G herda uma estrutura de Poisson π_{red} (veja Exemplo (3.4)). É fácil ver que $(M \times \overline{M})_{\mathrm{red}} \rightrightarrows M/G$ é um grupoide simplético que integra $(M/G, \pi_{\mathrm{red}})$.

O exemplo anterior faz parte de um contexto mais geral de ações Hamiltonianas em grupoides simpléticos. O cenário é o seguinte:

1. $(\mathscr{G}, \omega) \rightrightarrows (M, \pi)$ grupoide simplético;

2. G grupo de Lie compacto agindo por automorfismos de grupoide $\Psi_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, cobrindo uma ação $\psi_g : M \to M, g \in G$;

3. $\Psi_g^* \omega = \omega$, para cada $g \in G$;

4. a ação de G em $(\mathscr{G}, \omega)$ é Hamiltoniana, com aplicação momento $\mu : \mathscr{G} \to \mathfrak{g}^*$ que satisfaz
$$\mu(\alpha \cdot \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta) \tag{5.1}$$
para cada $(\alpha, \beta) \in \mathscr{G}_{(2)}$.

Nesta situação, diremos que $(\mathscr{G}, \omega, G, \mu)$ é um **grupoide G-Hamiltoniano**.

Proposição 5.2. *Sejam $(\mathscr{G},\omega)\rightrightarrows M$ um grupoide simplético e G um grupo de Lie que age de forma simplética em $\mathscr{G}$. Então a ação de G na base M é por difeomorfismos de Poisson.*

Demonstração: Como $(\mathscr{G},\omega)\rightrightarrows(M,\pi)$ é um grupoide simplético, segue do Teorema (4.3) que $t:(\mathscr{G},\omega)\to(M,\pi)$ é morfismo de Poisson. Por outro lado, para cada $g\in G$, temos

$$t\circ\Psi_g=\psi_g\circ t,$$

pois a ação de G é por automorfismos de grupoide. Seja $\{\cdot,\cdot\}_\pi$ o colchete de Poisson em $C^\infty(M)$ induzido por π. Queremos provar que

$$\{f_1,f_2\}_\pi\circ\psi_g=\{f_1\circ\psi_g,f_2\circ\psi_g\}_\pi,$$

para cada $f_1,f_2\in C^\infty(M)$ e $g\in G$. Como $t:\mathscr{G}\to M$ é uma submersão sobrejetora, basta mostrar que

$$t^*\{f_1,f_2\}_\pi\circ\psi_g=t^*\{f_1\circ\psi_g,f_2\circ\psi_g\}_\pi.$$

Mas isto decorre do fato que $t:(\mathscr{G},\omega)\to(M,\pi)$ é morfismo de Poisson e que a ação $\Psi_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ é simplética □

Observação 5.1. Como G age em (M,π) por difeomorfismos de Poisson, se G age livremente, então M/G herda uma estrutura de Poisson π_{red} tal que a projeção canônica $\text{pr}:M\to M/G$ é morfismo de Poisson. O seguinte resultado mostra que é possível integrar a variedade de Poisson $(M/G,\pi_{\text{red}})$ via redução simplética para o grupoide G-Hamiltoniano $(\mathscr{G},\omega,G,\mu)$.

O teorema abaixo é o segundo resultado principal deste trabalho.

Teorema 5.3. *Seja $(\mathscr{G},\omega,G,\mu)$ um grupoide G-Hamiltoniano. Se $0\in\mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ e G age livremente em $\mu^{-1}(0)$, então*

1. *O espaço reduzido $\mathscr{G}_{\text{red}}=(\mu^{-1}(0)/G,\omega_{\text{red}})$ é um grupoide simplético sobre M/G;*

2. *O grupoide simplético $\mathscr{G}_{\text{red}}$ integra a variedade de Poisson $(M/G,\pi_{\text{red}})$.*

Demonstração:

