

Vanessa Hlenka

MÉTODOS DE DETECÇÃO DE  
SINGULARIDADES A PARTIR DE DADOS  
ESPECTRAIS

Curitiba

2011

VANESSA HLENKA

MÉTODOS DE DETECÇÃO DE  
SINGULARIDADES A PARTIR DE DADOS  
ESPECTRAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de mestre em Matemática Aplicada, no curso de Pós Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Gabriela Martínez

Curitiba

2011

*Aos meus pais, Nicolau e Sonia,  
pelo apoio incondicional. Sem  
eles nada teria sido possível.*

## RESUMO

A detecção de descontinuidades a partir de dados espectrais de Fourier é importante em muitas aplicações, incluindo processamento de imagens e pós processamento de soluções numéricas para equações diferenciais parciais. O método de concentração, introduzido por Gelb e Tadmor [10], localiza descontinuidades de salto em funções seccionalmente suaves a partir de seus dados espectrais de Fourier. No entanto, como para todas as técnicas globais, o método produz fortes oscilações próximas das descontinuidades de salto, o que torna difícil distinguir as descontinuidades verdadeiras das oscilações artificiais.

Mais tarde, Anne Gelb e Dennis Cates [12] desenvolveram um novo método, que introduz refinamentos ao método de concentração para reduzir as oscilações. Uma técnica adiciona filtragem ao método de concentração. Uma outra usa convolução para determinar as correlações mais fortes entre as ondulações produzidas pelo método de concentração e pela aproximação da função salto de uma função indicadora. O fator de concentração baseado no cruzamento zero, que cria uma formulação mais localizada da aproximação da função salto, também é introduzido. A função *minmod* é usada para combinar várias aproximações da função salto, obtidas pelos métodos de concentração, no sentido de apontar os locais de salto.

Wei, Martínez e De Pierro [28] derivaram a expressão matemática que permite determinar aproximações precisas para pontos de descontinuidade, que não coincidam com os nós da malha uniforme, com um baixo custo computacional. A descoberta consistiu em entender a capacidade do ponto inicial apresentado no Teorema 2.2 (ver [30]) de melhorar significativamente os resultados do método de Gelb e Tadmor [10, 11].

Mhaskar e Prestin [21] desenvolveram outro método, utilizando a decomposição de uma função seccionalmente diferenciável em suas partes contínua e descontínua, e com base na caracterização dos espaços locais de Besov de funções periódicas em termos de operadores polinomiais trigonométricos.

Ao longo deste trabalho, apresentamos os métodos acima citados, e realizamos testes computacionais para algumas funções específicas, incluindo comparações entre alguns dos métodos.

**Palavras-chave:** Funções seccionalmente suaves - Detecção de descontinuidades - Dados de Fourier - Filtragem - Convolução

## ABSTRACT

Edge detection from Fourier spectral data is important in many applications, including image processing and post-processing of solutions to numerical partial differential equations. The concentration method, introduced by Gelb and Tadmor [10], locates jump discontinuities in piecewise smooth functions from their Fourier spectral data. However, as is true for all global techniques, the method yields strong oscillations near the jump discontinuities, which makes it difficult to distinguish true discontinuities from artificial oscillations.

Later, Anne Gelb and Dennis Cates [12] developed a new method, which introduces refinements to the method of concentration to reduce the oscillations. One technique adds filtering to the method of concentration. Another uses convolution to determine the strongest correlations between the waveform produced by the concentration method and the one produced by the jump function approximation of an indicator function. A zero crossing based concentration factor, which creates a more localized formulation of the jump function approximation, is also introduced. The *minmod* is used to combine various approaches jump function, obtained by the methods of concentration, to point out the places to jump.

Wei, Martinez and Pierro [28] derived the mathematical expression for determining accurate approximations for points of discontinuity, which do not coincide with the nodes of the mesh uniform, with a low computational cost. The discovery was to understand the ability of the starting point shown in Theorem 2.2 (see [30]) to significantly improve the results of the method of Gelb and Tadmor [10, 11].

Mhaskar and Prestin [21] developed another method, using the decomposition of a piecewise differentiable function in continuous and discontinuous parts, and based on the characterization of local Besov spaces of periodic functions in terms of trigonometric polynomial operators.

Throughout this work, we present the methods above, and we performed computational tests for some specific functions, including comparisons between some of the methods.

