

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO

UMA PROPOSTA PARA A GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE
BIDIMENSIONAIS UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

CURITIBA
2011

LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO

UMA PROPOSTA PARA A GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE
BIDIMENSIONAIS UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Programação Matemática, Setores Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientadora: Prof^a Dra. Luzia Vidal de Souza


CURITIBA
2011

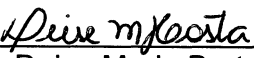
TERMO DE APROVAÇÃO

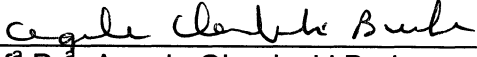
LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO

UMA PROPOSTA PARA A GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

Dissertação aprovada como requisito à obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:


Orientadora: Prof^a Dr^a. Luzia Vidal de Souza
Departamento de Expressão Gráfica, UFPR


Prof^a Dr^a. Deise Maria Bertoldi Costa
Departamento de Expressão Gráfica, UFPR


Prof^a Dr^a. Angela Olandoski Barbosa
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR

Curitiba, 15 de março de 2011.

*Aos meus pais, Ruberval e Inês,
dedico este trabalho com todo o meu amor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a vida, e por conduzir e iluminar o meu caminho com sua graça divina.

Agradeço aos meus pais, Ruberval Candido e Inês de Souza Xavier Candido, que sempre estiveram ao meu lado, confiando em mim e me incentivando, para que eu atingisse meus objetivos, que também são os seus; e ao meu irmão Raul Xavier Candido, pela amizade e carinho inigualáveis. Todo o amor que vocês têm por mim nunca será esquecido.

Agradeço à minha orientadora, professora Dra. Luzia Vidal de Souza, pela confiança em mim depositada, por suas contribuições e pela orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos que fiz no PPGMNE durante o mestrado, com os quais compartilhei dois anos de estudos, Fábio, André, Lara, Rudinei, Talita, Josias e Luciana; e ao Thiago, em especial, pelo cuidado, atenção e companheirismo que sempre teve comigo, sou grata pelos momentos de agradável convivência que tivemos.

Não poderia deixar de agradecer à querida Maristela, secretária do PPGMNE, que conquista a todos com sua alegria e bom-humor, transformando o local de estudo num ambiente agradável e acolhedor.

Agradeço aos meus ex-colegas de trabalho da Escola Estadual Vila Rica do Espírito Santo, especialmente ao Celso e à Rita, pelo incentivo, compreensão e colaboração nos primeiros meses do mestrado, quando precisava me ausentar.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

O problema da geração de padrões de corte bidimensionais é um importante problema de otimização combinatória, e tem forte representatividade em diversos setores da indústria, como por exemplo os setores moveleiro, têxtil, de produção de vidro e papel. Tal problema pode ser formulado como um Problema da Mochila Bidimensional, cujo objetivo consiste em encontrar o melhor arranjo de itens a ser cortado a partir de um objeto, a fim de que sejam minimizadas as sobras e conseqüentemente o custo com material. Considera-se neste estudo que o corte seja regular, portanto trata-se de itens e objetos retangulares. Este trabalho apresenta uma estratégia de resolução para a geração de padrões de corte bidimensionais com corte do tipo guilhotinado, no qual o mesmo se estende de um lado ao outro do objeto. Foram considerados dois diferentes tipos de padrões de corte: padrões não-estagiados e padrões em dois estágios, e trabalhou-se ainda com a possibilidade de rotação dos itens, caracterizando ao todo quatro abordagens para a resolução do problema. A metodologia proposta subdivide-se em duas etapas: primeiramente utilizam-se Algoritmos Genéticos para a seleção e agrupamento dos itens em subconjuntos, e então aplica-se uma técnica de encaixe para criar o arranjo geométrico dos mesmos, sendo que o corte não-estagiado possui uma técnica de encaixe baseada no algoritmo construtivo de Wang (1982), enquanto no corte em dois estágios utiliza-se uma heurística de encaixe seqüencial dos itens. O método proposto foi testado sobre instâncias da literatura, para quatro abordagens distintas, que são: corte não-estagiado sem rotação de itens, corte não-estagiado com rotação de itens, corte em dois estágios sem rotação de itens, e corte em dois estágios com rotação de itens; e os resultados obtidos foram comparados com as soluções ótimas conhecidas. Tais resultados foram satisfatórios, pois o método gerou padrões de corte com um aproveitamento médio do objeto entre 90 e 95%, num tempo computacional reduzido e praticamente instantâneo para algumas instâncias testadas.

Palavras-chave: Geração de padrões de corte bidimensionais. Algoritmos Genéticos.

ABSTRACT

The problem of generating two-dimensional cutting patterns is an important combinatorial optimization problem. It is present in industrial activities of various fields of activity, like the furniture and textile sector, and of glass and paper production. This problem can be formulated as a Two-Dimensional Knapsack Problem, whose goal is to find the best arrangement of items to be cut from an object, so that the leftovers are minimized and, consequently, the material cost too. It is considered in this study the regular cut, so we deal with rectangular objects and items. This paper presents a resolution strategy for the generation of two-dimensional guillotine cutting patterns, in which the cut is done from one side to the other side of the object. We considered two different types of guillotine cutting patterns: non-staged patterns, and patterns in two stages, and worked also with the possibility of rotation of items, featuring in all four approaches to solving the problem. The proposed methodology is divided in two stages: initially, it is employed a genetic algorithm for the selection and grouping of items into subsets, and then it is applied a fitting technique to create the geometric arrangement of these items. The non-staged cutting patterns have a fitting algorithm based on the constructive algorithm of Wang (1982), while the cut in two stages uses a sequential fitting heuristic. The proposed methodology was tested on instances of literature, for the four different approaches considered: non-staged patterns without rotation of items, non-staged patterns with rotation of items, two-staged patterns without rotations of items, and two-staged patterns with rotation of items; and the results were compared with known optimal solutions. The results were considered as satisfactory, since the method generated cutting patterns with an average use of the object between 90 and 95% at a greatly reduced processing time, and practically zero for some instances tested.

Key-words: Generation of two-dimensional cutting patterns. Genetic Algorithms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – EXEMPLO DE PROBLEMA UNIDIMENSIONAL	16
FIGURA 2 – EXEMPLO DE PROBLEMA BIDIMENSIONAL	17
FIGURA 3 – EXEMPLO DE PROBLEMA TRIDIMENSIONAL	17
FIGURA 4 – TIPOS DE PROBLEMAS BÁSICOS	19
QUADRO 1 – TIPOS DE PROBLEMAS INTERMEDIÁRIOS: MAXIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO	20
QUADRO 2 – TIPOS DE PROBLEMAS INTERMEDIÁRIOS: MINIMIZAÇÃO DO CONSUMO	21
FIGURA 5 – CORTE GUILHOTINADO	23
FIGURA 6 – CORTE ESTAGIADO	24
FIGURA 7 – ALGORITMO PCGV ₂ PD	29
FIGURA 8 – TÉCNICAS DE ENCAIXE PARA O CORTE EM DOIS ESTÁGIOS	32
FIGURA 9 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO DE UM ALGORITMO GENÉTICO	41
FIGURA 10 – CRUZAMENTO DE UM PONTO	44
FIGURA 11 – CRUZAMENTO DE DOIS PONTOS	44
QUADRO 3 – PARÂMETROS UTILIZADOS	47
FIGURA 12 – ALGORITMO GENÉTICO PARA GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE	50
FIGURA 13 – CONSTRUÇÕES	52
FIGURA 14 – ALGORITMO DE WANG	53
FIGURA 15 – ALGORITMO DE ENCAIXE PARA O CORTE NÃO- ESTAGIADO SEM ROTAÇÃO	55
FIGURA 16 – ALGORITMO DE ENCAIXE PARA O CORTE NÃO- ESTAGIADO COM ROTAÇÃO	55
FIGURA 17 – ALGORITMO <i>FIRST FIT DECREASING HEIGHT</i>	56
FIGURA 18 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA <i>gcut1</i> (A1)	60
FIGURA 19 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA <i>gcut5</i> (A1, A2 e A3)	61
FIGURA 20 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA <i>gcut9</i> (A1, A2 e A3)	61
FIGURA 21 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA <i>gcut1</i> (A2)	63
GRÁFICO 1 – APROVEITAMENTO DO OBJETO NAS ABORDAGENS A1 E A2	64
FIGURA 22 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA <i>gcut5</i> (A4)	66

GRÁFICO 2 – APROVEITAMENTO DO OBJETO NAS ABORDAGENS A3 E A4	67
GRÁFICO 3 – EFICIÊNCIA DAS DIFERENTES ABORDAGENS	68

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DESCRIÇÃO DAS INSTÂNCIAS	58
TABELA 2 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A1	60
TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A2	62
TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A3	65
TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A4	65
TABELA 6 – RESULTADOS DA ANOVA	67
TABELA 7 – RELAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ENCONTRADA E A SOLUÇÃO ÓTIMA PARA CADA ABORDAGEM	68

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	13
1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	14
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2 REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1 OS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO	15
2.1.1 Classificação dos Problemas de Corte	15
2.1.1.1 Problemas básicos	18
2.1.1.2 Problemas intermediários	20
2.1.1.3 Problemas refinados	21
2.1.2 Padrões de Corte	22
2.1.2.1 Tipo de Corte	22
2.1.2.2 Corte Estagiado	23
2.1.2.3 Rotação dos Itens	24
2.2 PROBLEMAS DE CORTE BIDIMENSIONAIS	25
2.2.1 Métodos Exatos	26
2.2.1.1 Programação Dinâmica	26
2.2.1.2 Construções	29
2.2.2 Métodos Heurísticos	30
2.2.2.1 Heurísticas para o corte em dois estágios	31
2.2.3 Métodos Meta-heurísticos	32
2.2.3.1 Algoritmos Genéticos	33
2.2.3.2 Busca Tabu	33
2.2.3.3 Simulated Annealing	34
2.2.3.4 GRASP	34
2.3 ALGORITMOS GENÉTICOS	35
3 MATERIAIS E MÉTODOS	37
3.1 O PROBLEMA DA GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS	37
3.2 ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO	38
3.2.1 Etapa 1: Algoritmo Genético	39
3.2.1.1 Parâmetros Utilizados	46
3.2.1.2 Execução do Algoritmo	47
3.2.2 Etapa 2: Técnicas de Encaixe	50
3.2.2.1 Corte não-estagiado	51
3.2.2.2 Cortes em dois estágios	56
4 ANÁLISE EXPERIMENTAL E RESULTADOS	58
4.1 RESULTADOS PARA O CORTE NÃO-ESTAGIADO	59
4.1.1 Abordagem A1: Corte não-estagiado sem rotação dos itens	59
4.1.2 Abordagem A2: Corte não-estagiado com rotação dos itens	62
4.2 RESULTADOS PARA O CORTE EM DOIS ESTÁGIOS	64
4.1.1 Abordagem A3: Corte em dois estágios sem rotação dos itens	64
4.1.2 Abordagem A4: Corte em dois estágios com rotação dos itens	66
4.3 ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO MÉTODO	67
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	71

REFERÊNCIAS	72
APÊNDICE	76
ANEXO	84

1 INTRODUÇÃO

O crescimento dos setores da indústria representa, simultaneamente, uma causa e uma conseqüência do avanço na gestão da produção. A procura por ferramentas que auxiliem na tomada de decisão dos gestores, em busca da caracterização ótima de seu sistema produtivo, fez com que se desenvolvessem métodos para possibilitar o aumento do lucro e/ou a minimização das perdas em uma determinada atividade.

Um dos cenários relevantes neste sentido engloba as indústrias que necessitam cortar peças de grandes dimensões, a fim de obter peças com dimensões menores para a fabricação de produtos intermediários ou finais. Tal atividade se exemplifica com o corte de vidro para a produção de portas e janelas, ou o corte de placas de madeira para produção de móveis. Há ainda outros exemplos de aplicações industriais que utilizam outros materiais como insumos do processo produtivo, tais como: aço, papel, alumínio, espuma, entre outros.

Geralmente os problemas de corte têm como objetivo minimizar a quantidade de material utilizado, o que enseja diretamente na minimização das sobras não aproveitáveis no processo de corte, reduzindo os custos do processo produtivo.

Acerca dos aspectos teóricos, problemas de corte e empacotamento constituem uma das classes mais estudadas em otimização combinatória, tendo como marco introdutório a abordagem proposta por Gilmore e Gomory, em 1961. Esta abordagem consistia basicamente em determinar a melhor maneira de cortar peças maiores, de tamanho e quantidade conhecidos, para a obtenção de peças menores, atendendo a uma demanda com tamanho e quantidade especificados, respeitando-se determinadas restrições e minimizando as perdas ou maximizando a utilização do objeto (TEMPONI, 2007).

Em virtude de se tratar de problemas de natureza *np-hard*, o tempo computacional exigido pelos métodos de solução exatos é muito elevado. Neste contexto, métodos heurísticos e meta-heurísticos são requeridos a fim de equilibrar a qualidade das soluções com o tempo de processamento.

Neste sentido, o presente trabalho propõe uma nova metodologia para a resolução do problema de corte bidimensional. O método emprega a meta-heurística

Algoritmos Genéticos para a geração de padrões de corte, além de propor duas técnicas distintas de encaixe das peças cortadas. A abordagem proposta foi avaliada sobre instâncias clássicas da literatura, produzindo bons resultados em termos de eficácia e eficiência.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo geral o estudo da eficiência da geração de padrões de corte bidimensionais guilhotinados utilizando Algoritmos Genéticos, associados a técnicas de encaixe.

São objetivos específicos deste estudo:

1. Encontrar uma formulação eficiente dos Algoritmos Genéticos para o problema da geração de padrões de corte bidimensionais;
2. Analisar duas técnicas distintas de encaixe das peças cortadas associadas à geração de padrões de corte utilizando algoritmos genéticos. A primeira delas baseia-se no agrupamento iterativo dos itens cortados e destina-se aos problemas que apresentam corte não-estagiado, isto é, que não possuem restrições quanto à quantidade de mudanças na orientação do corte. Já a segunda técnica, para problemas com corte em dois estágios, consiste num algoritmo de encaixe seqüencial dos itens a ser cortados;
3. Implementar computacionalmente a geração de padrões de corte por algoritmos genéticos, associados às técnicas de encaixe supracitadas, na resolução completa de problemas de corte bidimensional guilhotinado;
4. Analisar a eficiência e eficácia do método proposto através de extensivos testes sobre instancias clássicas da literatura.

1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

A otimização no processo de corte de materiais tem sido estudada desde a década de 60, quando os problemas de corte e empacotamento foram introduzidos na literatura por Gilmore e Gomory (1961).

Do ponto de vista econômico, estes problemas possuem alta relevância, pois podem ser encontrados em diversos ramos da atividade industrial.

Além disso, os Problemas de Corte e Empacotamento são problemas np -difíceis, isto é, não possuem solução em tempo polinomial conhecida, o que incentiva a busca de métodos heurísticos que possam oferecer boas soluções para o problema, com menor custo computacional.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O seqüenciamento das idéias expostas neste trabalho obedece à seguinte estrutura:

Na seção 2 é definido de forma detalhada o problema a ser estudado e é apresentada uma revisão literária dos estudos já realizados acerca do mesmo, contemplando as abordagens e técnicas de solução já utilizados e consagrados na literatura. Faz-se ainda uma breve explanação sobre os Algoritmos Genéticos e seu mecanismo de busca, que fundamentam a metodologia proposta.

A seção 3 contém a descrição detalhada da metodologia proposta para a solução do problema, incluindo a forma de geração dos padrões de corte por um algoritmo genético e as técnicas de encaixe aplicadas aos itens.

A seção 4 apresenta os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta a instâncias clássicas da literatura, bem como a discussão sobre os mesmos.

Por fim, a seção 5 tece considerações concernentes ao estudo desenvolvido e indica sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 OS PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO

Os Problemas de Corte e Empacotamento consistem em determinar a melhor forma de se cortar um conjunto de placas, definidos como objetos, de tamanho e quantidade conhecidos, para a obtenção de peças menores, ou simplesmente itens, com tamanho e quantidade também conhecidos, respeitando-se determinadas restrições e minimizando as perdas ou maximizando a utilização da material.

Para os fins de caracterização do problema a ser estudado neste trabalho, foram utilizados os seguintes conceitos:

- **Objeto:** Os objetos correspondem às placas a serem cortadas em partes menores.
- **Item:** Os itens correspondem às partes demandadas, cortados a partir dos objetos, e serão o produto final do processo ou serão processados e transformados em outros produtos.

Marques e Arenales (2002) comentam que tanto a prática de cortar objetos grandes para a obtenção de itens menores, quanto o empacotamento de itens pequenos dentro de espaços bem definidos, são práticas idênticas, considerando que um item cortado de uma posição pode ser visto como ocupando tal posição. Por apresentar a mesma estrutura lógica, estes dois tipos de problema podem ser abordados com as mesmas formulações e estratégias de solução (FIGUEIREDO, 2005).

2.1.1 Classificação dos Problemas de Corte

Desde o início de seu estudo, os problemas de corte são abordados sob diferentes denominações, como: problemas de corte e estoque (*Cutting Stock Problem*), problemas de empacotamento (*Bin Packing Problem*, *Strip Packing*

Problem, Vector Packing Problem, Knapsack Packing Problem) e problemas de carregamento (*Vehicle Loading Problem, Pallet Loading Problem, Container Loading Problem, Car Loading Problem*).

Dickhoff (1990) criou uma abordagem sistemática e consistente para a determinação da tipologia destes problemas, considerando suas estruturas lógicas e características peculiares. Wascher (2007) aprimorou a tipologia proposta por Dickhoff (1990), propondo uma classificação na qual os problemas de corte são separados em categorias referentes às seguintes características:

- **Dimensionalidade:** A dimensionalidade define o número mínimo de dimensões necessárias para a descrição do padrão de corte. Considerando-se apenas os aspectos espaciais, um problema pode ser da forma:
 - **Unidimensional:** o corte é feito em apenas uma dimensão, como no caso do corte de barras de ferro ou bobinas de papel, mostrado na FIGURA 1.

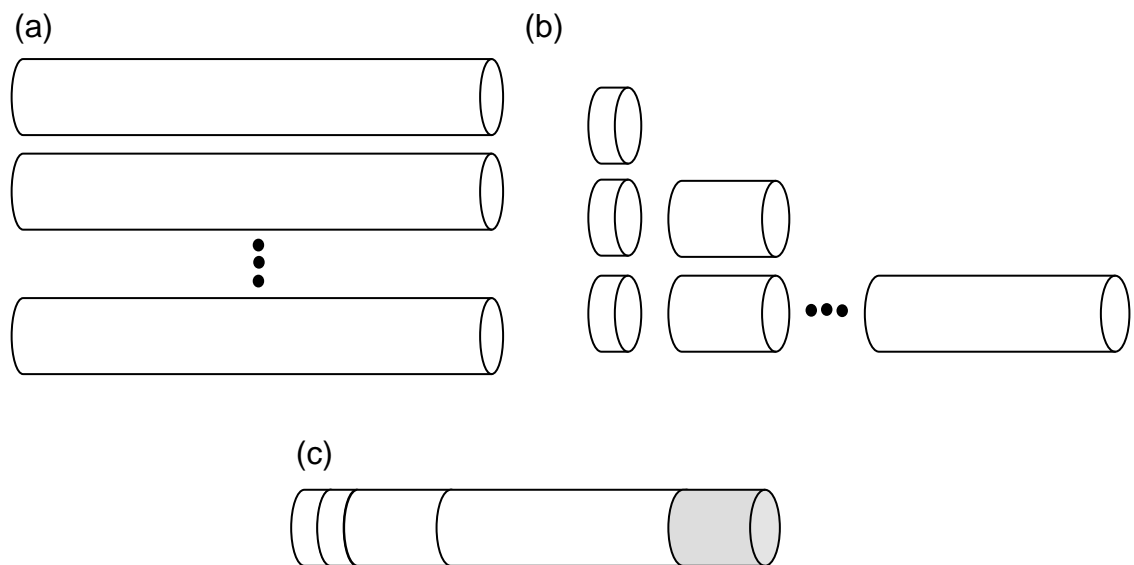


FIGURA 1 – EXEMPLO DE PROBLEMA UNIDIMENSIONAL: (a) Objetos em estoque; (b) Itens da demanda; (c) Corte dos objetos em estoque para atendimento da demanda

FONTE: A autora (2011)

- **Bidimensional:** Neste caso, duas dimensões, largura e comprimento, são relevantes para o problema. Esses problemas são encontrados, por exemplo, nas indústrias de móveis e vidros (FIGURA 2).

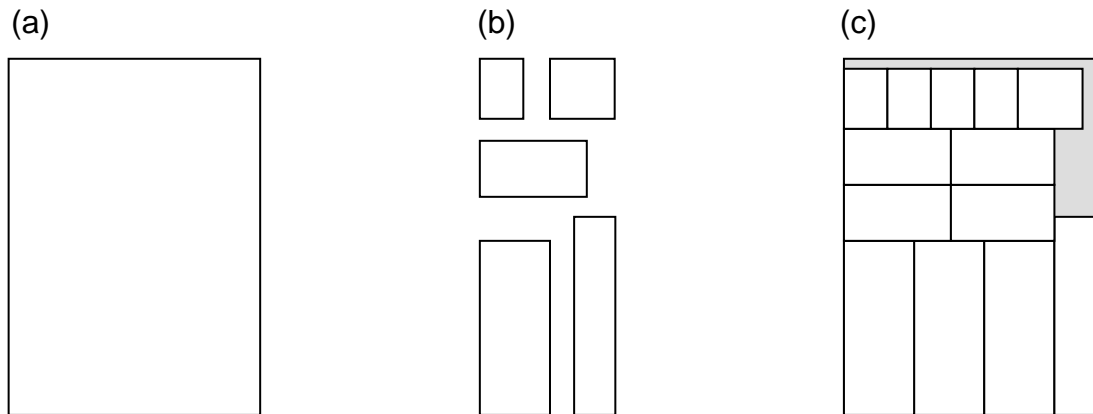


FIGURA 2 – EXEMPLO DE PROBLEMA BIDIMENSIONAL: (a) Objetos em estoque; (b) Itens da demanda; (c) Corte dos objetos em estoque para atendimento da demanda
 FONTE: A autora (2011)

- **Tridimensional:** Nestes problemas, uma terceira dimensão é considerada. Problemas tridimensionais acontecem, por exemplo, nas empresas de transporte, que desejam minimizar o número de viagens para a entrega de produtos e, por isso, têm que empacotar as caixas nos caminhões da melhor maneira possível. Esta prática é ilustrada a seguir, na FIGURA 3.

