

**Universidade Federal do Paraná**

Alan Celestino

**Investigação do Espaço de Parâmetros de Catracas  
Clássicas**

Curitiba - PR

2013

Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós-graduação em  
Física  
Dissertação de Mestrado

Alan Celestino

Investigação do Espaço de Parâmetros de Catracas  
Clássicas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física

**Orientador:** *Prof. Dr. Marcus Werner Beims*

Curitiba - PR

2013

Celestino, Alan  
Investigação do espaço de parâmetros de catracas  
clássicas / Alan  
Celestino. – Curitiba, 2013.  
97 f. : il.

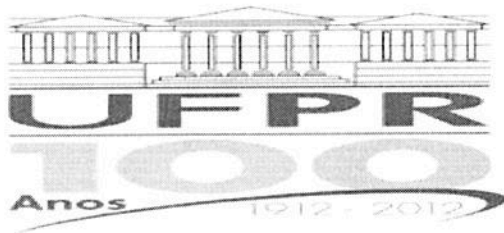
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do  
Paraná, Setor de  
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em  
Física.

Orientador: Marcus Werner Beims

1. Engrenagens. I. Beims, Marcus Werner. II. Título.

CDD

621.83


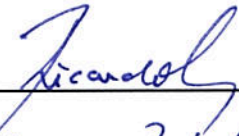



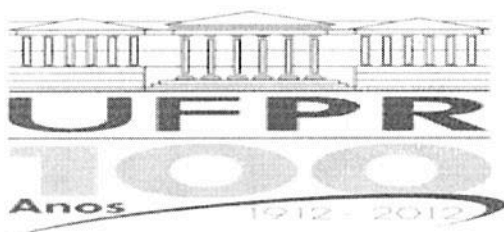
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

## PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do aluno ALAN CELESTINO, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: INVESTIGAÇÃO DO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE CATRACAS CLÁSSICAS.

Curitiba, 14 de fevereiro de 2013.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		A
Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (UNESP)		A
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		A



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

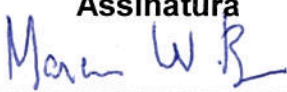

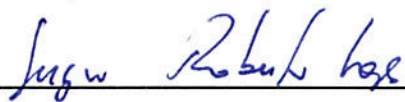
## DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

INVESTIGAÇÃO DO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE CATRAÇAS CLÁSSICAS.

ALUNO

ALAN CELESTINO

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 14 de fevereiro de 2013, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (UNESP)		<u>A</u>
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		<u>A</u>

*Dedico esta dissertação de mestrado aos meus pais,  
Claudemir e Vilma.*

*“Poets say science takes away from the beauty of the stars — mere globs of gas atoms. I too can see the stars on a desert night, and feel them. But do I see less or more? The vastness of the heavens stretches my imagination. A vast pattern — of which I am a part. It does not do harm to the mystery to know a little about it. Far more marvellous is the truth that any artists of the past imagined it. What men are poets who can speak of Jupiter if he were a man, but if he is an immense spinning sphere of methane and ammonia must be silent?”*  
*Richard P. Feynman.*

# Agradecimentos

- Obrigado Deus, por ter revelado uma parte infinitesimal de sua manifestação.
- Sou imensamente grato aos meus pais Claudemir e Vilma, porque a eles devo de forma direta ou indireta praticamente todas as chances que tive em minha vida.
- Agradeço ao meu irmão Andrey pura e simplesmente por sua existência. Cada pensamento sobre ele é um motivo a mais para que eu me torne um melhor exemplo.
- Não posso deixar de agradecer à Cristiane, com quem tenho compartilhado muito, mesmo que à distância. Obrigado pela dedicação, companheirismo, por me ouvir, aconselhar e motivar durante toda a jornada.
- Sou grato aos meus familiares como um todo, irmãos Alisson, Elaine, Claudemir Jr. e Juliana, minhas avós Marias, cunhados, à Marli (que já se tornou um dos familiares mais próximos), entre outros, pelo apoio que me forneceram, cada um à sua maneira.
- Existem alguns amigos em especial que me ajudaram a chegar até aqui. Muito obrigado Alessandra, Alexandra, Clarice, Guilherme, Flávio e Andréia pela convivência que marcou tão intensamente este período de minha vida. A propósito, terminei o e-mail que havia prometido a vocês. Ao relê-lo no entanto, percebi que já havia contado tudo pessoalmente e resolvi apagá-lo. Espero que me perdoem...
- Há também uma grande amiga no outro hemisfério, com quem tive o prazer de dividir os anos de graduação. Obrigado Anezka.
- Serei eternamente grato à Profa. Tatiane Cardoso, quem teve forte influência em minha escolha pela profissão de Físico.



- Sou grato ao Prof. Wilson Marques por todo o suporte fornecido quanto às questões burocráticas que permearam muitos de meus objetivos durante o curso.
- Agradeço ao Prof. Carlos de Carvalho pelo imenso esforço em manter funcional todo o aparato de computação fundamental para a realização deste trabalho.
- Também agradeço ao Prof. Holokx Abreu Albuquerque, quem me orientou durante a iniciação científica e também é um grande amigo.
- Obrigado Prof. Cesar Manchein pela colaboração científica e, em especial, por alguns dos resultados apresentados nesta dissertação.
- Alguns professores serão dificilmente esquecidos, seja pelo relacionamento amistoso que estabelecem conosco ou pelo trabalho notável que desempenham no magistério. Pelos dois motivos agradeço ao Prof. Carlos Eduardo Fiori, à Prof. Tatiana Comiotto e à Profa. Cintia Aguiar.
- Sou muito grato ao meu orientador e grande amigo Prof. Marcus Werner Beims, não apenas por ter me guiado profissionalmente, mas pela dedicação imparcial, pelas conversas enriquecedoras, pela ajuda também no âmbito pessoal e pela relação sincera que temos. Além disso, devo-lhe dois litros de cerveja...
- Sou grato à CAPES pelo suporte financeiro.
- Agradeço ao grupo FISUX pelo suporte computacional.

# Resumo

Esta dissertação dedicou-se ao estudo de sistemas do tipo catraca, i.e. sistemas que apresentam transporte direcionado através de forças com média nula no espaço e no tempo. O foco desse estudo foi a investigação numérica do espaço vetorial formado pelos parâmetros do sistema. Mostrou-se então que o espaço de parâmetros de catracas possui uma série de regiões de dinâmica periódica (estruturas isoperiódicas) e caótica, e que uma conexão direta entre essas regiões e as propriedades do transporte (intensidade, dispersão, eficiência etc.) pode ser estabelecida. De fato, considerando as estruturas isoperiódicas e as regiões caóticas definidas neste trabalho, obtém-se uma visão global dos fenômenos relacionados ao transporte oriundos da variação de parâmetros. Os resultados aqui obtidos indicam que as estruturas isoperiódicas compõem as regiões de transporte mais eficazes no espaço de parâmetros. A resistência das regiões definidas frente ao ruído estocástico também foi avaliada, mostrando que mesmo as regiões mais sensíveis, as estruturas isoperiódicas, resistem a alguma intensidade de ruído. Os resultados obtidos nesta dissertação sugerem que a topologia do espaço de parâmetros de catracas clássicas pode fornecer ferramentas para o controle do transporte e desenvolvimento de catracas em aplicações tecnológicas, bem como informações importantes no que se refere ao estudo de catracas na natureza.

# Abstract

This master's dissertation was dedicated to the study of ratchet systems, i.e. systems that show directed transport through forces with zero average in time and space. The main interest here was the numerical investigation of the vectorial space generated by the system's parameters. The existence of periodic (isoperiodic structures) and chaotic regions was shown, and a direct connection between them and the transport's properties (intensity, dispersion, efficiency etc.) was established. In fact, by considering the isoperiodic structures and chaotic regions, one achieves a global view of the transport phenomena which occur when parameters are varied. The results obtained here indicate that the isoperiodic structures are the most effective transport regions in the parameter space. The regions' resistance to stochastic noise was also addressed, showing that even the most fragile regions, namely the isoperiodic structures, resist to some noise intensity. The results attained through this master thesis suggest that the topology of classical ratchet's parameter space may furnish useful data for the issue of transport control and development of ratchets in technological applications, as well as crucial information in regard to the study of ratchets in nature.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Sumário</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão conceitual</b>	<b>5</b>
2.1 Representações matemáticas de sistemas dinâmicos . . . . .	5
2.2 Sistemas dissipativos . . . . .	8
2.2.1 Atratores . . . . .	10
2.2.2 Estabilidade linear de estados estacionários e órbitas periódicas . .	11
2.2.3 Dependência sensível às condições iniciais e expoente de Lyapunov .	15
2.2.4 Bifurcações . . . . .	17
2.3 Processos estocásticos . . . . .	19
2.4 Sistemas dinâmicos sobre a influência de ruído estocástico . . . . .	20
<b>3 Catracas determinísticas</b>	<b>23</b>
3.1 Primeiros conceitos . . . . .	23

3.2	Mapeamento para catracas . . . . .	28
3.2.1	Dedução do mapa e suas propriedades . . . . .	28
3.2.2	Eficiência energética do mapeamento a temperatura nula . . . . .	33
3.2.3	Curvas analíticas de bifurcação . . . . .	36
3.3	Resultados numéricos: mapeamento a temperatura nula . . . . .	38
3.3.1	Espaço de parâmetros $K$ versus $\gamma$ . . . . .	39
3.3.2	Definição das principais estruturas isoperiódicas . . . . .	46
3.3.3	Espaço de parâmetros $a$ versus $\gamma$ . . . . .	49
3.3.4	Espaço de parâmetros $\phi$ versus $\gamma$ . . . . .	52
3.3.5	Espaços de parâmetros com dissipação fixa . . . . .	54
3.3.6	Eficiência nas estruturas isoperiódicas . . . . .	56
3.4	Modelamento de catraca determinística por equações diferenciais . . . . .	58
3.4.1	Geração de momentum . . . . .	59
3.4.2	Geração de energia . . . . .	60
3.5	Resultados numéricos para uma catraca determinística modelada por equações diferenciais . . . . .	61
3.6	Conclusões . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Catracas térmicas</b> . . . . .	<b>66</b>
4.1	Mapeamento para catracas térmicas . . . . .	66
4.1.1	Definição do mapa . . . . .	66
4.1.2	Propriedades estocásticas . . . . .	67
4.1.3	Difusão para o mapeamento . . . . .	69
4.2	Resultados numéricos: mapeamento a temperatura não-nula . . . . .	76
4.3	Resultados numéricos para uma partícula <i>browniana</i> em que atua uma força externa oscilatória . . . . .	83
4.4	Conclusões . . . . .	86

<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>87</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>

# Introdução

Em Física, catracas são sistemas que produzem um transporte direcionado de matéria através de forças com média nula no espaço e no tempo. Tal conceito pode parecer pouco intuitivo à primeira vista, mas está implícito na ideia comum que se tem de uma catraca: embora se possa forçar o movimento em ambos os sentidos, e.g. através de uma força com média nula no tempo, apenas um deles é permitido. Uma catraca apenas funciona porque a força gerada por ela (trancando ou permitindo o movimento) é assimétrica e periódica no espaço (imagine o espaço sendo o ângulo que a catraca varia ao permitir um movimento). Uma análise mais profunda de sistemas desse tipo acaba por mostrar que a dissipação de energia e a ausência de equilíbrio térmico são ingredientes fundamentais, presentes em todas as catracas na natureza (veja a seção 3.1). De fato, qualquer sistema que inclua estes três ingredientes, a assimetria espacial, dissipação e ausência de equilíbrio térmico, pode ser considerado um forte candidato a apresentar transporte direcionado.

O conceito de catraca na Física teve origem no primeiro volume da popular série *Feynman Lectures on Physics* [1], onde um mecanismo que supostamente poderia violar a segunda lei da termodinâmica é “desmascarado” didaticamente pelo autor (veja a seção 3.1). Este mecanismo foi posteriormente adaptado (principalmente entre 1993 e 1994) por trabalhos pioneiros [2–11] a contextos biológicos, em especial no que se refere ao transporte de proteínas no interior de células. Nestes trabalhos, as catracas eram apresentadas como motores *brownianos* (catracas em meios térmicos), que se utilizavam de ambientes descritos pela equação de Langevin<sup>1</sup> em desequilíbrio térmico para gerar transporte direcionado<sup>2</sup>. O ambiente intracelular na escala de tamanho de uma proteína

<sup>1</sup>Na seção 3.1 a equação de Langevin é apresentada e suas principais propriedades são discutidas.

<sup>2</sup>Embora estes trabalhos não tenham descrito exatamente o motor *browniano* existente no interior das células, propuseram modelos gerais de catracas cujos conceitos fundamentais poderiam, em tese, ser aplicados aos processos biológicos intracelulares.

apresenta características peculiares, entre elas destacam-se as grandes flutuações térmicas (que geram o movimento *browniano*) e um número de Reynolds<sup>3</sup> muito pequeno [12]. Assim, a dinâmica da proteína na catraca pode ser considerada igual à de uma partícula *browniana* superamortecida, ou seja, onde se pode negligenciar o termo inercial (aceleração) da equação de movimento, de maneira que as forças geram diretamente velocidades e não acelerações. De fato, a inexistência deste termo inercial acaba implicando na não ocorrência de caos nesses sistemas. Extensas revisões podem ser encontradas nos trabalhos [12–14]. Além das aplicações em transporte intracelular, outras aplicações como a separação (pela massa) de partículas coloidais<sup>4</sup> em um potencial dielétrico assimétrico periodicamente ligado e desligado [15], separação de DNA [16], e partículas em geral [17], movimentação direcionada de células bem como separação de células de diferentes tipos (e.g. células cancerígenas e saudáveis em um tumor) [18], e de maneira geral em sistemas bidimensionais [19–25] podem ser encontradas.

Em 1996 foi publicado o primeiro trabalho considerando o termo de inércia na equação de movimento de uma catraca [26]. Sistemas como esse passaram então a ser denominados “catracas de inércia”<sup>5</sup>, e uma fenomenologia completamente nova passou a ser investigada. A partir deste trabalho, as flutuações térmicas passaram a não ser mais consideradas fundamentais na descrição da dinâmica de uma catraca, e vários trabalhos posteriores consideraram catracas inerciais puramente determinísticas. A característica mais marcante que difere estes sistemas daqueles anteriormente estudados é a possibilidade do sistema inercial exibir caos para partículas confinadas a apenas uma dimensão espacial. Isso porque o termo inercial aumenta a ordem da equação diferencial que descreve o movimento da catraca, de maneira que a dinâmica passa a ser descrita por três equações ordinárias de primeira ordem<sup>6</sup>. Com a possibilidade da ocorrência de órbitas caóticas surge uma nova fenomenologia de transporte em catracas de inércia, em especial no que se refere ao comportamento desse transporte em função dos parâmetros do sistema em questão. Por exemplo, quando se analisa o comportamento de catracas de inércia em função de um de seus parâmetros, muito comumente são observadas múltiplas inversões de velocidade,

---

<sup>3</sup>O número de Reynolds é uma medida da razão entre as forças inerciais que atuam em uma partícula e as forças de viscosidade. Quando o número de Reynolds é grande, as forças inerciais preponderam e, de maneira informal, pode-se dizer que um objeto que foi acelerado deve manter o seu movimento por um tempo considerável. Quando o número de Reynolds é pequeno, as forças de origem viscosa preponderam e qualquer velocidade gerada por uma força inercial rapidamente é levada a zero (ao cessar dessa força) pela viscosidade do meio.

<sup>4</sup>Coloides são misturas heterogêneas (ainda que possam parecer homogêneas a olho nu) compostas por um dispersante e um disperso, este último constituindo um conjunto de partículas chamadas de partículas coloidais. Entre os exemplos de coloides está o leite, sangue, tinta, nuvem, fumaça etc.

<sup>5</sup>Em inglês, “*inertia ratchets*”.

<sup>6</sup>Entre outros pré-requisitos, para um sistema contínuo apresentar caos é necessário que sua dinâmica seja descrita por, pelo menos, três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [27].



sendo que o sentido e a intensidade do transporte pode ser ajustado através da escolha de parâmetros. A origem destas inversões foi posteriormente identificada com transições entre dinâmicas periódica e caótica [28], e expandida considerando os fenômenos de histerese oriundos da coexistência de atratores<sup>7</sup> [29]. Por fim, a condição de multiestabilidade, i.e. a existência de mais de um atrator no espaço de fase, pode possibilitar a separação de partículas de diferentes velocidades [30].

Os efeitos do ruído estocástico na dinâmica da catraca também foram abordados em vários trabalhos [29, 31–36], onde, em geral, observou-se que o termo estocástico diminui a eficiência da catraca, mas que as características determinísticas do transporte são mantidas até certa intensidade de ruído. O papel dos modos aceleradores<sup>8</sup> na dinâmica fracamente amortecida, existentes no limite conservativo de algumas catracas, foi elucidado pelo trabalho [38]. De fato, em situações onde a dissipação é pequena, os modos aceleradores acabam por difundir sua energia no espaço de fase e produzir altas velocidades caóticas. No regime quântico, as catracas foram estudadas nos trabalhos [39–42].

Curiosamente, na mesma época em que os primeiros artigos sobre catracas começaram a aparecer, o primeiro trabalho investigando sistematicamente o espaço de parâmetros (espaço vetorial formado pelos parâmetros de um sistema) de sistemas dinâmicos não lineares foi publicado. Neste trabalho, extensas regiões do espaço de parâmetros onde o comportamento dinâmico era essencialmente periódico, as estruturas isoperiódicas, foram reportadas pela primeira vez para o mapa de Hénon [43]. Estas estruturas consistem em um padrão bifurcacional no espaço de parâmetros que aparece repetidamente, não apenas no mapa de Hénon, mas em sistemas dinâmicos dissipativos em geral. Ao longo dos anos, estruturas isoperiódicas vêm sendo reportadas em mapas [43–45], fluxos [46–51] e experimentos [52, 53], onde as quantidades avaliadas no espaço de parâmetros são geralmente o período e o maior expoente de Lyapunov (veja seção 2.2.3) das trajetórias. De fato, o estudo do espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos fornece uma visão global dos tipos de dinâmica que um dado sistema pode apresentar. No entanto, estas estruturas, até então, nunca haviam sido vinculadas ao transporte direcionado que ocorre em catracas. O estabelecimento deste vínculo compõe o maior objetivo desta dissertação. Como será apresentado em detalhes nos capítulos decorrentes, muitos dos fenômenos reportados na literatura (e.g. inversões de velocidade, intenso transporte no regime fracamente dissipativo, platôs de velocidade constante, intervalos de velocidade variável etc.) quando da variação de um único parâmetro podem ser melhor entendidos em termos dessas estru-

<sup>7</sup>Atratores constituem os estados assintóticos de sistemas dissipativos.

<sup>8</sup>“Modos aceleradores” constituem órbitas do limite conservativo que são periódicas se a posição  $x$  e o momentum  $p$  forem consideradas variáveis periódicas, e que aumentam o seu momentum por um incremento proporcional ao período de  $p$  a cada iteração [37].

turas e dos conceitos a elas referentes construídos nos trabalhos já citados. Além disso, uma análise da eficiência energética e difusiva no espaço de parâmetros indica que as estruturas isoperiódicas consistem nas regiões de transporte mais eficazes, e a inclusão de ruído estocástico à dinâmica comprova sua robustez frente a determinados ambientes térmicos.

Esta dissertação foi organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 é apresentada uma revisão conceitual de tópicos de dinâmica não-linear e processos estocásticos, fundamentais para a abordagem do tema proposto; no capítulo 3, uma pequena introdução teórica sobre catracas é feita, os sistemas de estudo (um mapa e um fluxo) e algumas de suas propriedades são deduzidas, e os resultados numéricos para duas dinâmicas determinísticas<sup>9</sup> são apresentados; no capítulo 4, o termo estocástico é incluído na dinâmica dos dois sistemas do capítulo 3, alguns resultados analíticos são obtidos e novos resultados numéricos são apresentados; por fim, no capítulo 5 estão as considerações finais.

---

<sup>9</sup>Temperatura nula.

## Revisão conceitual

### 2.1 Representações matemáticas de sistemas dinâmicos

Talvez a representação mais intuitiva da dinâmica de um sistema físico seja as equações diferenciais. Seja ele descrito por  $D$  variáveis (vetor  $\mathbf{x}$ ) onde o tempo varia continuamente (tal sistema é também chamado de fluxo), sua evolução temporal é descrita por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

onde o ponto acima da variável  $\mathbf{x}$  representa uma derivação no tempo. Este é um sistema não-autônomo, pois as derivadas dependem explicitamente da variável independente ( $t$ ). Introduzindo o tempo como uma das variáveis dependentes do sistema (e.g.  $t'$ ), ao conjunto de  $D$  equações diferenciais ordinárias representadas pela equação 2.1 é acrescentada mais uma trivial,

$$\frac{d}{dt}t' = 1, \quad (2.2)$$

que permite escrever o sistema não-autônomo da equação 2.1 como um sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

onde se fez necessário aumentar a dimensão do sistema para  $D + 1$  ( $\mathbf{x}$  agora é um vetor com  $D + 1$  variáveis, as  $D$  antigas e  $t'$ ). O espaço vetorial formado por todas as variáveis de um sistema contínuo é chamado de **espaço de fase**.

Alguns sistemas podem ser descritos por equações iterativas da forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (2.4)$$

onde o “tempo”  $n$  agora é uma variável discreta. Tal representação é chamada de mapeamento, ou simplesmente mapa. Analogamente, o espaço vetorial formado por todas as variáveis de um mapeamento é chamado de **espaço de fase**. Embora mapas muitas vezes não sejam tão intuitivos fisicamente, são em geral muito mais simples de tratar matematicamente e computacionalmente.

Em algumas situações é possível obter um mapa que represente a dinâmica de um fluxo. O procedimento empregado para tanto é chamado de seção de Poincaré<sup>1</sup> [27], e está representado na figura 2.1. Nesse procedimento, estabelece-se uma hipersuperfície que intercepta o fluxo, e se analisa a dinâmica do sistema pelas interseções entre a órbita e a hipersuperfície. Claramente, a dimensão da hipersuperfície, e portanto do sistema, é reduzida para  $D-1$  e o tempo é discretizado. A seção pode ser estabelecida analiticamente em alguns casos, onde pelo menos uma das variáveis do sistema contínuo é periódica, e pode ser integrada ao longo de um período, o que será feito mais adiante na subseção 3.2.1. Em outros casos, quando não é possível fazer a integração mas ainda há pelo menos uma coordenada periódica, tal seção pode ser estabelecida computacionalmente.

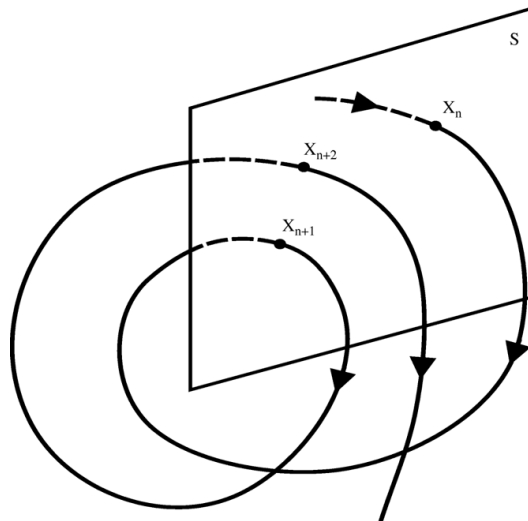


Figura 2.1: Representação esquemática do estabelecimento de uma seção de Poincaré. As linhas representam o fluxo e as interseções entre as linhas e a hipersuperfície  $S$  formam a trajetória descrita pelo mapa.

Muitas das propriedades de sistemas dinâmicos são expressas pela matriz jacobiana

<sup>1</sup>Homenagem ao cientista francês Joulès H. Poincaré (1854-1912), que em 1899 foi o primeiro a empregar o método no estudo do sistema de três corpos que se atraem gravitacionalmente.

desses sistemas, que são definidas de maneira diversa para fluxos e mapas. Seja o fluxo definido pela equação 2.3, sua matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  é

$$J_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (2.5)$$

Já para o mapa da equação 2.4, a jacobiana é definida como

$$J_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (2.6)$$

onde se omitiu o índice do tempo  $n$ . Por fim, pode-se classificar tanto fluxos quanto mapas em sistemas conservativos e dissipativos. Para se entender este conceito, imagine que se tome um *ensemble* de condições iniciais formando uma região com um hipervolume no espaço de fase do sistema (mapa ou fluxo). Através da evolução temporal, este conjunto de estados pode manter seu hipervolume ou então diminuí-lo, neste último caso comprimindo a região do espaço de fase onde os estados podem distribuir-se. De fato, sistemas conservativos são aqueles onde este hipervolume é conservado pela evolução temporal enquanto em sistemas dissipativos este hipervolume deve diminuir com o passar do tempo [37]. No caso de um fluxo, seja o operador gradiente definido com as variáveis do espaço de fase

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.7)$$

onde  $\nabla_i$  se refere à  $i$ -ésima componente do operador gradiente  $\nabla$  e  $x_i$  à  $i$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{x}$ . Então, um fluxo conservativo é caracterizado por [54]

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.8)$$

já um fluxo dissipativo por

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0. \quad (2.9)$$

Para mapas, deve-se considerar a matriz jacobiana. Em mapas conservativos, tem-se [54]

$$\det(|\mathbf{J}|) = 1, \quad (2.10)$$

enquanto em mapas dissipativos

$$\det(|\mathbf{J}|) < 1. \quad (2.11)$$

É importante observar ainda que todos os sistemas hamiltonianos, ou seja, sistemas cuja evolução temporal pode ser descrita pelas equações de Hamilton da Mecânica, são conservativos.

## 2.2 Sistemas dissipativos

Como já discutido na seção anterior, sistemas dissipativos não conservam o volume do espaço de fase durante a evolução temporal. De fato, o determinante da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  da transformação que constitui a evolução dinâmica do sistema possui agora um valor de módulo menor que 1. Esta característica dos sistemas dissipativos acaba por torná-los assimétricos no tempo.

Para ilustrar este último ponto, pode-se considerar um sistema físico de fato: imagine um colóide<sup>2</sup> imerso no campo gravitacional da superfície terrestre, composto por um dispersante (nesse caso, líquido), e um disperso. Inicialmente, considere que as partículas ocupam todo ou um grande volume do dispersante, com uma distribuição qualquer de velocidades, como apresentado na figura 2.2. Este estado inicial das partículas deve corresponder a um hipervolume no espaço de fase, dependente da distribuição de posições e velocidades. À medida em que o tempo passa, **independentemente do estado inicial**, as partículas vão se concentrando mais e mais no mínimo de potencial do recipiente que as contém, e o estado assintótico tem sempre um hipervolume muito menor<sup>3</sup>. À rigor, se a temperatura é nula, classicamente todas as partículas (sendo consideradas pontuais) estariam no estado final ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ), que constitui um ponto fixo (veja a subseção 2.2.1) de hipervolume nulo no espaço de fase. A assimetria temporal pode ser percebida de uma forma bem intuitiva ao se imaginar que este processo foi filmado e depois apresentado duas vezes, uma delas de “trás para a frente” e outra com o tempo fluindo normalmente. Um espectador poderia dizer qual das filmagens representa o processo físico em questão. Outra forma, menos intuitiva porém mais direta de se perceber a assimetria temporal nesse sistema é através de sua equação de movimento. Partículas coloidais como essas que foram consideradas nesse exemplo respeitam, como qualquer partícula browniana, a

<sup>2</sup>Colóides são misturas heterogêneas (ainda que possam parecer homogêneas a olho nu) compostas por um dispersante e um disperso, este último constituindo um conjunto de partículas chamadas de partículas coloidais. Partículas coloidais possuem dimensões típicas entre  $1\text{nm}$  a  $1\mu\text{m}$  [55], sendo grandes demais para dissolverem-se porém pequenas o suficiente para serem consideradas partículas *brownianas*. Entre os exemplos de colóides está o leite, sangue, tinta, nuvem, fumaça etc.

<sup>3</sup>Deve-se considerar para esta discussão colóides cujo disperso é constituído de partículas com dimensões típicas maiores que  $10^3\text{Å}$  (caso contrário correntes de convecção casuais e choques com as partículas do meio podem impedir a sedimentação [55]). Já que a energia associada ao grau de liberdade da coordenada  $z$  é  $mgz$ , e que a energia das excitações térmicas típicas é da ordem de  $k_B T$ , a extensão típica de equilíbrio no eixo  $z$  deve ser então da ordem de  $k_B T/mg$  (claramente, no exemplo também deve se considerar que a distribuição inicial na coordenada  $z$  em muito exceda  $k_B T/mg$ ).

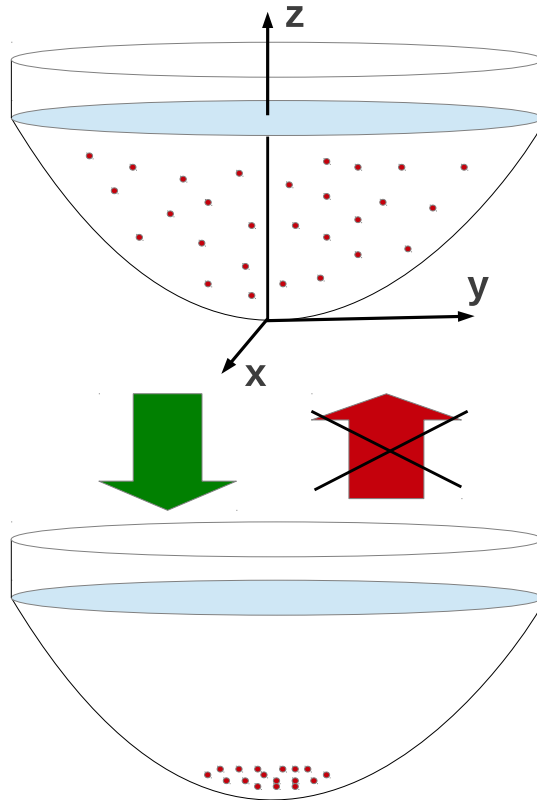


Figura 2.2: Recipiente onde se encontra um colóide cujo dispersante é líquido. As esferas vermelhas representam as partículas do disperso, e as flechas indicam os processos que ocorreriam com o tempo fluindo positivamente (verde) e negativamente (vermelho). Note que o recipiente possui um mínimo de potencial composto por um único ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

equação de Langevin<sup>4</sup>

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\lambda\dot{\mathbf{x}} + (F_{emp} - gm)\hat{k}, \quad (2.12)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade na superfície terrestre,  $F_{emp}$  é o módulo da força de empuxo,  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade do fluido e se considerou a temperatura  $T = 0$ . Se o tempo  $t$  é invertido ( $t \rightarrow -t$ ),  $\ddot{\mathbf{x}} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}}$  mas  $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow -\dot{\mathbf{x}}$ , ou seja, a equação de movimento não é invariante por uma inversão de tempo e, conseqüentemente, não há simetria temporal.

Há ainda outros sistemas dissipativos que podem facilmente ser encontrados em disciplinas de Física básica como, por exemplo, aqueles em que há deslizamento com atrito [56] e circuitos RLC (compostos por resistência(s), indutância(s) e capacitor(es)) [57].

<sup>4</sup>Neste ponto admitiu-se que o processo de dissipação é *markoviano*, para mais detalhes veja a seção 2.3. Além disso, formalmente, uma equação que não possua o termo térmico não pode ser considerada uma equação de Langevin. Assim, a equação 2.12 deve ser entendida como o comportamento assintótico de uma equação de Langevin para o limite em que  $T \rightarrow 0$ .

### 2.2.1 Atratores

Como já foi explanado no início desta seção, sistemas dissipativos, em geral, possuem uma evolução dinâmica assimétrica no tempo, contraindo o volume do espaço de fase (quando se considera a evolução de um *ensemble*). Uma pergunta natural seria, para onde a dinâmica leva este *ensemble*? Existe um conjunto invariante no espaço de fase para onde as condições iniciais são levadas pela evolução temporal, isto é, um comportamento dinâmico assintótico? A resposta a essa pergunta é sim, e o conjunto invariante para onde as condições iniciais convergem é chamado de atrator.

Com algum rigor matemático, pode-se levar essa noção à definição de atrator. Por simplicidade, será considerado um espaço localmente compacto  $X^5$ , o espaço de fase, e uma função  $\mathbf{f}(X) \rightarrow X$ , o mapeamento que dita a dinâmica do sistema. Seja então o subespaço compacto  $T \subset X$  tal que  $\mathbf{f}(T) \subset T$ , a intersecção  $A$  dos conjuntos

$$T \supset \mathbf{f}(T) \supset \mathbf{f}(\mathbf{f}(T)) \supset \dots \quad (2.13)$$

é chamada atrator [58] e é invariante ( $\mathbf{f}(A) = A$ ), ou seja, sempre é mapeada em si própria. O significado da expressão  $\mathbf{f}(A) = A$  é um tanto sutil: aplicando-se  $\mathbf{f}$  a todos os pontos que compõem  $A$  se tem novamente  $A$ , e isso define um conjunto invariante. A bacia de atração do atrator  $A$  ( $B(A)$ ), é o conjunto de pontos que é levado para  $A$  pela evolução temporal. Obviamente,  $T \subset B(A)$ . Assim, pode-se entender um atrator como um conjunto invariante que possui uma bacia de atração<sup>6</sup>. A definição de atrator para sistemas contínuos é análoga, onde se substitui o mapeamento pelas equações diferenciais que determinam a dinâmica nesse caso [60, 61].

Existem diversas características que podem ser utilizadas para classificar atratores. No que se refere a esta dissertação, as classificações mais importantes serão:

1. Quanto à sua dinâmica, eles podem ser periódicos, quasi-periódicos ou caóticos.
2. Quanto à sua estabilidade, sua bacia de atração pode envolver parcialmente ou totalmente o espaço de fase.

---

<sup>5</sup>Um espaço é localmente compacto se não possui “buracos” em sua estrutura, ou seja, se sempre é possível definir um subespaço  $E$  fechado e limitado em que qualquer sequência infinita de números dentro de  $E$  leve a um número pertencente a  $E$ . Por exemplo, um subespaço aberto não é compacto pois uma sequência infinita de números dentro desse subespaço pode levar um número pertencente a sua borda. De maneira análoga, um subespaço ilimitado também não é compacto pois existem sequências infinitas de números que divergem. Todavia, um espaço ilimitado pode ser considerado **localmente** compacto na medida em que seus subespaços limitados são compactos.

<sup>6</sup>De fato, podem haver conjuntos invariantes que não possuam uma bacia de atração associada, como as órbitas periódicas instáveis e os repulsores caóticos [27, 59].



O ponto 1 está relacionado à questão de previsibilidade em sistemas dinâmicos. Segundo [27], um **atrator** é dito caótico se a órbita correspondente é limitada no espaço de fase e se possui dependência sensível às condições iniciais, ou seja, se duas órbitas muito próximas se afastam exponencialmente com o decorrer do tempo (o conceito de dependência sensível será definido precisamente na subseção 2.2.3). Atratores não-caóticos são chamados de regulares, e eles podem ser periódicos ou quasi-periódicos. Um atrator periódico é uma órbita fechada, já a órbita referente a um atrator quasi-periódico nunca se fecha sobre si mesma.<sup>7</sup>

O ponto 2 está relacionado à existência e extensão de uma bacia de atração. Como já foi visto nesta mesma subseção, para que um conjunto no espaço de fase possa ser identificado como um atrator, é necessário que ele possua uma bacia de atração, por menor que ela seja. De fato, em situações onde há um atrator cuja bacia de atração **não** envolve todo o espaço de fase também há, pelo menos, duas dinâmicas assintóticas distintas dependentes da região do espaço de fase onde se escolhe a condição inicial do sistema. A situação onde coexistem (pelo menos) dois atratores é chamada de multiestabilidade.

Por fim, note que como sistemas conservativos preservam o volume de um *ensemble* no espaço de fase, embora seja possível ter conjuntos invariantes, é impossível que esses conjuntos possuam uma bacia de atração associada. Estes conjuntos, portanto, não são considerados atratores. Todavia, sistemas hamiltonianos ainda podem apresentar, nesses mesmos conjuntos, dinâmicas caótica, periódica e quasi-periódica<sup>8</sup>.

## 2.2.2 Estabilidade linear de estados estacionários e órbitas periódicas

Nesta subseção, será discutida a estabilidade das soluções estacionárias e periódicas em sistemas dinâmicos, seguindo a abordagem adotada na referência [27]. Inicialmente, considere uma solução estacionária de um sistema de equações diferenciais autônomo definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

ou seja, a solução estacionária é  $\mathbf{x}_{\text{est}}$  que obedece  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{est}}) = \mathbf{0}$ . Como se quer analisar o comportamento na região imediatamente próxima à solução, faz-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{est}} + \boldsymbol{\delta}(t), \quad (2.15)$$

<sup>7</sup>Para mais detalhes sobre os tipos de atratores e sua ocorrência se sugere a referência [27].