**Keywords:** Piecewise smooth functions - Edge detection - Fourier data - Filtering - Convolution

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Análise de Fourier</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Série de Fourier . . . . .   | 3         |
| 1.1.1 Ortogonalidade de Senos e Cossenos . . . . .                                       | 3         |
| 1.1.2 Determinação dos Coeficientes . . . . .  | 4         |
| 1.1.3 Série de Cossenos e Série de Senos . . . . .                                       | 6         |
| 1.2 Estimativa da Ordem de Magnitude dos Coeficientes . . . . .                          | 8         |
| 1.2.1 Magnitude dos Coeficientes sob Hipóteses Especiais . . . . .                       | 8         |
| 1.2.2 Teorema de Riemann sobre o Limite Geral dos Coeficientes . . . . .                 | 10        |
| 1.2.3 Estimativa de uma Soma de Cossenos . . . . .                                       | 12        |
| 1.3 Convergência da Série de Fourier . . . . .   | 12        |
| 1.3.1 Fórmula Integral para Soma Parcial de Série de Fourier . . . . .                   | 12        |
| 1.3.2 Convergência em um Ponto de Continuidade . . . . .                                 | 13        |
| 1.3.3 Convergência Uniforme sob Hipóteses Especiais . . . . .                            | 14        |
| 1.3.4 Convergência em um Ponto de Descontinuidade . . . . .                              | 15        |
| 1.4 Forma complexa da série de Fourier . . . . .   | 18        |
| 1.5 A Transformada Discreta de Fourier (DFT) . . . . .                                   | 18        |
| 1.5.1 Propriedades da DFT . . . . .  | 19        |
| 1.5.2 A Transformada Rápida de Fourier (FFT) . . . . .                                   | 20        |
| 1.5.3 Soma Parcial de Fourier Conjugada . . . . .  | 21        |
| <b>2 Métodos de Detecção de Descontinuidades a Partir de Dados Espectrais de Fourier</b> | <b>22</b> |
| 2.1 Método de Concentração (Gelb e Tadmor) . . . . .                                     | 22        |
| 2.2 Minmod . . . . .   | 25        |
| 2.3 Fatores de Concentração Filtrados . . . . .  | 25        |
| 2.4 Método de Concentração “Matching Waveform” . . . . .                                 | 26        |
| 2.4.1 O Método de Concentração “Matching Waveform” . . . . .                             | 26        |
| 2.4.2 The Zero Crossing Matching Waveform . . . . .                                      | 29        |
| 2.4.3 O Método de Concentração “Matching Waveform” Combinado . . . . .                   | 33        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.5      | Método de Wei, Martínez e De Pierro . . . . .                  | 33        |
| 2.5.1    | Primeiras aproximações para os pontos de descontinuidade . . . | 33        |
| 2.5.2    | Considerações sobre a determinação dos $x_{qr}$ . . . . .      | 39        |
| 2.5.3    | Algumas ponderações sobre o método . . . . .                   | 40        |
| 2.6      | Método de Mhaskar e Prestin . . . . .                          | 42        |
| 2.6.1    | Espaços de suavidade local . . . . .                           | 43        |
| 2.6.2    | Exemplos Numéricos: Expoentes locais de Lipschitz . . . . .    | 48        |
| 2.6.3    | Detecção de singularidades . . . . .                           | 50        |
| <b>3</b> | <b>Testes Computacionais</b>                                   | <b>52</b> |
| 3.1      | Os Métodos de Concentração . . . . .                           | 52        |
| 3.1.1    | Minmod . . . . .   | 53        |
| 3.1.2    | O Método de Concentração Filtrado . . . . .                    | 53        |
| 3.1.3    | O Método de Concentração “Matching Waveform” . . . . .         | 53        |
| 3.1.4    | O Método “Zero Crossing Matching Waveform” . . . . .           | 53        |
| 3.2      | O Método de Wei, Martínez e De Pierro . . . . .                | 54        |
| 3.3      | O Método de Mhaskar e Prestin . . . . .                        | 55        |
|          | <b>Conclusão</b>   | <b>64</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                              | <b>66</b> |