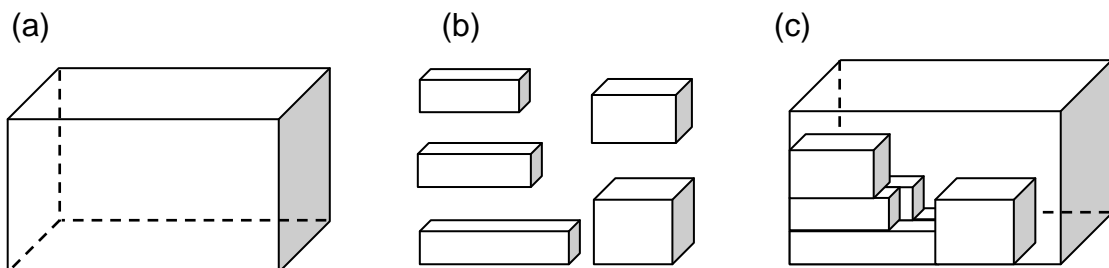


FIGURA 3 – EXEMPLO DE PROBLEMA TRIDIMENSIONAL: (a) Objetos disponíveis; (b) Itens a ser carregados; (c) Carregamento dos itens no objeto
 FONTE: A autora (2011)

Problemas com mais que três dimensões são obtidos quando são tratados também aspectos não-espaciais, como por exemplo, o tempo para a execução de uma tarefa.

- **Tipo de atribuição:** Este atributo pode se apresentar em duas diferentes situações:
 - **Maximização da produção:** Neste caso, o conjunto de objetos não é suficiente para acomodar todos os itens, de modo que o problema é resolvido para que o número máximo de itens seja alocado.
 - **Minimização do consumo:** Neste caso, os objetos são suficientes para acomodar todos os itens, e o problema é resolvido de modo que os itens

sejam alocados no conjunto de objetos que apresente menor quantidade, área ou custo, dependendo do objetivo a ser alcançado.

- **Sortimento dos itens:** Os itens a serem cortados podem ser idênticos, isto é, apresentar mesma forma e tamanho; fracamente heterogêneos, podendo ser divididos em poucos grupos de itens idênticos com demandas relativamente grandes; ou fortemente heterogêneos, sendo que muitos poucos itens possuem mesma forma e tamanho e, portanto, a demanda de cada tipo de item é muito pequena ou até mesmo única. Por definição, itens de mesma forma e tamanho, porém com diferentes orientações, são considerados itens distintos.
- **Sortimento dos objetos:** O conjunto dos objetos pode ser composto por um único objeto, que pode ter extensão fixa ou apresentar dimensões com extensão variável; ou composto por vários objetos, que por sua vez podem ser idênticos, fracamente heterogêneos ou fortemente heterogêneos, assim como os itens.
- **Forma dos itens:** No caso de problemas bi ou tridimensionais, os itens a serem cortados podem ser classificados quanto à sua forma: itens regulares (retângulos, círculos, cubos) ou itens não regulares.

A combinação dos critérios de classificação caracteriza os tipos de problema que existem. Wascher (2007) ainda dividiu os problemas obtidos com a combinação de tais critérios em problemas básicos, envolvendo o tipo de atribuição e o sortimento dos itens; problemas intermediários, envolvendo também o sortimento dos objetos; e problemas refinados, envolvendo ainda a forma dos itens.

2.1.1.1 Problemas básicos

A combinação dos tipos de atribuição e do sortimento dos itens gera os tipos de problemas básicos propostos por Wascher (2007) mostrados na FIGURA 4.

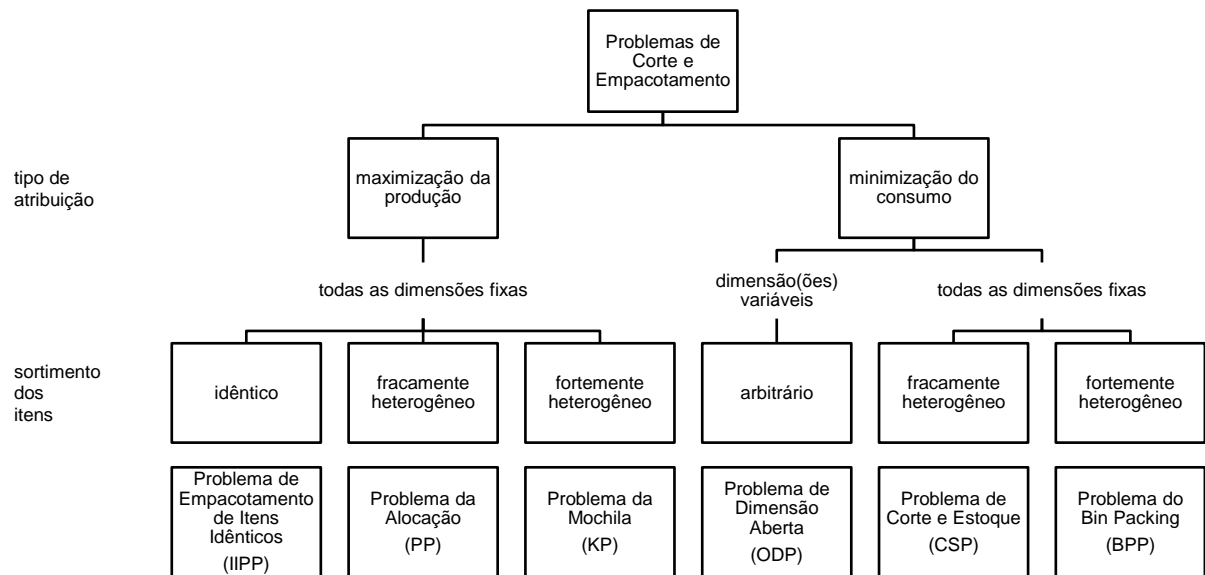


FIGURA 4 – TIPOS DE PROBLEMAS BÁSICOS
 FONTE: WASCHER (2007)

Nos problemas de maximização da produção, objetiva-se alocar o maior número possível de itens nos objetos, de acordo com seu sortimento. Deste modo, em geral, o problema consiste na seleção dos itens que serão produzidos. O Problema de Empacotamento de Itens Idênticos (*IIPP – Identical Item Packing Problem*) requer que sejam cortados itens idênticos a partir de um conjunto limitado de objetos. Por se tratar de itens idênticos, não existe nessa classe a necessidade de seleção de itens a serem produzidos, e o problema se reduz ao arranjo dos itens nos objetos. No Problema da Alocação (*PP – Placement Problem*) e no Problema da Mochila (*KP – Knapsack Problem*), um conjunto de itens fracos e fortemente heterogêneos, respectivamente, deve ser alocado aos objetos disponíveis, maximizando a quantidade de itens de tal conjunto.

O Problema de Dimensão Aberta (*ODP – Open Dimensional Problem*) define um problema de minimização da entrada, no qual todos os itens devem ser alocados em um único objeto, que apresenta uma ou mais dimensões variáveis. Deste modo, o problema consiste basicamente em determinar a extensão das dimensões variáveis do objeto.

Nos outros dois problemas de minimização de entrada, o Problema de Corte e Estoque (*CSP – Cutting Stock Problem*) e Problema do Bin Packing (*BPP – Bin Packing Problem*), um conjunto de itens fracos e fortemente heterogêneos,

respectivamente, devem ser completamente alocados no melhor conjunto de objetos, atendendo ao objetivo do problema.

2.1.1.2 Problemas intermediários

Acrescentando aos problemas básicos os critérios de classificação em relação ao sortimento dos objetos, obtêm-se os tipos de problemas intermediários.

O QUADRO 1 e o QUADRO 2 mostram, respectivamente, os tipos de problemas intermediários propostos por Wascher (2007) para os casos de maximização da produção e minimização do consumo.

características dos objetos		sortimento dos itens	Idênticos	fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
		um único objeto	Problema de Empacotamento de Itens Idênticos IIPP	Problema da Alocação em um Único Objeto SLOPP	Problema da Mochila Única SKP
todas as dimensões fixas	idênticos	X	X	Problema da Alocação em Múltiplos Objetos Idênticos MILOPP	Problema das Múltiplas Mochilas Idênticas MIKP
	heterogêneos			Problema da Alocação em Múltiplos Objetos Heterogêneos MHLOPP	Problema das Múltiplas Mochilas Heterogêneas MHKP

QUADRO 1 – TIPOS DE PROBLEMAS INTERMEDIÁRIOS: MAXIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO
FONTE: WASCHER (2007)

características dos objetos		sortimento dos itens	fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
		todas as dimensões fixas	idênticos	Problema de Corte e Estoque de Objetos de Tamanho Único SSSCSP
fracamente heterogêneos	Problema de Corte e Estoque de Objetos de Tamanhos Diferentes MSSCSP		Problema do <i>Bin Packing</i> de <i>bins</i> de Tamanhos Diferentes MBSBPP	
fortemente heterogêneos	Problema de Corte e Estoque Residual RCSP		Problema do <i>Bin Packing</i> Residual RBPP	
um único objeto dimensão(ões) variável(is)		Problema de Dimensão Aberta ODP		

QUADRO 2 – TIPOS DE PROBLEMAS INTERMEDIÁRIOS: MINIMIZAÇÃO DO CONSUMO
 FONTE: WASCHER (2007)

2.1.1.3 Problemas refinados

Um conjunto de problemas refinados é obtido acrescentando-se o critério de dimensionalidade e forma dos itens a problemas bi e tri-dimensionais, resultando em subcategorias dos problemas do tipo intermediário.

Estes problemas são identificados por adjetivos adicionados aos problemas intermediários. Sendo assim, a nomenclatura dos problemas refinados é estabelecida do seguinte modo: dimensão dos objetos, sucedida da forma dos objetos, e finalizada pelo nome do problema do tipo intermediário. Por exemplo, um problema tridimensional do *Bin Packing* de *bins* de tamanho único, com objetos cuja forma é regular, é denominado 3-regular-SBSBPP.

2.1.2 Padrões de Corte

Um padrão de corte corresponde ao arranjo geométrico dos itens a serem cortados a partir de um objeto, isto é, à forma como os objetos serão cortados para produzir itens menores (BARROS, 2004). Para que o padrão de corte seja considerado factível, os itens devem ser dispostos de modo que não haja sobreposição e que não sejam excedidas as dimensões do objeto.

A um padrão de corte j , pode ser associado um vetor $A_j \in Z_+^n$, no qual cada componente a_{ij} registra a quantidade de cada item i a ser cortada nesse padrão j .

Os retângulos gerados após a aplicação do plano de corte em um objeto e que não possuem representação em seu vetor associado são chamados de sobra, e descartados no processo produtivo.

Do ponto de vista operacional, algumas características podem ser consideradas para garantir a viabilidade de execução da solução teórica encontrada para o padrão de corte e para a avaliação da qualidade do mesmo, como o tipo de corte, o número de estágios do padrão e a possibilidade de rotação dos itens.

2.1.2.1 Tipo de Corte

Uma importante restrição operacional é relacionada ao corte guilhotinado. Diz-se que um padrão de corte é guilhotinado quando é obtido a partir de uma seqüência de cortes guilhotinados aplicada ao objeto original e aos itens obtidos a cada corte. Os cortes guilhotinados prolongam-se por toda a extensão do objeto, dividindo-o em dois novos objetos de tamanho menor que o original, que podem ou não ser novamente divididos por um corte guilhotinado. A FIGURA 5(a) e 5(b) mostram padrões de corte guilhotinados e não guilhotinados, respectivamente.

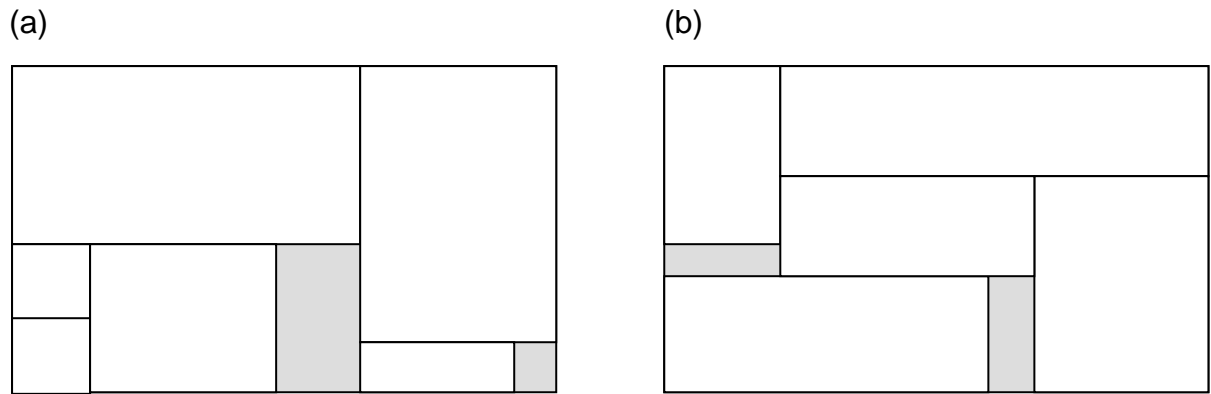


FIGURA 5 – CORTE GUILHOTINADO: (a) Padrão de corte guilhotinado; (b) Padrão de corte não-guilhotinado
 FONTE: A autora (2011)

2.1.2.2 Corte Estagiado

Quando o padrão de corte é guilhotinado, ocorrem mudanças ortogonais na direção do corte. Cada seqüência de cortes realizada na mesma direção corresponde a um estágio de corte. No primeiro estágio, efetua-se uma seqüência de cortes paralelos a um dos lados do objeto; no segundo estágio, a seqüência de cortes realizados é perpendicular ao anterior, e assim sucessivamente. A cada mudança na direção do corte, incrementa-se uma unidade na quantidade de estágios.

Quando a quantidade de estágios é limitada, diz-se que o problema de corte é estagiado, e o número k de estágios define um padrão de corte k -estágios. Na FIGURA 6 é apresentado um padrão de corte em 4 estágios, sendo que cada estágio é indicado no desenho.

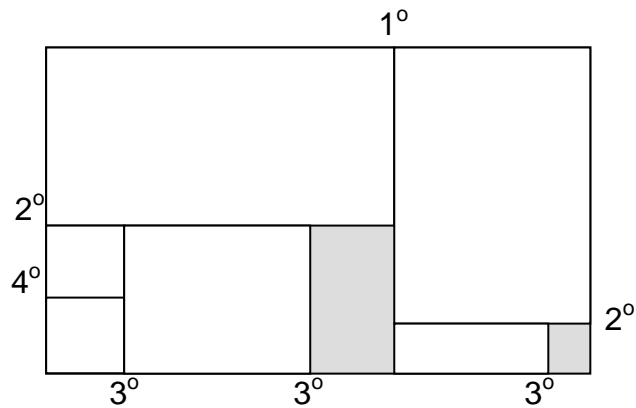


FIGURA 6 – CORTE ESTAGIADO
 FONTE: A autora (2011)

O número de estágios de corte é inversamente proporcional à qualidade do padrão, em relação ao aspecto do tempo de realização dos cortes. Como a cada estágio é realizada uma mudança ortogonal de direção do corte, quanto mais estágios o padrão de corte apresenta, maior o tempo gasto pelo operador para rotacionar o objeto a ser cortado.

Por este motivo uma importante categoria de padrões de corte guilhotinados são os padrões de corte 2-estágios. Estes aparecem abundantemente nas indústrias por sua alta eficiência operacional. Entretanto, é notório o baixo aproveitamento dos objetos quando comparados a padrões que não apresentam esta restrição.

2.1.2.3 Rotação dos Itens

Outra questão a ser considerada na geração de um padrão de corte é a possibilidade de rotação dos itens. Alguns materiais possuem características que determinam e restringem a orientação do corte, como no caso das fibras da madeira ou estampas de tecidos. No caso em que os itens não podem ser rotacionados, os mesmos possuem orientação fixa, caso contrário, se os objetos a serem cortados não apresentam veios ou estampas que os oriente, tal orientação não influencia no resultado final dos cortes, e diz-se então que os itens possuem rotação permitida.

Nos problemas em que a rotação dos itens é permitida, pode-se considerar cada item rotacionado como um novo item, e assim tratar o problema como um

problema de itens de orientação fixa, bastando atentar para o fato de que o item original e o correspondente rotacionado referem-se à mesma demanda.

2.2 PROBLEMAS DE CORTE BIDIMENSIONAIS

Os estudos sobre os problemas de corte e empacotamento foram iniciados por Gilmore e Gomory (1961), quando trataram o problema de corte unidimensional como um problema de programação linear inteira no qual as colunas correspondentes aos padrões de corte eram geradas através da resolução de um problema da mochila. Posteriormente, tal abordagem foi estendida a problemas de duas e três dimensões (GILMORE; GOMORY, 1964). Devido à grande quantidade de colunas necessárias, os autores introduziram a restrição do corte do tipo guilhotinado, que representa uma importante restrição operacional nas indústrias e também resulta numa significativa redução no número de colunas geradas até que seja atingida a solução ótima. Um novo método de solução do problema da mochila também foi desenvolvido, fundamentado em técnicas de programação dinâmica, para acelerar o procedimento de geração dos padrões de corte.

Entretanto, a geração das colunas utilizando o problema da mochila ainda apresenta um alto grau de complexidade em sua forma de solução, especialmente nos casos bi- e tri-dimensional, e deste modo a maior dificuldade se resume na geração dos padrões.

A determinação de um padrão de corte, que se resume no arranjo dos itens em um objeto, é considerado um problema de otimização combinatória e não apresenta tempo de solução polinomial (LUEKER, 1975). Diz-se que um algoritmo para um determinado problema é polinomial se a quantidade de passos requeridos para resolver qualquer instância do problema for limitada por um polinômio do tamanho da entrada (CINTRA, 2004).

Por se tratar de um problema *np-hard*, e devido à sua complexidade de solução, muitas foram as pesquisas feitas no sentido de solucionar o problema da geração de padrões de corte bidimensionais. Desta forma, tem-se uma vasta literatura sobre o assunto, contemplando métodos exatos, heurísticos e meta-heurísticos.

2.2.1 Métodos Exatos

Neste item serão apresentados alguns métodos exatos para a resolução do problema da geração de padrões de corte bidimensionais. Primeiramente é feita uma discussão sobre a empregabilidade de programação dinâmica e na seqüência discute-se sobre algoritmos exatos baseados em uma abordagem construtiva e iterativa.

2.2.1.1 Programação Dinâmica

A geração dos padrões de corte para o problema de programação linear proposto por Gilmore e Gomory (1964), isto é a geração das colunas para a aplicação do Algoritmo Simplex, foi realizada através da resolução de um problema da mochila.

Em virtude da quantidade de possíveis padrões de corte ser muito elevada, Gilmore e Gomory (1964) introduziram restrições quanto ao tipo de padrão tratado. Consideraram apenas padrões de corte guilhotinados em dois estágios, o que reduz significativamente a quantidade de colunas a serem geradas e também simplifica o processo de geração.

Com estas restrições, a geração dos padrões foi realizada em duas etapas: primeiramente, resolve-se um problema da mochila para agrupar os itens em faixas, considerando-se apenas seu comprimento; em seguida, resolve-se outro problema da mochila para agrupar as faixas da primeira etapa, considerando agora a altura das faixas.

Herz (1972) propôs uma solução exata para geração de padrões de corte guilhotinados através de uma técnica de árvore recursiva, onde os ramos correspondem aos padrões de corte guilhotinados existentes para o problema, podendo ser aplicado ao corte não-estagiado. Para limitar as ramificações que serão percorridas, o autor criou o conceito de *pontos de discretização*, que torna a implementação mais eficiente. Um ponto de discretização para a largura W é definido como um valor $i \leq W$ obtido através de uma combinação linear canônica

inteira de w_1, w_2, \dots, w_n , na qual todos os coeficientes são números inteiros não-negativos. Da mesma forma, um ponto de discretização para a altura L é obtido por uma combinação linear canônica inteira de l_1, l_2, \dots, l_n .

Christofides e Whitlock (1977) também desenvolveram um método de árvore de busca que encontra a solução exata para o problema, no qual utilizaram os resultados de Gilmore e Gomory (1966) e uma rotina baseada no problema clássico de transporte para determinar limitantes superiores para os nós durante a busca. No entanto, este algoritmo falha quando se tem uma demanda com mais que vinte elementos (FRITSCH, 1995).

Beasley (1985) tratou do problema através de programação dinâmica utilizando também os pontos de discretização de Herz. Criou uma fórmula recursiva, alcançando resultados ótimos para as instâncias testadas. Seja o problema em que se deseja cortar, a partir de um objeto de dimensões $L \times A$ (largura e altura), n tipos de itens com dimensões $l_i \times a_i$ ($i = 1, \dots, n$). Pode-se então denotar por

$$v(L, A) = \max(\{v_i \mid i = 1, \dots, n, l_i \leq L, a_i \leq A\} \cup \{0\}) \quad (1)$$

o valor de um item mais valioso que cabe no objeto, sendo v_i o valor de cada tipo i de item; neste caso, a área ocupada por ele na placa. Definindo $\mathcal{L} = \{1, \dots, \frac{L}{2}\}$ e $\mathcal{A} = \{1, \dots, \frac{A}{2}\}$, tem-se que o valor ótimo $V(L, A)$ para este problema pode ser calculado pela fórmula de recorrência apresentada na equação (2).

$$V(L, A) = \max(v(L, A), \{V(L', A) + V(L - L', A) \mid L' \in \mathcal{L}\}, \{V(L, A') + V\{L, A - A'\} \mid A' \in \mathcal{A}\}) \quad (2)$$

Lodi (2002) apresentou um modelo matemático para o problema, considerando o corte em dois estágios. A modelagem apresentada favorece a solução em duas fases: primeiramente a construção de faixas e posteriormente a combinação das mesmas para formar o padrão de corte final.

Recentemente, Hifi e Roucariol (2001) abordaram o problema de corte bidimensional restrito 2-estágios e propuseram dois algoritmos: o primeiro deles baseado nas técnicas clássicas de programação dinâmica e um outro que combina tais técnicas com o método *Branch and Bound*.