<sup>8</sup>Para mais detalhes sobre os tipos de dinâmica em sistemas conservativos é indicada a referência [37]

e se assume que  $\boldsymbol{\delta}(t)$  é pequeno. De fato, derivando a equação 2.15 no tempo se obtém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\delta}}(t). \quad (2.16)$$

Expandindo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  em torno da solução estacionária obtém-se

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{est}} + \boldsymbol{\delta}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{est}}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{\text{est}}) \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\delta}^2), \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{est}}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$  é a jacobiana do fluxo (o índice  $f$  refere-se a fluxo) e se pode descartar  $\mathcal{O}(\boldsymbol{\delta}^2)$ . Assim, da equação 2.14 obtém-se

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{\text{est}}) \cdot \boldsymbol{\delta}. \quad (2.18)$$

Supõe-se então uma solução do tipo

$$\boldsymbol{\delta}(t) = A\hat{u}e^{st}, \quad (2.19)$$

onde  $A$  é uma constante definida pela condição inicial,  $\hat{u}$  é um vetor unitário e  $A$ ,  $\hat{u}$  e  $s$  são, em geral, pertencentes ao conjunto dos números complexos. Substituindo esta solução na equação 2.18, obtém-se uma equação de auto-valor,

$$s\hat{u} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}\hat{u}, \quad (2.20)$$

de maneira que os  $D$  (dimensionalidade do sistema) valores possíveis de  $s$  respeitam a equação secular

$$\det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}} - s\mathbf{I}) = 0. \quad (2.21)$$

Como  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$  é uma matriz real, os coeficientes do polinômio de grau  $D$  definido pela equação acima são reais, e as suas soluções são reais ou se apresentam em pares de números complexos conjugados. Além disso, pelo fato da equação 2.18 ser linear, o teorema da unicidade assegura que as soluções encontradas são únicas e uma solução geral pode ser expressa por

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \sum_{j=1}^D A_j \hat{u}_j e^{s_j t}. \quad (2.22)$$

Seria interessante obter uma base real para representar a solução, pois  $\boldsymbol{\delta}(t)$  é uma quantidade real. Para tanto, se  $s_k$  não é real, pode-se definir as funções

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(\hat{u}_k e^{s_k t} + \hat{u}_{k+1} e^{s_{k+1} t}), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = \frac{1}{2i}(\hat{u}_k e^{s_k t} - \hat{u}_{k+1} e^{s_{k+1} t}), \quad (2.24)$$

onde  $k$  é ímpar e se organiza as funções tal que  $s_k = s_{k+1}^*$  e, conseqüentemente,  $\hat{u}_k = \hat{u}_{k+1}^*$ . Ainda define-se  $\hat{u} = \mathbf{e}^{\mathbf{R}} + \mathbf{e}^{\mathbf{I}}i$  e  $s = \sigma - \omega i$ . Como conseqüência, pode-se reescrever as funções  $\mathbf{g}_k$  e  $\mathbf{g}_{k+1}$  como

$$\mathbf{g}_k = e^{\sigma_k t} [\mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \cos(\omega_k t) + \mathbf{e}_k^{\mathbf{I}} \sin(\omega_k t)], \quad (2.25)$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = e^{\sigma_k t} [\mathbf{e}_k^{\mathbf{I}} \cos(\omega_k t) - \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \sin(\omega_k t)], \quad (2.26)$$

que são reais e constituem bases do espaço de funções que definem a solução de  $\boldsymbol{\delta}$ . Por fim, se  $s_j$  é real, escreve-se simplesmente  $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_j e^{\sigma_j t}$ , onde obrigatoriamente  $\mathbf{e}_j$  é real, de maneira que se pode escrever finalmente

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbf{g}_j(t), \quad (2.27)$$

onde os novos coeficientes  $B_j$  são agora reais (porque as funções de base são reais e  $\boldsymbol{\delta}$  é real). Olhando para as equações 2.25 2.26 2.27, uma interpretação muito clara pode ser dada à natureza das soluções de  $\boldsymbol{\delta}(t)$ : para  $s_j$  real, condições iniciais (CIs) próximas a  $\mathbf{x}^*$  convergem ( $s_j < 0$ ) ou divergem ( $s_j > 0$ ) exponencialmente no subespaço definido pela direção  $\hat{u}_j$ ; para  $s_j$  com parte imaginária não nula,  $\mathbf{x}(t)$  rotaciona em torno de  $\mathbf{x}^*$  no plano formado pelos vetores  $\mathbf{e}_j^{\mathbf{R}}$  e  $\mathbf{e}_j^{\mathbf{I}}$ , e o raio da órbita converge para ( $\sigma_j < 0$ ) ou diverge de ( $\sigma_j > 0$ ) zero. Assim, se uma solução estacionária possui pelo menos um  $s_j$  com parte real positiva então ela também possui um subespaço por onde possa divergir e a solução é considerada instável. Caso contrário, a solução é estável.

Faz sentido agora que se discuta a estabilidade de órbitas periódicas. Novamente, define-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \boldsymbol{\delta}(t), \quad (2.28)$$

onde agora  $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(t + \tau)$ , sendo  $\tau$  o período da órbita. Derivando no tempo e expandindo em  $\boldsymbol{\delta}$  (pequeno) obtém-se analogamente

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^*(t)) \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (2.29)$$

em que a diferença agora é que  $\mathbf{J}_f$  não é mais constante, mas sim periódico no tempo com período  $\tau$ . As soluções para essa equação diferencial podem ser apresentadas na forma de Floquet  $A\hat{u}(t)e^{st}$  [27], onde  $\hat{u}(t) = \hat{u}(t + \tau)$ . Muito embora obter as soluções seja um trabalho muito mais difícil, fica simples obter que  $s = 0$  é sempre um dos valores

possíveis. Para visualizar este fato, basta derivar no tempo a equação de movimento  $d\mathbf{x}^*(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*(t))$ , no que se obtém

$$d\mathbf{e}_0(t)/dt = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^*(t)) \cdot \mathbf{e}_0(t), \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{e}_0 = d\mathbf{x}^*(t)/dt$ . Note que esta última equação é do mesmo tipo que a equação 2.29, de maneira que  $\mathbf{e}_0$  é uma das soluções de  $\delta$ . Esta solução é um vetor real tangente à órbita periódica  $\mathbf{x}^*(t)$  e, portanto, também é periódico. Por ser uma solução real,  $s$  não possui parte imaginária, e por ser periódica,  $s$  não possui parte real de maneira que  $s = 0$ .

Por fim, é possível ainda construir uma seção de Poincaré em  $t = n\tau$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , de maneira que se obtenha um mapa  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  com o ponto fixo  $\mathbf{X}^*$  correspondente a  $\mathbf{x}^*(n\tau)$  (não se pode estabelecer uma igualdade pois  $\mathbf{X}^*$  possui dimensão  $D - 1$ ). Linearizando-o em torno de  $\mathbf{X}^*$  através da definição  $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^* + \Delta_n$ , com  $\Delta_n$  pequeno, chega-se em

$$\Delta_{n+1} = \mathbf{J}_m(\mathbf{X}^*) \cdot \Delta_n, \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{J}_m$  é a jacobiana do mapa (o índice  $m$  refere-se a mapa). Aqui, novamente se pode decompor  $\Delta_n$  através dos autovetores de  $\mathbf{J}_m$  e o problema reduz-se a uma equação de auto-valor, de maneira que a equação secular associada

$$\det(\mathbf{J}_m - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (2.32)$$

deve fornecer  $D - 1$  valores para  $\lambda_j$  de maneira que subespaços estáveis estão associados aos autovetores correspondentes a  $|\lambda_j| < 1$  e subespaços instáveis aos autovetores correspondentes a  $|\lambda_j| > 1$ . Pode-se também obter o critério de estabilidade para uma órbita periódica neste mapa. Seja uma órbita de período  $q$ , composta por  $q$  pontos  $\mathbf{X}_i^*$ , onde  $i$  varia de 1 até  $q$ , então ela será um ponto fixo do mapa iterado  $q$  vezes,

$$\mathbf{X}_i^* = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\mathbf{M}(\dots \mathbf{M}(\mathbf{X}_i^*)))\dots), \quad (2.33)$$

de maneira que o raciocínio para analisar-se a estabilidade desta órbita é análogo. Todavia, deve-se notar que a matriz jacobiana do mapa resultante da composição das  $q$  iterações não é  $\mathbf{J}_m$  mas  $\mathbf{J}_m^{(q)} = \mathbf{J}_m(\mathbf{X}_1^*)\mathbf{J}_m(\mathbf{X}_2^*)\dots\mathbf{J}_m(\mathbf{X}_q^*)$ . Assim, procura-se agora pelos autovalores e autovetores de  $\mathbf{J}_m^{(q)}$  e não de  $\mathbf{J}_m$ . Por fim, muito embora esses resultados tenham sido obtidos para um mapa que se originou de um fluxo via seção de Poincaré, eles estendem-se a todos os tipos de mapas, mesmo aqueles que não são obtidos a partir de um fluxo.

### 2.2.3 Dependência sensível às condições iniciais e expoente de Lyapunov

Imagine que se tome duas condições iniciais de um dado sistema muito próximas uma da outra no espaço de fase, e que ambas sejam deixadas evoluir no tempo. Seja ainda a distância inicial entre elas  $\eta(0)$ . Entende-se que esse sistema possui dependência sensível às condições iniciais caso a distância entre as duas trajetórias geradas a partir das duas condições iniciais cresça exponencialmente com o tempo, ou seja, que

$$\frac{|\eta(t)|}{|\eta(0)|} \sim e^{\Lambda t}. \quad (2.34)$$

Exige-se que as órbitas do sistema que se quer analisar sejam limitadas no espaço de fase, no intuito de evitar que se considere sensivelmente dependente às condições iniciais um sistema que simplesmente está se expandindo exponencialmente [27]. Assim, o perfil exponencial do distanciamento vale para distâncias muito menores do que as dimensões do atrator. Por fim, ainda há sistemas cujas trajetórias oriundas de condições iniciais muito próximas se afastam com um perfil não-exponencial (linear, por exemplo). Entende-se que estes sistemas também não possuem dependência sensível às condições iniciais.

A propriedade de sensibilidade às condições iniciais é muito importante no contexto da dinâmica não linear dissipativa, porque define se um dado atrator é regular ou caótico<sup>9</sup>. Uma maneira de quantificar essa sensibilidade é determinar o expoente associado ao crescimento da distância entre duas trajetórias inicialmente muito próximas. Para entender a origem desse expoente, considere um mapa de dimensão  $D$ ,  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , cuja matriz jacobiana associada seja  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$ . Considere também o vetor com componentes infinitesimais  $\Delta_n$  que fornece o distanciamento entre duas trajetórias inicialmente muito próximas após  $n$  iterações, de maneira que  $\Delta_0$  forneça o distanciamento infinitesimal entre as suas condições iniciais. É claro que, em analogia com a equação 2.31,

$$\Delta_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\Delta_n. \quad (2.35)$$

Seja então

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\dots\mathbf{J}(\mathbf{x}_0), \quad (2.36)$$

de maneira que

$$\Delta_{n+1} = \mathbf{J}_n\Delta_0. \quad (2.37)$$

---

<sup>9</sup>Esta propriedade já não é suficiente para caracterizar conjuntos não atrativos que constituem os transientes. Para maiores detalhes, consulte a referência [59].

Poder-se-ia imaginar então que, a cada direção definida pelo vetor unitário  $\hat{u}_0 = \mathbf{\Delta}_0/|\mathbf{\Delta}_0|$ , definido pelo distanciamento infinitesimal inicial entre as duas condições iniciais, haveria um expoente associado. Como são infinitas as possíveis direções para as quais apontam  $\hat{u}_0$ , haveria infinitos expoentes do tipo

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \ln |\mathbf{J}_n \hat{u}_0| \right). \quad (2.38)$$

Isto não parece muito razoável: para que o expoente definido pela equação 2.38 seja útil como uma medida da dependência sensível em relação às condições iniciais, faz-se fundamental que não dependa de  $\hat{u}_0$ . Neste sentido, pode-se definir  $\mathbf{H}_n = (\mathbf{J}_n)^T \mathbf{J}_n$ , de maneira que a equação 2.38 pode ser reescrita como

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n} \ln |\hat{u}_0^T \mathbf{H}_n \hat{u}_0| \right). \quad (2.39)$$

Note que como  $\mathbf{J}_n$  é uma matriz real, a sua conjugação hermitiana (denotada pelo símbolo  $\dagger$ ) é equivalente a uma transposição, logo

$$\mathbf{H}_n^\dagger = (\mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n)^\dagger = (\mathbf{J}_n)^\dagger (\mathbf{J}_n^T)^\dagger = \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n = \mathbf{H}_n, \quad (2.40)$$

ou seja, a matriz  $\mathbf{H}_n$  é hermitiana e, conseqüentemente, seus autovalores são reais. Escolhendo  $\hat{u}_0$  como um dos autovetores normalizados  $\mathbf{e}_j$  de  $\mathbf{H}_n$ , obter-se-á  $\Lambda_j = (2n)^{-1} \ln(H_{j,n})$ , onde  $H_{j,n}$  com  $j = 1, \dots, D$  são os autovalores reais associados a  $\mathbf{H}_n$  e se omitiu o fato de  $n$  tender ao infinito. Estejam os autovalores ainda organizados da seguinte maneira

$$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \dots > \Lambda_D, \quad (2.41)$$

onde se supôs por simplicidade que todos os expoentes são diferentes uns dos outros, pode-se escrever um versor genérico  $\hat{u}_0 = \sum_{j=1}^D a_j \mathbf{e}_j$ , de maneira que

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2n} \ln \left( \sum_{j=1}^D a_j^2 \exp(2n\Lambda_j) \right) \right] = \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{j=1}^D a_j^2 \exp(2n\Lambda_j) \right)^{\frac{1}{2n}} \right] \right\}. \quad (2.42)$$

Tem-se que a exponencial com o maior expoente ( $\lambda_1$ ) na equação 2.42 prepondera em relação aos outros termos, de tal forma que

$$\ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (a_1^2 \exp(2n\Lambda_1))^{\frac{1}{2n}} \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln a_1}{n} + \lambda_1 \right) = \lambda_1. \quad (2.43)$$

Os números reais  $\Lambda_j$  são conhecidos por expoente de Lyapunov, enquanto  $\Lambda_1$  é o maior

expoente de Lyapunov e determina se a dinâmica do sistema é regular ou caótica<sup>10</sup>.

A dedução acima vale para sistemas discretos, mas argumentos muito semelhantes podem ser aplicados a sistemas contínuos [27]. De fato, muito embora esta demonstração sugira ser possível, em princípio, obter os expoentes de Lyapunov analiticamente, na prática eles são obtidos numericamente através de técnicas específicas [63].

### 2.2.4 Bifurcações

As equações que governam a dinâmica de um dado sistema são constituídas por duas classes de quantidades, as variáveis que, em geral, variam com o passar do tempo e representam o estado do sistema na mecânica clássica, e os parâmetros que são quantidades fixas no tempo. Para entender melhor o conceito de parâmetro, é construtivo utilizar um exemplo: em um circuito RLC, cuja equação diferencial é

$$\ddot{I} + \lambda \dot{I} + \omega_0^2 I = 0, \quad (2.44)$$

a variável é a corrente  $I$  e os parâmetros são

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.45)$$

$$\lambda = \frac{R}{L}, \quad (2.46)$$

e onde  $R$  é a resistência,  $L$  é a indutância e  $C$  a capacitância. Aqui, foram escolhidos  $\omega_0$  e  $\lambda$  como parâmetros por uma questão de conveniência [57], mas poderiam ter sido igualmente escolhidos  $R$  e  $L$  sem problema algum. De fato, experimentalmente, variando-se a resistência e a indutância, variam-se também os parâmetros, ou seja, os parâmetros representam uma especificação do sistema, modelam suas características sem modificar fundamentalmente o sistema em si: não importa o valor dos parâmetros do referido sistema, ele sempre será um circuito RLC.

No entanto, algumas mudanças bruscas no comportamento de sistemas dinâmicos podem ser induzidas pela modulação dos parâmetros. De fato, conjuntos invariantes podem mudar a sua estabilidade ou mesmo serem criados. Além disso, a preferência de um sistema dissipativo por ficar em um dado estado não depende apenas do valor dos parâmetros envolvidos, mas também da maneira com a qual eles foram variados [54], dando origem a

<sup>10</sup>Note que, a princípio, os expoentes de Lyapunov devem depender da condição inicial (pois a matriz  $\mathbf{J}^n$  depende). Todavia, o teorema de Osedelec [62] garante que os expoentes serão os mesmos para praticamente todas as condições iniciais dentro de uma bacia de atração, com exceção de algumas órbitas periódicas instáveis imersas na bacia.

um fenômeno chamado histerese. Os fenômenos de criação e mudança de estabilidade, no que concerne à dinâmica regular, são coletivamente chamados de bifurcações, e aqui serão descritas as duas mais comuns e também presentes nos sistemas que serão abordados nos próximos capítulos. Por simplicidade, será adotado o contexto de sistemas discretos para a discussão das bifurcações<sup>11</sup>.

Quando através da variação de um ou mais parâmetros de um sistema criam-se duas órbitas periódicas diz-se que houve uma **bifurcação sela-nó**<sup>12</sup> [64]. Para ilustrar este conceito, uma bifurcação muito comum desse tipo está representada na figura 2.3 a), em um tipo de diagrama chamado diagrama de bifurcação. Neste diagrama, o valor de uma das variáveis  $v$  dos dois únicos pontos fixos<sup>13</sup> de um dado sistema são plotados em função de um parâmetro genérico  $p$ . Em linha contínua está representada a órbita estável, em descontínua, a instável. À direita de  $p = 0$  não existem pontos fixos e à esquerda existem dois. Por esse motivo, diz-se que no ponto  $p = 0$ , onde os dois pontos fixos coincidem, ocorreu uma bifurcação sela-nó. É importante observar também que, muito embora este exemplo tenha representado a bifurcação sela-nó para uma órbita periódica de período  $q = 1$ , tal bifurcação existe para órbitas de qualquer período.

Também é uma situação típica uma dada órbita periódica estável de período  $q$  tornar-se instável com a variação de um ou mais parâmetros, sendo então criada uma órbita estável de período  $2q$ . Em uma situação como esta, diz-se que houve uma **bifurcação por dobramento de período** [65]. Na figura 2.3 b) tal bifurcação é exemplificada: um ponto fixo que à esquerda de  $p = 0$  era estável (linha contínua) torna-se instável (linha descontínua) à direita de  $p = 0$ , dando origem a uma órbita periódica estável de período  $q = 2$  (duas linhas contínuas). É importante ressaltar que os dois valores de  $v$  que surgem a partir de  $p = 0$  e se estendem para  $p > 0$  devem ser entendidos como pertencentes a uma única órbita.

Existe uma maneira analítica para determinar o valor dos parâmetros para os quais há uma bifurcação, e que tipo de bifurcação ocorrerá também. O surgimento de um ponto fixo  $\mathbf{x}_{PF}$  em um mapa está associado aos autovalores de sua jacobiana. De fato, em uma bifurcação do tipo sela-nó deve-se ter uma jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{PF})$  com pelo menos um autovalor  $\lambda = 1$  [64]. Já para a bifurcação por dobramento de período exige-se pelo menos um autovalor da matriz jacobiana  $\lambda = -1$ . Por fim, talvez o resultado analítico mais surpreendente de todos, no que se refere a bifurcações, seja que algumas delas possuem

<sup>11</sup>Para uma ótima revisão sobre bifurcações em sistemas contínuos, sugere-se a referência [54].

<sup>12</sup>Note que a existência da bifurcação independe do sentido de variação dos parâmetros: poder-se-ia igualmente definir a ocorrência de uma bifurcação sela-nó no caso de uma destruição de duas órbitas periódicas, através de uma colisão entre ambas.

<sup>13</sup>Um ponto fixo é uma órbita periódica de um mapa cujo período  $q = 1$ .



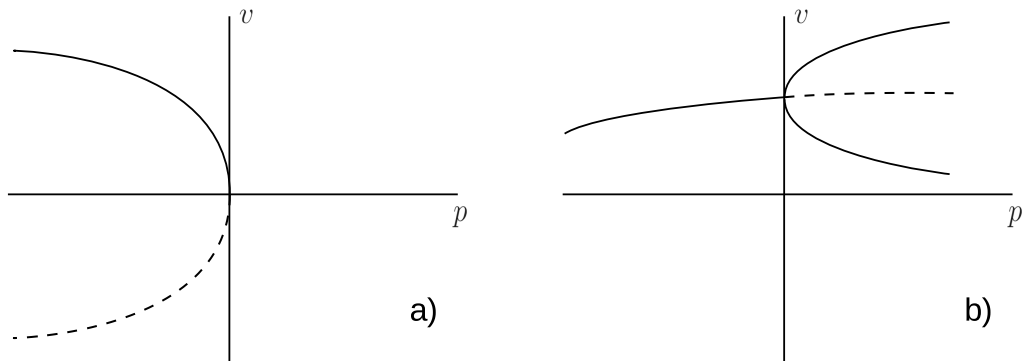


Figura 2.3: Em (a) está representada uma bifurcação sela-nó, e em (b) uma bifurcação por dobramento de período, onde os dois valores de  $v$  estáveis que surgem em  $p = 0$  devem ser entendidos como pertencentes a uma única órbita de período 2. Em ambas as figuras, linhas contínuas representam órbitas estáveis e linhas descontínuas órbitas instáveis.

uma dinâmica característica universal que reduz o sistema  $D$ -dimensional a um simples mapeamento unidimensional nos seus arredores<sup>14</sup> através do teorema da variedade central [66]. Para o caso da bifurcação sela-nó, o sistema reduz-se a [64]

$$x_{n+1} = a + x_n + bx_n^2, \quad (2.47)$$

que é chamada de forma normal para a bifurcação sela-nó.

## 2.3 Processos estocásticos

Até então foram apresentados nesta seção sistemas determinísticos, ou seja, sistemas cuja evolução temporal segue uma regra fixa como um mapeamento ou um conjunto de equações diferenciais. Todavia, alguns sistemas apresentam equações determinísticas muito complexas como fluidos (a nível microscópico), ou mesmo desconhecidas como situações com as quais lidam a área de econofísica [67, 68], eventos cuja probabilidade segue a lei de Poisson como erros de digitação em uma página, falhas de funcionamento em máquinas, chegada de consumidores em um estabelecimento [69], entre tantos outros. Contudo, as variáveis dinâmicas desses sistemas complexos muitas vezes podem ser modeladas como aleatórias, respeitando uma densidade de probabilidade, e assim pode-se escrever uma equação estocástica para a sua evolução com a inclusão de termos estocásticos. Um exemplo clássico de tal classe de equações é a própria equação de Langevin 2.12 onde agora se considera a temperatura no problema unidimensional e se desconsidera os

<sup>14</sup>No caso de fluxos, os sistemas são reduzidos a uma dinâmica contínua unidimensional [54].

efeitos do campo gravitacional

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + \sqrt{2k_B T}\xi(t). \quad (2.48)$$

Nesse caso, as médias sobre todas as realizações do ruído  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  e  $\langle \xi(t)^2 \rangle = 1$ , e a distribuição de  $\xi(t)$  é gaussiana. De uma maneira mais formal, seja a variável aleatória contínua  $A(t)$  associada à densidade de probabilidade  $\rho(A; t)$ , a probabilidade de se obter no tempo  $t$  a variável aleatória entre  $A$  e  $A + dA$  é  $\rho(A; t)dA$ . Define-se também a probabilidade conjunta  $\rho(A_n; t_n | \dots | A_1; t_1)$ , onde os tempos estão organizados de maneira que  $t_n > \dots > t_1$ . Esta função descreve a probabilidade de se obter uma sequência específica de valores da variável  $A$  em tempos definidos. A priori, a probabilidade conjunta não pode ser obtida meramente pelo conhecimento de  $\rho(A; t)$  pois pode haver uma correlação entre os valores de  $A$  nos tempos  $t_i$  e  $t_{i+1}$  por exemplo.

Um processo *markoviano* é um processo estocástico cuja probabilidade de eventos futuros depende apenas dos eventos atuais. Assim, dada a densidade de probabilidade de transição da variável aleatória do valor  $A_0$  em  $t_0$  para  $A$  em  $t$ ,  $p(A; t | A_0; t_0)$ , ou seja,

$$\rho(A_n; t_n | A_{n-1}; t_{n-1}) = p(A_n; t_n | A_{n-1}; t_{n-1})\rho(A_{n-1}; t_{n-1}), \quad (2.49)$$

em um processo *markoviano* tem-se que

$$p(A_f; t_{n+1} | A_i; t_{n-1}) = \int p(A_f; t_{n+1} | A; t_n)p(A; t_n | A_i; t_{n-1})dA, \quad (2.50)$$

onde a integral estende-se a todos os valores possíveis de  $A$ . A equação 2.50 é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov e constitui uma definição alternativa para processos *markovianos* [70].

## 2.4 Sistemas dinâmicos sobre a influência de ruído estocástico

Nesta seção, será dada uma introdução qualitativa ao tema de efeitos do ruído em sistemas dinâmicos. Buscar-se-á uma abordagem pouco quantitativa porque se entende que o tema em questão envolve um grande conjunto de conceitos cujo desenvolvimento não é compatível com o escopo deste trabalho. No entanto, ao leitor que desejar aprofundar-se mais, sugere-se a referência [59], na qual se baseia esta introdução.

Para se entender o efeito do ruído térmico em sistemas dinâmicos deve-se levar em consideração não mais apenas os atratores desses sistemas, mas também os conjuntos não atrativos. Conjuntos não atrativos formam os chamados estados transientes, que podem ser caóticos ou regulares. Em geral, tempos transientes referentes a estados regulares são extremamente curtos, ao passo que estados caóticos podem apresentar um tempo médio de permanência muito mais longo [59]. De fato, há dois tipos de estruturas no espaço de fase que podem gerar transientes caóticos, a sela caótica e o repulsor caótico. A ocorrência de um ou outro tipo de dinâmica depende da natureza do sistema em questão: selas caóticas são características de sistemas invertíveis, ao passo que repulsores caóticos aparecem em sistemas não invertíveis<sup>15</sup>. Note que sistemas descritos por equações diferenciais são intrinsecamente invertíveis, característica que se relaciona com a unicidade das soluções [59]. Como nesta dissertação são abordados apenas equações diferenciais e mapas que podem ser obtidos através de uma integração de equações diferenciais, focar-se-á apenas na dinâmica gerada pelas selas caóticas no que se refere a caos transiente.

Selas caóticas são conjuntos invariantes, o que significa que escolhido um ponto que pertence à sela permanecer-se-á nela indefinidamente. Por outro lado, um ponto típico de uma sela caótica possui dois subespaços, um no qual atrai as órbitas e outro no qual as repele. Desta maneira, a cada sela caótica estão associadas duas variedades (conjuntos) invariantes do espaço de fase, uma estável e outra instável, de maneira que órbitas próximas, em última instância, são repelidas (o que justifica a caracterização deste estado como transiente)<sup>16</sup>. Por fim, ainda é importante notar que a sela caótica constitui um conjunto de medida de Lebesgue nula [59], o que, de maneira prática, significa que uma busca aleatória no espaço de fase possui probabilidade nula de encontrar este conjunto. Assim, o que se observa em experimentos não é a sela em si, mas a dinâmica transiente que ocorre em seus arredores [59].

De fato, todas as dinâmicas transientes são caracterizadas por um tempo médio de permanência, diferentemente de atratores que são os estados assintóticos de sistemas dinâmicos dissipativos. A presença de um termo estocástico pode alterar esse tempo médio de permanência nas dinâmicas transientes, pois o ruído tem capacidade de aleatoriamente antecipar ou adiar o escape de uma órbita da sela caótica, bem como trazê-la novamente após a fuga. Além disso, as órbitas antes estáveis (atratores) tornam-se apenas metaestáveis<sup>17</sup> [59], pois o ruído estocástico deve, de tempos em tempos, retirar a órbita

<sup>15</sup>Um sistema é considerado invertível quando dada uma inversão temporal sua solução é única [59].

<sup>16</sup>No caso de repulsores caóticos, não há uma variedade estável, apenas a instável [59].

<sup>17</sup>Nesta dissertação entende-se por estado metaestável um comportamento que se mantém por determinado tempo. Isso significa que uma vez em um estado metaestável, um sistema físico permanecerá nele por um tempo finito e depois assumirá outro estado, podendo eventualmente retornar a este mesmo

do estado composto pelo atrator e levá-la a um estado transiente. Em resumo, a adição de um termo estocástico de baixa intensidade a uma dinâmica determinística deve preservar a maioria de suas características<sup>18</sup>, com a exceção de que todos os conjuntos invariantes tornam-se estados metaestáveis e possuem um tempo médio de permanência [59]. Assim, estados transientes da dinâmica determinística têm ativa participação na dinâmica assintótica para o sistema estocástico [59].

---

estado metaestável.

<sup>18</sup>Poder-se-ia imaginar que, dada a intrincada estrutura fractal de atratores caóticos em sistemas determinísticos [27], o ruído estocástico seria capaz de afetar fundamentalmente a dinâmica desse tipo de atrator. De fato, o que ocorre é exatamente o contrário: dinâmicas caóticas costumam ser mais robustas que as regulares, sendo que para um ruído fraco o único efeito é a destruição do padrão fractal em pequena escala, sendo este padrão recuperado para escalas maiores [71].

## Catracas determinísticas

### 3.1 Primeiros conceitos

No primeiro volume da popular série *Feynman Lectures on Physics* [1], uma maneira didática de apresentar o poder da segunda lei da termodinâmica é implementada através de um engenhoso mecanismo desenvolvido para ser um demônio de Maxwell [72]. A figura 3.1 é um esquema do sistema imaginado pelo autor; dois contêineres 1 e 2, repletos de gás à mesma temperatura  $T_1 = T_2$ , estão ligados unicamente por um eixo com terminações diferenciadas para cada um deles, sendo para 1 uma série de paletas paralelas ao eixo e para 2 um dispositivo composto por uma catraca e uma lingueta. Ao centro do eixo está montada uma polia que suspende um objeto de massa pequena, que no livro é ludicamente apresentado como uma pulga. As conexões entre o eixo e as caixas são todas ideais e o torque gerado pela pulga acaba por forçar uma rotação do eixo no sentido que a faz descer. Todavia, esse movimento é supostamente proibido pela catraca, e as paletas por sua vez permitem que as partículas do contêiner 1 produzam torques de intensidades e sentidos aleatórios. É claro que, pelo já exposto, a catraca deve retificar os torques gerados pelo gás na caixa 1 fazendo assim com que a pulga suba, realizando dessa maneira trabalho espontaneamente a partir de dois corpos em equilíbrio térmico. De fato, com um mecanismo como esse, poderia-se “sugar” a energia de qualquer corpo, esfriando-o espontaneamente e utilizando o calor proveniente para realizar trabalho.

Mecanismos como esse são coletivamente denominados demônios de Maxwell, em alusão à provável primeira ideia “consciente” relacionada ao conceito de moto-perpétuo de 2ª espécie [72], máquina hipotética que realiza trabalho com uma eficiência superior ao limite previsto pela segunda lei da termodinâmica [73]. No entanto, uma análise mais

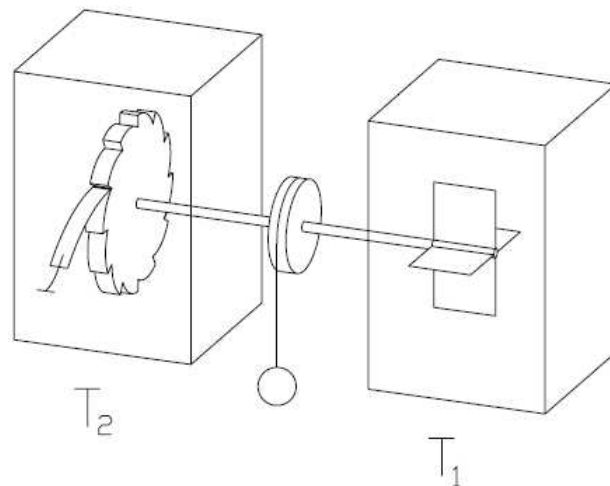


Figura 3.1: Dispositivo de catraca proposto por Richard P. Feynman na referência [1]. Inicialmente, as temperaturas dos gases que constituem o interior das duas caixas 1 e 2, respectivamente  $T_1$  e  $T_2$ , são iguais. O sistema como um todo estaria em equilíbrio não fosse pelo torque externo gerado pela pequena massa (pulga), presa à polia que está acoplada ao centro do eixo que liga as paletas à catraca. Quando se toma  $T_1 \neq T_2$ , o sistema realiza trabalho como uma máquina de Carnot, com a eficiência máxima permitida pela segunda lei da termodinâmica.

critérios aponta características sutis da catraca e de sua dinâmica que não foram levadas em conta e acabam por frustrar o mecanismo. Primeiramente, quando da passagem de um dente da catraca pela lingueta, esta deve subir (para permitir o movimento) e posteriormente retornar a posição original (descer). Para que a lingueta desça, deve existir então um dispositivo, e.g. uma mola, que faça esse serviço. Suponha então que todas as partes do mecanismo sejam perfeitamente elásticas: a mola força a lingueta para baixo, esta por sua vez colide com o dente da catraca e sobe novamente (por não dissipar energia). Neste caso, após a passagem do primeiro dente da catraca, a lingueta ficará eternamente quicando e assim permitindo movimentos no sentido oposto ao que se quer (aquele que faz a pulga subir). Desta maneira, torna-se claro que a dissipação de energia é fundamental para que esse sistema funcione corretamente, o que poderia ser feito exigindo que a mola dissipasse energia em forma de calor. Todavia, esta medida ainda não evitaria a frustração do dispositivo porque se deve considerar também que o grau de liberdade associado à catraca, que no exemplo constitui a distensão da mola, também deve estar associado às flutuações térmicas. Na prática, partículas do gás do contêiner 2 devem ser capazes de, eventualmente, ao se chocar com a lingueta, levanta-la e possibilitar então a rotação do eixo no sentido que faz a pulga descer. Como na mecânica estatística a probabilidade de ocorrência de um dado estado de um sistema em equilíbrio térmico com um reservatório depende apenas da sua energia [74], e como a energia para rotações que

fazem a massa (pulga) descer é menor (menor energia potencial), o sistema não realiza trabalho e, em média, a massa desce. No decorrer do texto o autor ainda mostra como a ausência de equilíbrio térmico  $T_1 \neq T_2$  transformaria o dispositivo em uma máquina de Carnot [73], realizando o trabalho máximo previsto pela segunda lei da termodinâmica.

É interessante que este exemplo didático tenha dado origem a uma nova área de estudo na Física denominada “efeito catraca” (*ratchet effect*). O dispositivo discutido acima originou-se da ideia implícita de que a introdução de uma assimetria espacial possa gerar um movimento direcionado. No exemplo, a assimetria espacial fora introduzida através da existência da catraca, pois ela cria um sentido de giro preferencial no sistema. No entanto, para que se fosse atingido esse movimento direcionado, mostrou-se necessária ainda a introdução de dissipação (assimetria temporal, veja a seção 2.2) e a ausência de equilíbrio térmico. O surpreendente é que, utilizando-se os três ingredientes, assimetria espacial, dissipação e ausência de equilíbrio térmico, obtém-se catracas a partir dos sistemas mais variados. Para se tomar um exemplo, considere a situação onde uma gota d’água é colocada em contato com uma chapa quente, como aquelas utilizadas para se cozinhar. Se a chapa estiver quente o suficiente, a região inferior da gota irá evaporar, produzindo um colchão de vapor que a faz levitar, locomovendo-se rapidamente de maneira aleatória pela chapa. Como o ar constitui um fluido onde há viscosidade e ainda porque o vapor d’água leva com ele energia, esse sistema é dissipativo. Além disso, a gota e a chapa claramente não estão à mesma temperatura, o que implica em desequilíbrio térmico. Porém, uma chapa de cozinha é, em geral, simétrica no espaço, e não se obtém daí um transporte direcionado por esse motivo. Imagine agora que se façam ranhuras na chapa, tal e qual representado na figura 3.2. Agora o espaço é assimétrico, e se tem um dispositivo capaz de transportar líquidos [75, 76].

