

Universidade Federal do Paraná
Curso de Pós-graduação em Física
Dissertação de Mestrado

Ana Cristina Sprotte Costa

Correlações Quânticas em Sistemas de Dois Qbits:
Medidas Alternativas e Dinâmica sob Acoplamento
com Banho Térmico

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Marcus Werner Beims*

Curitiba - PR

2012

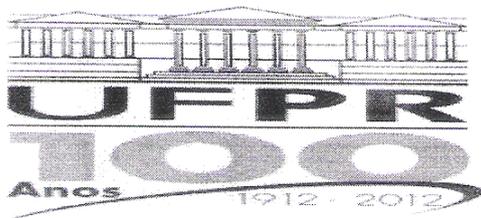
C837c Costa, Ana Cristina Sprotte
Correlações quânticas em sistemas de dois Qbits: medidas alternativas e
dinâmica sob acoplamento com banho térmico [manuscrito] / Ana Cristina
Sprotte Costa. – Curitiba, 2012.
94 f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2012.

Orientador: Marcus Werner Beims.

1. Mecânica Quântica. 2. Física Quântica. I. Universidade Federal do
Paraná. II. Beims, Marcus Werner. III. Título.

CDD: 530.12



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418

E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

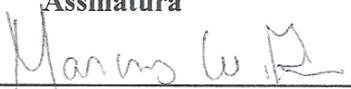
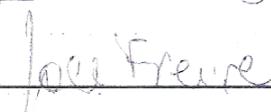
DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CORRELAÇÕES QUÂNTICAS EM SISTEMAS DE DOIS QBITS: MEDIDAS ALTERNATIVAS E DINÂMICA SOB ACOPLAMENTO COM BANHO TÉRMICO

ALUNA

ANA CRISTINA SPROTTE COSTA

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 30 de julho de 2012, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Kyoko Furuya (UNICAMP)		<u>A</u>
Prof. Dr. José Arruda de O. Freire (UFPR)		<u>A</u>

Agradecimentos

- Ao Prof. Marcus Werner Beims e ao Prof. Renato Moreira Angelo pela orientação e por todo o apoio durante o Mestrado;
- Aos familiares e amigos, que sempre estiveram presentes;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro;
- Ao Grupo FISUX pelo código de formatação dessa dissertação.

Resumo

Neste trabalho propomos novas medidas de correlações quânticas e investigamos o fenômeno de descoerência para um sistema de dois qbits. Na primeira etapa buscamos uma forma alternativa para o cálculo da discórdia quântica utilizando entropias diferentes da de von Neumann, como a entropia de Rényi e a entropia linear. Nessa análise descobrimos uma conexão entre a discórdia entrópica e a geométrica. Assim, propusemos formalmente um vínculo entre elas definindo a discórdia a partir do desvio da regra de Bayes. A partir desses resultados, conseguimos outro mais surpreendente. Ao utilizarmos a entropia de Tsallis na definição da discórdia, provamos que existe uma discórdia mais geral, que chamamos de discórdia- q , capaz de reproduzir, em limites apropriados, a discórdia entrópica e a geométrica. A segunda etapa do trabalho consistiu na análise do fenômeno de descoerência para um sistema de dois qbits acoplado com um reservatório composto por N osciladores em equilíbrio térmico. Determinamos as características centrais do modelo, em particular o tempo de descoerência e, em seguida, o decaimento das correlações quânticas, medidas pelo emaranhamento e discórdia, e dos aspectos não-locais, a partir das desigualdades de Bell.

Abstract

In this work we introduce new measures of quantum correlations and investigate the phenomenon of decoherence for a two-qbit system. In the first part, we look for an alternative way to evaluate the quantum discord using entropies other than the von Neumann one, such as the Rényi entropy and the linear entropy. In this analysis we discovered a connection between entropic and geometric discord. Then we proposed formally, a conceptual link between them defining discord as the deviation of the Bayes rule. A more surprising result came out from the previous one. Using the Tsallis entropy as the kernel definition of discord, we proved that there is a general discord, which we called q -discord, which is able to reproduce, in appropriate limits, the entropic and geometric discord. The second part of the study was to examine the phenomenon of decoherence for a system of two qbits coupled with a reservoir composed of N oscillators in thermal equilibrium. We determined the central features of the model. In particular, the decoherence time and then, the decay of the quantum correlations, measured by the entanglement and discord, and of the non-local aspect, given by Bell inequalities.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Sumário	iv
1 Introdução	1
2 Conceitos Preliminares	5
2.1 Fundamentos da Mecânica Quântica	5
2.2 O qbit	9
2.3 Operador densidade	11
2.4 Correlações Quânticas	15
2.4.1 Emaranhamento	15
2.4.2 Paradoxo EPR e Desigualdades de Bell	20
2.5 Entropias	24
2.5.1 Entropia de von Neumann	24

2.5.2	Entropia linear	25
2.5.3	Entropia de Rényi	26
3	Discórdia Quântica e Medidas Alternativas	28
3.1	Discórdia para sistemas bipartidos	29
3.1.1	Discórdia quântica	29
3.1.2	Discórdia geométrica	33
3.2	Sistemas de dois qbits	35
3.2.1	Estados X	36
3.3	Discórdia linear	50
3.3.1	Discórdia linear para o estado geral de dois qbits	52
3.4	Unificação das medidas de discórdia via entropia de Tsallis	55
4	Dinâmica sob Acoplamento com Banho Térmico	62
4.1	Interação de um sistema de dois qbits com um reservatório bosônico	63
4.1.1	Tempo de descoerência	68
4.1.2	Equilíbrio	70
4.1.3	Dinâmica das correlações	73
5	Conclusão	79
	Referências Bibliográficas	82
A	Matriz densidade de sistemas de dois qbits	87
B	Matriz densidade dependente do tempo	89
C	Traçando o reservatório	92

Introdução

Até o final do século XIX, acreditava-se que a natureza era determinista, completamente descrita pela mecânica clássica. Com o desenvolvimento da tecnologia, os experimentos começaram a ficar mais sofisticadas e escalas cada vez menores passaram a ser investigadas. Com esses novos experimentos, apareceram fenômenos que a teoria clássica não conseguia explicar, como, por exemplo, o efeito fotoelétrico, difração e interferência de partículas materiais, radiação de corpo negro, entre outros. Nesse momento ocorreu uma ruptura na física, que precisava de novas teorias para explicar esses fenômenos recém descobertos.

A mecânica quântica surge nesse contexto, no início do século XX, a fim de tentar entender o que acontece no mundo microscópico, quando a mecânica Newtoniana falha na descrição de certos fenômenos. Entre seus idealizadores estão: Niels Bohr, Werner Heisenberg, Max Planck, Louis de Broglie, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Max Born, John von Neumann, Paul Dirac, Wolfgang Pauli, David Hilbert, entre outros. Atualmente ela é estabelecida como uma teoria bem sucedida no estudo dos fenômenos que ocorrem em escalas microscópicas.

Mas qual a conexão entre a mecânica quântica e a mecânica clássica? Muitos acreditam que a mecânica quântica é uma teoria mais geral que engloba a mecânica clássica. Esse pensamento foi primeiro expresso pelo princípio de correspondência de Bohr, segundo o qual a mecânica quântica deve reproduzir as previsões clássicas no limite macroscópico.

Porém, muitos aspectos fundamentais da teoria quântica permanecem sem resposta.

Por exemplo, seu caráter probabilista: não se pode inferir com certeza a posição de um elétron em um instante de tempo, apenas a probabilidade de encontrá-lo numa certa região. O que muitos cientistas se perguntam é se o caráter probabilista é inevitável ou a teoria quântica é apenas uma aproximação de uma teoria mais geral. Os adeptos desta última posição, acreditam que o caráter probabilista é oriundo do desconhecimento de alguns parâmetros, chamados de “variáveis ocultas”. Ou seja, se tivéssemos controle sobre essas variáveis, a teoria deixaria de ser probabilista e poderia ser considerada completa, conforme a visão disseminada por Einstein, Podolski e Rosen em 1935 [1].

Em 1964, John Bell publicou um artigo no qual descreve a incompatibilidade entre a mecânica quântica e o conceito de realismo local [2]. Bell mostrou que é impossível construir um modelo baseado nas variáveis ocultas locais compatível com as previsões da mecânica quântica. Sua proposição tomou a forma de um conjunto de desigualdades, hoje conhecidas como desigualdades de Bell, que podem ser violadas apenas por sistemas emaranhados. O primeiro de muitos testes experimentais das desigualdades de Bell foi feito em 1982 por Aspect *et. al.* [3] comprovando a violação das mesmas.

Mas o que são esses aspectos não-locais da teoria quântica evidenciados pelas desigualdades de Bell? A resposta para esta pergunta ainda não foi dada de maneira completa, mas hoje sabemos que uma condição necessária para a não-localidade é a presença de emaranhamento. Trata-se de correlações quânticas com papel de destaque para a moderna ciência da informação quântica. O emaranhamento consiste em correlações que existem entre sistemas compostos que “sentem” instantaneamente quando uma medida é feita localmente num subsistema, mesmo que as partes estejam separadas por grandes distâncias. A definição matemática de emaranhamento é dada em termos de uma negação: o estado é dito emaranhado se for não separável.

Até o final do século XX, o emaranhamento foi aceito como a única manifestação das correlações quânticas existentes em sistemas compostos. Mas em 2001, dois artigos, um publicado por Zurek e Olivier [4] e outro por Henderson e Vedral [5], utilizando conceitos de teoria da informação, demonstraram que existem correlações “puramente” quânticas mesmo quando os sistemas são separáveis. Essa nova classe de correlações ficou conhecida como discórdia quântica, e é um dos assuntos centrais dessa dissertação. Na última década, houve um grande interesse da comunidade científica por essa nova medida, em particular pelo entendimento de seu significado físico. Devido às dificuldades no cálculo, novas

medidas foram propostas e, entre elas, a *discórdia geométrica* [6]. Esta última se baseia numa medida geométrica da distância no espaço de Hilbert entre o sistema de interesse e o estado com discórdia nula mais próximo. Apesar de conceitualmente diferentes, a discórdia entrópica e geométrica evidenciam as mesmas correlações.

A importância do estudo da discórdia está no fato de que mesmo estados separáveis (não emaranhados) podem ser utilizados em processos de computação quântica. Assim, estados quânticos que não apresentam emaranhamento, mas que têm discórdia não nula são extremamente relevantes no desenvolvimento da ciência da computação quântica. Além disso, em 2003, Zurek demonstrou que a interpretação operacional da discórdia está relacionada com a diferença entre a eficiência de demônios de Maxwell clássicos e quânticos em extrair trabalho de sistemas quânticos correlacionados [7].

Uma questão natural no contexto das correlações quânticas é como elas se comportam frente à descoerência. Em particular, é interessante quantificar quão robustas elas são. A teoria de descoerência foi proposta nos anos 80, pelos trabalhos seminais de Caldeira e Leggett [8] e Zurek [9]. A ideia central consiste em modelar o ambiente mais o sistema por uma dinâmica Hamiltoniana unitária e então traçar as variáveis inacessíveis do reservatório. Como resultado, tem-se uma dinâmica dissipativa e não unitária e que, portanto, não conserva coerência. Fundamentalmente, a descoerência é um mecanismo derivado do emaranhamento entre o sistema de interesse e graus de liberdade incontroláveis, aos quais chamamos genericamente de “ambiente”.

O fenômeno da descoerência foi extensivamente estudado nas últimas duas décadas, especialmente por duas razões. Em primeiro lugar, este mecanismo é o grande empecilho à computação quântica, que precisa do caráter quântico dos estados afim de oferecer ganho em relação à computação clássica. A segunda razão, é que o mecanismo da descoerência fornece um paradigma para a explicação de alguns problemas conceituais importantes, como a transição quântico-clássico e o problema da medida em mecânica quântica.

O estudo de correlações quânticas e o fenômeno de descoerência são de extrema importância para a teoria de informação e computação quântica. Para o desenvolvimento dessas ciências é necessário saber quais estados quânticos podem ser usados para protocolos de computação e como eles se comportam quando interagem com o ambiente. Além disso, as correlações quânticas e o fenômeno de descoerência são peças fundamentais para

o entendimento da transição entre a mecânica quântica e a mecânica clássica. Nessa dissertação buscou-se um estudo desses dois aspectos e de sua inter-relação em sistemas bipartidos de dois qbits. Nossos resultados podem fornecer informações úteis para uma série de situações experimentais de interesse atual.

A dissertação será organizada da seguinte forma. No capítulo 2 vamos apresentar alguns conceitos preliminares de mecânica quântica, uma descrição das correlações quânticas e sua quantificação e uma descrição de diferentes entropias.

No terceiro capítulo iremos investigar maneiras alternativas de calcular a discórdia quântica para sistemas de dois qbits para uma série de estados conhecidos como tipo X [10] através da utilização de diferentes entropias daquela apresentada em [4]. Para complementar a análise é feita uma comparação numérica entre esses resultados. Em seguida, apresentamos o cálculo da discórdia via entropia linear para sistemas gerais de dois qbits que evidencia a equivalência com a discórdia geométrica. Continuando a análise, propomos então a formulação de uma discórdia generalizada, a qual chamamos de discórdia- q , que é baseada na entropia de Tsallis. Provamos que essa nova definição recai na discórdia entrópica usual para $q \rightarrow 1$ e na discórdia geométrica quando $q \rightarrow 2$. Assim, conseguimos um resultado mais geral que descreve as correlações quânticas em sistemas bipartidos e consegue conectar duas formas bem estabelecidas na literatura, a discórdia entrópica e a geométrica.

No quarto capítulo é feita uma análise de um sistema de dois qbits preparados num estado inicial X interagindo com um reservatório de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Através desse modelo analisamos a dinâmica das correlações (como emaranhamento, discórdia) sob *descoerência de fase*, isto é, a perda de fase sem dissipação de energia. Esta aproximação é justificada pelo fato conhecido de que a perda de coerência do sistema geralmente ocorre muito mais rapidamente do que a perda de energia. Nosso modelo simula, portanto, um canal de amortecimento de fase, efeito que não tem análogo clássico direto.

O último capítulo desta dissertação é reservado para um breve sumário, conclusões e discussão de perspectivas.

Conceitos Preliminares

2.1 Fundamentos da Mecânica Quântica

Computação e informação quântica são áreas de pesquisa que estudam a utilização de sistemas quânticos para melhorar a transmissão e o processamento da informação, através de aspectos da natureza que não ocorrem em sistemas clássicos (macroscópicos). Esses sistemas são caracterizados pela mecânica quântica, uma descrição matemática do mundo físico, fundamentada por alguns postulados. Iremos apresentar os postulados necessários para o desenvolvimento do trabalho. O conteúdo desse capítulo é baseado nas referências [11–14].

O primeiro postulado se refere à descrição do estado de um sistema quântico, ou seja, um estado é uma descrição completa de um sistema físico e todo estado quântico é definido através de um vetor estado ($|\psi\rangle$), com norma unitária ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$), pertencente a um espaço vetorial conhecido como espaço de Hilbert (\mathcal{H}).

Um dos principais aspectos da mecânica quântica é o princípio de superposição. Sejam $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$, vetores estados pertencentes a um espaço de Hilbert qualquer \mathcal{H} , então o estado $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\phi_i\rangle$ também é um vetor estado pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , onde os coeficientes c_i são números complexos conhecidos como amplitudes de probabilidade de determinado estado. Ou seja, qualquer estado quântico pode ser descrito como uma combinação linear de outros estados quânticos.

O segundo postulado se refere à dinâmica de um sistema quântico fechado, isto é, sistemas quânticos que não sofrem quaisquer interações com o mundo exterior. A evolução dinâmica de um sistema físico é unitária, gerada por um operador Hermiteano, chamado de Hamiltoniano do sistema. A dinâmica do sistema é governada pela equação de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde H é o operador Hamiltoniano. Trata-se de um operador Hermiteano geralmente obtido a partir da quantização da função Hamiltoniana clássica. O Hamiltoniano do sistema pode depender explicitamente do tempo. Quando isso não acontece, nós podemos integrar formalmente a equação (2.1) para obter

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

onde

$$U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t - t_0)\right], \quad (2.3)$$

t_0 sendo o tempo inicial e $|\psi(t_0)\rangle$ o estado inicial do sistema.

Podemos verificar que $U(t, t_0)$ também satisfaz a equação de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}HU(t, t_0), \quad (2.4)$$

e em $t = t_0$, $U(t, t_0)$ deve satisfazer

$$U(t_0, t_0) = \mathbb{1}. \quad (2.5)$$

Como H é um operador Hermiteano, segue que:

$$U^\dagger(t, t_0) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}H(t - t_0)\right] = U^{-1}(t, t_0), \quad (2.6)$$

o que mostra que $U(t, t_0)$ é um operador unitário. Portanto, podemos dizer que o estado quântico de um sistema físico evolui de um tempo inicial t_0 para um tempo final t através

de uma transformação unitária, implicando num processo determinístico. O operador $U(t, t_0)$ é chamado de *operador evolução temporal* ou propagador.

O terceiro postulado se refere a medidas quânticas, que são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de *operadores de medida*. Estes são operadores que atuam no espaço de estado do sistema sendo medido. O índice m refere-se ao resultado da medida que pode ocorrer no experimento. Se o estado do sistema é $|\psi\rangle$ imediatamente antes da medida, então a probabilidade do resultado m ocorrer numa medida do operador M_m é dado formalmente por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.7)$$

e o estado do sistema logo após a medida é

$$|\psi^m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.8)$$

Os operadores de medida satisfazem a *equação de completeza*,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (2.9)$$

A equação de completeza expressa o fato das probabilidades somarem um:

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = 1. \quad (2.10)$$

Existe ainda, dentro desse postulado, uma classe especial de medidas conhecidas como *medidas projetivas*. Uma medida projetiva é descrita por um *observável*, M , um operador Hermiteano no espaço de estado do sistema observado. O observável tem decomposição espectral,

$$M = \sum_m m P_m, \quad (2.11)$$

onde $P_m = |m\rangle\langle m|$ é o projetor no autoespaço de M com autovalor m . Os possíveis resultados da medida correspondem aos autovalores m do observável. Fazendo uma medida

no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de obter o resultado m é dado por

$$p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle = \sum_n \langle\psi|\phi_n\rangle\langle\phi_n|P_m|\psi\rangle = \sum_n \langle\phi_n|P_m|\psi\rangle\langle\psi|\phi_n\rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|P_m). \quad (2.12)$$

Dado que o resultado m ocorreu, o estado do sistema quântico imediatamente após a medida é

$$|\psi^m\rangle = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (2.13)$$

Medidas projetivas podem ser consideradas como um caso especial do terceiro postulado. Os operadores de medidas projetivas além de satisfazerem a relação de completudeza $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}$, também satisfazem a condição de ortogonalidade, ou seja, os operadores M_m são Hermiteanos e satisfazem a relação $M_m M_{m'} = \delta_{m,m'} M_m$.

O quarto postulado é referente a sistemas compostos, que são sistemas constituídos de duas (ou mais) partes, chamadas usualmente de subsistemas. O espaço de fase do sistema composto é o produto tensorial dos espaços de cada parte, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$.

Para exemplificar esse postulado, vamos considerar um sistema bipartido, com espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , com bases $\{|m^{(1)}\rangle\}$, $m = 1, 2, \dots$ e $\{|n^{(2)}\rangle\}$, $n = 1, 2, \dots$ respectivamente. Logo, os vetores de \mathcal{H} são na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |m^{(1)}\rangle \otimes |n^{(2)}\rangle \equiv \sum_{m,n} c_{mn} |m^{(1)}n^{(2)}\rangle. \quad (2.14)$$

Os produtos escalares desses vetores em \mathcal{H} , supondo a ortonormalidade das bases nos espaços individuais, podem ser obtidos a partir da relação

$$\langle m^{(1)}n^{(2)} | m'^{(1)}n'^{(2)} \rangle \equiv \langle m^{(1)} | m'^{(1)} \rangle \langle n^{(2)} | n'^{(2)} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (2.15)$$

Se $|\psi'\rangle = \sum_{m,n} c'_{mn} |m^{(1)}n^{(2)}\rangle$ é outro vetor de \mathcal{H} , então

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \sum_{m,n} c_{mn}^* c'_{mn} = \langle\psi'|\psi\rangle^*, \quad (2.16)$$

de maneira que a normalização de um vetor de \mathcal{H} corresponde à condição $\langle\psi|\psi\rangle =$

$\sum_{m,n} |c_{mn}|^2 = 1$. Todos os pares de vetores $|\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle$, com $|\phi^{(i)}\rangle \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, fazem parte de \mathcal{H} , porém esse espaço possui também todas as combinações lineares dos produtos tensoriais que, em geral, não podem ser escritos na forma fatorada. Ou seja, em \mathcal{H} vão existir vetores que não podem ser postos na forma

$$\begin{aligned} |\phi^{(1)}\rangle &= \sum_m \gamma_m^{(1)} |m^{(1)}\rangle, & |\phi^{(2)}\rangle &= \sum_n \gamma_n^{(2)} |n^{(2)}\rangle, \\ |\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle &= \sum_{mn} \gamma_m^{(1)} \gamma_n^{(2)} |m^{(1)}n^{(2)}\rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

o coeficiente c_{mn} nem sempre pode ser escrito como um produto $\gamma_m^{(1)} \gamma_n^{(2)}$. Os estados que não podem ser escritos na forma fatorada foram chamados por Schrödinger em 1936 de *estados emaranhados*, os quais serão abordados na seção 2.4.1.

2.2 O qbit

O conceito mais fundamental em informação clássica e computação clássica é o *bit*, o qual pode assumir dois valores diferentes: 0 ou 1. O análogo quântico do bit é o bit quântico ou *qbit*. O qbit é um sistema quântico de dois níveis, como por exemplo, uma partícula de spin 1/2 (como o elétron) ou um átomo de dois níveis. Assim como os bits clássicos, eles possuem dois estados que podemos chamar genericamente de $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (spin up e spin down, respectivamente, para o caso do spin do elétron ao longo de um eixo particular, como o eixo- z). Entretanto, os qbits são essencialmente diferentes dos bits clássicos, pois o estado de um qbit qualquer sempre pode ser escrito como uma combinação linear do tipo

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.18)$$

onde a e b são números complexos normalizados, isto é, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Isso não corresponde a dizer que o qbit assume valores entre 0 e 1. Na verdade ele se encontra numa superposição coerente dos dois estados e, se realizarmos uma medida no qbit para conhecer seu estado, nós o encontraremos no estado $|0\rangle$ com probabilidade $|a|^2$ ou no estado $|1\rangle$ com probabilidade $|b|^2$. Na base computacional, esses estados representam as matrizes

colunas:

$$|0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

A base formada pelos vetores acima é ortonormal e a ela é associado um espaço de Hilbert bidimensional. Além disso, os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são autoestados do operador de Pauli σ_3 com autovalores ± 1 , ou seja,

$$\sigma_3|0\rangle = 1|0\rangle, \quad \sigma_3|1\rangle = -1|1\rangle. \quad (2.20)$$

Os operadores de Pauli σ_1 , σ_2 e σ_3 satisfazem as seguintes relações de comutação e anti-comutação, respectivamente,

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e δ_{ij} é a delta de Kronecker. Na base computacional, os operadores de Pauli σ_1 , σ_2 e σ_3 possuem as seguintes representações matriciais:

$$\sigma_1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

As matrizes de Pauli também satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\sigma_j) &= -1, \\ \text{Tr}(\sigma_j) &= 0, \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \\ \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

É possível descrever rotações em um único qbit através de transformações unitárias.

Estas operações preservam a norma do vetor estado que caracteriza o qbit, ou seja, são rotações que preservam a relação $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Operações desse tipo são representadas por matrizes unitárias 2×2 , e o grupo de simetria associado a essas matrizes é o grupo $SU(2)$. Se \hat{n} é um vetor tridimensional real de módulo unitário, então podemos definir uma rotação θ em torno do eixo definido por \hat{n} pela equação

$$U_{\hat{n}} \equiv e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{\sigma}/2} = \mathbb{1} \cos \frac{\theta}{2} - i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.24)$$

com $\vec{\sigma} = \sigma_1\hat{x} + \sigma_2\hat{y} + \sigma_3\hat{z}$. A rotação dada em (2.24) caracteriza a transformação unitária mais geral que se pode operar sobre um único qbit.

2.3 Operador densidade

Uma outra maneira de modelar sistemas quânticos consiste em utilizar o operador densidade, também conhecido como matriz densidade, pois ele oferece uma descrição conveniente para sistemas quânticos que não são completamente conhecidos. Dessa forma, suponha um sistema quântico para o qual sabemos que o estado pode ser $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i . Podemos chamar $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ de um *ensemble de estados puros*. O operador densidade para o sistema será dado por

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.25)$$

Utilizando o formalismo para o operador densidade, podemos reescrever todos os postulados da mecânica quântica, de forma a generalizar a descrição de problemas físicos. Nessa seção iremos nos dedicar à reformulação desses postulados.