A técnica de programação dinâmica para a geração de padrões de corte foi ainda utilizada por Cintra (2004). O autor abordou a geração dos padrões como um problema da mochila bidimensional, considerando o corte estagiado e guilhotinado, com possibilidade ou não de rotação dos itens, utilizando a fórmula recursiva de

Beasley para o corte em dois estágios e uma outra fórmula recursiva para o corte em quatro estágios. O método foi testado para as mesmas instâncias do trabalho de Beasley (1985), cujas soluções ótimas são conhecidas, e também para instâncias maiores, com solução ótima desconhecida. Os resultados computacionais foram altamente satisfatórios, visto que o método alcançou a solução ótima nos casos em que esta era conhecida, e obteve padrões de corte com perda significativamente pequena para as instâncias maiores, num tempo computacional consideravelmente reduzido para as instâncias grandes e quase nulo nas menores. O algoritmo apresentado na FIGURA 7, denominado pelo autor de PCGV₂PD, encontra o valor ótimo que pode ser obtido num objeto de dimensões (p_i, q_j) , com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, onde r e s representam a quantidade de pontos de discretização para a largura e altura, respectivamente, e sendo que $guilhotina(i, j)$ indica a direção do primeiro corte guilhotinado a ser realizado (vertical ou horizontal), e $posicao(i, j)$ é a posição em que deve ser feito o corte, no eixo x ou no eixo y , dependendo da orientação do corte. Quando nenhum corte puder ser feito na placa, $guilhotina(i, j) = nil$, e $item(i, j)$ indica qual item deve ser alocado nela. Ao final do procedimento, a solução ótima é dada por $V(r, s)$.

Entrada: Uma instância $I = (L, A, l, a, v)$, onde $l = (1, \dots, m)$, $a = (1, \dots, m)$ e $v = (1, \dots, m)$

Saída: Uma solução ótima de I .

Calcule $p_i < \dots < p_r$, os pontos de discretização da largura L .

Calcule $q_i < \dots < q_s$, os pontos de discretização da altura A .

Para $i = 1$ até r

Para $j = 1$ até s

$$V(i, j) = \max(\{v_k | 1 \leq k \leq m, l_k \leq p_i, a_k \leq q_j\} \cup \{0\})$$

$$\text{item}(i, j) = \max(\{k | 1 \leq k \leq m, l_k \leq p_i, a_k \leq q_j, v_k = V(i, j)\} \cup \{0\})$$

$$\text{guilhotina}(i, j) = \text{nil}$$

Para $i = 2$ até r

Para $j = 2$ até s

$$n = \max(k | 1 \leq k \leq r, p_k \leq \frac{p_i}{2})$$

Para $x = 2$ até n

$$t = \max(k | 1 \leq k \leq r, p_k \leq p_i - p_x)$$

$$\text{Se } V(i, j) < V(x, j) + V(t, j)$$

$$V(i, j) = V(x, j) + V(t, j), \text{posicao}(i, j) = p_x, \text{guilhotina}(i, j) = 'V'$$

$$n = \max(k | 1 \leq k \leq s, q_k \leq \frac{q_j}{2})$$

Para $y = 2$ até n

$$t = \max(k | 1 \leq k \leq s, q_k \leq q_j - q_y)$$

$$\text{Se } V(i, j) < V(i, y) + V(i, t)$$

$$V(i, j) = V(i, y) + V(i, t), \text{posicao}(i, j) = q_y, \text{guilhotina}(i, j) = 'H'$$

FIGURA 7 – ALGORITMO PCGV₂PD

FONTE: CINTRA (2004)

2.2.1.2 Construções

Wang (1982) propôs um método combinatório que gera padrões de corte restritos, através de sucessivas combinações verticais e horizontais de semi-soluções já geradas. As novas semi-soluções são aceitas se não excederem as dimensões do objeto quando sobrepostas ao mesmo, ou uma perda máxima tolerável estabelecida no início do processo (β), relativa à área do objeto. A autora define ainda em seus algoritmos um limite para o erro, que mensura o quanto sua solução se aproxima da solução ótima. Deste modo, é possível determinar as condições de otimalidade para aplicação do algoritmo.

Melhorias para o algoritmo de Wang foram propostas por Vasko (1988), Oliveira e Ferreira (1990), e Daza *et al.* (1995). Os últimos propuseram a solução do problema de corte bidimensional restrito através da associação do algoritmo de Wang a um grafo “E/Ou”, obtendo resultados melhores com menor esforço computacional quando da comparação de seu desempenho aos métodos de Wang (1982) e Oliveira e Ferreira (1990).

Amaral e Wright (2001) também utilizaram a construção de semi-soluções proposta por Wang, porém fizeram uma consideração simples, no entanto relevante, acerca da eliminação prévia de elementos que não auxiliariam na formação da solução ótima, no caso da rotação permitida de itens. Para tal, mostraram que combinações verticais e horizontais simultâneas, aliadas à rotação dos itens, são operações redundantes. Com isto, conseguiram reduzir consideravelmente a quantidade de semi-soluções a fazer parte da iteração subsequente.

2.2.2 Métodos Heurísticos

Morabito (1995) estudou duas heurísticas para o problema do corte bidimensional guilhotinado, utilizando a representação em um grafo “e/ou”, no qual o nó inicial representa o objeto, enquanto os arcos representam os cortes guilhotinados, resultando em dois outros nós, que serão nós finais se nenhum outro corte puder ser feito neles.

Fritsch e Vornberger (1995) apresentaram um procedimento para análise do melhor encaixe entre dois itens, criando o conceito de *Árvore Fatiada*. Para a solução do problema, utilizaram uma heurística fundamentada no algoritmo do *Matching* de Peso Máximo.

Christofides e Hadjiconstantinou (1995) estabeleceram um estudo para o problema de corte guilhotinado de itens retangulares, no qual utilizam um algoritmo de busca em árvore, com limitantes derivados de uma relaxação do espaço de estados de uma formulação de Programação Dinâmica, e também aplicaram um procedimento usando otimização do subgradiente.

2.2.2.1 Heurísticas para o corte em dois estágios

Procedimentos de encaixe foram desenvolvidos inicialmente para solucionar o Problema de Dimensão Aberta (ODP). Entretanto, é possível utilizá-los para a geração de um padrão de corte bidimensional, apenas considerando a limitação na altura do objeto ao criar as faixas ou níveis de encaixe. Temponi (2007) sintetiza três destes procedimentos, que serão mencionados a seguir. A FIGURA 8 ilustra o resultado final de cada um deles. A partir do desenho, é possível observar a diferença de funcionamento e eficácia de cada abordagem.

- a) **Next Fit.** A heurística *Next Fit* é o procedimento mais básico de encaixe de itens. Nela, os itens são colocados em uma lista. O primeiro item é posicionado no canto inferior esquerdo do objeto, e os próximos itens são inseridos através de um processo iterativo, ao lado direito do último objeto alocado, até que a largura restante do objeto se torne insuficiente para acomodar o próximo item. Quando isto ocorre, cria-se uma faixa, da altura do maior item presente nela, e cria-se um novo nível acima do existente, onde se passa a alocar os itens remanescentes na lista, da mesma forma como tem sido feito até agora: justificando-os à esquerda. O procedimento é repetido até que nenhum outro nível possa ser criado. Uma variação deste método consiste em ordenar a lista de itens de ordem decrescente de altura: o *Next Fit Decreasing Height* (NFDH).
- b) **First Fit.** Neste algoritmo, procura-se alocar o item da lista no primeiro nível que o acomode. Um novo nível somente será criado se nenhum dos existentes comportar o item a ser posicionado. Assim como a anterior, esta técnica também possui a variação de assumir que a lista esteja ordenada em ordem decrescente de altura, caracterizando o *First Fit Decreasing Height* (FFDH).
- c) **Best Fit.** Na heurística *Best Fit*, o item é alocado no nível existente que apresente o melhor cenário de encaixe para sua inserção. A qualidade de um possível encaixe pode ser avaliada pelo resíduo horizontal da faixa ou pela relação entre a área não ocupada da faixa e a área do item, traduzindo qual faixa apresenta melhor benefício pela recepção do item em relação às demais. Como nos outros métodos, um novo nível é criado quando o item não

pode ser alocado em nenhum dos níveis já existentes. Quando o processo se inicia com a lista ordenada em relação decrescente de altura, temos o *Best Fit Decreasing Height* (BFDH).

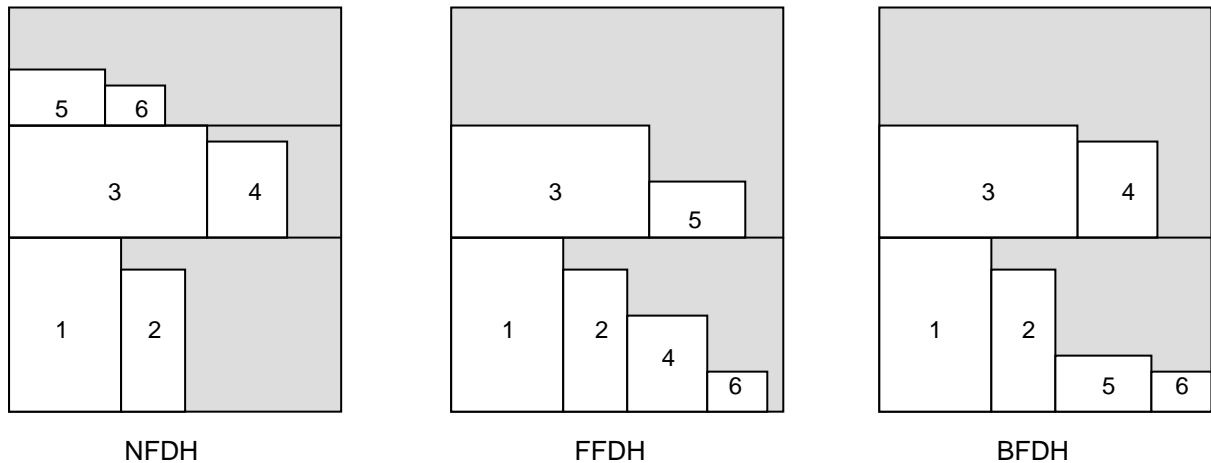


FIGURA 8 – TÉCNICAS DE ENCAIXE PARA O CORTE EM DOIS ESTÁGIOS
 FONTE: LODI (2002)

2.2.3 Métodos Meta-heurísticos

Uma meta-heurística é um método aproximativo, ou heurístico, para solucionar de forma genérica problemas de otimização. Em geral, as meta-heurísticas apresentam boas soluções, em tempo de solução consideravelmente reduzido em relação aos métodos exatos, e por isso têm sido amplamente aplicadas a problemas de otimização combinatória np -completos, nos quais incluem-se os problemas de corte e empacotamento. Diferentes abordagens, utilizando meta-heurísticas distintas, alcançaram bons resultados, utilizando tempo computacional reduzido em relação aos métodos exatos.

Hopper e Turton (2001) compilaram os estudos acerca da utilização de meta-heurísticas para a solução do problema de corte bidimensional. Destacam-se, neste sentido, os Algoritmos Genéticos, Busca Tabu, *Simulated Annealing* e GRASP, tanto para problemas regulares quanto irregulares.

Em geral, as meta-heurísticas são combinadas com alguma técnica de encaixe para obter padrões de corte factíveis e assim a solução para o problema, caracterizando um método para solução em dois estágios.

2.2.3.1 Algoritmos Genéticos

Uma das primeiras aplicações de meta-heurísticas para a geração de padrões de corte bidimensionais foi realizada por Smith (1985), que implementou algoritmos genéticos para a solução de problemas de corte com orientação fixa dos itens, aliando-os a duas diferentes heurísticas para encaixe das peças.

Rahmani (1995) abordou o problema de corte bi-dimensional de uma forma evolucionária, utilizando Algoritmos Genéticos combinados com uma codificação em árvore binária. O autor considera que, neste caso, o fator determinante para o sucesso da utilização dos mesmos é a forma de codificação do espaço de busca, os parâmetros, operadores genéticos e função de avaliação utilizados.

2.2.3.2 Busca Tabu

Lodi *et al.* (1999) apresentaram um algoritmo de Busca Tabu para o problema do *Bin Packing* Bidimensional com restrição de *layout* guilhotinado e orientação fixa dos itens. No método desenvolvido, uma solução inicial é gerada por um método heurístico simples, e então melhorada pela Busca Tabu. O esquema de busca e vizinhança empregados permitem a extensão do uso do algoritmo para problemas de maiores dimensões, pois o que depende do escopo do problema original a ser resolvido é somente a heurística construtiva, utilizada para gerar uma solução inicial factível e para recombinar os itens a cada movimento executado no algoritmo.

Alvarez-Valdes *et al.* (2002) apresentam em seu trabalho uma análise do método de geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961). Os autores propuseram uma metodologia alternativa para o sub-problema da geração de padrões, baseada na meta-heurística Busca Tabu, que também foi utilizada por Toro O *et al.* (2007) para resolver o problema, através da codificação em árvore.

A cada iteração, a metodologia de Valdes avalia todos os movimentos possíveis de um determinado item, considerando sua vizinhança como os itens que compartilhem com ele ao menos um vértice. Esta avaliação é realizada através de

uma sub-rotina que utiliza a meta-heurística GRASP que, por sua vez, executa um algoritmo construtivo para a formação do padrão, a fim de escolher o melhor movimento a ser realizado.

2.2.3.3 Simulated Annealing

Poucos são os trabalhos encontrados na literatura que utilizam a meta-heurística *Simulated Annealing* para problemas de corte e empacotamento. Dowsland (1993) aplicou esta metodologia a um problema de carregamento de estrados para movimentação de cargas (paletes), focando-se no caso de itens idênticos e estendendo a abordagem a itens heterogêneos. Utilizou o conceito de vizinhança, definindo-a como o conjunto de novas soluções obtidas pela mudança de posição de algum dos itens. Os resultados foram capazes de gerar apenas soluções próximas das soluções ótimas, para todos os casos testados.

Faina (1990) também estudou a aplicação de *Simulated Annealing* a este tipo de problema. Sua codificação representa a ordem de empacotamento dos itens, que é realizado por heurísticas de encaixe.

2.2.3.4 GRASP

Barros (2004) propôs um algoritmo GRASP para o problema em dois estágios, utilizando a estratégia de resolução através da construção de faixas. A cada solução construída por um método guloso, aplica-se um procedimento de busca local para tentar melhorar a solução obtida.

Temponi (2007) também abordou o problema em dois estágios através de uma meta-heurística GRASP aliada a um método de busca local. Inicialmente, um algoritmo parcialmente guloso gera uma solução inicial, onde o primeiro item de cada faixa é escolhido aleatoriamente entre os itens que apresentam demanda não-nula, e em seguida são inseridos os itens que minimizem a diferença de comprimento entre eles e o primeiro item da faixa. Em seguida, realiza-se a busca

local através do Método da Descida Randômico, gerando uma solução vizinha que, se apresentar função de avaliação melhor que a melhor solução encontrada, passa a ser a melhor solução. Este procedimento se repete até que seja executado um número máximo de iterações, previamente estabelecido, em que não ocorra melhoria da solução.

2.3 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos podem ser considerados uma meta-heurística evolutiva inspirada na Biologia. Baseados nos fundamentos da teoria da seleção natural de Darwin, defendem a superioridade dos indivíduos mais adaptados. Para isso, simulam iterativamente os processos naturais de sobrevivência e reprodução de populações, tornando-se uma difundida ferramenta de inteligência computacional.

A teoria da evolução diz que, na natureza, todos os indivíduos de um ecossistema competem entre si por recursos limitados, como água e comida. Aqueles, dentro de uma espécie, que não obtiverem êxito, tendem a não sobreviver ou ter sua prole menor em virtude de suas limitações, o que faz com que exista uma dificuldade na propagação de sua herança genética ao longo das gerações. Por outro lado, os indivíduos que obtiverem êxito, têm maior chance de produzir descendentes capazes de sobreviver num horizonte em que há limitação de recursos.

A determinação de aptidão, isto é, o sucesso de um indivíduo em se adaptar às limitações do meio e a forma como isto ocorre, caracteriza um evento completamente aleatório. Não existe padrão de ocorrência para a seleção natural e, inclusive, para as mudanças no ambiente que causam a competição ou a necessidade de adaptação. Deste modo, a seleção natural se apresenta como um conceito puramente probabilístico, fazendo com que os Algoritmos Genéticos se comportem da mesma forma.

A inspiração na natureza para buscar soluções para problemas com difícil resolução computacional se iniciou no início da década de 1940. A partir de então, deu-se início ao que conhecemos hoje por inteligência computacional. Estratégias com operações evolucionárias foram elaboradas e tinham por base a perturbação

das soluções, através de operadores que foram os precursores dos que se utilizam atualmente (LINDEN, 2008).

A sistematização e o estudo formal dos Algoritmos Genéticos deve-se a John Holland, que publicou em 1975 o livro “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*” no qual faz um estudo sobre os processos evolutivos e apresenta os Algoritmos Genéticos como uma metáfora dos mesmos, possibilitando o estudo do comportamento dos sistemas naturais através de simulações computacionais. No entanto, os cientistas da época utilizaram as idéias de Holland de forma muito mais abrangente, tornando os Algoritmos Genéticos uma importante ferramenta de inteligência computacional.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção apresenta-se inicialmente a formulação do problema a ser resolvido. Posteriormente, descreve-se a estratégia para a resolução do problema, detalhando-se minuciosamente cada etapa do método proposto.

3.1 O PROBLEMA DE GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS

O problema de se encontrar um padrão de corte bidimensional pode ser enquadrado, segundo a tipologia de Washer (2007), em três diferentes classes de problemas, dependendo do sortimento dos itens a serem cortados:

- a) Problema de Empacotamento de Itens Idênticos Bidimensional (2-IIPP), quando os itens são idênticos;
- b) Problema da Alocação em um Único Objeto Bidimensional (2-SLOPP), quando os itens são fracamente heterogêneos; ou
- c) Problema da Mochila Única Bidimensional (2-SKP), quando os itens são fortemente heterogêneos.

O problema a ser tratado neste trabalho é formulado como um Problema da Mochila Única Bidimensional com itens regulares (2-regular-SKP), e consiste em determinar a melhor maneira de se cortar objetos maiores, de dimensões $L \times W$, onde L e W denotam o comprimento e a largura, respectivamente, de modo a obter um conjunto $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ de n tipos de itens menores, de dimensões $l_i \times w_i$ e demanda d_i , com $i = 1, \dots, n$, e otimizar uma função objetivo de interesse, como, por exemplo, minimizar a perda de material, isto é, a área não utilizada.

Como o 2-regular-SKP se enquadra, segundo a tipologia de Wascher (2007), nos problemas cuja atribuição corresponde à maximização da produção, o objeto não é suficiente para satisfazer toda a demanda. Busca-se, portanto utilizar ao máximo o objeto, porém sempre sobram alguns itens que não são cortados.

Neste caso, a qualidade de um padrão de corte é inversamente proporcional à área não utilizada da placa. Quanto menor for a perda, isto é, maior for o aproveitamento do objeto, melhor o padrão de corte a ele aplicado, pois as sobras

não aproveitadas no processo produtivo caracterizam desperdício de material e decorrem em custos e prejuízos.

Existem diversas restrições operacionais quando da criação de um padrão de corte. Uma delas se relaciona ao corte guilhotinado, visto que as máquinas que realizam o corte o fazem de um lado ao outro do objeto. Neste trabalho, os padrões de corte limitam-se a padrões que atendam a esta exigência.

Sendo a_{ij} a quantidade do item i a ser cortada no padrão j , então para encontrar um possível padrão de corte j , tem-se o seguinte Problema da Mochila Bidimensional:

$$\text{Minimizar } LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i \quad (3)$$

Sujeito a: $0 \leq a_{ij} \leq d_i$ e inteiro, para $i = 1, \dots, n$

Deve-se ainda considerar ser possível alocar os itens no objeto de forma que as dimensões deste não sejam excedidas e que o corte seja possível do ponto de vista operacional.

A solução final de um problema de corte e empacotamento deve contemplar, portanto, a seleção de itens e objetos, o agrupamento dos itens e a subsequente designação dos grupos de itens para os objetos e, por fim, o arranjo do grupo de itens nos objetos, respeitando-se as restrições geométricas já mencionadas.

3.2 ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO

Para encontrar o melhor padrão de corte, ou seja, obter o conjunto de itens que maximize o aproveitamento do objeto, o problema foi resolvido através de uma metodologia em dois estágios. Primeiramente, a fim de encontrar a melhor combinação de itens a ser alocada no objeto, utilizou-se um algoritmo genético para agrupar os itens a formar um padrão de corte. No segundo estágio, aplicou-se uma técnica de encaixe aos itens agrupados na primeira etapa, a fim de determinar qual dos subconjuntos de itens constitui efetivamente um padrão de corte e o arranjo geométrico que o factibiliza.

Considerou-se neste estudo a geração de padrões de corte não-estagiados e em dois estágios. Para cada um destes casos, considerou-se ainda a permissão de rotação dos itens. Deste modo, ao todo foram avaliados quatro tipos de padrão de corte, sendo que os cortes não-estagiados e em dois estágios receberam técnicas de encaixe distintas.

Os dados de entrada para o algoritmo compreendem a altura L e o comprimento W do objeto, a quantidade de tipos de itens n e as informações relacionadas a cada um deles, altura l_i , comprimento w_i e demanda d_i , para $i = 1, \dots, n$.

3.2.1 Etapa 1: Algoritmo Genético

Os Algoritmos Genéticos pertencem à classe dos algoritmos evolucionários, cujo princípio básico é “o conceito de simulação da evolução das espécies através de seleção, mutação e reprodução, processos estes que dependem do ‘desempenho’ dos indivíduos desta espécie dentro do ‘ambiente’” (LINDEN, 2008, p. 40).

Deste modo, o algoritmo mantém uma população de indivíduos, em que cada um destes codifica uma solução para o problema. A qualidade de cada um dos indivíduos é mensurada através de uma função de avaliação, também denominada *fitness*. Com base nesta avaliação, são aplicados aos indivíduos os chamados operadores genéticos, os quais serão apresentados com maiores detalhes na seqüência do texto. Todo este processo é feito de modo a simular a sobrevivência e reprodução do mais apto.

Como os Algoritmos Genéticos são inspirados nos conceitos da genética e da seleção natural, existe uma analogia entre os termos biológicos destas áreas e os que são utilizados no algoritmo. A seguir são descritos alguns importantes termos que utilizaremos com freqüência no decorrer do texto:

- **Cromossomo:** Um cromossomo é a representação de uma solução, que possui todas as suas características genéticas. Em geral, os algoritmos concebem o cromossomo como um vetor.

