

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
Pablo Nestor Gonzáles Cordóva

**Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para  
Modelos Lineares de Ondas Internas**

**Curitiba, 2011.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

Pablo Nestor Gonzáles Cordóva

**Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para  
Modelos Lineares de Ondas Internas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Saulo P.Oliveira.

**Curitiba, 2011.**



---

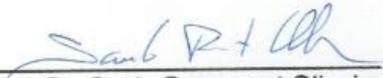
Ministério da Educação  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
Setor de Ciências Exatas  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

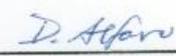
---

### PARECER DA BANCA EXAMINADORA

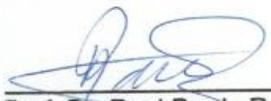
Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação devendo para tanto fazer as correções, e incorporar do candidato **Pablo Nestor Gonzáles Cordova** as sugestões da banca no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 16 de setembro de 2011.

  
Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira  
Presidente

  
Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo  
Titular

  
Prof<sup>a</sup> Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas  
Membro

  
Prof. Dr. Raul Prado Raya  
Membro



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

### ATA DA 38ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ao dezesesseis dias do mês de setembro de 2011, no Anfiteatro B, Prédio PC do Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Saulo Pomponet Oliveira, a Banca Examinadora para a Trigésima Oitava Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

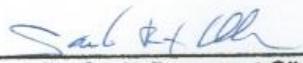
A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ; Dra. Ailín Ruiz de Zarate Fabregas e Dr. Raul Prado Raya, ambos do Departamento de Matemática-UFPR, e o Dr. Saulo Pomponet Oliveira, Orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Pablo Nestor Gonzáles Cordova** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para Modelos Lineares de Onda Internas". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

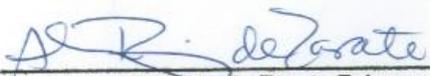
A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 16 de setembro de 2011.

  
Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira  
Presidente

  
Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo  
Titular

  
Profª Dra. Ailín Ruiz de Zarate Fabregas  
Membro

  
Prof. Dr. Raul Prado Raya  
Membro



---

Ministério da Educação  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
Setor de Ciências Exatas  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

---

## DECLARAÇÃO

O Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR declara que o aluno **PABLO NESTOR GONZALES CORDOVA**, concluiu todos os créditos exigidos ao Curso de Mestrado e defendeu sua dissertação de mestrado em **16 de setembro de 2011**, perante a banca examinadora composta pelos professores doutores **SAULO POMPONET OLIVEIRA (Orientador); DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO; AILÍN RUIZ DE ZARATE FABREGAS; RAUL PRADO RAYA**, tendo sido considerado **APROVADO** e apto à receber seu Diploma de Mestre.

Curitiba, 16 de setembro de 2011.

**Prof. Dr. Yuan Jin Yun**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Matemática Aplicada

*Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditaram em mim.*

# Agradecimentos

Gostaria de registrar aqui meus agradecimentos. Ao meu orientador, Prof. Dr. Saulo P. Oliveira pela cobrança, pela orientação e apoio no desenvolvimento desta dissertação e por todos os conhecimentos comigo compartilhados. E por principalmente acreditar em mim, em horas que nem eu acreditava.

Agradeço à Professora Ailin Ruiz de Zarate F. que muito contribuiu para esse trabalho.

Aos professores Daniel G. Alfaro Vigo e Ailin Ruiz de Zarate F. por aceitarem participar de minha banca e pelas sugestões e contribuições ao trabalho.

Aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Aos meus pais, por me ensinar valores e me ajudarem a chegar onde estou.

Ao antigo professor Edinson Montoro.

Aos amigos que conheci em Curitiba durante o mestrado, às horas que passamos estudando juntos.

Aos amigos que deixei no Perú.

Aos amigos que fazem parte da minha vida, longe ou perto.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR pela formação de qualidade propiciada.

Ao CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual dificilmente conseguiria chegar até aqui.

*“Mathematics compares the most diverse phenomena  
and discovers the secrets analogies that unit them.”*

Joseph Fourier

*“Assim como a leitura, a mera experiência não  
pode substituir o pensamento. A pura empiria  
está para o pensamento como o ato de comer  
está para a digestão e a assimilação. Quando a  
experiência se vangloria de que somente ela, por  
meio de suas descobertas, fez progredir o saber  
humano, é como se a boca quisesse se gabar  
por sustentar sozinha a existência do corpo.”*

Arthur Schopenhauer  
*“Pensar por si mesmo”, 1851.*

# Resumo

Nesta dissertação estudamos a estabilidade de um modelo reduzido e linearizado de ondas internas no caso de um fundo plano. Este modelo apresenta um termo não local que envolve a transformada de Hilbert na faixa. Estudamos uma adaptação da análise de estabilidade de Von Neumann para o modelo linear uni-dimensional que leva em conta o termo dispersivo não local. Começamos primeiro com a análise de Fourier e a análise de estabilidade numérica de Von Neumann, aplicando-as a uma versão não dispersiva do modelo reduzido, chamada de sistema hiperbólico. Em seguida consideramos o sistema dispersivo, comparando a estabilidade dos dois regimes. Apresentamos uma fórmula para o fator de amplificação que nos fornece estimativas para a estabilidade numérica.

**Palavras chave:** *Ondas internas, Modelos de dispersão, Análise de Von Neumann, Transformada de Hilbert e Transformada de Fourier.*

# Abstract

In this work, we have studied the stability of a reduced, linearized model for internal waves in the flat bottom case. This model has a non-local term involving the Hilbert transform on the strip. We consider a modification of the classical Von Neumann stability analysis in the one-dimensional linear model to account for nonlocal dispersive terms. We begin with the Fourier analysis and the Von Neumann numerical stability analysis, employing them in a non-dispersive version of the reduced model, called hyperbolic system, and then proceed with the dispersive system, comparing their numerical properties. We present a formula for the amplification factor that yields estimates for the numerical stability.

**Key words:** *Internal waves, Dispersive models, Von Neumann analysis, Fourier and Hilbert Transforms.*

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Conceitos e resultados preliminares</b>	<b>7</b>
2.1 A FT, O Teorema da amostragem e a DFT . . . . .	7
2.1.1 A FT . . . . .	7
2.1.2 O teorema da amostragem . . . . .	13
2.1.3 A DFT . . . . .	15
2.2 Matrizes Toeplitz . . . . .	17
2.3 Matrizes Circulantes . . . . .	17
2.4 Matrizes de Diferenciação . . . . .	20
2.4.1 Diferenças Finitas . . . . .	20
2.4.2 Diferenciação Espectral . . . . .	21
2.5 A Transformada de Hilbert . . . . .	24
<b>3 Análise de Von Neumann</b>	<b>28</b>
3.1 A decomposição do erro . . . . .	29
3.2 O fator de amplificação . . . . .	32
3.3 Operadores em Diferenças . . . . .	33
3.4 A condição de Courant-Friedrichs-Lewy . . . . .	35
<b>4 Análise de Estabilidade</b>	<b>37</b>
4.1 Sistema Hiperbólico . . . . .	37
4.1.1 Semi discretização no espaço . . . . .	37
4.1.2 Integração temporal e análise de Von Neumann . . . . .	39
4.1.3 Discretização espacial . . . . .	40

---

4.2 Sistema Dispersivo . . . . .	44
<b>5 Conclusões</b>	<b>52</b>

# Lista de Figuras

1.1	Ondas internas no mar (Fonte: [Tom11, Figure 10.5]) . . . . .	3
1.2	Ondas internas na atmosfera (Fonte: [Tom11, Figure 10.8]) . . . . .	4
1.3	Configuração do sistema: 2-Fluidos (Figura cedida por A. Ruiz de Zárate)	5
2.1	Função $\text{sinc}(k)$ . . . . .	11
2.2	Malha uniforme . . . . .	15
2.3	Malha uniforme . . . . .	20
3.1	Representação das oscilações no intervalo $(-l, l)$ . . . . .	31
3.2	Região de estabilidade para o esquema numérico (3.6). . . . .	33
4.1	Polinômio $p(y)$ . . . . .	43
4.2	Função $\phi(x)$ definida em (4.43) . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das principais contribuições para a dinâmica de fluidos foi dada por Leonhard Euler (1707-1783). Utilizando a segunda lei de Newton, que estabelece que a variação da quantidade de movimento de uma porção de um fluido é igual resultante das forças externas que atuam em ele, Euler conseguiu estimar a aceleração de qualquer partícula do fluido. Tendo em consideração a lei de conservação de massa, em 1755, Euler estabeleceu as leis que regem o movimento de fluidos invíscidos, incompressíveis e homogêneos, as quais são de grande interesse prático em engenharia [Liñ07]. As equações de Euler na forma vetorial são dadas por:

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}, \\ \frac{D\rho}{Dt} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

com condição de contorno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_t,$$

sendo  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  um campo de velocidades,  $p$  é a pressão,  $\rho(t, \mathbf{x})$  é a densidade do fluido na posição  $\mathbf{x}$  e no instante  $t$ , onde consideramos uma porção do fluido que, num determinado instante  $t$ , ocupa a região  $\Omega_t$ . Sendo o fluido incompressível e homogêneo, satisfaz  $\partial\rho/\partial t = 0$  e  $\partial\rho/\partial x_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ , então  $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 > 0$  (cte). O operador  $D/Dt$ , dado por

$$\frac{D}{Dt} := \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

é conhecido como a derivada material.

É importante ressaltar que (1.1) são as equações de Navier-Stokes quando as componentes dissipativas são desprezíveis frente às convectivas ([GR11, pag. 5] ou [Váz03, pag. 99]). As equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos e incompressíveis (Vide [CM00, pag.

34)] são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

com condição de contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{em } \partial\Omega_t,$$

sendo  $\nu = \mu/\rho$  o coeficiente de viscosidade cinemático e  $\mu$  o coeficiente de viscosidade dinâmico.

A partir de agora vamos nos concentrar em um regime de dois fluidos e os modelos resultantes obtidos a partir das equações de Euler. Mas primeiro temos que falar sobre as ondas internas.

O que são as ondas internas?

As ondas internas são movimentos de ondas em fluidos de estratificação estável, onde o alcance máximo vertical do movimento ocorre na zona abaixo da interface, que está localizada entre as fronteiras (superfície ou fundo) do fluido. A principal força restauradora é a gravidade. As ondas internas são muito mais lentas e maiores do que as ondas externas observadas na superfície. Ondas internas também ocorrem na atmosfera (existente na corrente de ar descendo de uma montanha), e propagada como ondas ao longo de uma camada de inversão (camada de ar muito estável) [Chi89]. Se consideramos uma configuração de água não pura composta por uma camada superior e uma camada inferior mais densa, a interface entre as camadas pode sofrer movimento das ondas. Este é um exemplo de uma onda interna. A Figura 1.1 mostra ondas manifestações na superfície de ondas internas no estuário do rio Derwent, em Hobart, Tasmânia [Tom11]. O período dessas ondas foi de 20 minutos.



Figura 1.1: Ondas internas no mar (Fonte: [Tom11, Figure 10.5])

Ondas internas também podem ser observadas na atmosfera, onde eles viajam na interface entre o ar quente e frio. A Figura 1.2 mostra um padrão de nuvens produzidas por uma onda interna.

Outro exemplo, é dado em [dZ07] onde as ondas internas marinhas aparecem quando a



Figura 1.2: Ondas internas na atmosfera (Fonte: [Tom11, Figure 10.8])

concentração de sal e diferenças de temperatura no mar geram estratificação. Eles podem interagir com o fundo da topografia marinha e estruturas submersas, assim como as ondas da superfície. Em particular, na recuperação de petróleo em águas profundas do mar, as ondas internas podem afetar as operações "offshore" e estruturas submersas.

Modelos reduzidos são um primeiro passo na produção de métodos computacionais eficientes para resolver problemas de engenharia em oceanografia.

Na configuração de dois fluidos imiscíveis e irrotacionais, há modelos fortemente não-lineares de ordem superior que contam com precisão para a dispersão física das equações de Euler, especialmente em relação à camada inferior [CC99,dZ07,RdZ08]. Estamos interessados no regime que tem uma configuração de água rasa para a camada superior e uma profundidade intermediária para a camada inferior.

A necessidade de obter aproximações numéricas eficazes e a incapacidade relativa dos métodos analíticos para descrever de forma mais precisa o comportamento destas equações e suas soluções fizeram destas um dos principais motores da Análise Numérica. Os métodos que usaremos serão as diferenças finitas [Tho95] e a diferenciação espectral [Tre00] com domínio periódico. Por este motivo, é importante determinar a malha espacial intensificando os parâmetros do tempo a fim de garantir uma solução precisa e estável, a um custo computacional aceitável.

Os modelos obtidos em [CC99,dZ07,RdZ08] apresentam um termo dispersivo que envolve a transformada de Hilbert, causando dificuldades ao fazer uma análise do tipo numérico. Seja o seguinte modelo dispersivo fortemente não-linear em uma dimensão (na forma adimensional):

$$\begin{cases} \eta_t - ((1 - \eta)u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \eta_x &= \sqrt{\beta}(\rho_2/\rho_1)\mathcal{T}_\delta[((1 - \eta)u)_{xt}], \end{cases} \quad (1.3)$$

onde os índices  $x$  e  $t$  indicam as derivadas parciais. O Modelo (1.3) foi obtido em [CC99] a partir de uma redução assintótica das equações de Euler em uma configuração do sistema de dois fluidos tendo um fundo plano e uma tampa rígida na parte superior. A variável

$\eta(x, t)$  indica o deslocamento da interface e a variável  $u(x, t)$  indica a velocidade média da componente horizontal (na profundidade) na camada superior. A densidade é denotada por  $\rho_1$  para o fluido na parte superior e  $\rho_2$  para o fluido na parte inferior. Para uma estratificação estável, vamos considerar  $\rho_1 < \rho_2$ . A espessura da camada superior ( $h_1$ ) é delgada se comparada à longitude de onda característica  $L$  na interface. Assim, a camada superior está no regime de águas rasas ou pouco profundas e o parâmetro de dispersão adimensional  $\beta = (h_1/L)^2$  é pequeno. A espessura da camada inferior ( $h_2$ ) é comparável com o comprimento de onda característico, portanto, sob um regime da profundidade intermediária. Em (1.3) a velocidade da água rasa foi normalizado para um. A natureza dispersiva do sistema (1.3) surge de um termo não-local que envolve a transformada de Hilbert na faixa de espessura  $\delta = h_2/L$ :

$$\mathcal{T}_\delta[f](x) = \frac{1}{2\delta} \text{PV} \int f(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x} - x)\right) d\tilde{x} \quad (1.4)$$

e onde PV denota o valor principal de Cauchy.

