

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM  
ENGENHARIA

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO

**SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA E DUAS  
DIMENSÕES USANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

TESE DE DOUTORADO

CURITIBA

2012

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO

**SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA E DUAS  
DIMENSÕES USANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Doutor em Ciências” – Área de Concentração: Programação Matemática.

Orientador: Liliana Madalena Gramani

Co-orientador: Eloy kavisk

**CURITIBA**

**2012**

Dedico este trabalho a Deus e aos Professores Liliana e Eloy por terem sempre proporcionado um ambiente de paz em minha vida.

## AGRADECIMENTOS

A Deus,

Por iluminar-me e permitir que meus desejos se realizem.

A Professora Liliana Madalena Gramani,

Pela excelente orientação, paciência e disponibilidade ao me acompanhar na realização deste trabalho.

Ao Professor Eloy kavisk,

Pela ótima co-orientação e ideias inovadoras.

Aos mestres, a minha gratidão pela amizade e pelos conhecimentos.

Aos colegas do curso,

Que nunca faltaram com o espírito de companheirismo e amizade.

A Maristela, secretária do Cesec,

Pelos excelentes cafezinhos e pela atenção em momentos difíceis.

Ao Jair, secretário do Cesec,

Pela presteza e carinhosa atenção.

A Edcarla e a minha querida filha Livia,

Minha eterna gratidão pelo tempo que não lhes dediquei.

Ao corpo docente da UTFPR, inclusive a Magda, Priscila, Sara, Viviane e Wellington,

Por dar condições e suporte aos meus estudos.

Ao meu irmão Adicherces e família,

Por cuidar dos meus pais enquanto estava ausente.

A Clícia, por me acompanhar em todos esses momentos com muita dedicação e carinho.

Ao meu orientando, Oilson,

Pela disposição em colaborar para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal do Paraná,

Por oferecer o curso.

Aos meus pais Oswaldo e Antonia,

Que além da vida, ainda revestiram minha existência de amor.

E a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Meu Muito Obrigado.

Todo erro se deve a fatores extrínsecos, como a emoção e a educação.  
A verdadeira razão nunca erra.

Kurt Gödel

## RESUMO

LOBEIRO, Adilandri. M.. Solução das Equações de Saint Venant em Uma e Duas Dimensões Usando o Método das Características. 315 f. Tese – Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

Embasando-se na teoria da cinemática dos fluidos, alcança-se, via Teorema de Transporte de Reynolds, as deduções necessárias para a obtenção das Equações de Saint Venant em uma e duas dimensões, não obstante tais equações são linearizadas, o que permite obter as equações da onda em uma e duas dimensões. Para solucionar estas equações, este texto discorre sobre o consagrado Método das Características, detalhando-o. Cabe observar que para o caso bidimensional encontrou-se as Pseudo-Characterísticas. Por meio deste método, e com o auxílio do *software Maple*, a solução de duas conhecidas equações da onda são obtidas, a Equação do Telégrafo, no caso de uma dimensão, e para avaliar a Vibração de uma Membrana Retangular, no caso de duas dimensões. Além disso, o Método das Características é aplicado para obter as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann, com o objetivo de solucionar as Equações de Saint Venant em uma e duas dimensões, em cada uma das situações um estudo de caso foi abordado de modo a expor a teoria desenvolvida. Para o caso unidimensional, analisou-se o escoamento da água em um canal retangular avaliando a velocidade e profundidade em posições específicas do comprimento do canal e em instantes de tempo pré-fixados, o que tornou possível estimar tais valores em qualquer ponto do canal por meio de uma função duas vezes continuamente diferenciável que foi obtida pela interpolação do tipo *Spline Cúbico Natural*. Para o caso em duas dimensões, um problema bidimensional de esvaziamento de um reservatório foi analisado utilizando as Equações de Saint Venant, obtendo-se como resultados a profundidade e a velocidade em duas direções, para instantes de tempo específicos e posições pré-fixadas no comprimento e largura do reservatório, tais resultados foram comparados com os dados obtidos por meio do já consagrado Método das Diferenças Finitas Explícitas. Importante ressaltar que, para o processo de resolução de cada uma das equações, uma *Maplet* foi idealizada e programada, a fim de ilustrar e avaliar numérica e graficamente os resultados obtidos por cada método descrito.

**Palavras-chave:** Onda, Saint Venant, Características, Bidimensional, Maple

## ABSTRACT

LOBEIRO, Adilandri. M.. Solution of Saint Venant equations in One and Two Dimensions Using the Method of Characteristics. 315 f. Tese – Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

Basing on the theory of the kinematics of the fluid is achieved via the Reynolds transport theorem, deductions required to obtain the Saint Venant equation in one and two dimensions, although such equations are linearized, which allows to obtain wave equations in one and two dimensions. To solve these equations, this text discusses the consecrated Method of Characteristics, detailing it. It should be noted that for the two-dimensional case met the Pseudo characteristics. By means of this method and with the aid of the software maple two known solution of the wave equation is obtained from Equation telegraph in case of one dimension, and to evaluate the vibration of a rectangular diaphragm in the case of two-dimensional . Furthermore, the method of characteristics is applied to obtain the slopes of Characteristic Curves and Riemann invariants in order to solve the Saint Venant equations in one and two dimensions, in each of the situations a case study was approached in to expose the theory developed. For the one dimensional case we analyzed the flow of water in a rectangular channel and evaluating the speed at specific positions depth of the channel length and time instants pre-set, making it possible to estimate these values at any point in the channel by through a twice continuously differentiable function which was obtained by interpolating the type Natural Cubic Spline. For the case in two dimensions, a problem of emptying a two-dimensional reservoir was analyzed using the Saint Venant equation, yielding results such as the depth and speed in both directions to specific time instants and positions prefixed length, and width of the reservoir, these results were compared with the data obtained by the already established Explicit Finite Difference Method. Importantly, for the process of solving each of the equations, one Maplet was designed and programmed in order to illustrate and evaluate numerically and graphically the results obtained by each method.

**Keywords:** Wave, Saint Venant, Characteristics, Bidirectional, Maple

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1– VELOCIDADE E ALTURA EM 1D .....	23
FIGURA 2.2– EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR PARA $U$ E $H$ EM 1D .....	26
FIGURA 2.3– SEÇÃO TRANSVERSAL EM UM CANAL .....	30
FIGURA 2.4– EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR PARA $U$ , $V$ E $H$ EM 2D .....	36
FIGURA 4.1– SISTEMA DE CAMINHOS DE PROPAGAÇÃO .....	57
FIGURA 4.2– UMA ÚNICA FAMÍLIA DE CARACTERÍSTICAS .....	58
FIGURA 4.3– DUAS FAMÍLIAS DE CARACTERÍSTICAS .....	58
FIGURA 4.4– CAMINHOS DE PROPAGAÇÃO DE UM PERFIL DE ONDA. ....	60
FIGURA 4.5– PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE ÁGUA SOBRE UM DEGRAU .....	63
FIGURA 4.6– PROPAGAÇÃO DE ÁGUA DE ONDA SOBRE UM DEGRAU .....	64
FIGURA 4.7– SUPERFÍCIE HIDRÁULICA .....	65
FIGURA 4.8– A REGIÃO DE INFLUÊNCIA DE UM PONTO $P$ .....	66
FIGURA 4.9– CURVAS INTEGRAIS PARA EDO DE PRIMEIRA ORDEM .....	69
FIGURA 4.10 CURVAS INTEGRAIS DEFINIDAS PELOS ELEMENTOS LINEARES	70
FIGURA 4.11 FORMAÇÃO DE UMA CURVA INTEGRAL POR UMA EDO .....	72
FIGURA 4.12 SUPERFÍCIE PLANAR .....	73
FIGURA 4.13 ELEMENTO PLANAR .....	73
FIGURA 4.14 ELEMENTO CÔNICO .....	75
FIGURA 4.15 FORMAÇÃO DA LINHA DIRIGENTE. ....	76
FIGURA 4.16 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE .....	77
FIGURA 4.17 ELEMENTOS CÔNICOS E CARACTERÍSTICAS. ....	77
FIGURA 4.18 ELEMENTOS PLANARES GERADOS POR EDP .....	79
FIGURA 4.19 CARACTERÍSTICA DE ORDEM ZERO E DE PRIMEIRA ORDEM ...	80
FIGURA 4.20 INTERSECÇÃO DE DOIS ELEMENTOS PLANARES .....	85
FIGURA 5.1– GRÁFICO PARA EO-1D .....	106
FIGURA 6.1– CARACTERÍSTICAS NO PLANO $XT$ .....	122
FIGURA 7.1– CIRCUITO ELÉTRICO .....	132
FIGURA 7.2– CIRCUITO ELÉTRICO EM UM INTERVALO .....	133
FIGURA 7.3– CURVAS CARACTERÍSTICAS .....	136
FIGURA 7.4– CARACTERÍSTICAS LINEARES .....	137
FIGURA 7.5– INCLINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS .....	138
FIGURA 7.6– CARACTERÍSTICAS NO PLANO $XT$ .....	139
FIGURA 7.7– <i>MAPLET</i> - TELÉGRAFO .....	143
FIGURA 7.8– TABELA DE RESULTADOS NUMÉRICOS REFERENTE A TENSÃO	144
FIGURA 7.9– GRÁFICO EM TRÊS DIMENSÕES, REPRESENTANDO $V(X, T)$ .....	145
FIGURA 7.10 EQUAÇÕES DA TENSÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO .....	146
FIGURA 7.11 GRÁFICOS DA TENSÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO .....	147
FIGURA 7.12 GRÁFICOS DA TENSÃO EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO .....	148
FIGURA 7.13 <i>FRAMES</i> DA ANIMAÇÃO REFERENTE A TENSÃO .....	149
FIGURA 7.14 GRÁFICO DAS RETAS CARACTERÍSTICAS PARA EO-2D .....	153
FIGURA 7.15 <i>FRAMES</i> - MEMBRANA - SÉRIES DE FOURIER .....	155
FIGURA 7.16 RETAS CARACTERÍSTICAS - MEMBRANA - EIXO $X$ .....	157



FIGURA 7.17	RETAS CARACTERÍSTICAS - MEMBRANA - EIXO Y .....	157
FIGURA 7.18	MAPLET - MEMBRANA .....	166
FIGURA 7.19	MEMBRANA - TABELA NUMÉRICA, EXTREMO INFERIOR .....	167
FIGURA 7.20	MEMBRANA - TABELA NUMÉRICA, EXTREMO SUPERIOR. ....	168
FIGURA 7.24	FRAMES - MEMBRANA - MC .....	169
FIGURA 8.1	CURVAS CARACTERÍSTICAS .....	172
FIGURA 8.2	RETAS CARACTERÍSTICAS .....	173
FIGURA 8.3	INCLINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS .....	174
FIGURA 8.4	CANAL COM DESCARGA A ESQUERDA .....	178
FIGURA 8.5	MAPLET - CANAL UNIDIMENSIONAL .....	186
FIGURA 8.6	TABELA DA VELOCIDADE .....	187
FIGURA 8.7	TABELA DA PROFUNDIDADE .....	187
FIGURA 8.8	GRÁFICO DA VELOCIDADE .....	188
FIGURA 8.9	GRÁFICO DA PROFUNDIDADE .....	188
FIGURA 8.10	EQUAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO $P_I$ .....	188
FIGURA 8.14	EQUAÇÃO DA PROFUNDIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO $P_I$ .....	188
FIGURA 8.12	EQUAÇÃO DA PROFUNDIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO: $P_{IS}$ ....	189
FIGURA 8.13	EQUAÇÃO DA PROFUNDIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO: $P_{FS}$ ...	189
FIGURA 8.14	EQUAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO: $P_{IS}$ .....	189
FIGURA 8.15	EQUAÇÃO DA VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO: $P_{FS}$ .....	189
FIGURA 8.16	VELOCIDADE EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO: 2S .....	190
FIGURA 8.17	PROFUNDIDADE EM FUNÇÃO DO DESLOCAMENTO: 2S .....	190
FIGURA 8.18	GRÁFICO DA PROFUNDIDADE PARA DIVERSOS TEMPOS .....	191
FIGURA 8.19	GRÁFICO DA PROFUNDIDADE PARA O TEMPO DE 70 S .....	191
FIGURA 8.20	GRÁFICO DA VELOCIDADE PARA DIVERSOS TEMPOS .....	191
FIGURA 8.24	GRÁFICO DA VELOCIDADE PARA O TEMPO DE 70 S .....	191
FIGURA 8.22	FRAMES ESV-1D .....	192
FIGURA 8.23	RESERVATÓRIO .....	195
FIGURA 8.24	RETAS CARACTERÍSTICAS PARA ESV-2D .....	198
FIGURA 8.25	MAPLET - RESERVATÓRIO .....	230
FIGURA 8.26	MAPLET - FRONTEIRA SIMPLES .....	232
FIGURA 8.27	MAPLET - FRONTEIRA DETALHADA .....	232
FIGURA 8.28	FRAMES DA ANIMAÇÃO DO ESVAZIAMENTO DO RESERVATÓRIO	234

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– ICCIR DA EO-1D VIA COMBINAÇÃO LINEAR .....	99
TABELA 2	– ICCIR DA EO-1D VIA DETERMINANTE .....	102
TABELA 3	– ICCIR DA EO-2D NA DIREÇÃO X .....	112
TABELA 4	– ICCIR DA EO-2D NA DIREÇÃO Y .....	114
TABELA 5	– ICCIR DAS ESV-1D VIA COMBINAÇÃO LINEAR .....	119
TABELA 6	– ICCIR DAS ESV-1D VIA DETERMINANTE .....	121
TABELA 7	– ICCIR DAS ESV-2D NA DIREÇÃO X .....	128
TABELA 8	– ICCIR DAS ESV-2D NA DIREÇÃO Y .....	130
TABELA 9	– MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EXPLÍCITAS .....	242

## LISTA DE SIGLAS

EDPs	Equações Diferenciais Parciais
ESV	Equações de Saint Venant
EO-1D	Equação da Onda em Uma Dimensão
GRP	Método do Problema de Riemann
DQM	Método de Integral Diferencial
MC	Método das Características
ESV-1D	ESV em uma dimensão
LBLR	Linear Backwater Lag-and-Route
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias
ESV-2D	ESV em duas dimensões
CNN	Rede Neural Celular
CNN-UM	CNN Universal Máquinas
CPDDE	Equação Diferencial da Diferença Parcial Celular
TTR	Teorema de Transporte de Reynolds
EO-2D	Equação da Onda em Duas Dimensões
ICCIR	Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann
EDP	Equação Diferencial Parcial
EDO	Equação Diferencial Ordinária

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
1.2	O QUE FOI FEITO DE NOVO NESTA TESE	18
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DE SAINT VENANT VIA TTR</b>	<b>20</b>
2.1	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA DIMENÇÃO	20
2.1.1	Equação da Conservação de Massa em Uma Dimensão	20
2.1.2	Equação do Momento Linear em Uma Dimensão	27
2.2	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM DUAS DIMENSÕES	35
2.2.1	Equação da Conservação de Massa em Duas Dimensões	35
2.2.2	Equação do Momento Linear em Duas Dimensões	38
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DA ONDA VIA LINEARIZAÇÃO DAS ESV</b>	<b>47</b>
3.1	LINEARIZAÇÃO DAS ESV-1D	47
3.1.1	Equações da Onda em Uma Dimensão	49
3.2	LINEARIZAÇÃO DAS ESV-2D	51
3.2.1	Equação da Onda em Duas Dimensões	53
<b>4</b>	<b>MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS</b>	<b>56</b>
4.1	UM CONCEITO PRELIMINAR	56
4.1.1	O Processo de Propagação e o Conceito de Característica	56
4.1.2	Processo de Propagação em Um Sistema Contínuo	59
4.1.3	Superfície de Soluções Analíticas e Não Analíticas.	62
4.2	DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DAS CARACTERÍSTICAS	68
4.2.1	Descrição Geométrica das EDOs	68
4.2.2	Descrição Geométrica das EDPs	72
4.2.3	A Formação de Superfícies Integrais por EDPs	74
4.3	DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS	79
4.3.1	Descontinuidades e Indeterminações ao Longo das Características	79
4.3.2	Sistemas de EDPs: O Caso indeterminado	81
4.3.3	EDPs de Primeira Ordem	84
4.3.4	EDPs de Segunda Ordem	87
	EDPs de Segunda Ordem com Mais Rigor	90
4.3.5	Sistemas de Duas EDPs Lineares de Primeira Ordem	94
<b>5</b>	<b>ICCIR DA EQUAÇÃO DA ONDA VIA MC</b>	<b>97</b>
5.1	EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA DIMENSÃO	97
5.1.1	ICCIR da EO-1D via Combinação Linear	97
5.1.2	ICCIR da EO-1D via Determinante	99
5.1.3	Solução Analítica da EO-1D	102
5.2	EQUAÇÃO DA ONDA EM DUAS DIMENSÕES	107
5.2.1	ICCIR da EO-2D : Ideia Unidimensional	107
5.2.2	ICCIR da EO-2D : Uma alternativa à Combinação Linear	110
<b>6</b>	<b>ICCIR PARA EQUAÇÕES DE SAINT VENANT VIA MC</b>	<b>115</b>

6.1	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA DIMENSÃO .....	115
6.1.1	ICCIR das ESV-1D via Combinação Linear .....	116
6.1.2	ICCIR das ESV-1D via Determinante .....	119
6.1.3	O Significado da Forma Característica .....	121
6.2	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT BIDIMENSIONAIS .....	123
6.2.1	ICCIR das ESV-2D via Combinação Linear : Ideia Unidimensional .....	123
6.2.2	ICCIR das ESV-2D: Uma alternativa à Combinação Linear .....	126
<b>7</b>	<b>APLICAÇÃO DO MC A EQUAÇÃO DA ONDA .....</b>	<b>131</b>
7.1	EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL .....	131
7.1.1	Dedução da Equação do Telégrafo .....	132
7.1.2	Dedução do MC para EDP Unidimensional .....	135
7.1.3	Aplicação do MC ao Problema do Telégrafo .....	141
7.1.4	Solução do Problema do Telégrafo via <i>Maplet</i> .....	143
7.2	EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL .....	150
7.2.1	Dedução do MC para EDP Bidimensional .....	150
7.2.2	Problema da Membrana Retangular .....	153
7.2.3	Aplicação do MC ao Problema da Membrana .....	156
7.2.4	Solução do Problema da Membrana Retangular via <i>Maplet</i> .....	166
<b>8</b>	<b>APLICAÇÃO MC AS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT .....</b>	<b>170</b>
8.1	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT UNIDIMENSIONAIS .....	170
8.1.1	Dedução do MC Para as ESV-1D Utilizando o Spline Cúbico .....	171
	O Método das Características em Uma Grade Retangular .....	171
	O Spline Cúbico Natural .....	176
8.1.2	Problema do Canal Retangular .....	178
8.1.3	Aplicação do MC ao Problema do Canal Retangular .....	179
8.1.4	Solução do Problema do Canal Retangular via <i>Maplet</i> .....	186
8.2	EQUAÇÕES DE SAINT VENANT BIDIMENSIONAIS .....	193
8.2.1	As ESV e as ICCIR .....	193
8.2.2	Problema do Reservatório .....	194
8.2.3	Aplicação do MC Para o Problema do Reservatório .....	195
	Pontos Interiores .....	195
	Fronteira Simples .....	202
	Fronteira Detalhada .....	205
	Pontos de Fronteira (Não Canto) .....	205
	Pontos de Canto .....	221
8.2.4	Solução do Problema do Reservatório via <i>Maplet</i> .....	230
<b>9</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>235</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>237</b>
	<b>APÊNDICE A – TABELA .....</b>	<b>241</b>
	<b>ANEXO A – CANAL UNIDIMENSIONAL .....</b>	<b>243</b>
	<b>ANEXO B – TELÉGRAFO .....</b>	<b>270</b>
	<b>ANEXO C – MEMBRANA .....</b>	<b>288</b>
	<b>ANEXO D – RESERVATÓRIO .....</b>	<b>296</b>

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo do escoamento não permanente em canais começou com os trabalhos dos matemáticos franceses Laplace (LAPLACE, 1775) e Lagrange (LAGRANGE, 1781, 1788). A fórmula de Lagrange (LAGRANGE, 1788) da celeridade para pequenas ondas em águas rasas, promoveu o primeiro impulso a esses estudos (MAHMOOD; YEVJEVICH, 1975).

Tratamentos avançados de fluxo não permanentes em canais começaram com o desenvolvimento de duas equações diferenciais parciais. A Academia Francesa de Ciências, em seu volume 73 de julho-dezembro de 1871, contém duas notas (VENANT, 1871), apresentado por Barré de Saint Venant, intitulada: *THEORIE DU MOUVEMENT NON-PERMANENT DES EAUX AVEC APPLICATION AUX CRUES DES RIVIERES ET A L'INTRODUCTION DES MAREES DANS LEUR LIT* (Aplicação da Teoria do fluxo de água não permanente às enchentes do rio e as propagação das marés nos canais) páginas, 148-154 e 237-240. Na primeira parte da nota, páginas 147 a 151, continua o tratamento da celeridade da onda referente a uma onda de um afluente discutido em um trabalho anterior. A segunda parte da nota de 1871 nas páginas 151-154 intitula-se: *THEORIE ET EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT NON PERMANENT DES EAUX COURANTES* (Teoria e equações gerais de fluxo não permanente em canais). Esta parte, cerca de três páginas, é a contribuição básica usualmente chamada “Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de Fluxo Não Permanentes de Saint Venant”. A nota de 1871 traz nas páginas 237-240 uma tentativa de integrar as equações de continuidade e momento. Essa tentativa, semelhante à abordagem de ondas cinemáticas de hoje, equivale a inclinação média do canal da linha de energia ao longo de uma onda. As duas equações, na forma original do documento de 1871, são:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wU)}{\partial s} = 0 \quad (1.1)$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\chi F}{\omega \rho g} \quad (1.2)$$

onde  $w$  é a área transversal,  $U$  é a velocidade média,  $\varepsilon$  é a posição da superfície da água acima do nível de referência,  $\chi F / \omega \rho g$  é o coeficiente de atrito,  $\chi$  é o perímetro molhado,  $\rho$  é a densidade da água,  $g$  é a aceleração gravitacional,  $\rho g$  é o peso específico,  $\rho g F$  é o atrito de fronteira por unidade de área,  $s$  é o comprimento ao longo do canal retangular prismática e  $t$  é o tempo.

Estas equações permaneceram inalterados durante cem anos de tentativas de modificá-las ou melhorá-las. Basicamente, as equações que resultaram destas várias tentativas são mais completas e mais sofisticadas, mas reduzem para as equações básicas de Saint Venant toda vez que simplificadas para uso prático.

Barré de Saint Venant era um homem de originalidade excepcional. No entanto, suas contribuições para o fluxo não permanente em canais não podem ser dissociadas das contribuições de seus antecessores e contemporâneos. Dentre eles, temos H.L. Patriot (PARTIOT, 1858, 1861a, 1861b, 1871), como um observador dos fenômenos naturais, estudou os movimentos das ondas das marés ao longo dos afluentes e generalizou esta área da hidráulica. Russel (RUSSELL, 1837, 1845) e Bazin (BAZIN, 1862, 1865) experimentou com o movimento das ondas ao longo dos canais, e assim juntou dados para verificação futura de teorias e fórmulas na celeridade e transformação da onda. Boussinesq (BOUSSINESQ, 1871, 1872, 1873, 1877b, 1877a), publicou vários trabalhos teóricos em sistemas hidráulicos, incluindo um em 1871 (BOUSSINESQ, 1871), após a publicação das notas de Saint Venant sobre onda isolada (solitária), e uma em 1872 (BOUSSINESQ, 1872) sobre a teoria da onda. No entanto, os motivos mais prováveis para o sucesso de Saint Venant na produção de suas duas equações parecem ser a sua filosofia de base de usar a matemática para formular problemas no sistema hidráulico. Ele teve ideia, tanto como engenheiro como físico-matemático, que os resultados da aplicação da matemática para a hidráulica, como em muitas outras partes da física, não pode ser melhor do que os axiomas e hipóteses que fundamentam o desenvolvimento de expressões matemáticas. As propriedades do fluido, como fenômenos descobertos através de observações na natureza ou obtidas por experimentação, são os fatores de orientação ao postular as equações de base hidráulica. Essa abordagem também parece ser bem confirmado pelo que se seguiu cem anos de pesquisas em hidráulica.

Os pressupostos básicos do desenvolvimento das Equações de Saint Venant (ESV) são:

- As ondas de superfície variam gradualmente, o que equivale a afirmar que a distribuição da pressão ao longo da vertical é hidrostática, ou que a aceleração vertical é pequena;

- As perdas por atrito no fluxo não permanente não são significativamente diferentes em fluxo permanente;
- Distribuição de velocidade em toda a área molhada não afetam substancialmente a propagação da onda;
- O movimento de onda pode ser considerada como bidimensional, com os efeitos de eventual diferença de níveis insignificante nas seções transversais ;
- A inclinação média do fundo do canal é tão pequena que o  $\sin \alpha$  pode ser substituído por  $\tan \alpha$ , e  $\cos \alpha$  pela unidade, onde  $\alpha$  é o ângulo formado pelo fundo do canal com a horizontal.

Tentativas foram feitas por vários investigadores para:

- Apresentar a aceleração vertical para ondas gradualmente variadas;
- Estudo e, eventualmente, introduzir a diferença de atrito entre o fluxo instável e estável (mudanças nas condições da camada limite), sob o termo geral de ondas gradualmente variadas;
- Adicionar as variações na terceira dimensão;
- Usar fundo curvo;
- Utilizar várias fórmulas para as perdas por atrito.

Estas tentativas fez aumentar a abrangência das ESV. No entanto, todas estas adições são nem modificações substanciais, nem mudanças significantes a partir da descrição matemática básica do fluxo instável em canais abertos fornecidos pelas ESV.

Destacam-se alguns trabalhos importantes em prol dos estudos das ESV nos últimos anos.

No ano de 1996, R. Moussa e C. Bocquillon desenvolveu um algoritmo para resolver as equações das ondas de difusão de roteamento de enchente. Essas equações são obtidas por negligenciar os termos de aceleração nas ESV e é usado em roteamento de enchentes em rios (MOUSSA; BOCQUILLON, 1996).

No ano de 1997, V.P. Singh, Guang-Te Wang e D.D. Adrian estudaram o roteamento de enchente baseado na equação da onda de difusão usando o método de mistura de células. A Equação da Onda em Uma Dimensão ( EO-1D) de difusão não linear é obtida das ESV negligenciando os termos de Inércia (SINGH; WANG; ADRIAN, 1997).



No ano de 1998, G.W. Tchamen e R.A. Kahawita modelaram efeitos de secas e enchentes sobre uma topografia complexa. O conjunto de equações modelo geralmente usado para este propósito é o modelo de água rasa de duas dimensões (TCHAMEN; KAHAWITA, 1998).

No ano de 2002, Guang-Te Wang, Shulin Chen, Jan Boll, C.O.Stocke e D.K. McCool fizeram a modelagem de um escoamento superficial baseado nas ESV para um sistema de alta inclinação discretizado (WANG et al., 2002).

No ano de 2003, Xiaoyong Zhan apresenta um modelo matemático e método numérico para o fluxo de água e transporte de soluto em uma rede fluvial de maré (ZHAN, 2003).

No ano de 2004 Xavier Litrico e Vincent Fromion investigaram os modos de ESV linearizadas e seus controles, mostrando que é possível suprimir os modos de oscilações sobre todo o canal prismático por um controlador dinâmico de fronteira bem projetado usando apenas a medida de nível da água a jusante no final do canal prismático. Observaram que esse controle possui infinitas dimensões o que torna difícil de implementá-lo num canal real (LITRICO; FROMION, 2004).

No ano de 2005 tem-se que:

- Xavier Litrico, Vincent Fromion, Jean Pierre Baume, Carina Arranja e Manuel Rijo expõe e valida uma metodologia baseada em um modelo hidráulico clássico, ESV, para projetar controladores automáticos eficientes para canais de irrigação de um reservatório, esse modelo foi obtido pela linearização das ESV onde é usado um método numérico para calcular a frequência responsável do sistema (LITRICO et al., 1995).
- Jian-Hu Feng, Li Cai, Wen-Xian Xie usou o esquema central a montante do tipo CWENO (central ponderado essencialmente não oscilatório) para calcular as soluções aproximadas do sistema de ESV de águas rasas em uma e duas dimensões (FENG; CAI; XIE, 2005).
- Xavier Litrico, Gilles Belaud, Jean Pierre Baume e José Ribot-Bruno apresentaram a modelagem hidráulica de um portão de controle de nível de água a montante automático (LITRICO et al., 2005).
- J. Burguete, P. Garcia-Navarro e J. Murillo apresentaram condições de contorno numérico para métodos conservadores de massa global para resolver as ESV, também conhecidas como equações de águas rasas, aplicadas ao fluxo em rio (BURGUETE; NAVARRO; MURILLO, 2005).
- Jiequan Li e Guoxian Chen estenderam o Método do Problema de Riemann ( GRP) para o sistema de equações de águas rasas com topografia de fundo (LI; CHEN, 2005).

- Christina W. Tsai estudou o roteamento de escoamento não permanente em rios de leve inclinação com profundidade de fluxo gradualmente variante induzido pelo efeito de remanso a jusante (TSAI, 2005).
- Emmanuel Audusse e Marie-Odile Bristeau publicaram um artigo nomeado “Uma positividade bem equilibrada preservando o esquema de segunda ordem para escoamento de água rasa em malhas não estruturadas”. Para isso, consideram as soluções das ESV com termo fonte com topografia em duas dimensões em malhas não estruturadas através de uma abordagem de volumes finitos (AUDUSSE; BRISTEAU, 2005).

No decorrer do ano de 2006, observa-se os trabalhos de:

- Mohammad R. Hashemi, Mohammad J. Abedini e Parviz Malekzadeh utilizaram-se do Método de Integral Diferencial (DQM) para simulações numéricas em escoamentos não permanentes em canais, onde discretizaram as ESV e as condições de contorno em um domínio espacial e temporal para aplicação do método. Este método mostrou-se poderoso com mínimo esforço computacional sendo convergente, preciso e rápido, apesar de ter sido a primeira tentativa de usá-lo no escoamento de fluxos em canais. Para validar as soluções DQM, os resultados obtidos foram comparados com os do Método das Características (MC) (HASHEMI; ABEDINI; MALEKZADEH, 2006).
- Xavier Litrico e Vincent Fromion analisaram o controle dos modos de oscilações que ocorrem em escoamentos em canais devido a propagação das ondas nas fronteiras, mostrando-se que são bem representados pelas ESV linearizadas. Para isso usaram uma função de transferência distribuída aproximada para calcular um controlador de fronteira dinâmico que cancela os modos de oscilação sobre os canais do reservatório. Este resultado é recuperado com a obtenção das Invariantes de Riemann no caso de um reservatório com canal horizontal e sem atrito (LITRICO; FROMION, 2006).

Já no ano de 2007, pode-se destacar:

- Babacar Toumbou, Daniel Y. Le Roux e Abdou Sene apresentaram um teorema de existência para um modelo de sedimentação em duas dimensões acoplado em um sistema de águas rasas com uma equação de transporte de sedimento. Um problema de dimensão finita é resolvido usando o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer (TOUMBOU; ROUX; SENE, 2007).
- Tomás Morales de Lima apresentou um modelo para os fluxos de águas rasas com fundo não plano feito de duas camadas de fluidos uma compressível e outra incompressível.

Para isso, generalizou-se o modelo clássico de Savage-Hutter (obtido pelas equações incompressíveis de Euler), adicionando uma camada superior compressível. Obteve-se um modelo do tipo águas de rasas, que admite uma desigualdade de dissipação de entropia, que preserva o estado estacionário de um lago em repouso e dá uma aproximação da superfície livre das equações compressíveis e incompressíveis de Euler (LIMA, 2007).

- Surabh Amin, Alexandre M. Bayen, Laurent El Ghaoui e and Shankar Sastry estudaram a Viabilidade robusta para o controle de fluxo de água num sistema de canal de reservatório (AMIN et al., 2007).
- Mohammad R. Hashemi, Mohammad J. Abedini e Parviz Malekzadeh aplicaram pela primeira vez o DQM em escoamentos não permanentes em canais. Mostraram que o DQM é rápido, convergente e preciso. Para aplicar o método discretizaram as ESV em uma dimensão (ESV-1D) e as condições de contorno em um domínio temporal e espacial (HASHEMI; MOHAMMAD; MALEKZADEH, 2007).

No ano de 2008, relatam-se os artigos:

- Simon Munier, Xavier Litrico, Gilles Belaud e Pierre Olivier Malaterre que propuseram um novo modelo, chamado de “Linear Backwater Lag-and-Route” (LBLR), que aproxima as ESV linearizadas em torno de um fluxo não-uniforme em um escoamento finito (com uma condição de contorno a jusante) (MUNIER et al., 2008).
- M. Gugat e G. Leugering estudaram a controlabilidade da fronteira global de um sistema de ESV para canais inclinados com atrito. Mostrou-se que começando suficiente próximo de um estado inicial subcrítico constante estacionário pode-se controlar o sistema em tempo finito para uma vizinhança  $C^1$  de qualquer outro estado subcrítico constante estacionário por controle de fronteira nas extremidades do canal, de tal forma que durante o processo o estado do sistema permanece continuamente diferenciável (GUGAT; LEUGERING, 2008).
- Carole Delenne, Vincent Guinot e Bernard Cappelaere apresentaram uma solução via Riemann para as ESV em combinação com problema de sensibilidade quando as soluções são descontínuas. A solução é baseada na suposição inicial de duas ondas de rarefação. A posteriori a presença de choques é detectado e um termo extra de sensibilidade na forma de um termo fonte de Dirac é considerado nas equações de equilíbrio de sensibilidade (DELENNE; GUINOT; CAPPELAERE, 2008).

- S.J. Chum e G.P.Merkley fizeram um algoritmo para aproximar as soluções das Equações Diferenciais Ordinárias ( EDOs) na forma característica das ESV em escoamento não permanente gradualmente variado em uma dimensão em canais de irrigação prismático (CHUN; MERKLEY, 2008a).

No ano de 2009, Vu Due Thai e Pham Thuong Cat publicaram o artigo nomeado “Resolvendo as ESV em duas dimensões ( ESV-2D) utilizando a Rede Neural Celular ( CNN)”. Descrevem neste trabalho, que até agora, PCs foram usados para resolver estas equações, mas não satisfazem tais exigências, portanto, melhores instalações são necessárias. A CNN e a CNN Universal Máquinas ( CNN-UM) com a arquitetura de computação paralela física têm pesquisado e desenvolvido novas maneiras para resolver vários tipos de EDPs (THAI; CAT, 2009).

No ano de 2010, tem-se:

- Vu Duc Thai e Pham Thuong Cat introduziram um modelo de CNN de duas camadas para resolver as ESV em uma dimensão, onde analisaram as questões de aproximação e equivalência topológica entre a Equação Diferencial da Diferença Parcial Celular ( CPDDE) e as EDPs originais. A estabilidade do sistema CNN também é provado ao descobrir o equilíbrio do estado e da saída de cada célula (THAI; CAT, 2010).
- Mathias Foo, Nadia Bedjaoui e Erik Weyer publicaram um artigo nomeado “Segmentação de um rio usando as ESV”. Para isso o rio foi dividido em segmentos que são trechos onde a geometria do rio e o atrito são assumidos constantes. Estudos de simulação mostraram que alguns poucos segmentos são suficientes para representar o rio com boa precisão (FOO; BEDJAOU; WEYER, 2010).

No ano de 2011, tem-se

- Mohammad Rafiee, Andrew Tinka, Jerome Thai e Alexandre M. Bayen publicaram o artigo sobre estimativa combinando estado-parâmetro para equações de águas rasas. Neste artigo, um método para assimilar os dados nas equações de águas rasas, quando alguns dos parâmetros são desconhecidos é apresentado. As ESV-1D são usadas como um modelo de fluxo de escoamentos em canais. Usando estas equações um modelo de estado não linear é obtido (RAFIEE et al., 2011).

## 1.2 O QUE FOI FEITO DE NOVO NESTA TESE

Descreve-se abaixo o que é inédito nesta tese.

- a) Derivou o modelo matemático para o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos, ESV, por meio do Teorema de Transporte de Reynolds ( TTR) em duas dimensões.
- b) Derivou pelo MC as soluções para as ESV em duas dimensões.
- c) Obteve soluções numéricas para os sistemas de EDOs obtidas pelo MC para a Equação da Onda em Duas Dimensões ( EO-2D). Em particular, resolveu o problema da vibração da membrana retangular.
- d) Obteve soluções numéricas para as ESV-2D com uso do MC, onde resolveu o problema bidimensional de esvaziamento de um reservatório.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A estrutura dessa tese está organizada em mais sete capítulos descritas brevemente abaixo:

- no capítulo 2 deduz-se detalhadamente via TTR as ESV em uma e duas dimensões;
- no capítulo 3 obtém-se as equações da onda em uma e duas dimensões via linearização das ESV;
- no capítulo 4 descreve-se detalhadamente o MC;
- no capítulo 5 aplica-se o MC para obter as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann ( ICCIR) para a equação da onda em uma e duas dimensões.
- no capítulo 6 aplica-se o MC para obter as ICCIR para as ESV em uma e duas dimensões.
- no capítulo 7 aplica-se o MC para obter a solução de duas conhecidas equações da onda, a Equação do Telégrafo, no caso de uma dimensão, e para avaliar a Vibração de uma Membrana Retangular, no caso de duas dimensões.
- no capítulo 8 utiliza-se as ICCIR para estudo de casos das ESV em uma e duas dimensões.
- Nos anexos A, B, C e D disponibiliza-se os códigos das Maplets programadas para obter as soluções dos problemas apresentados.

## 2 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT VIA TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

Há uma série de métodos para obter as ESV. Cada um tem suas vantagens na medida em que mostra algumas das hipóteses e aproximações que vão para as equações. Provavelmente a mais elegante das derivações parte das equações de Navier-Stokes da hidrodinâmica. No entanto, a derivação fornecida via TTR apresentada a seguir é escolhida por sua simplicidade.

Neste capítulo deduz-se com uso do TTR as ESV em uma e duas dimensões.

### 2.1 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA DIMENSÃO

Nesta seção deriva as ESV-1D, também conhecidas como equações de água rasa ou equações de conservação de massa e momento em uma dimensão, com uso do TTR.

#### 2.1.1 Equação da Conservação de Massa em Uma Dimensão

Admite-se o princípio de conservação de massa de fluido: “a variação da massa de fluido no interior de  $\Omega$ , em relação ao tempo, é igual ao fluxo de fluido através da fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ ”. Assim o princípio de conservação da massa para um sistema<sup>1</sup> diz que a taxa de variação temporal da massa do sistema é igual a zero, ou seja,

$$\frac{DM_{sis}}{Dt} = 0, \quad (2.1)$$

onde a massa do sistema,  $M_{sis}$ , pode ser representada por

$$M_{sis} = \int_{sis} \rho dV. \quad (2.2)$$

Note que esta integração cobre todo o volume do sistema. A equação (2.2) estabelece que a massa do sistema é igual a somatória das massas de todos os volumes elementares (a massa de um volume elementar é igual ao produto da massa específica do material pelo volume elemen-

<sup>1</sup>Um sistema é definido como uma quantidade fixa e identificável de material.

tar).

A aplicação do TTR ao caso ilustrado resulta em

$$\frac{D}{Dt} \int_{sis} \rho d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho d\mathcal{V} + \int_{sc} \vec{V} \cdot \hat{n} dA, \quad (2.3)$$

ou seja, a taxa de variação temporal da massa do sistema na equação (2.3) está expressa pela soma da taxa de variação temporal da massa contida no volume de controle,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho d\mathcal{V}, \quad (2.4)$$

com a vazão líquida de massa na superfície de controle

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.5)$$

O termo  $\vec{V} \cdot \hat{n} dA$  na integral da vazão em massa representa o produto da componente do vetor velocidade perpendicular a uma pequena porção da superfície de controle e a área diferencial  $dA$ . Assim,  $\vec{V} \cdot \hat{n} dA$  é a vazão em volume através da área  $dA$  e  $\rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$  é a vazão em massa através de  $dA$ . Ainda mais, o sinal do produto escalar  $\vec{V} \cdot \hat{n}$  é positivo quando o escoamento é para fora do volume de controle e negativo para os escoamentos que alimentam o volume de controle porque  $\hat{n}$  é considerado positivo quando aponta para fora do volume de controle. Obtém-se a vazão líquida de massa no volume de controle somando todas as contribuições diferenciais  $\rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$  que existem na superfície de controle, ou seja,

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e, \quad (2.6)$$

onde  $\dot{m}$  é a vazão em massa ( $kg/s$ ).

A expressão para a conservação da massa num volume de controle também é conhecida como a equação da continuidade. Combinando as equações (2.1), (2.2) e (2.3), obtém-se uma equação de conservação da massa adequada a volumes de controle fixos e não deformáveis. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\mathcal{V} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) mostra que a soma da taxa de variação temporal da massa no volume de controle com a vazão líquida de massa na superfície de controle tem que ser nula para que a massa seja conservada.

Uma expressão muito utilizada para a avaliação da vazão em massa,  $\dot{m}$ , numa seção da superfície de controle que apresenta área  $A$  é

$$\dot{m} = \rho Q = \rho AU , \quad (2.8)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $Q$  é a vazão em volume ( $m^3/s$ ) e  $U$  é o comportamento do vetor velocidade perpendicular a área  $A$ . Como

$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA , \quad (2.9)$$

a aplicação da equação (2.8) envolve a utilização de valores representativos das médias da massa específica do fluido,  $\rho$ , e da velocidade do escoamento na seção considerada. Normalmente considera uma distribuição uniforme da massa específica do fluido em cada seção de escoamento dos escoamentos compressíveis e permite-se que as variações de massa específica ocorram apenas de uma seção para outra. O valor da velocidade que deve ser utilizado na equação (2.8) é o médio do componente do vetor velocidade normal a área que está sendo analisando. O valor médio,  $\bar{V}$ , é definido por

$$\bar{V} = \frac{\int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA}{\rho A} . \quad (2.10)$$

Se o perfil de velocidade do escoamento é uniforme na seção transversal que apresenta área  $A$  (escoamento unidimensional), tem-se

$$\bar{V} = \frac{\int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA}{\rho A} = V . \quad (2.11)$$

A barra indica que deve utilizar o valor médio da velocidade quando a distribuição de velocidade na seção transversal não é uniforme, no entanto, quando o escoamento for uniforme a barra sobre a velocidade não é utilizada para indicar que está operando com o valor médio da velocidade na seção de escoamento.

O pressuposto básico da teoria de água rasa é que a pressão varia hidrostáticamente na vertical

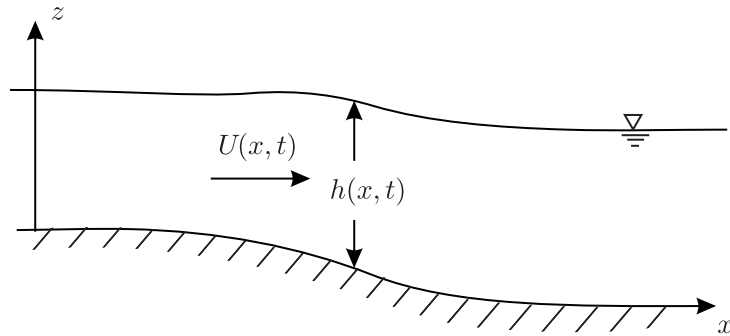
$$p = \rho g(h - z) \quad \text{se} \quad z \leq h , \quad (2.12)$$

onde  $z$  é igual a coordenada vertical e  $h$  é a profundidade da água (ver figura 2.1),  $\rho$  é a densidade do líquido e  $g$  é a aceleração gravitacional<sup>2</sup>. A equação acima é o pressuposto básico da teoria

<sup>2</sup>Neste capítulo o sistema de coordenada  $(x, y, z)$  é usado com  $x$  na direção do fluxo inicial,  $y$  na direção horizontal normal para o fluxo inicial e  $z$  na direção vertical. Isso parte das notações algumas vezes usadas para um fluxo de uma direção, com  $x$  na direção do fluxo e  $y$  na direção vertical. De maneira semelhante,  $U$ ,  $V$  e  $W$  são



da água rasa de primeira ordem que é usado principalmente em aplicações de engenharia (teoria da onda solitária e o salto undular hidráulico sendo exceções).



**Figura 2.1: Velocidade e Altura em 1D**

Fonte: (CHAUDHRY, 1993)

A derivação a seguir é para as equações unidimensional em que as variáveis dependentes são a velocidade média  $U$  e profundidade  $h$ , e as variáveis independentes são a distância longitudinal  $x$  e o tempo  $t$ . A dimensão vertical é suprimida quando todas as quantidades são em média na direção vertical. A outra dimensão horizontal é adicionada mais tarde, como são as características mais complexas das equações. Note que o sistema de coordenadas não é totalmente ortogonal em que  $x$  se encontra no leito do canal e  $z$  é vertical. Este arranjo pressupõe que o cosseno da inclinação do canal é de aproximadamente uma unidade.

Têm-se da equação (2.7) que

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho U \cdot \vec{n} dA = 0 \\
 \Rightarrow & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} dV + \rho \int_{SC} U \cdot \vec{n} dA = 0 \\
 \Rightarrow & \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} dV + \int_{SC} U \cdot \vec{n} dA \right] = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x) + \int_{SC} U \cdot \vec{n} dA = 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x) + U_2 A_2 - U_1 A_1 = 0 . \tag{2.14}$$

**Observação 2.1** *Uma série de Taylor é uma expansão de uma série de funções ao redor de*

usados para velocidade médias nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, ao invés de  $V$  para velocidade média em um fluxo de uma dimensão na direção  $x$ .

um ponto. Uma série de Taylor de uma dimensão é uma expansão de uma função real  $f(x)$  ao redor do ponto em que  $x$  assume um valor qualquer (por exemplo,  $a$ ). Neste caso, escreve-se a série da seguinte maneira:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \quad (2.15)$$

A constante  $a$  é o centro da série que pode ser encarada como uma função real ou complexa. Se  $a = 0$ , a série também é chamada de Série de Maclaurin (de Colin Maclaurin).

A série de Taylor associada a uma função  $f$  infinitamente diferenciável (real ou complexa) definida em um intervalo aberto  $(a-r, a+r)$  é a série de potências dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (2.16)$$

onde,  $n!$  é o fatorial de  $n$  e  $f^{(n)}(a)$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

A série de Taylor pode também ser definida para funções de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nesse caso, tem-se que a série de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  é dada por:

$$f : \quad \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad (2.17)$$

onde

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}; \sum_{i=1}^n \alpha_i = k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X_0) (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \right) \quad (2.18)$$

Tem-se, para:

1.  $k = 0$ ;

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(X_0) \quad . \quad (2.19)$$

2.  $k = 1$ ;

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(X_0) + \sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}; \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1} \frac{1!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^1 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X_0) (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \quad (2.20)$$

3.  $k = 2$ ;

$$\begin{aligned}
 f(x_1, \dots, x_n) &= f(X_0) + \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbb{N}; \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1}} \frac{\partial^1 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X_0) (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \\
 &+ \sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}; \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2} \frac{2!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X_0) (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

*A primeira coisa a notar é que não se pode, em geral, calcular todos os termos de uma série de Taylor infinita em um tempo finito! Na verdade, para calcular mais de dois é um tanto tedioso.*

Utilizando uma expansão em Série de Taylor, baseada no centro do elemento, para calcular a velocidade média e a área onde desprezam-se os termos de ordem maior que 1, têm-se

$$U_1 = U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \tag{2.22}$$

$$U_2 = U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \tag{2.23}$$

$$A_1 = A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \tag{2.24}$$

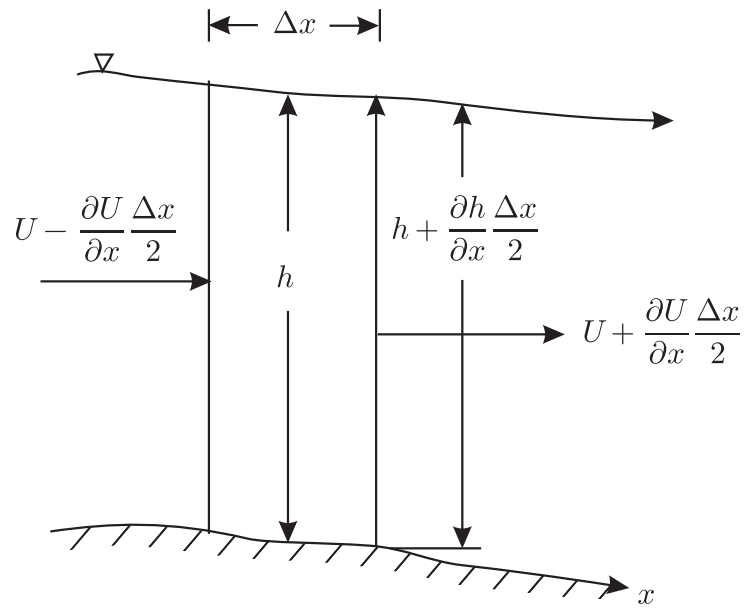
e

$$A_2 = A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \tag{2.25}$$

conforme Figura 2.2.

De (2.22)-(2.25), têm-se

$$\begin{aligned}
 U_2 A_2 - U_1 A_1 &= \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\
 &= UA + U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 - UA + U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &\quad + A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \tag{2.26} \\
 &= 2U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &= U \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + A \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x
 \end{aligned}$$



**Figura 2.2: Expansão em Série de Taylor para  $U$  e  $h$  em 1D**

Fonte: (CHAUDHRY, 1993)

Substituindo a equação (2.26) em (2.14), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(A\Delta x) + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow & \Delta x \frac{\partial A}{\partial t} + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow & \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial A}{\partial t} + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Uma expressão muito utilizada para a avaliação da vazão em massa,  $\dot{m}$ , numa seção da superfície de controle que apresenta área  $A$  é

$$\dot{m} = \rho Q = \rho A U \quad , \tag{2.28}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $Q$  é a vazão em volume ( $m^3/s$ ) e  $U$  é o comportamento do vetor velocidade perpendicular a área  $A$ . Desta forma, têm-se  $Q = AU$ , logo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \quad . \tag{2.29}$$

Substituindo a equação (2.29) na equação (2.27), tem-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad . \tag{2.30}$$

Sendo  $A = bh$  e  $Q = AU$ , obtêm-se

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.31)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(AU)}{\partial x} = \frac{\partial(bhU)}{\partial x} = b \frac{\partial(hU)}{\partial x} . \quad (2.32)$$

Substituindo as equações (2.32) e (2.31) na equação (2.30), tem-se

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0 , \quad (2.33)$$

o que implica em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0 , \quad (2.34)$$

que representa a Equação de Conservação de Massa em uma dimensão.

### 2.1.2 Equação do Momento Linear em Uma Dimensão

A segunda lei de Newton, para sistemas, estabelece que:

“Taxa de variação temporal da quantidade de movimento do sistema é igual a soma das forças externas que atuam no sistema”.

A quantidade de movimento de um sistema é igual ao produto de sua massa por velocidade. Assim, uma pequena partícula com massa  $\rho dV$  apresenta quantidade de movimento igual a  $V\rho dV$  e um sistema apresenta quantidade de movimento  $\int_{sis} V\rho dV$ . Aplicando este resultado na segunda lei de Newton,

$$\frac{D}{Dt} \int_{sis} V\rho dV = \sum \vec{F}_{sis} . \quad (2.35)$$

Qualquer referencial, ou sistema de coordenadas, onde esta afirmação é válida é denominado inercial. Um sistema de coordenadas fixo é inercial e um sistema de coordenadas que se desloca numa linha reta com velocidade constante também é inercial.

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento da equação da quantidade de movimento linear adequada a volumes de controle. Quando o volume de controle é coincidente com o sistema, as forças que atuam no sistema e as forças que atuam no conteúdo do volume de controle

coincidente são instantaneamente idênticas, ou seja,

$$\sum \vec{F}_{sis} = \sum \vec{F}_{\text{conteúdo do VC coincidente}} \quad (2.36)$$

A aplicação do teorema de transporte de Reynolds no sistema e no conteúdo do volume de controle coincidente, que é fixo e indeformável, fornece

$$\frac{D}{Dt} \int_{sis} V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dV + \int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA, \quad (2.37)$$

ou seja, a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do sistema é igual a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do conteúdo do volume de controle mais o fluxo líquido de quantidade de movimento linear através da superfície de controle.

A equação (2.37) estabelece que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear é dada pela soma de duas quantidades relacionadas ao volume de controle: a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do conteúdo do volume de controle e o fluxo líquido de quantidade de movimento linear através da superfície de controle. As partículas de fluido que cruzam a superfície de controle transportam quantidade de movimento e, assim, detecta-se um fluxo líquido de quantidade de movimento linear na superfície do volume de controle.

Combinando as equações (2.35), (2.36) e (2.37) pode-se obter uma formulação matemática da segunda lei de Newton para volumes de controle fixos (inerciais) e indeformáveis,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dV + \int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \sum \vec{F}_{\text{conteúdo do VC}} \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é conhecida como a equação da quantidade de momento linear.

As forças que compõem a somatória

$$\sum \vec{F}_{\text{conteúdo do VC coincidente}}, \quad (2.39)$$

são as de campo e as superfícies que atuam no conteúdo do volume de controle. A única força de campo considerada neste capítulo é a associada a aceleração da gravidade. As forças de superfície são exercidas no conteúdo do volume de controle pelo material localizado na vizinhança imediata e externa ao volume de controle. Por exemplo, uma parede em contato com o fluido pode exercer uma força superficial de reação no fluido que ela confina. De modo análogo, o fluido na vizinhança interna da interface comum (normalmente isto ocorre em regiões da superfície de controle onde se detecta escoamento de fluido).

Na direção  $x$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV + \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA = \sum \vec{F}_{x,VC} . \quad (2.40)$$

Considerando a primeira integral do primeiro membro, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ U \int_{VC} dV \right] \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} [U \cdot V] \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (U \cdot A \Delta x) \quad , \\ &= \rho \Delta x \frac{\partial}{\partial t} (AU) \\ &= \rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde  $Q = A \cdot U$ .

Resolvendo também a segunda integral do primeiro membro, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA &= \rho (U_2^2 A_2 - U_1^2 A_1) \\ &= \rho \left[ \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \\ &= \rho \left[ U^2 + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2}_{=0} \right] \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\ &\quad - \rho \left[ U^2 - 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2}_{=0} \right] \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (2.42) \\ &= \rho \left[ U^2 + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \rho \left[ U^2 - 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\ &= \rho \left[ U^2 A + U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \\ &\quad - \rho \left[ U^2 A - U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - 2UA \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \\ &= \rho \left[ 2U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 4AU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \\ &= \rho \left[ U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right] \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.41) e (2.42) na equação (2.40), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV + \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA = \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \left[ U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right] = \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2\rho AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x = \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \right] = \sum \vec{F}_{x,VC} , \quad (2.43) \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot U^2) \right] = \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot U \cdot U) \right] = \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow & \rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q \cdot U) \right] = \sum \vec{F}_{x,VC}
 \end{aligned}$$

onde  $Q = A \cdot U$ .

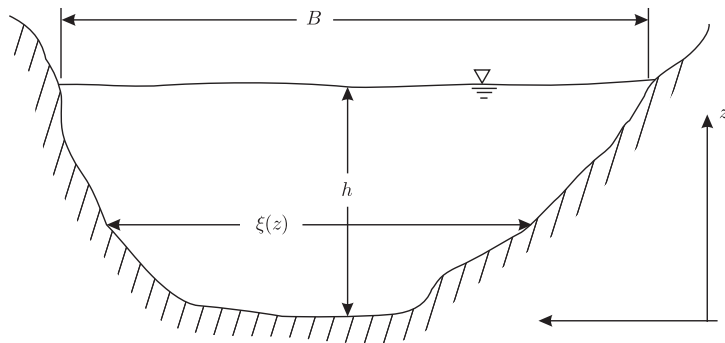
Considerando três tipos de forças: gravidade, pressão e força de atrito. Todos estas na direção  $x$ , tem-se

$$\sum \vec{F}_{x,VC} = F_{p1} - F_{p2} + \Delta F_p - F_s + F_g . \quad (2.44)$$

A força de pressão em uma seção vertical em água de profundidade  $h$  por unidade de largura é

$$F_p = \int_0^h p dA = \int_0^h \underbrace{\rho g(h-z)}_{\text{pressão}=p} \underbrace{\xi(z) dz}_{dA} , \quad (2.45)$$

em que  $\xi(z)$  é a largura do canal na altura  $z$  acima do fundo, conforme Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Um corte de forma transversal em um canal arbitrário

Fonte: (CHAUDHRY, 1993)



Da equação (2.45), tem-se

$$\begin{aligned}
 \Delta F_p &= \int_0^h \rho g(h-z) (\xi_2(z) - \xi_1(z)) dz \\
 &= \int_0^h \rho g(h-z) \left[ \left( \xi(z) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( \xi(z) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] dz \\
 &= \rho g \int_0^h (h-z) 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} dz \\
 &= \rho g \int_0^h (h-z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x dz
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho g(h-z) \xi(z) dz \\
 &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [\rho g(h-z) \xi(z)] dz \\
 &= \rho g \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [(h-z) \xi(z)] dz \\
 &= \rho g \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (h-z) \xi(z) + (h-z) \frac{\partial}{\partial x} (\xi(z)) dz \\
 &= \rho g \int_0^h \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \xi(z) + (h-z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] dz \\
 &= \rho g \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h \xi(z) dz}_A + \rho g \int_0^h (h-z) \frac{d\xi}{dx} dz \\
 &= \rho g \left[ \frac{\partial h}{\partial x} A + \int_0^h (h-z) \frac{d\xi}{dx} dz \right]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Como

$$F_{p1} = F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \tag{2.48}$$

e

$$F_{p2} = F_p + \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} , \tag{2.49}$$

segue que

$$\begin{aligned}
 F_{p1} - F_{p2} + \Delta F_p &= \left( F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( F_p + \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) + \Delta F_p \\
 &= F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \Delta F_p \\
 &= -2 \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \Delta F_p \\
 &= -\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + \Delta F_p
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.46) em (2.50), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 F_{p1} - F_{p2} + \Delta F_p &= -\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + \Delta F_p \\
 &= -\rho g \left[ \frac{\partial h}{\partial x} A + \int_0^h (h-z) \frac{d\xi}{dx} dz \right] \Delta x + \rho g \int_0^h (h-z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x dz \\
 &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x - \rho g \int_0^h (h-z) \frac{d\xi}{dx} dz \Delta x + \rho g \int_0^h (h-z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x dz \\
 &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

A força de atrito (resistência de atrito) se manifesta por meio de um corte ao longo do fundo e dos lados de um canal. Têm-se

$$F_s = \tau p \Delta x \tag{2.52}$$

onde  $\tau$  é a tensão tangencial, ou ainda,

$$\tau = \frac{h_l}{\Delta x} \rho g \frac{A}{p} = S_{f_x} \rho g \frac{A}{p}, \tag{2.53}$$

onde  $S_{f_x} = h_l / \Delta x$ . Substituindo (2.53) em (2.52), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 F_s &= \tau p \Delta x \\
 &= \left( S_{f_x} \rho g \frac{A}{p} \right) p \Delta x \\
 &= S_{f_x} \rho g A \Delta x
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

A força devida à gravidade é a componente de peso ao longo do canal

$$F_g = \omega \sin \theta_x = \underbrace{\rho g A \Delta x}_{\omega} \sin \theta_x, \tag{2.55}$$

em que  $\theta_x$  é o ângulo que o eixo  $x$  faz com horizontal. Consistente com essa hipótese de pequena inclinação do seno do ângulo considera-se igual à tangente do ângulo que é propriamente o

ângulo. Portanto,  $\sin \theta_x = \tan \theta_x$  passa a ter a inclinação do canal,  $S_{0_x}$ , de onde resulta

$$F_g = \rho g A \Delta x S_{0_x} . \quad (2.56)$$

Das equações (2.43) e (2.44), têm-se

$$\rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q.U) \right] = F_{p_1} - F_{p_2} + \Delta F_p - F_s + F_c . \quad (2.57)$$

Substituindo as equações (2.51), (2.54) e (2.56) em (2.57), obtêm-se

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q.U) \right] &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x - (S_{f_x} \rho g A \Delta x) + \rho g A \Delta x S_{0_x} \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q.U) &= -g \frac{\partial h}{\partial x} A - S_{f_x} g A + g A S_{0_x} \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U.Q) + g A \frac{\partial h}{\partial x} &= g A S_{0_x} - S_{f_x} g A \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U.Q) + g A \frac{\partial h}{\partial x} &= g A (S_{0_x} - S_{f_x}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde  $Q = UA$ . Observe que

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = U \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.59)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \cdot Q) = U \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial x} . \quad (2.60)$$

Substituindo as equações (2.59) e (2.60) em (2.58), obtêm-se

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + U \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + Q \frac{\partial U}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} = g A (S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (2.61)$$

Substituindo a equação (2.30) na equação (2.61) e sabendo que  $Q = AU$ , têm-se

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot A \frac{\partial U}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} = g A (S_{0_x} - S_{f_x}) , \quad (2.62)$$

concluindo que

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (2.63)$$

A equação (2.63) é conhecida como Equação da Quantidade de Momento Linear em uma dimensão.

**Observação 2.2** O sistema de ESV-1D escrito na forma reduzida é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \end{cases} \quad (2.64)$$

onde:

- $h$  é a profundidade do canal;
- $g$  é constante gravitacional;
- $U$  é a velocidade média na direção  $x$ ;
- $\frac{\partial h}{\partial x}$  é a declividade da superfície da água;
- $\frac{\partial h}{\partial t}$  é a variação da profundidade com o tempo;
- $\frac{\partial U}{\partial x}$  é a variação da velocidade com a distância;
- $\frac{\partial U}{\partial t}$  é a variação da velocidade com o tempo;
- $S_{0_x}$  é a declividade do canal;
- $S_{f_x}$  é a declividade da linha de energia.

Do sistema (2.64), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = gh(S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (2.65)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & h \frac{\partial U}{\partial t} + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & h \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot 0 + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(S_{0_x} - S_{f_x}) , \quad (2.66) \\ \Rightarrow & h \frac{\partial U}{\partial t} + U \left[ \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh)}_{=0} \right] + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{U \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + Uh \frac{\partial U}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x}(U.Uh)} + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0x} - S_{fx}) \\
\Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U(Uh)) + \frac{2gh}{2} \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2.67) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x}(h^2) &= gh(S_{0x} - S_{fx})
\end{aligned}$$

■

O sistema de ESV-1D (2.64) está na sua forma reduzida, porém, para algumas aplicações de diferenças finitas é importante que ele esteja na forma (2.68), que é chamada de *forma conservativa*

$$\left\{ \begin{array}{l} (h)_t + (Uh)_x = 0 \\ (Uh)_t + \left( U^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = gh(S_{0x} - S_{fx}) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

## 2.2 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM DUAS DIMENSÕES

Na Seção (2.1) as ESV foram apresentadas em sua forma unidimensional que é a mais simples. Muitas aplicações de fluxo não permanentes são mais complexas e requerem termos adicionais ou modificação dos termos. Nesta seção obtêm-se as ESV, ou as Equações de Conservação de Massa e Momento Linear na forma bidimensional, utilizando o TTR.

### 2.2.1 Equação da Conservação de Massa em Duas Dimensões

Aplicações bidimensionais trazem uma coordenada “horizontal”,  $y$ , perpendicular à  $x$ . Nesse caso, deve se considerar na Equação de Conservação da Massa a possibilidade de que o líquido entra e sai do volume de controle elementar através da face normal do eixo  $y$ .

Considerando  $\vec{V} = U\vec{i} + V\vec{j}$ , tem-se da equação (2.7) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\mathcal{V} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(A\Delta x\Delta y) + (U_2A_2 - U_1A_1)\Delta y + (V_2A_2 - V_1A_1)\Delta x &= 0 \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Utilizando uma expansão em Série de Taylor, baseada no centro do elemento, para calcular a velocidade média e a área onde desprezam-se os termos de ordem maior que 1, têm-se

$$U_1 = U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (2.70)$$

$$U_2 = U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (2.71)$$

$$V_1 = V - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}, \quad (2.72)$$

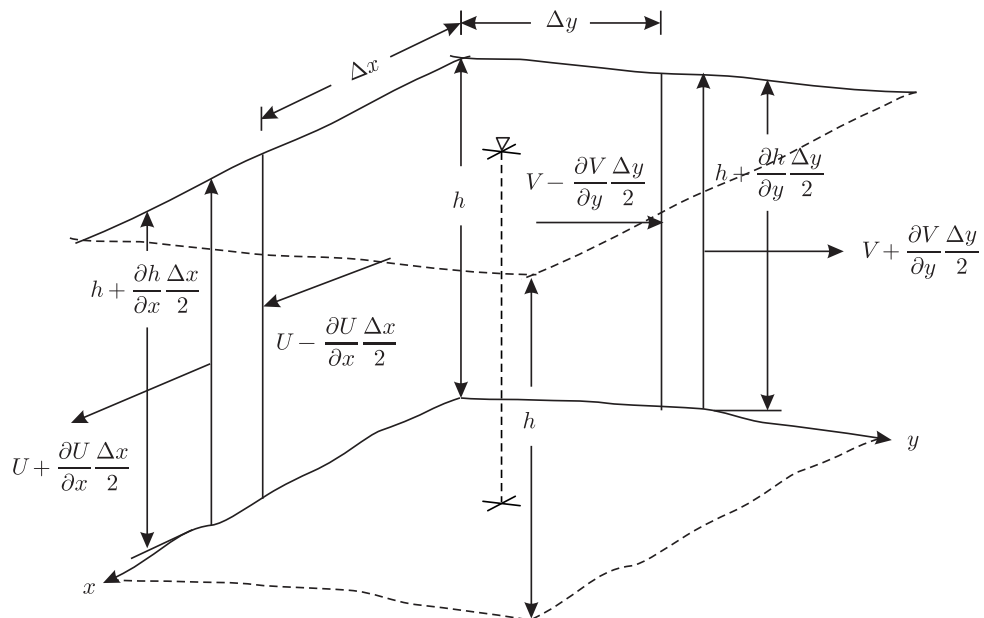
$$V_2 = V + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}, \quad (2.73)$$

$$A_1 = A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (2.74)$$

e

$$A_2 = A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (2.75)$$

conforme Figura 2.4.



**Figura 2.4: Expansão em Série de Taylor para  $U$ ,  $V$  e  $h$  em 2D**

Fonte: (CHAUDHRY, 1993)

Das equações (2.70)-(2.75), têm-se

$$\begin{aligned}
 U_2A_2 - U_1A_1 &= \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\
 &= UA + U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 - UA + U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &\quad + A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \\
 &= 2U \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &= U \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + A \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

e

$$\begin{aligned}
 V_2A_2 - V_1A_1 &= \left( V + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) - \left( V - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left( A - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \\
 &= VA + V \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + A \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 - VA + V \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\
 &\quad + A \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \\
 &= 2V \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2A \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\
 &= V \frac{\partial A}{\partial y} \Delta y + A \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Substituindo as equações (2.76) e (2.77) em (2.69), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x \Delta y) + (U_2A_2 - U_1A_1) \Delta y + (V_2A_2 - V_1A_1) \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow &\frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x \Delta y) + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y + \left( V \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial V}{\partial y} \right) \Delta y \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow &\Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (A) + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y + \left( V \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial V}{\partial y} \right) \Delta y \Delta x = 0 \\
 \Rightarrow &\Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \left( V \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] = 0 \\
 \Rightarrow &\frac{\partial A}{\partial t} + \left( U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \left( V \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Uma expressão muito utilizada para a avaliação da vazão em massa,  $\dot{m}$ , numa seção da superfície de controle que apresenta área  $A$  é

$$\dot{m} = \rho Q = \rho AU \quad , \tag{2.79}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $Q$  é a vazão em volume ( $m^3/s$ ) e  $U$  é o comportamento

do vetor velocidade perpendicular a área  $A$ . Desta forma, têm-se  $Q = AU$  e  $Q = AV$ , logo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.80)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = V \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (2.81)$$

Substituindo as equações (2.80) e (2.81) na equação (2.78), obtém-se

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (2.82)$$

Sendo  $A = b \cdot h$ ,  $Q = A \cdot U$  e  $Q = A \cdot V$ , têm-se

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(AU)}{\partial x} = \frac{\partial(bhU)}{\partial x} = b \frac{\partial(hU)}{\partial x} \quad (2.84)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(AV)}{\partial y} = \frac{\partial(bhV)}{\partial y} = b \frac{\partial(hV)}{\partial y}. \quad (2.85)$$

Substituindo as equações (2.84), (2.85) e (2.83) na equação (2.82), obtém-se

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial(hU)}{\partial x} + b \frac{\partial(hV)}{\partial y} = 0, \quad (2.86)$$

o que implica em

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} + \frac{\partial(hV)}{\partial y} = 0, \quad (2.87)$$

que representa a Equação de Conservação de Massa em duas dimensões.

### 2.2.2 Equação do Momento Linear em Duas Dimensões

Tem-se da equação (2.38), a qual é conhecida como a equação da quantidade de momento linear

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}_{VC}, \quad (2.88)$$

onde  $\vec{V} = U\vec{i} + V\vec{j}$ . Considera-se dois casos:



**Direção  $x$** 

Calculando a primeira integral da equação (2.88), na direção  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int U \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (Uh \Delta x \Delta y) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (Uh) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Resolve-se agora, a segunda integral do primeiro membro da equação (2.88),

$$\begin{aligned} \int_{SC} U \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= \rho \int_{SC} U (U \hat{i} + V \hat{j}) \cdot \vec{n} dA \\ &= \rho \int_{SC} U (U \hat{i} \cdot \vec{n}) dA + \rho \int_{SC} U (V \hat{j} \cdot \vec{n}) dA \\ &= \rho [(U_2^2 h_2 - U_1^2 h_1) \Delta y + (U_2 V_2 h_2 - U_1 V_1 h_1) \Delta x] \\ &= +\rho \left[ \left( U + \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right)^2 \left( h + \frac{\partial h \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta y \\ &\quad -\rho \left[ \left( U - \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right)^2 \left( h - \frac{\partial h \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta y \\ &\quad +\rho \left[ \left( U + \frac{\partial U \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \left( V + \frac{\partial V \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \left( h + \frac{\partial h \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta x \\ &\quad -\rho \left[ \left( U - \frac{\partial U \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \left( V - \frac{\partial V \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \left( h - \frac{\partial h \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta x \end{aligned} \quad (2.90)$$

segue que

$$\begin{aligned} \int_{SC} U \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= +\rho \left[ \left( U^2 + 2U \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right)^2}_{=0} \right) \left( h + \frac{\partial h \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta y \\ &\quad -\rho \left[ \left( U^2 - 2U \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} + \underbrace{\left( \frac{\partial U \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right)^2}_{=0} \right) \left( h - \frac{\partial h \Delta x}{\partial x \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta y \\ &\quad +\rho \left[ \left( UV + U \frac{\partial V \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} + V \frac{\partial U \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\partial U \partial V}{\partial y \partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h + \frac{\partial h \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta x \\ &\quad -\rho \left[ \left( UV - U \frac{\partial V \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} - V \frac{\partial U \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\partial U \partial V}{\partial y \partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h - \frac{\partial h \Delta y}{\partial y \frac{1}{2}} \right) \right] \Delta x \end{aligned} \quad (2.91)$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_{SC} U \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= +\rho \left[ U^2 h + U^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2hU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \Delta y \\
&- \rho \left[ U^2 h - U^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - 2hU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \Delta y \\
&+ \rho \left[ UVh + UV \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + hU \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + U \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right. \\
&\left. + hV \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + V \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right] \Delta x \\
&- \rho \left[ UVh - UV \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - hU \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + U \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right. \\
&\left. - hV \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + V \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right] \Delta x \quad . \quad (2.92) \\
&= +\rho \left[ 2U^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 4hU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \\
&+ \rho \left[ 2UV \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2hU \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2hV \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \\
&= +\rho \left[ U^2 \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y + 2hU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \Delta y \right] \\
&+ \rho \left[ UV \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \Delta y + hU \frac{\partial V}{\partial y} \Delta x \Delta y + hV \frac{\partial U}{\partial y} \Delta x \Delta y \right] \\
&= +\rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial y} (hUV) \Delta x \Delta y \right]
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.89) e (2.92) na equação (2.88), obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV + \int_{SC} U \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= \sum \vec{F}_{x,VC} \\
\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (hU) + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial y} (hUV) \Delta x \Delta y \right] &= \sum \vec{F}_{x,VC} \quad . \quad (2.93) \\
\rho \Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial}{\partial t} (Uh) + \frac{\partial}{\partial x} (U^2 h) + \frac{\partial}{\partial y} (UVh) \right] &= \sum \vec{F}_{x,VC}
\end{aligned}$$

Três tipos de forças serão consideradas: gravidade, pressão e força de atrito. Todas estas devem ser resolvidos na direção  $x$ . Tem-se

$$\sum \vec{F}_{x,VC} = F_{p_x} - F_{s_x} + F_{g_x} \quad . \quad (2.94)$$

Observando o caso unidimensional e considerando  $A = h\Delta y$ , têm-se

$$F_{p_x} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad , \quad (2.95)$$

$$F_{s_x} = \rho g A S_{f_x} \Delta x = \rho g h S_{f_x} \Delta x \Delta y \quad (2.96)$$

e

$$F_{g_x} = \rho g A S_{0_x} \Delta x = \rho g h S_{0_x} \Delta x \Delta y . \quad (2.97)$$

Substituindo (2.95), (2.96) e (2.97) em (2.94), obtém-se

$$\sum \vec{F}_{x,VC} = \rho g h \Delta x \Delta y \left( -\frac{\partial h}{\partial x} - S_{f_x} + S_{0_x} \right) . \quad (2.98)$$

Substituindo (2.98) em (2.93), tem-se

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(UVh) \right] &= \rho g h \Delta x \Delta y \left( -\frac{\partial h}{\partial x} - S_{f_x} + S_{0_x} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(UVh) &= gh \left( -\frac{\partial h}{\partial x} - S_{f_x} + S_{0_x} \right) , \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(UVh) + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh (S_{0_x} - S_{f_x}) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(UVh) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x}(h^2) = gh (S_{0_x} - S_{f_x}) , \quad (2.99)$$

que é a Equação de Momento Linear na direção  $x$ .

### Direção $y$

Calculando a primeira integral da equação (2.88), na direção  $y$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (Vh \Delta x \Delta y) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dV &= \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (Vh) . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Resolvendo a segunda integral do primeiro membro da equação (2.88), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= \rho \int_{SC} V (V \hat{j} + U \hat{i}) \cdot \vec{n} dA \\
&= \rho \int_{SC} V (V \hat{j} \cdot \vec{n}) dA + \rho \int_{SC} V (U \hat{i} \cdot \vec{n}) dA \\
&= \rho [(V_2^2 h_2 - V_1^2 h_1) \Delta x + (V_2 U_2 h_2 - V_1 U_1 h_1) \Delta y] \\
&= +\rho \left[ \left( V + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left( h + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \\
&\quad -\rho \left[ \left( V - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left( h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \\
&\quad +\rho \left[ \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \\
&\quad -\rho \left[ \left( V - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \\
&= +\rho \left[ \left( V^2 + 2V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \\
&\quad -\rho \left[ \left( V^2 - 2V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \\
&\quad +\rho \left[ \left( VU + V \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \\
&\quad -\rho \left[ \left( VU - V \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2}_{=0} \right) \left( h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \\
&= +\rho \left[ V^2 h + V^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2hV \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right] \Delta x \\
&\quad -\rho \left[ V^2 h - V^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - 2hV \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 2V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right] \Delta x \\
&\quad +\rho \left[ VUh + VU \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + hV \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + V \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + hU \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \Delta y \\
&\quad -\rho \left[ VUh - VU \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - hV \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + V \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - hU \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right] \Delta y
\end{aligned} \tag{2.101}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= \rho \left[ 2V^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + 4hV \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \\
 &+ \rho \left[ 2UV \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2hV \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + 2hU \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \\
 &= +\rho \left[ V^2 \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \Delta y + 2hV \frac{\partial V}{\partial y} \Delta x \Delta y \right] \\
 &+ \rho \left[ VU \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y + hV \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \Delta y + hU \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \Delta y \right]
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

segue que

$$\int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = +\rho \left[ \frac{\partial}{\partial y} (V^2 h) \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial x} (UVh) \Delta x \Delta y \right]. \tag{2.103}$$

Substituindo as equações (2.100) e (2.103) na equação (2.88), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V \rho dV + \int_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA &= \sum \vec{F}_{x,VC} \\
 \Rightarrow \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (Vh) + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial y} (V^2 h) \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial x} (UVh) \Delta x \Delta y \right] &= \sum \vec{F}_{y,VC} \cdot \\
 \Rightarrow \rho \Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial}{\partial t} (Vh) + \frac{\partial}{\partial y} (V^2 h) + \frac{\partial}{\partial x} (UVh) \right] &= \sum \vec{F}_{y,VC}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Três tipos de forças serão consideradas: gravidade, pressão e força de atrito. Todas estas devem ser resolvidas na direção  $y$ . Têm-se

$$\sum \vec{F}_{y,VC} = F_{py} - F_{sy} + F_{gy}. \tag{2.105}$$

Observando o caso unidimensional e considerando  $A = h\Delta x$ , tem-se

$$F_{py} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} A \Delta y = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \Delta y, \tag{2.106}$$

$$F_{sy} = \rho g A S_{fy} \Delta y = \rho g h S_{fy} \Delta x \Delta y \tag{2.107}$$

e

$$F_{gy} = \rho g A S_{0y} \Delta x = \rho g h S_{0y} \Delta x \Delta y. \tag{2.108}$$

Substituindo (2.106), (2.107) e (2.108) em (2.105), obtêm-se

$$\sum \vec{F}_{y,VC} = \rho g h \Delta x \Delta y \left( -\frac{\partial h}{\partial y} - S_{fy} + S_{0y} \right). \tag{2.109}$$

Substituindo (2.109) em (2.104)

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial}{\partial t}(Vh) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2h) + \frac{\partial}{\partial x}(UVh) \right] &= \rho gh \Delta x \Delta y \left( -\frac{\partial h}{\partial y} - S_{f_y} + S_y \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(Vh) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2h) + \frac{\partial}{\partial x}(UVh) &= gh \left( -\frac{\partial h}{\partial y} - S_{f_y} + S_{0_y} \right) , \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(Vh) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2h) + \frac{\partial}{\partial x}(UVh) + gh \frac{\partial h}{\partial y} &= gh(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(Vh) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2h) + \frac{\partial}{\partial x}(UVh) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial y}(h^2) = gh(S_{0_y} - S_{f_y}) , \quad (2.110)$$

que é a Equação do Momento Linear na Direção  $y$ .

Reorganizando as derivadas das equações (2.99) e (2.110), que estão na forma reduzida, obtêm-se as equações (2.111) e (2.112) que estão na chamada *forma conservativa*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \quad (2.111)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0_y} - S_{f_y}) . \quad (2.112)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(UVh) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x}(h^2) &= gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial y}(Vh) + Vh \frac{\partial U}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + U \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + \frac{\partial}{\partial y}(Vh) \right] + Vh \frac{\partial U}{\partial y} + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ & \quad (2.113) \\ \Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot 0 + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + Vh \frac{\partial U}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow h \frac{\partial U}{\partial t} + Uh \frac{\partial U}{\partial x} + Vh \frac{\partial U}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} &= gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= g(S_{0_x} - S_{f_x}) \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(Vh) + \frac{\partial}{\partial x}(UVh) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2h) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial y}(h^2) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \\
\Rightarrow & h \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + Uh \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}(Vh) + Vh \frac{\partial V}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \\
\Rightarrow & h \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + \frac{\partial}{\partial y}(Vh) \right] + Vh \frac{\partial V}{\partial y} + Vh \frac{\partial V}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \\
& \hspace{25em} (2.114) \\
\Rightarrow & h \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot 0 + Uh \frac{\partial V}{\partial x} + Vh \frac{\partial V}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \\
\Rightarrow & h \frac{\partial V}{\partial t} + Uh \frac{\partial V}{\partial x} + Vh \frac{\partial V}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \\
\Rightarrow & \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy})
\end{aligned}$$

**Observação 2.3** O sistema de ESV-2D na sua forma reduzida é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t + (Uh)_x + (Vh)_y = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy}) \end{array} \right. , \quad (2.115)$$

onde:

- $h$  é a profundidade do canal;
- $g$  é constante gravitacional;
- $U$  é a velocidade média na direção  $x$ ;
- $V$  é a velocidade média na direção  $y$ ;
- $\frac{\partial h}{\partial x}$  é a declividade da superfície da água na direção  $x$ ;
- $\frac{\partial h}{\partial y}$  é a declividade da superfície da água na direção  $y$ ;
- $\frac{\partial h}{\partial t}$  é a variação da profundidade com o tempo;

- $\frac{\partial U}{\partial x}$  é a variação da velocidade com a distância na direção  $x$ ;
- $\frac{\partial U}{\partial y}$  é a variação da velocidade com a distância na direção  $y$ ;
- $\frac{\partial U}{\partial t}$  é a variação da velocidade com o tempo na direção  $x$ ;
- $\frac{\partial V}{\partial t}$  é a variação da velocidade com o tempo na direção  $y$ ;
- $S_{0_x}$  é a declividade do canal na direção  $x$ ;
- $S_{0_y}$  é a declividade do canal na direção  $y$ ;
- $S_{f_x}$  é a declividade da linha de energia na direção  $x$ .
- $S_{f_y}$  é a declividade da linha de energia na direção  $y$ .

Por outro lado, o sistema de ESV-2D na sua forma conservativa é

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t + (Uh)_x + (Vh)_y = 0 \\ (Uh)_t + \left( U^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x + (UVh)_y = gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ (Vh)_t + (UVh)_x + \left( V^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right)_y = gh(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{array} \right. \quad (2.116)$$



### 3 EQUAÇÕES DA ONDA VIA LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT

A principal dificuldade em resolver as ESV surge porque elas são não-lineares. Em algumas aplicações destas equações, como para o fluxo em afluentes, as formas linearizadas das equações podem ser usadas.

Este capítulo está dividido em duas partes: na seção 3.1 apresenta-se a linearização das ESV-1D não lineares com o objetivo de obter a EO-1D que é apresentada na seção 3.1.1, em seguida, na seção 3.2 faz-se a linearização das ESV-2D obtendo-se na seção 3.2.1 a EO-2D.

#### 3.1 LINEARIZAÇÃO DAS ESV-1D

Deduziu-se no capítulo 2 as ESV-1D

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) , \quad (3.2)$$

onde  $U$  é a velocidade média na direção  $x$  e  $h$  é a profundidade. Escrevendo

$$U = U_0 + U' \quad \text{e} \quad h = h_0 + h' , \quad (3.3)$$

onde  $U'$  e  $h'$  são pequenas variações de uma condição estável e uniforme designado pelas constantes  $U_0$  e  $h_0$ . Substituindo-se (3.3) nas equações (3.2) e (3.1) e considerando  $S_{0x} = 0$  e  $S_{fx} = 0$ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_0 + h') + \frac{\partial}{\partial x}((U_0 + U')(h_0 + h')) = 0 \quad (3.4)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_0 + U') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(U_0 + U') + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + h') = 0 . \quad (3.5)$$

Desenvolvendo essas derivadas e considerando que na prática a velocidade média  $U$  é tão pequena que os termos  $(U'h')_x$  e  $U'(U')_x$  podem ser omitidos das equações, mas com pouca influência sobre a solução, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(h_0 + h') + \frac{\partial}{\partial x}((U_0 + U')(h_0 + h')) = 0 \\
& \underbrace{\frac{\partial h_0}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 h_0 + U_0 h' + U' h_0 + U' h') = 0 \\
& \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 h_0) + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 h') + \frac{\partial}{\partial x}(U' h_0) + \frac{\partial}{\partial x}(U' h') = 0 \\
& \frac{\partial h'}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(U_0 h_0)}_{=0} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(U' h')}_{\text{omitido}} = 0 \\
& \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(U_0 + U') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(U_0 + U') + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + h') = 0 \\
& \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial U'}{\partial t} + (U_0 + U') \left( \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial U'}{\partial x} \right) + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + h') = 0 \\
& \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U' \frac{\partial U'}{\partial x} + g \underbrace{\frac{\partial h_0}{\partial x}}_{=0} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + \underbrace{U' \frac{\partial U'}{\partial x}}_{\text{omitido}} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ou ainda, as equações (3.1) e (3.2) quando linearizadas, tornam-se

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \tag{3.8}$$

e

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0. \tag{3.9}$$

### 3.1.1 Equações da Onda em Uma Dimensão

Uma vez que o atrito tem sido negligenciado,  $U_0$  pode ser tomado como zero nas equações (3.8) e (3.9), resultando em

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

Realizando algumas manipulações algébricas nas equações (3.10) e (3.11) é possível obter a equação da onda em uma dimensão. De fato, das equações (3.10) e (3.11), têm-se

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial h'}{\partial t} \quad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (3.13)$$

Derivando a equação (3.13) em relação a  $x$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U'}{\partial x} \right) = -g \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.14), obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{h_0} \frac{\partial h'}{\partial t} \right) &= -g \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} &= gh_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (3.15) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} &= \frac{1}{gh_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \end{aligned}$$

onde  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  é a celeridade da onda, ou ainda, a velocidade de propagação da onda.