- **Gene:** Cada gene representa uma característica genética do cromossomo. Desta forma, cada cromossomo é formado por um conjunto de genes. No caso de um vetor, cada posição corresponde a um gene.
- **Alelo:** Os alelos são as possíveis atribuições que um gene pode assumir.
- **Fitness:** O *fitness*, também chamado de função de avaliação, mensura a qualidade de cada solução da população. Com base nesta função, é realizada a seleção para aplicação dos operadores genéticos, garantindo a sobrevivência dos melhores indivíduos.

A escolha adequada da forma de codificação das soluções, assim como da função de avaliação que será utilizada, são os fatores mais importantes, aliados à escolha dos parâmetros iniciais, para que se tenha um algoritmo genético eficaz.

Partindo destas primeiras observações, Linden (2008) descreve o funcionamento básico de um Algoritmo Genético com o seguinte esquema:

1. Crie uma população inicial;
2. Avalie cada cromossomo da população;
3. Selecione os pais para gerar novos cromossomos;
4. Aplique os operadores genéticos a estes pais, de modo a gerar os indivíduos da nova geração;
5. Avalie todos os novos cromossomos e insira-os na população, removendo os piores indivíduos da população anterior;
6. Se algum critério de parada foi atingido, retorne o melhor cromossomo; senão, volte para o passo 3.

A ilustração deste esquema é apresentada na FIGURA 9, e cada uma das etapas é detalhada na seqüência.

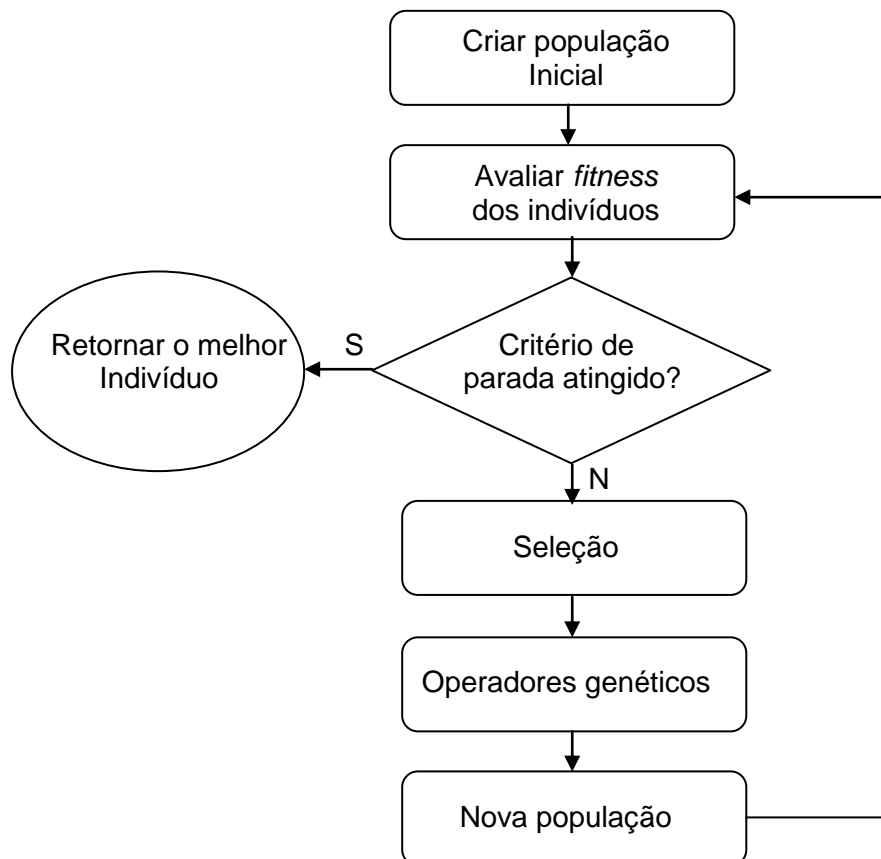


FIGURA 9 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO DE UM ALGORITMO GENÉTICO
 FONTE: A autora (2011)

A geração da população inicial, na maioria dos trabalhos desta área, é feita de forma simples, através de uma escolha aleatória independente para cada indivíduo. A codificação dos cromossomos depende do tipo de problema tratado e da estrutura de solução desejada. No entanto, os valores dos genes são, em geral, obtidos através de um procedimento de geração de números aleatórios, baseada em uma distribuição uniforme, numa faixa previamente estabelecida de acordo com a natureza do problema, garantindo a cobertura de todo o espaço de busca e também a diversidade da população.

O tamanho da população inicial deve ser escolhido de acordo com o tipo de problema estudado. Populações muito pequenas podem acarretar a perda da diversidade genética dos indivíduos e com isso a convergência para um ótimo local. Por outro lado, nas populações muito grandes pode ocorrer baixa eficiência computacional, pela demora durante a avaliação de todos os indivíduos.

A etapa subsequente envolve a avaliação dos indivíduos. “A função de avaliação é a maneira utilizada pelos Algoritmos Genéticos para determinar a

qualidade de um indivíduo como solução do problema em questão” (LINDEN, 2008, p. 65).

O valor da função de avaliação, ou *fitness*, de um indivíduo i , denotado por f_i , é determinante para a escolha dos indivíduos no módulo de seleção dos pais, que sofrerão a atuação dos operadores genéticos. Por este motivo, deve refletir o objetivo a ser alcançado e levar em conta todas as especificidades conhecidas do problema.

O mecanismo de seleção escolhe os indivíduos aos quais serão aplicados os operadores genéticos para formar a geração subsequente. Existem diferentes formas de seleção e é importante que o método escolhido simule o processo de seleção natural, privilegiando os indivíduos que apresentam maior valor de aptidão e penalizando os menos aptos, porém sem desprezá-los completamente, pois existe uma probabilidade, embora muito reduzida, de que produzam bons descendentes.

As formas mais comuns de seleção são o método da roleta, torneio e *ranking*, descritos a seguir.

a) Método da Roleta

O método da roleta emprega a seleção proporcional à qualidade do indivíduo, isto é, à sua função de avaliação. Primeiramente, determina-se a probabilidade de seleção de cada indivíduo i , dada pela fórmula (4), em que f_i é o *fitness* do indivíduo i .

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (4)$$

Desta forma, cada indivíduo recebe uma porção da roleta, que é então ‘rodada’ a fim de selecionar os pais. É claro que a idéia da roleta envolve um conceito abstrato. Durante a implementação do método, cria-se uma lista ordenada de forma decrescente das probabilidades acumuladas de cada indivíduo, e sorteia-se um número aleatório entre 0 e 1, que indicará na lista das probabilidades qual o indivíduo escolhido.

b) Método do Torneio

Neste método, selecionam-se aleatoriamente p indivíduos da população, formando uma sub-população temporária. Deste conjunto, escolhe-se o indivíduo que apresentar melhor *fitness*.

c) Método do *Ranking*

De forma similar ao Método da Roleta, cada indivíduo recebe uma probabilidade de ser escolhido, porém de acordo com sua posição numa lista ordenada de acordo com o *fitness*.

Portanto, cria-se uma lista ordenada de forma decrescente dos itens, em relação à qualidade de sua função de avaliação. O indivíduo menos adaptado recebe valor 1, enquanto o indivíduo mais adaptado recebe valor igual ao número de indivíduos, ou seja, ao tamanho da população. Esta lista é chamada de *ranking*, e a probabilidade de seleção é calculada em relação ao valor que o indivíduo recebeu na ordenação.

Aos indivíduos selecionados, aplicam-se os operadores genéticos, responsáveis pelas modificações na população e, conseqüentemente, pela convergência do algoritmo. Existem diversos operadores genéticos e variações dos mesmos, que diferem principalmente em virtude do tipo de codificação escolhido, visto que atuam diretamente sobre os cromossomos. Os mais utilizados são os operadores de reprodução, cruzamento e mutação. Cada operador possui uma taxa de ocorrência, definida pelo pesquisador. A seguir, são descritos os principais operadores genéticos.

a) Reprodução

No operador de reprodução, como o próprio nome diz, o indivíduo selecionado na população atual é reproduzido, ou seja, copiado para a próxima geração, sem nenhuma alteração em sua estrutura.

b) Cruzamento

O operador de cruzamento (*crossover*), caracteriza o operador genético mais popular e mais utilizado. Através dele, os pais selecionados trocam informações genéticas para a composição dos novos indivíduos, chamados de filhos.

Após selecionados os pais, sorteia-se um ponto de corte para a realização do cruzamento, sendo que um ponto de corte constitui uma posição entre dois genes de um cromossomo (LINDEN, 2008), e assim um cromossomo com n genes possui $n - 1$ pontos de corte.

Na etapa seguinte, separa-se o conteúdo dos cromossomos pais em duas partes: uma à esquerda e outra à direita do ponto de corte. O primeiro filho será composto pela concatenação da primeira parte do primeiro pai e da segunda parte do segundo pai, enquanto o segundo filho será formado pela primeira parte do segundo pai e a segunda parte do primeiro pai. Esta operação é chamada de cruzamento de um ponto, pois utiliza apenas um ponto de corte (FIGURA 10).

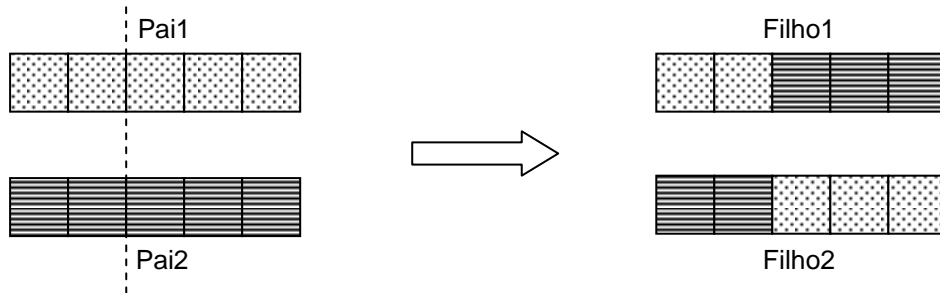


FIGURA 10 – CRUZAMENTO DE UM PONTO
FONTE: A autora (2011)

Se forem escolhidos dois pontos de corte, tem-se o cruzamento de dois pontos, no qual a troca de material genético ocorre entre os pontos de cruzamento (FIGURA 11).

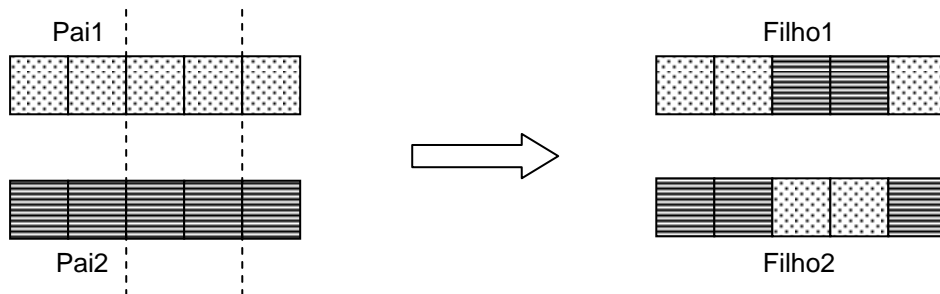


FIGURA 11 – CRUZAMENTO DE DOIS PONTOS
FONTE: A autora (2011)

c) Mutação

O operador de mutação altera o valor de um gene do cromossomo. Em geral, utiliza-se uma baixa taxa de probabilidade de ocorrência de mutação, freqüentemente entre 5% e 10%, para que o processo não se torne uma busca aleatória. O procedimento executado pelo operador de mutação é realizado como segue.

Sorteia-se um número aleatório entre 0 e 1. Se este número for menor que a taxa de mutação previamente definida, altera-se o valor do gene dentre os possíveis

valores que ele pode assumir. Este procedimento é repetido para todos os genes do cromossomo.

O operador de mutação tem papel importante durante a execução do Algoritmo Genético. Ele garante a diversidade da população na medida em que ocorrem os cruzamentos, pois exploram globalmente o espaço de busca e possibilitam a recuperação de material genético de boa qualidade que possa ter sido perdido durante as sucessivas recombinações e avaliações. Por outro lado, Linden (2008) reforça que a taxa de mutação deve ser fixada num valor baixo, caso contrário o Algoritmo Genético se aproximará das técnicas de busca aleatória, desprezando sua principal característica evolucionária.

Como se trata de um método iterativo, os Algoritmos Genéticos necessitam de um critério de parada para a finalização do processo. Os critérios de parada mais utilizados são o número máximo de iterações e o incremento na qualidade da solução. Se as novas soluções encontradas a cada geração não apresentam melhora significativa em relação à geração anterior, finaliza-se o algoritmo e retorna-se a melhor solução encontrada.

Nos Algoritmos Genéticos convencionais, os operadores genéticos são efetuados de modo que toda a população é substituída a cada geração. Numa outra estratégia, chamada *Steady State*, faz-se o contrário: cria-se os filhos um a um, ou dois a dois, por ser mais conveniente para o operador de cruzamento, e substitui-se os piores indivíduos da população por estes novos indivíduos (LINDEN, 2008).

Em geral, ao se utilizar o Algoritmo Genético *Steady State*, perde-se a essência do conceito de geração, pois indivíduos muito velhos podem permanecer na população, coexistir e até mesmo se reproduzir com indivíduos novos ou mesmo recém criados que, por sua vez, podem desaparecer rapidamente se não apresentarem boa função de avaliação. Entretanto, esta estratégia de controle da população permite a dominação dos melhores cromossomos e uma convergência mais rápida do algoritmo.

No método proposto neste trabalho, o objetivo da aplicação do algoritmo genético foi selecionar itens e agrupá-los, a fim de que os mesmos constituam um padrão de corte depois de aplicada a heurística de encaixe designada para cada tratamento do problema.

Os Algoritmos Genéticos são considerados técnicas probabilísticas que fazem uso da geração de números aleatórios durante sua execução. Neste estudo, foi considerada a geração de números aleatórios segundo a distribuição de probabilidade uniforme num intervalo $[a, b]$. Estes números serão denotados por $Rnd(a, b)$.

Um importante fator na implementação de um Algoritmo Genético é a definição da estrutura e codificação dos cromossomos e o método de avaliação dos mesmos. Neste trabalho, denota-se um padrão de corte j por um vetor $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, no qual cada componente a_{ij} representa a quantidade do item i a ser cortada no padrão j . A função de avaliação é dada pela área não ocupada do objeto. Deste modo, para cada indivíduo j o *fitness* é calculado da seguinte forma:

$$f_j = LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i \quad (5)$$

Deve-se observar que a aptidão de cada indivíduo é obtida considerando-se apenas a área ocupada, e não avalia se existe a possibilidade de arranjo dos itens sobre o objeto, o que será atribuição das heurísticas de encaixe.

Se a soma das áreas dos itens exceder a área do objeto, o padrão de corte é declarado inactivável e não chega a ser incluído na população que, em todas as etapas do procedimento, permite somente cromossomos factíveis.

O Algoritmo Genético utilizado neste trabalho foi o AG *Steady State*, criando-se dois novos indivíduos a cada iteração, que são gerados pelo operador de cruzamento.

A seguir, apresentam-se os parâmetros utilizados neste trabalho, e também os detalhes da execução do Algoritmo Genético proposto.

3.2.1.1 Parâmetros Utilizados

Os parâmetros do Algoritmo Genético utilizados no trabalho estão resumidos no QUADRO 3.

Tamanho da População Inicial		200
Taxas de ocorrência dos operadores genéticos	Cruzamento	0,8
	Mutação	0,2
Critérios de Parada	Número máximo de iterações	100
	Número máximo de iterações sem melhoria no <i>fitness</i> dos indivíduos	50

QUADRO 3 – PARÂMETROS UTILIZADOS
 FONTE: A autora (2011)

O tamanho da população foi fixado em 200 indivíduos, o que possibilita uma grande diversidade na mesma. Isto é uma característica essencial para a eficiência do algoritmo, pois nem todos os cromossomos serão considerados factíveis na etapa de encaixe.

As taxas dos operadores genéticos foram mantidas em 80% para o operador de cruzamento, e 20% para o operador de mutação, o que evita que a população perca a diversidade.

Foram considerados no trabalho dois diferentes critérios de parada: um número máximo de iterações, fixado em 100; e um número máximo de iterações sem a ocorrência da inserção dos filhos na população, fixado em 50, isto é, quando os operadores genéticos não mais produzirem soluções melhores que as existentes durante 50 iterações.

3.2.1.2 Execução do Algoritmo

Primeiramente, gerou-se aleatoriamente uma população inicial de indivíduos factíveis, utilizando-se a geração de números aleatórios seguindo uma distribuição uniforme.

A geração da população inicial foi feita da seguinte forma: para obter um indivíduo, optou-se por gerar um número aleatório para cada posição do vetor que o representa. O limite superior para cada posição é o valor mínimo entre a demanda correspondente ao item da referida posição e quantidade que o objeto comporta deste item, segundo o critério de área.

Um exemplo de um indivíduo pode ser visto no cromossomo $A=(3, 5, 0, 2)$, que indica que o padrão A possui 3 itens do tipo 1, 5 itens do tipo 2, nenhum item do tipo 3 e 2 itens do tipo 4.

Ao fim da geração de cada cromossomo, avaliava-se sua factibilidade em relação ao critério unidimensional de área: se o mesmo fosse considerado factível, o cromossomo era inserido na população; caso contrário, o processo era repetido e um novo indivíduo era completamente gerado.

No entanto, como é utilizada a geração aleatória uniformemente distribuída, observou-se que, nos problemas em que as dimensões dos itens são consideravelmente grandes, gerava-se uma quantidade muito grande de indivíduos infactíveis, o que causa um aumento considerável no tempo computacional visto que estes indivíduos teriam que ser novamente gerados, até que se completasse uma população de indivíduos factíveis.

Para evitar esta situação, a estratégia de geração da população foi modificada: quando um indivíduo é declarado infactível, uma de suas posições, com valor não-nulo, é sorteada aleatoriamente. Esse valor sofre então decréscimo de uma unidade. Este recurso é utilizado até que o indivíduo se torne factível.

Após completar o número de indivíduos da população, é feita uma avaliação dos mesmos através do cálculo do *fitness*, utilizando-se a equação (5). Os indivíduos são então ordenados numa lista crescente em relação à função de aptidão. Como esta mede a perda absoluta do objeto, os primeiros indivíduos da lista correspondem aos mais adaptados e os últimos aos menos favorecidos.

Na fase de seleção dos indivíduos pais, utilizou-se o método da roleta, descrito na alínea a) da seção 3.2.1, que favorece os melhores cromossomos. Este método atribui a cada indivíduo uma probabilidade de seleção acumulada p_j , relacionada ao seu valor de aptidão.

Como foi utilizado o Algoritmo Genético *Steady State*, a cada geração aplicam-se os operadores de cruzamento e mutação, de acordo com o valor de probabilidade determinado. Destas operações resultam dois novos filhos, que são avaliados e inseridos na população, caso o *fitness* apresentado por eles seja maior que o *fitness* dos piores indivíduos.

As etapas de seleção e aplicação dos operadores são repetidas até que seja atingido algum critério de parada. Conforme descrito no item 3.2.1.1, se for atingido um número máximo de 100 iterações, interrompe-se a execução do algoritmo; e o

mesmo é feito quando ocorrem 50 iterações consecutivas sem que sejam criados filhos com função de avaliação melhor que a dos indivíduos já existentes.

Neste caso, considera-se que houve a convergência genética, embora alguns pesquisadores defendam que tal convergência não deve ser medida pela função de avaliação, e sim pelas características dos indivíduos, pois diferentes indivíduos podem possuir o mesmo *fitness* através de informações genéticas distintas. No entanto, a comparação dos indivíduos seria uma opção bastante custosa (LINDEN, 2008).

Quando algum dos critérios de parada é atingido, encerra-se a etapa de execução do Algoritmo Genético e inicia-se a busca por um padrão factível em relação ao aspecto geométrico através das técnicas de encaixe.

A FIGURA 12 apresenta o Algoritmo Genético utilizado neste trabalho.

Passo 1: Geração da população inicial

1.1 – Crie um indivíduo gerando para cada posição i um número aleatório no intervalo $\left[0, \min\left\{d_i, \frac{LW}{l_i w_i}\right\}\right]$, ou seja, onde a quantidade de cada tipo de item varie de 0 até sua demanda, ou até a quantidade máxima deste tipo de item que possa ser alocada na área do objeto.

1.2 – Se o indivíduo satisfizer o critério da área, insira-o na população e vá para o Passo 1.4.

1.3 – Escolha aleatoriamente uma posição com valor não-nulo e aplique um decremento de uma unidade em seu valor. Volte para o Passo 1.2.

1.4 – Se a população não está completa, volte ao Passo 1.1.

Passo 2: Avaliação da população

2.1 – Para cada indivíduo $j = 1, \dots, m$, calcule sua função de aptidão

$$f_j = LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i$$

2.2 – Crie uma lista dos indivíduos, em ordem crescente de *fitness*.

Passo 3: Seleção dos pais: Selecione dois indivíduos da população, usando o Método da Roleta.

Passo 4: Aplicação dos operadores genéticos

4.1 – Cruzamento ou reprodução: Gere um número aleatório entre 0 e 1. Se tal número for menor ou igual à taxa de cruzamento, aplique o operador de cruzamento aos indivíduos selecionados no Passo 3; senão, aplique a eles o operador de reprodução.

4.2 – Aplique o operador de mutação a cada filho criado no Passo 4.1.

Passo 5: Avaliação dos novos indivíduos: Calcule o *fitness* dos novos indivíduos e verifique se seu valor de aptidão é menor que o do último indivíduo da lista. Em caso positivo, substitua o pior indivíduo pelo novo, e reordene a lista.

Passo 6: Repita os passos 3 a 5 até que algum critério de parada seja atingido.

FIGURA 12 – ALGORITMO GENÉTICO PARA GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE
 FONTE: A autora (2011)

3.2.2 Etapa 2: Técnicas de Encaixe

Como pôde ser visto anteriormente, o Algoritmo Genético empregado percorre o espaço de busca à procura das melhores soluções considerando apenas o aspecto unidimensional, isto é, o conjunto de itens cuja soma das áreas mais se aproxime da área do objeto, sem, contudo, excedê-la.