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Série de cossenos de Fourier da função do Exemplo 1.1. A função (e sua extensão par) estão representadas em vermelho, enquanto sua aproximação por série de cossenos está representada em verde, para $n = 2$ . . . . .                               | 7  |
| 1.2  | Série de senos de Fourier da função do Exemplo 1.1. A função (e sua extensão ímpar) estão representadas em vermelho, enquanto sua aproximação por série de senos está representada em verde, para $n = 15$ . . . . .                                  | 8  |
| 1.3  | Ilustração do Fênomeno de Gibbs. Somas parciais de Fourier para a função do Exemplo 1.2 com 5, 11 e 22 termos, respectivamente em azul, verde e vermelho. . .   | 17 |
| 3.1  | A função dada pelo Exemplo 3.1, e sua função salto. . . . .   | 56 |
| 3.2  | O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando $\sigma_{Trig}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui, $N = 64$ . . . . .  | 56 |
| 3.3  | O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando $\sigma_{Poly}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui, $N = 64$ . . . . .  | 57 |
| 3.4  | O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando $\sigma_{Exp}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui, $N = 64$ . . . . .   | 57 |
| 3.5  | O método de concentração <i>minmod</i> 2.4 aplicado ao Exemplo 3.1 usando os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10). A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui, $N = 64$ . . . . . | 58 |
| 3.6  | Os resultados do método de concentração <i>minmod</i> para o Exemplo 3.1, com $N = 64$ , usando o método de concentração (2.17). . . . .  | 58 |
| 3.7  | <i>Signature profile</i> (2.21) para $\sigma_{Trig}$ . Aqui, $N = 32$ . . . . .   | 59 |
| 3.8  | <i>Signature profile</i> (2.21) para $\sigma_{Poly}$ . Aqui, $N = 32$ . . . . .   | 59 |
| 3.9  | <i>Signature profile</i> (2.21) para $\sigma_{Exp}$ . Aqui, $N = 32$ . . . . .  | 59 |
| 3.10 | O algoritmo <i>minmod</i> (2.14) aplicado ao Exemplo 3.1, com o método <i>matching waveform</i> , usando os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10). . . . .  | 60 |
| 3.11 | A função $g$ , dada por (3.7). . . . .  | 60 |
| 3.12 | O gráfico de $ \tau_n^P(g, f, x) $ antes da primeira iteração. . . . .  | 60 |
| 3.13 | O gráfico de $ \tau_n^P(g, f, x) $ depois da primeira iteração, após deletar a singularidade em $\pi/2$ . . . . .   | 61 |

- 3.14 Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_1$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor superestima o número de pontos de descontinuidade. . . . . 61
- 3.15 Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_2$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor superestima o número de pontos de descontinuidade. . . . . 62
- 3.16 Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_3$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar todos os pontos de descontinuidade. . . . . 62
- 3.17 Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_4$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar todos os pontos de descontinuidade. . . . . 63

# Introdução

A detecção de descontinuidades é um problema fundamental em processamento de imagens e visão computacional, particularmente nas áreas de detecção e extração de características, que visam a identificação de pontos, em uma imagem digital, onde alguma propriedade da imagem muda drasticamente ou, mais formalmente, tem descontinuidades. Exemplos práticos podem ser encontrados em tomografia computadorizada, inversão em ressonância magnética, e as leis de conservação em equações diferenciais. Tais mudanças podem corresponder a descontinuidades em profundidade, descontinuidades na orientação da superfície, mudanças nas propriedades do material e variações na iluminação da cena.

No caso bidimensional, o resultado da aplicação de um detector de borda (ou descontinuidade) de uma imagem pode levar a um conjunto de curvas conectadas que indicam os limites dos objetos, os limites de marcas na superfície, bem como as curvas que correspondem a descontinuidades na orientação da superfície. Assim, a aplicação de um algoritmo de detecção de bordas em uma imagem pode reduzir significativamente a quantidade de dados a ser processada e pode, portanto, filtrar informações que possam ser consideradas menos relevantes, preservando as propriedades estruturais importantes de uma imagem. Se a etapa de detecção de bordas é bem sucedida, a tarefa subsequente de interpretar o conteúdo de informações na imagem original, portanto, pode ser consideravelmente simplificada. No entanto, nem sempre é possível obter tais bordas ideais a partir de imagens da vida real de complexidade moderada. Bordas extraídas de imagens não-triviais são muitas vezes dificultadas pela fragmentação, o que significa que as curvas das bordas não estão ligadas, faltando segmentos, bem como bordas falsas que não correspondem aos fenômenos interessantes na imagem - o que complica a tarefa subsequente de interpretar os dados da imagem.

Nos últimos anos, no entanto, foi feita investigação substancial e bem sucedida. Neste trabalho, consideramos o problema de detectar as bordas presentes em uma função *quando são dados seus coeficientes de Fourier*. Há métodos numéricos que estimam os coeficientes de Fourier de uma função de interesse ao invés de estimar diretamente a solução. A determinação precisa dos pontos de descontinuidade é essencial para obter convergência exponencial da série de Fourier.

No primeiro capítulo deste trabalho, estudamos análise de Fourier, que é

necessária para o entendimento dos métodos de detecção de descontinuidades que serão apresentados ao longo do segundo capítulo. Depois apresentamos alguns métodos de detecção de singularidades. Primeiro falamos sobre o método de concentração, que foi desenvolvido por Gelb e Tadmor, e mais tarde aprimorado de diversas maneiras. Apresentamos também o método de Wei, Martínez e De Pierro, que apresenta melhores resultados que o método de Gelb e Tadmor. O método de Mhaskar e Prestin aproveita a possibilidade de se decompor uma função em uma parte contínua e outra descontínua para desenvolver seu método. O último capítulo deste trabalho mostra os resultados da aplicação dos métodos a algumas funções específicas, e faz também uma comparação entre alguns dos métodos apresentados.

# Capítulo 1

## Análise de Fourier

Precisamos estudar as propriedades de convergência de séries de Fourier para entender os métodos que serão exibidos adiante. Demonstrações de alguns resultados, que aqui foram omitidas, podem ser encontradas em [16, 8, 31].