Esta equação

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0, \quad (3.16)$$

está associada à propagação de ondas e fenômenos ondulatórios, por isso, recebe o nome de EO-1D. Tem-se,  $h' : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde supõem-se que  $h' \in C^2(\Omega)$  (funções onde todas as suas derivadas parciais de ordem até dois são contínuas em  $\Omega$ ), ou seja, uma função onde todas as suas derivadas parciais de ordem até dois são funções contínuas no domínio  $\Omega$ . Quase sempre escreve-se a equação (3.16), na forma

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta h' = 0, \quad (3.17)$$

onde  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$  é o operador de Laplace, conhecido por Laplaciano. Fica subentendido que o Laplaciano em (3.17) é na variável espacial.

De forma análoga, derivando-se a equação (3.13) em relação a  $t$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U'}{\partial t} \right) = -g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h'}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left( -h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} &= gh_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} &= \frac{1}{gh_0} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2}, \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

que é a equação da onda em uma dimensão na variável dependente  $U'$ .

Portanto, após algumas manipulações algébricas, as equações (3.10) e (3.11) tornaram-se

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

e

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}, \quad (3.21)$$

onde  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$  é a celeridade da onda. A forma idêntica das equações (3.20) e (3.21) indica que o sistema de profundidade ( $h'$ ) de fluidos e o sistema de velocidade ( $U'$ ) propagam juntos.

### 3.2 LINEARIZAÇÃO DAS ESV-2D

Observou-se no capítulo 2 que as ESV-2D são

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + \frac{\partial}{\partial y}(Vh) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.23)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{fy}), \quad (3.24)$$

onde  $U$  e  $V$  são as velocidades médias nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $h$  é a profundidade.

Escrevendo

$$U = U_0 + U', \quad V = V_0 + V' \quad \text{e} \quad h = h_0 + h', \quad (3.25)$$

onde  $U'$ ,  $V'$  e  $h'$  são pequenas variações de uma condição estável e uniforme designada pelas constantes  $U_0$ ,  $V_0$  e  $h_0$ .

Substituindo (3.25) nas equações (3.22), (3.23) e (3.24) e considerando  $S_{0x} = 0$ ,  $S_{0y} = 0$ ,  $S_{fx} = 0$  e  $S_{fy} = 0$ , têm-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_0 + h') + \frac{\partial}{\partial x}((U_0 + U')(h_0 + h')) + \frac{\partial}{\partial y}((V_0 + V')(h_0 + h')) = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_0 + U') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(U_0 + U') + (V_0 + V') \frac{\partial}{\partial y}(U_0 + U') + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + h') = 0 \quad (3.27)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(V_0 + V') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(V_0 + V') + (V_0 + V') \frac{\partial}{\partial y}(V_0 + V') + g \frac{\partial}{\partial y}(h_0 + h') = 0. \quad (3.28)$$

Desenvolvendo essas derivadas e considerando que na prática as velocidades médias  $U$  e  $V$  são tão pequenas que os termos  $(U'h')_x$ ,  $(V'h')_x$ ,  $U'(U')_x$ ,  $V'(U')_y$ ,  $U'(V')_x$  e  $V'(V')_y$  podem ser omitidos das equações (3.26), (3.27) e (3.28), por terem pouca influência sobre a solução.

Tem-se da equação (3.26),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(h_0 + h') + \frac{\partial}{\partial x}((U_0 + U')(h_0 + h')) + \frac{\partial}{\partial y}((V_0 + V')(h_0 + h')) = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 h_0 + U_0 h' + U' h_0 + U' h') + \frac{\partial}{\partial y}(V_0 h_0 + V_0 h' + V' h_0 + V' h') = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial h'}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(U_0 h_0)}_{=0} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(U' h')}_{\text{omitido}} + \frac{\partial}{\partial y}(V_0 h_0 + V_0 h' + V' h_0 + V' h') = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(V_0 h_0)}_{=0} + V_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial V'}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(V' h')}_{\text{omitido}} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial V'}{\partial y} + V_0 \frac{\partial h'}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

da equação (3.27)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(U_0 + U') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(U_0 + U') + (V_0 + V') \frac{\partial}{\partial y}(U_0 + U') + g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 + h') = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t}(U_0 + U') + (U_0 + U') \left( \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial U'}{\partial x} \right) + (V_0 + V') \left( \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial U'}{\partial y} \right) + g \frac{\partial h_0}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow & \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial U'}{\partial t} + (U_0 + U') \left( \frac{\partial U'}{\partial x} \right) + (V_0 + V') \left( \frac{\partial U'}{\partial y} \right) + \underbrace{\frac{\partial h_0}{\partial x}}_{=0} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + \underbrace{U' \frac{\partial U'}{\partial x}}_{\text{omitido}} + V_0 \frac{\partial U'}{\partial y} + \underbrace{V' \frac{\partial U'}{\partial y}}_{\text{omitido}} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U'}{\partial y} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

e da equação (3.28)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(V_0 + V') + (U_0 + U') \frac{\partial}{\partial x}(V_0 + V') + (V_0 + V') \frac{\partial}{\partial y}(V_0 + V') + g \frac{\partial}{\partial y}(h_0 + h') = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t}(V_0 + V') + (U_0 + U') \left( \underbrace{\frac{\partial V_0}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial V'}{\partial x} \right) + (V_0 + V') \left( \underbrace{\frac{\partial V_0}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right) + g \frac{\partial h_0}{\partial y} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \\
\Rightarrow & \underbrace{\frac{\partial V_0}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial V'}{\partial t} + (U_0 + U') \left( \frac{\partial V'}{\partial x} \right) + (V_0 + V') \left( \frac{\partial V'}{\partial y} \right) + \underbrace{\frac{\partial h_0}{\partial y}}_{=0} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial V'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V'}{\partial x} + \underbrace{U' \frac{\partial V'}{\partial x}}_{\text{omitido}} + V_0 \frac{\partial V'}{\partial y} + \underbrace{V' \frac{\partial V'}{\partial y}}_{\text{omitido}} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial V'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V'}{\partial y} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

ou seja, as equações (3.22)-(3.24), quando linearizadas, tornam-se

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial V'}{\partial y} + V_0 \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 , \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U'}{\partial y} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

e

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V'}{\partial y} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 . \quad (3.31)$$

### 3.2.1 Equação da Onda em Duas Dimensões

Uma vez que o atrito tem sido negligenciado,  $U_0$  e  $V_0$ , podem ser tomados como zero, nas equações (3.29), (3.30) e (3.31), resultando em

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial V'}{\partial y} = 0 , \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$$

e

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 . \quad (3.34)$$

Após algumas manipulações algébricas com as equações (3.32), (3.33) e (3.34), obtêm-se as equações da onda em uma e duas dimensões. De fato, das equações (3.32), (3.33) e (3.34), têm-se

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial h'}{\partial t} , \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (3.36)$$

e

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial y} . \quad (3.37)$$

Derivando a equação (3.35) em relação a  $t$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial h'}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V'}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \quad (3.38) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U'}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V'}{\partial t} \right) &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.38), obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( -g \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -g \frac{\partial h'}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \\ \Rightarrow -g \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - g \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \\ \Rightarrow -g \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right) &= -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \quad (3.39) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} &= \frac{1}{gh_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \end{aligned}$$

De forma análoga à equação (3.16), a equação

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.40)$$

com  $h' : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h' \in C^2(\Omega)$ , é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) linear de segunda ordem que recebe o nome de EO-2D. Quase sempre escreve-se a equação (3.40) na forma

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta h' = 0, \quad (3.41)$$

onde o Laplaciano,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , representado na equação (3.41) está aplicado nas variáveis espaciais.

Para obter as equações da onda em uma dimensão é necessário considerar que  $U'(x, y, t) \equiv$



$U'(x, t)$  e  $V'(x, y, t) \equiv V'(y, t)$ . Tem-se da equação (3.12) que

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial U'}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h'}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial V'}{\partial y} . \quad (3.42)$$

Derivando em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente, obtém-se

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = -h_0 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial y \partial t} = -h_0 \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} . \quad (3.43)$$

Por outro lado, derivando as equações (3.36) e (3.37) em relação a  $t$ , têm-se

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial y} . \quad (3.44)$$

Substituindo a equação (3.43) na equação (3.44), encontram-se

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} , \quad (3.45)$$

as equações da onda em uma dimensão nas variáveis dependentes  $U'$  e  $V'$ .

## 4 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O resultado principal deste capítulo será a equivalência de um sistema de EPPs de primeira ordem com um determinado sistema de EDOs. A chave desta teoria é o conceito de características, que vai desempenhar um papel decisivo também em problemas de ordem superior. Todas as derivadas que ocorrem serão assumidas como sendo contínuas, a menos que o oposto é expressamente indicado. Além disso, cabe ressaltar que todas as afirmações e derivações estão restritas a intervalos pequenos, ou seja, dizem respeito apenas a vizinhanças de pontos, sem, necessariamente, especificar a extensão dessas vizinhanças.

Este capítulo está dividido em três seções. Na seção 4.1, apresenta-se um conceito preliminar de curvas características. Na seção 4.2 descreve-se geometricamente as características. Na última seção mostra como determinar as características.

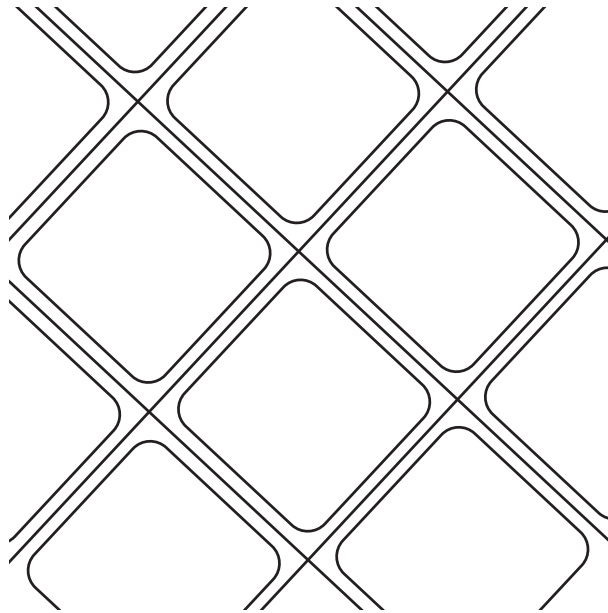
### 4.1 UM CONCEITO PRELIMINAR

O MC tem sua origem em um procedimento gráfico criado por Monge em 1789 para a integração de EDPs. Segundo (CHAUDHRY, 1993) o MC tornou-se um método padrão para a análise de transientes em condutos fechados. O conceito de Curvas Características é importante para a compreensão da propagação de ondas. A seguir, é apresentado o método com o intuito de esclarecer aspectos teóricos da propagação de vazões.

#### 4.1.1 O Processo de Propagação e o Conceito de Característica

Descreve brevemente algumas das mais importantes funcionalidades dos processos de propagação, enquanto usa as mais simples noções físicas e um mínimo de matemática. Começa por introduzir o conceito de Característica. A grosso modo, uma Característica é um caminho de propagação: um caminho seguido por alguma entidade, tal como uma forma geométrica ou uma perturbação física, quando essa entidade é propagada. Assim, um sistema de “grade” de estradas, como indicado na Figura 4.1 poderia ser considerado como duas famílias de caminhos

de propagação, ao longo dos quais veículos se propagam (ABBOTT, 1966).

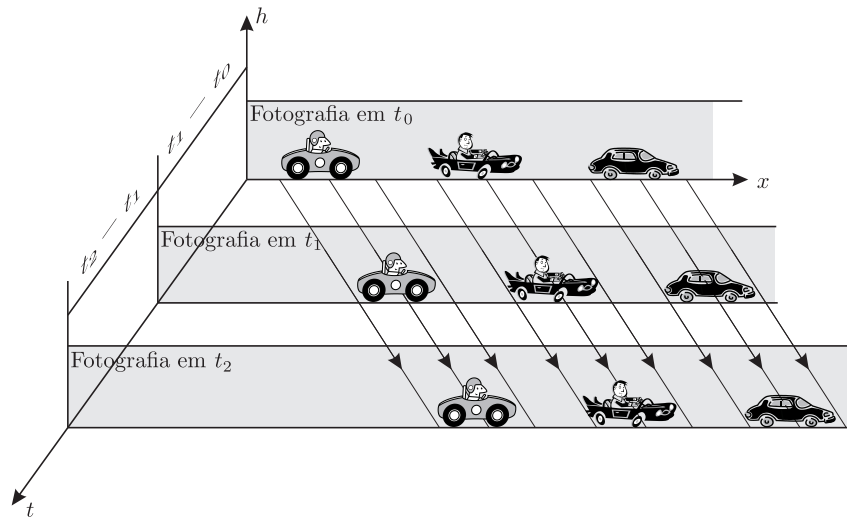


**Figura 4.1: Um sistema de estradas como um sistema de caminhos de propagação.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Todos os membros de uma família de caminhos de propagação seriam então associados com as estradas orientadas em uma direção, enquanto todos os membros da outra família estariam associados com a outra orientação. Com esta noção muito intuitiva de característica, as duas famílias de linhas correspondem a duas famílias de características.

No exemplo considerado, os caminhos de propagação poderiam ser representado por linhas em uma superfície física em termos de duas coordenadas,  $x$  e  $y$ . Em muitos casos práticos, no entanto, não são apenas as dimensões do espaço físico, ou a distância envolvida, mas o tempo também entra como uma dimensão, de modo que, tem de considerar os processos de propagação em espaços com as duas distâncias físicas e a coordenada tempo. Para ver como as características surgem, considere como no exemplo anterior, uma coluna de veículos que se deslocam da esquerda para a direita ao longo de uma estrada. Suponha que esta coluna seja fotografada em momentos sucessivos, e as fotografias posteriormente dispostas verticalmente, tal que a distância entre elas sejam proporcionais. Têm-se, então, uma imagem do tipo ilustrado na Figura 4.2.

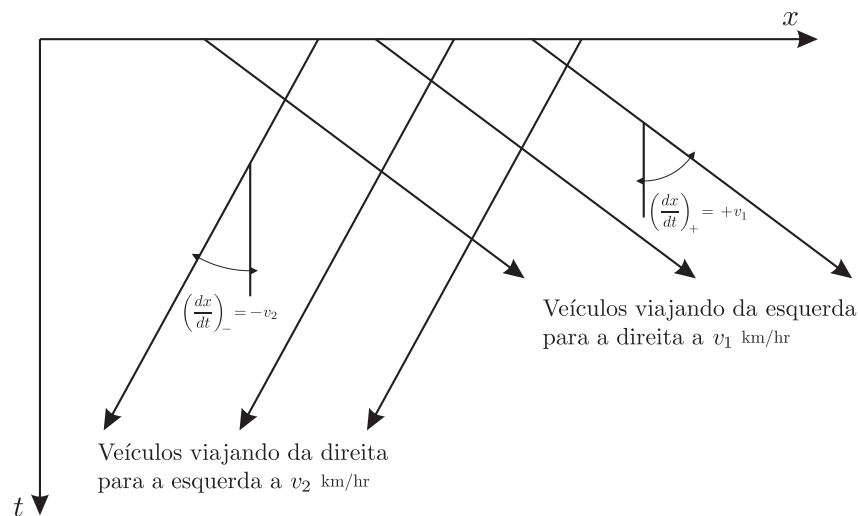


**Figura 4.2: Uma Única Família de Características**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Considere então, o deslocamento de cada veículo, se movendo ao longo de linhas em um espaço formado entre o plano das fotografias e o tempo. Estas linhas que conectam as posições sucessivas de cada veículo representam caminhos de propagações no espaço, e esses caminhos de propagação em todos os sentidos são características físicas e matemáticas.

No caso de uma única coluna de veículos existe somente uma família de características, correspondendo ao conjunto de linhas que representam os movimentos de cada veículo. Em uma estrada onde geralmente há duas colunas que se deslocam em sentidos opostos, tem-se duas famílias de características de acordo com a imagem no “plano  $xt$ ” mostrado na Figura 4.3.



**Figura 4.3: Duas Famílias de Características**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

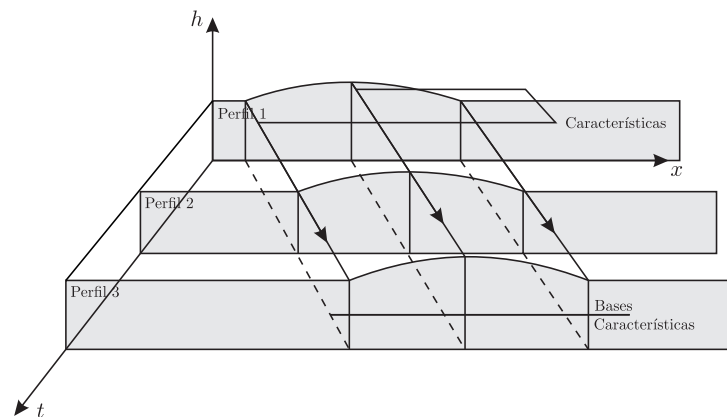
Se as velocidades das colunas são  $v_1$  e  $-v_2$ , de modo que  $v_1$  e  $v_2$  são positivas e o sentido positivo é tomado da esquerda para a direita, as inclinações das características são dadas por:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v_1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = -v_2 ,$$

onde o índice  $+$  refere-se às Características crescentes ( $dx/dt$  é positivo), enquanto que,  $-$  refere-se às Características decrescentes ( $dx/dt$  é negativo). As características crescentes são chamadas Características positivas ( $C_+$ ), enquanto as decrescentes são chamadas de Características negativas ( $C_-$ ). Considerando todos os veículos que estão em cada coluna de viagem e possuem a mesma velocidade constante onde todas as características de cada família têm a mesma inclinação, tem-se que, a região coberta pelas retas paralelas, Características, é uma região de estado constante. Em todos os sistemas contínuos e homogêneos, onde as entidades podem se mover em uma direção, como no sentido oposto, obtêm-se duas famílias de Características e sendo possível formar uma região de estado constante.

#### 4.1.2 O Processo de Propagação em Um Sistema Contínuo: A Geração de uma Superfície de Solução pelas Características.

As Características surgem em cada processo envolvendo a propagação de uma entidade geométrica e, é isto, em princípio o caso. Mais tarde, apresenta as EDPs que definem a tradução de tais “entidades geométricas” como veículos motorizados e encontra-se as Características correspondentes destas equações. Objetiva transmitir a propagação de estados físicos, e então encontrar as Características associadas com estes. Para este propósito será suficiente considerar qualquer exemplo de um sistema de propagação. Escolhendo como exemplo, o caso de uma onda de água longa propagando em um canal uniforme reto. Suponha, assim como no caso dos veículos motorizados, que os perfis de canal podem ser determinado em uma sucessão de tempos, a partir de um conjunto de medições em estações hidrométricas ao longo do canal, e que esses perfis podem ser organizados em ordem de tempo como mostrado na Figura 4.4.



**Figura 4.4: Características como caminhos de propagação de um perfil de onda de água no tempo.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Observe em sua propagação, que um perfil de perturbação inicial gera uma superfície no espaço tridimensional de distância  $x$ , tempo  $t$ , e profundidade do fluido  $h$ . De forma geral a propagação pode ocorrer em duas direções: uma a montante<sup>1</sup> e outro a jusante<sup>2</sup>, mas ambas ao longo de linhas incorporados nesta superfície. As linhas ao longo do qual tais distúrbios são propagados são, evidentemente, as Características crescentes ( $C_+$ ) e decrescentes ( $C_-$ ), enquanto sua superfície associada é frequentemente chamada superfície hidráulica. Evidentemente, se esta superfície é conhecida pode-se imediatamente determinar a partir dela o valor de  $h$  para quaisquer valores de  $x$  e  $t$ . Por outro lado, o problema de determinar o valor de  $h$  em termos de  $x$  e  $t$ , o problema que o engenheiro hidráulico enfrenta, pode ser colocado como um problema de encontrar a superfície hidráulica. Este problema, por sua vez, se torna o problema de encontrar as Características.

Note que um perfil de  $h$  em função de  $x$  está associado com um outro perfil, correspondente à velocidade média induzida,  $U$ , em função de  $x$ . Isto gera uma segunda superfície hidráulica, que se propaga com a primeira ao longo das mesmas características. A descrição completa de propagação da onda corresponde a uma superfície hidráulica em um espaço de quatro dimensões,  $R(h, U, x, t)$ , onde a Figura 4.4, representa uma projeção no espaço tridimensional  $R(h, x, t)$ .

Pode-se perguntar: De quais fatores a forma da superfície hidráulica irá depender? Ao responder esta questão, dentro do contexto do exemplo apresentado, observa-se os seguintes fatores que influenciam a propagação:

<sup>1</sup>A Montante é o lugar que está mais próximo da cabeceira de um rio, o nascente é o ponto mais a montante de um rio.

<sup>2</sup>A jusante é um lugar de referência de um rio, e vem do latim jusum, que significa para o lado da foz. A jusante é a referência através da visão da pessoa que está observando, é o lado para onde vai a corrente de água, se diz que a foz é o ponto mais a jusante deste rio.

1. As condições iniciais;
2. A operação das leis da física, neste caso as leis de conservação de massa e momento.
3. As condições de obtenção na região onde ocorre a propagação.

Descrevendo-os de forma mais detalhada, tem-se:

1. As condições iniciais;

A forma da superfície hidráulica é, obviamente, afetada pela forma ou perfil da onda, “no primeiro instante” quando inicia o estudo no momento  $t_0$ . Se estes perfis iniciais são mudados, então a superfície hidráulica inteira evidentemente muda de acordo, e será evidente que, para cada par separado de perfil inicial, haverá uma superfície hidráulica única e distinta.

2. A operação das leis da física, neste caso as leis de conservação de massa e momento.

Uma vez que não se pode esperar descrever empiricamente<sup>3</sup> o comportamento de cada tipo de onda sob todas as circunstâncias procura-se a generalização deste comportamento. As leis de conservação da física fornecem tal generalização, que, apesar da negligência de algumas Características, são suficientes para descrever o mecanismo ao longo da propagação das ondas. Tal mecanismo é sempre descrito matematicamente em termos dos fatores que afetam um elemento do fluido, um elemento tão pequeno que as relações lineares de diferencial pode ser estabelecida entre esses fatores, e uma equação diferencial formado. Esta equação diferencial descreve convenientemente o tipo de movimento que as propriedades dos fluidos impõem em cada ponto de  $x$  e  $t$ . Equações diferenciais são, assim, uma vez idealizações e generalização da realidade e o comportamento real, especialmente adequado para simplificar a descrição de um comportamento aparentemente complexo.

3. Obtendo as condições na região onde ocorre a propagação.

Depois de analisar as quantidades elementares e formar uma equação diferencial de uma validade geral, combina-se todos os elementos diferenciais em um número de inteiros completo por um processo de integração. Esse processo de integração é iniciado a partir das condições iniciais e realizado em todas as fases de acordo com as condições físicas (profundidades, fronteiras, etc) da região considerada. Estas condições físicas junto com

---

<sup>3</sup>Baseado apenas na experiência e não no estudo.

a equação diferencial fazem parte do processo de integração, de modo que, a equação diferencial seja modificada em uma descrição muito particular de eventos (isto é, a integral), que correspondem a condições físicas muito particulares.

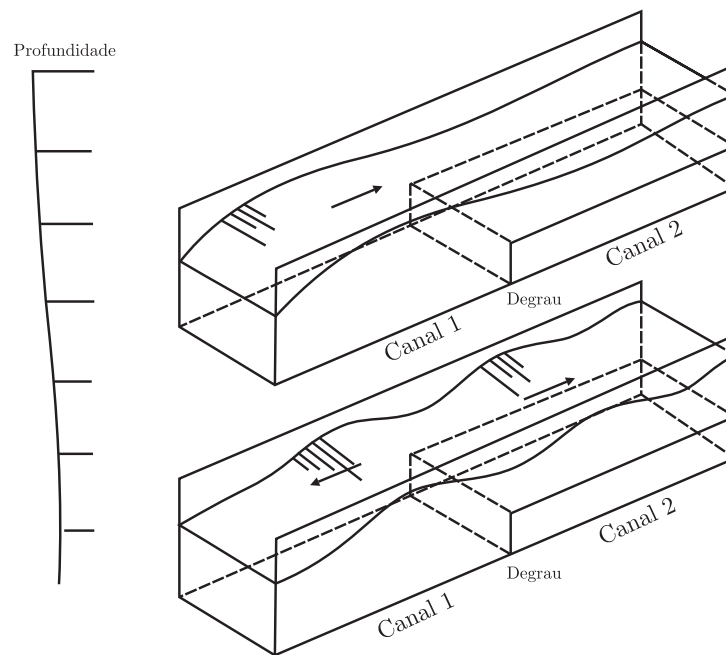
Pelo processo de formação de uma equação diferencial e de integração pode obter as expressões relativas a altura da água,  $h$ , e velocidade,  $U$ , e todas as combinações de distância e tempo por toda a região de integração. Essas expressões podem ser novamente representadas por uma superfície em um espaço  $R(h, U, x, t)$  ou sua projeção  $R(h, x, t)$ . Chama-se uma superfície, que é uma integral da equação diferencial dada, uma superfície integral.

Na prática, como a onda se move no espaço e no tempo, sujeitas em sua maior parte as leis de conservação, gera uma única superfície hidráulica. São essas mesmas leis de conservação, no entanto, que são expressas em nossa equação diferencial, de modo que, a partir das mesmas condições iniciais e sujeito às mesmas condições físicas, pode esperar uma única superfície integral semelhante à ser gerada pela equação diferencial. Assim, se as idealizações correspondem exatamente à realidade, se começar das mesmas condições iniciais, e se as condições físicas corretas foi inseridas nessa integração, então a superfície integral coincide exatamente com a superfície hidráulica. Na medida em que qualquer um dos requisitos acima não forem satisfeitos, então as duas superfícies se desviará uma da outra. Evidentemente, tudo o que se tem dito sobre a superfície integral também se aplica às linhas características que são incorporadas na mesma.

#### 4.1.3 As Propriedades Analíticas das Característica em Problemas de Propagação: Superfície de Soluções Analíticas e Não Analíticas.

Introduz algumas propriedades da superfície solução de um problema de propagação, ilustrando estas propriedades com o exemplo do canal com degrau mostrado na Figura 4.5. Uma onda se move neste canal da esquerda para a direita, e no início da investigação é a propagação na secção de profundidade do canal descrito como canal 1 nas Figuras 4.5 e 4.6. Antes de chegar ao degrau a onda gera uma superfície  $S_1$  sobre o canal 1 como mostrado na Figura 4.6.

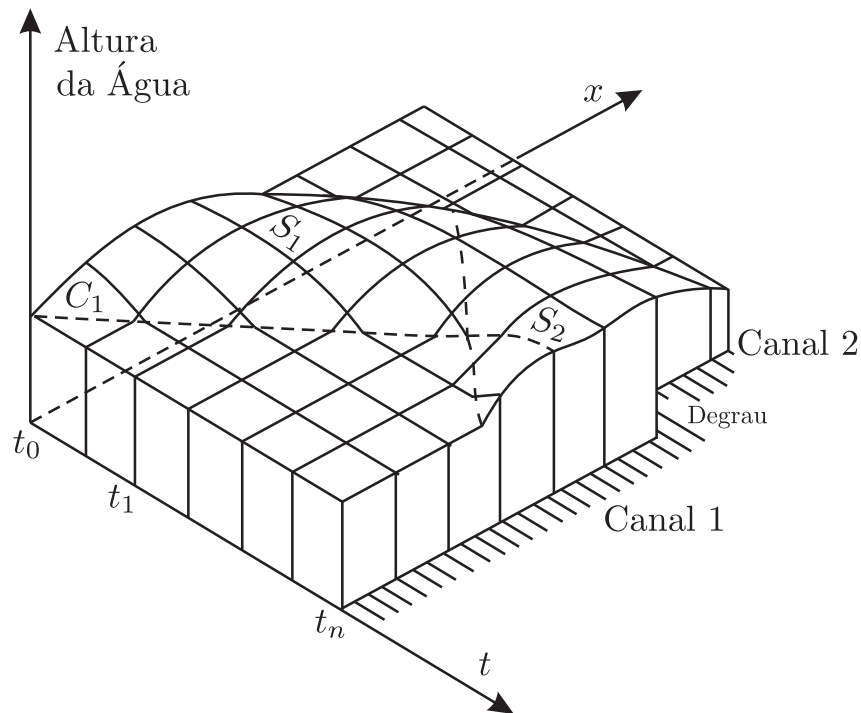




**Figura 4.5: Propagação de ondas de água sobre um degrau, ilustrando a formação da onda refletida**

**Fonte:(ABBOTT, 1966)**

Quando a onda atinge o degrau, mas não antes do tempo, o efeito do degrau é sentido sobre a onda: quando a onda passa sobre o degrau ela irá viajar mais lentamente no canal 2, enquanto uma onda refletida vai viajar de volta para o canal 1. A superfície hidráulica segue este processo Figura 4.6 formando uma única crista na superfície  $S_1$ , dividindo-se em duas cristas em  $S_2$ , estas duas cristas correspondem às ondas primárias e refletidas tal como elas aparecem nos sucessivos perfis.



**Figura 4.6: Propagação de água de onda sobre um degrau, ilustração e formação da superfície hidráulica associada no tempo.**

Fonte:(ABBOTT, 1966)

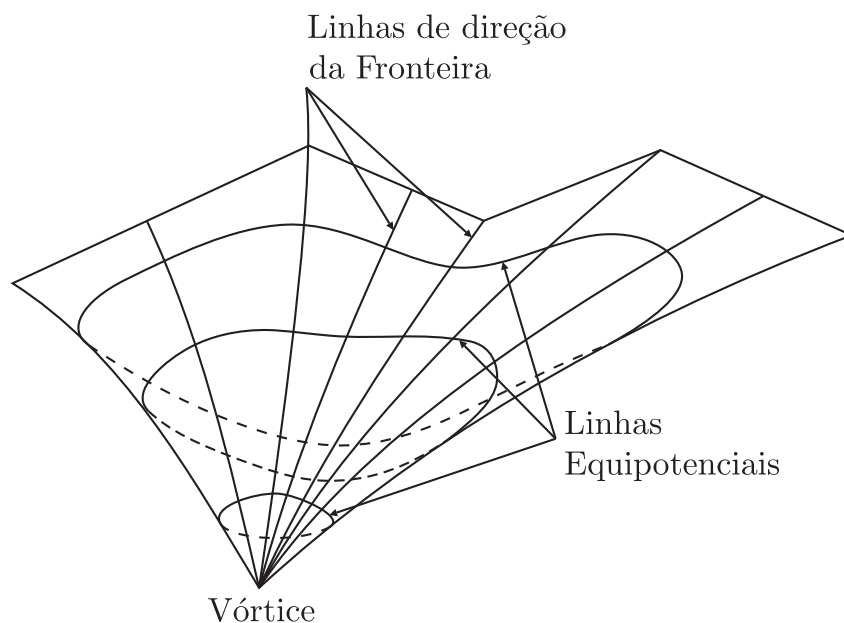
Será evidente que a superfície  $S_1$  permanece inalterada pela formação de  $S_2$ , e que geralmente tudo o que acontece depois, ou seja, mais longe ao longo do eixo  $t$ , não pode afetar  $S_1$ . As alterações nas condições físicas ao longo do canal afeta apenas a geração da superfície hidráulica como a onda geradora da região que elas influenciam. Esta é uma propriedade geral a todas as classe de problemas de propagação, uma propriedade que pode ser indicado como se segue:

*As condições físicas do problema não influenciam a superfície solução concomitantemente, mas são envolvidas somente quando a superfície é gerada.*

Comparando esse comportamento com aquele observado em um outro e talvez uma classe de problemas melhor conhecida - assim chamados “problema de equilíbrio”. Esta última classe inclui todos os problemas de fluxo de estado estacionário, em que um tempo independente da velocidade potencial é geralmente introduzido. Um exemplo bem conhecido é fornecido pela aerodinâmica estacionário (geralmente irrotacional) de fluxo de fluido em torno de um corpo sólido. Um exemplo análogo é encontrado no fluxo estacionário de água do solo em um aquífero livre permeável. Nestes problemas todas as condições físicas têm de ser satisfeitas simultaneamente, como é um evento simultâneo que está sendo descrito, e cada parte da

superfície hidráulica (superfície potencial ou superfície freática) depende, portanto, de qualquer outra parte. De fato, no caso de estado estacionário de mecânica dos fluidos, o problema é essencialmente o de determinar um estado de equilíbrio entre os potenciais de origem e as velocidades que eles induzem.

Nota que no caso de propagação, a perturbação inicial é propagada em uma ou duas direções preferenciais, características, em uma região aberta, com intensidade quase inalterada, e que muito do carácter dos perfis iniciais é impresso sobre perfis sucessivos e sobre a superfície integral, observe a Figura 4.6. Em problemas de equilíbrios por outro lado o efeito de perturbação é dissipado em todas as direções sobre a região fechada, decaindo rapidamente com o aumento da distância, e os caracteres singulares de fontes e sumidouros, e quaisquer recursos características especiais das fronteiras não são transferidas em nenhum grau significativo para a superfície hidráulica ou integral, observe a Figura 4.7.



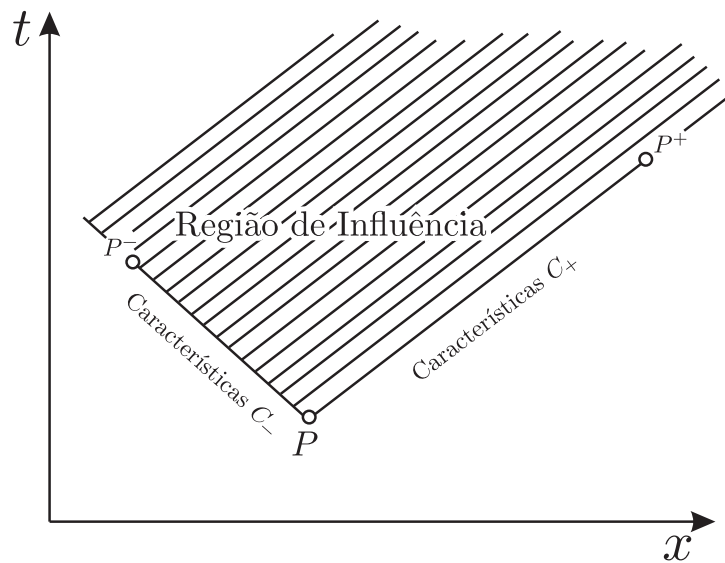
**Figura 4.7: A superfície hidráulica para um problema de equilíbrio**

**Fonte:(ABBOTT, 1966)**

Comparando as Figuras 4.6 e 4.7 podem ser evidentes já que existem consideráveis diferenças entre estas duas classes de problemas que os métodos usados na análise do problema de equilíbrio, por exemplo, conforme transformação e relaxamento, serão de pequenos ou nenhum valor na análise de problemas de propagação.

As diferenças físicas acima entre problemas de equilíbrio e de propagação deve, certamente, refletir em superfícies integrais matematicamente geradas destes problemas. Assim, a superfície integral de um problema de equilíbrio tem de utilizar todos os seus dados simultaneamente e

cada parte da superfície integral depende de todas outras partes. A superfície integral de um problema de propagação, por outro lado, deve usar somente dados de fronteira para a integração chegar a esses dados, enquanto que as partes posteriores da superfície integral devem ser capazes de mudar sem necessariamente alterar outras partes anteriores. Assim, coincidiram no problema de propagação a superfície integral e a hidráulica, tal como descrito na seção 4.1.2, uma mudança em uma parte da superfície integral não deve influenciar todas as outras partes. Para ser mais preciso a respeito disso, e para ver exatamente qual a parte que pode ser mais influenciada e quais as partes que não podem, pode referir ao plano  $xt$  como mostrado na Figura 4.8.



**Figura 4.8:** A região de influência de um ponto  $P$ , definida pelas características  $C_+$  e  $C_-$  passando pelo ponto  $P$

Fonte:(ABBOTT, 1966)

Considerando uma perturbação iniciada em algum ponto  $P$  no plano  $xt$  e, subseqüentemente, propagando ao longo de uma característica  $C_+$  para o ponto  $P^+$  e ao longo de uma característica  $C_-$  para  $P^-$ . Em  $P^+$  e  $P^-$  esta perturbação pode simplesmente continuar, ser dissipada ou refletida, mas, qualquer que seja seu destino, é evidente que apenas os pontos dentro da região sombreada  $P^-PP^+$  poderia possivelmente ser influenciada pela perturbação iniciada em  $P$ . Por esta razão, uma região como  $P^-PP^+$  é chamada *região de influência* de  $P$ . É visto que a região de influência de qualquer ponto  $P(x, t)$  é delimitada pelas características  $C_+$  e  $C_-$  que passam através de  $P(x, t)$  e avançando no tempo. Será igualmente claro que o que acontece em  $P$  não pode influenciar os acontecimentos fora da região sombreada de  $P^-PP^+$ , que é o complemento da região de influência. A região que pode ser influenciada por um evento em  $P(x, t)$  é então separada pela região que não pode ser influenciada pelo avançando das características

$C_+$  e  $C_-$  através de  $P$ . Esta demarcação entre regiões influenciadas e não influenciadas, que é considerada ser uma consequência necessária da celeridade finita de propagação das ondas, deve então ser levada para a superfície integral do problema de propagação.

Para resumir, pode-se dizer que a diferença entre um problema de propagação e um problema de equilíbrio reside nisto: em um problema de propagação a região de influência de qualquer ponto ocupa apenas uma parte da superfície integral, delimitada pelo avanço das características  $C_+$  e  $C_-$  através do ponto, enquanto que em um problema de equilíbrio, a região de influência coincide com a superfície integral inteira, com características em nenhum lugar em evidência.

Agora, observa-se que esta demarcação da superfície integral num problema de propagação significa matematicamente. Considera isso, para estender uma solução de um ponto  $P(x, t)$  para um outro ponto  $P'(x', t')$  utilizando o Teorema de Taylor. Este afirma que se uma função  $f$  é analítica<sup>4</sup> em alguma região (ou seja, ela e todas as suas derivadas são definidas e contínua em cada ponto da região) e, se conhece os valores da função e de todas as suas derivadas, em qualquer ponto  $P(x, t)$ , então pode encontrar o valor da função em qualquer outro ponto  $P'(x', t')$  na região mediante a aplicação da série:

$$\begin{aligned} P(x', t') &= P(x, t) + (x' - x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + (t' - t) \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \\ &= + \frac{1}{2!} \left\{ (x' - x)^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + 2(x' - x)(t' - t) \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x \partial t} + (t' - t)^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde a  $\partial^n P(x, t) / \partial x^r \partial t^{n-r}$  é considerada em  $P(x, t)$ . Inversamente, se é possível continuar a solução a partir de qualquer ponto  $P(x, t)$  para outro qualquer ponto  $P'(x', t')$ , não necessariamente perto dele, pelo uso de uma série de Taylor, então a superfície coberta por todos os pontos  $P, P'$  deve ser analítica. Este processo de continuar a solução é conhecido como o processo de continuação analítica, enquanto que a função assim obtido é também chamada de *continuação analítica* da função original.

Esta propriedade de continuação analítica foi tratado em detalhe por Hadamard (1923) que, em seu celebre tratado em equações diferenciais parciais, explicou o seu significado da seguinte forma:

“As funções analíticas são as únicas normalmente dadas pelo nosso procedimento matemático: mas elas são realmente muito especiais entre as funções em geral. Isto é facilmente visto pelo simples (e importante) fato que a continuação de uma função analítica é determinada. Se  $f(x)$  é analítica em  $(a, b)$  o conhecimento do seu valor em qualquer, ainda que pequeno, no sub-intervalo  $(a', b')$  de  $(a, b)$  nos permite calculá-lo em todo  $(a, b)$ ”.

<sup>4</sup>Em matemática, uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em séries de Taylor.

Assim, para qualquer função analítica, uma vez que tudo se sabe sobre as condições em qualquer ponto da superfície integral da função, então condições a todos os outros pontos são exclusivamente determinadas pela continuação analítica. Em tal função, por conseguinte, a região de influência de qualquer ponto coincide com a superfície integral inteira. Isto evidentemente corresponde à situação existente em problemas de equilíbrio, de modo que poderia supor que as superfícies integrais de tais problemas são analíticas em todos os lugares, exceto, talvez, em fontes, sumidouros e fronteiras. Que isto é de fato o caso para todos esses problemas de equilíbrio que está bem estabelecido na análise. Por outro lado, uma vez que as superfícies integrais de problemas de propagação são visivelmente com falta desta propriedade de continuação analítica, pode supor que elas podem ser *não-analítica*. Além disso, parece que pode-se ver com precisão onde elas podem se tornar não-analítica, ou seja, ao longo destas linhas sobre as quais a solução não pode ser continuada: as características. Assim, na medida em que as características  $C_+$  e  $C_-$  passam por  $P(x, t)$  na Figura 4.8 limita a continuação da superfície integral, assim, nas características  $C_+$  e  $C_-$ , a função descreve o efeito da perturbação iniciada em  $P(x, t)$  podendo ser não-analítica. Referindo novamente a Figura 4.6 observa a razão física para isso, pois claramente ao longo das características  $C_+$  e  $C_-$ , a superfície integral pode mudar a partir de uma superfície plana (curvatura zero) para uma forma de onda (com curvatura finita) e a segunda derivada, pelo menos, deve ser descontínua ao longo das características. Se a onda é iniciada de repente, a derivada primeira pode ser descontínua também, enquanto que a continuidade de derivadas de ordem superior seja pelo menos questionável. Assim, através das linhas características as derivadas são descontínuas, ou, o que equivale à mesma coisa, as características são as linhas ao longo do qual as derivadas com descontinuidades iniciais irão propagar. Uma falha da expansão em série de Taylor ao cruzar essas linhas é então perfeitamente de se esperar.

Chegando a essa situação pode se perguntar qual o significado da EDP quando situado nas Características, porque nestas linhas seus coeficientes diferenciais parecem ser bastante indefinidos. Ilustra este significado em termos geométricos mais gerais a seguir, apesar de uma formulação rigorosa de diferenciação em tais casos, deve ser feita referência à “teoria da distribuição”.

## 4.2 DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DAS CARACTERÍSTICAS

### 4.2.1 Descrição Geométrica das EDOs

Embora as propriedades geométricas das Características são essencialmente ligadas às propriedades das EDPs, elas também podem ser comparadas com certas propriedades de EDOs. Tal comparação sugere generalizações úteis, mais especialmente no que diz respeito à natureza

das condições iniciais e de contorno em vários tipos de problema. Assim, primeiro considere EDOs, começando com a equação de primeira ordem

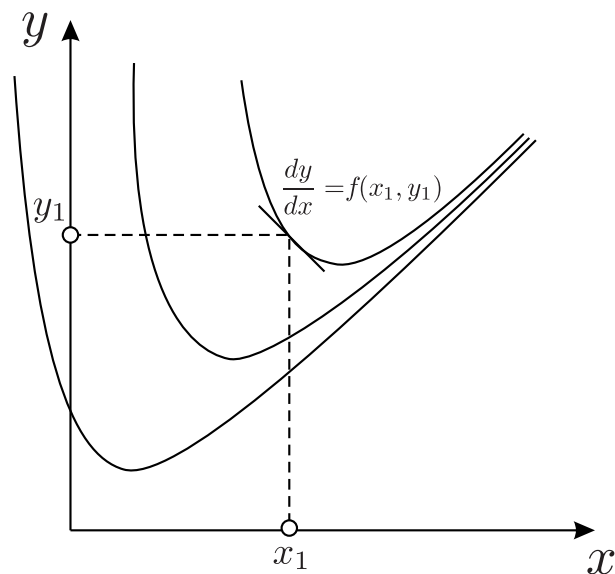
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) . \quad (4.2)$$

Esta tem uma solução geral dada por

$$y = F(x,a) , \quad (4.3)$$

onde  $a$  é uma constante arbitrária de integração.

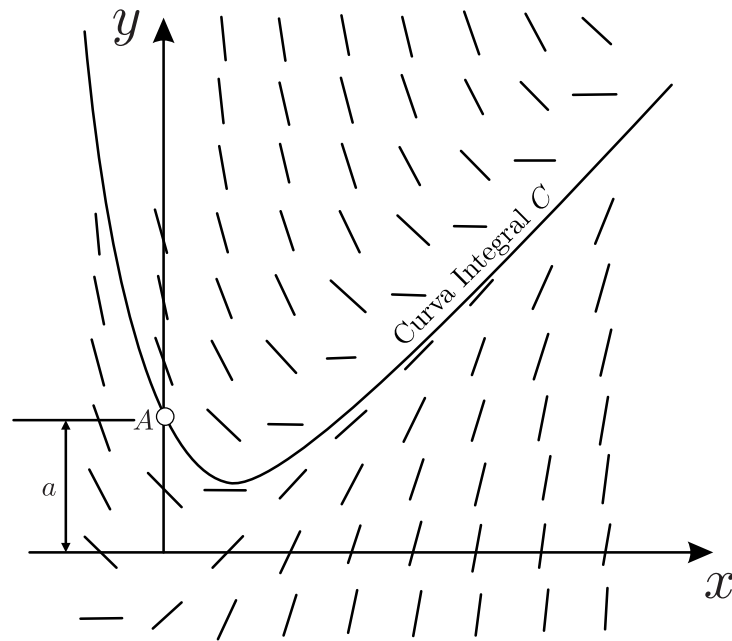
Para cada valor de  $a$  corresponderá uma solução particular, ou relação funcional entre  $x$  e  $y$ . Esta relação pode ser representada por uma curva no plano  $xy$ , tal curva é chamada curva integral. Uma vez que tais curvas são soluções da equação (4.2), segue que, em cada ponto em todas as curvas,  $x$ ,  $y$  e  $dy/dx$  satisfazem (4.2), conforme mostra Figura 4.9.



**Figura 4.9: Curvas Integrais para as EDOs de primeira ordem.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Observando a equação (4.2) mas como uma inclinação particular,  $dy/dx$ , para qualquer ponto  $P(x,y)$  no plano  $xy$ . Desenha através de  $P$  uma pequena linha reta com a inclinação assim definida. Tal linha reta de comprimento tão curto é chamado de elemento linear. Se desenhar elementos lineares em todos os pontos para os quais a função  $f$  é definida, obtém-se um conjunto, ou campo de tais elementos, que é chamado um campo de direção. Um campo de direção é mostrado na Figura 4.10.



**Figura 4.10: Curvas Integrais definidas pelos elementos lineares para EDOs de primeira ordem.**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Agora, em qualquer ponto  $P(x, y)$  os elementos lineares e as curvas integrais terão a mesma inclinação, dada por  $dy/dx = f(x, y)$ , de modo que o elemento linear e a curva integral será tangente em cada ponto do campo. Se é possível construir o campo de direção, as curvas integrais podem ser determinadas. Devido a isso, partindo de qualquer ponto  $P$  no plano  $xy$ , a direção inicial da curva integral é fixada pelo elemento linear de  $P$ , e os elementos lineares construídos em torno da curva seguem um caminho satisfazendo a equação (4.2). Desta forma, para qualquer ponto do plano, uma única curva integral pode ser construída.

Será visto posteriormente que qualquer curva integral particular, tal como  $C$ , pode ser associada com um ponto particular, por exemplo  $A$ , na Figura 4.10. Por outro lado, para cada ponto  $A$  corresponderá uma curva integral particular. Portanto, para cada constante arbitrária  $a$  da equação (4.3), que define em particular uma integral, é dada uma certa interpretação geométrica, nomeadamente, como a distância  $a$  conforme indicada na Figura 4.10.

Considere agora a equação de segunda ordem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (4.4)$$

Neste caso, para qualquer ponto inicial  $P_1(x_1, y_1)$  e inclinação  $dy/dx$  em  $P_1$ , a equação (4.4)



define  $d^2y/dx^2$ . No entanto, pode-se diferenciar a equação (4.4) para obter

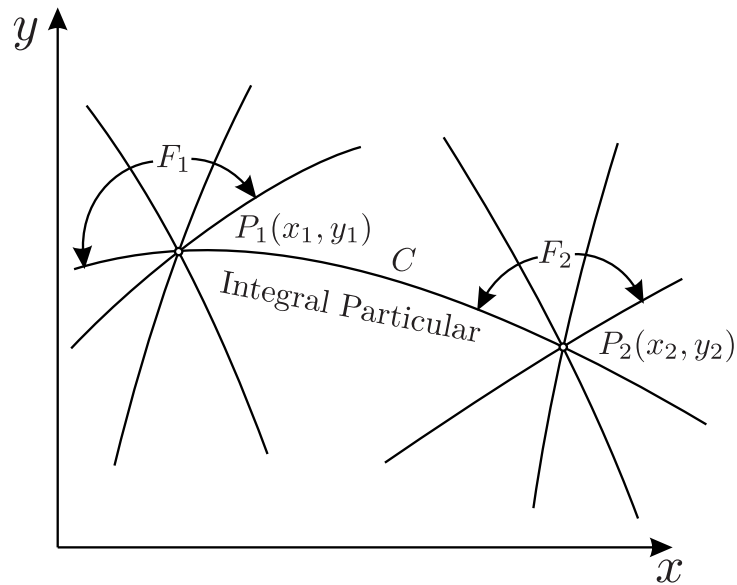
$$\frac{d^3y}{dx^3} = f' \left( x, y, \frac{dy}{dx} \right) = g \left( x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right) .$$

Agora  $d^2y/dx^2$  sendo já encontrado  $d^3y/dx^3$  pode ser determinado, e então a equação novamente diferenciada para dar  $d^4y/dx^4$  em termos de quantidades conhecidas e assim por diante. Pode-se aplicar o bem conhecido teorema (mas não menos notável) de Taylor, em que

$$y(x') = y + \frac{dy}{dx} \frac{(x' - x)}{1!} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{(x' - x)^2}{2!} + \dots$$

onde o  $y$  à direita e todos as suas derivadas sendo tomadas em  $x$ . Tomando todos os valores possíveis de  $x'$  pode então, ao menos em princípio, construir uma curva integral através de  $P_1(x_1, y_1)$  com a inclinação inicial  $dy/dx$  em  $P_1$ .

Observe que, em contraste com a equação de primeira ordem, uma equação de segunda ordem necessita de um conhecimento de duas grandezas (neste caso, um par de coordenadas e a inclinação dessas coordenadas), a fim de construir uma curva integral. Na ausência de informações sobre as inclinações, poderia, é claro, primeiro escolher arbitrariamente qualquer inclinação inicial para a construção de uma curva, e então escolher uma outra inclinação para dar uma outra, geralmente curvas diferentes. Considerando todas as inclinações iniciais possíveis, pode desta forma construir uma família infinita de curvas,  $F_1$ , por meio de qualquer ponto  $P_1(x_1, y_1)$ . Pode, então, repetir este processo numa vizinhança para um ponto  $P_2$  e construir outra família infinita de curvas,  $F_2$ , satisfazendo a equação (4.4). Esta construção é mostrada na Figura 4.11, a partir da qual ficará claro que pode existir uma curva que é comum a ambas as famílias, por exemplo, a curva  $C$  conforme Figura 4.11. Assim, no caso de uma equação de segunda ordem, uma curva integral particular pode também ser definida, tendo dois pares de coordenadas, ou pontos, através do qual a curva passa.



**Figura 4.11: Formação de uma curva integral por uma EDO de segunda ordem.**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Mais uma vez, no entanto, deveria exigir duas quantidades para definir uma solução, essa dependência de duas quantidades, evidentemente, correspondente à dependência da solução de uma equação de segunda ordem em duas constantes arbitrárias. Deve dizer que, enquanto a solução de uma equação de primeira ordem requer somente um ponto de dados iniciais, a solução de uma equação de segunda ordem requer dois pontos de dados iniciais. Portanto, não é difícil imaginar a situação em que uma equação de  $n$ -ésima ordem exigirá  $n$  pontos de dados iniciais.

#### 4.2.2 Descrição Geométrica das EDPs

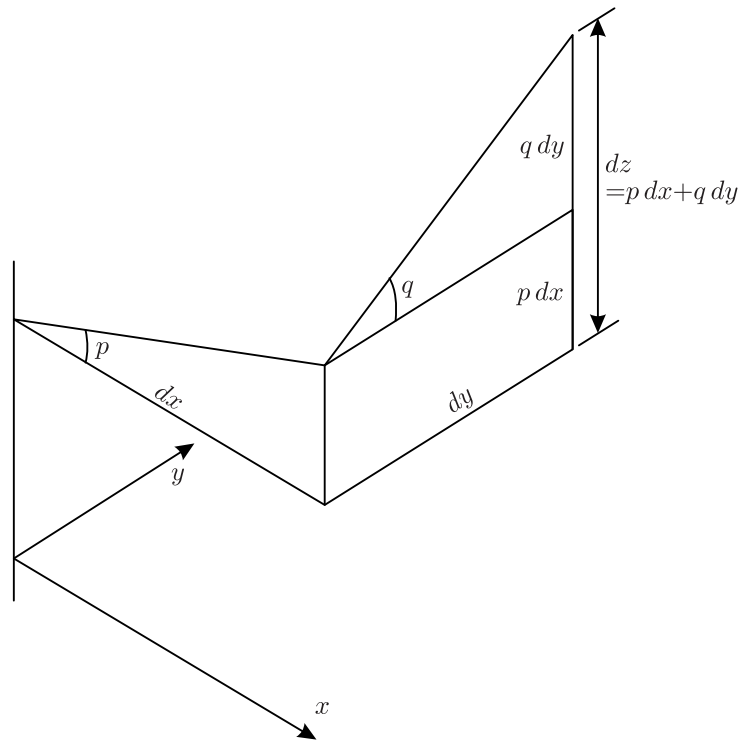
Agora pode estender as noções acima para EDPs. A região de integração passará a ser um espaço de três ou mais dimensões, embora para facilitar a representação considere apenas espaços de três dimensões, com coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Se tratar  $z$  como variável dependente, com  $x$  e  $y$  independentes, tem-se então duas “inclinações principais” a saber,  $\partial z/\partial x$  na direção  $x$  e  $\partial z/\partial y$  na direção  $y$ . Estas inclinações, juntas, definem o incremento  $dz$  em termos dos incrementos  $dx$  e  $dy$ , dado por

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (4.5)$$

onde  $p$  é escrito como  $\partial z/\partial x$  e  $q$  como  $\partial z/\partial y$  tornam se

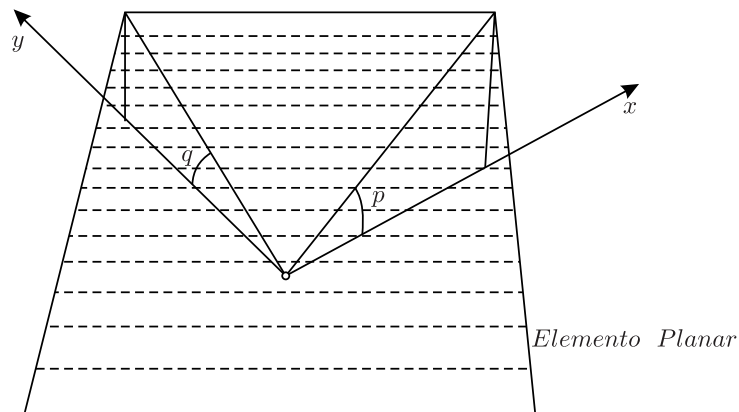
$$dz = p dx + q dy. \quad (4.6)$$

As inclinações  $p$  e  $q$  também definem a orientação de uma superfície planar no espaço  $xyz$ . Estas situações estão ilustradas nas Figuras 4.12 e 4.13.



**Figura 4.12:** Esquematização da equação  $dz = p dx + q dy$ .

Fonte: (ABBOTT, 1966)



**Figura 4.13:** Definição do elemento planar pelo par  $(p, q)$ .

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Agora, para cada ponto  $P(x, y)$  no plano  $xy$  a Equação Diferencial Ordinária (EDO) geralmente define um único valor do gradiente  $dy/dx$ . No entanto, em um ponto correspondente  $P(x, y, z)$  no espaço  $xyz$ , a equação diferencial parcial não define valores únicos de  $p$  e  $q$ . A EDP

apenas expressa uma relação entre  $p$  e  $q$ . Assim, por exemplo, a EDO de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = x - y, \quad (4.7)$$

dá um valor particular de  $dy/dx$  em qualquer ponto  $P(x, y)$ . Por outro lado, a EDP de primeira ordem e de primeiro grau,

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (4.8)$$

dá somente uma relação algébrica entre  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ , a saber,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{ou} \quad p = q,$$

para todos os pontos  $P(x, y, z)$ . A EDP de primeira ordem e segundo grau, por exemplo,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (4.9)$$

expressa duas relações algébricas alternativas, neste caso

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

A EDP de segunda ordem e primeiro grau, por exemplo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (4.10)$$

pode então ser considerada como uma relação algébrica entre  $\partial^2 z/\partial x^2$  e  $\partial^2 z/\partial y^2$ , ou como uma relação diferencial entre  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

#### 4.2.3 A Formação de Superfícies Integrais por EDPs

A maneira pela qual uma EDP forma uma solução a partir de dados iniciais é facilmente ilustrado no caso de EDP de primeira ordem, para isso precisa apenas considerar as relações algébricas entre as primeiras derivadas. Assim, considerando a equação

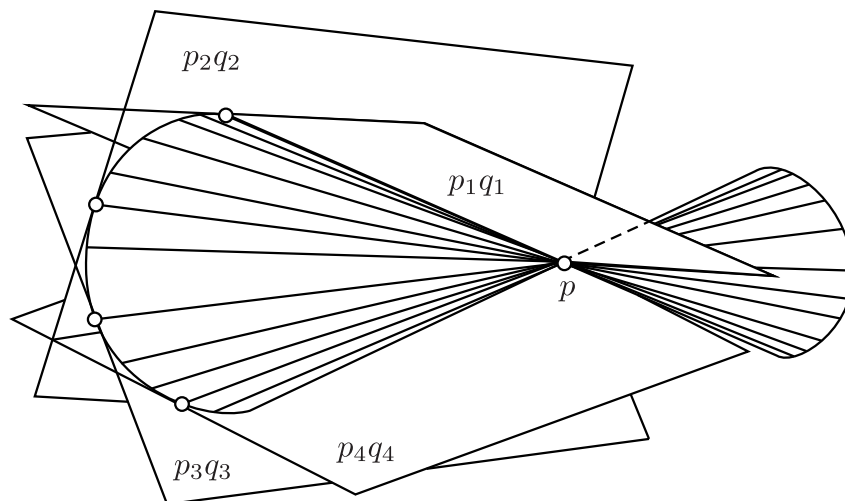
$$F(p, q, x, y, z) = 0, \quad (4.11)$$

para cada ponto  $P(x, y, z)$  tem uma relação algébrica definida entre  $p$  e  $q$ . Dado  $p$  obtém-se imediatamente  $q$ , de modo que a equação (4.11) define um conjunto de valores de pares  $(p, q)$ . Uma vez que cada par define um elemento planar em  $P(x, y, z)$ , de acordo com a Figura 4.13, a equação (4.11) define um conjunto de elementos planares em cada ponto  $P(x, y, z)$  no espaço

$xyz$ . Então, seguindo o mesmo raciocínio para o campo linear, uma superfície no espaço  $xyz$ , seria uma superfície integral, se para cada ponto, a superfície for tangente a um elemento planar pertencente ao campo.

No caso do plano  $xy$ , onde havia uma única derivada para cada ponto no plano, tal condição de tangência poderia ser facilmente interpretada, e uma curva integral desenhada. Mas como pode interpretar essa condição no espaço  $xyz$ , onde cada ponto tem um número infinito de possíveis elementos planares, para qualquer um dos quais a superfície pode ser tangente? Procura esclarecer a situação da seguinte forma.

Em qualquer ponto  $P(x, y, z)$  pode expressar  $p$  como uma função de  $q$ , isto é,  $p = p(q)$ . Em seguida, à medida que varia  $q$ ,  $p$  também irá variar, e o elemento planar definido por  $p$  e  $q$  vai variar no espaço  $xyz$ . No processo deste movimento surgirá uma superfície que é o elemento envoltório e, uma vez que cada elemento é planar e passa por  $P$ , esta superfície será um cone com vértices em  $P$ , conforme ilustra a Figura 4.14.

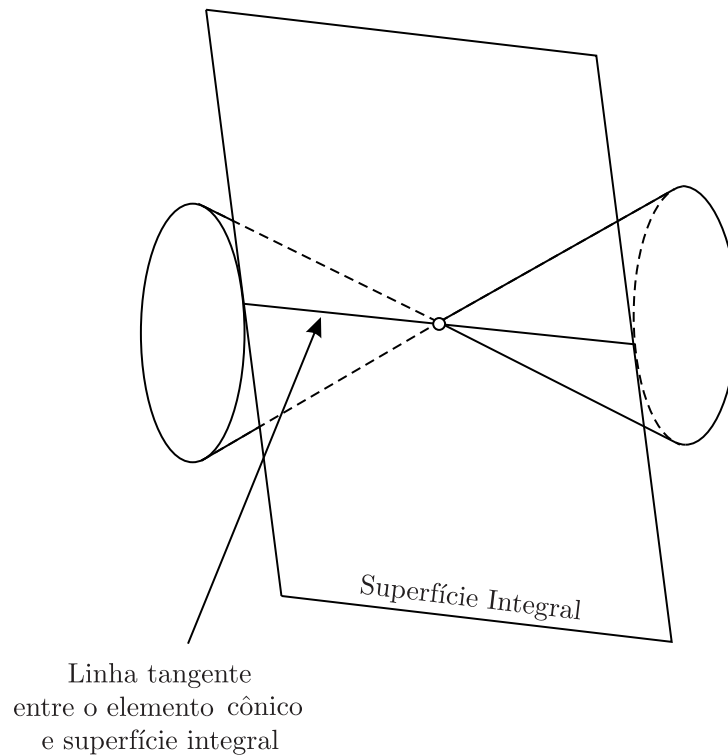


**Figura 4.14: Formação de um elemento cônico pelos elementos planares de uma EDP de primeira ordem.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Chama-se este cone de *cone elementar*. Geometricamente é o envoltório dos elementos planares em um ponto. Será evidente que em cada ponto do espaço onde a EDP é definida existirá um cone elementar, cuja orientação e configuração é definida nesse espaço pela EDP governante e as coordenadas do ponto. Uma vez que todas e cada superfície integral é tangente a um dos elementos planares, e todos esses elementos planares são tangentes ao cone elementar, segue-se que a superfície integral em um ponto deve ser tangente ao elemento cônico naquele ponto, ilustrado pela Figura 4.15. Desta forma, reduz-se o problema de se utilizar um sistema

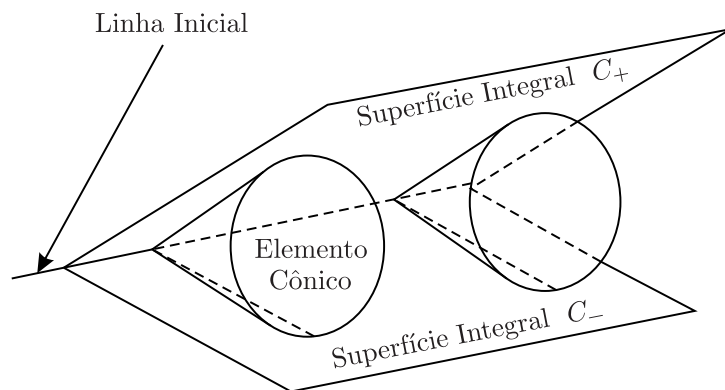
infinito de superfícies para o problema de utilizar o seu cone envoltório.



**Figura 4.15: Formação da Linha Dirigente.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Considera agora a formação de uma superfície integral seguida da EDP e de certas condições iniciais. Em cada ponto do espaço  $xyz$ , a EDP define um elemento cônico. Desta forma, então, para definir uma superfície integral, precisa apenas de uma linha inicial, que corresponde, por exemplo, para  $x$  constante ou  $y$  constante. Pois, dada esta linha, é facilmente visto que duas superfícies integrais podem “surgir” a partir dela, subsequentemente cada propagação no espaço  $xyz$  é de tal forma que em cada ponto é tangente ao elemento cônico nesses pontos, conforme Figuras 4.16 e 4.17.

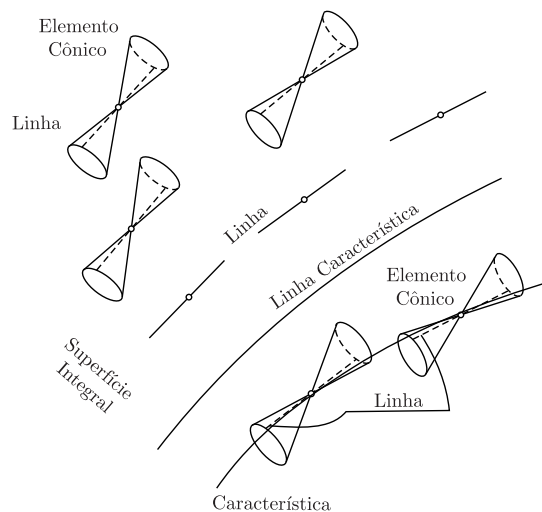


**Figura 4.16: Integral de Superfície gerada por uma linha inicial e pelo elemento.**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Deve notar também que, em qualquer linha sobre as superfícies integrais, outra superfície integral poderia ser gerada seguindo as superfícies do cone oposto tangente à superfície original. No entanto, esta possível difusão da superfície integral, que parece estar relacionada com a difusão de ondas cilíndricas, não altera o fato de que apenas uma curva inicial é necessária para definir as superfícies integrais.

Pode agora ser visto, como na Figura 4.17, que a superfície integral é tangente a cada elemento cônico ao longo de uma linha, o que pode chamar de linha características, e que estas decisões constituem uma espécie de campo de direção na superfície integral. Todas as superfícies integrais propagam através de tal domínio, e assim se propagam ao longo de linhas definidas pelas sucessivas linhas características. Chamam-se estas linhas ao longo do qual se propagam as superfícies integrais, as características da superfície integral.



**Figura 4.17: Elementos cônicos e Características.**

Fonte: (ABBOTT, 1966)

Agora ficará claro que, no caso de uma EDP de primeira ordem, as Características e a superfície integral são definidas pelo sistema de equações e uma linha inicial ou uma função inicial. Se observar uma função como um ponto único em um espaço funcional, pode dizer que a solução de uma EDP de primeira ordem requer somente um ponto como dado inicial.

Embora o que se vê acima é verdade “em quase toda parte” há uma exceção notável a sua validade, ou seja, quando as condições iniciais são elas próprias característica. Neste caso, é bastante evidente, a partir da Figura 4.17, que a superfície integral não pode ser definida, de modo que deve adicionar as condições acima para a existência de uma solução, e ressalva de que as condições iniciais devem ser não característica.

Na descrição acima, considerou uma equação de primeira ordem bastante geral, obtendo-se cones elementares como os envoltórias dos nossos elementos planares. No entanto, pode ser mostrado que, se a equação de primeira ordem é linear os cones elementares degeneram-se para elementos lineares: os elementos planares giram em torno de uma linha. Na próxima seção ilustrar esse comportamento com alguns detalhes. Tudo o que precisa observar nesta fase é que, neste caso linear, apenas uma superfície integral será então iniciada a partir de uma determinada curva inicial não característica, e não pode haver nenhuma dúvida de qualquer difusão desta superfície.

Deve também considerar brevemente a formação de uma superfície integral por uma EDP de segunda ordem. Neste caso tem uma relação diferencial entre  $p$  e  $q$ , de modo que deve ter o par  $(p, q)$  definido em um ponto  $P_1(x, y, z)$  se quiser avançar para a formação de qualquer elemento adjacente planar em  $P_2(x, y, z)$ . Em particular, deve ter como dados iniciais não somente uma linha inicial não-característica, ou uma função inicial, mas também um conjunto inicial de derivadas, tais como,  $\partial z/\partial x$  ou  $\partial z/\partial y$  ou talvez alguma combinação destas, definidas ao longo dessa linha, então estes constituindo, de fato, uma segunda função inicial. Observará em seções posteriores que, embora possa ter outros tipos de dados iniciais, precisa sempre, na verdade, de duas funções iniciais, a fim de definir a solução de uma EDP de segunda ordem. De acordo com o comportamento observado acima para EDOs de primeira ordem e EDPs, chamam-se esses dados de dados de dois pontos iniciais.

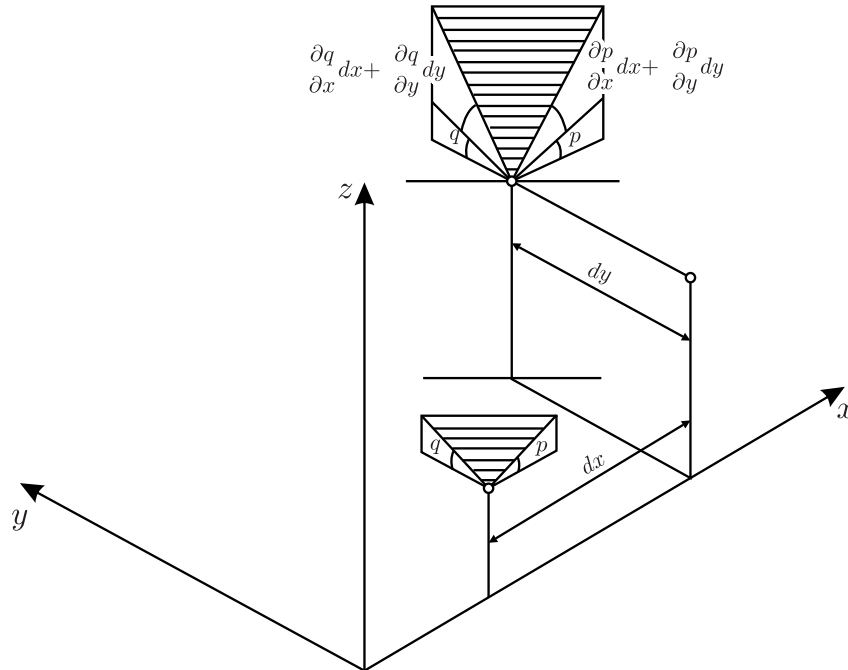
Dados tais dados, pode novamente prosseguir, a partir de qualquer ponto  $P_1(x, y, z)$ , para a formação dos elementos planares e suas envoltórias cônicas utilizando pontos adjacentes  $P_2(x', y', z')$ , através de uma expansão em série Taylor. Se considerar, por enquanto, apenas pequenas distâncias  $(x - x')$ ,  $(y - y')$  pode truncar esta série de Taylor, após os termos  $(x - x') = dx$ ,



e  $(y - y') = dy$ , de modo que

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad \text{e} \quad dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy .$$

Este desenvolvimento está esquematizado na Figura 4.18.



**Figura 4.18:** Geração de elementos planares por uma EDP de segunda ordem.

Fonte: (ABBOTT, 1966)

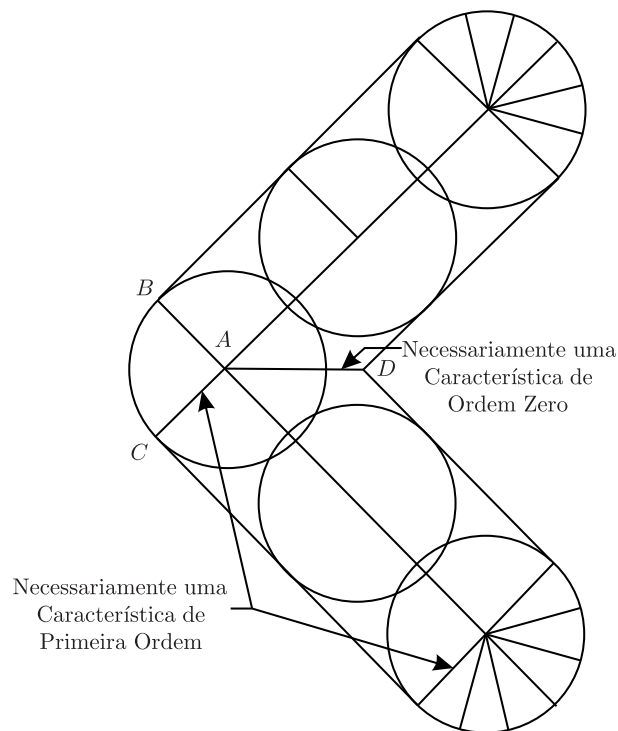
### 4.3 DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS

#### 4.3.1 Descontinuidades e Indeterminações ao Longo das Características

Na seção anterior observou-se que, se os elementos cônicos gerados por uma EDP degenerar em elementos lineares, consecutivamente, as Características encontram-se definidas pela intersecção dos elementos planares. Assim, ao longo de qualquer Característica, pode-se visualizar uma sucessão de intersecção de elementos planares, cada um dos quais pode ser incorporado na integral de superfície. Desta forma, uma Característica pode ser considerada como uma curva ao longo do qual uma folha da integral de superfície cruza outra folha. Neste caso, pode-se definir a curva Característica através das inclinações da superfície, isto é, onde as derivadas de primeira ordem são descontínuas. Considerando-se uma superfície em um espaço  $x, y$  e  $z$  define-se as curvas Características ao longo das quais ocorrem as descontinuidades das derivadas de primeira ordem. Isso não quer dizer que deve haver uma função descontínua para

ter curva Característica, pois pode-se ter infinitas ondulações na curva, onde cada uma das quais pode dar origem a uma Característica.

Uma Característica definida da maneira anterior, como sendo uma curva onde ocorrem descontinuidades nas derivadas de primeira ordem é chamada Característica de ordem zero. Que não é, a única Característica facilmente vista, mesmo na presença de elementos lineares. Mas as Características de ordem superior tornam-se especialmente evidente quando os elementos cônicos não degenerar em elementos lineares, como ilustrado na Figura 4.19. Neste caso, é evidentemente possível que as derivadas primeiras sejam contínuas em todas as linhas, tais como, as linhas  $AB$  e  $AC$  na Figura 4.19, mesmo havendo uma mudança brusca na curvatura da superfície nessas linhas, e, conseqüentemente, descontinuidades em derivadas de segunda ordem. Neste caso, então, uma Característica é definida como uma linha através da qual as derivadas de segunda ordem são descontínuos. Esta linha é chamada de uma característica de primeira ordem.



**Figura 4.19: Vista plana sobre um sistema de cones característicos, ilustrando Característica de ordem zero e de primeira ordem.**

**Fonte: (ABBOTT, 1966)**

Ficará evidente posteriormente, que as Características de primeira ordem e de ordem zero representa a mesma coisa em qualquer processo de propagação. A diferença essencial entre elas aparece quando compara-se processos de propagação diferentes, especialmente com números

de dimensões diferentes. Assim, observará no decorrer do trabalho que, com duas variáveis independentes, encontra-se na prática, apenas equações lineares de primeira ordem, desta maneira, terá sempre Características de ordem zero, definida pela rotação de um único elemento planar. Com três variáveis independentes, no entanto, deve-se obter equações de primeira não lineares, definindo os elementos cônicos. Neste último caso, apenas as Características de primeira ordem é definida, e dada na interseção de dois elementos planares, onde eles entram em coincidência. Para colocar isto de uma maneira não, um elemento linear pode ser definido simplesmente girando um único elemento planar, com variação de  $p$  e  $q$ , mas para a definição de um elemento cônico, através da definição de seus geradores, deve-se exigir que dois desses elementos planares girem em coincidência.

O procedimento acima novamente traz em destaque os dois conceitos de linhas através da qual certas derivadas podem ser descontínuas, ou linhas ao longo das quais discontinuidades nas derivadas irá ocorrer. Isto é, dizer que nestas linhas, ou seja, nas direções Características, as derivadas pode não ter nenhum valor determinado: elas podem ser indeterminadas. Desta forma, a fim de encontrar as características, tem-se apenas que encontrar as direções, ou valores de  $dy/dx$ , que fazem as derivadas indeterminadas.

Com objetivo de encontrar essas condições para a indeterminação de uma forma consistente e organizada, utilizará-se certas propriedades elementares de matrizes e determinantes (ABBOTT, 1966).

#### 4.3.2 Sistemas de EDPs: O Caso indeterminado

Um elemento linear pode ser definido por:

- uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem, dada por

$$a + bp + cq = 0 , \quad (4.12)$$

onde  $p = \partial z / \partial x$  e  $q = \partial z / \partial y$ , relacionam algebricamente suas variáveis e suas derivadas;

- uma forma diferencial

$$dxp + dyq = dz , \quad (4.13)$$

que define os elementos planares.

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções de  $x$  e  $y$  somente, a equação (4.12) é dita linear, enquanto que, se eles também envolvem a função  $z$  é chamado quase linear. Pode-se escrever as equações (4.12)

e (4.13) na forma de sistema

$$\begin{cases} b \cdot p + c \cdot q = -a \\ dx \cdot p + dy \cdot q = dz \end{cases}, \quad (4.14)$$

cuja forma matricial é dada por,

$$\begin{bmatrix} b & c \\ dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ dz \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Da mesma forma, um sistema de duas equações diferenciais parciais de primeira ordem em duas variáveis, digamos  $z_1$  e  $z_2$ , escreve-se na forma

$$\begin{cases} a + b_1 p_1 + c_1 q_1 + b_2 p_2 + c_2 q_2 = 0 \\ d + e_1 p_1 + f_1 q_1 + e_2 p_2 + f_2 q_2 = 0 \end{cases}, \quad (4.16)$$

define elementos planares através da relação

$$\begin{cases} b_1 p_1 + c_1 q_1 + b_2 p_2 + c_2 q_2 = -a \\ e_1 p_1 + f_1 q_1 + e_2 p_2 + f_2 q_2 = -d \\ dx p_1 + dy q_1 = dz_1 \\ dx p_2 + dy q_2 = dz_2 \end{cases}, \quad (4.17)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & b_2 & c_2 \\ e_1 & f_1 & e_2 & f_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -d \\ dz_1 \\ dz_2 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Os elementos característicos definidos pela EDP de segunda ordem

$$a + bp + cq + er + fs + gt = 0, \quad (4.19)$$

onde

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

podem ser obtidos de forma semelhante, fazendo

$$\begin{cases} er + fs + gt = -(a + bp + cq) \\ dx.r + dy.s = dp \\ dx.s + dy.t = dq \end{cases}, \quad (4.20)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} e & f & g \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + bp + cq) \\ dp \\ dq \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Observa-se que (4.15), (4.18) e (4.21) têm a forma geral

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & & & & & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

A equação (4.22) compreende  $n$  equações lineares para as  $n$  funções desconhecida  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , para que possa resolver para as  $n$  variáveis, pelo menos, em princípio, deve-se ter:

$$u_i = \pm \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdot & \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (4.23)$$

Agora, se as  $n$  equações lineares são independentes, então os  $u_i$  é determinado claramente e a equação (4.23) dará uma única solução. No caso contrário, ou seja, quando as  $n$  equações lineares são de alguma forma dependente, então  $u_i$  será indeterminado, tomando a forma, “ $u_i = 0/0$ .”

Embora os  $u_i$  sejam indeterminados ao longo das Características, seus coeficientes devem continuar relacionados uns com os outros, a fim de definir os elementos planares. Desta forma, uma vez que os  $u_i$  são indeterminados, mas determinados nas relações uns com os outros, é de fato necessário (e suficiente) que todos os determinantes do tipo mostrado na equação (4.22) sejam iguais a zero, entretanto nem todos os seus menores devem ser zero. Esta condição pode ser simplificada, introduzindo o conceito de posto de uma matriz. Dize-se que, se  $A$  é uma matriz, e se todos os determinantes menores de ordem  $r + 1$  nela contido são zero, enquanto pelo menos um menor de ordem  $r$  não é zero, então  $A$  é de posto  $r$ . Com esta definição chega-se a um resultado matemático de fundamental importância para determinar as inclinações das curvas características.

Uma condição necessária e suficiente para os  $u_i$  sejam indeterminados, mas mutuamente relacionados é que o posto da matriz de ordem  $(n + 1) \times n$  formada pelos coeficientes de  $u_i$  e o vetor coluna à direita da equação (4.22) seja de posto  $(n - 1)$ .

#### 4.3.3 EDPs de Primeira Ordem

As EDPs de primeira ordem são da forma

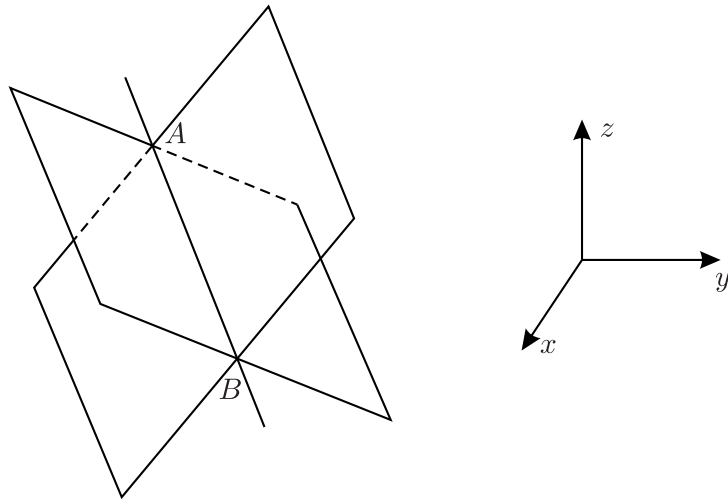
$$Ap + Bq = C \quad (4.24)$$

onde  $p = \partial z / \partial x$  e  $q = \partial z / \partial y$ .  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Uma equação da forma (4.24) define uma relação algébrica linear entre  $p$  e  $q$  para cada ponto no espaço  $xyz$ . Os elementos planares podem ser obtidas, substituindo pares ordenados de valores  $p$  e  $q$  na expressão

$$p \cdot dx + q \cdot dy = dz \quad (4.25)$$

Assim, tratando (4.24) e (4.25) como um par de equações nas variáveis  $p$  e  $q$ , define-se um conjunto de elementos planares. Estes interceptam-se em uma curva  $AB$  como mostra a Figura 4.20, onde observa-se infinitos valores de  $p$  e  $q$ .



**Figura 4.20: Características como uma intersecção de dois elementos planares.**

Fonte:(ABBOTT, 1966)

Assim  $p$  e  $q$  são efetivamente indeterminado ao longo da linha  $AB$ . Pelo raciocínio das seções anteriores, um procedimento para encontrar esta linha é expressar a dependência linear das equações (4.24) e (4.25), colocando-as na forma de sistema

$$\begin{cases} A \cdot p + B \cdot q = C \\ dx \cdot p + dy \cdot q = dz \end{cases} \quad (4.26)$$

O qual pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A & B \\ dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ dz \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

e, sendo linearmente dependente, tem-se

$$\begin{vmatrix} A & B \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} A & C \\ dx & dz \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} C & B \\ dz & dy \end{vmatrix} = 0$$

isto é,

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} \quad (4.28)$$

Esta, então, é a equação da linha que é comum a todos os elementos planares, a linha chamada curva Característica, ou mais precisamente, a Característica de ordem zero. Pode-se notar, que a Inclinação da Curva Característica, é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \quad .$$

Investiga-se agora as Característica de primeira ordem, seguindo as descontinuidades em derivadas parciais de segunda ordem. Considere novamente a equação

$$Ap + Bq - C = F = 0 .$$

Calculando a derivada parcial de  $F$  em relação a  $x$ , e levando em conta o fato de que  $z$  também pode ser uma função de  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 .$$

Denotando

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = r \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = s \quad e \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y} = t \quad ,$$

tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0 .$$

Introduzindo a derivada  $(d/dx)$ , definida por

$$\left( \frac{d}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} p \quad ,$$

obtem-se

$$\left( \frac{dF}{dx} \right) + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0 \quad ,$$

ou ainda,

$$\left( \frac{dF}{dx} \right) + Ar + Bs = 0 . \tag{4.29}$$

Tem-se outra relação

$$\begin{aligned} \Rightarrow dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \\ \Rightarrow dp &= r dx + s dy \end{aligned} \tag{4.30}$$

Como as relações (4.29) e (4.30) são dependentes, segue que o sistema

$$\begin{cases} A \cdot r + B \cdot s = - \left( \frac{dF}{dx} \right) \\ dx \cdot r + dy \cdot s = dp \end{cases} , \tag{4.31}$$



é indeterminado. O qual pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A & B \\ dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{dF}{dx}\right) \\ dp \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

onde obtém-se a relação

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -\frac{dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}.$$

Analogamente, calculando a derivada em relação a  $y$  e repetindo este processo obtém-se

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -\frac{dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Pode-se fazer uso da relação algébrica

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},$$

e obter

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} = -\frac{dq}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = -\frac{dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}, \quad (4.33)$$

que representa as equações das Características de primeira ordem.