Entretanto, apenas este critério não é suficiente para garantir a factibilidade de um padrão de corte. A informação mais importante fornecida por um padrão de

corte, que é o arranjo geométrico dos itens, não é disponibilizada e tampouco pode ser obtida a partir da formulação do Algoritmo Genético, pois o cromossomo fornece apenas a quantidade de cada tipo de item presente no padrão.

Para construir esse arranjo geométrico, foram utilizadas duas técnicas de encaixe diferentes: uma para o corte não-estagiado e outra para o corte em dois estágios, visto que estes dois tipos de padrão de corte possuem características distintas e peculiares quanto à sua geometria.

Durante a execução do Algoritmo Genético, devido à própria estratégia *Steady State* utilizada, os indivíduos ficam sempre ordenados numa lista crescente de acordo com seu *fitness*. Nesta mesma ordem, são submetidos ao processo de encaixe, até que seja encontrado um padrão de corte factível geometricamente. Tal factibilidade compreende a possibilidade de arranjo de todos os itens, sem que excedam as dimensões do objeto ou se sobreponham.

3.2.2.1 Corte não-estagiado

Para os padrões de corte sem restrição quanto ao número de estágios de corte, empregou-se uma técnica baseada no algoritmo de Wang. Este método realiza, a cada iteração, construções verticais e horizontais dos itens.

Uma combinação horizontal de dois itens A_1 e A_2 , de dimensões $l_1 \times w_1$ e $l_2 \times w_2$, respectivamente, corresponde a um novo item, cujas dimensões serão $\max\{l_1, l_2\} \times (w_1 + w_2)$. Analogamente, uma construção vertical dos dois mesmos itens é um novo item de dimensões $(l_1 + l_2) \times \max\{w_1, w_2\}$. A área da construção que não for ocupada por nenhum dos itens corresponde à perda interna da mesma. Este processo pode ser verificado na FIGURA 13.

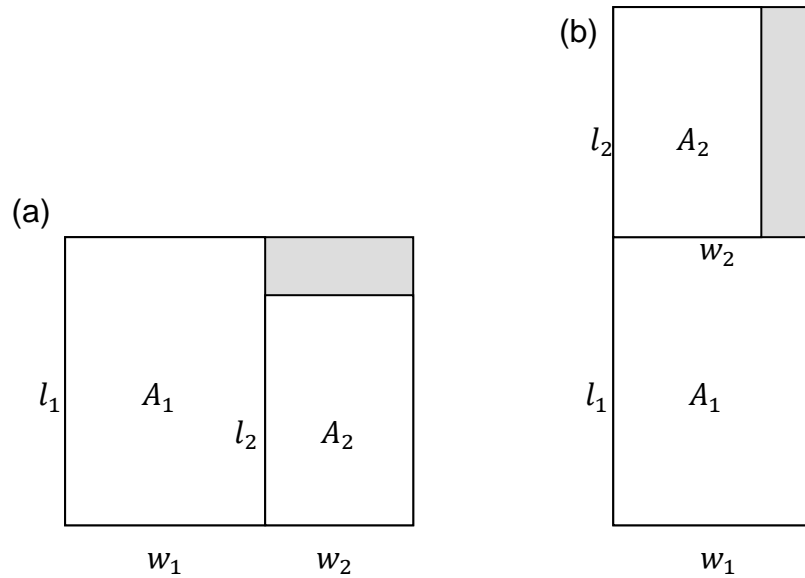


FIGURA 13 – CONSTRUÇÕES: (a) horizontal; (b) vertical
 FONTE: A autora (2011)

Uma construção caracteriza uma semi-solução que, na iteração seguinte, será combinada com outras semi-soluções através de construções verticais e horizontais, enquanto a soma das quantidades de cada item presentes nas mesmas não for maior que sua respectiva demanda. Se uma nova construção apresenta as mesmas dimensões de uma construção já existente, elimina-se da lista a de maior perda interna. Ao fim do processo, escolhe-se a construção de menor perda total, isto é, com menor perda quando sobreposto ao objeto.

Este método baseado em construções horizontais e verticais pressupõe que o problema não seja estagiado, mas garante que o corte seja guilhotinado. O algoritmo completo é detalhado na FIGURA 14, sendo $H \times W$ as dimensões do objeto, $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ os itens da demanda e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ suas respectivas demandas.

Passo 1.a: Escolha um valor para β , $0 \leq \beta \leq 1$.

1.b: Defina $L^{(0)} = F^{(0)} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ e faça $k = 1$.

Passo 2.a: Construa $F^{(k)}$, que é o conjunto de todos os retângulos T satisfazendo:

- (i) T é uma construção horizontal ou vertical formada por dois retângulos de $L^{(k-1)}$;
- (ii) A perda interna de T não excede a βLW ;
- (iii) Os retângulos que aparecem em T não excedem as quantidades b_1, b_2, \dots, b_n .

2.b: Faça $L^{(k)} = L^{(k-1)} \cup F^{(k)}$. Remova os retângulos equivalentes de $L^{(k)}$.

Passo 3: Se $F^{(k)}$ é não vazio, faça $k = k + 1$ e vá para o Passo 2. Senão,

Passo 4.a: Faça $M = k - 1$.

4.b: Escolha o retângulo de $L^{(M)}$ que tem a mínima perda total quando sobreposto ao objeto de dimensão $H \times W$.

FIGURA 14 – ALGORITMO DE WANG

FONTE: WANG (1982)

Quanto maior o valor do parâmetro β , maior o número de soluções parciais aceitas que farão parte da iteração subsequente, possibilitando melhores soluções ao final do processo. Entretanto, o algoritmo também utilizará mais memória computacional e tempo de processamento.

Para o corte no qual é permitida a rotação dos itens, acrescentou-se ao algoritmo de Wang as considerações feitas por Amaral e Wright (2001). Os autores definem os operadores **H** e **V** como operadores que efetuam construções horizontais e verticais de dois itens, respectivamente. Definindo por X' a rotação em 90° de um retângulo X , quando se aplicam os operadores em dois retângulos X_1 e X_2 , admitindo a rotação, obtém-se as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{ll} X_1 \mathbf{H} X_2 & X_1 \mathbf{V} X_2 \\ X_1' \mathbf{H} X_2 & X_1' \mathbf{V} X_2 \\ X_1 \mathbf{H} X_2' & X_1 \mathbf{V} X_2' \\ X_1' \mathbf{H} X_2' & X_1' \mathbf{V} X_2' \end{array}$$

Contudo, notou-se que a aplicação da rotação dos itens, e dos operadores **H** e **V**, que efetuam construções horizontais e verticais, respectivamente, resulta em semi-soluções equivalentes:

$$\begin{array}{l} X_1 \mathbf{H} X_2 = (X_1' \mathbf{V} X_2')' \\ X_1' \mathbf{H} X_2 = (X_1 \mathbf{V} X_2')' \\ X_1 \mathbf{H} X_2' = (X_1' \mathbf{V} X_2)' \\ X_1' \mathbf{H} X_2' = (X_1 \mathbf{V} X_2)' \end{array}$$

Desta forma, os autores mostram que basta aplicar o operador horizontal e o de rotação para conseguir todas as construções possíveis a partir de dois itens. Esta

observação simples reduz pela metade o tempo gasto com as construções e em até metade a quantidade de soluções parciais enviadas para a iteração subsequente.

Portanto, quando a rotação dos itens é permitida, optou-se por efetuar somente construções horizontais, considerando tanto os itens em sua posição original quanto os correspondentes rotacionados em 90° , o que é suficiente para gerar todas as possíveis combinações, segundo Amaral e Wright (2001).

Uma importante modificação no algoritmo mencionado, implementada neste trabalho, foi a escolha do parâmetro β , que representa a perda máxima aceitável para que uma semi-solução faça parte do conjunto de soluções na iteração seguinte. Como vimos, a escolha deste parâmetro interfere na quantidade de semi-soluções aceitas e, conseqüentemente, na quantidade de combinações realizadas a cada iteração.

Os itens agrupados na Etapa 1 já apresentam uma perda absoluta fixa, no caso do arranjo geométrico ser factível. Deste modo, para cada cromossomo j submetido a esta técnica de encaixe, a perda máxima aceitável é igual ao seu *fitness*, pois se a perda de uma semi-solução ultrapassar este valor, esta não será útil para a construção da solução final.

Para o corte com orientação fixa dos itens, o conjunto de itens $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ permanece inalterado. Já no caso do corte com rotação, criamos um conjunto de itens $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n, R_1', R_2', \dots, R_n'\}$, em que R_n' corresponde ao retângulo R_n após a rotação em 90° . Observe, no entanto, que R_n e R_n' correspondem à mesma demanda.

A FIGURA 15 e a FIGURA 16 mostram o Algoritmo de Wang adaptado ao problema, para o corte não-estagiado sem rotação e com rotação, respectivamente. O valor do parâmetro β deixa de ser arbitrário e passa a ser definido como o *fitness* do indivíduo que será submetido ao encaixe.

Inicialização do método: Crie A , que é o conjunto dos m vetores provenientes da Etapa 1, dispostos em ordem crescente de *fitness*, e rotule todos os seus elementos como não-analisados. Selecione $j = 1$.

Passo 1.a: Determine $\beta = f_j$

1.b: Defina $L^{(0)} = F^{(0)} = R$ e faça $k = 1$.

Passo 2.a: Construa $F^{(k)}$, que é o conjunto de todos os retângulos T satisfazendo:

- (i) T é uma construção horizontal ou vertical formada por dois retângulos de $L^{(k-1)}$;
- (ii) A perda interna de T não excede a β ;
- (iii) Os retângulos que aparecem em T não excedem as quantidades $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$.

2.b: Faça $L^{(k)} = L^{(k-1)} \cup F^{(k)}$. Remova os retângulos equivalentes de $L^{(k)}$.

2.c: Se todos os itens do vetor A_j foram alocados, pare. A_j é o melhor padrão de corte encontrado.

Passo 3: Se $F^{(k)}$ é não vazio, faça $k = k + 1$ e vá para o Passo 2. Senão,

Passo 4: Faça $j = j + 1$ e volte para o Passo 1.

FIGURA 15 – ALGORITMO DE ENCAIXE PARA O CORTE NÃO-ESTAGIADO SEM ROTAÇÃO
 FONTE: Adaptado de WANG (1982)

Inicialização do método: Crie A , que é o conjunto dos m vetores provenientes da Etapa 1, dispostos em ordem crescente de *fitness*, e rotule todos os seus elementos como não-analisados. Selecione $j = 1$.

Passo 1.a: Determine $\beta = f_j$

1.b: Defina $L^{(0)} = F^{(0)} = R$ e faça $k = 1$.

Passo 2.a: Construa $F^{(k)}$, que é o conjunto de todos os retângulos T satisfazendo:

- (i) T é uma construção horizontal formada por dois retângulos de $L^{(k-1)}$;
- (ii) A perda interna de T não excede a β ;
- (iii) Os retângulos que aparecem em T não excedem as quantidades $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$.

2.b: Faça $L^{(k)} = L^{(k-1)} \cup F^{(k)} \cup (F^{(k)})'$, em que $(F^{(k)})'$ representa as semi-soluções de $F^{(k)}$ rotacionadas em 90° . Remova os retângulos equivalentes de $L^{(k)}$.

2.c: Se todos os itens do vetor A_j foram alocados, pare. A_j é o melhor padrão de corte encontrado.

Passo 3: Se $F^{(k)}$ é não vazio, faça $k = k + 1$ e vá para o Passo 2. Senão,

Passo 4: Faça $j = j + 1$ e volte para o Passo 1.

FIGURA 16 – ALGORITMO DE ENCAIXE PARA O CORTE NÃO-ESTAGIADO COM ROTAÇÃO
 FONTE: Adaptado de WANG (1982)

3.2.2.2 Corte em dois estágios

No corte em dois estágios, utilizou-se a heurística construtiva *First Fit Decreasing Height*, que cria faixas inserindo os itens na primeira faixa em que eles possam ser alocados.

Para realizar o encaixe de um vetor correspondente a um cromossomo resultante da Etapa 1, primeiramente ordena-se os itens presentes neste vetor em ordem decrescente de altura.

Novamente, quando for possível a rotação dos itens, para um retângulo R_i , cria-se um correspondente R_i' rotacionado em 90° . Neste caso, cada item aparece duas vezes na lista: um em sua orientação original, e outro após a rotação.

Inicia-se o algoritmo introduzindo o primeiro item da lista, o de maior altura, no canto inferior esquerdo do objeto. Em seguida, insere-se o item subsequente à direita do anterior. Quando a dimensão horizontal do objeto não mais for suficiente para acomodar itens, cria-se uma nova faixa acima da existente. A partir do momento em que existir mais de uma faixa horizontal, os novos itens devem ser alocados na primeira faixa existente que os comportar; e uma nova faixa é criada quando isto não for possível.

A FIGURA 17 mostra o Algoritmo *First Fit Decreasing Height*, utilizado como técnica de encaixe para o corte em dois estágios.

Inicialização do método: Crie a lista L , dos elementos do conjunto R ordenados em relação à sua altura; e crie o conjunto A dos m vetores provenientes da Etapa 1

Passo 1: Selecione $j = 1$

Passo 2: Insira o primeiro retângulo i de L para o qual $a_{ij} > 0$ no canto inferior esquerdo do objeto, estabelecendo a primeira faixa, e faça $a_{ij} = a_{ij} - 1$.

Passo 3: Para $i = 1, \dots, n$, enquanto $a_{ij} > 0$, verifique a possibilidade de inserir o item i :

3.a: Procure a primeira faixa que acomode o item i , insira-o e faça $a_{ij} = a_{ij} - 1$. Se isto não for possível,

3.b: Crie uma nova faixa, insira o item i e faça $a_{ij} = a_{ij} - 1$.

Passo 4: Se $a_{ij} = 0$ para todo i , retorne A_j como o melhor padrão de corte encontrado; caso contrário, faça $j = j + 1$ e volte para o Passo 2.

FIGURA 17 – ALGORITMO *FIRST FIT DECREASING HEIGHT*
 FONTE: Adaptado de TEMPONI (2007)

Na seção seguinte, são apresentados os resultados obtidos para o conjunto de instâncias testadas, em quatro diferentes abordagens consideradas para a resolução do problema.

4 ANÁLISE EXPERIMENTAL E RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os experimentos realizados neste trabalho e os resultados obtidos.

Foram consideradas quatro diferentes abordagens para resolução do problema, abrangendo quatro combinações de tipos de corte guilhotinado:

- A1:** Geração de padrões de corte não-estagiado com orientação fixa dos itens;
- A2:** Geração de padrões de corte não-estagiado com rotação permitida dos itens;
- A3:** Geração de padrões de corte em dois estágios com orientação fixa dos itens;
- A4:** Geração de padrões de corte em dois estágios com rotação permitida dos itens.

O método foi testado, para cada uma das abordagens, sobre um conjunto de 12 instâncias clássicas, extraídas do trabalho de Cintra (2004), das quais se conhece a solução ótima. O conjunto de instâncias é composto por problemas com objetos com dimensões 250x250, 500x500 e 1000x1000 unidades, e 10, 20, 30 e 50 tipos de itens, conforme mostra a TABELA 1. A descrição completa das instâncias, contendo também as dimensões e as demandas dos itens, encontra-se no Anexo.

TABELA 1 – DESCRIÇÃO DAS INSTÂNCIAS

Instância	$L \times W$	n
<i>gcut1</i>	(250,250)	10
<i>gcut2</i>	(250,250)	20
<i>gcut3</i>	(250,250)	30
<i>gcut4</i>	(250,250)	50
<i>gcut5</i>	(500,500)	10
<i>gcut6</i>	(500,500)	20
<i>gcut7</i>	(500,500)	30
<i>gcut8</i>	(500,500)	50
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50

FONTE: A autora (2011)

Os testes foram executados em um processador Intel Core™2 Duo, 1.83GHz com 3 GB de memória e os algoritmos foram implementados na linguagem computacional Visual Basic 6.0.

Por se tratar de um método que envolve uma meta-heurística, para cada instância, em cada abordagem, o algoritmo foi executado por 10 vezes, e a melhor solução encontrada é considerada.

Os resultados dos experimentos são descritos separadamente para os dois tipos de corte considerados: corte não-estagiado e corte em dois estágios. As soluções gráficas de todas as instâncias, para todas as quatro abordagens, são mostradas no apêndice.

4.1 RESULTADOS PARA O CORTE NÃO-ESTAGIADO

O corte não estagiado é considerado nas abordagens A1 e A2, para o corte com orientação fixa dos itens e com rotação permitida dos mesmos, respectivamente.

4.1.1 Abordagem A1: Corte não-estagiado sem rotação de itens

A TABELA 2, a seguir, apresenta os resultados obtidos para a primeira abordagem (A1). Na primeira coluna tem-se o nome da instância e nas duas colunas seguintes, as dimensões do objeto e a quantidade de itens, respectivamente. Na coluna seguinte são apresentados os valores obtidos por Cintra (2004), que consistem na solução ótima, para a ocupação absoluta (A) e relativa (R) do objeto. Por fim, as três últimas colunas mostram os resultados obtidos neste trabalho, mostrando as ocupações absolutas e relativas da chapa, e o tempo computacional T, medido em segundos. O tempo computacional gasto pelo método de Cintra (2004) não é mencionado, pois todas as instâncias demandaram menos de um segundo para serem solucionadas.

TABELA 2 - RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A1

Instância	(L, W)	n	Cintra(2004)		Proposto		T(s)
			A	R	A	R	
<i>gcut1</i>	(250,250)	10	56460	90,336	56460	90,336	0
<i>gcut2</i>	(250,250)	20	60356	96,5696	57816	95,1616	1
<i>gcut3</i>	(250,250)	30	61036	97,6576	58586	93,7376	2
<i>gcut4</i>	(250,250)	50	61698	98,7168	60420	96,672	3
<i>gcut5</i>	(500,500)	10	246000	98,4	246000	98,4	0
<i>gcut6</i>	(500,500)	20	238998	95,5992	225771	90,3084	1
<i>gcut7</i>	(500,500)	30	242567	97,0268	235536	94,2144	1
<i>gcut8</i>	(500,500)	50	246633	98,6532	236758	94,7032	2
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10	971100	97,11	971100	97,11	0
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20	982025	98,2025	934980	93,498	0
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30	980096	98,0096	939443	95,8032	2
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50	979986	97,9986	947688	96,0431	2
MÉDIA				97,02333		94,6656	

FONTE: A autora (2011)

As instâncias *gcut5* e *gcut9* apresentaram os maiores aproveitamentos na abordagem A1. Acompanhadas da instância *gcut1*, formam o grupo de instâncias que atingiram a solução ótima. Suas soluções gráficas podem ser vistas nas FIGURA 18, 19 e 20.

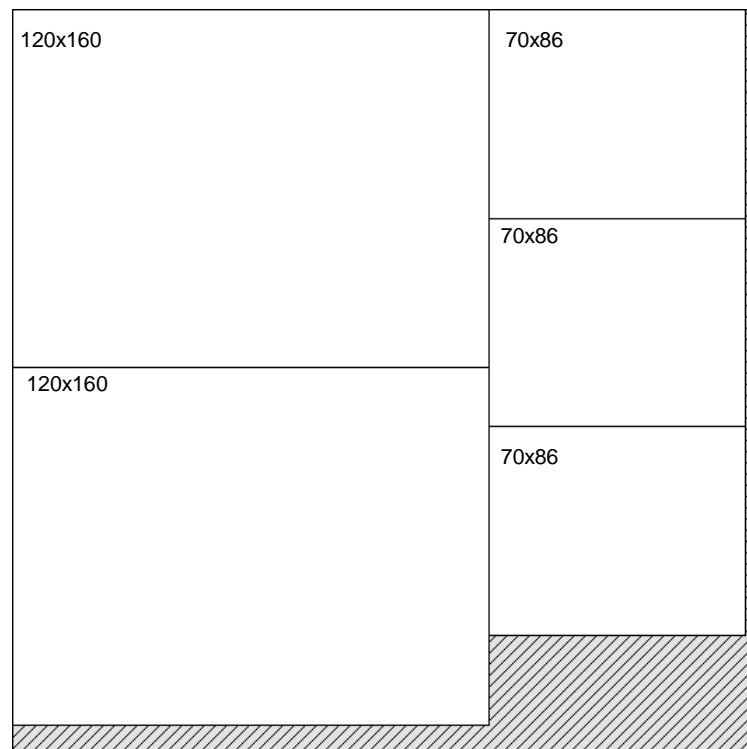


FIGURA 18 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA *gcut1* (A1)
 FONTE: A autora (2011)

164x250	164x250
164x250	164x250
164x250	164x250

FIGURA 19 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA *gcut5* (A1, A2 e A3)
FONTE: A autora (2011)

325x498	325x498
325x498	325x498
325x498	325x498

FIGURA 20 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA *gcut9* (A1, A2 e A3)
FONTE: A autora (2011)

4.1.2 Abordagem A2: Corte não-estagiado com rotação de itens

Na TABELA 3, são apresentados os resultados obtidos para a abordagem A2, na qual é permitida a rotação dos itens.

TABELA 3 - RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A2

Instância	(L, W)	n	Cintra(2004)		Proposto		T(s)
			A	R	A	R	
<i>gcut1</i>	(250,250)	10	58136	93,0176	58136	93,0176	0
<i>gcut2</i>	(250,250)	20	60611	96,9776	59476	95,1616	1
<i>gcut3</i>	(250,250)	30	61626	98,6016	59521	95,2336	2
<i>gcut4</i>	(250,250)	50	62265	99,624	61056	97,6896	2
<i>gcut5</i>	(500,500)	10	246000	98,4	246000	98,4	0
<i>gcut6</i>	(500,500)	20	240951	96,3804	238998	95,5992	0
<i>gcut7</i>	(500,500)	30	245866	98,3464	240063	96,0252	0
<i>gcut8</i>	(500,500)	50	247787	99,1148	241966	96,7864	3
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10	971100	97,11	971100	97,11	0
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20	982125	98,2125	966298	96,6298	0
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30	980096	98,0096	974638	97,4638	1
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50	988694	98,8694	978576	97,8576	1
MÉDIA				97,72199		96,4145	

FONTE: A autora (2011)

Como pode ser verificado a partir dos dados da TABELA 2 e TABELA 3, o método proposto foi capaz de encontrar boas soluções para o problema da geração dos padrões de corte nas abordagens A1 e A2, apresentando um aproveitamento médio de 94,66% do objeto para o caso em que os itens possuem orientação fixa (A1) e 96,41% quando sua rotação é permitida (A2). As três instâncias com apenas 10 itens alcançaram a solução ótima nas duas abordagens.