Suponha que a evolução de um sistema quântico fechado seja descrita pelo operador unitário U . Se o sistema estiver inicialmente no estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , então depois da evolução o sistema estará no estado $U|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i . Então, a evolução do operador densidade é dada por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Rightarrow \sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger = U\rho U^\dagger. \quad (2.26)$$

Medidas também são facilmente descritas pelo formalismo do operador densidade. Suponha que realizemos uma medida descrita pelos operadores de medida M_m . Se o estado inicial for $|\psi_i\rangle$, então a probabilidade de obter o resultado m será

$$p(m|i) = \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|). \quad (2.27)$$

Pela lei da probabilidade total, a probabilidade de obter o resultado m é

$$p(m) = \sum_i p(m|i)p_i = \sum_i p_i \text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho). \quad (2.28)$$

Se o estado inicial do sistema for $|\psi_i\rangle$, então o estado após uma medida com resultado m será

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}}. \quad (2.29)$$

Logo, depois de uma medida na qual obtemos o resultado m , temos um ensemble de estados $|\psi_i^m\rangle$ com as respectivas probabilidades $p(i|m)$. O operador densidade correspondente ρ_m é então

$$\rho_m = \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m| = \sum_i p(i|m) \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}. \quad (2.30)$$

Utilizando a regra de Bayes,

$$p(i|m) = \frac{p(m, i)}{p(m)} = \frac{p(m|i)p_i}{p(m)}, \quad (2.31)$$

nas equações (2.27) e (2.28), temos

$$\rho_m = \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.32)$$

Um sistema quântico cujo estado $|\psi\rangle$ é conhecido exatamente está em um *estado puro*. Nesse caso, o operador densidade é simplesmente $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$. Caso contrário, ρ é um *estado misto*, ou seja, uma *mistura* de diferentes estados puros no ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$. Para descrever melhor estados mistos, considere que ρ_i possui um ensemble de estados

puros, $\{p_{ij}, |\psi_{ij}\rangle\}$. Então a probabilidade de estar no estado $|\psi_{ij}\rangle$ é $p_i p_{ij}$. A matriz densidade para o sistema é dada por

$$\rho = \sum_{i,j} p_i p_{ij} |\psi_{ij}\rangle \langle \psi_{ij}| = \sum_i p_i \rho_i. \quad (2.33)$$

Dizemos então que ρ é uma *mistura* de estados ρ_i com probabilidades p_i .

Um operador Hermiteano ρ será um operador densidade associado ao ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se, e somente se, ele satisfizer as condições:

1. Traço unitário.

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1. \quad (2.34)$$

2. Positividade.

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.35)$$

Sabemos que projetores formam uma importante classe de operadores Hermiteanos. Logo, como o operador densidade para estados puros é um projetor, ele também é um operador Hermiteano, $\rho^\dagger = \rho$, e como todo projetor Π satisfaz a propriedade $\Pi^2 = \Pi$, ele satisfaz a relação conhecida como *idempotência*, ou seja, $\rho^2 = \rho$, o que implica que

$$\text{Tr}[\rho^2] = 1. \quad (2.36)$$

A propriedade (2.36) é o critério utilizado para verificar se um estado é puro ou misto, pois a propriedade de idempotência só ocorre para estados puros. Por outro lado, para estados mistos,

$$\text{Tr}[\rho^2] = \text{Tr} \left[\sum_i p_i^2 \rho_i^2 \right] = \sum_i p_i^2 \text{Tr}[\rho_i^2] = \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (2.37)$$

Assim, utilizando todas as propriedades descritas acima, podemos reformular os postulados da mecânica quântica no formalismo do operador densidade:

- **Primeiro postulado:** Associado a qualquer sistema físico isolado está um espaço vetorial complexo com produto interno (espaço de Hilbert \mathcal{H}) conhecido como *espaço de estado* do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu *operador densidade*, que é um operador positivo com traço unitário, atuando no espaço de estado do sistema. Se um sistema quântico está num estado ρ_i com probabilidade p_i , então o operador para o sistema é $\rho = \sum_i p_i \rho_i$.
- **Segundo postulado:** A evolução de um sistema quântico *fechado* é descrito por uma *transformação unitária*. Isto é, o estado ρ do sistema num tempo t_1 é relacionado ao estado ρ' do sistema num tempo t_2 por um operador unitário U que depende somente dos tempos t_1 e t_2 ,

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \quad (2.38)$$

- **Terceiro postulado:** Medidas quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de *operadores de medida*. Estes são operadores atuando no espaço de estado do sistema sendo medido. O índice m se refere ao resultado da medida que pode ocorrer no experimento. Se o estado do sistema quântico é ρ imediatamente antes da medida, então a probabilidade que o resultado m ocorra é dado por

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.39)$$

e o estado do sistema depois da medida é

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.40)$$

Os operadores de medida satisfazem a *equação de completeza*,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (2.41)$$

- **Quarto postulado:** O espaço de estado de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estado dos sistemas físicos componentes, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$.

Considere então um sistema bipartido com subsistemas A e B , cujo estado é descrito

pelo operador densidade ρ^{AB} . Então, se quisermos descrever o estado do subsistema A é necessário realizar uma operação sobre o sistema composto, ou seja, o operador densidade reduzido é definido por

$$\rho^A \equiv \text{Tr}_B(\rho^{AB}), \quad (2.42)$$

onde o traço é um mapa de operadores conhecidos como o *traço parcial* sobre o sistema B . Por exemplo, para uma subclasse especial de operadores em AB , o traço parcial é definido por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.43)$$

onde $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são dois vetores quaisquer em \mathcal{H}_A e $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ são dois vetores quaisquer em \mathcal{H}_B . Além disso, $\text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2|b_1\rangle$ é a operação usual do traço.

2.4 Correlações Quânticas

Existem propriedades conhecidas na mecânica quântica que são utilizadas para transmissão e processamento de informação quântica. Essa característica fundamental quântica é chamada de *emaranhamento*.

Nessa seção iremos definir o emaranhamento para sistemas bipartidos, para que possamos medi-lo em nossa análise para sistemas de dois qbits.

2.4.1 Emaranhamento

Definição

Considere um sistema composto por dois subsistemas A e B , cujos espaços de Hilbert associados são \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Um estado puro $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é dito separável se o estado do sistema puder ser escrito na forma

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.44)$$

caso contrário o estado do sistema é dito *emaranhado*. Um exemplo de estado separável é o estado $|\psi_{AB}\rangle = |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$. Exemplos de estados emaranhados são os estados conhecidos como *estados de Bell*:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.45)$$

Uma propriedade que podemos identificar a partir dos estados acima, é que a propriedade física de cada subsistema é indefinida, isto é, antes de medirmos não podemos afirmar se o estado, por exemplo do subsistema A , é $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. No entanto, o estado global é bem definido. Portanto, não há sentido em falar no estado individual de cada parte. Este fato contrasta com a mecânica clássica, onde sempre podemos considerar os estados individuais de cada parte do sistema, em qualquer situação.

Em sistemas compostos por N partes, uma generalização da definição discutida acima pode ser feita. Entretanto, nesses casos, existem diferentes graus de separabilidade e torna-se necessário distingui-los. Um estado puro de um sistema de N constituintes é dito n -separável (possui n subsistemas não emaranhados) se puder ser escrito como um produto tensorial de n estados:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (2.46)$$

Se $n = N$, o estado é dito completamente separável, já que não há emaranhamento entre quaisquer pares de subsistemas. No entanto, se $n < N$, apenas alguns constituintes estão emaranhados enquanto outras partes do sistema permanecem separáveis.

Partindo da definição de emaranhamento para estados puros, podemos estender o conceito para misturas estatísticas. Assim, uma matriz densidade ρ é dita n -separável se puder ser escrita como uma mistura de estados n -separáveis:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{1,i} \otimes \rho_{2,i} \otimes \cdots \otimes \rho_{n,i}. \quad (2.47)$$

Medida de emaranhamento

Em um estado completamente emaranhado não podemos atribuir um estado definido a qualquer um dos seus constituintes. Esta propriedade é expressa matematicamente

no fato da matriz densidade reduzida de cada componente ser mista, mesmo quando o estado global é puro. Desta forma, é natural pensar que a quantificação da falta de informação sobre cada componente de um par emaranhado possa ser uma boa medida do emaranhamento do par. Para quantificar a ignorância sobre um estado ρ , pode-se usar a entropia de von Neumann (um estudo mais detalhado de medidas entrópicas de emaranhamento é feito na seção 2.5), definida por:

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho], \quad (2.48)$$

onde a base 2 é escolhida pela influência da teoria da informação, onde todos os logaritmos são calculados nesta base.

Para estados puros $S(\rho) = 0$, situação em que o estado é bem definido (a informação é completa) e para misturas estatísticas $S(\rho) \neq 0$. Também podemos definir a entropia como:

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.49)$$

onde λ_i são os autovalores de ρ^1 . O uso da entropia de von Neumann para quantificar emaranhamento foi introduzida por Bennett *et al.* [15]. Basicamente, a quantificação do emaranhamento para sistemas bipartidos puros é feita calculando-se a entropia da matriz densidade reduzida de qualquer um dos dois subsistemas envolvidos; o resultado é o mesmo. Podemos provar essa propriedade utilizando a desigualdade de Araki-Lieb [12],

$$|S(\rho^A) - S(\rho^B)| \leq S(\rho^{AB}) \leq S(\rho^A) + S(\rho^B). \quad (2.50)$$

Se o estado global é puro, então $S(\rho^{AB}) = 0$. A única maneira de satisfazer a primeira desigualdade é exigindo que $S(\rho^A) = S(\rho^B)$.

A esta quantidade baseada na entropia de von Neumann damos o nome de entropia de emaranhamento, $E(\rho)$. Para estados separáveis, $E(\rho) = 0$ e, para estados emaranhados, $0 < E(\rho) \leq \log_2 \mathcal{D}$, onde \mathcal{D} é a dimensão do subsistema. Se $E(\rho) = \log_2 \mathcal{D}$, o estado é dito maximamente emaranhado.

¹No caso de autovalores nulos adotamos $0 \log_2 0 = 0$, resultado que é obtido de $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x$.

O emaranhamento de um estado puro pode ser calculado então por

$$E(\rho^{AB}) = S(\rho^A) = S(\rho^B) = - \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \log_2 \lambda_{\mu}, \quad (2.51)$$

onde λ_{μ} são os autovalores de ρ^A ou ρ^B .

Uma boa medida de emaranhamento $E(\rho)$ deve satisfazer alguns requisitos [16]:

- Se ρ for separável, então $E(\rho) = 0$.
- O grau de emaranhamento de ρ não pode aumentar devido a operações locais e comunicações clássicas². Ou seja, se \mathcal{M} representa um mapa que pode ser implementado por operações locais e informação clássica, então

$$E(\mathcal{M}(\rho)) \leq E(\rho). \quad (2.52)$$

- *Normalização*: O emaranhamento de um estado puro maximamente emaranhado ρ de dimensão $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ deve ser dado por:

$$E(\rho) = \log_2 \mathcal{D}. \quad (2.53)$$

- *Continuidade*: No limite em que a distância entre dois estados tende a zero, a diferença entre seus emaranhamentos deve tender a zero, ou seja,

$$E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0, \quad (2.54)$$

para $\|\rho - \sigma\| \rightarrow 0$, onde $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]}$ é a norma de Hilbert-Schmidt.

- *Aditividade*: O emaranhamento de n cópias idênticas de ρ deve ser igual a n vezes o emaranhamento de uma cópia, ou seja:

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \quad (2.55)$$

²Do termo em inglês *LOCC: local operations and classical communications*. É definido quando uma operação local é realizada em parte do sistema e o resultado é “comunicado” classicamente para a outra parte onde geralmente outra operação local é realizada.

- *Subaditividade*: O emaranhamento do produto tensorial de dois estados não deve ser maior que a soma do emaranhamento de cada estado, isto é:

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma). \quad (2.56)$$

- *Convexidade*: O emaranhamento deve ser uma função convexa, ou seja:

$$E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma), \quad (2.57)$$

para $0 < \lambda < 1$.

O conjunto de requisitos realmente necessários para quantificar o emaranhamento é uma questão em aberto [16, 17]. Na verdade, algumas das propostas existentes na literatura não satisfazem alguns dos requisitos listados acima.

Para estados bipartidos puros, a entropia do estado reduzido é considerada uma boa medida de emaranhamento. Entretanto, para estados mistos $E(\rho)$ não pode mais ser utilizada para quantificar emaranhamento, pois cada subsistema pode ter entropia nula mesmo quando o estado global do sistema é emaranhado. Para estados mistos não existe uma única proposta para quantificar o emaranhamento utilizando essa mesma abordagem.

Dessa forma, foram desenvolvidos alguns quantificadores que se baseiam em propriedades matemáticas das matrizes densidades do sistema. Nessa dissertação iremos focar numa medida conhecida como *concorrência* (adequada para sistemas de dois qbits). Ela foi desenvolvida por Hill e Wootters, para estados de dois qbits de posto 2^3 [18], e, posteriormente, generalizado por Wootters para qualquer estado de dois qbits [19].

Esta função está relacionada com a operação *spin-flip* de ρ dada por:

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y. \quad (2.58)$$

Define-se, então, a concorrência de ρ como

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (2.59)$$

³O posto de uma matriz é o número de autovalores não nulos dela.

onde λ_i são os autovalores em ordem decrescente da matriz $\rho\tilde{\rho}$. $C(\rho)$ é um quantificador de emaranhamento, sendo 0 para estados separáveis e 1 para estados maximamente emaranhados.

2.4.2 Paradoxo EPR e Desigualdades de Bell

Em 1935, Albert Einstein, Natan Rose e Boris Podolsky publicaram um trabalho [1] que definiu um quadro conceitual que ficou conhecido como Paradoxo EPR. Neste artigo, os autores defendem que a mecânica quântica é uma teoria incompleta, ou seja, ela não possui os requisitos necessários para que seja aceita como uma teoria física. A ideia fundamental que está por trás do artigo de EPR é o conceito de realismo local, ou seja, a hipótese de que, numa teoria completa, os objetos físicos possuem propriedades definidas que independem do processo de observação (elemento de realidade), e de que uma medida feita por um observador não pode influenciar medidas feitas por outro observador, se eles estiverem separados de tal forma que a troca de informações entre eles seja impossível (causalidade).

Assim, define-se o paradoxo EPR: se condições aparentemente razoáveis, tais como localidade e realismo, forem introduzidas na mecânica quântica, obteremos uma contradição. Para exemplificar o paradoxo vamos utilizar a formulação feita por David Bohm [20], que é mais simples que a formulada inicialmente em [1]. Considere o estado singleto de duas partículas, A e B , de spin $1/2$, que se encontram afastadas espacialmente:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle), \quad (2.60)$$

onde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são os autoestados do spin na direção \hat{z} , com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente. Como o singleto é invariante quando as mesmas rotações são aplicadas nos dois sistemas, vamos escrevê-los em termos dos autoestados de spin numa direção \vec{v} arbitrária, de forma que

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_A -_B\rangle - |-_A +_B\rangle), \quad (2.61)$$

onde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ são os autoestados do spin na direção \vec{v} , com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente. Se realizarmos uma medida do mesmo observável nos dois sistemas,

os resultados sempre serão anti-correlacionados, isto é, se encontrarmos $+\hbar/2$ para A , o resultado para B será $-\hbar/2$.

Agora considere que S_z tenha sido medido para a partícula A e que o resultado $+\hbar/2$ tenha sido obtido. Então, se medirmos S_z em B , o resultado certamente será $-\hbar/2$. Uma vez que as duas partes estão afastadas espacialmente, o fato de medirmos o sistema A não deveria perturbar o sistema B . Concluimos portanto, que mesmo sem realizar a medição em B , podemos determinar o valor de S_z com probabilidade 1. Assim, segundo o critério de EPR, S_z é um elemento de realidade do sistema B . Usando a mesma lógica para S_x , podemos concluir que S_x também é um elemento de realidade em B .

Se considerarmos que a medida de uma componente de spin no sistema A não pode perturbar o sistema B , e que A pode escolher qualquer direção para a medida que o resultado em B poderá ser determinado com probabilidade 1, encontramos uma maneira de determinar o spin da partícula B nas direções x ou z sem perturbá-la, ou seja, sem realizar nenhuma medida. Portanto, segundo o critério de EPR, deve haver, simultaneamente, elementos de realidade correspondentes ao spin da partícula B nas direções x e z .

Porém, sabemos que S_z e S_x são operadores que não comutam, ou seja, $[S_z, S_x] \neq 0$. Não é possível definir um estado quântico em que os resultados das medições de ambos os observáveis possam ser determinados simultaneamente. Logo, de acordo com a hipótese de EPR, essa impossibilidade faz com que a mecânica quântica seja considerada uma teoria incompleta. A hipótese levantada é que deve haver uma teoria mais completa, compatível com a mecânica quântica, que explique esses elementos de realidade.

Para resolver esse paradoxo e tornar a mecânica quântica compatível com a hipótese de realismo local, foi postulada a existência de um conjunto de variáveis conhecidas como “variáveis ocultas”. Um modelo de variáveis ocultas seria capaz de reproduzir todas as previsões da mecânica quântica sem apresentar a contradição apontada por EPR. Ou seja, a teoria de variáveis ocultas nos prega que a teoria quântica não é incompleta, mas falta-nos informação sobre todas as variáveis que determinam o estado do sistema. Se elas fossem conhecidas, então poderíamos reproduzir todos os resultados quânticos utilizando alguma teoria clássica local.

Entretanto, em 1964, John Bell [2] descobriu uma maneira de testar a compatibilidade da teoria de variáveis ocultas na mecânica quântica utilizando os argumentos propostos

por EPR. Bell demonstrou que estados emaranhados violam as premissas de EPR, e a mecânica quântica passou a ser considerada *não-local*, ou seja, não existe nenhuma teoria local de variáveis ocultas que consiga reproduzir os resultados da teoria quântica. A partir desse teste apareceram generalizações que ficaram conhecidas como *desigualdades de Bell* e que foram verificadas experimentalmente. Os primeiros experimentos que comprovaram as previsões de Bell foram realizados por Freedman e Clauser [21] em 1972, e por Aspect *et. al.* [3] em 1982. Até os dias atuais são feitos diversos experimentos que demonstram que estados emaranhados violam as desigualdades de Bell.

A desigualdade de Bell mais conhecida é a proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt [22] em 1969. Podemos deduzir essa desigualdade de maneira simples utilizando o seguinte exemplo: os qbits de um par emaranhado são enviados para laboratórios distintos, um para Alice e outro para Bob. Alice pode medir um de dois observáveis (incompatíveis) A e A' , enquanto Bob pode medir B ou B' (também são observáveis incompatíveis). Suponha que os observáveis A , A' , B e B' assumem valores ± 1 e sejam funções de variáveis ocultas aleatórias.

Se A e A' tiverem o mesmo sinal, então $A + A' = \pm 2$ e $A - A' = 0$; se tiverem sinais diferentes, então $A + A' = 0$ e $A - A' = \pm 2$. Portanto

$$B_{\text{CHSH}} \equiv (A + A')B + (A - A')B' = \pm 2. \quad (2.62)$$

A hipótese de variáveis ocultas é implementada ao assumirmos que os valores ± 1 podem ser atribuídos simultaneamente para as quatro observáveis, mesmo quando é impossível medir ambos A e A' , ou ambos B e B' . Assim

$$|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle| \leq \langle |B_{\text{CHSH}}| \rangle = 2, \quad (2.63)$$

de modo que

$$|\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 2. \quad (2.64)$$

Este resultado é conhecido como *desigualdade CHSH* (de Clauser-Horne-Shimony-Holt). Isso se verifica para quaisquer variáveis aleatórias A, A', B, B' assumindo valores ± 1 que são governadas por uma distribuição de probabilidade conjunta.

Para ver que a mecânica quântica viola a desigualdade CHSH, faça A, A' denotarem os operadores Hermiteanos

$$A = \vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a}, \quad A' = \vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a}', \quad (2.65)$$

referente ao qbit em posse de Alice, onde \hat{a}, \hat{a}' são vetores tridimensionais. Similarmente, sejam B, B' dados por

$$B = \vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}, \quad B' = \vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}', \quad (2.66)$$

referente ao qbit de Bob. Cada observável tem autovalores ± 1 , os quais, portanto, devem ser os resultados possíveis numa medida do observável.

Observe que, se Alice e Bob compartilham o estado maximamente emaranhado $|\psi^-\rangle$, então

$$\langle \psi^- | (\vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{a}) (\vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{b}) | \psi^- \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b} = -\cos \theta, \quad (2.67)$$

onde θ é o ângulo entre \hat{a} e \hat{b} . Considere o caso onde $\hat{a}', \hat{b}, \hat{a}, \hat{b}'$ são coplanares e separados por sucessivos ângulos de 45° . Então as previsões da mecânica quântica são

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle = \langle a'b \rangle = \langle ab' \rangle &= -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle a'b' \rangle &= -\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

A desigualdade CHSH então se torna

$$4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \not\leq 2. \quad (2.69)$$

Claramente, a desigualdade é violada pela previsão da mecânica quântica.

As desigualdades de Bell são utilizadas teórica e experimentalmente até os dias atuais para indicar correlações entre sistemas. Ou seja, se os sistemas não estão emaranhados, eles não violam nenhuma desigualdade de Bell. Porém, foi mostrado pela primeira vez por Werner [23], em 1989, que existem estados mistos emaranhados (não-separáveis) que também não violam nenhuma desigualdade, fazendo com que o emaranhamento seja con-

siderado como um indicador mais apropriado para a existência de correlações quânticas entre sistemas, enquanto que as desigualdades sejam indicadores de correlações quânticas não-locais.

2.5 Entropias

Para o desenvolvimento do trabalho, vamos descrever diferentes entropias que serão utilizadas na abordagem do capítulo 3. Como já foi enunciado antes, a entropia de von Neumann é um bom quantificador de emaranhamento para estados puros, mas existem outras medidas entrópicas que também podem ser utilizadas nesse sentido. Entre elas estão a entropia linear, a entropia de Rényi, a entropia de Tsallis, etc. Nessa seção apresentaremos algumas propriedades dessas entropias.

2.5.1 Entropia de von Neumann

Em 1927, von Neumann propôs uma extensão da entropia clássica de Boltzmann e Gibbs para a mecânica quântica,

$$S(\rho) = -k_B \text{Tr}[\rho \log(\rho)], \quad (2.70)$$

sendo k_B a constante de Boltzmann, que será considerada igual a um, o que corresponde a medir a temperatura em ergs ao invés de Kelvin para tornar a entropia uma quantidade adimensional.

A função (2.70) só pode ser “corretamente” definida [24] na mecânica quântica, na qual não há ambiguidade na definição do conceito de microestados acessíveis ao sistema. Para exemplificarmos esse aspecto, considere que o operador densidade de um sistema seja dado por

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |k\rangle\langle k|, \quad (2.71)$$

isto é, um sistema maximamente misturado, já que todos os estados puros $|k\rangle\langle k|$ são

obtidos com a mesma probabilidade. A entropia de von Neumann para esse estado é

$$S(\rho) = \log N. \quad (2.72)$$

Logo, a entropia de von Neumann é um quantificador do número de estados puros acessíveis ao sistema. A entropia será nula somente no caso de um estado puro, que é a situação em que se conhece completamente o estado do sistema.

A entropia de von Neumann é conceitualmente bem definida, porém sua utilização pode ser complicada pois depende do processo de diagonalização de ρ , que nem sempre é uma operação simples de ser feita, mesmo numericamente. Essa questão será importante no próximo capítulo quando será necessário utilizar a entropia de von Neumann para o cálculo de correlações. Será conveniente introduzirmos uma função entrópica mais simples, a *entropia linear*.

2.5.2 Entropia linear

Em 1957, U. Fano publicou um artigo [25] que apontava a potencialidade da grandeza $\text{Tr}[\rho^2]$ como medida de informação para o caso de estados globais puros. Mais tarde, levando em conta o fato de que estados puros tem a propriedade de idempotência (2.36), vários trabalhos [26–28] utilizaram o conceito de *entropia linear*,

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}[\rho^2]. \quad (2.73)$$

Esta medida, também chamada de defeito de idempotência, traz as mesmas informações conceituais da entropia de von Neumann em relação à pureza e à separabilidade quando aplicada a sistemas globalmente puros.