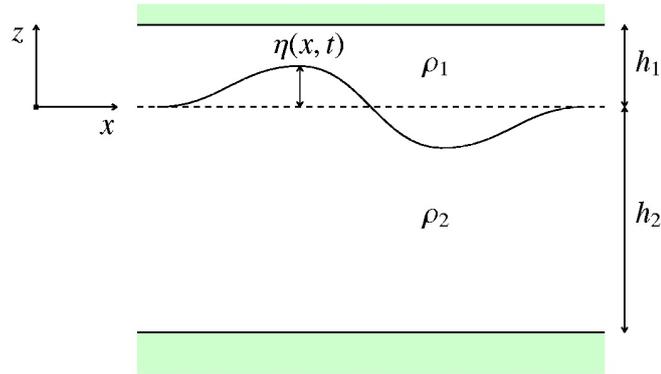


Figura 1.3: Configuração do sistema: 2-Fluidos (Figura cedida por A. Ruiz de Zárate)

Estudaremos a versão linearizada de (1.3),

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta \partial_x\right) u_x = \eta_x, \end{cases} \quad (1.5)$$

no caso particular onde as soluções  $u$  e  $\eta$  são periódicas no espaço com período  $2l$ . A discretização no tempo será realizada com o método Runge-Kutta de quarta ordem, enquanto a discretização espacial é feita pelos métodos de diferenças finitas e espectral. Também comparamos a estabilidade numérica linear do problema (1.5) com o sistema

hiperbólico obtido quando tomamos  $\beta = 0$  em (1.5), i.e.

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ u_x = \eta_x. \end{cases} \quad (1.6)$$

Esta dissertação é baseada no trabalho apresentado em [DAVN11] e está organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, fazemos uma revisão da Transformada de Fourier e de sua forma discreta. Ressaltamos a relação de um tipo especial de matrizes Toeplitz, as matrizes circulantes, com a transformada discreta de Fourier. Também ressaltamos a importância do teorema da amostragem para funções de banda limitada. Em seguida, vamos expor algumas matrizes associadas à aproximação das derivadas, denominadas matrizes de diferenciação. Aqui aparecerá uma função especial chamada de função sinc (ou função cardinal de Whittaker) a qual é muito importante já que a partir dela podemos reconstruir funções contínuas de banda limitada, a partir de amostras uniformemente espaçadas dessa função. Por último, introduzimos a Transformada de Hilbert, a qual devemos redefinir-la quando restringimos nosso problema para um domínio periódico para implementações numéricas.

No Capítulo 3, fazemos uma revisão do método de Von Neumann para a análise da estabilidade dos esquemas em diferenças finitas, inicialmente usando três exemplos de discretizações da equação de advecção, e em seguida generalizando na forma de um teorema. Finalizamos o capítulo com a Condição de Courant-Friedrichs-Lewy.

No Capítulo 4, fazemos a análise de estabilidade. Primeiro para um modelo mais simples do sistema (1.3), dado pelo sistema hiperbólico linear (1.3), onde se faz um estudo da discretização espacial e temporal, e em seguida para o sistema dispersivo linear (1.5) onde se faz uma adaptação do método Von Neumann e se enunciam e demonstram dois lemas que garantem a estabilidade das discretizações no espaço e no tempo do modelo hiperbólico e do modelo dispersivo. Um dos principais resultados mostrados é que a regularização física fornecida pelo termo dispersivo não-local presente em (1.5) permite as condições de estabilidade sejam menos restritivas.

No Capítulo 4, apresentamos as conclusões do trabalho e os possíveis trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Conceitos e resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos e os resultados principais que serão usados nesta dissertação, os quais tentamos expor de uma forma objetiva. Antes de começar, vamos esclarecer convenções e notações. Em todo o texto quando dizemos a FT de uma função  $f$ , queremos dizer que estamos calculando a transformada de Fourier da função  $f$ , quando dizemos a DFT, queremos dizer que estamos calculando a FT na sua forma discreta e por último quando dizemos a FS de uma função  $f$  se refere a expressar  $f$  como uma série de Fourier.

### 2.1 A FT, O Teorema da amostragem e a DFT

A FT e a FS são essenciais em muitas aplicações, por exemplo, em problemas físicos como a Dinâmica dos Fluidos que são descritos mediante equações diferenciais parciais. Para analisar uma função com estas ferramentas é necessário o conhecimento da função num intervalo periódico no caso da FS, e em toda a reta no caso da FT. Nas aplicações, as funções são medidas sobre conjuntos discretos de valores. Para analisar estas funções discretas, apresentaremos o conceito da DFT e o teorema da amostragem que foi descoberto por Claude Shannon em 1940.

#### 2.1.1 A FT

Assim como problemas periódicos em intervalos finitos leva às séries de Fourier, os problemas em toda reta real conduz às integrais de Fourier. Para entender essa relação, seja  $f$  uma função periódica, com período  $2l$ , integrável, absolutamente integrável e de classe  $C^1$  por partes definida no intervalo  $(-l, l)$ . Sua série de Fourier na forma complexa é dada

por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/l} \quad (2.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-in\pi y/l} dy$$

Note, que em  $c_n$  tanto o intervalo de integração quanto o integrando dependem de  $l$ . Se escrevermos  $\kappa_n = n\pi/l$ , para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , e substituirmos  $c_n$  na série (2.1) obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_l(\kappa_n) e^{i\kappa_n x},$$

sendo

$$\Delta\kappa = \frac{\pi}{l}$$

e

$$\hat{f}_l(\kappa) = \int_{-l}^l f(y) e^{-i\kappa y} dy.$$

**Definição 2.1.** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $Y = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e  $p \in [1, \infty)$ . Definimos  $\mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$  como*

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

**Definição 2.2.** *Seja  $Y = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita essencialmente limitada quando existe algum  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq r$  para quase todo  $x \in X$ , i.e.,  $|f| \leq r$  q.t.p.*

**Definição 2.3.** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $Y = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Definimos  $\mathcal{L}^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$  como*

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é mensurável e essencialmente limitada}\}.$$

Assim definidos,  $\mathcal{L}^p(X)$  e  $\mathcal{L}^\infty(X)$  são espaços vetoriais reais, respectivamente complexos, além disso

$$\|f\|_p = \left\{ \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}^p(X) \right\}$$

é uma semi-norma em  $\mathcal{L}^p(X)$  e

$$\|f\|_\infty = \inf\{r \geq 0 \mid |f| \leq r \text{ q.t.p.}\}, \quad f \in \mathcal{L}^\infty(X)$$

é uma semi-norma em  $\mathcal{L}^\infty(X)$ , a semi-norma do supremo essencial.

**Definição 2.4.** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $Y = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e  $p \in [1, \infty]$ . Definimos  $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$  como o quociente de  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$  pela relação de equivalência  $f \sim g \iff f = g$  q.t.p., i.e.,*

$$L^p(X) = \{[f] \mid f \in L^p\},$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X) \mid g = f \text{ q.t.p.}\}.$$

O espaço  $L^p(X)$  é um espaço de Banach para a norma

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad p \in [1, +\infty].$$

Dado  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , os seguintes limites existem:

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx, \quad e \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx,$$

onde  $M$  e  $N$  tendem independentemente para infinito (vide [dF87, pag. 196]). Seja  $(f_l)_{l \in \mathbb{R}^+}$  uma família de funções periódicas tais que  $f_l = f|_{[-l, l]}$ . Pode-se mostrar [dF87] que a família de funções  $(\hat{f}_l(\kappa))_{l \in \mathbb{R}^+}$  converge para

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\kappa y} dy$$

e que o seguinte limite existe

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \hat{f}_l(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_l(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa.$$

Em particular escolhendo a partição  $\kappa_n = n\Delta\kappa$  para a soma de Riemann,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa \sim \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_l(\kappa_n) e^{i\kappa_n x} \Delta\kappa.$$

Assim procedemos a dar a definição da transformada de Fourier de  $f(x)$ .

**Definição 2.5.** *Seja  $f$  uma função de  $L^1(\mathbb{R})$ . A FT de  $f$  é denotada por  $\hat{f}$  e definida como uma função de  $\kappa$ , sendo*

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\kappa x} dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

A transformada de Fourier  $\hat{f}(\kappa)$  de uma função  $f \in L^1(\mathbb{R})$  está bem definida para

todo  $\kappa \in \mathbb{R}$  e é uma função uniformemente contínua e limitada com  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$  (vide [IdMI10, pag. 170]).

**Proposição 2.1. (Lema de Riemann-Lebesgue).** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolutamente integrável e suponha que é seccionalmente contínua em cada intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Então  $\hat{f}(\kappa) \rightarrow 0$  quando  $|\kappa| \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Vide [IdMI10, pag. 171]. □

**Definição 2.6. (Espaço de Schwartz).** *O espaço de Schwartz ou espaço das funções de decaimento rápido, denotado por  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , é a coleção das  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  e*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^k D^\alpha f(x) = 0$$

quaisquer que sejam  $k, \alpha \in \mathbb{N}$ , onde  $D^\alpha$  denota a derivada de ordem  $\alpha$ .

Podemos reconstruir  $f$  a partir de  $\hat{f}(\kappa)$  usando fórmula da inversa da transformada de Fourier. Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então vale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

**Definição 2.7. (Espaço de Sequências).** *Seja  $p \in [1, +\infty)$ . Definimos  $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z})$  como*

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ \mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^p < \infty \right\},$$

com norma

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

O espaço  $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z})$  é definido como

$$\ell^\infty = \left\{ \mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| < +\infty \right\},$$

com norma

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|.$$

Assim definidos,  $\ell^p$  e  $\ell^\infty$  são espaços de Banach.

**Definição 2.8. (Transformada Semidiscreta de Fourier).** *Seja  $f \in \ell^2$ . Definimos a transformada semidiscreta de Fourier (SFT) como*

$$\hat{f}(\kappa) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{-i\kappa x_j}, \quad \kappa \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x], \quad (2.4)$$

sendo  $x_j = j\Delta x$ ,  $f_j = f(x_j)$ ,  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

Podemos reconstruir  $f$  a partir de  $\hat{f}$  usando fórmula da inversa de (2.4)

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x_j} d\kappa, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Esta é a síntese de Fourier. A variável  $x$  é a variável física e  $\kappa$  é a variável de Fourier ou número de onda.

**Exemplo 2.1.** Se a função  $R(x)$  é definida da seguinte maneira

$$R(x) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{Se } |x| < \pi, \\ 0 & \text{Se } |x| \geq \pi, \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \hat{R}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{e^{-i\pi k} - e^{i\pi k}}{-2i\pi k} \\ &= \frac{\sin \pi k}{\pi k}. \end{aligned}$$

A FT da função  $R$  é portanto a função sinc.

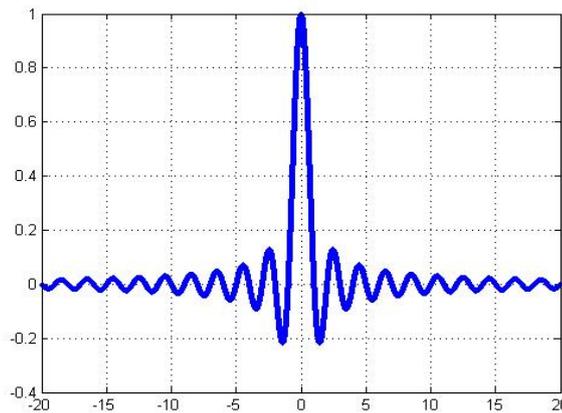


Figura 2.1: Função sinc( $k$ )

**Teorema 2.2.** Seja  $\mathcal{F}$  a operação transformada de Fourier, i.e.,  $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}$ . Tem-se as seguintes propriedades:

(i) **Linearidade:** Para  $a$  e  $b$  números complexos quaisquer tem-se,

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(\kappa) + b\hat{g}(\kappa).$$

(ii) **Extensão e Compressão:** Para cada constante  $\rho > 0$  tem-se,

$$f\left(\frac{x}{\rho}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \rho\hat{f}(\rho\kappa) \quad e \quad f(\rho x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho}\hat{f}\left(\frac{\kappa}{\rho}\right).$$

(iii) **Deslocamento:** Para cada constante real  $c$  tem-se,

$$f(x - c) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa)e^{-i\kappa c}.$$

(iv) **Modulação:** Para cada constante real  $c$  tem-se,

$$f(x)e^{icx} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa - c).$$

(v) **Derivação:** Para todo  $n \geq 0$  tem-se,

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\kappa)^n \hat{f}(\kappa).$$

(vi) **Convolução:**

$$(f * g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa)\hat{g}(\kappa).$$

**Demonstração:** (i) aplicação direta da definição. (ii) precisamos fazer uma mudança de variáveis  $s = x/\rho$  na FT, i.e.,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\rho}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\rho}\right) e^{-2\pi i\kappa x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi i\kappa(\rho s)} d(\rho s) \\ &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi i(\rho\kappa)s} ds \\ &= \rho\hat{f}(\rho\kappa). \end{aligned}$$

Assim,  $f(x/\rho) \xrightarrow{\mathcal{F}} \rho\hat{f}(\rho\kappa)$ . Substituindo  $1/\rho$  em lugar de  $\rho$ ,  $f(\rho x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/\rho)\hat{f}(\kappa/\rho)$ , e o item (ii) é verificado. (iii) só precisamos fazer uma mudança de variáveis  $s = x - c$ . (iv) so precisamos ter em consideração que  $e^{-2\pi i c x} e^{-2\pi i \kappa x} = e^{-2\pi i(\kappa - c)x}$ . (v) e (vi) vide [Asm04, pag. 401-404].  $\square$

**Exemplo 2.2.** *Seja a função  $\delta$  de Dirac definida como:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

a qual satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Pela propriedade (3) de deslocamento sabemos que  $\delta(x - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia\kappa} \hat{\delta}(\kappa)$ . Portanto temos que

$$\frac{1}{2}(\delta(x + a) + \delta(x - a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \cos(a\kappa) \hat{\delta}(\kappa).$$

### 2.1.2 O teorema da amostragem

O teorema da amostragem é um resultado importante que estabelece que algumas funções em particular podem ser reconstruídas perfeitamente a partir de um conjunto discreto de amostras colhidas em intervalos iguais. Agora vamos definir um tipo de funções em relação a (1.1).