### 1.1 Série de Fourier

Uma dada função  $f(x)$  pode ser representada, sob certas hipóteses, por uma série na forma

$$f(x) = A_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \cdots + b_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + \cdots . \quad (1.1)$$

Tal série, com os coeficientes determinados da maneira descrita a seguir, é chamada de *série de Fourier*.

Uma vez que cada termo é uma função periódica de período  $2\pi$ , a soma da série necessariamente tem o mesmo período. Vale lembrar que, se  $a$  é um período, então qualquer múltiplo inteiro de  $a$  é também um período.

Uma série de Fourier é útil para representar uma dada função em um intervalo de comprimento  $2\pi$ , ou qualquer outro de comprimento arbitrário, como será apontado adiante, sem nenhuma dificuldade adicional além de uma ligeira perda de simplicidade nas fórmulas.

#### 1.1.1 Ortogonalidade de Senos e Cossenos

A determinação dos coeficientes depende da avaliação de certas integrais definidas envolvendo os senos e cossenos que entram nos termos da série. Em primeiro lugar, se  $n$  é um inteiro diferente de zero,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = 0. \quad (1.2)$$

A última relação vale também para  $n = 0$ ; na primeira, ao fixar  $n = 0$  obtemos  $2\pi$  como resultado da integral. Até o final desta subseção,  $p$  e  $q$  representarão números inteiros não-negativos. Como

$$\cos(px) \cos(qx) = \frac{1}{2} \cos[(p - q)x] + \frac{1}{2} \cos[(p + q)x],$$

segue, com  $n = p - q$ , e outra vez  $n = p + q$ , que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = 0 \quad (1.3)$$

quando  $p \neq q$ . Se  $q = p \neq 0$ , a integral de  $\cos[(p + q)x]$  sobre o intervalo do período ainda é zero, enquanto o outro termo fornece

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(px) dx = \pi.$$

Similarmente, as identidades

$$\operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}(qx) = \frac{1}{2} \cos[(p - q)x] - \frac{1}{2} \cos[(p + q)x],$$

$$\operatorname{sen}(px) \cos(qx) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}[(p - q)x] + \frac{1}{2} \operatorname{sen}[(p + q)x],$$

fornecem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}(qx) dx = 0, \quad p \neq q, \quad (1.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(px) dx = \pi, \quad p \neq 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(px) \cos(qx) dx = 0, \quad (1.5)$$

esta última valendo se  $p$  e  $q$  são iguais ou diferentes.

A anulação das integrais em (1.3), (1.4) e (1.5) quer dizer que quaisquer duas das funções  $1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \dots$  são ortogonais entre si no intervalo  $(-\pi, \pi)$ .

Em geral, duas funções  $u(x)$  e  $v(x)$  são ditas ortogonais num intervalo  $(a, b)$  se

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = 0.$$

### 1.1.2 Determinação dos Coeficientes

Se assumirmos que a série pode ser integrada termo a termo, a integração de (1.1), com o uso de (1.2), fornece

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi A_0, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Para determinar  $a_k$ , quando  $k \neq 0$ , multiplicamos a identidade (1.1) por  $\cos(kx)$  e integramos a expressão resultante,  $f(x) \cos(kx)$ , de  $-\pi$  a  $\pi$ , assumindo ainda que a série pode ser integrada termo a termo. Como consequência de (1.2), (1.3) e (1.5), obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = \pi a_k,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx. \quad (1.6)$$

Similarmente, para determinar  $b_k$ , multiplicamos a identidade (1.1) por  $\sin(kx)$  e integramos a expressão resultante de  $-\pi$  a  $\pi$ , obtendo

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (1.7)$$

Assim, denotando  $a_0 = 2A_0$ , escrevemos a série de Fourier na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad (1.8)$$

com todos os coeficientes, inclusive  $a_0$ , dados por (1.6) e (1.7).

Sejam  $F(y)$  é uma função na variável  $y$  com período  $2p$ , onde  $p$  é um número positivo arbitrário, e

$$x = \frac{\pi y}{p}, \quad y = \frac{px}{\pi},$$

e  $F(y)$  uma função de  $x$  denotada por  $f(x)$ , ou seja,  $f(x) = F\left(\frac{px}{\pi}\right)$ . Temos que  $f(x)$  tem período  $2\pi$  em termos de  $x$ . Se  $f(x)$  é representada por uma série da forma (1.8), constitui-se uma representação de  $F(y)$  na forma

$$F(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi y}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi y}{p}\right) \right],$$

e as fórmulas (1.6) e (1.7) tornam-se

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(y) \cos\left(\frac{k\pi y}{p}\right) dy,$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{p}\right) dy.$$

Toda a teoria de séries de Fourier é de bastante generalidade, porém a discussão prosseguirá em termos das fórmulas mais simples, associadas com o valor particular  $p = \pi$ .