No intuito de se estudar de maneira genérica a fenomenologia relacionada a catracas, faz sentido agora que se proponha uma equação diferencial que sirva como modelo simplificado destes sistemas. No que se remete à Mecânica Clássica, sugere-se que um sistema do tipo catraca (ou simplesmente catraca) possa ser escrito como

$$m\ddot{\mathbf{x}} = - \int_{-\infty}^t K(t-t')\dot{\mathbf{x}} dt' + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \xi(t). \quad (3.1)$$

Esta é a forma generalizada da equação de Langevin [77], onde foi adicionada a força  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  oriunda de um potencial dependente do tempo. A equação de Langevin descreve a interação entre um sistema de interesse e um banho térmico. O banho constitui um sistema muito maior (por exemplo um gás) que deve estar em equilíbrio térmico. A ação do banho térmico no sistema de interesse dá-se através de dois termos:  $K(t-t')$  é o núcleo

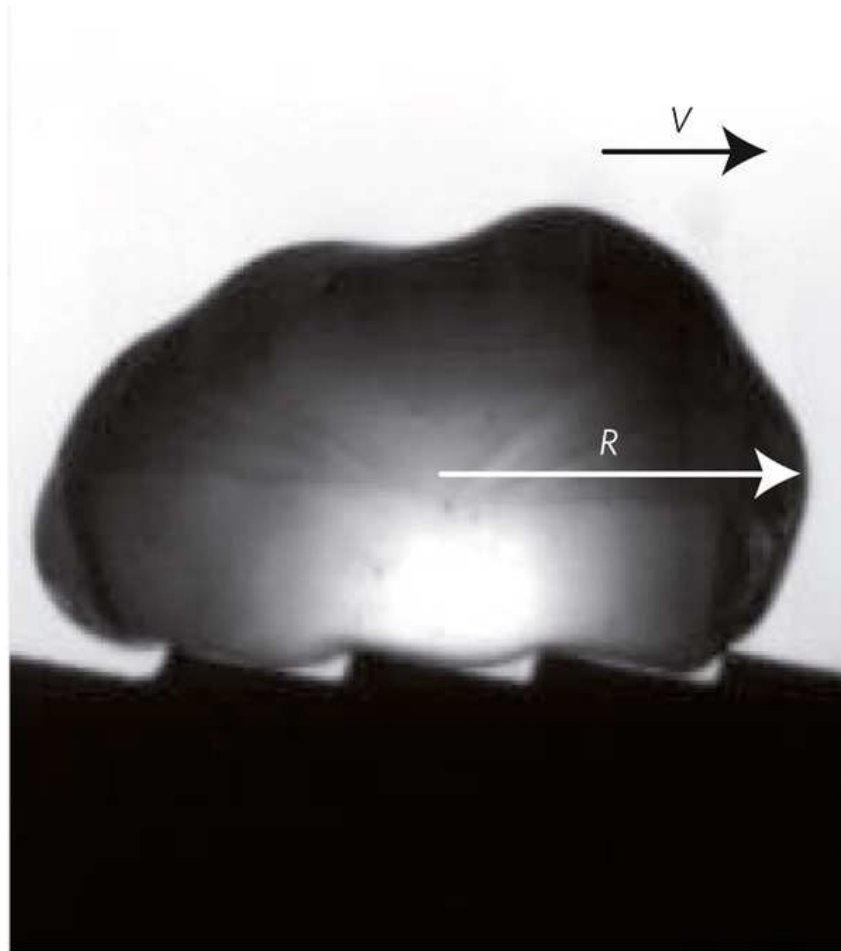


Figura 3.2: Gota d'água em uma chapa quente com ranhuras em formato de dentes assimétricos. A flecha em preto representa o sentido de movimentação da gota. Esta figura foi retirada da referência [75].

de memória e está relacionado com a dissipação;  $\xi(t)$  é o ruído térmico e está relacionado com as flutuações térmicas do banho. O termo de dissipação é na verdade uma integral no tempo  $t'$  que se passou antes do tempo atual  $t$ , e o termo de flutuação constitui um ruído de distribuição gaussiana com as seguintes propriedades [77]:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (3.2)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{2k_B T}{m} K(t-t'), \quad (3.3)$$

onde a média  $\langle \dots \rangle$  é tomada nas realizações do ruído térmico e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. As equações 3.3 indicam que a distribuição do ruído deve ser modelada como uma gaussiana centrada em zero. Além disso, a última delas fornece uma relação entre as correlações do ruído térmico em tempos distintos e a dissipação, representando um caso particular do teorema de flutuação-dissipação, característico de sistemas estatísticos [78]. Até agora, apenas um dos requisitos mencionados para a constituição de uma catraca



foram identificados na equação 3.1, a dissipação. Os outros dois são introduzidos através da força  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , oriunda de um potencial assimétrico no espaço e periódico tanto no espaço quanto no tempo. A periodicidade é requerida para que o movimento não seja criado a partir de uma diferença líquida do potencial dependente do tempo que dá origem à força  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , mas sim de correlações entre as dinâmicas da partícula e de seu próprio potencial. A dependência no tempo é necessária para se retirar o sistema do equilíbrio térmico, o que um potencial estático não poderia fazer.

A equação 3.1 pode ser deduzida através dos postulados da mecânica clássica ao se supor que haja um acoplamento linear ou genérico (porém fraco) entre as variáveis do banho e do sistema, e ao se supor que as variáveis de um banho de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico respeitem a distribuição gaussiana prevista pela mecânica estatística [77]. Esta equação também pode ser deduzida obtendo-se o limite para altas temperaturas (onde uma descrição semi-clássica é apropriada) do modelo fenomenológico Caldeira-Leggett [79], que descreve a dissipação no contexto da mecânica quântica através de um banho de osciladores harmônicos que se acoplam linearmente ao sistema, tomando-se uma média sobre todas as possíveis realizações do banho térmico (respeitando-se assim a hipótese ergódica requerida pela mecânica estatística [80]). No entanto, alguns desenvolvimentos [77, 81–83] indicam que sistemas quânticos, a baixas temperaturas, não devem respeitar a equação de Langevin com as propriedades esperadas para sistemas clássicos (equação 3.3), sem no entanto contestar o fato de que o limite de altas temperaturas ou mesmo um tratamento clássico da dinâmica desses sistemas os leve novamente ao regime de Langevin já conhecido.

Note agora que o termo de dissipação carrega toda a memória da influência do banho térmico sobre o sistema. Se os tempos envolvidos nos processos que se quer investigar são muito longos quando comparados ao tempo de relaxação do sistema (período característico no qual os efeitos de memória são importantes), pode-se utilizar uma aproximação *markoviana* para a dissipação [77, 83], onde a função  $K(t - t') = \lambda\delta(t - t')$ . Em geral, o processo de interesse em uma catraca é a variação média (no tempo) de uma ou mais coordenadas do sistema no regime assintótico (ou seja, para tempos longos), de maneira que a aproximação *markoviana* faz sentido nesse contexto e será assumida no decorrer desta dissertação. De fato, no que se refere a catracas clássicas (que desconsideram efeitos quânticos), todas as referências presentes nesta dissertação utilizaram a aproximação *markoviana*.

## 3.2 Mapeamento para catracas

Nesta seção, as equações de um mapeamento para modelar catracas a temperatura zero serão deduzidas, e algumas de suas propriedades analíticas serão obtidas, como a difusão em regimes regulares e caóticos na subseção 3.2.1. A eficiência energética para os diferentes tipos de dinâmica também será abordada na subseção 3.2.2. Por fim, algumas curvas analíticas de bifurcação no espaço de parâmetros serão fornecidas na subseção 3.2.3.

### 3.2.1 Dedução do mapa e suas propriedades

Tomando a equação 3.1 em seu modelo unidimensional, com uma aproximação *markoviana* para a dissipação e a temperatura nula, obtém-se

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + F(x, t), \quad (3.4)$$

onde se tem basicamente  $\xi(t) = 0$  porque  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 0$  (equação 3.3) para  $T = 0$ . Seja a velocidade  $v = \dot{x}$ , essa equação diferencial ordinária de segunda ordem pode ser igualmente representada por duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\dot{v} = -\frac{\lambda}{m}v + \frac{F(x, t)}{m}, \quad (3.5)$$

$$\dot{x} = v. \quad (3.6)$$

Deve-se então especificar  $F(x, t)$ . Note que  $F(x, t)$  deve ser periódico na posição  $x$  e no tempo  $t$ , e que, além disso, o potencial que gera  $F(x, t)$  deve ser assimétrico em  $x$ . Como o objetivo aqui é a obtenção de um mapa, faz sentido que se modele a dependência no tempo com uma série de deltas de Dirac periódicas em  $t$ . Já para a dependência com a posição, pode-se escolher o perfil de potencial  $V(x, t) = k[\cos x + 0,5a \cos(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)$ , onde  $\tau$  é o período do potencial que gera série de impulsos  $F(x, t) = -dV/dx = k[\text{sen}x + a \text{sen}(2x + \phi)] \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)$  nos tempos  $0, \tau, 2\tau, \dots$ . A intensidade desses impulsos depende da posição que a partícula se encontra nesses tempos específicos múltiplos de  $\tau$ , e a amplitude depende de  $k$ . Para modificar o formato do potencial, basta variar o parâmetro de assimetria  $a$ , bem como fase  $\phi$ , como mostra a figura 3.3.

Sejam as quantidades demarcadas com um til divididas pela massa da partícula (e.g.  $\tilde{\lambda} = \lambda/m$ ), tem-se que a equação 3.5 para tempos entre os impulsos fica

$$\dot{v} = -\tilde{\lambda}v, \quad (3.7)$$

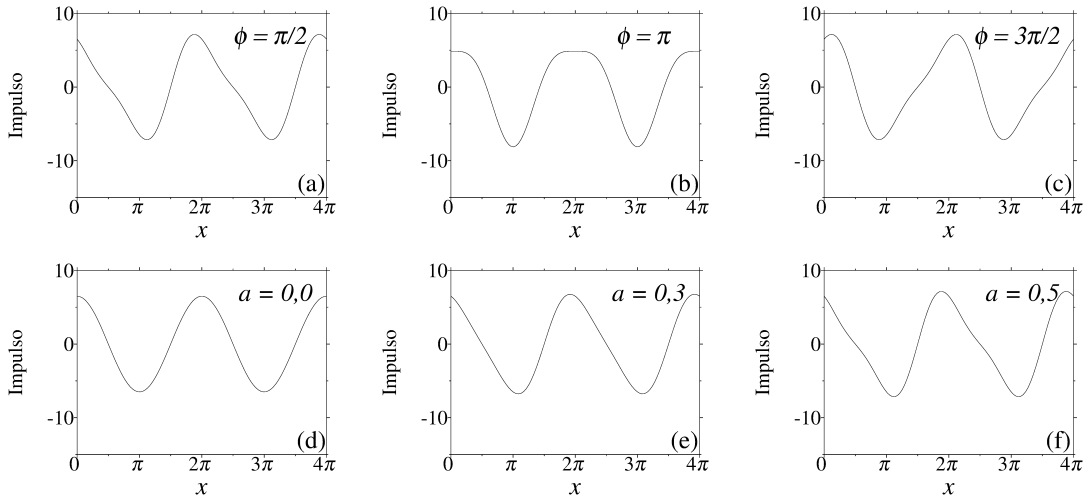


Figura 3.3: Representações do potencial  $k[\cos(x) + 0,5a \cos(2x + \phi)]$ . Para a), b) e c) tem-se  $k = 6,5$  e  $a = 0,5$ . Em a), a fase  $\phi = \pi/2$ , em b)  $\phi = \pi$  e em c)  $\phi = 3\pi/2$ . Para d), e) e f) tem-se  $k = 6,5$  e  $\phi = \pi/2$ . Em d), o parâmetro de assimetria  $a = 0,0$ , em e)  $a = 0,3$  e em f)  $a = 0,5$ . Note que para  $\phi = \pi$  tem-se um potencial simétrico e os potenciais onde  $\phi = \pi/2$  e  $\phi = 3\pi/2$  são idênticos porém invertidos no espaço. De fato, qualquer potencial onde  $\phi = 2\pi - \phi'$  é idêntico ao potencial para  $\phi = \phi'$ , porém invertido no espaço.

cuja solução é

$$v(t) = v(0)e^{-\tilde{\lambda}t}. \quad (3.8)$$

O deslocamento no período  $\tau$  é dado por

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^\tau v(t)dt = \frac{v(0)}{\tilde{\lambda}} (1 - e^{-\tilde{\lambda}\tau}). \quad (3.9)$$

Definindo  $\gamma = \exp(-\tilde{\lambda}\tau)$ , a equação acima fica

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\tau v(0)(1 - \gamma)}{|\ln(\gamma)|}. \quad (3.10)$$

Assim, a integração ao longo de um período terá solução idêntica à de uma partícula em um fluido de viscosidade  $\lambda$  a temperatura nula (equação 3.8) que recebeu no início do movimento um impulso que a fez aumentar em  $k[\text{sen}x + a \text{sen}(2x + \phi)]$  o seu momentum cinético inicial  $mv_n$ , ou seja

$$v(0) = v_n + \tilde{k}[\text{sen}x + a \text{sen}(2x_n + \phi)], \quad (3.11)$$

que, combinada à equação 3.8, leva a

$$v_{n+1} = \gamma\{v_n + \tilde{k}[\text{sen}x + a \text{sen}(2x_n + \phi)]\}, \quad (3.12)$$

Definindo o parâmetro  $K = \tau(1 - \gamma)\tilde{k}/|\ln(\gamma)|$  e o momentum

$$p = \frac{v\tau(1 - \gamma)}{\gamma|\ln \gamma|}, \quad (3.13)$$

obtem-se finalmente as equações do mapeamento  $M_C$  para catracas multiplicando-se a equação 3.12 por  $\tau(1 - \gamma)/\gamma|\ln \gamma|$  e considerando ainda a equação 3.10

$$M_C : \begin{cases} p_{n+1} = \gamma p_n + K[\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)], \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $K$  é o parâmetro de não-linearidade,  $\gamma$  é o parâmetro de dissipação,  $\phi$  é a fase do potencial e  $a$  é o parâmetro de assimetria. Note que este mapa possui todas as características necessárias e já descritas na seção 3.1 para representar uma catraca, ou seja, os impulsos  $F(x, t)$  tiram o sistema do equilíbrio térmico<sup>1</sup> e o potencial que gera esses impulsos é assimétrico para  $\phi \neq i\pi$ , com  $i \in \mathbb{Z}$  e  $a \neq 0$ , quebrando a simetria espacial. Além disso, o parâmetro  $\gamma$  introduz a dissipação no sistema quebrando a simetria temporal. De fato,

$$|\det(\mathbf{J})| = \gamma, \quad (3.15)$$

ou seja, o sistema é conservativo para  $\gamma = 1$  e superamortecido para  $\gamma = 0$ .

Claramente, poder-se-ia escolher várias outras expressões para  $F(x, t)$  que ainda gerariam mapas, desde que a dependência no tempo fosse através de um somatório de deltas de Dirac. Uma propriedade importante de órbitas periódicas pode ser deduzida para o mapa genérico

$$M_C : \begin{cases} p_{n+1} = \gamma p_n + \Omega(x_n), \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Primeiro, note que a função  $\Omega(x)$  tem de ser periódica em  $x$ . Seja então este período  $L_x$  e seja a corrente de uma órbita definida como

$$J_o \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=0}^n p_{i+1}}{n+1} \right), \quad (3.17)$$

onde  $p_i$  são os momenta adquiridos a cada iteração. Uma órbita periódica de período  $q$  deve respeitar  $J_o q = w L_x$ , onde  $w \in \mathbb{Z}$ , ou seja, os valores permitidos para as correntes

---

<sup>1</sup>Os impulsos fazem com que as partículas possuam uma energia maior que a energia média esperada para o equilíbrio térmico com um reservatório em  $T = 0$ .

orbitais são

$$J_o = \frac{wL_x}{q}. \quad (3.18)$$

Mais à frente, será necessária a utilização de uma definição mais robusta de corrente que englobe cenários de multiestabilidade, onde existem vários atratores, cada um com sua respectiva corrente orbital. Para tanto, considere a corrente total

$$J_T = \lim_{M, n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_{i+1}^{(j)} \right] \right\}, \quad (3.19)$$

onde  $M$  indica o número de condições iniciais que devem distribuir-se homogeneamente em uma dada região do espaço de fase. Observe ainda que a distribuição das condições iniciais deve ocupar o intervalo  $[0, L_x]$  de  $x$ , e um intervalo simétrico ao redor de  $p = 0$ , para que não haja uma tendência (nas condições iniciais) de se ter corrente para um sentido específico. De fato, à temperatura zero, a corrente total deve depender da corrente orbital definida pela equação 3.17 da seguinte maneira:

$$J_T = \sum_{j=1}^{N_{at}} \mu_j J_o^{(j)}, \quad (3.20)$$

onde  $J_o^{(j)}$  é a corrente orbital do atrator  $j$ ,  $N_{at}$  é o número de atratores que coexistem e  $\mu_j$  é a fração das CIs que está na bacia de atração do atrator  $j$ . Na ausência de multiestabilidade, ou seja, quando há apenas um atrator no espaço de fase,  $J_T = J_o$ .

As propriedades difusivas de um sistema de partículas descrevem como estas partículas espalham-se no espaço. Partículas *brownianas*, como as constituintes do disperso em um colóide por exemplo (sobre colóides, veja a seção 2.2), possuem um perfil de difusão chamado de normal e caracterizado pelo seguinte coeficiente [36]:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\delta x_n - \delta x_0)^2 \rangle}{2n}, \quad (3.21)$$

onde a média  $\langle \dots \rangle$  é feita sobre as condições iniciais (CIs) em todo o espaço de fase e

$$\delta x = x - \langle x \rangle. \quad (3.22)$$

Todavia, existem situações onde este coeficiente, o coeficiente de difusão, não caracteriza corretamente a dispersão das partículas: ele pode divergir ou então pode anular-se. Nesses casos, a difusão é considerada anômala<sup>2</sup>. A família de mapas da equação 3.16

<sup>2</sup>Para uma excelente revisão sobre o tópico de difusão anômala, consulte a referência [84].

deve apresentar difusão normal e também anômala, esta última podendo acontecer e.g. dada a existência de multiestabilidade no espaço de fase. Muito embora todos os atratores caóticos investigados numericamente durante este trabalho apresentassem difusão normal, não foi possível construir um argumento teórico (nem se encontrou na literatura) que desse suporte à afirmação de que atratores caóticos não levam à difusão anômala. Todavia, é possível demonstrar que órbitas periódicas apresentam difusão nula. Seja o coeficiente de difusão dado pela equação 3.21, com o auxílio da equação 3.22 pode-se reescrevê-lo como

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2}{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \delta x_n \delta x_0 \rangle}{n}. \quad (3.23)$$

Agora, note que se pode escrever a posição de uma partícula no seu estado assintótico (dentro do atrator) como  $x_n = J_o n + \Delta_n + x_0$ . Neste caso,  $x_0$  é a posição da partícula ao atingir o atrator<sup>3</sup> após um dado tempo transiente. Ao atingir este atrator, a posição variará, em média,  $J_o$  a cada iteração, onde  $J_o$  é a corrente orbital deste atrator. Porém, este atrator não necessariamente é um ponto fixo, de maneira que, a cada iteração, podem haver variações  $\Delta_n$  em torno da posição média  $x_0 + J_o n$  (observe também que  $\Delta_0 = 0$ ). É importante notar que, para um atrator qualquer, deve-se ter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n = 0, \quad (3.24)$$

para que os  $\Delta_n$  não contribuam na posição média. Para um atrator periódico esta relação fica simplesmente

$$\sum_{n=1}^q \Delta_n = 0. \quad (3.25)$$

De fato, a equação 3.25 assinala o fato da órbita periódica fechar-se após  $q$  iterações. Retornando à equação 3.23, o termo

$$\langle \delta x_n \delta x_0 \rangle = \langle x_n x_0 \rangle - \langle x_n \rangle \langle x_0 \rangle = \langle \Delta_n x_0 \rangle + \langle x_0^2 \rangle - \langle x_0 \rangle^2, \quad (3.26)$$

não deve divergir com o tempo pois  $\Delta_n$  não diverge. Assim, tem-se o coeficiente de difusão efetivo

$$D_{eff} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2}{2n} \right), \quad (3.27)$$

que coincide com o coeficiente de difusão  $D$  dado pela equação 3.21. Para uma órbita

---

<sup>3</sup>A ideia de se “atingir o atrator” pode ser considerada um tanto vaga pois, a rigor, as órbitas tendem para o atrator, atingindo-o **exatamente** após um tempo infinito. Todavia, em um tempo finito (transiente) as órbitas dentro de uma bacia de atração aproximam suas trajetórias à do respectivo atrator de tal maneira que, praticamente, pode-se considerar que elas atingiram o atrator em um tempo finito.

periódica de período  $q$ , uma troca de variável  $n \rightarrow n_p$ , onde  $n = n_p q$ , permite que se escreva  $x_{n_p} = x_0 + J_o n_p q + \sum_{i=1}^{n_p q} \Delta_i = x_0 + J_o n_p q$ , onde se utilizou a equação 3.25. Assim, pela equação 3.27,

$$D_{eff} = 0. \quad (3.28)$$

Note ainda que se a média fosse feita em todo o espaço de fase (ou em uma porção qualquer não coincidente com parte ou toda a bacia de atração de um único atrator), à temperatura nula, poderia ocorrer difusão anômala na presença de multiestabilidade. Para ilustrar essa questão, imagine que dois atratores de correntes  $J_1$  e  $J_2$  ( $J_1 \neq J_2$ ), cujas bacias de atração possuem frações  $\mu_1$  e  $\mu_2$  das CIs, coexistissem no espaço de fase. Nesta situação, a velocidade do centro de massa seria

$$V_C = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2, \quad (3.29)$$

de maneira que as órbitas afastariam-se balisticamente do seu centro de massa (com velocidade  $\propto n$ ). Porém, para que o coeficiente de difusão definido pela equação 3.23 não divirja (o que caracterizaria difusão anômala), este afastamento das órbitas em relação ao seu centro de massa não deveria ser balístico, mas sim com velocidade  $\propto n^{1/2}$ , como era de se esperar para difusão normal.

### 3.2.2 Eficiência energética do mapeamento a temperatura nula

É possível obter uma medida da eficiência energética na produção de corrente para este mapa. A eficiência de motores brownianos é definida como [36, 85]

$$\eta = \frac{A}{|\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle|}, \quad (3.30)$$

onde  $P_{ent}$  é a potência de entrada<sup>4</sup>, a média  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  é realizada sobre as CIs no espaço de fase, e o tempo e  $A$  deve ser escolhido como uma medida da potencia média que se produz com o movimento direcionado. Nesta dissertação, escolheu-se o produto entre a média da força proveniente da viscosidade do fluido e a velocidade média da partícula

$$A = \lambda \langle\langle v \rangle\rangle \langle\langle v \rangle\rangle. \quad (3.31)$$

---

<sup>4</sup>A potencia injetada pela força externa.

A média dupla  $\langle\langle v \rangle\rangle$  no caso do mapa 3.14 é dada por

$$\begin{aligned}\langle\langle v \rangle\rangle &= \lim_{M,n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{Mn\tau} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n \left[ \int_0^\tau v(t)_i^{(j)} dt \right] \right\}, \\ &= \lim_{M,n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{Mn\tau} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n \left[ (x_{i+1}^{(j)} - x_i^{(j)}) \right] \right\}, \\ &= \frac{J_T}{\tau},\end{aligned}\tag{3.32}$$

onde se utilizou o fato de que  $x_{i+1} - x_i = p_{i+1}$  e a equação 3.19. Note que na equação 3.32  $v(t)_i^{(j)}$  denota a velocidade entre o impulso  $i$  e  $i + 1$  do mapa para a CI  $j$ . Falta agora obter a potência média fornecida pela força externa. Note que, como se está lidando com o limite assintótico, todas as órbitas já estão em um atrator, que é um conjunto invariante no espaço de fase. Por serem invariantes, em média (no tempo) os atratores mantêm sua energia, sendo que a energia consumida pela dissipação iguala-se à energia fornecida externamente. Assim, pode-se escrever  $\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle$  como

$$\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle = \lim_{M,n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{Mn\tau} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n \left[ \int_0^\tau (\lambda v(t)_i^{(j)}) v(t)_i^{(j)} dt \right] \right\}.\tag{3.33}$$

Com o auxílio da equação 3.8 e a definição  $\gamma = \exp(-\lambda\tau/m)$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle &= \lim_{M,n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda}{Mn\tau} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n \left[ (v_i^{(j)})^2 \int_0^\tau e^{-2\lambda t/m} dt \right] \right\}, \\ &= \lim_{M,n \rightarrow \infty} \left[ \frac{m(1-\gamma^2)}{2Mn\tau} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n (v_i^{(j)})^2 \right].\end{aligned}\tag{3.34}$$

Lembrando ainda da definição de  $p$  pela equação 3.13,

$$v^2 = \frac{|\ln \gamma|^2}{\tau^2(1-\gamma)^2} p^2 = \frac{\lambda^2}{m^2(1-\gamma)^2} p^2,\tag{3.35}$$

tem-se que

$$\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle = \lim_{M,n \rightarrow \infty} \frac{m\lambda^2(1+\gamma)(1-\gamma)}{Mn\tau(1-\gamma)^2 m^2} \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^n (p_i^{(j)})^2 = \frac{\lambda^2(1+\gamma)}{m(1-\gamma)} \langle\langle p^2 \rangle\rangle.\tag{3.36}$$

Por fim, a eficiência  $\eta$  fica

$$\eta = \frac{A}{|\langle\langle P_{ent} \rangle\rangle|} = \frac{\lambda m \tau (1-\gamma)}{\tau^2 \lambda^2 (1+\gamma)} \frac{J_T^2}{\langle\langle p^2 \rangle\rangle} = \frac{1-\gamma}{|\ln \gamma| (1+\gamma) \tau} \frac{J_T^2}{\langle\langle p^2 \rangle\rangle}.\tag{3.37}$$



Pode-se definir ainda o desvio padrão  $\sigma_p^2$  como

$$\sigma_p^2 = \tau\langle p^2 \rangle - \tau^2\langle p \rangle^2 = \tau\langle p^2 \rangle - J_T^2, \quad (3.38)$$

onde o termo  $\tau\langle p^2 \rangle$  representa uma média de  $p^2$  nas CIs e no número de iterações do mapa (ao invés de no tempo). Assim, a eficiência pode ser reescrita tal que

$$\eta = \frac{1 - \gamma}{|\ln \gamma|(1 + \gamma)} \frac{J_T^2}{J_T^2 + \sigma_p^2}. \quad (3.39)$$

Através desta última equação fica claro que existe uma queda de eficiência associada à ampla variação de  $p$  no regime assintótico, ou seja, atratores caóticos (ou mesmo periódicos com  $\sigma_p^2$  grande) e regimes de multiestabilidade tendem a diminuir a eficiência. Claramente, a equação 3.39 pode ser estendida para o caso em que só existe um único atrator no espaço de fase observando que, nesse caso,  $J_T = J_o$ . Além disso, para o atrator periódico de período  $q = 1$  tem-se que  $\sigma_p^2 = 0$ , de maneira que, mantendo  $\gamma$  fixo, a maior eficiência possível ocorre para esta órbita. Por fim, aproximando-se do limite conservativo com uma órbita em que  $q = 1$  obtém-se a eficiência máxima  $\eta = 0,5$ , como se pode observar na figura 3.4.

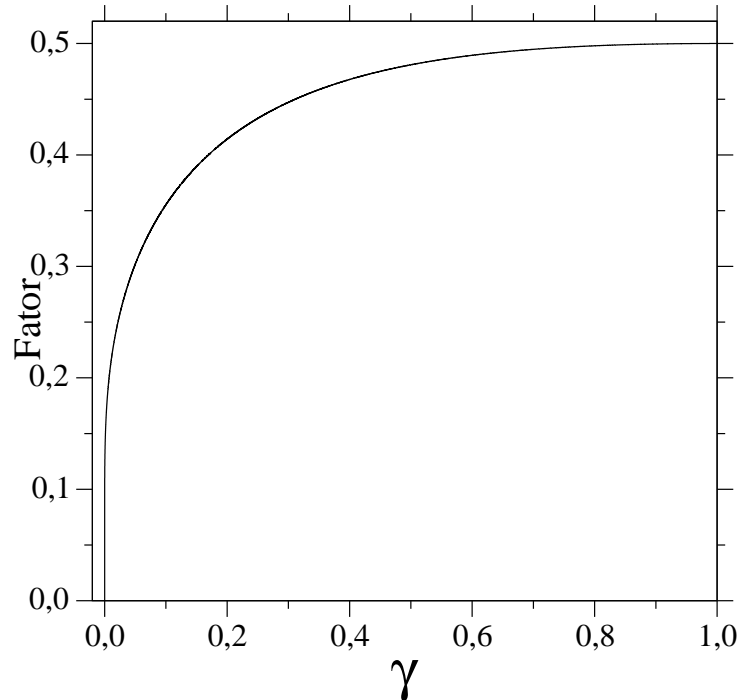


Figura 3.4: Na figura 3.4 a eficiência  $\eta$  é plotada em função do parâmetro  $\gamma$  para uma órbita periódica em que  $q = 1$ . Para  $\gamma = 0$ , verifica-se que  $\eta$  se anula, e a eficiência encontra seu valor máximo  $\eta = 0,5$  no limite conservativo.

### 3.2.3 Curvas analíticas de bifurcação

Na seção 2.2.4 mostrou-se que é possível identificar a região do espaço de parâmetros onde haverá uma bifurcação do tipo sela-nó ou dobramento de período dependendo dos autovalores da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ . Com efeito, para a bifurcação sela-nó tem-se um autovalor  $\lambda_1 = 1$  e para a bifurcação por dobramento de período  $\lambda_1 = -1$ . Para período  $q = 1$  foi possível obter as curvas de bifurcação do tipo sela-nó no espaço de parâmetros  $(K, \gamma)$ . Primeiramente, faz-se necessário determinar os pontos fixos, que devem respeitar as equações (de acordo com as equações do mapa 3.14)

$$p^{(L)} = 2\pi L, \quad (3.40)$$

$$2\pi L(\gamma - 1) + K [\text{sen}(x^{(L)}) + a \text{sen}(2x^{(L)} + \phi)] = 0, \quad (3.41)$$

onde  $L \in \mathbb{Z}$ . Seja então  $\phi = \pi/2$ , é possível obter as expressões para  $x^{(L)}$ . Muito embora a álgebra envolvida nos cálculos seja relativamente simples, não será apresentada aqui por ser demasiadamente extensa. As expressões finais para os pontos fixos  $x^{(L)}$  são:

$$x_i^{(L)} = \arcsin \left[ \frac{1}{4a} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{16\pi L(\gamma - 1)a}{K} + 8a^2} \right) \right], \quad (3.42)$$

$$x_j^{(L)} = \arcsin \left[ \frac{1}{4a} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{16\pi L(\gamma - 1)a}{K} + 8a^2} \right) \right], \quad (3.43)$$

onde  $i = 1, 2$  e  $j = 3, 4$ , já que a partir de cada uma das expressões é possível obter dois valores de  $x$  no intervalo entre 0 e  $2\pi$ . A figura 3.5 a) constitui um diagrama de bifurcação que apresenta o valor de  $x_i^{(1)}$  e  $x_j^{(1)}$  em função do parâmetro  $K$ , fixando  $a = 0,5$ ,  $\gamma = 0,2$  e  $\phi = \pi/2$ . A estabilidade dos pontos fixos foi determinada utilizando os autovalores de  $\mathbf{J}$ . Para tanto, as expressões dos pontos fixos (bem como os valores dos parâmetros) dadas pelas equações 3.42 e 3.43 foram introduzidas na matriz jacobiana do mapa

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & K[\cos(x_n) + 2a \cos(2x_n + \phi)] \\ \gamma & 1 + K[\cos(x_n) + 2a \cos(2x_n + \phi)] \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

fornecendo dois autovalores para cada ponto fixo. As expressões para os autovalores da matriz jacobiana não serão apresentados aqui pois são demasiadamente grandes e não se obtém nenhuma informação delas senão através de gráficos. As figuras 3.5 b) e c) apresentam respectivamente os autovalores  $\lambda_i^k$  e  $\lambda_j^k$ , com  $k = 1, 2$ , em função do parâmetro  $K$ . Quando o módulo de, pelo menos, um dos autovalores é maior que 1, o ponto fixo é instável; caso contrário, estável. Ainda é importante observar que quando

um dos autovalores torna-se igual a 1 tem-se uma bifurcação do tipo sela-nó; já se um dos autovalores torna-se igual a  $-1$  tem-se uma bifurcação por dobramento de período. Observa-se que  $x_1^{(1)}$  e  $x_4^{(1)}$  são sempre instáveis,  $x_2^{(1)}$  e  $x_3^{(1)}$  nascem estáveis sendo que  $x_2^{(1)}$  torna-se instável por uma bifurcação de dobramento de período em  $K \approx 7,0$ ,  $x_3^{(1)}$  torna-se instável pelo mesmo tipo de bifurcação em  $K \approx 7,3$  porém volta a se tornar estável via dobramento de período em  $K \approx 9,3$ . Para auxiliar na visualização desses detalhes no que se refere ao ponto  $x_2^{(1)}$ , veja a figura 3.5 d) que constitui em uma ampliação da figura 3.5 c). Note ainda que todos os pontos são criados por uma bifurcação sela-nó em  $K \approx 6,7$ ,  $x_3^{(1)}$  e  $x_4^{(1)}$  colidem em uma nova bifurcação sela-nó em  $K \approx 10$  desaparecendo e  $x_1^{(1)}$  e  $x_2^{(1)}$  continuam a existir para valores maiores de  $K$ .

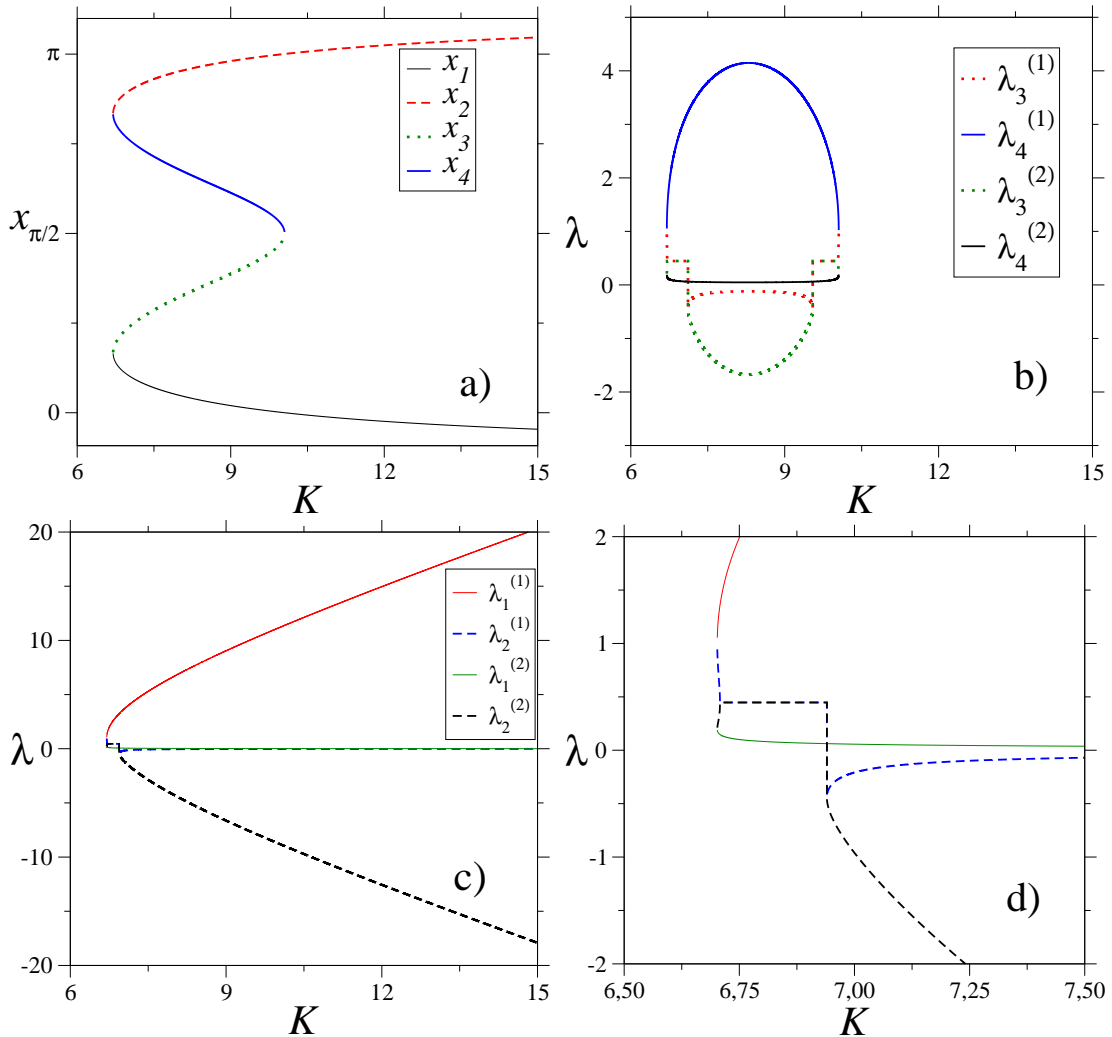


Figura 3.5: Na figura 3.5 a) os valores dos pontos fixos  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$ ,  $x_3^{(1)}$  e  $x_4^{(1)}$  são plotados em função do parâmetro  $K$ , mantendo os parâmetros  $a = 0,5$ ,  $\gamma = 0,2$  e  $\phi = \pi/2$ . Em b), os dois autovalores da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  de cada um dos pontos fixos  $x_3^{(1)}$  e  $x_4^{(1)}$  aparece em função do parâmetro  $K$ . Em c), os dois autovalores da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  de cada um dos pontos fixos  $x_3^{(1)}$  e  $x_4^{(1)}$  aparece em função do parâmetro  $K$ . A figura 3.5 d) é uma ampliação de a), sendo a legenda da figura 3.5 a) também referente a d).

Fixando o parâmetro  $\phi = \pi/2$ , os pontos do espaço de parâmetros onde há bifurcação sela-nó devem respeitar a equação  $\lambda^{(L)}(K, a, \gamma) - 1 = 0$ . Resolvendo esta equação para todos os pontos fixos, obteve-se as seguintes retas:

$$\gamma_{\pm 1}^{(L \neq 0)}(K, a) = 1 + \frac{K}{2\pi L}(a \pm 1), \quad (3.45)$$

$$\gamma_2^{(L \neq 0)}(K, a) = 1 - \frac{K}{2\pi L} \left( a + \frac{1}{8a} \right). \quad (3.46)$$

Para  $L = 0$  foi encontrada a única solução  $a = 1$ , independente de  $K$  e  $\gamma$ . Estas curvas definem as regiões do espaço de parâmetros onde há bifurcação sela-nó e serão comparadas posteriormente na seção 3.3 às bordas de estruturas isoperiódicas no espaço de parâmetros, regiões regulares que serão abordadas em mais detalhes também na seção 3.3.