**Definição 2.9.** *Seja  $f(x)$  uma função com FT  $\hat{f}(\kappa)$ . A função  $f(x)$  é chamada de banda limitada se existe um  $W$  finito e positivo, chamado de largura de banda, tal que  $\hat{f}(\kappa) = 0$ , para todo  $|\kappa| > W$ .*

**Exemplo 2.3.** *A função  $f(x) = \sin(x)/x$  é uma função de banda limitada pois*

$$\hat{f}(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\kappa| < \pi, \\ 1/2 & \text{se } |\kappa| = \pm\pi, \\ 0 & \text{se } |\kappa| > \pi, \end{cases}$$

sendo  $W = \pi$ .

**Teorema 2.3 (Teorema da amostragem para funções de banda limitada).** *Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  é uma função de banda limitada com largura de banda  $W$ , então para todo  $x$  tem-se*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right) \text{sinc}(Wx - n\pi). \quad (2.6)$$

Assim,  $f$  pode ser reconstruída completamente de sua amostra de valores  $f\left(\frac{n\pi}{W}\right)$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$

**Demonstração:** Como  $\hat{f}(\kappa) = 0$  para todo  $|\kappa| > W$ , temos pela inversa da FT

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa \quad (2.7)$$

além disso podemos estender  $\hat{f}$  periodicamente (com período  $2W$ ) sobre o eixo  $\kappa$  e representar  $\hat{f}$  usando as séries de Fourier, i.e.,

$$\hat{f}(\kappa) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{in\pi\kappa/W} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_{-n} e^{-in\pi\kappa/W} \quad (2.8)$$

usando a definição dos coeficientes de Fourier (1.1)

$$\tilde{c}_{-n} = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \hat{f}(\kappa) e^{in\pi\kappa/W} d\kappa = \frac{2\pi}{2W} f\left(\frac{n\pi}{W}\right)$$

sabendo que

$$\frac{1}{2W} \int_{-W}^W e^{-in\pi\kappa/W} e^{i\kappa x} d\kappa = \frac{\sin(Wx - n\pi)}{(Wx - n\pi)} \quad (2.9)$$

assim, inserindo (2.8) e (2.9) em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_{-n} e^{-in\pi\kappa/W} \right] e^{i\kappa x} d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{2W} f\left(\frac{n\pi}{W}\right) e^{-in\pi\kappa/W} \right] e^{i\kappa x} d\kappa \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right) \left[ \frac{1}{2W} \int_{-W}^W e^{-in\pi\kappa/W} e^{i\kappa x} d\kappa \right], \end{aligned}$$

podemos inserir a integral na somatória pois a FS de  $\hat{f}$  converge na norma  $L^2(-W, W)$ , considerando o produto interno desta série com  $e^{i\kappa x}$  (vide [Fol92, pag. 231]). Portanto

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right) \frac{\sin(Wx - n\pi)}{Wx - n\pi}.$$

□

**Teorema 2.4 (Teorema da amostragem para funções de tempo limitado).** *Suponhamos que  $f(t) = 0$  para todo  $t > T$ , então para todo  $k$  tem-se*

$$\hat{f}(\kappa) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{T}\right) \operatorname{sinc}(T\kappa - n\pi).$$

Assim,  $f$  pode ser reconstruída completamente de sua amostra de valores  $f\left(\frac{n\pi}{T}\right)$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$

**Demonstração:** Análoga ao teorema 1, trocando  $f$  por  $\hat{f}$ . □

### 2.1.3 A DFT

Para a DFT, agora, tanto  $x$  quanto  $\kappa$  são variáveis periódicas definidas num domínio discreto ilimitado. O domínio espacial fundamental que consideraremos será o intervalo  $[0, 2\pi]$  sem perda de generalidade. Sejam  $N$  um inteiro positivo par,  $\Delta x = x_{j+1} - x_j = h$  e

$$\Delta x = \frac{2\pi}{N}.$$

Definamos  $x_j = j\Delta x$  para qualquer  $j$ . Assim, a malha de pontos de nosso domínio fundamental é  $x_1 = \Delta x, \dots, x_{N-1} = 2\pi - \Delta x, x_N = 2\pi$ .

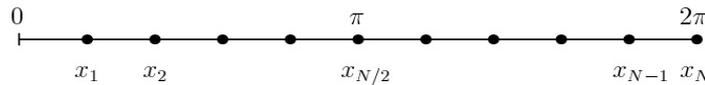


Figura 2.2: Malha uniforme

Uma igualdade que devemos lembrar daqui em diante é dada por:

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{N}. \quad (2.10)$$

O quociente  $\pi/\Delta x$  vai aparecer no capítulo 4 devido a que  $[-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$  é o intervalo dos números de onda distinguíveis na malha. Se consideramos a FT nos  $N$  pontos da malha, o espaçamento na malha  $\Delta x$  implica que os números de onda diferindo por um múltiplo inteiro de  $2\pi/\Delta x$  são indistinguíveis na malha, assim é suficiente centrar nossa atenção para  $\kappa \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$ . Seja  $\ell_N^2$  o conjunto das funções definidas sobre  $\{x_j\}$  ("grid functions" [Tre00, pag. 11]) que são  $N$ -periódicas com respeito a  $j$ , i.e.,  $2\pi$ -periódicas com respeito a  $x$ , com a norma

$$\|v\|_{\Delta x} = \left[ \Delta x \sum_{j=1}^N |v_j|^2 \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

Como a soma é finita, a norma é finita, Assim, toda função do tipo exigido é garantida a pertencer a  $\ell_N^2$ . Assim procedemos a dar a definição da DFT.

**Definição 2.10.** *Seja  $v \in \ell_N^2$ . A DFT de  $v$  é denotada por  $\hat{v}$  e definida como sendo*

$$\hat{v}_k = \Delta x \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} v_j, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (2.12)$$

Neste caso, a inversa da DFT é dada pela seguinte fórmula

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

Podemos escrever a DFT e sua inversa na forma matriz - vetor da seguinte maneira: sejam  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T$ ,  $\beta_j = j - N/2$ ,  $\theta_k = 2\pi k/N$  e  $F$  é uma matriz  $N \times N$  com entradas  $F_{j,k} = e^{-i\beta_j \theta_k}$ , para  $j, k = 1, \dots, N$ , i.e.,

$$F = \begin{bmatrix} e^{-i\beta_1 \theta_1} & e^{-i\beta_1 \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_1 \theta_{N-1}} & 1 \\ e^{-i\beta_2 \theta_1} & e^{-i\beta_2 \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_2 \theta_{N-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{-i\beta_N \theta_1} & e^{-i\beta_N \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_N \theta_{N-1}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Assim, a DFT é

$$\hat{\mathbf{v}} = \Delta x F \mathbf{v}, \quad (2.15)$$

e a inversa da DFT é

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \overline{F}^T \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.16)$$

Temos que a matriz  $F$  é simétrica, suas colunas são ortogonais dois a dois e tem norma igual a  $\sqrt{N}$ , i.e., a matriz  $\frac{1}{\sqrt{N}} F$  é unitária, a inversa de  $F$  é  $\frac{1}{\sqrt{N}} \overline{F}^T$ . De fato, representemos  $F$  da seguinte maneira

$$F = [\mathbf{F}^{(1)} | \mathbf{F}^{(2)} | \dots | \mathbf{F}^{(N)}]$$

sendo  $\mathbf{F}^{(s)}$  as colunas de  $F$ , para  $s = 1, \dots, N$ , logo, as entradas do vetor  $\mathbf{F}^{(s)}$  são dadas por  $e^{-i(k-N/2)\theta_s}$ , para  $k = 1, \dots, N$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle &= \overline{\mathbf{F}^{(s)}}^T \mathbf{F}^{(p)} \\ &= \sum_{k=1}^N e^{i(k-\frac{N}{2})(\theta_p - \theta_s)}, \end{aligned}$$

de onde temos dois casos: se  $p = s$ , então  $\langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle = N$  e se  $p \neq s$ , então

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle &= \sum_{k=1}^N e^{i(k-\frac{N}{2})\frac{2\pi}{N}(p-s)} \\
&= \sum_{k=1}^N e^{ik\frac{2\pi}{N}(p-s)} e^{-i\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}(p-s)} \\
&= (-1)^{p-s} \left( \sum_{k=0}^N e^{ik\frac{2\pi}{N}(p-s)} - 1 \right) \\
&= (-1)^{p-s} \left( \frac{1 - [e^{i2\pi/N(p-s)}]^{N+1}}{1 - e^{i2\pi/N(p-s)}} - 1 \right) \\
&= (-1)^{p-s} \left( \frac{1 - e^{i2\pi/N(p-s)}}{1 - e^{i2\pi/N(p-s)}} - 1 \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alem disso a DFT de  $v$  é única.

## 2.2 Matrizes Toeplitz

As matrizes Toeplitz surgem nas soluções de equações diferenciais e integrais, funções spline, problemas e métodos em física, matemática, estatística e processamento de sinais.

**Definição 2.11.** *Seja  $T_N$  uma matriz quadrada  $N \times N$ . Se diz que  $T_N$  é uma matriz Toeplitz se,  $T_N = [t_{kj}; k, j = 1, \dots, N]$  sendo*

$$t_{kj} = \begin{cases} t_{k-(j+1)} & \text{se } k \leq j, \\ t_{k+1-j} & \text{se } k > j, \end{cases}$$

*i.e., uma matriz da forma*

$$T_N = \begin{bmatrix} t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & \cdots & t_{-N} \\ t_2 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(N-1)} \\ t_3 & t_2 & t_{-1} & \cdots & t_{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_N & t_{N-1} & t_{N-2} & \cdots & t_{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

## 2.3 Matrizes Circulantes

Um caso especial das matrizes Toeplitz (o que resultará em uma importante simplificação e desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de resultado mais gerais) são

as matrizes circulantes, a seguir sua definição.

**Definição 2.12.** *Uma matriz quadrada  $N \times N$ .  $C_N$  é chamada de circulante se cada uma de suas linhas é obtida por uma mudança cíclica na posição da linha anterior, i.e.,  $t_k = t_{-k}$ , para  $k = 1, \dots, N$ .*

Neste caso

$$C_N = \begin{bmatrix} t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & \cdots & t_{-N} \\ t_{-N} & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(N-1)} \\ t_{-(N-1)} & t_{-N} & t_{-1} & \cdots & t_{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-2} & t_{-3} & t_{-4} & \cdots & t_{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

As matrizes circulantes se geram, por exemplo, em aplicações envolvendo a transformada discreta de Fourier (DFT). Assim uma matriz circulante  $C$  é uma matriz Toeplitz da seguinte maneira

$$C_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_N \\ c_N & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_N & c_1 & \cdots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde cada linha é uma mudança cíclica da linha anterior, sua estrutura também pode ser caracterizada notando que a entrada  $(k, j)$  de  $C$ ,  $C_{k,j}$  é dada por

$$C_{k,j} = c_{(j-k+1) \bmod N}.$$

Os autovalores  $\lambda_k$  e autovetores  $\boldsymbol{\nu}^{(k)}$  da matriz circulante  $C$ , são as soluções de

$$C\boldsymbol{\nu} = \lambda\boldsymbol{\nu}$$

ou, equivalentemente de um sistema de  $N$  equações de diferenças

$$\sum_{k=1}^{m-1} c_{N+1-m+k} \nu_k + \sum_{k=m}^N c_{k+1-m} \nu_k = \lambda \nu_m$$

para  $m = 1, \dots, N$ . Trocando os índices resulta em

$$\sum_{k=N+2-m}^N c_k \nu_{k-(N-m+1)} + \sum_{k=1}^{N+1-m} c_k \nu_{k-1+m} = \lambda \nu_m. \quad (2.20)$$

Como a equação é linear com coeficientes constantes é uma suposição razoável considerar  $\nu_k = \rho^{-N/2+k}$ , sendo  $N$  um número par (análogo ao  $y(t) = e^{st}$ , em equações diferenciais

ordinárias lineares invariantes no tempo). Substituindo em (2.20) obtemos

$$\rho^{-N} \sum_{k=N+2-m}^N c_k \rho^{k-1} + \sum_{k=1}^{N+1-m} c_k \rho^{k-1} = \lambda,$$

considerando  $\rho^N = 1$ , i.e.,  $\rho$  é uma das raízes complexas da unidade, então obtemos um autovalor

$$\lambda = \sum_{k=1}^N c_k \rho^{k-1}$$

com correspondente autovetor normalizado

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{N}} [\rho^{-N/2+1}, \rho^{-N/2+2}, \rho^{-N/2+3}, \dots, \rho^{N/2}]^T,$$

escolhendo  $\rho_m$  como a  $N$ -ésima raiz da unidade,  $\rho_m = e^{-2\pi im/N}$ , obtemos o autovalor

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^N c_k e^{-\frac{2\pi i(k-1)m}{N}} \quad (2.21)$$

e o autovetor

$$\boldsymbol{\nu}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{N}} [e^{-2\pi i(-N/2+1)m/N}, e^{-2\pi i(-N/2+2)m/N}, \dots, e^{-2\pi i(N/2)m/N}]^T.$$

Assim, da definição de autovalores e autovetores temos

$$C\boldsymbol{\nu}^{(m)} = \lambda_m \boldsymbol{\nu}^{(m)} \quad (2.22)$$

para  $m = 1, \dots, N$ . Assim, os autovalores de uma matriz circulante compreendem a DFT da primeira linha da matriz circulante e, reciprocamente, a primeira linha de uma matriz circulante é a DFT inversa de seus autovalores.