Alguns limites particulares mostrando a equivalência conceitual com a entropia de von Neumann podem ser facilmente ilustrados. Por exemplo, para um estado puro normalizado ($\text{Tr}[\rho] = 1$), vale a condição de idempotência $\rho^2 = \rho$, e conseqüentemente $S_L = 0$, o que também acontece para a entropia de von Neumann. Por outro lado, se ρ não é idempotente, então $0 \leq \text{Tr}[\rho^2] < 1$, e fatalmente $0 < S_L \leq 1$. Apesar da equivalência qualitativa (ambas são zero ou ambas são positivas), as entropias em geral não têm a mesma

amplitude. Usando o mesmo exemplo do operador densidade completamente misturado, encontramos para a entropia linear $S_L = 1 - \frac{1}{N}$, enquanto $S = \log N$. Esses resultados mostram que

$$0 \leq S_L \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq S \leq \infty. \quad (2.74)$$

2.5.3 Entropia de Rényi

Em 1960, Alfréd Rényi definiu uma família de funcionais para quantificar a diversidade, incerteza ou aleatoriedade de um sistema [29]. A entropia de Rényi de ordem α é definida para $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, como sendo

$$S_R^\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad (2.75)$$

onde X é uma variável discreta, p_i é a probabilidade do evento $X = x_i$. Se as probabilidades forem todas as mesmas então todas as entropias de Rényi da distribuição são iguais, com $S_R^\alpha(X) = \log n$. Caso contrário as entropias são fracamente decrescentes em função de α .

O análogo quântico para a entropia de Rényi, pode ser escrito como

$$S_R^\alpha(\rho) = \frac{1}{1 - \alpha} \log \text{Tr}(\rho^\alpha), \quad (2.76)$$

onde ρ é o operador densidade do sistema. No limite em que $\alpha \rightarrow 1$, obtemos a entropia de von Neumann:

$$S_R^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \alpha} \log \text{Tr}(\rho^\alpha) = -\text{Tr}(\rho \log \rho). \quad (2.77)$$

A entropia de Rényi também pode ser utilizada para quantificar emaranhamento. Para este fim costuma-se utilizar a entropia de Rényi para $\alpha = 2$, pois satisfaz a maioria das condições enumeradas na seção 2.4.1.

Neste capítulo fizemos a apresentação de conceitos preliminares necessários para o entendimento dessa dissertação. Iniciamos com a apresentação de alguns postulados da

mecânica quântica, a definição de qbit e uma descrição do que são correlações quânticas e como quantificá-las. Para finalizar, descrevemos algumas medidas entrópicas que serão essenciais no desenvolvimento do próximo capítulo.

Discórdia Quântica e Medidas Alternativas

No capítulo anterior, abordamos duas maneiras de avaliar a presença de correlações entre sistemas quânticos, o emaranhamento e as desigualdades de Bell. Esses dois conceitos foram utilizados largamente até final do século XX para indicar a existência de correlações *não-locais* em sistemas quânticos. Enquanto o emaranhamento está definido como a não-separabilidade dos estados num sistema composto, as desigualdades de Bell são testes baseados na hipótese de existência de uma teoria local com “variáveis ocultas”. Como existem estados emaranhados que não violam as desigualdades de Bell, estas últimas são modernamente encaradas como medidores da não-localidade do estado, embora não haja ainda uma teoria bem definida para a quantificação desta noção. O emaranhamento, por sua vez, recurso essencial da ciência da informação quântica, é considerado como um quantificador de correlações exclusivamente quânticas de um estado.

Em 2001, Zurek e Ollivier [4] e, independentemente, Henderson e Vedral [5], utilizando conceitos de teoria da informação, demonstraram que existem correlações que não são capturadas por medidas de emaranhamento, ou seja, mesmo quando há separabilidade de estados ainda existem correlações “puramente” quânticas que podem ser usadas em processos de computação quântica. Esse novo quantificador de correlações ficou conhecido como *discórdia quântica*, descrita em detalhes na seção 3.1. A partir destes trabalhos iniciou-se uma busca para entender o significado físico dessas correlações e novos quantificadores foram propostos como, por exemplo, a *discórdia geométrica* [6].

Como veremos na próxima seção, a discórdia quântica depende da realização de uma

medida em um dos subsistemas, e como a base da medida não é única, propôs-se uma otimização sob a que menos “perturbe” o sistema. Esse procedimento não é simples de ser feito, mesmo numericamente. Além disso, a discórdia é fundamentada na entropia de von Neumann, que requer a solução da equação de autovalores do sistema aumentando ainda mais a complexidade dos cálculos. Motivados por esta dificuldade, definimos como objetivo desta dissertação a proposição e investigação de formulações alternativas para a discórdia. Em particular, como primeira abordagem, adotaremos a estratégia de substituímos a medida entrópica da discórdia por outra mais simples, como a entropia linear e a entropia de Rényi. A escolha destas entropias se deve ao fato de que elas dependem apenas da pureza do sistema, $\text{Tr}(\rho^2)$, que é facilmente obtida para qualquer sistema bipartido.

Neste capítulo iremos apresentar a discórdia entrópica original (definida por Zurek e Ollivier [4]) e a discórdia geométrica [6]. Essas medidas de correlação valem para sistemas bipartidos, mas vamos focar nossa abordagem da troca de entropias para estados de dois qbits, mais especificamente para uma sub-classe de estados conhecidos como estados X [10].

Para finalizar, partindo dos resultados obtidos para estados X, vamos propor uma discórdia generalizada baseada na entropia de Tsallis [30], uma generalização de entropias em função de um parâmetro q , que se torna a entropia de von Neumann quando $q \rightarrow 1$ e a entropia linear quando $q \rightarrow 2$. Mostraremos que essa nova definição da discórdia reproduz todos os resultados das discórdias entrópica e geométrica apenas variando o parâmetro q .

3.1 Discórdia para sistemas bipartidos

3.1.1 Discórdia quântica

Em teoria da informação clássica [31] a entropia $H(A) = -\sum_a p_a \log_2(p_a)$, conhecida como entropia de Shannon, descreve a ignorância sobre uma variável aleatória A . A correlação entre duas variáveis aleatórias A e B é medida pela informação mútua,

$$J(A : B) = H(A) - H(A|B), \quad (3.1)$$

onde $H(A|B) = \sum_b p_b H(A|b)$ é a entropia condicional de A dado que foi feita uma medida do valor de B . Todas as distribuições de probabilidade são derivadas da probabilidade conjunta, $p_{A,B}$:

$$p_A = \sum_b p_{A,b}, \quad p_B = \sum_a p_{a,B}, \quad (3.2)$$

$$p_{A|b} = \frac{p_{A,b}}{p_b} \quad (\text{regra de Bayes}). \quad (3.3)$$

De acordo com a regra de Bayes, $p_{A|b}$ se refere ao conhecimento disponível sobre uma variável aleatória A depois que um dado resultado b foi medido para a variável B . Por outro lado, $p_{A|b}$ e p_b representam, respectivamente, a probabilidade de $A \cap (B = b)$ e a probabilidade do resultado b , sem referência à medida. Eles podem ser considerados como o conhecimento prévio ao processo de inferência. De $p_{A|b} = (p_{A,b}/p_A p_b) p_A$ vemos como o conhecimento prévio p_A é atualizado após uma medida em B , contanto que A e B sejam eventos dependentes. Para distribuições independentes, $p_{A,B} = p_A p_B$, de modo que $H(A|B) = H(A)$.

Assim, vemos que a informação mútua $J(A : B)$ corresponde ao desvio da situação de “independência”. Logo, é uma medida das correlações entre A e B . Isto é, a informação mútua mede a diminuição média da entropia em A quando fazemos uma medida B . Usando a regra de Bayes (3.3), temos que

$$H(A|b) = - \sum_a p_{a|b} \log_2(p_{a|b}) = - \sum_a \frac{p_{a,b}}{p_b} \log_2 \left(\frac{p_{a,b}}{p_b} \right), \quad (3.4)$$

a qual nos permite reescrever a entropia condicional na forma

$$\begin{aligned} H(A|B) &= - \sum_b p_b \sum_a \frac{p_{a,b}}{p_b} \log_2 \left(\frac{p_{a,b}}{p_b} \right) \\ &= - \sum_{a,b} p_{a,b} \log_2(p_{a,b}) + \sum_b p_b \log_2(p_b) \\ &= H(A, B) - H(B). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim temos uma expressão classicamente equivalente para a informação mútua:

$$I(A : B) = H(A) + H(B) - H(A, B). \quad (3.6)$$

Nessa forma, observamos que não é necessário fazer uma medida do valor de B . A informação mútua pode ser obtida através da entropia de cada variável e da entropia conjunta $H(A, B)$. Logo, classicamente, essas duas expressões são idênticas:

$$I(A : B) = J(A : B). \quad (3.7)$$

A ideia para a discórdia quântica é a generalização do conceito de informação mútua para sistemas quânticos. Suponha um sistema bipartido AB descrito pela matriz densidade $\rho \equiv \rho^{AB}$ e os subsistemas A, B com matrizes densidades reduzidas ρ^A, ρ^B , onde $\rho^A = \text{Tr}_B[\rho^{AB}]$ e $\rho^B = \text{Tr}_A[\rho^{AB}]$. A informação mútua pode ser usada mais uma vez para quantificar as correlações totais entre A e B . Um análogo quântico da expressão (3.6) é

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}), \quad (3.8)$$

onde $S(\rho^A)$ é a entropia do subsistema A , $S(\rho^B)$ é a entropia do subsistema B e $S(\rho^{AB})$ é a entropia do sistema. Usualmente, utiliza-se a entropia de von Neumann $S_{vN}(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho]$ como medida de entropia devido à sua associação direta com a entropia clássica de Shannon.

Para a versão quântica de (3.1), foi proposto [4] que

$$J(\rho^{AB}) = S(\rho^A) - S(\rho^{A|B}), \quad (3.9)$$

onde a entropia condicional quântica $S(\rho^{A|B})$ depende de qual observável medimos em B . Ou seja, é preciso especificar a medida, o que é feito formalmente e, de forma geral, através da utilização dos elementos $POVM$ ¹. Dentro desse conjunto de medidas, existe uma classe conhecida como medida projetiva von Neumann, definida por operadores de

¹Do termo em inglês *positive-operator valued measure* [12], que são operadores de medida cujos resultados são positivos definidos.

projeção. Essa medida em B projeta o sistema num ensemble estatístico $\{p_k, \rho_k\}$, tal que

$$\rho \rightarrow \rho_k = \frac{(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)\rho^{AB}(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)}{p_k}, \quad (3.10)$$

$$p_k = \text{Tr} [(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)\rho^{AB}(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)]. \quad (3.11)$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço total e a idempotência do projetor P_k^B , podemos reescrever a equação (3.11) na forma

$$p_k = \text{Tr} [\rho^{AB}(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)]. \quad (3.12)$$

Observe que ρ_k tem traço unitário e $\sum_k p_k = 1$.

A matriz densidade condicional $\rho^{A|k}$ é obtida através de um traço parcial no sistema B ,

$$\rho^{A|k} = \text{Tr}_B \left[\frac{(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)\rho^{AB}(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)}{p_k} \right]. \quad (3.13)$$

Embora em teoria de informação clássica as duas formas de se calcular a informação mútua sejam equivalentes (3.7), o mesmo não ocorre quando analisamos sistemas quânticos, porque a medida altera o estado do sistema. A partir dessa análise podemos definir a discórdia quântica como sendo a mínima diferença entre essas expressões, uma maneira de capturar correlações “puramente” quânticas. Matematicamente,

$$\begin{aligned} D(\rho^{AB}) &= \min_{\{P_k^B\}} [I(\rho^{AB}) - J(\rho^{AB})] \\ &= S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + \min_{\{P_k^B\}} \sum_k p_k S(\rho^{A|k}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde o processo de minimização é feito para que a fórmula final da discórdia não dependa da escolha do conjunto de projetores de medida. Logo, define-se a discórdia quântica como sendo o resultado obtido para a diferença das informações mútuas no caso em que a medida produz o menor desvio.

A equação (3.14) é conhecida como “discórdia quântica”. Podemos notar que essa

expressão é assimétrica, pois

$$S(\rho^A) - S(\rho^{A|B}) \neq S(\rho^B) - S(\rho^{B|A}). \quad (3.15)$$

Realizar a medida no sistema B , ao invés do sistema A é perfeitamente legítimo, mas o resultado, em geral, é um valor diferente da discórdia. Uma discussão mais detalhada desse aspecto é feita em [32] e uma proposta de generalização simétrica, válida inclusive para sistemas multipartidos, pode ser encontrada em [33]. Neste trabalho, focamos na versão assimétrica que apresentamos aqui, mas uma possível generalização dos nossos resultados para a versão simétrica pode ser obtida e analisada posteriormente.

Foi verificado que não somente estados emaranhados, mas quase todos os estados separáveis possuem discórdia quântica não nula [34], ou seja, são afetados pelo processo de medida, exibindo correlações quânticas. Para o caso de estados puros, a discórdia se reduz à entropia marginal de um dos dois subsistemas e, dessa forma, à medida de emaranhamento. A discórdia quântica para todos os estados de dois qbits satisfaz

$$0 \leq D(\rho^{AB}) \leq 1. \quad (3.16)$$

Uma ilustração interessante das correlações discutidas acima realizada por Olliveir e Zurek [4] é dada para o estado de Werner [23]:

$$\rho = \frac{1-z}{4} \mathbb{1} + z|\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}. \quad (3.17)$$

Neste caso, os resultados na figura 3.1 mostram que, para valores de $z \leq 1/3$, o estado é separável (não-emaranhado), mas possui discórdia não nula. Fica claro nesse exemplo que a discórdia “revela” que ainda existem correlações quânticas mesmo quando não há emaranhamento.

3.1.2 Discórdia geométrica

Recentemente, por causa da dificuldade no cálculo da discórdia quântica, foi proposta uma nova medida de correlação para estados gerais de dois qbits conhecida como discórdia geométrica [6].

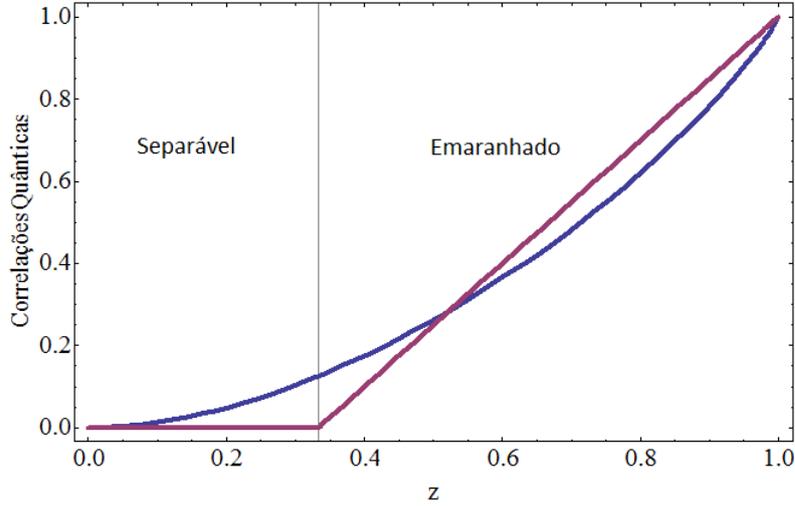


Figura 3.1: Discórdia (linha azul) e emaranhamento (linha vermelha) em função do parâmetro de pureza z para o estado de Werner.

Considere um sistema bipartido AB no qual se pretende realizar uma medida no subsistema B . A maioria dos estados (emaranhados ou separáveis) são perturbados pela medida; entretanto existe uma subclasse de estados que é invariante e apresenta discórdia nula. Esta é a classe dos estados conhecidos como *clássicos-quânticos* [35], os quais são escritos na forma

$$\chi = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes |i\rangle\langle i|, \quad (3.18)$$

onde p_i é uma distribuição de probabilidade, ρ_i^A é a matriz densidade reduzida de A e $\{|i\rangle\}$ é um conjunto de vetores ortonormal em \mathcal{H}_B . Um estado clássico-quântico não é afetado pela medida em B de nenhuma maneira.

Este estado pode ser interpretado da seguinte forma. Suponha que saibamos que o observável do subsistema B será medido na base $\{|i\rangle\}$ mas que não nos seja revelado o resultado obtido. Diante da informação da base escolhida, tudo o que podemos dizer é que o estado após a medida será $\rho_i^A \otimes |i\rangle\langle i|$ com probabilidade p_i . Em média, após várias medidas *não lidas*, tudo o que poderemos dizer é que o estado será dado por χ . Este tipo de interpretação auxilia na definição de uma interpretação operacional para a discórdia [7].

Sendo Ω o conjunto de estados clássicos-quânticos de dois qbits e χ um elemento genérico deste conjunto, a discórdia geométrica $D_G(\rho)$ é definida como a distância entre

o estado ρ e o estado clássico-quântico mais próximo, isto é,

$$D_G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega} \|\rho - \chi\|^2, \quad (3.19)$$

onde $\|A\|^2 = \text{Tr}[AA^T]$ é o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt da matriz A .

Assim, a discórdia geométrica (3.19) é baseada numa medida de distância entre estados quânticos, enquanto a discórdia entrópica (3.14) baseia-se numa diferença entre medidas de informação. Apesar de terem naturezas diferentes, essas duas medidas capturam correlações de mesma natureza. Uma análise nesse sentido foi realizada por Girolami e Adesso em [36].

3.2 Sistemas de dois qbits

Considere um sistema de dois qbits com espaço de Hilbert $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2$ e base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Na representação de Bloch, qualquer estado para esse sistema pode ser parametrizado como [37]:

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{y} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (3.20)$$

onde $\mathbb{1}^{AB}$ é a matriz identidade para o sistema composto, $\mathbb{1}^A$ e $\mathbb{1}^B$ são as matrizes identidade para o subsistemas A e B , respectivamente. $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sendo as matrizes de Pauli nas direções x, y, z . $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e t_{ij} são números reais que denotam os elementos na matriz de correlação T .

Se realizarmos operações unitárias locais podemos reescrever esse sistema numa forma mais simples [38]. O estado ρ é localmente equivalente a²

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right). \quad (3.21)$$

Neste formato, a matriz densidade é completamente definida por nove parâmetros reais arranjados em vetores tridimensionais, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

²Os detalhes dessa transformação são apresentados no Apêndice A.

Todo estado de dois qbits pode então ser simplificado na sua forma normal através de transformações locais unitárias (que preservam emaranhamento e correlações em geral, por definição). Assim, podemos restringir nossa análise para matrizes densidades da forma (3.21) sem qualquer perda de generalidade.

3.2.1 Estados X

Como vimos, o cálculo da discórdia nem sempre é um processo simples, principalmente pelo fato de ser necessária uma otimização em termos da medida que menos perturbe o sistema. Dessa forma, será conveniente considerar também estados mais simples em nossa análise. Para estudos de caso utilizaremos os estados X [10], os quais recebem este nome devido à forma da matriz densidade. A matriz densidade de um estado X de dois qbits, na base computacional, pode ser escrita na forma

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Para que represente um estado físico, a equação (3.22) deve satisfazer as condições de traço unitário, $\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} = 1$, e positividade, $\rho_{22}\rho_{33} \leq |\rho_{23}|^2$ e $\rho_{11}\rho_{44} \leq |\rho_{14}|^2$. Os estados X são emaranhados se, e somente se, $\rho_{22}\rho_{33} < |\rho_{23}|^2$ ou $\rho_{11}\rho_{44} < |\rho_{14}|^2$.

Para reescrevermos essa classe de estados utilizando a definição da matriz densidade dada em (3.21), basta empregarmos a seguinte parametrização:

$$\rho_X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - a_3 - b_3 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - a_3 + b_3 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 + a_3 - b_3 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

que satisfaz automaticamente a condição do traço.

Vamos iniciar nossa análise da discórdia quântica via diferentes entropias, assim como da discórdia geométrica, utilizando uma família de estados X mais simples, com marginais

maximamente misturadas. Essa classe de estados pode ser descrita como

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right), \quad (3.24)$$

onde c_j são constantes reais e $\rho^A = \rho^B = \mathbb{1}/2$ são as matrizes reduzidas para cada subsistema. Podemos reescrever a equação (3.24) na forma matricial, ou seja,

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Os autovalores para esse estado são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3), \\ \lambda_1 &= \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde os coeficientes c_j devem satisfazer a condição na qual $\lambda_l \in [0, 1]$, que garante a positividade da matriz densidade e a propriedade de traço unitário.

Para a pureza do estado global temos que

$$\text{Tr}[(\rho^{AB})^2] = \frac{1}{4} \left(1 + \sum_{j=1}^3 c_j^2 \right). \quad (3.27)$$

Calculando a informação mútua (3.8) para a matriz densidade (3.24), obtemos

$$I_{vN}(\rho^{AB}) = 2 + \sum_{l=0}^3 \lambda_l \log_2[\lambda_l] \quad (3.28)$$

via entropia de von Neumann, $S_{vN}(\rho) = -\sum_j \log_2[\lambda_j]$,

$$I_R(\rho^{AB}) = \log_2 \left[1 + \sum_{j=1}^3 c_j^2 \right] \quad (3.29)$$

via entropia de Rényi, $S_R(\rho) = -\log_2[\text{Tr}(\rho^2)]$, e

$$I_L(\rho^{AB}) = \left[1 + \sum_{j=1}^3 c_j^2 \right] \quad (3.30)$$

via entropia linear, $S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2)$.

Agora é preciso calcular a informação mútua após realizar uma medida em um dos subsistemas. Para isso, utiliza-se uma medida generalizada von Neumann, dada por

$$\begin{aligned} P_k^B &= V \Pi_k V^\dagger, \\ \Pi_k &= |k\rangle\langle k|, \quad k = 0, 1 \\ V &\in SU(2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde V é unitário e é dado por

$$V = v_0 \mathbb{1}^B + i\vec{v} \cdot \vec{\sigma}^B, \quad (3.32)$$

com $v_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e $v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Os operadores de medida P_k^B consistem em projetores arbitrários, obtidos através de uma rotação genérica induzida pelo operador unitário V . A base $|k\rangle$ refere-se à base computacional,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Assim, utilizando as equações (3.11) e (3.13), obtemos os estados reduzidos de A após a realização de uma medida em B . Para os estados X com marginais maximamente misturadas, as matrizes reduzidas para os dois valores possíveis de k são, com probabili-

dades $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\rho^{A|0} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + c_1 z_1 \sigma_1 + c_2 z_2 \sigma_2 + c_3 z_3 \sigma_3), \\ \rho^{A|1} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - c_1 z_1 \sigma_1 - c_2 z_2 \sigma_2 - c_3 z_3 \sigma_3),\end{aligned}\tag{3.34}$$

onde

$$\begin{cases} z_1 & := 2(-v_0 v_2 + v_1 v_3), \\ z_2 & := 2(v_0 v_1 + v_2 v_3), \\ z_3 & := v_0^2 + v_3^2 - v_1^2 - v_2^2. \end{cases}$$

Para calcular a informação mútua após realizar uma medida na parte B , precisamos calcular a entropia das matrizes densidade condicionais, e para a entropia de von Neumann obtemos

$$\begin{aligned}S_{vN}(\rho^{A|k}) &= p_0 S_{vN}(\rho^{A|0}) + p_1 S_{vN}(\rho^{A|1}) \\ &= -\frac{1-\theta}{2} \log_2 \left[\frac{1-\theta}{2} \right] - \frac{1+\theta}{2} \log_2 \left[\frac{1+\theta}{2} \right],\end{aligned}\tag{3.35}$$

de forma que a informação mútua (3.9) se reduz a

$$\begin{aligned}J_{vN}(\rho^{AB}) &= 1 + \frac{1-\theta}{2} \log_2 \left[\frac{1-\theta}{2} \right] + \frac{1+\theta}{2} \log_2 \left[\frac{1+\theta}{2} \right] \\ &= \frac{1-\theta}{2} \log_2 [1-\theta] + \frac{1+\theta}{2} \log_2 [1+\theta],\end{aligned}\tag{3.36}$$

onde

$$\theta := \sqrt{|c_1 z_1|^2 + |c_2 z_2|^2 + |c_3 z_3|^2},\tag{3.37}$$

depende da medida $\{P_k^B\}$ ou, equivalentemente, dos parâmetros de V .

Pode ser verificado diretamente que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$. Definindo

$$c := \max \{|c_1|, |c_2|, |c_3|\},\tag{3.38}$$

podemos construir uma desigualdade para θ ,

$$\theta \leq \sqrt{|c|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)} = c, \quad (3.39)$$

de forma que

$$\sup_{\{P_k^B\}} \theta = \sup_V \theta = c. \quad (3.40)$$

Logo, o valor máximo de θ , e consequentemente de $J_{vN}(\rho^{AB})$, depende do valor máximo entre $|c_1|$, $|c_2|$ e $|c_3|$.

Finalmente, podemos escrever uma expressão analítica para a discórdia (3.14), depois de ter sido feita a otimização sobre a medida,

$$\begin{aligned} D_{vN}(\rho^{AB}) &= \frac{1}{4}[(1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \\ &\quad + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3)] \\ &\quad + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3)] \\ &\quad + (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 - c_3)] \\ &\quad - \frac{1 - c}{2} \log_2(1 - c) - \frac{1 + c}{2} \log_2(1 + c). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Esse resultado foi obtido por Luo em [38].