Algumas instâncias apresentaram a mesma solução para as abordagens A1 e A2 (*gcut5* e *gcut9*), igualando-se à solução ótima, que é a mesma para ambos os casos. A instância *gcut1* também atingiu a solução ótima para a abordagem A2, porém com uma diferente configuração no padrão de corte (FIGURA 21).

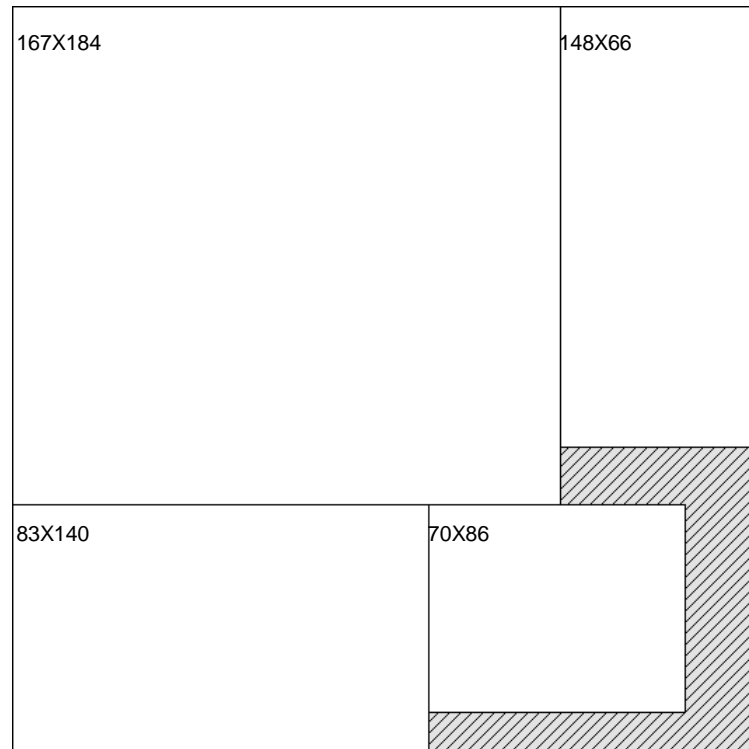


FIGURA 21 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA *gcut1* (A2)
 FONTE: A autora (2011)

O tempo computacional foi insignificante face à natureza do problema. Percebe-se que as instâncias com maior número de itens levaram mais tempo para serem solucionadas, tempo este que é influenciado pela técnica de encaixe escolhida, que busca obter todas as possíveis construções verticais e horizontais do conjunto de itens. Por outro lado, as instâncias menores, com 10 e 20 itens, apresentaram o menor tempo computacional dentre o conjunto de instâncias testado.

Como era esperado, a permissão de rotação dos itens fez com que o aproveitamento do objeto melhorasse consideravelmente em todas as instâncias. Isto ocorre pelo fato de existir um maior número de possibilidades de agrupamentos durante a execução da técnica de encaixe, visto que cada item possui dois itens correspondentes: o original e o rotacionado. O efeito da rotação dos itens, no corte não-estagiado, pode ser observado no GRÁFICO 1.

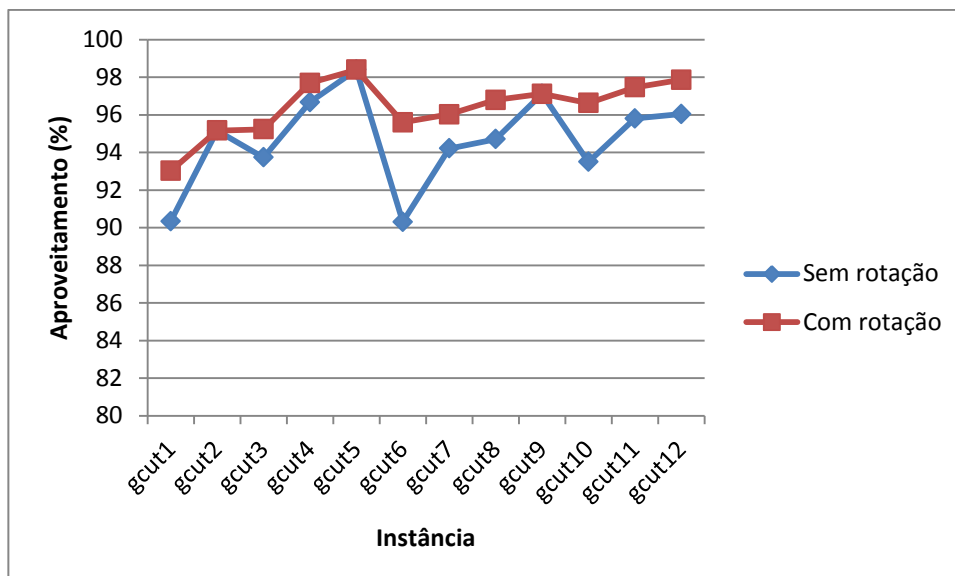


GRÁFICO 1 – APROVEITAMENTO DO OBJETO NAS ABORDAGENS A1 E A2
 FONTE: A autora (2011)

A seguir, são mostrados os resultados para o corte em dois estágios.

4.2 RESULTADOS PARA O CORTE EM DOIS ESTÁGIOS

O corte em dois estágios foi considerado nas abordagens A3 e A4, as quais também contemplam, respectivamente, o corte com orientação fixa dos itens e a rotação permitida dos mesmos.

4.2.1 Abordagem A3: Corte em dois estágios sem rotação de itens

Os resultados para a abordagem A3 são trazidos na TABELA 4, que segue a mesma estrutura das já apresentada para os outros experimentos.

TABELA 4 - RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A3

Instância	(L, W)	n	Cintra(2004)		Proposto		T(s)
			A	R	A	R	
<i>gcut1</i>	(250,250)	10	56460	90,336	53808	86,0928	0
<i>gcut2</i>	(250,250)	20	60076	96,1216	57534	92,0544	0
<i>gcut3</i>	(250,250)	30	60133	96,2128	56876	92,6016	0
<i>gcut4</i>	(250,250)	50	61698	98,7168	59466	95,1456	0
<i>gcut5</i>	(500,500)	10	246000	98,4	246000	98,4	0
<i>gcut6</i>	(500,500)	20	235058	94,0232	222648	89,0592	0
<i>gcut7</i>	(500,500)	30	242567	97,0268	235536	94,2144	0
<i>gcut8</i>	(500,500)	50	245758	98,3032	236758	94,7032	0
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10	971100	97,11	971100	97,11	0
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20	982025	98,2025	934895	93,4895	0
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30	974638	97,4638	939443	93,9443	0
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50	977768	97,7768	924300	92,43	0
MÉDIA				96,64113		93,2704	

FONTE: A autora (2011)

As instâncias *gcut5* e *gcut9* novamente alcançaram a solução ótima, apresentando o mesmo aproveitamento que no caso do corte não-estagiado (FIGURAS 19 e 20). No entanto, o corte em dois estágios se apresenta menos eficaz que o supracitado, pois as possibilidades de encaixe são reduzidas devido à construção das faixas.

4.2.2 Abordagem A4: Corte em dois estágios com rotação de itens

Na TABELA 5, a seguir, são mostrados os resultados para a abordagem A4, constituída pelo corte em dois estágios com rotação permitida dos itens.

TABELA 5 - RESULTADOS OBTIDOS PARA A ABORDAGEM A4

Instância	(L, W)	n	Cintra(2004)		Proposto		T(s)
			A	R	A	R	
<i>gcut1</i>	(250,250)	10	58136	93,0176	56040	89,664	0
<i>gcut2</i>	(250,250)	20	60611	96,9776	58276	93,2416	0
<i>gcut3</i>	(250,250)	30	60485	96,776	57704	92,3264	0
<i>gcut4</i>	(250,250)	50	62265	99,624	59624	95,3984	1
<i>gcut5</i>	(500,500)	10	246000	98,4	246000	98,4	0
<i>gcut6</i>	(500,500)	20	240951	96,3804	236158	94,4632	0
<i>gcut7</i>	(500,500)	30	245866	98,3464	232985	93,194	0
<i>gcut8</i>	(500,500)	50	247260	98,904	236758	94,7032	0
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10	971100	97,11	971100	97,11	0
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20	982125	98,2125	940330	94,833	0
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30	980096	98,0096	974638	97,4638	0
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50	988694	98,8694	978576	97,8576	1
MÉDIA				97,55229		94,8879	

FONTE: A autora (2011)

Os melhores resultados para a abordagem A4 foram obtidos para a instância *gcut5*, com um aproveitamento de 98,4% do objeto. Sua solução gráfica é apresentada na FIGURA 22.

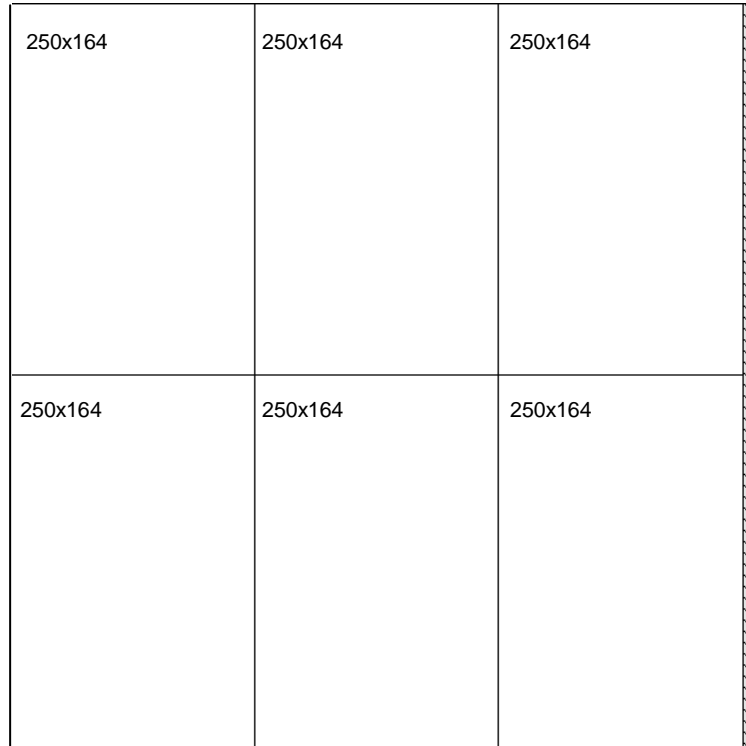


FIGURA 22 – SOLUÇÃO FINAL PARA A INSTÂNCIA *gcut5* (A4)
 FONTE: A autora (2011)

Na abordagem A4, em que se permite a rotação de itens para o corte em dois estágios, os resultados obtidos também são melhores que os obtidos para o corte em dois estágios com orientação fixa dos itens. Isto se deve, como já foi mencionado, ao fato de que a rotação dos itens permite um maior número de possíveis arranjos destes no objeto. O efeito que a rotação dos itens causa no aproveitamento do objeto, para o corte em dois estágios, é mostrado no GRÁFICO 2.

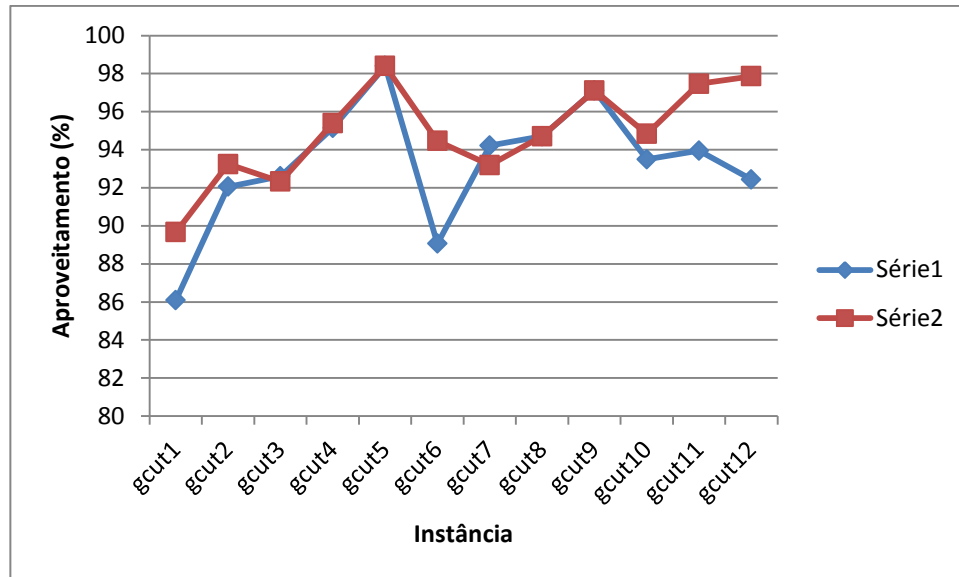


GRÁFICO 2 – APROVEITAMENTO DO OBJETO NAS ABORDAGENS A3 E A4
 FONTE: A autora (2011)

O tempo computacional para o corte em dois estágios foi menor que um segundo, ficando muito próximo do nulo. A heurística de encaixe, por fazer um encaixe seqüencial dos itens tal como aparecem na lista estabelecida, torna o tempo de execução para a Etapa 2 do algoritmo desprezível.

4.3 ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO MÉTODO

Para cada abordagem, realizou-se o teste estatístico ANOVA, considerando um nível de significância de 10%, a fim de comparar os resultados obtidos pelo método proposto com a solução ótima. A TABELA 6 mostra os resultados dos testes estatísticos para cada uma das quatro diferentes abordagens consideradas.

TABELA 6 – RESULTADOS DA ANOVA

Abordagem	<i>p</i> -valor
A1	0,938
A2	0,981
A3	0,931
A4	0,963

FONTE: A autora (2011)

Os resultados da ANOVA apresentaram o *p*-valor consideravelmente alto para todas as quatro abordagens, o que nos permite inferir que não há diferenças significativas entre a área ocupada do objeto obtida pela solução ótima e pela metodologia proposta neste trabalho, a um nível de significância de 10%.

Uma análise comparativa pode ser feita entre o método proposto e a solução ótima apresentada por Cintra (2004), avaliando o quanto a solução encontrada se aproxima da ótima. Esta comparação é mostrada na TABELA 7, na qual se observa o percentual da solução ótima atingida pelo método para cada uma das abordagens.

TABELA 7 – RELAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ENCONTRADA E A SOLUÇÃO ÓTIMA PARA CADA ABORDAGEM

Instância	A1	A2	A3	A4
<i>gcut1</i>	100	100	95,30	96,39
<i>gcut2</i>	95,79	98,12	95,76	96,14
<i>gcut3</i>	95,98	96,58	96,24	95,40
<i>gcut4</i>	97,92	98,05	96,38	95,75
<i>gcut5</i>	100	100	100	100
<i>gcut6</i>	94,46	99,18	94,72	98,01
<i>gcut7</i>	97,10	97,63	97,10	94,76
<i>gcut8</i>	95,99	97,65	96,33	95,75
<i>gcut9</i>	100	100	100	100
<i>gcut10</i>	95,20	98,38	95,20	95,74
<i>gcut11</i>	95,85	99,44	96,38	99,44
<i>gcut12</i>	96,70	98,97	94,53	98,97
Média	97,08	98,67	96,49	97,19

FONTE: A autora (2011)

Na TABELA 5, fica claro que a abordagem que proporcionou o maior aproveitamento do objeto foi a que envolve o corte não-estagiado com rotação permitida dos itens. Este caso é o que proporciona o maior número de combinações entre os itens, gerando portanto as melhores soluções.

A comparação da aproximação da solução ótima com os resultados obtidos em cada abordagem é ilustrada no GRÁFICO 3.

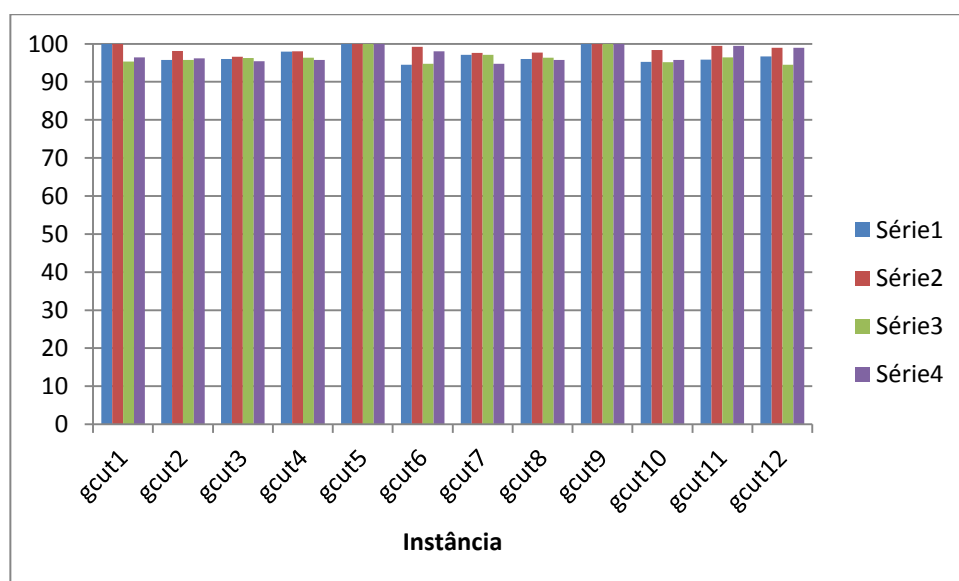


GRÁFICO 3 – EFICIÊNCIA DAS DIFERENTES ABORDAGENS

FONTE: A autora (2011)

Percebe-se, através desta ilustração, que as quatro abordagens obtiveram resultados próximos. Para todas elas, o aproveitamento médio dos padrões de corte foi sempre maior que 90%, com uma boa aproximação da solução ótima, pois foi atingido mais que 95% da mesma em todas as abordagens. A abordagem A2, que considera o corte não-estagiado com rotação permitida dos itens, foi a que possibilitou maior aproveitamento do objeto.

Para as menores instâncias, que possuem 10 tipos diferentes de itens, a solução ótima foi atingida, com exceção apenas na instância *gcut1* nas abordagens que envolvem o corte em dois estágios.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma proposta para a geração de padrões de corte bidimensionais guilhotinados, considerando o corte não-estagiado e em dois estágios, e ainda a possibilidade de rotação dos itens.

Propôs-se um método de resolução do problema em duas etapas. Na primeira etapa, geram-se os agrupamentos de itens através de um Algoritmo Genético. Na segunda etapa, aplicam-se técnicas de encaixe a fim de encontrar qual dos agrupamentos constitui o melhor padrão de corte.

Para o corte não-estagiado, utilizou-se uma técnica de encaixe baseada no algoritmo de Wang (1982), que cria semi-soluções através de sucessivas construções horizontais e verticais dos itens, podendo ainda considerar a rotação dos mesmos.

Para o corte em dois estágios, foi utilizada a heurística construtiva *First Fit Decreasing Height*, que aloca os itens no objeto estabelecendo faixas, que são a característica determinante deste tipo de corte.

Os testes computacionais realizados forneceram bons resultados para o problema, em um tempo computacional muito baixo. O Algoritmo Genético implementado mostrou-se capaz de gerar bons padrões de corte, visto que cria agrupamentos de itens a serem submetidos às técnicas de encaixe, o que reduz o tempo de processamento gasto por elas, especialmente para o corte não-estagiado, no qual a quantidade de possibilidades de encaixe aumenta exponencialmente em relação à quantidade de itens.

Por fim, deve-se salientar que o sistema computacional desenvolvido apresenta grande usabilidade, devido à representação gráfica da solução final, cujo procedimento está incluído no tempo computacional apresentado.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os métodos empregados neste trabalho possibilitaram conhecer mais profundamente a complexidade dos problemas de corte e empacotamento. Diante disto, alguns itens adicionais podem ser indicados como trabalhos futuros:

- Aprimorar a técnica de encaixe para o corte em dois estágios;
- Utilizar a geração de padrões proposta para solucionar o Problema de Corte e Estoque;
- Estender a metodologia desenvolvida para problemas tridimensionais, com destaque aos problemas de empacotamento e carregamento de contêineres.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ-VALDES, R.; PARAJON, A.; TAMARIT, J. M. A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un)constrained two-dimensional cutting problems. **Computer & Operations Research**, v. 29, p. 925-947, 2002.

AMARAL, A. R. S.; WRIGHT, M. Efficient algorithm for the constrained two-dimensional cutting stock problem. **International Transactions in Operational Research**. v. 8, p. 3-13, 2001.

BARROS, C. M. P.; LOUÇA JUNIOR, C.; ROCHA, M. L. Uma metaheurística GRASP aplicada ao problema de corte guilhotinado bi-dimensional. Trabalho apresentado no Congresso Nacional da SUCESU, Florianópolis, 2004.

CINTRA, G. F. **Algoritmos para Problemas de Corte de Guilhotina Bidimensional**. 145 p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

CHRISTOFIDES, N.; HADJICONSTANTINO, E. An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts. **European Journal of Operational Research**, v. 83, p. 21-38, 1995.

CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. **Operations Research**, v. 25, n. 1, p. 30-44, 1977.

DICKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, p. 145-159, North-Holland, 1990.

DAZA, V.P.; ALVARENGA, A. G.; DIEGO, J. Exact solutions for constrained two-dimensional cutting problems. **European Journal of Operational Research**, v. 83, p. 633-644, 1995.

DOWSLAND, K. A. Some experiments with simulated annealing techniques for packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 68, p. 389-399, 1993.

FAINA, L. Application of simulated annealing to the cutting stock problem. **European Journal of Operational Research**, v. 114, p. 542-556, 1999.

FIGUEIREDO, A. G. **Análise de Produtividade de Padrões de Corte na Indústria de Móveis**. 107 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2005.

FRITSCH, A.; VORBERGER, O. Cutting stock by iterated matching. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON OPERATIONS RESEARCH, 1995. **Proceedings...** Springer: 1995. p. 92-97.

GILMORE, P.; GOMORY, R. A linear programming approach to the cutting stock problem. **Operations Research**, v. 9, p. 849-859, 1961.

GILMORE, P.; GOMORY, R. A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. **Operations Research**, v. 11, p. 863-888, 1963.

GILMORE, P.; GOMORY, R. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. **Operations Research**, v. 14, p. 94-120, 1964.

GILMORE, P.; GOMORY, R. The theory and computation of knapsack functions. **Operations Research**, v. 15, p. 1045-1075, 1966.