1. Como $0\in\mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ e μ satisfaz (5.1), concluímos que $\mu^{-1}(0)\rightrightarrows M$ é um subgrupoide de $\mathscr{G}\rightrightarrows M$. Por outro lado, como G age por automorfismos

de grupoide, decorre da Proposição (5.1) que o espaço de órbitas $\mu^{-1}(0)/G$ herda uma única estrutura de grupoide de Lie sobre M/G que torna a projeção canônica $\mathrm{Pr}: \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$ um morfismo de grupoides, cobrindo $\mathrm{pr}: M \to M/G$. Pelo Teorema de Redução Simplética (Teorema (1.8)), existe uma única estrutura simplética ω_{red} em $\mathscr{G}_{\mathrm{red}} := \mu^{-1}(0)/G$ caracterizada por

$$\mathrm{Pr}^*\omega_{\mathrm{red}} = \imath^*\omega, \tag{5.2}$$

onde $\imath : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow \mathscr{G}$ é a inclusão. Vejamos que $\omega_{\mathrm{red}} \in \Omega^2(\mathscr{G}_{\mathrm{red}})$ é multiplicativa. Isto é,

$$\overline{m}^*\omega_{\mathrm{red}} = \overline{\mathrm{pr}}_1^*\omega_{\mathrm{red}} + \overline{\mathrm{pr}}_2^*\omega_{\mathrm{red}}. \tag{5.3}$$

onde $\overline{m} : (\mathscr{G}_{\mathrm{red}})_{(2)} \to \mathscr{G}_{\mathrm{red}}$ é a multiplicação em $\mathscr{G}_{\mathrm{red}}$ e $\overline{\mathrm{pr}}_j : (\mathscr{G}_{\mathrm{red}})_{(2)} \to \mathscr{G}_{\mathrm{red}}$, $j = 1, 2$, são as projeções. Para mostrar (5.3) basta verificar que

$$(\mathrm{Pr}\times\mathrm{Pr})^*(\overline{m}^*\omega_{\mathrm{red}}) = (\mathrm{Pr}\times\mathrm{Pr})^*(\overline{\mathrm{pr}}_1^*\omega_{\mathrm{red}} + \overline{\mathrm{pr}}_2^*\omega_{\mathrm{red}}),$$

pois $\mathrm{Pr}\times\mathrm{Pr} : \mu^{-1}(0)\times\mu^{-1}(0) \to \mathscr{G}_{\mathrm{red}}\times\mathscr{G}_{\mathrm{red}}$ é uma submersão sobrejetora. Mas isto segue combinando o fato que $\mathrm{Pr}: \mu^{-1}(0) \to \mathscr{G}_{\mathrm{red}}$ é morfismo de grupoides com (5.2) e a multiplicatividade de ω.

2. Considere $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{red}}$, a estrutura de Poisson em $C^\infty(M/G)$ induzida por π_{red}. A projeção

$$\mathrm{pr}: (M, \{\cdot,\cdot\}_\pi) \longrightarrow (M/G, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{red}}),$$

é um morfismo de Poisson, isto é:

$$\mathrm{pr}^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}} = \{\mathrm{pr}^* f_1, \mathrm{pr}^* f_2\}_\pi, \qquad f_1, f_2 \in C^\infty(M).$$

Como $(\mu^{-1}(0)/G, \omega_{\mathrm{red}}) \rightrightarrows M/G$ é um grupoide simplético, o Teorema (4.3) garante a existência de uma única estrutura de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_{M/G}$ em M/G tal que

$$\overline{t} : (\mu^{-1}(0)/G, \{\cdot,\cdot\}_{\omega_{\mathrm{red}}}) \longrightarrow (M/G, \{\cdot,\cdot\}_{M/G}),$$

é um morfismo de Poisson, ou seja:

$$\overline{t}^*\{f_1, f_2\}_{M/G} = \{\overline{t}^* f_1, \overline{t}^* f_2\}_{\omega_{\mathrm{red}}}, \qquad f_1, f_2 \in C^\infty(M).$$