A priori, poder-se-ia encontrar todas as regiões do espaço de parâmetros onde há bifurcação por dobramento de período  $q = 1 \rightarrow 2$  resolvendo a equação  $\lambda^{(L)}(K, a, \gamma) + 1 = 0$  oriunda dos pontos fixos já determinados pelas expressões 3.42 e 3.43, porém na prática foi possível apenas encontrar expressões analíticas no caso em que  $L = 0$ ,

$$\gamma_{(q=1 \rightarrow 2)}^{(0)}(K, a) = -1 + \frac{K}{8a} \left( \alpha \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 3} \right), \quad (3.47)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{8a^2 + 1}. \quad (3.48)$$

Não foi possível também encontrar curvas de bifurcação para a fase  $\phi$  arbitrária. Por fim, note que como as expressões analíticas dos autovalores são muito grandes, os cálculos necessários para a obtenção das curvas de bifurcação no espaço de parâmetros também são, de maneira que estes cálculos não serão apresentados nesta dissertação.

### 3.3 Resultados numéricos: mapeamento a temperatura nula

Esta dissertação dedicou-se principalmente ao estudo do espaço de parâmetros de catracas clássicas. Para tanto, quantidades dinâmicas de interesse como o maior expoente de Lyapunov, os períodos e a corrente total foram calculadas numericamente em subespaços formados pela variação de dois parâmetros, que serão referidos nesta dissertação simplesmente como espaços de parâmetros (EPs). Nesta seção, serão reportados os resultados numéricos obtidos para o mapeamento à temperatura zero. As subseções estão

divididas entre os pares de parâmetros variados em cada EP. Estes resultados podem ser considerados representativos para um conjunto de sistemas clássicos onde as “interações determinísticas”, ou seja, as interações que não são oriundas de nenhum tipo de ruído, são muito mais intensas que as estocásticas.

### 3.3.1 Espaço de parâmetros $K$ versus $\gamma$

Nesta subseção, o EP  $(K, \gamma)$  foi estudado em detalhes, sendo fixados os parâmetros  $a = 0,5$  e  $\phi = \pi/2$ . Os parâmetros variados  $K$  e  $\gamma$ , de uma maneira não rigorosa, consistem respectivamente em uma medida da energia que é fornecida ao sistema e da energia dissipada. Claramente,  $K$  é sempre positivo e  $\gamma \in [0; 1]$ , encontrando o superamortecimento em  $\gamma = 0$  e o limite conservativo em  $\gamma = 1$ .

A figura 3.6 a) consiste em um EP onde se varreu todo o intervalo da dissipação  $\gamma$  com significado físico, e um intervalo representativo da perturbação  $K$ . A corrente total é representada por cores, sendo que a cor preta representa correntes aproximadamente nulas, do verde para o branco correntes incrementadamente positivas e do vermelho para o amarelo correntes incrementadamente negativas. A característica mais evidente da figura 3.6 a) é a distribuição periódica de regiões de morfologia semelhante onde a corrente é destacadamente superior. Essas regiões foram marcadas pelas letras  $B_L$ ,  $B_L^{-1}$ ,  $C_L$  e  $D_L$ , onde  $L$  é um número racional<sup>5</sup> que informa a sua corrente ( $J_T = LL_x = L2\pi$ ), constante dentro de cada uma dessas regiões. As regiões  $E$  também possuem uma corrente superior à dos arredores, mas esta corrente não é constante dentro da região. Por fim, há também a região  $A$  que permeia a maior parte do EP e apresenta correntes variáveis e modestas quando comparadas às outras regiões. A linha branca pontilhada em  $K = 6,5$  indica a região investigada pela referência [38] e, comparando a figura 3.6 a) com a figura 3.7, figura 1 da referência [38], conclui-se que ambas são qualitativamente equivalentes ao longo desta linha. A figura 3.6 b) consiste no mesmo EP da figura 3.6 a), porém com a quantidade representada por cores agora sendo o período da órbita. Na figura 3.6 b), preto indica órbitas não-periódicas, verde período  $q = 1$ , azul  $q = 2$ , ciano  $q = 3$ , amarelo  $q = 4$ , rosa  $q = 5$ , violeta  $q = 6$ , roxo  $q = 7$  e vermelho  $q \geq 8$ . Este EP revela informações importantes acerca da dinâmica das regiões da figura 3.6 a): as regiões  $B_L$ ,  $B_L^{-1}$ ,  $C_L$  e  $D_L$  são periódicas e possuem grandes áreas de mesmo período, por esse motivo serão

<sup>5</sup>Na seção 3.2.3  $L$  foi apresentado como um número inteiro e, portanto, pode provocar alguma confusão o fato de aqui ele ser apresentado como um número racional. A motivação para isto advém da equação 3.18: para pontos fixos (período  $q = 1$ ),  $L = w$  (veja equação 3.18 onde  $w \in \mathbb{Z}$ ) e, portanto, é um inteiro. Já para  $q \neq 1$ , como é, em geral o caso para os atratores periódicos que geram as EIPs,  $L = w/q$  e, portanto, um número racional qualquer.

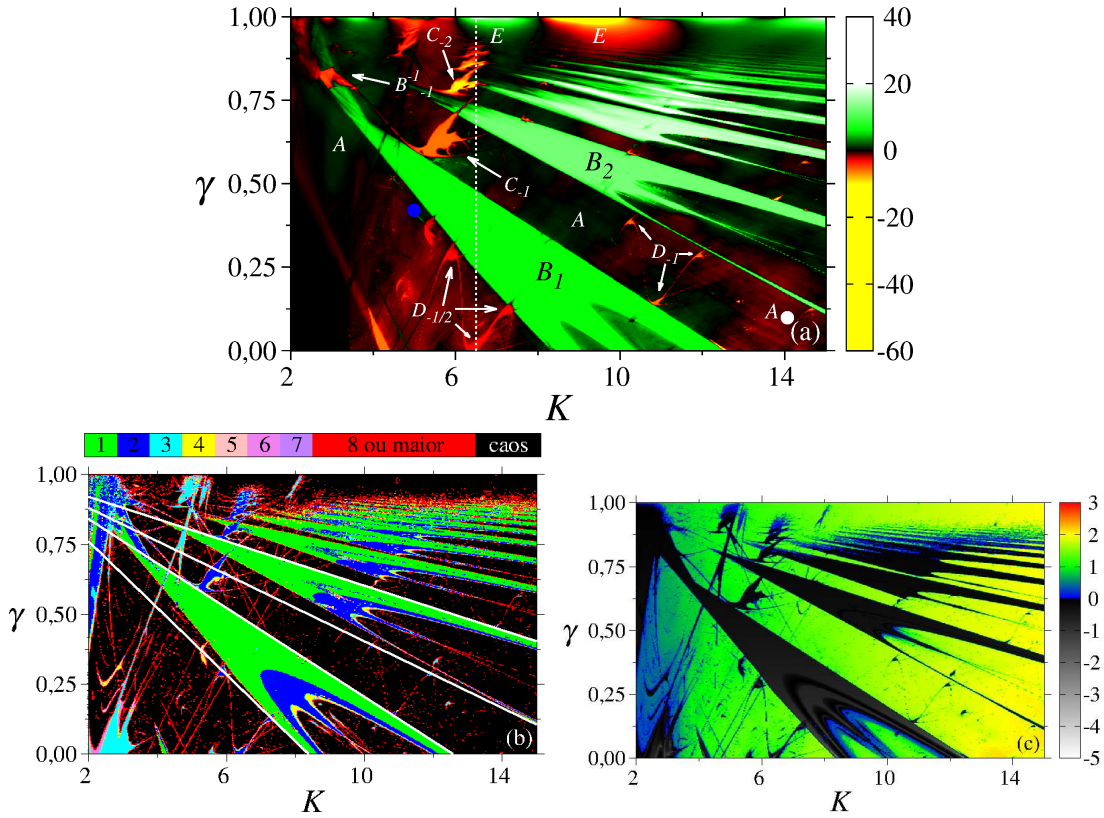


Figura 3.6: A figura 3.6 apresenta em cores algumas grandezas calculadas numericamente no EP  $(K, \gamma)$ , em uma malha de  $600 \times 600$  pontos. Em a) a grandeza determinada é  $J_T$ , onde se utilizou  $10^5$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^4$  iterações. Nesta figura estão indicadas por letras algumas regiões características do EP. A linha branca pontilhada em  $K = 6, 5$  indica a região investigada pela referência [38]. Em a) ainda há um ponto branco em  $K = 14$  e  $\gamma = 0, 125$ , local do EP onde os atratores das figuras 3.11 b) e d) foram gerados, e um ponto azul em  $K = 5, 05$  e  $\gamma = 0, 46$ , valores dos parâmetros para os quais a figura 3.8 foi gerada. Em b) calculou-se o período da órbita  $q$ , onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações. Nesta figura ainda estão plotadas algumas curvas de bifurcação sela-nó (linha contínua) obtidas na subseção 3.2.3. Em c) a quantidade calculada é o maior expoente de Lyapunov, onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações.

chamadas de estruturas isoperiódicas (EIPs); as regiões  $A$  e  $E$  não são periódicas. As retas brancas representadas na figura 3.6 b) são regiões de bifurcação sela-nó obtidas na subseção 3.2.3, curvas  $\gamma_{-1}^{(L)}(K, a = 0, 5)$  (borda superior das EIPs  $B_L$ ) e  $\gamma_2^{(L)}(K, a = 0, 5)$  (borda inferior das EIPs  $B_L$ ) definidas pelas equações 3.45 e 3.46. Variando o valor de  $L$ , obtém-se as bordas para todas as EIPs  $B_L$ . As bordas de outras EIPs como as  $B_L^{-1}$ ,  $C_L$  e  $D_L$  não foram obtidas porque estas EIPs estão relacionadas a períodos maiores, onde as equações ficam mais complicadas e não foi possível se chegar a uma solução para a região de bifurcação.

Pode-se notar pela figura 3.6 b) que as bordas inferiores analíticas  $\gamma_2^{(L)}(K, a = 0, 5)$  não sobrepõem exatamente as bordas numéricas das  $B_L$ . Este resultado está em con-

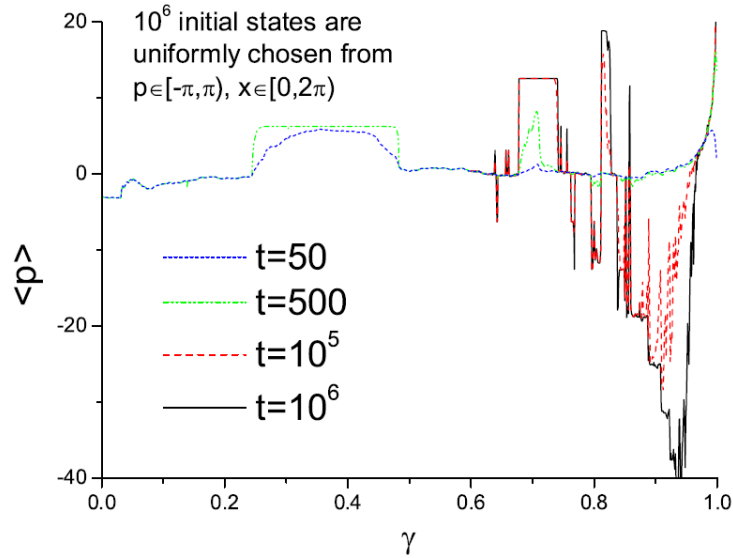


Figura 3.7: Esta figura foi retirada da referência [38], constitui a figura 1 deste artigo e nela é plotada a corrente  $J_T$  em função do parâmetro  $\gamma$  ao longo da linha branca descontínua da figura 3.6 a). Traduzindo a notação do artigo para aquela utilizada nesta dissertação, tem-se que  $\langle p \rangle = J_T$  e  $t = N$ . Para gerar esta figura os autores utilizaram  $M = 10^6$  CIs, fixando os parâmetros  $K = 6, 5$  e  $a = 0, 5$ . Claramente, é possível estabelecer uma equivalência qualitativa entre esta figura e a região ocupada pela linha descontínua da figura 3.6 a).

cordância com o obtido na figura 3 da referência [38], e é explicado pelo fato de haver uma coexistência entre o atrator periódico que gera a  $B_L$  e o atrator caótico que possui uma bacia de atração muito maior (multiestabilidade). Assim, as duas bordas numéricas das EIPs  $B_L$  nesse EP possuem origens físicas diversas: enquanto a superior é gerada por uma bifurcação sela-nó a inferior é gerada por uma crise no atrator caótico<sup>6</sup>. A figura 3.8 ilustra bem esse fenômeno ao plotar em cores a corrente orbital  $J_o$  no espaço de fase em função da CI, para  $K = 5, 05$  e  $\gamma = 0, 46$ , ponto marcado em azul na figura 3.6 a). Em verde, aparece a bacia de atração do atrator que gera a EIP  $B_1$ , com  $J_o = 2\pi$ , e quase todo o restante do espaço de fase compõe a bacia de atração do atrator caótico de corrente negativa. Dentro de  $B_1$ , onde o atrator caótico já sofreu a crise e desapareceu, não há mais multiestabilidade e a bacia de atração do atrator periódico passa a ocupar todo o espaço de fase, tendo-se novamente  $J_T = J_o$ .

Foi mencionado anteriormente, sem justificativa, que a figura 3.6 a) apresentava  $J_T$  em um intervalo representativo de  $K$ . Aproximando-se de  $K = 0$  as regiões caóticas vão se tornando cada vez mais raras, sendo substituídas por EIPs que não carregam corrente. Algumas dessas EIPs podem ser vistas na figura 3.6 b), tendo em vista que são poucas as

<sup>6</sup>Entende-se por crise de um atrator caótico uma súbita mudança em seu comportamento. Entre essas mudanças estão o crescimento da região caótica no espaço de fase e o seu desaparecimento (perda de estabilidade) [86].

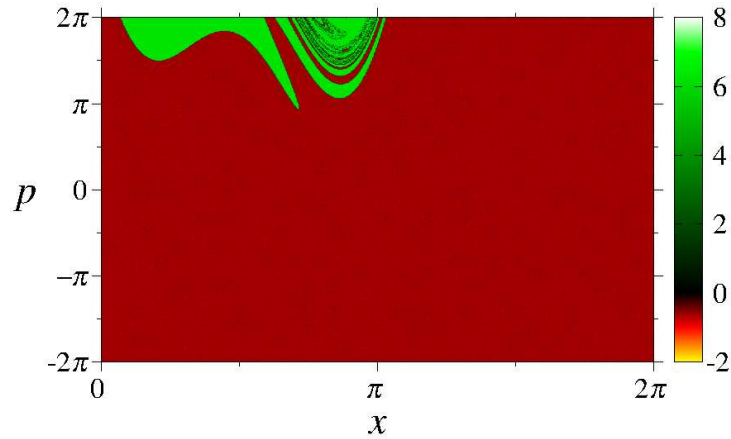


Figura 3.8: Nesta figura é representada em cores a corrente  $J_o$  no espaço de fase em uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos. Para gerá-la, foram utilizadas  $N = 10^3$  iterações, foi fixado  $K = 5,05$  e  $\gamma = 0,46$  (ponto em azul da figura 3.6 a)). Em verde, aparece a bacia de atração do atrator que gera a EIP  $B_1$ , e quase todo o restante do espaço de fase compõe o atrator caótico de corrente negativa. A corrente  $J_T \approx -0,306$ .

regiões que apresentam corrente total não-nula abaixo de  $K = 4$  (veja figura 3.6 a)). As EIPs que não carregam corrente, bem como as regiões  $A$  de corrente total nula, devem corresponder a atratores cujos pontos distribuem-se simetricamente em relação a  $p = 0$ . Por fim, ao se aumentar o valor de  $K$  além do intervalo já representado na figura 3.6 a) apenas se encontra mais e mais EIPs do tipo  $B_L$  e  $D_L$ , bem como regiões  $E$ , porém com  $J_T$  mais elevado.

O fato de as regiões  $A$  e  $E$  não serem periódicas não implica necessariamente que elas sejam caóticas, já que o conceito de caos refere-se à dependência sensível nas CIs e não à periodicidade em si (veja a subseção 2.2.3). Para verificar se  $A$  e  $E$  são regulares ou caóticas gerou-se a figura 3.6 c). A figura 3.6 c) consiste no mesmo EP das figuras 3.6 a) e 3.6 b), porém com a quantidade representada por cores agora sendo o maior expoente de Lyapunov. Da cor branca à preta o maior expoente de Lyapunov é negativo e varia em direção a zero. O maior expoente de Lyapunov crescente a partir de zero é representado pelas cores azul, verde, amarela e vermelha. Como o maior expoente de Lyapunov é positivo nas regiões  $A$  e  $E$ , conclui-se que são caóticas. De fato, essa conclusão concorda com a explicação dada à natureza do transporte próximo ao limite conservativo fornecida na referência [38], que vale para a região  $E$ : com a baixa dissipação, conjuntos que no limite conservativo eram totalmente separados, em específico o mar de caos e as ilhas modos aceleradores<sup>7</sup>, conectam-se de maneira que o momentum das ilhas difunde-se e

<sup>7</sup>A expressão “mar de caos” refere-se simplesmente a uma região do espaço de fase cuja dinâmica é caótica em sistemas conservativos. Já a expressão “modos aceleradores” refere-se a órbitas do limite conservativo que são periódicas se a posição  $x$  e o momentum  $p$  forem consideradas variáveis periódicas, e que aumentam o seu momentum por um incremento proporcional ao período de  $p$  a cada iteração. Por fim, ao redor dos modos aceleradores existem órbitas quasi-periódicas que variam  $p$ , em média, como os



acaba por criar uma dinâmica caótica de altas correntes  $J_T$ . Note ainda que a figura 3.6 c) mostra claramente que a corrente independe do valor do maior expoente de Lyapunov, tanto nas regiões caóticas quanto nas periódicas.

Tendo em vista o resultado já obtido na seção 3.2.1  $\det(\mathbf{J}) = \gamma$ , supõe-se que a proximidade com o limite conservativo deva aumentar o transiente das órbitas. De fato, é isso o que se observa nas simulações numéricas no que se refere às EIPs, como pode ser visto na própria figura 3.7 da referência [38], onde a corrente total negativa de grande módulo que se acumula em  $\gamma = 0,94$  é na verdade um corte das EIPs  $C_L$  da figura 3.6 a). Todavia, a figura 3.7 ainda mostra que no intervalo aproximado  $[0,95; 1,00]$  o transiente é muito curto. Voltando à figura 3.6 a), esse intervalo corresponde a um corte de uma região  $E$ , o que indica que estas regiões realmente são estacionárias. Foram feitos ainda alguns testes pontuais dentro dessas regiões e não se verificou alteração da corrente até  $N = 10^7$  iterações.

Além do grande transiente correspondente às órbitas periódicas, verifica-se ainda que várias EIPs diferentes acumulam-se em determinadas áreas próximas ao limite conservativo, um pouco abaixo das regiões  $E$ . É previsível que essas áreas apresentem cenários de forte multiestabilidade com a sobreposição de diferentes EIPs. De fato, situações como essa já foram estudadas nos trabalhos [87, 88], onde os autores reportam a existência de uma ampla quantidade de atratores associados a pequenas bacias de atração coexistindo no espaço de fase. Ainda existem regiões do EP onde atratores periódicos podem coexistir com atratores caóticos, fazendo com que  $J_T \neq J_o$  e a corrente varie dentro da EIP. Um exemplo da coexistência entre atratores periódicos e caóticos pode ser observado nas figuras 3.9 a) e b). A figura 3.9 a) é uma ampliação da figura 3.6 a) mostrando a EIP  $B_{-1}^{-1}$  que se sobrepõe e se liga a outras EIPs no EP. Como consequência, a corrente  $J_T$  difere de  $J_o$  (acaba sendo uma composição das correntes de todos os atratores coexistentes em cada ponto). Para confirmar este cenário de multiestabilidade, a figura 3.9 b) plota a corrente em função da CI no espaço de fase. Como indicado pelas flechas, há atratores periódicos e caóticos de diferentes correntes  $J_o$  influenciando o valor de  $J_T$ . Cenários de multiestabilidade como esse já foram propostos como candidatos a métodos de separação de partículas com diferentes velocidades em determinados contextos [35, 89].

A figura 3.10 é uma ampliação de duas regiões, uma engloba algumas EIPs do tipo  $C_L$ , e outra as EIPs  $D_{-1}$  sendo que em a) e c) o degradê de cores representa a corrente  $J_T$  e em b) e d) os períodos. As paletas são idênticas às já comentadas na introdução das figuras 3.6 a) e 3.6 b). Por esta figura é possível observar em mais detalhe a morfologia modos aceleradores os quais circundam, e que são chamadas de ilhas modos aceleradores.

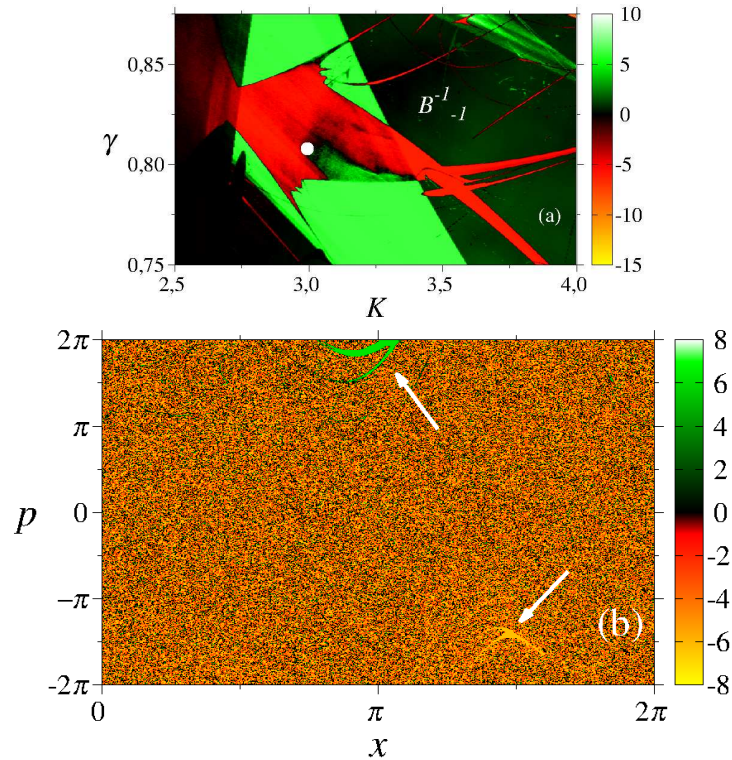


Figura 3.9: A figura 3.9 a) é uma ampliação da figura 3.6 a) e foi gerada em uma malha de  $600 \times 600$  pontos. As cores representam a corrente total  $J_T$  e a paleta é idêntica à da figura 3.6 a). Para gerá-la, foram utilizadas  $M = 10^2$  CIs e  $N = 10^6$  iterações. A figura 3.9 b) plota em cores a corrente em função da CI no espaço de fase. Para tanto, fixou-se  $K = 3$  e  $\gamma = 0,815$ , ponto marcado em branco em a). As flechas indicam as duas maiores bacias de atração dos atratores periódicos de correntes opostas, mas ampliações revelam a existência de mais bacias de atração menores associadas a atratores periódicos imersas na bacia de atração do atrator caótico.

das EIPs já mencionadas e também a notável pluralidade de diferentes EIPs que podem aparecer em menores escalas dos intervalos de parâmetros. Estruturas similares a estas são usualmente encontradas numericamente no EP de sistemas dinâmicos não-lineares que apresentam caos [43, 44, 46–50, 90–92], e sua existência tem sido comprovada experimentalmente [52, 53]. A mais conhecida delas é o chamado “camarão” [43], EIP  $D_L$  deste trabalho, mas as EIPs  $B_L$  e  $B_L^{-1}$  também são muito comuns, sendo chamadas respectivamente por “singularidade cuspidal” [93] e “singularidade não-cuspidal” [93]. As EIPs são formadas por padrões de bifurcação no EP, e uma definição auxiliar para elas será dada na subseção 3.3.2. A figura 3.6 a) indica que as EIPs, em muitos casos, distribuem-se em direções preferenciais no EP. Uma dessas direções está representada por uma linha branca descontínua na figura 3.10 a), ao longo da qual a corrente total negativa varia em módulo de  $2\pi$  à medida em que se troca de EIP na série. De fato, como se pode observar pela figura 3.6 a), o módulo da corrente sempre varia em  $L_x = 2\pi$  ao longo das direções preferenciais. Essas direções preferenciais fornecem rotas para a variação controlada da

corrente no EP, o que pode apresentar algumas aplicações dependendo do dispositivo físico que constitui a catraca.

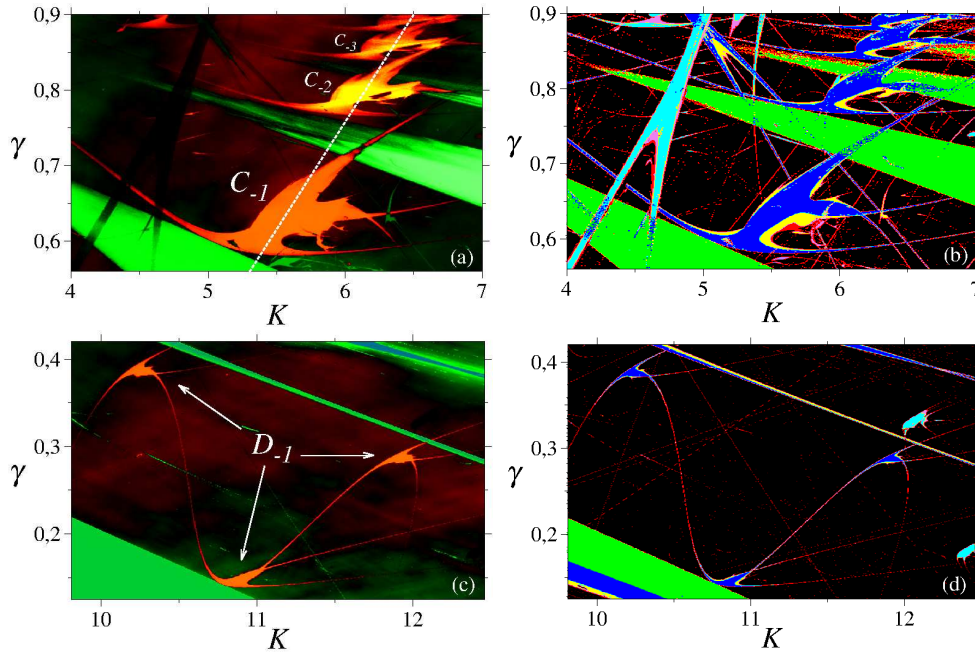


Figura 3.10: As figuras 3.10 a) e b), bem como 3.10 c) e d) representam respectivamente ampliações de duas regiões do EP da figura 3.6 a), e foram geradas em uma malha de  $600 \times 600$  pontos. Em a) e c) as cores representam a corrente total  $J_T$ , enquanto em b) e d) o período  $q$  é representado em cores. As paletas de cores são idênticas às das figuras 3.6 a) e 3.6 b). Em a) e c) foram utilizadas  $M = 10^3$  CIs e  $N = 10^4$  iterações, já em b) e d) uma CI e  $N = 10^6$  iterações. A linha branca descontínua na figura 3.10 a) representa uma direção preferencial ao longo da qual EIPs de mesma morfologia distribuem-se. A diferença entre os módulos das correntes de duas EIPs contíguas é de  $2\pi$ . A figura 3.10 a) ainda apresenta um ponto branco dentro da EIP  $C_{-1}$ , este é o local do EP onde os atratores das figuras 3.11 a) e c) foram gerados.

Uma representação qualitativa da dinâmica que ocorre nas EIPs e na região  $A$  pode ser vista na figura 3.11. As figuras 3.11 a) e c) correspondem ao mesmo atrator periódico ( $q = 4$ ,  $J_o = J_T = -2\pi$ ) obtido ao se ajustar os parâmetros  $K = 5, 7$  e  $\gamma = 0, 625$ , ponto pertencente à EIP  $C_{-1}$  (veja figura 3.10 b)). Em a) foram plotadas 12 iterações (a órbita repete-se 3 vezes) e em c) foi plotada a variável  $x$  em  $\text{mod } 2\pi$ . Nas figuras 3.11 b) e d) pode-se observar o mesmo atrator caótico ( $J_o = J_T \approx -0,96$ ) obtido ao se ajustar os parâmetros  $K = 14$  e  $\gamma = 0, 125$ , ponto pertencente à região  $A$  (veja figura 3.6 a)). A diferença entre b) e d) é que em d) plotou-se a coordenada  $x \text{ mod } 12\pi$ . Note que o atrator caótico inteiro ocupa seis células ( $[0, 2\pi]$ ) do potencial e por este motivo utilizou-se  $\text{mod } 12\pi$  na variável  $x$ . Observe também que ambos os atratores da figura 3.11 são assimétricos em  $p$ , o que permite que tenham  $J_o \neq 0$ .

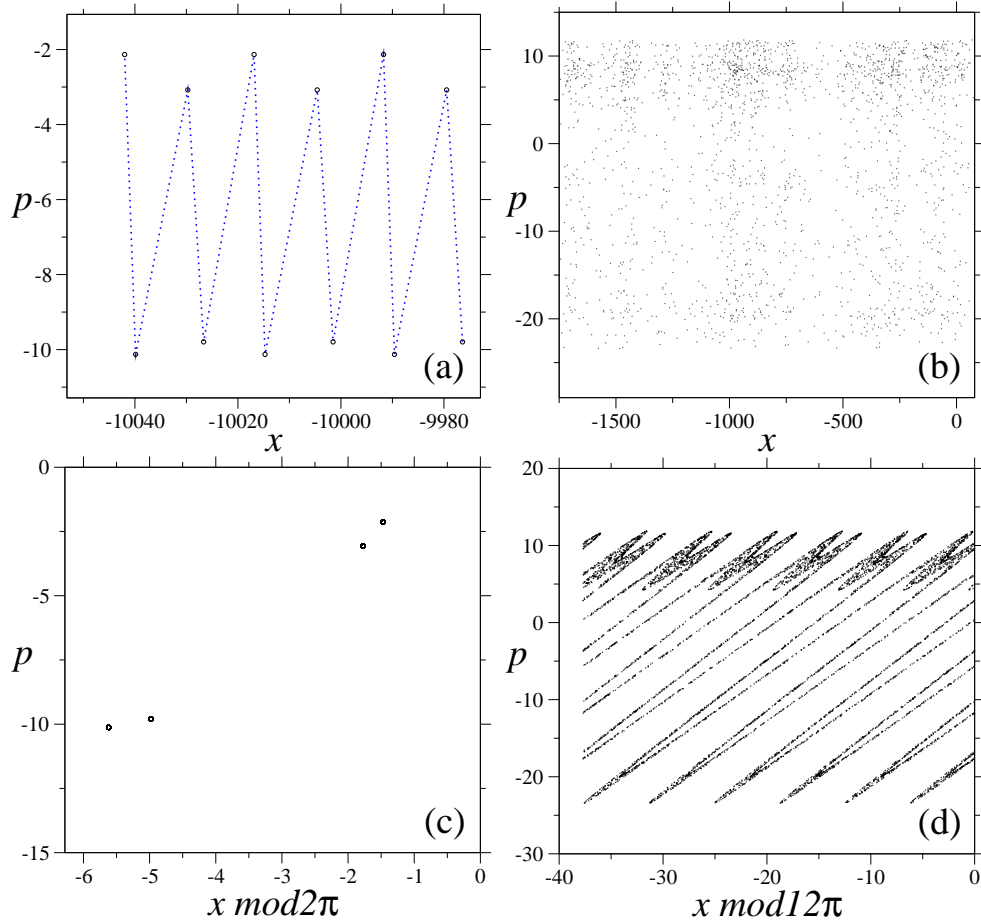


Figura 3.11: Todos os atratores foram gerados com a CI  $(x, p) = (1; 1)$ ,  $a = 0,5$  e  $\phi = \pi/2$ . Em a) e c)  $K = 5,7$  e  $\gamma = 0,625$ , em b) e d)  $K = 14,0$  e  $\gamma = 0,125$  (ponto marcado em branco na figura 3.6 a)). Na figura 3.11 a) estão representadas as últimas 12 iterações de uma série de  $2 \times 10^3$ , em b) série de  $2 \times 10^3$  iterações, em c) e d) os mesmos pontos representados respectivamente em a) e b) estão agora plotados em (c))  $x \bmod 2\pi$  e em (d))  $x \bmod 12\pi$ .

### 3.3.2 Definição das principais estruturas isoperiódicas

Até então, uma definição muito superficial das EIPs havia sido dada, baseada no reconhecimento intuitivo da morfologia de regiões periódicas de corrente constante. Esta noção deve ser elevada a uma definição mais precisa, o que será feito nesta subseção.

Regiões isoperiódicas do EP de sistemas diversos vêm sendo reportadas há muito tempo na literatura, como pode ser verificado nos trabalhos [43–53]. Embora não exista um consenso acerca de sua definição, alguns autores tentaram defini-las [92, 94], e nesta dissertação sua definição basear-se-á fortemente nesses trabalhos. Basicamente, uma EIP é formada por um padrão bifurcacional no EP, e diferentes padrões darão origem a diferentes EIPs. No que se refere a mapas, dois tipos de bifurcação definem as EIPs, a bifurcação sela-nó e a bifurcação por dobramento de período. A maneira como as curvas onde há

bifurcação dispõem-se no EP (por exemplo, as curvas obtidas na seção 3.2.3) definirá esse padrão utilizado para identificar uma EIP de determinado tipo. É importante observar que bifurcações sela-nó darão origem ao menor período da estrutura (e também a algumas das bordas), referido neste trabalho simplesmente como “período principal da EIP”. Já as bifurcações por dobramento de período suceder-se-ão até atingir outras bordas da EIP (aquelas não formadas por bifurcações do tipo sela-nó). De fato, ainda há um terceiro tipo de fenômeno que dá origem a bordas nas EIPs no EP, a crise no atrator caótico (veja a figura 3.6), que porém não é considerada para fins de definição. EIPs de mesmo tipo podem ter períodos principais diferentes, a única característica que importa para a sua definição são os cruzamentos de curvas de bifurcação do período principal. Como neste trabalho foi identificado que as EIPs  $B_L$ ,  $B_L^{-1}$  e  $D_L$  são as mais comuns nos diferentes EPs, estas três serão definidas aqui.

A EIP  $B_L$  é formada por duas curvas de bifurcação tipo sela-nó e duas do tipo dobramento de período. Enquanto as curvas do tipo sela-nó apenas se encontram, as curvas do tipo dobramento de período cruzam-se. Uma representação esquemática desta definição é apresentada na figura 3.12 a), onde em preto estão representadas as curvas de bifurcação sela-nó e em vermelho as curvas de bifurcação por dobramento de período. Os pontos  $\alpha$  e  $\beta$  representam respectivamente o encontro das curvas do tipo sela-nó e o cruzamento das curvas do tipo dobramento de período. Vale a pena lembrar que essas curvas referem-se ao período principal da EIP, sendo que no sentido indicado pelas flechas em azul sucede-se uma cascata de dobramento de período que levará em último caso ao comportamento caótico, o que define uma das bordas da EIP.

A EIP  $B_L^{-1}$  é formada por duas curvas de bifurcação tipo sela-nó e uma do tipo dobramento de período. Assim como no caso da  $B_L$ , as curvas de bifurcação do tipo sela-nó encontram-se no ponto  $\alpha$ , mas não se cruzam. Entretanto, há cruzamento entre as curvas de dobramento de período e bifurcação sela-nó nos pontos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , e a curva do tipo dobramento de período intercepta a si própria no ponto  $\beta$ . Uma representação esquemática dessa definição pode ser visualizada na figura 3.12 b) onde, novamente, ocorre no sentido indicado pelas flechas em azul uma cascata de dobramento de período que levará ao comportamento caótico.

Por fim, a EIP  $D_L$  é formada por três curvas de bifurcação tipo sela-nó e duas do tipo dobramento de período. Duas das curvas de bifurcação do tipo sela-nó encontram-se, mas não se cruzam, todavia, as curvas do tipo dobramento de período cruzam-se. Uma representação esquemática dessa definição pode ser visualizada na figura 3.12 c), onde os pontos  $\alpha$  e  $\beta$  representam respectivamente o encontro das curvas do tipo sela-nó e o

cruzamento das curvas do tipo dobramento de período. Já os pontos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  marcam o cruzamento entre as curvas de dobramento de período e bifurcação sela-nó. Novamente, ocorre no sentido indicado pelas flechas em azul uma cascata de dobramento de período que levará ao comportamento caótico.