HERZ, J. C. Recursive Computational Procedure for Two-Dimensional Stock Cutting. **IBM Journal of Research and Development**, v. 16, p. 462-469, 1972.

HIFI, M.; ROUCARIOL, C. Approximate and exact algorithms for constrained (un)weighted two-dimensional two-staged cutting stock problems. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 5, p. 465-494, 2001.

HOPPER, E.; TURTON, B. C. H. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. **Artificial Intelligence Review**, v. 16, p. 257-300, 2001.

LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: a survey. **European Journal of Operational Research**, v. 141, p. 241-252, 2002.

LUEKER, G.S. **Two np-complete problems in nonnegative integer programming**. Report n. 178, Princeton University, Computer Science Laboratory, Princeton, NJ, 1975.

LINDEN, R. **Algoritmos Genéticos**: Uma importante ferramenta da Inteligência Computacional. 2. ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.

LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. **Journal on Computing**, v. 11, n. 4, p. 345-357, 1999.

MARQUES, F. P.; ARENALES, M. N. O problema da mochila compartimentada e aplicações. **Pesquisa Operacional**, v. 22, n. 3, p. 285-304, jul./dez. 2002.

MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Performance of two heuristics for solving large scale two-dimensional guillotine cutting problems. **INFORS**, v. 33, n. 2, p. 145-155, 1995.

OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J. An improved version of Wang's algorithm for twodimensional cutting problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, p. 256-266, 1990. 1990.

RAHMANI, A. T.; ONO, N. An evolutionary approach to two-dimensional guillotine cutting problem. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, 1995, Perth. p. 148-151.

SMITH, D. Bin packing with adaptive search. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GENETIC ALGORITHMS AND THEIR APPLICATIONS, 1985. **Proceedings...** Laurence Erlbaum: 1985. p. 202-206.

TEMPONI, E. C. C. **Uma Proposta de Resolução do Problema de Corte Bidimensional via Abordagem Metaheurística**. 80 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

TORO O, E. M.; RUEDA M., A. C.; GRANADA, M. Algoritmo de Búequeda Tabu aplicado a la solución del problema de corte bidimensional guillotinado. **Scientia et Technica**, v. XIII, n. 37, p. 43-48, 2007.

VASKO, F. J. A computational improvement to Wang's two-dimensional cutting stock algorithm. **Computers and Industrial Engineering**, v. 16, p. 109-115, 1989.

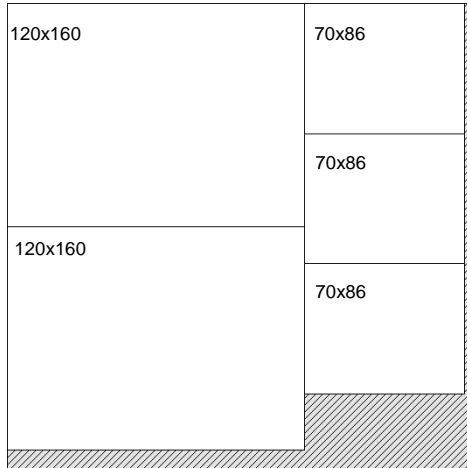
WANG, P. Y. Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. **Operations Research**, v. 31, p. 573-586, 1983.

WASCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, p. 1109-1130, 2007.

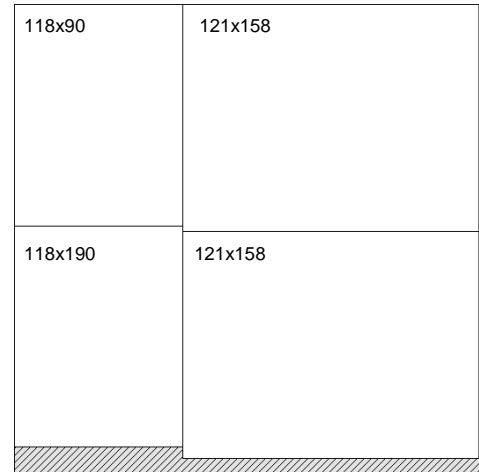
APÊNDICE

SOLUÇÕES GRÁFICAS

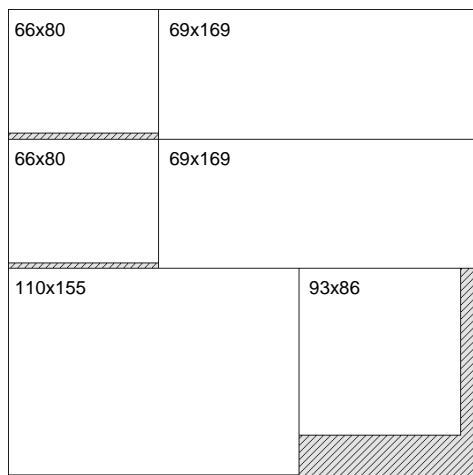
ABORDAGEM A1: CORTE NÃO-ESTAGIADO SEM ROTAÇÃO DE ITENS



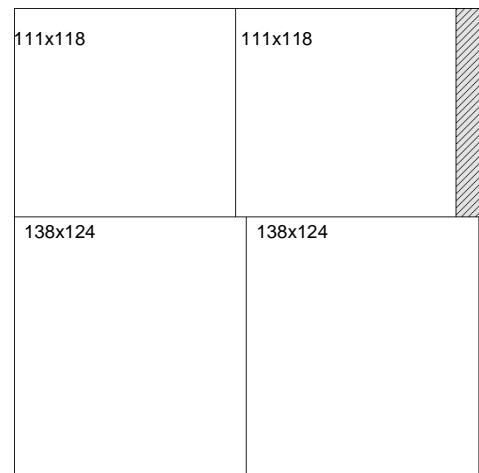
gcut1 (250x250)



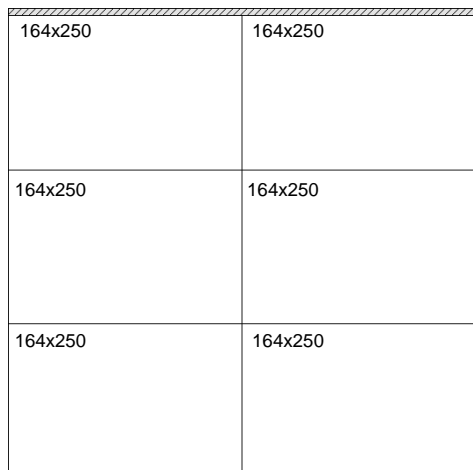
gcut2 (250,250)



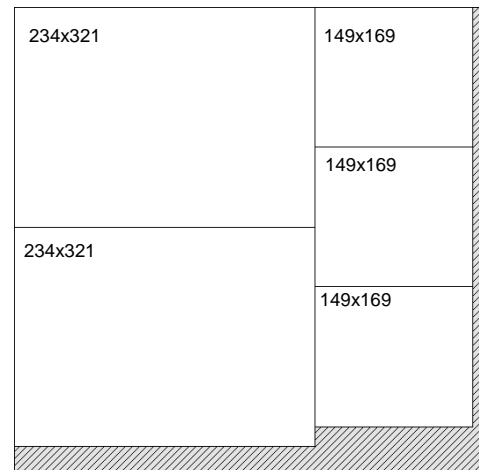
gcut3 (250,250)



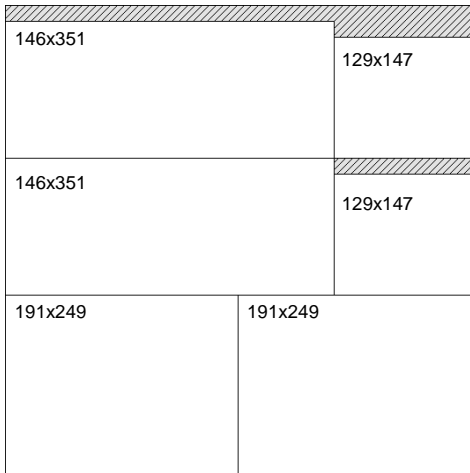
gcut4 (250,250)



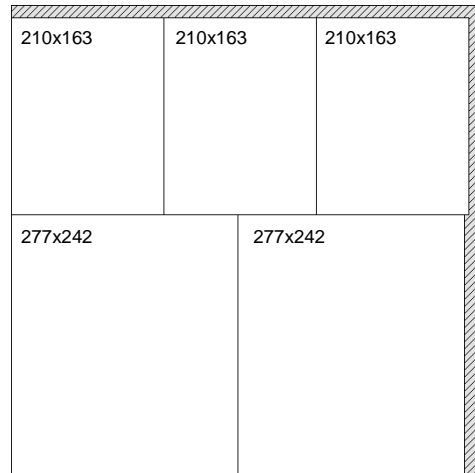
gcut5 (500,500)



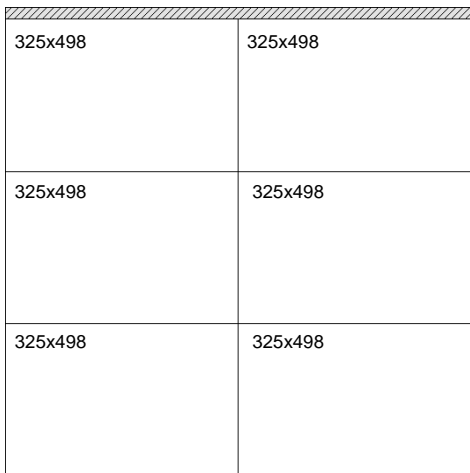
gcut6 (500,500)



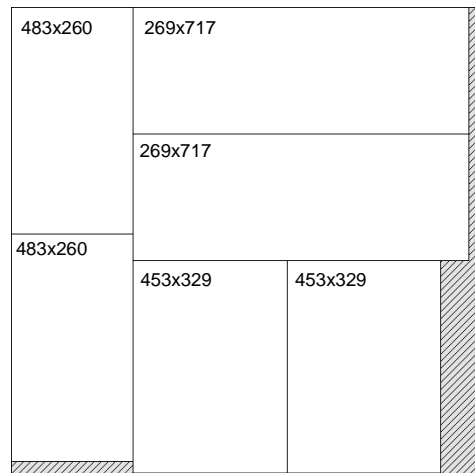
gcut7 (500,500)



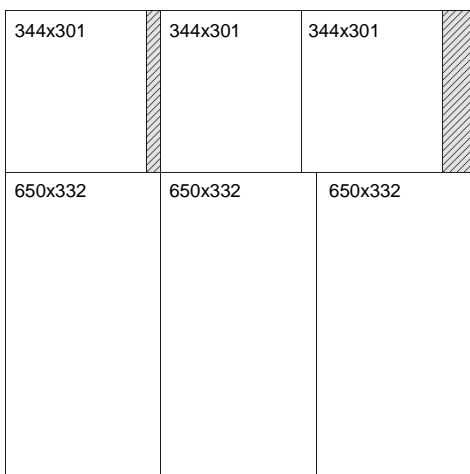
gcut8 (500,500)



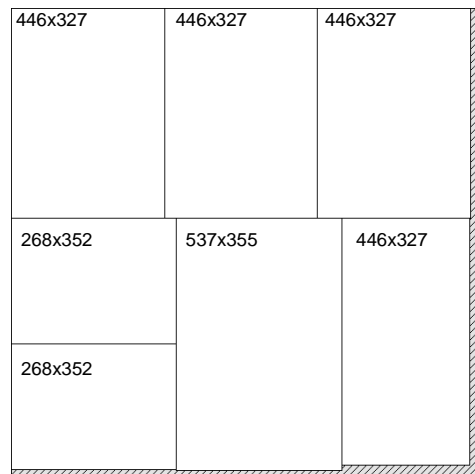
gcut9 (1000,1000)



gcut10 (1000,1000)

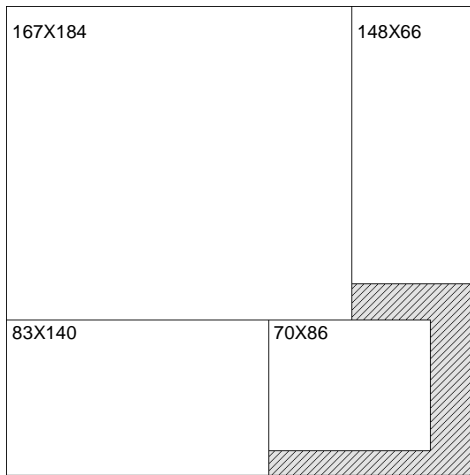


gcut11 (1000,1000)

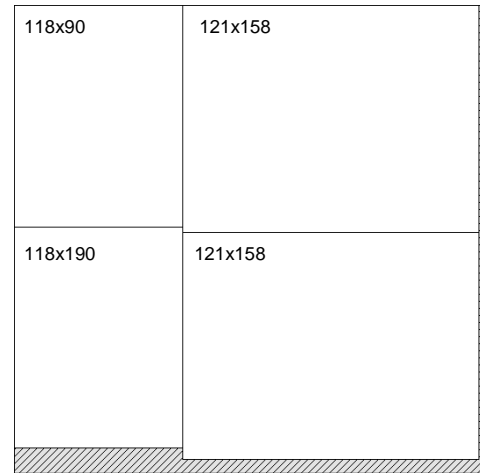


gcut12 (1000,1000)

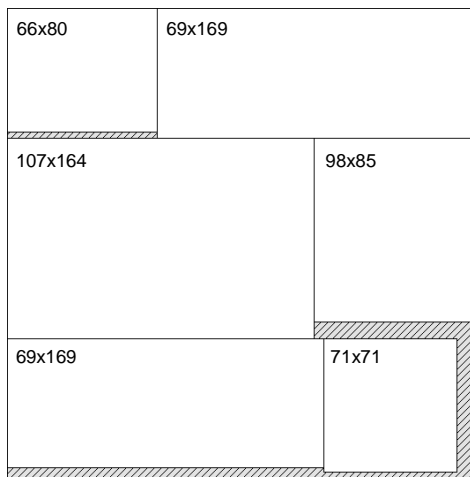
ABORDAGEM A2: CORTE NÃO-ESTAGIADO COM ROTAÇÃO DE ITENS



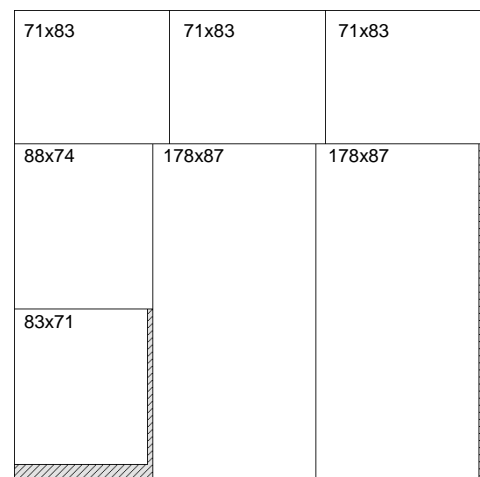
gcut1 (250,250)



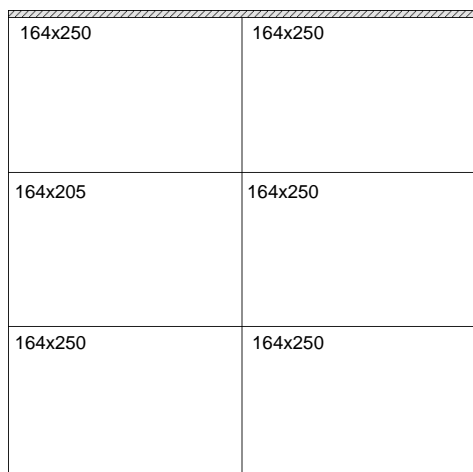
gcut2 (250,250)



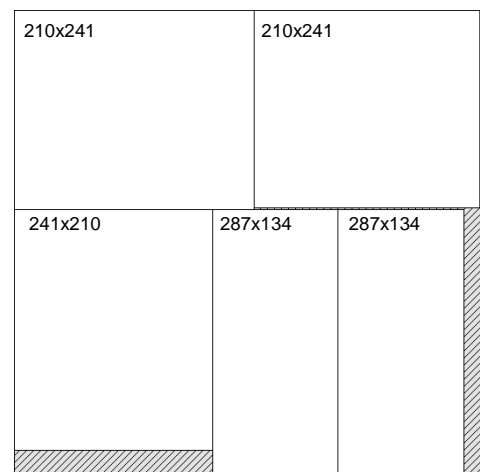
gcut3 (250,250)



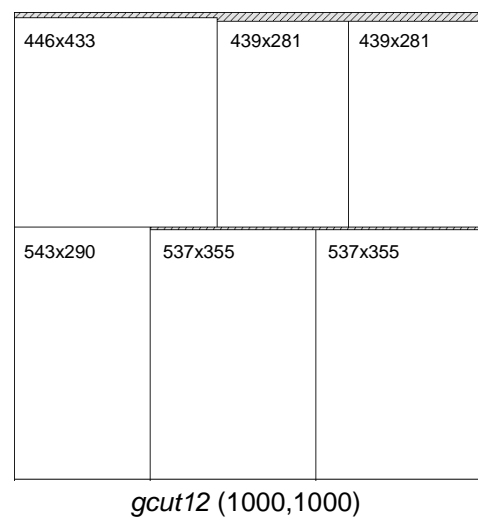
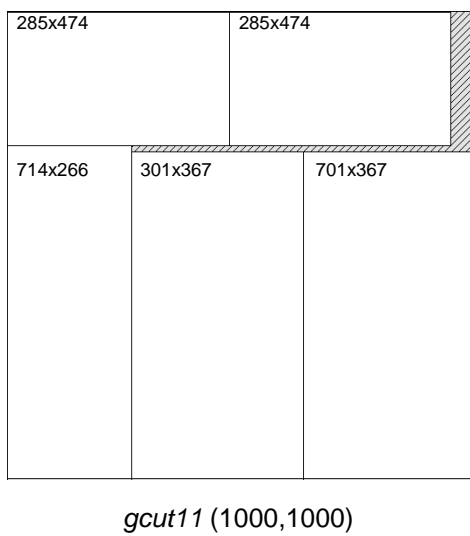
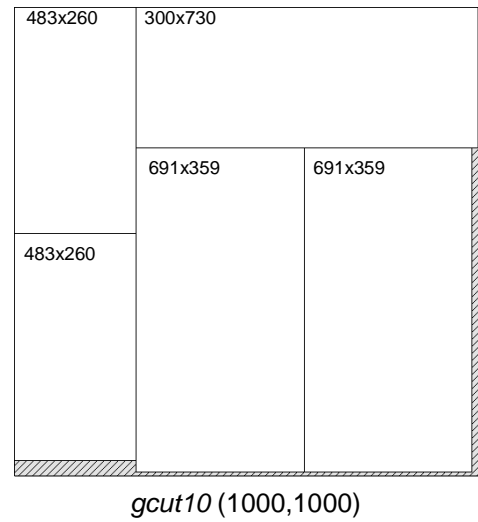
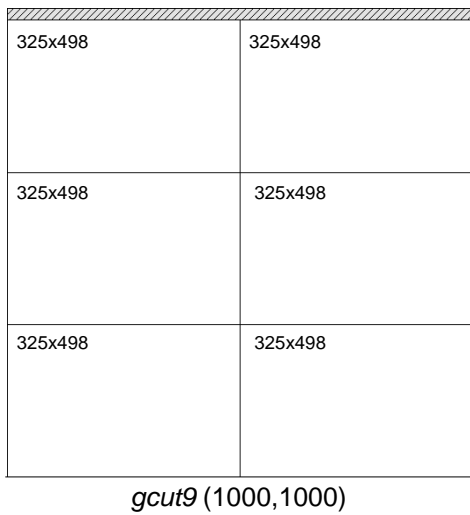
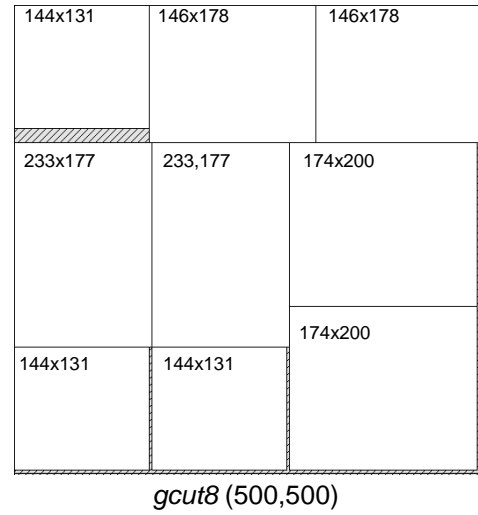
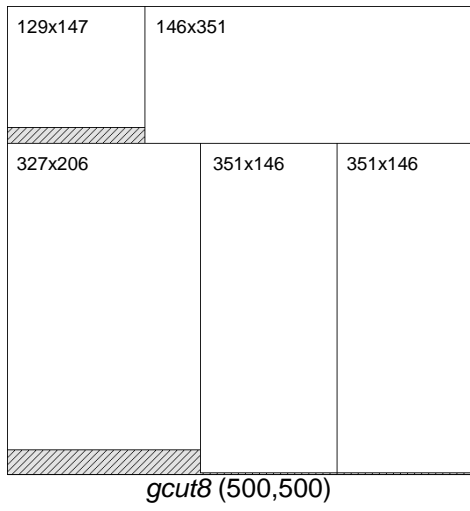
gcut4 (250,250)



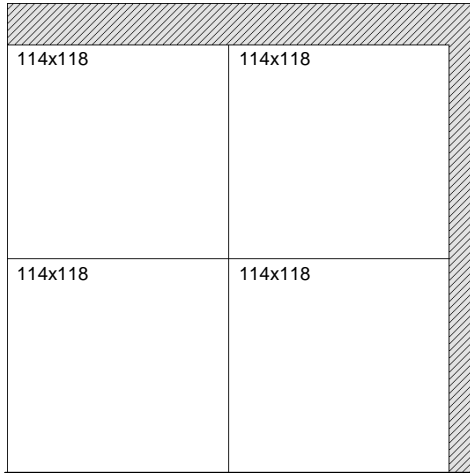
gcut5 (500,500)



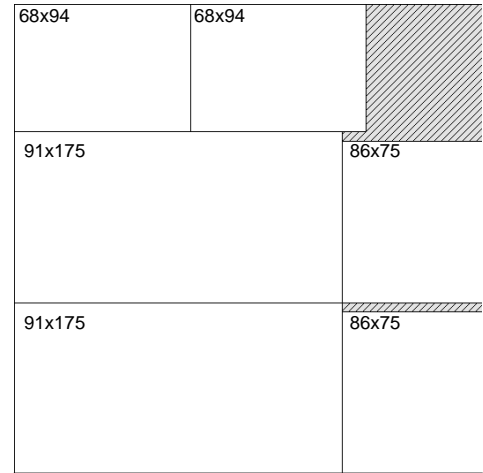
gcut6 (500,500)