Podemos escrever (2.22) como sendo

$$CV = V\Lambda \quad (2.23)$$

sendo  $V = [\boldsymbol{\nu}^{(1)} | \boldsymbol{\nu}^{(2)} | \dots | \boldsymbol{\nu}^{(N)}]$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ . Da definição de ortogonalidade no sentido complexo, i.e.

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi imk/N} = \begin{cases} N, & k \bmod N = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

se conclui que  $V$  é unitária, portanto  $C$  é unitariamente similar a uma matriz diagonal.

Assim mostramos o seguinte teorema.

**Teorema 2.5.** *Toda matriz circulante  $C$  tem autovetores*

$$\boldsymbol{\nu}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{N}} [e^{-2\pi i(-N/2+1)m/N}, e^{-2\pi i(-N/2+2)m/N}, \dots, e^{-2\pi i(N/2)m/N}]^T,$$

e correspondentes autovalores

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^N c_k e^{-2\pi i m(k-1)/N},$$

para  $m = 1, \dots, N$ , e pode ser expressa na forma  $C = V\Lambda\bar{V}^T$ , onde  $V$  tem os autovetores como colunas e  $\Lambda$  é diag  $(\lambda_k)$ . Em particular, todas as matrizes circulantes tem os mesmos autovetores, a mesma matriz  $V$  trabalha para todas as matrizes circulantes e qualquer matriz da forma  $C = V\Lambda\bar{V}^T$  é circulante.

**Observação 2.1.** Temos que  $V = \frac{1}{\sqrt{N}}F$ , de modo que  $NC = F\Lambda\bar{F}^T$ .

## 2.4 Matrizes de Diferenciação

### 2.4.1 Diferenças Finitas

Consideremos uma malha uniforme  $x_1, \dots, x_N$  com  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  e  $u(x_j) = u_j$  para cada  $j$ , i.e.,



Figura 2.3: Malha uniforme

Seja  $w_j \approx u'(x_j)$ , a derivada de  $u$  em  $x_j$ . A aproximação por diferenças finitas centrais de segunda ordem e quarta ordem são dadas por

$$w_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (2.24)$$

$$w_j = \frac{8(u_{j+1} - u_{j-1}) + (u_{j+2} - u_{j-2})}{12\Delta x} \quad (2.25)$$

que são obtidas considerando a série de Taylor de  $u(x_{j+2})$ ,  $u(x_{j+1})$ ,  $u(x_{j-1})$  e  $u(x_{j-2})$  respectivamente. Por simplicidade, vamos supor que o problema é periódico e consideramos  $u_0 = u_N$ ,  $u_1 = u_{N+1}$  e  $u_2 = u_{N+2}$ . Vamos representar (2.24) e (2.25) como uma

multiplicação matriz - vetor

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & & & -1/2 \\ -1/2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & & & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} & & \ddots & & 1/12 & -2/3 \\ & & \ddots & -1/12 & \ddots & 1/12 \\ & & \ddots & 2/3 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -2/3 & \ddots & \\ -1/12 & & & 1/12 & \ddots & \\ 2/3 & -1/12 & & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

As matrizes que aparecem em (2.26) e (2.27) são exemplos de matrizes de diferenciação, as quais têm uma aproximação de ordem 2 e 4, i.e., para um conjunto de mostras  $\{u_j\}$  obtidas a partir de uma função  $u$  suficientemente suave, a correspondente aproximação discreta para  $u'(x_j)$  vai convergir com taxas de  $O(h^2)$  e  $O(h^4)$  respectivamente.

## 2.4.2 Diferenciação Espectral

Seja  $v$  uma função periódica de período  $2\pi$ . Associamos a  $v$  o vetor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$  definido por  $v_j = v(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Além disso, seja  $\hat{\mathbf{v}}$  o vetor correspondente à DFT de  $\mathbf{v}$  de acordo com a equação (2.12) e (2.13)

$$[v_1, v_2, \dots, v_N]^T \xrightarrow{DFT} [\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T,$$

$$[\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T \xrightarrow{(DFT)^{-1}} [v_1, v_2, \dots, v_N]^T.$$

Para a diferenciação espectral da função periódica  $v$  precisamos de um interpolante de banda limitada de  $\mathbf{v}$ , o qual é obtido da equação (2.13) para todo  $x$  em vez de apenas  $x$  na malha, Para isto, consideramos  $\hat{v}_{-N/2} = \hat{v}_{N/2}$  e substituímos (2.13) por

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.28)$$

onde a prima indica que os termos  $k = \pm N/2$  são multiplicados por  $1/2$ . Nosso interpolante  $p(x)$  é

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} 'e^{ikx} \hat{v}_k, \quad x \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]. \quad (2.29)$$

Seja  $\delta_j$  a delta de Kronecker periódica:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & j \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Em geral, podemos expandir  $v$  como uma combinação linear de deltas de Kronecker trasladadas, i.e.,

$$v_j = \sum_{m=1}^N v_m \delta_j^{(m)}, \quad (2.31)$$

sendo  $\delta_j^{(m)} = \delta_{j-m}$ . Vamos calcular o interpolante de banda limitada da delta de Kronecker, que vamos denotar por  $S_N(x)$ . De (2.12) e (2.30), obtemos que  $\hat{\delta}_k = \Delta x$  para cada  $k$ . Assim,

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} 'e^{ikx} \hat{\delta}_k \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} 'e^{ikx} \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{ikx} + \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx} \right) \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \left( \frac{1}{2} e^{-ix} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{i(k+1/2)x} + \frac{1}{2} e^{ix} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{i(k-1/2)x} \right) \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos(x/2) \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{i(k+1/2)x} \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos(x/2) \frac{e^{i(-N/2+1/2)x} - e^{i(N/2+1/2)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos(x/2) \frac{e^{-i(N/2)x} - e^{i(N/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos(x/2) \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

usando a identidade (2.10) , concluímos que o interpolante de banda limitada para  $\delta$  é a *função periódica*

$$S_N(x) = \frac{\sin(\pi x/\Delta x)}{(2\pi/\Delta x) \tan(x/2)}. \quad (2.32)$$

Temos que o interpolante da delta de Kronecker transladada  $\delta^{(m)}$  é  $S_N(x - x_m)$ . Assim, segue de (2.31) e (2.32) que o interpolante de  $v$  com banda limitada é dado por

$$p(x) = \sum_{m=1}^N v_m S_N(x - x_m), \quad (2.33)$$

com derivada

$$w_j = p'(x_j) = \sum_{m=1}^N v_m S'_N(x_j - x_m). \quad (2.34)$$

Sabendo que

$$S'_N(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{\Delta x} \cos(\pi x/\Delta x) - \frac{1}{2} \sin(\pi x/\Delta x) \sec^2(x/2)}{2\pi \Delta x \tan^2(x/2)} & x \in (0, 2\pi], \\ 0 & x = 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

obtemos

$$S'_N(x_j) = \begin{cases} 0 & j \equiv 0 \pmod{N}, \\ \frac{(-1)^j \cot(j\Delta x/2)}{2} & j \not\equiv 0 \pmod{N}, \end{cases} \quad (2.36)$$

logo (2.35) e (2.36) em (2.34) e obtemos nossa matriz de diferenciação espectral

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\frac{\cot(1\Delta x/2)}{2} \\ -\frac{\cot(1\Delta x/2)}{2} & \dots & & & \frac{\cot(2\Delta x/2)}{2} \\ \frac{\cot(2\Delta x/2)}{2} & & \dots & & -\frac{\cot(3\Delta x/2)}{2} \\ -\frac{\cot(3\Delta x/2)}{2} & & & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \dots & \frac{\cot(1\Delta x/2)}{2} \\ \frac{\cot(1\Delta x/2)}{2} & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

## 2.5 A Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert  $\mathcal{H}$  de uma função  $f(x)$  é usualmente definida como sendo a convolução desta com  $1/\pi x$  (Vide [Pou09, 7.2]), i.e.,

$$\mathcal{H}[f](x) = f(x) * \frac{1}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds$$

É claro que a transformada de Hilbert é um operador linear, além disso é uma integral imprópria, já que para  $s = x$  o integrando tem uma singularidade. Para solucionar este problema calculamos a integral de forma simétrica em torno de  $s = x$ , de acordo com a seguinte equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x-1/\epsilon}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{s-x} ds + \int_{x+\epsilon}^{x+1/\epsilon} \frac{f(s)}{s-x} ds$$

que não é outra coisa que a definição do valor principal de Cauchy (PV), assim procedemos a dar a definição da transformada de Hilbert.

**Definição 2.13. (Transformada de Hilbert)** *Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . A transformada de Hilbert de  $f$  é denotada como  $\mathcal{H}[f]$  e é definida como*

$$\mathcal{H}[f](x) = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int \frac{f(s)}{s-x} ds. \quad (2.38)$$

É necessário redefinir a transformada de Hilbert na faixa, dada pela equação (1.4), que é diferente da equação (2.38). Tendo em vista (1.3), vamos relembrar a definição do operador  $\mathcal{T}_\delta$  definido em (1.4):

**Definição 2.14.** *A transformada de Hilbert de  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  na faixa de espessura  $\delta$  é definida como*

$$\mathcal{T}_\delta[g](x) = \frac{1}{2\delta} \text{PV} \int g(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x}-x)\right) d\tilde{x}.$$

Devido à definição não local da transformada de Hilbert na faixa é necessário redefiní-la quando restringimos nosso problema para um domínio periódico para implementações numéricas. Para esse efeito, temos em mente sua interpretação geométrica, ou seja, o operador que transforma a derivada normal da função harmônica na fronteira na derivada tangencial na fronteira.

Seguindo [dZ07], considere o seguinte problema para  $x$  periódico em  $[0, 2l]$

$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, & -\delta < z < 0, 0 < x < 2l, \\ \Phi(0, z) = \Phi(2l, z), \\ \Phi_z(x, 0) = g(x), \\ \Phi_z(x, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Seja  $\tilde{x} = \pi x/l$ . Nas novas coordenadas  $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, z) = \Phi(x, z)$  satisfaz

$$\begin{cases} (\pi/l)^2 \tilde{\Phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\Phi}_{zz} = 0, & -\delta < z < 0, 0 < \tilde{x} < 2\pi, \\ \tilde{\Phi}(0, z) = \tilde{\Phi}(2\pi, z), \\ \tilde{\Phi}_z(\tilde{x}, 0) = \tilde{g}(\tilde{x}), \\ \tilde{\Phi}_z(\tilde{x}, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Consideremos agora a série de Fourier em  $\tilde{x} \in [0, 2\pi]$  na forma complexa (vide [IdMI10, pag. 51])

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(k) e^{ik\tilde{x}}, \quad (2.41)$$

com coeficientes dados por

$$\hat{h}(k) = \int_0^{2\pi} \tilde{h}(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x}.$$

Agora, aplicando (2.41) para solucionar (2.40)

$$\begin{cases} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \hat{\Phi} + \hat{\Phi}_{zz} = 0, & -\delta < z < 0 \\ \hat{\Phi}_z(k, 0) = \hat{g}(k), \\ \hat{\Phi}_z(k, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

A solução para o problema (2.42) é

$$\hat{\Phi}(k, z) = \begin{cases} \frac{\hat{g}(k) \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\pi k/l \sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} & k \neq 0, \\ \hat{g}(0) \left[\frac{1}{\delta}z + 1\right] & k = 0, \end{cases}$$

logo, usando (2.41)

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tilde{x}, z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(k, z) e^{ik\tilde{x}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{\pi k/l} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ik\tilde{x}} + \frac{\hat{\Phi}(0, z)}{2\pi},\end{aligned}$$

com convergência uniforme em  $0 < \tilde{x} < 2\pi$  e também em  $-\delta < z < 0$  devido a

$$\left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} \right| \leq \left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} \right| \leq \left| \coth\left(\frac{\pi}{l}\delta\right) \right|, \quad (2.43)$$

para todo inteiro  $k \neq 0$ .