#### 4.3.4 EDPs de Segunda Ordem

Considere a EDP de segunda ordem, quase linear,

$$Ar + Bs + Ct = D, \quad (4.34)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $D$  depende de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p$  e  $q$ .

A equação (4.34) expressa uma relação diferencial linear entre os coeficientes diferenciais. Esses coeficientes diferenciais são ligados pelas expressões

$$\begin{aligned} dx \cdot r + dy \cdot s &= dp \\ dx \cdot s + dy \cdot t &= dq \end{aligned}.$$

Tem-se um sistema

$$\begin{cases} A \cdot r + B \cdot s + C \cdot t = D \\ dx \cdot r + dy \cdot s + 0 \cdot t = dp \\ dx \cdot s + 0 \cdot r + dy \cdot t = dq \end{cases}, \quad (4.35)$$

indeterminado. O qual pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ dp \\ dq \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

e, sendo linearmente dependente, tem-se

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ dx & dy & dp \\ 0 & dx & dq \end{vmatrix} = 0, \quad \text{etc.}$$

Do primeiro determinante encontra-se, a Inclinação das Curvas Características  $dy/dx$ , dada pela relação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (4.37)$$

Observa-se a partir da equação que, na medida em que o discriminante é positivo, zero ou negativo, têm-se, respectivamente, duas Inclinações reais, uma Inclinação real ou duas Inclinações complexas. Estas três condições correspondem a três tipos de equações diferenciais parciais do tipo (4.34):

**Equações hiperbólicas** Nestas equações o discriminante é positivo e há duas raízes reais da equação (4.34), e, portanto, duas Inclinações reais de Curvas Característica. As descontinuidades em derivadas de segunda ordem são, portanto, propagadas em duas direções no espaço  $xyz$ , e duas curvas Características podem passar por cada ponto nesse espaço.

**Equações parabólicas** Aqui o discriminante é zero, há apenas uma raiz da equação (4.34), e, portanto, apenas uma inclinação. Descontinuidades são então propagados em uma única direção.

**Equações elípticas** Quando  $(B^2 - 4AC)$  é negativo, a equação (4.34) não tem raízes reais e as Inclinações Característica são imaginárias. Descontinuidades não são propagadas neste caso.

Será dado enfase a existência de dois conjuntos de Características reais, e, portanto, encon-

tra suas aplicações nas soluções de equações hiperbólicas que descreve fenômenos de propagação. No caso de segunda ordem as características são dadas por

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (4.38)$$

que corresponde a inclinação da característica positiva, denotado por  $C_+$ , e

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (4.39)$$

a inclinação da característica negativa, denotado por  $C_-$ .

Até o momento, têm-se igualado a zero somente o determinante das matrizes dos coeficientes. Se igualar a zero um dos outros determinantes, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} A & D & C \\ dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (4.40)$$

encontra-se

$$A \cdot dp \cdot dy - D \cdot dx \cdot dy + C \cdot dx \cdot dq = 0, \quad (4.41)$$

ou

$$\left(\frac{dq}{dp}\right) = -\frac{A}{C} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{dp}\right). \quad (4.42)$$

Esta relação ocorre junto as características. Substituindo (4.37) na equação (4.42), têm-se ao longo das características  $C_+$

$$\left(\frac{dq}{dp}\right) = -\left\{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}\right\} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{dp}\right), \quad (4.43)$$

enquanto ao longo das características  $C_-$

$$\left(\frac{dq}{dp}\right) = -\left\{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}\right\} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{dp}\right). \quad (4.44)$$

A partir das equações (4.37), podem-se encontrar as inclinações das projeções das Características no plano base ou plano físico  $xy$ . Geralmente,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , em que a  $(dy/dx)$  diz respeito, vai envolver valores de  $p$  e  $q$ , que tem que considerar como parte da solução. Estes mesmos valores de  $p$  e  $q$ , no entanto, estão relacionados no plano  $pq$  (frequentemente chamado “plano hodograph”) através das equações (4.43) e (4.44). Através da construção das características

alternadamente no plano  $xy$  e no plano  $pq$ , pode-se construir uma solução completa.

Na próxima subseção, apresenta-se o conceito de curva Características com um pouco mais de rigor.

#### EDPs de Segunda Ordem com Mais Rigor

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto. Considere os seguintes espaços vetoriais:

- $C^0(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ é contínua}\};$
- $C^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ é duas vezes continuamente diferenciável}\}.$

Um operador diferencial,  $L$ , é definido da forma

$$\begin{aligned} L : C^2(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ u &\longmapsto Lu = A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} \end{aligned}, \quad (4.45)$$

onde  $A, B, C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais que dependem das variáveis independentes  $x$  e  $t$ . Além disso, para todo  $(x, t) \in \Omega$  pelo menos um dos coeficientes,  $A, B$  ou  $C$  é não nulo, ou seja,  $A^2(x, t) + B^2(x, t) + C^2(x, t) > 0$ .

Pode-se observar também que  $L$  é um operador linear, isto é, para todo par de funções  $u, v \in C^2(\Omega)$  e todo par de números reais  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se  $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$ .

Considere uma função  $F$  definida em  $\Omega \times \mathbb{R}^3$  tal que a cada ponto  $(x, t, \xi, \eta, \varsigma) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$  associa um número real  $F(x, t, \xi, \eta, \varsigma)$ , ou seja

$$\begin{aligned} F : \Omega \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, \xi, \eta, \varsigma) &\longmapsto F(x, t, \xi, \eta, \varsigma) \end{aligned}. \quad (4.46)$$

**Definição 4.1 (EDP de Segunda Ordem Quase Linear)** *Denomina-se EDP de segunda ordem, quase linear, na incógnita  $u(x, t)$ , a uma equação do tipo*

$$Lu = F(x, t, u, u_x, u_t), \quad (4.47)$$

sendo  $L$  e  $F$  definidas anteriormente (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).

**Definição 4.2 (Solução de uma EDP de Segunda Ordem Quase Linear)** *Denomina-se solução de (4.47) uma função  $u(x, t)$ , de classe  $C^2(\Omega)$ , tal que a igualdade (4.47) seja verificada pontualmente em  $\Omega$  (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).*

Seja  $I$  um intervalo da reta  $\mathbb{R}$ . Considere uma parametrização plana, que é uma aplicação contínua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde a variável  $s \in I$  é chamada de parâmetro de  $\gamma$ . A imagem de  $\gamma$ ,  $Im\gamma = \{d \in \mathbb{R}^2, d = \gamma(s), s \in I\}$  é chamada de arco parametrizado ou traço. Diz-se que  $d \in Im\gamma$  é simples se existe um único  $s \in I$  tal que  $\gamma(s) = d$ . Um arco parametrizado simples é constituído de pontos simples.

Uma parametrização diferenciável plana é uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável em todo ponto de  $I$ . Um ponto  $s_0 \in I$  é dito regular se  $\gamma'(s_0) \neq 0$ . Se  $\gamma'(s) \neq 0, \forall s \in I$ , diz-se que a parametrização diferenciável é regular.

Considere as equações paramétricas da curva  $\gamma$  dada por

$$\gamma : x = \varphi(s) \text{ e } t = \psi(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (4.48)$$

onde  $\gamma$  é sem auto interseções e regular, ou seja,  $\gamma$  é constituída de pontos simples e  $\gamma'(s) \neq 0, \forall s \in I$ . Como  $\gamma(s) = (x(s), t(s)) = (\varphi(s), \psi(s))$ , ao menos uma função coordenada tem derivada não nula, qualquer que seja  $s$ , ou ainda,  $(dx/ds)^2 + (dt/ds)^2 > 0$  em  $[0, 1]$ .

O Problema de Cauchy, para a equação diferencial quase linear  $Lu = F(x, t, u, u_x, u_t)$ , consiste em determinar uma solução  $u(x, t)$  para esta equação, conhecendo-se os valores de  $u$  e das derivadas  $u_x, u_t$  sobre  $\gamma$ . Simbolicamente, escreve

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = F(x, t, u, u_x, u_t) \text{ em } \Omega \\ u, u_x, u_t \text{ conhecidas sobre } \gamma \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Introduz uma notação, para tornar mais simples o texto. Assim, representando por  $m, p, q$  as seguintes funções definidas sobre  $\gamma$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(s) = u(x, t) \text{ com } (x, t) \in \gamma \\ p(s) = u_x(x, t) \text{ com } (x, t) \in \gamma \\ q(s) = u_t(x, t) \text{ com } (x, t) \in \gamma \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Considere  $u$  uma solução do problema de Cauchy (4.49). São conhecidas sobre  $\gamma$  as funções  $u, u_x$  e  $u_t$ , conseqüentemente,  $m(s), p(s), q(s)$  e  $F(\varphi(s), \psi(s), m(s), p(s), q(s))$ . Portanto, são conhecidas as derivadas  $dp/ds$  e  $dq/ds$ . Assim, as derivadas segundas  $u_{xx}, u_{xt}$  e  $u_{tt}$  são deter-

minadas, sobre  $\gamma$ , por meio do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} u_{xx}(x,t) + \frac{dt}{ds} u_{xt}(x,t) + 0 u_{tt}(x,t) = \frac{dp}{ds} \\ 0 u_{xx}(x,t) + \frac{dx}{ds} u_{xt}(x,t) + \frac{dt}{ds} u_{tt}(x,t) = \frac{dq}{ds} \\ A(x,t) u_{xx}(x,t) + B(x,t) u_{xt}(x,t) + C(x,t) u_{tt}(x,t) = F \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Observe, uma vez mais, que (4.51) está sendo considerado sobre a curva  $\gamma$ , isto é, para  $x = \varphi(s)$  e  $t = \psi(s)$ . Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ A(x,t) & B(x,t) & C(x,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx}(x,t) \\ u_{xt}(x,t) \\ u_{tt}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dp}{ds} \\ \frac{dq}{ds} \\ F \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

A matriz ampliada do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & 0 & \frac{dp}{ds} \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & \frac{dq}{ds} \\ A(x,t) & B(x,t) & C(x,t) & F \end{bmatrix} = 0, \quad (4.53)$$

onde o determinante da matriz dos coeficientes é

$$\delta = C(x,t) \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - B(x,t) \left( \frac{dt}{ds} \right) \left( \frac{dx}{ds} \right) + A(x,t) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2. \quad (4.54)$$

Do estudo de sistema de equações lineares, conclui-se:

- Se  $\delta \neq 0$  o sistema linear (4.51) é determinado e sua solução  $u_{xx}(x,t)$ ,  $u_{xt}(x,t)$ ,  $u_{tt}(x,t)$ , sobre  $\gamma$ , é obtida por meio da regra de Cramer (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).
- Quando  $\delta = 0$  o sistema (4.51) é indeterminado ou impossível.

**Definição 4.3 (Curvas Características) i)** Denomina-se curva Característica para a equação  $Lu = F$ , a curva  $\gamma$  sobre a qual  $\delta = 0$ , isto é,

$$C(x,t) \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - B(x,t) \left( \frac{dt}{ds} \right) \left( \frac{dx}{ds} \right) + A(x,t) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 . \quad (4.55)$$

**ii)** As curvas  $\gamma$  tais que  $\delta \neq 0$  denominam-se não Características.

A seguir serão apresentados alguns resultados que permitem o cálculo das curvas características de  $Lu = F$  ou de  $L$ .

**Teorema 4.1** Se

**i)**  $A(x,t) \neq 0$  sobre  $\gamma$ , as curvas Características de  $L$  são as soluções da EDO:

$$A(x,t) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - B(x,t) \left( \frac{dt}{dx} \right) + C(x,t) = 0 . \quad (4.56)$$

**ii)**  $C(x,t) \neq 0$  sobre  $\gamma$ , as curvas Características de  $L$  são as soluções da EDO:

$$C(x,t) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - B(x,t) \left( \frac{dx}{dt} \right) + A(x,t) = 0 . \quad (4.57)$$

**iii)**  $A(x,t) = C(x,t) = 0$  sobre  $\gamma$ , as curvas Características de  $L$  são as retas  $x = \text{constante}$ ,  $t = \text{constante}$ , isto é, a dupla família de retas paralelas aos eixos coordenados.

**Definição 4.4** Considere a equação

$$A(x,t)u_{xx}(x,t) + B(x,t)u_{xt}(x,t) + C(x,t)u_{tt}(x,t) = F(x,t,u,u_x,u_t) . \quad (4.58)$$

Diz-se que ela é:

**i)** Hiperbólica em  $\Omega$ , quando  $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) > 0$  em  $\Omega$ .

**ii)** Parabólica em  $\Omega$ , quando  $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) = 0$  em  $\Omega$ .

**iii)** Elítica em  $\Omega$ , quando  $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) < 0$  em  $\Omega$ .

**Observação 4.1** Note-se que sendo  $Lu$  o operador da equação (4.47) diz-se também que ele é hiperbólico, parabólico ou elítico como no caso da equação.

**Observação 4.2** Da definição (4.4) e da observação (4.1), conclui-se que no caso hiperbólico há duas famílias distintas de Características; no caso parabólico uma única e no caso elítico não há Características reais (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).

Para obter as Invariantes de Riemann, calcula-se o determinante obtido da matriz ampliada,

$$\det \begin{pmatrix} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{dx}{ds} & \frac{dp}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dq}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ A(x,t) & F & C(x,t) \end{array} \right] \end{pmatrix} = 0, \quad (4.59)$$

o que fornece

$$C(x,t) \left( \frac{dq}{ds} \right) \left( \frac{dx}{ds} \right) + A(x,t) \left( \frac{dt}{ds} \right) \left( \frac{dp}{ds} \right) - F \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right) = 0. \quad (4.60)$$

Se  $dt/ds \neq 0$  ao longo da curva, obtém-se

$$C(x,t) \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dq}{ds} \right) + A(x,t) \left( \frac{dp}{ds} \right) - F \left( \frac{dx}{ds} \right) = 0. \quad (4.61)$$

Para equações hiperbólicas obtém-se pelo Teorema (4.1) dois valores distintos para  $dx/dt$ . Assim a equação (4.61) dá origem a duas equações a partir das quais obtêm-se  $dp/ds$  e  $dq/ds$ , o que pode ser aproximado por diferenças finitas para obter  $p$  e  $q$ .

#### 4.3.5 Sistemas de Duas EDPs Lineares de Primeira Ordem

Neste caso, haverá duas variáveis dependentes denotadas por  $u$  e  $v$ . Essas EDPs são dadas na forma geral

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} = E_1 \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} = E_2 \end{cases}. \quad (4.62)$$

Se nessas equações  $A_1, A_2, B_1, \dots, E_1, E_2$  são funções somente de  $x$  e  $y$ , o sistema de equações (4.62) é dito ser perfeitamente linear.

As Características são determinadas igualando a zero o determinante da matriz dos coefici-



entes, obtida da relação

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

então

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & E_2 \\ dx & dy & 0 & du \\ 0 & 0 & dx & dv \end{vmatrix} = 0, \quad \text{etc} \quad (4.64)$$

Expandindo o primeiro determinante de (4.64), têm-se

$$(A_1C_2 - A_2C_1)dy^2 - (A_1D_2 - A_2D_1 + B_1C_2 - B_2C_1)dxdy + (B_1D_2 - B_2D_1)dx^2 = 0 \quad (4.65)$$

Obtém-se desta forma uma equação quadrática para  $dy/dx$  dando duas inclinações reais, uma inclinação real ou duas inclinações complexas de acordo com o discriminante

$$(A_1D_2 - A_2D_1 + B_1C_2 - B_2C_1)^2 - 4(A_1C_2 - A_2C_1)(B_1D_2 - B_2D_1),$$

é positivo, zero ou negativo. Desta forma, classifica-se o sistema (4.62) como hiperbólico, parabólico ou elíptico, igualmente feito para as equação de segunda ordem.

O segundo determinante de (4.64) expande-se para dar

$$(A_1B_2 - A_2B_1)du + \left\{ (A_1C_2 - A_2C_1) \left( \frac{dy}{dx} \right) - (B_1C_2 - B_2C_1) \right\} dv + \left\{ (E_1A_2 - E_2A_1) \left( \frac{dy}{dx} \right) - (E_1B_2 - E_2B_1) \right\} dx = 0 \quad (4.66)$$

Quando  $(dy/dx)$  é substituído em (4.66), torna-se uma EDO para  $u$  e  $v$  ao longo das características  $C_+$  e  $C_-$ .

Na prática  $u$  e  $v$  não são geralmente conhecidos tal que as Características não podem ser construídos de forma independente. Em seguida, é necessário construir novamente a integral de superfície por uma solução simultânea das equações (4.65) e (4.66) no espaço das variáveis independentes, denotado por  $R(x, y)$ , e o espaço das variáveis dependentes, denotado por  $R(u, v)$ . O procedimento é muito semelhante ao que descrito para uma única equação de ordem segunda.

Pode agora ser visto que o Método das Características representa um método através do qual o problema difícil de resolver qualquer EDP quase linear de segunda ordem, ou um par de EDPs de primeira ordem, é reduzido para o problema relativamente simples de resolver um par de EDOs lineares. A simplicidade desta abordagem nas condições descritas torna especialmente adequado para resolver as equações hiperbólicas que descrevem os processos de propagação (ABBOTT, 1966).

## 5 ICCIR DA EQUAÇÃO DA ONDA VIA MC

Neste capítulo estuda-se as ICCIR das equações da onda em uma e duas dimensões.

### 5.1 EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA DIMENSÃO

Nesta seção apresenta-se alguns maneiras para encontrar as ICCIR e a solução analítica da EO-1D.

#### 5.1.1 ICCIR da EO-1D via Combinação Linear

Tem-se como objetivo encontrar via combinação linear as ICCIR para a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 . \quad (5.1)$$

Viu-se na subseção 3.1.1, que esta é a EO-1D, onde suponha-se que  $u \in C^2(\Omega)$  e  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$ . Dada a equação (5.1), pode-se escrevê-la na forma

$$\frac{\partial r}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \quad (5.2)$$

onde  $r = \partial u / \partial t$  e  $p = \partial u / \partial x$ . Sabendo que  $u \in C^2(\Omega)$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} , \quad (5.3)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial r}{\partial x} . \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Atribuindo-se  $L_0$  a equação (5.2) e  $L_1$  a equação (5.4), tem-se

$$L_0 := \frac{\partial r}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

e

$$L_1 := \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad (5.6)$$

que representam dois operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $r$  e  $p$ . Essas equações podem ser combinadas por meio de um multiplicador desconhecido  $\lambda_1$ , da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1$ . Quaisquer valores reais distintos de  $\lambda_1$  fornece uma equação nas variáveis dependentes  $r$  e  $p$  que representam o mesmo fenômeno físico que as duas equações originais,  $L_0$  e  $L_1$ , e que podem substituí-las diante de qualquer solução.

Multiplicando  $L_1$  por  $\lambda_1$  e adicionando a  $L_0$ , obtém-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 = 0. \quad (5.7)$$

Ao substituir as equações (5.5) e (5.6), tem-se, após um rearranjo algébrico, a equação

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial x} (-\lambda_1) + \frac{\partial r}{\partial t} \right] + \lambda_1 \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right] = 0. \quad (5.8)$$

Sabendo-se que  $r : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se pela definição de diferencial total

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (5.9)$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Ao comparar as equações (5.9) e (5.10) com a equação (5.8), têm-se

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{c_0^2}{\lambda_1}, \quad (5.11)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -\frac{c_0^2}{\lambda_1} \\ \Rightarrow \lambda_1^2 &= c_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1, \quad (5.13)$$

tem-se da equação (5.12), que

$$\frac{dx}{dt} = \mp c_0, \quad (5.14)$$

obtendo-se as Inclinações das Curvas Características.

Pode escrever a equação (5.8) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[ \frac{\partial r}{\partial x} (-\lambda_1) + \frac{\partial r}{\partial t} \right]}_{\frac{dr}{dt}} + \lambda_1 \underbrace{\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right]}_{\frac{dp}{dt}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{dr}{dt} + \lambda_1 \frac{dp}{dt} = 0, \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}(r \pm c_0 p) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

de onde obtém-se as Invariantes de Riemann. Em resumo, a Tabela 1 mostram as ICCIR da EO-1D obtidas via Combinação Linear.

**Tabela 1: ICCIR da EO-1D via Combinação Linear**

	Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1$	$\frac{d}{dt}(r + \lambda_1 p) = 0$
$\lambda_1 = -c_0$	$c_0$	$\frac{d}{dt}(r - c_0 p) = 0$
$\lambda_1 = c_0$	$-c_0$	$\frac{d}{dt}(r + c_0 p) = 0$

**Fonte: Autoria própria.**

### 5.1.2 ICCIR da EO-1D via Determinante

Nesta subseção encontra-se as ICCIR da EO-1D via determinante. Sabendo que a EO-1D é dada por

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0, \quad (5.16)$$

onde  $u \in C^2(\Omega)$ . Pode escrevê-la junto com seus elementos diferenciais na forma

$$\begin{cases} u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0 \\ u_{tt} dt + u_{xt} dx = d(u_t) \\ u_{tx} dt + u_{xx} dx = d(u_x) \end{cases}, \quad (5.17)$$

ou ainda, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_0^2 \\ dt & dx & 0 \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{tt} \\ u_{xt} \\ u_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d(u_t) \\ d(u_x) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Com o objetivo de obter as Curvas Característica, deve-se ter descontinuidades nas respectivas derivadas,  $u_{tt}$ ,  $u_{xt}$  e  $u_{xx}$ , ou melhor, deseja-se que o sistema seja indeterminado. Para isso, ao considerar a matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_0^2 & 0 \\ dt & dx & 0 & d(u_t) \\ 0 & dt & dx & d(u_x) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

é suficiente que a matriz (5.19) tenha posto dois, visto que, existe determinante de ordem dois diferente de zero,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -c_0^2 \\ dt & dx & 0 \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} (dx)^2 - c_0^2 (dt)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (dx)^2 - c_0^2 (dt)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (dx)^2 &= c_0^2 (dt)^2, \\ \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= c_0^2, \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $dx/dt$  são as Inclinações das Curvas Características no plano  $xt$ . Quando o sinal em (5.21) é positivo obtém-se a Inclinação da Curva Característica positiva  $C_+$  e quando o sinal é negativo tem-se a Inclinação da Curva Característica negativa  $C_-$ .

Sabendo que

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0, \quad (5.22)$$

e calculando a integral em relação a variável independente  $t$ , têm-se

$$x = \pm c_0 t + c_1 \quad (5.23)$$

que representam as equações das Curvas Características, onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes.

Com o intuito de obter as Invariante de Riemann da EO-1D, calcula-se o determinante abaixo, obtida da matriz (5.19),

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ dt & dx & d(u_t) \\ 0 & dt & d(u_x) \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & dx \cdot d(u_x) - dt \cdot d(u_t) = 0 \\ \Rightarrow & dx \cdot d(u_x) = dt \cdot d(u_t) . \\ \Rightarrow & \frac{d(u_x)}{d(u_t)} = \frac{dt}{dx} \\ \Rightarrow & \frac{dp}{dr} = \frac{dt}{dx} \\ \Rightarrow & \frac{dr}{dp} = \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Observa-se que a inclinação no plano  $xt$  é igual a inclinação no plano  $rp$ , onde  $p = u_x$ ,  $r = u_t$  e  $dx/dt = \pm c_0$ . Segue que

$$\begin{aligned} & \frac{dr}{dp} = \frac{dx}{dt} = \pm c_0 \\ \Rightarrow & \frac{dr}{dp} = \pm c_0 \\ \Rightarrow & dr = \pm c_0 dp , \\ \Rightarrow & \frac{dr}{dt} \mp c_0 \frac{dp}{dt} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}(r \mp c_0 p) = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

que são as Invariantes de Riemann. A Tabela 2 mostra as ICCIR para EO-1D obtidas via determinante.

**Tabela 2: ICCIR da EO-1D via Determinante**

Inclinações das Curvas Características		Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1$	$\frac{d}{dt}(r + \lambda_1 p) = 0$
$\lambda_1 = -c_0$	$c_0$	$\frac{d}{dt}(r - c_0 p) = 0$
$\lambda_1 = c_0$	$-c_0$	$\frac{d}{dt}(r + c_0 p) = 0$

**Fonte: Autoria própria.**

### 5.1.3 Solução Analítica da EO-1D

Nesta subseção, além de encontrar as ICCIR da EO-1D, como feito nas subseções anteriores, encontra-se também a solução analítica da EO-1D baseado no MC. Para isso, considere

$$-c_0^2 u_{xx} + 1u_{tt} = 0, \quad (5.26)$$

onde  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2(\Omega)$  e  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$ . Para poupar tempo, aplica-se os resultados obtidos na subseção (4.3.4), em específico a relação (4.37). Ao observar a EO-1D, obtém-se  $A(x, t) = -c_0^2 \neq 0$ ,  $B(x, t) = 0$ ,  $C(x, t) = 1$  e  $D(x, t) = 0$ . Calculando o discriminante

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(-c_0^2)(1) = 4c_0^2 > 0, \quad (5.27)$$

conclui-se que a EO-1D é uma EDP hiperbólica, portanto, pelo Teorema (4.1) e da equação (4.56) conclui-se que a EDP possui duas Curvas Características de Inclinações reais, dadas por

$$\begin{aligned} A(x, t) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - B(x, t) \left( \frac{dt}{dx} \right) + C(x, t) &= 0 \\ \Rightarrow -c_0^2 \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - 0 \left( \frac{dt}{dx} \right) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 &= \frac{1}{c_0^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Calculando a integral em relação a variável independente  $t$ , tem-se

$$x = \pm c_0 t + \text{cte}, \quad (5.29)$$



de onde, obtêm-se as equações

$$x \mp c_0 t = \text{cte} , \quad (5.30)$$

que representam as Curvas Características.

Isolando a variável dependente  $t$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} x - c_0 t &= \text{cte} \\ \Rightarrow x - \text{cte} &= c_0 t \\ \Rightarrow c_0 t &= x - \text{cte} \\ \Rightarrow t &= \frac{x}{c_0} - \frac{\text{cte}}{c_0} \quad (\text{função crescente, visto que, } c_0 > 0). \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned} x + c_0 t &= \text{cte} \\ \Rightarrow c_0 t &= -x + \text{cte} \\ \Rightarrow t &= -\frac{x}{c_0} + \frac{\text{cte}}{c_0} \quad (\text{função decrescente, visto que, } c_0 > 0). \end{aligned} \quad (5.32)$$

As equações das curvas características são de extrema importância não só para obter a solução numérica como também para obter a solução analítica pois, mediante a mudança de variável

$$\xi = x + c_0 t \Rightarrow \xi_x = 1 \quad \text{e} \quad \xi_t = c_0 \quad (5.33)$$

e

$$\eta = x - c_0 t \Rightarrow \eta_x = 1 \quad \text{e} \quad \eta_t = -c_0 , \quad (5.34)$$

obtém-se a equação da onda na primeira forma canônica. Para isso, deve-se ter

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_0 \\ 1 & -c_0 \end{vmatrix} = -2c_0 \neq 0 . \quad (5.35)$$

Substituindo na equação (5.26), as derivadas em relação as variáveis independentes  $x$  e  $t$ , pelas derivadas em relação as variáveis independentes  $\xi$  e  $\eta$ , e usando a regra da cadeia, tem-se

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x \Rightarrow u_x = u_\xi \cdot (1) + u_\eta \cdot (1) \quad (5.36)$$

e

$$u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t \Rightarrow u_t = u_\xi \cdot (c) + u_\eta \cdot (-c) . \quad (5.37)$$

Da mesma maneira que encontrou (5.36) e (5.37), têm-se

$$\begin{aligned}(u_\xi)_x &= u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x \\ (u_\eta)_x &= u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\end{aligned}\quad (5.38)$$

e

$$\begin{aligned}(u_\xi)_t &= u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t \\ (u_\eta)_t &= u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t\end{aligned}\quad (5.39)$$

Derivando as equações (5.36) e (5.37) em relação a  $x$  e  $t$  e substituindo as equação (5.38) e (5.39) respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (u_\xi)_x + (u_\eta)_x \\ \Rightarrow u_{xx} &= (u_\xi)_x + (u_\eta)_x \\ \Rightarrow u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \\ \Rightarrow u_{xx} &= u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot 1 + u_{\eta\xi} \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1 \\ \Rightarrow u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\end{aligned}\quad (5.40)$$

e

$$\begin{aligned}u_{tt} &= (u_\xi)_t \cdot (c_0) + (u_\eta)_t \cdot (-c_0) \\ \Rightarrow u_{tt} &= c_0(u_\xi)_t - c_0(u_\eta)_t \\ \Rightarrow u_{tt} &= c_0(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) - c_0(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) \\ \Rightarrow u_{tt} &= c_0(u_{\xi\xi} \cdot c_0 + u_{\xi\eta} \cdot (-c_0)) - c_0(u_{\eta\xi} \cdot c_0 + u_{\eta\eta} \cdot (-c_0)) \\ \Rightarrow u_{tt} &= c_0^2 u_{\xi\xi} - 2c_0^2 u_{\xi\eta} + c_0^2 u_{\eta\eta}\end{aligned}\quad (5.41)$$

Substituindo (5.40) e (5.41) em (5.26), encontra-se

$$\begin{aligned}-c_0^2 u_{xx} + u_{tt} &= 0 \\ \Rightarrow -c_0^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + c_0^2 u_{\xi\xi} - 2c_0^2 u_{\xi\eta} + c_0^2 u_{\eta\eta} &= 0 \\ \Rightarrow & -4c_0^2 u_{\xi\eta} = 0 \\ \Rightarrow & u_{\xi\eta} = 0\end{aligned}\quad (5.42)$$

a EO-1D na Primeira Forma Canônica.

Para resolver a EDP (5.42) basta calcular a integral direta em relação a  $\eta$  e depois  $\xi$ ,

$$\begin{aligned}
 u_{\xi\eta} &= 0 \\
 \Rightarrow \int u_{\xi\eta} d\eta &= \int 0 d\eta \\
 \Rightarrow u_{\xi} &= 0 + \theta(\xi) \\
 \Rightarrow \int u_{\xi} d\xi &= \int \theta(\xi) d\xi \\
 \Rightarrow u(\xi, \eta) &= \Theta(\xi) + \Psi(\eta)
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Substituindo as equações (5.33) e (5.34) em (5.43), ou ainda, retornando as variáveis independentes  $x$  e  $t$ , obtém-se

$$u(x, t) = \Theta(x + c_0 t) + \Psi(x - c_0 t), \tag{5.44}$$

onde  $\Theta$  e  $\Psi$  são funções arbitrárias de classe  $C^2(\Omega)$  e  $C^1(\Omega)$ , respectivamente. A equação (5.44) representa a solução da equação (5.26).

**Observação 5.1** Se  $\varphi$  e  $\psi$  forem funções definidas na reta de classe  $C^2(\mathbb{R})$  e  $C^1(\mathbb{R})$ , respectivamente. O problema de Cauchy para a equação da onda consiste em determinar uma função  $u = u(x, t)$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - c_0^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty. \\ u(x, 0) = \varphi \\ u_t(x, 0) = \psi \end{array} \right. \tag{5.45}$$

As funções  $\varphi$  e  $\psi$  são chamadas as condições iniciais em  $t = 0$  para o problema (5.45).

Mostra-se que a solução do problema de Cauchy (5.45) é

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + c_0 t) + \varphi(x - c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} \psi(y) dy \tag{5.46}$$

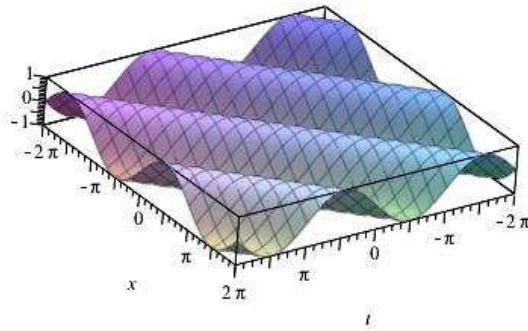
que é conhecida como a Fórmula de D'Alembert.

Considerando-se, por exemplo,  $\varphi = \sin x$  e  $\psi = \cos x$ , e aplicando-se na fórmula de D'Alembert

(5.46), têm-se que uma solução para o problema de cauchy é

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{\sin(x+c_0t) + \sin(x-c_0t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \cos(y)dy \\
 \Rightarrow u(x,t) &= \frac{\sin(x+c_0t) + \sin(x-c_0t)}{2} + \frac{1}{2c_0} [\sin(x+c_0t) - \sin(x-c_0t)] \quad (5.47) \\
 \Rightarrow u(x,t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c_0}\right) \sin(x+c_0t) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{c_0}\right) \sin(x-c_0t)
 \end{aligned}$$

Atribuindo-se, por exemplo,  $c_0 = 1$ , obtém-se o gráfico



**Figura 5.1: Gráfico Para EO-1D**

**Fonte: Autoria Própria**

## 5.2 EQUAÇÃO DA ONDA EM DUAS DIMENSÕES

Nesta seção tenta-se encontrar as ICCIR via Combinação Linear para a EO-2D de forma análoga ao que foi feito para a EO-1D e percebe-se que não é possível obtê-las, conforme descrito na subseção 5.2.1. Devido a isso, criou-se uma forma alternativa e funcional à Combinação Linear para encontrar as ICCIR a qual chamou-se de Método das Pseudo-Characterísticas conforme exposto na subseção 5.2.2.

### 5.2.1 ICCIR da EO-2D : Ideia Unidimensional

Considere a equação da onda em duas dimensões

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5.48)$$

onde  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$  e suponha que  $u \in C^2(\Omega)$ . Objetiva-se encontrar as ICCIR via Combinação Linear, para isso escreve-se

$$\frac{\partial r}{\partial t} - c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.49)$$

onde

$$r = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.50)$$

Como  $u \in C^2(\Omega)$ , têm-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad (5.51)$$

que pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial r}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad . \\
\Rightarrow & \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Denotando por  $L_0$  a equação da onda de duas dimensões e  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  as equações das condições de continuidade, obtém-se

$$L_0 := \frac{\partial r}{\partial t} - c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0 \quad , \tag{5.55}$$

$$L_1 := \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad , \tag{5.56}$$

$$L_2 := \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{5.57}$$

e

$$L_3 := \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad , \tag{5.58}$$

quatro operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $r$ ,  $p$  e  $q$ . Essas equações serão combinadas por meio de multiplicadores desconhecidos  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ . Quaisquer valores reais distintos de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  fornecem uma equação nas variáveis dependentes  $r$ ,  $p$  e  $q$  que representam o mesmo fenômeno físico que as quatro equações originais,  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  e que podem substituí-las diante de qualquer solução.

Multiplicando-se  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  por  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente e adicionando a  $L_0$ , obtém-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0 \quad . \tag{5.59}$$

Substituindo as equações (5.55)-(5.58) na equação (5.59), têm-se, após um rearranjo,

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial r}{\partial x} (-\lambda_1) + \frac{\partial r}{\partial y} (-\lambda_2) + \frac{\partial r}{\partial t} \right] + \lambda_1 \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right] \\
& \quad + \lambda_2 \left[ \frac{\partial q}{\partial x} \left( \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} \right) + \frac{\partial q}{\partial y} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_2} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \right] = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Como  $r$ ,  $p$  e  $q$  são funções com domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  e imagem em  $\mathbb{R}$ , têm-se por definição de

diferencial total

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t}, \quad (5.61)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.62)$$

e

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (5.63)$$

Comparando-se as equações (5.61), (5.62) e (5.63) com a equação (5.60), têm-se:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 = -\frac{c_0^2}{\lambda_1} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad (5.64)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = -\frac{c_0^2}{\lambda_2}. \quad (5.65)$$

Segue da equação (5.64), as relações

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -\frac{c_0^2}{\lambda_1} \\ \Rightarrow \lambda_1^2 &= c_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

e

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \\ \Rightarrow \lambda_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

e da equação (5.65),

$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= -\frac{c_0^2}{\lambda_2} \\ \Rightarrow \lambda_2^2 &= c_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

e

$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \\ \Rightarrow \lambda_3 &= -\lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Comparando as equações (5.67) e (5.69), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \lambda_2 &= -\lambda_1 \lambda_2 \\
 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 &= 0 \\
 \Rightarrow 2\lambda_1 \lambda_2 &= 0 \\
 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 &= 0 \\
 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = 0 \\
 \Rightarrow c_0 = 0 \quad \text{ou} \quad -c_0 = 0
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

o que não pode ocorrer, pois  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$ . Portanto, a ideia da Combinação Linear da mesma forma feita para EO-1D não é válida.

### 5.2.2 ICCIR da EO-2D : Uma alternativa à Combinação Linear

Novamente, considere a equação da onda em duas dimensões

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \tag{5.71}$$

onde  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$  e suponha  $u \in C^2(\Omega)$ . Observou-se na subsecção 5.2.1 que não é suficiente fazer uma simples Combinação Linear para encontrar as ICCIR, devido a esse motivo criou-se uma forma alternativa à Combinação Linear, a este método chamou-se de Método das Pseudo-Characterísticas.

Considere

$$\frac{\partial r}{\partial t} - c_0^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0, \tag{5.72}$$

onde

$$r = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5.73}$$

Como  $u \in C^2(\Omega)$ , têm-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \tag{5.74}$$



que pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Denotando por  $L_0$  a equação da onda em duas dimensões,  $L_1$  e  $L_2$  as equações das condições de continuidade, obtém-se

$$L_0 := \frac{\partial r}{\partial t} - c_0^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.77)$$

$$L_1 := \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad (5.78)$$

e

$$L_2 := \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad (5.79)$$

que representam três operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $r$ ,  $p$  e  $q$ . Essas equações serão combinadas por meio de multiplicadores desconhecido  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  nas direções  $x$  e  $y$ , da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1$  e  $L = L_0 + \lambda_2 L_2$ , para isso considera-se as duas direções:

**Direção  $x$ )** Multiplicando-se  $L_1$  por  $\lambda_1$  e adicionando a  $L_0$ , obtém-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 = 0. \quad (5.80)$$

Substituindo as equações (5.77) e (5.78) na equação (5.80), têm-se, após um rearranjo,

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial x} (-\lambda_1) + \frac{\partial r}{\partial t} \right] + \lambda_1 \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right] = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (5.81)$$

Considerando  $r$  e  $p$  funções com domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e imagem em  $\mathbb{R}$ , têm-se por definição

de diferencial total

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (5.82)$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} . \quad (5.83)$$

Comparando as equações (5.82) e (5.83) com a equação (5.81), têm-se

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 = -\frac{c_0^2}{\lambda_1} . \quad (5.84)$$

Da equação (5.84), obtém-se

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -\frac{c_0^2}{\lambda_1} \\ \Rightarrow \lambda_1^2 &= c_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ao observar a equação (5.81), obtém-se

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[ \frac{\partial r}{\partial x} (-\lambda_1) + \frac{\partial r}{\partial t} \right]}_{\frac{dr}{dt}} + \lambda_1 \underbrace{\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_1} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right]}_{\frac{dp}{dt}} = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y} \\ \Rightarrow &\frac{dr}{dt} + \lambda_1 \frac{dp}{dt} = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y} \\ \Rightarrow &\frac{d}{dt} (r + \lambda_1 p) = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Com usa das equações (5.85) e (5.86), obtém-se a Tabela 3.

**Tabela 3: ICCIR da EO-2D na Direção  $x$**

	Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1$	$\frac{d}{dt} (r + \lambda_1 p) = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y}$
$\lambda_1 = +c_0$	$-c_0$	$\frac{d}{dt} (r + c_0 p) = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y}$
$\lambda_1 = -c_0$	$+c_0$	$\frac{d}{dt} (r - c_0 p) = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y}$

**Fonte: Autoria Própria**

**Direção y)** Multiplicando-se  $L_2$  por  $\lambda_2$  e adicionando a  $L_0$ , obtém-se

$$L_0 + \lambda_2 L_2 = 0 . \quad (5.87)$$

Substituindo as equações (5.77) e (5.79) na equação (5.87), têm-se, após um rearranjo

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial y} (-\lambda_2) + \frac{\partial r}{\partial t} \right] + \lambda_2 \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_2} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \right] = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} . \quad (5.88)$$

Considerando  $r$  e  $q$  funções com domínio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e imagem em  $\mathbb{R}$ , têm-se por definição de diferencial total

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} \quad (5.89)$$

e

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} . \quad (5.90)$$

Comparando-se as equações (5.89) e (5.90) com a equação (5.88), têm-se

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_2 = -\frac{c_0^2}{\lambda_2} . \quad (5.91)$$

Segue da equação (5.91), a relação

$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= -\frac{c_0^2}{\lambda_2} \\ \Rightarrow \lambda_2^2 &= c_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm c_0 \end{aligned} \quad (5.92)$$

Têm-se da equação (5.88) que

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[ \frac{\partial r}{\partial y} (-\lambda_2) + \frac{\partial r}{\partial t} \right]}_{\frac{dr}{dt}} + \lambda_2 \underbrace{\left[ \frac{\partial q}{\partial y} \left( \frac{-c_0^2}{\lambda_2} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \right]}_{\frac{dq}{dt}} = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} \\ \Rightarrow &\frac{dr}{dt} + \lambda_2 \frac{dq}{dt} = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} \\ \Rightarrow &\frac{d}{dt} (r + \lambda_2 q) = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.93)$$

As equações (5.92) e (5.93) fornecem a Tabela 4.

**Tabela 4: ICCIR da EO-2D na Direção  $y$** 

Inclinações das Curvas Características		Invariantes de Riemann
	$\frac{dy}{dt} = -\lambda_2$	$\frac{d}{dt}(r + \lambda_2 q) = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x}$
$\lambda_2 = +c_0$	$-c_0$	$\frac{d}{dt}(r + c_0 q) = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x}$
$\lambda_2 = -c_0$	$+c_0$	$\frac{d}{dt}(r - c_0 q) = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x}$

**Fonte: Autoria Própria**

As Tabelas 3 e 4 fornecem as ICCIR da EO-2D via o Método das Pseudo-Characterísticas.

## 6 ICCIR PARA EQUAÇÕES DE SAINT VENANT VIA MC

Na Engenharia Hidráulica, o sistema de ESV é frequentemente usado em estudos de escoamento não permanente em canais. Esse sistema foi introduzido por Saint Venant em 1871 (HENDERSON, 1966) e constituiu um sistema hiperbólico de EDPs quase lineares.

Neste capítulo, obtém-se as ICCIR das ESV em uma e duas dimensões.

### 6.1 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT EM UMA DIMENSÃO

Observou-se no capítulo 2, na seção 2.1 que o sistema de ESV-1D, pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} h_t + (Uh)_x = 0 \\ U_t + UU_x + gh_x = g(S_{0x} - S_{fx}) \end{cases}, \quad (6.1)$$

em que  $U(x, t)$  é a velocidade média do escoamento (m/s) na direção  $x$ ;  $h(x, t)$  é a profundidade de fluxo (m);  $x$  é a distância ao longo do canal (m);  $t$  é o tempo (s);  $g$  é a força gravitacional por unidade de massa ( $m/s^2$ ) e  $S_{0x}$  é a inclinação longitudinal. O atrito no canal inclinado é dado pela relação de Manning-Strickler

$$S_{fx} = \frac{C^2 |U| U}{(A/P(A))^{4/3}}, \quad (6.2)$$

com constante de rugosidade  $C > 0$ ,  $P(A)$  sendo o perímetro molhado, correspondente a  $A$ . O quociente de  $A/P(A)$  é chamado de raio hidráulico. Neste caso, o coeficiente de atrito para o canal inclinado, ou a inclinação da resistência hidráulica na direção  $x$ , será dada por

$$S_{fx} = \frac{|U| U}{C^2 h}, \quad (6.3)$$

onde  $C$  é constante de Chézy.

A solução numérica para as ESV pode ser obtida pelo uso do MC, que é consagrado como uma técnica pela qual o problema de resolver duas EDPs pode ser substituído pelo problema

de resolver quatro EDOs (ANAVARRO, 2008), ou seja, as ESV dadas no sistema (6.1), as quais possuem duas variáveis independentes, podem ser reduzidas as equações que envolvem a diferenciação em apenas uma direção. Para isso, apresenta-se a seguir dois métodos.

### 6.1.1 ICCIR das ESV-1D via Combinação Linear

Considera-se o sistema de ESV-1D dado por (6.1) . As leis de conservação de massa e momento podem ser escritas na forma reduzida

$$\begin{cases} h_t + Uh_x + hU_x = 0 \\ U_t + UU_x + gh_x = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \end{cases} . \quad (6.4)$$

Atribuindo-se  $L_0$  a equação de conservação de massa e  $L_1$  a equação do momento linear, obtém-se

$$L_0 := h_t + Uh_x + hU_x = 0 \quad (6.5)$$

e

$$L_1 := U_t + UU_x + gh_x = g(S_{0_x} - S_{f_x}) , \quad (6.6)$$

que representam dois operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $h$  e  $U$ . Essas equações serão combinadas por meio de um multiplicador desconhecido  $\lambda_1$ , da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1$ . Quaisquer valores reais distintos de  $\lambda_1$  fornece uma equação nas variáveis dependentes  $U$  e  $h$  que representam o mesmo fenômeno físico que as duas equações originais,  $L_0$  e  $L_1$ , e que podem substituí-las diante de qualquer solução.

Multiplicando-se  $L_1$  por  $\lambda_1$  e adicionando a  $L_0$ , têm-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (6.7)$$

Ao substituir as equações (6.5) e (6.6), obtém-se após um rearranjo

$$h_t + (U + \lambda_1 g)h_x + \lambda_1 U_t + (h + \lambda_1 U)U_x = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}) ,$$

que pode ser escrito na forma

$$[h_x(U + \lambda_1 g) + h_t] + \lambda_1 \left[ U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) + U_t \right] = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (6.8)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto h(x,t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

e

$$\begin{aligned} U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto U(x,t) \end{aligned} , \quad (6.10)$$

tem-se pela definição de diferencial total

$$\frac{dh}{dt} = h_x \frac{dx}{dt} + h_t \quad (6.11)$$

e

$$\frac{dU}{dt} = U_x \frac{dx}{dt} + U_t . \quad (6.12)$$

Comparando as equações (6.11) e (6.12) com a equação (6.8), obtêm-se

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} , \quad (6.13)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} U + \lambda_1 g &= \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \\ \Rightarrow U \lambda_1 + \lambda_1^2 g &= h + \lambda_1 U \\ \Rightarrow \lambda_1^2 g &= h \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \left( \frac{g}{g} \right) \sqrt{\frac{h}{g}} . \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{g^2 h} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{\sqrt{gh}}{g} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{c}{g} \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde  $c = \sqrt{gh}$ .

Como

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g , \quad (6.15)$$

segue da equação (6.14), que

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c . \quad (6.16)$$

Têm-se da equação (6.8) que

$$\begin{aligned} & \underbrace{[h_x(U + \lambda_1 g) + h_t]}_{\frac{dh}{dt}} + \lambda_1 \underbrace{\left[ U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) + U_t \right]}_{\frac{dU}{dt}} = \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} = \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{dh}{dt} \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} = \left( \pm \frac{c}{g} \right) g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{g} \right) \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} = \pm c (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{2c}{g} \frac{dc}{dt} \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} = \pm c (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{c}{g} \left( \frac{d}{dt} (2c) \pm \frac{dU}{dt} \right) = \pm c (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} (2c) \pm \frac{dU}{dt} = \pm g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} (2c \pm U) = \pm g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \pm \frac{d}{dt} (\pm 2c + U) = \pm g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} (\pm 2c + U) = g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} (U \pm 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Assim, as Invariantes de Riemann são dadas por

$$\frac{d}{dt} (U \pm 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x}) .$$

Em resumo, tem-se, que ao longo de uma linha

$$\frac{dx}{dt} = U + c \quad (6.18)$$

e

$$\frac{d}{dt} (U + 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (6.19)$$

Ao longo da outra linha, tem-se

$$\frac{dx}{dt} = U - c \quad (6.20)$$



e

$$\frac{d}{dt}(U - 2c) = g(S_{0_x} - S_{f_x}) . \quad (6.21)$$

As direções no plano  $(x, t)$  definido pelas equações (6.18) e (6.20) são chamadas Inclinações das Curvas Características positiva e negativa, respectivamente. De forma análoga, as quantidades conservadas ao longo destas direções, conforme definido nas equações (6.19) e (6.21), são chamadas de Invariantes de Riemann positiva e negativa, respectivamente. As equações (6.18)-(6.21) constituem as quatro EDOs que substituem as duas EDPs presentes no sistema (6.4), no MC. Observe na Tabela 5 as ICCIR para as ESV-1D.

**Tabela 5: ICCIR das ESV-1D via Combinação Linear**

	Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g$	$\frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} = \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x})$
$\lambda_1 = +\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U + c$	$\frac{d}{dt}(U + 2c) = g(S_{0_x} - S_{f_x})$
$\lambda_1 = -\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U - c$	$\frac{d}{dt}(U - 2c) = g(S_{0_x} - S_{f_x})$

Fonte: Autoria Própria

### 6.1.2 ICCIR das ESV-1D via Determinante

Nesta subseção encontra-se as ICCIR das ESV-1D via determinante. Para isso, inclui-se ao Sistema ESV as diferenciais totais em relação a  $U$  e  $h$ , obtendo

$$\begin{cases} h_t + U h_x + h U_x = 0 \\ U_t + U U_x + g h_x = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ h_t dt + h_x dx = dh \\ U_t dt + U_x dx = dU \end{cases}, \quad (6.22)$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & U & 0 & h \\ 0 & g & 1 & U \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_t \\ h_x \\ U_t \\ U_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ dh \\ dU \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

A matriz ampliada do sistema (6.22) é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & U & 0 & h & 0 \\ 0 & g & 1 & U & g(S_{0x} - S_{fx}) \\ dt & dx & 0 & 0 & dh \\ 0 & 0 & dt & dx & dU \end{bmatrix} = 0. \quad (6.24)$$

Para encontrar as Inclinações das Curvas Características basta igualar a zero o determinante da matriz dos coeficientes

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & U & 0 & h \\ 0 & g & 1 & U \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & \begin{vmatrix} g & 1 & U \\ dx - dt \cdot U & 0 & -dt \cdot h \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0, \quad (6.25) \\ \Rightarrow & \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2U \left(\frac{dx}{dt}\right) + (U^2 - hg) = 0 \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c, \quad (6.26)$$

onde  $c = \sqrt{gh}$ . Têm-se que  $dx/dt$  representam as Inclinações das Curvas Características no plano  $tx$ . Quando o sinal em (6.26) é positivo obtém-se a Inclinação da Curva Característica positiva  $C_+$  e quando o sinal é negativo tem-se a Inclinação da Curva Característica negativa  $C_-$ . Como obteve-se duas Inclinações reais e distintas ( $B^2 - 4AC > 0$ ) conclui-se que o Sistema de ESV é hiperbólico.

Igualando a zero o determinante obtido da matriz ampliada (6.24), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & U & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & g(S_{0x} - S_{fx}) \\ dt & dx & 0 & dh \\ 0 & 0 & dt & dU \end{vmatrix} = 0 \\
 \Rightarrow & \begin{vmatrix} g & 1 & g(S_{0x} - S_{fx}) \\ dx - dt \cdot U & 0 & dh \\ 0 & dt & dU \end{vmatrix} = 0 \\
 \Rightarrow & \left( \frac{dx}{dt} - U \right) g(S_{0x} - S_{fx}) - g \frac{dh}{dt} + \frac{dU}{dt} \left( -\frac{dx}{dt} + U \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Substituindo  $dx/dt = U \pm c$  e  $h = c^2/g$  na equação (6.27), têm-se

$$\begin{aligned}
 & (U \pm c - U) g(S_{0x} - S_{fx}) - g \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{g} \right) + \frac{dU}{dt} (- (U \pm c) + U) = 0 \\
 \Rightarrow & \pm c g(S_{0x} - S_{fx}) - 2c \frac{dc}{dt} \mp c \frac{dU}{dt} = 0 \\
 \Rightarrow & \mp c \left( \frac{dU}{dt} \pm 2 \frac{dc}{dt} \right) = \mp c g(S_{0x} - S_{fx}) \\
 \Rightarrow & \frac{dU}{dt} \pm \frac{d(2c)}{dt} = g(S_{0x} - S_{fx})
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt} (U \pm 2c) = g(S_{0x} - S_{fx}) , \tag{6.29}$$

que representam as Invariantes de Riemann.

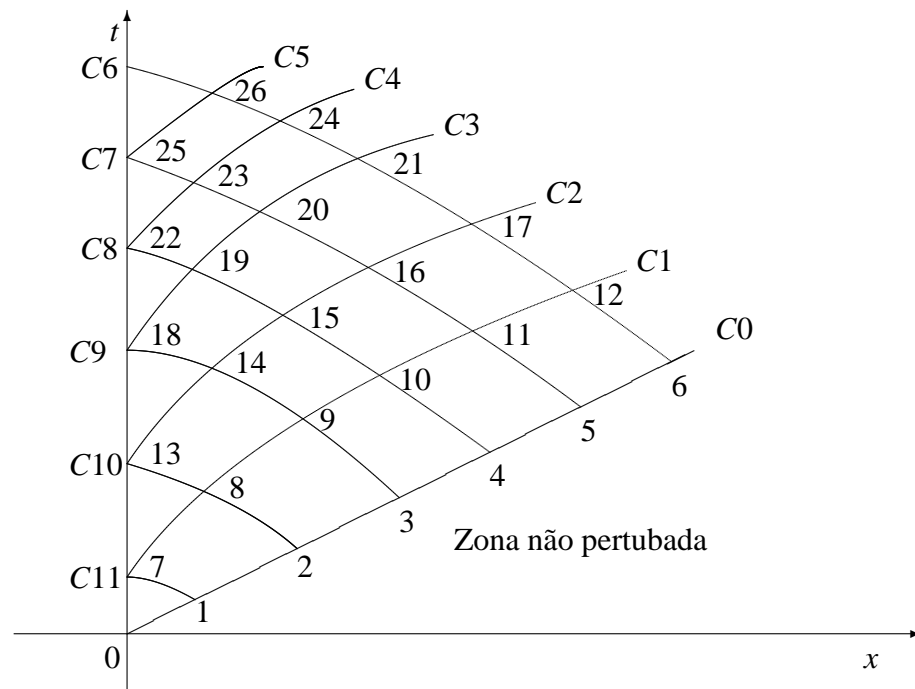
Observa-se na Tabela 6 as ICCIR das ESV-1D obtidas via determinante.

<b>Tabela 6: ICCIR das ESV-1D Via Determinante</b>	
Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
$\frac{dx}{dt} = U + c$	$\frac{d}{dt} (U + 2c) = g(S_{0x} - S_{fx})$
$\frac{dx}{dt} = U - c$	$\frac{d}{dt} (U - 2c) = g(S_{0x} - S_{fx})$

**Fonte: Autoria Própria**

### 6.1.3 O Significado da Forma Característica

Considere as Características representadas no plano  $xt$ , conforme Figura 6.1.



**Figura 6.1: Características no Plano  $xt$**

As Inclinações das Curvas Características  $dt/dx = 1/(U + c)$  e  $dt/dx = 1/(U - c)$  apontam os caminhos de um observador. Elas podem começar em qualquer ponto e são conhecidas como linhas Características ou simplesmente Características. É possível resolver as equações características no ponto onde as Características se cruzam, ao mesmo tempo esta é a solução das ESV. Esta técnica é conhecida como MC.

Considere a Figura 6.1 e uma perturbação na extremidade a montante de um canal (por exemplo, uma onda de inundação). A parte do canal de alguma forma ao longo da extremidade não receberá a perturbação durante algum tempo. O tempo que leva depende da velocidade de que as informações viajam a partir da perturbação. A linha Característica C0 representa esta velocidade e a parte abaixo dessa linha indica a parte do canal que aguarda a perturbação, isto é conhecido como a zona não perturbada. C0 é uma Característica positiva como são as linhas C1, C2, C3, C4 e C5, elas têm Inclinação da forma  $dx/dt = U + C$ , (note, no entanto, que cada uma tem uma Inclinação diferente). Linhas C6, C7, C8, C9, C10 e C11 são as Características negativas e têm Inclinações da forma  $dx/dt = U - c$ .

Os valores de  $U$  e  $c$  no ponto 8 é influenciada por eventos e condições nos pontos 0, 1, 2 e 7. Porém, valores fora desta região não afetam os valores de  $U$  e  $c$  no ponto 8. Da mesma forma, no ponto 2 os valores de  $U$  e  $c$  irão influenciar os valores de  $U$  e  $c$  nos pontos 8, 13, 3 e 9, etc, mas não no ponto 7.

## 6.2 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT BIDIMENSIONAIS

No capítulo 2, na seção 2.2 deduziu-se que o Sistema de ESV-2D pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} h_t + (Uh)_x + (Vh)_y = 0 \\ U_t + UU_x + VU_y + gh_x = g(S_{0x} - S_{fx}) \\ V_t + UV_x + VV_y + gh_y = g(S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (6.30)$$

Nesta seção tenta-se encontrar as ICCIR via Combinação Linear para as ESV bidimensionais de forma análoga ao que foi feito para as ESV unidimensionais na subseção 6.1.1 e percebe-se que não será possível obtê-las, conforme descrito na subseção 6.2.1. Devido a isto, de maneira semelhante ao que foi feito para a equação da onda bidimensional, utilizou-se do Método das Pseudo-Characterísticas para encontrar as ICCIR para as ESV bidimensionais conforme exposto na subseção 6.2.2.

### 6.2.1 ICCIR das ESV-2D via Combinação Linear : Ideia Unidimensional

Considera-se um canal retangular uniforme e negligência todos os termos de difusão de energia, tais como, inclinação, resistência, entrada de fluxo lateral, etc. As leis de conservação de massa e momento em duas dimensões, sistema (6.30), podem ser escritas na forma reduzida

$$\begin{cases} h_t + hU_x + Uh_x + hV_y + Vh_y = 0 \\ U_t + UU_x + VU_y + gh_x = 0 \\ V_t + UV_x + VV_y + gh_y = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Atribuindo-se  $L_0$  a equação da conservação de massa,  $L_1$  a equação do momento linear na direção  $x$  e  $L_2$  a equação do momento linear na direção  $y$ , obtém-se

$$L_0 := h_t + hU_x + Uh_x + hV_y + Vh_y = 0, \quad (6.32)$$

$$L_1 := U_t + UU_x + VU_y + gh_x = 0 \quad (6.33)$$

e

$$L_2 := V_t + UV_x + VV_y + gh_y = 0, \quad (6.34)$$

que representam três operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $h$ ,  $U$  e  $V$ . Essas equações serão combinadas por meio de multiplicadores desconhecido  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ . Quaisquer valores reais distintos de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  fornecem uma equação nas variáveis depen-

dentos  $h$ ,  $U$  e  $V$  que representam o mesmo fenômeno físico que as três equações originais,  $L_0$ ,  $L_1$  e  $L_2$ , e que podem substituí-las diante de qualquer solução.

Multiplicando-se,  $L_1$  por  $\lambda_1$ ,  $L_2$  por  $\lambda_2$  e adicionando a  $L_0$ , têm-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0 . \quad (6.35)$$

Substituindo as equações (6.32), (6.33) e (6.34) na equação (6.35), obtém-se

$$h_t + (\lambda_1 g + U) h_x + (\lambda_2 g + V) h_y + \lambda_1 U_t + (h + \lambda_1 U) U_x + (\lambda_1 V) U_y + \\ + \lambda_2 V_t + (\lambda_2 U) V_x + (h + \lambda_2 V) V_y = 0 , \quad (6.36)$$

o que implica em

$$[h_x(\lambda_1 g + U) + h_y(\lambda_2 g + V) + h_t] + \lambda_1 \left[ U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) + V U_y + U_t \right] + \\ + \lambda_2 \left[ U V_x + V_y \left( \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2} \right) + V_t \right] = 0 . \quad (6.37)$$

Sabendo-se que  $h$ ,  $U$  e  $V$ , são funções com domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e imagem  $\mathbb{R}$ , tem-se pela definição de diferencial total, que

$$\frac{dh}{dt} = h_x \frac{dx}{dt} + h_y \frac{dy}{dt} + h_t , \quad (6.38)$$

$$\frac{dU}{dt} = U_x \frac{dx}{dt} + U_y \frac{dy}{dt} + U_t \quad (6.39)$$

e

$$\frac{dV}{dt} = V_x \frac{dx}{dt} + V_y \frac{dy}{dt} + V_t . \quad (6.40)$$

Comparando as equações (6.38), (6.39) e (6.40) com a equação (6.37), têm-se:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 g + U = \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} = U \quad (6.41)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_2 g + V = V = \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2} \quad (6.42)$$

Observando a equação (6.41), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 g + U &= \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \\
 \Rightarrow U \lambda_1 + \lambda_1^2 g &= h + \lambda_1 U \\
 \Rightarrow \lambda_1^2 g &= h \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \left( \frac{g}{g} \right) \sqrt{\frac{h}{g}} \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{g^2 h} \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{\sqrt{gh}}{g} \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{c}{g}
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

e

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 g + U &= U \\
 \Rightarrow \lambda_1 g &= 0 \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Das equações (6.43) e (6.44), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \pm \frac{c}{g} &= 0 \\
 \Rightarrow c &= 0 \\
 \Rightarrow \sqrt{gh} &= 0 \\
 \Rightarrow gh &= 0 \\
 \Rightarrow h &= 0
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

o que não pode ocorrer, pois  $h > 0$ . Portanto, a ideia da Combinação Linear da mesma forma feita ao Sistema de ESV unidimensional não é válida. Uma ideia para não ocorrer isso é considerar que  $U_y = 0$  e  $V_x = 0$  na equação (6.37). Mas isto implica que

$$U := U(x, y, t) \equiv U(x, t) \quad \text{e} \quad V := V(x, y, t) \equiv V(y, t)$$

ou seja, está sendo considerado que a velocidade na direção  $x$  é independente da velocidade na direção  $y$  e vice-versa, e isto não é verdade. Porém é necessário aplicar o Método das Pseudo-Characterísticas para encontrar as ICCIR para as ESV Bidimensionais.

## 6.2.2 ICCIR das ESV-2D: Uma alternativa à Combinação Linear

Considera-se novamente um canal retangular uniforme e negligência todos os termos de difusão de energia. As leis de conservação de massa e momento em duas dimensões, sistema (6.30), podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} h_t + hU_x + Uh_x + hV_y + Vh_y = 0 \\ U_t + UU_x + VU_y + gh_x = 0 \\ V_t + UV_x + VV_y + gh_y = 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

Observou-se na subsecção 6.2.1 que não é suficiente fazer uma simples Combinação Linear para encontrar as ICCIR para ESV bidimensionais, devido a esse motivo aplica-se o Método das Pseudo-Characterísticas.

Atribuindo-se  $L_0$  a equação da conservação de massa,  $L_1$  a equação do momento linear na direção  $x$  e  $L_2$  a equação do momento linear na direção  $y$ , obtém-se

$$L_0 := h_t + hU_x + Uh_x + hV_y + Vh_y = 0, \quad (6.47)$$

$$L_1 := U_t + UU_x + VU_y + gh_x = 0 \quad (6.48)$$

e

$$L_2 := V_t + UV_x + VV_y + gh_y = 0, \quad (6.49)$$

três operadores diferenciais nas variáveis dependentes  $h$ ,  $U$  e  $V$ . Essas equações serão combinadas por meio de multiplicadores desconhecido  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , da forma,  $L = L_0 + \lambda_1 L_1$  e  $L = L_0 + \lambda_2 L_2$ . Desta forma, evita-se, por exemplo, a situação de  $U_y = 0$  e  $V_x = 0$ , ou ainda, considera-se que a velocidade na direção  $x$  é dependente da velocidade na direção  $y$  e vice-versa.

**Direção  $x$ )** Multiplicando-se,  $L_1$  por  $\lambda_1$  e adicionando a  $L_0$ , têm-se

$$L_0 + \lambda_1 L_1 = 0. \quad (6.50)$$

Substituindo as equações (6.47) e (6.49), obtém-se

$$h_t + (\lambda_1 g + U)h_x + \lambda_1 U_t + (h + \lambda_1 U)U_x + Vh_y + hV_y + \lambda_1 VU_y = 0, \quad (6.51)$$



o que implica em

$$[h_t + h_x(\lambda_1 g + U)] + \lambda_1 \left[ U_t + U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) \right] = -V h_y - h V_y - \lambda_1 V U_y . \quad (6.52)$$

Considerando  $h$  e  $U$  funções com domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e imagem  $\mathbb{R}$ , tem-se pela definição de diferencial total que

$$\frac{dh}{dt} = h_x \frac{dx}{dt} + h_t \quad (6.53)$$

e

$$\frac{dU}{dt} = U_x \frac{dx}{dt} + U_t . \quad (6.54)$$

Comparando as equações (6.53) e (6.54) com a equação (6.51), têm-se

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 g + U = \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} , \quad (6.55)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \lambda_1 g + U &= \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \\ \Rightarrow U \lambda_1 + \lambda_1^2 g &= h + \lambda_1 U \\ \Rightarrow \lambda_1^2 g &= h \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \left( \frac{g}{g} \right) \sqrt{\frac{h}{g}} . \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{g^2 h} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{\sqrt{gh}}{g} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \pm \frac{c}{g} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 g + U , \quad (6.57)$$

têm-se da equação (6.56), que

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c . \quad (6.58)$$

Ao observar a equação (6.52), tem-se

$$\underbrace{[h_x(\lambda_1 g + U) + h_t]}_{\frac{dh}{dt}} + \lambda_1 \underbrace{\left[ U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) + U_t \right]}_{\frac{dU}{dt}} = -Vh_y - hV_y - \lambda_1 VU_y \quad (6.59)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} = -Vh_y - hV_y - \lambda_1 VU_y$$

Substituindo a equação (6.56) na equação (6.59) e sabendo que  $h = c^2/g$ , têm-se

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} &= -Vh_y - hV_y - \lambda_1 VU_y \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{g} \right) \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} &= -Vh_y - hV_y - \left( \pm \frac{c}{g} VU_y \right) \\ \Rightarrow \frac{2c}{g} \frac{dc}{dt} \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} &= -Vh_y - hV_y \mp \frac{c}{g} VU_y \\ \Rightarrow \frac{c}{g} \left( \frac{d(2c)}{dt} \pm \frac{dU}{dt} \right) &= -Vh_y - hV_y \mp \frac{c}{g} VU_y \quad (6.60) \\ \Rightarrow \frac{d(2c)}{dt} \pm \frac{dU}{dt} &= -\frac{g}{c} (Vh_y + hV_y) \mp VU_y \\ \Rightarrow \pm \frac{d}{dt} (U \pm 2c) &= \pm \left( \mp \frac{g}{c} (Vh_y + hV_y) - VU_y \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (U \pm 2c) &= \mp \frac{g}{c} (Vh_y + hV_y) - VU_y \end{aligned}$$

Na tabela 7, apresentam-se as ICCIR das ESV-2D na direção  $x$ .

**Tabela 7: ICCIR das ESV-2D na Direção  $x$**

	Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g$	$\frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} = -Vh_y - hV_y - \lambda_1 VU_y$
$\lambda_1 = +\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U + c$	$\frac{d}{dt} (U + 2c) = -\frac{g}{c} (Vh_y + hV_y) - VU_y$
$\lambda_1 = -\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U - c$	$\frac{d}{dt} (U - 2c) = +\frac{g}{c} (Vh_y + hV_y) - VU_y$

Fonte: Autoria Própria

**Direção  $y$ )** De forma análoga, multiplicando-se  $L_2$  por  $\lambda_2$  e adicionando a  $L_0$ , têm-se

$$L_0 + \lambda_2 L_2 = 0 \quad (6.61)$$

Substituindo as equações (6.47) e (6.49) na equação (6.61), obtém-se

$$h_t + (\lambda_2 g + V) h_y + \lambda_2 V_t + (h + \lambda_2 V) V_y + U h_x + h U_x + \lambda_2 U V_x = 0, \quad (6.62)$$

o que implica em

$$[h_t + h_y (\lambda_2 g + V)] + \lambda_2 \left[ V_t + V_y \left( \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2} \right) \right] = -U h_x - h U_x - \lambda_2 U V_x. \quad (6.63)$$

Sabendo-se que  $h$  e  $V$ , são funções com domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e imagem  $\mathbb{R}$ , tem-se pela definição de diferencial total, que

$$\frac{dh}{dt} = h_y \frac{dy}{dt} + h_t \quad (6.64)$$

e

$$\frac{dV}{dt} = V_y \frac{dy}{dt} + V_t. \quad (6.65)$$

Comparando as equações (6.64) e (6.65) com a equação (6.62), têm-se

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_2 g + V = \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2}, \quad (6.66)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \lambda_2 g + V &= \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2} \\ \Rightarrow U \lambda_2 + \lambda_2^2 g &= h + \lambda_2 V \\ \Rightarrow \lambda_2^2 g &= h \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm \left( \frac{g}{g} \right) \sqrt{\frac{h}{g}}. \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{g^2 h} \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm \frac{\sqrt{gh}}{g} \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \pm \frac{c}{g} \end{aligned} \quad (6.67)$$

Como

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_2 g + V \quad (6.68)$$

tem-se da equação (6.67), que

$$\frac{dy}{dt} = V \pm c. \quad (6.69)$$

Ao observar a equação (6.63), obtém-se

$$\underbrace{[h_t + h_y(\lambda_2 g + V)]}_{\frac{dh}{dt}} + \lambda_2 \underbrace{\left[ V_t + V_y \left( \frac{h + \lambda_2 V}{\lambda_2} \right) \right]}_{\frac{dV}{dt}} = -Uh_x - hU_x - \lambda_2 UV_x \quad (6.70)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} + \lambda_2 \frac{dV}{dt} = -Uh_x - hU_x - \lambda_2 UV_x$$

Substituindo a equação (6.67) na equação (6.70) e sabendo que  $h = c^2/g$ , têm-se

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} + \lambda_2 \frac{dV}{dt} &= -Uh_x - hU_x - \lambda_2 UV_x \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{g} \right) \pm \frac{c}{g} \frac{dV}{dt} &= -Uh_x - hU_x - \left( \pm \frac{c}{g} UV_x \right) \\ \Rightarrow \frac{2c}{g} \frac{dc}{dt} \pm \frac{c}{g} \frac{dV}{dt} &= -Uh_x - hU_x \mp \frac{c}{g} UV_x \\ \Rightarrow \frac{c}{g} \left( \frac{d(2c)}{dt} \pm \frac{dV}{dt} \right) &= -Uh_x - hU_x \mp \frac{c}{g} UV_x \quad (6.71) \\ \Rightarrow \frac{d(2c)}{dt} \pm \frac{dV}{dt} &= -\frac{g}{c} (Uh_x + hU_x) \mp UV_x \\ \Rightarrow \pm \frac{d}{dt} (V \pm 2c) &= \pm \left( \mp \frac{g}{c} (Uh_x + hU_x) - UV_x \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (V \pm 2c) &= \mp \frac{g}{c} (Uh_x + hU_x) - UV_x \end{aligned}$$

A Tabela 8 fornece as ICCIR das ESV-2D na direção  $y$ .

**Tabela 8: ICCIR das ESV-2D na Direção  $y$**

	Inclinações das Curvas Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = V + \lambda_2 g$	$\frac{dh}{dt} + \lambda_2 \frac{dV}{dt} = -Uh_x - hU_x - \lambda_2 UV_x$
$\lambda_2 = +\frac{c}{g}$	$\frac{dy}{dt} = V + c$	$\frac{d}{dt} (V + 2c) = -\frac{g}{c} (Uh_x + hU_x) - UV_x$
$\lambda_2 = -\frac{c}{g}$	$\frac{dy}{dt} = V - c$	$\frac{d}{dt} (V - 2c) = +\frac{g}{c} (Uh_x + hU_x) - UV_x$

**Fonte: Autoria Própria**

## 7 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS A EQUAÇÃO DA ONDA

Neste capítulo aplica-se o MC às Equações da Onda em uma e duas dimensões. O método foi implementado por meio do software Maple (atualmente em sua 16<sup>a</sup> edição) que, além de ter sua própria interface e ferramentas para resolução de diversos problemas matemáticos já conhecidos, possui grande flexibilidade para desenvolvimento computacional, um campo destacado pela construção de Maplets.

Ao desenvolver uma Maplet é possível para o programador, personalizar e contextualizar os comandos a fim de torná-los intuitivos ao usuário final, além de ter em mãos a possibilidade de moldar representações gráficas a fim de facilitar o entendimento de certos conteúdos.

Neste contexto, programou-se uma Maplet inspirada em um estudo de caso tendo como resultado a solução numérica da EDP em forma de tabela e gráficos em duas e três dimensões.

### 7.1 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

Nesta seção obteve-se a solução numérica da Equação do Telégrafo usando o MC, que transformou uma EDP em um sistema de EDOs.

A estrutura desta seção está disposta nas seguintes subseções:

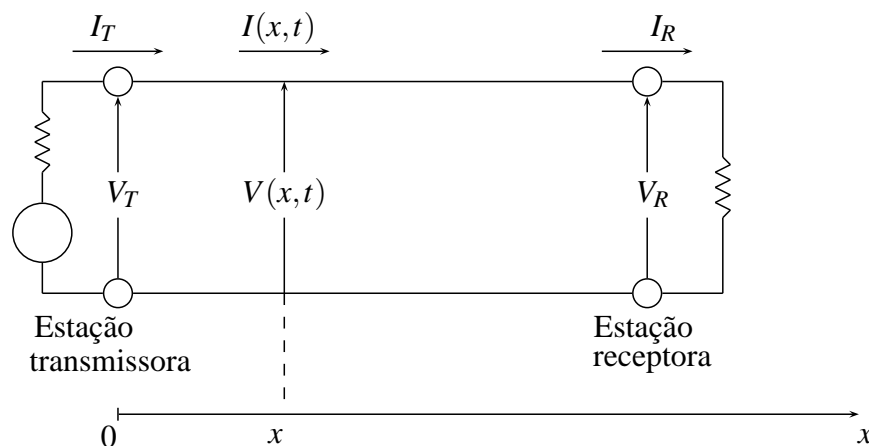
- Dedução da Equação do Telégrafo: Nesta seção apresenta-se a dedução da Equação do Telégrafo.
- Dedução do MC para EDP de Segunda Ordem Unidimensional: Nesta seção deduzem-se as fórmulas básicas para obter a Tensão, a partir das Equações Características.
- Aplicação do MC ao Problema do Telégrafo: Nesta seção, apresenta-se o exemplo que foi resolvido via *Maplet* e o resumo dos passos que foram necessários para obter a solução.
- Solução do Problema do Telégrafo via *Maplet*: Nesta seção, apresenta-se o funcionamento da *Maplet* implementada, explicitando alguns detalhes de sua funcionalidade e resultados.

### 7.1.1 Dedução da Equação do Telégrafo

Na Engenharia Elétrica, a Equação do Telégrafo é frequentemente usada em estudos para a monitoração e controle do tráfego de uma corrente elétrica. Este tráfego pode ser descrito pelas variáveis, potencial  $V$ , corrente  $I$ , e carga  $Q$ . Se a rede é feita de simples cabos que conectam nós isolados, resistências, capacitâncias, bobinas, e a frequência é baixa, ela pode ser modelada dimensionalmente por uma série de elementos com as propriedades materiais da resistência  $R$ , capacitância  $C$  e indutância  $L$ . Este modelo é chamado circuito elétrico.

Se a frequência é alta, de forma que o comprimento de onda é comparável com o comprimento dos condutores, deve-se ser ainda mais preciso. Como o sinal não chega instantaneamente em todos os locais do circuito, ele se propaga como uma onda de voltagem e corrente ao longo de uma linha. Em todo caso, não se pode negligenciar as propriedades da resistência e indutância no decorrer do cabo. Se for considerado que o cabo é constituído de uma série de elementos infinitesimais, é possível modelar o sistema e obter o que é conhecido como Linha de Transmissão, descrita por uma EDP no espaço e tempo. Um famoso exemplo é a Equação do Telégrafo, onde uma peça infinitesimal de um cabo de telégrafo é modelada como um circuito elétrico (MATTHEIJ; RIENSTRA; BOONKKAMP, 2005).

Considerando-se uma linha de transmissão de dois fios, cujo diagrama está ilustrado na Figura 7.1, onde  $I_T$  e  $V_T$  representam, respectivamente, a intensidade de corrente e a tensão no ponto de emissão, e  $I_R$  e  $V_R$ , são as mesmas grandezas mas correspondentes ao ponto de recepção.

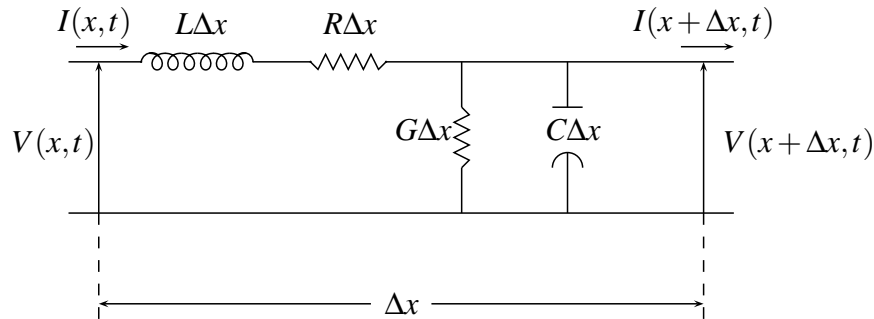


**Figura 7.1: Circuito Elétrico**

Fonte: (FIGUEIREDO, 1977)

$I(x,t)$  e  $V(x,t)$  representam a intensidade de corrente e a tensão num ponto  $x$  da linha de

transmissão, no instante  $t$ . Para derivar a EDP que deve satisfazer, analisa-se o que se passa num pequeno trecho da linha, entre o ponto  $x$  e  $x + \Delta x$ . Traça-se um modelo de circuito elétrico nesse intervalo e explicam-se os vários parâmetros aí indicados conforme Figura 7.2.



**Figura 7.2: Circuito Elétrico em um intervalo**

Fonte: (FIGUEIREDO, 1977)

Os condutores que constituem a linha de transmissão são feitos de metal e têm, portanto, uma resistência, em série. Supõe-se que o condutor seja uniforme e, portanto, que a resistência por unidade de comprimento seja constante. Denotando-se a Resistência por  $R$ , que é dada, em ohm/quilômetro. A Lei de Ohm diz que a queda de tensão em um intervalo de comprimento  $\Delta x$  é  $R\Delta x I(x,t)$ .

Uma certa indutância, em série, é também produzida no condutor, pela razão seguinte: a Lei de Ampere diz que campos magnéticos em torno do contorno são criados pela corrente elétrica; a Lei de Faraday diz que variações nesses campos induzem uma força eletromotriz retroativa no condutor. Supondo-se que essa indutância, designada por  $L$ , seja constante por unidade de comprimento, ela é dada em henry/quilômetro. A queda de tensão, num intervalo de comprimento  $\Delta x$ , é dada por  $L\Delta x \partial I(x,t) / \partial t$ .

O par de condutores age, de certo modo, como um capacitor e assim, uma certa capacitância em paralelo deve aparecer. Supondo ainda que ela, designada por  $C$  e dada em farad/quilômetro, seja constante por unidade de comprimento. A corrente, através desse capacitor é  $C\Delta x \partial V(x,t) / \partial t$ .

Na prática não é possível isolar completamente os dois condutores. Assim, desenvolve-se uma certa condutância  $G$ , em paralelo, a qual supõe-se ser constante por unidade de comprimento. A condutância é uma espécie de inverso da resistência e pode ser dada em ohm/quilômetro. A corrente através dessa condutância é  $G\Delta x V(x,t)$ .

A primeira Lei de Kirchhoff estabelece que a soma algébrica das forças eletromotrizes em

circuito fechado é zero. Assim, para um  $t$  fixado

$$V(x,t) - R\Delta x I(x,t) - L\Delta x \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} - V(x+\Delta x,t) = 0, \quad (7.1)$$

de onde segue que

$$RI(x,t) + L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{V(x+\Delta x,t) - V(x,t)}{\Delta x}. \quad (7.2)$$

Passando o limite, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$LI_t + RI = -V_x. \quad (7.3)$$

A segunda Lei de Kirchhoff diz que a soma das correntes chegando num nó do circuito elétrico é igual à soma das correntes saindo do referido nó. Aplicando essa lei ao circuito da Figura 7.2, tem-se que

$$I(x+\Delta x,t) = I(x,t) - G\Delta x V(x+\Delta x,t) - C\Delta x \frac{\partial V(x+\Delta x,t)}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Dividindo ambos os membros por  $\Delta x$  e passando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtém-se

$$CV_t + GV = -I_x. \quad (7.5)$$

Derivando a equação (7.3) em relação a  $t$  e a equação (7.5) em relação a  $x$ , tem-se

$$LI_{tt} + RI_t = -V_{xt}, \quad (7.6)$$

e

$$CV_{tx} + GV_x = -I_{xx}. \quad (7.7)$$

Multiplicando a equação (7.6) por  $C$ ,

$$LCI_{tt} + RC I_t = -CV_{xt}. \quad (7.8)$$

Subtraindo (7.7) e (7.8), tem-se

$$I_{xx} - (LC)I_{tt} - RC I_t + GV_x = 0. \quad (7.9)$$

Como  $V_x = -LI_t - RI$ , substituindo na equação (7.9), tem-se

$$I_{xx} - (LC)I_{tt} - (RC + GL)I_t - (GR)I = 0, \quad (7.10)$$



que é conhecida como a Equação do Telégrafo. Pode, escreve-la na forma,

$$I_{xx} - c^{-2}I_{tt} - aI_t - bI = 0 , \quad (7.11)$$

onde,  $c^2 = (LC)^{-1}$ ,  $a = RC + GL$  e  $b = RG$ . Analogamente, mostra-se que  $V_{xx} - c^{-2}V_{tt} - aV_t - bV = 0$ . Representando por  $u(x,t)$  a corrente, a equação (7.11) fica

$$-c^{-2}u_{tt} + 1u_{xx} - au_t - bu = 0 , \quad (7.12)$$

onde  $c^2 = (LC)^{-1}$ ,  $a = RC + GL$  e  $b = RG$ . Multiplicando a equação (7.12) por  $-c^2$ , obtém-se

$$-c^2u_{xx} + u_{tt} + (p + q)u_t + pqu = 0 , \quad (7.13)$$

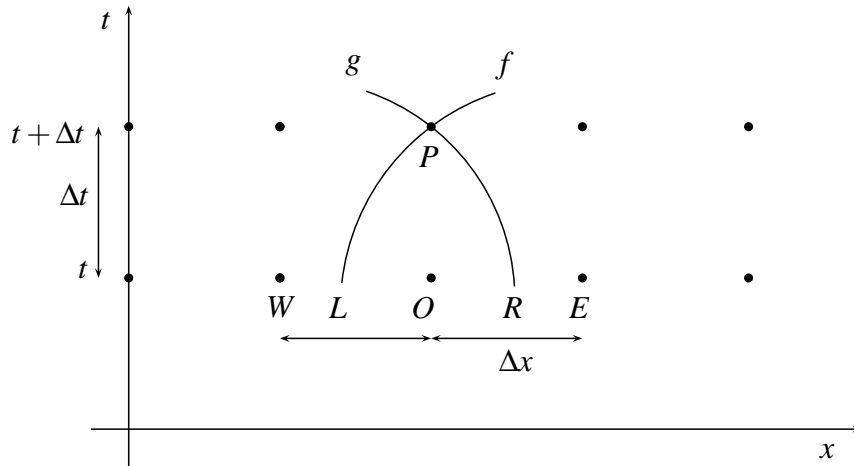
onde  $c^2 = (LC)^{-1}$ ,  $p = C/G$  e  $q = R/L$ .