Agora, fazendo o mesmo procedimento, porém com a entropia de Rényi ao invés da entropia de von Neumann, conseguimos o seguinte resultado,

$$D_R(\rho^{AB}) = \log_2 \left(1 + \sum_{j=1}^3 c_j^2 \right) - \log_2(1 + c^2), \quad (3.42)$$

e, de maneira análoga, com a entropia linear, obtemos

$$D_L(\rho^{AB}) = \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 c_j^2 - 1 \right) + \frac{1}{2}(1 - c^2). \quad (3.43)$$

Analiticamente, podemos observar que a estrutura da discórdia de Rényi (3.42) e da

discórdia linear³ (3.43) são muito mais simples se comparadas com a discórdia usual. Porém, precisamos verificar a validade desses resultados para qualquer estado descrito por (3.24). Para realizar essa verificação, construímos um gráfico no qual variamos c_1 , c_2 e c_3 aleatoriamente e, desde que eles satisfaçam a condição de positividade $\lambda_l \in [0, 1]$, é marcado um ponto no gráfico relacionando a discórdia com as “novas” discórdias. Esse procedimento foi feito para 10^6 conjuntos de pontos⁴.

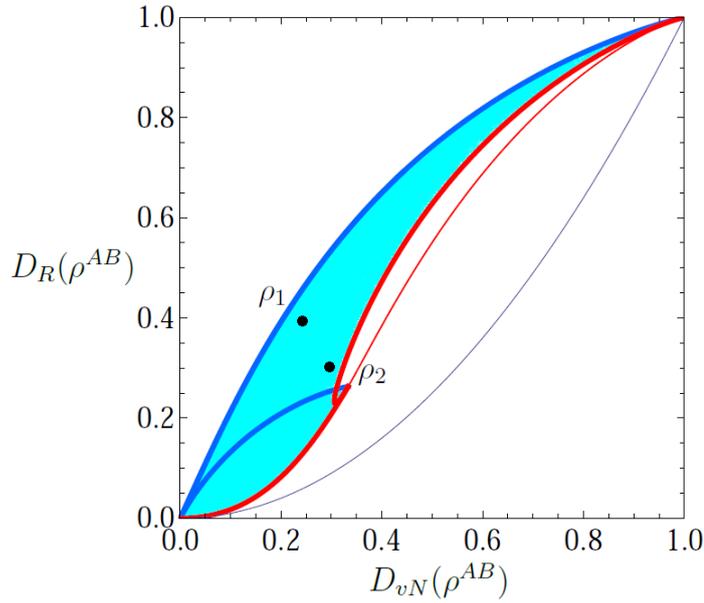


Figura 3.2: Comparação entre $D_R(\rho^{AB})$ e $D_{vN}(\rho^{AB})$, a região azul é preenchida pelos pontos marcados relacionando as duas medidas e as bordas são descritas por estados definidos pelas equações (3.44), (3.45) e (3.46).

A primeira análise é feita entre a discórdia e a discórdia de Rényi dada pela figura 3.2. Podemos observar que para essa classe de estados, a troca das entropias é satisfatória, pois as duas medidas de discórdia possuem os mesmos limites em zero e um, e para todos os estados ambas medidas são positivas.

Porém, dentro do domínio de existência das duas medidas verificam-se ordenamentos distintos. Para exemplificar este ponto considere os dois estados marcados na figura 3.2, ρ_1 e ρ_2 . Note que $D_R(\rho_1) > D_R(\rho_2)$, enquanto $D_{vN}(\rho_1) < D_{vN}(\rho_2)$. Esse problema é

³Por simplicidade, a partir de agora vamos chamar de *discórdia de Rényi* a discórdia calculada via entropia de Rényi, *discórdia linear* a discórdia via entropia linear e apenas de *discórdia* quando é calculada usando a entropia de von Neumann.

⁴Esse tipo de comparação entre medidas de correlação é normalmente utilizado para comparações entre diferentes quantificadores de emaranhamento. Uma análise envolvendo a discórdia e a discórdia geométrica foi feita em [36].

observado também em análises envolvendo comparações entre medidas de emaranhamento (por exemplo, em [39]).

A partir do gráfico conseguimos também identificar os estados que descrevem a borda da região preenchida pelos pontos:

- Linha azul fina:

$$D_R(\rho^{AB}) \geq D_{vN}^2(\rho^{AB}); \quad (3.44)$$

- Linha azul grossa: estados de Werner, para $0 \leq z \leq 1$,

$$\rho^W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+z & -2z & 0 \\ 0 & -2z & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix}; \quad (3.45)$$

- Linha vermelha grossa: estados α , para $0 \leq \alpha \leq 1/3$,

$$\rho^\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad (3.46)$$

- Linha vermelha fina: continuação analítica obtida a partir dos estados α .

Assim, podemos assegurar que a troca da entropia de von Neumann pela entropia de Rényi pode ser feita de forma bem sucedida para a sub-classe de estados X com as marginais maximamente misturadas. Vamos estender essa análise para estados mais gerais, mas antes, vamos fazer a mesma análise utilizando a entropia linear.

Ao analisarmos a figura 3.3, fica claro que a mesma correspondência que tínhamos na figura 3.2 não é mais satisfeita. Para o caso da troca da entropia de von Neumann pela entropia linear existe uma classe de estados que não satisfaz a correspondência, ou seja, $D_{vN}(\rho^{AB})$ é zero para estados nos quais $D_L(\rho^{AB}) \neq 0$ (linha vermelha no gráfico). Esses

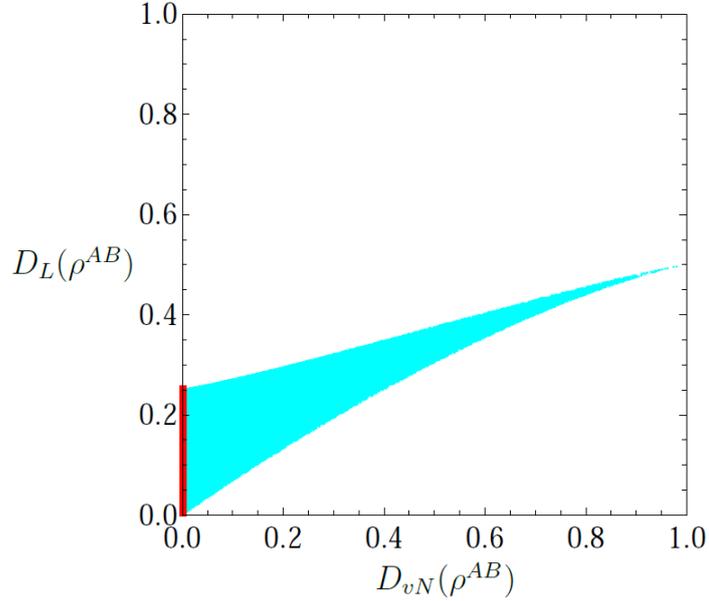


Figura 3.3: Comparação entre $D_L(\rho^{AB})$ e $D_{vN}(\rho^{AB})$, a região azul é preenchida pelos pontos marcados relacionando as duas medidas e a linha vermelha é descrita pelos estados definidos na equação (3.47).

estados específicos são dados por

$$\rho_i = \frac{1}{4} (\mathbb{1} + z\sigma_i \otimes \sigma_i), \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (3.47)$$

Com esse resultado, verificamos que a troca da entropia de von Neumann diretamente pela entropia linear não satisfaz as condições para que seja uma boa medida de correlação.

Ao invés de abandonarmos a ideia de utilizar a discórdia linear, vamos propor uma renormalização da entropia em termos da dimensão das matrizes⁵, ou seja,

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2) \rightarrow \begin{cases} S_L(\rho^{AB}) &= \eta' - \nu' \text{Tr}[(\rho^{AB})^2], \\ S_L(\rho^{A(B)}) &= \eta - \nu \text{Tr}[(\rho^{A(B)})^2], \end{cases}$$

onde ν , ν' , η e η' são parâmetros a serem ajustados. Para essa entropia linear “normalizada”, obtemos a expressão

$$D_L(\rho^{AB}) = 2\eta - \eta' - \nu + \frac{1}{2} \left[\nu' \left(1 + \sum_{j=1}^3 c_j^2 \right) - 2\nu c^2 \right]. \quad (3.48)$$

⁵Em algumas definições aparece a dimensão do sistema, para assegurar que ela varie de zero a um.

A fim de satisfazer a correspondência entre as discórdias, isto é, garantir que $D_{vN}(\rho^{AB}) = 0$ somente quando $D_L(\rho^{AB}) = 0$, determinam-se os parâmetros de ajuste: $\nu' = 2\nu$ e $\eta' = 2\eta - \frac{\nu}{2}$. Assim, a discórdia linear é dada por

$$D_L(\rho^{AB}) = \frac{1}{2}\nu \left(\sum_{j=1}^3 c_j^2 - c^2 \right). \quad (3.49)$$

Utilizando a discórdia normalizada (3.49) conseguimos reestabelecer novamente a correspondência entre as discórdias calculadas por diferentes entropias, resultado que é apresentado na figura 3.4, para $\nu = 1$.

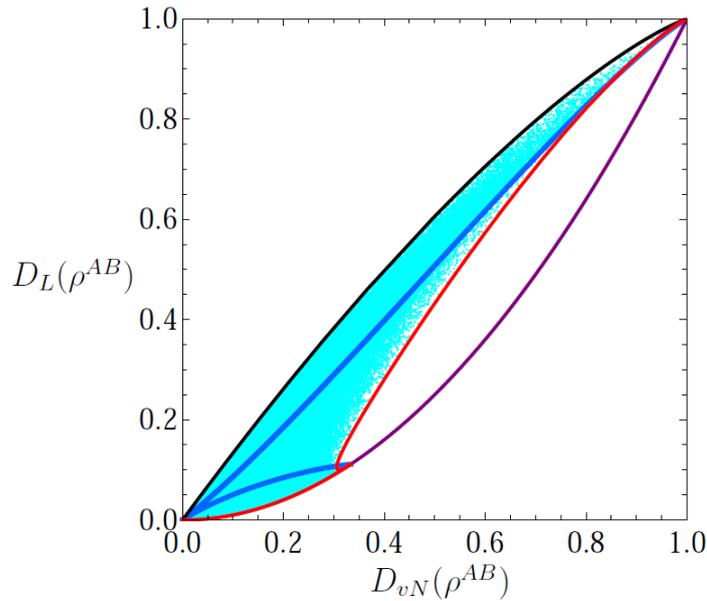


Figura 3.4: Comparação entre $D_L(\rho^{AB})$ e $D_{vN}(\rho^{AB})$, a região azul é preenchida pelos pontos marcados relacionando as duas medidas e as bordas são descritas por estados definidos pelas equações (3.45), (3.46), (3.50) e (3.51).

Novamente, conseguimos descrever os estados que compõem a borda da região preenchida pelos pontos da simulação estatística:

- Linha roxa:

$$D_L(\rho^{AB}) \geq D_{vN}^2(\rho^{AB}); \quad (3.50)$$

- Linha azul: estados de Werner (3.45);

- Linha vermelha: estados α (3.46);
- Linha preta, para $0 \leq z \leq 1$,

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - z^{1/6} & 0 & 0 & 2z^6 \\ 0 & 1 + z^{1/6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + z^{1/6} & 0 \\ 2z^6 & 0 & 0 & 1 - z^{1/6} \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Uma análise entre a discórdia e a discórdia geométrica foi efetuada por Girolami e Adesso [36], no qual um gráfico similar foi produzido utilizando-se a técnica acima. Assim como no nosso caso, foi verificada a correspondência conceitual adequada para as medidas entrópica e geométrica. Vamos fazer a mesma análise aqui, comparando a discórdia geométrica com a discórdia de Rényi e a discórdia linear.

A expressão explícita fechada da discórdia geométrica para sistemas de dois qbits, dados pela equação (3.20), foi obtida por Vedral *et. al.* em [6]. O resultado, em notação matricial, é dado por

$$D_G(\rho) = \frac{1}{4} (\|\vec{y}\vec{y}^T\| + \|T\|^2 - k), \quad (3.52)$$

com k sendo o maior autovalor da matriz $\vec{y}\vec{y}^T + T^T T$. A discórdia geométrica não é normalizada a um: seu valor máximo é $1/2$ para estados de dois qbits, então é natural considerar $2D_G$ como uma medida apropriada para uma comparação com a discórdia entrópica. Para a forma simplificada dado pela equação (3.21), podemos reescrever a discórdia geométrica,

$$D_G(\rho) = \frac{1}{4} \left(\|\vec{b}\vec{b}^T\| + \|\vec{c}\vec{c}^T\| - \tilde{k} \right), \quad (3.53)$$

onde \tilde{k} é o maior autovalor da matriz $\vec{b}\vec{b}^T + \vec{c}\vec{c}^T$ e \vec{b} e \vec{c} passam a denotar matrizes colunas.

A discórdia geométrica para o estado (3.24), usando a equação (3.53), será

$$D_G(\rho^{AB}) = \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^3 c_i^2 - \max(c_1^2, c_2^2, c_3^2) \right]. \quad (3.54)$$

A comparação com a discórdia de Rényi, dada pela figura 3.5, continua garantindo a equivalência entre as medidas de correlação, com os mesmos limites.

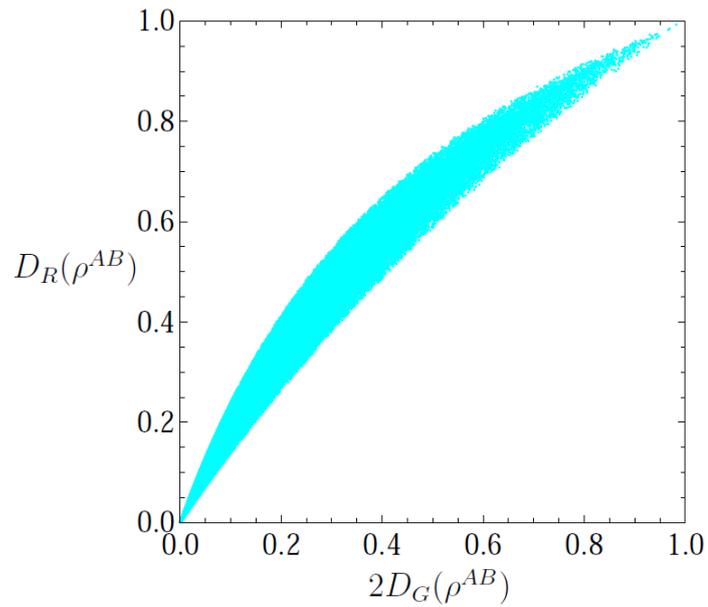


Figura 3.5: Comparação entre $2D_G(\rho^{AB})$ e $D_R(\rho^{AB})$.

O mesmo comportamento de equivalência entre as medidas de discórdia é descrito também pela discórdia linear normalizada (figura 3.6). Como podemos notar, para o

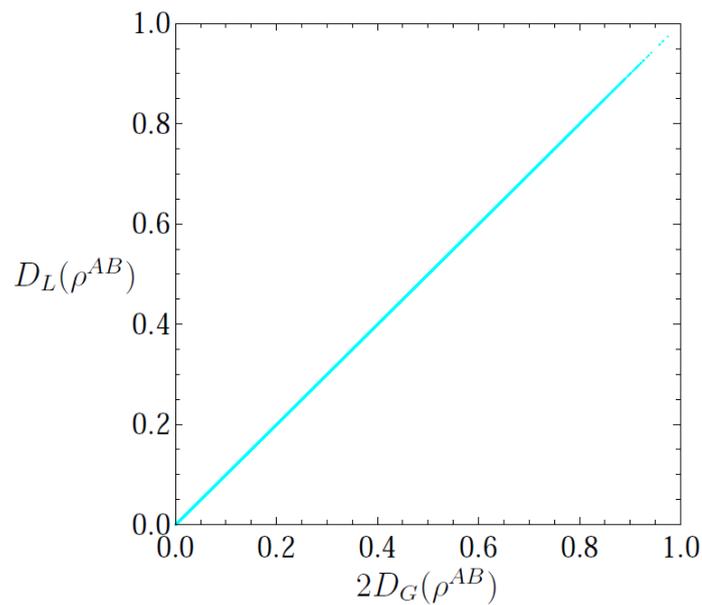


Figura 3.6: Comparação entre $2D_G(\rho^{AB})$ e $D_L(\rho^{AB})$.

caso em que o estado X só depende das variáveis c 's, todas reais, a correspondência entre a discórdia linear e a discórdia geométrica é total, elas são exatamente iguais. Esse fato é curioso, considerando que a natureza das duas discórdias é diferente (enquanto uma depende de uma medida em um dos subsistemas, a outra é baseada numa distância mínima até o estado com discórdia nula mais próximo). Se compararmos as equações (3.49) e (3.54), para $\nu = 1$, vemos analiticamente que elas são exatamente iguais, isto é, $D_L(\rho^{AB}) = 2D_G(\rho^{AB})$.

Assim, encerramos nossa análise para estados X com marginais maximamente emaranhadas (3.25) e encontramos a equivalência entre a maneira “usual” para o cálculo da discórdia (via entropia de von Neumann), com a nossa proposta da troca das entropias (entropia de Rényi e entropia linear normalizada). Para essa classe específica de estados, podemos afirmar que a discórdia quântica, proposta em [4, 5], pode ser calculada usando diferentes entropias, apontando a existência de correlações “puramente” quânticas.

Vamos estender nossa análise para estados mais gerais, como aqueles descritos na seção 3.2.1 pela equação (3.23). Utilizando a equação (3.31), e a mesma medida proposta em (3.32), podemos calcular as probabilidades associadas aos resultados 0 e 1,

$$p_1^0 = \frac{1}{2}(1 \pm b_3 z_3). \quad (3.55)$$

Para o cálculo da matriz densidade após a medida (3.13), encontramos as matrizes reduzidas do subsistema A após a medida,

$$\begin{aligned} \rho^{A|0} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + [z_1 c_1 \sigma_1 + z_2 c_2 \sigma_2 + (a_3 + c_3 z_3) \sigma_3]/(1 + b_3 z_3)), \\ \rho^{A|1} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + [-z_1 c_1 \sigma_1 - z_2 c_2 \sigma_2 + (a_3 - c_3 z_3) \sigma_3]/(1 - b_3 z_3)), \end{aligned} \quad (3.56)$$

em termos do vetor unitário \vec{z} definido em (3.35). Os dois autovalores de $\rho^{A|0}$ e $\rho^{A|1}$ são dados por

$$\begin{aligned} v_{\pm} &= \frac{1}{2}(1 \pm \theta), \\ w_{\pm} &= \frac{1}{2}(1 \pm \theta'), \end{aligned} \quad (3.57)$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[(\rho^{A|0})^2] &= \frac{1}{2}(1 + \theta^2), \\ \mathrm{Tr}[(\rho^{A|1})^2] &= \frac{1}{2}(1 + \theta'^2).\end{aligned}\tag{3.58}$$

Retornando aos elementos da matriz ρ_X , as probabilidades se reduzem a

$$\begin{aligned}p_0 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l], \\ p_1 &= [(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k],\end{aligned}\tag{3.59}$$

e θ e θ' são dados por

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})k + (\rho_{22} - \rho_{44})l]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l]^2}}, \\ \theta' &= \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})l + (\rho_{22} - \rho_{44})k]^2 + \Theta}{[(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k]^2}},\end{aligned}\tag{3.60}$$

onde $\Theta = 4kl[|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}^*|^2 + 2\Re(\rho_{14}\rho_{23}^*)] - 16m\Re(\rho_{14}\rho_{23}^*) + 16n\Im(\rho_{14}\rho_{23}^*)$. Definimos os parâmetros, m , n , k e l como

$$\begin{aligned}m &= (v_0v_1 + v_2v_3)^2, \\ n &= (v_0v_2 - v_1v_3)(v_0v_1 + v_2v_3), \\ k &= v_0^2 + v_3^2, \\ l &= v_1^2 + v_2^2, \\ m^2 + n^2 &= klm.\end{aligned}\tag{3.61}$$

Com $k + l = 1$ e a última relação, podemos perceber que há duas variáveis independentes sobre as quais a otimização envolvida na definição da discórdia quântica deve ser feita. Ou seja, a otimização vai depender apenas de k e m , com $n = 0$. Usando essas relações, vemos que esses dois parâmetros são tais que possuem intervalos em $k \in [0, 1]$ e $m \in [0, 1/4]$. Usando a otimização proposta em [40], os mínimos são obtidos para o conjunto de valores $\{k, m\} = \{(0, 0), (1, 0), (1/2, 0), (1/2, 1/4)\}$.

Os gráficos correspondentes às comparações entre a discórdia com a discórdia de Rényi

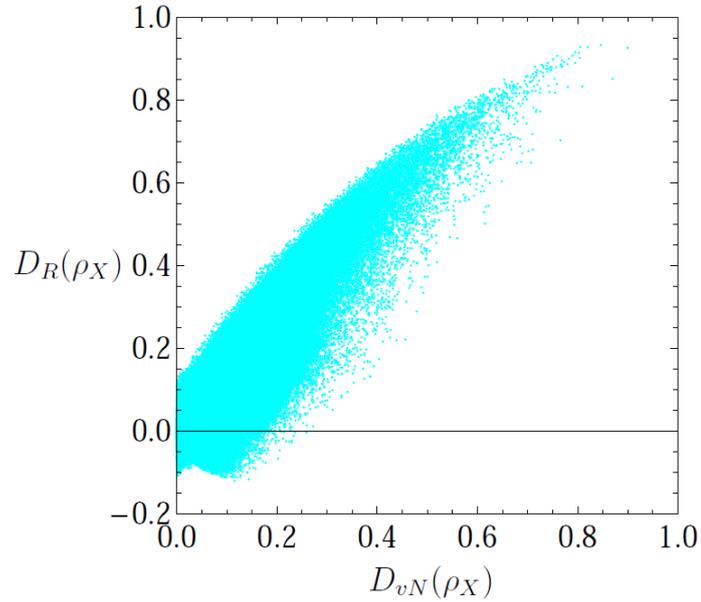


Figura 3.7: Comparação entre $D_{vN}(\rho_X)$ e $D_R(\rho_X)$.

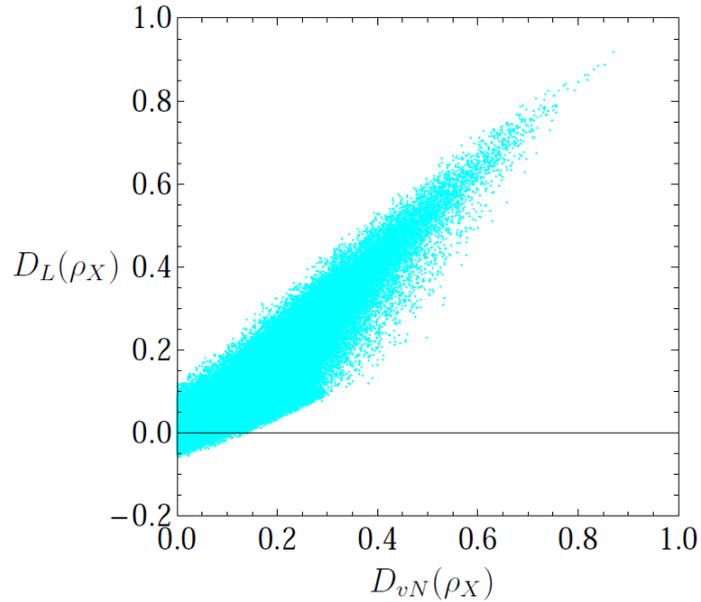


Figura 3.8: Comparação entre $D_{vN}(\rho_X)$ e $D_L(\rho_X)$.

e a discórdia linear (figuras 3.7 e 3.8), mostram que quando “ligamos” mais duas variáveis no estado do sistema, perdemos a equivalência que tínhamos quando era realizada a troca das entropias. Para essa classe de estados mais gerais, a mudança na entropia não pode ser efetuada, pois a discórdia, por definição, é sempre positiva, e não é o que de fato acontece nessa situação. Assim como nos casos anteriores, se aumentarmos o número de

pontos na elaboração do gráfico, também teremos uma região bidimensional com bordas descritas por classes específicas de estados. Porém, como os resultados para estados X mais gerais não foram satisfatórios, essa análise não foi realizada.

Assim, encerramos nossa análise afirmando que a troca das entropias só pode ser efetuada se considerarmos estados X com marginais maximamente misturadas. Para todos os outros casos não podemos utilizar essa técnica da maneira como propusemos inicialmente (fazendo a troca das entropias diretamente na definição da discórdia).

3.3 Discórdia linear

Os resultados obtidos mostram que a utilização da entropia linear é satisfatória, a menos de constantes que foram inseridas para obter essa equivalência. Porém, esses resultados não podem ser estendidos para estados mais gerais. Nesta seção apresentaremos uma abordagem mais formal para este problema.