Agora precisamos  $\Phi_x$ , voltando à variável original

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{\pi k/l} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l} + \frac{\hat{g}(0)}{2\pi} \left[ \frac{1}{\delta} z + 1 \right], \quad (2.44)$$

calculando a derivada de  $\Phi$  com respeito a  $x$

$$\Phi_x(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{i \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l}.$$

Fazendo  $z \rightarrow 0$  obtemos a derivada tangencial na fronteira

$$\Phi_x(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{i \cosh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l}.$$

A qual possui convergência uniforme devido a (2.43). Portanto, a transformada de Hilbert na faixa em  $[0, 2\pi]$  é dada por

$$\mathcal{T}_{[0, 2\pi]}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} i \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{ik\pi x/l} \hat{g}(k). \quad (2.45)$$

Note que

$$\hat{g}(k) = \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{\pi}{l} \int_0^{2l} g(x) e^{-ik\pi x/l} dx. \quad (2.46)$$

É também importante escrever a composição da derivada espacial com a transformada de

Hilbert na faixa  $\mathcal{T}_{[0,2l]}[\cdot]$  porque ela aparece no modelo dispersivo (1.5)

$$\mathcal{T}_{[0,2l]}[g]_x(l\tilde{x}/\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{ik\tilde{x}} \hat{g}(k). \quad (2.47)$$

No domínio discreto  $e^{ikj\Delta\tilde{x}} = e^{ikj2\pi/N}$  de modo que não faz diferença para  $k = k_0 \bmod N$ . Finalmente, para a discretização de nosso domínio periódico (ignorando o efeito do aliasing) temos

$$\mathcal{T}_{[0,2l]}[g]_x(x_j) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{ik\tilde{x}_j} \hat{g}_k, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.48)$$

onde  $\hat{g}_k$  é uma aproximação de  $\hat{g}(k)$  pela DFT

$$\hat{g}(k) \approx \hat{g}_k = \Delta\tilde{x} \sum_{j=1}^N \tilde{g}(\tilde{x}_j) e^{-ik\tilde{x}_j}.$$

## Capítulo 3

# Análise de Von Neumann

Demonstrar que um esquema numérico é estável utilizando apenas a definição de estabilidade [Sod85] é bastante difícil. Em geral, a análise de estabilidade para problemas lineares com coeficientes constantes é mais simples com as ferramentas da análise de Von Neumann (ou análise de Fourier), para avaliar a estabilidade destes esquemas se as condições de contorno podem ser negligenciadas ou retiradas [Hir94, pag 267]. Este é o caso tanto para um domínio infinito ou para condições periódicas num domínio finito. Neste último caso, se considera que o comprimento  $l$  sobre o eixo  $x$  (domínio numérico) é repetido periodicamente, por isso, todas as quantidades, a solução, os erros podem ser desenvolvidos em uma série de Fourier finita do domínio  $2l$ . Este desenvolvimento é a base para a análise de estabilidade de von Neumann. Considere a seguinte equação hiperbólica (advecção):

$$u_t + au_x = 0, \quad (3.1)$$

onde  $u$  é uma função de  $x$  e  $t$ ,  $a$  é velocidade da onda ou velocidade de advecção e suponha  $a > 0$ , com condições de contorno

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t), & 0 \leq x \leq l, \\ u(x, 0) = f(x), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Vamos considerar uma malha uniforme no espaço  $x_1, \dots, x_N$  com  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  e  $u(x_i) = u_i$  para cada  $i$ . Utilizando o método de diferenças finitas centradas de segunda ordem

$$(u_t)_i = -\frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (3.3)$$

agora, fazendo uma discretização no tempo com uma malha uniforme, utilizando o método de diferenças finitas (Forward) em (3.3) obtemos o seguinte esquema explícito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n). \quad (3.4)$$

Seguindo [Hir94, pg 271] obtemos outros esquemas numéricos

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), \quad (3.5)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{a}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (3.6)$$

### 3.1 A decomposição do erro

Sejam  $\bar{u}_i^n$  e  $u_i^n$  as soluções da equação de diferenças (3.4) com e sem presença a erros nos dados iniciais e erros de arredondamento, respectivamente. Podemos escrever a relação entre  $\bar{u}_i^n$  e  $u_i^n$  da seguinte forma:

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \epsilon_i^n \quad (3.7)$$

onde  $\epsilon_i^n$  indica o erro com relação ao tempo  $n$  no ponto  $i$  da malha. A fim de apresentar os conceitos básicos do método de Von Neumann, serão feitas para as equações em diferenças (3.4), (3.5) e (3.6). Substituindo (3.7) em (3.4) e supondo que  $u_i^n$  e  $\bar{u}_i^n$  satisfazem (3.4) obtemos

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\Delta t} = -\frac{a}{2\Delta x}(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n). \quad (3.8)$$

e portanto, os erros  $\epsilon_i^n$  também são soluções da equação (3.4). Assim os erros variam ao longo do tempo da mesma maneira que a solução numérica  $u_i^n$ . Os erros não devem crescer indefinidamente, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\epsilon_i^n| \leq K \quad (3.9)$$

$K$  é independente de  $n$ . A condição de estabilidade (3.9) é um requisito puramente numérico, mas análogo à condição de que a solução de um problema de valor inicial e de contorno bem posto depende continuamente dos dados iniciais. Esta condição garante que o erro não vai ficar inaceitavelmente grande para  $t_n = n\Delta t$ . Vamos analisar o crescimento do erro na forma vetorial. Isolando  $u_i^{n+1}$  em (3.4) obtemos a equação

$$U^{n+1} = CU^n, \quad (3.10)$$



Como a malha é uniforme, o espaçamento  $\Delta x$  satisfaz

$$\Delta x = l/N, \quad (3.16)$$

Todas as oscilações representadas em um tempo finito são dadas por

$$\kappa_j = j\kappa_{min} = j\frac{\pi}{l} = j\frac{\pi}{N\Delta x}, \quad (3.17)$$

para  $j = 0, \dots, N$ , com o maior valor de  $k$  associada à máxima frequência. Assim com  $\kappa_{max} = \pi/\Delta x$  o maior valor de  $j$  é igual ao número de intervalos  $N$  da malha, vide Fig. 3.1, [Hir94, pag 285].

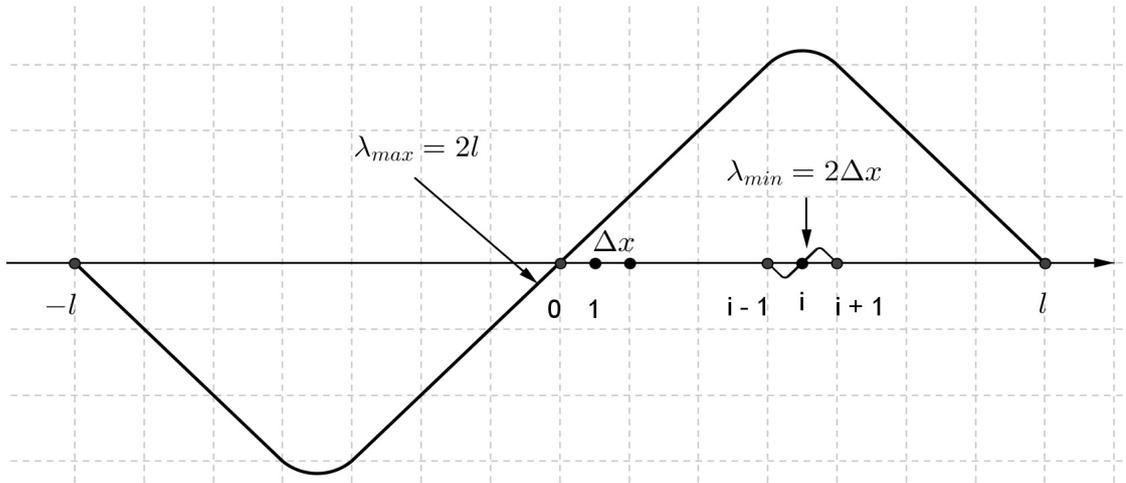


Figura 3.1: Representação das oscilações no intervalo  $(-l, l)$ .

Como o erro é uma "grid function", pode-se escrever como

$$\epsilon_i^n = \sum_{j=-N}^N E_j^n e^{i\kappa_j i \Delta x} = \sum_{j=-N}^N E_j^n e^{i j \pi / N}, \quad (3.18)$$

sendo  $i = \sqrt{-1}$  e  $E_j^n$  a amplitude do  $j$ -ésimo harmônico  $e^{i\kappa_j x}$ . Por outro lado, o harmônico associado a  $j = 0$ , representa uma função constante no domínio espacial. O produto  $\kappa_j \Delta x$  é muitas vezes representado como um ângulo de fase.

$$\theta_j = \kappa_j \Delta x = j\pi/N, \quad (3.19)$$

e cobre o domínio  $[-\pi, \pi]$  em intervalos de  $\pi/N$ .

## 3.2 O fator de amplificação

Daremos o conceito do fator de amplificação mediante os seguintes exemplos:

**Exemplo 3.1.** (*Instabilidade Incondicional*) A evolução temporal de uma oscilação simples  $E_j^n e^{i\theta_j}$  é determinada da mesma maneira que  $u_1^n$ . Assim, usando (3.8), obtemos

$$(E_j^{n+1} - E_j^n) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} E_j^n (e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_j}) = 0. \quad (3.20)$$

A condição de estabilidade dada em (3.9) vai ser satisfeita [Hir94, pag 278], se a amplitude de qualquer erro não cresce com o tempo, i.e.,

$$|g| \equiv \left| \frac{E_j^{n+1}}{E_j^n} \right| \leq 1, \quad (3.21)$$

para todo  $\theta_j$ , sendo  $g = E_j^{n+1}/E_j^n$ ,  $g$  é chamado de fator de amplificação. Utilizando (3.20), obtemos

$$g = 1 - i\bar{v} \sin(\theta_j), \quad (3.22)$$

a condição de estabilidade requer que  $|g| \leq 1$ , o qual não é satisfeito.

**Exemplo 3.2.** (*Estabilidade Condicional*) Inserindo o harmônico simples  $E_j^n e^{i\theta_j}$  em (3.6), obtemos

$$g = 1 - \bar{v} + \bar{v}e^{-i\theta_j} = (1 - \bar{v}) + \bar{v} \cos(\theta_j) - i\bar{v} \sin(\theta_j), \quad (3.23)$$

escrevendo  $g$  em forma paramétrica, com parâmetro  $\theta_j$

$$\begin{cases} \xi = (1 - \bar{v}) + \bar{v} \cos(\theta_j), \\ \eta = -\bar{v} \sin(\theta_j) \end{cases} \quad (3.24)$$

para analisar a estabilidade e para melhor entendimento, nós levamos (3.24) para o plano complexo. A curva (3.24) que representa  $g$  (3.23) para valores de  $\theta = \kappa\Delta x$  deve permanecer dentro do círculo (Fig. 3.2) [Hir94, pag 288]. O esquema é estável para

$$0 < \bar{v} \leq 1. \quad (3.25)$$

Portanto (3.6) é condicionalmente estável e (3.25) é uma condição do tipo CFL.

**Exemplo 3.3.** (*Estabilidade Incondicional*) Inserindo o harmônico simples  $E_j^n e^{i\theta_j}$  em (3.5), obtemos

$$g = -\frac{1}{1 + i\bar{v} \sin(\theta_j)}, \quad (3.26)$$

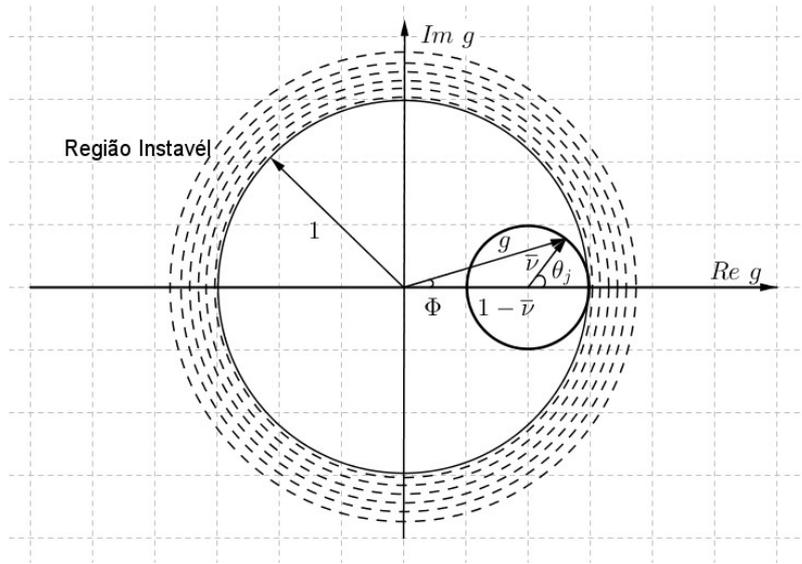


Figura 3.2: Região de estabilidade para o esquema numérico (3.6).

assim,  $|g| = \frac{1}{1 + \bar{v}^2 \sin^2(\theta_j)} < 1$  para todos os valores de  $\bar{v}^2$ . Conclui-se que (3.5) é incondicionalmente estável.

### 3.3 Operadores em Diferenças

Seja  $f$  uma função e  $f_i = f(i\Delta x)$ , sendo  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , para  $|i| = 1, \dots, N$ . Onde  $N$  é suficientemente grande e suponha que  $f_i = 0$  para todo  $|i| > N$ . Assim a "grid function"  $\mathbf{f}$  de  $f$  é dada por

$$\mathbf{f} = [f_{-N}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_N]^T. \tag{3.27}$$

Seguindo [SOD85, pg 7], definimos os seguintes operadores em  $\mathbf{f} = (f_i)$ :

- (i) O operador *deslocamento progressivo*  $S_+$ :

$$(S_+ \mathbf{f})_i = f_{i+1}, \tag{3.28}$$

- (ii) O operador *deslocamento regressivo*  $S_-$ :

$$(S_- \mathbf{f})_i = f_{i-1}, \tag{3.29}$$

- (iii) O operador *identidade*  $I$ :

$$(I \mathbf{f})_i = f_i, \tag{3.30}$$

(iv) O operador *diferenças progressivas*  $D_+$ :

$$(D_+ \mathbf{f})_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad (3.31)$$

(v) O operador *diferenças regressivas*  $D_-$ :

$$(D_- \mathbf{f})_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}, \quad (3.32)$$

(vi) O operador *diferenças centrais*  $D_0$ :

$$(D_0 \mathbf{f})_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.33)$$

De (2.4) com  $\theta = \kappa \Delta x$ , obtemos que a SFT de  $S_- \mathbf{f}$  e  $S_+ \mathbf{f}$  são dadas por

$$(\widehat{S_- \mathbf{f}})(\theta) = e^{-i\theta} \hat{f}(\theta), \quad (3.34)$$

$$(\widehat{S_+ \mathbf{f}})(\theta) = e^{i\theta} \hat{f}(\theta), \quad (3.35)$$

para  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Para um melhor entendimento olhar no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} & \xrightarrow{SFT} & \hat{\mathbf{f}} \\ S_- \downarrow & & \downarrow e^{-i\theta} \\ S_- \mathbf{f} & \xrightarrow{SFT} & \widehat{S_- \mathbf{f}} \end{array}$$

Seja  $\mathbf{u}^n = (u_i^n)$  uma "grid function" no tempo  $t_n = n\Delta t$ ,  $n > 0$ , com  $u_i^0$  a condição inicial discreta, uma equação diferencial com condições de contorno (por exemplo (3.1) e (3.2)) pode ser aproximado pelo método de diferenças finitas e vai ter a forma

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q(S_-, S_+) \mathbf{u}^n, \quad (3.36)$$

onde  $Q(S_-, S_+)$  depende dos operadores *deslocamento regressivo*  $S_-$  e *deslocamento progressivo*  $S_+$ . De (3.34) e (3.35), obtemos

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1}(\theta) = Q(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \hat{\mathbf{u}}^n(\theta), \quad (3.37)$$

sendo  $g(\theta, \Delta t, \Delta x) = Q(e^{-i\theta}, e^{i\theta})$  o *fator de amplificação*.