Um dos métodos para encontrar a solução numérica para a equação (7.13) é o MC (CHUN; MERKLEY, 2008b).

### 7.1.2 Dedução do MC para EDP de Segunda Ordem Unidimensional

Para este método constrói-se uma grade regularmente espaçada como mostra a Figura 7.3. O ponto  $L$  representa a posição da seção a esquerda, da qual se originará uma onda infinitesimal, que chegará na seção  $P$  depois de um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Similarmente, o ponto  $R$  representa a posição da seção a direita da onda infinitesimal, que chegará na seção  $P$  depois do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

A Figura 7.3 mostra o ponto  $P$  como solução num tempo posterior com as Características positiva ( $f$ ) e negativa ( $g$ ) passando por ele. Estas interceptam a linha de tempo anterior  $t$  nos pontos  $L$  e  $R$ , respectivamente.



**Figura 7.3: Curvas Características**

Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)

Observando a equação do Telégrafo (7.13) e a forma geral de uma EDP de segunda ordem (4.47), obtém-se  $A(x,t) = -c^2$ ,  $B(x,t) = 0$  e  $C(x,t) = 1$ , daí, conclui-se que é uma equação hiperbólica, pois,  $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ . Como  $A(x,t) \neq 0$ , tem-se do Teorema (4.1) e da equação (4.56), que as Inclinações Características são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = c \tag{7.14}$$

e

$$\frac{dx}{dt} = -c, \tag{7.15}$$

o que implica que as características são linhas retas. A Figura 7.4 mostra em detalhes as características associadas ao ponto  $P$ .

Sabe-se a inclinação quando a característica positiva cruzar a linha de tempo  $t$  no ponto  $L$ , que é dado por  $dx/dt = c = f(x,t)$  que é a mesma quando passar por  $P$ . O problema é que não se sabe os valores em  $L$  e  $P$ , ou seja, desconhece  $x_P$ ,  $x_L$ ,  $u_P$  e  $u_L$ . Deve fazer uma aproximação linear para obter esses valores. De forma análoga, estende-se essa ideia para a característica negativa ( $g$ ) que passa por  $P$  e  $R$ , cuja inclinação é dada por  $dx/dt = -c = g(x,t)$  (DELPHI, 2012).

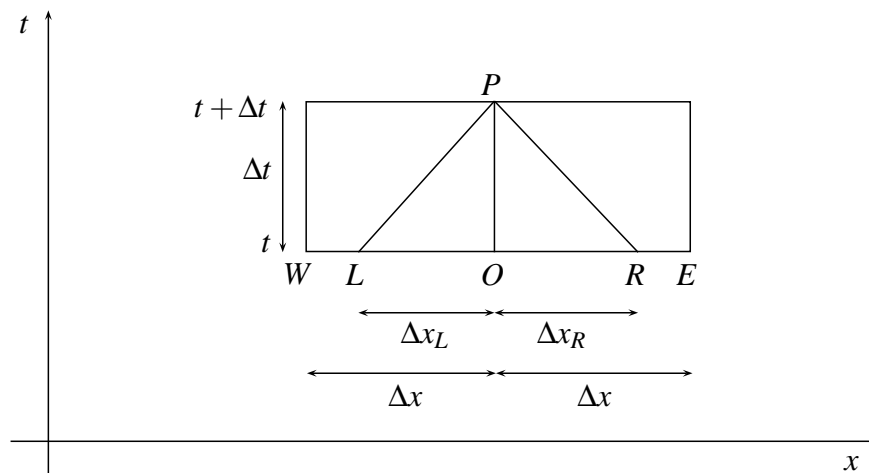
Deseja-se obter a solução numérica da EDP de segunda ordem dada por (4.47), para isso, especifica-se  $u_x$  e  $u_t$  em uma curva inicial  $\gamma$ , da forma (4.48) (desde que não seja uma Característica), então pode calcular a solução da equação (4.47), caso esta seja hiperbólica, usando a expansão em Série de Taylor.

Importante notar, que não se pode, em geral, calcular todos os termos de uma Série de Taylor infinita em um tempo finito. Na verdade, para calcular mais de dois termos é um tanto tedioso. Escolhe-se, portanto, a abordagem simples de usar uma aproximação de Taylor de Primeira Ordem, dada por

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx u(x, t) + \Delta x u_x(x, t) + \Delta t u_t(x, t) , \quad (7.16)$$

para construir um sistema numérico útil para resolver equações hiperbólicas com dados de Cauchy. Deve-se observar que a equação (7.16) é apenas uma aproximação, e para qualquer utilização prática as quantidades  $\Delta x$  e  $\Delta t$  devem ser pequenas.

A aproximação usual para determinar a inclinação das características é usar o ponto que possui a mesma abscissa que o ponto  $P$ , mas no nível de tempo conhecido, isto é, os valores no ponto  $O$ . Ao construir a malha identifica-se no primeiro intervalo de tempo os pontos  $x_O$ ,  $x_E$  e  $x_W$  e as condições iniciais  $u_O$ ,  $u_E$  e  $u_W$ . Objetiva-se encontrar  $u_P$  em um intervalo de tempo posterior  $t + \Delta t$ .



**Figura 7.4: Características Lineares**

**Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)**

Para um incremento finito de tempo  $\Delta t$ , o ponto  $P$  representa a posição  $(x_P, t + \Delta t)$ , e os pontos  $L$  e  $R$  representam, respectivamente, as posições de certas seções a esquerda e a direita do ponto  $O$  no tempo  $t$ .

A velocidade da onda de propagação pode ser representada pela declividade das linhas construídas no plano  $xt$ .

Ao observar a linha  $LP$ , Característica positiva, da Figura 7.5, tem-se  $\tan \theta = \Delta t / \Delta x_L$ . A equação (7.14) mostra que  $dx/dt = c$ . Considerando  $\Delta t / \Delta x_L \approx dt/dx$ , tem-se  $\Delta t / \Delta x_L \approx 1/c$ ,

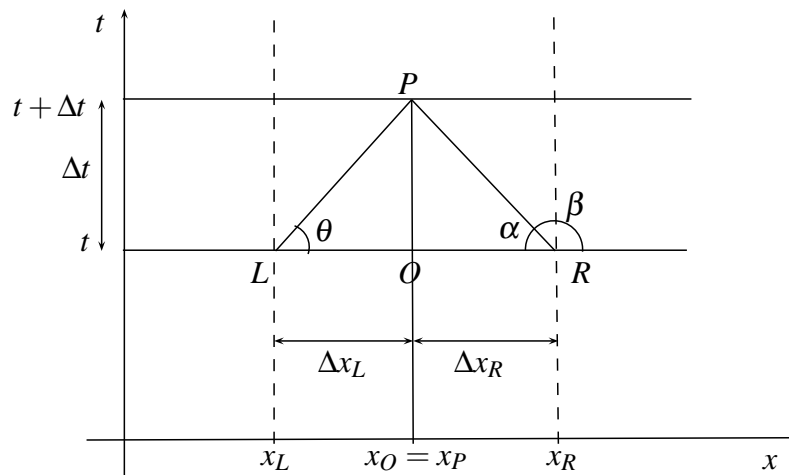
ou ainda,

$$\frac{\Delta x_L}{\Delta t} \approx c, \quad (7.17)$$

onde  $\Delta x_L = x_0 - x_L$ . Substituindo  $\Delta x_L$  na equação (7.17), tem-se

$$x_L \approx x_0 - c\Delta t, \quad (7.18)$$

que representa a abscissa de  $L$ .



**Figura 7.5: Inclinação das Características**

Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)

De forma análoga, ao observar a linha  $RP$ , característica negativa, tem-se  $\tan \alpha = \Delta t / \Delta x_R$ , onde  $\alpha = 180 - \beta$ . Como  $\tan \alpha = -\tan \beta$ , segue que  $\tan \beta = \Delta t / (-\Delta x_R)$ . Viu-se na equação (7.15) que  $dx/dt = -c$  e considerando  $\Delta t / (-\Delta x_R) \approx dt/dx$ , têm-se  $\Delta t / (-\Delta x_R) \approx 1/(-c)$ , ou ainda,

$$-\frac{\Delta x_R}{\Delta t} \approx -c, \quad (7.19)$$

onde  $-\Delta x_R = x_O - x_R$ . Substituindo  $\Delta x_R$  na equação (7.19), têm-se

$$x_R \approx x_O + c\Delta t, \quad (7.20)$$

que representa a abscissa de  $R$ .

Observe que as equações (7.18) e (7.20) podem ser escritas, respectivamente, como

$$x_L \approx x_P - f\Delta t \quad (7.21)$$

e

$$x_R \approx x_P - g\Delta t, \quad (7.22)$$

onde  $x_P = x_O$ . As equações (7.21) e (7.22) representam uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem.

Como  $p$  e  $q$  são conhecidos em  $\gamma$ . Após calcular  $x_L$  e  $x_R$  com uso das equações (7.21) e (7.22), obtém-se  $p$  e  $q$  para os pontos  $L$  e  $R$ . Substituindo as equações (7.14) e (7.15) na equação (4.61), obtém-se as Invariantes de Riemann (HALL; KEYNES, 1973). A primeira dessas é dada por

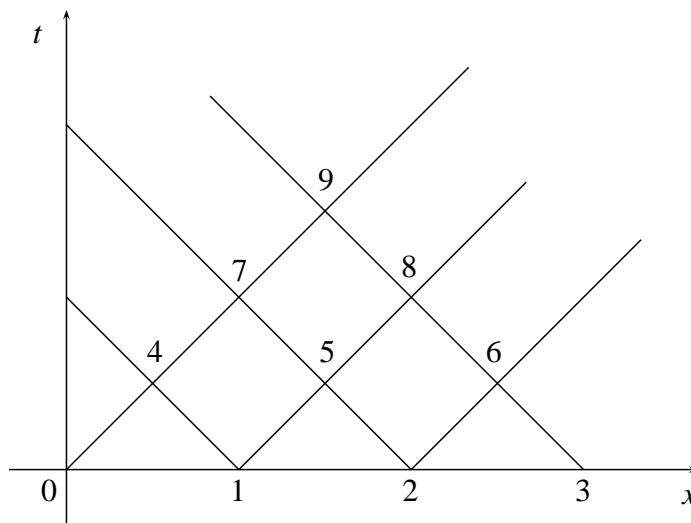
$$C(x,t)f(q_P - q_L) + A(x,t)(p_P - p_L) - F(x_P - x_L) = 0 \quad (7.23)$$

e a segunda invariante é

$$C(x,t)g(q_P - q_R) + A(x,t)(p_P - p_R) - F(x_P - x_R) = 0. \quad (7.24)$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (7.23) e (7.24) obtém-se os valores de  $p$  e  $q$  para o ponto  $P$ . Assim, temos um método de calcular  $p$  e  $q$  em pontos fora da curva inicial  $\gamma$  e, também, através da equação (7.16), calcular  $u$ .

Observe na Figura 7.6 que o valor de  $u$  no ponto 7, por exemplo, é influenciado por eventos e condições nos pontos 0, 1, 2, 4 e 5. Porém, valores fora desta região não afetam o valor de  $u$  no ponto 7. Da mesma forma, no ponto 2 o valor de  $u$  irá influenciar os valores de  $u$  nos pontos 5, 6, 7,  $\dots$ , mas não no ponto 4.



**Figura 7.6: Características no plano  $xt$**

Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)

Após calcular  $p$  e  $q$ , pode-se usar uma aproximação para  $u$  que é melhor do que a equação (7.16). Para ver isso, escreve-se as aproximações de primeira ordem de Taylor para  $p = u_x(x + \Delta x, t + \Delta t)$  e  $q = u_t(x + \Delta x, t + \Delta t)$ . Tem-se

$$u_x(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx u_x(x, t) + \Delta x u_{xx}(x, t) + \Delta t u_{xt}(x, t) \quad (7.25)$$

e

$$u_t(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx u_t(x, t) + \Delta x u_{xt}(x, t) + \Delta t u_{tt}(x, t) . \quad (7.26)$$

Multiplicando a equação (7.25) por  $0.5\Delta x$  e equação (7.26) por  $0.5\Delta t$ , obtém-se

$$0.5\Delta x u_x(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx 0.5\Delta x u_x(x, t) + 0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) + 0.5\Delta x \Delta t u_{xt}(x, t) \quad (7.27)$$

e

$$0.5\Delta t u_t(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx 0.5\Delta t u_t(x, t) + 0.5\Delta t \Delta x u_{xt}(x, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, t) . \quad (7.28)$$

Somando os resultados, tem-se

$$\begin{aligned} & +0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) + \Delta x \Delta t u_{xt}(x, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, t) \\ \approx & 0.5\Delta x [u_x(x + \Delta x, t + \Delta t) - u_x(x, t)] + 0.5\Delta t [u_t(x + \Delta x, t + \Delta t) - u_t(x, t)] \end{aligned} \quad (7.29)$$

Ao aproximar  $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$  em série de Taylor de segunda ordem

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx & u(x, t) + \Delta x u_x(x, t) + \Delta t u_t(x, t) \\ & + 0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, t) + \Delta x \Delta t u_{xt}(x, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, t) \end{aligned} , \quad (7.30)$$

observa-se que o primeiro membro da equação (7.29) corresponde justamente a expressão para os termos de segunda ordem da equação (7.30), logo, substituindo (7.29) em (7.30), tem-se

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx & u(x, t) + \Delta x u_x(x, t) + \Delta t u_t(x, t) \\ & + 0.5\Delta x [u_x(x + \Delta x, t + \Delta t) - u_x(x, t)] , \\ & + 0.5\Delta t [u_t(x + \Delta x, t + \Delta t) - u_t(x, t)] \end{aligned} \quad (7.31)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx & u(x, t) + 0.5\Delta x [u_x(x + \Delta x, t + \Delta t) + u_x(x, t)] \\ & + 0.5\Delta t [u_t(x + \Delta x, t + \Delta t) + u_t(x, t)] \end{aligned} . \quad (7.32)$$

Esta aproximação de primeira ordem é aparentemente mais precisa do que a equação (7.16), uma vez que incorpora os termos de segunda ordem da expressão de Taylor. Aplicando esta

aproximação aos pontos  $L$ ,  $R$  e  $P$  obtém-se

$$u_P \approx u_L + 0.5(p_P + p_L)\Delta x + 0.5(q_P + q_L)\Delta t \quad (7.33)$$

e

$$u_P \approx u_R + 0.5(p_P + p_R)\Delta x + 0.5(q_P + q_R)\Delta t . \quad (7.34)$$

Pode-se usar qualquer uma das equações (7.33) ou (7.34) para calcular  $u_P$ .

### 7.1.3 Aplicação do MC ao Problema do Telégrafo

Considere a EDP Linear de segunda ordem

$$-V_{xx}(x,t) + V_{tt}(x,t) = -V(x,t) - 0.3V_t(x,t), \quad (7.35)$$

onde  $A(x,t) = -1$ ,  $B(x,t) = 0$ ,  $C(x,t) = 1$  e  $F(x,t,V,V_x,V_t) = -V(x,t) - 0.3V_t(x,t)$ , que é um caso particular da Equação do Telégrafo dada em (7.13). Tem-se:

- $V(x,t)$  a tensão na linha de transmissão;
- $p = V_x(x,t)$  a derivada da tensão em relação ao espaço;
- $q = V_t(x,t)$  a derivada da tensão em relação ao tempo;
- $x$  é a distância ao longo da linha de transmissão;
- $t$  é o tempo.

Fixa-se um dado instante quando inicia-se a observar o fenômeno. Escolhe-se  $t = 0$ . Portanto, observa-se  $V$ ,  $p = V_x$  e  $q = V_t$  quando  $t = 0$ . Então a curva  $\gamma$  do problema é

$$\gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; t = 0\}. \quad (7.36)$$

Considere  $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; t > 0\}$ . Estuda-se então o Problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} -V_{xx}(x,t) + V_{tt}(x,t) = -V(x,t) - 0.3V_t(x,t) \quad \text{com } (x,t) \in \Omega \\ V(x,0) = 1.02 - 0.02x \\ V_t(x,0) = 0 \\ V_x(x,0) = -0.02 \end{array} \right. \quad \text{com } (x,0) \in \gamma . \quad (7.37)$$

Considerando que em  $x = x_\alpha$  ocorre uma perturbação, são dadas as seguintes condições interiores

$$\begin{aligned} V(x_\alpha, 0.00015) &= 1.5 \\ V(x_\alpha, 0.07) &= 1.25 \quad . \\ V(x_\alpha, 1) &= V(x_\alpha, 0) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Deseja-se obter a solução numérica do problema utilizando o MC, ou seja, visto que  $\gamma$  é a curva inicial (não Característica) as soluções  $V$  podem ser encontradas em pontos fora de  $\gamma$ , procedendo da seguinte forma:

**Etapa I:** Calculam-se as coordenadas dos pontos de interseção,  $L$  e  $R$ , das curvas características com a curva inicial, através das equações (7.21) e (7.22). Como  $-c^2 = -1$  tem-se  $c = 1$ , e substituindo nas equações (7.14) e (7.15) segue que

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1, \quad (7.39)$$

onde,  $f(x, t) = 1$  e  $g(x, t) = -1$ , e daí, das equações (7.21) e (7.22) obtém-se

$$x_L \approx x_P - \Delta t \quad (7.40)$$

e

$$x_R \approx x_P + \Delta t \quad (7.41)$$

**Etapa II:** Como  $p$  e  $q$  são conhecidos em  $\gamma$ , após calcular  $x_L$  e  $x_R$  com o uso das equações (7.40) e (7.41), obtém-se  $p_L$ ,  $q_L$ ,  $p_R$  e  $q_R$ .

**Etapa III:** Para calcular  $p$  e  $q$  no ponto  $P$  utiliza-se as equações (7.23) e (7.24), dadas por

$$(1)(1)(q_P - q_L) + (-1)(p_P - p_L) - F_L(x_P - x_L) = 0 \quad (7.42)$$

e

$$(1)(-1)(q_P - q_R) + (-1)(p_P - p_R) - F_R(x_P - x_R) = 0 \quad (7.43)$$

**Etapa IV:** Para calcular  $V_P$  utiliza-se qualquer uma das equações (7.33) ou (7.34), dadas por

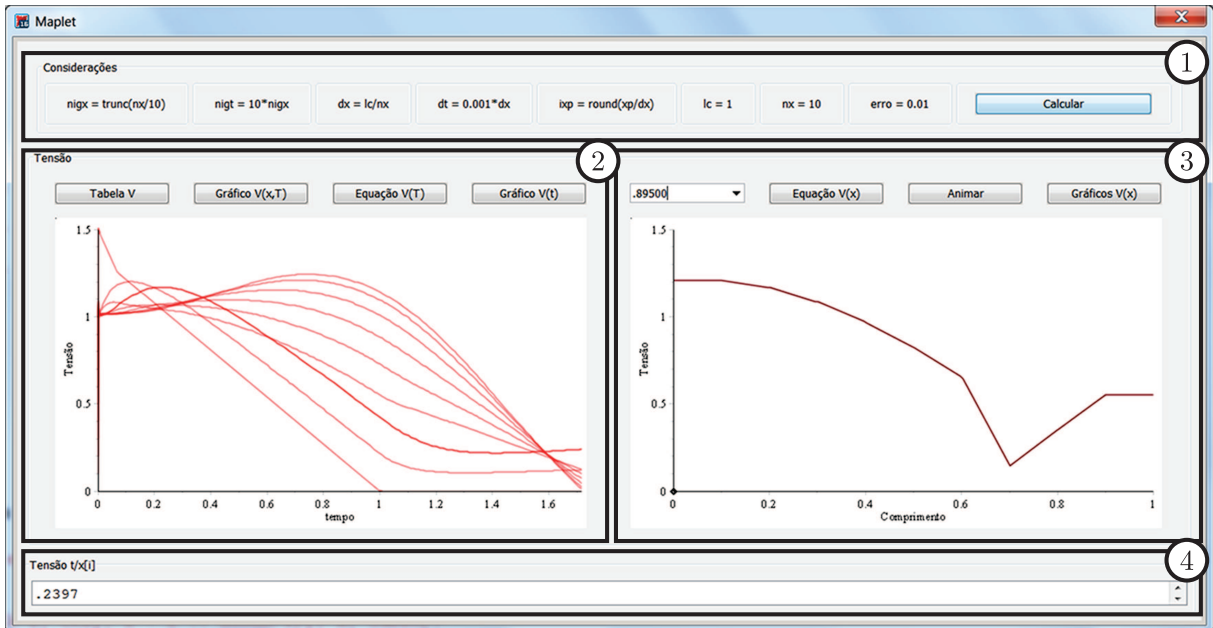
$$V_P \approx V_L + \frac{1}{2} [(p_P + p_L) + (q_P + q_L)] \Delta x, \quad (7.44)$$



ou

$$V_P \approx V_R - \frac{1}{2} [(p_P + p_R) + (q_P + q_R)] \Delta x . \quad (7.45)$$

#### 7.1.4 Solução do Problema do Telégrafo via *Maplet*



**Figura 7.7: *Maplet* - Telégrafo**

**Fonte: Autoria Própria**

Apresenta-se agora, o funcionamento da *Maplet* implementada e utilizada para obter a solução do problema proposto. Na Figura 7.7, pode ser vista a tela da *Maplet*, quando em uso, onde:

- A área (1) que contém os dados considerados para a programação do *software*, como as definições utilizadas para a subdivisão dos intervalos de comprimento e de tempo, além do tamanho dos passos dados nestas dimensões, o erro desejado e a posição do distúrbio.
- No campo (2) estão localizados os botões para acesso de alguns dos dados obtidos pelo processo computacional, entre eles:
  - **Tabela V:** Neste campo apresentam-se os resultados da solução numérica para a variável  $V$  (tensão), obtida pela resolução do sistema de EDOs oriundo da equação do Telégrafo. Os resultados compõem uma tabela de valores para a tensão em momentos específicos de tempo e do comprimento do cabo, para o caso do exemplo

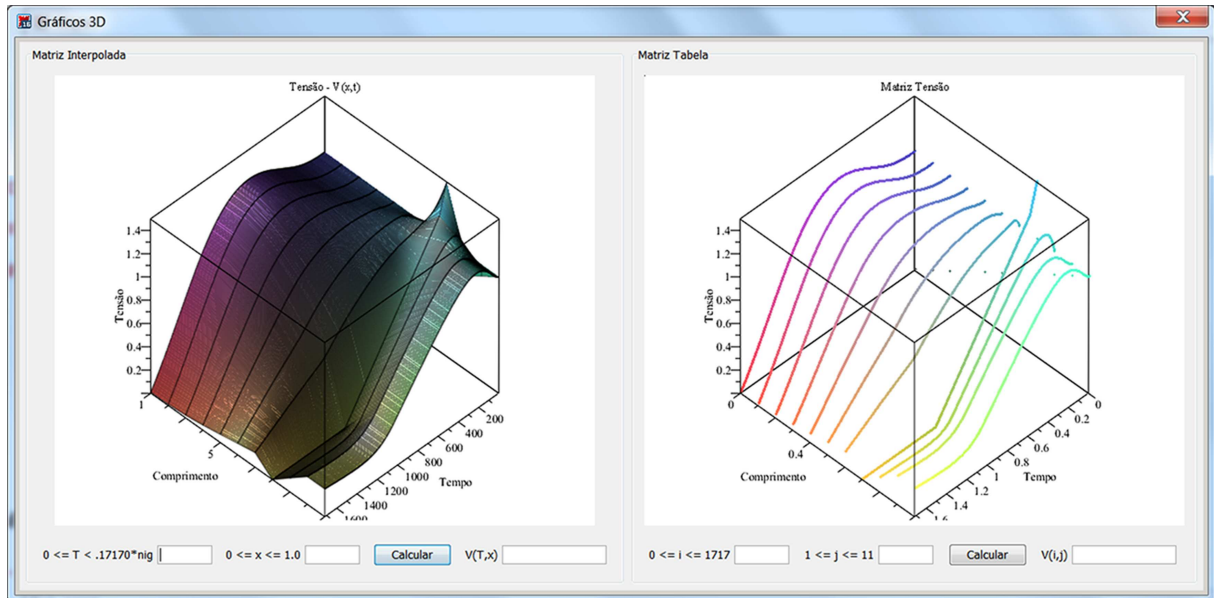
resolvido, observa-se claramente pela Figura 7.8, como o impacto (na posição 0.7) se propaga no decorrer do comprimento do cabo, a partir do tempo inicial.

t/x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.	1.02	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01000	1.00800	1.00600	1.00400	1.00200	1.00000
.100e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01000	1.01076	1.49696	1.00848	1.00202	1.00202
.200e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01000	1.01396	1.49338	1.01327	1.00212	1.00212
.300e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01007	1.01701	1.48980	1.01810	1.00224	1.00224
.400e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01017	1.01998	1.48622	1.02267	1.00244	1.00244
.500e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01027	1.02288	1.48264	1.02737	1.00264	1.00264
.600e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01041	1.02569	1.47906	1.03180	1.00292	1.00292
.700e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01061	1.02837	1.47548	1.03625	1.00322	1.00322
.800e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01081	1.03097	1.47190	1.04057	1.00358	1.00358
.900e-2	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01101	1.03351	1.46832	1.04482	1.00398	1.00398
.100e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01128	1.03601	1.46475	1.04910	1.00438	1.00438
.110e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01158	1.03834	1.46117	1.05321	1.00485	1.00485
.120e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01188	1.04062	1.45759	1.05729	1.00535	1.00535
.130e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01218	1.04282	1.45401	1.06130	1.00586	1.00586
.140e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01253	1.04497	1.45043	1.06516	1.00646	1.00646
.150e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01293	1.04707	1.44685	1.06905	1.00706	1.00706
.160e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01333	1.04908	1.44327	1.07267	1.00766	1.00766
.170e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01373	1.05098	1.43969	1.07647	1.00834	1.00834
.180e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01413	1.05278	1.43611	1.07999	1.00904	1.00904
.190e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01459	1.05456	1.43253	1.08357	1.00974	1.00974
.200e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01200	1.01509	1.05626	1.42895	1.08699	1.01050	1.01050
.210e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01209	1.01559	1.05792	1.42538	1.09037	1.01130	1.01130
.220e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01219	1.01609	1.05952	1.42180	1.09368	1.01210	1.01210
.230e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01229	1.01659	1.06107	1.41822	1.09685	1.01290	1.01290
.240e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01239	1.01709	1.06249	1.41464	1.10009	1.01373	1.01373
.250e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01249	1.01761	1.06384	1.41106	1.10315	1.01463	1.01463
.260e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01259	1.01811	1.06514	1.40748	1.10618	1.01553	1.01553
.270e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01269	1.01861	1.06639	1.40390	1.10926	1.01643	1.01643
.280e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01279	1.01911	1.06759	1.40032	1.11208	1.01730	1.01730
.290e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01289	1.01961	1.06874	1.39674	1.11497	1.01831	1.01831
.300e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01299	1.02011	1.06984	1.39316	1.11771	1.01939	1.01939
.310e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01309	1.02061	1.07090	1.38958	1.12048	1.02027	1.02027
.320e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01319	1.02111	1.07190	1.38601	1.12313	1.02131	1.02131
.330e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01329	1.02161	1.07287	1.38243	1.12573	1.02241	1.02241
.340e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01339	1.02216	1.07377	1.37885	1.12828	1.02342	1.02342
.350e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01349	1.02276	1.07466	1.37527	1.13072	1.02444	1.02444
.360e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01359	1.02336	1.07546	1.37169	1.13318	1.02556	1.02556
.370e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01371	1.02396	1.07626	1.36811	1.13552	1.02644	1.02644
.380e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01391	1.02456	1.07697	1.36453	1.13780	1.02753	1.02753
.390e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01411	1.02516	1.07767	1.36095	1.14005	1.02859	1.02859
.400e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01431	1.02576	1.07831	1.35737	1.14217	1.02951	1.02951
.410e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01451	1.02636	1.07891	1.35379	1.14442	1.03063	1.03063
.420e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01471	1.02696	1.07949	1.35022	1.14646	1.03161	1.03161
.430e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01400	1.01491	1.02756	1.07999	1.34664	1.14854	1.03272	1.03272
.440e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01404	1.01511	1.02816	1.08049	1.34306	1.15050	1.03406	1.03406
.450e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01414	1.01531	1.02876	1.08091	1.33948	1.15242	1.03511	1.03511
.460e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01424	1.01551	1.02936	1.08131	1.33590	1.15430	1.03631	1.03631
.470e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01434	1.01571	1.02996	1.08168	1.33232	1.15606	1.03753	1.03753
.480e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01444	1.01591	1.03056	1.08198	1.32874	1.15785	1.03854	1.03854
.490e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01454	1.01611	1.03115	1.08228	1.32516	1.15955	1.03987	1.03987
.500e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01464	1.01631	1.03166	1.08251	1.32158	1.16117	1.04112	1.04112
.510e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01474	1.01651	1.03216	1.08271	1.31800	1.16279	1.04224	1.04224
.520e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01484	1.01671	1.03266	1.08290	1.31442	1.16424	1.04346	1.04346
.530e-1	1.01800	1.01800	1.01600	1.01494	1.01691	1.03316	1.08300	1.31084	1.16580	1.04465	1.04465

**Figura 7.8: Tabela de Resultados Numéricos Referente a Tensão**  
**Fonte: Autoria Própria**

- **Gráfico  $V(x, t)$ :** Ao clicar neste botão, uma nova janela apresentará dois gráficos em três dimensões, cujas variáveis independentes são o tempo e o comprimento. Um deles dispõe os pontos obtidos pelos cálculos para a tensão, estes pontos são utilizados para gerar o outro gráfico que é constituído pela função de interpolação tipo *spline* calculada para os valores da solução numérica. Neste campo, ainda é possível

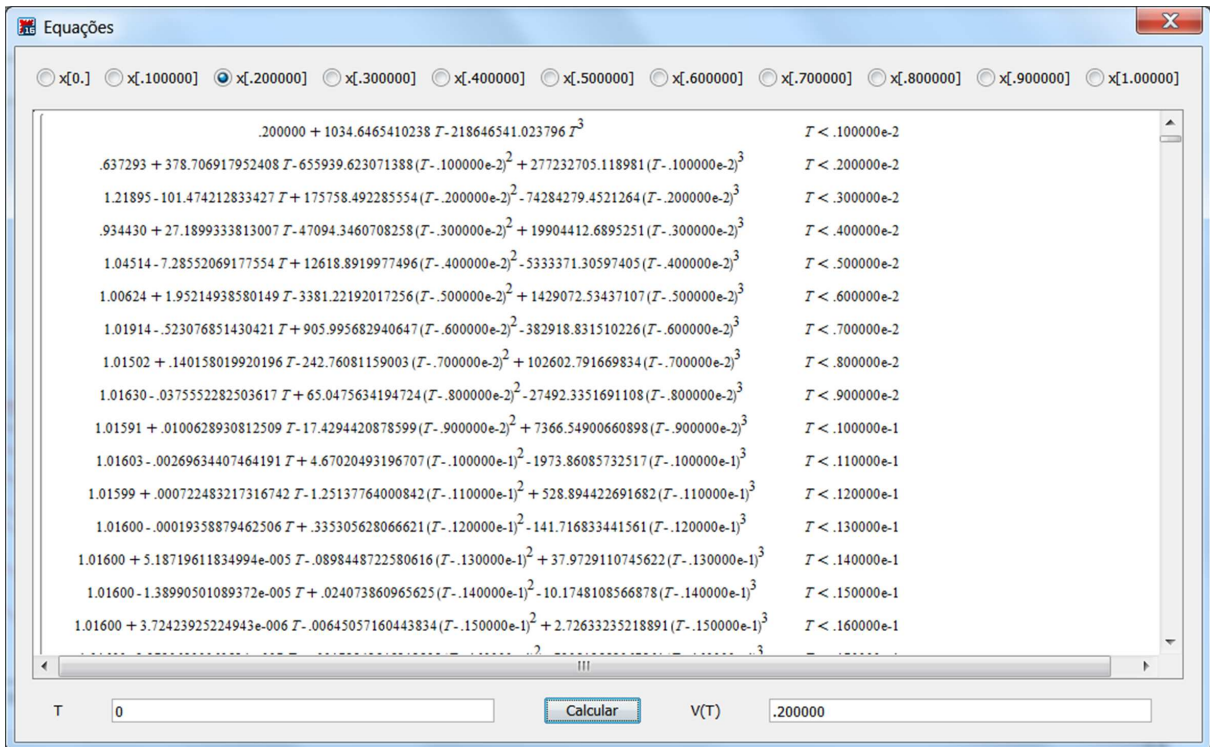
ao usuário estimar valores para a tensão, que sejam diferentes dos já obtidos, estes valores serão calculados utilizando pontos contidos na malha da matriz, o resultado deste processo pode ser observado na Figura 7.9;



**Figura 7.9: Gráfico em Três Dimensões, representando  $V(x,t)$**

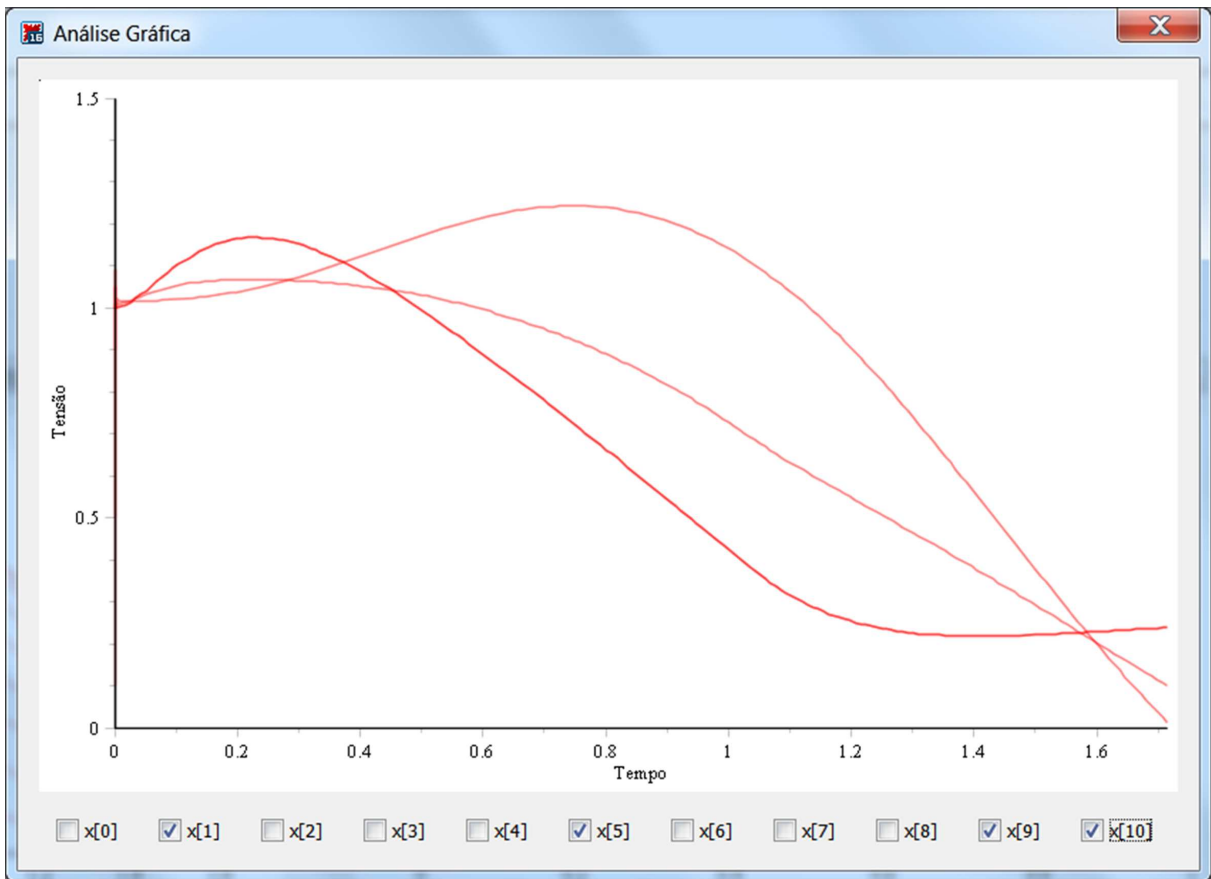
**Fonte: Autoria Própria**

- **Equação  $V(t)$ :** Apresenta equações para a tensão em função do tempo, para cada ponto do comprimento do canal que esteja contido na malha. Estas equações são obtidas por meio de um interpolador *spline*. Ainda neste campo, é possível estimar resultados para a tensão atribuindo valores para qualquer instante de tempo. Como pode ser visto na Figura 7.10, a equação que descreve o ocorrido na posição 0.2 foi selecionada para ser apresentada.



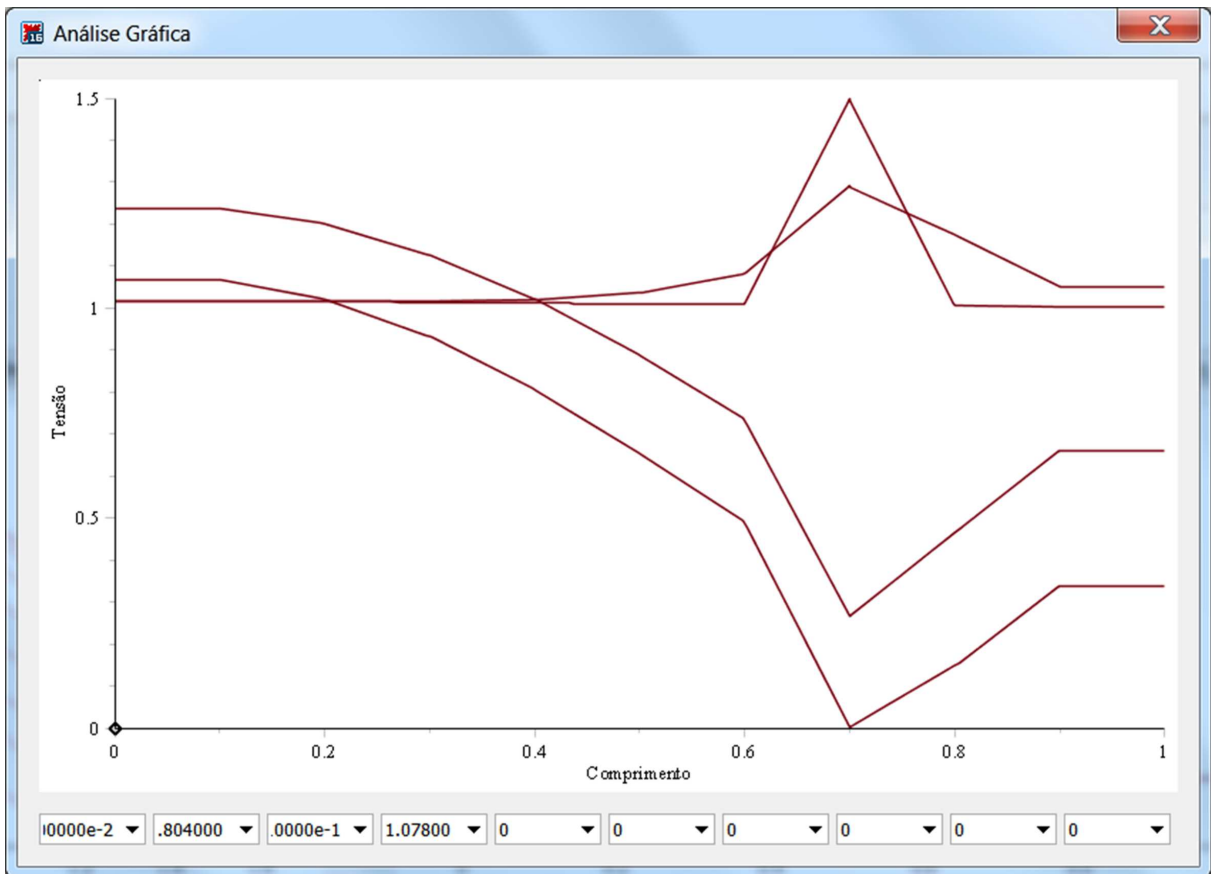
**Figura 7.10: Equações da tensão em função do tempo**  
**Fonte: Autoria Própria**

- **Gráfico  $V(t)$ :** Apresenta os gráficos para a tensão em função do tempo para cada ponto do comprimento que esteja contido na malha. O usuário pode definir quais gráficos serão observados no mesmo sistema de eixos coordenados, no caso da Figura 7.11, os gráficos correspondentes às posições 0.1, 0.5, 0.9 e 1.0.



**Figura 7.11: Gráficos da tensão em função do tempo**  
**Fonte: Autoria Própria**

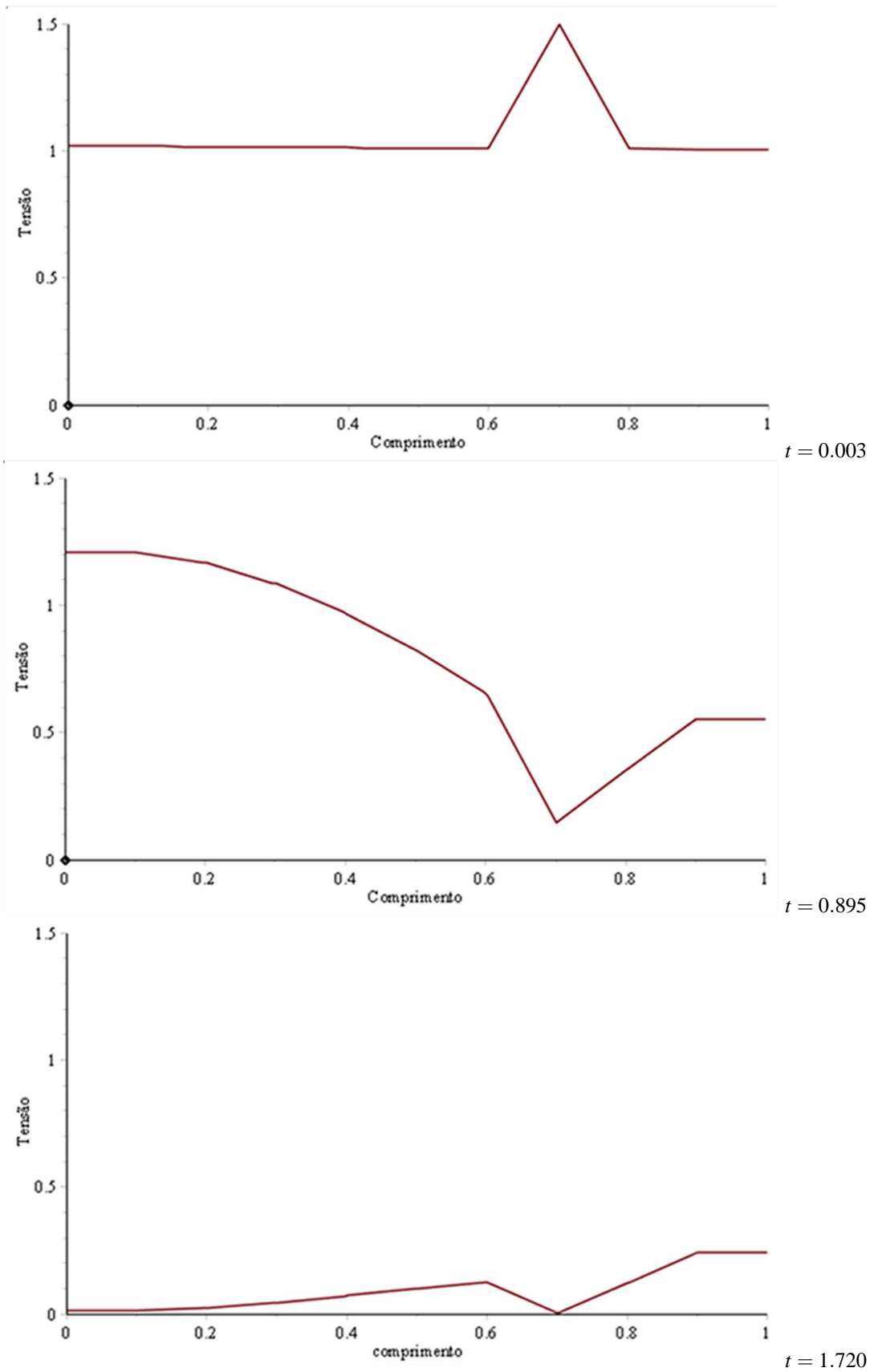
- **Equação  $V(x)$ :** Apresenta equações para a tensão em função do comprimento do canal, para cada instante de tempo contido na malha. É possível para o usuário, estimar resultados para a tensão atribuindo valores para qualquer ponto do comprimento do canal;
- **Gráfico  $V(x)$ :** Apresenta os gráficos para a tensão em função do comprimento para qualquer instante de tempo contido na malha. O usuário pode definir quais gráficos serão observados no mesmo sistema de eixos coordenados, até um máximo de dez, a Figura 7.12 ilustra a tensão ao longo do cabo em quatro momentos distintos para comparação;



**Figura 7.12: Gráficos da tensão em função do comprimento**  
**Fonte: Autoria Própria**

Por estes gráficos torna-se possível analisar e comparar o comportamento da tensão ao se propagar pelo cabo em instantes distintos de tempo. O ponto de distúrbio,  $x = 0.7$ , fica evidente e sua influência ante os outros pontos do comprimento é claramente percebida.

- **Animar:** Ao clicar neste botão, os gráficos para a tensão em função do comprimento, são animados em uma série temporal, onde é apresentada uma sequência constituída pelos gráficos gerados pela interpolação linear dos resultados, para cada um dos instantes de tempo contidos na malha, como pode ser observado na Figura 7.13.



**Figura 7.13: Frames da Animação Referente a Tensão**  
Fonte: Autoria Própria

- Os gráficos contidos nos campos (2) e (3) da Figura 7.7, são atualizados também em tempo real durante o decorrer dos cálculos efetuados pelo processo. Os resultados numéricos dos cálculos realizados para determinar os valores da tensão, em pontos específicos no comprimento do canal são visualizados, no campo (4), à medida que são calculados.

## 7.2 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

Nesta seção obteve-se a solução numérica da Equação da Onda Bidimensional, que modela uma membrana retangular, usando o Método das Características.

### 7.2.1 Dedução do MC para EDP de Segunda Ordem Bidimensional

Deseja-se obter a solução numérica da EDP de segunda ordem com duas variáveis espaciais e uma variável temporal, dada por

$$A(x, y, t)u_{tt} + B(x, y, t)u_{tx} + C(x, y, t)u_{xx} + D(x, y, t)u_{yy} + E(x, y, t)u_{ty} + F(x, y, t)u_{yx} + G(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t) = 0 \quad (7.46)$$

Denotando  $p = u_x$ ,  $q = u_y$  e  $r = u_t$  e conhecendo seus valores em uma região inicial (desde que não seja uma região características), pode calcular a solução da equação (7.46) em pontos fora da região, caso a equação seja hiperbólica, usando a expansão em série de Taylor. O objetivo desta seção é utilizar este fato e produzir um sistema numérico útil para resolver equações hiperbólicas com condições iniciais.

Escolhe-se, portanto, a abordagem simples de usar a aproximação de Taylor de primeira ordem

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx u(x, y, t) + \Delta x u_x(x, y, t) + \Delta y u_y(x, y, t) + \Delta t u_t(x, y, t) \quad (7.47)$$

Importante observar que a equação (7.47) é apenas uma aproximação, e para qualquer utilização prática as quantidades  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta t$  devem ser pequenas. Aplicando a equação (7.47) para pontos ao longo da região inicial dada, pode avaliar a solução em pontos fora da região, mas próximos a ela. Se puder encontrar também  $p$ ,  $q$  e  $r$  nestes pontos, estará então em condições de repetir todo o processo e gerar a solução da equação diferencial em pontos cada vez mais longe a partir da região inicial. Como caso particular da equação (7.46), analisa a solução da equação da onda bidimensional dado por

$$u_{tt} - c_0^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \quad (7.48)$$



Sendo  $p, q, r$  e  $u$  conhecidas na região inicial pode-se calcular com o uso da equação (7.47)  $u$  num tempo posterior em qualquer posição.

Embora a equação (7.47) seja uma boa aproximação para obter a solução do problema, pode-se refina-la utilizando aproximações de primeira ordem de Taylor para  $u_x, u_y$  e  $u_t$  em  $(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$ . De fato,

$$u_x(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx u_x(x, y, t) + \Delta x u_{xx}(x, y, t) + \Delta y u_{xy}(x, y, t) + \Delta t u_{xt}(x, y, t) \quad (7.49)$$

$$u_y(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx u_y(x, y, t) + \Delta x u_{yx}(x, y, t) + \Delta y u_{yy}(x, y, t) + \Delta t u_{yt}(x, y, t) \quad (7.50)$$

e

$$u_t(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx u_t(x, y, t) + \Delta x u_{xt}(x, y, t) + \Delta y u_{ty}(x, y, t) + \Delta t u_{tt}(x, y, t) \quad (7.51)$$

Multiplicando equação(7.49) por  $0.5\Delta x$ , a equação(7.50) por  $0.5\Delta y$  e a equação(7.51) por  $0.5\Delta t$ , têm-se

$$0.5\Delta x u_x(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx 0.5\Delta x u_x(x, y, t) + 0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, y, t) + 0.5\Delta x \Delta y u_{xy}(x, y, t) + 0.5\Delta x \Delta t u_{xt}(x, y, t) \quad (7.52)$$

$$0.5\Delta y u_y(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx 0.5\Delta y u_y(x, y, t) + 0.5\Delta y \Delta x u_{yx}(x, y, t) + 0.5(\Delta y)^2 u_{yy}(x, y, t) + 0.5\Delta y \Delta t u_{yt}(x, y, t) \quad (7.53)$$

e

$$0.5\Delta t u_t(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) \approx 0.5\Delta t u_t(x, y, t) + 0.5\Delta t \Delta x u_{xt}(x, y, t) + 0.5\Delta t \Delta y u_{ty}(x, y, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, y, t) \quad (7.54)$$

Somando os resultados, obtém-se

$$\begin{aligned} & 0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, y, t) + \Delta x \Delta y u_{xy}(x, y, t) + \Delta x \Delta t u_{xt}(x, y, t) \\ & + \Delta y \Delta t u_{yt}(x, y, t) + 0.5(\Delta y)^2 u_{yy}(x, y, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, y, t) \\ \approx & 0.5\Delta x [u_x(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_x(x, y, t)] \\ & + 0.5\Delta y [u_y(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_y(x, y, t)] \\ & + 0.5\Delta t [u_t(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_t(x, y, t)] \end{aligned} \quad (7.55)$$

O primeiro membro da equação (7.55) é justamente a expressão para os termos de segunda

ordem na expansão em série de Taylor de segunda ordem

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = & u(x, y, t) + \Delta x u_x(x, y, t) + \Delta y u_y(x, y, t) + \Delta t u_t(x, y, t) \\
 & + 0.5(\Delta x)^2 u_{xx}(x, y, t) + \Delta x \Delta y u_{xy}(x, y, t) + \Delta x \Delta t u_{tx}(x, y, t) \quad (7.56) \\
 & + \Delta y \Delta t u_{yt}(x, y, t) + 0.5(\Delta y)^2 u_{yy}(x, y, t) + 0.5(\Delta t)^2 u_{tt}(x, y, t)
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (7.55) na equação (7.56), obtém-se

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = & u(x, y, t) + \Delta x u_x(x, y, t) + \Delta y u_y(x, y, t) + \Delta t u_t(x, y, t) \\
 & + 0.5 \Delta x [u_x(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_x(x, y, t)] \\
 & + 0.5 \Delta y [u_y(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_y(x, y, t)] \\
 & + 0.5 \Delta t [u_t(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - u_t(x, y, t)] \quad , \quad (7.57)
 \end{aligned}$$

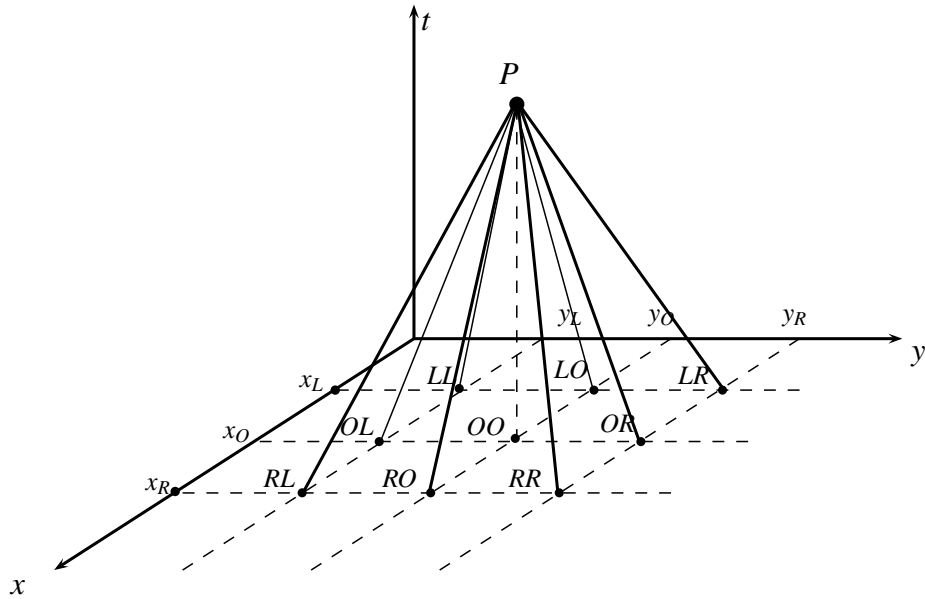
que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = & u(x, y, t) + 0.5 \Delta x [u_x(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) + u_x(x, y, t)] \\
 & + 0.5 \Delta y [u_y(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) + u_y(x, y, t)] \\
 & + 0.5 \Delta t [u_t(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) + u_t(x, y, t)] \quad . \quad (7.58)
 \end{aligned}$$

Esta aparentemente aproximação de primeira ordem é mais precisa do que a equação (7.47), uma vez que incorpora os termos de segunda ordem da expansão de Taylor. Aplicando esta aproximação ao ponto  $LL$  da Figura 8.24, tem-se

$$u_P = u_{LL} + 0.5(p_P + p_{LL})\Delta x + 0.5(q_P + q_{LL})\Delta y + 0.5(r_P + r_{LL})\Delta t \quad . \quad (7.59)$$

Este processo poderia ser aplicado em qualquer um dos pontos  $OL$ ,  $RL$ ,  $LO$ ,  $OO$ ,  $RO$ ,  $LR$ ,  $OR$  e  $RR$ , conforme Figura 8.24, para obter o valor de  $u$  no ponto  $P$ . Assim, por exemplo, conhecendo  $p$ ,  $q$  e  $r$  em ambos os pontos  $LL$ ,  $P$  e  $u$  no ponto  $LL$  é possível aplicar o procedimento novamente para avaliar  $u$  em  $P$ , que representa o tempo futuro.



**Figura 7.14: Gráfico das Retas Características para EO-2D**

**Fonte: Autoria própria**

7.2.2 Problema da Membrana Retangular

Deseja-se monitorar a vibração de uma membrana retangular de lados  $a = 4\text{ ft}$ ,  $b = 2\text{ ft}$ ,  $c^2 = 1\text{ ft}^2/\text{sec}^2$ , velocidade inicial 0 e o deslocamento inicial dado por

$$f(x,y) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2) .$$

Tem-se

$$\Omega = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \text{ e } t \geq 0\}$$

e

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\} .$$

Monta-se o seguinte problema

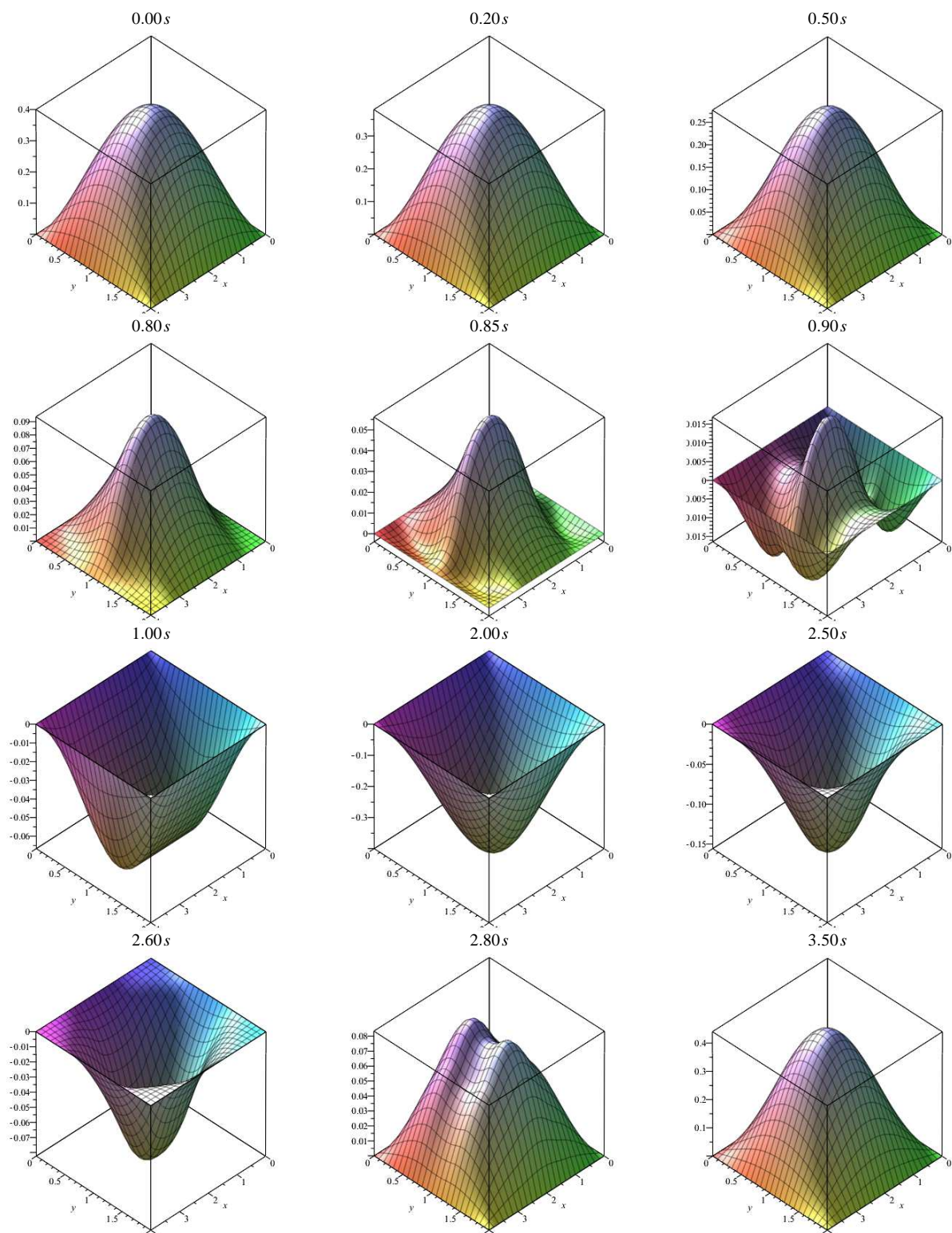
$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x,y,t) = c^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) & ; (x,y,t) \in \Omega \\ f(x,y) = u(x,y,0) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2) & ; (x,y) \in R \\ p = u_x(x,y,0) = 0.1(4 - 2x)(2y - y^2) & ; (x,y) \in R \\ q = u_y(x,y,0) = 0.1(4x - x^2)(2 - 2y) & ; (x,y) \in R \\ r = u_t(x,y,0) = 0 & ; (x,y) \in R \end{array} \right. \quad (7.60)$$

Este problema tem solução analítica conhecida, obtida por Séries de Fourier, dada na seguinte forma

$$u(x,y,t) = 0.426050 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi t \sqrt{m^2 + 4n^2}\right) \sin\left(\frac{1}{4}m\pi x\right) \sin(0.5n\pi y)}{m^3 n^3} \right) \right), \quad (7.61)$$

onde  $m$  e  $n$  são números ímpares. Os métodos de resolução e resultados encontram-se em (KREYSZIG, 1999).

Na Figura 7.15 o comportamento da membrana com o passar do tempo pode ser observado e, percebe-se que os extremos atingidos pela superfície durante sua descida, torção e subida nunca são inferiores a  $-0.4$ , ou superiores a  $0.4$ .



**Figura 7.15: Frames da Animação da Membrana baseado em Séries de Fourier**

**Fonte: Autoria Própria**

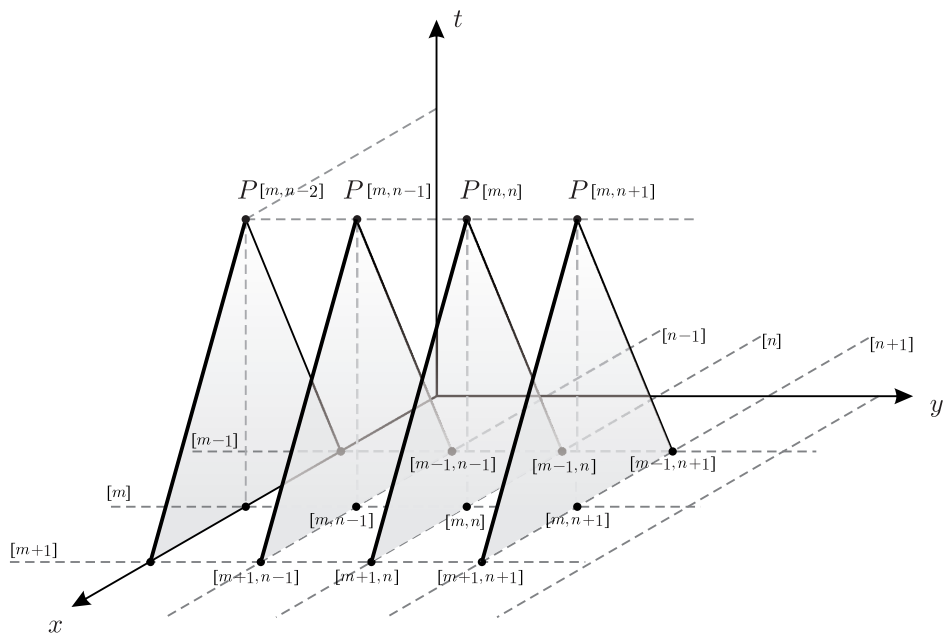
### 7.2.3 Aplicação do MC ao Problema da Membrana

Um método numérico é proposto para a resolução do problema apresentado na subseção 7.2.2, e seus resultados se mostraram interessantes do ponto de vista numérico e computacional.

Antes de mais nada, com objetivo de facilitar o entendimento, uma notação será introduzida para tornar os cálculos mais próximos ao processo desenvolvido, para isso, é preciso considerar que:

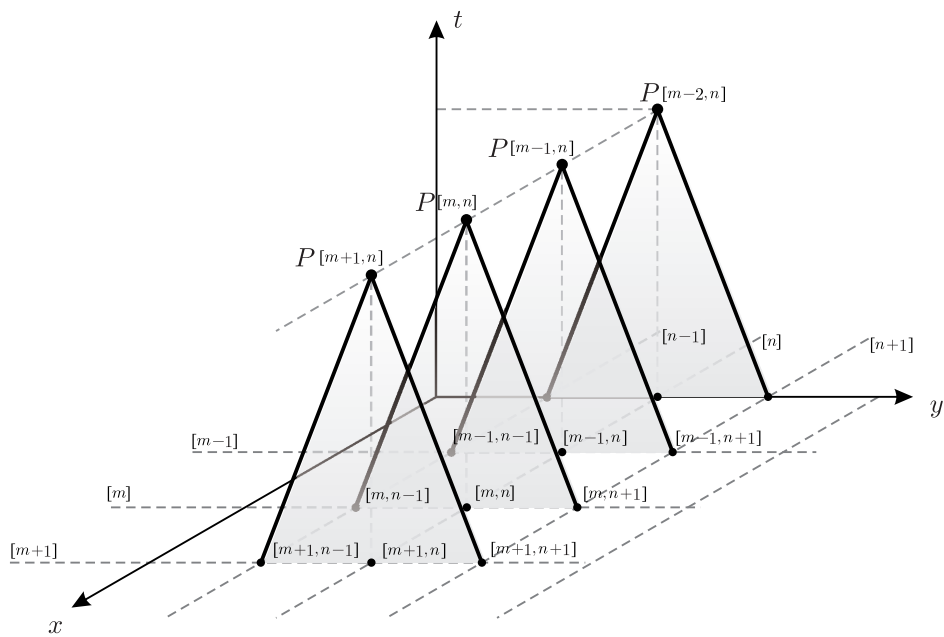
- A variação da velocidade em função da direção  $x$ ,  $p$ , quando for referido seu valor anterior no ponto  $P$ , será denotada por  $p1[m, n]$ , e posterior  $p2[m, n]$ ;
- Quando for desejável acessar o valor de  $p$ , quanto a posição anterior ou posterior em  $x$  (nos pontos  $L$  e  $R$ ), denota-se  $p1[m - 1, n]$  e  $p1[m + 1, n]$ , respectivamente, ou ainda,  $p2[m - 1, n]$  e  $p2[m + 1, n]$ ;
- Para acessar o valor de  $p$ , quanto a posição anterior ou posterior em  $y$  (nos pontos  $L$  e  $R$ ), denota-se  $p1[m, n - 1]$  e  $p1[m, n + 1]$ , respectivamente ou  $p2[m, n - 1]$  e  $p2[m, n + 1]$ ;
- De forma análoga, para obter o valor de  $p$  na posição anterior ou posterior, tanto em  $x$  quanto em  $y$ , usa-se a notação  $p1[m - 1, n - 1]$  e  $p1[m + 1, n + 1]$ , respectivamente, ou  $p2[m - 1, n - 1]$  e  $p2[m + 1, n + 1]$ ;

Esta notação estende-se para as variações com relação a direção  $y$ ,  $q$ , e com relação a direção  $t$ ,  $r$ . Observe as Figuras 7.16 e 7.17.



**Figura 7.16:** Gráfico das Retas Características observadas quanto ao eixo  $x$ .

Fonte: Autoria Própria



**Figura 7.17:** Gráfico das Retas Características observadas quanto ao eixo  $y$ .

Fonte: Autoria própria

Além destas notações, é importante tomar ciência da forma como o processo computacional acontecerá, para computar e armazenar os resultados obtidos para cada ponto da malha criada. Para o problema da Membrana, em especial, as dimensões  $cx = 4.0$  e  $cy = 2.0$  são pontuadas a

cada passo dado pelos incrementos  $dx = 0.1$  e  $dy = 0.1$  respectivamente, desta forma, preenche-se uma malha que será compreendida pelo processo de resolução como uma matriz de  $n_x = cx/dx = 40$  linhas e  $n_y = cy/dy = 20$  colunas, onde  $m$  e  $n$  representam as posições em  $x$  e  $y$  a cada etapa do procedimento. Cada matriz computada representa o conjunto de valores obtidos para  $p, q, r$  e, posteriormente  $U$  durante cada passagem de tempo, dada pelo incremento  $dt = 0.01$ . No decorrer do cálculo dos valores para os pontos interiores da malha, considera-se  $1 \leq m \leq n_x - 1 = 39, m \in \mathbb{Z}$  e  $1 \leq n \leq n_y - 1 = 19, n \in \mathbb{Z}$  como as posições assumidas por cada ponto representativo para  $p, q, r$  e  $U$ .

**Condição Inicial)** Antes da primeira passagem do tempo, isto é, quando  $t = 0$  utilizam-se apenas as condições iniciais para os cálculos, de modo que os valores de  $p, q, r$  e  $U$  são dados pelas equações:

$$\begin{cases} U1[m,n] = 0.1 (4(m \cdot dx) - (m \cdot dx)^2) (2(n \cdot dy) - (n \cdot dy)^2) \\ p1[m,n] = 0.1 (4 - 2(m \cdot dx)) (2(n \cdot dy) - (n \cdot dy)^2) \\ q1[m,n] = 0.1 (4(m \cdot dx) - (m \cdot dx)^2) (2 - 2(n \cdot dy)) \\ r1[m,n] = 0 \end{cases} \quad (7.62)$$

Com as devidas variações para  $m$  e  $n$ , preenche-se as matrizes  $p, q, r$  e  $U$ , com os dados provenientes das condições iniciais. Segue-se então para o método utilizado para os cálculos dos valores em tempos posteriores.

**Eixo x)** Observando-se a Tabela 3 tem-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_1 \\ \frac{d}{dt} (r + \lambda_1 p) = c_0^2 \frac{\partial q}{\partial y} \end{cases}, \quad (7.63)$$

onde  $\lambda_1 = \pm c_0$ . Para,

- $\lambda_1 = -c_0$

Tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= c_0 \end{aligned}. \quad (7.64)$$

Ao observar a linha  $LP$  no eixo  $x$ , obtém-se

$$x_L \approx x_0 - c_0 \Delta t. \quad (7.65)$$



- $\lambda_1 = c_0$

Tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= -c_0 \end{aligned} \quad (7.66)$$

Analisando a linha  $RP$  no eixo  $x$ , obtém-se

$$x_R \approx x_0 + c_0 \Delta t \quad (7.67)$$

As equações (7.65) e (7.67) podem ser escritas, respectivamente, como

$$x_L \approx x_P - c_0 \Delta t \quad (7.68)$$

e

$$x_R \approx x_P + c_0 \Delta t \quad (7.69)$$

onde  $x_P = x_O$ . As equações (7.68) e (7.69) representam uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem.

Para os passos seguintes, considere como notação auxiliar, o símbolo  $\langle \circ \rangle$  que representa o ponto  $\circ$ , o símbolo  $\vec{\circ}$  indica a direção  $\circ$ , portanto,  $q_{\vec{x}}^{(P)}$ , representa o valor de  $q$  quando na direção  $x$  e no ponto  $P$ .

Com uso das Invariantes de Riemann, oriundas da equação (4.61), obtêm-se aproximações similares a  $dp$  e  $dq$ . Para encontrá-las vamos considerar os seguintes casos:

**Linha  $LP$ :** Se  $\lambda_1 = -c_0$  então  $dx/dt = c_0$ . Da equação (5.86), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(r - c_0 p) = c_0^2 q_y^{(LP)} \\
\Rightarrow & \int_{t_L}^{t_P} \frac{d}{dt}(r - c_0 p) dt = \int_{t_L}^{t_P} c_0^2 q_y^{(LP)} dt \\
\Rightarrow & (r - c_0 p) \Big|_{t_L}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(LP)} \int_{t_L}^{t_P} dt \\
\Rightarrow & r(t) \Big|_{t_L}^{t_P} - c_0 p(t) \Big|_{t_L}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(LP)} t \Big|_{t_L}^{t_P} \\
\Rightarrow & r(t) \Big|_{t_L}^{t_P} - c_0 p(t) \Big|_{t_L}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(LP)} (t_P - t_L) \\
\Rightarrow & \left( r_{\bar{x}}^{(P)} - r_{\bar{x}}^{(L)} \right) - c_0 \left( p_{\bar{x}}^{(P)} - p_{\bar{x}}^{(L)} \right) = c_0^2 \bar{q}_y^{(LP)} \Delta t
\end{aligned} \tag{7.70}$$

onde:

- $\bar{q}_y^{(LP)} = \frac{q_y^{(L)} + q_y^{(*P)}}{2}$ ;
- $q_y^{(*P)} = \frac{q(x_0, y_R) - q(x_0, y_L)}{2\Delta y}$ ;
- $q_y^{(L)} = \frac{q(x_L, y_R) - q(x_L, y_L)}{2\Delta y}$ .

**Linha RP:** Se  $\lambda_1 = c_0$  então  $dx/dt = -c_0$ . Da equação (5.86), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(r + c_0 p) = c_0^2 q_y^{(RP)} \\
\Rightarrow & \int_{t_R}^{t_P} \frac{d}{dt}(r + c_0 p) dt = \int_{t_R}^{t_P} c_0^2 q_y^{(RP)} dt \\
\Rightarrow & (r + c_0 p) \Big|_{t_R}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(RP)} \int_{t_R}^{t_P} dt \\
\Rightarrow & r(t) \Big|_{t_R}^{t_P} + c_0 p(t) \Big|_{t_R}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(RP)} t \Big|_{t_R}^{t_P} \\
\Rightarrow & r(t) \Big|_{t_R}^{t_P} + c_0 p(t) \Big|_{t_R}^{t_P} = c_0^2 \bar{q}_y^{(RP)} (t_P - t_R) \\
\Rightarrow & \left( r_{\bar{x}}^{(P)} - r_{\bar{x}}^{(R)} \right) + c_0 \left( p_{\bar{x}}^{(P)} - p_{\bar{x}}^{(R)} \right) = c_0^2 \bar{q}_y^{(RP)} \Delta t
\end{aligned} \tag{7.71}$$

onde:

- $\bar{q}_y^{\langle RP \rangle} = \frac{q_y^{\langle R \rangle} + q_y^{\langle *P \rangle}}{2}$ ;
- $q_y^{\langle *P \rangle} = \frac{q(x_0, y_R) - q(x_0, y_L)}{2\Delta y}$ ;
- $q_y^{\langle R \rangle} = \frac{q(x_R, y_R) - q(x_R, y_L)}{2\Delta y}$ .

Das equações (7.70) e (7.71), tem-se:

$$\begin{cases} r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} - r_{\bar{x}}^{\langle L \rangle} - c_0 (p_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} - p_{\bar{x}}^{\langle L \rangle}) = c_0^2 \bar{q}_y^{\langle LP \rangle} \Delta t \\ r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} - r_{\bar{x}}^{\langle R \rangle} + c_0 (p_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} - p_{\bar{x}}^{\langle R \rangle}) = c_0^2 \bar{q}_y^{\langle RP \rangle} \Delta t \end{cases} \quad (7.72)$$

Ao resolver o sistema, obtém-se

$$r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} = 0.5 \left[ \left( r_{\bar{x}}^{\langle L \rangle} + r_{\bar{x}}^{\langle R \rangle} - c_0 p_{\bar{x}}^{\langle L \rangle} + c_0 p_{\bar{x}}^{\langle R \rangle} \right) + c_0^2 \left( \bar{q}_y^{\langle LP \rangle} + \bar{q}_y^{\langle RP \rangle} \right) \Delta t \right] \quad (7.73)$$

e

$$p_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} = \frac{1}{2c_0} \left[ \left( -r_{\bar{x}}^{\langle L \rangle} + r_{\bar{x}}^{\langle R \rangle} + c_0 p_{\bar{x}}^{\langle L \rangle} + c_0 p_{\bar{x}}^{\langle R \rangle} \right) + c_0^2 \left( \bar{q}_y^{\langle RP \rangle} - \bar{q}_y^{\langle LP \rangle} \right) \Delta t \right] \quad (7.74)$$

Para o cálculo dos valores inerentes à direção  $x$ ,  $p_{\bar{x}}^{\langle P \rangle}$  e  $r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle}$ , faz-se necessário o seguinte:

- Ponto P:

$$\begin{aligned} q_y^{\langle P1 \rangle} &= (q_1[m, n+1] - q_1[m, n]) / (2 \cdot dx) \\ q_y^{\langle P2 \rangle} &= (q_1[m, n+1] - q_1[m, n]) / (2 \cdot dx) \end{aligned} \quad (7.75)$$

- Ponto L:

$$q_y^{\langle L \rangle} = (q_1[m-1, n+1] - q_1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad (7.76)$$

- Ponto R:

$$q_y^{\langle R \rangle} = (q_1[m+1, n+1] - q_1[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad (7.77)$$

Após ter calculado estes valores, pode-se encontrar os dados referentes ao tempo futuro.

$$\begin{aligned}
 q_y^{\langle LP(Md) \rangle}[m, n] &= \left( q_y^{\langle L \rangle} + q_y^{\langle P1 \rangle} \right) \cdot 0.5 \\
 q_y^{\langle P1 \rangle} &= q_y^{\langle LP(Md) \rangle}[m, n] \\
 q_y^{\langle RP(Md) \rangle}[m, n] &= \left( q_y^{\langle R \rangle} + q_y^{\langle P2 \rangle} \right) \cdot 0.5 \\
 q_y^{\langle P2 \rangle} &= q_y^{\langle RP(Md) \rangle}[m, n]
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

onde os valores de  $q_y^{\langle LP(Md) \rangle}$  e  $q_y^{\langle RP(Md) \rangle}$  são atualizados em um “loop” para refinamento dos resultados obtidos. Após este refinamento, determina-se  $q_y^{\langle P \rangle}$ , que representa a variação de  $q$  na direção  $y$  e no ponto  $P$ , melhor aproximada que  $q_y^{\langle P1 \rangle}$  ou  $q_y^{\langle P2 \rangle}$ ,

$$q_y^{\langle P \rangle} = \left( q_y^{\langle LP(Md) \rangle}[m, n] + q_y^{\langle RP(Md) \rangle}[m, n] \right) \cdot 0.5 . \tag{7.79}$$

Neste momento, é possível encontrar os valores para  $r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle}$  e  $p_{\bar{x}}^{\langle P \rangle}$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 r_{\bar{x}}^{\langle P \rangle} &= 0.5 \cdot (r1[m-1, n] + r1[m+1, n] - p1[m-1, n] + p1[m+1, n]) + \\
 &0.5 \cdot (q_y^{\langle LP(Md) \rangle}[m, n] + q_y^{\langle RP(Md) \rangle}[m, n]) \cdot dt
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

$$\begin{aligned}
 p2[m, n] &= 0.5 \cdot (-r1[m-1, n] + r1[m+1, n] + p1[m-1, n] + p1[m+1, n]) + \\
 &0.5 \cdot (q_y^{\langle RP(Md) \rangle}[m, n] - q_y^{\langle LP(Md) \rangle}[m, n]) \cdot dt
 \end{aligned}$$

**Eixo y)** Ao observar a tabela 4, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -\lambda_2 \\ \frac{d}{dt}(r + \lambda_2 q) = c_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right. , \tag{7.81}$$

onde  $\lambda_2 = \pm c_0$ . Considera-se dois casos:

- $\lambda_2 = -c_0$ .

Se  $\lambda_2 = -c_0$  segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= -\lambda_2 \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= c_0
 \end{aligned} . \tag{7.82}$$

Estando na linha  $LP$ , nota-se

$$y_L \approx y_0 - c_0 \Delta t . \quad (7.83)$$

- $\lambda_2 = c_0$ .

Para  $\lambda_2 = c_0$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda_2 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= -c_0 . \end{aligned} \quad (7.84)$$

Na linha  $RP$ , obtém-se

$$y_R \approx y_0 + c_0 \Delta t . \quad (7.85)$$

As equações (7.83) e (7.85) podem ser escritas, respectivamente, como

$$y_L \approx y_P - c_0 \Delta t \quad (7.86)$$

e

$$y_R \approx y_P + c_0 \Delta t , \quad (7.87)$$

onde  $x_P = x_O$ . As equações (7.86) e (7.87) representam uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem.