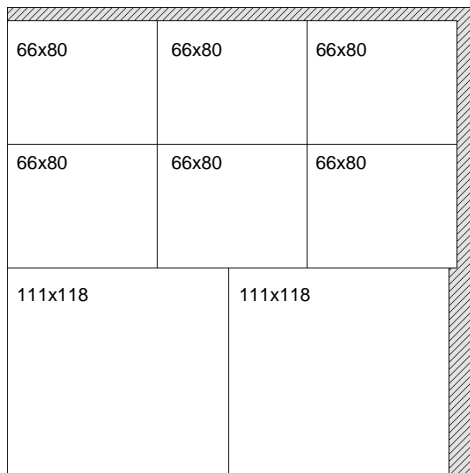
ABORDAGEM A3: CORTE EM DOIS ESTÁGIOS SEM ROTAÇÃO DE ITENS



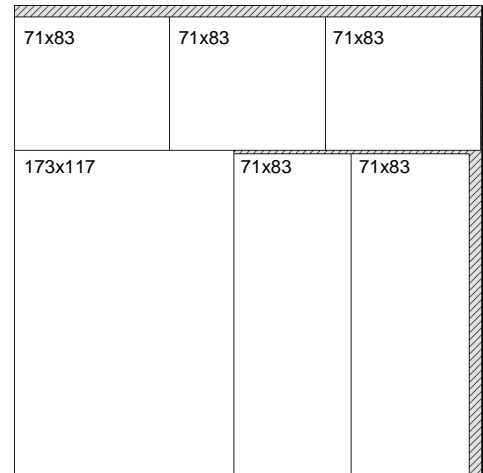
gcut1 (250,250)



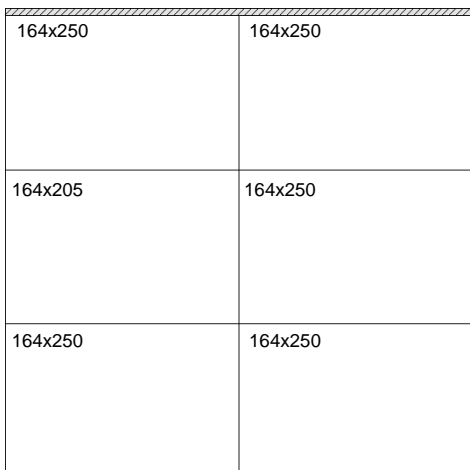
gcut2 (250,250)



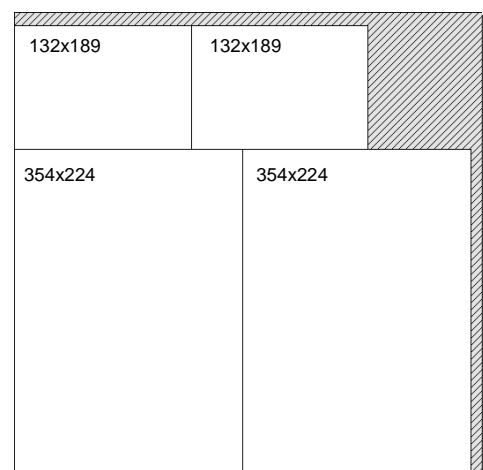
gcut3 (250,250)



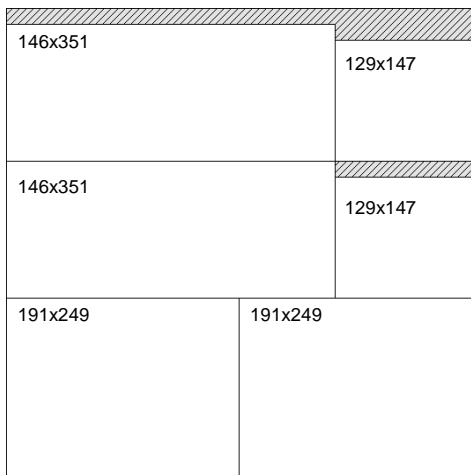
gcut4 (250,250)



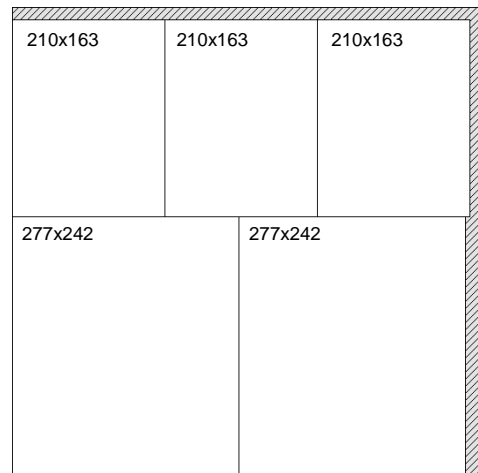
gcut5 (500,500)



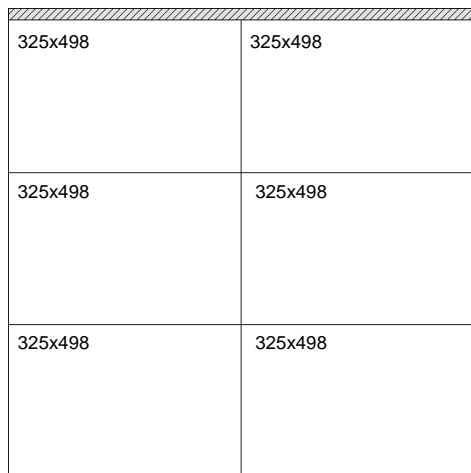
gcut6 (500,500)



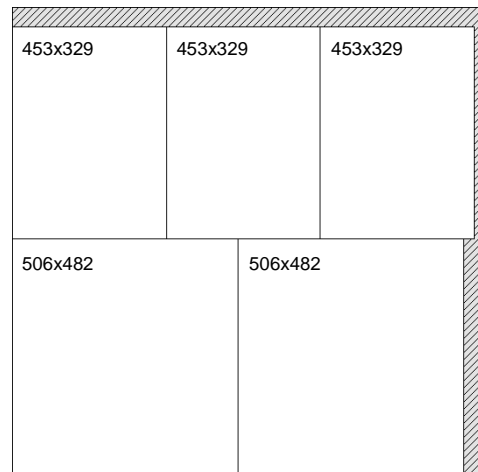
gcut7 (500,500)



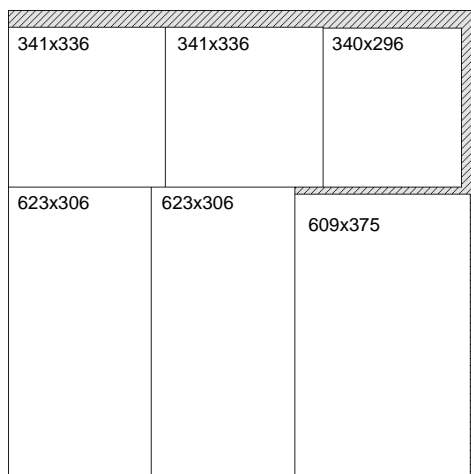
gcut8 (500,500)



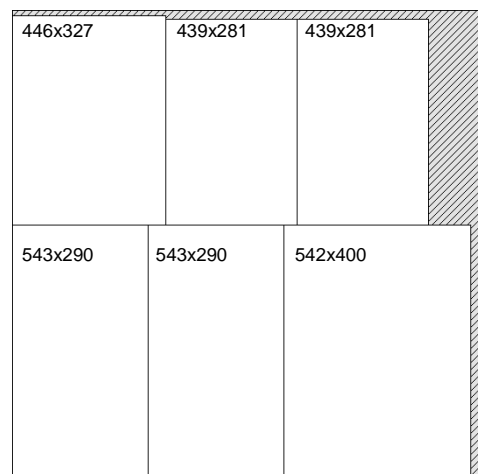
gcut9 (1000,1000)



gcut10 (1000,1000)

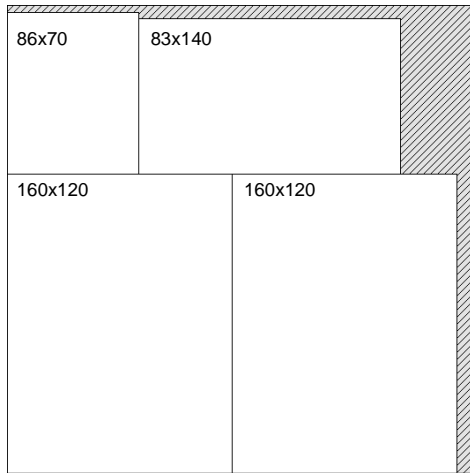


gcut11 (1000,1000)

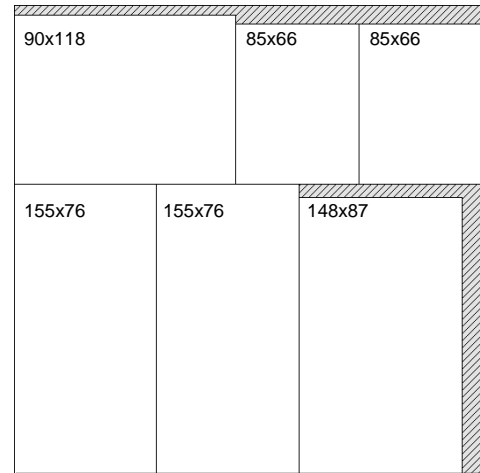


gcut12 (1000,1000)

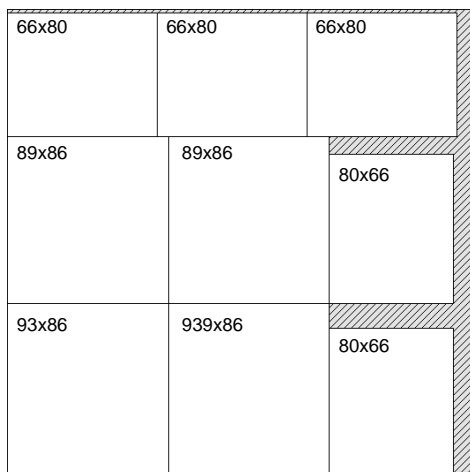
ABORDAGEM A4: CORTE EM DOIS ESTÁGIOS COM ROTAÇÃO DE ITENS



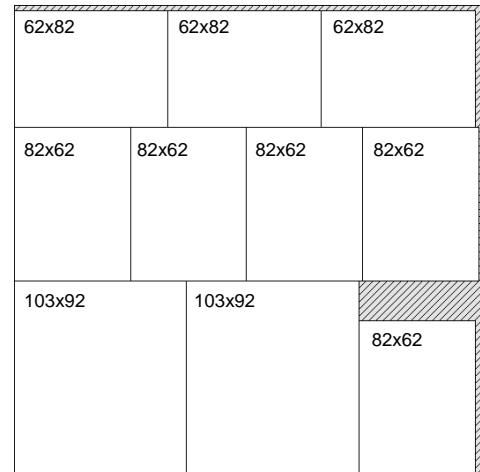
gcut1 (250,250)



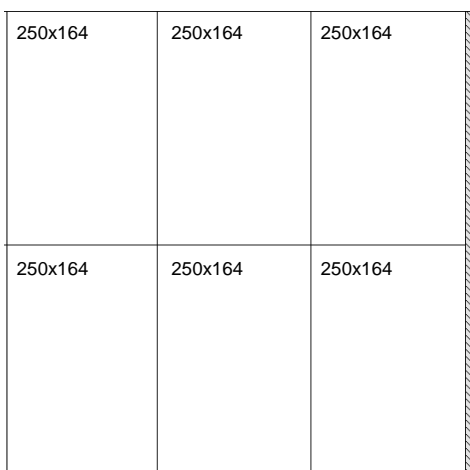
gcut2 (250,250)



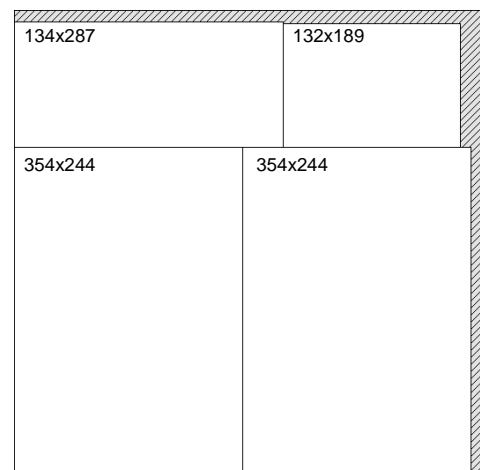
gcut2 (250,250)



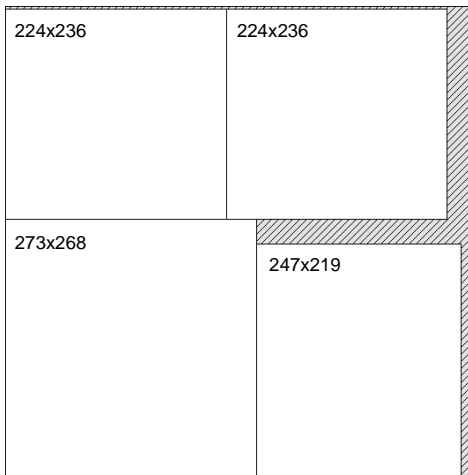
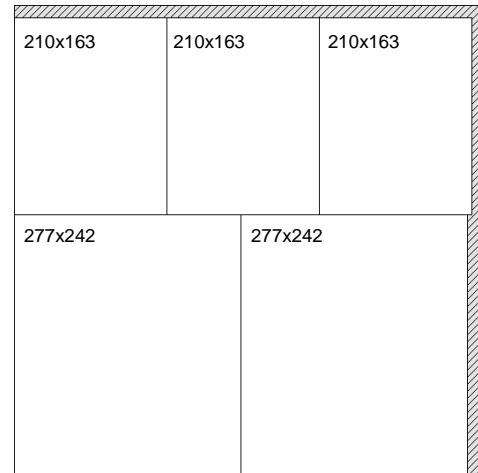
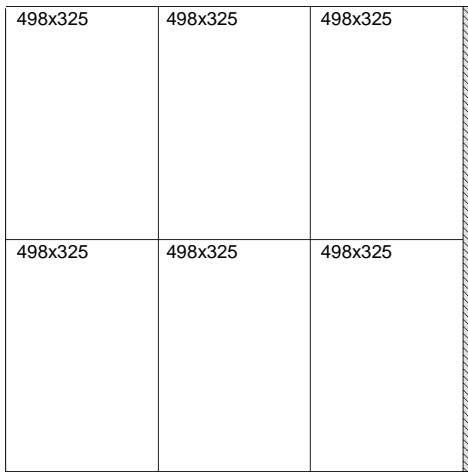
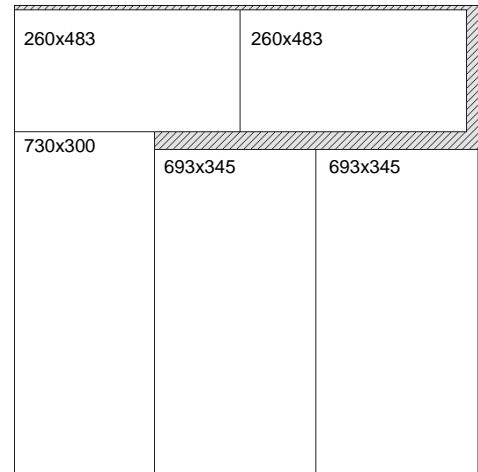
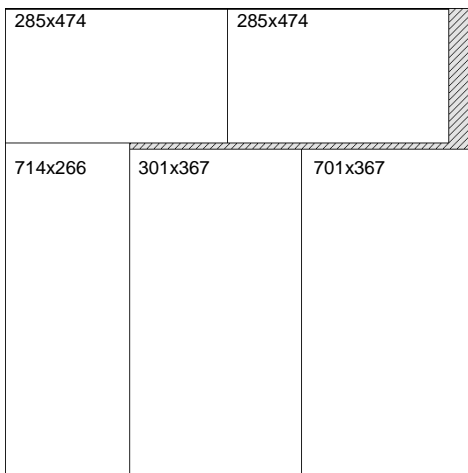
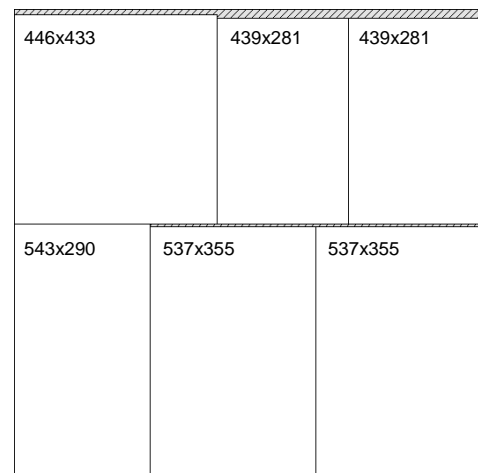
gcut4 (500,500)



gcut5 (500,500)



gcut6 (500,500)

*gcut7* (500,500)*gcut8* (500,500)*gcut9* (1000,1000)*gcut10* (1000,1000)*gcut11* (1000,1000)*gcut12* (1000,1000)

ANEXO

INSTÂNCIAS UTILIZADAS

gcut1		
w	l	d
16	184	90
114	118	75
167	152	71
83	140	13
70	86	39
143	166	79
120	160	63
66	148	93
87	141	61
69	165	85

gcut2		
w	l	d
120	133	61
135	186	75
86	75	33
103	73	39
66	85	20
135	97	79
91	175	56
131	176	49
71	176	34
153	72	96
87	148	19
168	107	92
118	90	8
140	109	79
132	159	13
152	93	2
135	68	78
121	158	40
68	94	17
155	76	92

gcut3		
w	l	d
66	80	33
164	107	75
64	184	94
121	86	65
163	135	2
85	98	78
81	102	49
103	186	4
152	106	7
176	139	6
111	118	5
69	169	20
146	133	26
112	112	55
133	160	50
63	129	64
163	152	25
110	155	80
96	136	90
92	142	84
84	143	95
119	133	33
71	71	64
146	84	5
93	86	68
89	86	30
101	146	100
172	73	33
73	169	62
99	99	87

gcut4					
w	l	d	w	l	d
139	103	77	101	64	53
166	99	75	103	95	8
88	74	16	110	107	78
174	139	17	184	158	84
128	109	64	85	97	27
175	179	78	86	92	96
62	82	35	127	155	8
178	87	15	92	147	41
121	77	53	106	97	27
125	97	27	177	108	31
73	84	79	164	150	48
69	97	76	68	84	11
122	159	60	62	151	79
66	69	7	123	134	90
111	118	23	158	178	63
165	86	87	70	140	56
71	83	19	173	117	40
163	162	62	147	136	78
67	132	35	141	145	86
121	152	68	84	164	67
68	150	61	144	141	75
138	124	81	92	103	94
141	105	36	156	98	50
183	122	83	160	111	93
171	63	75	127	131	59

gcut5		
w	l	d
198	205	91
179	155	71
364	236	94
272	147	74
352	145	32
343	245	63
132	174	60
164	250	27
282	356	58
342	151	75

gcut6		
w	l	d
313	305	64
292	222	66
330	253	78
212	256	60
132	189	6
149	296	46
294	137	51
225	345	16
345	220	27
337	177	74
189	300	82
234	321	9
335	272	43
354	244	23
149	169	73
355	165	72
260	220	93
210	241	40
194	372	80
287	134	61

gcut7		
w	l	d
340	220	37
255	184	61
191	249	62
212	194	47
348	322	80
171	369	30
206	327	42
221	277	6
250	202	97
205	226	74
193	280	50
364	311	45
264	224	78
244	347	72
270	338	89
224	236	19
168	177	47
285	347	80
315	294	34
247	219	87
315	302	46
129	147	52
268	273	89
350	352	23
186	258	86
365	374	20
145	259	42
284	184	58
129	198	43
146	351	30

gcut8					
w	l	d	w	l	d
277	242	83	198	182	3
233	177	51	155	295	12
182	216	30	278	219	85
147	134	19	184	155	53
213	127	29	187	270	32
315	212	97	208	293	44
261	175	24	261	204	8
210	281	85	344	168	37
243	256	36	213	135	19
159	314	74	362	162	10
217	147	87	362	374	84
260	349	18	237	322	64
222	199	47	281	308	58
296	127	69	155	344	68
263	302	23	210	163	51
226	250	13	325	225	72
264	344	54	360	225	71
237	179	62	346	347	92
245	137	42	131	144	82
137	328	40	284	284	70
321	154	45	262	228	10
200	174	46	146	178	40
270	128	11	254	164	10
299	179	13	332	238	42
165	370	72	313	304	76

gcut9		
w	l	d
310	426	91
673	468	61
426	463	40
325	498	95
555	540	18
292	455	30
343	341	56
362	491	95
305	688	51
459	607	53

gcut10		
w	l	d
730	300	68
269	717	47
463	369	69
642	464	2
453	329	78
455	667	82
506	482	42
560	362	52
483	260	13
693	345	32
381	510	8
456	586	43
457	453	12
707	658	12
639	650	93
691	359	12
434	700	21
576	291	39
728	739	6
545	742	99

gcut11		
w	l	d
541	745	44
344	301	32
413	294	99
266	341	9
543	388	38
367	701	33
526	707	28
286	706	9
614	289	76
348	592	10
673	431	40
475	362	96
562	439	81
530	638	5
609	375	69
540	274	29
486	634	89
272	377	80
623	306	24
266	714	94
341	336	97
340	296	90
531	479	38
571	589	60
674	496	22
560	497	1
509	389	27
650	332	7
474	285	5
419	503	16

gcut12					
w	l	d	w	l	d
572	665	95	716	640	4
482	640	3	542	400	19
264	594	58	634	596	1
349	566	23	497	696	90
276	660	58	417	300	43
745	422	35	290	605	41
434	622	100	321	520	8
446	433	24	543	290	29
668	506	1	599	269	3
405	635	66	467	679	68
486	320	3	583	421	57
554	549	3	729	723	69
392	491	20	465	590	16
459	528	91	614	585	24
426	579	22	446	327	26
728	359	64	734	616	4
644	465	25	479	606	34
382	323	61	656	278	21
268	352	58	537	355	72
324	512	83	604	519	75
277	426	14	746	596	80
254	685	76	439	281	31
483	532	60	339	405	32
678	414	73	273	526	40
546	590	66	625	568	12