**Definição 3.1.** *Sejam  $0 < \Delta t, \Delta x \ll 1$ , uma malha ou grid será os pontos  $(t_n, x_i) = (n\Delta t, i\Delta x)$ , para arbitrários  $n, i$  inteiros.*

Denotemos  $u_i^n \equiv u(t_n, x_i)$  e considere EDP's lineares da forma  $P(\partial_t, \partial_x)u = f(t, x)$  de primeira ordem no tempo. Assuma que, dada uma condição inicial  $u(0, x)$ , a solução é unicamente determinada.

**Definição 3.2.** *Um esquema em diferenças finitas  $P_{\Delta t, \Delta x} u_i^n = 0$  para uma equação de primeira ordem é estável numa região  $\Lambda$ , na norma (2.11), se existe um inteiro  $J$  tal que para todo  $T > 0$ , existe  $C_T$  tal que*

$$\|u^n\|_{\Delta x} \leq C_T \sum_{j=0}^J \|u^j\|_{\Delta x}^2, \quad (3.38)$$

para  $0 \leq n\Delta t \leq T$ , com  $(\Delta t, \Delta x) \in \Lambda$ . Sendo  $\Lambda$  uma região limitada e não vazia do primeiro quadrante do  $\mathbb{R}^2$  que tem a origem como um ponto de acumulação.

**Teorema 3.1. (Critério de Von Neumann)** *Um esquema de diferenças finitas de passo simples (com coeficientes constantes) é estável numa região  $\Lambda$  na norma (2.11) se e somente se existe  $K$  (independente de  $\theta, \Delta x$  e  $\Delta t$ ) tais que*

$$|g(\theta, \Delta t, \Delta x)| \leq 1 + K\Delta t, \quad (3.39)$$

com  $(\Delta t, \Delta x) \in \Lambda$ . Se  $g = g(\theta)$ , então a condição de estabilidade é

$$|g(\theta)| \leq 1, \quad (3.40)$$

**Demonstração:** Vide [Sod85, pag 18] ou [Str04, pag 50]. □

### 3.4 A condição de Courant-Friedrichs-Lewy

A idéia intuitiva por trás da condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é que a solução da equação de diferenças finitas não deve ser independente dos dados que determinam a solução da equação diferencial parcial, salvo se for demonstrado que os dados omitidos têm um efeito negligenciável.

**Definição 3.3.** *O domínio de dependência de um ponto  $(t_0, x_0)$  é o conjunto de pontos  $(0, x)$  que influênciam a solução da equação diferencial parcial no ponto  $(t_0, x_0)$ .*

**Definição 3.4.** *O domínio de dependência numérico de um método de diferenças finitas num ponto  $(n\Delta t, i\Delta x)$  da malha é o conjunto de pontos  $(0, j\Delta x)$  na linha inicial que influênciam a solução do esquema de diferenças finitas no ponto  $(n\Delta t, i\Delta x)$ .*

Suponha que o domínio de dependência no ponto  $(n\Delta t, i\Delta x)$  no método de diferenças finitas  $DF_{\Delta x}$  não contém o domínio de dependência no ponto  $(n\Delta t, i\Delta x)$  da equação

diferencial parcial  $D$ . Seja  $D_1$  o conjunto de pontos em  $D$  não contidos em  $DF_{\Delta x}$ . Suponhamos que em algum lugar no  $D_1$  o dado inicial é perturbado. A solução da equação de diferenças finitas no ponto  $(n\Delta t, i\Delta x)$  não deve ser afetado por esta perturbação do dado inicial. Assim, será impossível para a solução do método de diferenças finitas convergir para a solução da equação diferencial parcial com os dados iniciais perturbados quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

**Definição 3.5.** *Um método de diferenças finitas satisfaz a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) se o domínio de dependência da solução da equação da diferenças finitas inclui o domínio de dependência da solução da equação diferencial parcial em todos os pontos  $(n\Delta t, i\Delta x)$ .*

A condição CFL é necessária para a estabilidade. Tipicamente, um método de diferenças finitas que satisfaz a condição CFL deve ter um domínio de dependência numérico que contém pontos que não pertencem no domínio de dependência da equação diferencial parcial. Aqueles pontos adicionais no domínio de dependência numérico resultam ser dados iniciais adicionais que determinam a solução da equação de diferenças finitas. Isto dá origem a um erro. No entanto, a contribuição destes dados adicionais tende a 0 quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Um exemplo com mais detalhes pode ser encontrado em [MM05, pag. 87] onde é satisfeita a condição CFL e logo usando o critério de estabilidade de Von Neumann [MM05, pag. 19] é exibido o fator de amplificação.

Seguindo [Str04, pag. 25], vamos definir a consistência de um esquema em diferenças finitas.

**Definição 3.6.** *Dada uma EDP  $Pu = f$  e um esquema em diferenças finitas  $P_{\Delta t, \Delta x}v = f$ , dizemos que o esquema é consistente com a EDP  $Pu = f$  se para qualquer função suave  $\phi(t, x)$*

$$P\phi - P_{\Delta t, \Delta x}\phi \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta t, \Delta x \rightarrow 0,$$

*a convergência sendo pontual em cada ponto da malha.*

**Teorema 3.2. (Teorema de Equivalência de Lax - Richtmyer)** *Para um problema de EDP's de evolução bem posto, um esquema em diferenças finitas linear consistente é convergente se e somente se é estável.*

**Demonstração:** Vide [Str04, pag 262]. □

# Capítulo 4

## Análise de Estabilidade

Nosso objetivo neste capítulo é estudar um modelo linear de onda interna dispersivo. Para isto usaremos o critério de estabilidade de Von Neumann, apresentado no capítulo anterior .

### 4.1 Sistema Hiperbólico

#### 4.1.1 Semi discretização no espaço

Considerando (1.5) com  $\beta = 0$ . Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ u_t = \eta_x. \end{cases} \quad (4.1)$$

Nossa discretização espacial é baseada na malha uniforme de pontos  $x_j = j\Delta x$  onde  $\Delta x = 2l/N$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ , com  $N$  é um número par. Agora vamos considerar modelos de aproximação que podem ser escritos como o seguinte sistema de equações diferenciais ordinarias (ODE's):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_t = C\mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_t = C\boldsymbol{\eta}, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_N]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]^T$ ,  $\eta_j \approx \eta(x_j, t)$ ,  $u_j \approx u(x_j, t)$  e  $C$  é uma matriz de Toeplitz circulante real e antisimétrica. Da definição (1.12) e (2.19) sabemos que  $C$  é determinada pelas  $N$  entradas da primeira linha, sejam estas  $c_1, \dots, c_N$ . Definimos  $C$  como sendo

$$C_{i,j} = \begin{cases} c_{1+j-i} & \text{se } i \leq j, \\ c_{N+1+j-i} & \text{se } i > j, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde consideramos  $c_1 = c_{N/2+1} = 0$  e  $c_{1+j} = -c_{N+1-j}$ . Estes casos são estudados em [VB82] para equações lineares hiperbólicas de primeira ordem, onde ao considerar  $C$

antissimétrica, os esquemas numéricos se tornam conservativos no tempo.

De acordo com (2.15) e (2.16), temos  $\hat{\mathbf{v}} = \Delta x F \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \bar{F}^T \hat{\mathbf{v}}$ , onde  $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_{-N/2+1}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T$  e  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_N]^T$ . A matriz  $C$  pelo teorema 2.4 satisfaz

$$F^T C \bar{F} = N \lambda(C), \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda(C) &= \text{diag}(\lambda_1(C), \dots, \lambda_N(C)), \\ \lambda_k(C) &= \sum_{j=1}^N c_j e^{i(j-1)\theta_k}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Temos que  $\bar{\lambda}_k(C)$  são autovalores de  $C$  logo, pela definição de  $C$  (4.3) e definindo a seguinte função contínua

$$\gamma(\theta) = 2\Delta x \sum_{j=1}^{N/2-1} c_{j+1} \text{sen}(j\theta) \quad (4.6)$$

notamos que (4.5) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\lambda_k(C) = \frac{i}{\Delta x} \gamma(\theta_k). \quad (4.7)$$

Para analisar o sistema discreto (4.2), precisamos da DFT de produtos tais como

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x}$$

então, de (2.15) e (2.16) temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \Delta x F \mathbf{y} \\ &= \Delta x F C \mathbf{x} \\ &= \frac{\Delta x}{2l} F C \bar{F}^T \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{N} F C \bar{F}^T \hat{\mathbf{x}} \\ &= \hat{C} \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

e segue do teorema 2.4 que

$$\hat{C} = \text{diag}(\lambda_{k-\frac{N}{2}}(C)), \quad k = 1, \dots, N.$$

Portanto mostramos que

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \lambda_k(C) \hat{\mathbf{x}}_k, \quad k = -N/2 + 1, \dots, N/2. \quad (4.8)$$

Com o propósito de estudar a estabilidade, notamos que o sistema semi-discreto (4.2) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

sendo

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

### 4.1.2 Integração temporal e análise de Von Neumann

A fim de tornar o sistema numérico (4.2) totalmente discretizado, vamos nos concentrar no clássico método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) o qual pode ser escrito como

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} &= \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} C^4 \right) \boldsymbol{\eta}^n + \left( \Delta t C + \frac{\Delta t^3}{3!} C^3 \right) \mathbf{u}^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \left( \Delta t C + \frac{\Delta t^3}{3!} C^3 \right) \boldsymbol{\eta}^n + \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} C^4 \right) \mathbf{u}^n, \end{cases} \quad (4.9)$$

de (4.8) e (4.9) temos que a DFT de  $\boldsymbol{\eta}^{n+1}$  e  $\mathbf{u}^{n+1}$  satisfazem

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}}^{n+1} &= \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!} \lambda^4(C) \right) \hat{\boldsymbol{\eta}}^n + \left( \Delta t \lambda(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \lambda^3(C) \right) \hat{\mathbf{u}}^n, \\ \hat{\mathbf{u}}^{n+1} &= \left( \Delta t \lambda(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \lambda^3(C) \right) \hat{\boldsymbol{\eta}}^n + \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!} \lambda^4(C) \right) \hat{\mathbf{u}}^n, \end{cases}$$

na  $k$ -ésima posição, para  $k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$  temos que

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}}_k^{n+1} &= \left( 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!} \lambda_k^4(C) \right) \hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n + \left( \Delta t \lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \lambda_k^3(C) \right) \hat{\mathbf{u}}_k^n, \\ \hat{\mathbf{u}}_k^{n+1} &= \left( \Delta t \lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \lambda_k^3(C) \right) \hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n + \left( 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!} \lambda_k^4(C) \right) \hat{\mathbf{u}}_k^n, \end{cases}$$

onde  $k = -N/2+1, \dots, N/2$ . Usando os critérios da teoria da estabilidade de Von Neumann [Asc08] para mostrar o fator de amplificação e procurando soluções do tipo

$$[\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n, \hat{\mathbf{u}}_k^n] = g_k^n [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^0, \hat{\mathbf{u}}_k^0], \quad [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^0, \hat{\mathbf{u}}_k^0] \neq \mathbf{0},$$

temos que

$$\begin{cases} 0 = \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C)\right)\hat{\eta}_k^n - g_k^{n+1}\frac{\hat{\eta}_k^n}{g_k^n} + \left(\Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C)\right)\hat{u}_k^n, \\ 0 = \left(\Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C)\right)\hat{\eta}_k^n + \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C)\right)\hat{u}_k^n - g_k^{n+1}\frac{\hat{u}_k^n}{g_k^n}, \end{cases}$$

com o qual chegamos num sistema onde sua matriz associada

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C) - g_k & \Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C) \\ \Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C) & 1 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C) - g_k \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

possui determinante zero, i.e.,

$$\left(1 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C) - g_k\right)^2 - \left(\Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C)\right)^2 = 0,$$

$$g_k^\pm = 1 \pm \Delta t\lambda_k(C) + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_k^2(C) \pm \frac{\Delta t^3}{3!}\lambda_k^3(C) + \frac{\Delta t^4}{4!}\lambda_k^4(C),$$

de (4.6), (4.7) e introduzindo o parâmetro  $\nu = \Delta t/\Delta x$  que vamos denominar de número de Courant normalizado, obtemos

$$g_k^\pm = 1 \pm i\nu\gamma(\theta_k) - \frac{1}{2}\nu^2\gamma^2(\theta_k) \mp \frac{i}{3!}\nu^3\gamma^3(\theta_k) + \frac{i}{3!}\nu^4\gamma^4(\theta_k).$$

Assim, o fator de amplificação  $g_k^\pm = g^\pm(\theta_k, \nu)$  é dado por

$$g^\pm(\theta, \nu) = \sum_{m=0}^4 \frac{(\mp i\nu\gamma(\theta))^m}{m!}, \quad (4.11)$$

ou também pode ser escrito como

$$g^\pm(\theta, \nu) = 1 - \frac{1}{2}\nu^2\gamma^2(\theta) + \frac{1}{4!}\nu^4\gamma^4(\theta) \mp i\left(\nu\gamma(\theta) - \frac{1}{3!}\nu^3\gamma^3(\theta)\right). \quad (4.12)$$

### 4.1.3 Discretização espacial

Sabemos por (2.24) e (2.25) que uma possível aproximação para  $u'(x)$  é dada pelas diferenças finitas centradas de segunda ordem

$$u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \approx (C\mathbf{u})_j \quad (4.13)$$

e de quarta ordem

$$u_x(x_j) \approx \frac{8(u_{j+1} - u_{j-1}) - (u_{j+2} - u_{j-2})}{12\Delta x} \approx (C\mathbf{u})_j, \quad (4.14)$$

notando que

$$(C\mathbf{u})_j = \sum_{k=1}^N c_{jk} u_k = \sum_{k=1}^{j-1} c_{N-(j-1)+k} u_k + \sum_{k=j}^N c_{k-(j-1)} u_k,$$

temos de (4.3) que os coeficientes  $c_i^{FD-2}$  da matriz de diferenciação (2.26) do esquema de diferenças finitas centradas de segunda ordem satisfazem

$$\begin{aligned} c_2^{FD-2} &= -c_N^{FD-2} = \frac{1}{2\Delta x}, \\ c_i^{FD-2} &= 0 \quad \text{em outros casos.} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.6), obtemos

$$\gamma^{FD-2}(\theta) = 2\Delta x \left( \frac{1}{2\Delta x} \sin(\theta) \right) = \sin(\theta), \quad (4.16)$$