Nossa motivação é construir uma discórdia que seja mais simples de ser calculada. A ideia é adaptar a definição original para acomodar a *entropia linear* como medida entrópica, mas ainda assim obedecer ao quadro conceitual básico delineado em [4]. Classicamente, podemos definir a entropia linear como

$$H_L(A) := 1 - \sum_a p_a^2 = 1 - \mathcal{P}(A), \quad (3.62)$$

onde $\mathcal{P}(A)$ é o análogo clássico da pureza. O primeiro passo na adaptação do formalismo consiste em redefinir a entropia condicional usando uma métrica apropriada à nova medida entrópica. Propomos:

$$H_L^{(1)}(A|B) := \sum_b p_b^2 H_L(A|b) = \mathcal{P}(B) - \sum_b p_b^2 \mathcal{P}(A|b). \quad (3.63)$$

Como $0 \leq p_b \leq 1$, é claro que $H_L(A|B) \leq \sum_b p_b H_L(A|b)$. Porém, continuamos com uma medida da ignorância média que resta sobre A após uma medida de B . Mudou-se apenas a ponderação, de modo que a média resultante não é mais normalizada ($\sum_b p_b^2 \leq 1$). A motivação para isto fica clara quando se aplica a regra de Bayes (3.3). Sem o fator p_b^2

em (3.63) não seria possível escrever a entropia condicional linear na forma

$$H_L^{(2)}(A|B) := H_L(A, B) - H_L(B) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A, B). \quad (3.64)$$

Do ponto de vista da medida de entropia utilizada, a fórmula acima conserva a estrutura original dada na equação (3.5). Talvez a diferença mais importante ocorra para distribuições separáveis $p_{A,B} = p_A p_B$, em qual caso temos que $H_L^{(2)}(A|B) = \mathcal{P}(B)H_L(A)$. Este resultado difere do tradicional pelo fator multiplicativo $\mathcal{P}(B)$. Seguindo o formalismo anterior, definimos a diferença entre as entropias condicionais lineares *pré* e *pós* regra de Bayes como

$$\Delta H_L(A|B) := H_L^{(1)}(A|B) - H_L^{(2)}(A|B) = 0. \quad (3.65)$$

A extensão para o caso quântico é então dada por

$$\begin{aligned} D_L(\rho^{AB}) &:= \min \Delta S_L(\rho^{A|B}) = S_L^{(1)}(A|B) - S_L^{(2)}(A|B) \\ &= \min_{\{P_k^B\}} \left\{ \sum_k p_k^2 S_L(\rho^{A|k}) - S_L(\rho^{AB}) + S_L(\rho^B) \right\} \\ &= S_L(\rho^B) - S_L(\rho^{AB}) + \min_{\{P_k^B\}} \sum_k p_k^2 S_L(\rho^{A|k}), \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde $S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}[\rho^2]$ é a entropia linear quântica e $\rho^{A|k}$ é dada por (3.13). Exceto pela métrica diferenciada e pela nova medida de entropia, a estrutura matemática acima é similar à da discórdia original dada em (3.14). A fórmula da *discórdia linear* (3.66) ganha ainda mais simplicidade matemática se expressa em termos da pureza $\mathcal{P}(\rho) := \text{Tr}[\rho^\dagger \rho] = 1 - S_L(\rho)$.

Se optarmos por obter a extensão quântica a partir das fórmulas (3.63) e (3.64) escritas em termos da pureza teremos que

$$\begin{aligned} D_L(\rho^{AB}) &:= \min \Delta S_L(\rho^{A|B}) \\ &= \min_{\{P_k^B\}} \left\{ \mathcal{P}(\rho^B) - \sum_k p_k^2 \mathcal{P}(\rho^{A|k}) - [\mathcal{P}(\rho^B) - \mathcal{P}(\rho^{AB})] \right\} \\ &= \mathcal{P}(\rho^{AB}) - \max_{\{P_k^B\}} \sum_k p_k^2 \mathcal{P}(\rho^{A|k}). \end{aligned} \quad (3.67)$$

É interessante reescrever a discórdia linear em termos de medidas de distância a fim de compará-la com a discórdia geométrica. No espaço de Hilbert-Schmidt (HS), matrizes densidades são consideradas como vetores, com produto interno dado por

$$\langle \rho | \sigma \rangle = \text{Tr}[\rho^\dagger \sigma]. \quad (3.68)$$

Segue que a norma de ρ é definida como

$$\|\rho\| := \sqrt{\langle \rho | \rho \rangle} = \sqrt{\text{Tr}[\rho^\dagger \rho]}, \quad (3.69)$$

e medidas de distância são dadas por $d(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|$. Vê-se imediatamente que $\mathcal{P}(\rho) = \|\rho\|$. Podemos então reescrever a discórdia linear como

$$D_L(\rho^{AB}) = \min_{\{P_k^B\}} \left(\|\rho^{AB}\| - \sum_k p_k^2 \|\rho^{A|k}\| \right), \quad (3.70)$$

lembrando que a *discórdia geométrica* [6], definida na seção 3.1.2,

$$D_G(\rho) := \min_{\chi \in \Omega} \|\rho - \chi\|^2, \quad (3.71)$$

onde Ω é o conjunto de estados com discórdia nula. Em [41] mostrou-se que tais estados devem ter a forma $\chi = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \rho |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|$. Como já mencionamos antes, as discórdias linear e geométrica são, em princípio, diferentes: a primeira está definida pela minimização sobre operadores de medida em sistemas bipartidos, sendo oriunda de princípios entrópicos, enquanto a segunda se refere à distância mínima em relação a um estado de discórdia nula em sistemas multipartidos.

Observa-se que a fórmula da discórdia linear, tal como dada pela equação (3.67), pode ser interpretada como uma expressão do desvio quântico da regra de Bayes $p_{A,B} - p_B p_{A|B} = 0$. Esta ideia fornece uma intuição alternativa para a discórdia.

3.3.1 Discórdia linear para o estado geral de dois qbits

Nesta seção avaliaremos nossa proposta de discórdia através da comparação com uma medida bem estabelecida de correlações quânticas, como a discórdia geométrica. Considere

o estado geral de dois qbits (3.20), introduzido na seção 3.2.1, na forma matricial, temos

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + a^T \sigma^A \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes b^T \sigma^B + (\sigma^A)^T T \sigma^B \right), \quad (3.72)$$

onde a e b são matrizes-colunas reais,

$$\sigma^R = \begin{pmatrix} \sigma_1^R \\ \sigma_2^R \\ \sigma_3^R \end{pmatrix}, \quad e \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

com $t_{ij} \in \mathbb{R}$. σ_i^R é a i -ésima matriz de Pauli do subsistema R , sendo $R = A, B$. Para este estado, é conhecida uma fórmula bastante simplificada para a discórdia geométrica [6]:

$$D_G(\rho) = \frac{1}{4} \left(\|b\|^2 + \|T\|^2 - k_{\max} \right), \quad (3.74)$$

onde $\|M\|^2 = \text{Tr}(M^T M)$ e k_{\max} é o maior autovalor da matriz $K = b b^T + T T^T$.

Para o cálculo da discórdia linear, assim como fizemos anteriormente, consideramos medidas projetivas no subsistema B , com projetores de von Neumann $\Pi_k = |k\rangle\langle k|$, $k = 0, 1$, unitariamente transformados:

$$P_k^B := V \Pi_k V^\dagger, \quad V := v_0 \mathbb{1}^B + i v^T \sigma^B, \quad (3.75)$$

com $v_0 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$ e $V \in SU(2)$. Para que V seja unitário, isto é, $V V^\dagger = V^\dagger V = \mathbb{1}^B$, é necessário que $v_0^2 + v^T v = 1$, onde $v^T = (v_1 \ v_2 \ v_3)$. O quadrupeto (v_0, v) define, portanto, uma medida projetiva arbitrária, $P_k^B P_k^B = P_k^B$, sobre o spin do subsistema B . É sobre o conjunto $\{v_i\}$ que deve ser feita a minimização. Utilizando-se das propriedades das matrizes de Pauli, dadas pelas equações (2.21) e (2.23), é possível mostrar que o estado do subsistema A após uma medida feita em B é dado por

$$\rho^{A|k} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}^A + \eta_k^T \sigma^A \right), \quad (3.76)$$

$$\eta_k^T = \frac{a^T + (-1)^{k+1} Z^T T}{2p_k}, \quad (3.77)$$

onde $p_k = \frac{1}{2}[1 + (-1)^{k+1} Z^T b]$ e

$$Z = 2 \begin{pmatrix} v_1 v_3 - v_0 v_2 \\ v_0 v_1 + v_2 v_3 \\ v_0^2 + v_3^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

que é a matriz coluna equivalente ao vetor obtido na equação (3.35). A forma (3.76) é conveniente pois é fácil mostrar que $\mathcal{P}(\rho^{A|k}) = \frac{1}{2}(1 + \eta_k^T \eta_k)$. Segue então que

$$\sum_k p_k^2 \mathcal{P}(\rho^{A|k}) = \frac{1}{4} \left[1 + a^T a + Z^T (bb^T + TT^T) Z \right]. \quad (3.79)$$

O cálculo da pureza total leva a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho) &= \frac{1}{4} \left(1 + a^T a + b^T b + \sum_{i,j} t_{ij} t_{ji} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|T\|^2), \end{aligned} \quad (3.80)$$

já que $\sum_{i,j} t_{ij} t_{ji} = \text{Tr}[T^T T]$. Logo, a discórdia linear é dada por

$$D_L(\rho) = \frac{1}{4} \left[\|b\|^2 + \|T\|^2 - \max_{\{P_k^B\}} Z^T (bb^T + TT^T) Z \right]. \quad (3.81)$$

Utilizaremos agora o seguinte resultado (Apêndice F - Nielsen & Chuang [12]):

[1] *Se K é um operador Hermiteano com autovalores $\{k_i\}$, então $\max_{\langle u|u \rangle=1} |\langle u|K|u \rangle| = k_{\text{máx}}$, onde $k_{\text{máx}} = \max\{|k_i|\}$.*

A prova pode ser esboçada da seguinte forma. Utilizando a decomposição espectral $K = \sum_i k_i |i\rangle\langle i|$, com k_i real e $\{|i\rangle\}$ ortonormal, escrevemos $\langle u|K|u \rangle = \sum_i k_i |\langle u|i \rangle|^2$. Note-se agora que

$$|\langle u|K|u \rangle| = \left| \sum_i k_i |\langle u|i \rangle|^2 \right| \leq \sum_i |k_i| |\langle u|i \rangle|^2. \quad (3.82)$$

Pela desigualdade de Schwartz, temos que $|\langle u|i' \rangle|^2 \leq \langle u|u \rangle \langle i'|i' \rangle = 1$, já que a maximi-

zação é feita sobre estados com $\langle u|u \rangle = 1$. É evidente que o maior valor possível para $|\langle u|i' \rangle|^2$ ocorre quando $|u \rangle = |i' \rangle$. Pondo este resultado na equação (3.82), obtêm-se que $|\langle u|K|u \rangle| \leq |k_{i'}|$, e a prova se completa.

Definindo $K = bb^T + TT^T$. De posse do resultado [1] e notando que $K \geq 0$, voltamos à equação (3.81) para obter

$$D_L(\rho) = \frac{1}{4} \left(\|b\|^2 + \|T\|^2 - k_{\text{máx}} \right), \quad (3.83)$$

onde $k_{\text{máx}}$ é o maior autovalor da matriz $K = bb^T + TT^T$. Este resultado é idêntico ao fornecido pela discórdia geométrica (3.74). Este resultado é surpreendente, dada a diferença conceitual entre as medidas. Conseguimos provar analiticamente, que uma mudança na definição da discórdia utilizando conceitos como entropia linear e pureza nos levam a resultados idênticos aos obtidos em [6] para a discórdia geométrica.

3.4 Unificação das medidas de discórdia via entropia de Tsallis

Na seção 3.3, mostramos que existe uma correspondência direta entre a discórdia entrópica e a discórdia geométrica ao utilizarmos a entropia linear na definição. Nesta seção vamos generalizar nosso resultado para uma *discórdia- q* baseada na *entropia de Tsallis* [30, 42], a qual é uma generalização de entropias a partir de um parâmetro q . Essa entropia é interessante para nós pois se $q \rightarrow 1$, ela recai na entropia de von Neumann e, se $q \rightarrow 2$, recai na entropia linear.

A definição de discórdia proposta por Ollivier e Zurek [4] consiste num desvio quântico da regra de Bayes, isto é, ela é derivada da quantização da diferença entre duas formas classicamente equivalentes da entropia condicional. Vamos utilizar esta mesma propriedade, porém adotando a entropia de Tsallis, que é definida como

$$H_q(A) = - \sum_a p_a^q \ln_q p_a, \quad (3.84)$$

onde $\ln_q u = \frac{u^{1-q} - 1}{1-q}$ ($u > 0$) é a função q -logarítmica e p_a é uma distribuição de probabi-

lidade. Por conveniência, vamos usar a forma

$$H_q(A) = \frac{1}{q-1} \left[1 - \sum_a p_a^q \right] \quad (3.85)$$

da equação (3.84). Uma característica de H_q é que ela se reduz à entropia de Shannon $H_1(A) = -\sum_a p_a \log p_a$ quando $q \rightarrow 1$ e à entropia linear $H_2 = 1 - \sum_a p_a^2$ quando $q \rightarrow 2$, como comentamos anteriormente. A entropia condicional q [42] é dada por

$$H_q(A|B) = \sum_b p_b^q H_q(A|b). \quad (3.86)$$

Então, a primeira forma é dada por

$$H_q^{(1)}(A|B) = \frac{1}{q-1} \left[\sum_b p_b^q - \sum_{a,b} p_b^q p_{a|b}^q \right]. \quad (3.87)$$

Usando a regra de Bayes, $p_{a|b} = p_{a,b}/p_b$, obtemos uma segunda forma para a entropia condicional q ,

$$H_q^{(2)}(A|B) = H_q(A, B) - H_q(B), \quad (3.88)$$

que pode ser convenientemente expressa como

$$H_q^{(2)}(A|B) = \frac{\sum_b p_b^q - \sum_{a,b} p_{a,b}^q}{q-1}. \quad (3.89)$$

Definindo $\Delta H_q = H_q^{(1)} - H_q^{(2)}$, obtemos

$$\Delta H_q = \frac{\sum_{a,b} (p_{a,b}^q - p_b^q p_{a|b}^q)}{q-1} = 0, \quad (3.90)$$

que é uma manifestação entrópica da regra de Bayes. A discórdia quântica surge novamente como um desvio desta regra, como vemos a seguir.

A quantização é promovida por uma extensão direta das equações anteriores. A

entropia quântica q é dada por

$$S_q(\rho) = \frac{1 - \mathcal{P}_q(\rho)}{q - 1}, \quad (3.91)$$

onde $\mathcal{P}_q(\rho) = \text{Tr}(\rho^q)$ é a pureza generalizada. Assim como no caso clássico, $S_1(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ é a entropia de von Neumann e $S_2(\rho) = 1 - P_2(\rho)$ é a entropia linear. Para a entropia condicional q , temos

$$S_q^{(1)}(\rho^{A|B}) = \sum_k p_k^q S_q(\rho^{A|k}), \quad (3.92)$$

onde

$$\rho^{A|k} = \text{Tr}_B \left[\frac{(\mathbb{1}^A \otimes P_k^B) \rho^{AB} (\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)}{p_k} \right] \text{ e } p_k = \text{Tr} [\rho^{AB} (\mathbb{1}^A \otimes P_k^B)]. \quad (3.93)$$

Assim, as versões quânticas das equações (3.87) e (3.89) são dadas por

$$\begin{aligned} S_q^{(1)}(\rho^{A|B}) &= \frac{\sum_k p_k^q - \sum_k p_k^q \mathcal{P}_q(\rho^{A|k})}{q - 1}, \\ S_q^{(2)}(\rho^{A|B}) &= \frac{\sum_k p_k^q - \mathcal{P}_q(\rho)}{q - 1}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Agora, definimos $\Delta S_q = S_q^{(1)} - S_q^{(2)}$. A discórdia- q de um estado bipartido ρ é então definida como

$$D_q(\rho) = \min_{\{P_k^B\}} \Delta S_q, \quad (3.95)$$

ou seja,

$$D_q(\rho) = \frac{1}{q - 1} \left(\mathcal{P}_q(\rho) - \max_{\{P_k^B\}} \sum_k p_k^q \mathcal{P}_q(\rho^{A|k}) \right), \quad (3.96)$$

em referência direta à regra entrópica de Bayes ΔH_q . Agora podemos mostrar como D_q conecta ambas as discórdias entrópica e geométrica com a variação de q .

Em termos das entropias q , D_q é escrita na forma

$$D_q(\rho) = \min_{\{P_k^B\}} \left(\frac{1 - \sum_k p_k^q}{q-1} - S_q(\rho) + \sum_k p_k^q S_q(\rho^{A|k}) \right). \quad (3.97)$$

No limite em que $q \rightarrow 1$, a discórdia se reduz a

$$D_1(\rho) = \min_{\{P_k^B\}} \left(S_1(\Pi^B[\rho^B]) + \sum_k S_1(\rho^{A|k}) \right) - S_1(\rho), \quad (3.98)$$

onde $\Pi^B[\rho] = \sum_k \Pi_k \rho \Pi_k$ e $\Pi_k = |k\rangle\langle k|$ é um projetor von Neumann. Esse resultado é igual à reformulação da definição da discórdia feita por Zurek em [7]. A equação (3.98) tem algumas diferenças em relação à definição original (3.14), mas possui interpretação operacional. Trata-se da diferença entre o trabalho termodinâmico extraído por demônios de Maxwell clássicos e quânticos de um reservatório térmico.

A conexão com a discórdia geométrica não é tão aparente, mas também pode ser facilmente provada. O palpite natural consiste em investigar a situação na qual $q = 2$, já que neste caso temos uma ligação imediata com a norma de Hilbert-Schmidt, isto é, $\mathcal{P}_2(\rho) = \|\rho\|^2 = \text{Tr}(\rho^\dagger \rho)$. Então, usando as propriedades dos projetores ($P_k^B P_k^B = P_k^B$) e também

$$\text{Tr}_B(P_k^B)^q = \sum_{k'} \langle k' | (P_k^B)^q | k' \rangle = \sum_{k'} \delta_{kk'} = 1, \quad (3.99)$$

mostramos que

$$[\text{Tr}_B(P_k^B \rho)]^q = (\langle k | \rho | k \rangle)^q = \underbrace{\text{Tr}_B(P_k^B)^q}_{1} (\langle k | \rho | k \rangle)^q = \text{Tr}_B(\langle k | \rho | k \rangle \otimes P_k^B)^q, \quad (3.100)$$

de forma que

$$\begin{aligned} [\text{Tr}_B(P_k^B \rho)]^q &= \text{Tr}_B[(P_k^B \rho P_k^B)^q], \\ p_k^q \mathcal{P}_q(\rho^{A|k}) &= \mathcal{P}_q(P_k^B \rho), \end{aligned} \quad (3.101)$$

para todo $q > 0$. Com esses resultados, a equação (3.96) pode ser escrita na forma

$$D_q(\rho) = \frac{1}{q-1} \left(\mathcal{P}_q(\rho) - \max_{\{P_k^B\}} \sum_k \mathcal{P}_q(P_k^B \rho) \right). \quad (3.102)$$

Partindo da definição de discórdia geométrica,

$$D_G(\rho) = \min_{\Pi^B} \|\rho - \Pi^B(\rho)\|^2, \quad (3.103)$$

onde $\Pi^B(\rho) = \sum_k (\mathbb{1}^A \otimes |k\rangle\langle k|) \rho (\mathbb{1}^A \otimes |k\rangle\langle k|)$ para alguma base ortogonal $\{|k\rangle\}$ de B e considerando $|k\rangle\langle k| = P_k^B$, mostramos que

$$\begin{aligned} \|\rho - \Pi^B(\rho)\|^2 &= \mathcal{P}_2(\rho) + \mathcal{P}_2[\Pi^B(\rho)] - 2 \operatorname{Tr}[\rho \Pi^B(\rho)] \\ &= \mathcal{P}_2(\rho) + \sum_k \mathcal{P}_2(P_k^B \rho) - 2 \sum_k \mathcal{P}_2(P_k^B \rho) \\ &= \mathcal{P}_2(\rho) - \sum_k \mathcal{P}_2(P_k^B \rho). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Finalmente, minimizando o resultado sobre o conjunto $\{P_k^B\}$ concluímos que, de acordo com a equação (3.102), $D_2(\rho) = D_G(\rho)$. Claramente, a discórdia geométrica pode ser considerada como a regra de Bayes entrópica gerada pela entropia linear. Este resultado é geral, válido para qualquer estado bipartido.

Vamos ilustrar nossos resultados fazendo um estudo de caso para sistemas de dois qbits com marginais maximamente misturadas, cuja matriz densidade é dada por

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right), \quad (3.105)$$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Usando a decomposição espectral $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$, onde $0 \leq \lambda_i(c_j) \leq 1$ e os resultados da otimização obtidos na seção 3.2.1, podemos mostrar que

$$D_q = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^q - \frac{(1+c)^q + (1-c)^q}{2^{2q-1}}, \quad (3.106)$$

onde $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$. Nos limites apropriados obtemos⁶

$$\begin{aligned} D_1 &= \log 4 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \log \lambda_i + \sum_{k=0}^1 \chi_k \log \sqrt{\chi_k}, \\ D_2 &= \frac{1}{4} (|\vec{c}|^2 - c^2), \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde $\chi_k = 1 + (-1)^k c$. Esses resultados são os mesmos obtidos anteriormente na seção 3.2.1 para as discórdias entrópica e geométrica. Em particular, se escolhermos $c_1 = u$, $c_2 = -u$ e $c_3 = 2u - 1$ (estado α) ou $c_1 = c_2 = c_3 = -u$ (estado de Werner), obtemos

$$\begin{aligned} D_q(\rho^\alpha) &= \frac{(1 - 2^{1-q})u^q}{q - 1}, \\ D_q(\rho^W) &= \frac{(1 - u)^q + (1 + 3u)^q - 2(1 + u)^q}{4^q(q - 1)}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

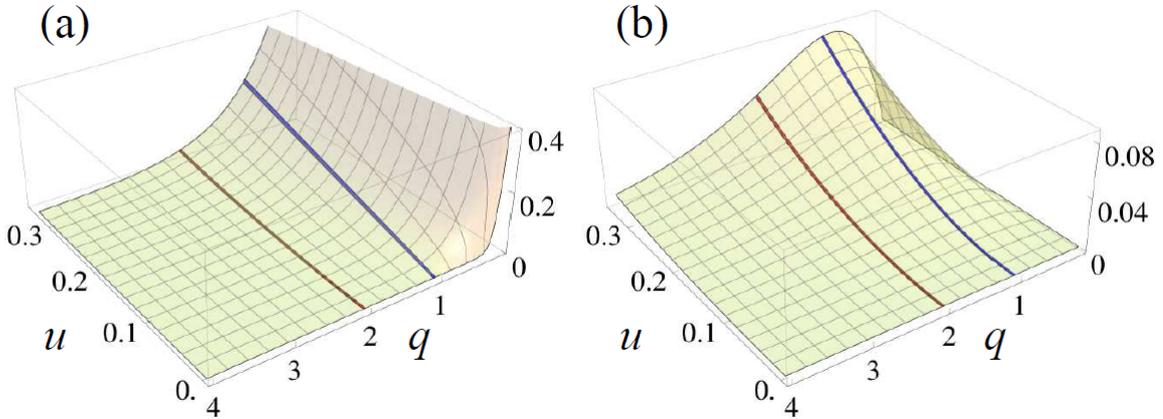


Figura 3.9: Discórdia q para (a) o estado α e (b) o estado de Werner em função dos parâmetros u e q . Claramente, a discórdia entrópica D_1 (linha azul) se deforma continuamente na discórdia geométrica D_2 (linha vermelha) quando variamos q de 1 até 2.

A figura 3.9 mostra como D_q interpola da discórdia entrópica para a geométrica e vai além para outros valores de q . Assim, conseguimos esboçar um exemplo para dois estados de dois qbits conhecidos (estado de Werner e estado α) de como a discórdia se comporta com a variação de q . O resultado é que apenas temos uma deformação na medida da discórdia em função de q , mas todos eles revelam as correlações quânticas presentes no

⁶Quando tomamos o limite em D_q o resultado é o logaritmo natural, e não mais o logaritmo na base 2, como havíamos usado até então.

sistema, o que poderia nos induzir a negar qualquer conteúdo físico mais profundo para o parâmetro q . É importante notar, contudo, que no campo da termodinâmica não-extensiva, q possui interpretação física intimamente ligada à dinâmica microscópica do sistema [43–46].

Os resultados obtidos nessa seção e outros posteriores em colaboração com o prof. Renato Moreira Angelo foram submetidos para publicação devido ao seu importante papel no estudo de correlações e sua interpretação operacional. Uma versão prévia pode ser encontrada em <http://arxiv.org/abs/1207.3337>.

Neste capítulo, conseguimos mostrar que a utilização de outras entropias além da de von Neumann para o cálculo da discórdia é satisfatória. Além disso, encontramos uma relação baseada na entropia de Tsallis que conecta a discórdia entrópica com a geométrica pela variação de um parâmetro q . Este resultado é de extrema importância, pois até então não havia nenhum resultado que conseguisse demonstrar qual era a conexão entre essas medidas. Conseguimos conectar duas medidas de naturezas diferentes (entrópica e geométrica) com a utilização de uma definição generalizada, a discórdia- q .