Com uso das Invariantes de Riemann, dada pela equação (4.61), obtêm-se aproximações similares a  $dp$  e  $dq$ . Têm-se dois casos:

**Linha  $LP$ :** Se  $\lambda_2 = -c_0$  então  $dy/dt = c_0$ . Da equação (5.93), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r - c_0 q) &= c_0^2 \bar{p}_x^{(LP)} \\ \Rightarrow \int_{t_L}^{t_P} \frac{d}{dt}(r - c_0 q) dt &= \int_{t_L}^{t_P} c_0^2 \bar{p}_x^{(LP)} dt \\ \Rightarrow (r - c_0 q) \Big|_{t_L}^{t_P} &= c_0^2 \bar{p}_x^{(LP)} \int_{t_L}^{t_P} dt \quad (7.88) \\ \Rightarrow r(t) \Big|_{t_L}^{t_P} - c_0 q(t) \Big|_{t_L}^{t_P} &= c_0^2 \bar{p}_x^{(LP)} t \Big|_{t_L}^{t_P} \\ \Rightarrow \left( r_{\bar{y}}^{(P)} - r_{\bar{y}}^{(L)} \right) - c_0 \left( q_{\bar{y}}^{(P)} - q_{\bar{y}}^{(L)} \right) &= c_0^2 \bar{p}_x^{(LP)} \Delta t \end{aligned}$$

onde:

- $\bar{p}_x^{\langle LP \rangle} = \frac{p_x^{\langle L \rangle} + p_x^{\langle *P \rangle}}{2};$
- $p_x^{\langle *P \rangle} = \frac{p(x_R, y_0) - p(x_L, y_0)}{2\Delta x};$
- $p_x^{\langle L \rangle} = \frac{p(x_R, y_L) - p(x_L, y_L)}{2\Delta x}.$

**Linha RP:** Se  $\lambda_2 = c_0$  então  $dy/dt = -c_0$ . Da equação (5.93), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r + c_0 q) &= c_0^2 p_x^{\langle RP \rangle} \\ \Rightarrow \int_{t_R}^{t_P} \frac{d}{dt}(r + c_0 q) dt &= \int_{t_R}^{t_P} c_0^2 p_x^{\langle RP \rangle} dt \\ \Rightarrow (r + c_0 q) \Big|_{t_R}^{t_P} &= c_0^2 \bar{p}_x^{\langle RP \rangle} \int_{t_R}^{t_P} dt \quad (7.89) \\ \Rightarrow r(t) \Big|_{t_R}^{t_P} + c_0 q(t) \Big|_{t_R}^{t_P} &= c_0^2 \bar{p}_x^{\langle RP \rangle} t \Big|_{t_R}^{t_P} \\ \Rightarrow (r_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - r_{\bar{y}}^{\langle R \rangle}) + c_0 (q_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - q_{\bar{y}}^{\langle R \rangle}) &= c_0^2 \bar{p}_x^{\langle RP \rangle} \Delta t \end{aligned}$$

onde:

- $\bar{p}_x^{\langle RP \rangle} = \frac{p_x^{\langle R \rangle} + p_x^{\langle P \rangle}}{2};$
- $p_x^{\langle *P \rangle} = \frac{p(x_R, y_0) - p(x_L, y_0)}{2\Delta x};$
- $p_x^{\langle R \rangle} = \frac{p(x_L, y_R) - p(x_L, y_0)}{2\Delta x}.$

Das equações (7.88) e (7.89), tem-se:

$$\begin{cases} r_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - r_{\bar{y}}^{\langle L \rangle} - c_0 (q_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - q_{\bar{y}}^{\langle L \rangle}) = c_0^2 \bar{p}_x^{\langle LP \rangle} \Delta t \\ r_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - r_{\bar{y}}^{\langle R \rangle} + c_0 (q_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} - q_{\bar{y}}^{\langle R \rangle}) = c_0^2 \bar{p}_x^{\langle RP \rangle} \Delta t \end{cases} \quad (7.90)$$

Ao resolver o sistema, obtêm-se

$$r_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} = 0.5 \left[ (r_{\bar{y}}^{\langle L \rangle} + r_{\bar{y}}^{\langle R \rangle} - c_0 q_{\bar{y}}^{\langle L \rangle} + c_0 q_{\bar{y}}^{\langle R \rangle}) + c_0^2 (\bar{p}_x^{\langle LP \rangle} + \bar{p}_x^{\langle RP \rangle}) \Delta t \right] \quad (7.91)$$

e

$$q_{\bar{y}}^{\langle P \rangle} = \frac{1}{2c_0} \left[ (-r_{\bar{y}}^{\langle L \rangle} + r_{\bar{y}}^{\langle R \rangle} + c_0 q_{\bar{y}}^{\langle L \rangle} + c_0 q_{\bar{y}}^{\langle R \rangle}) + (\bar{p}_x^{\langle RP \rangle} - \bar{p}_x^{\langle LP \rangle}) \Delta t \right] \quad (7.92)$$

Para o cálculo dos valores inerentes à direção  $y$ ,  $q_y^{(P)}$  e  $r_y^{(P)}$ , faz-se necessário o seguinte:

- Ponto P:

$$p_x^{(P1)} = (p_1[m+1, n] - p_1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \quad (7.93)$$

$$p_x^{(P2)} = (p_1[m+1, n] - p_1[m-1, n]) / (2 \cdot dx)$$

- Ponto L:

$$p_x^{(L)} = (p_1[m+1, n-1] - p_1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \quad (7.94)$$

- Ponto R:

$$p_x^{(R)} = (p_1[m+1, n+1] - p_1[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \quad (7.95)$$

Após calcular esses valores, pode-se encontrar os dados referentes ao tempo futuro

$$p_x^{(LP(Md))} [m, n] = (p_x^{(L)} + p_x^{(P1)}) \cdot 0.5$$

$$p_x^{(P1)} = p_x^{(LP(Md))} [m, n] \quad (7.96)$$

$$p_x^{(RP(Md))} [m, n] = (p_x^{(R)} + p_x^{(P2)}) \cdot 0.5$$

$$p_x^{(P1)} = p_x^{(RP(Md))} [m, n]$$

onde os valores de  $p_x^{(LP(Md))}$  e  $p_x^{(RP(Md))}$  são atualizados em um “loop” para refinamento dos resultados obtidos. Após este refinamento, determina-se  $p_x^{(P)}$ , que representa a variação de  $p$  na direção  $x$  e no ponto  $P$ , melhor aproximada que  $p_x^{(P1)}$  ou  $p_x^{(P2)}$ .

$$p_x^{(P)} = (p_x^{(LP(Md))} [m, n] + p_x^{(RP(Md))} [m, n]) \cdot 0.5 \quad (7.97)$$

Neste momento, é possível encontrar os valores de  $r_y^{(P)}$  e  $q_y^{(P)}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_y^{(P)} &= 0.5 \cdot (r1[m, n-1] + r1[m, n+1] - q1[m, n-1] + q1[m, n+1]) + \\ &0.5 \cdot (p_x^{(LP(Md))} [m, n] + p_x^{(RP(Md))} [m, n]) \cdot dt \end{aligned} \quad (7.98)$$

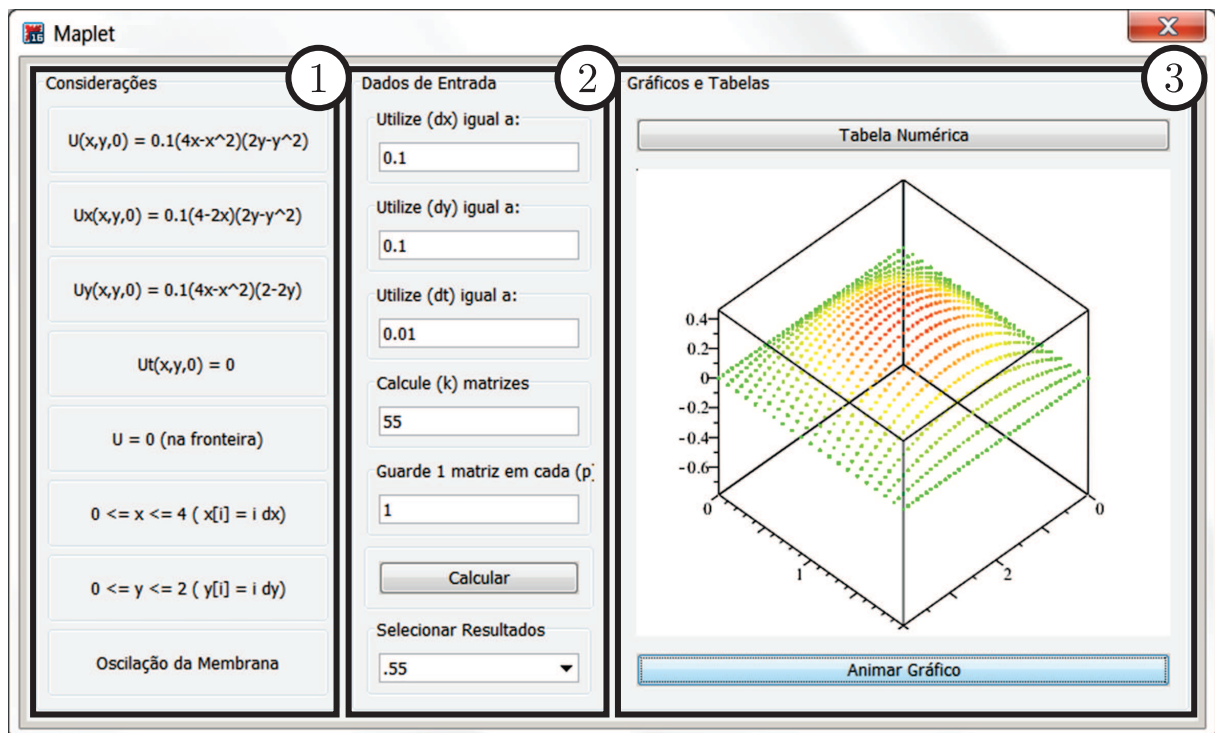
$$\begin{aligned} q2[m, n] &= 0.5 \cdot (-r1[m, n-1] + r1[m, n+1] + q1[m, n-1] + q1[m, n+1]) + \\ &0.5 \cdot (p_x^{(RP(Md))} [m, n] - p_x^{(LP(Md))} [m, n]) \cdot dt \end{aligned}$$

Com todos os resultados já obtidos, encontra-se  $r^{(P)}$  e  $U^{(P)}$ .

$$r2[m,n] = \left( r_{\bar{x}}^{(P)} + r_{\bar{y}}^{(P)} \right) \cdot 0.5$$

$$\begin{aligned} U2[m,n] = & U1[m-1,n-1] + \\ & 0.5 \cdot dx \cdot (p2[m,n] + p2[m-1,n-1]) + \\ & 0.5 \cdot dy \cdot (q2[m,n] + q2[m-1,n-1]) + \\ & 0.5 \cdot dt \cdot (r2[m,n] + r2[m-1,n-1]) \end{aligned} \quad (7.99)$$

#### 7.2.4 Solução do Problema da Membrana Retangular via *Maplet*



**Figura 7.18: Maplet - Membrana**

**Fonte: Autoria Própria**

Apresenta-se agora, o funcionamento da Maplet implementada, que dará a solução do problema proposto. Na Figura 7.18, pode ser vista a tela da Maplet, quando em uso, onde:

1. Área que contém importantes considerações para resolução do problema e para a programação do software, como as condições iniciais e de fronteira, a região observada e a forma como a malha foi criada.
2. Área onde estão localizados, o botão que dá início ao processo computacional e os campos



de entrada dos dados:

- $dx = 0.1$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $x$ ;
- $dy = 0.1$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $y$ ;
- $dt = 0.01$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $t$ ;
- $k = 55$  que estipula a quantidade de matrizes que serão calculadas pelo software, estas matrizes compõem a solução final e representam o comportamento da membrana a cada posição no tempo;
- $p = 1$  é um valor utilizado para salvar na memória do software uma a cada ( $p$ ) matrizes, que poderão ser visualizadas posteriormente;
- Selecionar Resultados: Neste campo, o usuário pode selecionar as matrizes salvas na memória do software.

3. Neste campo é possível visualizar o gráfico em tempo real com os pontos calculados pelo processo computacional, nele estão os botões:

- Tabela Numérica: Ao clicar neste botão, são apresentados os resultados da solução numérica para a variável  $U$ , obtidos pela resolução descrita anteriormente.

Os resultados compõem uma tabela de valores para momentos específicos do tempo, na Figura 7.19 pode-se observar a tabela numérica correspondente ao tempo, 0.35 s em que a membrana atingiu seu extremo inferior.

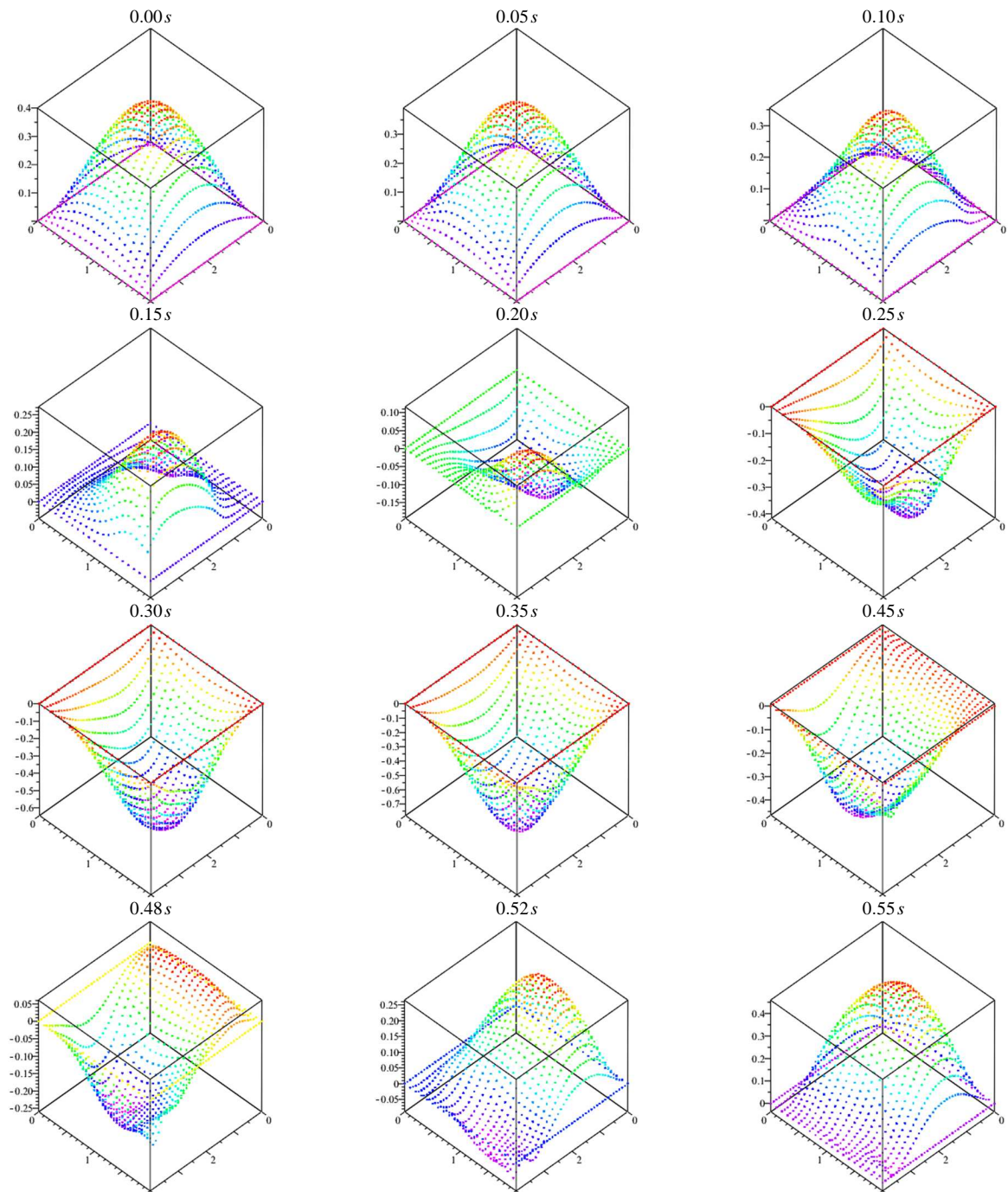
xy	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0		
0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1.	0	-5.7470e-2	-1.14984e-1	-1.71203e-1	-2.29719e-1	-2.97097e-1	-3.73731e-1	-4.58420e-1	-5.51564e-1	-6.60260e-1	-7.8554e-1	-9.2761e-1	-1.0875e-1	-1.26612e-1	-1.46398e-1	-1.68252e-1	-2.02309e-1	-2.48685e-1	-3.07799e-1	-3.80037e-1	-4.65906e-1	-5.6505e-1	-6.7807e-1
2.	0	-1.15180e-1	-2.30360e-1	-3.45540e-1	-4.60720e-1	-5.75900e-1	-6.91080e-1	-8.06260e-1	-9.21440e-1	-1.03662e-1	-1.15180e-1	-1.26698e-1	-1.38216e-1	-1.49734e-1	-1.61252e-1	-1.72770e-1	-1.84288e-1	-1.95806e-1	-2.07324e-1	-2.18842e-1	-2.30360e-1	-2.41878e-1	-2.53396e-1
3.	0	-2.19567e-1	-4.39134e-1	-6.58701e-1	-8.78268e-1	-1.09783e-1	-1.31739e-1	-1.53695e-1	-1.75651e-1	-1.97607e-1	-2.19563e-1	-2.41519e-1	-2.63475e-1	-2.85431e-1	-3.07387e-1	-3.29343e-1	-3.51299e-1	-3.73255e-1	-3.95211e-1	-4.17167e-1	-4.39123e-1	-4.61079e-1	-4.83035e-1
4.	0	-3.05099e-1	-6.10198e-1	-9.15297e-1	-1.22039e-1	-1.52479e-1	-1.82919e-1	-2.13359e-1	-2.43799e-1	-2.74239e-1	-3.04679e-1	-3.35119e-1	-3.65559e-1	-3.95999e-1	-4.26439e-1	-4.56879e-1	-4.87319e-1	-5.17759e-1	-5.48199e-1	-5.78639e-1	-6.09079e-1	-6.39519e-1	-6.69959e-1
5.	0	-3.88860e-1	-7.77720e-1	-1.16658e-1	-1.55546e-1	-1.94434e-1	-2.33322e-1	-2.72210e-1	-3.11098e-1	-3.50086e-1	-3.89074e-1	-4.28062e-1	-4.67050e-1	-5.06038e-1	-5.45026e-1	-5.84014e-1	-6.23002e-1	-6.61990e-1	-7.00978e-1	-7.39966e-1	-7.78954e-1	-8.17942e-1	-8.56930e-1
6.	0	-4.70278e-1	-9.40556e-1	-1.41083e-1	-2.11625e-1	-2.82167e-1	-3.52709e-1	-4.23251e-1	-4.93793e-1	-5.64335e-1	-6.34877e-1	-7.05419e-1	-7.75961e-1	-8.46503e-1	-9.17045e-1	-9.87587e-1	-1.05812e-1	-1.12854e-1	-1.19896e-1	-1.26938e-1	-1.33980e-1	-1.41022e-1	-1.48064e-1
7.	0	-5.54801e-1	-1.10960e-1	-1.66519e-1	-2.22078e-1	-2.77637e-1	-3.33196e-1	-3.88755e-1	-4.44314e-1	-5.00873e-1	-5.56432e-1	-6.11991e-1	-6.67550e-1	-7.23109e-1	-7.78668e-1	-8.34227e-1	-8.89786e-1	-9.45345e-1	-1.00090e-1	-1.05645e-1	-1.11199e-1	-1.16754e-1	-1.22309e-1
8.	0	-6.23064e-1	-1.24613e-1	-1.86921e-1	-2.49230e-1	-3.11538e-1	-3.73847e-1	-4.36155e-1	-4.98464e-1	-5.60772e-1	-6.23081e-1	-6.85389e-1	-7.47698e-1	-8.09906e-1	-8.72215e-1	-9.34524e-1	-9.96832e-1	-1.05914e-1	-1.12145e-1	-1.18376e-1	-1.24607e-1	-1.30838e-1	-1.37069e-1
9.	0	-6.93908e-1	-1.38782e-1	-2.08164e-1	-2.77546e-1	-3.46928e-1	-4.16310e-1	-4.85692e-1	-5.55074e-1	-6.24456e-1	-6.93838e-1	-7.63220e-1	-8.32602e-1	-9.01984e-1	-9.71366e-1	-1.04074e-1	-1.11016e-1	-1.17958e-1	-1.24900e-1	-1.31842e-1	-1.38784e-1	-1.45726e-1	-1.52668e-1
10.	0	-7.59788e-1	-1.51958e-1	-2.27937e-1	-3.03916e-1	-3.79895e-1	-4.55874e-1	-5.31853e-1	-6.07832e-1	-6.83811e-1	-7.59790e-1	-8.35769e-1	-9.11748e-1	-9.87727e-1	-1.06370e-1	-1.13963e-1	-1.21556e-1	-1.29149e-1	-1.36742e-1	-1.44335e-1	-1.51928e-1	-1.59521e-1	-1.67114e-1
11.	0	-8.12520e-1	-1.62504e-1	-2.43756e-1	-3.25008e-1	-4.06260e-1	-4.87512e-1	-5.68764e-1	-6.49916e-1	-7.31168e-1	-8.12420e-1	-8.93672e-1	-9.74924e-1	-1.05617e-1	-1.13742e-1	-1.21867e-1	-1.30000e-1	-1.38133e-1	-1.46266e-1	-1.54399e-1	-1.62532e-1	-1.70665e-1	-1.78798e-1
12.	0	-8.67941e-1	-1.73588e-1	-2.60336e-1	-3.47084e-1	-4.33832e-1	-5.20580e-1	-6.07328e-1	-6.94076e-1	-7.80824e-1	-8.67572e-1	-9.54320e-1	-1.04107e-1	-1.12782e-1	-1.21457e-1	-1.30132e-1	-1.38807e-1	-1.47482e-1	-1.56157e-1	-1.64832e-1	-1.73507e-1	-1.82182e-1	-1.90857e-1
13.	0	-9.09960e-1	-1.81992e-1	-2.72984e-1	-3.63976e-1	-4.54968e-1	-5.45960e-1	-6.36952e-1	-7.27944e-1	-8.18936e-1	-9.09928e-1	-1.00092e-1	-1.09184e-1	-1.18276e-1	-1.27368e-1	-1.36460e-1	-1.45552e-1	-1.54644e-1	-1.63736e-1	-1.72828e-1	-1.81920e-1	-1.91012e-1	-1.99904e-1
14.	0	-9.49318e-1	-1.89864e-1	-2.84792e-1	-3.79720e-1	-4.74648e-1	-5.69576e-1	-6.64504e-1	-7.59432e-1	-8.54360e-1	-9.49288e-1	-1.04420e-1	-1.13912e-1	-1.23404e-1	-1.32896e-1	-1.42388e-1	-1.51880e-1	-1.61372e-1	-1.70864e-1	-1.80356e-1	-1.89848e-1	-1.99340e-1	-2.08832e-1
15.	0	-9.96308e-1	-1.99262e-1	-2.98524e-1	-3.97786e-1	-4.97048e-1	-5.96310e-1	-6.95572e-1	-7.94834e-1	-8.94096e-1	-9.93358e-1	-1.09262e-1	-1.19186e-1	-1.29110e-1	-1.39034e-1	-1.48958e-1	-1.58882e-1	-1.68806e-1	-1.78730e-1	-1.88654e-1	-1.98578e-1	-2.08502e-1	-2.18426e-1
16.	0	-9.83728e-1	-1.96746e-1	-2.95504e-1	-3.94262e-1	-4.93020e-1	-5.91778e-1	-6.90536e-1	-7.89294e-1	-8.88052e-1	-9.86810e-1	-1.08556e-1	-1.18452e-1	-1.28348e-1	-1.38244e-1	-1.48140e-1	-1.58036e-1	-1.67932e-1	-1.77828e-1	-1.87724e-1	-1.97620e-1	-2.07516e-1	-2.17412e-1
17.	0	-9.89944e-1	-1.97988e-1	-2.96032e-1	-3.94076e-1	-4.92120e-1	-5.90164e-1	-6.88208e-1	-7.86252e-1	-8.84296e-1	-9.82340e-1	-1.08038e-1	-1.17836e-1	-1.27634e-1	-1.37432e-1	-1.47230e-1	-1.57028e-1	-1.66826e-1	-1.76624e-1	-1.86422e-1	-1.96220e-1	-2.06018e-1	-2.15816e-1
18.	0	-9.98416e-1	-1.99232e-1	-2.98464e-1	-3.97696e-1	-4.96928e-1	-5.96160e-1	-6.95392e-1	-7.94624e-1	-8.93856e-1	-9.93088e-1	-1.09132e-1	-1.18956e-1	-1.28780e-1	-1.38604e-1	-1.48428e-1	-1.58252e-1	-1.68076e-1	-1.77900e-1	-1.87724e-1	-1.97548e-1	-2.07372e-1	-2.17196e-1
19.	0	-9.80152e-1	-1.96030e-1	-2.93908e-1	-3.91786e-1	-4.89664e-1	-5.87542e-1	-6.85420e-1	-7.83298e-1	-8.81176e-1	-9.79054e-1	-1.07693e-1	-1.17491e-1	-1.27289e-1	-1.37087e-1	-1.46885e-1	-1.56683e-1	-1.66481e-1	-1.76279e-1	-1.86077e-1	-1.95875e-1	-2.05673e-1	-2.15471e-1
20.	0	-9.65721e-1	-1.93144e-1	-2.89568e-1	-3.86092e-1	-4.82616e-1	-5.79140e-1	-6.75664e-1	-7.72188e-1	-8.68712e-1	-9.65236e-1	-1.06176e-1	-1.15720e-1	-1.25264e-1	-1.34808e-1	-1.44352e-1	-1.53896e-1	-1.63440e-1	-1.72984e-1	-1.82528e-1	-1.92072e-1	-2.01616e-1	-2.11160e-1
21.	0	-9.48804e-1	-1.89761e-1	-2.87522e-1	-3.85283e-1	-4.83044e-1	-5.80805e-1	-6.78566e-1	-7.76327e-1	-8.74088e-1	-9.71849e-1	-1.06961e-1	-1.16722e-1	-1.26483e-1	-1.36244e-1	-1.46005e-1	-1.55766e-1	-1.65527e-1	-1.75288e-1	-1.85049e-1	-1.94810e-1	-2.04571e-1	-2.14332e-1
22.	0	-9.27759e-1	-1.85552e-1	-2.82304e-1	-3.79056e-1	-4.75808e-1	-5.72560e-1	-6.69312e-1	-7.66064e-1	-8.62816e-1	-9.59568e-1	-1.05632e-1	-1.15304e-1	-1.24976e-1	-1.34648e-1	-1.44320e-1	-1.53992e-1	-1.63664e-1	-1.73336e-1	-1.83008e-1	-1.92680e-1	-2.02352e-1	-2.12024e-1
23.	0	-9.03811e-1	-1.80762e-1	-2.76614e-1	-3.72466e-1	-4.68318e-1	-5.64170e-1	-6.60022e-1	-7.55874e-1	-8.51726e-1	-9.47578e-1	-1.04340e-1	-1.13902e-1	-1.23464e-1	-1.33026e-1	-1.42588e-1	-1.52150e-1	-1.61712e-1	-1.71274e-1	-1.80836e-1	-1.90398e-1	-1.99960e-1	-2.09522e-1
24.	0	-8.77172e-1	-1.75434e-1	-2.71286e-1	-3.67138e-1	-4.62990e-1	-5.58842e-1	-6.54694e-1	-7.50546e-1	-8.46398e-1	-9.42250e-1	-1.03782e-1	-1.13344e-1	-1.22906e-1	-1.32468e-1	-1.42030e-1	-1.51592e-1	-1.61154e-1	-1.70716e-1	-1.80278e-1	-1.89840e-1	-1.99402e-1	-2.08964e-1
25.	0	-8.50076e-1	-1.70015e-1	-2.63967e-1	-3.57919e-1	-4.51871e-1	-5.45823e-1	-6.39775e-1	-7.33727e-1	-8.27679e-1	-9.21631e-1	-1.01558e-1	-1.10954e-1	-1.20350e-1	-1.29746e-1	-1.39142e-1	-1.48538e-1	-1.57934e-1	-1.67330e-1	-1.76726e-1	-1.86122e-1	-1.95518e-1	-2.04914e-1
26.	0	-8.19732e-1	-1.63946e-1	-2.55808e-1	-3.47670e-1	-4.39532e-1	-5.31394e-1	-6.23256e-1	-7.15118e-1	-8.06980e-1	-8.98842e-1	-9.90704e-1	-1.08256e-1	-1.17452e-1	-1.26648e-1	-1.35844e-1	-1.45040e-1	-1.54236e-1	-1.63432e-1	-1.72628e-1	-1.81824e-1	-1.91020e-1	-2.00216e-1
27.	0	-7.85177e-1	-1.57035e-1	-2.44897e-1	-3.32759e-1	-4.20621e-1	-5.08483e-1	-5.96345e-1	-6.84207e-1	-7.72069e-1	-8.59931e-1	-9.47793e-1	-1.03565e-1	-1.12357e-1	-1.21149e-1	-1.30341e-1	-1.39533e-1	-1.48725e-1	-1.57917e-1	-1.67109e-1	-1.76301e-1	-1.85493e-1	-1.94685e-1
28.	0	-7.49282e-1	-1.49856e-1	-2.34718e-1	-3.19580e-1	-4.04442e-1	-4.89304e-1	-5.74166e-1	-6.59028e-1	-7.43890e-1	-8.28752e-1	-9.13614e-1	-1.00143e-1	-1.08935e-1	-1.17727e-1	-1.26519e-1	-1.35311e-1	-1.44103e-1	-1.52895e-1	-1.61687e-1	-1.70479e-1	-1.79271e-1	-1.88063e-1
29.	0	-7.08077e-1	-1.41615e-1	-2.22477e-1	-3.03339e-1	-3.84201e-1	-4.65063e-1	-5.45925e-1	-6.26787e-1	-7.07649e-1	-7.88511e-1	-8.69373e-1	-9.50235e-1	-1.03110e-1	-1.11292e-1	-1.19474e-1	-1.27656e-1	-1.35838e-1	-1.44020e-1	-1.52202e-1	-1.60384e-1	-1.68566e-1	-1.76748e-1
30.	0	-6.62447e-1	-1.32489e-1	-2.03351e-1	-2.84213e-1	-3.65075e-1	-4.45937e-1	-5.26799e-1	-6.07661e-1	-6.88523e-1	-7.69385e-1	-8.50247e-1	-9.31109e-1	-1.01197e-1	-1.09379e-1	-1.17561e-1	-1.25743e-1	-1.33925e-1	-1.42107e-1	-1.50289e-1	-1.58471e-1	-1.66653e-1	-1.74835e-1
31.	0	-6.11683e-1	-1.22337e-1	-1.93199e-1	-2.74061e-1	-3.54923e-1	-4.35785e-1	-5.16647e-1	-5.97509e-1	-6.7837													

No caso do problema aqui proposto, observou-se que o intervalo de variação da membrana para completar seu primeiro “loop” é bastante próximo aos resultados analítico já discutidos anteriormente. A variação pelo método numérico descrito neste texto se dá entre  $-0.7$  e  $0.5$ , por outro lado, para a resolução analítica a variação está em torno de  $-0.4$  e  $0.4$ . Tal comparação pode ser visualizada por meio das Figuras 7.15 e 7.21. Além disso, durante a resolução numérica, a membrana atinge seu valor máximo no tempo  $0.55s$ , conforme pode ser visto na Figura 7.20

x\ty	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	
0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.	0	1.70731e-1	2.89085e-1	3.81100e-1	4.56346e-1	5.19279e-1	5.70595e-1	6.10085e-1	6.39699e-1	6.60691e-1	6.79771e-1	6.94604e-1	7.04868e-1	7.102778e-1	7.116335e-1	7.08749e-1	7.01622e-1	6.89351e-1	6.72182e-1	6.50420e-1	6.24620e-1	5.95310e-1
2.	0	2.92617e-1	5.86506e-1	7.77256e-1	9.35090e-1	1.06660	1.17454	1.25841	1.31694	1.34777	1.35054	1.32357	1.26644	1.18037	1.06682	9.26804e-1	7.65607e-1	5.87647e-1	3.97250e-1	2.10423e-1	0	0
3.	0	3.89171e-1	7.82221e-1	1.12030	1.35154	1.54348	1.70086	1.82452	1.91194	1.96166	1.97046	1.93685	1.86076	1.74230	1.58174	1.38437	1.15341	893352e-1	6.14131e-1	3.31800e-1	0	0
4.	0	4.69618e-1	9.56858e-1	1.36043	1.71256	1.98113	2.15741	2.23153	2.26663	2.26049	2.24184	2.20820	2.24129	2.04626	1.80132	1.51028	1.18212	824681e-1	5.45168e-1	0	0	0
5.	0	5.39030e-1	1.10294	1.57887	1.98105	2.31754	2.55111	2.73340	2.86460	2.94361	2.96724	2.93193	2.83404	2.67483	2.45288	2.21708	1.83408	1.44954	1.02182	573287e-1	0	0
6.	0	5.99537e-1	1.23155	1.76260	2.21043	2.58441	2.89049	3.09213	3.23562	3.32155	3.34807	3.31102	3.20901	3.03794	2.79709	2.49016	2.11933	1.68765	1.20861	695432e-1	0	0
7.	0	6.52090e-1	1.34473	1.92418	2.40871	2.81180	3.14042	3.39922	3.55663	3.62833	3.62224	3.51246	3.33351	3.08196	2.75778	2.36679	1.90051	1.37944	830166e-1	0	0	0
8.	0	6.97433e-1	1.44478	2.06562	2.58164	3.00635	3.35032	3.62026	3.81765	3.94070	3.92403	3.87585	3.75106	3.51027	3.19716	2.76642	2.26013	1.52722	1.02411e-1	0	0	0
9.	0	7.36340e-1	1.53196	2.18931	2.73117	3.17302	3.52644	3.80200	4.00217	4.12876	4.14245	4.08511	3.95814	3.76123	3.49072	3.14743	2.72642	2.22711	1.65797	1.02941	0	0
1.0	0	7.68562e-1	1.60769	2.29598	2.85931	3.31295	3.67392	3.95014	4.14947	4.22757	4.23299	4.25980	4.12352	3.91566	3.63737	3.28877	2.85213	2.34599	1.76355	1.11653	0	0
1.1	0	7.94782e-1	1.67196	2.38687	2.96661	3.43118	3.79392	4.06937	4.26480	4.35984	4.44236	4.40442	4.26146	4.04556	3.75266	3.39059	2.95118	2.45447	1.84163	1.19512	0	0
1.2	0	8.14786e-1	1.72573	2.46228	3.05507	3.52478	3.88858	4.16139	4.35216	4.46749	4.51047	4.48029	4.37392	4.15090	3.85010	3.47432	3.02249	2.49625	1.90237	1.25281	0	0
1.3	0	8.29268e-1	1.76848	2.52345	3.12453	3.59647	3.95833	4.22713	4.41256	4.52377	4.56158	4.52277	4.41832	4.22877	3.91982	3.56937	2.95822	2.39980	1.92988	0	0	0
1.4	0	8.37940e-1	1.80151	2.57021	3.17670	3.64738	4.00442	4.26713	4.44801	4.55397	4.58695	4.54683	4.42963	4.23399	3.95600	3.56058	3.09193	2.55554	1.95739	1.32160	0	0
1.5	0	8.41745e-1	1.82413	2.60353	3.21223	3.67876	4.02778	4.28357	4.45709	4.55692	4.58266	4.53241	4.40446	4.19853	3.91479	3.55471	3.08474	2.54990	1.95911	1.33292	0	0
1.6	0	8.40551e-1	1.83745	2.62399	3.23232	3.69181	4.03139	4.27591	4.43921	4.52833	4.54103	4.47786	4.33636	4.11957	3.83000	3.47139	3.04493	2.52041	1.94095	1.33124	0	0
1.7	0	8.35048e-1	1.83169	2.63233	3.22754	3.68907	4.01513	4.24414	4.39039	4.46039	4.45508	4.37439	4.21894	3.99345	3.70157	3.34767	2.93465	2.46427	1.90540	1.31938	0	0
1.8	0	8.25743e-1	1.81399	2.62922	3.23020	3.67028	3.97895	4.18902	4.30382	4.34745	4.31674	4.21625	4.04856	3.81879	3.53002	3.18784	2.79524	2.34755	1.85174	1.29508	0	0
1.9	0	8.13494e-1	1.82642	2.61644	3.20962	3.63453	3.91897	4.09186	4.17479	4.18243	4.12215	4.00205	3.82503	3.59603	3.31910	2.99579	2.62506	2.20901	1.74777	1.26043	0	0
2.0	0	7.98286e-1	1.80879	2.59340	3.17441	3.57728	3.82785	3.95981	3.99646	3.96256	3.87127	3.73229	3.54966	3.32988	3.07128	2.77295	2.43451	2.05461	1.63177	1.18789	0	0
2.1	0	7.81507e-1	1.78453	2.55849	3.12025	3.49173	3.70697	3.78261	3.76912	3.69203	3.56932	3.41429	3.23344	3.02694	2.79083	2.52505	2.22318	1.88184	1.50572	1.10962	0	0
2.2	0	7.62684e-1	1.75206	2.50597	3.04125	3.37400	3.53403	3.56306	3.49953	3.38033	3.22971	3.06593	2.89947	2.69950	2.49210	2.25940	1.99335	1.69583	1.36518	1.01835	0	0
2.3	0	7.39300e-1	1.70687	2.43562	2.92324	3.21933	3.32859	3.30656	3.19647	3.04116	2.88701	2.70058	2.53159	2.36318	2.18243	1.98500	1.75458	1.49945	1.21151	0.91680e-1	0	0
2.4	0	7.07992e-1	1.64331	2.33687	2.79073	3.02990	3.09020	3.02226	2.87379	2.69273	2.50659	2.33362	2.17627	2.02257	1.86815	1.70027	1.50967	1.29996	1.05170	807496e-1	0	0
2.5	0	6.69843e-1	1.55625	2.20734	2.61685	2.81032	2.82756	2.72300	2.54005	2.34794	2.15109	1.98964	1.83037	1.69338	1.56125	1.40201	1.25877	1.08242	886206e-1	6.81048e-1	0	0
2.6	0	6.12844e-1	1.44198	2.04857	2.41490	2.56895	2.55316	2.42437	2.23154	2.02066	1.82118	1.64809	1.50109	1.37870	1.26324	1.14295	1.01608	878395e-1	7.10920e-1	5.54719e-1	0	0
2.7	0	5.49096e-1	1.30376	1.86230	2.19125	2.31599	2.27971	2.13691	1.93631	1.72215	1.51842	1.34202	1.19882	1.08188	977200e-1	8.82302e-1	7.80604e-1	6.69394e-1	5.42954e-1	4.24530e-1	0	0
2.8	0	4.77138e-1	1.14664	1.65373	1.95377	2.06087	2.01518	1.87023	1.67094	1.45605	1.24949	1.07194	924820e-1	8.07644e-1	7.16729e-1	6.50790e-1	5.52708e-1	4.70655e-1	3.80188e-1	2.80370e-1	0	0
2.9	0	4.00694e-1	9.78832e-1	1.43102	1.70828	1.87069	1.76468	1.62715	1.43489	1.22439	1.02034	838496e-1	6.85307e-1	5.70059e-1	4.81312e-1	4.08014e-1	3.48399e-1	2.88100e-1	2.15489e-1	1.55046e-1	0	0
3.0	0	3.23673e-1	8.08876e-1	1.20356	1.45816	1.55960	1.52680	1.40294	1.22465	1.02642	827484e-1	6.45816e-1	4.93412e-1	3.72970e-1	2.79162e-1	2.15484e-1	1.63464e-1	1.69500e-1	1.29003e-1	0	0	0
3.1	0	2.50149e-1	6.44952e-1	9.79988e-1	1.20988	1.31451	1.29586	1.19079	1.03235	850706e-1	6.65594e-1	4.96200e-1	3.47164e-1	2.23788e-1	1.32192e-1	6.35960e-1	4.1065e-1	3.58305e-1	2.70971e-1	1.13395e-1	0	0
3.2	0	1.83480e-1	4.93078e-1	7.68190e-1	9.66249e-1	1.07174	1.06918	9.8378e-1	8.64182e-1	6.87405e-1	5.06270e-1	3.76152e-1	2.41210e-1	1.32154e-1	4.91500e-1	2.35435e-1	9.93760e-1	1.45020e-1	2.00789e-1	2.29278e-1	0	0
3.3	0	1.24830e-1	3.59553e-1	5.75428e-1	7.40515e-1	8.36444e-1	8.45805e-1	7.77758e-1	6.62108e-1	5.27976e-1	3.92806e-1	2.69928e-1	1.65944e-1	7.87065e-1	8.625e-1	6.09375e-1	1.22864e-1	1.95356e-1	2.63149e-1	1.386365e-1	0	0
3.4	0	7.64615e-1	2.45423e-1	4.06649e-1	5.35408e-1	6.15910e-1	6.29908e-1	5.79570e-1	4.82019e-1	3.68425e-1	2.58590e-1	1.67774e-1	9.56190e-1	4.04470e-1	1.4645e-1	3.35165e-1	2.88330e-1	2.14970e-1	1.63177e-1	1.37157e-1	0	0
3.5	0	3.77282e-1	1.52004e-1	2.66596e-1	3.59034e-1	4.19244e-1	4.34988e-1	3.97318e-1	3.14993e-1	2.19157e-1	1.23698e-1	6.15070e-1	1.81490e-1	3.7828e-1	4.7420e-1	4.9790e-1	6.100e-1	3.53100e-1	2.11725e-1	1.27355e-1	0	0
3.6	0	8.1785e-1	7.97845e-1	1.55624e-1	2.15085e-1	2.28088e-1	2.09914e-1	2.42360e-1	1.78745e-1	9.7149e-1	1.9586e-1	3.3506e-1	5.52310e-1	2.446030e-1	1.29125e-1	3.9925e-1	8.23765e-1	8.83858e-1	4.13858e-1	7.94772e-1	0	0
3.7	0	-1.14722e-2	2.80675e-2	2.72385e-2	2.10981e-1	1.34112e-1	1.40954e-1	1.27596e-1	8.35650e-2	1.7873e-2	-4.5318e-2	-8.9883e-2	-1.06222e-1	-8.93605e-1	-3.76800e-1	-3.57690e-1	-1.04054e-1	-1.64138e-1	-1.76556e-1	-1.976795e-1	0	0
3.8	0	-2.11020e-2	-5.82900e-2	1.90345e-2	3.65240e-2	4.78445e-2	5.56615e-2	5.26185e-2	3.22590e-2	-2.7450e-2	-4.82600e-2	-8.5282e-2	-1.01833e-1	-8.9913e-1	-2.54000e-1	-2.2035e-1	-7.45510e-1	-1.70884e-1	-1.78492e-1	-1.78492e-1	0	0
3.9	0	-8.9810e-3	-5.8225e-3	3.7530e-3	7.9030e-3	1.37890e-2	2.17960e-2	3.10992e-2	4.4445e-2	-4.62205e-2	-3.99135e-2	-1.31730e-1	3.00e-1	-7.620e-1	-9.844e-1	-1.4210e-1	8.5200e-1	3.7905e-1	1.3765e-1	2.38749e-1	0	0
4.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 7.20: Membrana - Tabela Numérica, extremo superior.  
Fonte: Autoria Própria

- Animar Gráfico: Para a visualização dos resultados gráficos dispostos em uma sequência animada. O total de gráficos disponíveis para a visualização depende dos valores de  $k$  e  $p$ , definidos pelo usuário, neste exemplo, o *software* armazenou  $55/1 = 55$  gráficos, além do gráfico das condições iniciais, resultando em 56 gráficos. Observando a Figura 7.21, que reúne doze dos gráficos obtidos para a velocidade  $U$ , percebe-se o comportamento da membrana, na fase de descida, torção e subida.



**Figura 7.21: Frames da animação Membrana baseado no MC**  
**Fonte: Autoria Própria**

## 8 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS AS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT

Neste capítulo obtém-se a solução numérica das ESV Unidimensionais e Bidimensionais implementando o MC, consagrado por transformar um sistema de EDPs em um sistema de EDOs.

De forma análoga a equação da onda em uma e duas dimensões, os métodos foram implementados por meio do *software Maple*, onde foi programado uma *Maplet*.

### 8.1 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT UNIDIMENSIONAIS

Ao aplicar o MC nas ESV-1D, é de praxe utilizar a interpolação linear para encontrar a velocidade e a profundidade da onda em pontos não conhecidos da malha construída para obter a solução numérica. A interpolação linear consiste em unir um conjunto de pontos com uma série de linhas retas. Uma desvantagem desta aproximação é que não há diferenciação nos extremos de cada intervalo (PRESS; AL, 2007). Para sanar esta dificuldade utilizou-se a interpolação com Spline Cúbico Natural.

A estrutura desta seção está disposta nas seguintes subseções:

1. Dedução do MC Para as ESV-1D Utilizando o Spline Cúbico: Nesta subseção descreve-se as Equações de Saint Venant e as Equações Características, deduzem-se as fórmulas básicas para obter a celeridade e a velocidade Média da onda, a partir dessas equações e explica-se o porque da utilização do Spline Cúbico Natural.
2. Problema do Canal Retangular: Apresenta-se o exemplo que será resolvido via *Maplet*.
3. Aplicação do MC ao Problema do Canal Retangular: Nesta subseção, descreve-se as etapas necessárias para calcular a velocidade e a profundidade em cada instante de tempo.
4. Solução do Problema do Canal Retangular via *Maplet*: Apresenta-se o funcionamento da *Maplet* implementada.

### 8.1.1 Dedução do MC Para as ESV-1D Utilizando o Spline Cúbico

No Capítulo 6, seções 6.1.1 e utilizou-se do método das características para transformar o sistema de EDPs de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

$$(8.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_{0_x} - S_{f_x}), \quad (8.3)$$

em um sistema de EDOs, dado por

$$\frac{dx}{dt} = U + c \quad (8.4)$$

$$\frac{d}{dt}(U + 2c) = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \quad (8.5)$$

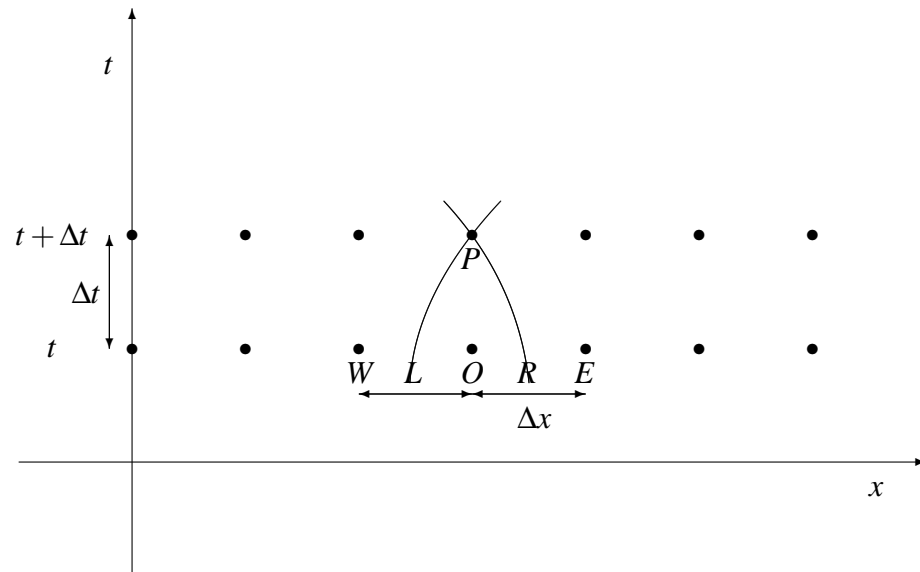
$$\frac{dx}{dt} = U - c \quad (8.6)$$

$$\frac{d}{dt}(U - 2c) = g(S_{0_x} - S_{f_x}). \quad (8.7)$$

As direções em (8.4) e (8.6) são chamadas direções características ( $C^+$  e  $C^-$ , respectivamente). As quantidades conservadas (8.5) e (8.7) ao longo das curvas características são as invariantes de Riemann ( $J^+$  e  $J^-$ , respectivamente).

### O Método das Características em Uma Grade Retangular

Para este método constrói-se uma grade regularmente espaçada como mostra a Figura 8.1. O ponto  $L$  representa a posição da seção a esquerda, da qual se originará uma onda infinitesimal, que chegará na seção  $P$  depois de um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Similarmente, o ponto  $R$  representa a posição da seção a direita da onda infinitesimal, que chegará na seção  $P$  depois do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

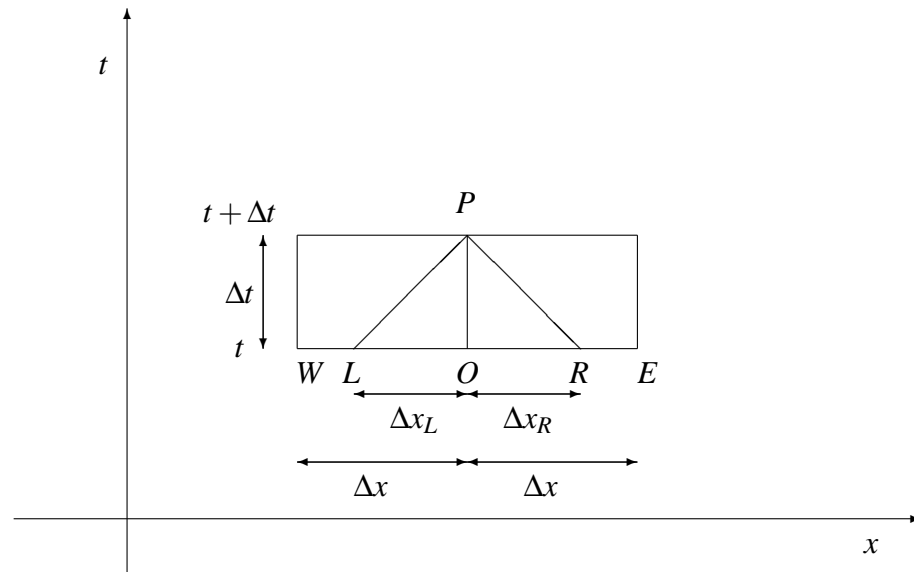


**Figura 8.1: Curvas Características**

**Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)**

A Figura 8.1 mostra o ponto  $P$  como solução num tempo posterior com as características positiva e negativa passando por ele. Estas interceptam a linha de tempo anterior  $t$  nos pontos  $L$  e  $R$ , respectivamente. Primeiro pode-se simplificar a situação em assumir que as características são linhas retas, mas isto é verdade, só se nada estiver mudando (fluxo uniforme fixo), situação esta que não interessa. Porém, se o passo de tempo é pequeno  $\Delta t$ , essa suposição normalmente dá soluções muito boas (CHUN; MERKLEY, 2008b). A Figura 8.2 mostra em detalhes as características associadas ao ponto  $P$ . Sabe-se a inclinação quando a característica adiantada cruzar a linha de tempo  $t$  no ponto  $L$ , que é dado por  $dx/dt = U_L + c_L$  e a inclinação quando passar por  $P$ , que é  $dx/dt = U_P + c_P$ . O problema é que não se sabe os valores em  $L$  e  $P$ , ou seja, desconhece  $x_P$ ,  $x_L$ ,  $U_P$ ,  $c_P$ ,  $U_L$  e  $c_L$ . Faz-se a aproximação usando o interpolador spline cúbico e não a interpolação linear, como é de praxe. De forma análoga, estende-se essa ideia para as características negativas, que passa por  $P$  e  $R$  (CHUN; MERKLEY, 2008b).

A aproximação usual para determinar a inclinação das características é usar o ponto que possui a mesma abscissa que o ponto  $P$ , mas no nível de tempo conhecido, isto é, os valores no ponto  $O$ . Ao construir a malha identifica-se no primeiro intervalo de tempo os pontos  $x_O$ ,  $x_R$  e  $x_W$  e as condições iniciais  $U_O$ ,  $U_R$ ,  $U_W$ ,  $c_O$ ,  $c_R$  e  $c_W$ . Objetiva-se encontrar  $U_P$  e  $c_P$  em um intervalo de tempo posterior  $t + \Delta t$ .



**Figura 8.2: Retas Características**

Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)

Para um incremento finito de tempo  $\Delta t$ , o ponto  $P$  representa a posição da seção do canal no tempo  $t + \Delta t$ , e os pontos  $L$  e  $R$  representam, respectivamente, as posições de certas seções a esquerda e a direita no tempo  $t$ .

A velocidade da onda de propagação pode ser representada pela declividade das linhas construídas no plano  $xt$ . Quando o escoamento é subcrítico, como na maioria dos rios, isto é, quando  $U < c$ , a declividade da linha  $LP$ , torna-se positiva, ou seja,  $\frac{dx}{dt} = U + c > 0$ . Já a declividade da linha  $RP$ , torna-se negativa, isto é,  $\frac{dx}{dt} = U - c < 0$ .

Ao observar a linha  $LP$ , característica positiva, da Figura 8.3, tem-se  $\tan \theta = \Delta t / \Delta x_L$ , ou seja,  $\theta = \tan^{-1}(\Delta t / \Delta x_L)$ . A equação (8.4) mostra que  $dt/dx = 1/U_L + c_L$ . Considerando  $\Delta t / \Delta x_L \approx dt/dx$ , tem-se  $\Delta t / \Delta x_L \approx 1/U_L + c_L$ , ou ainda,

$$\frac{\Delta x_L}{\Delta t} \approx U_L + c_L, \quad (8.8)$$

onde

$$\Delta x_L = x_O - x_L. \quad (8.9)$$

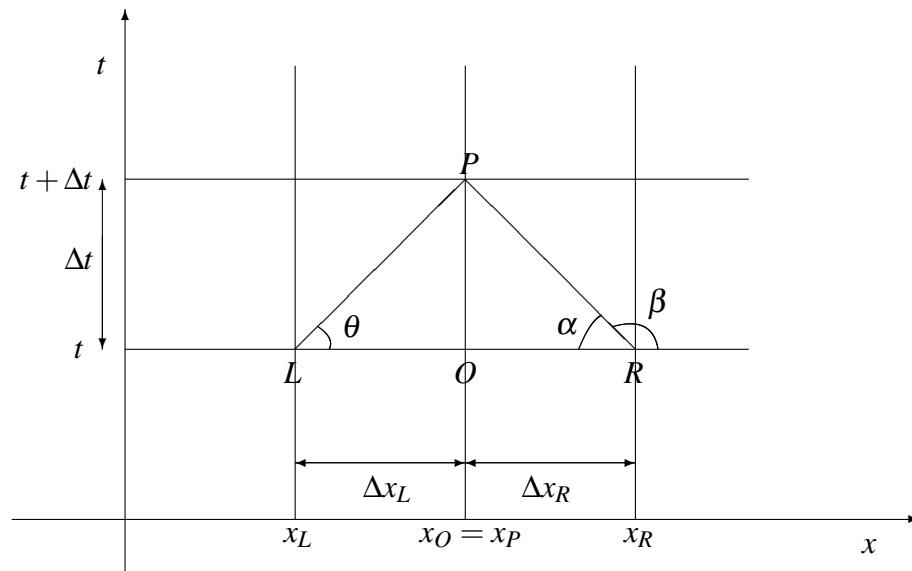
Substituindo a equação (8.9) na equação (8.8), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{x_O - x_L}{\Delta t} &\approx U_L + c_L \\ \Rightarrow x_O - x_L &\approx (U_L + c_L) \Delta t \quad , \\ \Rightarrow -x_L &\approx -x_O + (U_L + c_L) \Delta t \end{aligned} \quad (8.10)$$

ou ainda,

$$x_L \approx x_O - (U_L + c_L) \Delta t \quad , \quad (8.11)$$

que representa a abscissa de  $L$ .



**Figura 8.3: Inclinação das Características**

**Fonte: (CHUN; MERKLEY, 2008b)**

De forma análoga, ao observar a linha  $RP$ , característica negativa, tem-se  $\tan \alpha = \Delta t / \Delta x_R$ , onde  $\alpha = 180 - \beta$ . Como  $\tan \alpha = -\tan \beta$ , segue que  $\tan \beta = \Delta t / -\Delta x_R$ . Viu-se na equação (8.6) que  $dt/dx = 1/U_R - c_R$  e considerando  $\Delta t / -\Delta x_R \approx dt/dx$ , têm-se  $\Delta t / -\Delta x_R \approx 1/U_R - c_R$ , ou ainda,

$$\frac{-\Delta x_R}{\Delta t} \approx U_R - c_R \quad , \quad (8.12)$$



onde

$$-\Delta x_R = x_O - x_R . \quad (8.13)$$

Substituindo a equação (8.13) na equação (8.12), têm-se

$$\begin{aligned} \frac{x_O - x_R}{\Delta t} &\approx U_R - c_R \\ \Rightarrow x_O - x_R &\approx (U_R - c_R) \Delta t \quad , \\ \Rightarrow -x_R &\approx -x_O + (U_R - c_R) \Delta t \end{aligned} \quad (8.14)$$

que pode ser escrito na forma

$$x_R \approx x_O - (U_R - c_R) \Delta t , \quad (8.15)$$

que representa a abscissa de  $R$ .

O processo repete-se para as Invariantes de Riemann, ou seja, observando a linha  $LP$  da Figura 8.3, característica positiva, e tendo conhecimento  $\Delta(U + 2c)/\Delta t \approx d(U + 2c)/dt$  têm-se da equação (8.5), que

$$\frac{\Delta(U + 2c)}{\Delta t} \approx g(S_0 - S_f)_L , \quad (8.16)$$

onde

$$\Delta(U + 2c) = (U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L) . \quad (8.17)$$

Substituindo a equação (8.17) na equação (8.16), obtém-se

$$(U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L) \approx g(S_0 - S_f)_L \Delta t . \quad (8.18)$$

Observando a linha  $RP$ , característica negativa, da Figura 8.3 e sabendo que  $\Delta(U - 2c)/\Delta t \approx d(U - 2c)/dt$ , têm-se da equação (8.7), que

$$\frac{\Delta(U - 2c)}{\Delta t} \approx g(S_{0_x} - S_{f_x})_R , \quad (8.19)$$

onde

$$\Delta(U - 2c) = (U_P - 2c_P) - (U_R - 2c_R) . \quad (8.20)$$

Substituindo a equação (8.20) na equação (8.19), obtém-se

$$(U_P - 2c_P) - (U_R - 2c_R) \approx g(S_{0_x} - S_{f_x})_R \Delta t . \quad (8.21)$$

Para obter a velocidade ( $U_P$ ) e a celeridade ( $c_P$ ) no ponto  $P$ , basta adicionar e subtrair as equações (8.18) e (8.21), obtendo-se

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + (c_L - c_R) + \frac{g\Delta t}{2} [(S_{0_x} - S_{f_x})_L + (S_{0_x} - S_{f_x})_R], \quad (8.22)$$

e

$$c_P \approx \frac{(U_L - U_R)}{4} + \frac{(c_L + c_R)}{2} + \frac{g\Delta t}{4} [(S_{0_x} - S_{f_x})_L - (S_{0_x} - S_{f_x})_R]. \quad (8.23)$$

### O Spline Cúbico Natural

A natureza oscilatória dos polinômios de ordem elevada e a propriedade de que uma flutuação em uma pequena parte do intervalo pode induzir a grandes flutuações por toda a amplitude do intervalo restringem sua utilização. Um enfoque alternativo é dividir o intervalo em uma série de subintervalos e construir polinômios de aproximação (geralmente) diferentes para cada subintervalo. A aproximação por funções desse tipo é chamada de aproximações por polinômios seccionados.

A aproximação mais simples desse tipo é a aproximação Linear, que consiste em juntar um conjunto de pontos  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$  com uma série de linhas retas. Uma desvantagem da aproximação com funções lineares é que não há diferenciação nos extremos dos subintervalos, o que, em um contexto geométrico, significa que a função interpoladora não é “suave”. Frequentemente, torna-se claro, em função das condições físicas, que essa suavidade é necessária, de modo que a função aproximadora seja continuamente diferenciável (BURDEN; FAIRES, 2003).

Um procedimento alternativo é utilizar um polinômio de partes criteriosas do tipo Hermite, no entanto, para se utilizar os polinômios de Hermite para interpolações genéricas, torna-se necessário conhecer a derivada da função que está sendo aproximada, o que frequentemente não é possível. A ideia é fazer aproximações utilizando polinômios de partes criteriosas que não requerem informações sobre derivadas, exceto talvez nos pontos extremos do intervalo em que a função está sendo aproximada.

O tipo mais simples de polinômios de partes criteriosas deriváveis em um intervalo total  $[x_0, x_n]$  é a função que é obtida ajustando-se um polinômio quadrático entre cada par de nós sucessivos. Isso é feito construindo-se um polinômio quadrático em  $[x_0, x_1]$  que concorde com a função original em  $x_0$  e  $x_1$ , outro polinômio quadrático em  $[x_1, x_2]$ , que concorde com a função original em  $x_1$  e  $x_2$ , e assim por diante. Como um polinômio quadrático tem três constantes arbitrárias, o termo constante, o coeficiente de  $x$  e o coeficiente de  $x^2$  e apenas duas condições

são necessárias para ajustar os dados nos extremos de cada subintervalo, tem-se uma flexibilidade que permite escolher o polinômio quadrático de tal maneira que o interpolador tenha uma derivada contínua em  $[x_0, x_n]$ . A dificuldade surge quando existe a necessidade de se especificar condições sobre a derivada do polinômio interpolador nos pontos extremos  $x_0$  e  $x_n$ . Não há um número suficiente de constantes que assegurem que as condições desejadas sejam satisfeitas.

A aproximação mais comum utilizando polinômios de partes criteriosas faz uso de polinômios cúbicos entre cada par sucessivo de nós e é chamado de Interpolador com Spline Cúbico.

Um polinômio cúbico genérico tem quatro constantes, de modo que o procedimento com splines cúbicos tem flexibilidade suficiente para assegurar que o interpolador não só seja continuamente derivável no intervalo, mas também que ele tem uma derivada de segunda ordem contínua. A construção do spline cúbico não garante, entretanto, que as derivadas do interpolador concordem com as da função que está sendo aproximada, mesmo em seus nós.

**Definição 8.1** *Dada uma função  $f$  definida em  $[a, b]$  e um conjunto de nós  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , um spline cúbico interpolador  $S$  para  $f$  é uma função que satisfaz as seguintes condições (BURDEN; FAIRES, 2003):*

1.  $S(x)$  é um polinômio cúbico, indicado por  $S_j(x)$ , no intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;
2.  $S(x_j) = f(x_j)$  para cada  $j = 0, \dots, n$ ;
3.  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, \dots, n-2$ ;
4.  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, \dots, n-2$ ;
5.  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, \dots, n-2$ ;
6. Um dos seguintes conjuntos de condições de contorno é satisfeito:
  - (a)  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  (contorno livre natural);
  - (b)  $S'(x_0) = f'(x_0)$  e  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (contorno restrito);

Ainda que os splines cúbicos sejam definidos com outras condições de contorno, as condições dadas em (6.) são suficientes para nossos propósitos. Quando as condições de contorno livre ocorrem, o spline é chamado de spline natural, e seu gráfico se aproxima da forma que uma

longa haste flexível assumirá se fosse forçada a passar pelos pontos  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ .

Em geral, as condições de contorno restrito levam a aproximações mais precisas, na medida em que elas incluem mais informações sobre a função. Entretanto, para a utilização desse tipo de condição de contorno, é necessário se obter os valores das derivadas nos pontos extremos, ou uma aproximação acurada desses valores.

Para garantir a unicidade do Spline Cúbico Natural existe o seguinte Teorema (PRESS; AL, 2007).

**Teorema 8.1** *Se  $f$  é definida em  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , então  $f$  tem um único spline interpolador natural  $S$  nos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; isto é, um spline interpolador que satisfaz as condições de contorno  $S''(a) = 0$  e  $S''(b) = 0$ .*

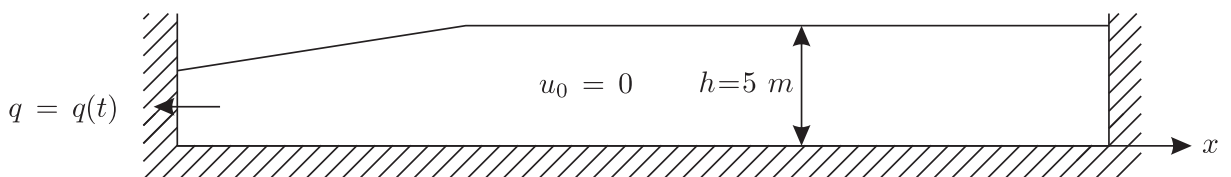
### 8.1.2 Problema do Canal Retangular

Considere um canal retangular de  $400\text{m}$  de comprimento,  $5\text{m}$  de altura,  $1\text{m}$  de largura, declividade  $S_{0x} = -0.0016$  e  $(S_{0x} - S_{fx})_{LP} = S_{0x} - 0.5 (U_L|U_L|/C^2h_L + U_P|U_P|/C^2h_P)$ , onde  $C = 100\text{m}^{(1/2)}/\text{s}$  é constante de Chézy. Inicialmente o canal está cheio de água e a mesma encontra-se parada, ou seja, a velocidade inicial é zero. A celeridade  $c$  é dada por  $c_P = \sqrt{gh_P}$ , onde  $g$  é a constante gravitacional e  $h_P$  é a altura. Considere a descarga a esquerda, Figura 8.4, dada pela função vazão  $Q_P$ , definida por

$$Q_P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto Q_P(t) = \begin{cases} -0.1t & \text{se } t \geq 0 \text{ e } t < 60 \\ -6 + 0.1(t - 60) & \text{se } t \geq 60 \text{ e } t < 80 \\ -4 & \text{se } t \geq 80 \end{cases} \quad (8.24)$$

Calcule a propagação da onda pelo método das características.



**Figura 8.4: Canal com descarga a esquerda**

**Fonte: (HERVOUET, 2007), (GUILLOU, 2010), (TOSSOU, 2009)**

Deseja-se encontrar a velocidade média e a altura em qualquer ponto do canal.

### 8.1.3 Aplicação do MC ao Problema do Canal Retangular

O cálculo da propagação da onda pelo método das características, se dá em uma rotina de cálculos de três etapas para cada instante de tempo. Inicia-se com o tempo ( $t$ ) igual a 1 (um intervalo de tempo) e depois de completadas as três etapas passa-se para o tempo ( $t$ ) igual a 2 (dois intervalos de tempo) e assim sucessivamente.

**Seção a Esquerda:** Para o cálculo na seção de controle, no instante de tempo  $t + 1$ , utiliza-se somente a característica negativa, para isso, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Inicialmente, colete os dados iniciais:

$$x_E, U_E, c_E, x_O, U_O \text{ e } c_O . \quad (8.25)$$

2. Determine  $x_R$ ;

Com base na equação (8.15), tem-se

$$x_R \approx x_O - (U_O - c_O) \Delta t . \quad (8.26)$$

3. Com base na interpolação cúbica, ou ainda, na spline, determine  $U_R$  e  $c_R$ .
4. Para calcular  $U_P$  e  $c_P$  é necessário verificar a existência da descarga a esquerda do canal. Neste caso a descarga  $Q_P$  é dada, mas isto deve ser convertido em um valor em termos de  $U_P$  ou  $c_P$ , então a forma da seção do canal deve ser conhecida permitindo o cálculo da área de fluxo para ser calculada a profundidade. Como o canal é retangular e de grande largura, tem-se que a área da secção transversal,  $A$ , é dada por  $A = bh$ , onde  $b = 1$ , e  $h_P$  é a altura do ponto P, daí

$$\begin{aligned} Q_P &= AU_P \\ \Rightarrow Q_P &= bh_P U_P . \\ \Rightarrow Q_P &= 1 \frac{c_P^2}{g} U_P \end{aligned} \quad (8.27)$$

o que implica

$$U_P = \frac{Q_P g}{c_P^2} . \quad (8.28)$$

Analogamente, da relação

$$\begin{aligned}
 Q_P &= AU_P \\
 \Rightarrow Q_P &= bh_P U_P \cdot \\
 \Rightarrow Q_P &= 1h_P U_P
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

obtem-se

$$h_P = \frac{Q_P}{U_P} . \tag{8.30}$$

Substituindo a equação (8.28) na característica negativa (8.21), tem-se

$$\begin{aligned}
 (U_P - 2c_P) - (U_R - 2c_R) &= g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t \\
 \Rightarrow \left( \frac{Q_P g}{c_P^2} - 2c_P \right) - (U_R - 2c_R) &= g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t \\
 \Rightarrow +2c_P + U_R - 2c_R + g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t &= \frac{Q_P g}{c_P^2} \\
 \Rightarrow +2c_P^3 + [U_R - 2c_R + g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t] c_P^2 &= Q_P g \\
 \Rightarrow +2c_P^3 + [U_R - 2c_R + g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t] c_P^2 &= Q_P g \\
 \Rightarrow +2c_P^3 + [U_R - 2c_R + g(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \Delta t] c_P^2 - Q_P g &= 0
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

ou ainda,

$$c_P^3 + \left[ \frac{U_R}{2} - c_R + \frac{g \Delta t}{2} (S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \right] c_P^2 - \frac{Q_P g}{2} = 0 , \tag{8.32}$$

onde

$$\begin{aligned}
 (S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} &= S_{0_x} - 0.5(S_{f_P} + S_{f_R}) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_P |U_P|}{C^2 h_P} + \frac{U_R |U_R|}{C^2 h_R} \right) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_P^2}{C^2 \frac{Q_P}{U_P}} + \frac{U_R |U_R|}{C^2 \frac{g}{c_R^2}} \right) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_P^3}{C^2 Q_P} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) , \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{\left( \frac{Q_P g}{c_P^2} \right)^3}{C^2 Q_P} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right)
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

Substituindo a equação (8.33) na equação (8.32), obtém-se

$$\begin{aligned}
c_P^3 + \left[ \frac{U_R}{2} - c_R + \frac{g\Delta t}{2} (S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} \right] c_P^2 - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^3 + \left\{ \frac{U_R}{2} - c_R + \frac{g\Delta t}{2} \left[ S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] \right\} c_P^2 - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^3 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R \right) c_P^2 + \frac{g\Delta t}{2} \left[ S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] c_P^2 - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^3 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R \right) c_P^2 + c_P^2 S_{0_x} \frac{g\Delta t}{2} - \frac{g\Delta t}{2} \left[ 0.5 \left( \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] c_P^2 - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^3 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R \right) c_P^2 + 0.5 c_P^2 S_{0_x} g\Delta t - 0.25 g\Delta t c_P^2 \left( \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^3 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R \right) c_P^2 + 0.5 c_P^2 S_{0_x} g\Delta t - 0.25 g\Delta t c_P^2 \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^6} - 0.25 g\Delta t c_P^2 \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} - \frac{Q_P g}{2} &= 0, \\
c_P^3 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R + g\Delta t \left( 0.5 S_{0_x} - 0.25 \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right) c_P^2 - 0.25 g\Delta t \frac{Q_P^2 g^3}{C^2 c_P^4} - \frac{Q_P g}{2} &= 0 \\
c_P^7 + \left( \frac{U_R}{2} - c_R + g\Delta t \left( 0.5 S_{0_x} - 0.25 \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right) c_P^6 - 0.25 g\Delta t \frac{Q_P^2 g^3}{C^2} - \frac{Q_P g c_P^4}{2} &= 0 \\
c_P^7 + \left[ \frac{U_R}{2} - c_R + g\Delta t \left( 0.5 S_{0_x} - 0.25 \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] c_P^6 - \left( \frac{Q_P g}{2} \right) c_P^4 - 0.25 g\Delta t \frac{Q_P^2 g^3}{C^2} &= 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_P^7 + \left[ \frac{U_R}{2} - c_R + g\Delta t \left( 0.5 S_{0_x} - 0.25 \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] c_P^6 - \left( \frac{Q_P g}{2} \right) c_P^4 - \frac{1}{4} g\Delta t \frac{Q_P^2 g^3}{C^2} = 0 \quad (8.34)$$

Para encontrar o valor  $c_P$  basta resolver a equação (8.34) usando alguma técnica de iteração, como por exemplo, o método de Newton Raphson. A procura é por algum valor de  $c_P$  real e positivo que será substituído na equação (8.28) para encontrar  $U_P$ . Caso encontre  $c_P$  negativo, termina o processo.

5. Tendo  $U_P$  e  $c_P$  que serão denotados por  $U_{P,1}$  e  $c_{P,1}$ , calcula-se novamente  $x_R$ , conforme mostra a equação

$$x_R = x_O - \Delta t \left( \frac{U_P - c_P}{2} + \frac{U_R - c_R}{2} \right). \quad (8.35)$$

Após encontrar  $x_R$  retorne ao terceiro e quarto passo onde encontrará novos  $U_P$  e  $c_P$ , que serão denotados por  $U_{P,2}$  e  $c_{P,2}$ .

6. Erro

Repete-se esse processo até encontrar  $c_{P,i}$  e  $c_{P,i+1}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , que satisfaça o erro desejado, ou seja,

$$|c_{P,i} - c_{P,i+1}| \leq \text{Erro} \quad (8.36)$$

Após ter encontrado  $c_{P,i+1}$  calcule  $U_{P,i+1}$  que serão indicados por  $U_P$  e  $c_P$ , respectivamente. Substitua  $U_P$  por  $U_O$  e  $c_P$  por  $c_O$  e prossegue para a segunda etapa que corresponde a seção intermediária.

**Seção Intermediária:** Para o cálculo da velocidade e da celeridade para o meio do canal utiliza-se tanto a característica negativa como a característica positiva, conforme mostra a Figura 8.3.

Para calcular a velocidade e celeridade no ponto  $P$ , escolhe-se o ponto  $O$ , visto que ele possui a mesma abscissa  $x$  que o ponto  $P$ , e depois calcule a velocidade e a celeridade nos pontos  $L$  e  $R$ . Para isso, descobre-se as abscissas  $x_L$  e  $x_R$  e interpola entre os valores conhecidos  $U_W$ ,  $U_E$  e  $U_O$  usando a spline para conseguir  $U_L$  e  $U_R$ . Analogamente, interpola entre  $c_W$ ,  $c_E$ ,  $c_O$  para descobrir  $c_L$  e  $c_R$ . Após encontrar a velocidade e celeridade nos pontos  $L$  e  $R$  substitua esses valores no sistema formado pelas equações (8.18) e (8.21) para obter  $U_P$  e  $c_P$ . Para isso, segue os seguintes passos:

1. Considere os dados iniciais:

$$x_W, U_W, c_W, x_E, U_E, c_E, x_O, U_O, c_O \cdot \quad (8.37)$$

2. Determine  $x_L$  e  $x_R$ ;

Utilizando os dados iniciais e as equações (8.11) e (8.15), determinam-se, respectivamente

$$x_L \approx x_O - (U_O + c_O) \Delta t \quad (8.38)$$

e

$$x_R \approx x_O - (U_O - c_O) \Delta t \cdot \quad (8.39)$$

3. Utilizando o spline determina  $U_L$ ,  $U_R$ ,  $c_L$  e  $c_R$ ;
4. Calcula-se  $U_P$  e  $c_P$ ;

Subtraindo as equações (8.18) e (8.21), obtêm-se:

$$c_P \approx \frac{(U_L - U_R)}{4} + \frac{(c_L + c_R)}{2} + \frac{g\Delta t}{4} [(S_{0x} - S_{fx})_{LP} - (S_{0x} - S_{fx})_{PR}] \cdot \quad (8.40)$$



onde

$$\begin{aligned}
 (S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} &= S_{0_x} - 0.5 (S_{f_L} + S_{f_P}) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_L |U_L|}{C^2 h_L} + \frac{U_P |U_P|}{C^2 h_P} \right) \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_L |U_L|}{C^2 c_L^2} + \frac{U_P |U_P|}{C^2 c_P^2} \right) \cdot \\
 &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{g U_L |U_L|}{C^2 c_L^2} + \frac{g U_P |U_P|}{C^2 c_P^2} \right)
 \end{aligned} \quad (8.41)$$

Analogamente,

$$(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} = S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{g U_P |U_P|}{C^2 c_P^2} + \frac{g U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \cdot \quad (8.42)$$

Daí substituindo as equações (8.41) e (8.42) em (8.40), tem-se

$$c_P \approx \frac{(U_L - U_R)}{4} + \frac{(c_L + c_R)}{2} + \frac{g \Delta t}{8} \left( \frac{U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} - \frac{U_L |U_L|}{C^2 c_L^2} \right) \cdot \quad (8.43)$$

Adicionando as equações (8.18) e (8.21), tem-se

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + (c_L - c_R) + \frac{g \Delta t}{2} [(S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} + (S_{0_x} - S_{f_x})_{PR}] \cdot \quad (8.44)$$

e substituindo as equações (8.41) e (8.42) em (8.44), obtem-se

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + (c_L - c_R) + \frac{g \Delta t}{2} \left[ 2S_{0_x} - 0.5g \left( 2 \frac{U_P |U_P|}{C^2 c_P^2} + \frac{U_L |U_L|}{C^2 c_L^2} + \frac{U_R |U_R|}{C^2 c_R^2} \right) \right] \quad (8.45)$$

Observa-se que, para encontrar o valor  $c_P$  aplica-se direto na equação (8.43). Já, para achar o valor de  $U_P$  precisa-se resolver a equação (8.45) usando alguma técnica de iteração, como por exemplo, o método de Newton Raphson.

## 5. Ponto Médio

Tendo  $U_P$  e  $c_P$  que será indicado por  $U_{P,1}$  e  $c_{P,1}$ , calcula-se novamente  $x_L$  e  $x_R$ , utilizando-se da média entre as inclinações, conforme mostram as equações

$$x_L = x_O - \Delta t \left( \frac{U_P + c_P}{2} + \frac{U_L + c_L}{2} \right) \quad (8.46)$$

e

$$x_R = x_O - \Delta t \left( \frac{U_P - c_P}{2} + \frac{U_R - c_R}{2} \right) \cdot \quad (8.47)$$

Após encontrar  $x_L$  e  $x_R$  retorne ao terceiro e quarto passo onde encontrarão novos  $U_P$  e  $c_P$  que serão indicados por  $U_{P,2}$  e  $c_{P,2}$ .

## 6. Erro

Repete-se esse processo até encontrar  $c_{P,i}$  e  $c_{P,i+1}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , que satisfaçam o erro desejado, ou seja,

$$|U_{P,i} - U_{P,i+1}| \leq \text{Erro} \quad (8.48)$$

e

$$|c_{P,i} - c_{P,i+1}| \leq \text{Erro} \quad (8.49)$$

7. Após ter encontrado  $c_{P,i+1}$  e  $U_{P,i+1}$ , denote  $U_{P,i+1}$  por  $U_O$  e  $c_{P,i+1}$  por  $c_O$ , que serão usados no próximo intervalo de tempo e prossigue para a terceira etapa que corresponde a seção a direita do canal.

**Seção a Direita:** Para o cálculo da velocidade e da celeridade para a seção a direita utiliza-se somente a característica esquerda. Observe a Figura 8.3.

Calcula somente a celeridade no ponto  $P$ , pois a velocidade é zero, para isso escolhe o ponto  $O$  que possui a mesma abscissa que o ponto  $P$ . Obtém também a velocidade e a celeridade no ponto  $L$ , descobrindo primeiro  $x_L$  e interpolando entre os valores conhecidos  $U_W$  e  $U_O$  com o uso da spline para conseguir  $U_L$ . Analogamente, interpola entre  $c_W$  e  $c_O$  para descobrir  $c_L$ . Após encontrar a celeridade no ponto  $L$  substitua esse valores na equação (8.23) para obter  $c_P$ . Para isso, segue os seguintes passos:

1. Inicialmente, colete os dados iniciais:

$$x_W, U_W, c_W, x_O, U_O \text{ e } c_O \quad (8.50)$$

2. Determine a posição de  $x_L$ ;

Com base na equação (8.11), tem-se

$$\begin{aligned} x_L &\approx x_O - (U_O + c_O)\Delta t \\ \Rightarrow x_L &\approx x_O - (0 + c_O)\Delta t \quad . \\ \Rightarrow x_L &\approx x_O - c_O\Delta t \end{aligned} \quad (8.51)$$

3. Determine  $U_L$  e  $c_L$  usando o spline cúbico;

4. Calcula-se  $U_P$  e  $c_P$ ;

Devido ao fato de estar na fronteira direita do canal tem-se  $U_P = 0$ . Substituindo

$U_P = 0$  na equação (8.5), obtém-se o valor de  $c_P$ . De fato,

$$\begin{aligned} (U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L) &= g(S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} \Delta t \\ \Rightarrow (0 + 2c_P) - (U_L + 2c_L) &= g(S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} \Delta t, \quad (8.52) \\ \Rightarrow 2c_P &= U_L + 2c_L + g(S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} \Delta t \end{aligned}$$

ou ainda,

$$c_P = c_L + 0.5U_L + 0.5g\Delta t (S_{0_x} - S_{f_x})_{LP}. \quad (8.53)$$

onde

$$\begin{aligned} (S_{0_x} - S_{f_x})_{LP} &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_L|U_L|}{C^2 h_L} + \frac{U_P|U_P|}{C^2 h_P} \right) \\ &= S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{U_L|U_L|}{C^2 h_L} + \frac{0|0|}{C^2 h_P} \right) \\ &= S_{0_x} - 0.5 \frac{U_L|U_L|}{C^2 h_L} \\ &= S_{0_x} - 0.5 \frac{U_L|U_L|}{C^2 \frac{c_L^2}{g}} \\ &= S_{0_x} - 0.5g \frac{U_L|U_L|}{C^2 c_L^2} \end{aligned} \quad (8.54)$$

Substituindo a equação (8.54) em (8.53), tem-se

$$c_P = c_L + 0.5U_L + 0.5g\Delta t \left( S_{0_x} - 0.5g \frac{U_L|U_L|}{C^2 c_L^2} \right). \quad (8.55)$$

## 5. Ponto Médio

Tendo  $U_P$  e  $c_P$  que será denotado por  $U_{P,1}$  e  $c_{P,1}$ , calcula-se novamente  $x_L$ , conforme mostra a equação

$$\begin{aligned} x_L &= x_O - \Delta t \left( \frac{U_P + c_P}{2} + \frac{U_L + c_L}{2} \right) \\ \Rightarrow x_L &= x_O - \Delta t \left( \frac{0 + c_P}{2} + \frac{U_L + c_L}{2} \right). \quad (8.56) \\ \Rightarrow x_L &= x_O - 0.5 \cdot \Delta t \cdot (c_P + U_L + c_L) \end{aligned}$$

Após encontrar  $x_L$  retorne ao terceiro e quarto passo onde encontrará novos  $U_P$  e  $c_P$ , que serão denotados por  $U_{P,2}$  e  $c_{P,2}$ .

## 6. Erro

Repete-se esse processo até encontrar  $c_{P,i}$  e  $c_{P,i+1}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , que satisfaça o erro

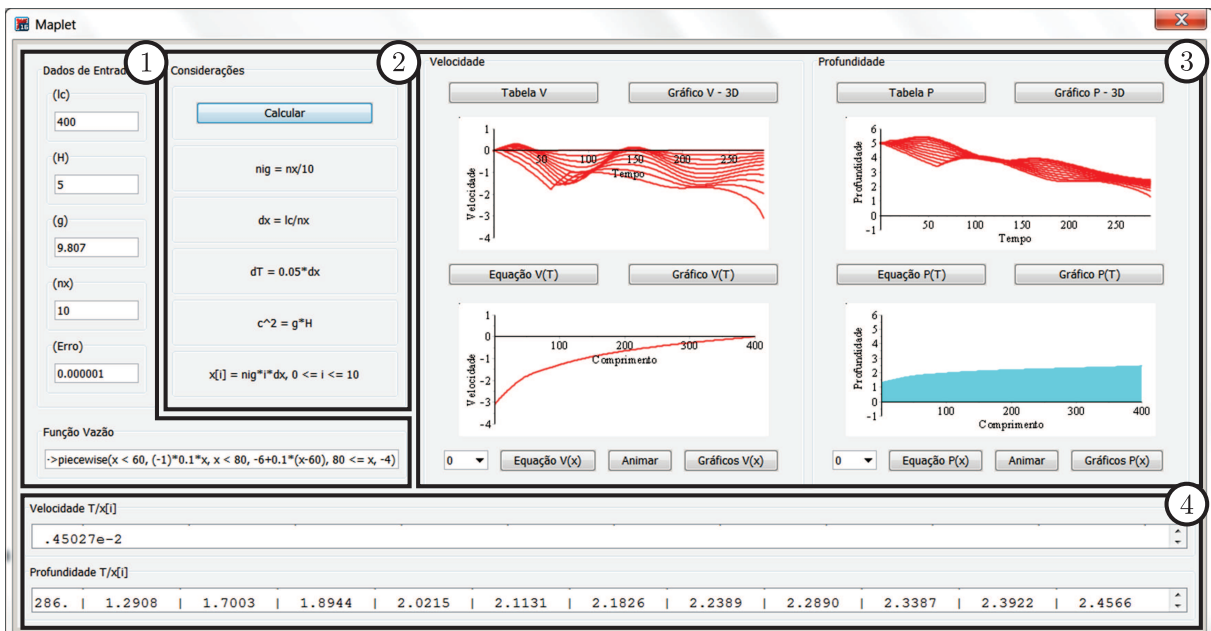
desejado, ou seja,

$$|c_{P,i} - c_{P,i+1}| \leq \text{Erro} .$$

Após ter encontrado  $c_{P,i+1}$  calcule  $U_{P,i+1}$  que será indicado por  $U_P$  e  $c_P$ , respectivamente. Substitua  $U_P$  por  $U_O$  e  $c_P$  por  $c_O$  e prossiga para a primeira etapa, num outro intervalo de tempo, que corresponde a seção a esquerda do canal.

#### 8.1.4 Solução do Problema do Canal Retangular via *Maplet*

Apresenta-se agora, o funcionamento da *Maplet* implementada, que dará a solução do problema apresentado.