Vejamos que $\{\cdot,\cdot\}_{M/G} = \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{red}}$. Como $\mathrm{pr}\circ t : \mu^{-1}(0) \to M/G$ é submersão sobrejetora, basta verificar que:

$$(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{M/G} = (\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}}. \tag{5.4}$$

para cada $f_1, f_2 \in C^\infty(M/G)$. Para o lado esquerdo de (5.4), como $\overline{t} : \mu^{-1}(0)/G \to M/G$ é morfismo de Poisson e $\mathrm{pr}\circ t = \overline{t}\circ \mathrm{Pr}$, então

$$(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{M/G} = \{f_1\circ\overline{t}, f_2\circ\overline{t}\}_{M/G}\circ \mathrm{Pr}. \tag{5.5}$$

Avaliando (5.5) em $\alpha \in \mu^{-1}(0)$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{M/G}(\alpha) &= \{f_1\circ\overline{t}, f_2\circ\overline{t}\}_{M/G}(\mathrm{Pr}(\alpha))\\ &= Df_1(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha)))D\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))X_{f_2\circ\overline{t}}(\mathrm{Pr}(\alpha)).\end{aligned}$$

Como $\overline{t} : \mu^{-1}(0)/G \to M/G$ é morfismo de Poisson, segue que

$$D\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))X_{f_2\circ\overline{t}}(\mathrm{Pr}(\alpha)) = X_{f_2}(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))).$$

Ou seja,

$$(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{M/G}(\alpha) = Df_1(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha)))X_{f_2}(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))), \tag{5.6}$$

onde X_{f_2} é o campo Hamiltoniano associado à $f_2 \in C^\infty(M/G)$, com respeito à $\{\cdot,\cdot\}_{M/G}$. Para o lado direito de (5.4), $\mathrm{pr} : (M,\pi) \to (M/G, \pi_{\mathrm{red}})$ e $t : (\mathscr{G},\omega) \to (M,\pi)$ são morfismos de Poisson e $\mathrm{pr}\circ t = \overline{t}\circ\mathrm{Pr}$, então

$$(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}} = \{f_1\circ\overline{t}\circ\mathrm{Pr}, f_2\circ\mathrm{pr}\circ t\}_\omega. \tag{5.7}$$

Avaliando (5.7) em $\alpha \in \mu^{-1}(0)$, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}}(\alpha) &= \{f_1\circ\overline{t}\circ\mathrm{Pr}, f_2\circ\mathrm{pr}\circ t\}_\omega(\alpha)\\ &= Df_1(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha)))D\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))D\mathrm{Pr}(\alpha)X_{t^*(\mathrm{pr}^* f_2)}(\alpha)\end{aligned} \tag{5.8}$$

Seja $h \in C^\infty(\mu^{-1}(0)/G)$. O campo Hamiltoniano X_{Pr^*h}, associado a $\mathrm{Pr}^*h \in C^\infty(\mu^{-1}(0))$, é Pr-relacionado ao campo Hamiltoniano X_h, associado a h. Ou seja,

$$D\mathrm{Pr}(\alpha)X_{\mathrm{Pr}^*h}(\alpha) = X_h(\mathrm{Pr}(\alpha)) \qquad \alpha \in \mu^{-1}(0). \tag{5.9}$$

Como $\overline{t}\circ \mathrm{Pr} = \mathrm{pr}\circ t$, se $h = \overline{t}^* f$, onde $f \in C^\infty(M/G)$, temos

$$\mathrm{Pr}^* h = \mathrm{Pr}^*(\overline{t}^* f) = (\overline{t}\circ \mathrm{Pr})^* f = (\mathrm{pr}\circ t)^* f = t^*(\mathrm{pr}^* f). \tag{5.10}$$

Então, pelas igualdades (5.9) e (5.10), obtemos

$$D\mathrm{Pr}(\alpha) X_{t^*(\mathrm{pr}^* f)}(\alpha) = D\mathrm{Pr}(\alpha) X_{\mathrm{Pr}^*(f_2\circ\overline{t})}(\alpha) = X_{f_2\circ\overline{t}}(\mathrm{Pr}(\alpha)). \tag{5.11}$$