Dinâmica sob Acoplamento com Banho Térmico

Durante as últimas duas décadas, o fenômeno conhecido como *descoerência induzida pelo ambiente* (EID¹), responsável pela destruição de superposições quânticas, foi bastante estudado, teoricamente [8, 9, 47–49] e experimentalmente [50]. O fenômeno de descoerência é baseado no acoplamento de um sistema S com um ambiente com muitos graus de liberdade, que é teoricamente descrito em termos de partículas quânticas em equilíbrio numa temperatura T . O acoplamento com o reservatório força o sistema a evoluir numa dinâmica não unitária e, em geral, dissipativa.

Usualmente, o ambiente é modelado por um número enorme de partículas (graus translacionais, de spin, etc.) que se emaranham com o sistema à medida que a dinâmica toma lugar e, assim, destroem a coerência do mesmo além de drenar sua energia. Em muitos casos, portanto, o ambiente assume as características de um “reservatório térmico”, sendo assim descrito por uma distribuição de Boltzman quântica definida por uma temperatura T . O modelo seminal de reservatório, em que se empregam osciladores harmônicos unidimensionais com acoplamento posição-posição e distribuições apropriadas de frequências, foi concebido por Caldeira e Legget [8] em 1985.

Utilizaremos um acoplamento não-dissipativo, a fim de podermos analisar efeitos exclusivamente quânticos, como o amortecimento de fases (descoerência propriamente dita,

¹do termo em inglês: environment-induced decoherence

sem dissipação de energia). Estamos principalmente interessados em avaliar como ocorre a destruição das correlações quânticas, medidas pelo emaranhamento e discórdia, e dos aspectos não-locais, inferidos a partir das desigualdades de Bell.

Neste capítulo iremos investigar a dinâmica de um sistema de dois qbits interagindo com um reservatório de campos bosônicos descrito por N osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Após calcularmos analiticamente a matriz densidade dependente do tempo para o sistema de dois qbits, vamos analisar as funções que aparecem nos elementos de matriz as quais devem trazer a informação a respeito do reservatório. Em grande parte, nossa abordagem seguirá o quadro conceitual delineado em [51, 52].

Numa primeira etapa, avaliaremos as características centrais do modelo, em particular o tempo de descoerência. Em seguida, focaremos na dinâmica propriamente dita e utilizaremos a desigualdade de Bell-CHSH, a concorrência e a discórdia geométrica para a análise do comportamento das correlações quânticas sob amortecimento de fase.

4.1 Interação de um sistema de dois qbits com um reservatório bosônico

Nossa análise será feita através de um estudo de caso. Usaremos um modelo não-dissipativo de acoplamento entre um reservatório térmico e um sistema de dois qbits preparado inicialmente num estado X (3.22). Esta abordagem nos permitirá aplicar diretamente as técnicas e ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores. O procedimento usual para o tratamento da descoerência consiste em iniciar o problema a partir de uma dinâmica conservativa unitária descrita por um Hamiltoniano total, o qual no nosso caso será dado por

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (4.1)$$

onde H_S é o Hamiltoniano do sistema de dois qbits, H_R é o Hamiltoniano do reservatório e H_I é o Hamiltoniano de interação, que é dado por

$$H_I = V_A + V_B, \quad (4.2)$$

onde V_A e V_B são as interações entre cada qbit e o reservatório. Os termos de interação são da forma

$$\begin{aligned} V_A &= \hbar(u_3\sigma_3^A) \sum_k g_k \hat{n}_k, \\ V_B &= \hbar(v_3\sigma_3^B) \sum_k g_k \hat{n}_k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde \hat{n}_k são os operadores de número dos osciladores do reservatório e g_k são as constantes de acoplamento entre os qbits e o reservatório. Os parâmetros u_3 e v_3 foram inseridos para diferenciar o acoplamento entre cada qbit e o reservatório. Estamos interessados, num primeiro momento, no estudo da evolução do estado X. Logo, as interações para os dois spins foram escolhidas na direção de σ_3 , o que garante que a evolução dinâmica fique restrita a um subespaço específico, levando X noutro estado X. Além disso, para os nossos objetivos, não é importante definir o Hamiltoniano livre do sistema H_S , pois sua influência é apenas local. No que segue vamos apenas assumir que $[H_S, H_I] = 0$, a fim de garantir a conservação de energia do sistema. Para o reservatório, usaremos um conjunto de modos bosônicos, com Hamiltoniano:

$$H_R = \hbar \sum_k \omega_k \hat{n}_k, \quad (4.4)$$

onde ω_k são as frequências características dos osciladores do reservatório.

Assumiremos, como de costume, que o estado inicial é separado e dado por $\rho(0) = \rho_{AB}(0) \otimes \rho_R$, onde $\rho_{AB}(0)$ é o estado inicial do sistema de qbits e $\rho_R = e^{-\beta H_R}/Z$, é o estado Boltzmaniano associado ao equilíbrio térmico à temperatura T e Z a função partição, $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_R})$, que indica que todos os osciladores do reservatório estão em equilíbrio térmico numa temperatura $(k_B\beta)^{-1}$.

A dinâmica global unitária é obtida através da solução da equação de Schrödinger, o que se dá na seguinte forma

$$\rho(t) = U\rho(0)U^\dagger = e^{-iHt/\hbar}(\rho_{AB}(0) \otimes \rho_R)e^{iHt/\hbar}. \quad (4.5)$$

Para o estado inicial do sistema de dois qbits, vamos considerar os estados X com

estados reduzidos maximamente misturados. Nesse caso, na representação de Bloch temos que

$$\rho_{AB}(0) = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right). \quad (4.6)$$

A solução da equação de Schrödinger (4.5) é obtida utilizando-se as propriedades das matrizes de Pauli, em particular

$$e^{ia(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})} = \mathbb{1} \cos(a) + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(a). \quad (4.7)$$

Assim, como V_A e V_B comutam, podemos desacoplar as exponenciais e calculá-las separadamente:

$$\begin{aligned} e^{-iV_A t/\hbar} &= \exp \left[-it(u_3 \sigma_3^A) \sum_k g_k \hat{n}_k \right] = \underbrace{\mathbb{1}^A \cos \left[u_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right]}_{\alpha} - i \sigma_3^A \underbrace{\sin \left[u_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right]}_{\gamma} \\ &= \mathbb{1}^A \alpha - i \sigma_3^A \gamma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} e^{-iV_B t/\hbar} &= \exp \left[-it(v_3 \sigma_3^B) \sum_k g_k \hat{n}_k \right] = \underbrace{\mathbb{1}^B \cos \left[v_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right]}_{\alpha'} - i \sigma_3^B \underbrace{\sin \left[v_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right]}_{\gamma'} \\ &= \mathbb{1}^B \alpha' - i \sigma_3^B \gamma'. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir da equação (4.5), a matriz densidade do sistema composto é então escrita na forma

$$\rho(t) = [\mathbb{1}^B \alpha' - i \sigma_3^B \gamma'] [\mathbb{1}^A \alpha - i \sigma_3^A \gamma] (\rho_{AB}(0) \otimes \rho_R) [\mathbb{1}^A \alpha + i \sigma_3^A \gamma] [\mathbb{1}^B \alpha' + i \sigma_3^B \gamma']. \quad (4.10)$$

Outro passo importante nos modelos de descoerência consiste na operação do traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório,

$$\rho_{AB}(t) = \text{Tr}_R [\rho(t)]. \quad (4.11)$$

Com isso, a dinâmica resultante para o sistema se torna não-unitária.

Calculando todos os termos², obtemos a matriz densidade do sistema de dois qbits dependente do tempo,

$$\rho_{AB}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & (c_1 - c_2) \theta_+(t) \\ 0 & 1 - c_3 & (c_1 + c_2) \theta_-(t) & 0 \\ 0 & (c_1 + c_2) \theta_-^*(t) & 1 - c_3 & 0 \\ (c_1 - c_2) \theta_+^*(t) & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde

$$\theta_{\pm}(t) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 \pm v_3) t g_k)}} \right). \quad (4.13)$$

A partir da equação 4.12, notamos que a dependência da matriz densidade no tempo e na temperatura provêm das funções $\theta_{\pm}(t)$. Além disso, as duas funções também dependem dos parâmetros do acoplamento (u_3 e v_3) entre o sistema e o reservatório. Logo, fica evidente que todas as informações da dinâmica de descoerência dependem somente do comportamento dessas duas funções no tempo. Deve-se notar, em particular, que não há dinâmica se $u_3 = v_3 = 0$, como se espera.

Para entender as características da descoerência tal como foi introduzida pelo nosso modelo, focaremos por um momento nas funções θ_{\pm} . Os módulos são dados por

$$|\theta_{\pm}(t)| = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\sin^2[(u_3 \pm v_3) t g_k]}{\sinh^2(\beta \hbar \omega_k / 2)} \right)^{-1/2}. \quad (4.14)$$

Essas duas funções dependem da distribuição de g_k e ω_k , que são as constantes de acoplamento e as frequências características dos osciladores do reservatório, respectivamente.

Se mantivermos $g_k = g_0$ constantes, e fizermos uma distribuição gaussiana de ω_k ,

$$w_k = w_0 \exp \left[-\frac{(k - N/2)^2}{\delta^2} \right], \quad (4.15)$$

onde N é o número de osciladores do reservatório e δ é uma constante de normalização, notamos que há recorrências nas funções $\theta_{\pm}(t)$, como mostra a figura 4.1.

²Os detalhes da construção da matriz densidade e os traços sobre o reservatório são feitos em detalhes no Apêndice B e C.

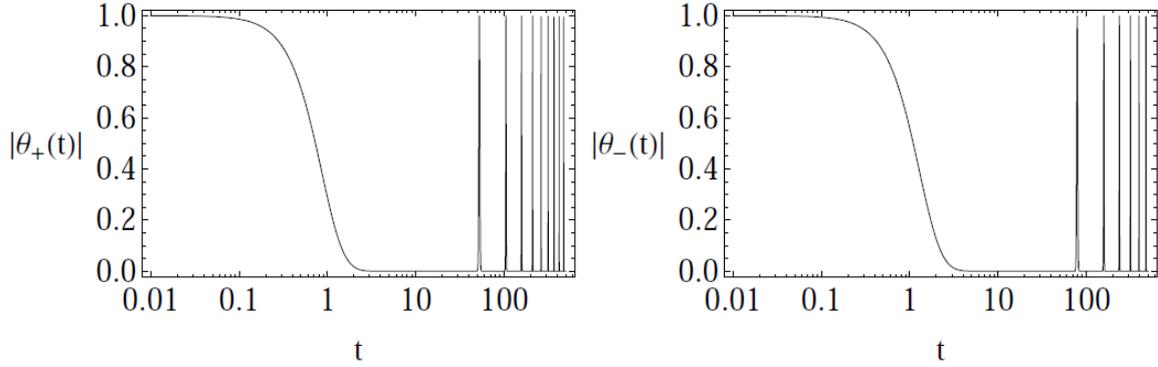


Figura 4.1: Dinâmica das funções $|\theta_{\pm}(t)|$ para $g_k = g_0$ e uma distribuição para ω_k , com $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $N = 20$, $\beta = 0,5$, $\omega_0 = 1$, $g_0 = 0,01$ e $\delta = 10$.

Se, por outro lado, mantivermos as frequências do reservatório constantes ($\omega_k = \omega_0$), e fizermos a mesma distribuição gaussiana dos parâmetros de acoplamento,

$$g_k = g_0 \exp \left[-\frac{(k - N/2)^2}{\delta^2} \right], \quad (4.16)$$

onde N é o número de osciladores do reservatório e δ é uma constante de normalização, observamos na figura 4.2 o decaimento dessas funções sem recorrência³.

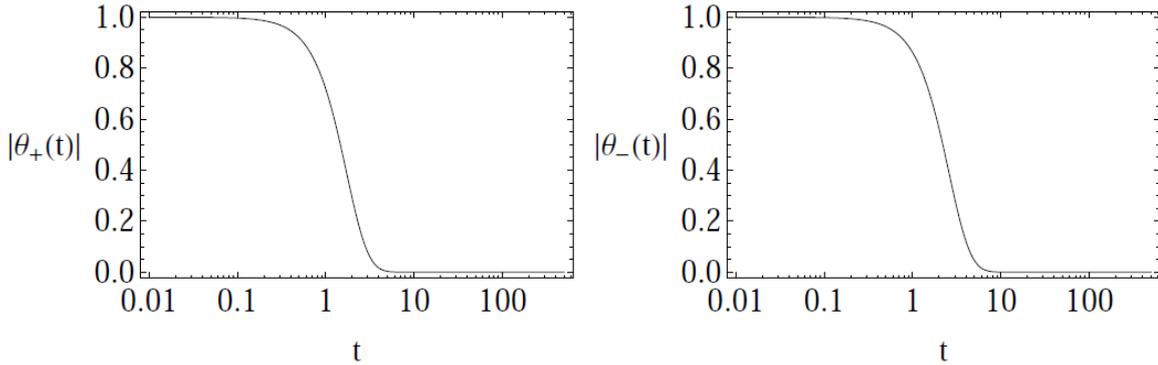


Figura 4.2: Dinâmica das funções $|\theta_{\pm}(t)|$ para $\omega_k = \omega_0$ e distribuição gaussiana para g_k , com $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $N = 20$, $\beta = 0,5$, $\omega_0 = 1$, $g_0 = 0,01$ e $\delta = 10$.

Analisando a matriz densidade do sistema de dois qbits, observamos que o importante é a distribuição nos parâmetros de acoplamento, não nas frequências do Hamiltoniano livre, pois nesse regime de parâmetros ocorrerá um decaimento dos termos fora da diagonal

³Podemos notar que, variando-se δ , poderemos interpolar entre a situação de acoplamentos iguais ($\delta \rightarrow \infty$) e acoplamentos distintos ($\delta > 0$, finito).

sem recorrências, implicando no fenômeno de descoerência. De fato, isso é esperado, já que os w_k são coeficientes de influência apenas local. Logo, vamos considerar para as próximas análises a situação na qual temos uma distribuição gaussiana em g_k dada por (4.16) e $\omega_k = \omega_0$.

A escolha desse regime fica clara quando avaliamos a pureza do sistema $\text{Tr}[\rho_{AB}^2(t)]$,

$$\mathcal{P}(\rho_{AB}(t)) = \frac{1}{8} [2(1 + c_3^2) + (c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2]. \quad (4.17)$$

Vemos em (4.17) que a pureza depende das funções $|\theta_{\pm}(t)|$ e que esta também decai com o tempo, mostrando que a dinâmica dos qbits é de fato não-unitária.

4.1.1 Tempo de descoerência

Um dos aspectos fundamentais na análise do fenômeno de descoerência é a identificação do tempo de descoerência, informação que auxilia na caracterização do modelo. Para encontrar o tempo de descoerência, vamos utilizar a aproximação de tempos curtos, isto é, quando $(u_3 \pm v_3)tg_k \ll 1$. Nesse regime, temos que

$$\begin{aligned} |\theta_{\pm}(t)| &\cong \prod_k \left(1 + \frac{(u_3 \pm v_3)^2 t^2 g_k^2}{\sinh^2(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right)^{-1/2} \\ &\cong \prod_k \exp \left[- \left(\frac{(u_3 \pm v_3)^2 g_k^2}{2 \sinh^2(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) t^2 \right] \\ &\cong \exp \left[- \sum_k \left(\frac{(u_3 \pm v_3)^2 g_k^2}{2 \sinh^2(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) t^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Este resultado pode ser convenientemente escrito na forma

$$|\theta_{\pm}(t)| \cong e^{-t^2/t_{D\pm}^2}, \quad (4.19)$$

onde $t_{D\pm}$ é dado por

$$t_{D\pm} = \frac{\sqrt{2} \sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)}{(u_3 \pm v_3)G}, \quad (4.20)$$

e $G^2 = \sum_k g_k^2$. $t_{D\pm}$ são os tempos de *descoerência* para esse modelo. Podemos observar que existem duas escalas de tempo que dependem dos valores de u_3 e v_3 . É conveniente, portanto, definir o tempo de descoerência do modelo como $t_D = \max\{t_{D+}, t_{D-}\}$.

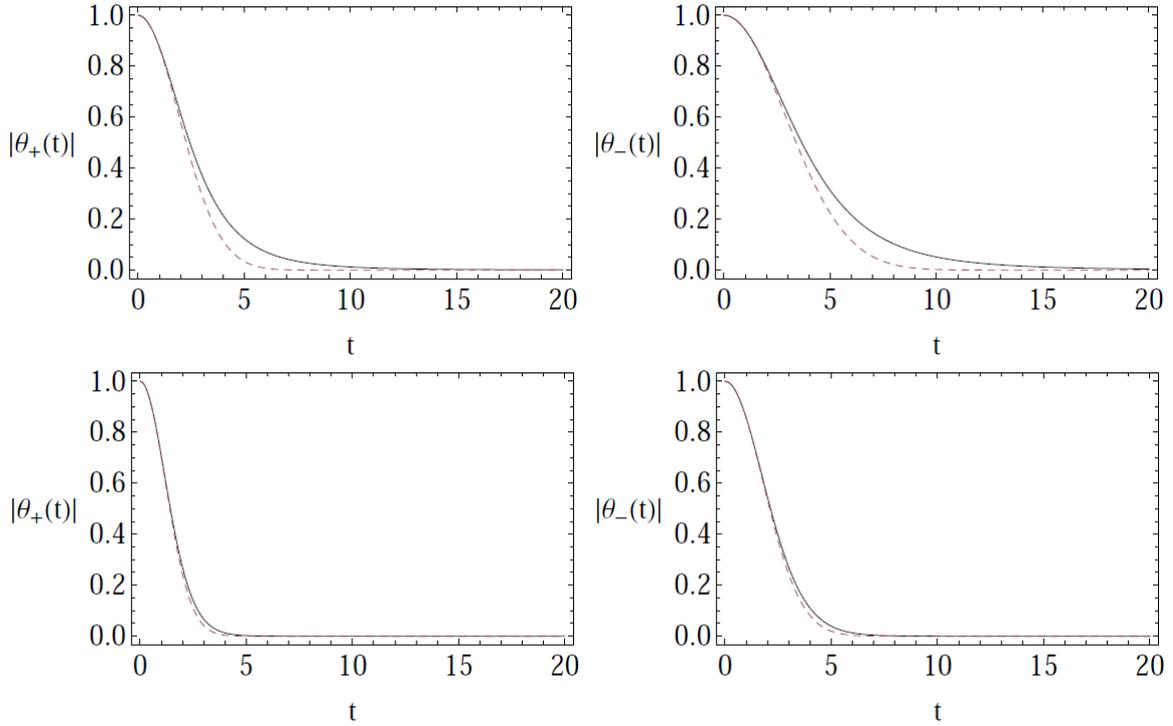


Figura 4.3: Aproximação de tempos curtos para cinco osciladores (gráficos acima) e 50 osciladores (gráficos abaixo), a linha contínua representa o decaimento das funções $|\theta_{\pm}(t)|$ e a linha pontilhada a aproximação Gaussiana, com $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $\beta = 0,5$, $\omega_0 = 1$ e $g_0 = 0,01$.

Utilizando a aproximação de tempos curtos, vemos que ocorre um decaimento Gaussiano para as funções $|\theta_{\pm}(t)|$ quando temos poucos osciladores no reservatório, assim como para a situação de muitos osciladores (figura 4.3). Como era esperado, o decaimento ocorre mais rapidamente quanto mais osciladores tivermos no reservatório. Podemos observar essa situação diretamente na equação (4.20), onde G cresce com N . Além disso, a aproximação descreve cada vez melhor o decaimento dessas funções, quanto maior for o número de osciladores no reservatório.

4.1.2 Equilíbrio

Vamos analisar agora a situação de equilíbrio ($t \rightarrow \infty$). Fisicamente, o equilíbrio irá ocorrer quando $|\theta_{\pm}(t)|$ atingir seu valor mínimo, o que acontece para tempos muito maiores que o tempo de descoerência. Podemos reescrever a equação (4.14) na forma

$$|\theta_{\pm}(t)| = \frac{1}{\sqrt{\prod_k \left(1 + \frac{x_k}{y_0}\right)}}, \quad (4.21)$$

onde $x_k = \sin^2 [(u_3 \pm v_3)tg_k]$ e $y_0 = \sinh^2(\beta\hbar\omega_0/2)$. Se considerarmos que todas as constantes de acoplamento são iguais a um valor máximo, teremos que

$$\prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{x_k}{y_0}\right) \leq \left(1 + \frac{x_{\max}}{y_0}\right)^N. \quad (4.22)$$

Ou seja,

$$|\theta_{\pm}(t)| \geq \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{x_{\max}}{y_0}\right)^N}} = |\theta|_{\min}, \quad (4.23)$$

onde $|\theta|_{\min}$ descreve o valor mínimo para as funções $|\theta_{\pm}(t)|$. Como x_k é uma função seno ao quadrado, podemos assegurar que $x_{\max} = 1$, de forma que

$$\begin{aligned} |\theta|_{\min} &= \left(1 + \frac{1}{\sinh^2(\beta\omega_0/2)}\right)^{-N/2} \\ &= \left(\frac{\sinh^2(\beta\hbar\omega_0/2)}{1 + \sinh^2(\beta\hbar\omega_0/2)}\right)^{N/2} = \tanh^N(\beta\hbar\omega_0/2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podemos notar na figura 4.4, para N grande mas finito, que o limite inferior dado pela equação (4.24) pode variar de valores arbitrariamente pequenos, no regime de altas temperaturas ($\beta\hbar\omega_0 \ll 1$), até valores arbitrariamente próximos à unidade, no regime de baixas temperaturas ($\beta\hbar\omega_0 \gg 1$). O último regime, para o qual $|\theta|_{\min} \rightarrow 1$, corresponde àquele no qual a dinâmica é praticamente unitária, sem descoerência. Por outro lado, o primeiro, para o qual $|\theta|_{\min} \rightarrow 0$, corresponde ao regime no qual os efeitos da descoerência são acentuados.

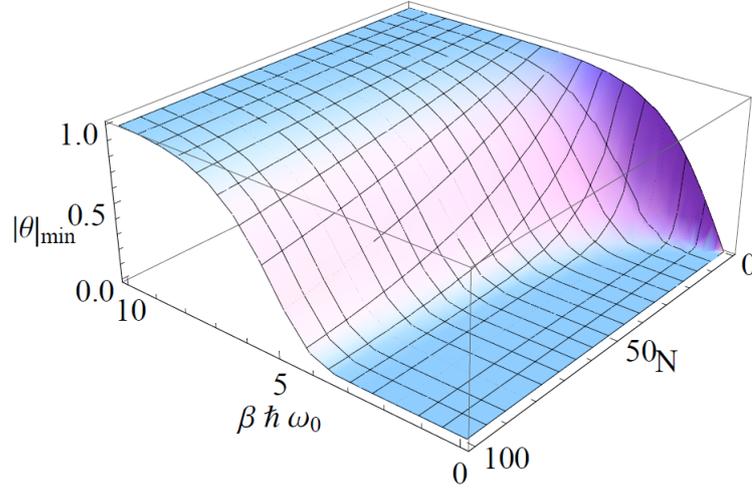


Figura 4.4: $|\theta|_{\min}$ em função de $\beta\hbar\omega_0$ e N .