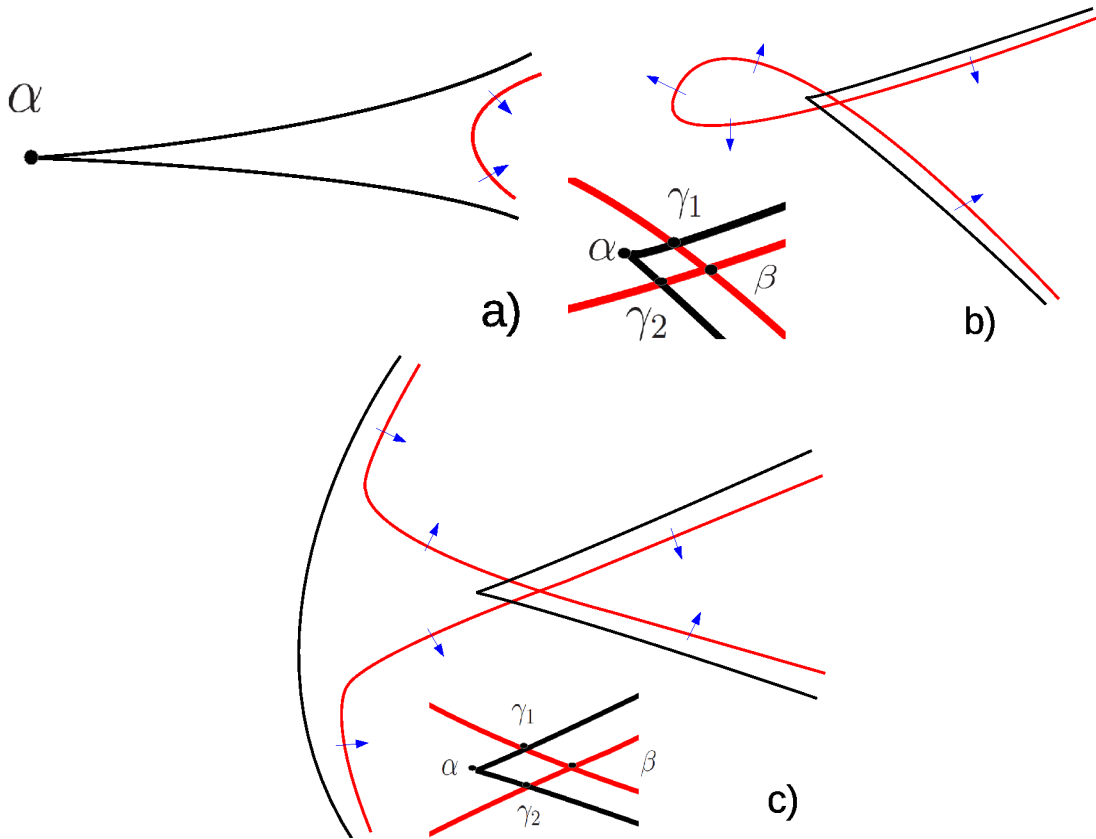


Figura 3.12: Representação esquemática das curvas de bifurcação do período principal das EIPs que as definem. Como estas estruturas existem no EP formado por dois parâmetros quaisquer, está subentendido que na direção vertical varia-se um aprâmetro genérico e na horizontal outro parâmetro, por exemplo  $(K, \gamma)$ . Em preto estão representadas as curvas de bifurcação do tipo sela-nó, em vermelho as curvas do tipo dobramento de período e as flechas em azul indicam as direções e os sentidos onde ocorre uma cascata de bifurcação que leva, em último caso, ao comportamento caótico. Os pontos  $\alpha$  indicam o encontro de duas curvas de bifurcação sela-nó,  $\beta$  o cruzamento de curvas de bifurcação por dobramento de período e  $\gamma$  o cruzamento ambos os tipos de curva. Em a) pode ser visualizada a EIP  $B_L$ , em b) a EIP  $B_L^{-1}$  e em c) a EIP  $D_L$ . Em b) e c) ainda estão representadas ampliações de regiões onde ocorre o encontro e cruzamento de curvas.

Em nenhum momento ocorre variação da corrente orbital que gera  $J_T$  dentro das EIPs, de maneira que EIPs conectadas, por consequência, possuem a mesma  $J_T$  (caso não haja multiestabilidade). De fato, pelo vínculo expresso pela equação 3.18,  $J_o = kL_x/q$ , onde  $q$  é o período “no tempo” e se fosse considerada uma seção de Poincaré em  $x$ , então  $k$  seria o período “no espaço”. Assim, a manutenção da corrente constante dentro da EIP é uma expressão da equivalência entre os conceitos de bifurcação no espaço e no tempo:

quando ocorre uma bifurcação sela-nó no tempo que gera uma órbita de período  $q$  também ocorre uma no espaço que gera o período  $k$ ; quando há uma bifurcação por dobramento de período no tempo  $q \rightarrow 2q$  há também uma bifurcação no espaço por dobramento de período  $k \rightarrow 2k$ .

Por fim, em várias regiões do EP é possível identificar direções preferenciais que constituem curvas no EP ao longo das quais EIPs de mesmo tipo distribuem-se, mantendo o seu período  $q$  e variando  $J_o$  em unidades de  $L_x$  a cada troca entre EIPs contíguas na série. De fato, essas sequencias de aumento de corrente podem ser consideradas regras de adição de período entre estruturas (considerando a seção de Poincaré no espaço), como já observado nos trabalhos [50, 51].

### 3.3.3 Espaço de parâmetros $a$ versus $\gamma$

Nesta subseção, o EP  $(a, \gamma)$  foi estudado em detalhes, sendo fixados os parâmetros  $K = 6, 5$  e  $\phi = \pi/2$ . Os parâmetros variados  $a$  e  $\gamma$ , de uma maneira não rigorosa, estão relacionados respectivamente com a assimetria do impulso periódico e com a energia dissipada. O parâmetro  $a$  é sempre positivo e  $\gamma \in [0; 1]$ , encontrando o superamortecimento em  $\gamma = 0$  e o limite conservativo em  $\gamma = 1$ . Para ilustrar o significado físico do parâmetro  $a$ , a figura 3.3 apresenta o potencial que gera o impulso  $K[\sin(x) + a \sin(2x + \phi)]$  para diferentes valores de  $a$ , com os parâmetros  $K = 6, 5$  e  $\phi = \pi/2$ .

A figura 3.13 a) consiste em um EP onde se varreu todo o intervalo da dissipação  $\gamma$  com significado físico, e um intervalo representativo da assimetria  $a$ . A corrente total é representada por cores, sendo que a cor preta representa correntes aproximadamente nulas, do verde para o branco correntes incrementadamente positivas e do vermelho para o amarelo correntes incrementadamente negativas. Assim como no caso da figura 3.6 a), este EP também apresenta uma distribuição periódica de regiões de morfologia semelhante onde a corrente é destacadamente superior. Como se pode confirmar pela figura 3.13 b), onde é representado por cores o período de uma única órbita no EP, essas regiões são periódicas e constituem as EIPs já definidas na subseção 3.3.2 e estudadas na subseção 3.3.1. A nomenclatura dessas regiões segue a definição dada na subseção 3.3.1. As regiões caóticas  $E$  também podem ser encontradas no EP  $(a, \gamma)$ , como se pode checar pelas figuras 3.13 a) e c)<sup>8</sup>, onde em c) o maior expoente de Lyapunov é representado por cores sendo que as cores preta e branca indicam regiões regulares e as demais assinalam a presença de caos. Como essas regiões sempre estão vinculadas ao limite conservativo, só se espera

<sup>8</sup>Para uma explicação da origem dessas regiões veja a subseção 3.3.1 e a referência [38]

encontrá-las em EPs que envolvam  $\gamma$  ou que mantenham  $\gamma \approx 1$ . Por fim, a região caótica  $A$  (veja a subseção 3.3.1) também permeia a maior parte do EP  $(a, \gamma)$ , apresentando correntes variáveis e modestas quando comparadas às outras regiões. A figura 3.13 c) indica que não há relação entre o comportamento do maior expoente de Lyapunov nas regiões caóticas ( $A$  e  $E$ ) e os valores de  $J_T$ .

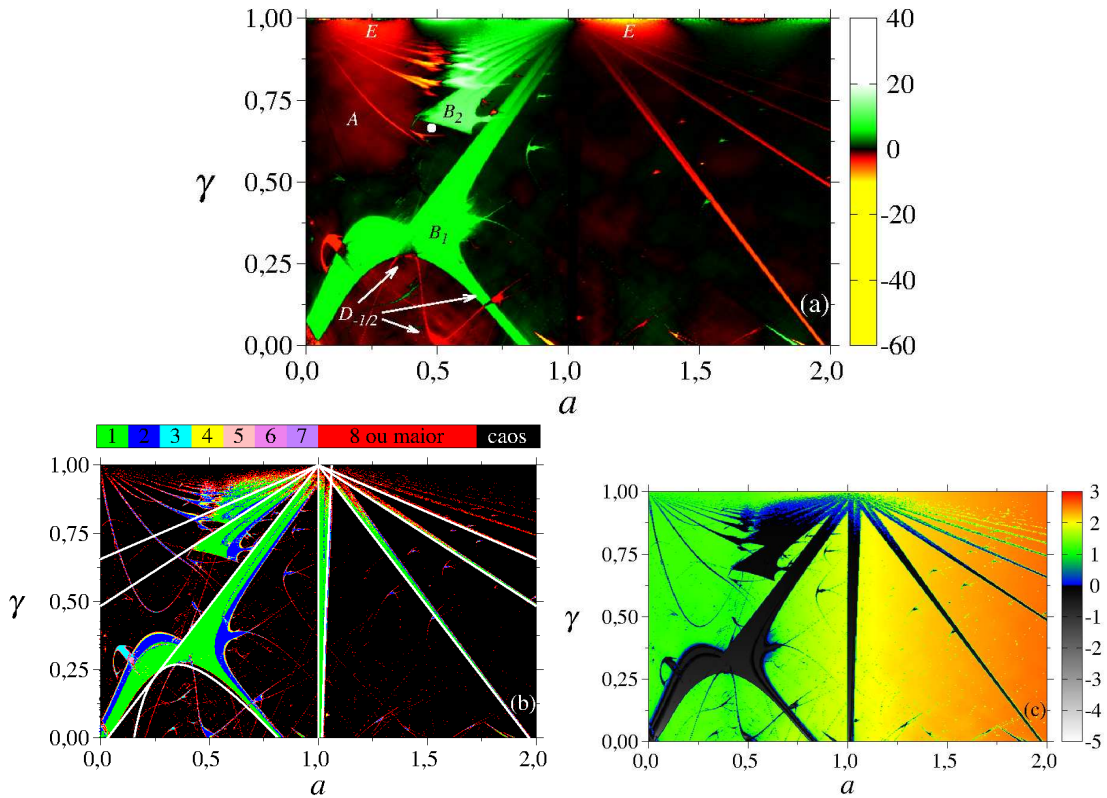


Figura 3.13: A figura 3.13 apresenta em cores algumas grandezas calculadas numericamente no EP  $(a, \gamma)$  em uma malha de  $600 \times 600$  pontos. Em a) a grandeza determinada é  $J_T$ , onde se utilizou  $10^2$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^4$  iterações. Nesta figura ainda estão indicadas por letras algumas EIPs e regiões características do EP, seguindo a nomenclatura definida na subseção 3.3.1. Em b) calculou-se o período de uma órbita  $q$ , onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações. Nesta figura ainda estão plotadas as curvas de bifurcação sela-nó (linha contínua) e por dobramento de período (linha descontínua) obtidas na subseção 3.2.3. Em c) a quantidade calculada é o maior expoente de Lyapunov, onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações.

Muitas das EIPs aparecem apenas parcialmente neste EP, como se estivessem “imersas” ou “cortadas”. Isso ocorre devido a uma coexistência entre o atrator periódico que gera as EIPs e o atrator caótico (que possui uma bacia de atração maior), de maneira que as estruturas apenas aparecem no EP de fato quando ocorre um fenômeno de crise no atrator caótico. Para ilustrar esse fenômeno, na figura 3.14 foi plotada a corrente orbital  $J_o$  em função da CI no espaço de fase, no ponto  $(a, \gamma) = (0, 5; 0, 66)$  do EP (ponto marcado



em branco na figura 3.13 a)). Como se pode observar, a bacia do atrator periódico possui apenas uma pequena parcela do espaço de fase e essa bacia ainda está fora da região em que as CIs foram escolhidas para gerar as figuras 3.13. A figura 3.13 b) também apresenta curvas que delimitam as regiões de bifurcação sela-nó no EP  $(a, \gamma)$ . Essas curvas estão representadas em linhas brancas contínuas, sendo que as retas correspondem a  $a = 1$  e  $\gamma_{-1}^{(L)}$ , equação 3.45, e a curva restante corresponde a  $\gamma_2^{(1)}$  da equação 3.46. Nas retas, escolhendo-se  $L = 0$ , obtém-se  $a = 1$ ;  $L = 1, 2, \dots$  crescentemente, obtém-se as retas do lado esquerdo de  $a = 1$  cada vez mais próximo ao limite conservativo;  $L = -1, -2, \dots$  decrescentemente, obtém-se as retas do lado direito também se aproximando do limite conservativo. Novamente, situações em que as bordas analíticas não coincidem com as bordas numéricas das estruturas correspondem a uma situação de coexistência entre o atrator periódico que gera a EIP e o atrator caótico. Em linha branca descontínua, na EIP referente à reta  $a = 1$ , ainda aparece a região do EP correspondente a uma bifurcação por dobramento de período, curva  $\gamma_{q=1 \rightarrow 2}^{(0)}$  da equação 3.47. Observe ainda que nesta EIP a corrente é nula independentemente do período, onde todas as bifurcações dão origem a atratores periódicos simétricos em relação à  $p = 0$ .

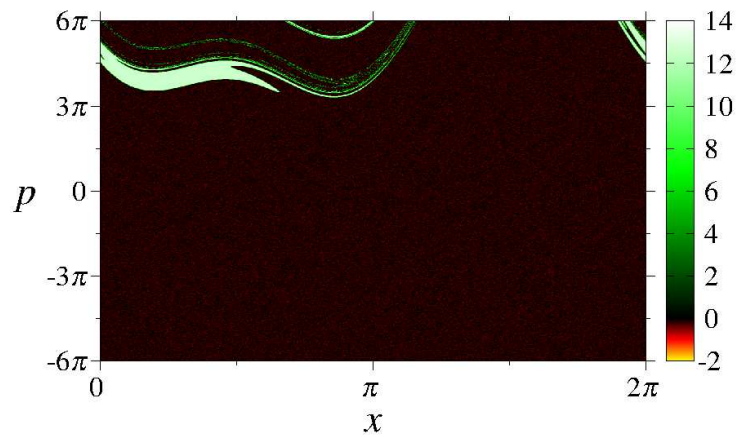


Figura 3.14: A figura 3.14 apresenta em cores  $J_o$  em função da CI no espaço de fase, onde se fixou os parâmetros  $K = 6, 5$ ,  $a = 0, 5$ ,  $\phi = \pi/2$  e  $\gamma = 0, 66$  (ponto marcado em branco na figura 3.13 a)). Para gerar esta figura, utilizou-se uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos,  $N = 10^4$  iterações, descartando um transiente de  $10^3$  iterações. Permeando o espaço de fase, com corrente flutuante, aparece a bacia de atração do atrator caótico, enquanto a bacia do atrator periódico que gera a EIP  $B_2$  aparece com uma corrente constante em verde claro.

Neste EP também é possível identificar direções preferenciais ao longo das quais estruturas de igual morfologia acumulam-se, variando sua corrente  $J_T$  em múltiplos de  $L_x = 2\pi$ . Estas direções poderiam em teoria ser utilizadas para guiar um incremento controlado de corrente em dispositivos catraca. Por fim, as figuras 3.13 a), b) e c) apresentam as EIPs definidas na subseção 3.3.2 e conjecturadas como sendo genéricas em EPs de catracas

determinísticas, porém a  $B_L^{-1}$  e a  $D_L$  não são muito nitidamente observadas. Para tanto, as figuras 3.15 a) e b) apresentam respectivamente as EIPs  $B_L^{-1}$  e  $D_L$ .

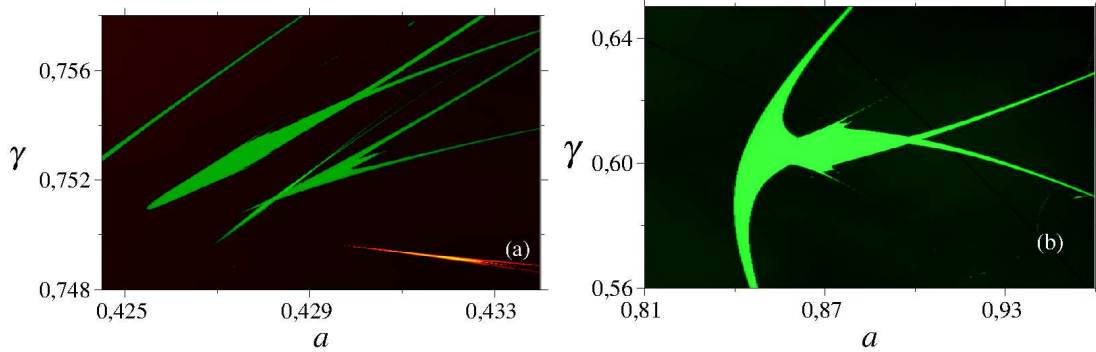


Figura 3.15: Ampliação do EP apresentado pela figura 3.13. Em a) pode-se observar as EIPs do tipo  $B_L$  e  $B_L^{-1}$ , enquanto em b) está representada uma EIP  $D_L$ . A paleta de cores é idêntica à utilizada na figura 3.13 a).

### 3.3.4 Espaço de parâmetros $\phi$ versus $\gamma$

Nesta subseção, o EP  $(\phi, \gamma)$  foi estudado em detalhes, sendo fixados os parâmetros  $K = 6,5$  e  $a = 0,5$ . Os parâmetros variados  $\phi$  e  $\gamma$ , estão relacionados respectivamente com a fase entre as duas componentes do impulso periódico e com a energia dissipada. O parâmetro  $\gamma \in [0; 1]$ , encontrando o superamortecimento em  $\gamma = 0$  e o limite conservativo em  $\gamma = 1$ . Para ilustrar o significado físico do parâmetro  $\phi$ , a figura 3.3 apresenta o potencial que gera o impulso  $K[\text{sen}(x) + a \text{sen}(2x + \phi)]$  para diferentes valores de  $a$ , com os parâmetros  $K = 6,5$  e  $a = 0,5$ .

A figura 3.16 a) consiste em um EP onde se varreu todo o intervalo da dissipação  $\gamma$  e da fase  $\phi$  com significado físico. A corrente total é representada por cores, sendo que a cor preta representa correntes aproximadamente nulas, do verde para o branco correntes incrementadamente positivas e do vermelho para o amarelo correntes incrementadamente negativas. Assim como no caso das figuras 3.6 a) e 3.13 a), este EP também apresenta uma distribuição periódica de regiões de morfologia semelhante onde a corrente é destacadamente superior. Como se pode confirmar pela figura 3.16 b), onde aparece representado por cores o período de uma única órbita no EP, essas regiões são periódicas e constituem as EIPs já definidas na subseção 3.3.2 e estudadas nas subseções 3.3.1 e 3.3.3. A nomenclatura dessas regiões segue a definição dada na subseção 3.3.1. As regiões caóticas  $E$  também podem ser encontradas no EP  $(\phi, \gamma)$ , como se pode checar pelas figuras 3.16 a) e c)<sup>9</sup>, onde em c) o maior expoente de Lyapunov é representado em cores sendo que as cores

<sup>9</sup>Para uma explicação da origem dessas regiões veja a subseção 3.3.1 e a referência [38].

preta e branca indicam regiões regulares, enquanto as demais cores assinalam a presença de caos. Como essas regiões sempre estão vinculadas ao limite conservativo, só se espera encontrá-las em EPs que envolvam  $\gamma$  ou que mantenham  $\gamma \approx 1$ . A região caótica  $A$  (veja a subseção 3.3.1) também permeia a maior parte do EP  $(\phi, \gamma)$ , apresentando correntes variáveis e modestas quando comparadas às outras regiões. Novamente, a figura 3.16 c) indica que não há relação entre o maior expoente de Lyapunov e  $J_T$ . Também é interessante observar que o EP  $(\phi, \gamma)$  é antissimétrico com relação à transformação  $\phi \rightarrow 2\pi - \phi$ , o que é decorrente do fato de o potencial que gera o impulso ser antissimétrico em relação a essa transformação (veja as figuras 3.3 c) e f)).

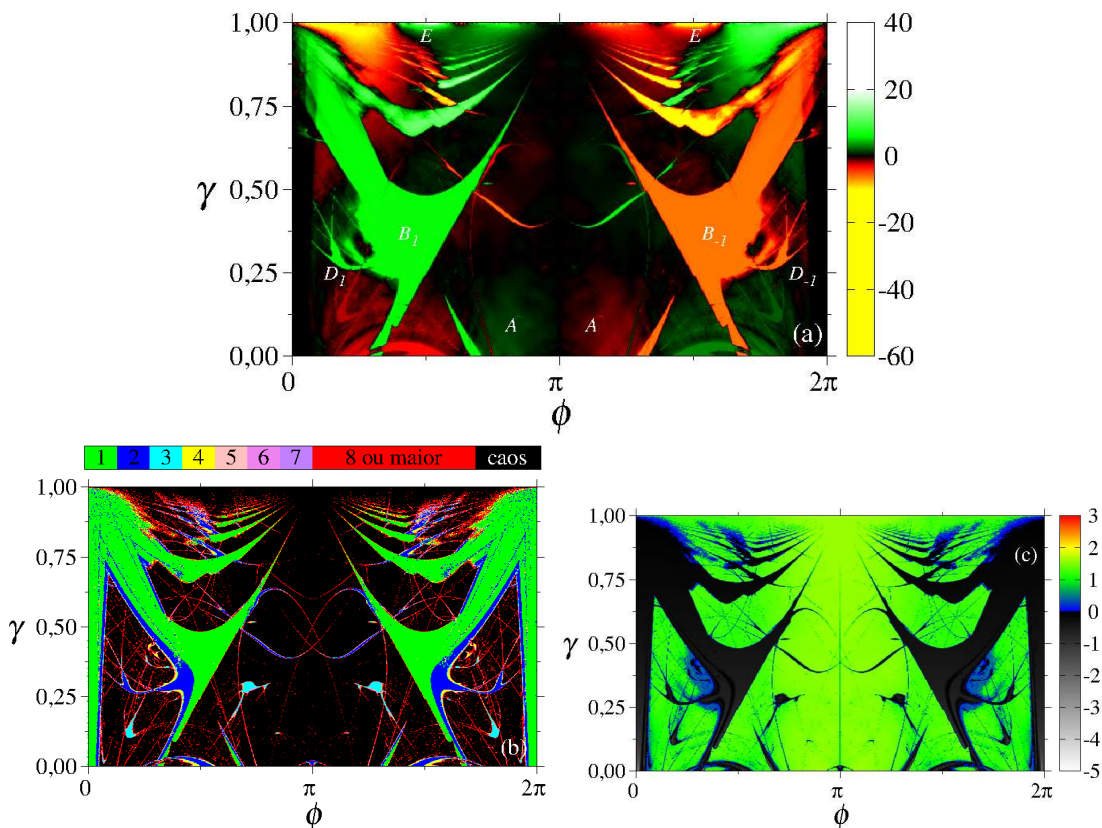


Figura 3.16: A figura 3.16 apresenta em cores algumas grandezas calculadas numericamente no EP  $(\phi, \gamma)$  em uma malha de  $600 \times 600$  pontos. Em a) a grandeza determinada é  $J_T$ , onde se utilizou  $10^2$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^4$  iterações. Nesta figura ainda estão indicadas por letras algumas EIPs e regiões características do EP, seguindo a nomenclatura definida na subseção 3.3.1. Em b) calculou-se o período de uma órbita  $q$ , onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações. Em c) a quantidade calculada é o maior expoente de Lyapunov, onde se utilizou a CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações.

Muitas das EIPs aparecem apenas parcialmente neste EP, como se estivessem “imersas” ou “cortadas”. Isso ocorre devido a uma coexistência entre o atrator periódico que gera as EIPs e o atrator caótico (que possui uma bacia de atração maior), de maneira

que as estruturas apenas aparecem no EP de fato quando ocorre um fenômeno de crise no atrator caótico. Esse fenômeno é análogo ao reportado na subseção 3.3.3 e ilustrado na figura 3.14. Para o EP  $(\phi, \gamma)$  não foi possível obter curvas analíticas para as regiões de bifurcação, ao contrário dos EPs  $(K, \gamma)$  e  $(a, \gamma)$  já estudados nas subseções 3.3.1 e 3.3.3. Neste EP também é possível identificar direções preferenciais ao longo das quais estruturas de igual morfologia acumulam-se, variando sua corrente  $J_T$  em múltiplos de  $L_x = 2\pi$ . Estas direções poderiam em teoria ser utilizadas para guiar um incremento controlado de corrente em dispositivos catraca. As figuras 3.16 a), b) e c) apresentam as EIPs definidas na subseção 3.3.2 e conjecturadas como sendo genéricas em EPs de catracas determinísticas, porém a  $B_L^{-1}$  e a  $D_L$  não são muito nitidamente observadas. Para tanto, as figuras 3.17 a) e b) apresentam respectivamente as EIPs  $B_L^{-1}$  e  $D_L$ .

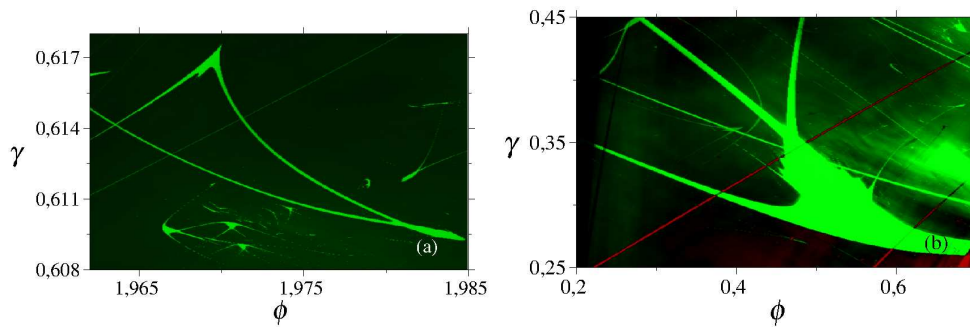


Figura 3.17: Ampliação do EP apresentado pela figura 3.16. Em a) pode-se observar as EIPs do tipo  $B_L$  e  $B_L^{-1}$ , enquanto em b) está representada uma EIP  $D_L$ . A paleta de cores é idêntica à utilizada na figura 3.16 a).

### 3.3.5 Espaços de parâmetros com dissipação fixa

Nesta subseção, serão apresentados os resultados numéricos obtidos para os EPs que não envolvem a dissipação  $\gamma$ , a mencionar  $(K, a)$ ,  $(K, \phi)$  e  $(a, \phi)$ . De fato, a dissipação possui um papel diferenciado já que EIPs são objetos característicos do EP de sistemas dissipativos. Todavia, como será visto na sequência, não se faz necessário variar a dissipação para se obter as EIPs. De fato, isso não é tão surpreendente tendo em vista que as curvas de bifurcação determinadas na subseção 3.2.3 existem no EP  $(K, a)$  e também não há nenhum empecilho fundamental, senão dificuldade matemática em determinar as curvas, para a existência das regiões de bifurcação que definem as EIPs nos EPs que envolvem o parâmetro  $\phi$ . Considera-se aqui também que já tenham sido apresentadas informações suficientes sobre a regularidade e a periodicidade das diferentes regiões do EP, de maneira que, deste ponto em diante, esta dissertação não se preocupará mais em apresentar cálculos do maior expoente de Lyapunov e de  $q$  nos espaços de parâmetros.

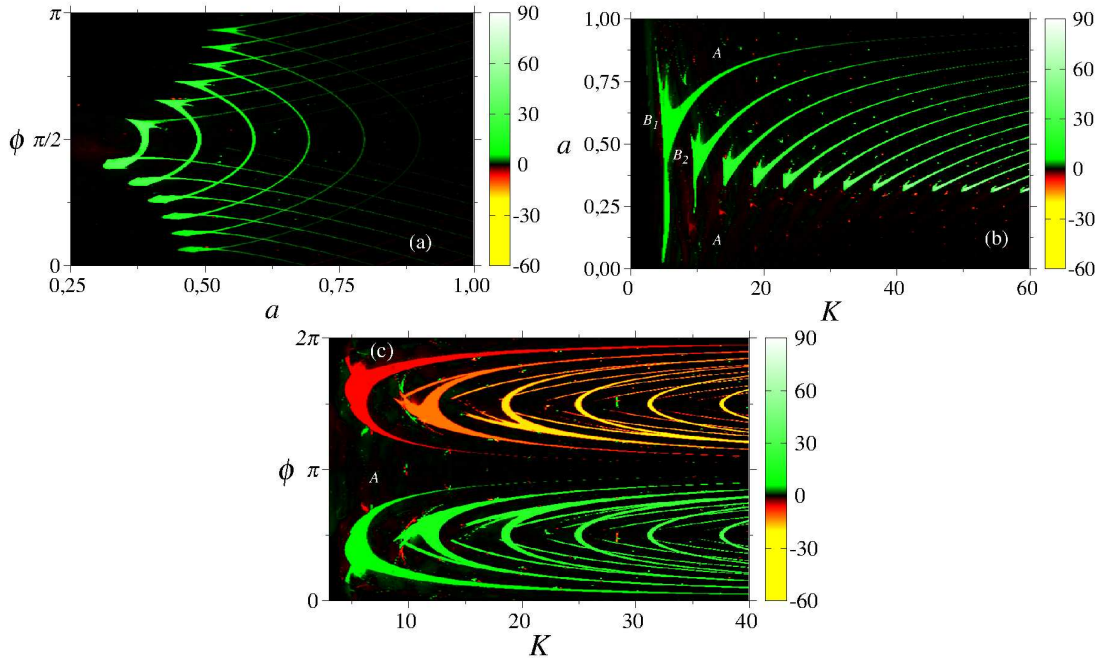


Figura 3.18: A figura 3.18 apresenta em cores a corrente  $J_T$  calculada para três EPs diferentes em uma malha de  $480 \times 480$  pontos, onde se utilizou 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^4$  iterações. Em a) aparece o EP  $(a, \phi)$ , onde  $K = 30,5$  e  $\gamma = 0,5$ . Em b) é representado o EP  $(K, a)$ , em que  $\phi = \pi/2$  e  $\gamma = 0,5$ . Em c) observa-se o EP  $(K, \phi)$ , com  $a = 0,5$  e  $\gamma = 0,5$ .

A figura 3.18 apresenta a corrente total em cores, sendo que a cor preta representa correntes aproximadamente nulas, do verde para o branco correntes incrementadamente positivas e do vermelho para o amarelo correntes incrementadamente negativas. Em a) é possível obter uma visão geral do EP  $(a, \phi)$ , em b) de  $(K, a)$  e em c) de  $(K, \phi)$ . Em todos os EPs podem ser identificadas EIPs distribuindo-se ao longo de direções preferenciais, onde a corrente varia de  $L_x = 2\pi$  a cada EIP da série. Ao longo de  $K \rightarrow \infty$  há divergência da corrente  $J_T$  nas EIPs, situação diversa da encontrada quando se diverge o parâmetro  $a$ . De fato, para o EP da figura 3.18 a), há diminuição do módulo da corrente a medida que se aumenta o valor de  $a$ . É interessante observar que na figura 3.18 a) há uma série finita de estruturas  $B_L$  e  $B_L^{-1}$ , cujo menor valor de corrente é  $J_T = 2\pi$  e o maior é determinado pelo valor de  $K$  fixo. A região  $A$  também é facilmente identificada permeando todos os EPs, no entanto não são observadas regiões  $E$ . O motivo é claro: a região  $E$  está vinculada ao limite conservativo onde  $\gamma \rightarrow 1$ , ao passo que em todos os EPs da figura 3.18  $\gamma = 0,5$ . Por fim, todos os EPs apresentam as EIPs definidas na subseção 3.3.2 e conjecturadas genéricas, como se pode observar nitidamente na figura 3.19.

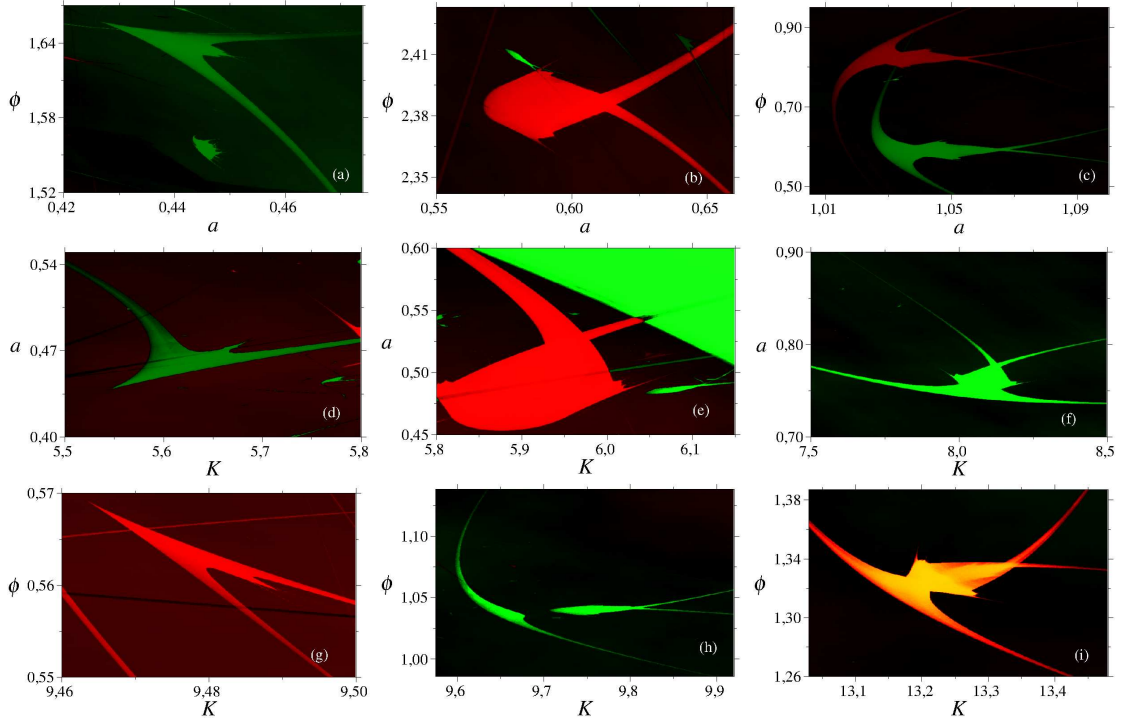


Figura 3.19: A figura 3.19 apresenta em cores a corrente  $J_T$  calculada para três EPs diferentes em uma malha de  $480 \times 480$  pontos, onde se utilizou 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^4$  iterações. Em diferentes linhas estão representados diferentes EPs, enquanto que em diferentes colunas aparecem diferentes EIPs. Na primeira linha, pode-se observar o EP  $(a, \phi)$  com  $K = 6,5$  e  $\gamma = 0,5$ ; na segunda,  $(K, a)$  com  $\phi = \pi/2$  e  $\gamma = 0,5$ ; e na terceira,  $(K, \phi)$  onde  $a = 0,5$  e  $\gamma = 0,5$ . Na primeira coluna, pode-se observar EIPs do tipo  $B_L$ ; na segunda,  $B_L^{-1}$ ; e na terceira,  $D_L$ . A paleta de cores foi omitida mas é idêntica à da figura 3.18.

### 3.3.6 Eficiência nas estruturas isoperiódicas

Na subseção 3.2.2 chegou-se a duas conclusões importantes acerca da eficiência energética  $\eta$  do transporte de partículas pelo mapa 3.14: no que se refere aos parâmetros, a eficiência só depende da dissipação  $\gamma$ ; mantendo  $\gamma$  fixo, as órbitas periódicas em que  $q = 1$  possuem eficiência máxima (para dado  $\gamma$ ). Considerando ainda a equação 3.39, percebe-se que a eficiência depende do variância  $\sigma_p^2$  do momentum, ou seja, espera-se que trajetórias caóticas tendam a ser menos eficientes que órbitas periódicas. No EP, isso implica que, para certas escalas de  $\gamma$ , EIPs produzirão um transporte mais eficiente que as regiões  $A$ . Para ilustrar essa questão, na figura 3.20 foi plotada em cores a eficiência  $\eta$  para o EP  $(K, \gamma)$ , idêntico ao da figura 3.6. A cor preta indica eficiência nula, da cor vermelha à branca, passando pela amarela, a eficiência aumenta de seu mínimo  $\eta = 0$  a seu máximo (previsto na subseção 3.2.2)  $\eta = 0,5$ . Claramente a eficiência depende muito fortemente do parâmetro  $\gamma$ , sendo que no superamortecimento  $\eta = 0$  e regiões próximas ao limite conservativo possuem eficiência alta, próxima a 0,5. Esta figura também parece indicar

que, localmente em  $\gamma$ , as EIPs representam regiões de alta eficiência. Para confirmar este fato, as figuras 3.21 a), b) e c) reproduzem as EIPs conjecturadas como genéricas e definidas na subseção 3.3.2, com o diagrama de cores representando a eficiência  $\eta$ . Visivelmente, em EPs que dependam ou não de  $\gamma$ , para períodos principais baixos (que representam as maiores EIPs), a eficiência é muito superior na região interna às EIPs do que em seus arredores, chegando muito próximo à eficiência máxima em vários casos.