Combinando as igualdades (5.8) e (5.11), segue que

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}}(\alpha) &= Df_1(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha)))D\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))X_{\overline{t}^* f_2}(\mathrm{Pr}(\alpha)) \\ &= Df_1(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha)))X_{f_2}(\overline{t}(\mathrm{Pr}(\alpha))) \qquad (5.12)\end{aligned}$$

onde X_{f_2} é o campo Hamiltoniano associado à $f_2 \in C^\infty(M/G)$, com respeito à $\{\cdot,\cdot\}_{M/G}$. De (5.6) e (5.12), obtemos

$$(\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{\mathrm{red}}(\alpha) = (\mathrm{pr}\circ t)^*\{f_1, f_2\}_{M/G}(\alpha) \qquad \alpha \in \mu^{-1}(0).$$

Daí

$$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{red}} = \{\cdot,\cdot\}_{M/G}.$$

□

Exemplo 5.2. *Seja* (M, ω, G, μ) *um espaço* G*-Hamiltoniano. Usando o Teorema* (5.3)*, exibiremos um grupoide simplético que integra a variedade de Poisson* $(M/G, \pi_{\mathrm{red}})$*. O grupoide do par* $M \times M \rightrightarrows M$ *é um grupoide simplético (Exemplo* (4.1)*) e com respeito à ação diagonal,* $(M \times \overline{M}, \Omega, G, J)$ *é um grupoide* G*-Hamiltoniano, onde* $J : M \times M \to M$ *é dada por,*

$$J(p,q) = \mu(p) - \mu(q).$$

Pelo Teorema (5.3)*, o espaço reduzido*

$$(M \times \overline{M})_{\mathrm{red}} := \{(p,q) \in M \times M \mid \mu(p) = \mu(q)\}/G,$$

é um grupoide simplético que integra $(M/G, \pi_{\mathrm{red}})$*.*

5.3 O grupoide fundamental de uma variedade simplética

Na seção 5.2 mostramos que se M/G é o espaço de órbitas determinado por um espaço G-Hamiltoniano (M,ω,G,μ), então M/G, visto como variedade de Poisson, é sempre integrável e ainda é possível construir explicitamente um grupoide simplético que integra M/G. É conhecido que existem ações simpléticas que não admitem aplicação momento. Obstruções cohomológicas para a existência de aplicações momento podem ser encontradas em [12]. Nesta seção mostraremos que se G age simpleticamente em (M,ω), então a variedade de Poisson M/G é integrável, *mesmo quando a ação de G em (M,ω) não admite aplicação momento.* Nossa demonstração combina os resultados da seção 5.2 com o seguinte teorema, devido a Mikami e Weinstein [20].

Teorema 5.4 ([20])**.** *Seja (M,ω) uma variedade simplética. Suponha que $\psi: G\times M\to M$ é uma ação por difeomorfismos simpléticos. Então o grupoide fundamental $\Pi(M)\rightrightarrows M$ herda de forma canônica uma estrutura de grupoide G-Hamiltoniano, com estrutura simplética*
$\Omega=(s\times t)^*(\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega)$, *ação simplética dada por*

$$\Psi_g([\alpha])=[\psi_g(\alpha)]$$

e aplicação momento $\mu:\Pi(M)\to\mathfrak{g}^*$

$$\langle\mu([\alpha]),u\rangle:=\int_\alpha \iota_{u_M}\omega. \tag{5.13}$$

onde $[\alpha]\in\Pi(M)$ e $u_M\in\mathfrak{X}(M)$ é o gerador infinitesimal associado a $u\in\mathfrak{g}$.

Para demonstrar este Teorema, precisamos de um resultado prévio. Para isso, considere a seguinte:

Definição 5.1. *Seja $\alpha:[0,1]\to M$ uma curva em M. Uma **variação** de α é uma aplicação suave $\Sigma:[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M, (r_1,r_2)\mapsto\Sigma(r_1,r_2), \varepsilon>0$, tal que*

1. $\Sigma(r_1,0)=\alpha(r_1), \qquad r_1\in[0,1]$;

2. *Fixado $r_1\in[0,1]$, a curva*

$$\begin{aligned}(-\varepsilon,\varepsilon) &\longrightarrow M\\ r_2 &\longmapsto \Sigma(r_1,r_2)\end{aligned}$$

é suave.