É óbvio da interpretação de uma integral definida como a área sob a curva, e facilmente provado com base na definição analítica que, se uma função periódica é integrável no intervalo de um período, este intervalo pode ser substituído por

qualquer outro do mesmo comprimento sem mudar o valor da integral, ou seja, se  $\varphi(x)$  tem período  $2\pi$ ,

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x) dx = \int_b^{b+2\pi} \varphi(x) dx$$

para todos os valores de  $a$  e  $b$ . Em conexão com séries de Fourier para uma função de período  $2\pi$ , as integrais podem ser escritas sobre o intervalo  $(0, 2\pi)$  em vez de  $(-\pi, \pi)$ , e o uso de ainda outro intervalo de período é igualmente admissível e algumas vezes essencial.

### 1.1.3 Série de Cossenos e Série de Senos

Da afirmação do último parágrafo segue que, se  $\varphi(x)$  é uma função par tal que  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ , e se esta é integrável em um intervalo  $(-a, a)$  simétrico com relação à origem, então

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 2 \int_0^a \varphi(x) dx.$$

Similarmente, se  $\varphi(x)$  é ímpar, isto é, se  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ,

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 0,$$

pois as integrais de  $-a$  a  $0$  e de  $0$  a  $a$  são iguais em módulo, mas têm sinais opostos.

Se  $f(x)$  é uma função par no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , então a função  $f(x) \cos(kx)$  é par e a função  $f(x) \sin(kx)$  é ímpar, para cada valor de  $k$ . Logo, os coeficientes na série de Fourier para  $f(x)$  são definidos por (1.6) e (1.7),

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx \quad (1.9)$$

e  $b_k = 0$ . A série de Fourier para  $f(x)$  contém apenas termos de cossenos, e os coeficientes são dados por (1.9).

Se  $f(x)$  é ímpar, então os produtos  $f(x) \cos(kx)$  e  $f(x) \sin(kx)$  são ímpar e par respectivamente, e então a série de Fourier contém apenas termos de senos, sendo os coeficientes dados por  $a_k = 0$  e

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx. \quad (1.10)$$

As fórmulas (1.9) e (1.10) envolvem apenas os valores de  $f(x)$  no intervalo  $(0, \pi)$ . Qualquer função que é integrável de  $0$  a  $\pi$  pode ser formalmente representada naquele intervalo de duas maneiras distintas: por uma série de cossenos com coeficientes (1.9), fazendo-se assim a sua *extensão par*; ou por uma série de senos com coeficientes (1.10), fazendo-se assim a sua *extensão ímpar*. O exemplo a seguir

deixa isso mais claro.

**Exemplo 1.1** Seja  $f(x) = x$  no intervalo  $(0, \pi)$ . Para a série de cossenos correspondente,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) dx.$$

Quando  $k = 0$ ,  $a_0 = \pi$ . Para  $k > 0$ ,

$$\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \left[ \frac{1}{k} x \sin(kx) \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{1}{k^2} [\cos(k\pi) - 1],$$

de modo que  $a_k = 0$  quando  $k$  é par, e  $a_k = -\frac{4}{\pi k^2}$  quando  $k$  é ímpar. A série resultante (ver Figura 1.1) é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right]. \quad (1.11)$$

Para a série de senos,

$$\int_0^\pi x \sin(kx) dx = \left[ -\frac{1}{k} x \cos(kx) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kx) dx = -\frac{\pi}{k} \cos(k\pi),$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) dx = (-1)^{k-1} \frac{2}{k},$$

de modo que a série (ver Figura 1.2) tem a forma

$$2 \left[ \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right]. \quad (1.12)$$

Cada uma destas séries é de fato convergente para  $x$  ao longo do intervalo  $(0, \pi)$ , exceto para o ponto extremo  $x = \pi$  no caso da série de senos, porque a extensão ímpar apresenta uma descontinuidade. Isto será estabelecido na prova de convergência mais adiante.

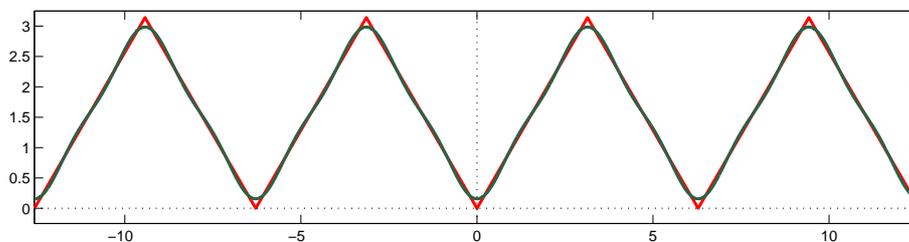


Figura 1.1: Série de cossenos de Fourier da função do Exemplo 1.1. A função (e sua extensão par) estão representadas em vermelho, enquanto sua aproximação por série de cossenos está representada em verde, para  $n = 2$ .