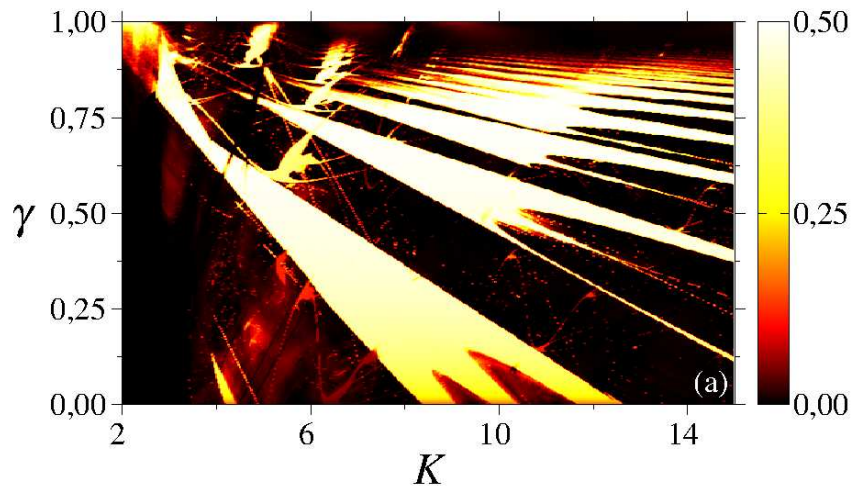


Figura 3.20: A figura 3.20 apresenta em cores a eficiência  $\eta$  calculada no EP  $(K, \gamma)$ , para os mesmos intervalos de parâmetros que os da figura 3.6, em uma malha de  $480 \times 480$  pontos. Nesta figura, utilizou-se 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^5$  iterações.

Poder-se-ia imaginar que regiões internas às EIPs onde há bifurcação por dobramento de período iriam diminuir sensivelmente a eficiência, mas isso não ocorre como se pôde observar nas figuras 3.20 e 3.21. De fato, embora haja a bifurcação, os pontos periódicos oriundos não se afastam muito em  $p$ , assim mantendo a variância  $\sigma_p^2$  próxima à da órbita que era estável antes do fenômeno de bifurcação.

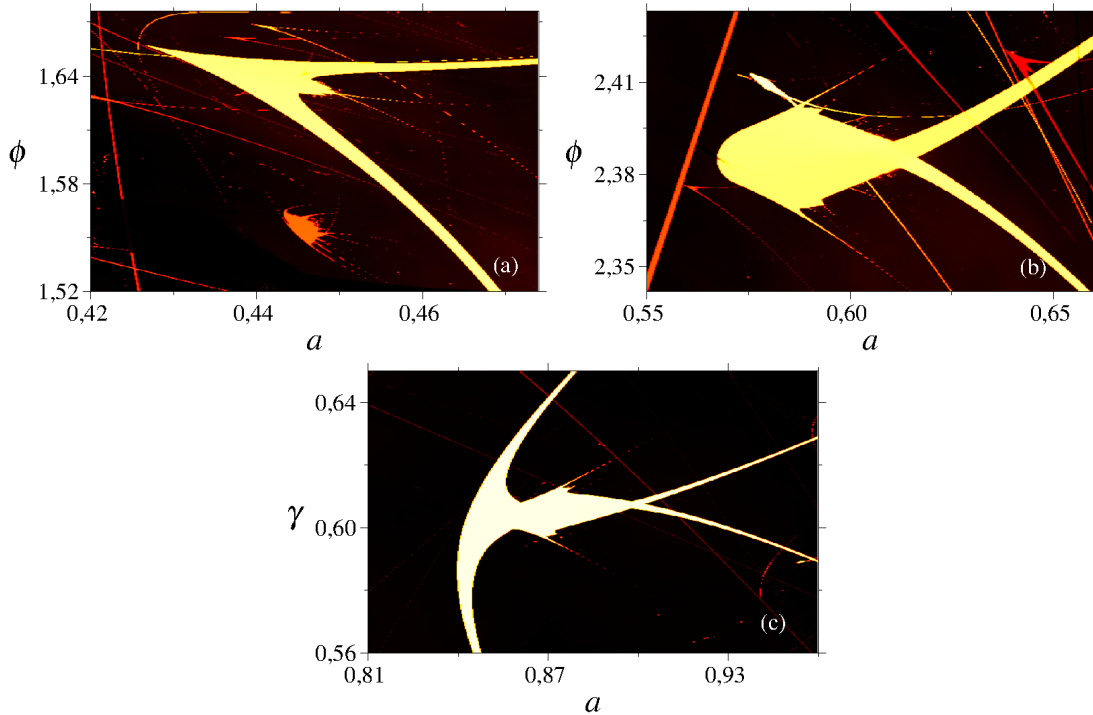


Figura 3.21: A figura 3.21 apresenta em cores a eficiência  $\eta$  calculada em dois EPs diferentes em uma malha de  $480 \times 480$  pontos. Nesta figura, utilizou-se 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^5$  iterações após um transiente de  $10^5$  iterações. Em a) e b) estão representadas respectivamente as EIPs  $B_L$  e  $B_L^{-1}$  no EP  $(a, \phi)$ , já em c) a EIP  $D_L$  no EP  $(a, \gamma)$ . A paleta de cores foi omitida mas é idêntica à da figura 3.20.

### 3.4 Modelamento de catraca determinística por equações diferenciais

Um sistema mais realístico de catraca clássica envolveria equações diferenciais, já que sistemas clássicos são, em princípio, contínuos. Um modelo bastante estudado é a “catraca de balanço”<sup>10</sup>. Neste sistema, as partes espacial e temporal da força não dissipativa são separadas, de maneira que pode ser interpretada como uma força oriunda de um potencial somada a uma força externa que tira o sistema do equilíbrio. As equações diferenciais que modelam este sistema são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\tilde{\lambda}v + \tilde{K}F(x) + \tilde{K}_t \text{sent}, \\ \dot{x} &= v, \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde todas as quantidades demarcadas com o til estão divididas pela massa da partícula ( $\tilde{\lambda} = \lambda/m$  etc.). O parâmetro  $K$  modula a altura do potencial,  $K_t$  modula a intensidade

<sup>10</sup>O nome foi introduzido originalmente em inglês como “rocking ratchet” [95].



da força externa e  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade do meio. Note que  $F(x)$  deve ser uma força oriunda de um potencial periódico de período  $L_x$ , e portanto também é periódica em  $L_x$ ; a força externa é periódica em  $\tau = 2\pi$ . Observe ainda que uma dada órbita só pode repetir-se após ter percorrido  $\Delta x = kL_x$  em um tempo  $\Delta t = q\tau = q2\pi$ , onde  $k$  e  $q \in \mathbb{Z}$ , de maneira que os valores de corrente permitidos para órbitas periódicas são dados por

$$J_o = \frac{kL_x}{q2\pi}. \quad (3.50)$$

Novamente, estabelecendo-se seções de Poincaré no espaço e no tempo,  $q$  pode ser interpretado como período temporal do mapa e  $k$  como período espacial, a exemplo do que foi desenvolvido na subseção 3.3.2. Ainda note que, como há uma força dissipativa proporcional à velocidade, a partícula assintoticamente deve assumir velocidades menores que um dado valor. De fato, fazendo  $\dot{v} = 0$  obtém-se

$$|v_{max}| = \frac{\widetilde{K}_t + \widetilde{K} \max F(x)}{\widetilde{\lambda}}. \quad (3.51)$$

Mais alguns resultados interessantes podem ser obtidos analiticamente acerca da dinâmica desta catraca, e serão desenvolvidos nas subseções que se seguem.

### 3.4.1 Geração de momentum

Integrando-se no tempo a primeira das equações 3.49 obtém-se

$$\Delta v = -\widetilde{\lambda}\Delta x + \widetilde{K}_t \int_0^{\Delta t} \text{sent} dt + \widetilde{K} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dt. \quad (3.52)$$

O termo do lado esquerdo da igualdade representa a variação de velocidade durante o tempo  $\Delta t$ . Note que mesmo fazendo  $\Delta t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta v$  não pode divergir, pois a equação 3.51 assegura um limite superior para  $v$ . É claro que a integral que envolve o termo  $\text{sent}$  também é finita para qualquer  $\Delta t$ , porém, para órbitas de corrente não nula, o deslocamento  $\Delta x$  deve divergir com a divergência de  $\Delta t$ . Assim, dividindo a equação acima por  $\Delta t$ , e fazendo  $\Delta t \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = J_o = \frac{\widetilde{K}}{\widetilde{\lambda}} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(x(t)) dt \right], \quad (3.53)$$

ou seja, a força oriunda do potencial é responsável por conferir o movimento direcionado à partícula (pois a integral que envolve  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é a única que pode divergir). Pode-se questionar então qual é o papel da força externa nesse processo. A força externa deve participar no

modelamento da solução  $x(t)$ , fazendo com que a partícula gaste mais tempo em certas partes do potencial e menos em outras, e isso gera o movimento direcionado. Na próxima subseção, ainda será visto que a força externa também fornece a energia necessária para que a catraca funcione.

### 3.4.2 Geração de energia

Integrando-se a primeira das equações 3.49 em relação ao espaço, obtém-se

$$\Delta \widetilde{E}_{cin} = -\widetilde{\lambda} \int_0^{\Delta x} v(t) dx + \widetilde{K}_t \int_0^{\Delta x} \text{sent} dx + \widetilde{K} \int_0^{\Delta x} F(x(t)) dx, \quad (3.54)$$

onde  $E_{cin}$  é a energia cinética da partícula. Note que, a princípio, não se pode considerar  $v(t)$ ,  $\text{sent}$  e  $F(x(t))$  como funções de  $x$ , pois para um mesmo  $x$  pode haver mais de um valor dessas funções, caso a partícula varie o sinal de sua velocidade, ou seja, caso ela vá e volte. Todavia, pode-se escrever  $dx = v(t)dt$  e então a integração faz-se possível

$$\Delta \widetilde{E}_{cin} = -\widetilde{\lambda} \int_0^{\Delta x} v(t)^2 dt + \widetilde{K}_t \int_0^{\Delta x} \text{sent} v(t) dt + \widetilde{K} \int_0^{\Delta x} F(x(t)) v(t) dt. \quad (3.55)$$

Fazendo-se novamente  $\Delta t \rightarrow \infty$ , caso não haja divergência nas CIs, a equação 3.51 assegura que  $\Delta \widetilde{E}_{cin}$  não diverge. Além disso, como o potencial é periódico, não pode fornecer uma quantidade divergente de energia. As outras quantidades podem divergir, então

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\Delta t} v(t)^2 dt \right] = \frac{\widetilde{K}_t}{\widetilde{\lambda}} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\Delta t} \text{sent} v(t) dt \right], \quad (3.56)$$

dividindo por  $\Delta t$ , obtém-se finalmente

$$\langle \widetilde{E}_{cin} \rangle_t = \frac{\widetilde{K}_t}{2\widetilde{\lambda}} \langle \text{sent} v(t) \rangle_t, \quad (3.57)$$

onde  $\langle \dots \rangle_t$  indica a média no tempo. Assim, a força externa também possui a função de fornecer energia à catraca.

### 3.5 Resultados numéricos para uma catraca determinística modelada por equações diferenciais

Nesta seção, os resultados numéricos obtidos para o sistema contínuo descrito na seção 3.4 serão apresentados. Para tanto, faz-se necessário definir a força oriunda do potencial  $F(x)$ , que foi escolhida tal que

$$F(x) = \text{sen}x + a \text{sen}(2x + \phi), \quad (3.58)$$

onde  $a$  é o parâmetro de assimetria e  $\phi$  é a fase do potencial. Como já analisado anteriormente (veja figura 3.3), esta força é assimétrica no espaço, característica fundamental de uma força oriunda de um potencial em um sistema do tipo catraca. Além disso, no que se refere aos resultados numéricos, fez-se a massa da partícula  $m = 1$ , de maneira que o til acima dos parâmetros foi omitido. Para se recuperar os resultados com  $m \neq 1$  basta substituir  $K \rightarrow \tilde{K}$ ,  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$  e  $K_t \rightarrow \tilde{K}_t$ . No estudo desse sistema, fixou-se os parâmetros  $a = 0,7$ ,  $\phi = \pi/2$  e  $K = 5$ , tendo sido estudado o EP  $(K_t, \chi)$ , onde  $\chi = e^{-\lambda}$ .

Na figura 3.22 é plotada a corrente total  $J_T$  para um intervalo representativo dos parâmetros  $K_t$  e  $\chi$ . O parâmetro  $K_t$  representa a intensidade da força externa que continuamente retira o sistema do equilíbrio térmico, já  $\chi$  é uma “medida” da dissipação, sendo que se encontra o superamortecimento em  $\chi = 0$  e o limite conservativo em  $\chi = 1$ . Como neste EP abaixo de  $\chi = 0,5$  não se encontra regiões de corrente não nula, evitou-se o intervalo de  $[0,0;0,5]$ . Além disso, abaixo de  $K_t = 4$  também só se encontram correntes nulas e acima de  $K_t = 14$  a topologia do EP é basicamente a mesma, de maneira que estes intervalos foram igualmente excluídos. Claramente este EP apresenta as EIPs já definidas anteriormente (subseção 3.3.2) e encontradas no mapeamento já estudado. De fato, elas constituem as regiões de corrente superior no EP, e  $J_T$  é praticamente invariante dentro das EIPs. As regiões  $A$  também são facilmente identificadas, possuindo uma corrente levemente inferior, no entanto as regiões  $E$  não são observadas. O motivo da inexistência das regiões  $E$  deve-se à não ocorrência de modos aceleradores nesse sistema (limite conservativo), que constituem o tipo de dinâmica que gera estas regiões.

Muito embora haja diversos tipos de EIPs que podem ser encontrados na figura 3.22, as EIPs mais comuns definidas na subseção 3.3.2, bem como a  $C_L$ , também aparecem nesse EP. Para comprovar essa afirmação, algumas ampliações do EP da figura 3.22 foram feitas e podem ser visualizadas na figura 3.23. Nessas figuras, a paleta de cores foi omitida pois é a mesma da figura 3.22. Em a) é possível observar as EIPs  $B_L$  e  $B_L^{-1}$ , em b) a EIP  $D_L$  e

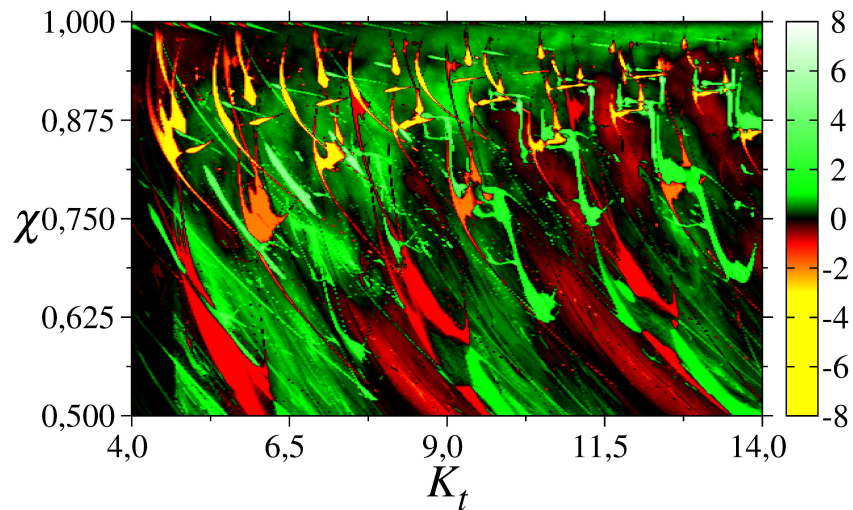


Figura 3.22: A figura 3.22 apresenta em cores os valores de  $J_T$  calculados no EP  $(K_t, \chi)$  em uma malha de  $480 \times 480$  pontos. Nesta figura, utilizou-se 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$ , um passo de 0,1 e  $N = 10^6$  passos de integração.

em c) aparece a EIP do tipo  $C_L$ . Na figura 3.23 c) a EIP  $C_L$  pode não ser tão facilmente reconhecida pelo fato de haver um cruzamento entre esta EIP e outra, de corrente positiva. Todavia, sua morfologia ainda pode ser reconhecida.

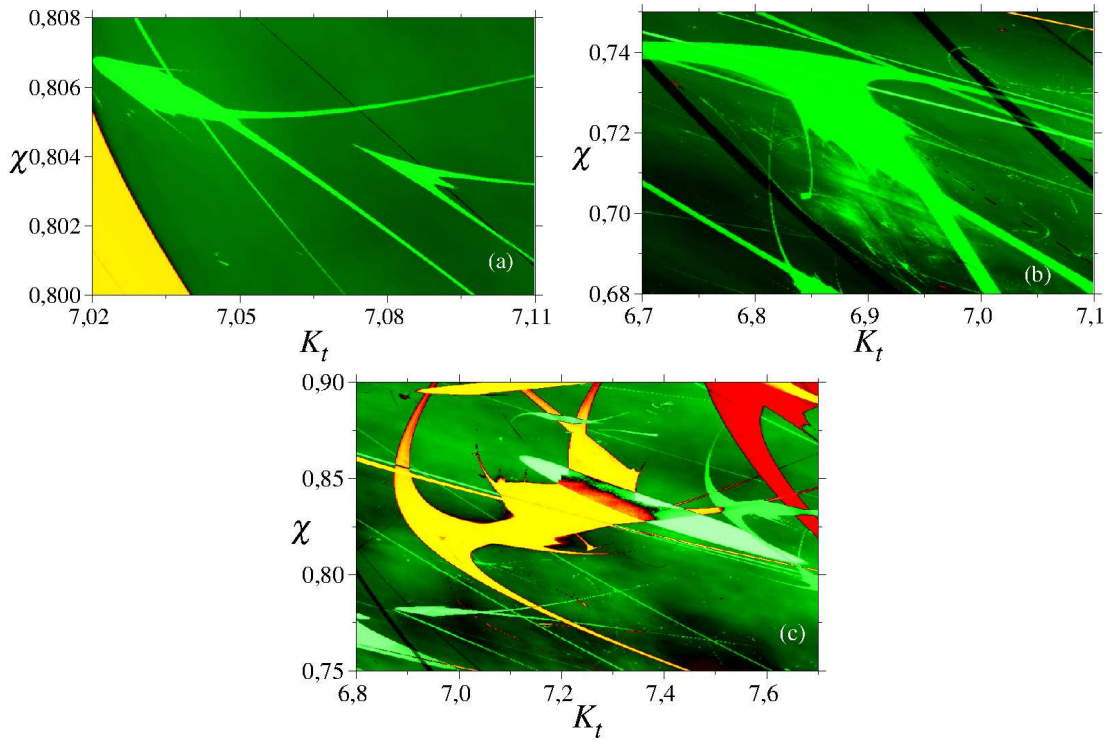


Figura 3.23: A figura 3.23 apresenta em cores os valores de  $J_T$  calculados em ampliações do EP  $(K_t, \chi)$  representado na figura 3.22, em uma malha de  $480 \times 480$  pontos. Nesta figura, utilizou-se 64 CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$ , um passo de 0,1 e  $N = 10^6$  passos de integração. Em a) são apresentadas as EIPs  $B_L$  e  $B_L^{-1}$ , em b)  $D_L$  e em c) aparece a EIP  $C_L$ . A paleta de cores foi omitida pois é idêntica à da figura 3.22.

## 3.6 Conclusões

Neste capítulo, a morfologia do EP de catracas clássicas determinísticas unidimensionais foi caracterizada, utilizando como sistemas representativos um mapeamento e um conjunto de equações diferenciais. No EP do mapa foram identificadas regiões com características próprias, que podem ser divididas de maneira geral como as EIPs, a região  $A$  e a região  $E$ . As EIPs constituem estruturas isoperiódicas formadas por padrões bifurcacionais no EP, possuem (na ausência de multiestabilidade) uma corrente total constante e superior ao de seus arredores e podem ser classificadas ainda de acordo com sua morfologia. A região  $A$  corresponde a uma dinâmica caótica de baixa eficiência e baixo valor da corrente total, que possui  $J_T$  variável em sua extensão. Todavia, são as regiões mais abundantes do EP. Por fim, a região  $E$  está também associada a um transporte caótico e pouco eficiente de partículas, com uma corrente total variável porém alta. Esta região relaciona-se com a existência de modos aceleradores no limite conservativo.

A construção desse paradigma no que se refere à topologia do EP explica praticamente todos os fenômenos observados, no que se refere à corrente, quando da variação dos

parâmetros de um dado sistema que constitui uma catraca. De fato, os platôs de corrente observados na literatura [28, 29, 35, 38, 89] correspondem a EIPs, e a variação súbita desta corrente para determinado valor de um parâmetro corresponde à borda de uma EIP. Além disso, sequências de platôs onde a corrente cresce em múltiplos de uma determinada quantidade associam-se com as direções preferenciais, curvas ao longo das quais as EIPs de mesma morfologia e corrente diversa dispõem-se no EP. Entre esses platôs, os intervalos de correntes variáveis correspondem à região  $A$ . A região  $E$  também constitui um avanço no entendimento do fenômeno descrito em [38], mostrando como esse fenômeno manifesta-se à medida em que variam os parâmetros do sistema. A identificação de um conjunto de EIPs que aparece em todos os EPs e que vêm sendo reportadas nos EPs de sistemas diversos na literatura [43–53, 92, 94] confere certa generalidade à abordagem aqui desenvolvida: se essas estruturas são gerais em sistemas dinâmicos clássicos não lineares então é possível que o paradigma aqui proposto constitua um cenário geral para o mecanismo de geração de transporte em EPs de catracas clássicas inerciais<sup>11</sup>.

Os conceitos propostos neste capítulo eventualmente podem ser utilizados para entender fenômenos de transporte direcionado na natureza, como o que ocorre no interior das células [2, 12–14]. Em aplicações tecnológicas, as direções preferenciais, as conexões entre as EIPs de mesma  $J_T$  e a determinação dos valores de  $J_o$  permitidos fornecem elementos para o controle de corrente no EP. Além disso, as EIPs apresentam-se como regiões de transporte otimizado, tanto no que se refere à eficiência energética quanto à difusão. Uma análise dos EPs também fornece a localização das regiões de multiestabilidade, onde a catraca pode ser utilizada para separar partículas de diferentes velocidades por exemplo. Como a massa das partículas deve alterar o valor de alguns dos parâmetros, o EP também pode ser utilizado como ferramenta para separação das partículas pela sua massa, o que apresenta diversas aplicações [15].

A confirmação da existência das EIPs e da região  $A$  em um modelo de fluxo para catraca estende amplamente os resultados obtidos na seção 3.3. De fato, equações diferenciais descrevem um conjunto muito maior de fenômenos e sistemas na natureza do que equações iterativas, o que amplia a aplicabilidade da descrição topológica do EP construída na seção 3.3. Deve-se levar em conta também que este modelo de catraca de balanço constitui um protótipo para a equação de Langevin (sem o termo de temperatura), e a equação de Langevin por sua vez é a descrição mais geral da interação de um sistema com um reservatório térmico utilizando conceitos de dinâmica. Pelo que já foi exposto, há evidências suficientes para se conjecturar uma generalidade do paradigma desenvolvido

---

<sup>11</sup>Que por sua vez são não lineares.

---

neste capítulo para sistemas clássicos em que o ruído térmico não constitui um fator relevante em sua dinâmica. Esta última restrição será relaxada no próximo capítulo, onde os efeitos de uma temperatura finita serão levados em conta, bem como quantificados.

## Catracas térmicas

Neste capítulo, sistemas do tipo catraca na presença de ruído térmico serão abordados. De fato, a origem da área de estudo de catracas na física deve sua origem a uma “tentativa” de se violar a segunda lei da termodinâmica (veja seção 3.1), de maneira que, embora não necessariamente inerente ao conceito de catracas, a existência de um ambiente térmico é praticamente uma constante nas aplicações na natureza. Além disso, dada a dificuldade em se desacoplar os graus de liberdade do ambiente com os do sistema de estudo, uma análise da sua dinâmica a temperaturas não nulas faz-se crucial no sentido de validar os resultados obtidos no capítulo 3, mesmo que para um intervalo térmico pequeno.

O grande objetivo deste capítulo é exatamente este: caracterizar os efeitos do ruído térmico no mecanismo de transporte determinístico descrito no capítulo 3, fornecendo assim uma maior generalização aos resultados obtidos até então.

### 4.1 Mapeamento para catracas térmicas

#### 4.1.1 Definição do mapa

Na referência [31] foi proposta uma modificação do mapeamento 3.14 que inclui um termo estocástico vinculado a uma determinada expressão do teorema de flutuação-dissipação. De fato, um mapa muito similar pode ser obtido utilizando a própria equação de Langevin, porém com um vínculo diferente entre a dissipação e o ruído. O mapa obtido



na referência [31] é

$$M_T : \begin{cases} p_{n+1} = \gamma p_n + K[\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)] + \sqrt{2(1-\gamma)k_B T \tau^2} \zeta_n, \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\langle \zeta_n \rangle = 0$  e  $\langle \zeta_{n_1} \zeta_{n_2} \rangle = \delta_{n_1, n_2}$  representa o ruído gaussiano. Este mapa será posteriormente utilizado para a obtenção de resultados numéricos no intuito de caracterizar os efeitos térmicos no EP de catracas clássicas, na seção 4.2. Nesta seção no entanto, alguns resultados analíticos interessantes serão deduzidos.

### 4.1.2 Propriedades estocásticas

O processo representado pelo mapa 4.1 é de fato um processo *markoviano*. Para demonstrar isso, inicialmente note que as equações 4.1 ligam um ponto no espaço de fase  $(x_n, p_n)$  a uma reta  $(x_{n+1}(\zeta_n), p_{n+1}(\zeta_n))$ . Note ainda que, como  $x_{n+1}$  e  $p_{n+1}$  são funções lineares de  $\zeta_n$ , e como  $\zeta_n$  possui uma probabilidade finita de assumir qualquer valor finito,  $p_{n+1}$  e  $x_{n+1}$  também possuem uma probabilidade finita de assumir qualquer valor finito, preservado o vínculo  $x_{n+1} = x_n + p_{n+1}$ . Assim, a primeira iteração do mapa conecta um ponto do espaço de fase a um local geométrico de dimensão 1. A segunda iteração do mapa é dada por

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \gamma p_{n+1}(\zeta_n) + K[\text{sen}(x_{n+1}(\zeta_n)) + a \text{sen}(2x_{n+1}(\zeta_n) + \phi)] + \sqrt{2(1-\gamma)k_B T \tau^2} \zeta_{n+1}, \\ x_{n+2} &= x_{n+1}(\zeta_n) + p_{n+2}(\zeta_n, \zeta_{n+1}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

note que agora tanto  $p_{n+2}$  quanto  $x_{n+2}$  dependem linearmente de duas variáveis estocásticas independentes  $\zeta_n$  e  $\zeta_{n+1}$ <sup>1</sup>, de maneira que se faz possível ajustar  $(\zeta_n, \zeta_{n+1})$  para se obter qualquer ponto  $(x_{n+2}, p_{n+2})$  do espaço de fase a partir de uma única CI  $(x_n, p_n)$ . Em outras palavras, após duas iterações o sistema perde completamente sua memória, já que ele poderia estar em qualquer estado do espaço de fase na sua situação inicial. De fato, isto acaba por caracterizar um sistema *markoviano*, onde o passado (e.g.  $(x_n, p_n)$ ) e o futuro (e.g.  $(x_{n+2}, p_{n+2})$ ) de um sistema estão, de certa forma, desvinculados.

Seja  $P(x, p; n | x', p'; n+2)$  a densidade de probabilidade de transição de  $(x, p)$  no tempo

---

<sup>1</sup>Note que como  $\zeta$  é uma variável aleatória, não há regra determinística que permita a obtenção de  $\zeta_{n+1}$  a partir de  $\zeta_n$ . Numericamente, para se obter a variável  $\zeta$  a cada iteração  $n$  sorteia-se um número aleatório com uma probabilidade gaussiana cuja variância é unitária.

$n$  para  $(x', p')$  no tempo  $n + 2$ , claramente

$$P(x, p; n|x', p'; n + 4) = \int \int P(x, p; n|x'', p''; n + 2) \times \quad (4.3)$$

$$\times P(x'', p''; n + 2|x', p'; n + 4) dx'' dp'',$$

onde a integração é feita em todo o espaço. Note que 4.3 é equivalente à equação 2.50, que define alternativamente os processos *markovianos*. Pode-se estender esse conceito e escrever a densidade de probabilidade de transição entre uma CI  $(x, p)$  no tempo 0 e um ponto  $(x', p')$ ,  $2n$  iterações após,

$$P(x, p; 0|x', p'; 2n) = \int \dots \int P(x, p; 0|x'', p''; 2) \dots P(x''', p'''; 2n - 2|x', p'; 2n) \times \quad (4.4)$$

$$\times dx'' \dots dx''' dp'' \dots dp''.$$

Agora note que a probabilidade de se obter, a partir da CI  $(x, p)$ , um estado dentro da área finita  $\int_{\Delta x} \int_{\Delta p} dx' dp'$  no tempo  $2n$  também é finita, e que a probabilidade de não se estar nessa área no tempo  $2n$  é dada por

$$1 - \int_{\Delta x} \int_{\Delta p} P(x, p; 0|x', p'; 2n) dx' dp'. \quad (4.5)$$

Pode-se então exprimir a probabilidade de que, **até** um tempo  $2n'$ , não se tenha ainda visitado a área  $\Delta x \Delta p$  do espaço de fase como

$$\prod_{i=1}^{n'} \left( 1 - \int_{\Delta x} \int_{\Delta p} P(x, p; 0|x', p'; 2i) dx' dp' \right), \quad (4.6)$$

onde  $\prod$  indica um produtório dos termos entre parêntesis para diferentes valores de  $i$ . É claro que fazendo  $n \rightarrow \infty$  essa probabilidade anula-se. Isso significa que a partir de uma CI qualquer  $(x, p)$  pode-se chegar arbitrariamente próximo a  $(x', p')$  em algum tempo finito  $2n'$  com probabilidade 1, pois se pode fazer a área  $\Delta x \Delta p$  ao redor de  $(x', p')$  tão pequena quanto se queira (desde que finita). Assim, fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,  $n - n' \rightarrow \infty$ , e a densidade de probabilidade de transição  $P(x, p; 0|x', p'; 2n)$  deve ser independente da CI  $(x, p)$ . Por fim, como a distribuição estacionária é dada por

$$\rho(x', p')_{as} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int \int \rho(x, p; 0) P(x, p; 0|x', p'; 2n) dx dp \right] = \quad (4.7)$$

$$= \int \int \rho(x, p; 0) dx dp P(x', p')_{as} = P(x', p')_{as},$$

onde  $P(x', p')_{as} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x, p; 0|x', p'; 2n)$  é a distribuição assintótica independente

de  $n$  e se utilizou a condição de normalização  $\int \int \rho(x, p; 0) dx dp = 1$ , onde a integração estende-se a todo o espaço.

### 4.1.3 Difusão para o mapeamento

Em um sistema onde há transporte de partículas faz-se fundamental a caracterização da difusão das mesmas, já que para muitas aplicações pode ser importante não apenas a velocidade média das partículas e a eficiência energética, mas também o quanto elas dispersam-se no espaço. Uma das medidas utilizadas para tal caracterização é o coeficiente de difusão já definido na equação 3.21

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle [\delta x_n - \delta x_0]^2 \rangle}{2n},$$

onde

$$\delta x = x - \langle x \rangle.$$

Neste contexto, a média  $\langle \dots \rangle$  é realizada sobre as condições iniciais e as realizações do ruído térmico. Além disso, supõe-se difusão normal, ou seja, que  $\langle |\delta x_n - \delta x_0| \rangle \propto n^{1/2}$ . Novamente, é possível simplificar a expressão do coeficiente de difusão dada pela equação 3.21 porque

$$\langle \delta x_n \delta x_0 \rangle = \langle x_n x_0 \rangle - \langle x_n \rangle \langle x_0 \rangle = \langle x_n \rangle \langle x_0 \rangle - \langle x_n \rangle \langle x_0 \rangle = 0, \quad (4.8)$$

para  $n \rightarrow \infty$  porque, como já deduzido na subseção 4.1.2, a distribuição assintótica no espaço de fase não depende das CIs então  $\langle x_n x_0 \rangle = \langle x_n \rangle \langle x_0 \rangle$ . Assim, pode-se utilizar a expressão

$$D = D_{ef} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x(n)^2}{2n}, \quad (4.9)$$

em analogia com o que foi obtido na seção 3.2.1, e onde  $\sigma_x(n)^2$  é a variância da posição no tempo  $n$ . Além disso, como já foi visto na subseção 3.2.1, para o caso em que  $T = 0$ , atratores periódicos apresentam coeficiente de difusão nulo, já atratores caóticos podem apresentar difusão, de maneira que  $D_{ef} > 0$ . Imagine agora o que deve acontecer na prática quando se considera efeitos térmicos: da seção anterior, já se sabe que cada partícula tem acesso a todo o espaço de fase e que existe uma distribuição de probabilidades de ocupação assintótica independente das CIs. No espaço de fase de sistemas dinâmicos a  $T = 0$  também há conjuntos de pontos com dinâmica característica, os conjuntos invariantes, alguns deles atratores e outros não, estes últimos sendo responsáveis pelos transientes [59]. A existência destes conjuntos deve afetar a probabilidade de ocupação assintótica do

espaço de fase para  $T \neq 0$ , pois no limite de baixas temperaturas a dinâmica da partícula é determinada por estas regiões. Conforme a seção 2.4, para baixas temperaturas, basicamente as partículas visitam diferentes conjuntos invariantes no espaço de fase (na verdade perfazem trajetórias muito parecidas às desses conjuntos), permanecendo em cada um deles por determinado tempo até que o ruído seja capaz de tirá-la de lá e faça então com que ela visite outro conjunto invariante. Este processo de permanência e troca de conjunto invariante deve continuar eternamente<sup>2</sup>, de maneira que cada um destes conjuntos do espaço de fase deve estar associado a um tempo característico de permanência, bem como a uma frequência de visitação, de maneira que para temperaturas finitas a partícula visita todos os conjuntos invariantes (de  $T = 0$ ) do espaço de fase, ou seja, todos eles terão participação em sua dinâmica. Para ilustrar esse conceito, a figura 4.1 constitui um retrato de fase em que  $T \neq 0$  de uma partícula que, a temperatura zero, segue uma órbita periódica. De fato, muito embora a órbita periódica seja muito mais densa, há eventuais passeios pelo conjunto que antes formava o transiente caótico.

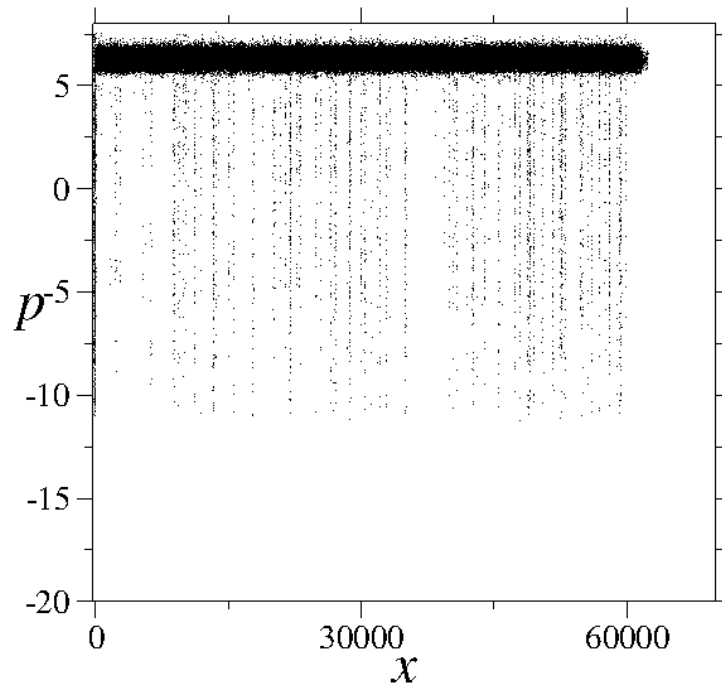


Figura 4.1: A figura 4.1 apresenta o retrato de fase obtido ao se registrar  $10^4$  iterações de  $M = 25$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  do espaço de fase. Os parâmetros foram fixados em  $K = 4,78$ ,  $\gamma = 0,55$ ,  $a = 0,5$  e  $\phi = \pi/2$ , e a temperatura em  $k_B T = 3 \times 10^{-2}$ .