Dada uma variação $\Sigma : [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ de $\alpha : [0,1] \to M$, considere os seguintes vetores:

$$V_j(r_1, r_2) := D\Sigma(r_1, r_2)\frac{\partial}{\partial r_j} \qquad j = 1,2. \tag{5.14}$$

Lema 5.5. *Sejam* (M,ω) *uma variedade simplética e* $[\alpha]\in\Pi(M)$. *Se* $\Sigma : [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ *é uma variação de* α *e* V_1, V_2 *são dados por* (5.14). *Então valem as seguintes igualdades:*

1. $\mathfrak{L}_{V_1}(\omega(u_M, V_2)) = \mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1))$;
2. $\mathfrak{L}_{u_M}(\omega(V_1, V_2)) = \omega([u_M, V_1], V_2) - \omega([u_M, V_2], V_1)$;
3. $\mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) = (\mathfrak{L}_{V_2}\omega)(u_M, V_1) - \omega([u_M, V_2], V_1)$.

Demonstração:

1. Seja $\xi := \imath_{u_M}\omega$. Como a ação de G em M é simplética, segue da fórmula de Cartan que

$$\begin{aligned} 0 &= d\xi(V_1, V_2) = \mathfrak{L}_{V_1}(\xi(V_2)) - \mathfrak{L}_{V_2}(\xi(V_1)) - \xi([V_1, V_2]) \\ &= \mathfrak{L}_{V_1}(\omega(u_M, V_2)) - \mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) \end{aligned}$$

já que $[V_1, V_2] = 0$.

2. Como $\omega\in\Omega^2(M)$ é simplética então,

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(u_M, V_1, V_2) = \mathfrak{L}_{u_M}(\omega(V_1, V_2)) - \mathfrak{L}_{V_1}(\omega(u_M, V_2)) + \mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) \\ &- \omega([u_M, V_1], V_2) + \omega([u_M, V_2], V_1) - \omega([V_1, V_2], u_M) \\ &= \mathfrak{L}_{u_M}\omega(V_1, V_2) - \omega([u_M, V_1], V_2) + \omega([u_M, V_2], V_1) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathfrak{L}_{u_M}(\omega(V_1, V_2)) = \omega([u_M, V_1], V_2) - \omega([u_M, V_2], V_1)$$

3. Como $\omega\in\Omega^2(M)$ é simplética segue da fórmula de Cartan que,

$$\mathfrak{L}_X\omega = d\,\imath_X\omega, \qquad X\in\mathfrak{X}(M).$$

Sejam $X = V_2$ e $\eta = \iota_{V_2}\omega$, então,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_{V_2}\omega)(u_M, V_1) &= d\eta(u_M, V_1) = \mathfrak{L}_{u_M}(\eta(V_1)) - \mathfrak{L}_{V_1}(\eta(u_M)) - \eta([u_M, V_1]) \\
&= \mathfrak{L}_{u_M}(\omega(V_2, V_1)) - \mathfrak{L}_{V_1}(\omega(V_2, u_M)) - \omega(V_2, [u_M, V_1]) \\
&= \omega([u_M, V_2], V_1) - \omega([u_M, V_1], V_2) - \mathfrak{L}_{V_1}(\omega(V_2, u_M)) - \omega(V_2, [u_M, V_1]) \\
&= \omega([u_M, V_2], V_1) + \mathfrak{L}_{V_1}(\omega(u_M, V_2)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) = (\mathfrak{L}_{V_1}\omega)(u_M, V_2) - \omega([u_M, V_2], V_1)$$

E do item 1, segue que

$$\mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) = \mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M, V_1)) - \omega([u_M, V_2], V_1)$$