A transição entre esses dois limites corresponde ao regime no qual a descoerência ainda ocorre, mas somente parcialmente, uma vez que um valor finito para $|\theta|_{\min}$ indica a existência de termos fora da diagonal sobrevivendo no estado quântico. A temperatura crítica, isto é, acima da qual os efeitos de descoerência se tornam acentuadas, pode ser definida impondo-se que $|\theta|_{\min} \leq r$ na eq. (4.24), onde r é um valor real qualquer, que pode ser tão pequeno quanto necessário e que define o limiar abaixo do qual assumimos que o amortecimento de fase ocorreu efetivamente. O resultado para $\beta_{\text{crítica}}$ é uma função de N ,

$$\beta_{\text{crítica}}(N) = \left(\frac{2}{\hbar\omega_0} \right) \operatorname{arctanh}(r^{1/N}). \quad (4.25)$$

Lembrando que $\beta = (k_B T)^{-1}$, obtemos

$$T_C(N) = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B} \right) \operatorname{arccotanh}(r^{1/N}). \quad (4.26)$$

A figura 4.5 nos mostra a relação entre a temperatura crítica e o número de osciladores para diferentes valores do limiar r . Se analisarmos a situação em que $r = 0,0001$, verificamos que o fenômeno de descoerência só será acentuado para poucos osciladores quando a temperatura for muito alta. Por outro lado, no limite termodinâmico, $N \rightarrow 1$, fica claro que existirá descoerência mesmo quando $T_C \sim 0$ (região evidenciada pelo círculo

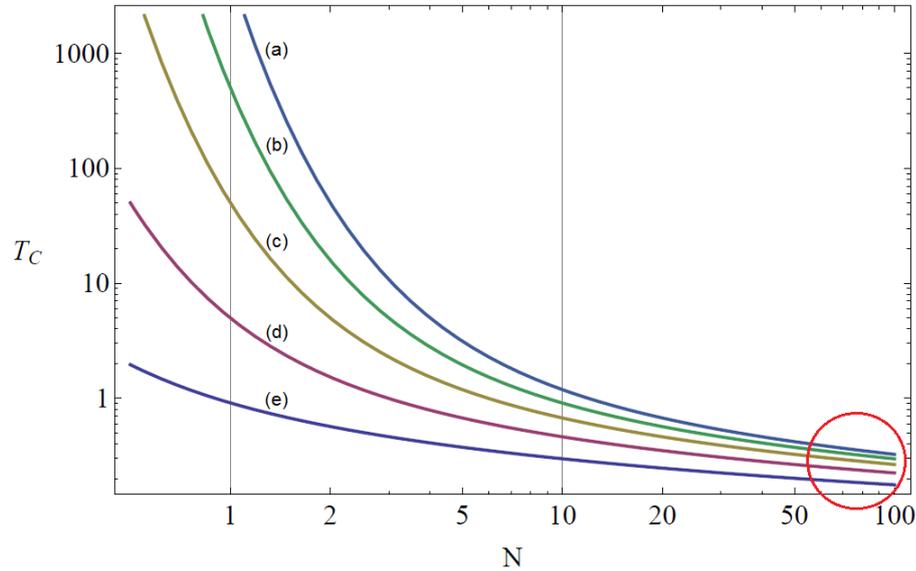


Figura 4.5: Temperatura crítica (T_C) em função do número de osciladores do reservatório N com $k_B = 1$ e $\hbar = 1$ para (a) $r = 0,0001$, (b) $r = 0,001$, (c) $r = 0,01$, (d) $r = 0,1$ e (e) $r = 0,5$.

vermelho).

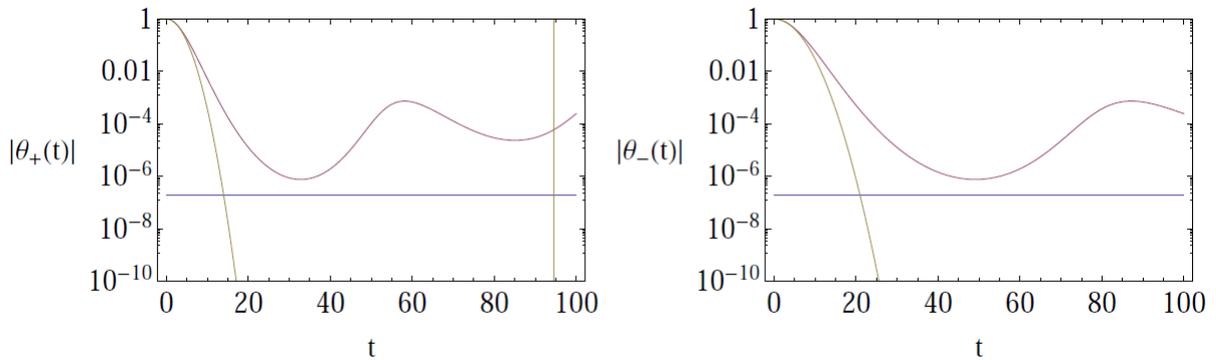


Figura 4.6: Dinâmica das funções $|\theta_{\pm}(t)|$ (linha rosa), decaimento gaussiano para aproximação de tempos curtos (linha amarela) e $|\theta_{\min}|$ (linha azul) com $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $N = 20$, $\beta = 1$, $\omega_0 = 1$, $g_0 = 0,01$ e $\delta = 10$.

Na figura 4.6 podemos ver mais claramente o que acontece com as funções $|\theta_{\pm}(t)|$. Após atingir o equilíbrio, as funções oscilam fracamente em torno de um valor muito pequeno, sendo esse sempre maior que $|\theta_{\min}|$. Além disso, apesar de ser muito pequeno, $|\theta_{\pm}(t)|$ nunca vai exatamente a zero (exceto quando consideramos o limite de $N \rightarrow \infty$). Logo, $|\theta_{\min}|$ sempre pode ser considerado como o valor mínimo que essas funções irão atingir.

As observações acima apontam que o modelo descreve de forma razoavelmente boa a física de um reservatório térmico. Em particular, destacam-se as seguintes características:

- Decaimento Gaussiano, característico de descoerência de fase, para tempos curtos;
- Tempo de descoerência dado por $t_D = \max\{t_{D_+}, t_{D_-}\}$, com a relação $t_{D_{\pm}} \propto G^{-1}$;
- Frequência característica dada por $G^2 = \sum_{k=1}^n g_k^2$;
- Limite inferior $|\theta|_{\min} = 0$ e $T_C = 0$.

O último item, que pode ser obtido diretamente tomando-se o limite de $N \rightarrow \infty$ nas equações (4.24) e (4.25), nos diz que a descoerência irá ocorrer no limite termodinâmico mesmo para temperaturas arbitrariamente baixas. Uma descrição mais detalhada e rigorosa sobre o limite termodinâmico pode ser encontrada em [51], pois o mesmo não ocorre simplesmente com $N \rightarrow \infty$; é preciso também que o volume vá para infinito com N/V constante.

4.1.3 Dinâmica das correlações

Vamos analisar agora a dinâmica das correlações do sistema. Como primeiro passo, calcularemos os correladores de Bell, a concorrência e a discórdia geométrica para estados X genéricos.

Como vimos na seção 2.4.2, a não-localidade de um estado quântico pode ser detectada pela violação da desigualdade de Bell-CHSH, que é dada por

$$|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle| \leq 2, \quad (4.27)$$

onde $\langle B_{\text{CHSH}} \rangle = \text{Tr}(\rho B_{\text{CHSH}})$, e B_{CHSH} é o operador de Bell associado com a desigualdade CHSH. Como foi demonstrando por Horodecki *et. al.* [53], a violação máxima $B_{\max}(\rho) = \max |\langle B_{\text{CHSH}} \rangle|$, a qual se refere a um conjunto ótimo de medidas, é relacionada à quantidade $M(\rho)$ via $B_{\max}(\rho) = 2\sqrt{M(\rho)}$, que para estados do tipo X [54], é dada por

$$M(\rho_X) = \max \{8(|\rho_{14}|^2 + |\rho_{\rho_{23}}|^2), 4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2 + (\rho_{11} + \rho_{44} - \rho_{22} - \rho_{33})\}. \quad (4.28)$$

A desigualdade (4.27) é violada se, e somente se, $M(\rho) > 1$, e a quantidade $M(\rho)$ também pode ser usada para medir o grau de violação da desigualdade de Bell.

Como quantificador do emaranhamento, vamos utilizar uma medida conhecida como concorrência (2.59). Para estados X, ela é dada por [10]

$$C(\rho_X) = 2 \max \{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\}. \quad (4.29)$$

Finalmente, a discórdia geométrica para estados X em termos dos elementos da matriz, é dada por

$$\begin{aligned} D_G(\rho_X) = & (\rho_{11} - \rho_{22})^2 + 4\rho_{23}\rho_{32} + 4\rho_{14}\rho_{41} + (\rho_{33} - \rho_{44})^2 \\ & - \max \{2(\rho_{23}\rho_{32} + \rho_{14}\rho_{41} - 2\sqrt{\rho_{14}\rho_{23}\rho_{32}\rho_{41}}), \\ & 2(\rho_{23}\rho_{32} + \rho_{14}\rho_{41} + 2\sqrt{\rho_{14}\rho_{23}\rho_{32}\rho_{41}}), \\ & ((\rho_{11} - \rho_{22})^2 + (\rho_{33} - \rho_{44})^2)\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para o nosso modelo, as medidas de correlação definidas acima, são dadas por

$$\begin{aligned} M(\rho_{AB}(t)) = & \frac{1}{4} \max \{2 [(c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2], \\ & 4c_3^2 + (c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2 \\ & + 2|c_1^2 - c_2^2| |\theta_+(t)| |\theta_-(t)|\}, \end{aligned}$$

$$C(\rho_{AB}(t)) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left[|(c_1 - c_2)\theta_+(t)| - 1 + c_3 \right], \frac{1}{2} \left[|(c_1 + c_2)\theta_-(t)| - 1 - c_3 \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} D_G(\rho_{AB}(t)) = & \frac{1}{4} [(c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2 + 2c_3^2 - \max \{2c_3^2, \\ & \frac{1}{2} ((c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2 - 2(c_1^2 - c_2^2) |\theta_+(t)| |\theta_-(t)|), \\ & \frac{1}{2} ((c_1 - c_2)^2 |\theta_+(t)|^2 + (c_1 + c_2)^2 |\theta_-(t)|^2 + 2(c_1^2 - c_2^2) |\theta_+(t)| |\theta_-(t)|)\}. \end{aligned}$$

Podemos notar que todas as medidas de correlação dependem explicitamente de $|\theta_{\pm}(t)|$, fato que justifica toda a análise feita anteriormente.

Considerando o conjunto de parâmetros (N e T) para o qual $|\theta_{\pm}(t)| \rightarrow 0$ (descoerência total) temos que

$$\begin{aligned} M(\rho_{AB}(t)) &\rightarrow c_3^2, \\ C(\rho_{AB}(t)) &\rightarrow \max\{0, -1 + c_3, -1 - c_3\}, \\ D_G(\rho_{AB}(t)) &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Como $|c_3| \leq 1$, obedecendo à condição de positividade da matriz densidade $\rho_{AB}(t)$, vemos que o emaranhamento e a discórdia tendem a zero no equilíbrio e, no caso da desigualdade de Bell, à situação de não violação ($M(\rho) < 1$). Assim, verifica-se que a descoerência “mata” todas as correlações quânticas entre os qbits.

Antes da situação de equilíbrio, a dinâmica das correlações é mostrada nas figuras 4.7 - 4.9. Consideramos três regimes diferentes para o reservatório. Na figura 4.7, temos poucos osciladores no reservatório mas, mesmo assim, ocorre o decaimento das correlações. Nesse regime de parâmetros observamos que ocorrem ressurgimentos das correlações, devido à dinâmica do sistema. Nota-se que a não-localidade é o primeiro efeito a ser suprimido (quando $M(\rho_{AB}(t)) < 1$), o que ocorre em torno de $t = 4$ (unidades arbitrárias). Trata-se da *morte súbita* da não-localidade, isto é, o estado deixa de violar a desigualdade de Bell subitamente. A morte súbita⁴ também acontece para o emaranhamento, mas num instante posterior, em $t \approx 13$. Depois da morte súbita do emaranhamento, a discórdia vai assintoticamente a zero. Logo, a cronologia seria: primeiro morre a não-localidade, depois o emaranhamento e por último a discórdia.

No regime de parâmetros evidenciado pela figura 4.8, aumentamos o número de osciladores, mas mantemos a mesma temperatura. Nota-se que neste regime não há recorrências, a dinâmica atinge rapidamente o equilíbrio. Novamente observamos a mesma cronologia de mortes. Primeiro a não-localidade ($t \approx 2,8$), depois o emaranhamento ($t \approx 8$) e por último a discórdia.

Como última análise, escolhemos o regime de baixa temperatura e muitos osciladores, para o qual não existe decaimento, como mostramos na figura 4.4. Ou seja, para esse

⁴Este comportamento é bastante abordado na literatura, chamado normalmente de morte súbita do emaranhamento, do termo em inglês *entanglement sudden death*. É a situação na qual a medida de correlação vai subitamente a zero, isto é, não decai assintoticamente.

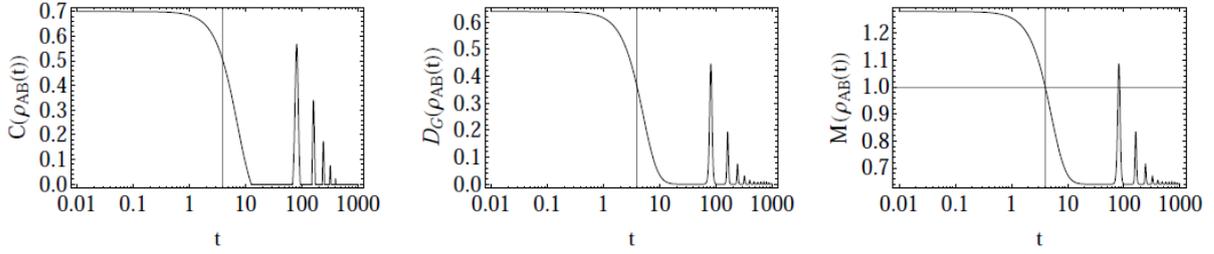


Figura 4.7: Correlações quânticas para $\rho^{AB}(t)$ em função do tempo, com $c_1 = c_2 = c_3 = -0,8$ (estado inicialmente emaranhado), $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $\beta = 1$, $w_0 = 1$, $g_0 = 0,01$, $\delta = 10$ e $N = 7$.

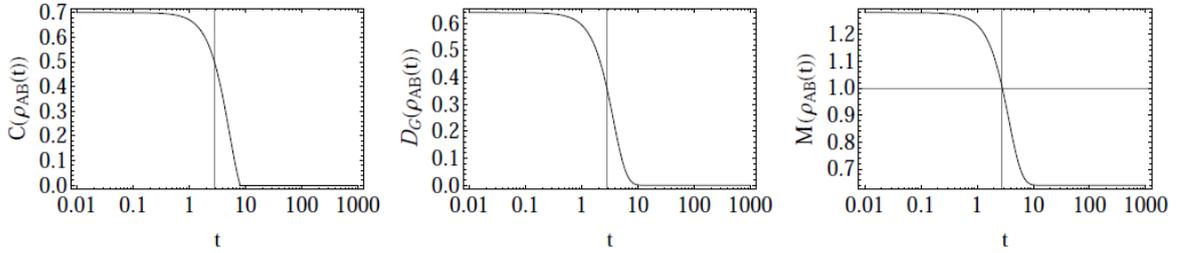


Figura 4.8: Correlações quânticas para $\rho^{AB}(t)$ em função do tempo para o regime de muitos osciladores, com $c_1 = c_2 = c_3 = -0,8$ (estado inicialmente emaranhado), $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $\beta = 1$, $w_0 = 1$, $g_0 = 0,01$, $\delta = 10$ e $N = 50$.

regime o reservatório interage fracamente com o sistema de dois qbits sem modificar suas correlações.

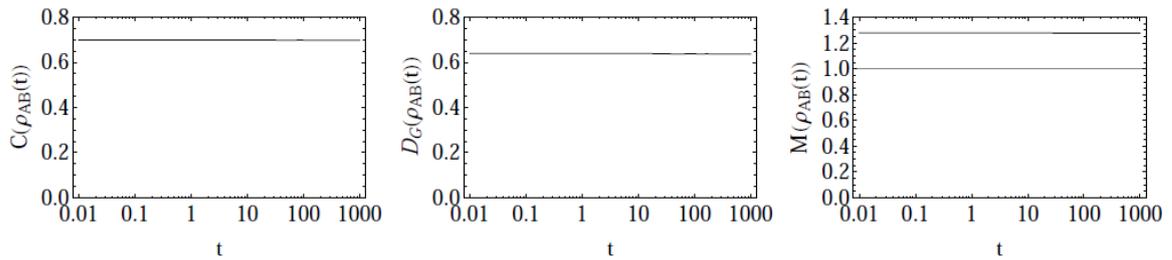


Figura 4.9: Correlações quânticas para $\rho^{AB}(t)$ em função do tempo para o regime de baixa temperatura e muitos osciladores, com $c_1 = c_2 = c_3 = -0,8$ (estado inicialmente emaranhado), $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 5$, $\beta = 10$, $w_0 = 1$, $g_0 = 0,01$, $\delta = 10$ e $N = 50$.

É interessante analisar a cronologia de mortes para dois estados específicos, o estado de Werner ($c_1 = c_2 = c_3 = -u$) e o estado uv ($c_1 = u$, $c_2 = v$ e $c_3 = \frac{u-v}{2}$). Para fazer as comparações entre as medidas de correlação, é conveniente definirmos o grau de

não-localidade na forma

$$NL(\rho_{AB}(t)) = \max\{0, M(\rho_{AB}(t)) - 1\}. \quad (4.32)$$

O gráfico 4.10 se refere ao estado uv . Os gráficos demonstram a cronologia das mortes das correlações sob descoerência. A dinâmica das correlações começa em $t = 0$ e termina em $t > t_D$ (indicados nos gráficos), quando todas as correlações são suprimidas por causa da interação do sistema com o reservatório. Eles evidenciam a conclusão que discutimos anteriormente, a primeira correlação a morrer é a não-localidade, seguida pelo emaranhamento e, por último, a discórdia.

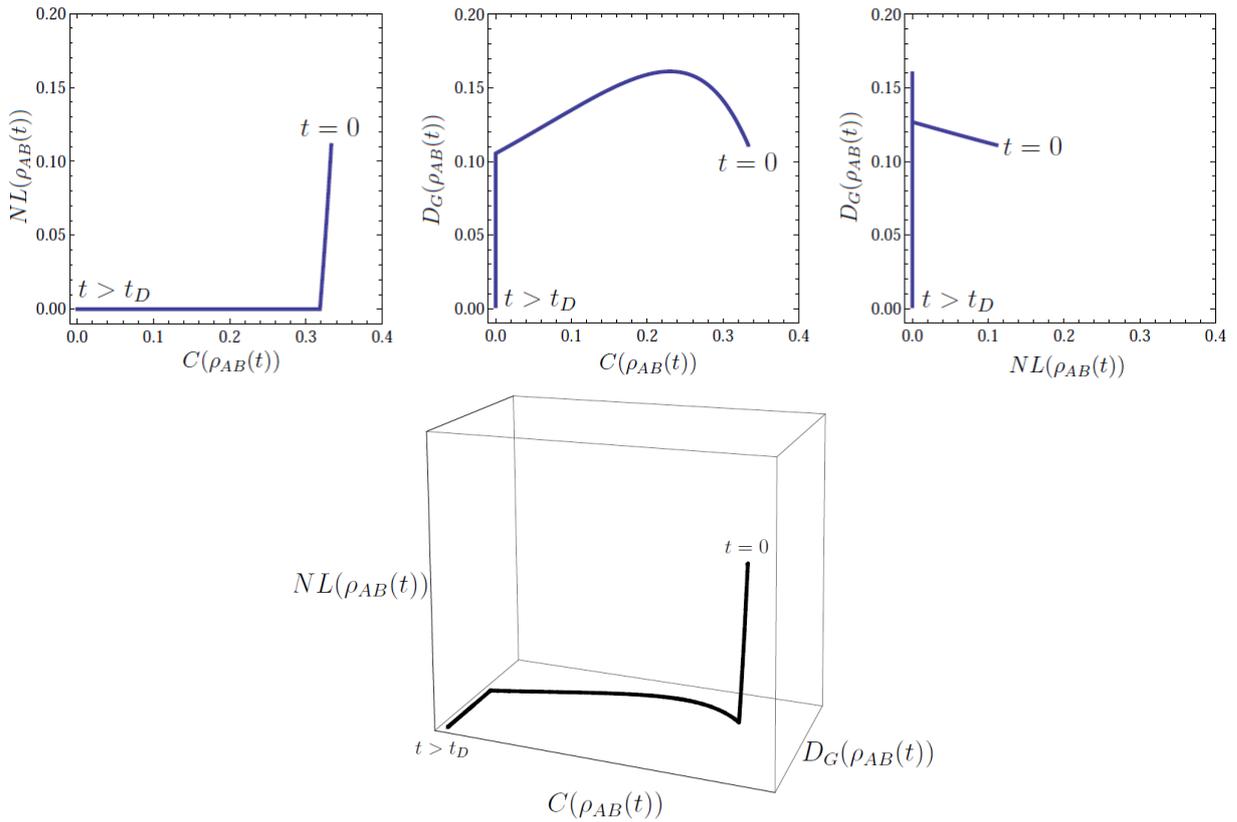


Figura 4.10: Comparações entre as correlações quânticas para o estado uv , com $u = 1/3$, $v = 1$, $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 0,5$, $\beta = 1$, $w_0 = 1$, $g_0 = 0,01$, $\delta = 10$ e $N = 5$.

A figura 4.11 se refere ao estado de Werner. Novamente, os gráficos demonstram a cronologia das mortes das correlações. Assim como os outros casos que investigamos, a mesma cronologia é observada.

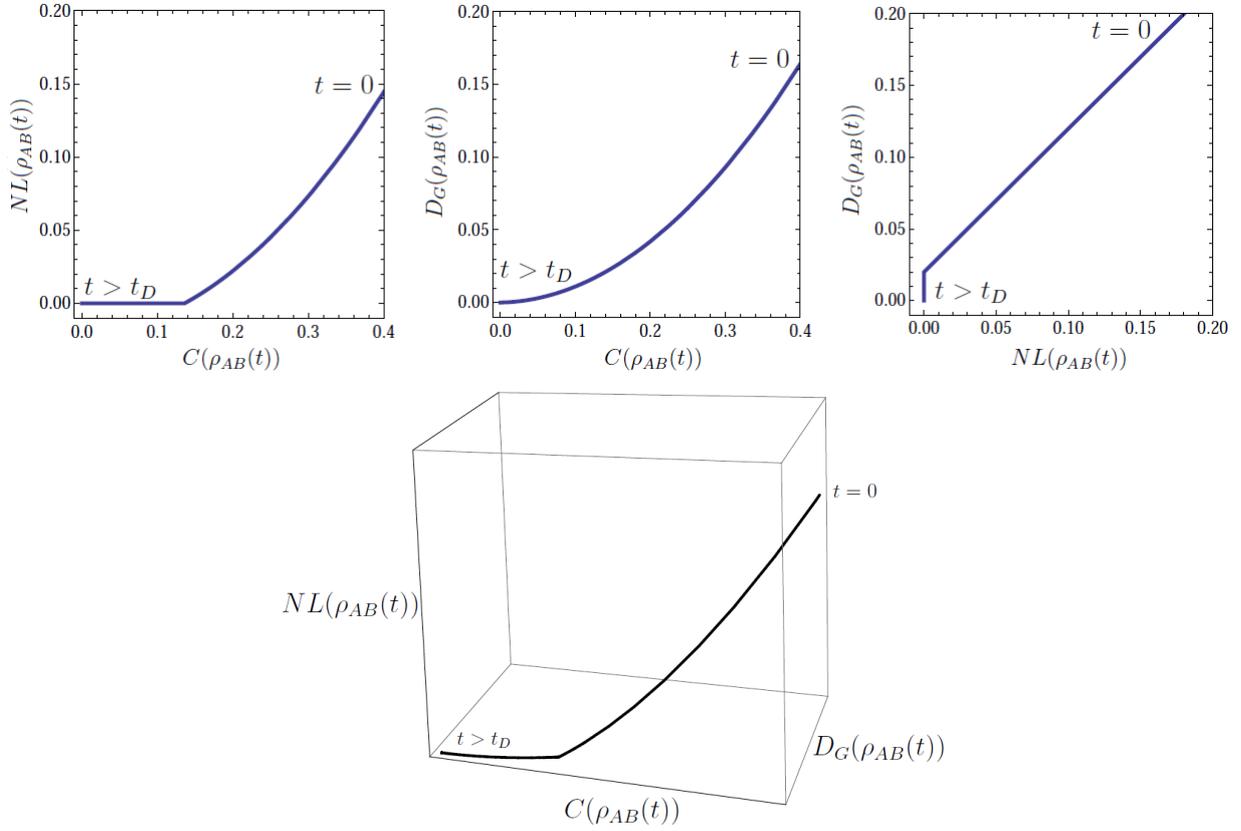


Figura 4.11: Comparações entre as correlações quânticas para o estado de Werner, com $u = 0,99$, $\hbar = 1$, $u_3 = 1$, $v_3 = 0,5$, $\beta = 1$, $w_0 = 1$, $g_0 = 0,01$, $\delta = 10$ e $N = 5$.

Neste capítulo investigamos a dinâmica de um sistema de dois qbits interagindo com um reservatório de campos bosônicos descrito por N osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Mostramos inicialmente que nosso modelo possui as características de um reservatório físico e descreve o fenômeno de descoerência. Após essa verificação, apresentamos a dinâmica de diferentes medidas de correlação e como elas são afetadas pela interação com o reservatório. Para finalizar a análise, apresentamos uma descrição da cronologia das mortes das correlações. Mostramos vários casos nos quais a não-localidade é sempre a primeira correlação a ser suprimida, seguida do emaranhamento e por último a discórdia.

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo desta dissertação foi investigar correlações quânticas, com foco voltado para (i) sua definição em relação a princípios entrópicos genéricos e (ii) sua dinâmica sob descoerência.