**Figura 8.5: *Maplet* - Canal Unidimensional**

**Fonte: Autoria Própria**

Na Figura 8.5, pode ser vista a tela da *Maplet*, quando em uso, onde:

1. Área para digitar os dados de entrada. No exemplo dado, tem-se:

- Comprimento:  $(lc) = 400m$ ;
- Altura:  $(h) = 5m$ ;
- Constante gravitacional:  $(g) = 9.80m/s^2$ ;
- Número de subdivisões do intervalo:  $(nx) = 10$ ;

- Erro tolerado: (*Erro*) = 0.000001;
- Função Vazão

$$Q_P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto Q_P(t) = \begin{cases} -0,1t & \text{se } 0 \leq t < 60 \\ -6 + 0,1(t - 60) & \text{se } 60 \leq t < 80 \\ -4 & \text{se } t \geq 80 \end{cases} \quad (8.57)$$

2. Área em considerações relevantes para obter a velocidade e a profundidade são informadas;

3. Área para visualização dos gráficos e informações referentes à Velocidade e Profundidade. Nesta área, há botões que trazem informações adicionais como:

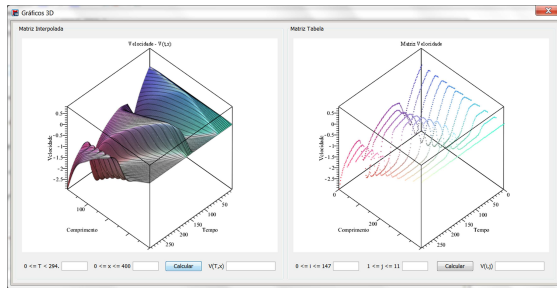
- Tabela (V ou P) - neste campo apresentam-se os resultados da solução numérica para a variável Velocidade ou Profundidade, obtida pela resolução do sistema de EDOs oriundo das equações de Saint Venant. Os resultados compõem uma tabela de valores para a Velocidade ou Profundidade em momentos específicos de tempo e do comprimento do canal;

**Figura 8.6:** Tabela da Velocidade  
Fonte: Autoria Própria

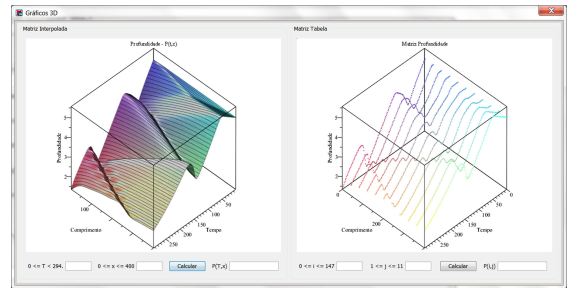
**Figura 8.7:** Tabela da Profundidade  
Fonte: Autoria Própria

- Gráfico (V ou P) 3D - ao clicar neste botão, uma nova janela apresentará dois gráficos em três dimensões, cujas variáveis independentes são o tempo e o comprimento do canal. Um deles dispõe os pontos obtidos nos pontos obtidos para a Velocidade ou

Profundidade, estes pontos são utilizados para gerar o outro gráfico que é constituído pela função de interpolação tipo spline calculada para os valores da solução numérica. Neste campo, ainda é possível ao usuário estimar valores para a Velocidade e Profundidade diferentes dos já obtidos, estes valores serão calculados utilizando pontos contidos na malha da matriz;

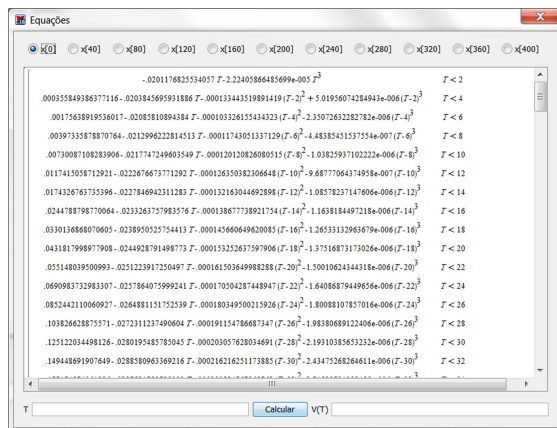


**Figura 8.8: Gráfico da Velocidade**  
**Fonte: Autoria Própria**

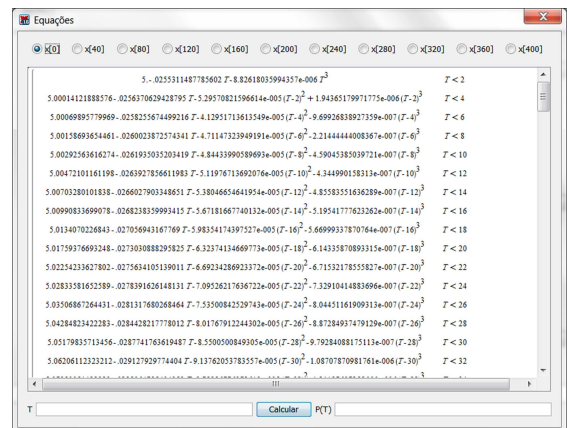


**Figura 8.9: Gráfico da Profundidade**  
**Fonte: Autoria Própria**

- Equação (V ou P)(T) - apresenta equações para a Velocidade ou Profundidade em função do tempo, para cada ponto do comprimento do canal que esteja contido na malha. Estas equações são obtidas por meio de um interpolador spline. Ainda neste campo, é possível estimar resultados para a Velocidade ou Profundidade atribuindo valores para qualquer instante de tempo;



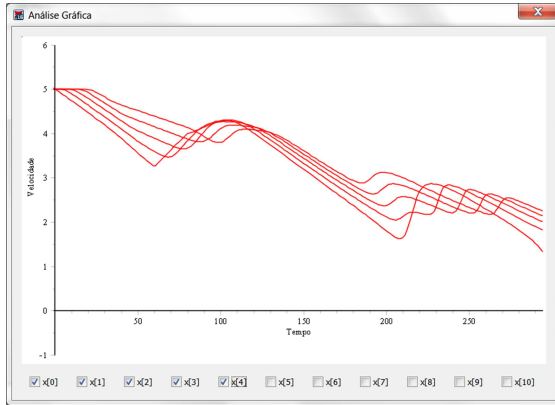
**Figura 8.10: Equação da Velocidade em Função do Tempo Referente a Posição Inicial.**  
**Fonte: Autoria Própria**



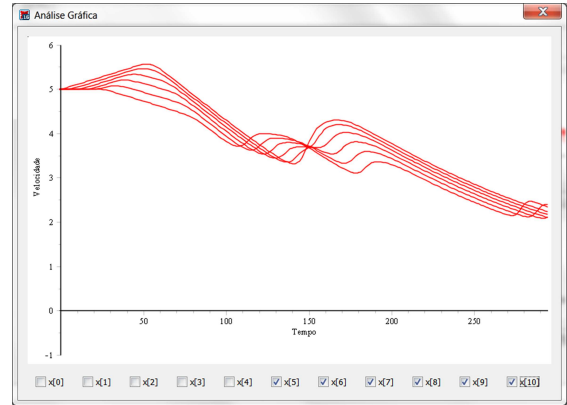
**Figura 8.11: Equação da Profundidade em Função do Tempo Referente a Posição Inicial.**  
**Fonte: Autoria Própria**

- Gráfico (V ou P)(T) - apresenta os gráficos para a Velocidade ou Profundidade em função do tempo para cada ponto do comprimento que esteja contido na malha. O usuário pode definir quais gráficos serão observados no mesmo sistema de eixos coordenados;

É possível observar nas Figuras 8.12 e 8.13 as escolhas disponíveis ao usuário, caso deseje realizar uma análise específica em qualquer dos resultados obtidos. Na primeira figura escolheu-se apresentar os gráficos correspondentes às cinco posições iniciais do comprimento, enquanto no segundo, optou-se pelas seis posteriores.

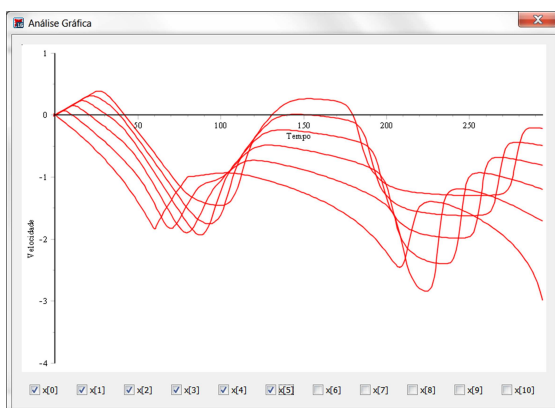


**Figura 8.12: Gráfico da Profundidade em Função do Tempo nas Posições Iniciais.**  
Fonte: Autoria Própria

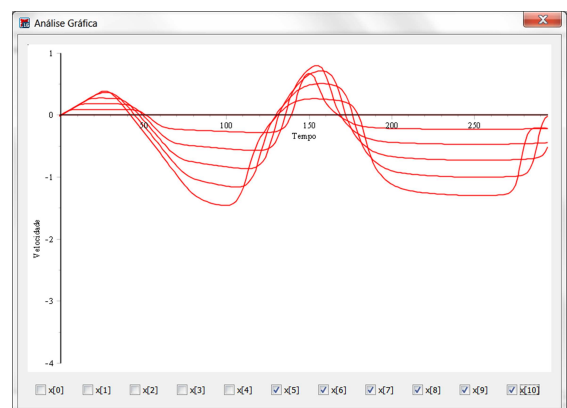


**Figura 8.13: Gráfico da Profundidade em Função do Tempo nas Posições Finais.**  
Fonte: Autoria Própria

De maneira análoga ao caso anterior, os resultados computados para a velocidade em função do tempo também está disponível para análises posteriores, nas Figuras 8.14 e 8.15 pode-se perceber escolhas similares ao caso da profundidade. Na primeira figura os gráficos apresentados correspondem às seis posições iniciais, por outro lado, no segundo optou-se pelas seis últimas.



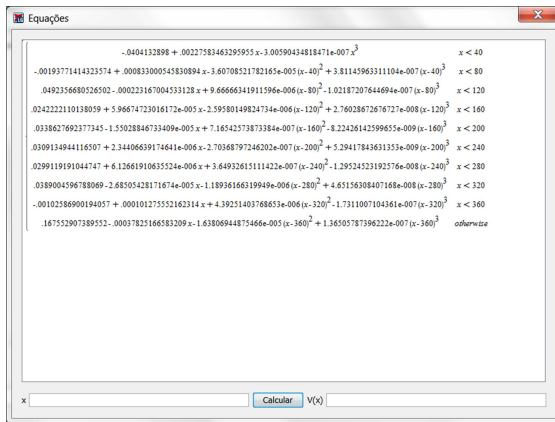
**Figura 8.14: Gráfico da Velocidade em função do Tempo nas Posições Iniciais.**  
Fonte: Autoria Própria



**Figura 8.15: Gráfico da Velocidade em função do Tempo nas Posições Finais.**  
Fonte: Autoria Própria

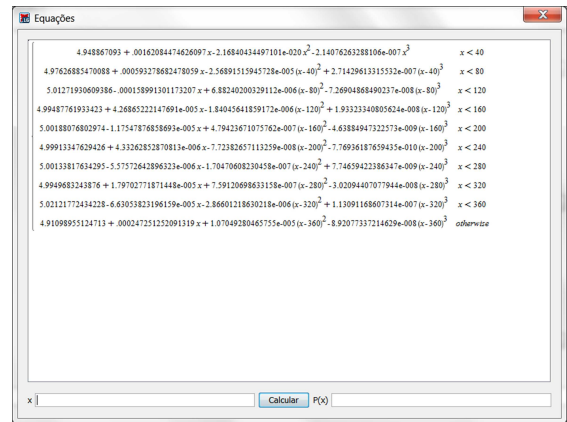
- Equação  $(V \text{ ou } P)(x)$  - apresenta equações para a Velocidade ou Profundidade em função do comprimento do canal, para cada instante de tempo contido na malha.

Além disso, é possível estimar resultados para a Velocidade ou Profundidade atribuindo valores para qualquer ponto do comprimento do canal;



**Figura 8.16: Equação da Velocidade em Função do Deslocamento Referente ao Tempo 2s.**

Fonte: Autoria Própria



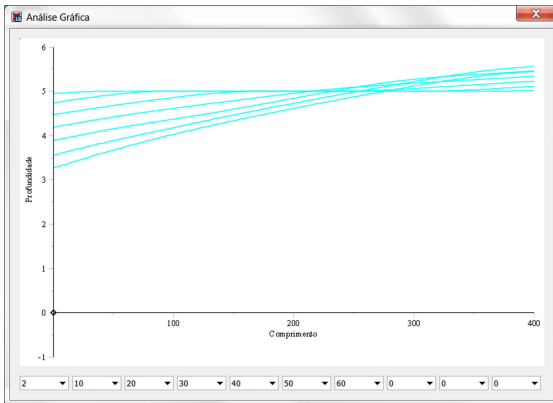
**Figura 8.17: Equação Profundidade em Função do Deslocamento Referente ao Tempo 2s.**

Fonte: Autoria Própria

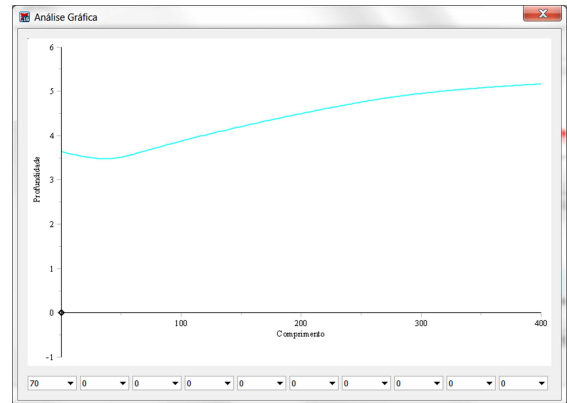
- Gráfico (V ou P)(x) - apresenta os gráficos das funções Velocidade ou Profundidade em função do comprimento para qualquer instante de tempo contido na malha. O usuário pode definir quais gráficos serão observados no mesmo sistema de eixos coordenados, até um máximo de 10;

Nas Figuras 8.18 e 8.19 percebe-se a forma como o usuário da *Maplet* escolhe os gráficos disponíveis para análise específica no tempo. Na primeira figura escolheu-se apresentar os gráficos correspondentes aos tempos 2s, 10s, 20s, 30s, 40s, 50s e 60s, enquanto no segundo, observa-se a profundidade em função do comprimento especificamente para o tempo 70s.



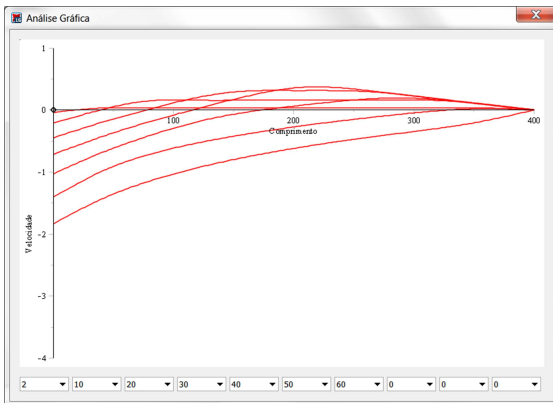


**Figura 8.18: Gráfico da Profundidade para os tempos 2s, 10s, 20s, 30s, 40s, 50s e 60s.**  
**Fonte: Autoria Própria**

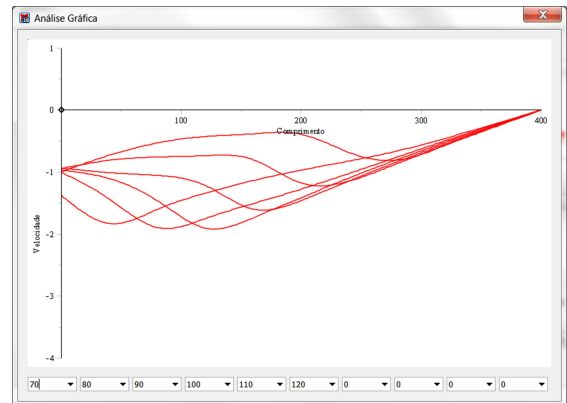


**Figura 8.19: Gráfico da Profundidade para 70s.**  
**Fonte: Autoria Própria**

De maneira análoga ao caso anterior, nas Figuras 8.20 e 8.21 pode ser vista a seleção de alguns momentos do tempo, para a exposição dos gráficos da velocidade em função do comprimento.



**Figura 8.20: Gráfico da Velocidade para os tempos 2s, 10s, 20s, 30s, 40s, 50s e 60s.**  
**Fonte: Autoria Própria**



**Figura 8.21: Gráfico da Velocidade para os tempos 70s, 80s, 90s, 100s, 110s e 120s**  
**Fonte: Autoria Própria**

- Animar - Ao clicar neste botão, os gráficos para a Velocidade ou Profundidade em função do comprimento, são animados em uma série temporal, onde é apresentada uma sequência constituída pelos gráficos gerados pela interpolação dos resultados, para cada um dos instantes de tempo contidos na malha.

4. Área para visualização em tempo real dos cálculos realizados para determinar os valores da Velocidade e Profundidade, em pontos específicos no comprimento do canal. Os gráficos contidos no campo 3, são atualizados também em tempo real durante o decorrer dos cálculos efetuados pelo processo;

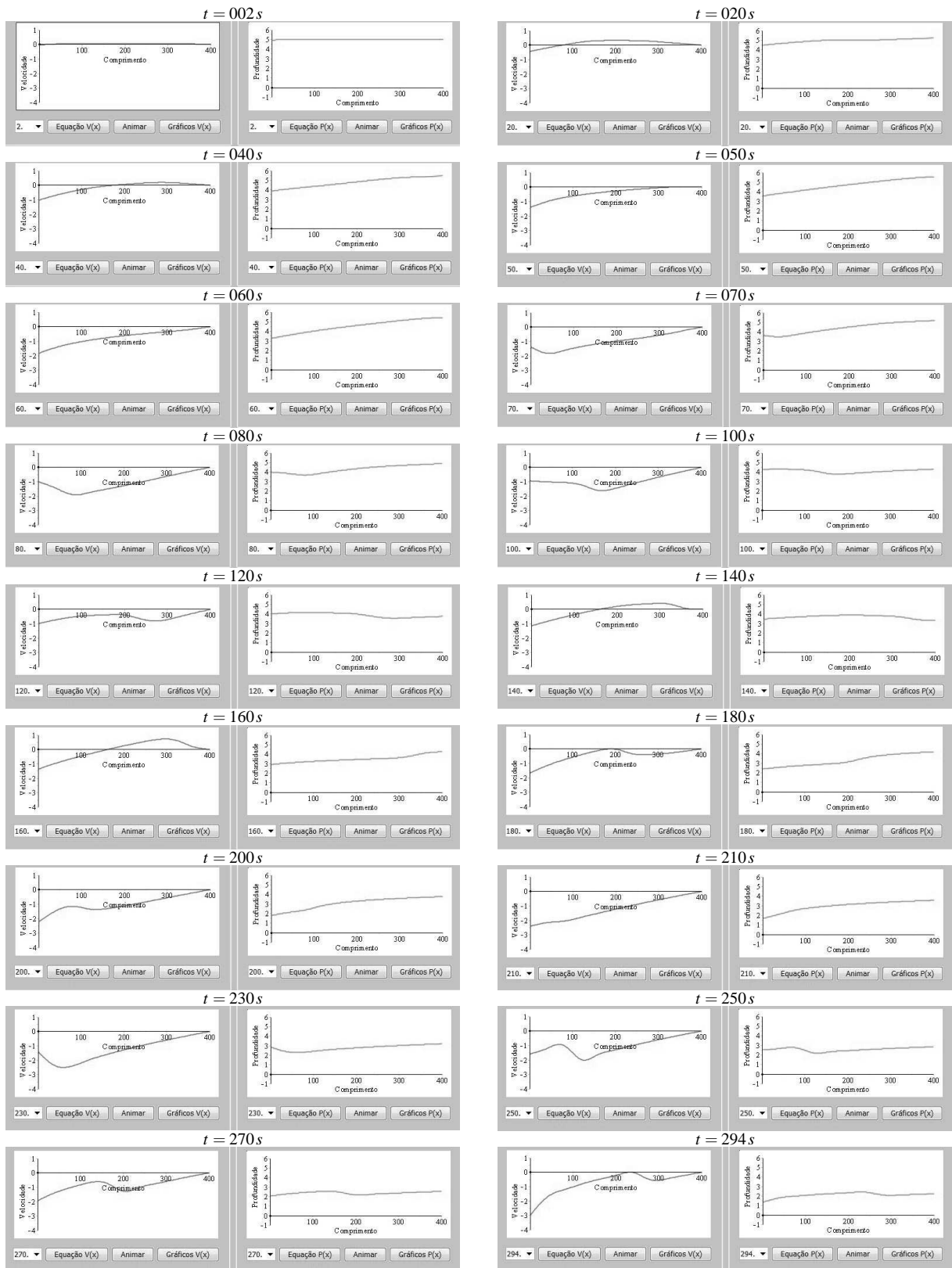


Figura 8.22: Frames da animação dos resultados obtidos com uso das ESV-1D

Fonte: Autoria Própria

## 8.2 EQUAÇÕES DE SAINT VENANT BIDIMENSIONAIS

Nesta seção aplicou-se o MC nas ESV-2D. A estrutura da seção está organizada nas seguintes subseções:

1. As ESV e as ICCIR: Nesta subseção descreve-se as Equações de Saint Venant em duas dimensões e as ICCIR nas direções  $x$  e  $y$ .
2. Problema do Reservatório: Apresenta-se o exemplo que será resolvido via *Maplet*.
3. Aplicação do MC Para o Problema do Reservatório: Nesta subseção, descreve-se as etapas necessárias para calcular a velocidade nas direções  $x$  e  $y$  e a profundidade em cada instante de tempo.
4. Solução do Problema do Reservatório via *Maplet*: Apresenta-se o funcionamento da *Maplet* implementada.

### 8.2.1 As ESV e as ICCIR

No Capítulo 6, seção 6.2.2 utilizou-se o MC para transformar o sistema de EDPs bidimensional

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + V \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (8.58)$$

$$(8.59)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (8.60)$$

$$(8.61)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (8.62)$$

em um sistema de EDOs, dado por

$$\frac{dx}{dt} = U + c \quad (8.63)$$

$$(8.64)$$

$$\frac{d}{dt}(U + 2c) = -\frac{g}{c} \left( V \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial V}{\partial y} \right) - V \frac{\partial U}{\partial y} \quad (8.65)$$

$$(8.66)$$

$$\frac{dx}{dt} = U - c \quad (8.67)$$

$$(8.68)$$

$$\frac{d}{dt}(U - 2c) = +\frac{g}{c} \left( V \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial V}{\partial y} \right) - V \frac{\partial U}{\partial y} \quad (8.69)$$

$$(8.70)$$

$$\frac{dy}{dt} = V + c \quad (8.71)$$

$$(8.72)$$

$$\frac{d}{dt}(V + 2c) = -\frac{g}{c} \left( U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} \right) - U \frac{\partial V}{\partial x} \quad (8.73)$$

$$(8.74)$$

$$\frac{dy}{dt} = V - c \quad (8.75)$$

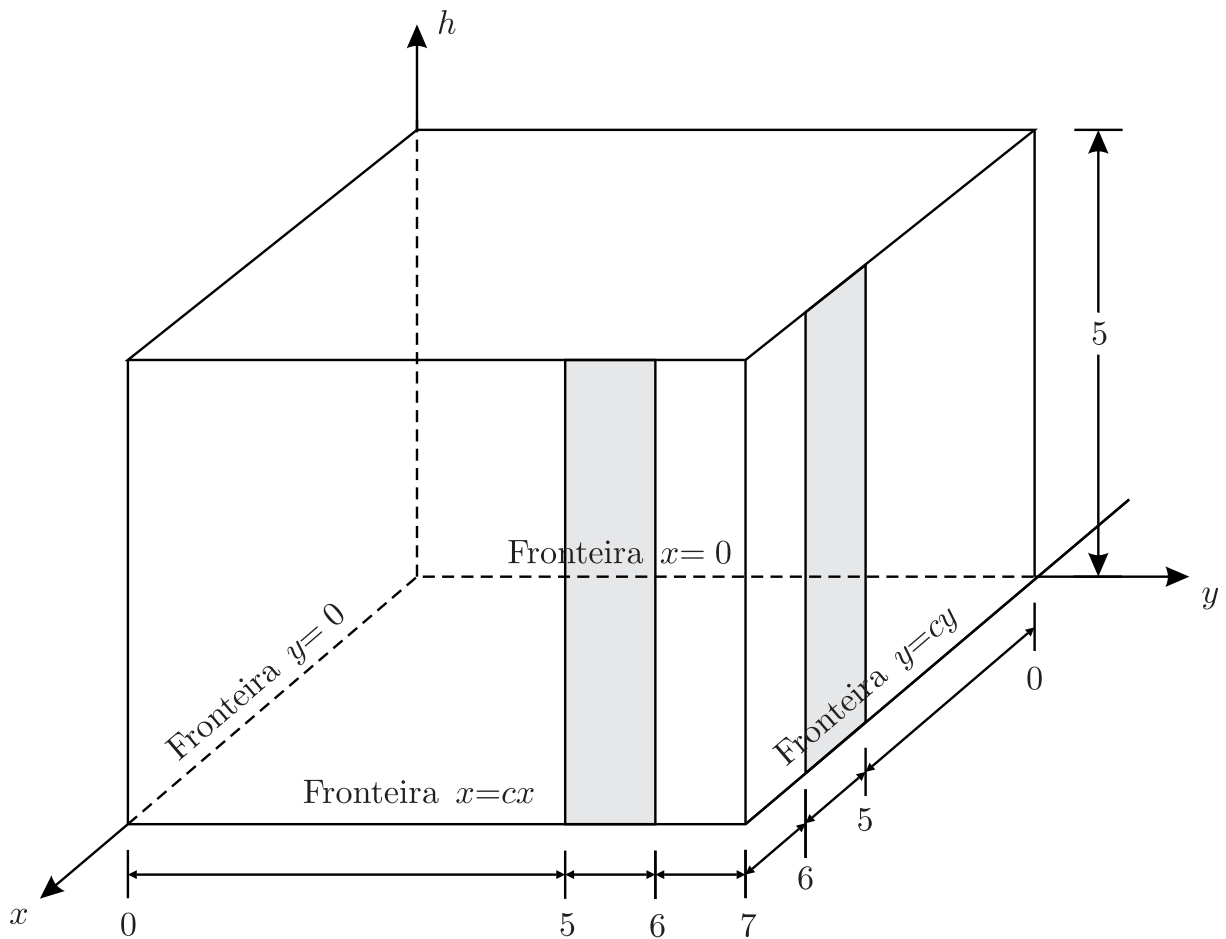
$$(8.76)$$

$$\frac{d}{dt}(V - 2c) = +\frac{g}{c} \left( U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} \right) - U \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8.77)$$

Com este sistema de EDOs é possível obter a solução numérica do sistema de ESV-2D.

### 8.2.2 Problema do Reservatório

Considere um reservatório na forma de um paralelepípedo de  $7m$  de comprimento,  $7m$  de largura e  $5m$  metros de altura com inclinação zero e sem atrito. Inicialmente o reservatório está cheio de água e a mesma encontra-se parada, ou seja, a velocidade inicial é zero. A celeridade  $c$  é dada por  $c_P = \sqrt{gh_P}$ , onde  $g$  é a constante gravitacional ( $g = 9.81$ ) e  $h_P$  é a altura. Considere a descarga a esquerda e a direita conforme indicado na Figura 8.23, ou seja, com uma abertura de  $1m$  na fronteira  $x = cx$  e  $1m$  na fronteira  $y = cy$ .



**Figura 8.23: Reservatório**

**Fonte: Autoria Própria**

Calcule a propagação da onda pelo MC.

### 8.2.3 Aplicação do MC Para o Problema do Reservatório

Ao aplicar o MC nas ESV-2D, utilizou-se os pontos da malha construída para obter a solução numérica para encontrar a velocidade nas direções  $x$  e  $y$  e a profundidade da onda em qualquer instante de tempo. Para isso dividiu-se a seção nos seguintes casos:

#### Pontos Interiores

Para calcular a celeridade, altura e velocidade nos pontos interiores considera-se separadamente o que está ocorrendo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Direção  $x$ )** Para encontrar a celeridade, altura e velocidade nos pontos interiores é necessário

considerar as características negativa e positiva, ou seja, as linhas  $LP$  e  $RP$ .

**Linha  $LP$  na direção  $x$ :** Observou-se na tabela 7 que para  $\lambda_1 = c/g$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U + 2c) &= -\frac{g}{c}(Vh_y + hV_y) - VU_y \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(U + 2c) &= -A - B \end{aligned}, \quad (8.78)$$

onde  $A = g/c(Vh_y + hV_y)$  e  $B = VU_y$ . Aplicando a integral em ambos os membros da equação (8.78), têm-se

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{t_L}^{t_P} \frac{d}{dt}(U + 2c) dt &= -\int_{t_L}^{t_P} (A + B) dt \\ \Rightarrow (U + 2c) \Big|_{t_L}^{t_P} &= -0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow (U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L) &= -0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow U_P + 2c_P &= + (U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \end{aligned} \quad (8.79)$$

**Linha  $RP$  na direção  $x$ :** De forma análoga, ao observar a tabela 7, tem-se para  $\lambda_1 = -c/g$  que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U - 2c) &= \frac{g}{c}(Vh_y + hV_y) - VU_y \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(U - 2c) &= A - B \\ \Rightarrow \int_{t_R}^{t_P} \frac{d}{dt}(U - 2c) dt &= \int_{t_R}^{t_P} (A - B) dt \\ \Rightarrow (U - 2c) \Big|_{t_R}^{t_P} &= 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\ \Rightarrow (U_P - 2c_P) - (U_R - 2c_R) &= 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\ \Rightarrow U_P - 2c_P &= + (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \end{aligned} \quad (8.80)$$

Das equações (8.79) e (8.80), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} U_P + 2c_P = + (U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ U_P - 2c_P = + (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \end{cases}, \quad (8.81)$$

cujas soluções são dadas por

$$U_P = 0.5(U_L + U_R) + (c_L - c_R) + 0.25(A_R - A_L - 2B_P - B_L - B_R)\Delta t \quad (8.82)$$

e

$$c_P = 0.25(U_L - U_R) + 0.5(c_L + c_R) - 0.125(A_L + A_R + 2A_P + B_L - B_R)\Delta t \quad (8.83)$$

Com objetivo de facilitar o entendimento, faz-se uma mudança de notação, para torná-la

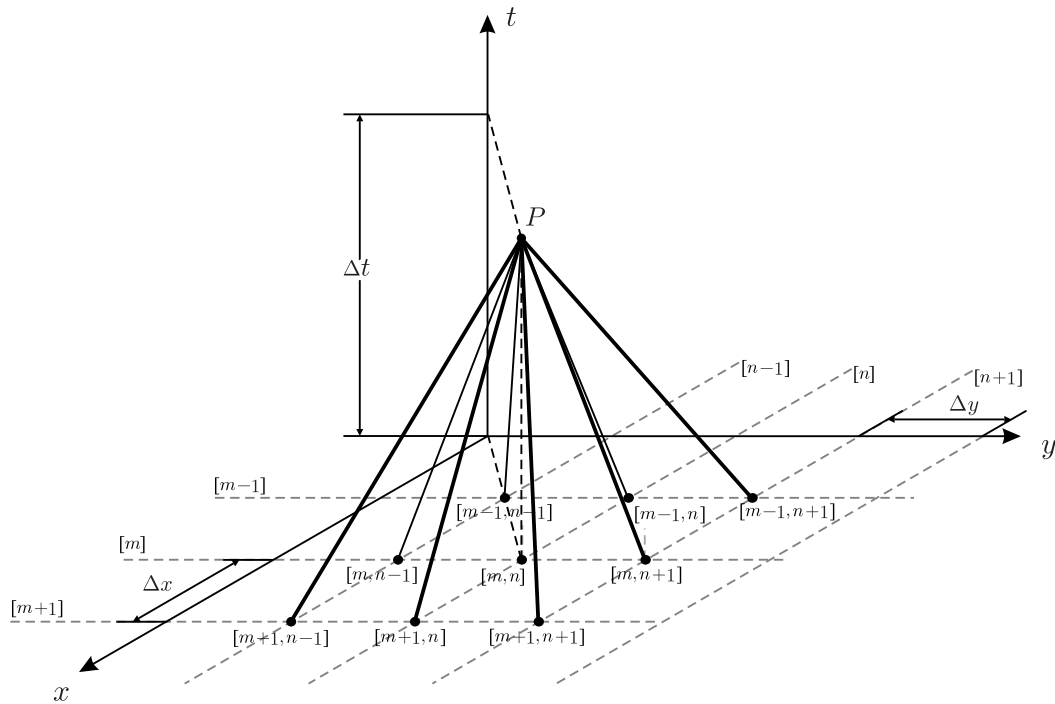
mais próxima ao processo computacional desenvolvido, para isso, é preciso considerar que:

- A celeridade anterior no ponto  $P$ , na direção  $x$ , será denotada por  $C_1^x[m, n]$ ;
- A celeridade anterior no ponto  $L$ , na direção  $x$ , será denotada por  $C_1^x[m - 1, n]$ ;
- A celeridade anterior no ponto  $R$ , na direção  $x$ , será denotada por  $C_1^x[m + 1, n]$ ;
- A nova celeridade calculada no ponto  $P$ , na direção  $x$ , será denotada por  $C_2^x[m, n]$ ;
- A celeridade anterior no ponto  $P$ , na direção  $y$ , será denotada por  $C_1^y[m, n]$ ;
- A celeridade anterior no ponto  $L$ , na direção  $y$ , será denotada por  $C_1^y[m, n - 1]$ ;
- A celeridade anterior no ponto  $R$ , na direção  $y$ , será denotada por  $C_1^y[m, n + 1]$ ;
- A nova celeridade calculada no ponto  $P$ , na direção  $y$ , será denotada por  $C_2^y[m, n]$ ;
- A celeridade no ponto  $P$  será denotada por  $C_2[m, n]$ .

Esta notação estende-se para as velocidades,  $U$  e  $V$ , e para altura.

Além disso, é de fundamental importância entender como ocorre o armazenamento destes valores no interior da malha criada. No caso deste problema, em especial, as dimensões  $cx = 7.0$  e  $cy = 7.0$  são pontuadas a cada passo dado pelos incrementos  $dx = 0.1$  e  $dy = 0.1$  respectivamente, desta forma, preenche-se uma malha que será compreendida pelo processo de resolução como uma matriz de  $nx = cx/dx = 70$  linhas e  $ny = cy/dy = 70$  colunas, onde  $m$  e  $n$  representam as posições em  $x$  e  $y$  a cada etapa do procedimento.

Cada uma das matrizes resultantes representa o conjunto de valores obtidos para  $U$ ,  $V$ ,  $h$  e  $C$  durante cada passagem de tempo, dada pelo incremento  $dt = 0.001$ . Durante o cálculo dos pontos interiores da malha, considera-se  $1 \leq m \leq nx - 1 = 69$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $1 \leq n \leq ny - 1 = 69$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  como as posições assumidas por cada ponto representativo para  $U$ ,  $V$ ,  $h$  e  $C$ , conforme ilustrado na Figura 8.24.



**Figura 8.24: Gráfico das Retas Características para as ESV-2D**

**Fonte: Autoria Própria**

Para encontrar  $U_P$ ,  $c_P$  e  $h_P$  é necessário calcular  $A_L$ ,  $A_P$ ,  $A_R$ ,  $B_L$ ,  $B_P$  e  $B_R$ .

- Ponto P

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 A_P &= \left( \frac{g}{C_1^x[m, n]} \right) \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\
 B_P &= V1[m, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \tag{8.84}$$

- Ponto L

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m-1, n+1] - h_1^x[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m-1, n+1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m-1, n+1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 A_L &= \left( \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \right) \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\
 B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \tag{8.85}$$



- Ponto R

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m+1, n+1] - h_1^x[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m+1, n+1] - V1[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m+1, n+1] - U1[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 A_R &= \left( \frac{g}{C_1^x[m+1, n]} \right) \cdot (V1[m+1, n] \cdot h_y + h_1^x[m+1, n] \cdot V_y) \\
 B_R &= V1[m+1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.86)$$

- Velocidade  $U$

$$\begin{aligned}
 U2[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + U1[m+1, n]) \\
 &\quad + (C_1^x[m-1, n] - C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.87)$$

- Celeridade  $C_2^x$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= 0.25 \cdot (U1[m-1, n] - U1[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^x[m-1, n] + C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.88)$$

- Altura  $h_2^x$

Como  $c^2 = gh$ , após ter calculado a celeridade  $c$  encontra-se o valor de  $h$ , visto que  $g$  é constante. Tem-se

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.89)$$

**Direção y)** De forma análoga ao que foi feito na direção  $x$ , para encontrar a celeridade, altura e velocidade nos pontos interiores na direção  $y$  é necessário considerar as Características negativa e positiva, ou seja, as linhas  $LP$  e  $RP$ .

**Linha  $LP$  na direção  $y$ :** Observou-se na tabela 8 que para  $\lambda_2 = c/g$  tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(V + 2c) &= -\frac{g}{c}(hU_x + Uh_x) - UV_x \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(V + 2c) &= -D - E
 \end{aligned} \quad (8.90)$$

onde  $D = (g/c)(hU_x + Uh_x)$  e  $E = UV_x$ . Aplicando a integral de ambos os membros

da equação (8.90), obtém-se

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_L}^{t_P} \frac{d}{dt} (V + 2c) dt &= - \int_{t_L}^{t_P} (D + E) dt \\
\Rightarrow (V + 2c) \Big|_{t_L}^{t_P} &= -0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\
\Rightarrow (V_P + 2c_P) - (V_L + 2c_L) &= -0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\
\Rightarrow V_P + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t
\end{aligned} \tag{8.91}$$

**Linha RP na direção y:** Analogamente para  $\lambda_2 = -c/g$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (V - 2c) &= \frac{g}{c} (hU_x + Uh_x) - UV_x \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} (V - 2c) &= D - E \\
\Rightarrow \int_{t_R}^{t_P} \frac{d}{dt} (V - 2c) dt &= \int_{t_R}^{t_P} (D - E) dt \\
\Rightarrow (V - 2c) \Big|_{t_R}^{t_P} &= 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
\Rightarrow (V_P - 2c_P) - (V_R - 2c_R) &= 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
\Rightarrow V_P - 2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t
\end{aligned} \tag{8.92}$$

Das equações (8.91) e (8.92), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} V_P + 2c_P = +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\ V_P - 2c_P = +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \end{cases} \tag{8.93}$$

Ao resolver o sistema (8.93), obtém-se:

$$V_P = 0.5(V_L + V_R) + (c_L - c_R) + 0.25(D_R - D_L - 2E_P - E_L - E_R)\Delta t \tag{8.94}$$

e

$$c_P = 0.25(V_L - V_R) + 0.5(c_L + c_R) - 0.125(D_L + D_R + 2D_P + E_L - E_R)\Delta t \tag{8.95}$$

Observa-se que para encontrar  $V_P$  e  $c_P$  é necessário calcular  $D_P, E_P, E_L, E_R, D_L$  e  $D_R$ .

• Ponto P:

$$\begin{aligned}
h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
D_P &= \left( \frac{g}{C_1^y[m, n]} \right) \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
\end{aligned} \tag{8.96}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n-1] - h_1^y[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n-1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n-1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 D_L &= \left( \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \right) \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\
 E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.97)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n+1] - h_1^y[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n+1] - U1[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n+1] - V1[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 D_R &= \left( \frac{g}{C_1^y[m, n+1]} \right) \cdot (h_1^y[m, n+1] \cdot U_x + U1[m, n+1] \cdot h_x) \\
 E_R &= U1[m, n+1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.98)$$

- Velocidade V

$$\begin{aligned}
 V2[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + V1[m, n+1]) \\
 &\quad + (C_1^y[m, n-1] - C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.99)$$

- Celeridade  $C_2^y$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= 0.25 \cdot (V1[m, n-1] - V1[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^y[m, n-1] + C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.100)$$

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.101)$$

e portanto

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad (8.102)$$

Pode-se analisar os pontos de fronteira de duas maneiras.

## Fronteira Simples

Neste caso, basta utilizar os pontos mais próximos da fronteira para calcular a velocidade, celeridade e altura nos pontos da fronteira, tais pontos encontram-se nas posições imediatamente anteriores à extrema.

**Primeira Situação:** Considerando fixas as posições de fronteira  $(0, nx$  e  $ny)$  é possível atribuir a elas, os valores contidos na posição posterior  $(1)$  e anteriores  $(nx - 1$  e  $ny - 1)$ , para isso utiliza-se uma variável auxiliar da forma,  $0 \leq i \leq nx - 1 = 69, i \in \mathbb{Z}$ . Obtendo-se:

$$\begin{aligned} U2[i, 0] &= U2[i, 1] \\ U2[i, ny] &= U2[i, ny - 1] \\ U2[0, i] &= 0 \\ U2[nx, i] &= 0 \end{aligned}, \quad (8.103)$$

$$\begin{aligned} V2[i, 0] &= 0 \\ V2[i, ny] &= 0 \\ V2[0, i] &= V2[1, i] \\ V2[nx, i] &= V2[nx - 1, i] \end{aligned}, \quad (8.104)$$

$$\begin{aligned} h2[i, 0] &= h2[i, 1] \\ h2[i, ny] &= h2[i, ny - 1] \\ h2[0, i] &= h2[1, i] \\ h2[nx, i] &= h2[nx - 1, i] \end{aligned}, \quad (8.105)$$

$$\begin{aligned} h_2^x[i, 0] &= h_2^x[i, 1] \\ h_2^x[i, ny] &= h_2^x[i, ny - 1] \\ h_2^x[0, i] &= h_2^x[1, i] \\ h_2^x[nx, i] &= h_2^x[nx - 1, i] \end{aligned}, \quad (8.106)$$

$$\begin{aligned} h_2^y[i, 0] &= h_2^y[i, 1] \\ h_2^y[i, ny] &= h_2^y[i, ny - 1] \\ h_2^y[0, i] &= h_2^y[1, i] \\ h_2^y[nx, i] &= h_2^y[nx - 1, i] \end{aligned}, \quad (8.107)$$

$$\begin{aligned}
C2[i,0] &= C2[i,1] \\
C2[i,ny] &= C2[i,ny-1] \\
C2[0,i] &= C2[1,i] \\
C2[nx,i] &= C2[nx-1,i]
\end{aligned}
, \tag{8.108}$$

$$\begin{aligned}
C_2^x[i,0] &= C_2^x[i,1] \\
C_2^x[i,ny] &= C_2^x[i,ny-1] \\
C_2^x[0,i] &= C_2^x[1,i] \\
C_2^x[nx,i] &= C_2^x[nx-1,i]
\end{aligned}
, \tag{8.109}$$

$$\begin{aligned}
C_2^y[i,0] &= C_2^y[i,1] \\
C_2^y[i,ny] &= C_2^y[i,ny-1] \\
C_2^y[0,i] &= C_2^y[1,i] \\
C_2^y[nx,i] &= C_2^y[nx-1,i]
\end{aligned}
. \tag{8.110}$$

É necessário, além disso, considerar a condição inicial dada anteriormente e atribuir às velocidades  $U$  e  $V$  o novo valor 1 nas posições onde a descarga ocorre,  $50 \leq i \leq 60$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , deste modo:

$$U2[nx,i] = 1 \quad \text{e} \quad V2[i,ny] = 1 . \tag{8.111}$$

**Segunda Situação:** Durante a Primeira Situação os pontos de canto não foram contemplados.

É necessário, portanto, analisar a velocidade, celeridade e altura para tais pontos, isto é feito atribuindo-se o valor zero para as Velocidades  $U$  e  $V$ , e repetindo-se a Altura e Celeridade das diagonais mais próximas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U2[0,0] &= 0 \\
U2[nx,ny] &= 0 \\
U2[0,ny] &= 0 \\
U2[nx,0] &= 0
\end{aligned}
, \tag{8.112}$$

$$\begin{aligned}
V2[0,0] &= 0 \\
V2[nx,ny] &= 0 \\
V2[0,ny] &= 0 \\
V2[nx,0] &= 0
\end{aligned}
\tag{8.113}$$

$$\begin{aligned}
h2[0,0] &= h2[1,1] \\
h2[nx,ny] &= h2[nx-1,ny-1] \\
h2[0,ny] &= h2[1,ny-1] \\
h2[nx,0] &= h2[nx-1,1]
\end{aligned}
\tag{8.114}$$

$$\begin{aligned}
h_2^x[0,0] &= h_2^x[1,1] \\
h_2^x[nx,ny] &= h_2^x[nx-1,ny-1] \\
h_2^x[0,ny] &= h_2^x[1,ny-1] \\
h_2^x[nx,0] &= h_2^x[nx-1,1]
\end{aligned}
\tag{8.115}$$

$$\begin{aligned}
h_2^y[0,0] &= h_2^y[1,1] \\
h_2^y[nx,ny] &= h_2^y[nx-1,ny-1] \\
h_2^y[0,ny] &= h_2^y[1,ny-1] \\
h_2^y[nx,0] &= h_2^y[nx-1,1]
\end{aligned}
\tag{8.116}$$

$$\begin{aligned}
C2[0,0] &= C2[1,1] \\
C2[nx,ny] &= C2[nx-1,ny-1] \\
C2[0,ny] &= C2[1,ny-1] \\
C2[nx,0] &= C2[nx-1,1]
\end{aligned}
\tag{8.117}$$

$$\begin{aligned}
C_2^x[0,0] &= C_2^x[1,1] \\
C_2^x[nx,ny] &= C_2^x[nx-1,ny-1] \\
C_2^x[0,ny] &= C_2^x[1,ny-1] \\
C_2^x[nx,0] &= C_2^x[nx-1,1]
\end{aligned}
\tag{8.118}$$

$$\begin{aligned}
C_2^y[0,0] &= C_2^y[1,1] \\
C_2^y[nx,ny] &= C_2^y[nx-1,ny-1] \\
C_2^y[0,ny] &= C_2^y[1,ny-1] \\
C_2^y[nx,0] &= C_2^y[nx-1,1]
\end{aligned} \quad . \quad (8.119)$$

### Fronteira Detalhada

Este modo é baseado em uma análise mais detalhada do que ocorre nas fronteiras, para calcular a celeridade, velocidade e altura em tais pontos o caso é dividido em oito situações:

- Fronteira  $x = 0$ ;
- Fronteira  $y = 0$ ;
- Fronteira  $x = cx$ ;
- Fronteira  $y = cy$ ;
- Canto inferior esquerdo -  $(0,0)$ ;
- Canto superior esquerdo -  $(0,cy)$ ;
- Canto inferior direito -  $(cx,cy)$ ;
- Canto superior direito -  $(cx,0)$ .

Os detalhes de cada caso estão descritos detalhadamente a seguir.

### Pontos de Fronteira (Não Canto)

**Fronteira  $x = 0$**  Tem-se na fronteira  $x = 0$  que  $U_P = 0$ .

**Direção  $x$ :** Ao considerar a fronteira  $x = 0$ , tem-se que na direção  $x$ , só existe a característica positiva ( $RP$ ) e  $U_P = 0$ . Segue da equação (8.80) que

$$\begin{aligned}
U_P - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\
\Rightarrow 0 - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\
\Rightarrow c_P &= -0.5(U_R - 2c_R) - 0.25(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t
\end{aligned} \quad . \quad (8.120)$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P, B_P, A_R, B_R, U_R$  e  $c_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad . \quad (8.121) \\
 A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\
 B_P &= V1[m, n] \cdot U_y
 \end{aligned}$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m+1, n+1] - h_1^x[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m+1, n+1] - V1[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m+1, n+1] - U1[m+1, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad . \quad (8.122) \\
 A_R &= \frac{g}{C_1^x[m+1, n]} \cdot (V1[m+1, n] \cdot h_y + h_1^x[m+1, n] \cdot V_y) \\
 B_R &= V1[m+1, n] \cdot U_y
 \end{aligned}$$

- Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.123)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= -0.5 \cdot (U1[m+1, n] - 2 \cdot C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (A_P - B_P + A_R - B_R) \cdot \Delta t \quad .
 \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.124)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Ao considerar a fronteira  $x = 0$  onde  $U_P = 0$ , só que agora na direção  $y$ , onde existem as Características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ) é possível encontrar  $V_P$  e  $c_P$ . Para isso, utiliza as equações (8.94) e (8.95),

$$\begin{aligned}
 V_P &= 0.5(V_L + V_R) + (c_L - c_R) \\
 &\quad + 0.25(D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R)\Delta t \quad (8.125)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 c_P &= 0.25(V_L - V_R) + 0.5(c_L + c_R) \\
 &\quad - 0.125(D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R)\Delta t \quad , \quad (8.126)
 \end{aligned}$$



onde é preciso encontrar  $D_L$ ,  $D_R$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m, n])/dx \\
 U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m, n])/dx \\
 V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m, n])/dx \\
 D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
 E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.127)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n-1] - h_1^y[m, n-1])/dx \\
 U_x &= (U1[m+1, n-1] - U1[m, n-1])/dx \\
 V_x &= (V1[m+1, n-1] - V1[m, n-1])/dx \\
 D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\
 E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.128)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n+1] - h_1^y[m, n+1])/dx \\
 U_x &= (U1[m+1, n+1] - U1[m, n+1])/dx \\
 V_x &= (V1[m+1, n+1] - V1[m, n+1])/dx \\
 D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n+1]} \cdot (h_1^y[m, n+1] \cdot U_x + U1[m, n+1] \cdot h_x) \\
 E_R &= U1[m, n+1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.129)$$

- Velocidade  $V$

$$\begin{aligned}
 V2[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + V1[m, n+1]) \\
 &\quad + (C_1^y[m, n-1] - C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.130)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= 0.25 \cdot (V1[m, n-1] - V1[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^y[m, n-1] + C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.131)$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.132)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} . \quad (8.133)$$

Como  $c^2 = gh$ , tem-se:

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} . \quad (8.134)$$

**Fronteira  $y = 0$**  Tem-se  $V_P = 0$  na fronteira  $y = 0$ .

**Direção  $x$ :** Considerando a fronteira  $y = 0$  onde  $V_P = 0$ , tem-se que na direção  $x$  existem as Características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ). Utiliza-se as equações (8.94) e (8.95) para encontrar  $V_P$  e  $c_P$ ,

$$V_P = 0.5(V_L + V_R) + (c_L - c_R) + 0.25(D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R)\Delta t \quad (8.135)$$

e

$$c_P = 0.25(V_L - V_R) + 0.5(c_L + c_R) - 0.125(D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R)\Delta t , \quad (8.136)$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_R$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n])/dy \\ V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n])/dy \\ U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n])/dy \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned} . \quad (8.137)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m-1, n+1] - h_1^x[m-1, n])/dy \\ V_y &= (V1[m-1, n+1] - V1[m-1, n])/dy \\ U_y &= (U1[m-1, n+1] - U1[m-1, n])/dy \\ A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\ B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y \end{aligned} . \quad (8.138)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m+1, n+1] - h_1^x[m+1, n])/dy \\
 V_y &= (V1[m+1, n+1] - V1[m+1, n])/dy \\
 U_y &= (U1[m+1, n+1] - U1[m+1, n])/dy \\
 A_R &= \frac{g}{C_1^x[m+1, n]} \cdot (V1[m+1, n] \cdot h_y + h_1^x[m+1, n] \cdot V_y) \\
 B_R &= V1[m+1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.139)$$

- Velocidade  $U$

$$\begin{aligned}
 U2[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + U1[m+1, n]) \\
 &\quad + (C_1^x[m-1, n] - C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.140)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= 0.25 \cdot (U1[m-1, n] - U1[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^x[m-1, n] + C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.141)$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.142)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Ainda na fronteira  $y = 0$ , só que agora na direção  $y$ , percebe-se que só existe a Característica positiva ( $RP$ ) e  $V_P = 0$ . Usando a equação (8.92), tem-se

$$\begin{aligned}
 V_P - 2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
 \Rightarrow -2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
 \Rightarrow c_P &= -0.5(V_R - 2c_R) - 0.25(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.143)$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $D_P, D_R, E_R, E_P$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m-1, n])/(2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m-1, n])/(2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m-1, n])/(2 \cdot dx) \\
 D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
 E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.144)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n+1] - h_1^y[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n+1] - U1[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n+1] - V1[m-1, n+1]) / (2 \cdot dx) \\
 D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n+1]} \cdot (h_1^y[m, n+1] \cdot U_x + U1[m, n+1] \cdot h_x) \\
 E_R &= U1[m, n+1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad (8.145)$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 0 \quad (8.146)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= -0.5 \cdot (V1[m, n+1] - 2 \cdot C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (D_P - E_P + D_R - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad (8.147)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.148)$$

Como  $c^2 = gh$ , tem-se:

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad (8.149)$$

**Fronteira  $x = cx$ )** Na fronteira  $x = cx$ , é necessário ter um maior cuidado, pois além de analisar as direções  $x$  e  $y$  precisa verificar onde existe ou não a saída de água.

**Fora da saída da água)** Neste caso  $U_P = 0$ . Analisa-se separadamente o que ocorre nas direções  $x$  e  $y$ .

**Direção  $x$ :** Considerando a fronteira  $x = cx$  do reservatório conforme indicado na Figura 8.23, tem-se que na direção  $x$  só existe a característica negativa ( $LP$ ).

Através da equação (8.79), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned}
 U_P + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\
 \Rightarrow +2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \quad (8.150) \\
 \Rightarrow c_P &= +0.5(U_L + 2c_L) - 0.25(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t
 \end{aligned}$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P, B_P, A_L, B_L$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad (8.151) \\
 A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\
 B_P &= V1[m, n] \cdot U_y
 \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m-1, n+1] - h_1^x[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m-1, n+1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m-1, n+1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad (8.152) \\
 A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\
 B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y
 \end{aligned}$$

- Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 \quad (8.153)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + 2 \cdot C_1^x[m-1, n]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (A_P + B_P + A_L + B_L) \cdot \Delta t \quad (8.154)
 \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad (8.155)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Considerando a fronteira  $x = cx$ , só que agora na direção  $y$  onde existem as Características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ) é possível encontrar  $V_P$  e  $c_P$ .

Para isso, utiliza as equações (8.94) e (8.95),

$$V_P = 0.5(V_L + V_R) + (c_L - c_R) + 0.25(D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R)\Delta t \quad (8.156)$$

e

$$c_P = 0.25(V_L - V_R) + 0.5(c_L + c_R) - 0.125(D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R)\Delta t, \quad (8.157)$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_R$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n] - h_1^y[m - 1, n])/dx \\ U_x &= (U1[m, n] - U1[m - 1, n])/dx \\ V_x &= (V1[m, n] - V1[m - 1, n])/dx \\ D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\ E_P &= U1[m, n] \cdot V_x \end{aligned} \quad (8.158)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n - 1] - h_1^y[m - 1, n - 1])/dx \\ U_x &= (U1[m, n - 1] - U1[m - 1, n - 1])/dx \\ V_x &= (V1[m, n - 1] - V1[m - 1, n - 1])/dx \\ D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n - 1]} \cdot (h_1^y[m, n - 1] \cdot U_x + U1[m, n - 1] \cdot h_x) \\ E_L &= U1[m, n - 1] \cdot V_x \end{aligned} \quad (8.159)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n + 1] - h_1^y[m - 1, n + 1])/dx \\ U_x &= (U1[m, n + 1] - U1[m - 1, n + 1])/dx \\ V_x &= (V1[m, n + 1] - V1[m - 1, n + 1])/dx \\ D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n + 1]} \cdot (h_1^y[m, n + 1] \cdot U_x + U1[m, n + 1] \cdot h_x) \\ E_R &= U1[m, n + 1] \cdot V_x \end{aligned} \quad (8.160)$$

- Velocidade V

$$\begin{aligned} V2[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n - 1] + V1[m, n + 1]) \\ &\quad + (C_1^y[m, n - 1] - C_1^y[m, n + 1]) \\ &\quad + 0.25 \cdot (D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (8.161)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^y[m, n] &= 0.25 \cdot (V1[m, n-1] - V1[m, n+1]) \\ &+ 0.5 \cdot (C_1^y[m, n-1] + C_1^y[m, n+1]) \quad . \quad (8.162) \\ &- 0.125 \cdot (D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.163)$$

. Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad . \quad (8.164)$$

Como  $c^2 = gh$ , tem-se:

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.165)$$

**Na saída da água)** Neste caso  $U_P = 1$ . Analisa-se separadamente o que ocorre nas direções  $x$  e  $y$ .

**Direção  $x$ :** Ainda na fronteira  $x = cx$  do reservatório só que agora na saída da água, tem que  $U_P = 1$ . Ao observar a direção  $x$  tem-se que só existe a Característica negativa ( $LP$ ). Através da equação (8.79), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} U_P + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow 1 + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \quad (8.166) \\ \Rightarrow 2c_P &= -1 + (U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow c_P &= -0.5 + 0.5(U_L + 2c_L) - 0.25(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \end{aligned}$$

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\ V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \\ U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad . \quad (8.167) \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m-1, n+1] - h_1^x[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 V_y &= (V1[m-1, n+1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \\
 U_y &= (U1[m-1, n+1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dy) \quad . \quad (8.168) \\
 A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\
 B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y
 \end{aligned}$$

- Velocidade  $U$ .

$$U2[m, n] = 1 \quad (8.169)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= -0.5U2[m, n] + 0.5(U1[m-1, n] + 2C_1^x[m-1, n]) \\
 &\quad - 0.25(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \quad (8.170)
 \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad (8.171)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção  $y$ :** Na fronteira  $x = cx$  do reservatório, mas, na direção  $y$  onde existem as características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ) é possível encontrar  $V_P$  e  $c_P$ . Para isso, utilizam-se as equações (8.94) e (8.95),

$$\begin{aligned}
 V_P &= 0.5(V_L + V_R) + (c_L - c_R) \\
 &\quad + 0.25(D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R)\Delta t \quad (8.172)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 c_P &= 0.25(V_L - V_R) + 0.5(c_L + c_R) \\
 &\quad - 0.125(D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_R)\Delta t \quad , \quad (8.173)
 \end{aligned}$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_R$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_R$ .



- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m, n] - h_1^y[m-1, n])/dx \\
 U_x &= (U1[m, n] - U1[m-1, n])/dx \\
 V_x &= (V1[m, n] - V1[m-1, n])/dx \\
 D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
 E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.174)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m, n-1] - h_1^y[m-1, n-1])/dx \\
 U_x &= (U1[m, n-1] - U1[m-1, n-1])/dx \\
 V_x &= (V1[m, n-1] - V1[m-1, n-1])/dx \\
 D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\
 E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.175)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m, n+1] - h_1^y[m-1, n+1])/dx \\
 U_x &= (U1[m, n+1] - U1[m-1, n+1])/dx \\
 V_x &= (V1[m, n+1] - V1[m-1, n+1])/dx \\
 D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n+1]} \cdot (h_1^y[m, n+1] \cdot U_x + U1[m, n+1] \cdot h_x) \\
 E_R &= U1[m, n+1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.176)$$

- Velocidade V

$$\begin{aligned}
 V2[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + V1[m, n+1]) \\
 &\quad + (C_1^y[m, n-1] - C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (D_R - D_L - 2 \cdot E_P - E_L - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.177)$$

- Celeridade c

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= 0.25 \cdot (V1[m, n-1] - V1[m, n+1]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^y[m, n-1] + C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (D_L + D_R + 2 \cdot D_P + E_L - E_L) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.178)$$

- Altura h

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.179)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] :=$

$$h_2^y[m, n].$$

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.180)$$

e portanto

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g}. \quad (8.181)$$

**Fronteira  $y = cy$**  Na fronteira  $y = cy$  além de analisar as direções  $x$  e  $y$  é preciso verificar onde existe ou não a saída de água.

**Fora da saída de água** Neste caso  $V_P = 0$ . Deve-se analisar separadamente o que ocorre nas direções  $x$  e  $y$ .

**Direção  $x$ :** Considerando a fronteira  $y = cy$ , ao observar a direção  $x$  nota-se que existem as Características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ). Assim é possível encontrar  $U_P$  e  $c_P$ . Para isso, utilizam-se as equações (8.83) e (8.82),

$$U_P = 0.5(U_L + U_R) + (c_L - c_R) + 0.25(A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R)\Delta t \quad (8.182)$$

e

$$c_P = 0.25(U_L - U_R) + 0.5(c_L + c_R) - 0.125(A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R)\Delta t, \quad (8.183)$$

onde é necessário calcular  $A_L$ ,  $A_R$ ,  $A_P$ ,  $B_L$  e  $B_R$ .

• Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n] - h_1^x[m, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m, n] - V1[m, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m, n] - U1[m, n - 1])/dy \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned} \quad (8.184)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m-1, n] - h_1^x[m-1, n-1])/dy \\
 V_y &= (V1[m-1, n] - V1[m-1, n-1])/dy \\
 U_y &= (U1[m-1, n] - U1[m-1, n-1])/dy \\
 A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\
 B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.185)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m+1, n] - h_1^x[m+1, n-1])/dy \\
 V_y &= (V1[m+1, n] - V1[m+1, n-1])/dy \\
 U_y &= (U1[m+1, n] - U1[m+1, n-1])/dy \\
 A_R &= \frac{g}{C_1^x[m+1, n]} \cdot (V1[m+1, n] \cdot h_y + h_1^x[m+1, n] \cdot V_y) \\
 B_R &= V1[m+1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.186)$$

- Velocidade  $U$

$$\begin{aligned}
 U2[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + U1[m+1, n]) \\
 &\quad + (C_1^x[m-1, n] - C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.25 \cdot (A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.187)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= 0.25 \cdot (U1[m-1, n] - U1[m+1, n]) \\
 &\quad + 0.5 \cdot (C_1^x[m-1, n] + C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad - 0.125 \cdot (A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.188)$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.189)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção  $y$ :** Considerando a fronteira  $y = cy$  do reservatório conforme indicado na Figura 8.23, tem-se que na direção  $y$  só existe a Característica negativa ( $LP$ ) e  $V_P = 0$ . Através da equação (8.91), encontra-se o valor de  $c_P$

$$\begin{aligned}
 V_P + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\
 \Rightarrow 0 + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\
 \Rightarrow c_P &= +0.5(V_L + 2c_L) - 0.25(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t
 \end{aligned} \quad (8.190)$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $D_P, E_P, D_L, E_L$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\
 D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
 E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad (8.191)$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n-1] - h_1^y[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n-1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n-1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\
 E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad (8.192)$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 0 \quad (8.193)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + 2 \cdot C_1^y[m, n-1]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (D_P + E_P + D_L + E_L) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad (8.194)$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad (8.195)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.196)$$

e

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad (8.197)$$

**Na saída da água)** Neste caso  $V_P = 1$ . Analisa-se separadamente o que ocorre nas direções

$x$  e  $y$ .

**Direção  $x$ :** Considerando a fronteira  $y = cy$  do reservatório e analisando na direção  $x$  onde existem as Características positiva ( $LP$ ) e negativa ( $RP$ ) é possível encontrar  $U_P$  e  $c_P$ . Para isso, utilizam-se as equações (8.82) e (8.83),

$$\begin{aligned} U_P &= 0.5(U_L + U_R) + (c_L - c_R) \\ &\quad + 0.25(A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R)\Delta t \end{aligned} \quad (8.198)$$

e

$$\begin{aligned} c_P &= 0.25(U_L - U_R) + 0.5(c_L + c_R) \\ &\quad - 0.125(A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R)\Delta t \end{aligned} \quad (8.199)$$

onde é necessário calcular  $A_L$ ,  $A_R$ ,  $A_P$ ,  $B_L$  e  $B_R$ .

• Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n] - h_1^x[m, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m, n] - V1[m, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m, n] - U1[m, n - 1])/dy \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned} \quad (8.200)$$

• Ponto L:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m - 1, n] - h_1^x[m - 1, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m - 1, n] - V1[m - 1, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m - 1, n] - U1[m - 1, n - 1])/dy \\ A_L &= \frac{g}{C_1^x[m - 1, n]} \cdot (V1[m - 1, n] \cdot h_y + h_1^x[m - 1, n] \cdot V_y) \\ B_L &= V1[m - 1, n] \cdot U_y \end{aligned} \quad (8.201)$$

• Ponto R:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m + 1, n] - h_1^x[m + 1, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m + 1, n] - V1[m + 1, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m + 1, n] - U1[m + 1, n - 1])/dy \\ A_R &= \frac{g}{C_1^x[m + 1, n]} \cdot (V1[m + 1, n] \cdot h_y + h_1^x[m + 1, n] \cdot V_y) \\ B_R &= V1[m + 1, n] \cdot U_y \end{aligned} \quad (8.202)$$

- Velocidade  $U$

$$\begin{aligned} U2[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + U1[m+1, n]) \\ &\quad + (C_1^x[m-1, n] - C_1^x[m+1, n]) \quad . \quad (8.203) \\ &\quad + 0.25 \cdot (A_R - A_L - 2 \cdot B_P - B_L - B_R) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^x[m, n] &= 0.25 \cdot (U1[m-1, n] - U1[m+1, n]) \\ &\quad + 0.5 \cdot (C_1^x[m-1, n] + C_1^x[m+1, n]) \quad . \quad (8.204) \\ &\quad - 0.125 \cdot (A_L + A_R + 2 \cdot A_P + B_L - B_R) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.205)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção  $y$ :** Ainda na fronteira  $y = cy$  do reservatório só que agora na saída da água, tem que  $V_P = 1$ . Ao observar a direção  $y$  tem-se que só existe a Característica negativa ( $LP$ ). Através da equação (8.91), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} V_P + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\ \Rightarrow 1 + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \quad (8.206) \\ \Rightarrow 2c_P &= -1 + (V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\ \Rightarrow c_P &= -0.5 + 0.5(V_L + 2c_L) - 0.25(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \end{aligned}$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_P$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\ U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \\ V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m-1, n]) / (2 \cdot dx) \quad . \quad (8.207) \\ D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\ E_P &= U1[m, n] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n-1] - h_1^y[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 U_x &= (U1[m+1, n-1] - U1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \\
 V_x &= (V1[m+1, n-1] - V1[m-1, n-1]) / (2 \cdot dx) \quad . \quad (8.208) \\
 D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\
 E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x
 \end{aligned}$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 1 \quad . \quad (8.209)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= -0.5 + 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + 2 \cdot C_1^y[m, n-1]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (D_P + E_P + D_L + E_L) \cdot \Delta t \quad . \quad (8.210)
 \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.211)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.212)$$

e portanto

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.213)$$

Pontos de Canto

**Canto Inferior Esquerdo - (0,0)** Tem-se no ponto (0,0) que  $U_P = 0$  e  $V_P = 0$ .

**Direção  $x$ :** Considerando o ponto (0,0) na direção  $x$ , só existe a Característica positiva ( $RP$ ) e  $U_P = 0$ . Segue da equação (8.80) que

$$\begin{aligned}
 U_P - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\
 \Rightarrow 0 - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \quad . \quad (8.214) \\
 \Rightarrow c_P &= -0.5(U_R - 2c_R) - 0.25(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t
 \end{aligned}$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P, B_P, A_R, B_R, U_R$  e  $c_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n])/dy \\
 V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n])/dy \\
 U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n])/dy \\
 A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\
 B_P &= V1[m, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.215)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_y &= (h_1^x[m+1, n+1] - h_1^x[m+1, n])/dy \\
 V_y &= (V1[m+1, n+1] - V1[m+1, n])/dy \\
 U_y &= (U1[m+1, n+1] - U1[m+1, n])/dy \\
 A_R &= \frac{g}{C_1^x[m+1, n]} \cdot (V1[m+1, n] \cdot h_y + h_1^x[m+1, n] \cdot V_y) \\
 B_R &= V1[m+1, n] \cdot U_y
 \end{aligned} \quad . \quad (8.216)$$

- Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.217)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^x[m, n] &= -0.5 \cdot (U1[m+1, n] - 2 \cdot C_1^x[m+1, n]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (A_P - B_P + A_R - B_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.218)$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.219)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Considerando o ponto (0,0) na direção y, só existe a Característica positiva (RP) e  $V_P = 0$ . Segue da equação (8.92) que

$$\begin{aligned}
 V_P - 2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
 \Rightarrow 0 - 2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\
 \Rightarrow c_P &= -0.5(V_R - 2c_R) - 0.25(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t
 \end{aligned} \quad . \quad (8.220)$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $D_P, D_R, E_R, E_P$ .



- Ponto P:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m, n])/dx \\
 U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m, n])/dx \\
 V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m, n])/dx \\
 D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\
 E_P &= U1[m, n] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.221)$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned}
 h_x &= (h_1^y[m+1, n+1] - h_1^y[m, n+1])/dx \\
 U_x &= (U1[m+1, n+1] - U1[m, n+1])/dx \\
 V_x &= (V1[m+1, n+1] - V1[m, n+1])/dx \\
 D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n+1]} \cdot (h_1^y[m, n+1] \cdot U_x + U1[m, n+1] \cdot h_x) \\
 E_R &= U1[m, n+1] \cdot V_x
 \end{aligned} \quad . \quad (8.222)$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.223)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned}
 C_2^y[m, n] &= -0.5 \cdot (V1[m, n+1] - 2 \cdot C_1^y[m, n+1]) \\
 &\quad - 0.25 \cdot (D_P - E_P + D_R - E_R) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \quad .$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.224)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.225)$$

e

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.226)$$

**Canto Superior Esquerdo -  $(0, cy)$**  Tem-se no ponto  $(0, cy)$  que  $U_P = 0$  e  $V_P = 0$ .

**Direção  $x$ :** Considerando o ponto  $(0, cy)$  na direção  $x$ , só existe a Característica positiva

( $RP$ ) e  $U_P = 0$ . Segue da equação (8.80) que

$$\begin{aligned} U_P - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \\ \Rightarrow 0 - 2c_P &= (U_R - 2c_R) + 0.5(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \quad . \quad (8.227) \\ \Rightarrow c_P &= -0.5(U_R - 2c_R) - 0.25(A_P - B_P + A_R - B_R)\Delta t \end{aligned}$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P$ ,  $B_P$ ,  $A_R$  e  $B_R$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n] - h_1^x[m, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m, n] - V1[m, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m, n] - U1[m, n - 1])/dy \quad . \quad (8.228) \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned}$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m + 1, n] - h_1^x[m + 1, n - 1])/dy \\ V_y &= (V1[m + 1, n] - V1[m + 1, n - 1])/dy \\ U_y &= (U1[m + 1, n] - U1[m + 1, n - 1])/dy \quad . \quad (8.229) \\ A_R &= \frac{g}{C_1^x[m + 1, n]} \cdot (V1[m + 1, n] \cdot h_y + h_1^x[m + 1, n] \cdot V_y) \\ B_R &= V1[m + 1, n] \cdot U_y \end{aligned}$$

- Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.230)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^x[m, n] &= -0.5 \cdot (U1[m + 1, n] - 2 \cdot C_1^x[m + 1, n]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (A_P - B_P + A_R - B_R) \cdot \Delta t \quad . \quad (8.231) \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.232)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Considerando o ponto  $(0, c_y)$  na direção  $y$ , só existe a característica negativa

(LP) e  $V_P = 0$ . Através da equação (8.91), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} V_P + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\ \Rightarrow 0 + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \quad . \quad (8.233) \\ \Rightarrow c_P &= 0.5(V_L + 2c_L) - 0.25(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \end{aligned}$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_P$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m+1, n] - h_1^y[m, n])/dx \\ U_x &= (U1[m+1, n] - U1[m, n])/dx \\ V_x &= (V1[m+1, n] - V1[m, n])/dx \quad . \quad (8.234) \\ D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\ E_P &= U1[m, n] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m+1, n-1] - h_1^y[m, n-1])/dx \\ U_x &= (U1[m+1, n-1] - U1[m, n-1])/dx \\ V_x &= (V1[m+1, n-1] - V1[m, n-1])/dx \quad . \quad (8.235) \\ D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n-1]} \cdot (h_1^y[m, n-1] \cdot U_x + U1[m, n-1] \cdot h_x) \\ E_L &= U1[m, n-1] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.236)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^y[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n-1] + 2 \cdot C_1^y[m, n-1]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (D_P + E_P + D_L + E_L) \cdot \Delta t \quad . \quad (8.237) \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.238)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.239)$$

e

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} . \quad (8.240)$$

**Canto Superior Direito -  $(cx, cy)$**  Tem-se no ponto  $(cx, cy)$  que  $U_P = 0$  e  $V_P = 0$ .

**Direção  $x$ :** Considerando o ponto  $(cx, cy)$  na direção  $x$ , só existe a característica negativa ( $LP$ ) e  $U_P = 0$ . Através da equação (8.79), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} U_P + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow 2c_P &= (U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow c_P &= +0.5(U_L + 2c_L) - 0.25(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \end{aligned} . \quad (8.241)$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P$ ,  $B_P$ ,  $A_L$  e  $B_L$ .

• Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n] - h_1^x[m, n-1])/dy \\ V_y &= (V1[m, n] - V1[m, n-1])/dy \\ U_y &= (U1[m, n] - U1[m, n-1])/dy \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned} . \quad (8.242)$$

• Ponto L:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m-1, n] - h_1^x[m-1, n-1])/dy \\ V_y &= (V1[m-1, n] - V1[m-1, n-1])/dy \\ U_y &= (U1[m-1, n] - U1[m-1, n-1])/dy \\ A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\ B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y \end{aligned} . \quad (8.243)$$

• Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 . \quad (8.244)$$

• Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^x[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + 2 \cdot C_1^x[m-1, n]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (A_P + B_P + A_L + B_L) \cdot \Delta t \end{aligned} . \quad (8.245)$$

• Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} . \quad (8.246)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Considerando o ponto  $(cx, cy)$  na direção y, só existe a característica negativa (LP) e  $V_P = 0$ . Através da equação (8.91), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} V_P + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \\ \Rightarrow 0 + 2c_P &= +(V_L + 2c_L) - 0.5(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \quad . \quad (8.247) \\ \Rightarrow c_P &= 0.5(V_L + 2c_L) - 0.25(D_P + E_P + D_L + E_L)\Delta t \end{aligned}$$

onde é necessário calcular  $D_L$ ,  $D_P$ ,  $E_L$  e  $E_P$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n] - h_1^y[m - 1, n])/dx \\ U_x &= (U1[m, n] - U1[m - 1, n])/dx \\ V_x &= (V1[m, n] - V1[m - 1, n])/dx \quad . \quad (8.248) \\ D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\ E_P &= U1[m, n] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n - 1] - h_1^y[m - 1, n - 1])/dx \\ U_x &= (U1[m, n - 1] - U1[m - 1, n - 1])/dx \\ V_x &= (V1[m, n - 1] - V1[m - 1, n - 1])/dx \quad . \quad (8.249) \\ D_L &= \frac{g}{C_1^y[m, n - 1]} \cdot (h_1^y[m, n - 1] \cdot U_x + U1[m, n - 1] \cdot h_x) \\ E_L &= U1[m, n - 1] \cdot V_x : \end{aligned}$$

- Velocidade V

$$V2[m, n] = 0 \quad . \quad (8.250)$$

- Celeridade c

$$\begin{aligned} C_2^y[m, n] &= 0.5 \cdot (V1[m, n - 1] + 2 \cdot C_1^y[m, n - 1]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (D_P + E_P + D_L + E_L) \cdot \Delta t \quad . \quad (8.251) \end{aligned}$$

- Altura h

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} \quad . \quad (8.252)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.253)$$

e

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} \quad (8.254)$$

**Canto Inferior Direito -  $(cx, 0)$**  Tem-se no ponto  $(cx, 0)$  que  $U_P = 0$  e  $V_P = 0$ .

**Direção  $x$ :** Considerando o ponto  $(cx, 0)$  na direção  $x$ , só existe a característica negativa ( $LP$ ) e  $U_P = 0$ . Através da equação (8.79), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} U_P + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \\ \Rightarrow 0 + 2c_P &= +(U_L + 2c_L) - 0.5(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \quad (8.255) \\ \Rightarrow c_P &= +0.5(U_L + 2c_L) - 0.25(A_P + B_P + A_L + B_L)\Delta t \end{aligned}$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $A_P$ ,  $B_P$ ,  $A_L$  e  $B_L$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m, n+1] - h_1^x[m, n])/dy \\ V_y &= (V1[m, n+1] - V1[m, n])/dy \\ U_y &= (U1[m, n+1] - U1[m, n])/dy \quad (8.256) \\ A_P &= \frac{g}{C_1^x[m, n]} \cdot (V1[m, n] \cdot h_y + h_1^x[m, n] \cdot V_y) \\ B_P &= V1[m, n] \cdot U_y \end{aligned}$$

- Ponto L:

$$\begin{aligned} h_y &= (h_1^x[m-1, n+1] - h_1^x[m-1, n])/dy \\ V_y &= (V1[m-1, n+1] - V1[m-1, n])/dy \\ U_y &= (U1[m-1, n+1] - U1[m-1, n])/dy \quad (8.257) \\ A_L &= \frac{g}{C_1^x[m-1, n]} \cdot (V1[m-1, n] \cdot h_y + h_1^x[m-1, n] \cdot V_y) \\ B_L &= V1[m-1, n] \cdot U_y \end{aligned}$$

- Velocidade  $U$

$$U2[m, n] = 0 \quad (8.258)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^x[m, n] &= 0.5 \cdot (U1[m-1, n] + 2 \cdot C_1^x[m-1, n]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (A_P + B_P + A_L + B_L) \cdot \Delta t \quad (8.259) \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^x[m, n] = \frac{(C_2^x[m, n])^2}{g} . \quad (8.260)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^x[m, n] := C_2^x[m, n]$  e  $h_1^x[m, n] := h_2^x[m, n]$ .

**Direção y:** Considerando o ponto  $(0, 0)$  na direção  $y$ , só existe a Característica positiva  $(RP)$  e  $V_P = 0$ . Através da equação (8.92), encontra-se o valor de  $c_P$ .

$$\begin{aligned} V_P - 2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \\ \Rightarrow -2c_P &= +(V_R - 2c_R) + 0.5(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \quad . \quad (8.261) \\ \Rightarrow c_P &= -0.5(V_R - 2c_R) - 0.25(D_P - E_P + D_R - E_R)\Delta t \end{aligned}$$

Para encontrar  $c_P$  é necessário calcular  $D_P, D_R, E_R, E_P$ .

- Ponto P:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n] - h_1^y[m - 1, n])/dx \\ U_x &= (U1[m, n] - U1[m - 1, n])/dx \\ V_x &= (V1[m, n] - V1[m - 1, n])/dx \quad . \quad (8.262) \\ D_P &= \frac{g}{C_1^y[m, n]} \cdot (h_1^y[m, n] \cdot U_x + U1[m, n] \cdot h_x) \\ E_P &= U1[m, n] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Ponto R:

$$\begin{aligned} h_x &= (h_1^y[m, n + 1] - h_1^y[m - 1, n + 1])/dx \\ U_x &= (U1[m, n + 1] - U1[m - 1, n + 1])/dx \\ V_x &= (V1[m, n + 1] - V1[m - 1, n + 1])/dx \quad . \quad (8.263) \\ D_R &= \frac{g}{C_1^y[m, n + 1]} \cdot (h_1^y[m, n + 1] \cdot U_x + U1[m, n + 1] \cdot h_x) \\ E_R &= U1[m, n + 1] \cdot V_x \end{aligned}$$

- Velocidade  $V$

$$V2[m, n] = 0 . \quad (8.264)$$

- Celeridade  $c$

$$\begin{aligned} C_2^y[m, n] &= -0.5 \cdot (V1[m, n + 1] - 2 \cdot C_1^y[m, n + 1]) \\ &\quad - 0.25 \cdot (D_P - E_P + D_R - E_R) \cdot \Delta t \quad . \quad (8.265) \end{aligned}$$

- Altura  $h$

$$h_2^y[m, n] = \frac{(C_2^y[m, n])^2}{g} . \quad (8.266)$$

Faz-se um “loop” no programa considerando  $C_1^y[m, n] := C_2^y[m, n]$  e  $h_1^y[m, n] := h_2^y[m, n]$ .

Após ter encontrado  $C_2^x[m, n]$  e  $C_2^y[m, n]$ , obtém-se

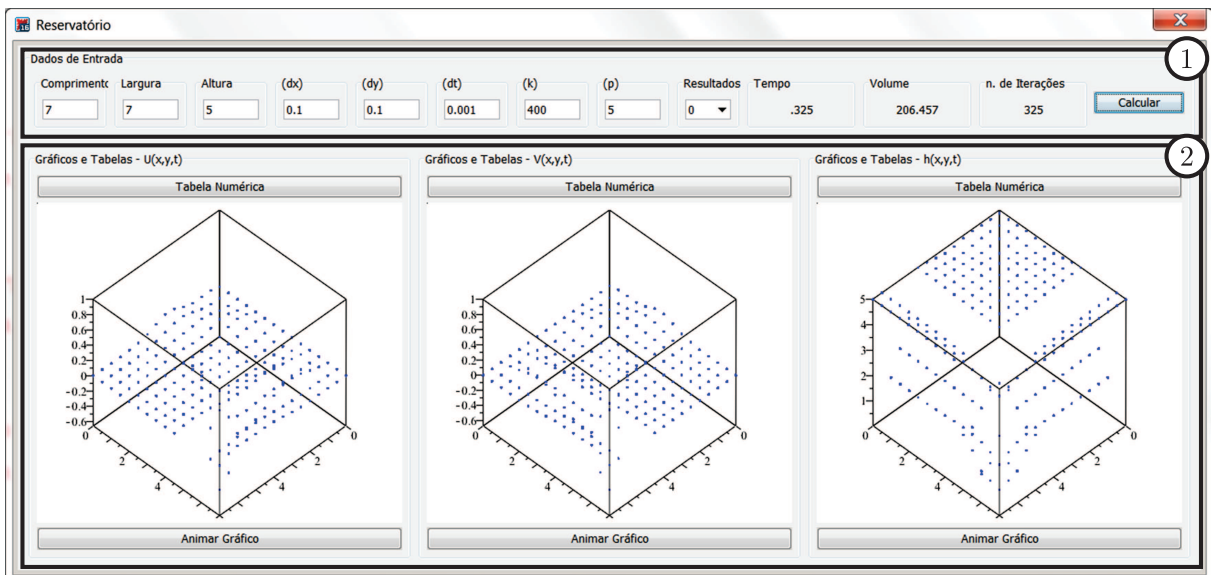
$$C_2[m, n] = \frac{C_2^x[m, n] + C_2^y[m, n]}{2} \quad (8.267)$$

e

$$h_2[m, n] = \frac{(C_2[m, n])^2}{g} . \quad (8.268)$$

#### 8.2.4 Solução do Problema do Reservatório via *Maplet*

Para visualização gráfica da resolução e resultados deste problema, uma *Maplet* foi programada via *software Maple*, na Figura 8.25 pode ser vista a tela do *software*.



**Figura 8.25: *Maplet* - Reservatório**

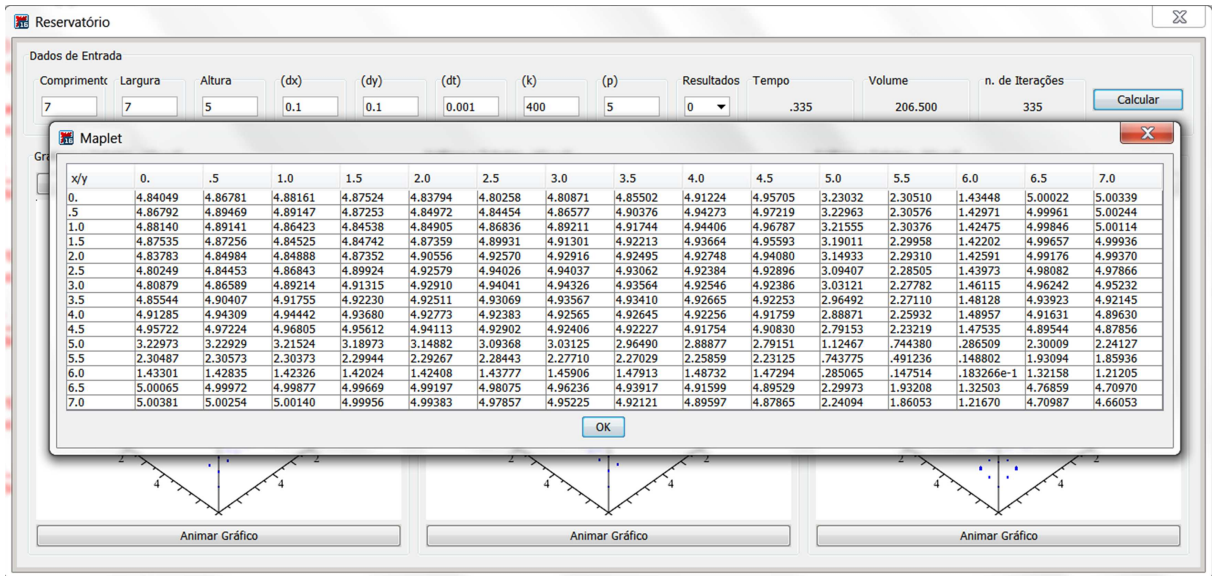
**Fonte: Autoria Própria**

O funcionamento da *Maplet* depende de algumas escolhas feitas pelo usuário, onde:

1. Área para digitar os dados de entrada. No exemplo dado, tem-se:

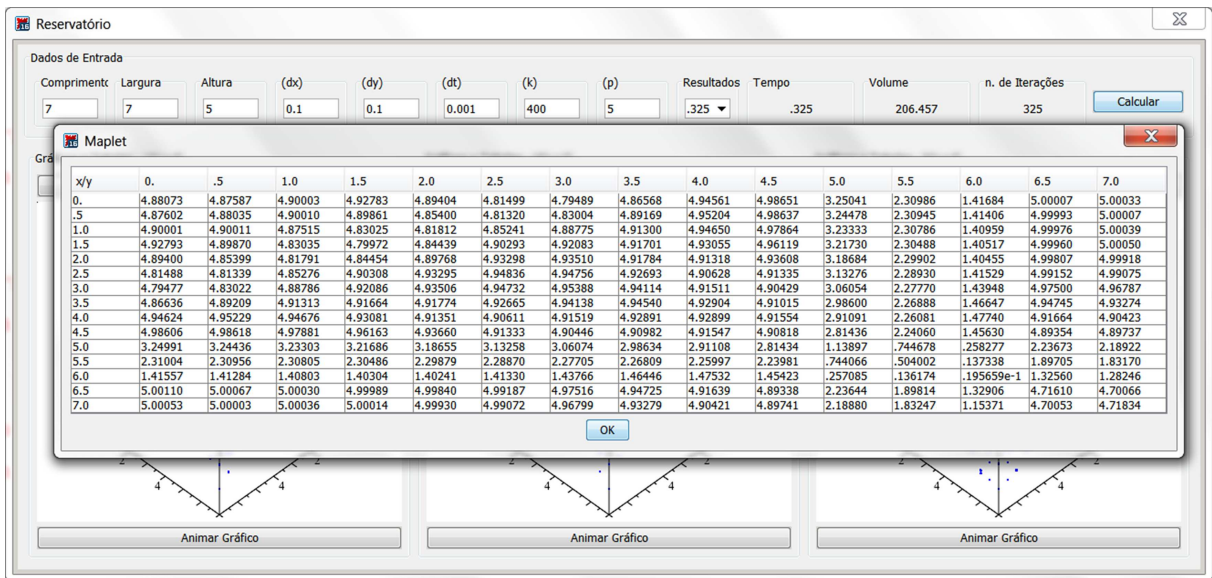


- Comprimento em  $x$ :  $cx = 7\text{ m}$ ;
  - Comprimento em  $y$ :  $cy = 7\text{ m}$ ;
  - Altura:  $h = 5\text{ m}$ ;
  - $dx = 0.1\text{ m}$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $x$ ;
  - $dy = 0.1\text{ m}$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $y$ ;
  - $dt = 0.01\text{ s}$  que representa o incremento infinitesimal na direção  $t$ ;
  - $k = 400$  é um dos critérios de parada que estipula a quantidade máxima de matrizes calculadas pelo *software*, caso não satisfaça o outro critério ( $C_2^x < 0.01$  ou  $C_2^y < 0.01$ ), estas matrizes compõem a solução final e representam o comportamento das velocidades  $U$  e  $V$ , além da altura  $h$  a cada posição no tempo;
  - $p = 5$  é um valor utilizado para restringir a quantidade de pontos salvos em cada matriz, e a quantidade de matrizes salvas na memória do *software*. Uma a cada ( $p$ ) matrizes, que poderão ser visualizadas posteriormente;
  - Resultados: Neste campo, o usuário pode selecionar as matrizes salvas na memória do *software*;
  - Tempo: Onde a passagem do tempo é apresentada enquanto o programa está rodando;
  - Volume: O volume relativo a cada passagem de tempo pode ser visualizado pelo usuário;
  - Iterações: Apresenta a quantidade de iterações já efetuadas para a obtenção dos resultados.
2. No campo 2, estão os gráficos que são atualizados em tempo real durante o decorrer dos cálculos efetuados pelo processo. Para cada um deles é possível utilizar os botões:
- Tabela Numérica: Ao clicar neste botão, são apresentados os resultados da solução numérica para as variáveis  $U, V$  ou  $h$ , obtidos pela resolução do sistema de EDOs oriundo das equações iniciais.
- Os resultados compõem uma tabela de valores para momentos específicos do tempo, na Figura 8.26 é possível observar a tabela numérica selecionada para a altura  $h$  no tempo  $0.335\text{ s}$ , o tempo máximo obtido pelo processo quando realizado utilizando a ideia de fronteiras simples.