□

Feito isso, podemos dar uma demonstração para o Teorema (5.4) :
Demonstração: Vejamos que $\mu : \Pi(M) \to \mathfrak{g}^*$ é equivariante com respeito à representação coadjunta $\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. De fato, sejam $[\alpha] \in \Pi(M)$ e $g \in G$, então

$$\begin{aligned}
\langle(\mu \circ \Psi_g)([\alpha]), u\rangle &= \langle\mu([\psi_g(\alpha)]), u\rangle \\
&= \int_{\psi_g(\alpha)} \iota_{u_M}\omega \\
&= \int_0^1 \omega_{\psi_g(\alpha(r))}(u_M, D(\psi_g \circ \alpha(r)))dr \\
&= \int_0^1 \omega_{\alpha(r)}(\psi_{g^{-1}}(u_M), \alpha'(r))dr \\
&= \int_0^1 \omega_{\alpha(r)}((\mathrm{Ad}_{g^{-1}} u)_M, \alpha'(r))dr \\
&= \int_{\alpha(r)} \iota_{(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} u)_M}\omega dr \\
&= \langle\mu([\alpha]), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle \\
&= \langle((\mathrm{Ad}_{g^{-1}})^* \circ \mu)([\alpha]), u\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mu \circ \Psi_g) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ \mu$. Vejamos que $\mu : \Pi(M) \to \mathfrak{g}^*$ é uma aplicação momento. Sejam

$[\alpha]\in\Pi(M)$ e $V\in T_{[\alpha]}\Pi(M)$. Considere uma variação $\Sigma:[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ de α, tal que

$$V(r_1)=D\Sigma(r_1,0)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right),\qquad r_1\in[0,1].$$

Sejam $V_1(r_1,r_2)=D\Sigma(r_1,r_2)\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)$ e $V_2(r_1,r_2)=D\Sigma(r_1,r_2)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)$. Queremos mostrar que

$$D\mu^u(V)=\imath_{u_{\Pi(M)}}\Omega(V),$$

sendo $\Omega:=(s\times t)^*(\mathrm{pr}_1^*\omega-\mathrm{pr}_2^*\omega)\in\Omega^2(\Pi(M))$. De fato

$$\begin{aligned}
D\mu^u(V) &= D\mu^u\left(D\Sigma(\cdot,r_2)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\right)\Big|_{r_2=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial r_2}\Big|_{r_2=0}\left\{\mu^u(\Sigma(\cdot,r_2))\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial r_2}\Big|_{r_2=0}\int_{\Sigma(r_1,r_2)}\imath_{u_M}\omega\\
&= \int_0^1\frac{\partial}{\partial r_2}\Big|_{r_2=0}\omega\left(u_M,D\Sigma(r_1,r_2)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\right)dr_1\\
&= \int_0^1\mathfrak{L}_{V_2}(\omega(u_M,V_1))\Big|_{r_2=0}dr_1\\
&= \int_0^1\mathfrak{L}_{V_2}\omega(u_M,V_1)-\omega([u_M,V_2],V_1)\Big|_{r_2=0}dr_1.
\end{aligned}$$