Vamos agora determinar  $\gamma^{FD-4}(\theta)$ . Analogamente aos coeficientes (4.15), temos de (4.3) e (2.27) que, para o esquema de quarta ordem,

$$\begin{aligned} c_2^{FD-4} &= -c_N^{FD-4} = \frac{2}{3\Delta x}, \\ c_3^{FD-4} &= -c_{N-1}^{FD-4} = -\frac{1}{12\Delta x}, \\ c_i^{FD-4} &= 0 \quad \text{em outros casos.} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.6), obtemos

$$\gamma^{FD-4}(\theta) = 2\Delta x \left( \frac{2}{3\Delta x} \sin(\theta) - \frac{1}{12\Delta x} \sin(2\theta) \right) = \frac{4}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{6} \sin(2\theta). \quad (4.18)$$

Outra escolha para aproximar  $u'(x)$  é usar a diferenciação espectral [Tre00], cuja matriz de diferenciação (2.37) possui os coeficientes

$$c_1^{SP} = 0, \quad c_i^{SP} = \frac{(-1)^{N+1-i}\pi}{2l} \cot\left(\frac{\theta_{N+1-i}}{2}\right). \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}\gamma^{SP}(\theta) &= 2\Delta x \sum_{j=2}^{N/2} \frac{(-1)^{N+1-j}\pi}{2l} \cot\left(\frac{\theta_{N+1-j}}{2}\right) \sin((j-1)\theta) \\ &= 2\Delta x \sum_{j=1}^{N/2-1} \frac{(-1)^{j+1}\pi}{2l} \cot\left(\frac{j\pi}{N}\right) \sin(j\theta).\end{aligned}$$

Além disso, pode-se mostrar que

$$\gamma^{SP}(\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0, N/2, \\ \theta_k & \text{se } |k| = 1, 2, \dots, N/2 - 1, \end{cases} \quad (4.20)$$

e de (4.7), seus autovalores são

$$\lambda_k(C) = \frac{i\pi k}{l},$$

para  $k = -N/2 + 1, \dots, -1, 1, \dots, N/2 - 1$  e  $\lambda_0(C)$  tem multiplicidade 2.

Tendo em consideração os três esquemas espaciais e identificando suas funções correspondentes  $\gamma(\theta)$ , nós agora vamos derivar as condições do tipo CFL que são suficientes para garantir a estabilidade.

**Lema 4.1.** *Para a estabilidade do sistema hiperbólico totalmente discretizado (4.9), nós temos as seguintes condições suficientes do tipo CFL de acordo com o sistema espacial.*

$$\nu^{FD-2} \leq 2\sqrt{2}, \quad \nu^{FD-4} \leq \frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)\sqrt{2\sqrt{6}-3}}, \quad \nu^{SP} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \quad (4.21)$$

**Demonstração:** Para garantir a estabilidade o número de Courant,  $\nu$  tem que ser tal que o fator de amplificação satisfaça a condição de Von Neumann para cada caso, i.e.,

$$|g^\pm(\theta_k, \nu)| \leq 1, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Nos sabemos de (4.12) que

$$g^\pm(\theta, \nu) = 1 - \frac{1}{2}\nu^2\gamma^2(\theta) + \frac{1}{4!}\nu^4\gamma^2(\theta) \mp i \left( \nu\gamma(\theta) - \frac{1}{3!}\nu^3\gamma^3(\theta) \right),$$

então

$$|g^\pm(\theta, \nu)|^2 = \left( 1 - \frac{1}{2}\nu^2\gamma^2(\theta) + \frac{1}{4!}\nu^4\gamma^4(\theta) \right)^2 + \left( \nu\gamma(\theta) - \frac{1}{3!}\nu^3\gamma^3(\theta) \right)^2,$$

considerando  $y = \nu\gamma(\theta)$  temos que

$$0 \geq |g^\pm(\theta, \nu)|^2 - 1 = \frac{y^6}{576}(y^2 - 8),$$

para  $y \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$  o polinômio  $p(y) = \frac{y^6}{576}(y^2 - 8) \leq 0$

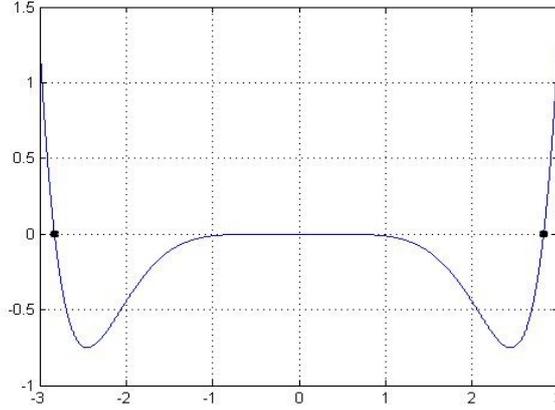


Figura 4.1: Polinômio  $p(y)$ .

Assim  $|\nu\gamma(\theta)| \leq 2\sqrt{2}$  se

$$\nu \leq \frac{2\sqrt{2}}{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|}, \quad (4.22)$$

agora precisamos calcular o máximo de  $\gamma^{FD-2}(\theta)$ ,  $\gamma^{FD-4}(\theta)$  e  $\gamma^{SP}(\theta)$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e substituir em (4.22). Em particular,

1. Temos de (4.16) que  $|\gamma^{FD-2}(\theta)| = |\sin \theta|$ , logo

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma^{FD-2}(\theta)| = 1,$$

assim

$$\nu^{FD-2} \leq 2\sqrt{2}.$$

2. Temos de (4.18) que  $(\gamma^{FD-4}(\theta))' = \frac{4}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos(2\theta)$ , achando os pontos críticos

$$\cos(\theta) = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2},$$

logo

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma^{FD-4}(\theta)| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{6}-3}(\sqrt{6}+1)}{2\sqrt{6}},$$

assim

$$\nu^{FD-4} \leq \frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)\sqrt{2\sqrt{6}-3}}.$$

3. Temos de (4.20) que  $\gamma^{SP}(\theta) \leq \gamma^{SP}(N)$ , ou seja,

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma^{SP}(\theta)| \leq \pi,$$

assim

$$\nu^{SP} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

□

## 4.2 Sistema Dispersivo

Nos agora vamos considerar o seguinte modelo dispersivo linear (1.5):

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta \partial_x\right) u_x = \eta_x. \end{cases} \quad (4.23)$$

Vimos na seção 2.5 que o operador  $\mathcal{T}_{\delta,x} = \mathcal{T}_\delta \partial_x$  satisfaz

$$\mathcal{T}_{\delta,x}[g](x) = \frac{1}{2l} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{ik\pi x/l} \hat{g}(k), \quad (4.24)$$

sendo

$$\hat{g}(k) = \int_0^{2l} g(x) e^{-ik\pi x/l} dx.$$

Seja  $\mathbf{v} = [f(x_1), \dots, f(x_N)]^T$ . Temos de (2.48) que

$$\mathcal{T}_{\delta,x}[f](x_j) \approx \frac{1}{2l} \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{i\frac{2\pi k}{N}j} \hat{v}_k,$$

ou também podemos escrever

$$(T_{\delta,x}\mathbf{v})_j := \frac{1}{2l} \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{i\frac{2\pi k}{N}j} \hat{v}_k.$$

Vamos definir

$$h_k = \begin{cases} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right), & -\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}, k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Temos que

$$(T_{\delta,x}\mathbf{v})_j \approx \frac{1}{2l} \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2+1} h_k e^{i\frac{2\pi k}{N}j} \hat{v}_k,$$

assim, na forma matricial,

$$T_{\delta,x}\mathbf{v} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} h_{-\frac{N}{2}+1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(-\frac{N}{2}+1)(1)} & \dots & 0 & \dots & h_{\frac{N}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2})(1)} \\ h_{-\frac{N}{2}+1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(-\frac{N}{2}+1)(2)} & \dots & 0 & \dots & h_{\frac{N}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2})(2)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ h_{-\frac{N}{2}+1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(-\frac{N}{2}+1)(N)} & \dots & 0 & \dots & h_{\frac{N}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2})(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{-N/2+1} \\ \hat{v}_{-N/2+2} \\ \vdots \\ \hat{v}_{N/2} \end{bmatrix},$$

ou, seja,

$$T_{\delta,x}\mathbf{v} = \frac{1}{2l} \overline{F}^T H \hat{\mathbf{v}}, \quad H = \text{diag}(h_{-N/2+1}, \dots, h_{N/2}).$$

Agora, seja  $\mathbf{w} = T_{\delta,x}\mathbf{v}$ . Sabemos de (2.13) e (4.25) que

$$w_j = \frac{1}{2l} \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2+1} \underbrace{h_k \hat{v}_k}_{\hat{w}_j} e^{i\frac{2\pi k}{N}j}$$

assim concluímos que

$$\hat{w}_k = \begin{cases} -\frac{k\pi}{l} \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) \hat{v}_k, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Usando o mesmo esquema feito no caso hiperbólico, a discretização da derivada espacial chega ao seguinte sistema de ODEs

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

sendo  $D$  e  $P$  dados por

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} 0 & C \\ P^{-1}C & 0 \end{bmatrix}, \\ P &= I - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} T_{\delta,x} \\ &= I - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\Delta x}{2l} \sqrt{\beta} \overline{F}^T H F \\ &= I - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{N} \overline{F}^T H F. \end{aligned}$$

Alem disso, se  $\mathbf{s} = P\mathbf{v}$  então

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \Delta x F \left( \mathbf{v} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} T_{\delta,x} \mathbf{v} \right) \\ &= \Delta x F \mathbf{v} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \Delta x F \frac{1}{2l} F^* H \hat{\mathbf{v}} \\ &= \left( I - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} H \right) \hat{\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

assim

$$\hat{s}_k = \begin{cases} \left[ 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \frac{k\pi}{l} \coth \left( \frac{k\pi}{l} \delta \right) \right] \hat{v}_k, & k \neq 0, \\ \hat{v}_0, & k = 0. \end{cases}$$

Em outras palavras,  $P$  pode ser diagonalizada através da matriz  $F$  e tem autovalores

$$\lambda_k(P) = \alpha(\theta_k/\Delta x),$$

para  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ , sendo  $\alpha(s)$  dado por

$$\alpha(s) = \begin{cases} 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} s \coth(s\delta), & s \neq 0, \\ 1, & s = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Além disso  $P^{-1}$  e  $C$  comutam, i.e.,

$$P^{-1}C = CP^{-1}, \quad (4.28)$$

e de (4.28) os autovalores da matriz  $D$  associada ao sistema EDOs (4.26) são

$$\lambda_k(D) = \pm \frac{\lambda_k(C)}{\sqrt{\lambda_k(P)}}, \quad (4.29)$$

e de (4.7) e (4.29) obtemos que  $\lambda_k(D)$  é dado por

$$\lambda_k(D) = \pm i \frac{\gamma(\theta_k)}{\Delta x \sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}}. \quad (4.30)$$

De forma análoga a (4.9) usando agora (4.30), o método de Runge - Kutta de quarta ordem fornece uma solução aproximada do sistema EDOs (4.26) que pode ser escrita como

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} &= \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2} C^4 \right) \boldsymbol{\eta}^n + \left( \Delta t C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-1} C^3 \right) \mathbf{u}^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \left( \Delta t P^{-1} C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-2} C^3 \right) \boldsymbol{\eta}^n + \left( I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2} C^4 \right) \mathbf{u}^n. \end{cases} \quad (4.31)$$

Aplicando a DFT a ambos lados das equações (4.31), obtemos

$$\begin{cases} \hat{\eta}_k^{n+1} &= \left( 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\lambda_k^2(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\lambda_k^4(C)}{\lambda_k^2(P)} \right) \hat{\eta}_k^n + \left( \Delta t \lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\lambda_k^3(C)}{\lambda_k(P)} \right) \hat{u}_k^n, \\ \hat{u}_k^{n+1} &= \left( \Delta t \frac{\lambda_k(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\lambda_k^3(C)}{\lambda_k^2(P)} \right) \hat{\eta}_k^n + \left( 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\lambda_k^2(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\lambda_k^4(C)}{\lambda_k^2(P)} \right) \hat{u}_k^n. \end{cases}$$

Procurando soluções do tipo

$$[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n] = g_k^n [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0], \quad [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0] \neq [0, 0],$$

chegamos ao sistema

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\lambda_k^2(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\lambda_k^4(C)}{\lambda_k^2(P)} - g_k & \Delta t \lambda_k(C) + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\lambda_k^3(C)}{\lambda_k(P)} \\ \Delta t \frac{\lambda_k(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\lambda_k^3(C)}{\lambda_k^2(P)} & 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\lambda_k^2(C)}{\lambda_k(P)} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\lambda_k^4(C)}{\lambda_k^2(P)} - g_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^n \\ \hat{u}_k^n \end{bmatrix}.$$

Neste sistema a matriz associada ao sistema possui determinante zero, assim conseguimos obter o fator de amplificação na forma  $g_k^\pm = g_k^\pm(\theta_k, \nu, \Delta x)$  sendo

$$g^\pm(\theta, \nu, \Delta x) = 1 - \frac{\nu^2}{2} \frac{\gamma^2(\theta)}{\alpha(\theta/\Delta x)} + \frac{\nu^4}{4!} \frac{\gamma^4(\theta)}{\alpha^2(\theta/\Delta x)} \mp i \left( \nu \frac{\gamma(\theta)}{\sqrt{\alpha(\theta/\Delta x)}} - \frac{\nu^3}{3!} \frac{\gamma^3(\theta)}{\sqrt{\alpha^3(\theta/\Delta x)}} \right). \quad (4.32)$$

Comparando (4.12) com (4.32), notamos que em (4.32) existe uma dependência explícita de  $\Delta x$  por causa da dispersão.