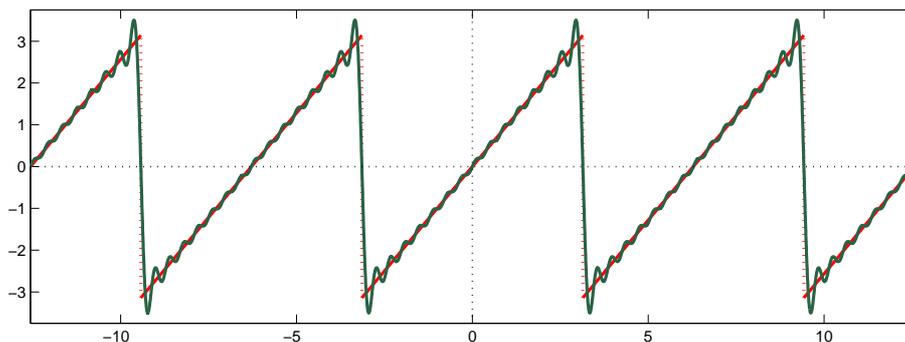


Figura 1.2: Série de senos de Fourier da função do Exemplo 1.1. A função (e sua extensão ímpar) estão representadas em vermelho, enquanto sua aproximação por série de senos está representada em verde, para  $n = 15$ .

## 1.2 Estimativa da Ordem de Magnitude dos Coeficientes

A seguir, estimaremos a magnitude dos coeficientes da série de Fourier sob certas hipóteses, e depois verificaremos que os coeficientes convergem para zero.

### 1.2.1 Magnitude dos Coeficientes sob Hipóteses Especiais

Seja  $f(x)$  uma função de período  $2\pi$  com derivada primeira contínua para todos os valores de  $x$ . Integrando por partes a integral que define o coeficiente de Fourier  $a_k$ , obtemos

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \left[ \frac{1}{k} f(x) \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx.$$

O produto  $f(x) \sin(kx)$  se anula em ambas as extremidades do intervalo. Se  $M_1$  é o máximo de  $|f'(x)|$ ,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x) \sin(kx)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} M_1 dx = 2\pi M_1;$$

além da questão de demonstração formal, o fato de que o valor absoluto da integral não pode exceder a integral do valor absoluto do integrando é evidente da interpretação da integral em termos de área. Então  $|a_k| \leq 2M_1/k$ . Similarmente,  $|b_k| \leq 2M_1/k$ ; a expressão  $f(x) \cos(kx)$  que entra no cálculo não se anula em geral para  $x = \pm\pi$ , mas assume o mesmo valor em ambas as extremidades do intervalo. Os coeficientes se aproximam de zero quando  $k$  tende ao infinito, com pelo menos o grau de rapidez indicado pela desigualdade obtida.

Suponha agora que  $f(x)$  tem derivada segunda contínua, com  $M_2$  o máximo de  $|f''(x)|$ . Fazendo duas integrações por parte sucessivas, com atenção à periodicidade,

dade das funções envolvidas,

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = -\frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(kx) dx,$$

e  $|a_k| \leq 2M_2/k^2$ . Do mesmo modo,  $|b_k| \leq 2M_2/k^2$ .

Nas condições do último parágrafo, podemos deduzir imediatamente que a série de Fourier é convergente. Temos que

$$|a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)| \leq 4M_2/k^2,$$

e o membro da direita é o termo geral de uma série convergente. Porém, do ponto de vista da integralidade da demonstração, isto não é o mesmo que dizer que a série converge para  $f(x)$ ; se os termos de seno forem omitidos, a série de cossenos remanescente não será menos convergente, mas não representaria  $f(x)$  em geral. Mais adiante daremos uma prova de que a função converge para a função desejada, *com hipóteses menos restritivas sobre  $f(x)$* . Será conveniente termos desigualdades similares para os coeficientes sob hipóteses um pouco diferentes. Seja  $f(x)$  contínua e de período  $2\pi$ , e suponhamos que o intervalo  $(-\pi, \pi)$  pode ser dividido em um número finito de subintervalos, sendo  $f(x)$  *linear em cada um deles*. O gráfico de  $f(x)$  em qualquer intervalo de período é então composto de um número finito de linhas ininterruptas com declive finito de ponta a ponta. Tal função será chamada, por brevidade, de *função linha quebrada*. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  as abscissas dos cantos no interior de  $(-\pi, \pi)$  e, por uniformidade de notação nas próximas fórmulas, sejam  $x_0 = -\pi, x_m = \pi$  (sejam estes pontos cantos ou não). Seja  $\lambda_j$  o valor constante de  $f'(x)$  no intervalo  $(x_{j-1}, x_j)$ , e seja  $\lambda$  o maior dos números  $|\lambda_j|$ . Para o  $j$ -ésimo subintervalo,