Pelo item 3, do Lema (5.5), vale a igualdade acima, então

$$\begin{aligned}
D\mu^u(V) &= \int_0^1\mathfrak{L}_{V_2}\omega(u_M,V_1)-\omega([u_M,V_2],V_1)\Big|_{r_2=0}dr_1\\
&= \int_0^1 d\imath_{u_M}\omega(V_2,V_1)-\imath_{V_1}d\omega(V_2,u_M)-\omega(V_2,[u_M,V_1])-\omega([u_M,V_2],V_1)\Big|_{r_2=0}dr_1\\
&= \Big(\int_0^1\omega([u_M,V_2],V_1)-\omega([u_M,V_1],V_2)-\imath_{V_1}d\omega(V_2,u_M)\\
&- \omega(V_2,[u_M,V_1])-\omega([u_M,V_2],V_1)\Big|_{r_2=0}dr_1\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \omega([u_M, V_2], V_1) - \imath_{V_1} d\omega(V_2, u_M) - \omega([u_M, V_2], V_1)\Big|_{r_2=0} dr_1 \\
&= \int_0^1 -\imath_{V_1} d\omega(V_2, u_M)\Big|_{r_2=0} dr_1 \\
&= \omega_{\alpha(0)}(u_M(\alpha(0)), V_1(0,0)) - \omega_{\alpha(1)}(u_M(\alpha(1)), V_2(1,0)).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(\imath_{u_{\Pi(M)}}\Omega)_{[\alpha]}(V) &= \Omega_{[\alpha]}(u_{\Pi(M)}, V) \\
&= (s \times t)^*(\mathrm{pr}_1^*\omega - \mathrm{pr}_2^*\omega)_{[\alpha]}(u_{\Pi(M)}, V) \\
&= \omega_{\alpha(0)}(u_M(\alpha(0)), V_1(0,0)) - \omega_{\alpha(1)}(u_M(\alpha(1)), V_2(1,0)).
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Vejamos que vale a igualdade (5.15). Para tal se $[\alpha] \in \Pi(M)$, então

$$D(s \times t)[\alpha] u_{\Pi(M)} = (u_M(\alpha(0)), u_M(\alpha(1))).$$

De fato, considere a curva $\beta : [0,1] \to \Pi(M)$, tal que $\beta(r) = (\Psi_{\exp(r\cdot u)})[\alpha]$. Então

$$
\begin{aligned}
D(s \times t)[\alpha] u_{\Pi(M)} &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (s \times t)(\Psi_{\exp(r\cdot u)}[\alpha]) \\
&= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (s \times t)([\psi_{\exp(r\cdot u)}\alpha]) \\
&= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (\psi_{\exp(r\cdot u)}\alpha(0), \psi_{\exp(r\cdot u)}\alpha(1)) \\
&= (u_M(\alpha(0)), u_M(\alpha(1)))
\end{aligned}
$$

Vejamos que, $D(s \times t)[\alpha]V = (V_1(0,0), V_2(1,0))$. Considere a variação Σ de α. Então,

$$
\begin{aligned}
D(s \times t)[\alpha]V &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (s \times t)(\Sigma(r_1, r)) \\
&= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} (\Sigma(0, r), \Sigma(1, r)) \\
&= \left(D\Sigma(0,0)\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right), D\Sigma(1,0)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\right) \\
&= (V_1(0,0), V_2(1,0))
\end{aligned}
$$

□

Combinando o Teorema (5.3), com o Teorema (5.4), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.6. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e G um grupo de Lie que age em M por difeomorfismos simpléticos. Suponha que a ação de G em M é livre, então a variedade de Poisson $(M/G,\pi_{\text{red}})$ do Exemplo (5.2) é integrável. Além disso, o grupoide simplético*

$$\Pi(M)_{\text{red}} := (\mu^{-1}(0)/G, \Omega_{\text{red}})$$

onde $\mu : \Pi(M) \to \mathfrak{g}^*$ é definida por (5.13), é um grupoide simplético que integra $(M/G,\pi_{\text{red}})$.

Demonstração: Pelo Teorema (5.4), o grupoide fundamental $\Pi(M)$ herda a estrutura de grupoide G-Hamiltoniano. Seja $\mu : \Pi(M) \to \mathfrak{g}^*$, dada por (5.13), segue do Teorema (5.3) que

$$\Pi(M)_{\text{red}} := (\mu^{-1}(0)/G, \Omega_{\text{red}}) \rightrightarrows M/G$$

é um grupoide simplético que integra a variedade de Poisson $(M/G,\pi_{\text{red}})$. □

Conclusão

Finalizamos este trabalho com algumas observações relacionadas com os resultados aqui demonstrados:

1. **Grupoides G-Hamiltonianos s-simplesmente conexos:** No Teorema (5.6) exibimos um grupoide simplético que integra o espaço de órbitas M/G de uma ação simplética, onde G é um grupo de Lie conexo. A única integração de M/G como no Teorema (4.7) é dada por um recobrimento de $\Pi(M)_{\text{red}}$. Porém, se aplicação $\mu : \Pi(M) \to \mathfrak{g}^*$ em (5.13), tem fibras simplesmente conexas, então $\Pi(M)_{\text{red}}$ é *o grupoide simplético s - simplesmente conexo que integra* $(M/G, \pi_{\text{red}})$.