Para o estudo das correlações quânticas focamos nossa análise em uma medida introduzida recentemente na literatura, a discórdia quântica. Motivados pelas dificuldades técnicas envolvidas em seu cálculo, mesmo numericamente, propusemos formas alternativas para sua definição, com a utilização da entropia linear e da entropia de Rényi ao invés da entropia de von Neumann. Num primeiro momento, investigamos sistemas bipartidos mais simples, como os estados X . Durante esta análise, verificou-se uma correspondência direta entre a discórdia via entropia linear com a discórdia geométrica. Partindo dessa descoberta, buscamos uma maneira de conectar a discórdia entrópica com a geométrica para casos mais gerais.

Adotamos uma nova abordagem para a definição da discórdia, isto é, abandonamos o conceito de informação mútua e introduzimos o desvio da regra de Bayes na entropia condicional como responsável pelas correlações quânticas apresentadas pela discórdia. Utilizando essa nova definição, demonstramos analiticamente que é possível obter a discórdia geométrica a partir da discórdia entrópica baseada na entropia linear.

Continuando a análise, propusemos então a formulação de uma discórdia generalizada, a qual chamamos de discórdia- q , que é baseada na entropia de Tsallis. Provamos que essa medida generalizada recai na discórdia entrópica usual para $q \rightarrow 1$ e na discórdia

geométrica quando $q \rightarrow 2$. Assim, conseguimos um resultado mais geral que descreve as correlações quânticas em sistemas bipartidos e consegue conectar duas formas bem estabelecidas na literatura, como a discórdia entrópica e a geométrica.

O próximo passo no estudo da discórdia e das correlações quânticas é a busca de uma generalização ainda maior, utilizando outra entropia, mais geral que a entropia de Tsallis, que depende de dois parâmetros, a entropia (q, r) [55–57], a qual, pela variação desses parâmetros, resulta na entropia linear, na entropia de von Neumann e também na entropia de Rényi. Utilizando essa entropia talvez seja possível encontrar uma definição mais geral para a discórdia que englobe todas essas entropias mencionadas.

Além disso, recentemente, obtivemos outros resultados interessantes. Utilizando a discórdia q baseada na entropia de Tsallis conseguimos uma interpretação operacional para as correlações apresentadas pela discórdia. Essa interpretação está associada ao trabalho termodinâmico de demônios de Maxwell clássicos e quânticos. Além disso, conseguimos conectar a discórdia entrópica e geométrica pela variação do parâmetro q . Todos esses resultados foram submetidos para publicação num trabalho realizado em colaboração com o professor Renato Moreira Angelo. Segue o link do artigo no arXiv: <http://arxiv.org/abs/1207.3337>.

A segunda etapa do trabalho foi o estudo da descoerência, para o qual propusemos o modelo de um sistema de dois qbits interagindo com um reservatório de N osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Para essa análise, consideramos, por simplicidade, que o estado inicial do sistema era um estado X . A interação escolhida levava a outro estado X , com os elementos fora da diagonal acoplados a funções que descreviam a dependência do sistema com o tempo e a temperatura. Fizemos um estudo analítico dessas funções, demonstrando que nosso modelo descreve razoavelmente bem a física de um reservatório térmico, com decaimento Gaussiano para tempos curtos.

Para esse modelo também foi possível analisar a dinâmica das correlações quânticas, tais como emaranhamento, desigualdades de Bell e discórdia geométrica sob decaimento de fase. Observamos alguns regimes de parâmetros para os quais ocorre morte súbita tanto do emaranhamento, quanto da não localidade do sistema. A partir desses resultados, identificamos a cronologia em que ocorrem essas mortes para diferentes estados, mais especificamente para estados de Werner e estados uv . Mostramos que a primeira correlação

suprimida foi a não-localidade, seguida do emaranhamento e, por último, a discórdia geométrica.

Uma outra abordagem interessante a ser investigada é o estudo do fenômeno de descoerência para estados mais gerais de dois qbits, assim como utilizar outro tipo de reservatório, composto por N spins.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolski e N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* **47**, 777–780 (1935).
- [2] J. S. Bell. On the Einstein Podolski Rosen Paradox. *Physics* **1**, 195–200 (1964).
- [3] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Physical Review Letters* **49**, 1804–1807 (1982).
- [4] H. Ollivier e W. H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters* **88**, 017901 (2002).
- [5] L. Henderson e V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 6899–6905 (2001).
- [6] B. Dakić, C. Brukner e V. Vedral. Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord. *Physical Review Letters* **105**, 190502 (2010).
- [7] W. H. Zurek. Quantum discord and Maxwell’s demons. *Physical Review A* **67**, 012320 (2003).
- [8] A. O. Caldeira e A. J. Leggett. Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model. *Physical Review A* **31**, 1059–1066 (1985).
- [9] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today* **44**, 36 (1991).

-
- [10] T. Yu e J. H. Eberly. Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed X States. *Quantum Information and Computation* **7**, 459–468 (2007).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. *Quantum Mechanics - Volume One*, volume 21 (Hermann and John Wiley & Sons, Inc., 1977).
- [12] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [13] J. Preskill. Quantum Computation - Lecture Notes. Technical Report, California Institute of Technology, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/index.html#lecture> (2001).
- [14] A. F. R. T. Piza. Notas de aula. Technical Report, Universidade de Sao Paulo (2009).
- [15] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Shumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A* **53**, 2046 (1996).
- [16] D. Bru. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 4237 (2002).
- [17] M. B. Plenio e S. Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
- [18] S. Hill e W. K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical Review Letters* **78**, 5022 (1997).
- [19] W. K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters* **80**, 2245 (1998).
- [20] D. Bohm. *Quantum Theory* página 611 (1951).
- [21] S. J. Freedman e J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **28**, 938–941 (1972).
- [22] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **23**, 880 (1969).
- [23] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A* **40**, 4277 (1989).

-
- [24] V. Vedral, M. B. Plenio e P. L. Knight. Quantifying Entanglement. *Physical Review Letters* **78**, 2275 (1997).
- [25] U. Fano. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. *Reviews of Modern Physics* **29**, 74 (1957).
- [26] W. H. Zurek e J. P. Paz. Decoherence, chaos, and the second law. *Physical Review Letters* **72**, 2508 (1994).
- [27] J. I. Kim, M. C. Nemes, A. F. R. T. Piza e H. E. Borges. Perturbative Expansion for Coherence Loss. *Physical Review Letters* **77**, 207 (1996).
- [28] P. C. Lichtner e J. J. Griffin. Evolution of a Quantum System: Lifetime of a Determinant. *Physical Review Letters* **37**, 1521 (1976).
- [29] A. Rényi. On measures of information and entropy. Em *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, páginas 547–561 (1960).
- [30] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics* **52**, 479–487 (1988).
- [31] T. M. Cover e J. A. Thomas. *Elements of Information Theory* (J. Wiley, 1991).
- [32] J. Maziero, L. C. Céleri e R. M. Serra. Symmetry aspects of quantum discord. arXiv:1004.2082 (2010).
- [33] C. C. Rulli e M. S. Sarandy. Global quantum discord in multipartite systems. *Physical Review A* **84**, 042109 (2011).
- [34] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti e A. Acin. Almost all quantum states have nonclassical correlations. *Physical Review A* **81**, 052318 (2010).
- [35] M. Piani, P. Horodecki e R. Horodecki. No-Local-Broadcasting Theorem for Multipartite Quantum Correlations. *Physical Review Letters* **100**, 090502 (2008).
- [36] D. Girolami e G. Adesso. Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress. *Physical Review A* **83**, 052108 (2011).

-
- [37] U. Fano. Pairs of two-level systems. *Reviews of Modern Physics* **55**, 855 (1983).
- [38] S. Luo. Quantum Discord for two-qubit systems. *Physical Review A* **77**, 042303 (2008).
- [39] T.-C. Wei, K. Nemoto, P. M. Goldbart, P. G. Kwiat, W. D. Munro e F. Verstraete. Maximal entanglement versus entropy for mixed quantum states. *Physical Review A* **67**, 022110 (2003).
- [40] M. Ali, A. R. P. Rau e G. Alber. Quantum discord for two-qubit X states. *Physical Review A* **81**, 042105 (2010).
- [41] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral e M. Williamson. Unified View of Quantum and Classical Correlations. *Physical Review Letters* **104**, 080501 (2010).
- [42] S. Furuichi. Information theoretical properties of Tsallis entropies. *Journal of Mathematical Physics* **47**, 023302 (2006).
- [43] C. Tsallis. Non-extensive thermostatics: brief review and comments. *Physica A* **221**, 126–130 (1995).
- [44] S. Abe, S. Martínez, F. Pennini e A. Plastino. Nonextensive thermodynamic relations. *Physics Letters A* **281**, 126–130 (2001).
- [45] E. P. Borges, C. Tsallis, G. E. Ananos e P. M. de Oliveira. Nonequilibrium probabilistic of the logistic map at the edge of chaos. *Physical Review Letters* **89**, 254103 (2002).
- [46] S. Abe e A. K. Rajagopal. Validity of the second law in nonextensive quantum thermodynamics. *Physical Review Letters* **91**, 120601 (2003).
- [47] W. H. Zurek. Environment-induced superselection rules. *Physical Review D* **26**, 1862 (1982).
- [48] W. H. Zurek. Decoherence, einselection and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics* **75**, 715–775 (2003).
- [49] M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and the interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics* **76**, 1267–1305 (2004).

-
- [50] E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini e I. O. Stamatescu. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, New York, 2003), 2a. edição.
- [51] R. M. Angelo, E. S. Cardoso e K. Furuya. Decoherence induced by a phase-damping reservoir. *Physical Review A* **73**, 062107 (2006).
- [52] R. M. Angelo. Correspondence principle for the diffusive dynamics of a quartic oscillator: Deterministic aspects and the role of temperature. *Physical Review A* **76**, 052111 (2007).
- [53] R. Horodecki, P. Horodecki e M. Horodecki. Two-spin-1/2 mixtures and Bell's inequalities. *Physics Letters A* **210**, 223–226 (1996).
- [54] M. L. Hu. Relations between entanglement, Bell-inequality violation and teleportation fidelity for the two-qubit X states. arXiv:1202.0157v1 (2012).
- [55] X. Hu e Z. Ye. Generalized quantum entropy. *Journal of Mathematical Physics* **47**, 023502 (2006).
- [56] A. E. Rastegin. Some general properties of unified entropies. *Journal of Statistical Physics* **143**, 1120 (2011).
- [57] A. E. Rastegin. On unified-entropy characterization of quantum channels. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **45**, 045302 (2012).

Matriz densidade de sistemas de dois qbits

Considere um sistema de dois qbits com espaço de Hilbert $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2$ e base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Na representação de Bloch, qualquer estado para este sistema pode ser parametrizado como [37]:

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{y} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbb{1}^{AB}$ é a matriz identidade para o sistema composto, $\mathbb{1}^A$ e $\mathbb{1}^B$ são as matrizes identidade para o subsistemas A e B , respectivamente. $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sendo as matrizes de Pauli nas direções x, y, z . $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $t_{ij} = t_{ji}$ são números reais que denotam os elementos na matriz de correlação T .

Se realizarmos operações unitárias locais podemos reescrever esse sistema numa forma mais simples [38]. Ou seja, de acordo com o teorema da decomposição de valor único em álgebra linear, a matriz $T = \{t_{jk}\}$, real e simétrica, pode sempre ser escrita como $T = O^A \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\} O^B$ ou, equivalentemente, como

$$\sum_{i,j=1}^3 O_{im}^A t_{ij} O_{nj}^B = \delta_{mn} c_m, \quad (\text{A.2})$$

onde $O^A = \{O_{im}^A\}$ e $O^B = \{O_{nj}^B\}$ são matrizes ortogonais em $O(3)$. Além disso, sempre existem matrizes unitárias U e V em $U(2)$ tal que $U \sigma_i U^\dagger = \sum_{m=1}^3 O_{im}^A \sigma_m$ e $V \sigma_j V^\dagger =$

$\sum_{n=1}^3 O_{nj}^B \sigma_m$ [37]. Fazendo $\vec{\alpha} = \vec{x}O^A$, $\vec{\beta} = \vec{y}(O^B)^T$ e notando que

$$\begin{aligned}
 U \otimes V \left(\sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) U^\dagger \otimes V^\dagger &= \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} (U \sigma_i U^\dagger) \otimes (V \sigma_j V^\dagger) \\
 &= \sum_{m,n=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 t_{ij} O_{im}^A O_{nj}^B \right) \sigma_m \otimes \sigma_n \\
 &= \sum_{m=1}^3 c_m \sigma_m \otimes \sigma_m,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

o estado ρ é localmente equivalente a

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right). \tag{A.4}$$

Neste formato, a matriz densidade é completamente definida por nove parâmetros reais arranjados em vetores tridimensionais, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Todo estado de dois qbits pode então ser simplificado na sua forma normal através de transformações locais unitárias (que preservam emaranhamento e correlações em geral).

Apêndice **B**

Matriz densidade dependente do tempo

A matriz densidade do sistema composto dependente do tempo é escrita na forma

$$\rho(t) = [\mathbb{1}^B \alpha' - i\sigma_3^B \gamma'] [\mathbb{1}^A \alpha - i\sigma_3^A \gamma] (\rho_{AB}(0) \otimes \rho_R) [\mathbb{1}^A \alpha + i\sigma_3^A \gamma] [\mathbb{1}^B \alpha' + i\sigma_3^B \gamma']. \quad (\text{B.1})$$

Outro passo importante nos modelos de descoerência consiste na operação do traço parcial sobre os graus de liberdade do reservatório, ou seja,

$$\rho_{AB}(t) = \text{Tr}_R [\rho(t)]. \quad (\text{B.2})$$

Com isso, a dinâmica resultante para o sistema se torna não-unitária. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) = & \rho_{AB}(0) \text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \sigma_3^B \sigma_3^A \rho_{AB}(0) \sigma_3^A \sigma_3^B \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] \\ & + i[\rho_{AB}(0), \sigma_3^B] \text{Tr}[\alpha^2 \alpha' \gamma' \rho_R] + i[\rho_{AB}(0), \sigma_3^A] \text{Tr}[\alpha \alpha'^2 \gamma \rho_R] \\ & + (\sigma_3^B \rho_{AB}(0) \sigma_3^B) \text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] + (\sigma_3^A \rho_{AB}(0) \sigma_3^A) \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R] \\ & + i[\sigma_3^B \rho_{AB}(0) \sigma_3^B, \sigma_3^A] \text{Tr}[\alpha \gamma \gamma'^2 \rho_R] + i[\sigma_3^A \rho_{AB}(0) \sigma_3^A, \sigma_3^B] \text{Tr}[\alpha' \gamma' \gamma^2 \rho_R] \\ & + ((\sigma_3^A \rho_{AB}(0) \sigma_3^B + \sigma_3^B \rho_{AB}(0) \sigma_3^A) - \{\rho_{AB}(0), \sigma_3^A \sigma_3^B\}) \text{Tr}[\alpha \alpha' \gamma \gamma' \rho_R]. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

O cálculo dos elementos do sistema AB , são dados por

$$\begin{aligned}
\sigma_3^B \sigma_3^A \rho_{AB} \sigma_3^A \sigma_3^B &= \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right), \\
i [\rho_{AB}, \sigma_3^B] &= \frac{1}{2} (c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B), \\
i [\rho_{AB}, \sigma_3^A] &= \frac{1}{2} (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B), \\
i[\sigma_3^A \rho_{AB} \sigma_3^A, \sigma_3^B] &= -\frac{1}{2} (c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B), \\
i[\sigma_3^B \rho_{AB} \sigma_3^B, \sigma_3^A] &= -\frac{1}{2} (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\sigma_3^B \rho_{AB} \sigma_3^A + \sigma_3^A \rho_{AB} \sigma_3^B) - \{\rho_{AB}, \sigma_3^A \sigma_3^B\}) &= (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_2^B + c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_1^B), \\
\sigma_3^A \rho_{AB} \sigma_3^A = \sigma_3^B \rho_{AB} \sigma_3^B &= \frac{1}{4} (\mathbb{1}^{AB} - c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_2^B + c_3 \sigma_3^A \otimes \sigma_3^B).
\end{aligned}$$

Desse modo, a matriz densidade dependente do tempo é descrita por

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}(t) &= \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right) (\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R]) \\
&+ \frac{1}{2} (c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B) \text{Tr}[\alpha^2 \alpha' \gamma' \rho_R] + \frac{1}{2} (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B) \text{Tr}[\alpha \alpha'^2 \gamma \rho_R] \\
&+ (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_2^B + c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_1^B) \text{Tr}[\alpha \alpha' \gamma \gamma' \rho_R] \\
&+ \frac{1}{4} (\mathbb{1}^{AB} - c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_2^B + c_3 \sigma_3^A \otimes \sigma_3^B) (\text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R]) \\
&- \frac{1}{2} (c_1 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B - c_2 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B) \text{Tr}[\alpha \gamma \gamma'^2 \rho_R] - \frac{1}{2} (c_1 \sigma_1^A \otimes \sigma_2^B - c_2 \sigma_2^A \otimes \sigma_1^B) \text{Tr}[\alpha' \gamma' \gamma^2 \rho_R].
\end{aligned}$$

De forma que podemos encontrar todos os termos da matriz densidade dependente do tempo,

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \frac{1+c_3}{4} (\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R]), \\
\rho_{22}(t) &= \frac{1-c_3}{4} (\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R]), \\
\rho_{33}(t) &= \rho_{22}(t), \\
\rho_{44}(t) &= \rho_{11}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{14}(t) &= \frac{c_1 - c_2}{4} (\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] - \text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] - \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R] - 4\text{Tr}[\alpha \alpha' \gamma \gamma' \rho_R] \\
&\quad - 2i\text{Tr}[\alpha \alpha'^2 \gamma \rho_R] - 2i\text{Tr}[\alpha^2 \alpha' \gamma' \rho_R] + 2i\text{Tr}[\alpha \gamma \gamma'^2 \rho_R] + 2i\text{Tr}[\alpha' \gamma' \gamma^2 \rho_R]), \\
\rho_{23}(t) &= \frac{c_1 + c_2}{4} (\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] + \text{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] - \text{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] - \text{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R] + 4\text{Tr}[\alpha \alpha' \gamma \gamma' \rho_R] \\
&\quad - 2i\text{Tr}[\alpha \alpha'^2 \gamma \rho_R] + 2i\text{Tr}[\alpha^2 \alpha' \gamma' \rho_R] + 2i\text{Tr}[\alpha \gamma \gamma'^2 \rho_R] - 2i\text{Tr}[\alpha' \gamma' \gamma^2 \rho_R]), \\
\rho_{41}(t) &= \rho_{14}^*(t), \\
\rho_{32}(t) &= \rho_{23}^*(t).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Assim, utilizando os resultados apresentados no Apêndice C, os elementos da matriz densidade dependente do tempo podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{44}(t) = \frac{(1 + c_3)}{4}, \\
\rho_{22}(t) &= \rho_{33}(t) = \frac{(1 - c_3)}{4}, \\
\rho_{14}(t) &= \rho_{41}^*(t) = \frac{(c_1 - c_2)}{4} (\Re[\theta_+] + i\Im[\theta_+]) = \frac{(c_1 - c_2)}{4} \theta_+, \\
\rho_{23}(t) &= \rho_{32}^*(t) = \frac{(c_1 + c_2)}{4} (\Re[\theta_-] + i\Im[\theta_-]) = \frac{(c_1 + c_2)}{4} \theta_-.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Finalmente, obtemos a matriz densidade do sistema de dois qbits dependente do tempo,

$$\rho_{AB}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & (c_1 - c_2) \theta_+(t) \\ 0 & 1 - c_3 & (c_1 + c_2) \theta_-(t) & 0 \\ 0 & (c_1 + c_2) \theta_-^*(t) & 1 - c_3 & 0 \\ (c_1 - c_2) \theta_+^*(t) & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}, \tag{B.6}$$

onde

$$\theta_{\pm}(t) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 \pm v_3) t g_k)}} \right). \tag{B.7}$$

Traçando o reservatório

Os traços sobre o reservatório são feitos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] &= \text{Tr} \left[\cos^2 \left(u_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right) \cos^2 \left(v_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k \right) \rho_R \right] \\
&= \text{Tr} \left[\left(\frac{e^{2i(u_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k)} + e^{-2i(u_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k)} + 2}{4} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{e^{2i(v_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k)} + e^{-2i(v_3 t \sum_k g_k \hat{n}_k)} + 2}{4} \right) \left(\frac{e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k \hat{n}_k}}{Z} \right) \right] \\
&= \frac{1}{16Z} \text{Tr} \left[4e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k \hat{n}_k} + e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k} + e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k} \right. \\
&\quad + e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k} + e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k} + 2e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k - 2iu_3 t g_k) \hat{n}_k} \\
&\quad \left. + 2e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k + 2iu_3 t g_k) \hat{n}_k} + 2e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k - 2iv_3 t g_k) \hat{n}_k} + 2e^{-\sum_k (\beta \hbar \omega_k + 2iv_3 t g_k) \hat{n}_k} \right] \\
&= \frac{1}{16Z} \text{Tr} \left[4 \prod_k e^{-\beta \hbar \omega_k \hat{n}_k} + \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k} \right. \\
&\quad + \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k} + \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k} \\
&\quad + \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k} + 2 \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2iu_3 t g_k) \hat{n}_k} \\
&\quad \left. + 2 \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2iu_3 t g_k) \hat{n}_k} + 2 \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2iv_3 t g_k) \hat{n}_k} + 2 \prod_k e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2iv_3 t g_k) \hat{n}_k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] &= \frac{1}{16Z} \left[4 \prod_k (\text{Tr} e^{-\beta \hbar \omega_k \hat{n}_k}) + \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k}) \right. \\
&\quad + \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 + v_3) t g_k) \hat{n}_k}) + \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k}) \\
&\quad + \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 - v_3) t g_k) \hat{n}_k}) + 2 \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i u_3 t g_k) \hat{n}_k}) \\
&\quad + 2 \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i u_3 t g_k) \hat{n}_k}) + 2 \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i v_3 t g_k) \hat{n}_k}) \\
&\quad \left. + 2 \prod_k (\text{Tr} e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i v_3 t g_k) \hat{n}_k}) \right] \\
&= \frac{1}{16} \left[4 + \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 + v_3) t g_k)}} \right) + \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 + v_3) t g_k)}} \right) \right. \\
&\quad + \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i(u_3 - v_3) t g_k)}} \right) + \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 - v_3) t g_k)}} \right) \\
&\quad + 2 \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i u_3 t g_k)}} \right) + 2 \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i u_3 t g_k)}} \right) \\
&\quad \left. + 2 \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k - 2i v_3 t g_k)}} \right) + 2 \prod_k \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i v_3 t g_k)}} \right) \right], \quad (\text{C.1})
\end{aligned}$$

onde definimos as funções:

$$\begin{aligned}
\theta_{\pm}(t) &= \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i(u_3 \pm v_3) t g_k)}} \right), \\
\tau(t) &= \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i u_3 t g_k)}} \right), \\
\lambda(t) &= \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-(\beta \hbar \omega_k + 2i v_3 t g_k)}} \right). \quad (\text{C.2})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Tr}[\alpha^2 \alpha'^2 \rho_R] = \frac{1}{8} (2 + \Re[\theta_+(t)] + \Re[\theta_-(t)] + 2\Re[\tau(t)] + 2\Re[\lambda(t)]). \quad (\text{C.3})$$

Os outros termos do traço sobre o reservatório são feitos de maneira similar, e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\gamma^2 \gamma'^2 \rho_R] &= \frac{1}{8} (2 + \Re[\theta_+(t)] + \Re[\theta_-(t)] - 2\Re[\tau(t)] - 2\Re[\lambda(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha^2 \gamma'^2 \rho_R] &= \frac{1}{8} (2 - \Re[\theta_+(t)] - \Re[\theta_-(t)] + 2\Re[\tau(t)] - 2\Re[\lambda(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha'^2 \gamma^2 \rho_R] &= \frac{1}{8} (2 - \Re[\theta_+(t)] - \Re[\theta_-(t)] - 2\Re[\tau(t)] + 2\Re[\lambda(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha \alpha' \gamma \gamma' \rho_R] &= \frac{1}{8} (-\Re[\theta_+(t)] + \Re[\theta_-(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha^2 \alpha' \gamma' \rho_R] &= \frac{1}{8} (-\Im[\theta_+(t)] + \Im[\theta_-(t)] - 2\Im[\lambda(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha \alpha'^2 \gamma \rho_R] &= \frac{1}{8} (-\Im[\theta_+(t)] - \Im[\theta_-(t)] - 2\Im[\tau(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha \gamma \gamma'^2 \rho_R] &= \frac{1}{8} (\Im[\theta_+(t)] + \Im[\theta_-(t)] - 2\Im[\tau(t)]), \\
\mathrm{Tr}[\alpha' \gamma' \gamma^2 \rho_R] &= \frac{1}{8} (\Im[\theta_+(t)] - \Im[\theta_-(t)] - 2\Im[\lambda(t)]). \tag{C.4}
\end{aligned}$$