Introduziremos o seguinte número adimensional

$$\tilde{\beta} = \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta} = \frac{\rho_2 h_1}{\rho_1 h_2}, \quad (4.33)$$

e o número de Courant normalizado

$$\nu_{\tilde{\beta}} = \frac{\nu}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}}}, \quad (4.34)$$

adaptado para o sistema dispersivo. Observamos que o número  $\nu_{\tilde{\beta}}$  coincide com o número de Courant  $\nu$  quando  $\beta = 0$ .

Para  $\beta \neq 0$ , introduzimos o número

$$\mu_{\beta} = \left( \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} = \sqrt{\frac{\Delta x}{\tilde{\beta} \delta}} \nu, \quad (4.35)$$

o qual envolve a discretização e os parâmetros físicos do modelo dispersivo.

No lema seguinte, vamos fornecer estimativas sobre os dois parâmetros de estabilidade diferentes  $\nu_{\tilde{\beta}}$  e  $\mu_{\beta}$ . A estimativa CFL para  $\nu_{\tilde{\beta}}$  é uma extensão natural do caso hiperbólico e revela como a dispersão física relaxa as restrições de estabilidade (por um fator  $(1 + \tilde{\beta})^{-1/2}$ ). Por outro lado, a estimativa envolvendo  $\mu_{\beta}$  é mais natural no contexto dispersivo levando a uma condição mais exata para  $\Delta t$  no limite assintótico do parâmetro de discretização sempre e quando  $\beta$  for maior do que zero.

Vamos agora comparar os parâmetros  $\nu_{\tilde{\beta}}$  e  $\mu_{\beta}$ . Partindo dos critérios  $\nu_{\tilde{\beta}} \leq C_1$  e  $\mu_{\beta} \leq C_2$ , obtemos

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq \sqrt{\Delta x} \sqrt{1 + \tilde{\beta}} C_1 = R_1(\Delta x), \quad \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq \sqrt{\tilde{\beta} \delta} C_2 = R_2.$$

A condição  $\nu_{\tilde{\beta}} \leq C_1$  é mais restritiva quando

$$R_1(\Delta x) < R_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\Delta x} < \frac{C_2 \sqrt{\tilde{\beta} \delta}}{C_1 \sqrt{1 + \tilde{\beta}}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x < \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\delta \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}}.$$

Por exemplo, se  $\tilde{\beta} \leq 1$ , isto acontece quando

$$\Delta x \leq \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\delta \tilde{\beta}}{2} = \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \delta \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 2}. \quad (4.36)$$

**Observação 4.1.** No caso  $\delta \rightarrow \infty$ , a condição  $\nu_{\tilde{\beta}} \leq C_1$  é a mesma que para o caso hiperbólico. Por outro lado, o critério  $\mu_{\beta} \leq C_2$  tomará a forma

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq C_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sqrt{\beta} = C_2 \sqrt{\tilde{\beta}_{\infty}}.$$

Assim sendo, este critério será melhor quando

$$\sqrt{\Delta x} < \frac{C_2 \sqrt{\tilde{\beta}_{\infty}}}{C_1} \Leftrightarrow \Delta x < \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta}.$$

A condição (4.36) sugere que mesmo no limite assintótico  $\beta \rightarrow 0$ , considerando uma discretização com  $\Delta x = O(\sqrt{\beta})$ , a solução numérica será estável.

**Lema 4.2.** *Para a estabilidade do sistema hiperbólico totalmente discretizado (4.32) nós temos as seguintes condições do tipo CFL de acordo com o sistema espacial,*

$$\nu_{\tilde{\beta}}^{FD-2} \leq 2\sqrt{2}, \quad \nu_{\tilde{\beta}}^{FD-4} \leq \frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)\sqrt{2\sqrt{6}-3}}, \quad \nu_{\tilde{\beta}}^{SP} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \quad (4.37)$$

respectivamente. Mais ainda, se  $\beta \neq 0$  tem-se as seguintes condições

$$\mu_{\beta}^{FD-2} \leq 3.3227, \quad \mu_{\beta}^{FD-4} \leq 2.6514, \quad \mu_{\beta}^{SP} \leq 1.5958. \quad (4.38)$$

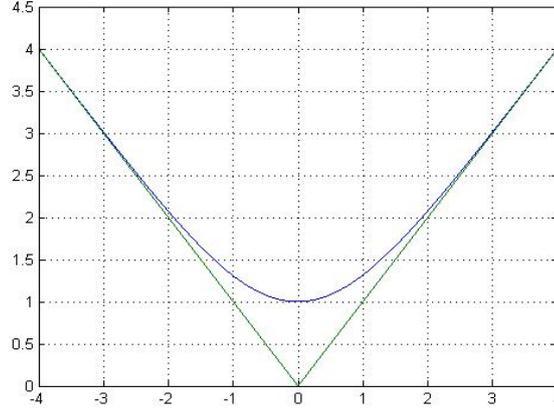
**Demonstração:** Da maneira análoga como foi provado o Lema 3.1 a condição suficiente para a estabilidade do sistema é  $|g_k^{\pm}| \leq 1$  o qual nos leva a seguinte condição,

$$\nu \left| \frac{\gamma(\theta_k)}{\sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}} \right| \leq 2\sqrt{2}, \quad (4.39)$$

definindo a seguinte função  $\phi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \begin{cases} x \coth(x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

onde  $\phi(x)$  atinge seu mínimo em  $x = 0$ , assim de (4.39) e (4.40) podemos fazer a seguinte


 Figura 4.2: Função  $\phi(x)$  definida em (4.43)

estimativa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\gamma(\theta_k)}{\sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}} \right| &\leq \frac{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|}{\sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}} \\ &\leq \frac{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|}{\min_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \sqrt{1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1} \frac{\theta}{\delta} \frac{\theta}{\Delta x} \delta \coth\left(\frac{\theta}{\Delta x} \delta\right)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\gamma(\theta_k)}{\sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}} \right| &\leq \frac{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|}{\min_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \sqrt{1 + \tilde{\beta} \phi(\theta \delta / \Delta x)}} \\ &= \frac{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}}}. \end{aligned}$$

Portanto, uma condição suficiente para a estabilidade é

$$\frac{\nu}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\gamma(\theta)|},$$

assim

$$\begin{aligned} \nu_{\tilde{\beta}}^{FD-2} &\leq 2\sqrt{2}, \\ \nu_{\tilde{\beta}}^{FD-4} &\leq \frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)\sqrt{2\sqrt{6} - 3}}, \end{aligned}$$

e

$$\nu_{\tilde{\beta}}^{SP} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Alem disso, sabendo que  $\phi(x) > |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , de (4.27) e de (4.33) temos que

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{\alpha(\theta_k/\Delta x)}} &\leq \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{\tilde{\beta}|\theta\delta/\Delta x|}} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\Delta x}{\tilde{\beta}\delta}} \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\}, \end{aligned}$$

para  $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$ . Assim chegamos à seguinte condição para a estabilidade:

$$\nu \left( \sqrt{\frac{\Delta x}{\tilde{\beta}\delta}} \right) \leq 2\sqrt{2} \left( \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \right)^{-1}$$

sabendo que

$$\sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma^{FD-2}(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \leq 0.8512, \quad (4.41)$$

$$\sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma^{FD-4}(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \leq 1.0666, \quad (4.42)$$

e

$$\sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma^{SP}(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \leq 1.7724. \quad (4.43)$$

portanto concluímos que

$$\mu_{\tilde{\beta}}^{FD-2} \leq 3.3227, \quad (4.44)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}}^{Fd-4} \leq 2.6514, \quad (4.45)$$

e

$$\mu_{\tilde{\beta}}^{SP} \leq 1.5958. \quad (4.46)$$

□

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas condições suficientes de estabilidade do tipo CFL, primeiro para o sistema linear hiperbólico (4.1) considerando o método de diferenças finitas centradas de segunda ordem e quarta ordem e o método de diferenciação espectral, usando o método de Von Neumann para a análise de estabilidade. Encontramos uma estimativa para o número de Courant normalizado correspondente a cada método.

Para estabelecer condições suficientes para a estabilidade do sistema dispersivo (4.23), é preciso primeiro introduzir dois parâmetros de estabilidade (4.34) e (4.35), além do número adimensional (4.33). Observamos que a estimativa para a condição CFL é uma extensão natural do caso hiperbólico estudado anteriormente e mostramos como a dispersão física relaxa as restrições de estabilidade.

Uma extensão deste trabalho consistirá na substituição do modelo dispersivo linear para ondas internas com fundo plano,

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [u_{xt}], \quad \mathcal{T}_\delta[f](x) = \frac{1}{2\delta} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(y-x)\right) dy, \end{cases} \quad (5.1)$$

por modelos com um maior grau de complexidade. Um destes modelos, proposto em [DZVNC09], aumenta de  $O(\beta)$  para  $O(\beta^{3/2})$  a ordem de aproximação assintótica do presente modelo, resultando em uma relação de dispersão mais próxima à relação observada nas equações de Euler. Em um segundo modelo, o fundo plano é substituído por um fundo variável [dZN07], que introduz coeficientes variáveis em (5.1). Um terceiro modelo que poderia ser considerado nos trabalhos é a versão fracamente não-linear [CC99] do sistema (5.1). A análise de estabilidade numérica dos dois últimos modelos é mais desafiadora e pode demandar técnicas alternativas às técnicas empregadas no mestrado, como o método de energia [Asc08], além de estimativas experimentais das condições de estabilidade e dispersão numéricas. Outro trabalho futuro vai ser a implementação computacional.

# Referências Bibliográficas

- [Asc08] U.M. Ascher, *Numerical methods for evolutionary differential equations*, SIAM, 2008.
- [Asm04] N.H. Asmar, *Partial differential equations and boundary value problems with fourier series*, Prentice Hall, 2nd edition (May 24, 2004), 2004.
- [But06] T. Butz, *Fourier transformation for pedestrians*, Springer Verlag, 2006.
- [CC99] W. Choi and R. Camassa, *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system*, Journal of Fluid Mechanics **396** (1999), 1–36.
- [Chi89] J. Chiriguaya, *Aspectos teóricos sobre ondas internas*, Instituto Oceanográfico de la Armada, Guayaquil, Ecuador (1989).
- [Chu08] E.C. Chu, *Discrete and continuous fourier transforms: analysis, applications and fast algorithms*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [CK07] E.W. Cheney and D.R. Kincaid, *Numerical mathematics and computing*, Brooks/Cole Pub Co, 2007.
- [CM00] A.J. Chorin and J.E. Marsden, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer, 2000.
- [Cra94] F.S. Crawford, *Ondas*, vol. 3, Reverté, 1994.
- [DAVN11] A. Ruiz de Zárate D.G. Alfaro Vigo, S.P. Oliveira and A. Nachbin, *On the numerical approximation of some nonlocal operators*, XXXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, (2011).
- [DCU01] J. Duoandikoetxea and D. Cruz-Urbe, *Fourier analysis*, American Mathematical Society, 2001.
- [dF87] D.G. de Figueiredo, *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.

- [dZ07] A.R. de Zárate, *Reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [DZVNC09] A.R. De Zárate, D.G.A. Vigo, A. Nachbin, and W. Choi, *A higher-order internal wave model accounting for large bathymetric variations*, *Studies in Applied Mathematics* **122** (2009), no. 3, 275–294.
- [Fol92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematical Society, 1992.
- [GC09] J. López Gondar and R. Cipolatti, *Iniciação à física matemática*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [GR11] S. Gross and A. Reusken, *Numerical methods for two-phase incompressible flows*, Springer, 2011.
- [Gra71] R.M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices: A review*, Information Systems Laboratory, Stanford University, 1971.
- [Hir94] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. vol. 1: Fundamentals of numerical discretization*, John Wiley & Sons, 1994.
- [IdMI10] R. Iório and V. de Magalhães Iório, *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.
- [Kin09] F.W. King, *Hilbert transforms, vol. 1*, Cambridge University Press, 2009.
- [Liñ07] A. Liñan, *Las ecuaciones de euler de la mecánica de fluidos*, Lecture notes, Real Academia de Ciencias y Universidad Politécnica de Madrid (2007), 151–177.
- [Mey00] C.D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra, vol. 1*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [MM05] K.W. Morton and D.F. Mayers, *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*, Cambridge Univ Press, 2005.
- [MTT<sup>+</sup>04] P. Milewski, E. Tabak, C. Turner, R. Rosales, and F. Menzaque, *Nonlinear stability of two-layer flows*, *Communications in Mathematical Sciences* **2** (2004), 427–442.
- [Pou09] A.D. Poularikas, *Transforms and applications handbook*, CRC Press, 2009.

- [RdZN08] A. Ruiz de Zárate and A. Nachbin, *A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth*, Communications in Mathematical Sciences **6** (2008), 385–396.
- [Smi85] G.D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Oxford Univ Press, USA, 1985.
- [Sod85] G.A. Sod, *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*, Cambridge Univ Press, 1985.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier analysis: an introduction*, Princeton Univ Press, 2003.
- [Str04] J.C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM, 2004.
- [Tho95] J.W. Thomas, *Numerical partial differential equations*, Springer, 1995.
- [Tom11] M. Tomczak, *An introduction to physical oceanography*, disponível em <http://www.es.flinders.edu.au/~mattom/IntroOc/lecture10.html>, acesso em 1/8/2011.
- [Tre96] L.N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, Cornell University, 1996.
- [Tre00] ———, *Spectral methods in matlab*, SIAM, 2000.
- [VB82] R. Vichnevetsky and J. B. Bowles, *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*, SIAM, Philadelphia, 1982.
- [Váz03] J.L. Vázquez, *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos*, Lecture notes, Universidad Autónoma de Madrid (2003).
- [Wal91] J.S. Walker, *Fast fourier transforms*, CRC press, 1991.