2. **Integração de quocientes por uma ação de Poisson:** Seja (M, π) uma variedade de Poisson. Em geral, se G age livremente em M por difeomorfismos de Poisson, então M/G herda uma estrutura de Poisson π_{red}. Se M é integrável como variedade de Poisson, a variedade de Poisson $(M/G, \pi_{\text{red}})$ também é integrável. A demonstração deste fato usa uma extensão das técnicas das seções 5.2 e 5.3, substituindo $\Pi(M)$ pelo chamado **grupoide de Weinstein** associado à variedade de Poisson (M, π). Para mais detalhes veja [10].

Referências Bibliográficas

[1] Bursztyn, H. e Macarini, L. *Introdução à Geometria Simplética*, XIV Escola de Geometria Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Cattaneo, A.S. e Felder, G. Poisson sigma models and symplectic groupoids, *Quantization of Singular Symplectic Quotients*, vol. 198, 2001, 41–73. Progress in Mathematics Birkhäuser.

[3] Coste, P. e Dazord, A. e Weinstein, A. Groupoides symplectiques, *Dept. Math. Lyon.* 1987.

[4] Crainic, M. e Fernandes, R.L. Integrability of Poisson brackets, *Journal of Differential Geometry*, vol. 66, 1, 2004, 71–137. Lehigh University.

[5] Crainic, M. e Fernandes, R.L. Lectures on integrability of Lie brackets, *Geometry & Topology Monographs*, vol. 17, 2011, 2–107.

[6] Da Silva, A.C. *Lectures on symplectic geometry*, Lectures Note in Mathematics, vol. 1764, Springer Verlag, 2011.

[7] Da Silva, A.C. e Weinstein A. *Geometric models for noncommutative algebras*, vol. 10, American Mathematical Society, 1999.

[8] Dufour, J.P. e Zung, N.T. *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Mathematics, vol. 242, Birkhäuser Basel, 2005.

[9] Duistermaat, J.J. e Kolk, J.A.C. *Lie Groups*, Springer Verlag, 2000.

[10] Fernandes, R.L. e Iglesias, D., Integrability of Poisson-Lie group actions, *trabalho em andamento.*

[11] Guillemin, V. e Pollack, A. *Differential topology*, American Mathematical Society. 2010.

[12] Guillemin, V. e Sternberg, S. *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1990.

[13] Kobayashi, S. e Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, vol. 1, 2, Interscience New York, 1963

[14] Lee, J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*, vol. 218, Springer Verlag, 2003.

[15] Libermann, P. Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique, *Astérisque*, vol. 107, 1983, 43–68.

[16] Marsden, J.E. e Ratiu, T.S. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, vol. 17. Springer Verlag, 1999.

[17] Marsden, J.E. e Weinstein, A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Reports on mathematical physics*, vol. 5, 1, Elsevier, 1974, 121–130

[18] McDuff, D. e Salamon, D. *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press, 1999.

[19] Meyer, K.R. Symmetries and integrals in mechanics, *Dynamical systems*, 1973, 259–273.

[20] Mikami, K. e Weinstein, A. Moments and reduction for symplectic groupoids, *Publications of the RIMS*, vol. 24, 1, 1988, 121–140.

[21] Milnor, J.W. e Stasheff, J.D. *Characteristic Classes*, vol. 76. Princeton University Press, 1974.

[22] Moerdijk, I. e Mrčun, J. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, vol. 91, Cambridge University Press, 2003.

[23] Warner, F.W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, vol. 94, Springer Verlag, 1982.

[24] Weinstein, A. Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, 1, 1987, 101–104.