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos(kx) dx &= \left[ \frac{1}{k} f(x) \operatorname{sen}(kx) \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \lambda_j \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{k} [f(x_j) \operatorname{sen}(kx_j) - f(x_{j-1}) \operatorname{sen}(kx_{j-1})] \\ &\quad + \frac{\lambda_j}{k^2} [\cos(kx_j) - \cos(kx_{j-1})]. \end{aligned}$$

Somando os  $m$  subintervalos, obtemos

$$\sum_{j=1}^m [f(x_j) \operatorname{sen}(kx_j) - f(x_{j-1}) \operatorname{sen}(kx_{j-1})] = f(\pi) \operatorname{sen}(k\pi) - f(-\pi) \operatorname{sen}(-k\pi) = 0,$$

enquanto

$$\left| \frac{\lambda_j}{k^2} [\cos(kx_j) - \cos(kx_{j-1})] \right| \leq \frac{2\lambda}{k^2}$$

e

$$\left| \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{k^2} [\cos(kx_j) - \cos(kx_{j-1})] \right| \leq \frac{2m\lambda}{k^2}.$$

Conseqüentemente,

$$|a_k| = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos(kx) dx \right| \leq \frac{2m\lambda}{\pi k^2}.$$

Analogamente,  $|b_k| \leq 2m\lambda/(\pi k^2)$ ; a diferença  $f(\pi) \cos(k\pi) - f(-\pi) \cos(-k\pi)$  é zero em razão da periodicidade de  $f(x)$  e  $\cos(kx)$ , embora seus termos em geral não se anulem separadamente. Os coeficientes de Fourier  $a_k, b_k$  de uma função linha quebrada são tais que

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^2}, \quad |b_k| \leq \frac{C}{k^2}, \quad (1.13)$$

onde  $C$  é independente de  $k$ .

## 1.2.2 Teorema de Riemann sobre o Limite Geral dos Coeficientes

Seja agora  $f(x)$  uma função qualquer integrável no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , não necessariamente periódica ou definida em todos os pontos fora desse intervalo, mas sujeita à restrição adicional de que  $[f(x)]^2$  também seja integrável em  $(-\pi, \pi)$ . Seja  $S_n[f](x)$  a soma parcial de sua série de Fourier através de termos da  $n$ -ésima ordem,

$$S_n[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]. \quad (1.14)$$

Segue da definição dos coeficientes que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n[f](x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right] \\ &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

e das relações de integral na Subseção 1.1.1, na expansão de  $[S_n[f](x)]^2$  e integração termo a termo, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [S_n[f](x)]^2 dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n[f](x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n[f](x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} [S_n[f](x)]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \left[ \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]. \end{aligned}$$

O primeiro membro desta igualdade, sendo a integral de um quadrado, é não-negativo. Segue que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx.$$

Uma vez que isto é válido para todos os valores de  $n$ , enquanto o lado direito é independente de  $n$ ,  $\sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$  é convergente, visto que uma condição necessária para a convergência de uma série é que o termo geral se aproxime de zero,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0. \quad (1.15)$$

O teorema sobre a aproximação dos coeficientes de Fourier de zero, conhecido como teorema de Riemann, é de fato verdadeiro sem necessidade de que  $[f(x)]^2$  seja integrável. A prova deste, mais geral, será omitida aqui, mas pode ser encontrada em [31].

A essência de (1.15) como provado nesta subseção pode ser registrada numa notação diferente, dizendo que, se  $\varphi(u)$  é uma função (não necessariamente periódica) tal que  $\varphi$  e  $\varphi^2$  são integráveis em  $(-\pi, \pi)$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \cos(nu) du = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin(nu) du = 0. \quad (1.16)$$

Se as hipóteses são satisfeitas por  $\varphi(u)$ , elas serão também satisfeitas pelas funções  $\varphi(u) \sin(\frac{1}{2}u)$  e  $\varphi(u) \cos(\frac{1}{2}u)$ . Seja o primeiro desses produtos substituído por  $\varphi(u)$  na primeira equação de (1.16), e o outro na segunda equação. Pela adição dos resultados,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right] du = 0. \quad (1.17)$$

### 1.2.3 Estimativa de uma Soma de Cossenos

O estudo da convergência da série de Fourier terá base na identidade trigonométrica obtida a seguir. Seja a soma

$$G(v) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kv)$$

multiplicada por  $2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}v\right)$ . Para  $k \geq 1$ , sejam os produtos avaliados pela relação

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}v\right) \cos(kv) = \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)v\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)v\right].$$

Então

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}v\right) G(v) &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}v\right) + \sum_{k=1}^n \left\{ \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)v\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)v\right] \right\} \\ &= \operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)v\right], \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2} + \cos(v) + \cos(2v) + \cdots + \cos(nv) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)v\right]}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}v\right)}. \quad (1.18)$$

## 1.3 Convergência da Série de Fourier

Estudaremos a seguir a convergência da série de Fourier, estabelecendo a relação existente entre suavidade da função e convergência da sua série de Fourier.