Pelo que já foi exposto, faz sentido que se caracterize o comportamento difusivo dos conjuntos invariantes primeiramente, e, então, que se investigue o efeito que as “trocas

<sup>2</sup>Note que aqui a dinâmica que a partícula assume para passar de um conjunto invariante para outro, bem como as modificações causadas na órbita pelo ruído em um conjunto invariante, são desprezadas nesse limite de baixas temperaturas.

entre conjuntos” podem causar nas propriedades difusivas do sistema. Pode-se modelar a dinâmica próxima a cada um dos conjuntos invariantes do espaço de fase oriundos da situação onde  $T = 0$ , no que se refere à posição, como

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{i=0}^n p_{i+1}, \quad (4.10)$$

onde se utilizou as equações do mapa para  $T = 0$ , 3.14. Nesta equação, a quantidade  $x_0$  deve ser interpretada como a posição da partícula quando ela está, pela primeira vez, no conjunto invariante em questão. Considerando que este conjunto possua uma corrente orbital característica  $J_o$ ,  $p_{i+1}$  pode ser reescrito como

$$p_{i+1} = J_o + \Delta_{i+1}, \quad (4.11)$$

onde a quantidade  $\Delta_{i+1}$  deve ser interpretada como as oscilações de  $p_{i+1}$  em torno de sua média  $J_o$  ao longo da trajetória. Assim, a equação 4.10 pode ser reescrita como

$$x_{n+1} = x_0 + J_o(n+1) + \sum_{i=0}^n \Delta_{i+1}. \quad (4.12)$$

A seguir, serão realizadas várias médias do tipo  $\langle \dots \rangle_{c.i.}$ , que são feitas em todos os pontos que compõem o conjunto invariante. Para se entender este tipo de média, é instrutivo recorrer ao exemplo mais simples de conjunto invariante e analisar como esta média é realizada. Tomando uma órbita periódica de período  $q$ , uma média no conjunto invariante, por exemplo  $\langle p \rangle_{c.i.}$ , é feita somando-se todos os valores de  $p$  para cada um dos  $q$  pontos que compõem a órbita e dividindo o resultado por  $q$ :

$$\langle p \rangle_{c.i.} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q p_i. \quad (4.13)$$

Para um conjunto invariante caótico, a única diferença é que existem infinitos pontos que constituem o conjunto, de maneira que haveria uma substituição de  $q$  por uma quantidade inteira que tenda ao infinito na equação 4.13. Note agora que, a rigor, um conjunto invariante com uma corrente  $J_o$  é apenas invariante em  $p$ : os valores de  $x$  continuam mudando indefinidamente em função do tempo. É lógico que se escrevendo  $x \bmod L_x$ , onde a variável  $x$  é periódica de período  $L_x$ , retoma-se a invariância em  $x$ , porém este não é o interesse deste trabalho: quer-se analisar como  $x$  varia assintoticamente com o tempo. Por esse motivo, uma média do tipo  $\langle x \rangle_{c.i.}$  significa que se considerou todos os pontos do conjunto invariante cujos valores de  $p$  e  $x \bmod L_x$  são diferentes, e ainda tem-se que  $\langle x \rangle_{c.i.}$

deve ser dependente do tempo, e não invariante como se poderia esperar. Além disso, pela invariância de  $p$ , sua média nos conjuntos invariantes deve ser sempre uma constante, ou seja,

$$\langle p \rangle_{c.i.} = \frac{1}{q'} \sum_{i=1}^{q'} (J_o + \Delta_i) = J_o, \quad (4.14)$$

de maneira que,

$$\langle \Delta_i \rangle_{c.i.} = 0. \quad (4.15)$$

Definindo então  $\Gamma_n$  tal que

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad (4.16)$$

é imediato que

$$\langle \Gamma_n \rangle_{c.i.} = \sum_{i=1}^n \langle \Delta_i \rangle_{c.i.} = 0, \quad (4.17)$$

onde se utilizou a equação 4.15. Fazendo-se uma mudança nos limites do somatório da equação 4.12, pode-se reescrever  $\sum_{i=0}^n \Delta_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i$ , e ainda substituindo-se  $n+1 \rightarrow n$  chega-se a

$$x_n = x_0 + J_o n + \sum_{i=1}^n \Delta_i = x_0 + J_o n + \Gamma_n, \quad (4.18)$$

onde se utilizou a definição dada pela equação 4.16. Agora, é possível calcular a difusão nos conjuntos invariantes<sup>3</sup>,

$$D_{eff} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x_n^2 \rangle_{c.i.} - \langle x_n \rangle_{c.i.}^2}{2n}, \quad (4.19)$$

onde se substitui a expressão de  $x_n$  fornecida pela equação 4.18. De fato,

$$\langle x_n \rangle_{c.i.} = \langle x_0 \rangle_{c.i.} + J_o n, \quad (4.20)$$

onde se utilizou a equação 4.17. Assim

$$\langle x_n^2 \rangle_{c.i.} = \langle x_0^2 \rangle_{c.i.} + (J_o n)^2 + 2 \langle x_0 \rangle_{c.i.} J_o n. \quad (4.21)$$

Ainda tem-se que

$$x_n^2 = x_0^2 + (J_o n)^2 + \Gamma_n^2 + 2(x_0 J_o n + x_0 \Gamma_n + J_o n \Gamma_n), \quad (4.22)$$

---

<sup>3</sup>Aqui  $D_{eff} = D$  pois a média no conjunto invariante, por definição, independe das condições iniciais.

de maneira que

$$\langle x_n^2 \rangle_{c.i.} = \langle x_0^2 \rangle_{c.i.} + (J_o n)^2 + \langle \Gamma_n^2 \rangle_{c.i.} + 2(\langle x_0 \rangle_{c.i.} J_o n + \langle x_0 \Gamma_n \rangle_{c.i.} + J_o n \langle \Gamma_n \rangle_{c.i.}). \quad (4.23)$$

Utilizando-se a equação 4.17 e ainda notando que, por definição, uma média no conjunto invariante não deve depender das condições iniciais (e, portanto,  $\langle x_0 \Gamma_n \rangle_{c.i.} = \langle x_0 \rangle_{c.i.} \langle \Gamma_n \rangle_{c.i.} = 0$ ), obtém-se

$$\langle x_n^2 \rangle_{c.i.} = \langle x_0^2 \rangle_{c.i.} + (J_o n)^2 + \langle \Gamma_n^2 \rangle_{c.i.} + 2\langle x_0 \rangle_{c.i.} J_o n, \quad (4.24)$$

e então

$$D_{ef} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x_n^2 \rangle_{c.i.} - \langle x_0^2 \rangle_{c.i.} + \langle \Gamma_n^2 \rangle_{c.i.}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \Gamma_n^2 \rangle_{c.i.}}{2n}, \quad (4.25)$$

onde se eliminou os termos dependentes das condições iniciais pois são constantes no tempo. Em geral, conjuntos de dinâmica caótica produzirão difusão, enquanto conjuntos de dinâmica regular não.

No que se refere aos efeitos térmicos, duas considerações serão feitas nesse trabalho. A primeira é a de que a distribuição assintótica  $\rho(x, p; T)_{as}$ , onde  $T$  foi explicitado como um parâmetro, deve respeitar

$$\lim_{T \rightarrow 0} \rho(x, p; T)_{as} = \rho(x, p; 0)_{as}, \quad (4.26)$$

onde agora  $\rho(x, p; 0)_{as}$  depende das CIs, ou seja, depende de  $\rho(x_0, p_0; T = 0)$ , que por sua vez é assumida constante em todo o espaço de fase no contexto da equação 4.26. Essa consideração afirma que, para algum intervalo de temperaturas, a dinâmica do sistema deve aproximar-se do caso determinístico em que  $T = 0$  onde se utiliza uma distribuição inicial uniforme de CIs. A segunda consideração é que as propriedades dinâmicas dos conjuntos invariantes resistam a algum ruído, ou seja, que a corrente orbital  $J_o^{(i)}$  e a difusão  $D_{ef}^{(i)}$  de partículas muito próximas ao conjunto invariante  $i$  não variem drasticamente para um certo regime de baixas temperaturas. De acordo com o esquema proposto, a rigor, todas as órbitas estariam em conjuntos variantes, seguindo uma dinâmica aproximadamente igual à dos conjuntos invariantes para baixas temperaturas, porém com possibilidade de transitar entre conjuntos. Ou seja, a cada conjunto invariante seria indexado um tempo médio de permanência  $\tau_i$ , bem como uma frequência de visitação  $\omega_i$ , de maneira que não mais apenas os atratores tenham influência na dinâmica assintótica, mas também os conjuntos não atrativos. Esse cenário é condizente com o descrito pela referência [59].

Seguindo esta ideia, pode-se modelar então a dinâmica da posição de uma partícula

como sendo

$$x_n = x_0 + \sum_i \left[ \sum_{j=1}^{m_i} (t_j^{(i)} J_o^{(i)} + \Gamma_j^{(i)}) \right], \quad (4.27)$$

onde a soma em  $i$  é feita sobre os conjuntos invariantes, a soma em  $j$  é feita sobre as visitas ao conjunto  $i$ ,  $J_o^{(i)}$  é a corrente orbital do conjunto  $i$ ,  $m_i$  é o número de vezes que o conjunto invariante  $i$  foi visitado<sup>4</sup>,  $t_j^{(i)}$  é o tempo que a órbita permaneceu no conjunto  $i$  durante a visita  $j$  e

$$\Gamma_j^{(i)} = \sum_{k=1}^{t_j^{(i)}} \Delta_k^{(i)}, \quad (4.28)$$

onde  $\Delta_k^{(i)}$  é a variação de  $p$  em torno de sua média  $J_o^{(i)}$  na  $k$ -ésima iteração “dentro” do conjunto invariante  $i$  (análogo à equação 4.11), e  $\Gamma_j^{(i)}$  é definido em analogia com a equação 4.16. Considerando um comportamento assintótico a condição inicial  $x_0$ , como já foi visto na subseção 4.1.2, não tem influência alguma sobre a distribuição no espaço de fase, logo, será descartada nos próximos cálculos. Agora, pode-se reescrever os tempos de permanência nos conjuntos invariantes,  $t_j^{(i)}$ , como

$$t_j^{(i)} = m_i \tau_i + \delta_j^{(i)}, \quad (4.29)$$

onde  $\delta_j^{(i)}$  representa a variação do tempo de permanência  $t_j^{(i)}$  na  $j$ -ésima visita no conjunto invariante  $i$  em torno do tempo médio de permanência deste conjunto invariante,  $\tau_i$ . Essas variações nos tempos de permanência são causadas pela natureza estocástica do ruído e, naturalmente, faz sentido que se suponha  $\langle \delta_j^{(i)} \rangle = 0$ , onde a média  $\langle \dots \rangle$  é feita sobre as suas realizações. Somando os termos da equação 4.29 nos índices  $i$  e  $j$  (conjuntos invariantes e suas respectivas visitas durante a dinâmica), naturalmente obtém-se o tempo total  $n$  (número de iterações)

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1}^{m_i} t_j^{(i)} = \sum_{i=1} m_i \tau_i + \sum_{i=1} \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} = n, \quad (4.30)$$

Note ainda que, como já foi apresentado na subseção 4.1.2, o processo gerado por  $M_T$  é *markoviano*, de maneira que faz sentido estabelecer-se a média sobre as suas realizações

$$\langle x_n \rangle = \sum_i \langle m_i \rangle \tau_i J_o^{(i)}. \quad (4.31)$$

De fato, “dentro” dos conjuntos invariantes, serão consideradas representativas as médias

---

<sup>4</sup>Nesta dissertação entende-se que houve a visitação de um conjunto invariante se a órbita frequentou sua vizinhança, perfazendo por um tempo de permanência  $t_j^{(i)}$  uma órbita muito próxima à do conjunto invariante em questão.



já apresentadas  $\langle \dots \rangle_{c.i.}$ , e como o efeito que leva a trajetória de um conjunto a outro é o ruído, entre conjuntos será considerada a média nas realizações do ruído térmico.

Utilizando a equação 4.27, tem-se

$$\begin{aligned}
x_n^2 = \sum_{i,k} & \left[ \left( m_i \tau_i m_k \tau_k + m_i \tau_i \sum_{l=1}^{m_k} \delta_l^{(k)} + m_k \tau_k \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} \sum_{l=1}^{m_k} \delta_l^{(k)} \right) J_o^{(i)} J_o^{(k)} + \right. \\
& + m_i \tau_i \sum_{l=1}^{m_k} \Gamma_l^{(k)} J_o^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} \sum_{l=1}^{m_k} \Gamma_l^{(k)} J_o^{(i)} + m_k \tau_k \sum_{j=1}^{m_i} \Gamma_j^{(i)} J_o^{(k)} + \\
& \left. + \sum_{l=1}^{m_k} \delta_l^{(k)} \sum_{j=1}^{m_i} \Gamma_j^{(i)} J_o^{(k)} + \sum_{j=1}^{m_i} \Gamma_j^{(i)} \sum_{l=1}^{m_k} \Gamma_l^{(k)} \right], \tag{4.32}
\end{aligned}$$

cuja média sobre as realizações fornece

$$\langle x_n^2 \rangle = \sum_{i,k} \left[ \left( \langle m_i m_k \rangle \tau_i \tau_k + \left\langle \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} \sum_{l=1}^{m_k} \delta_l^{(k)} \right\rangle \right) J_o^{(i)} J_o^{(k)} + \left\langle \sum_{j=1}^{m_i} \Gamma_j^{(i)} \sum_{l=1}^{m_k} \Gamma_l^{(k)} \right\rangle \right]. \tag{4.33}$$

Como o sistema é *markoviano*, a probabilidade de visitação de um dado atrator independe de outras visitações que já tenham ocorrido, ou seja

$$\langle m_i m_k \rangle = \langle m_i \rangle \langle m_k \rangle. \tag{4.34}$$

Pelo mesmo motivo não deve haver correlações entre as variações nos tempos médios  $\delta_j^{(i)}$  de diferentes conjuntos invariantes, entre as variações em diferentes visitas, e o mesmo vale para as variações  $\Gamma_j^{(i)}$ . Assim

$$\langle x_n^2 \rangle = \sum_{i,k} \left( \langle m_i \rangle \langle m_k \rangle \tau_i \tau_k J_o^{(i)} J_o^{(k)} + \left\langle \sum_{j=1}^{m_i} (\delta_j^{(i)})^2 \right\rangle (J_o^{(i)})^2 + \left\langle \sum_{j=1}^{m_i} (\Gamma_j^{(i)})^2 \right\rangle \right), \tag{4.35}$$

de maneira que o coeficiente de difusão fica

$$D_{ef} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \langle m_i \rangle \langle (\Gamma^{(i)})^2 \rangle}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \langle m_i \rangle \langle (\delta^{(i)})^2 \rangle}{2n}. \tag{4.36}$$

Sejam então os coeficientes de visitação do conjunto invariante  $i$  definidos por

$$\alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle m_i \rangle}{n}, \tag{4.37}$$

tem-se finalmente

$$D_{ef} = \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_i \langle (\Gamma^{(i)})^2 \rangle + \alpha_i \langle (\delta^{(i)})^2 \rangle (J_o^{(i)})^2) = \sum_i \alpha_i (D_{i,int} + D_{i,ext}), \quad (4.38)$$

onde  $D_{i,int}$  é o coeficiente de difusão “interno”, gerado pela própria dinâmica do conjunto invariante (dinâmica caótica) e que, supostamente, deve variar pouco para um intervalo pequeno de temperaturas. Já  $D_{i,ext}$  representa o termo de difusão “externo” gerado pela permutação da órbita entre diferentes conjuntos invariantes, sendo assim um efeito inerentemente térmico. Por fim, note ainda que este último mecanismo de difusão exige que os diferentes conjuntos invariantes tenham correntes diferentes, caso contrário

$$x_n = \sum_i \langle m_i \rangle \tau_i J_o + \left( n - \sum_i \langle m_i \rangle \tau_i \right) J_o + \sum_{i,j} \Gamma_j^{(i)} = J_o n + \sum_{i,j} \Gamma_j^{(i)}, \quad (4.39)$$

onde foi utilizada a equação de vínculo 4.30, e assim sendo  $D_{i,ext} = 0$ .

## 4.2 Resultados numéricos: mapeamento a temperatura não-nula

Nesta seção, resultados de simulações que calculam quantidades de interesse nos EPs de sistemas na presença de ruído térmico serão apresentados e discutidos. Essas quantidades envolveram, além da corrente  $J_T$  que caracteriza o transporte, uma medida da temperatura de destruição das EIPs. Um dos grandes objetivos desta dissertação é o de demonstrar que as EIPs cumprem um papel fundamental na origem do transporte de catraca na natureza e, dada a ubiquidade das flutuações térmicas, é de fundamental importância que as EIPs resistam a alguma intensidade de ruído térmico. Uma medida quantitativa dessa resistência é proposta nesta dissertação e será implementada nesta seção. De fato, a corrente total  $J_T$  apresenta-se muito menor nas regiões caóticas ( $A$ ) do que nas EIPs e, levando-se em conta também o foco desta dissertação na corrente, faz sentido que se estabeleça um critério de destruição das EIPs frente aos efeitos térmicos mediante um decréscimo de  $J_T$ . Este critério foi definido e será apresentado na sequência. Nesta seção, também foi admitido que a constante de Boltzmann  $k_B = 1$ , o período dos impulsos determinísticos  $\tau = 1$ , e fixados os parâmetros  $a = 0,5$  e  $\phi = \pi/2$  para os resultados que se seguem.

Na figura 4.2 está representada em cores a corrente total  $J_T$  calculada no EP  $(K, \gamma)$  tal e qual definida no capítulo 3. Enquanto a cor preta indica correntes nulas, das cores

vermelha para a amarela estão assinaladas correntes incrementadamente negativas e das cores verde para a branca estão representadas correntes incrementadamente positivas. Na figura 4.2 a) ainda estão indicadas as EIPs, bem como as regiões caóticas  $A$  e  $E$ . Da figura a) à c), a temperatura  $T$  é aumentada respectivamente de  $T = 10^{-5}$ , passando por  $T = 10^{-3}$  e atingindo  $T = 10^{-2}$ . Claramente, em a) ainda é possível observar uma distribuição de regiões praticamente idêntica à apresentada pela figura 3.6 a), com algumas pequenas diferenças como e.g. a destruição das conexões entre as diferentes EIPs  $D_{-1}$ . Conclui-se a partir daí que  $T = 10^{-5}$  é uma temperatura demasiadamente pequena para alterar significativamente a estrutura do EP estudado na escala adotada de valores dos parâmetros. Utilizando uma temperatura 100 vezes maior, na figura 4.2 b), é possível observar que as EIPs  $D_{-1}$  desapareceram completamente, as  $D_{-1/2}$  e  $B_L^{-1}$  foram praticamente destruídas deixando uma região disforme de corrente  $J_T$  superior em seu lugar, as  $C_L$  começaram a ser destruídas por suas bordas e as EIPs  $B_L$  começaram a desaparecer por sua borda inferior. Nota-se também que não apenas houve um decréscimo generalizado do módulo da corrente por todo o EP, mas também parece haver um aumento de  $|J_T|$  em uma região específica, em  $K \approx 2,5$  e  $\gamma \approx 0,9$ . Por fim, na figura 4.2 c) praticamente todas as EIPs foram destruídas, resistindo apenas as  $B_L$ , ainda que tenham modificado a sua forma. Em específico, pode se observar que a EIP menos afetada é a  $B_1$ , que é também a que carrega a menor corrente e que possui a menor eficiência energética das  $B_L$ . Algumas das regiões destruídas pela temperatura parecem deixar em seu lugar regiões disformes de corrente mais alta, muito embora o transporte nessas regiões seja caótico, como assinala a figura 4.4, que será comentada à frente. No que se refere à corrente total, claramente, as regiões caóticas  $A$  e  $E$  ficam praticamente inalteradas com a escala de temperaturas estudada. Por fim, a figura 4.2 c) ainda indica com uma flecha a região já comentada ao redor de  $K = 2,5$  e  $\gamma = 0,9$ . Nitidamente, há um aumento significativo no módulo da corrente induzido pela temperatura.

Esta região onde há um incremento no módulo da corrente total pode ser útil no que se refere a aplicações tecnológicas, já que sugere a possibilidade do desenvolvimento de mecanismos onde o transporte é acionado ou mesmo controlado pela temperatura. Por este motivo, faz sentido que se entenda melhor como e em que condições este transporte ocorre. A figura 4.3 a) apresenta em  $T = 0$  o retrato de fase (descartou-se um transiente de  $10^4$  iterações) para o ponto  $(K; \gamma) = (2,5; 0,85)$ , pertencente à região onde há ativação de corrente. Como pode ser visto, há três tipos de atratores no espaço de fase: a flecha verde indica o atrator periódico em que  $q = 1$  e  $J_o = 2\pi$ , a flecha preta indica um conjunto de atratores periódicos em que  $J_o = 0$  e a flecha vermelha aponta para o atrator de período dois em que  $J_o = -2\pi$ . Assim, a corrente total  $J_T$  é uma média de todas as correntes

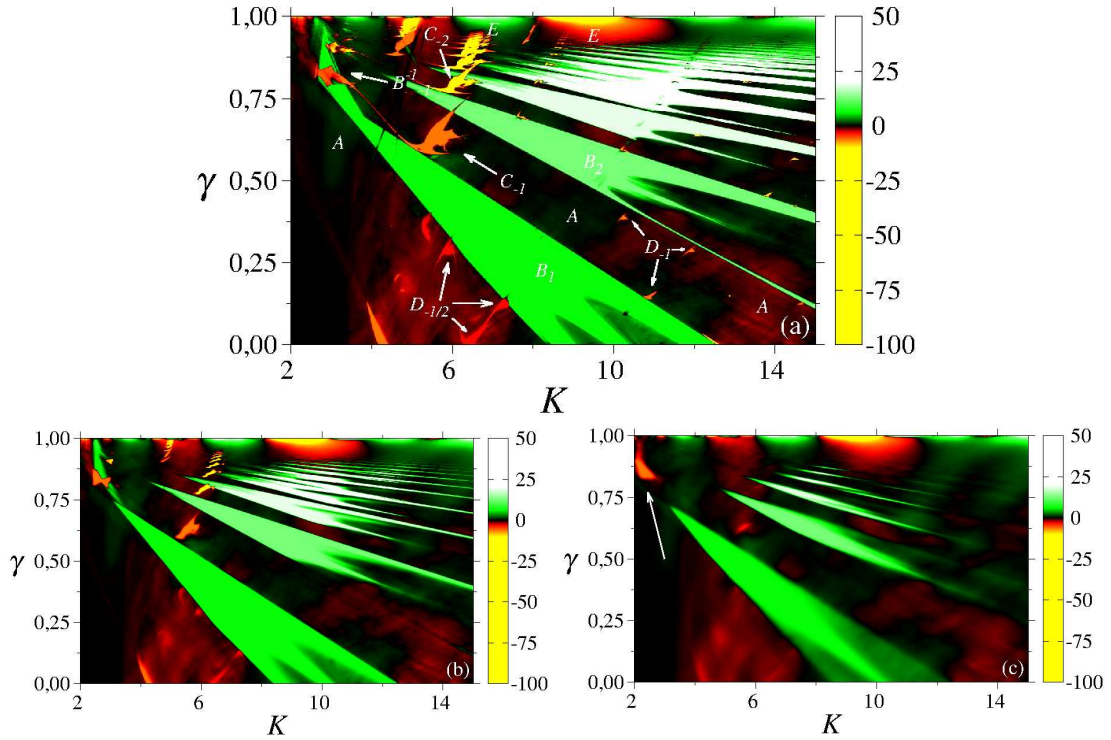


Figura 4.2: A figura 4.2 apresenta em cores a corrente total  $J_T$  calculada numericamente no EP  $(K, \gamma)$ , em uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos, utilizando  $M = 10^4$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^5$  iterações. Em a) a temperatura  $T = 10^{-5}$ . Nesta figura ainda estão indicadas por letras algumas regiões características do EP. Em b)  $T = 10^{-3}$ . Em c)  $T = 10^{-2}$ , e a flecha indica a região onde houve incremento do módulo da corrente induzida pela temperatura. Os dados desta figura foram obtidos pelo Prof. César Manchêin.

orbitais cujos pesos são as frações das CIs que estão na bacia de atração de cada atrator. As bacias de atração dos diferentes atratores para  $T = 0$  está representada na figura 4.3 c), onde se pode observar um complexo entrelaçamento das mesmas. Aumentando a temperatura para  $T = 10^{-3}$ , o retrato de fase do sistema fica como mostrado na figura 4.3 b), onde se pode observar claramente que apenas o atrator em que  $q = 2$  e  $J_o = -2\pi$  aparece. De fato, a temperatura mais elevada torna muito improvável a permanência nos outros atratores, de maneira que todas as CIs acabam por permanecer quase que exclusivamente no atrator de corrente negativa. Estes resultados sugerem que situações de multiestabilidade, onde diferentes atratores periódicos coexistem no espaço de fase, podem tornar viável a ativação térmica de corrente.

Na figura 4.4 está representada em cores agora o maior expoente de Lyapunov calculado para os mesmos intervalos dos parâmetros  $K$  e  $\gamma$  utilizados para gerar a figura 4.2, e fixando  $T = 10^{-2}$ . Nesta figura, da cor branca à preta o expoente é negativo e varia em direção a zero. O maior expoente de Lyapunov crescente a partir de zero é representado pelas cores azul, verde, amarela e vermelha. Comparando esta figura com a figura 4.2 c),

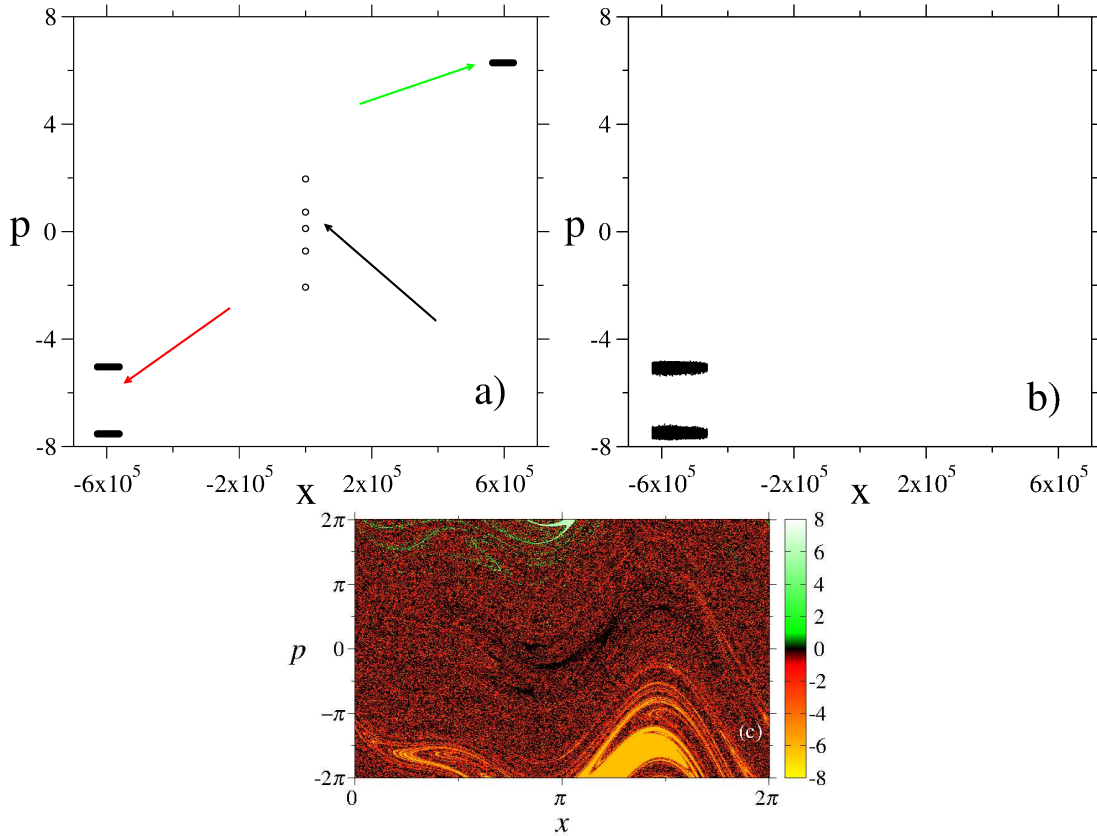


Figura 4.3: As figuras 4.3 a) e b) apresentam o retrato de fase obtido de um ponto interno à região de ativação térmica da corrente indicada na figura 4.2, ponto  $(K; \gamma) = (2, 5; 0, 85)$ . Em a)  $T = 0$ , e podem ser observados três tipos de atratores: a flecha verde indica o atrator periódico em que  $q = 1$  e  $J_o = 2\pi$ , a flecha preta indica um conjunto de atratores periódicos em que  $J_o = 0$  e a flecha vermelha aponta para o atrator de período dois em que  $J_o = -2\pi$ . Em b)  $T = 10^{-3}$  e pode se observar que apenas o atrator indicado em a) por uma flecha vermelha aparece. Nessas figuras estão representadas  $10^5$  iterações de  $10^2$  CIs e se descartou um transiente de  $10^4$  iterações. A figura 4.3 c) apresenta em cores  $J_o$  no espaço de fase em uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos, onde foram utilizadas  $10^5$  iterações.

é possível perceber que as EIPs destruídas acabam deixando em seu lugar regiões caóticas (geralmente com o maior expoente de Lyapunov menor que nos arredores). Também é evidente que as EIPs parecem “encolher” quando a quantidade calculada no espaço de parâmetros é o maior expoente de Lyapunov, ou seja, algumas das regiões antes ocupadas pelas EIPs, e que continuam na figura 4.2 c) mantendo  $J_T$  maior que os seus arredores, não podem mais ser consideradas periódicas. Todavia, estes efeitos podem estar relacionados com o fato da temperatura induzir coexistência de diferentes conjuntos invariantes, regulares e caóticos, sendo que a trajetória da única CI utilizada no cálculo deve experimentar diferentes tipos de dinâmica.

O fato das EIPs serem menos resistentes ao ruído térmico que as regiões  $A$  e  $E$  implica que os conjuntos invariantes periódicos são menos resistentes que os caóticos. Com

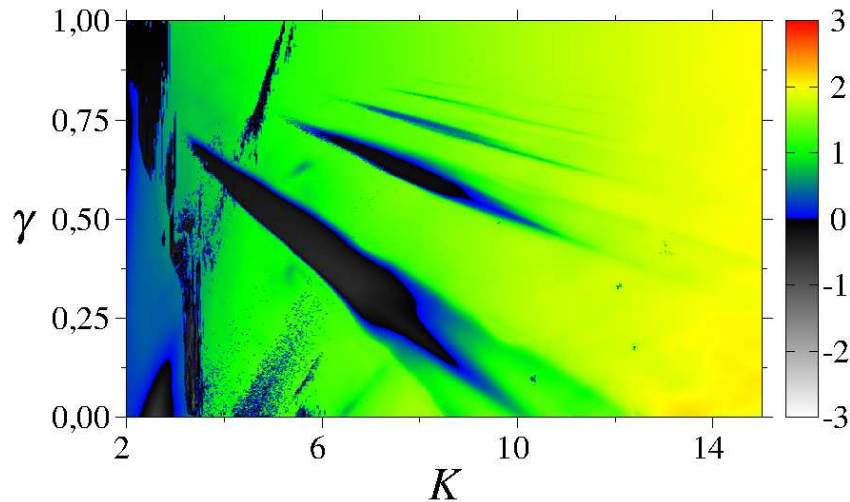


Figura 4.4: A figura 4.4 apresenta em cores o maior expoente de Lyapunov calculado numericamente no EP  $(K, \gamma)$ , em uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos, utilizando uma CI  $(x, p) = (0, 1; 0, 1)$  e  $N = 10^6$  iterações. Nesta figura, fixou-se a temperatura  $T = 10^{-2}$ , o que faz esse EP compatível com o da figura 4.2 c). Os dados desta figura foram obtidos pelo Prof. César Manchein.

efeito, a partir de uma certa temperatura, os diferentes conjuntos participam efetivamente da dinâmica de uma dada partícula, que de tempos em tempos transita entre conjuntos invariantes. As simulações indicam que o tempo médio de permanência  $\tau$  no atrator periódico cai muito rapidamente a partir de um certo valor da temperatura, dando lugar a novas dinâmicas referentes a conjuntos não atrativos. Seria interessante então determinar a temperatura crítica a partir da qual a dinâmica periódica perde sua hegemonia e, conseqüentemente, o módulo da corrente total decresce marcadamente. Para tanto, utilizou-se o seguinte critério baseado no valor de  $J_T$ : a menor corrente orbital  $J_o$  permitida é dada pelo vínculo periódico expresso pela equação 3.18. Para período principal da EIP  $q = 1$  o menor valor de  $J_o$  permitido é  $2\pi$ , para  $q = 2$  é  $\pi$ , e esses períodos representam a maior parte da região ocupada por EIPs no EP. Desta maneira, definiu-se que para  $J_T < \pi$  a EIP havia sido destruída, e a temperatura para a qual isso acontece foi definida como a temperatura crítica  $T_c$ . A figura 4.5 apresenta em cores  $T_c$  determinada numericamente no EP  $(K, \gamma)$ . O gradiente de cores varia de preto ( $T_c = 0$ ), passando por vermelho, amarelo e branco para indicar temperaturas críticas cada vez mais altas. De fato, a figura 4.5 a) traça um perfil de robustez das EIPs em relação ao ruído, informação fundamental no contexto de aplicações tecnológicas e da ocorrência de catracas inerciais na natureza em geral. No que se refere às EIPs em geral, é perceptível que os menores valores de  $T_c$  são encontrados nas suas bordas, sendo que o seu centro constitui a região mais robusta da estrutura. Isso está de acordo com o fato já observado das EIPs começarem a ser destruídas pelas bordas. Também fica claro que, em geral, as maiores EIPs tendem possuir

os maiores valores de  $T_c$ , o que está de acordo com a figura 4.2. Na figura 4.5 b) foi feita uma ampliação de uma região do EP representada em a) que apresenta em mais detalhes a distribuição de  $T_c$  nas EIPs e que focaliza em específico as três EIPs  $D_{-1}$ .

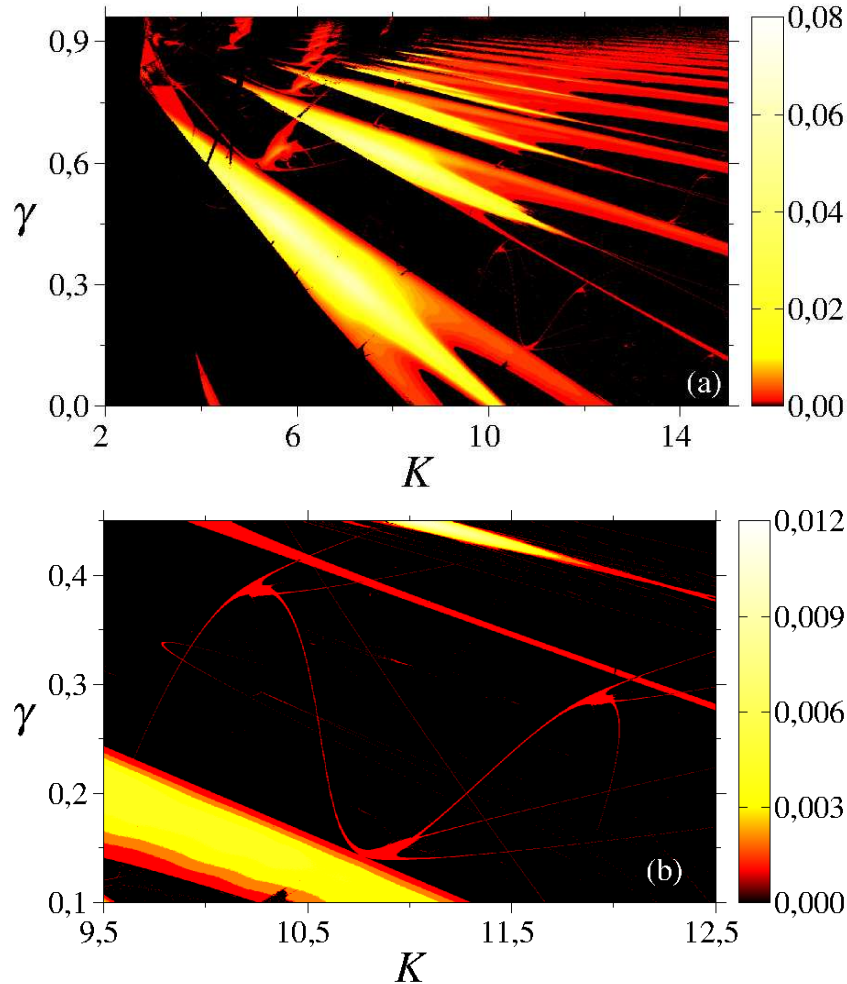


Figura 4.5: A figura 4.5 apresenta em cores a  $T_c$  calculada numericamente no EP  $(K, \gamma)$ , em uma malha de  $1000 \times 1000$  pontos, utilizando  $M = 10^4$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^5$  iterações. Em a) pode-se ver uma porção representativa do EP e em b) é feita uma ampliação focalizando três EIPs  $D_{-1}$ . Os dados desta figura foram obtidos pelo Prof. César Manchein.