**Figura 8.26: Maplet - Alguns Resultados considerando fronteiras simples**  
**Fonte: Autoria Própria**

Por outro lado, quando o processo é realizado levando em conta todas as fronteiras cuidadosamente, o tempo máximo obtido até que o critério de parada seja satisfeito é 0.325 s, na Figura 8.27 é possível observar a tabela numérica deste resultado.



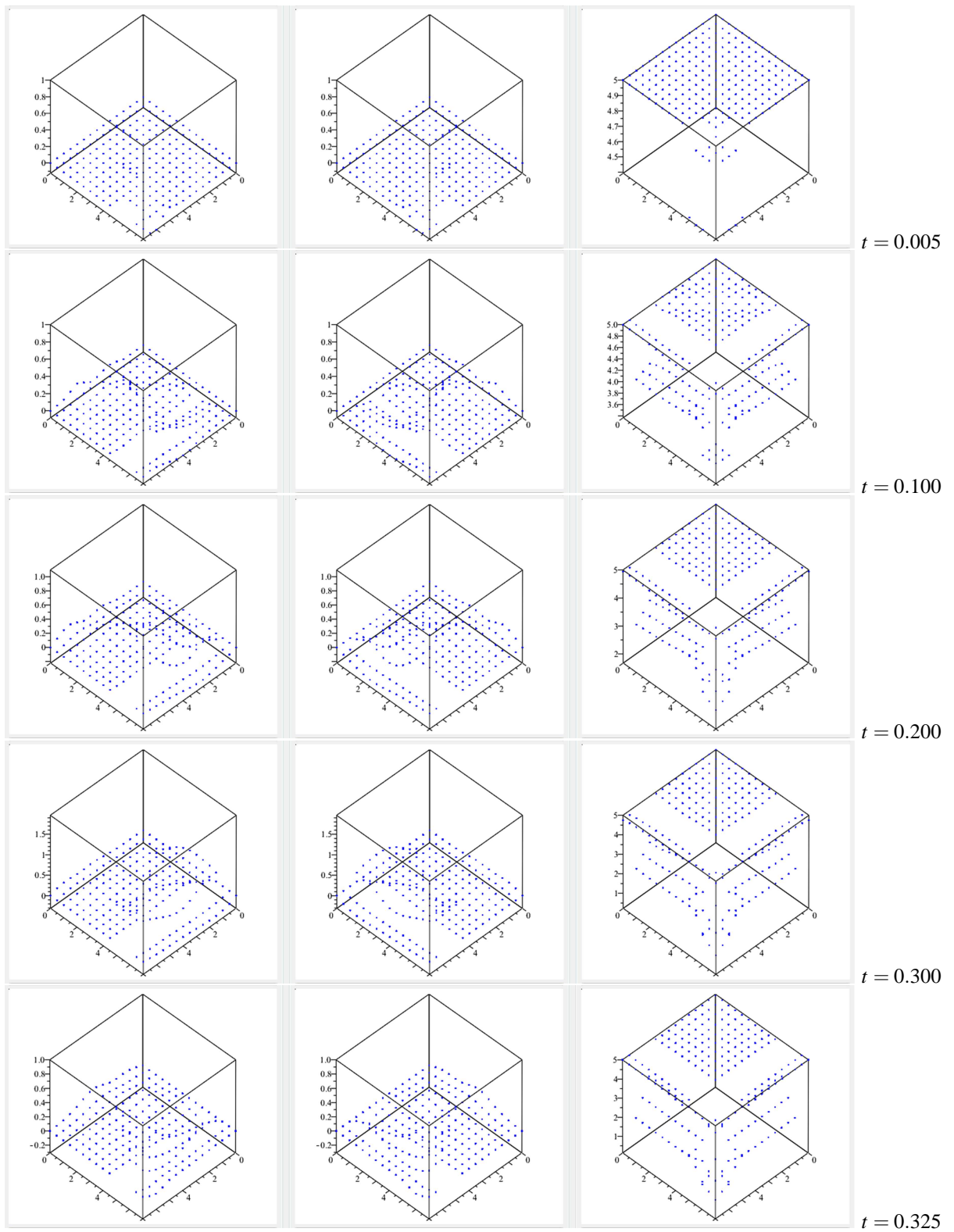
**Figura 8.27: Maplet - Alguns resultados considerando a fronteira detalhada**  
**Fonte: Autoria Própria**

No caso do exemplo estudado, independente da abordagem realizada nas fronteiras, observou-se que o processo foi interrompido quando a celeridade tornou-se menor

que 0.01 (na iteração de número 335 e 325, para fronteiras simples e detalhada, respectivamente), neste momento o volume de água já estava reduzido de 245 L (volume inicial) para aproximadamente 206.500 L (fronteira simples) e 206.457 L (fronteira detalhada).

Importante ressaltar que os resultados obtidos pelo conhecido Método das Diferenças Finitas Explícitas são relativamente próximos aos resultados encontrados pelo método implementado neste trabalho, ambos os métodos cessaram as atividades devido ao mesmo critério de parada, e os volumes finais obtidos foram de 206.500, 206.457 e 216.576 para o Método das Características com fronteira simples, detalhada e o Método das Diferenças Finitas Explícitas, respectivamente. Pode-se comparar tais valores observando as Figuras 8.26, 8.27 e a Tabela 9.

- Animar Gráfico: Este botão é utilizado quando se deseja visualizar os resultados gráficos dispostos em uma sequência animada. A quantidade de gráficos salvos depende dos valores de  $k$  e  $p$ , dados pelo usuário, no caso deste exemplo, o *software* armazenou  $325/5 = 65$  gráficos, além do gráfico das condições iniciais, resultando em 66 gráficos. Observando a Figura 2, que reúne seis dos gráficos obtidos para as velocidades  $U$  e  $V$ , e para a altura  $h$ , o que permite avaliar seus comportamentos com o decorrer do tempo.



**Figura 8.28: Frames da animação do esvaziamento do reservatório**  
**Fonte: Autoria Própria**

## 9 CONCLUSÃO

A já conhecida dedução das Equações de Saint Venant, em uma dimensão, via Teorema do Transporte de Reynolds serviu de inspiração para deduzir as Equações de Saint Venant bidimensionais, ainda que a mais elegante das derivações parta das equações de Navier-Stokes da hidrodinâmica, a escolha pela derivação fornecida pelo Teorema de Transporte de Reynolds se destacou por sua simplicidade. Linearizando estas mesmas equações, obteve-se as equações da onda em uma e duas dimensões. Para obter as soluções encontrou-se as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann. A solução numérica dessas equações foi obtida por métodos implementados via *software Maple*, atualmente em sua 16<sup>a</sup> edição, utilizando-se sua viabilidade para a construção de *Maplets*.

Como motivação a equação da onda unidimensional foi resolvida, algébrica e numericamente, encontrando-se as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann de duas formas distintas, por combinação linear e via determinante, ambas se mostraram eficazes. Ao utilizar a *Maplet* programada para obter a solução numérica da Equação do Telégrafo, tem-se em mãos uma maior variedade de ferramentas disponíveis em um único *software* para análise dos resultados, o acompanhamento dos cálculos e sua visualização gráfica ocorrem em tempo real, além disso, acrescenta-se a possibilidade de novas implementações que estendem ainda mais suas funcionalidades iniciais.

De forma análoga à equação da onda, as Equações de Saint Venant em uma dimensão foram resolvidas via combinação linear e determinante. O estudo de caso utilizado consistiu em analisar o escoamento da água em um canal retangular de grande largura avaliando a velocidade e profundidade em posições específicas do comprimento do canal e em instantes de tempo pré-fixados, o que tornou possível estimar tais valores em qualquer ponto do canal por meio de uma função duas vezes continuamente diferenciável que foi obtida pela interpolação do tipo *Spline Cúbico Natural*, sua utilização otimizou o código teórico por, entre outros fatores, não haver a necessidade de um número grande de subdivisões no intervalo de comprimento estudado, um clara vantagem se comparada com a *Interpolação Linear*, que é comumente utilizada.

Apoiando-se na ideia unidimensional, procurou-se obter as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann da equação da onda em duas dimensões via combinação linear, o que mostrou-se não ser possível devido ao número de equações ser diferente do número de incógnitas. Criou-se uma *alternativa* à combinação linear, obtendo-se então, as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann, o que caracterizou uma alteração do Método das Características, dando origem ao chamado Método das Pseudo-características.

Com este novo método, avaliou-se a vibração em uma membrana retangular obtendo-se a solução numérica, a qual foi comparada com a solução analítica obtida via Séries de Fourier, concluiu-se que o intervalo de variação da membrana para completar seu primeiro “loop” é bastante próximo aos resultados analíticos.

De maneira análoga à equação da onda em duas dimensões encontrou-se as Inclinações das Curvas Características e as Invariantes de Riemann, por meio do Método das Pseudo-características, pois, via Método das Características também não foi possível. Como estudo de caso, analisou-se um problema bidimensional de esvaziamento de um reservatório, obtendo-se como resultados a profundidade e a velocidade em duas direções, para instantes de tempo específicos e posições pré-fixadas no comprimento e largura do reservatório. Os resultados foram comparados com os dados obtidos por meio do já consagrado Método das Diferenças Finitas Explícitas, o que permitiu concluir que o Método das Pseudo-características é eficaz.

Os resultados obtidos pelos métodos implementados e testados, quantificam a validade do estudo, o Método das Pseudo-características se mostrou funcional quando pensado em duas dimensões, seus resultados se aproximaram de forma satisfatória dos dados obtidos por outros métodos já conhecidos e utilizados, como no caso do reservatório, resolvido pelo Método das Diferenças Finitas Explícitas, ou até mesmo da solução analítica, como no caso da membrana. Além disso, convém ressaltar a importância da viabilização dos resultados por meio de uma interface gráfica, pois, o processo de análise e entendimento dos resultados é amplificado.

É muito importante destacar que a validade deste estudo foi atestada para o caso de Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem e Sistemas de Primeira Ordem Hiperbólicos com até duas dimensões, os quais possuem duas famílias distintas de Curvas Características reais. A continuidade destes estudos é sugerida para os casos tridimensionais e também para os outros tipos de Equações Diferenciais Parciais, Elípticas cujas Curvas Características são não reais e Parabólicas onde as duas famílias de curvas características são iguais.

## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, M. B. **An Introduction to The Method of Characteristics**. 243 p: Thames and Hudson London, 1966.
- AMIN, S. et al. **Robust feasibility for control of water flow in a reservoir-canal system**. 2007.
- ANAVARRO, P. G. The shallow water equations: An example of hyperbolic system. **Monografias de La Real Academia de Ciencias de Zaragoza**, v. 31, p. 89–119, Jan 2008.
- AUDUSSE, E.; BRISTEAU, M.-O. **A well balanced positivity preserving “second-order” scheme for shallow water flows on unstructured meshes**. 2005. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp)>.
- BAZIN, H. **Experiments with waves and the propagation of negative waves**. Paris: Comptes Rendus, 1862.
- BAZIN, H. **Experimental research on wave propagation**. Paris: Acad. Sci., 1865.
- BOUSSINESQ, J. **Theory of the liquid intumescence, called a solitary wave or wave of translation**. Paris: Comptes Rendus, 1871.
- BOUSSINESQ, J. **The theory of waves and back waters which propagate along a rectangular horizontal canal, subject to continuous flow and having velocities in the canal that are approximately parallel to the bottom**. France: Jour. Math. Pures et Appl, de M. Liouville, 1872.
- BOUSSINESQ, J. **Theory of liquid periodic waves**. Paris: Acad. Sci., 1873.
- BOUSSINESQ, J. **Additions and clarifications for the memoir with the title: Treatise on the theory of flowing water**. Paris: Acad. Sci., 1877.
- BOUSSINESQ, J. **Treatise on the theory of flowing water**. Paris: Acad. Sci., 1877.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. **Análise Numérica**. 3. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- BURGUETE, J.; NAVARRO, P. G.; MURILLO, J. **Numerical boundary conditions for globally mass conservative methods to solve the shallow-water equations and applied to river flow**. 2005. Disponível em: <[www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)>.
- CHAUDHRY, M. **Open Channel Flow**. 483 p: Prentice Hall, 1993.
- CHUN, S. J.; MERKLEY, G. P. **ODE solution to the characteristic form of the Saint-Venant equations**. 2008.
- CHUN, S. J.; MERKLEY, G. P. **Ode solution to the characteristic form of the saint-venant equations**. **Irrig. Sci.**, Irrig. Sci., v. 26, p. 213–222, 2008.

- DELENNE, C.; GUINOT, V.; CAPPELAERE, B. **Direct sensivity computation the Saint-Venant equations with hydraulic jumps**. 2008. Disponível em: <<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B>>. Acesso em: dezembro/2010.
- DELPHI, M. Application of characteristics method for flood routing. **Journal of Geology and Mining Research**, Journal of Geology and Mining Research., v. 4(1), p. 8–12, Jan 2012.
- FENG, J.-H.; CAI, L.; XIE, W.-X. **CWENO-type central-upwind for multidimensional Saint-Venant system of shallow water equations**. 2005. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/apnum](http://www.elsevier.com/locate/apnum)>. Acesso em: dezembro/2010.
- FIGUEIREDO, D. G. d. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 1. ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.
- FOO, M.; BEDJAOUI, N.; WEYER, E. **Segmentation of a river using the Saint Venant equations**. 2010.
- GUGAT, M.; LEUGERING, G. **Global boundary controllability of the Saint-Venant system for sloped canals with friction**. 2008. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/anihpe](http://www.elsevier.com/locate/anihpe)>. Acesso em: dezembro/2010.
- GUILLOU, S. **Résolution Des Équation de Saint Venant Pour Les Écoulements**. Paris: Editions Universitaires Europeennes., 2010. Editions Universitaires Europeennes.
- HALL, W.; KEYNES, M. (Ed.). **The Wave Equation Classification and Characteristics Elliptic and Parabolic Equations**. [S.l.]: The Open University Press, 1973. Prepared by the Course Team.
- HASHEMI, M. R.; ABEDINI, M. J.; MALEKZADEH, P. **A differential quadrature analysis of unsteady open channel flow**. 2006. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/apm](http://www.elsevier.com/locate/apm)>. Acesso em: dezembro/2010.
- HASHEMI, M. R.; MOHAMMAD, J. A.; MALEKZADEH, P. **A differential quadrature analysis of unsteady open channel flow**. 2007. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/apm](http://www.elsevier.com/locate/apm)>.
- HENDERSON, F. M. **Open Channel Flow**. New York: The Macmillan Co., 1966.
- HERVOUET, J. M. **Hydrodynamics of Free Surface Flows with the Finite Element Method**. New York: Wiley, 2007.
- KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics/ Erwin Kreyszig**. 8. ed. John Wiley Sons: Peter Janzow, 1999.
- LAGRANGE, I. L. **Memoir on the theory of movement of fluides**. Berlin: Aca. Royal, 1781.
- LAGRANGE, I. L. **Analytical Mechanics**. Paris: Betrand's, 1788.
- LAPLACE, P. S. **Researches on some points of world system**. Paris: Aca. Sci., 1775.
- LI, J.; CHEN, G. **The Generalized Riemann problem method for the shallow water equations with bottom topography**. 2005. Disponível em: <[www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)>.



LIMA, T. M. d. **A Saint-Venant model fro gravity driven shallow water flows with variable density and compressibility effects**. 2007. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/mcm](http://www.elsevier.com/locate/mcm)>. Acesso em: dezembro/2010.

LITRICO, X. et al. **Hydraulic Modeling of an Automatic Upstream Water-Level Control Gate**. 2005. Disponível em: <[www.ascelibrary.org](http://www.ascelibrary.org)>.

LITRICO, X.; FROMION, V. **Boundary control of linearized Saint-Venant equations oscillating modes**. 2004. Acesso em: dezembro/2010.

LITRICO, X.; FROMION, V. **Boundary control of linearized Saint-Venant equations oscillating modes**. 2006. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/automatica](http://www.elsevier.com/locate/automatica)>. Acesso em: dezembro/2010.

LITRICO, X. et al. **Experimental validation of a methodology to control irrigation canals besed an Saint-Venant equations**. 1995. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/conengprac](http://www.elsevier.com/locate/conengprac)>. Acesso em: dezembro/2010.

MAHMOOD, K.; YEVJEVICH, V. **Unsteady Flow In Open Channels**. Colorado, USA: Water Resources Publications, 1975.

MATTHEIJ, R. M. M.; RIENSTRA, S. W.; BOONKKAMP, J. H. M. T. T. **Partial Differential Equations - Modeling, Analysis, Computation**. Eindhoven, The Netherlands: SIAM, 2005.

MEDEIROS, L. A. J.; FERREL, J. L.; BIAZUTTI, A. C. **Métodos Clássicos em Equações Diferenciais Parciais**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ-IM, 1999. 163 p.

MOUSSA, R.; BOCQUILLON, C. **Algorithms For Solving The Diffusive Wave Flood Routing Equation**. 1996.

MUNIER, S. et al. **Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects**. 2008. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/adwatres](http://www.elsevier.com/locate/adwatres)>. Acesso em: dezembro/2010.

PARTIOT, H. **Memoir on the tidal bore**. Paris: Comptes Rendus, 1858.

PARTIOT, H. **Memoir on the tidal bore**. French: Comptes Rendus, 1861.

PARTIOT, H. **Study on the movements of tides in maritime portion of rivers**. Paris: Comptes Rendus, 1861.

PARTIOT, H. **Memoir on the tides in rivers**. Paris: Comptes Rendus, 1871.

PRESS, W. H.; AL et. **Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing**. New York: Cambridge University Press, 2007.

RAFIEE, M. et al. **Combined State-Parameter Estimation for Shallow Water Equations**. 2011.

RUSSELL, J. S. **Experimental researches into the laws of certain hydro-dynamic phenomena that accompany the motion of floating bodies, and have not previously been reduced int conformity with the known laws of the resistance of fluids**. French: Edinburg, 1837.

RUSSELL, J. S. **Report on waves**. Scott: British Assoc. Adv. Sci. Proc. for 1844, 1845.

- SINGH, V.; WANG, G.-T.; ADRIAN, D. **Flood Routing Based on Diffusion Wave Equation Using Mixing Cell Method**. 1997.
- TCHAMEN, G.; KAHAWITA, R. **Modelling wetting and drying effects over complex topography**. 1998.
- THAI, V. D.; CAT, P. T. **Solving Two -Dimensional Saint venant Equation by Using Cellular Neural Network**. 2009.
- THAI, V. D.; CAT, P. T. **Equivalence and Stability of Two-layered Cellular Neural Network Solving Saint Venant 1D Equation**. 2010.
- TOSSOU, E. E. **Extension of the 2dh Saint-Venant Hydrodynamic Model for Flows with Vertical Acceleration**. Université Laval: Québec, 2009.
- TOUMBOU, B.; ROUX, D. Y. L.; SENE, A. **An existence theorem for a 2-D coupled sedimentation shallow water model**. 2007. Disponível em: <[www.elsevier.com/direct/CRASS1/](http://www.elsevier.com/direct/CRASS1/)>. Acesso em: dezembro/2010.
- TSAI, C. W. **Flood routing in mild-slope rivers - wave characteristics and downstream backwater effect**. 2005. Disponível em: <[www.elsevier.com/locate/jhydrol](http://www.elsevier.com/locate/jhydrol)>.
- VENANT, B. de S. **Theory of unsteady water flow, with application to river floods and to propagation of tides in river channels**. Paris: Comptes Rendus, 1871.
- WANG, G.-T. et al. **Modelling overland flow based on Saint-Venant equations for a discretized hillslope system**. 2002. Disponível em: <[www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)>.
- ZHAN, X. **Simulation of unsteady flow and solute transport in a tidal river network**. 2003.

**APÊNDICE A – TABELA**

**Tabela 9: Tabela de Resultados para o Método das Diferenças Finitas Explícitas**

	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
0.0	4.4354	4.4272	4.4356	4.4213	4.5027	4.5089	4.4787	4.4746	4.4899	4.4839	4.4780	4.5110	4.5562	4.5460	4.5321
0.5	4.4272	4.4745	4.4470	4.4006	4.4732	4.4045	4.3711	4.4087	4.4326	4.4122	4.4408	4.4714	4.5090	4.4894	4.5255
1.0	4.4356	4.4470	4.3898	4.4018	4.3637	4.3741	4.3926	4.3522	4.3398	4.4109	4.4489	4.4472	4.4273	4.4061	4.4480
1.5	4.4213	4.4006	4.4018	4.4282	4.4343	4.4478	4.4006	4.3450	4.3870	4.3961	4.3897	4.4851	4.4801	4.5377	4.5662
2.0	4.5027	4.4732	4.3637	4.4343	4.4473	4.3861	4.4011	4.3837	4.4689	4.3760	4.3733	4.5262	4.5419	4.5462	4.5091
2.5	4.5089	4.4045	4.3741	4.4478	4.3861	4.4074	4.3515	4.3520	4.4025	4.4180	4.4375	4.4591	4.5025	4.5109	4.5600
3.0	4.4787	4.3711	4.3926	4.4006	4.4011	4.3515	4.4021	4.3976	4.3477	4.3536	4.3399	4.4591	4.4577	4.5418	4.5375
3.5	4.4746	4.4087	4.3522	4.3450	4.3837	4.3520	4.3976	4.5123	4.4305	4.3931	4.4085	4.3934	4.3559	4.4664	4.5331
4.0	4.4899	4.4326	4.3398	4.3870	4.4689	4.4025	4.3477	4.4305	4.4805	4.5132	4.4299	4.3249	4.3606	4.3981	4.4513
4.5	4.4839	4.4122	4.4109	4.3961	4.3760	4.4180	4.3536	4.3931	4.5132	4.5336	4.4230	4.3874	4.3477	4.2765	4.3546
5.0	4.4780	4.4408	4.4489	4.3897	4.3733	4.4375	4.3399	4.4085	4.4298	4.4230	4.4211	4.3969	4.3618	4.2479	4.1031
5.5	4.5110	4.4714	4.4472	4.4851	4.5262	4.4591	4.4591	4.3934	4.3249	4.3874	4.3969	4.3460	4.4846	4.2884	4.1320
6.0	4.5562	4.5090	4.4273	4.4801	4.5419	4.5025	4.4577	4.3559	4.3606	4.3477	4.3618	4.4846	4.0544	3.9911	4.0072
6.5	4.5460	4.4894	4.4068	4.5377	4.5462	4.5109	4.5418	4.4664	4.3981	4.2765	4.2479	4.2884	3.9911	4.5387	4.3413
7.0	4.5321	4.5255	4.4480	4.5662	4.5091	4.5600	4.5375	4.5331	4.4513	4.3546	4.1031	4.1320	4.0072	4.3413	4.3562

**Fonte: Autoria própria.**

## ANEXO A - CANAL UNIDIMENSIONAL

### Início

```
restart;
with(Student[Calculus1]);
with(plots);
with(plots, implicitplot);
with(plottools);
with(CurveFitting);
with(Maplets[Elements]);
t := 0.;
iteracao := 10;
```

### Procedimento - exteriorEsq()

```
exteriorEsq := proc()
local i;
global t, h, g, q, nx, lc, H, erro, erNR, nig,
    MatrizV, MatrizP, MatrizC,
    SplineC, SplineV,
    dx, dt,
    v1, v2,
    c1, c2,
    xx, xr, xl,
    cr, cl,
    vr, vl,
    r1, r2,
    Vxr, S0, C;
q := vaz_x0(t);
xr[0] := dt*(c1[0]-v1[0]);
cr := inter_cv(xr[0])[1];
```

```
vr := inter_cv(xr[0])[2];
r2 := NewtonsMethod(
    x^7 +
    ((1/2)*vr-cr+g*dt*(.5*S0+(-1)*.25*g*vr*abs(vr)/
    (C^2*cr^2)))*x^6 -
    (1/2)*q*g*x^4 +
    (-1)*0.25*g*dt*q^2*g^3/C^2,
    x = c1[0]
);
c2[0] := r2;
r2 := NewtonsMethod(
    x^7 +
    ((1/2)*vr-cr+g*dt*(.5*S0+(-1)*.25*g*vr*abs(vr)/
    (C^2*cr^2)))*x^6 -
    (1/2)*q*g*x^4 +
    (-1)*0.25*g*dt*q^2*g^3/C^2,
    x = c2[0]
);
i := 0;
while erro <= abs(c2[0]-r2) or i < iteracao do
    c2[0] := r2;
    r2 := NewtonsMethod(
        x^7 +
        ((1/2)*vr-cr+g*dt*(.5*S0+(-1)*.25*g*vr*abs(vr)/
        (C^2*cr^2)))*x^6 -
        (1/2)*q*g*x^4 +
        (-1)*0.25*g*dt*q^2*g^3/C^2,
        x = c2[0]
    );
    i := i+1
end do;
v2[0] := q*g/(r2*r2);
c2[0] := r2
```

```
end proc:
```

### Procedimento - interior()

```
interior := proc()
global MatrizV, MatrizP, MatrizC,
t, g, nx, lc, H, erro, nig,
dx, dt,
v1, v2,
c1, c2,
h,
xx, xr, xl,
cr, cl,
vr, vl,
ca,
q,
r1, r2,
SplineC, SplineV,
m;
for m to nx do
xx := m*dx;
xr[m] := xx-dt*(v1[m]-c1[m]);
xl[m] := xx-dt*(v1[m]+c1[m]);
cr := inter_cv(xr[m])[1];
vr := inter_cv(xr[m])[2];
cl := inter_cv(xl[m])[1];
vl := inter_cv(xl[m])[2];
c2[m] := 0.25*(v1 - vr) +
0.5*(cl + cr) +
0.125*(g^2*dt*((vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) -
(vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
));
if 1 < m then
v2[m] := NewtonsMethod(
0.5*(v1 + vr) +
(cl - cr) +
0.5*g*dt*(
2*S0-0.5*g*(
(x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
(vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
(vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
)
) -
x,
x = v2[m-1]
)
else
v2[m] := NewtonsMethod(
0.5*(v1 + vr) +
(cl - cr) +
```

```
(1/2)*g*dt*(2*S0-0.5*g*(
(x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
(vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
(vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
)
) -
x,
x = v2[0]
)
end if;
CalculoPontoMedio(xx, v2[m], c2[m])
end do
end proc:
```

### Procedimento - CalculoPontoMedio(xx,v,c)

```
CalculoPontoMedio := proc(xx, v, c)
local i;
global v2, c2,
xr, xl,
vr, vl,
cl, cr,
caPM, vaPM,
auxiliarPM,
Vxr, Vxl,
S0, C,
SplineC, SplineV;
vaPM := v;
caPM := c;
xr[m] := xx+(-1)*.5*dt*(v+vr-c-cr);
xl[m] := xx+(-1)*.5*dt*(v+vl+c+cl);
cr := inter_cv(xr[m])[1];
vr := inter_cv(xr[m])[2];
cl := inter_cv(xl[m])[1];
vl := inter_cv(xl[m])[2];
i := 0;
c2[m] := 0.25*(v1 - vr) +
0.5*(cl + cr) +
0.125*(g^2*dt*((vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) -
(vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
));
if 1 < m then
v2[m] := NewtonsMethod(
0.5*(v1 + vr) +
(cl - cr) +
0.5*g*dt*(
2*S0+(-1)*.5*g*(
(x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
(vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
(vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
)
) -
x,
x = v2[m-1]
)
else
v2[m] := NewtonsMethod(
0.5*(v1 + vr) +
(cl - cr) +
```

```

        )
        x,
        x = v2[m-1]
    )
else
    v2[m] := NewtonsMethod(
        0.5*(v1 + vr) +
        (cl - cr) +
        0.5*g*dt*(2*S0+(-1)*.5*g*(
            (x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
            (vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
            (vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
        )
        )
        x,
        x = v2[0]
    )
end if;
while erro <= abs(caPM-c2[m]) or
    erro <= abs(vaPM-v2[m]) or
    i < iteracao
do
    vaPM := v2[m];
    caPM := c2[m];
    xr[m] := xx+(-1)*.5*dt*(v2[m]+vr-c2[m]-cr);
    xl[m] := xx+(-1)*.5*dt*(v2[m]+vl+c2[m]+cl);
    cr := inter_cv(xr[m])[1];
    vr := inter_cv(xr[m])[2];
    cl := inter_cv(xl[m])[1];
    vl := inter_cv(xl[m])[2];
    c2[m] := 0.25*(vl - vr) +
        0.5*(cl + cr) +
        0.125*(g^2*dt*((vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) -
            (vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
        )
    );
    if 1 < m then
        v2[m] := NewtonsMethod(
            0.5*(v1 + vr) +
            (cl - cr) +
            0.5*g*dt*(2*S0+(-1)*.5*g*(
                (x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
                (vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
                (vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
            )
            )
            x,
            x = v2[m-1]
        )
    else
        v2[m] := NewtonsMethod(
            0.5*(v1 + vr) +
            (cl - cr) +

```

```

        0.5*g*dt*(2*S0+(-1)*.5*g*(
            (x*abs(x))/(C^2*c2[m]^2) +
            (vr*abs(vr))/(C^2*cr^2) +
            (vl*abs(vl))/(C^2*cl^2)
        )
        )
        x,
        x = v2[0]
    )
    fi:
    i := i+1
end do
end proc:

```

### Procedimento - exterior()

```

exterior := proc()
local ca, i;
global MatrizV, MatrizP, MatrizC,
    t, g, nx, lc, H, erro, nig,
    dx, dt,
    v1, v2,
    cl, c2,
    h,
    xx, xr, xl,
    cr, cl,
    vr, vl,
    q,
    r1, r2,
    Vx1, S0, C,
    SplineC, SplineV;
xl[nx] := lc - dt*c1[nx];
cl := inter_cv(xl[nx])[1];
vl := inter_cv(xl[nx])[2];
c2[nx] := cl + 0.5*vl +
    0.5*g*dt*(S0 - 0.5*(g*vl*abs(vl))/(C^2*cl^2));
ca := c2[nx];
xl[nx] := lc - 05*dt*(vl+c2[nx]+cl);
cl := inter_cv(xl[nx])[1];
vl := inter_cv(xl[nx])[2];
c2[nx] := cl + 0.5*vl +
    0.5*g*dt*(S0 - 0.5*(g*vl*abs(vl))/(C^2*cl^2));
while erro <= abs(ca - c2[nx]) do
    ca := c2[nx];
    xl[nx] := lc - 0.5*dt*(vl + c2[nx] + cl);
    cl := inter_cv(xl[nx])[1];
    vl := inter_cv(xl[nx])[2];
    c2[nx] := cl + 0.5*vl +
        0.5*g*dt*(S0 - 0.5*(g*vl*abs(vl))/(C^2*cl^2));
end do

```

```
end proc:
```

### Procedimento - canal()

```
canal := proc()
local i;
global MatrizV, MatrizP, MatrizC,
t, g, nx, lc, H, erro, nig,
dx, dt,
v1, v2,
c1, c2,
xx, xr, xl,
cr, cl,
vr, vl,
ca,
q,
r1, r2,
SplineC, SplineV;
for i from 0 to nx do
vl[i] := v2[i];
c1[i] := c2[i]
end do;
exteriorEsq();
if c2[0] < 0.0 then
break
end if;
interior();
exterior();
end proc:
```

### Procedimento - inter\_cv(p)

```
inter_cv := proc (p)
global MatrizV, MatrizP, MatrizC,
t, g, nx, lc, H, erro, nig,
dx, dt,
v1, v2,
c1, c2, h,
xx, xr, xl,
cr, cl,
vr, vl,
ca,
q,
r1, r2,
iIV, iniIV,
auxiliarIV, auxIV;
iIV := 1 + trunc(p/dx);
```

```
if nx < iIV then
iIV := nx
fi:
iniIV := iIV - 1;
auxIV := (p-iniIV*dx)/dx;
auxiliarIV[1] := c1[iniIV]+(c1[iIV]-c1[iniIV])*auxIV;
auxiliarIV[2] := v1[iniIV]+(v1[iIV]-v1[iniIV])*auxIV;
[auxiliarIV[1], auxiliarIV[2]]
end proc:
```

### Procedimento - gravar(linha)

```
gravar := proc(linha)
local i;
global MatrizV, MatrizP;
for i from 0 to 10 do
MatrizV[linha, i+1] := v2[nig*i];
MatrizP[linha, i+1] := c2[nig*i]*c2[nig*i]/g;
od:
end proc:
```

### Procedimento - Programa(gravidade, divisao, comprimento, altura, e, vazao)

```
Programa := proc(gravidade, divisao, comprimento, altura, e, vazao)
local i, j, d;
global MatrizV, MatrizP, MatrizC,
t, g, nx, lc, H, erro, nig,
dx, dt,
v1, v2,
c1, c2,
h,
xx, xr, xl,
cr, cl,
vr, vl,
ca,
q,
r1, r2,
contMatriz,
GrC, GrV, GrP,
ShowCx, ShowVx, ShowPx,
InterpolacaoC1, InterpolacaoC2,
InterpolacaoV1, InterpolacaoV2,
InterpolacaoP1, InterpolacaoP2,
vaz_x0,
MatrizXR, MatrizXL,
S0, C;
```



```

g := gravidade;
nx := divisao;
lc := comprimento;
H := altura;
erro := e;
nig := (1/10)*nx;
dx := lc/nx;
t := 0.;
S0 := 0.16e-2;
C := 100;
dt := (1/100)*H*dx;
contMatriz := 0;
vaz_x0 := vazao;
for i to 11 do
  ShowCx[i] := "true";
  ShowVx[i] := "true";
  ShowPx[i] := "true"
od;
for i from 0 to nx do
  c1[i] := sqrt(H*g);
  c2[i] := sqrt(H*g)
od;
for i from 0 to nx do
  v1[i] := 0.0;
  v2[i] := 0.0;
od;
for i from 0 to 10 do
  MatrizV[0, i+1] := nig*i*dx
od;
for i from 0 to 10 do
  MatrizP[0, i+1] := nig*i*dx;
od;
t := 0.0;
j := nig;
if nig <= j then
  j := 0.0;
  for i from 0 to 10 do
    MatrizV[contMatriz, i+1] := v2[nig*i];
    MatrizP[contMatriz, i+1] := c2[nig*i]^2/g;
    MatrizXR[contMatriz, i+1] := xr[nig*i];
    MatrizXL[contMatriz, i+1] := xl[nig*i]
  od;
  Tabelar();
fi;
j := j+1;
t := t+dt;
canal();
while 0.1e-1 <= c2[0] do
  if nig <= j then
    j := 0.0;
    contMatriz := contMatriz+1;
    for i from 0 to 10 do

```

```

    MatrizV[contMatriz, i+1] := v2[nig*i];
    MatrizP[contMatriz, i+1] := c2[nig*i]^2/g;
    MatrizXR[contMatriz, i+1] := xr[nig*i];
    MatrizXL[contMatriz, i+1] := xl[nig*i];
  od;
  Tabelar();
  if nig*dt <= t then
    GraficoTotal("V");
    GraficoTotal("P");
    Maplets:-Tools:-Set(CBVporX(itemlist) =
      [seq(
        convert(evalf(nig*dt*i, 5), string),
        i = 0 .. contMatriz
      )]
    );
    Maplets:-Tools:-Set(CBPporX(itemlist) =
      [seq(
        convert(evalf(nig*dt*i, 5), string),
        i = 0 .. contMatriz
      )]
    )
  fi;
  fi:
  j := j + 1;
  t := t + dt;
  canal();
  if c2[0] < 0.1e-1 then
    FuncaoInterpolacao();
  fi;
od;
end proc;

```

### Procedimento - Tabelar()

```

Tabelar := proc()
local d,i;
d := 5;
Maplets:-Tools:-Set(('TB1Vel')('appendline') = "");
Maplets:-Tools:-Set(('TB1Vel')('append') = evalf(t, 5));
for i from 1 to 11 do
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1Vel')('append') = " | ");
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1Vel')('append') =
    evalf(MatrizV[contMatriz, i], d)
  );
od;
Maplets:-Tools:-Set(('TB1Pro')('appendline') = "");
Maplets:-Tools:-Set(('TB1Pro')('append') = evalf(t, 5));
for i from 1 to 11 do
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1Pro')('append') = " | ");

```

```

Maplets:-Tools:-Set(('TB1Pro'))('append') =
    evalf(MatrixP[contMatriz, i], d)
);
od:
end proc:

```

### Procedimento - TabelaV()

```

TabelaV := proc()
global tabela;
    tabela := Maplet(
        [BoxCell(
            Table(
                [
                    "Tempo", "x0", "x40",
                    "x80", "x120", "x160",
                    "x200", "x240", "x280",
                    "x320", "x360", "x400"
                ],
                [seq([evalf(nig*dt*i, 5),
                    MatrizV[i, 1],
                    MatrizV[i, 2],
                    MatrizV[i, 3],
                    MatrizV[i, 4],
                    MatrizV[i, 5],
                    MatrizV[i, 6],
                    MatrizV[i, 7],
                    MatrizV[i, 8],
                    MatrizV[i, 9],
                    MatrizV[i, 10],
                    MatrizV[i, 11]],
                    i = 0 .. contMatriz
                )]
            ),
            'as_needed'
        ),
        Button("OK", Shutdown())
    );
Maplets[Display](tabela)
end proc:

```

### Procedimento - TabelaP()

```

TabelaP := proc()
global tabela;
    tabela := Maplet(
        [BoxCell(
            Table(

```

```

[
    "Tempo", "x0", "x40",
    "x80", "x120", "x160",
    "x200", "x240", "x280",
    "x320", "x360", "x400"
],
[seq([evalf(nig*dt*i, 5),
    MatrizP[i, 1],
    MatrizP[i, 2],
    MatrizP[i, 3],
    MatrizP[i, 4],
    MatrizP[i, 5],
    MatrizP[i, 6],
    MatrizP[i, 7],
    MatrizP[i, 8],
    MatrizP[i, 9],
    MatrizP[i, 10],
    MatrizP[i, 11]],
    i = 0 .. contMatriz
)],
    'as_needed'
),
    Button("OK", Shutdown())
);
Maplets[Display](tabela)
end proc:

Procedimento - Grafico()

Grafico := proc(GE, Listal, Matriz, inty, col, tra)
    if GE = "G" then
        plot(spline(
            Listal,
            [seq(Matriz[i-1, col], i = 1 .. contMatriz+1)],
            x,
            cubic
        ),
            x = -1 .. t,
            y = inty,
            transparency = tra,
            color = red
        );
    elif GE = "E" then
        proc(x)
            options operator,
            arrow;
            spline(
                Listal,
                [seq(Matriz[i-1, col], i = 1 .. contMatriz+1)],

```

```

        x,
        cubic
    )
end proc
fi:
end proc:

```

### Procedimento - ZerarMarcar()

```

ZerarMarcar := proc ()
global GraficoPorT_cont:
local i:
for i from 0 to 10 do
    GraficoPorT_cont[i+1] := 0:
od:
end proc:

```

### Procedimento - Marcar()

```

Marcar := proc(CheckBox, CVP, num, tra, plotter)
local i;
global GxC, GxV, GxP,
    GraficoPorT_show, GraficoPorT_cont;
if CVP = "V" then
    GraficoPorT_show :=
    [
        implicitplot(
            [y = 0, x = 0],
            x = 0 .. t,
            y = -4 .. 1,
            color = black,
            labels = ["tempo", "Velocidade"],
            labeldirections = [horizontal, vertical]
        )
    ]
elif CVP = "P" then
    GraficoPorT_show :=
    [
        implicitplot(
            [y = 0, x = 0],
            x = 0 .. t,
            y = -1 .. 6,
            color = black,
            labels = ["tempo", "Profundidade"],
            labeldirections = [horizontal, vertical]
        )
    ]
fi:

```

```

if nig*dt <= t then
if CheckBox then
    GraficoPorT_cont[num] := 1
else
    GraficoPorT_cont[num] := 0
fi:
for i from 0 to 10 do
if CVP = "V" then
    if GraficoPorT_cont[i+1] = 1 then
        GraficoPorT_show := GraficoPorT_show, GxV[i+1]
    fi:
elif CVP = "P" then
    if GraficoPorT_cont[i+1] = 1 then
        GraficoPorT_show := GraficoPorT_show, GxP[i+1]
    fi:
od:
Maplets:-Tools:-Set(('plotter')('value') =
    display(GraficoPorT_show,
        labels = ["Tempo", "Velocidade"],
        labeldirections = [horizontal, vertical])
)
fi:
end proc:

```

### Procedimento - AnaliseDoGraficoPort()

```

AnaliseDoGraficoPort:=proc(CVP,plotter)
global AnaliseGraficaVouPporT:
AnaliseGraficaVouPporT:=Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
Window[MAIN]('title'="Análise Gráfica",
[
[
    Plotter[plotter](height=500, width=800)
],
[
    CheckBox['CheckBox000'](
        caption="x[0]",
        'onchange'='ActionCheckBox000'
    ),
    CheckBox['CheckBox040'](
        caption="x[1]",
        'onchange'='ActionCheckBox040'
    ),
    CheckBox['CheckBox080'](
        caption="x[2]",
        'onchange'='ActionCheckBox080'
    ),
    CheckBox['CheckBox120'](

```

```

        caption="x[3]",
        'onchange'='ActionCheckBox120'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox160' ](
        caption="x[4]",
        'onchange'='ActionCheckBox160'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox200' ](
        caption="x[5]",
        'onchange'='ActionCheckBox200'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox240' ](
        caption="x[6]",
        'onchange'='ActionCheckBox240'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox280' ](
        caption="x[7]",
        'onchange'='ActionCheckBox280'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox320' ](
        caption="x[8]",
        'onchange'='ActionCheckBox320'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox360' ](
        caption="x[9]",
        'onchange'='ActionCheckBox360'
    ),
    CheckBox[ 'CheckBox400' ](
        caption="x[10]",
        'onchange'='ActionCheckBox400'
    )
]
],
Action('reference'='ActionCheckBox000',
    Evaluate(
        'function'='Marcar(
            CheckBox000,CVP,1,0.0,plotter
        )'
    ),
),
Action('reference'='ActionCheckBox040',
    Evaluate(
        'function'='Marcar(
            CheckBox040,CVP,2,0.2,plotter
        )'
    ),
),
Action('reference'='ActionCheckBox080',
    Evaluate(
        'function'='Marcar(
            CheckBox080,CVP,3,0.4,plotter

```

```

        )'
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox120',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox120,CVP,4,0.6,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox160',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox160,CVP,5,0.7,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox200',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox200,CVP,6,0.8,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox240',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox240,CVP,7,0.7,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox280',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox280,CVP,8,0.6,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox320',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox320,CVP,9,0.4,plotter
            )'
        ),
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox360',
        Evaluate(
            'function'='Marcar(
                CheckBox360,CVP,10,0.2,plotter
            )'
        ),
    ),
),

```

```

        Action('reference'='ActionCheckBox400',
              Evaluate(
                'function'='Marcar(
                  CheckBox400,CVP,11,0.0,plotter
                )'
              )
            ):
    Maplets[Display](AnaliseGraficaVouPporT):
end proc:

```

## Procedimento - Equacao

```

Equacao := proc(
    CVP, RB1, RB2, RB3, RB4, RB5,
    RB6, RB7, RB8, RB9, RB10, RB11
)
    if CVP = "V" then
        if RB1 = "true" then
            MathML[Export](ExV[1](T))
        elif RB2 = "true" then
            MathML[Export](ExV[2](T))
        elif RB3 = "true" then
            MathML[Export](ExV[3](T))
        elif RB4 = "true" then
            MathML[Export](ExV[4](T))
        elif RB5 = "true" then
            MathML[Export](ExV[5](T))
        elif RB6 = "true" then
            MathML[Export](ExV[6](T))
        elif RB7 = "true" then
            MathML[Export](ExV[7](T))
        elif RB8 = "true" then
            MathML[Export](ExV[8](T))
        elif RB9 = "true" then
            MathML[Export](ExV[9](T))
        elif RB10 = "true" then
            MathML[Export](ExV[10](T))
        elif RB11 = "true" then
            MathML[Export](ExV[11](T))
        fi:
    elif CVP = "P" then
        if RB1 = "true" then
            MathML[Export](Exp[1](T))
        elif RB2 = "true" then
            MathML[Export](Exp[2](T))
        elif RB3 = "true" then
            MathML[Export](Exp[3](T))
        elif RB4 = "true" then
            MathML[Export](Exp[4](T))
        elif RB5 = "true" then

```

```

            MathML[Export](Exp[5](T))
        elif RB6 = "true" then
            MathML[Export](Exp[6](T))
        elif RB7 = "true" then
            MathML[Export](Exp[7](T))
        elif RB8 = "true" then
            MathML[Export](Exp[8](T))
        elif RB9 = "true" then
            MathML[Export](Exp[9](T))
        elif RB10 = "true" then
            MathML[Export](Exp[10](T))
        elif RB11 = "true" then
            MathML[Export](Exp[11](T))
        fi:
    fi:
end proc:

```

## Procedimento - AplicarEq2D

```

AplicarEq2D := proc(
    CVP, Ponto, RB1, RB2, RB3, RB4,
    RB5, RB6, RB7, RB8, RB9, RB10, RB11
)
    if CVP = "V" then
        if RB1 = "true" then
            ExV[1](evalf(Ponto, 5))
        elif RB2 = "true" then
            ExV[2](evalf(Ponto, 5))
        elif RB3 = "true" then
            ExV[3](evalf(Ponto, 5))
        elif RB4 = "true" then
            ExV[4](evalf(Ponto, 5))
        elif RB5 = "true" then
            ExV[5](evalf(Ponto, 5))
        elif RB6 = "true" then
            ExV[6](evalf(Ponto, 5))
        elif RB7 = "true" then
            ExV[7](evalf(Ponto, 5))
        elif RB8 = "true" then
            ExV[8](evalf(Ponto, 5))
        elif RB9 = "true" then
            ExV[9](evalf(Ponto, 5))
        elif RB10 = "true" then
            ExV[10](evalf(Ponto, 5))
        elif RB11 = "true" then
            ExV[11](evalf(Ponto, 5))
        fi:
    elif CVP = "P" then
        if RB1 = "true" then
            Exp[1](evalf(Ponto, 5))
        elif RB2 = "true" then
            Exp[2](evalf(Ponto, 5))

```

```

elif RB3 = "true" then
  Exp[3](evalf(Ponto, 5))
elif RB4 = "true" then
  Exp[4](evalf(Ponto, 5))
elif RB5 = "true" then
  Exp[5](evalf(Ponto, 5))
elif RB6 = "true" then
  Exp[6](evalf(Ponto, 5))
elif RB7 = "true" then
  Exp[7](evalf(Ponto, 5))
elif RB8 = "true" then
  Exp[8](evalf(Ponto, 5))
elif RB9 = "true" then
  Exp[9](evalf(Ponto, 5))
elif RB10 = "true" then
  Exp[10](evalf(Ponto, 5))
elif RB11 = "true" then
  Exp[11](evalf(Ponto, 5))
fi:
end proc:

```

## Procedimento - EquacaoBotao(CVP)

```

EquacaoBotao := proc (CVP)
global Equacoes;
Equacoes := Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
Window[MAIN]('title' = "Equações",
[
[
RadioButton[RB1](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*0,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB2](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*1,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB3](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*2,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB4](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*3,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB5](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*4,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB6](

```

```

cat(cat("x[",convert(dx*nig*5,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB7](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*6,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB8](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*7,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB9](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*8,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB10](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*9,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
),
RadioButton[RB11](
cat(cat("x[",convert(dx*nig*10,string)),"]"),
'group' = 'BG1'
)
],
MathMLViewer(height = 500,
width = 200,
'background' = "#FFFFFF",
'fontsize' = '8',
'foreground' = "#000000",
'reference' = 'MathMLEquacao'
),
[
Label['T']('caption'='T'),
TextField['TFP']('width' = 30, 'editable' = 'true'),
Button(" Calculator ",
Evaluate(
'function' = 'AplicarEq2D(CVP,
TFP,
convert(RB1, string),
convert(RB2, string),
convert(RB3, string),
convert(RB4, string),
convert(RB5, string),
convert(RB6, string),
convert(RB7, string),
convert(RB8, string),
convert(RB9, string),
convert(RB10, string),
convert(RB11, string)

```

```

        'target' = 'TFR'
    ),
    Label['fT']('caption'=cat(CVP,"(T)")),
    TextField['TFR']('width' = 30, 'editable' = 'true')
  ],
  Action('reference' = 'Action1',
    Evaluate(
      'function' = 'Equacao(CVP,
        convert(RB1, string),
        convert(RB2, string),
        convert(RB3, string),
        convert(RB4, string),
        convert(RB5, string),
        convert(RB6, string),
        convert(RB7, string),
        convert(RB8, string),
        convert(RB9, string),
        convert(RB10, string),
        convert(RB11, string)
      )',
      'target' = 'MathMLEquacao'
    )
  ),
  ButtonGroup['BG1'](onchange = Action1));
Maplets[Display](Equacoes);
end proc:

```

### Procedimento - GraficoPorX

```

GraficoPorX := proc(
  GE, Matriz, Listal, inty,
  linha, tra, CouS1, cor, filledtf
)
  if GE = "G" then
    if CouS1 = "C" then
      plot(
        spline(
          Listal,
          [seq(Matriz[linha, i], i = 1 .. 11)],
          x,
          cubic
        ),
        x = 0 .. 10*dx*nig,
        y = inty,
        transparency = tra,
        color = cor,
        filled = filledtf
      )
    end if
  end if
end proc:

```

```

    )
  elif CouS1 = "S" then
    plot(
      spline(
        Listal,
        [seq(Matriz[linha, i], i = 1 .. 11)],
        x,
        cubic
      ),
      x = 0 .. 10*dx*nig,
      y = inty,
      transparency = tra,
      color = cor,
      filled = filledtf
    )
  fi:
  elif GE = "E" then
    proc (x)
      options operator,
      arrow;
      spline(
        Listal,
        [seq(Matriz[linha, i], i = 1 .. 11)],
        x,
        cubic
      )
    end proc:
  fi:
end proc:

```

### Procedimento - ChamaGraficoPorX

```

ChamaGraficoPorX := proc(
  CVP, num1, num2, num3, num4,
  num5, num6, num7, num8, num9, num10
)
  global GVporX, GPporX;
  GVporX[0] := pointplot([0, 0]);
  GPporX[0] := pointplot([0, 0]);
  if CVP = "V" then
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
      display(GVporX[trunc(num1/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num2/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num3/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num4/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num5/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num6/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num7/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num8/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num9/(dt*nig))],
        GVporX[trunc(num10/(dt*nig))],
      )
  end if
end proc:

```

```

        GVporX[trunc(num10/(dt*nig))],
        labels = ["Comprimento", "Velocidade"],
        labeldirections = [horizontal, vertical]
    )
)
elif CVP = "P" then
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterPporX')('value') =
        display(GPporX[trunc(num1/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num2/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num3/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num4/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num5/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num6/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num7/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num8/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num9/(dt*nig))],
            GPporX[trunc(num10/(dt*nig))],
            labels = ["Comprimento", "Profundidade"],
            labeldirections = [horizontal, vertical]
        )
    )
fi:
end proc:

```

### Procedimento - AnaliseDoGrafico(CVP,plotter)

```

AnaliseDoGrafico:=proc(CVP,plotter)
global AnaliseGrafica:
    AnaliseGrafica:=Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
        Window[MAIN]('title'="Análise Gráfica",
            [
                [
                    Plotter[plotter](height=500, width=800)
                ],
                [
                    ComboBox('reference'='CB1VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB1VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB2VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB2VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB3VporX',
                        'width'='75',

```

```

                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB3VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB4VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB4VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB5VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB5VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB6VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB6VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB7VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB7VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB8VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB8VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB9VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB9VporX'
                    ),
                    ComboBox('reference'='CB10VporX',
                        'width'='75',
                        "0",
                        sort([seq(dt*i*nig,i=0..contMatriz)]),
                        'onchange'='onchangeCB10VporX'
                    )
                ]
            )
        ),
        Action('reference'='onchangeCB1VporX',
            Evaluate(

```



```

        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )
),
Action('reference'='onchangeCB2VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )
),
Action('reference'='onchangeCB3VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )
),
Action('reference'='onchangeCB4VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,

```

```

        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )'
),
Action('reference'='onchangeCB5VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )'
),
Action('reference'='onchangeCB6VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,
        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )'
),
Action('reference'='onchangeCB7VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
        CB1VporX,
        CB2VporX,
        CB3VporX,
        CB4VporX,
        CB5VporX,
        CB6VporX,

```

```

        CB7VporX,
        CB8VporX,
        CB9VporX,
        CB10VporX
    )'
)
),
Action('reference'='onchangeCB8VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
            CB1VporX,
            CB2VporX,
            CB3VporX,
            CB4VporX,
            CB5VporX,
            CB6VporX,
            CB7VporX,
            CB8VporX,
            CB9VporX,
            CB10VporX
        )'
    )
),
Action('reference'='onchangeCB9VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
            CB1VporX,
            CB2VporX,
            CB3VporX,
            CB4VporX,
            CB5VporX,
            CB6VporX,
            CB7VporX,
            CB8VporX,
            CB9VporX,
            CB10VporX
        )'
    )
),
Action('reference'='onchangeCB10VporX',
    Evaluate(
        'function'='ChamaGraficoPorX(CVP,
            CB1VporX,
            CB2VporX,
            CB3VporX,
            CB4VporX,
            CB5VporX,
            CB6VporX,
            CB7VporX,
            CB8VporX,
            CB9VporX,
            CB10VporX
        )'
    )
)

```

```

    )'
)
):
    Maplets[Display](AnaliseGrafica):
end proc:

```

### Procedimento - animaporx(CVP)

```

animarpox := proc(CVP)
    if CVP = "V" then
        Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
            display(
                seq(GVporXsemL[i], i = 1 .. contMatriz),
                insequence = true,
                labels = ["Comprimeto", "Velocidade"],
                labeldirections = [horizontal, vertical]
            )
        )
    elif CVP = "P" then
        Maplets:-Tools:-Set(('PlotterPporX')('value') =
            display(
                seq(GPporXsemL[i], i = 1 .. contMatriz),
                insequence = true,
                labels = ["Comprimeto", "Profundidade"],
                labeldirections = [horizontal, vertical]
            )
        )
    fi
end proc:

```

### Procedimento - ChamaEquacaoPorX(CVP, num)

```

ChamarEquacaoPorX := proc(CVP, num)
    if num <> 0 then
        if CVP = "V" then
            return EVporX[trunc(num/(dt*nig))](x)
        elif CVP = "P" then
            return EPporX[trunc(num/(dt*nig))](x)
        fi:
    else
        if CVP = "V" then
            return 0.0
        elif CVP = "P" then
            return H
        fi:
    fi:
end proc:

```



```

Maplets:-Tools:-Set(('PlotterV')('value') =
  display(
    seq(GxV[i], i = 1 .. 11),
    labels = ["Tempo", "Velocidade"],
    labeldirections = [horizontal, vertical]
  )
);
GVporX[contMatriz] :=
  GraficoPorX(
    "G",
    MatrizV,
    [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
    -4 .. 1,
    contMatriz,
    0.0,
    "C",
    red,
    false
  );
GVporXsemL[contMatriz] :=
  GraficoPorX(
    "G",
    MatrizV,
    [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
    -4 .. 1,
    contMatriz,
    0,
    "S",
    red,
    false
  );
EVporX[contMatriz] :=
  GraficoPorX(
    "E",
    MatrizV,
    [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
    -4 .. 1,
    contMatriz,
    0.0,
    red,
    false
  );
Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
  display(
    GVporXsemL[contMatriz],
    labels = ["Comprimento", "Velocidade"],
    labeldirections = [horizontal, vertical]
  )
);
elif CVP = "P" then
  for i from 1 to 11 do
    GxP[i] :=

```

```

  Grafico(
    "G",
    [seq(
      dt*nig*(i-1),
      i = 1 .. contMatriz+1
    )],
    MatrizP,
    -1 .. H+1,
    i,
    0.0
  );
od:
Exp :=
  seq(Grafico(
    "E",
    [seq(
      dt*nig*(i-1),
      i = 1 .. contMatriz+1
    )],
    MatrizP,
    -1 .. H+1,
    i,
    0.0
  ), i = 1 .. 11);
Maplets:-Tools:-Set(('PlotterP')('value') =
  display(
    seq(GxP[i], i = 1 .. 11),
    labels = ["Tempo", "Profundidade"],
    labeldirections = [horizontal, vertical]
  )
);
GPporX[contMatriz] :=
  GraficoPorX(
    "G",
    MatrizP,
    [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
    -1 .. H+1,
    contMatriz,
    0,
    "C",
    cyan,
    false
  );
GPporXsemL[contMatriz] :=
  GraficoPorX(
    "G",
    MatrizP,
    [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
    -1 .. H+1,
    contMatriz,
    0,
    "S",
    cyan,
    true
  );

```

```

    );
    EpporX[contMatriz] :=
      GraficoPorX(
        "E",
        MatrizP,
        [seq(dx*nig*i, i = 0 .. 10)],
        -1 .. H+1,
        contMatriz,
        0,
        cyan,
        false
      );
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterPporX')('value') =
      display(
        GpporXsemL[contMatriz],
        labels = ["Comprimento", "Profundidade"],
        labeldirections = [horizontal, vertical]
      )
    );
  fi:
end proc:

```

### Procedimento - Interpolacao(Matriz, gra)

```

Interpolacao := proc(Matriz, gra)
local vInt, wInt, fInt, yInt, a1Int, a2Int, AInt, BInt;
  vInt := Array([seq(
    dt*(i-1)*nig,
    i = 1 .. contMatriz+1
  )]);
  wInt := Array([seq(
    nig*(i-1)*dx,
    i = 1 .. 11
  )]);
  fInt :=
    proc (i, j)
      options operator,
      arrow;
      Matriz[i, j]
    end proc;
  yInt := Matrix(
    contMatriz+1,
    11,
    [seq(
      [seq(
        evalf(Matriz[j, i]),
        i = 1 .. 11
      )],
      j = 0 .. contMatriz
    )];

```

```

    )];
    a1Int := Matrix(
      contMatriz*dt*nig,
      lc,
      proc (i, j)
        options operator,
        arrow;
        i
      end proc
    );
    a2Int := Matrix(
      contMatriz*dt*nig,
      lc,
      proc (i, j)
        options operator,
        arrow;
        j
      end proc
    );
    AInt := ArrayTools[Concatenate](3, a1Int, a2Int);
    BInt := ArrayInterpolation(
      [vInt, wInt],
      yInt,
      AInt,
      method = spline,
      degree = 3
    );
    if gra = "1" then
      return Matrix(BInt)
    elif gra = "2" then
      return [seq(
        seq(
          [vInt[i], wInt[j], yInt[i, j]],
          j = 1 .. 11
        ),
        i = 1 .. contMatriz+1
      )];
    fi:
end proc:

```

### Procedimento - CalculoGrafico3D(CVP, Matriz, gra)

```

CalculoGrafico3D := proc(CVP, Matriz, gra)
global InterpolacaoC, InterpolacaoV, InterpolacaoP;
  if CVP = "V" then
    if gra = "1" then
      return matrixplot(
        Interpolacao(Matriz, gra),

```

```

        axes = boxed,
        labels = [
            "Tempo",
            "Comprimento",
            "Velocidade"
        ],
        labeldirections = [
            horizontal,
            horizontal,
            vertical
        ],
        title = "Velocidade - V(t,x)"
    )
elif gra = "2" then
    return pointplot3d(
        Interpolacao(Matriz, gra),
        symbol = point,
        thickness = 15,
        axes = boxed,
        labels = [
            "Tempo",
            "Comprimento",
            "Velocidade"
        ],
        labeldirections = [
            horizontal,
            horizontal,
            vertical
        ],
        title = "Matriz Velocidade"
    )
fi:
elif CVP = "P" then
    if gra = "1" then
        return matrixplot(
            Interpolacao(Matriz, gra),
            axes = boxed,
            labels = [
                "Tempo",
                "Comprimento",
                "Profundidade"
            ],
            labeldirections = [
                horizontal,
                horizontal,
                vertical
            ],
            title = "Profundidade - P(t,x)"
        )
    elif gra = "2" then
        return pointplot3d(
            Interpolacao(Matriz, gra),

```

```

        symbol = point,
        thickness = 15,
        axes = boxed,
        labels = [
            "Tempo",
            "Comprimento",
            "Profundidade"
        ],
        labeldirections = [
            horizontal,
            horizontal,
            vertical
        ],
        title = "Matriz Profundidade")
    fi:
end proc:

```

### Procedimento - Grafico3D(CVP, Matriz)

```

Grafico3D := proc(CVP, Matriz)
global InterpolacaoV1, InterpolacaoV2,
InterpolacaoP1, InterpolacaoP2,
Graficos;
Graficos :=
Maplet(
    'onstartup' = 'Action1',
    'reference' = 'PlotaPVI',
    Plotter(
        'background' = "#FFFFFF",
        'continuous' = 'true',
        'delay' = '100',
        'height' = '500',
        'reference' = 'Plotter1',
        'visible' = 'true',
        'width' = '600',
        'value' = CalculoGrafico3D(CVP,Matriz,"1")
    ),
    Plotter(
        'background' = "#FFFFFF",
        'continuous' = 'true',
        'delay' = '100',
        'height' = '500',
        'reference' = 'Plotter2',
        'visible' = 'true',
        'width' = '600',
        'value' = CalculoGrafico3D(CVP,Matriz,"2")
    ),
    BoxLayout(
        'background' = "#D6D3CE",

```



```

    ),
    BoxRow(
        Button(
            " Calcular ",
            Evaluate(
                'function' = 'AplicarEq3D(
                    CVP,
                    TFPTI,
                    TFPxI,
                    "M"
                )',
                'target' = 'TFRI'
            )
        )
    ),
    BoxRow(
        Label['MTxI'](
            'caption'=cat(CVP,"(i,j)")
        ),
        TextField['TFRI'](
            'width' = 10,
            'editable' = 'true'
        )
    )
)
)
)
)
)
)
Window(
    'layout' = 'BoxLayout1',
    'reference' = 'Window1',
    'resizable' = 'true',
    'title' = "Gráficos 3D"
),
Action(
    'reference' = 'Action1',
    RunWindow('window' = 'Window1')
);
Maplets[Display](Graficos)
end proc:

```

### Procedimento - AplicarEq3D(CVP, TFPT, TFPx, MI)

```

AplicarEq3D := proc(CVP, TFPT, TFPx, MI)
    if MI = "M" then
        if CVP = "V" then
            MatrizV[TFPT, TFPx]
        elif CVP = "P" then
            MatrizP[TFPT, TFPx]
        fi:
    end if:
end proc:

```

```

        elif MI = "I" then
            if CVP = "V" then
                Interpolacao(MatrizV, "1")[TFPT, TFPx]
            elif CVP = "P" then
                Interpolacao(MatrizP, "1")[TFPT, TFPx]
            fi:
        end if:
    end proc:

```

### Maplet Raíz

```

with (Maplets[Elements]):
    maplet :=
        Maplet(
            'onstartup'='Action1',
            'reference'='Maplet1',
            Plotter(
                'background'="#FFFFFF",
                'continuous'='true',
                'delay'='100',
                'height'='150',
                'reference'='PlotterVporX',
                'visible'='true', 'width'='350'
            ),
            Plotter(
                'background'="#FFFFFF",
                'continuous'='true',
                'delay'='100',
                'height'='150',
                'reference'='PlotterPporX',
                'visible'='true',
                'width'='350'
            ),
            Plotter(
                'background'="#FFFFFF",
                'continuous'='true',
                'delay'='100',
                'height'='150',
                'reference'='PlotterV',
                'visible'='true',
                'width'='350'
            ),
            Plotter(
                'background'="#FFFFFF",
                'continuous'='true',
                'delay'='100',
                'height'='150',
                'reference'='PlotterP',
                'visible'='true',
                'width'='350'
            )
        );
end with:

```



```

        'width'='350'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonPrograma',
        Evaluate(
            'function'='Programa(
                txtG,
                txtNX,
                txtLC,
                txtH,
                txtERRO,
                txtVAZAO
            )'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Calcular",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonPrograma',
        'reference'='ButtonPrograma',
        'visible'='true',width=200
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonEquacaoV',
        Evaluate('function'='EquacaoBotao("V")')
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Equação V(T)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonEquacaoV',
        'reference'='ButtonEquacaoV',
        'visible'='true',
        'width'='170'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonTabelaV',
        Evaluate(
            'function'='TabelaV()',
            'option'="append",
            'waitforresult'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Tabela V",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonTabelaV',

```

```

        'reference'='ButtonTabelaV',
        'visible'='true',
        'width'='170'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonGrafico3DV',
        Evaluate(
            'function'='Grafico3D("V",MatrizV)'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Gráfico V - 3D",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonGrafico3DV',
        'reference'='ButtonGrafico3DV',
        'visible'='true',
        'width'='170'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonEquacaoP',
        Evaluate(
            'function'='EquacaoBotao("P")'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Equação P(T)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonEquacaoP',
        'reference'='ButtonEquacaoP',
        'visible'='true',
        'width'='170'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonTabelaP',
        Evaluate(
            'function'='TabelaP()',
            'option'="append",
            'waitforresult'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Tabela P",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonTabelaP',
        'reference'='ButtonTabelaP',
        'visible'='true',

```

```

    'width'='170'
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonGrafico3DP',
    Evaluate(
      'function'='Grafico3D("P",MatrizP)'
    )
  ),
  Button(
    'background'='#D6D3CE',
    'caption'="Gráfico P - 3D",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonGrafico3DP',
    'reference'='ButtonGrafico3DP',
    'visible'='true',
    'width'='170'
  ),
  TextField(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtG',
    'value'="9.807",
    'visible'='true',
    'width'='5'
  ),
  TextField(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtNX',
    'value'="100",
    'visible'='true',
    'width'='5'
  ),
  TextField(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtLC',
    'value'="400",
    'visible'='true',
    'width'='5'
  ),
  TextField(

```

```

    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtH',
    'value'="5",
    'visible'='true',
    'width'='5'
  ),
  TextField(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtERRO',
    'value'="0.000001",
    'visible'='true',
    'width'='5'
  ),
  TextField(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtVAZAO',
    'value'="x -> piecewise(
      x < 60,
      (-1)*0.1*x,
      x < 80,
      -6+0.1*(x-60),
      80 <= x,
      -4
    )"
    'visible'='true',
    'width'='35'
  ),
  Label(
    'caption'=" nig = nx/10 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelNIG',
    'visible'='true'
  ),
  Label(
    'caption'=" dx = lc/nx ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelDX',
    'visible'='true'
  ),

```

```

Label(
    'caption'=" dT = 0.05*dx ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelDT',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" c^2 = g*H ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelC2',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" x[i] = nig*i*dx, 0 <= i <= 10 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelXI',
    'visible'='true'
),
TextBox(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true', 'enabled'='true',
    'foreground'="#000000", 'height'='1',
    'reference'='TB1Vel',
    'visible'='true',
    'width'='130',
    'wrapped'='true',
    'value'="
        T      = x[0]   = x[1]   =
        x[2]   = x[3]   = x[4]   =
        x[5]   = x[6]   = x[7]   =
        x[8]   = x[9]   = x[10]  "
),
TextBox(
    'background'="#FFFFFF",
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'height'='1',
    'reference'='TB1Pro',
    'visible'='true',
    'width'='130',
    'wrapped'='true',
    'value'="
        T      = x[0]   = x[1]   =
        x[2]   = x[3]   = x[4]   =
        x[5]   = x[6]   = x[7]   =
        x[8]   = x[9]   = x[10]  "
),
Action(
    'reference'='onchangeCBVporX',
    Evaluate(

```

```

        'function'='ChamaGraficoPorX(
            "V",
            CBVporX,
            0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
        )
    ),
    ComboBox(
        'reference'='CBVporX',
        'width'='50',
        "0",
        sort([0]),
        'onchange'='onchangeCBVporX'
    ),
    Action(
        'reference'='onchangeCBPporX',
        Evaluate(
            'function'='ChamaGraficoPorX(
                "P",
                CBPporX,
                0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
            )
        )
    ),
    ComboBox(
        'reference'='CBPporX',
        'width'='50',
        "0",
        sort([0]),
        'onchange'='onchangeCBPporX'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonEquacaoVporX',
        Evaluate(
            'function'='EquacaoPorX(
                "V",
                CBVporX,
                ChamarEquacaoPorX(
                    "V",
                    CBVporX
                )
            )
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Equação V(x)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonEquacaoVporX',
        'reference'='ButtonEquacaoVporX',
        'visible'='true'
    ),

```

```

Action(
  'reference'='clickButtonEquacaoPporX',
  Evaluate('function'='EquacaoPorX(
    "P",
    CBPporX,
    ChamarEquacaoPorX(
      "P",
      CBPporX
    )
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Equação P(x)",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonEquacaoPporX',
  'reference'='ButtonEquacaoPporX',
  'visible'='true'
),
Action(
  'reference'='clickButtonAnalisePporX',
  Evaluate('function'='AnaliseDoGrafico(
    "P",
    "PlotterPporX"
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Gráficos P(x)",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonAnalisePporX',
  'reference'='ButtonAnalisePporX',
  'visible'='true'
),
Action(
  'reference'='clickButtonAnaliseVporX',
  Evaluate('function'='AnaliseDoGrafico(
    "V",
    "PlotterVporX"
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Gráficos V(x)",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonAnaliseVporX',

```

```

  'reference'='ButtonAnaliseVporX',
  'visible'='true'
),
Action(
  'reference'='clickButtonAnimarVporX',
  Evaluate('function'='animarpox("V")'),
  SetOption(
    'option'='play',
    'target'='PlotterVporX',
    'value'='true'
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Animar",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonAnimarVporX',
  'reference'='ButtonAnimarVporX',
  'visible'='true'
),
Action(
  'reference'='clickButtonAnimarPporX',
  Evaluate('function'='animarpox("P")'),
  SetOption(
    'option'='play',
    'target'='PlotterPporX',
    'value'='true'
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Animar",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonAnimarPporX',
  'reference'='ButtonAnimarPporX',
  'visible'='true'
),
Action(
  'reference'='clickGraficosPport',
  Evaluate('function'='ZerarMarcar()'),
  Evaluate('function'='AnaliseDoGraficoPort(
    "P",
    "PlotterPport"
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Gráfico P(T)",
  'enabled'='true',

```

```

'foreground'="#000000",
'onclick'='clickGraficosPport',
'reference'='ButtonGraficosPport',
'visible'='true',
'width'='170'
),
Action(
'reference'='clickGraficosVport',
Evaluate('function'='ZerarMarcar()'),
Evaluate('function'='AnaliseDoGraficoPort(
"V",
"PlotterVport"
)')
),
Button(
'background'="#D6D3CE",
'caption'="Gráfico V(T)",
'enabled'='true',
'foreground'="#000000",
'onclick'='clickGraficosVport',
'reference'='ButtonGraficosVport',
'visible'='true',
'width'='170'
),
BoxLayout(
'background'="#D6D3CE",
'border'='false',
'halign'='center',
'inset'='5',
'reference'='BoxLayout1',
'valign'='center',
'vertical'='false',
'visible'='true',
BoxLayout(
BoxLayout(
BoxLayout(
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="Dados de Entrada",
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="(lc)",
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='txtLC',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout(
'border'='true',

```

```

'caption'="(H)",
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='txtH',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="(g)",
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='txtG',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="(nx)",
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='txtNX',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="(Erro)",
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='txtERRO',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout(
'border'='true',
'caption'="Considerações",
BoxLayout('border'='true',
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='ButtonPrograma',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout('border'='true',
BoxCell(
'hscroll'='never',
'value'='LabelNIG',
'vscroll'='never'
)
),
BoxLayout('border'='true',

```

```

        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='LabelDX',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxColumn('border'='true',
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='LabelDT',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxColumn('border'='true',
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='LabelC2',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxColumn('border'='true',
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='LabelXI',
            'vscroll'='never'
        )
    )
),
BoxRow(
    BoxColumn(
        'border'='true',
        'caption'='Função Vazão',
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='txtVAZAO',
            'vscroll'='never'
        )
    )
),
BoxColumn(
    'border'='true',
    'caption'='Velocidade',
    BoxRow(
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='ButtonTabelaV',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonGrafico3DV',
        'vscroll'='never'
    )
)

```

```

    ),
    BoxColumn(
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='PlotterV',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxRow(
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='ButtonEquacaoV',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonGraficosVport',
        'vscroll'='never'
    )
),
BoxColumn(
    BoxRow(
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='PlotterVporX',
            'vscroll'='never'
        )
    )
),
BoxRow(
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='CBVporX',
        'vscroll'='never'
    )
),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonEquacaoVporX',
        'vscroll'='never'
    )
),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonAnimarVporX',
        'vscroll'='never'
    )
),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonAnaliseVporX',
        'vscroll'='never'
    )
)
),
BoxColumn(

```

```

'border'='true',
'caption'='Profundidade',
BoxRow(
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonTabelaP',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonGrafico3DP',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxColumn(
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='PlotterP',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxRow(
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonEquacaoP',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonGraficosPport',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxColumn(
  BoxRow(
    BoxCell(
      'hscroll'='never',
      'value'='PlotterPporX',
      'vscroll'='never'
    )
  ),
  BoxRow(
    BoxCell(
      'hscroll'='never',
      'value'='CBPporX',
      'vscroll'='never'
    )
  ),
  BoxCell(

```

```

    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonEquacaoPporX',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonAnimarPporX',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonAnalisePporX',
    'vscroll'='never'
  )
),
)
),
)
),
BoxRow(
  'border'='true',
  'caption'="Velocidade T/x[i]",
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='TB1Vel',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxRow(
  'border'='true',
  'caption'="Profundidade T/x[i]",
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='TB1Pro',
    'vscroll'='never'
  )
),
),
),
),
Window(
  'layout'='BoxLayout1',
  'reference'='Window1',
  'resizable'='true',
  'title'="Maplet"
),
Action('reference'='Action1',
RunWindow('window'='Window1'))):
Maplets[Display](maplet);

```

## ANEXO B - TELÉGRAFO

```
restart:
with(Maplets[Elements]):
with(CurveFitting):
with(plots):
with(LinearAlgebra):
with(Student[Calculus1]):
with(plots, implicitplot):
with(plottools):
Digits:=6:
interface(displayprecision = 5):
```

### Procedimento - cond\_ini()

```
cond_ini := proc(x)
local p, q, v:
  p := -0.02;
  q := 0.00;
  v := 1.02 + p*x;
return([v,p,q]):
end proc:
```

### Procedimento - cond\_xp()

```
cond_xp := proc(t)
local v, q:
  if t < 0.00015 then
    q := (1.5 - vxp)/0.00015;
    v := vxp + q*t;
```

```
    return([v,q]):
  elif t < 0.07 then
    q := -0.25/0.06985;
    v := 1.5 + q*(t - 0.00015);
    return([v,q]):
  elif t < 1.0 then
    q := -1.25/0.93;
    v := 1.25 + q*(t - 0.07);
    return([v,q]):
  else
    q := 0.0;
    v := 0.0;
    return([v,q]):
  fi:
end proc:
```

### Procedimento - inter\_vpqq()

```
inter_vpqq := proc(xx)
local i, ini, aux, vx, px, qx:
  i := 1 + trunc(xx/dx);
  if i > nx then
    i := nx;
  fi:
  ini := i - 1;
  aux := (xx - x[ini])/dx;
  vx := vl[ini] + (vl[i] - vl[ini])*aux;
  px := pl[ini] + (pl[i] - pl[ini])*aux;
  qx := ql[ini] + (ql[i] - ql[ini])*aux;
  return([vx,px,qx]):
end proc:
```



## Procedimento - SplineV

```
SplineV := proc (c)
  options operator,
  arrow;
  Spline(
    [seq(x[i], i = 0 .. round(nx))],
    [seq(v1[i], i = 0 .. round(nx))],
    c,
    degree = 1
  ):
end proc:
```

## Procedimento - SplineP

```
SplineP := proc (c)
  options operator,
  arrow;
  Spline(
    [seq(x[i], i = 0 .. round(nx))],
    [seq(p1[i], i = 0 .. round(nx))],
    c,
    degree = 1
  ):
end proc:
```

## Procedimento - SplineQ

```
SplineQ := proc (c)
  options operator,
  arrow;
  Spline(
    [seq(x[i], i = 0 .. round(nx))],
    [seq(q1[i], i = 0 .. round(nx))],
    c,
    degree = 1
  ):
end proc:
```

## Procedimento - p\_interior()

```
p_interior := proc(m)
  local pr,pl,qr,q1,vr,v1,fr,fl,xr,xl:
  global p2, q2, v2:
  xr := evalf(x[m] + dt):
```

```
xl := evalf(x[m] - dt):
vr := evalf(SplineV(xr)):
pr := evalf(SplineP(xr)):
qr := evalf(SplineQ(xr)):
v1 := evalf(SplineV(xl)):
pl := evalf(SplineP(xl)):
q1 := evalf(SplineQ(xl)):
fr := -(vr + alfa*qr):
fl := -(v1 + alfa*q1):
p2[m] := evalf(0.5*(qr - q1 + pr + pl + dt*(fl - fr))):
q2[m] := evalf(0.5*(qr + q1 + pr - pl - dt*(fl + fr))):
v2[m] := v1 + 0.5*dt*(q2[m] + p2[m] + q1 + pl):
end proc:
```

## Procedimento - linha()

```
linha := proc()
  local i:
  global t,
  v1,v2,
  SplineV,
  p1,p2,
  SplineP,
  q1,q2,
  SplineQ:
  for i from 0 to nx do
    v1[i] := v2[i]:
    p1[i] := p2[i]:
    q1[i] := q2[i]:
  od:
  for i from 1 to ixp-1 do
    p_interior(i):
  od:
  for i from ixp+1 to nx-1 do
    p_interior(i):
  od:
  for i from 0 to 10*nx do
    np_interior(i)
  od:
  v2[0] := v2[1]:
  p2[0] := p2[1]:
  q2[0] := q2[1]:
  v2[round(nx)] := v2[round(nx-1)]:
  p2[round(nx)] := p2[round(nx-1)]:
  q2[round(nx)] := q2[round(nx-1)]:
  v2[ixp] := cond_xp(t)[1]:
  q2[ixp] := cond_xp(t)[2]:
```

```

if ixp = 0 then
  p2[ixp] := (v2[1] - v2[0])/dx:
elif ixp = nx then
  p2[ixp] := (v2[round(nx)] - v2[round(nx-1)])/dx:
else
  p2[ixp] := 0.5*(v2[ixp+1] - v2[ixp-1])/dx:
fi:
end proc:

```

### Procedimento - Gravar()

```

Gravar := proc()
global GraficoPorX,
EquacaoPorX,
GraficoPorT,
EquacaoPorT:
local j:
  Tabelar():
  GraficoPorX[LINHA] := plot(
    SplineV(x),
    x = 0..1,
    y = 0..1.5,
    labels = ["comprimento", "Tensao"],
    labeldirections = [horizontal, vertical]
  ):
  EquacaoPorX[LINHA] := proc(c)
    options operator,
    arrow;
    SplineV(c):
  end proc:
  for j from 1 to 11 do
    GraficoPorT[j] := plot(
      spline(
        [seq((i-1)*dt*nigt, i = 1..LINHA)],
        [seq(MatrizV[i,j], i = 1..LINHA)],
        c,
        cubic
      ),
      c = 0 .. t,
      y = 0 .. 1.5,
      labels = ["tempo", "Tensao"],
      labeldirections = [horizontal, vertical],
      transparency = 0.5,
      color = red
    ):
    EquacaoPorT[j] := proc(c)
      options operator,
      arrow;
      spline(
        [seq((i-1)*dt*nigt, i = 1..LINHA)],

```

```

[seq(MatrizV[i,j], i = 1..LINHA)],
        c,
        cubic
      ):
    end proc:
  od:
  Maplets:-Tools:-Set(CBVporX(itemlist) =
    [seq(
      convert(evalf(dt*nigt*i, 5), string),
      i = 0 .. LINHA
    )]
  ):
end proc:

```

### Procedimento - m\_car

```

m_car := proc()
global vxp,
qxp,
pxp,
x,
q1, q2,
v1, v2,
p1, p2,
xp, ixp,
nigx, nigt,
t, dx, dt,
lc, nx, erro,
LINHA, MatrizV,
GraficoPorX,
GraficoPorT,
EquacaoPorX,
EquacaoPorT:
local i, j:
  lc := 1.0:
  nx := 10:
  erro := 0.01:
  nigx := trunc(nx/10):
  nigt := 10*nigx:
  dx := lc/nx:
  dt := 0.001*dx:
  ixp := round(xp/dx):
  for i from 0 to nx do
    x[i] := i*dx:
    v2[i] := cond_ini(x[i])[1];
    p2[i] := cond_ini(x[i])[2];
    q2[i] := cond_ini(x[i])[3];
  od:
  for i from 0 to 10 do
    MatrizV[1, i+1] := x[nigx*i]:

```

```

od:
t := 0:0:
j := nigt:
if j >= nigt then
  j := 0:
  LINHA := LINHA + 1:
  j := 0:
  for i from 0 to 10 do
    MatrizV[LINHA,i+1] := v2[nigx*i]:
  od:
  Gravar():
fi:
j := j + 1:
t := t + dt:
linha(t):
while (v2[0] >= erro) and (v2[round(nx)] >= erro) do
  if j >= nigt then
    LINHA := LINHA + 1:
    j := 0:
    for i from 0 to 10 do
      MatrizV[LINHA,i+1] := v2[nigx*i]:
    od:
    Gravar():
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
      GraficoPorX[LINHA]
    ):
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterV')('value') =
      display(seq(GraficoPorT[i],i=1..10))
    ):
  fi:
  j := j + 1:
  t := t + dt:
  linha(t):
od:
end proc:

```

### Procedimento - Programa()

```

Programa := proc()
global LINHA, MatrizV, alfa, xp, vxp, pxp, qxp:
  alfa := 0.3:
  xp := 0.7:
  LINHA := 1:
  vxp := cond_ini(xp)[1]:
  pxp := cond_ini(xp)[2]:
  qxp := cond_ini(xp)[3]:
  m_car():
end proc:

```

### Procedimento - Tabelar()

```

Tabelar := proc ()
local d;
  d := 4;
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('appendline') = "");
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(t, 4)
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 1], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 2], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 3], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 4], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 5], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 6], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    evalf(MatrizV[LINHA, 7], d));
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
    " | "
  );
  Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =

```

```

    evalf(MatrizV[LINHA, 8], d));
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
" | "
);
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
evalf(MatrizV[LINHA, 9], d));
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
" | "
);
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
evalf(MatrizV[LINHA, 10], d));
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
" | "
);
Maplets:-Tools:-Set(('TB1V')('append') =
evalf(MatrizV[LINHA, 11], d)
);
end proc:

```

### Procedimento - TabelaV

```

TabelaV := proc ()
global tabela;
tabela := Maplet([BoxCell(Table(
["t/x", "0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4",
"0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1.0"],
[seq(
evalf(dt*nx*(i-2),3),
MatrizV[i, 1],
MatrizV[i, 2],
MatrizV[i, 3],
MatrizV[i, 4],
MatrizV[i, 5],
MatrizV[i, 6],
MatrizV[i, 7],
MatrizV[i, 8],
MatrizV[i, 9],
MatrizV[i, 10],
MatrizV[i, 11]
],i = 2 .. LINHA)]),
'as_needed'),
Button("OK", Shutdown())]);
Maplets[Display](tabela)
end proc:

```

### Procedimento - ZerarMarcar()

```
ZerarMarcar := proc ()
```

```

global GraficoPorT_cont:
local i:
for i from 0 to 10 do
    GraficoPorT_cont[i+1] := 0:
od:
end proc:

```

### Procedimento - Marcar()

```

Marcar := proc (CheckBox, num, plotter)
global GraficoPorT_cont, GraficoPorT_show;
local i:
GraficoPorT_show := [
implicitplot(
[y = 0, x = 0],
x = 0..t,
y = 0..1.5,
color = black,
labels = ["tempo", "Tensao"],
labeldirections = [horizontal, vertical]
)
]:
if CheckBox then
    GraficoPorT_cont[num] := 1:
else
    GraficoPorT_cont[num] := 0:
end if:
for i from 0 to 10 do
    if GraficoPorT_cont[i+1] = 1 then
        GraficoPorT_show :=
            GraficoPorT_show,
            GraficoPorT[i+1]:
    fi:
od:
Maplets:-Tools:-Set(('plotter')('value') =
display(
GraficoPorT_show,
labels = ["Tempo", "Tensão"],
labeldirections = [horizontal, vertical]
)
):
end proc:

```

### Procedimento - AnaliseDoGraficoPort()

```

AnaliseDoGraficoPort:=proc(CVP,plotter)
global AnaliseGraficaVouPporT:
  AnaliseGraficaVouPporT:=Maplet(
    onstartup = RunWindow(MAIN),
    Window[MAIN]('title'="Análise Gráfica",
      [
        [
          Plotter[plotter](height=500, width=800)
        ],
        [
          CheckBox[ 'CheckBox000' ](
            caption="x[0]",
            'onchange'='ActionCheckBox000'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox040' ](
            caption="x[1]",
            'onchange'='ActionCheckBox040'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox080' ](
            caption="x[2]",
            'onchange'='ActionCheckBox080'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox120' ](
            caption="x[3]",
            'onchange'='ActionCheckBox120'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox160' ](
            caption="x[4]",
            'onchange'='ActionCheckBox160'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox200' ](
            caption="x[5]",
            'onchange'='ActionCheckBox200'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox240' ](
            caption="x[6]",
            'onchange'='ActionCheckBox240'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox280' ](
            caption="x[7]",
            'onchange'='ActionCheckBox280'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox320' ](
            caption="x[8]",
            'onchange'='ActionCheckBox320'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox360' ](
            caption="x[9]",
            'onchange'='ActionCheckBox360'
          ),
          CheckBox[ 'CheckBox400' ](

```

```

            caption="x[10]",
            'onchange'='ActionCheckBox400'
          )
        ],
      ),
    Action('reference'='ActionCheckBox000',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox000,1,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox040',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox040,2,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox080',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox080,3,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox120',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox120,4,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox160',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox160,5,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox200',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox200,6,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox240',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox240,7,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox280',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox280,8,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox320',
      Evaluate(
        'function'='Marcar(CheckBox320,9,plotter)'
      )
    ),
    Action('reference'='ActionCheckBox360',

```

```

        Evaluate(
            'function'='Marcar(CheckBox360,10,plotter)'
        ),
        Action('reference'='ActionCheckBox400',
            Evaluate(
                'function'='Marcar(CheckBox400,11,plotter)'
            )
        ):
    Maplets[Display](AnaliseGraficaVouPporT):
end proc:

```

### Procedimento - Equacao()

```

Equacao := proc(
    CVP, RB1, RB2, RB3, RB4, RB5,
    RB6, RB7, RB8, RB9, RB10, RB11
)
    if RB1 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[1](T)):
    elif RB2 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[2](T)):
    elif RB3 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[3](T)):
    elif RB4 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[4](T)):
    elif RB5 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[5](T)):
    elif RB6 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[6](T)):
    elif RB7 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[7](T)):
    elif RB8 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[8](T)):
    elif RB9 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[9](T)):
    elif RB10 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[10](T)):
    elif RB11 = "true" then
        MathML[Export](EquacaoPorT[11](T)):
    end if:
end proc:

```

### Procedimento - AplicarEq2D()

```

AplicarEq2D := proc(
    CVP, Ponto, RB1,

```

```

    RB2, RB3, RB4,
    RB5, RB6, RB7,
    RB8, RB9, RB10, RB11
)
    if RB1 = "true" then
        EquacaoPorT[1](evalf(Ponto, 5))
    elif RB2 = "true" then
        EquacaoPorT[2](evalf(Ponto, 5))
    elif RB3 = "true" then
        EquacaoPorT[3](evalf(Ponto, 5))
    elif RB4 = "true" then
        EquacaoPorT[4](evalf(Ponto, 5))
    elif RB5 = "true" then
        EquacaoPorT[5](evalf(Ponto, 5))
    elif RB6 = "true" then
        EquacaoPorT[6](evalf(Ponto, 5))
    elif RB7 = "true" then
        EquacaoPorT[7](evalf(Ponto, 5))
    elif RB8 = "true" then
        EquacaoPorT[8](evalf(Ponto, 5))
    elif RB9 = "true" then
        EquacaoPorT[9](evalf(Ponto, 5))
    elif RB10 = "true" then
        EquacaoPorT[10](evalf(Ponto, 5))
    elif RB11 = "true" then
        EquacaoPorT[11](evalf(Ponto, 5))
    fi:
end proc:

```

### Procedimento - EquacaoBotao()

```

EquacaoBotao := proc (CVP)
global Equacoes;
Equacoes := Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
Window[MAIN]('title' = "Equações",
[
[
    RadioButton[RB1](
        cat(cat("x[" ,convert(dx*nigx*0,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB2](
        cat(cat("x[" ,convert(dx*nigx*1,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB3](
        cat(cat("x[" ,convert(dx*nigx*2,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB4](

```

```

        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*3,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB5](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*4,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB6](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*5,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB7](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*6,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB8](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*7,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB9](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*8,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB10](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*9,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    ),
    RadioButton[RB11](
        cat(cat("x[",convert(dx*nigx*10,string)),"]"),
        'group' = 'BG1'
    )
],
[
    MathMLViewer(height = 500,
        width = 200,
        'background' = "#FFFFFF",
        'fontsize' = '8',
        'foreground' = "#000000",
        'reference' = 'MathMLEquacao'
    )
],
[
    Label['T']('caption'='T'),
    TextField['TFP']('width' = 30, 'editable' = 'true'),
    Button(" Calcular ",
        Evaluate(
            'function' = 'AplicarEq2D(
                CVP,
                TFP,
                convert(RB1, string),
                convert(RB2, string),
                convert(RB3, string),

```

```

                convert(RB4, string),
                convert(RB5, string),
                convert(RB6, string),
                convert(RB7, string),
                convert(RB8, string),
                convert(RB9, string),
                convert(RB10, string),
                convert(RB11, string)
            )',
            'target' = 'TFR'
        ),
        Label['fT']('caption'=cat(CVP,"(T)")),
        TextField['TFR'](
            'width' = 30,
            'editable' = 'true'
        )
    ],
    ],
    ],
    Action('reference' = 'Action1',
        Evaluate(
            'function' = 'Equacao(
                CVP,
                convert(RB1, string),
                convert(RB2, string),
                convert(RB3, string),
                convert(RB4, string),
                convert(RB5, string),
                convert(RB6, string),
                convert(RB7, string),
                convert(RB8, string),
                convert(RB9, string),
                convert(RB10, string),
                convert(RB11, string)
            )',
            'target' = 'MathMLEquacao'
        )
    ),
    ButtonGroup['BG1'](onchange = Action1));
Maplets[Display](Equacoas):
end proc:

```

### Procedimento - ChamaGraficoPorX()

```

ChamaGraficoPorX := proc(
    CVP, num1, num2, num3, num4,
    num5, num6, num7, num8, num9, num10

```

```

    )
global GraficoPorX:
  GraficoPorX[0] := pointplot([0, 0]);
  Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
    display(
      GraficoPorX[trunc(num1/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num2/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num3/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num4/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num5/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num6/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num7/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num8/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num9/(dt*nigt))],
      GraficoPorX[trunc(num10/(dt*nigt))],
      labels = ["Comprimeto", "Tensão"],
      labeldirections = [horizontal, vertical]
    )
  )
end proc:

```

## Procedimento - AnaliseDoGrafico()

```

AnaliseDoGrafico := proc(CVP,plotter)
global AnaliseGrafica:
  AnaliseGrafica:=Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
    Window[MAIN]('title'="Análise Gráfica",
      [
        [
          Plotter[plotter](height=500, width=800)
        ],
        [
          ComboBox('reference'='CB1VporX',
            'width'='75',
            "0",
            sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
            'onchange'='onchangeCB1VporX'
          ),
          ComboBox('reference'='CB2VporX',
            'width'='75',
            "0",
            sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
            'onchange'='onchangeCB2VporX'
          ),
          ComboBox('reference'='CB3VporX',
            'width'='75',
            "0",
            sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
            'onchange'='onchangeCB3VporX'
          )
        ]
      ]
    )
end proc:

```

```

    ),
    ComboBox('reference'='CB4VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB4VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB5VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB5VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB6VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB6VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB7VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB7VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB8VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB8VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB9VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB9VporX'
    ),
    ComboBox('reference'='CB10VporX',
      'width'='75',
      "0",
      sort([seq(dt*i*nigt,i=0..LINHA)]),
      'onchange'='onchangeCB10VporX'
    )
  ],
  ],
  Action('reference'='onchangeCB1VporX',
    Evaluate(
      'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
          CVP,

```



```

        CB1VporX, CB2VporX,
        CB3VporX, CB4VporX,
        CB5VporX, CB6VporX,
        CB7VporX, CB8VporX,
        CB9VporX, CB10VporX
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB2VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB3VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB4VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB5VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,

```

```

        CB3VporX, CB4VporX,
        CB5VporX, CB6VporX,
        CB7VporX, CB8VporX,
        CB9VporX, CB10VporX
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB6VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB7VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB8VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )'
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB9VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,

```

```

        CB3VporX, CB4VporX,
        CB5VporX, CB6VporX,
        CB7VporX, CB8VporX,
        CB9VporX, CB10VporX
    ),
),
Action('reference'='onchangeCB10VporX',
    Evaluate(
        'function'=
        'ChamaGraficoPorX(
            CVP,
            CB1VporX, CB2VporX,
            CB3VporX, CB4VporX,
            CB5VporX, CB6VporX,
            CB7VporX, CB8VporX,
            CB9VporX, CB10VporX
        )',
    )
):
Maplets[Display](AnaliseGrafica):
end proc:

```

### Procedimento - animarporx()

```

animarporx := proc (CVP)
global GraficoPorX:
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVporX')('value') =
        display(
            seq(GraficoPorX[i], i = 3 .. LINHA),
            insequence = true,
            labels = ["Comprimento", "Tensão"],
            labeldirections = [horizontal, vertical]
        )
    )
end proc:

```

### Procedimento - ChamarEquacaoPorX()

```

ChamarEquacaoPorX := proc (CVP, num)
    if num <> 0 then
        return EquacaoPorX[trunc(num/(dt*nigt))](x)
    else
        return 0.
    fi
end proc:

```

### Procedimento - AplicarEmX()

```

AplicarEmX := proc (CVP, num, TFX)
    if num <> 0 then
        return
        EquacaoPorX[trunc(num/(dt*nigt))](evalf(TFX))
    else
        return 0.
    fi
end proc:

```

### Procedimento - EquacoesPorX()

```

EquacoesPorX := proc(CVP,num,eq)
global equacaoporx:
    equacaoporx:=Maplet(onstartup = RunWindow(MAIN),
        Window[MAIN]('title'="Equações",
            [
                MathMLViewer(height=500,
                    width=200,
                    'background'="#FFFFFF",
                    'fontsize'='8',
                    'foreground'="#000000",
                    'reference'='MathMLEquacaoPorX',
                    'value'=eq
                )
            ],
            [
                Label[XXX]('caption'='x'),
                TextField[TFX]('width'=30, 'editable'='true'),
                Button(
                    "Calcular",
                    Evaluate(
                        'function'='AplicarEmX(CVP,num,TFX)',
                        'target'='TFR'
                    )
                ),
                Label[VVV]('caption'=cat(convert(CVP,string),"(x)")),
                TextField[TFR]('width'=30, 'editable'='true')
            ]
        ),
    Action('reference'='Action1',
        Evaluate(
            'function'='ChamarEquacaoPorX(CVP,num)',
            'target'='MathMLEquacaoPorX'
        )
    )
end proc:

```

```

    ),
    ButtonGroup['BG1'](onchange=Action1)
):
Maplets[Display](equacaoporx):
end proc:

```

### Procedimento - Interpolacao()

```

Interpolacao := proc (Matriz, gra)
local vInt, wInt, fInt, yInt, a1Int, a2Int, AInt, BInt;
vInt := Array([seq(dt*nigt*(i-1), i = 1 .. LINHA)]);
wInt := Array([seq(nigx*(i-1)*dx, i = 1 .. 11)]);
fInt := proc (i, j)
    options operator,
    arrow;
    Matriz[i, j]
end proc;
yInt := Matrix(
    LINHA,
    11,
    [seq(
        [seq(
            [seq(
                evalf(Matriz[j, i]),
                i = 1 .. 11)],
            j = 1 .. LINHA
        )]
    )];
a1Int := Matrix(
    LINHA,
    11,
    proc(i,j)
    options operator,
    arrow;
    i
end proc);
a2Int := Matrix(
    LINHA,
    11,
    proc(i,j)
    options operator,
    arrow;
    j
end proc);
AInt := ArrayTools[Concatenate](3, a1Int, a2Int);
BInt := ArrayInterpolation(
    [vInt, wInt],
    yInt,
    AInt,
    method = spline,

```

```

    degree = 3
);
if gra = "1" then
    return Matrix(yInt)
elif gra = "2" then
    return [seq(
        seq(
            [vInt[i], wInt[j], yInt[i, j]],
            j = 1 .. 11
        ),
        i = 1 .. LINHA
    )]
fi
end proc:

```

### Procedimento - CalculoGrafico3D()

```

CalculoGrafico3D := proc (CVP, Matriz, gra)
global InterpolacaoV, InterpolacaoP;
if gra = "1" then
    return matrixplot(
        Interpolacao(Matriz, gra),
        axes = boxed,
        labels = ["Tempo", "Comprimento", "Tensão"],
        labeldirections = [horizontal, horizontal, vertical],
        title = "Tensão - V(t,x)"
    )
elif gra = "2" then
    return pointplot3d(
        Interpolacao(Matriz, gra),
        symbol = point,
        thickness = 15,
        axes = boxed,
        labels = ["Tempo", "Comprimento", "Tensão"],
        labeldirections = [horizontal, horizontal, vertical],
        title = "Matriz Tensão"
    )
end if
end proc:

```

### Procedimento - Grafico3D()

```

Grafico3D := proc (CVP, Matriz)
global InterpolacaoV1, InterpolacaoV2,
Graficos;
Graficos := Maplet(

```

```

        'onstartup' = 'Action1',
        'reference' = 'PlotaPVI',
    Plotter('background' = "#FFFFFF",
        'continuous' = 'true',
        'delay' = '100',
        'height' = '500',
        'reference' = 'Plotter1',
        'visible' = 'true',
        'width' = '600',
        'value' = CalculoGrafico3D(CVP,Matriz,"1")
    ),
    Plotter('background' = "#FFFFFF",
        'continuous' = 'true',
        'delay' = '100',
        'height' = '500',
        'reference' = 'Plotter2',
        'visible' = 'true',
        'width' = '600',
        'value' = CalculoGrafico3D(CVP,Matriz,"2")
    ),
    BoxLayout('background' = "#D6D3CE",
        'border' = 'false',
        'halign' = 'center',
        'inset' = '5',
        'reference' = 'BoxLayout1',
        'valign' = 'center',
        'vertical' = 'false',
        'visible' = 'true',
    BoxRow(
        BoxColumn(
            'border'='true',
            'caption'="Matriz Interpolada",
            BoxRow(
                BoxCell(
                    'hscroll' = 'never',
                    'value' = 'Plotter1',
                    'vscroll' = 'never'
                )
            ),
            BoxRow(
                BoxRow(
                    Label['TTM'](
                        'caption'=
                            cat(
                                "0 <= t < ",
                                convert(
                                    evalf(dt*nigt*LINHA,5),
                                    string
                                )
                            )
                    ),
                )
            ),
        ),
    ),

```

```

        TextField['TFPTM'](
            'width' = 5,
            'editable' = 'true'
        ),
    BoxRow(
        Label['XXM'](
            'caption'=
                cat(
                    "0 <= x <= ",
                    convert(lc,string)
                )
        ),
        TextField['TFPxM'](
            'width' = 5,
            'editable' = 'true'
        )
    ),
    BoxRow(
        Button(" Calcular ",
            Evaluate(
                'function' =
                    'AplicarEq3D(
                        CVP,
                        TFPTM,
                        TFPxM,
                        "I"
                    )',
                'target' = 'TFRM'
            )
        ),
    ),
    BoxRow(
        Label['MTxM'](
            'caption'=
                cat(
                    CVP,
                    "(T,x)"
                )
        ),
        TextField['TFRM'](
            'width' = 10,
            'editable' = 'true'
        )
    ),
))
),
BoxColumn(
    'border'='true',
    'caption'="Matriz Tabela",
    BoxRow(
        BoxCell(
            'hscroll' = 'never',
            'value' = 'Plotter2',
            'vscroll' = 'never'
        )
    )
),

```

```

    )
  ),
  BoxRow(
    BoxRow(
      Label['TTI'](
        'caption'=
          cat(
            "0 <= i <= ",
            convert(LINHA,string)
          )
      ),
      TextField['TFPTI'](
        'width' = 5,
        'editable' = 'true'
      )
    ),
    BoxRow(
      Label['XXI'](
        'caption'=
          "1 <= j <= 11"
      ),
      TextField['TFPxI'](
        'width' = 5,
        'editable' = 'true'
      )
    ),
    BoxRow(
      Button(" Calcular ",
        Evaluate(
          'function' =
            'AplicarEq3D(
              CVP,
              TFPTI,
              TFPxI,
              "M"
            )',
          'target' = 'TFRI'
        )
      )
    ),
    BoxRow(
      Label['MTxI'](
        'caption'=
          cat(
            CVP,
            "(i,j)"
          )
      ),
      TextField['TFRI'](
        'width' = 10,
        'editable' = 'true'
      )
    )
  )
)
))
)

```

```

    ),
    Window('layout' = 'BoxLayout1',
      'reference' = 'Window1',
      'resizable' = 'true',
      'title' = "Gráficos 3D"
    ),
    Action(
      'reference' = 'Action1',
      RunWindow('window' = 'Window1')
    );
  Maplets[Display](Graficos)
end proc:

```

### Procedimento - AplicarEq3D

```

AplicarEq3D := proc (CVP, TFPT, TFPx, MI)
  if MI = "M" then
    MatrizV[TFPT, TFPx]
  elif MI = "I" then
    Interpolacao(MatrizV, "1")[TFPT, TFPx]
  fi
end proc:

```

### Procedimento - Maplet Raíz

```

maplet :=
  Maplet('onstartup'='Action1',
    'reference'='Maplet1',
    Plotter(
      'background'="#FFFFFF",
      'continuous'='true',
      'height'='350',
      'reference'='PlotterVporX',
      'visible'='true', 'width'='600'
    ),
    Plotter(
      'background'="#FFFFFF",
      'continuous'='true',
      'delay'='100',
      'height'='350',
      'reference'='PlotterV',
      'visible'='true',
      'width'='600'
    ),
    Action(
      'reference'='clickButtonPrograma',

```

```

    Evaluate('function='Programa()')
),
Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Calcular",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonPrograma',
    'reference'='ButtonPrograma',
    'visible'='true',width=200
),
Action(
    'reference'='clickButtonEquacaoV',
    Evaluate('function'='EquacaoBotao("V")')
),
Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Equação V(t)",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonEquacaoV',
    'reference'='ButtonEquacaoV',
    'visible'='true',
    'width'='130'
),
Action(
    'reference'='clickButtonTabelaV',
    Evaluate(
        'function'='TabelaV()',
        'option'="append",
        'waitforresult'='true'
    )
),
Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Tabela V",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonTabelaV',
    'reference'='ButtonTabelaV',
    'visible'='true',
    'width'='130'
),
Action(
    'reference'='clickButtonGrafico3DV',
    Evaluate('function'='Grafico3D("V",MatrizV)')
),
Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Gráfico V(x,t)",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",

```

```

    'onclick'='clickButtonGrafico3DV',
    'reference'='ButtonGrafico3DV',
    'visible'='true',
    'width'='130'
),
Label(
    'caption'=" nigr = trunc(nx/10) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelNIGX',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" nigt = 10*nigr ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelNIGT',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" dx = lc/nx ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelDX',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" dt = 0.001*dx ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelDT',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" ixp = round(xp/dx) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelIXP',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" x[i] = nigr*i*dx, 0 <= i <= 10 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelXI',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" lc = 1 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelLC',

```

```

        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=" nx = 10 ",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'reference'='LabelNX',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=" erro = 0.01 ",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'reference'='LabelERRO',
        'visible'='true'
    ),
    TextBox(
        'background'="#FFFFFF",
        'editable'='true',
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'height'='1',
        'reference'='TB1V',
        'visible'='true',
        'width'='130',
        'wrapped'='true',
        'value'="
            t      = x[0]  =
            x[1]  = x[2]  =
            x[3]  = x[4]  =
            x[5]  = x[6]  =
            x[7]  = x[8]  =
            x[9]  = x[10] ",
    ),
    Action(
        'reference'='onchangeCBVporX',
        Evaluate(
            'function'=
                'ChamaGraficoPorX(
                    "V",
                    CBVporX,
                    0,0,0,0,0,0,0,0,0
                )',
        )
    ),
    ComboBox(
        'reference'='CBVporX',
        'width'='50',
        "0",
        sort([0]),
        'onchange'='onchangeCBVporX',
        'width'='130'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonEquacaoVporX',
        Evaluate(
            'function'=

```

```

                'EquacoesPorX(
                    "V",
                    CBVporX,
                    ChamarEquacaoPorX("V",CBVporX)
                )',
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Equação V(x)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonEquacaoVporX',
        'reference'='ButtonEquacaoVporX',
        'visible'='true',
        'width'='130'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonAnaliseVporX',
        Evaluate(
            'function'='AnaliseDoGrafico(
                "V",
                "PlotterVporX"
            )',
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Gráficos V(x)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonAnaliseVporX',
        'reference'='ButtonAnaliseVporX',
        'visible'='true',
        'width'='130'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonAnimarVporX',
        Evaluate('function'='animarporex("V")'),
        SetOption(
            'option'='play',
            'target'='PlotterVporX',
            'value'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Animar",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonAnimarVporX',
        'reference'='ButtonAnimarVporX',

```

```

        'visible'='true',
        'width'='130'
    ),
    Action(
        'reference'='clickGraficosVport',
        Evaluate('function'='ZerarMarcar()'),
        Evaluate(
            'function'='AnaliseDoGraficoPort(
                "V",
                "PlotterVport"
            )'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Gráfico V(t)",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickGraficosVport',
        'reference'='ButtonGraficosVport',
        'visible'='true', 'width'='130'
    ),
    BoxLayout('background'="#D6D3CE",
        'border'='false',
        'halign'='center',
        'inset'='5',
        'reference'='BoxLayout1',
        'valign'='center',
        'vertical'='false',
        'visible'='true',
        BoxColumn(
            BoxColumn(
                BoxColumn(
                    BoxRow(
                        BoxRow(
                            'border'='true',
                            'caption'="Considerações",
                            BoxColumn('border'='true',
                                BoxCell(
                                    'hscroll'='never',
                                    'value'='LabelNIGX',
                                    'vscroll'='never'
                                )
                            ),
                            BoxColumn('border'='true',
                                BoxCell(
                                    'hscroll'='never',
                                    'value'='LabelNIGT',
                                    'vscroll'='never'
                                )
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(

```

```

                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelDX',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelDT',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelIXP',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelLC',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelNX',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='LabelERRO',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        ),
                        BoxColumn('border'='true',
                            BoxCell(
                                'hscroll'='never',
                                'value'='ButtonPrograma',
                                'vscroll'='never'
                            )
                        )
                    )
                )
            )
        ),
        BoxRow('border'='true', 'caption'='Tensão',
            BoxColumn(
                BoxRow(
                    BoxCell(

```



```

        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonTabelaV',
        'vscroll'='never'
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonGrafico3DV',
        'vscroll'='never'
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonEquacaoV',
        'vscroll'='never'
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonGraficosVport',
        'vscroll'='never'
    )
),
BoxColumn(
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='PlotterV',
        'vscroll'='never'
    )
),
BoxColumn(
    BoxRow(
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='CBVporX',
            'vscroll'='never'
        ),
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='ButtonEquacaoVporX',
            'vscroll'='never'
        ),
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
        )
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonAnimarVporX',
        'vscroll'='never'
    ),
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='ButtonAnaliseVporX',
        'vscroll'='never'
    )
),
BoxRow(
    BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='PlotterVporX',
        'vscroll'='never'
    )
),
),
BoxRow(
    BoxRow(
        'border'='true',
        'caption'="Tensão t/x[i]",
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='TBlV',
            'vscroll'='never'
        )
    )
),
),
Window(
    'layout'='BoxLayout1',
    'reference'='Window1',
    'resizable'='true',
    'title'="Maplet"
),
Action(
    'reference'='Action1',
    RunWindow('window'='Window1')
):
Maplets[Display](maplet);

```

## ANEXO C - MEMBRANA

```
restart:
with(Maplets[Elements]):
with(plots):
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
with(Statistics):
Digits:=6:
interface(displayprecision = 5):
```

### Condições Iniciais

```
dx := 0.1:
dy := 0.1:
dt := 0.01:
nx := 40:
ny := 20:
p := 1:
t[0] := 0:
for i from 0 to nx do
  x[i] := i*dx:
od:
for i from 0 to ny do
  y[i] := i*dy:
od:
for i from 0 to nx do
  for j from 0 to ny do
    p1[i,j] := 0.1*
      (4-2*(dx*i))*
      (2*(dy*j)-(dy*j)^2):
    q1[i,j] := 0.1*
```

```
      (4*dx*i-(dx*i)^2)*
      (2-2*dy*j):
    r1[i,j] := 0.0:
    U1[i,j] := 0.1*
      (4*(dx*i)-(dx*i)^2)*
      (2*(dy*j)-(dy*j)^2):
  od:
od:
for i from 0 to nx/p do
  for j from 0 to ny/p do
    U_M_Numerica[i,j,0] := 0.1*
      (4*(dx*i*p)-(dx*i*p)^2)*
      (2*(p*dy*j)-(p*dy*j)^2):
  od:
od:
U_G_Numerica[0] :=
  pointplot3d(
    [seq(
      seq(
        [p*i*dx,p*j*dy,U_M_Numerica[i,j,0]],
        j = 0..ny/p
      ),
      i = 0..nx/p
    )],
    axes = boxed,
    shading = zhue
  ):
cont_M := 0:
cont := 0:
```

Procedimento - dir\_xy()

```

dir_xy := proc(m,n)
global p1, p2, px_p, px_l, px_p1, px_p2, px_r, p_p,
q1, q2, qy_p, qy_l, qy_p1, qy_p2, qy_r, q_p,
r1, r2, r_yp, r_xp,
px_m_lp, px_m_rp,
qy_m_lp, qy_m_rp,
U1, U2,
U_G_Numerica, U_G_Analitica,
U_M_Numerica, U_M_Analitica:
local i, xr, xl, yr, yl:
px_l := (p1[m+1,n-1] - p1[m-1,n-1])/(2*dx):
px_r := (p1[m+1,n+1] - p1[m-1,n+1])/(2*dx):
qy_l := (q1[m-1,n+1] - q1[m-1,n-1])/(2*dy):
qy_r := (q1[m+1,n+1] - q1[m+1,n-1])/(2*dy):
px_p1 := (p1[m+1,n] - p1[m-1,n])/(2*dx):
px_p2 := (p1[m+1,n] - p1[m-1,n])/(2*dx):
qy_p1 := (q1[m,n+1] - q1[m,n])/(2*dx):
qy_p2 := (q1[m,n+1] - q1[m,n])/(2*dx):
for i from 1 to 5 do
px_m_lp[m,n] := (px_l + px_p1)/2:
px_p1 := px_m_lp[m,n]:
px_m_rp[m,n] := (px_r + px_p2)/2:
px_p2 := px_m_rp[m,n]:
qy_m_lp[m,n] := (qy_l + qy_p1)/2:
qy_p1 := qy_m_lp[m,n]:
qy_m_rp[m,n] := (qy_r + qy_p2)/2:
qy_p2 := qy_m_rp[m,n]:
od:
px_p := (px_m_lp[m,n] + px_m_rp[m,n])/2:
qy_p := (qy_m_lp[m,n] + qy_m_rp[m,n])/2:
r_yp := evalf(
0.5*(
r1[m,n-1] +
r1[m,n+1] -
q1[m,n-1] +
q1[m,n+1]
) +
0.5*(
px_m_lp[m,n] +
px_m_rp[m,n]
)*dt
):
q2[m,n] := evalf(
0.5*(
-r1[m,n-1] +
r1[m,n+1] +
q1[m,n-1] +
q1[m,n+1]
) +
0.5*(
px_m_rp[m,n] -

```

```

px_m_lp[m,n]
)*dt
):
r_xp := evalf(
0.5*(
r1[m-1,n] +
r1[m+1,n] -
p1[m-1,n] +
p1[m+1,n]
) +
0.5*(
qy_m_lp[m,n] +
qy_m_rp[m,n]
)*dt
):
p2[m,n] := evalf(
0.5*(
-r1[m-1,n] +
r1[m+1,n] +
p1[m-1,n] +
p1[m+1,n]
) +
0.5*(
qy_m_rp[m,n] -
qy_m_lp[m,n]
)*dt
):
r2[m,n] := (r_yp + r_xp)/2:
U2[m,n] := U1[m-1,n-1] +
0.5*dx*(p2[m,n] +
p2[m-1,n-1]) +
0.5*dy*(q2[m,n] + q2[m-1,n-1]) +
0.5*dt*(r2[m,n] + r2[m-1,n-1]):

```

end proc:

### Procedimento - dir\_xy\_frenteira()

```

dir_xy_frenteira := proc()
global p2, q2, r2, U1, U2:
local i:
for i from 0 to nx do
U2[i,0] := 0:
p2[i,0] := 0:
r2[i,0] := 0:
q2[i,0] := U1[i,1]/dy:
U2[i,ny] := 0:
p2[i,ny] := 0:
r2[i,ny] := 0:
q2[i,ny] := -U1[i,ny-1]/dy:

```

```

od:
for i from 0 to ny do
  U2[0,i] := 0:
  q2[0,i] := 0:
  r2[0,i] := 0:
  p2[0,i] := U1[1,i]/dx:
  U2[nx,i] := 0:
  q2[nx,i] := 0:
  r2[nx,i] := 0:
  p2[nx,i] := -U1[nx-1,i]/dx:
od:
end proc:

```

### Procedimento - Matriz()

```

Matriz := proc()
global p1, q1, r1, U1,
  Spline_p, Spline_q, Spline_r, Spline_U:
local i, j:
  for i from 1 to nx-1 do
    for j from 1 to ny-1 do
      dir_xy(i,j)
    od:
    dir_xy_frenteira():
    for i from 0 to nx do
      for j from 0 to ny do
        p1[i,j] := p2[i,j]:
        q1[i,j] := q2[i,j]:
        r1[i,j] := r2[i,j]:
        U1[i,j] := U2[i,j]:
      od:
    od:
  end proc:

```

### Procedimento - Grava()

```

Grava := proc(k,v)
global t, cont_M,
  U_M_Numerica,
  U_G_Numerica:
local i, j:
  cont_M := cont_M + 1:
  for i from 0 to nx/p do
    for j from 0 to ny/p do
      U_M_Numerica[i,j,cont_M] := U1[p*i,p*j]:
    od:
  end proc:

```

```

od:
U_G_Numerica[cont_M] :=
  pointplot3d(
    [seq(
      seq(
        [p*i*dx,
         p*j*dy,
         U_M_Numerica[i,j,cont_M]
        ],
        j = 0..ny/p
      ),
      i = 0..nx/p
    )],
    axes = boxed,
    shading = zhue
  ):
t[cont_M] := k*dt:
  ChamaGrafico(trunc(t[cont_M])):
  Maplets:-Tools:-Set(CB(itemlist) =
    [seq(
      convert(evalf(t[i], 4), string),
      i = 0 .. cont_M
    )
  ]):
  Tabelar():
end proc:

```

### Procedimento - tempo()

```

tempo := proc(u, v)
global p1, p2, px_p, px_l, px_p1, px_p2, px_r, p_p,
  q1, q2, qy_p, qy_l, qy_p1, qy_p2, qy_r, q_p,
  r1, r2, r_yp, r_xp,
  px_m_lp, px_m_rp,
  qy_m_lp, qy_m_rp,
  U1, U2,
  U_G_Analitica, U_G_Numerica,
  U_M_Numerica, U_M_Analitica,
  t, cont, cont_M:
local k, i, j:
  for k from 1 to u do
    cont := cont + 1:
    Matriz():
    if cont = v then
      cont := 0:
      Grava(k,v):
      Tabelar():
    fi:
  od:
end proc:

```

## Procedimento - ChamaGrafico()

```
ChamaGrafico := proc(aux)
global Tab:
  Maplets:-Tools:-Set(('PlotterNumerica')('value') =
    U_G_Numerica[trunc((aux/dt)/p)]
  ):
  Tab := aux:
end proc:
```

## Procedimento - Tabela()

```
Tabela := proc(U)
global tabela;
  tabela := Maplet(
    [
      BoxCell(
        Table(
          ["x/y", seq(p*i*dy, i = 0..ny/p)],
          [seq(
            [p*i*dx, seq(
              U[i, j, trunc((Tab/dt)/p]
            )
          ],
          j = 0..ny/p)
        ],
        i = 0 .. nx/p
      )
    ],
    'as_needed'
  ),
  Button("OK", Shutdown())
);
Maplets[Display](tabela)
end proc:
```

## Procedimento - Animar()

```
Animar := proc(AN)
global U_G_Numerica, U_G_Analitica:
  if AN = "1" then
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterAnalitica')('value') =
      display(
        seq(U_G_Analitica[i], i = 0 .. cont_M),
        insequence = true
      )
  )
  )
end proc:
```

```

    )
  )
  elif AN = "2" then
    Maplets:-Tools:-Set(('PlotterNumerica')('value') =
      display(
        seq(U_G_Numerica[i], i = 0 .. cont_M),
        insequence = true
      )
    )
  )
  fi:
end proc:
```

## Maplet Raíz

```
maplet :=
  Maplet('onstartup'='Action1', 'reference'='Maplet1',
    Plotter(
      'background'='#FFFFFF',
      'continuous'='true',
      'height'='350',
      'reference'='PlotterAnalitica',
      'visible'='true', 'width'='400'
    ),
    Plotter(
      'background'='#FFFFFF',
      'continuous'='true',
      'delay'='100',
      'height'='350',
      'reference'='PlotterNumerica',
      'visible'='true',
      'width'='400'
    ),
    Action(
      'reference'='clickButtonTempo',
      Evaluate('function'='tempo(txtK,txtP)')
    ),
    Button(
      'background'='#D6D3CE',
      'caption'='Calcular',
      'enabled'='true',
      'foreground'='#000000',
      'onclick'='clickButtonTempo',
      'reference'='ButtonPrograma',
      'visible'='true', width=150
    ),
    Action(
      'reference'='clickButtonTabela_Analitica',
      Evaluate(
        'function'='Tabela(U)',

```

```

        'option'="append",
        'waitforresult'='true'
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Tabela Analítica",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonTabela_Analitica',
        'reference'='ButtonTabela_Analitica',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonTabela_Numerica',
        Evaluate(
            'function'='Tabela(U_M_Numerica,trunc(CB))',
            'option'="append",
            'waitforresult'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Tabela Numérica",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonTabela_Numerica',
        'reference'='ButtonTabela_Numerica',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonAnima_Numerica',
        Evaluate(
            'function'='Animar("2")',
            'option'="append",
            'waitforresult'='true'
        ),
        SetOption(
            'option'='play',
            'target'='PlotterNumerica',
            'value'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Animar Gráfico",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonAnima_Numerica',
        'reference'='ButtonAnima_Numerica',

```

```

        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    Action(
        'reference'='clickButtonAnima_Analitica',
        Evaluate(
            'function'='Animar("1")',
            'option'="append",
            'waitforresult'='true'
        ),
        SetOption(
            'option'='play',
            'target'='PlotterAnalitica',
            'value'='true'
        )
    ),
    Button(
        'background'="#D6D3CE",
        'caption'="Animar Gráfico",
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'onclick'='clickButtonAnima_Analitica',
        'reference'='ButtonAnima_Analitica',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    TextField(
        'background'="#FFFFFF",
        'editable'='true',
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'halign'='left',
        'reference'='txtDX',
        'value'="0.1",
        'visible'='true',
        'width'='5'
    ),
    TextField(
        'background'="#FFFFFF",
        'editable'='true',
        'enabled'='true',
        'foreground'="#000000",
        'halign'='left',
        'reference'='txtDY',
        'value'="0.1",
        'visible'='true',
        'width'='5'
    ),
    TextField(
        'background'="#FFFFFF",
        'editable'='true',
        'enabled'='true',

```

```

        'foreground'='#000000',
        'halign'='left',
        'reference'='txtDT',
        'value'='0.01',
        'visible'='true',
        'width'='5'
    ),
    TextField(
        'background'='#FFFFFF',
        'editable'='true',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'halign'='left',
        'reference'='txtK',
        'value'='5',
        'visible'='true',
        'width'='5'
    ),
    TextField(
        'background'='#FFFFFF',
        'editable'='true',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'halign'='left',
        'reference'='txtP',
        'value'='1',
        'visible'='true',
        'width'='5'
    ),
    Label(
        'caption'=' U(x,y,0) = 0.1(4x-x^2)(2y-y^2) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelU',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' Ux(x,y,0) = 0.1(4-2x)(2y-y^2) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelUx',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' Uy(x,y,0) = 0.1(4x-x^2)(2-2y) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelUy',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' Ut(x,y,0) = 0 ',

```

```

        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelUt',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' U = 0 (na fronteira) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelUF',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' 0 <= x <= 4 ( x[i] = i dx) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelX',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' 0 <= y <= 2 ( y[i] = i dy) ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelY',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' nx = 10 ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelNX',
        'visible'='true'
    ),
    Label(
        'caption'=' Oscilação da Membrana ',
        'enabled'='true',
        'foreground'='#000000',
        'reference'='LabelERRO',
        'visible'='true'
    ),
    Action(
        'reference'='onchangeCB',
        Evaluate('function'='ChamaGrafico(CB)')
    ),
    ComboBox(
        'reference'='CB',
        "0",
        sort([0]),
        'onchange'='onchangeCB',
        'width'='150'
    ),
    BorderLayout(
        'background'='#D6D3CE',
        'border'='false',
        'halign'='center',

```

```

        'inset'='5',
        'reference'='BoxLayout1',
        'valign'='center',
        'vertical'='false',
        'visible'='true',
BoxRow(
    BoxColumn(
        'border'='true',
        'caption'="Considerações",
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelU',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelUx',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelUy',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelUt',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelUF',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='LabelX',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn('border'='true',
            BoxCell(
                'hscroll'='never',

```

```

        'value'='LabelY',
        'vscroll'='never'
    ),
    BoxColumn('border'='true',
        BoxCell(
            'hscroll'='never',
            'value'='LabelERRO',
            'vscroll'='never'
        )
    ),
    BoxColumn(
        'border'='true',
        'caption'="Dados de Entrada",
        BoxColumn(
            'border'='true',
            'caption'="Utilize (dx) igual a:",
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='txtDX',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn(
            'border'='true',
            'caption'="Utilize (dy) igual a:",
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='txtDY',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn(
            'border'='true',
            'caption'="Utilize (dt) igual a:",
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='txtDT',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn(
            'border'='true',
            'caption'="Calcule (k) matrizes",
            BoxCell(
                'hscroll'='never',
                'value'='txtK',
                'vscroll'='never'
            )
        ),
        BoxColumn(
            'border'='true',

```



```

'caption'="Guarde 1 matriz em cada (p):",
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='txtP',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxColumn('border'='true',
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonPrograma',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxColumn(
  'border'='true',
  'caption'="Selecionar Resultados",
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='CB',
    'vscroll'='never'
  )
),
BoxRow(
  'border'='true',
  'caption'="Gráficos e Tabelas",

```

```

BoxColumn(
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonTabela_Numerica',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='PlotterNumerica',
    'vscroll'='never'
  ),
  BoxCell(
    'hscroll'='never',
    'value'='ButtonAnima_Numerica',
    'vscroll'='never'
  )
),
Window('layout'='BoxLayout1',
  'reference'='Window1',
  'resizable'='true',
  'title'="Membrana"),
Action('reference'='Action1',
RunWindow('window'='Window1'))):
Maplets[Display](maplet);

```

## ANEXO D – RESERVATÓRIO

### Início

```
restart:
with(Maplets[Elements]):
with(plots):
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
with(Statistics):
Digits:=6:
interface(displayprecision = 5):
```

### Procedimento - Cond\_ini

```
Cond_ini := proc(Dx,Dy,Dt,pp,Cx,Cy,H)
global x, dx,
y, dy,
t, dt,
nx, ny,
cx, cy,
U1, V1, C1,
h_G, U_G, V_G,
C_x_1, C_y_1,
h_x_1, h_y_1,
g, hl, vo,
at, p, d, vol,
cont, cont_M:
local i, j:
at := H:
d := 5:
dx := Dx:
```

```
dy := Dy:
dt := Dt:
cx := Cx:
cy := Cy:
nx := trunc(cx/dx):
ny := trunc(cy/dy):
g := 9.81:
p := pp:
vol[0] := cx*cy*at:
t[0] := 0:
for i from 0 to nx do
x[i] := i*dx:
od:
for i from 0 to ny do
y[i] := i*dy:
od:
for i from 0 to nx do
for j from 0 to ny do
U1[i,j] := 0:
V1[i,j] := 0:
C1[i,j] := sqrt(g*at):
C_x_1[i,j] := sqrt(g*at):
C_y_1[i,j] := sqrt(g*at):
h_x_1[i,j] := at:
h_y_1[i,j] := at:
hl[i,j] := at:
od:
od:
for i from 50 to 60 do
U1[nx,i] := 1:
V1[i,ny] := 1:
od:
h_G[0] := pointplot3d(
```

```

        [seq(
            seq(
                [p*i*dx, p*j*dy, at],
                j = 0..ny/p
            ),
            i = 0..nx/p
        ),
        axes = boxed,
        shading = zhue
    );
U_G[0] := pointplot3d(
    [seq(
        seq(
            [p*i*dx, p*j*dy, 0],
            j = 0..ny/p
        ),
        i = 0..nx/p
    ),
    axes = boxed,
    shading = zhue
    );
V_G[0] := pointplot3d(
    [seq(
        seq(
            [p*i*dx, p*j*dy, 0],
            j = 0..ny/p
        ),
        i = 0..nx/p
    ),
    axes = boxed,
    shading = zhue
    );
cont := 0:
cont_M := 0:
vo := 0:
end proc:

```

### Procedimento - dir\_xy

```

dir_xy := proc(m,n)
local i:
global x, xr, xl,
        Cr_x, Cl_x,
        C_x_1, C_x_2,
        h_x_1, h_x_2,
        hr_x, hl_x,
        V_x,
        U_x,
        h_x,
        y, yr, yl,

```

```

        Cr_y, Cl_y,
        C_y_1, C_y_2,
        h_y_1, h_y_2,
        hr_y, hl_y,
        V_y,
        U_y,
        h_y,
        Cl, C2,
        U1, U2,
        Ur, U1,
        V1, V2,
        Vr, V1,
        h1, h2,
        Ap, Ar, Al,
        Bp, Br, Bl,
        Dp, Dr, Dl,
        Ep, Er, El,
        vo:
    for i from 1 to d do
# = CALCULAR C_x_2 e U2 ===== DIREÇÃO X
        h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n-1])/(2*dy):
        V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n-1])/(2*dy):
        U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n-1])/(2*dy):
        Ap := (g/C_x_1[m,n])*
            (V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
        Bp := V1[m,n]*U_y:
        h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n-1])/(2*dy):
        V_y := (V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n-1])/(2*dy):
        U_y := (U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n-1])/(2*dy):
        Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
            (V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
        Bl := V1[m-1,n]*U_y:
        h_y := (h_x_1[m+1,n+1] - h_x_1[m+1,n-1])/(2*dy):
        V_y := (V1[m+1,n+1] - V1[m+1,n-1])/(2*dy):
        U_y := (U1[m+1,n+1] - U1[m+1,n-1])/(2*dy):
        Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
            (V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
        Br := V1[m+1,n]*U_y:
        U2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + U1[m+1,n]) +
            (C_x_1[m-1,n] - C_x_1[m+1,n]) +
            0.25*(Ar - Al - 2*Bp - Bl - Br)*dt:
        C_x_2[m,n] := 0.25*(U1[m-1,n] - U1[m+1,n]) +
            0.5*(C_x_1[m-1,n] + C_x_1[m+1,n]) -
            0.125*(Al + Ar + 2*Ap + Bl - Br)*dt:
        h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
        C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
        h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
        h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m-1,n])/(2*dx):

```

```

U_x := ( U1[m+1,n] - U1[m-1,n])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n] - V1[m-1,n])/(2*dx):
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
      (h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n-1] - U1[m-1,n-1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n-1] - V1[m-1,n-1])/(2*dx):
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
      (h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n+1] - U1[m-1,n+1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n+1] - V1[m-1,n+1])/(2*dx):
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
      (h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
          (C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
          0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] - V1[m,n+1]) +
            0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
            0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
  if (C_x_2[m,n] < 0.01) or (C_y_2[m,n] < 0.01) then
    break:
  else
    C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
    fi:
    h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
    vo := vo + h2[m,n]:
end proc:

```

## Procedimento - fronteira

```

fronteira := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
      Cr_x, Cl_x,
      C_x_1, C_x_2,
      hr_x, hl_x,
      V_x,
      U_x,
      h_x,
      y, yr, yl,
      Cr_y, Cl_y,

```

```

      C_y_1, C_y_2,
      hr_y, hl_y,
      V_y,
      U_y,
      h_y,
      Cl, C2,
      U1, U2,
      Ur, Ul,
      V1, V2,
      Vr, Vl,
      h1, h2,
      Ap, Ar, Al,
      Bp, Br, Bl,
      Dp, Dr, Dl,
      Ep, Er, El,
      h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
for i from 1 to nx-1 do
  U2[i,0] := U2[i,1]:
  U2[i,ny] := U2[i,ny-1]:
  U2[0,i] := 0:
  U2[nx,i] := 0:
  V2[i,0] := 0:
  V2[i,ny] := 0:
  V2[0,i] := V2[1,i]:
  V2[nx,i] := V2[nx-1,i]:
  h2[i,0] := h2[i,1]:
  h2[i,ny] := h2[i,ny-1]:
  h2[0,i] := h2[1,i]:
  h2[nx,i] := h2[nx-1,i]:
  vo := vo + h2[i,0]:
  vo := vo + h2[i,ny]:
  vo := vo + h2[0,i]:
  vo := vo + h2[nx,i]:
  h_x_2[i,0] := h_x_2[i,1]:
  h_x_2[i,ny] := h_x_2[i,ny-1]:
  h_x_2[0,i] := h_x_2[1,i]:
  h_x_2[nx,i] := h_x_2[nx-1,i]:
  h_y_2[i,0] := h_y_2[i,1]:
  h_y_2[i,ny] := h_y_2[i,ny-1]:
  h_y_2[0,i] := h_y_2[1,i]:
  h_y_2[nx,i] := h_y_2[nx-1,i]:
  C2[i,0] := C2[i,1]:
  C2[i,ny] := C2[i,ny-1]:
  C2[0,i] := C2[1,i]:
  C2[nx,i] := C2[nx-1,i]:
  C_x_2[i,0] := C_x_2[i,1]:
  C_x_2[i,ny] := C_x_2[i,ny-1]:
  C_x_2[0,i] := C_x_2[1,i]:
  C_x_2[nx,i] := C_x_2[nx-1,i]:

```

```

    C_y_2[i,0] := C_y_2[i,1]:
    C_y_2[i,ny] := C_y_2[i,ny-1]:
    C_y_2[0,i] := C_y_2[1,i]:
    C_y_2[nx,i] := C_y_2[nx-1,i]:
od:
U2[0,0] := 0:
U2[nx,ny] := 0:
U2[0,ny] := 0:
U2[nx,0] := 0:
V2[0,0] := 0:
V2[nx,ny] := 0:
V2[0,ny] := 0:
V2[nx,0] := 0:
h2[0,0] := h2[1,1]:
h2[nx,ny] := h2[nx-1,ny-1]:
h2[0,ny] := h2[1,ny-1]:
h2[nx,0] := h2[nx-1,1]:
vo := vo + h2[0,0]:
vo := vo + h2[nx,ny]:
vo := vo + h2[0,ny]:
vo := vo + h2[nx,0]:
h_x_2[0,0] := h_x_2[1,1]:
h_x_2[nx,ny] := h_x_2[nx-1,ny-1]:
h_x_2[0,ny] := h_x_2[1,ny-1]:
h_x_2[nx,0] := h_x_2[nx-1,1]:
h_y_2[0,0] := h_y_2[1,1]:
h_y_2[nx,ny] := h_y_2[nx-1,ny-1]:
h_y_2[0,ny] := h_y_2[1,ny-1]:
h_y_2[nx,0] := h_y_2[nx-1,1]:
C2[0,0] := C2[1,1]:
C2[nx,ny] := C2[nx-1,ny-1]:
C2[0,ny] := C2[1,ny-1]:
C2[nx,0] := C2[nx-1,1]:
C_x_2[0,0] := C_x_2[1,1]:
C_x_2[nx,ny] := C_x_2[nx-1,ny-1]:
C_x_2[0,ny] := C_x_2[1,ny-1]:
C_x_2[nx,0] := C_x_2[nx-1,1]:
C_y_2[0,0] := C_y_2[1,1]:
C_y_2[nx,ny] := C_y_2[nx-1,ny-1]:
C_y_2[0,ny] := C_y_2[1,ny-1]:
C_y_2[nx,0] := C_y_2[nx-1,1]:
for i from 50 to 60 do
    U2[nx,i] := 1:
    V2[i,ny] := 1:
od:
end proc:

```

### Procedimento - Matriz

```
Matriz := proc()
```

```

global U1, U2,
    V1, V2,
    C1, C2,
    h1, h2,
    C_x_1, C_x_2,
    C_y_1, C_y_2,
    h_x_1, h_x_2:
local i, j:
    for i from 1 to nx-1 do
        for j from 1 to ny-1 do
            dir_xy(i,j):
        od:
    od:
    fronteira():
end proc:

```

### Procedimento - Grava

```

Grava := proc(k)
global x, dx,
    y, dy,
    t, dt,
    nx, ny,
    h_M, h_G,
    U_M, U_G,
    V_M, V_G,
    h2, V2, U2,
    cont_M, cont, p, vol, vo:
local i, j:
    cont_M := cont_M + 1:
    for i from 0 to nx/p do
        for j from 0 to ny/p do
            h_M[i,j,cont_M] := h1[p*i,p*j]:
            U_M[i,j,cont_M] := U1[p*i,p*j]:
            V_M[i,j,cont_M] := V1[p*i,p*j]:
        od:
    od:
    h_G[cont_M] := pointplot3d(
        [seq(
            seq(
                [
                    p*i*dx,
                    p*j*dy,
                    h_M[i,j,cont_M]
                ],
                j = 0..ny/p
            ),
            i = 0..nx/p)

```

```

],
  axes = boxed,
  color = blue
);
U_G[cont_M] := pointplot3d(
  [seq(
    seq(
      [
        p*i*dx,
        p*j*dy,
        U_M[i,j,cont_M]
      ],
      j = 0..ny/p
    ),
    i = 0..nx/p
  ),
  axes = boxed,
  color = blue
);
V_G[cont_M] := pointplot3d(
  [seq(
    seq(
      [
        p*i*dx,
        p*j*dy,
        V_M[i,j,cont_M]
      ],
      j = 0..ny/p
    ),
    i = 0..nx/p
  ),
  axes = boxed,
  color = blue
);
t[cont_M] := k*dt:
vol[cont_M] := cx*cy*(vo/(nx*ny)):
vo := 0:
ChamaGrafico(t[cont_M]):
Maplets:-Tools:-Set(CB(itemlist) =
  [seq(
    convert(evalf(t[i], 4), string),
    i = 0 .. cont_M
  )]):
Maplets:-Tools:-Set(
  LabelERRO(caption) =
    convert(vol[cont_M],string)
):
end proc:

```

## Procedimento - tempo

```

tempo := proc(u, v)
global
  p1, p2, px_p, px_l, px_p1, px_p2, px_r, p_p,
  q1, q2, qy_p, qy_l, qy_p1, qy_p2, qy_r, q_p,
  r1, r2, r_yp, r_xp,
  px_m_lp, px_m_rp,
  qy_m_lp, qy_m_rp,
  U1, U2, U_G_Numerica, U_M_Numerica,
  t, cont, cont_M,
  V1, C1, h1, hh1,
  C_x_1, C_y_1,
  h_1, h_x_1, h_y_1,
  vo, vol:
local k, i, j:
for k from 1 to u do
  Matriz():
  cont := cont + 1:
  for i from 0 to nx do
    for j from 0 to ny do
      U1[i,j] := U2[i,j]:
      V1[i,j] := V2[i,j]:
      C1[i,j] := C2[i,j]:
      C_x_1[i,j] := C_x_2[i,j]:
      C_y_1[i,j] := C_y_2[i,j]:
      h1[i,j] := h2[i,j]:
      hh1[i,j] := hh2[i,j]:
      h_x_1[i,j] := h_x_2[i,j]:
      h_y_1[i,j] := h_y_2[i,j]:
    od:
  od:
  if cont = v then
    cont := 0:
    Grava(k):
  fi:
  vo := 0:
od:
end proc:

```

## Procedimento - ChamarGrafico

```

ChamaGrafico := proc(aux)
global Tab, U_G, V_G, h_G, p:
  Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVelU')('value') =
    U_G[trunc((aux/dt)/p)]
  ):
  Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVelV')('value') =
    V_G[trunc((aux/dt)/p)]
  ):
end proc:

```

```

Maplets:-Tools:-Set(('PlotterPro')('value') =
    h_G[trunc((aux/dt)/p)]
):
Maplets:-Tools:-Set(
    LabelERRO(caption) =
        convert(vol[trunc((aux/dt)/p)],string)
):
Tab := aux:
end proc:

```

### Procedimento - Tabela

```

Tabela := proc(U)
global tabela;
    tabela := Maplet(
        [
            BoxCell(
                Table(
                    ["x/y", seq(p*i*dy, i = 0..ny/p)],
                    [seq(
                        [
                            p*i*dx,
                            seq(
                                U[i, j, trunc((Tab/dt)/p)],
                                j = 0..ny/p
                            )
                        ],
                        i = 0 .. nx/p
                    )]
                ),
                'as_needed'
            ),
            Button("OK", Shutdown())
        ]);
Maplets[Display](tabela)
end proc:

```

### Procedimento - Animar

```

Animar := proc(AN)
global U_G_Numerica:
    if AN = "U" then
        Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVelU')('value') =
            display(
                seq(U_G[i], i = 0 .. cont_M),
                insequence = true
            )
    ):

```

```

    elif AN = "V" then
        Maplets:-Tools:-Set(('PlotterVelV')('value') =
            display(
                seq(V_G[i], i = 0 .. cont_M),
                insequence = true
            )
    ):
    elif AN = "P" then
        Maplets:-Tools:-Set(('PlotterPro')('value') =
            display(
                seq(h_G[i], i = 0 .. cont_M),
                insequence = true
            )
    ):
fi:
end proc:

```

### Maplet Raíz

```

with (Maplets[Elements]):
maplet :=
Maplet('onstartup'='Action1', 'reference'='Maplet1',
    Plotter(
        'background'="#FFFFFF",
        'continuous'='true',
        'delay'='100',
        'height'='350',
        'reference'='PlotterVelU',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    Plotter(
        'background'="#FFFFFF",
        'continuous'='true',
        'delay'='100',
        'height'='350',
        'reference'='PlotterVelV',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
    Plotter(
        'background'="#FFFFFF",
        'continuous'='true',
        'delay'='100',
        'height'='350',
        'reference'='PlotterPro',
        'visible'='true',
        'width'='400'
    ),
),

```

```

Action(
  'reference'='clickButtonTempo',
  Evaluate(
    'function'='
      Cond_ini(
        txtDX,txtDY,txtDT,txtP,
        txtCX,txtCY,txtH,txtP1,txtP2
      ),
    Evaluate('function'='tempo(txtK,txtP)')
  ),
  Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Calcular",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonTempo',
    'reference'='ButtonPrograma',
    'visible'='true',width=100
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonTabela_VelU',
    Evaluate(
      'function'='Tabela(U_M,trunc(CB))',
      'option'="append",
      'waitforresult'='true'
    )
  ),
  Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Tabela Numérica",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonTabela_VelU',
    'reference'='ButtonTabela_VelU',
    'visible'='true',
    'width'='400'
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonAnima_VelU',
    Evaluate(
      'function'='Animar("U")',
      'option'="append",
      'waitforresult'='true'
    ),
    SetOption(
      'option'='play',
      'target'='PlotterVelU',
      'value'='true'
    )
  ),
  Button(

```

```

    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Animar Gráfico",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonAnima_VelU',
    'reference'='ButtonAnima_VelU',
    'visible'='true',
    'width'='400'
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonTabela_VelV',
    Evaluate(
      'function'='Tabela(V_M,trunc(CB))',
      'option'="append",
      'waitforresult'='true'
    )
  ),
  Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Tabela Numérica",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonTabela_VelV',
    'reference'='ButtonTabela_VelV',
    'visible'='true',
    'width'='400'
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonAnima_VelV',
    Evaluate(
      'function'='Animar("V")',
      'option'="append",
      'waitforresult'='true'
    ),
    SetOption(
      'option'='play',
      'target'='PlotterVelV',
      'value'='true'
    )
  ),
  Button(
    'background'="#D6D3CE",
    'caption'="Animar Gráfico",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'onclick'='clickButtonAnima_VelV',
    'reference'='ButtonAnima_VelV',
    'visible'='true',
    'width'='400'
  ),
  Action(
    'reference'='clickButtonTabela_Pro',

```



```

Evaluate(
  'function'='Tabela(h_M,trunc(CB))',
  'option'="append",
  'waitforresult'='true'
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Tabela Numérica",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonTabela_Pro',
  'reference'='ButtonTabela_Pro',
  'visible'='true',
  'width'='400'
),
Action(
  'reference'='clickButtonAnima_Pro',
  Evaluate(
    'function'='Animar("P")',
    'option'="append",
    'waitforresult'='true'
  ),
  SetOption(
    'option'='play',
    'target'='PlotterPro',
    'value'='true'
  )
),
Button(
  'background'="#D6D3CE",
  'caption'="Animar Gráfico",
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'onclick'='clickButtonAnima_Pro',
  'reference'='ButtonAnima_Pro',
  'visible'='true',
  'width'='400'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtDX',
  'value'="0.1",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',

```

```

  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtDY',
  'value'="0.1",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtDT',
  'value'="0.001",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtK',
  'value'="400",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtP',
  'value'="1",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),
TextField(
  'background'="FFFFFF",
  'editable'='true',
  'enabled'='true',
  'foreground'="#000000",
  'halign'='left',
  'reference'='txtCX',
  'value'="7",
  'visible'='true',
  'width'='5'
),

```

```

TextField(
    'background'='#FFFFFF',
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtCY',
    'value'="7",
    'visible'='true',
    'width'='5'
),
TextField(
    'background'='#FFFFFF',
    'editable'='true',
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'halign'='left',
    'reference'='txtH',
    'value'="5",
    'visible'='true',
    'width'='5'
),
Label(
    'caption'=" U(x,y,0) = 0.1(4x-x^2)(2y-y^2) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelU',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" Ux(x,y,0) = 0.1(4-2x)(2y-y^2) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelUx',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" Uy ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelUy',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" Ut(x,y,0) = 0 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelUt',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" U = 0 (na fronteira) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelUF',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" 0 <= x <= 4 ( x[i] = i dx) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelX',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" 0 <= y <= 2 ( y[i] = i dy) ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelY',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" nx = 10 ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelNX',
    'visible'='true'
),
Label(
    'caption'=" Total ",
    'enabled'='true',
    'foreground'="#000000",
    'reference'='LabelERRO',
    'visible'='true',
    'width'=100
),
Action(
    'reference'='onchangeCB',
    Evaluate('function'='ChamaGrafico(CB)')
),
ComboBox(
    'reference'='CB',
    "0",
    sort([0]),
    'onchange'='onchangeCB',
    'width'='50'
),
BoxLayout(
    'background'="#D6D3CE",
    'border'='false',
    'halign'='center',
    'inset'='5',
    'reference'='BoxLayout1',
    'valign'='center',
    'vertical'='false',

```

```

'visible'='true',
BoxColumn(
  BoxRow(
    'border'='true',
    'caption'="Dados de Entrada",
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Comprimento",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtCX',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Largura",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtCY',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Altura",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtH',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="(dx)",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtDX',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="(dy)",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtDY',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="(dt)",

```

```

      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtDT',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="(k)",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtK',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="(p)",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='txtP',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Tempo",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='CB',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Volume de água",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',
        'value'='LabelERRO',
        'vscroll'='never'
      )
    ),
    BoxCell(
      'hscroll'='never',
      'value'='ButtonPrograma',
      'vscroll'='never'
    )
  ),
  BoxRow(
    BoxColumn(
      'border'='true',
      'caption'="Gráfico e Tabela - U(x,y,t)",
      BoxCell(
        'hscroll'='never',

```



```

U_y := ( U1[m,n+1] - U1[m,n-1])/(2*dy):
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n+1] - h_x_1[m+1,n-1])/(2*dy):
V_y := ( V1[m+1,n+1] - V1[m+1,n-1])/(2*dy):
U_y := ( U1[m+1,n+1] - U1[m+1,n-1])/(2*dy):
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
(V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0:
C_x_2[m,n] := -0.5*(U1[m+1,n] - 2*C_x_1[m+1,n]) -
0.25*(Ap - Bp + Ar - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m,n])/dx:
U_x := ( U1[m+1,n] - U1[m,n])/dx:
V_x := ( V1[m+1,n] - V1[m,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m,n-1])/dx:
U_x := ( U1[m+1,n-1] - U1[m,n-1])/dx:
V_x := ( V1[m+1,n-1] - V1[m,n-1])/dx:
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n+1] - h_y_1[m,n+1])/dx:
U_x := ( U1[m+1,n+1] - U1[m,n+1])/dx:
V_x := ( V1[m+1,n+1] - V1[m,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
(C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:

```

end proc:

## Procedimento - Fronteira y = 0

```

Fronteira_y_0 := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
Cr_x, Cl_x,
C_x_1, C_x_2,
hr_x, hl_x,
V_x,
U_x,
h_x,
y, yr, yl,
Cr_y, Cl_y,
C_y_1, C_y_2,
hr_y, hl_y,
V_y,
U_y,
h_y,
Cl, C2,
U1, U2,
Ur, Ul,
V1, V2,
Vr, Vl,
hl, h2,
Ap, Ar, Al,
Bp, Br, Bl,
Dp, Dr, Dl,
Ep, Er, El,
h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# -----
# = FRONTEIRA Y = 0 =====
# -----
n := 0:
for m from 1 to nx-1 do
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
for i from 1 to d do
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m-1,n])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n] - U1[m-1,n])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n] - V1[m-1,n])/(2*dx):
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n+1] - U1[m-1,n+1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n+1] - V1[m-1,n+1])/(2*dx):
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n-1] - U1[m-1,n-1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n-1] - V1[m-1,n-1])/(2*dx):
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
(C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:

```

```

Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0:
C_y_2[m,n] := -0.5*(V1[m,n+1] - 2*C_y_1[m,n+1]) -
0.25*(Dp - Ep + Dr - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO X
h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n])/dy:
V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n])/dy:
U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n])/dy:
V_y := (V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n])/dy:
U_y := (U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n])/dy:
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n+1] - h_x_1[m+1,n])/dy:
V_y := (V1[m+1,n+1] - V1[m+1,n])/dy:
U_y := (U1[m+1,n+1] - U1[m+1,n])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
(V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + U1[m+1,n]) +
(C_x_1[m-1,n] - C_x_1[m+1,n]) +
0.25*(Ar - Al - 2*Bp - Bl - Br)*dt:
C_x_2[m,n] := 0.25*(U1[m-1,n] - U1[m+1,n]) +
0.5*(C_x_1[m-1,n] + C_x_1[m+1,n]) -
0.125*(Al + Ar + 2*Ap + Bl - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
end proc:

```

### Procedimento - Fronteira x = cx

```

Fronteira_x_cx := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
Cr_x, Cl_x,

```

```

C_x_1, C_x_2,
hr_x, hl_x,
V_x,
U_x,
h_x,
y, yr, yl,
Cr_y, Cl_y,
C_y_1, C_y_2,
hr_y, hl_y,
V_y,
U_y,
h_y,
Cl, C2,
U1, U2,
Ur, Ul,
V1, V2,
Vr, Vl,
h1, h2,
Ap, Ar, Al,
Bp, Br, Bl,
Dp, Dr, Dl,
Ep, Er, El,
h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# -----
# = FRONTEIRA x = cx =====
# -----
# = NA PAREDE =====
m := nx:
for n from 1 to 49 do
# = CALCULAR C_x_2 e U2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n-1])/(2*dy):
V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n-1])/(2*dy):
U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n-1])/(2*dx):
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n-1])/(2*dy):
V_y := (V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n-1])/(2*dy):
U_y := (U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n-1])/(2*dy):
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0:
C_x_2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + 2*C_x_1[m-1,n]) -
0.25*(Ap + Bp + Al + Bl)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y

```

```

h_x := (h_y_1[m,n] - h_y_1[m-1,n])/dx:
U_x := (U1[m,n] - U1[m-1,n])/dx:
V_x := (V1[m,n] - V1[m-1,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/dx:
U_x := (U1[m,n-1] - U1[m-1,n-1])/dx:
V_x := (V1[m,n-1] - V1[m-1,n-1])/dx:
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/dx:
U_x := (U1[m,n+1] - U1[m-1,n+1])/dx:
V_x := (V1[m,n+1] - V1[m-1,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
(C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] - V1[m,n+1]) +
0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
# = SAÍDA DA ÁGUA =====
for n from 50 to 60 do
# = CALCULAR C_x_2 e U2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n-1])/(2*dy):
V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n-1])/(2*dy):
U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n-1])/(2*dy):
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n-1])/(2*dy):
V_y := (V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n-1])/(2*dy):
U_y := (U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n-1])/(2*dy):
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
U2[m,n] := 1:

```

```

C_x_2[m,n] := -0.5*U2[m,n] +
0.5*(U1[m-1,n] + 2*C_x_1[m-1,n]) -
0.25*(Ap + Bp + Al + Bl)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m,n] - h_y_1[m-1,n])/dx:
U_x := (U1[m,n] - U1[m-1,n])/dx:
V_x := (V1[m,n] - V1[m-1,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/dx:
U_x := (U1[m,n-1] - U1[m-1,n-1])/dx:
V_x := (V1[m,n-1] - V1[m-1,n-1])/dx:
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/dx:
U_x := (U1[m,n+1] - U1[m-1,n+1])/dx:
V_x := (V1[m,n+1] - V1[m-1,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
(C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] - V1[m,n+1]) +
0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
# = NA PAREDE =====
for n from 61 to 69 do
# = CALCULAR C_x_2 e U2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n-1])/(2*dy):
V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n-1])/(2*dy):
U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n-1])/(2*dy):
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:

```

```

h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n-1])/(2*dy):
V_y := ( V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n-1])/(2*dy):
U_y := ( U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n-1])/(2*dy):
A1 := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
B1 := V1[m-1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0:
C_x_2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + 2*C_x_1[m-1,n]) -
0.25*(Ap + Bp + A1 + B1)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m,n] - h_y_1[m-1,n])/dx:
U_x := ( U1[m,n] - U1[m-1,n])/dx:
V_x := ( V1[m,n] - V1[m-1,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/dx:
U_x := ( U1[m,n-1] - U1[m-1,n-1])/dx:
V_x := ( V1[m,n-1] - V1[m-1,n-1])/dx:
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/dx:
U_x := ( U1[m,n+1] - U1[m-1,n+1])/dx:
V_x := ( V1[m,n+1] - V1[m-1,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
V2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + V1[m,n+1]) +
(C_y_1[m,n-1] - C_y_1[m,n+1]) +
0.25*(Dr - Dl - 2*Ep - El - Er)*dt:
C_y_2[m,n] := 0.25*(V1[m,n-1] - V1[m,n+1]) +
0.5*(C_y_1[m,n-1] + C_y_1[m,n+1]) -
0.125*(Dl + Dr + 2*Dp + El - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
end proc:

```

```

Fronteira_y_cy := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
Cr_x, Cl_x,
Cx_1, Cx_2,
hr_x, hl_x,
V_x,
U_x,
h_x,
y, yr, yl,
Cr_y, Cl_y,
Cy_1, Cy_2,
hr_y, hl_y,
V_y,
U_y,
h_y,
C1, C2,
U1, U2,
Ur, Ul,
V1, V2,
Vr, Vl,
h1, h2,
Ap, Ar, Al,
Bp, Br, Bl,
Dp, Dr, Dl,
Ep, Er, El,
h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# -----
# = FRONTEIRA y = cy =====
# -----
n := ny:
# = NA PAREDE =====
for m from 1 to 49 do
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n] - h_x_1[m,n-1])/dy:
V_y := ( V1[m,n] - V1[m,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m,n] - U1[m,n-1])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n] - h_x_1[m-1,n-1])/dy:
V_y := ( V1[m-1,n] - V1[m-1,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m-1,n] - U1[m-1,n-1])/dy:
A1 := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
B1 := V1[m-1,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n] - h_x_1[m+1,n-1])/dy:

```

## Procedimento - Fronteira y = cy



```

V_y := ( V1[m+1,n] - V1[m+1,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m+1,n] - U1[m+1,n-1])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
(V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + U1[m+1,n]) +
(C_x_1[m-1,n] - C_x_1[m+1,n]) +
0.25*(Ar - Al - 2*Bp - Bl - Br)*dt:
C_x_2[m,n] := 0.25*(U1[m-1,n] - U1[m+1,n]) +
0.5*(C_x_1[m-1,n] + C_x_1[m+1,n]) -
0.125*(Al + Ar + 2*Ap + Bl - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m-1,n])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n] - U1[m-1,n])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n] - V1[m-1,n])/(2*dx):
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n-1] - U1[m-1,n-1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n-1] - V1[m-1,n-1])/(2*dx):
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
V2[m,n] := 0:
C_y_2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + 2*C_y_1[m,n-1]) -
0.25*(Dp + Ep + Dl + El)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
# = SAÍDA DA ÁGUA =====
for m from 50 to 60 do
# = CALCULAR C_x_2 e U2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n] - h_x_1[m,n-1])/dy:
V_y := ( V1[m,n] - V1[m,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m,n] - U1[m,n-1])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n] - h_x_1[m-1,n-1])/dy:

```

```

V_y := ( V1[m-1,n] - V1[m-1,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m-1,n] - U1[m-1,n-1])/dy:
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
(V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n] - h_x_1[m+1,n-1])/dy:
V_y := ( V1[m+1,n] - V1[m+1,n-1])/dy:
U_y := ( U1[m+1,n] - U1[m+1,n-1])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
(V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + U1[m+1,n]) +
(C_x_1[m-1,n] - C_x_1[m+1,n]) +
0.25*(Ar - Al - 2*Bp - Bl - Br)*dt:
C_x_2[m,n] := 0.25*(U1[m-1,n] - U1[m+1,n]) +
0.5*(C_x_1[m-1,n] + C_x_1[m+1,n]) -
0.125*(Al + Ar + 2*Ap + Bl - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m-1,n])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n] - U1[m-1,n])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n] - V1[m-1,n])/(2*dx):
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/(2*dx):
U_x := ( U1[m+1,n-1] - U1[m-1,n-1])/(2*dx):
V_x := ( V1[m+1,n-1] - V1[m-1,n-1])/(2*dx):
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
V2[m,n] := 1:
C_y_2[m,n] := -0.5 +
0.5*(V1[m,n-1] + 2*C_y_1[m,n-1]) -
0.25*(Dp + Ep + Dl + El)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
od:
# = NA PAREDE =====
for m from 61 to 69 do
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO X
for i from 1 to d do

```

```

h_y := (h_x_1[m,n] - h_x_1[m,n-1])/dy:
V_y := (V1[m,n] - V1[m,n-1])/dy:
U_y := (U1[m,n] - U1[m,n-1])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
      (V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n] - h_x_1[m-1,n-1])/dy:
V_y := (V1[m-1,n] - V1[m-1,n-1])/dy:
U_y := (U1[m-1,n] - U1[m-1,n-1])/dy:
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
      (V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n] - h_x_1[m+1,n-1])/dy:
V_y := (V1[m+1,n] - V1[m+1,n-1])/dy:
U_y := (U1[m+1,n] - U1[m+1,n-1])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
      (V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + U1[m+1,n]) +
          (C_x_1[m-1,n] - C_x_1[m+1,n]) +
          0.25*(Ar - Al - 2*Bp - Bl - Br)*dt:
C_x_2[m,n] := 0.25*(U1[m-1,n] - U1[m+1,n]) +
             0.5*(C_x_1[m-1,n] + C_x_1[m+1,n]) -
             0.125*(Al + Ar + 2*Ap + Bl - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# = CALCULAR C_y_2 e V2 ===== DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m-1,n])/(2*dx):
U_x := (U1[m+1,n] - U1[m-1,n])/(2*dx):
V_x := (V1[m+1,n] - V1[m-1,n])/(2*dx):
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
      (h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/(2*dx):
U_x := (U1[m+1,n-1] - U1[m-1,n-1])/(2*dx):
V_x := (V1[m+1,n-1] - V1[m-1,n-1])/(2*dx):
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
      (h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
El := U1[m,n-1]*V_x:
V2[m,n] := 0:
C_y_2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + 2*C_y_1[m,n-1]) -
            0.25*(Dp + Ep + Dl + El)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:

```

```
vo := vo + h2[m,n]:
```

```
od:
end proc:
```

## Procedimento - Canto Inferior Esquerdo

```

Inf_Esq := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
       Cr_x, Cl_x,
       C_x_1, C_x_2,
       hr_x, hl_x,
       V_x,
       U_x,
       h_x,
       y, yr, yl,
       Cr_y, Cl_y,
       C_y_1, C_y_2,
       hr_y, hl_y,
       V_y,
       U_y,
       h_y,
       C1, C2,
       U1, U2,
       Vr, V1,
       Ur, Ul,
       V1, V2,
       Vr, V1,
       h1, h2,
       Ap, Ar, Al,
       Bp, Br, Bl,
       Dp, Dr, Dl,
       Ep, Er, El,
       h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# = ORIGEM =====
m := 0:
n := 0:
# ----- DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
U2[m,n] := 0:
h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n])/dy:
V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n])/dy:
U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
      (V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n+1] - h_x_1[m+1,n])/dy:
V_y := (V1[m+1,n+1] - V1[m+1,n])/dy:
U_y := (U1[m+1,n+1] - U1[m+1,n])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*

```

```

        Br := (V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
C_x_2[m,n] := V1[m+1,n]*U_y:
        := -0.5*(U1[m+1,n] - 2*C_x_1[m+1,n]) -
        0.25*(Ap - Bp + Ar - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# ----- DIREÇÃO Y
V2[m,n] := 0:
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m,n])/dx:
U_x := (U1[m+1,n] - U1[m,n])/dx:
V_x := (V1[m+1,n] - V1[m,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n+1] - h_y_1[m,n+1])/dx:
U_x := (U1[m+1,n+1] - U1[m,n+1])/dx:
V_x := (V1[m+1,n+1] - V1[m,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
(h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
C_y_2[m,n] := -0.5*(V1[m,n+1] - 2*C_y_1[m,n+1]) -
0.25*(Dp - Ep + Dr - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
end proc:

```

## Procedimento - Canto Superior Esquerdo

```

Sup_Esq := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
Cr_x, Cl_x,
C_x_1, C_x_2,
hr_x, hl_x,
V_x,
U_x,
h_x,
y, yr, yl,
Cr_y, Cl_y,
C_y_1, C_y_2,
hr_y, hl_y,
V_y,

```

```

U_y,
h_y,
C1, C2,
U1, U2,
Ur, Ul,
V1, V2,
Vr, Vl,
h1, h2,
Ap, Ar, Al,
Bp, Br, Bl,
Dp, Dr, Dl,
Ep, Er, El,
h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# = SUPERIOR - ESQUERDO =====
m := 0:
n := ny:
# ----- DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
U2[m,n] := 0:
h_y := (h_x_1[m,n] - h_x_1[m,n-1])/dy:
V_y := (V1[m,n] - V1[m,n-1])/dy:
U_y := (U1[m,n] - U1[m,n-1])/dy:
Ap := (g/C_x_1[m,n])*
(V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m+1,n] - h_x_1[m+1,n-1])/dy:
V_y := (V1[m+1,n] - V1[m+1,n-1])/dy:
U_y := (U1[m+1,n] - U1[m+1,n-1])/dy:
Ar := (g/C_x_1[m+1,n])*
(V1[m+1,n]*h_y + h_x_1[m+1,n]*V_y):
Br := V1[m+1,n]*U_y:
C_x_2[m,n] := -0.5*(U1[m+1,n] - 2*C_x_1[m+1,n]) -
0.25*(Ap - Bp + Ar - Br)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# ----- DIREÇÃO Y
V2[m,n] := 0:
h_x := (h_y_1[m+1,n] - h_y_1[m,n])/dx:
U_x := (U1[m+1,n] - U1[m,n])/dx:
V_x := (V1[m+1,n] - V1[m,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
(h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m+1,n-1] - h_y_1[m,n-1])/dx:
U_x := (U1[m+1,n-1] - U1[m,n-1])/dx:
V_x := (V1[m+1,n-1] - V1[m,n-1])/dx:
Dl := (g/C_y_1[m,n-1])*
(h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):

```

```

        E1 := U1[m,n-1]*V_x:
C_y_2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + 2*C_y_1[m,n-1]) -
              0.25*(Dp + Ep + D1 + E1)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
end proc:

```

### Procedimento - Canto Superior Direito

```

Sup_Dir := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
       Cr_x, Cl_x,
       C_x_1, C_x_2,
       hr_x, hl_x,
       V_x,
       U_x,
       h_x,
       y, yr, yl,
       Cr_y, Cl_y,
       C_y_1, C_y_2,
       hr_y, hl_y,
       V_y,
       U_y,
       h_y,
       C1, C2,
       U1, U2,
       Vr, V1,
       V2,
       Vr, V1,
       h1, h2,
       Ap, Ar, Al,
       Bp, Br, Bl,
       Dp, Dr, D1,
       Ep, Er, E1,
       h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# = SUPERIOR - DIREITO =====
m := nx:
n := ny:
# ----- DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
h_y := (h_x_1[m,n] - h_x_1[m,n-1])/dy:
V_y := (V1[m,n] - V1[m,n-1])/dy:
U_y := (U1[m,n] - U1[m,n-1])/dy:

```

```

Ap := (g/C_x_1[m,n])*
      (V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
Bp := V1[m,n]*U_y:
h_y := (h_x_1[m-1,n] - h_x_1[m-1,n-1])/dy:
V_y := (V1[m-1,n] - V1[m-1,n-1])/dy:
U_y := (U1[m-1,n] - U1[m-1,n-1])/dy:
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
      (V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
U2[m,n] := 0:
C_x_2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + 2*C_x_1[m-1,n]) -
            0.25*(Ap + Bp + Al + Bl)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# ----- DIREÇÃO Y
h_x := (h_y_1[m,n] - h_y_1[m-1,n])/dx:
U_x := (U1[m,n] - U1[m-1,n])/dx:
V_x := (V1[m,n] - V1[m-1,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
      (h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n-1] - h_y_1[m-1,n-1])/dx:
U_x := (U1[m,n-1] - U1[m-1,n-1])/dx:
V_x := (V1[m,n-1] - V1[m-1,n-1])/dx:
D1 := (g/C_y_1[m,n-1])*
      (h_y_1[m,n-1]*U_x + U1[m,n-1]*h_x):
E1 := U1[m,n-1]*V_x:
V2[m,n] := 0:
C_y_2[m,n] := 0.5*(V1[m,n-1] + 2*C_y_1[m,n-1]) -
            0.25*(Dp + Ep + D1 + E1)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
end proc:

```

### Procedimento - Canto Inferior Direito

```

Inf_Dir := proc()
local m, n, i:
global x, xr, xl,
       Cr_x, Cl_x,
       C_x_1, C_x_2,

```

```

hr_x, hl_x,
V_x,
U_x,
h_x,
y, yr, yl,
Cr_y, Cl_y,
C_y_1, C_y_2,
hr_y, hl_y,
V_y,
U_y,
h_y,
C1, C2,
U1, U2,
Ur, U1,
V1, V2,
Vr, Vl,
h1, h2,
Ap, Ar, Al,
Bp, Br, Bl,
Dp, Dr, Dl,
Ep, Er, El,
h_x_1, h_x_2, h_y_1, h_y_2, vo:
# = INFERIOR - DIREITO =====
m := nx:
n := 0:
# ----- DIREÇÃO X
for i from 1 to d do
  U2[m,n] := 0:
  h_y := (h_x_1[m,n+1] - h_x_1[m,n])/dy:
  V_y := (V1[m,n+1] - V1[m,n])/dy:
  U_y := (U1[m,n+1] - U1[m,n])/dy:
  Ap := (g/C_x_1[m,n])*
    (V1[m,n]*h_y + h_x_1[m,n]*V_y):
  Bp := V1[m,n]*U_y:
  h_y := (h_x_1[m-1,n+1] - h_x_1[m-1,n])/dy:

```

```

V_y := (V1[m-1,n+1] - V1[m-1,n])/dy:
U_y := (U1[m-1,n+1] - U1[m-1,n])/dy:
Al := (g/C_x_1[m-1,n])*
  (V1[m-1,n]*h_y + h_x_1[m-1,n]*V_y):
Bl := V1[m-1,n]*U_y:
C_x_2[m,n] := 0.5*(U1[m-1,n] + 2*C_x_1[m-1,n]) -
  0.25*(Ap + Bp + Al + Bl)*dt:
h_x_2[m,n] := (C_x_2[m,n]^2)/g:
C_x_1[m,n] := C_x_2[m,n]:
h_x_1[m,n] := h_x_2[m,n]:
# ----- DIREÇÃO Y
V2[m,n] := 0:
h_x := (h_y_1[m,n] - h_y_1[m-1,n])/dx:
U_x := (U1[m,n] - U1[m-1,n])/dx:
V_x := (V1[m,n] - V1[m-1,n])/dx:
Dp := (g/C_y_1[m,n])*
  (h_y_1[m,n]*U_x + U1[m,n]*h_x):
Ep := U1[m,n]*V_x:
h_x := (h_y_1[m,n+1] - h_y_1[m-1,n+1])/dx:
U_x := (U1[m,n+1] - U1[m-1,n+1])/dx:
V_x := (V1[m,n+1] - V1[m-1,n+1])/dx:
Dr := (g/C_y_1[m,n+1])*
  (h_y_1[m,n+1]*U_x + U1[m,n+1]*h_x):
Er := U1[m,n+1]*V_x:
C_y_2[m,n] := -0.5*(V1[m,n+1] - 2*C_y_1[m,n+1]) -
  0.25*(Dp - Ep + Dr - Er)*dt:
h_y_2[m,n] := (C_y_2[m,n]^2)/g:
C_y_1[m,n] := C_y_2[m,n]:
h_y_1[m,n] := h_y_2[m,n]:
od:
C2[m,n] := (C_x_2[m,n] + C_y_2[m,n])/2:
h2[m,n] := (C2[m,n]^2)/g:
vo := vo + h2[m,n]:
end proc:

```