Na figura 4.5 a) também pode-se observar que as duas bordas das EIPs  $B_L$  respondem de forma diversa ao ruído térmico. Enquanto na borda superior  $T_c$  parece ir suavemente para zero, na borda inferior parece que ela cai abruptamente de um valor finito a zero. A explicação para esse fenômeno é que a razão física da existência das duas bordas na EIP são diversas, como já comentado no capítulo anterior. Enquanto a borda superior é originada de uma bifurcação sela-nó a borda inferior encontra sua origem em um fenômeno de crise que ocorre no atrator caótico coexistente com o periódico que origina a  $B_L$ , e cuja bifurcação já havia ocorrido para valores menores de  $K$ . Ou seja, quando a bacia

de atração referente ao atrator periódico passa a ocupar todo o espaço de fase (com a crise do atrator caótico), ele já possui um valor de  $T_c$  finito. Vale ressaltar que, embora a temperatura crítica pareça cair abruptamente na borda inferior, este trabalho não a estudou em detalhes, de maneira que seja possível que  $T_c$  convirja continuamente, mesmo que muito rapidamente, a zero, pois o ruído térmico também afeta o valor dos parâmetros para o qual ocorre a crise no atrator caótico [59]. De fato, na referência [59] é obtida uma lei de potência para a amplitude crítica do ruído que desestabiliza completamente o atrator periódico próximo à bifurcação sela-nó. Esta lei é obtida porque, próximo à bifurcação, a dinâmica de sistemas com uma dimensão qualquer  $D$  é descrita por uma forma normal (veja seção 2.2.4) unidimensional e genérica. Desta maneira, próximo à bifurcação do tipo sela-nó (borda superior), talvez seja possível obter uma lei de potência com a qual  $T_c$  converge para zero, caso as definições de  $T_c$  (desta dissertação) e  $\sigma_c$  (referência [59]) sejam compatíveis. Com efeito, segundo a referência mencionada,  $\sigma_c \sim |p - p_c|^{3/4}$ , onde  $p$  e  $p_c$  indicam respectivamente um parâmetro qualquer e o seu valor na bifurcação. Como no caso do mapeamento utilizado aqui a amplitude do ruído  $\propto \sqrt{T}$ , se as definições de  $T_c$  e  $\sigma_c$  forem compatíveis tem-se que  $T_c \sim |p - p_c|^{3/2}$ . Para verificar esta hipótese, fez-se a figura 4.6 onde se apresenta  $T_c$  em função de  $|\gamma - \gamma_c|$  na linha  $K = 2\pi$  (onde  $\gamma_c = 0,5$ , região de bifurcação). Em vermelho estão os pontos obtidos numericamente para  $T_c$ , e em azul a curva que melhor se ajusta aos valores obtidos. Como os eixos estão em escala logarítmica e esta curva é uma reta, ela representa uma lei de potência, cujo expoente obtido foi 1,5, como esperado.



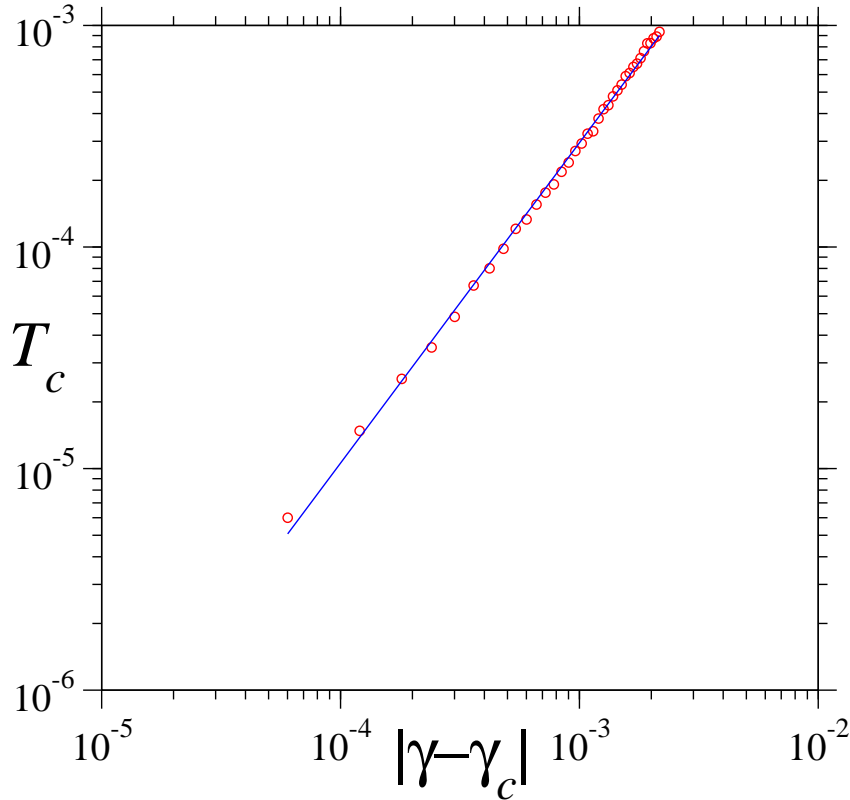


Figura 4.6: A figura 4.6 apresenta  $T_c$  calculada numericamente em função de  $|\gamma - \gamma_c|$ , na linha  $K = 2\pi$  onde  $\gamma_c = 0,5$ . Nesta figura, utilizou-se  $M = 10^4$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^5$  iterações, e os eixos estão em escala logarítmica. Em vermelho aparecem os pontos calculados numericamente e em azul a lei de potência que melhor se aproxima dos dados, cujo expoente foi determinado como sendo 1,5, o que assinala a existência de uma bifurcação sela-nó. Os dados desta figura foram obtidos pelo Prof. César Manchêin.

### 4.3 Resultados numéricos para uma partícula *browniana* em que atua uma força externa oscilatória

Como já foi mencionado na seção 3.4, um sistema mais realístico de catraca envolveria equações diferenciais, e no caso da simulação de um ambiente a temperatura não nula, equações diferenciais estocásticas. Novamente, utilizar-se-á aqui a “catraca de balanço”, onde agora o termo de ruído térmico será levado em consideração. As equações diferenciais estocásticas que modelam este sistema são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\tilde{\lambda}v + \tilde{K}[\text{sen}x + a \text{sen}(2x + \phi)] + \tilde{K}_t \text{sen}t + \tilde{\sigma}\eta(t), \\ \dot{x} &= v, \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde as quantidades demarcadas com til estão divididas pela massa da partícula, assim  $\tilde{\lambda} = \lambda/2$  etc. Além disso, o parâmetro  $K$  modula a altura do potencial,  $K_t$  modula a

intensidade da força externa,  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade do meio e  $\sigma = \sqrt{2k_B T}$  é a intensidade do ruído térmico. Novamente, a exemplo do que foi feito na seção 3.5, considerou-se  $m = 1$  para os cálculos numéricos, de maneira que o til acima dos parâmetros foi omitido. Para retornar ao caso  $m \neq 1$  basta trocar  $K \rightarrow \tilde{K}$ ,  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$  e  $K_t \rightarrow \tilde{K}_t$ . Nesta seção será estudado o EP  $(K_t, \chi)$ , onde  $\chi = e^{-\lambda}$ , e se tem ainda  $a = 0,7$  como parâmetro de assimetria e  $\phi = \pi/2$  como fase do potencial. Note que a força oriunda do potencial possui período  $L_x = 2\pi$  e a força externa é periódica em  $\tau = 2\pi$ , assim, órbitas (aproximadamente) periódicas devem carregar correntes múltiplas de  $k/q$ , como já discutido na seção 3.4. A presença de um reservatório térmico deve construir um cenário muito parecido com o já descrito na seção 4.1, onde todos os conjuntos invariantes do espaço de fase devem tornar-se metaestáveis [59] e devem ser caracterizados por coeficientes que indiquem a participação de cada um deles em uma órbita típica. No que se segue, os efeitos do ruído térmico em algumas das EIPs já reportadas na seção 3.5 serão descritos. Além disso, uma figura análoga à 4.5 será apresentada, e as similaridades entre os dois sistemas, o discreto e o contínuo, serão comentadas. Nesta seção, ainda será adotado  $k_B = 1$ .

A figura 4.7 apresenta a mesma EIP da figura 3.23 c), do tipo  $C_L$ , porém para duas temperaturas diferentes. Em a),  $T = 10^{-4}$ , e já se pode ver que a maior parte das antenas das EIPs foram destruídas pelo ruído térmico. De fato, como no caso do mapa, as EIPs em geral tendem a ser destruídas pelas bordas. Pode-se observar ainda que as regiões caóticas são muito mais resistentes ao ruído térmico, e permanecem praticamente inalteradas em comparação à figura 3.23 c). Muitas das EIPs menores já foram destruídas pelo ruído térmico, mas vale a pena lembrar que esta é uma região pequena do EP.

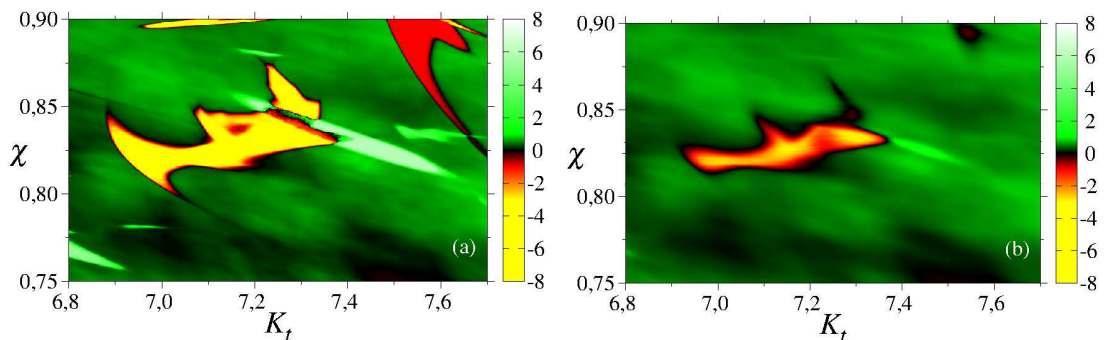


Figura 4.7: A figura 4.7 apresenta em cores os valores de  $J_T$  calculados no EP  $(K_t, \chi)$  em uma malha de  $500 \times 500$  pontos. Nesta figura, utilizou-se  $10^2$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$ , um passo de 0,1 e  $N = 10^6$  passos de integração. Em a) tem-se  $T = 10^{-4}$  e em b)  $T = 10^{-3}$ .

Na figura 4.7 b)  $T = 10^{-3}$ , e é observado que praticamente toda a EIP principal

foi destruída, restando apenas suas regiões mais internas. A maioria das outras EIPs secundárias também foi destruída, restando apenas algumas pequenas regiões amorfas do antigo centro destas EIPs. Embora as regiões caóticas tenham sido um pouco modificadas, as correntes médias são as mesmas, exemplificando a robustez da dinâmica caótica frente ao ruído térmico.

Para caracterizar melhor a resistência de uma EIP ao ruído térmico, uma figura análoga à 4.5 foi gerada também para este sistema, porém considerando agora um critério diferente de destruição da EIP. Neste caso específico, quer-se analisar a EIP  $D_2$  representada na figura 3.23 b), em que  $J_o = 2,0$ , e para tanto se considerou que uma diferença de 0,1 em  $J_o$  seria suficiente para informar que determinada região da EIP havia sido destruída. A temperatura para a qual tal diferença é verificada é a temperatura crítica  $T_c$ , que foi calculada no EP na figura 4.8. Como se pode observar de imediato, temperaturas menores são necessárias para destruir as bordas da EIP, justificando a observação de que as EIPs começam a ser destruídas pelas bordas. A região central é a que acumula os maiores valores de  $T_c$ . De fato, o comportamento é completamente análogo ao obtido na figura 4.5, de maneira que a figura 4.8 traça um perfil de robustez da EIP frente ao ruído térmico que pode ser posteriormente aproveitado em aplicações tecnológicas, definindo regiões ideais de operação para motores *brownianos*, bem como as temperaturas limites onde há uma operação otimizada. É possível que haja também aplicações na área de biologia, onde motores *brownianos* são muito comuns a nível celular.

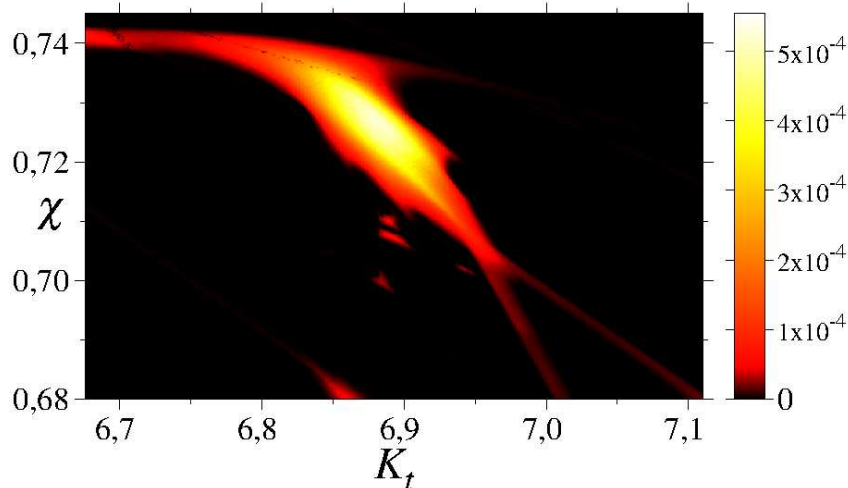


Figura 4.8: A figura 4.8 apresenta em cores a  $T_c$  calculada numericamente no EP  $(K_t, \chi)$ , em uma malha de  $500 \times 500$  pontos, utilizando  $M = 25$  CIs uniformemente distribuídas na célula  $(x, p) \in [-2\pi; 2\pi]$  e  $N = 10^6$  passos de integração. A EIP focalizada nesta figura é do tipo  $D_2$ , a mesma da figura 3.23 b)

## 4.4 Conclusões

Neste capítulo, analisou-se o impacto da inclusão de ruído térmico à dinâmica determinística de catracas clássicas, especialmente no que se refere à topologia do EP. Dentre as três regiões determinísticas principais (EIPs,  $A$  e  $E$ ), as EIPs são as primeiras a serem modificadas pela adição do termo estocástico. Essa modificação dá-se em uma súbita queda de  $|J_T|$  e na transformação de uma dinâmica periódica em uma caótica. De fato, a dinâmica caótica ( $A$  e  $E$ ) mostrou-se muito robusta perante ao ruído, e as propriedades das regiões  $A$  e  $E$  foram preservadas para o intervalo de temperaturas consideradas nesta dissertação. Não obstante, as EIPs também se mostraram resistentes ao ruído em um intervalo de temperaturas, o que reafirma a validade do modelo de transporte direcionado no EP de catracas clássicas construído no capítulo anterior.

Para se quantificar a resistência térmica das EIPs, obteve-se um critério para sua destruição que levou em última instância ao conceito de temperatura crítica,  $T_c$ . Os resultados obtidos para  $T_c$  próximo a uma bifurcação do tipo sela-nó são compatíveis com os desenvolvimentos teóricos encontrados na literatura [59]. A avaliação da  $T_c$  ao longo das EIPs traçou uma espécie de “mapa de resistência”, onde se observa que as regiões mais internas das EIPs tendem a ser mais robustas. Verificou-se também que as maiores EIPs são, em geral, mais resistentes. Estas informações são de fundamental importância, no que se refere a aplicações tecnológicas, na medida em que indicam as regiões de operação otimizada de catracas a temperatura não nula, bem como os regimes térmicos dentro dos quais a corrente é superior. A região indicada nas figuras 4.2 b) e c), onde ocorre ativação térmica da corrente em uma catraca inercial, não fora reportada antes na literatura analisada por este trabalho, e constitui uma oportunidade de se aproveitar a energia proveniente do ruído térmico para se gerar corrente.

A generalização destes resultados foi obtida através da equação de Langevin, explorada na seção 4.3. De fato, a equação de Langevin constitui um modelo fenomenológico de aplicação praticamente unânime entre os sistemas onde há um banho térmico. Novamente, as conclusões já obtidas para o mapa 4.1 são aplicáveis, exceto pela região  $E$ , que não ocorre no sistema de equações diferenciais pelo fato do sistema não apresentar modos aceleradores no limite conservativo. Por fim, os desenvolvimentos obtidos neste capítulo ainda indicam a existência das estruturas genéricas  $B_L$ ,  $B_L^{-1}$  e  $D_L$ , amplamente reportadas na literatura para sistemas determinísticos [43–53, 92, 94], em sistemas estocásticos, questão até então não levantada nos trabalhos aqui considerados.

## Considerações finais

Propôs-se nesta dissertação a investigação da topologia do EP de catracas clássicas unidimensionais, principalmente no que se refere ao comportamento da corrente total  $J_T$ . O capítulo 3 dedicou-se à investigação do mecanismo determinístico de transporte no EP. Como resultado, construiu-se um modelo onde três regiões principais performam um papel fundamental: as EIPs, a região  $A$  e a região  $E$ . Como modelos representativos utilizou-se um sistema discreto e um sistema contínuo, o último constituindo uma generalização do primeiro. As EIPs são de fato estruturas isoperiódicas formadas por padrões bifurcacionais no EP e possuem diversas propriedades interessantes, como  $J_T$  constante (na ausência de multiestabilidade) e superior ao de seus arredores, intervalos proibidos de  $J_T$  e podem ser classificadas ainda de acordo com sua morfologia. A região  $A$  corresponde a uma dinâmica caótica de baixa eficiência e baixo valor da corrente total, que possui  $J_T$  variável em sua extensão. Por fim, a região  $E$  está também associada a um transporte caótico e pouco eficiente de partículas, com  $J_T$  variável porém alta. Esta região relaciona-se com a existência de modos aceleradores no limite conservativo e não está presente no sistema contínuo estudado pela inexistência de modos aceleradores.

Este modelo explica praticamente todos os fenômenos observados, no que se refere à corrente, quando da variação dos parâmetros de um dado sistema que constitui uma catraca. Como já comentado, os platôs de corrente constante, intervalos de corrente variável, variação de  $J_T$  nos platôs em múltiplos de uma determinada quantidade e altas correntes caóticas próximo ao limite conservativo, amplamente observados na literatura [28, 29, 35, 38, 89], correspondem a elementos topológicos integrantes do paradigma construído no capítulo 3. Além disso, identificou-se um conjunto de EIPs que aparece em todos os EPs e que vêm sendo reportadas nos EPs de sistemas diversos na literatura [43–53, 92, 94], o que confere certa generalidade à abordagem aqui desenvolvida: se essas

estruturas são gerais em sistemas dinâmicos clássicos não lineares então é possível que o paradigma proposto constitua um cenário geral para o mecanismo de geração de transporte em EPs de catracas clássicas inerciais.

No capítulo 4, os efeitos da inclusão de um ruído estocástico na dinâmica determinística das catracas estudadas no capítulo anterior foram abordados. Em especial, considerou-se o ruído térmico, dada a origem do ramo da física que se dedica às catracas, intrinsecamente vinculada à termodinâmica, mas a descrição estabelecida é robusta o suficiente para englobar todos os tipos de ruído gaussiano, desde que de pequena amplitude. Dentre as três regiões determinísticas principais (EIPs,  $A$  e  $E$ ), as EIPs são as primeiras a serem modificadas pela adição do termo estocástico, enquanto a dinâmica caótica representada pelas regiões  $A$  e  $E$  mostrou-se bastante robusta frente ao ruído. Entretanto, as EIPs também se mostraram termicamente resistentes em um intervalo de temperaturas, o que reafirma a validade do modelo de transporte direcionado no EP de catracas clássicas construído no capítulo 3.

Para se quantificar a robustez das EIPs, obteve-se um critério para sua destruição que levou em última instância ao conceito de temperatura crítica,  $T_c$ . A avaliação da  $T_c$  ao longo das EIPs mapeou a resistência térmica pelo EP, onde se observa que as maiores EIPs são, em geral, mais resistentes. Verificou-se também que as regiões mais internas das EIPs tendem a ser mais robustas. Não foi possível estabelecer nenhum vínculo direto entre  $T_c$  e os períodos da órbita, ou mesmo o maior expoente de Lyapunov. De fato, vários desenvolvimentos teóricos têm sido propostos para explicar  $T_c$  em termos de quasipotenciais [59] e energias mínimas de escape [96]. Todavia, é possível que o mapeamento de  $T_c$  no EP possa ser utilizado como medida numérica de quantidades como a energia de escape no EP. No que se refere à existência das EIPs em sistemas estocásticos, tal questão não havia antes sido levantada na literatura considerada por este trabalho, constituindo assim uma de suas realizações. Esta última questão é importante pois apoia desenvolvimentos recentes no sentido de comprovar a existência das EIPs na natureza [52, 53].

Os objetivos alcançados por esta dissertação podem revelar-se importantes em aplicações tecnológicas e explicação de fenômenos na natureza que envolvam mecanismos de catraca [12, 14, 18, 75, 76, 97]. No que se refere às aplicações tecnológicas, os resultados aqui obtidos permitem o desenvolvimento de dispositivos de operação otimizada, em especial quando o seu *design* depende da escolha de um ou mais parâmetros. Em aplicações onde os parâmetros são variados adiabaticamente (em relação aos transientes envolvidos) no tempo, a análise do EP fornece rotas para a manutenção de  $J_T$  constante

(conexão entre diferentes EIPs) enquanto outras propriedades (como o período) são variadas. Além disso, as direções preferenciais provêem caminhos para a variação da corrente em múltiplos de uma quantidade determinada (que pode ser ajustada através dos períodos espacial e temporal da força). Regiões de multiestabilidade, aproveitáveis para a separação de partículas pela sua velocidade, podem ser facilmente identificadas no EP, e como a massa relaciona-se com alguns dos parâmetros da catraca, o EP também pode ser utilizado para a separação de partículas por sua massa [15, 35, 89, 98].

A resistência das EIPs (e das outras regiões) à presença do ruído asseguram a validade dos resultados aqui obtidos em ambientes térmicos, questão fundamental no que se refere à validade destes resultados no que se refere ao mundo real. A avaliação da  $T_c$  no EP indica as regiões de operação otimizada de dispositivos a temperatura não nula, bem como os regimes térmicos dentro dos quais a corrente é superior. A região indicada nas figuras 4.2 b) e c), onde ocorre ativação térmica da corrente em uma catraca inercial, não fora reportada antes na literatura analisada por este trabalho, e constitui uma oportunidade de se aproveitar a energia proveniente do ruído térmico para se gerar corrente. Por fim, todos estes elementos podem ser aplicados para melhor entender os mecanismos do tipo catraca muito presentes na natureza, em especial no transporte celular [2, 12–14].

Por fim, existem muitos objetivos ainda pertencentes ao escopo deste trabalho a serem atingidos. As regiões de ativação térmica de corrente em sistemas inerciais englobam aplicações muito interessantes e podem ser melhor caracterizadas. Catracas bidimensionais devem ser abordadas em trabalhos futuros, investigando se o mecanismo proposto nesta dissertação está limitado às catracas unidimensionais. Além disto, o regime quântico deve ser desbravado por novos desenvolvimentos. De fato, existe um trabalho recente [40] que faz uma abordagem muito limitada a este respeito. A comprovação da existência de EIPs no regime quântico, além de expandir largamente a aplicação dos conceitos aqui desenvolvidos, também constituiria um avanço considerável no que se refere à existência das EIPs na natureza.

## Referências Bibliográficas

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1963).
- [2] M. O. Magnasco. Forced Thermal Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1477–1481 (1993).
- [3] S. Leibler. Moving forward noisily. *Nature* **370**, 412–413 (1994).
- [4] J. Maddox. Making models of muscle contraction. *Nature* **365**, 203 (1993).
- [5] J. Rousselet, L. Salome, A. Ajdari e J. Prost. Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. *Nature* **370**, 446–447 (1994).
- [6] J. Prost, J. Chauwin, L. Peliti e A. Ajdari. Asymmetric pumping of particles. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2652–2655 (1994).
- [7] R. D. Astumian e M. Bier. Fluctuation driven ratchets: Molecular motors. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1766–1769 (1994).
- [8] C. R. Doering, W. Horsthemke e J. Riordan. Nonequilibrium fluctuation-induced transport. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2984–2987 (1994).
- [9] M. O. Magnasco. Molecular combustion motors. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2656–2659 (1994).
- [10] K. Svoboda, C. F. Schmidt, B. J. Schnapp e S. M. Block. Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometry. *Nature* **365**, 721–727 (1993).
- [11] J. T. Finer, R. M. Simmons e J. A. Spudich. Single myosin molecule mechanics: piconewton forces and nanometre steps. *Nature* **368**, 113–119 (1993).
- [12] R. D. Astumian e P. Hänggi. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports* páginas 33–39 (2002).



- [13] R. D. Astumian. Thermodynamics and Kinetics of a Brownian Motor. *Science* **276**, 917–922 (1997).
- [14] P. Riemann. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports* **361**, 57–295 (2002).
- [15] J. Rousselet, L. Salome, A. Ajdari e J. Prost. Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. *Nature* **370**, 446–447 (1994).
- [16] J. S. Bader, R. W. Hammond, S. A. Henck, M. W. Deem, G. A. McDermott, J. M. Bustillo, J. W. S. G. T. Mulhern e J. M. Rothberg. DNA transport by a micromachined Brownian ratchet device. *PNAS* **96**, 13165–13169 (1999).
- [17] S. Matthias e F. Müller. Asymmetric pores in a silicon membrane acting as massively parallel brownian ratchets. *Nature* **424**, 53–57 (2003).
- [18] G. Mahmud, C. J. Campbell, K. J. M. Bishop, Y. A. Komarova, O. Chaga, S. Soh, S. Huda, K. Kandere-Grzybowska e B. A. Grzybowski. Directing cell motions on micropatterned ratchets. *Nature Physics* **5**, 606–612 (2009).
- [19] T. A. J. Duke e R. H. Austin. Microfabricated Sieve for the Continuous Sorting of Macromolecules. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1552–1555 (1998).
- [20] G. W. Slater, H. L. Guo e G. I. Nixon. Bidirectional Transport of Polyelectrolytes Using Self-Modulating Entropic Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1170–1173 (1997).
- [21] D. Ertaş. Lateral Separation of Macromolecules and Polyelectrolytes in Microlithographic Arrays. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1548–1551 (1998).
- [22] I. Derényi e R. D. Astumian. ac separation of particles by biased Brownian motion in a two-dimensional sieve. *Phys. Rev. E* **58**, 7781–7784 (1998).
- [23] C. Keller, F. Marquardt e C. Bruder. Separation quality of a geometric ratchet. *Phys. Rev. E* **65**, 041927 (2002).
- [24] A. van Oudenaarden e S. G. Boxer. Brownian Ratchets: Molecular Separations in Lipid Bilayers Supported on Patterned Arrays. *Science* **285**, 1046–1048 (1999).
- [25] A. Lorke, S. Wimmer, B. Jager, J. P. Kotthaus, W. Wegscheider e M. Bichler. Far-infrared and transport properties of antidot arrays with broken symmetry Original Research Article. *Physica B* **249**, 312–316 (1998).

- [26] P. Jung, J. G. Kissner e P. Hänggi. Regular and Chaotic Transport in Asymmetric Periodic Potentials: Inertia Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 18 (1996).
- [27] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [28] J. L. Mateos. Chaotic Transport and Current Reversal in Deterministic Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 258–261 (2000).
- [29] M. Barbi e M. Salerno. Phase locking effect and current reversals in deterministic underdamped ratchets. *Phys. Rev. E* **62**, 1988–1994 (2000).
- [30] J. L. Mateos. Current reversals in chaotic ratchets: the battle of the attractors Original Research Article. *Physica A* **325**, 92–100 (2003).
- [31] G. G. Carlo e M. E. Spina. Thermal effects on chaotic directed transport. *Phys. Rev. E* **79**, 026212 (2009).
- [32] A. W. Ghosh e S. V. Khare. Rotation in an Asymmetric Multidimensional Periodic Potential due to Colored Noise. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 23 (2009).
- [33] J. Rosa e M. W. Beims. Optimal transport in a ratchet coupled to a modulated environment: The role of Levy walks. *Physica A* **386**, 54–62 (2007).
- [34] F. Marchesoni. Conceptual design of a molecular shuttle. *Phys. Lett. A* **237**, 126–130 (1998).
- [35] M. Barbi e M. Salerno. Stabilization of ratchet dynamics by weak periodic signals. *Phys. Rev. E* **63**, 066212 (2001).
- [36] L. Machura, M. Kostur, F. Marchesoni, P. Talkner, P. Hänggi e J. Luczka. Optimal strategy for controlling transport in inertial Brownian motors. *J. Phys.: Condens. Matter* **17**, S3741–S3752 (2005).
- [37] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer-Verlag, New York, NY, 1992), 2ª edição.
- [38] L. Wang, G. Benenti, G. Casati e B. Li. Ratchet Effect and Transporting Islands in Chaotic Sea. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 244101 (2007).
- [39] G. G. Carlo, G. Benenti, G. Casati e D. L. Shepelyansky. Quantum Ratchets in Dissipative Chaotic Systems. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 164101 (2005).

- [40] G. G. Carlo. Quantum Isoperiodic Stable Structures and Directed Transport. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 210605 (2012).
- [41] P. Reimann, M. Grifoni e P. Hänggi. Quantum Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 10–13 (1997).
- [42] I. Goychuk e P. Hänggi. Quantum rectifiers from harmonic mixing. *Europhys. Lett.* **43**, 503 (1998).
- [43] J. A. C. Gallas. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2714–2717 (1993).
- [44] E. N. Lorenz. Compound windows of the hénon map. *Physica D* **237**, 1689–1704 (2008).
- [45] A. M. Baptista e I. Caldas. Dynamics of kicked logistic map. *Chaos, Solitons & Fractals* **7**, 325–336 (1996).
- [46] C. Bonatto, J. A. C. Gallas e Y. Ueda. Chaotic phase duffing oscillator. *Phys. Rev. E* **77**, 026217 (2008).
- [47] C. Stegemann, H. A. Albuquerque e P. C. Rech. Some two-dimensional parameter spaces of a chua system with cubic nonlinearity. *Chaos* **20**, 023103 (2010).
- [48] R. Vitolo, P. Glendinning e J. A. C. Gallas. Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Phys. Rev. E* **84**, 016216 (2011).
- [49] J. A. C. Gallas. Structure of the parameter space of a ring cavity. *Appl. Phys. B* **60**, S203–S213 (1995).
- [50] C. Bonatto e J. A. C. Gallas. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Phys. Rev. E.* **75**, 055204(R) (2007).
- [51] P. C. Rech. Self-Similarities and Period-Adding in the Parameter-Space of a Nonlinear Resonant Coupling Process. *Int. J. Nonlinear Sciences* **10**, 179–185 (2010).
- [52] H. A. Albuquerque, R. M. Rubinger e P. C. Rech. Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua’s circuit. *Physica D* **233**, 66–72 (2007).
- [53] R. Stoop, P. Benner e Y. Uwate. Real-World Existence and Origins of the Spiral Organization of Shrimp-Shaped Domains. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 074102 (2010).
- [54] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Perseus Books, Reading, MA, 1994).

- [55] I. N. Levine. *Physical Chemistry* (McGraw-Hill, New York, NY, 2009), 6ª edição.
- [56] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 1 (Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2002), 4ª edição.
- [57] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 3 (Edgard Blücher, São Paulo, SP, 1997), 1ª edição.
- [58] J. W. Milnor. Attractor. Website, Scholarpedia (2006). URL <http://www.scholarpedia.org/article/Attractor>.
- [59] Y. Lai e T. Tél. *Transient Chaos* (Springer, New York, NY, 2011).
- [60] M. Hurley. Attractors: persistence and density of their basins. *Trans. Amer. Math. Soc.* **269**, 247–271 (1982).
- [61] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (Springer, New York, NY, 1997).
- [62] D. Ruelle. *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, New York, NY, 1989).
- [63] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli e J. M. Strelcyn. Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian System: A Method for Computing All of Them. Part 2: Numerical Application. *Meccanica* **15**, 21–30 (1980).
- [64] Y. A. Kuznetsov. Saddle-node bifurcation for maps. Website, Scholarpedia (2008). URL [http://www.scholarpedia.org/article/Saddle-node\\_bifurcation\\_for\\_maps](http://www.scholarpedia.org/article/Saddle-node_bifurcation_for_maps).
- [65] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. York. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, NY, 1996).
- [66] J. Carr. Center Manifold. Website, Scholarpedia (2006). URL [http://www.scholarpedia.org/article/Center\\_Manifold\\_Theorem](http://www.scholarpedia.org/article/Center_Manifold_Theorem).
- [67] I. Karatzas e S. E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance* (Springer-Verlag, New York, NY, 1998).
- [68] A. Banerjee e V. M. Yakovenko. Universal Patterns of inequality. *New Journal of Physics* **12**, 1–24 (2010).

- [69] S. Karlin e H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes* (Academic Press, New York, NY, 1975).
- [70] A. Longtin. Stochastic dynamical systems. Website, Scholarpedia (2010). URL [http://www.scholarpedia.org/article/Stochastic\\_dynamical\\_systems](http://www.scholarpedia.org/article/Stochastic_dynamical_systems).
- [71] A. Ben-Mizrachi, I. Procaccia e P. Grassberger. Characterization of experimental (noisy) strange attractors. *Phys. Rev. A* **29**, 975–977 (1984).
- [72] K. Maruyama, F. Nori e V. Vedral. Colloquium: The Physics of Maxwell’s Demon and Information. *Reviews of Modern Physics* **81**, 1, 1–23 (2009).
- [73] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 2 (Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2002), 4ª edição.
- [74] H. R. Salinas. *Introdução à Física Estatística* (EDUSP, São Paulo, SP, 2005), 2ª edição.
- [75] G. Lagubeau, M. L. Merrer, C. Clanet e D. Quéré. Leidenfrost on a ratchet. *Nature Physics* **7**, 395–398 (2011).
- [76] H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor e A. Stout. Self-Propelled Leidenfrost Droplets. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 154502 (2006).
- [77] E. Cortés, B. J. West e K. Lindenberg. On the generalized Langevin equation: Classical and quantum mechanicala. *J. Chem. Phys.* **82**, 2708–2717 (1985).
- [78] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics: Statistical Mechanics*, volume 5 (Pergamon Press, 1980), 3ª edição.
- [79] A. O. Caldeira e A. J. Leggett. Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 4, 211–214 (1981).
- [80] K. Huang. *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Marblehead, MA, 1987), 2ª edição.
- [81] K. Lindenberg e B. J. West. Statistical properties of quantum systems: The linear oscillator. *Phys. Rev. A* **30**, 568–582 (1984).
- [82] B. J. West e K. Lindenberg. On the rotating wave approximation. *Phys. Lett. A* **102**, 189–193 (1984).

- [83] A. O. Caldeira e A. J. Leggett. Path Integral Approach to Quantum Brownian Particle. *Physica A* **121**, 587–616 (1983).
- [84] A. Pekalski e K. Sznajd-Weron, editores. *Anomalous Diffusion From Basics to Applications*, volume 519 de *Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, 1999).
- [85] L. Machura, M. Kostur, P. Talkner, J. Łuczka e F. M. P. Hänggi. Brownian motors: Current fluctuations and rectification efficiency. *Phys. Rev. E* **70**, 061105 (2004).
- [86] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D* **7**, 181–200 (1983).
- [87] L. C. Martins e J. A. C. Gallas. Multistability, Phase Diagrams and Stitistical Properties of the Kicked Rotor: A Map With Many Coexisting Attractors. *Int. J. Bif. Chaos* **18**, 1705–1717 (2008).
- [88] U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt e J. A. Yorke. Map with more than 100 coexisting low-period attractors. *Phys. Rev. E* **54**, 71–81 (1996).
- [89] H. A. Larrondoa, C. M. Arizmendia e F. Family. Current basins of attraction in inertia ratchets. *Physica A* **320**, 119–127 (2003).
- [90] M. W. Beims e J. A. C. Gallas. Accumulation points in nonlinear parameter lattices. *Physica A* **238**, 225–244 (1997).
- [91] M. W. Beims, P. C. Rech e J. A. C. Gallas. Fractal and riddled basins: arithmetic signatures in the parameter space of two coupled quadratic maps. *Physica A* **295**, 276–279 (2001).
- [92] J. A. C. Gallas. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems. *Physica A* **202**, 196–223 (1994).
- [93] A. Endler e J. A. C. Gallas. Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **342**, 681–684 (2006).
- [94] A. Endler e J. A. C. Gallas. Arithmetical signatures of the dynamics of the Hénon map. *Phys. Rev. E* **65**, 036231 (2002).
- [95] R. Bartussek, P. Hänggi e J. G. Kissner. Periodically Rocked Thermal Ratchets. *Europhys. Lett.* **28**, 459–464 (1994).
- [96] P. D. Beale. Noise-induced escape from attractors in one-dimensional maps. *Phys. Rev. A* **40**, 3998–4003 (1989).

- 
- [97] T. Kulrattanak, R. G. M. van der Sman, C. G. P. H. Schroën e R. M. Boom. Analysis of mixed motion in deterministic ratchets via experiment and particle simulation. *Microfluidics and Nanofluidics* **10**, 843–853 (2011).
- [98] A. Grimm, H. Stark e J. R. C. van der Maarel. Model for a Brownian ratchet with improved characteristics for particle separation. *Phys. Rev. E* **79**, 061102 (2009).



Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências Exatas  
Departamento de Física

---

## Dissertação de Mestrado

### Autor

*Alan Celestino*

<alan@fisica.ufpr.br>

<http://lattes.cnpq.br/4544420254092946>

### Título da Dissertação

*“Investigação do Espaço de Parâmetros de Catracas Clássicas”*

### Orientador

*Prof. Dr. Marcus Werner Beims*

<mbeims@fisica.ufpr.br>

<http://lattes.cnpq.br/8305586393178550>

---

**Programa de Pós-graduação em Física**

**Caixa Postal 19044, CEP 81531-990, Curitiba-PR. Brasil**

**Fone/Fax:** +55-41-33613092 +55-41-33613418

**E-mail:** [depart@fisica.ufpr.br](mailto:depart@fisica.ufpr.br)

**URL:** <http://fisica.ufpr.br>

**Defesa Realizada em 14/02/2013 - Membros da Banca**

*Prof. Dr. Marcus Werner Beims (orientador - presidente)*

*Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (titular - UNESP)*

*Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (titular - UFPR)*

*Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz (suplente - UFPR)*

*Prof. Dr. Edson Denis Leonel (suplente - UNESP)*

Template L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X THESIS

THESIS © Copyright 2008-2011. FISUX Group <http://fisica.ufpr.br/fisux/> - <[contato@fisux.org](mailto:contato@fisux.org)>