### 1.3.1 Fórmula Integral para Soma Parcial de Série de Fourier

Em  $S_n[f](x)$  definida por (1.14), sejam as fórmulas para os coeficientes escritas com  $t$  como variável de integração:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt.$$

Na formação dos produtos  $a_k \cos(kx)$ ,  $b_k \operatorname{sen}(kx)$  com estas expressões para os coeficientes, os fatores  $\cos(kx)$ ,  $\operatorname{sen}(kx)$ , sendo constantes com respeito à variável de integração, podem ser escritos dentro da integral, e o par de termos  $a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$  pode ser representado por

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) \operatorname{sen}(kx) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos[k(t-x)] dt.$$

Então  $S_n[f](x)$  tem a representação

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos[k(t-x)] \right] dt,$$

que, por (1.18), com  $v = t - x$ , é equivalente a

$$S_n[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right]}{2 \text{sen} \left[ \frac{1}{2} (t-x) \right]} dt. \quad (1.19)$$

Suponhamos agora que  $f(x)$  tem período  $2\pi$ . Em (1.19), façamos a substituição  $u = t - x$ . Os limites de integração com respeito a  $u$  são, em primeira instância,  $-\pi - x$  e  $\pi - x$ ; pela observação do último parágrafo da Subseção 1.1.2, entretanto, uma vez que o integrando tem período  $2\pi$  com respeito a  $u$ , a integral tem o mesmo valor de  $-\pi - x$  a  $\pi - x$  que de  $-\pi$  a  $\pi$ . Então

$$S_n[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du. \quad (1.20)$$

### 1.3.2 Convergência em um Ponto de Continuidade

Pela integração de (1.18) de  $-\pi$  a  $\pi$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du = \pi. \quad (1.21)$$

Multipliquemos esta equação por  $(1/\pi)f(x)$ ; a função  $f(x)$  pode ser escrita dentro da integral, pois é constante com respeito à variável  $u$ :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du. \quad (1.22)$$

Subtraindo (1.22) de (1.20), obtemos

$$S_n[f](x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du. \quad (1.23)$$

A prova de convergência consiste em mostrar que, sob hipóteses adequadas, esta expressão se aproxima de zero quando  $n$  tende a infinito.

Seja  $f(x)$  uma função integrável de período  $2\pi$  tal que  $[f(x)]^2$  também é integrável num período. Esta condição certamente será satisfeita se  $f(x)$  for contínua, ou se for contínua exceto para um número finito de saltos finitos em um período. Um salto finito é um ponto de descontinuidade no qual a função se aproxima de um limite pela direita e de outro pela esquerda. Concentremos a atenção na questão

de convergência em um ponto específico, e assumamos aqui que  $f(x)$  é contínua no ponto em questão. Fixado  $x$ , seja

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}u\right)}.$$

Então, por (1.23)

$$S_n[f](x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right] du. \quad (1.24)$$

O quociente  $\varphi(u)$  pode ser escrito na forma

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \frac{\frac{1}{2}u}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}u\right)}.$$

A fração  $(\frac{1}{2}u)/\operatorname{sen}(\frac{1}{2}u)$  tende a 1 quando  $u$  tende a 0 e, se definida por este valor limitante para  $u = 0$ , é contínua para  $-\pi \leq u \leq \pi$ . A condição de que  $[f(x+u) - f(x)]/u$  se aproxime de um limite quando  $u$  tende a zero é precisamente a condição de que  $f(t)$  seja derivável em  $t = x$ , pela definição de derivada. Se uma derivada existe no sentido estrito, isto é, se o quociente diferença tende a um mesmo limite por ambos os lados quando  $u$  tende a zero (a palavra limite refere-se sempre a um limite finito),  $\varphi(u)$  é contínua para  $u = 0$  se definida por seu valor limitante. Se limites diferentes são obtidos pela direita e pela esquerda, como em um ponto onde o gráfico de  $f(t)$  tem um canto,  $\varphi(u)$  tem um salto finito para  $u = 0$ . Em ambos os casos, se  $f(t)$  é contínua exceto para um número finito de saltos finitos em um período, o mesmo é verdade para  $\varphi(u)$  no intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Por (1.17), aplicado a (1.24),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n[f](x) - f(x)] = 0.$$

Assim, podemos concluir que, se  $f(x)$ , de período  $2\pi$ , é contínua, ou contínua exceto para um número finito de saltos finitos em um período, sua série de Fourier converge para  $f(x)$  em todos os pontos de continuidade onde  $f(x)$  tem derivadas laterais, sejam estas iguais ou diferentes.

A conclusão é válida mesmo que não existam derivadas no ponto, e sem referências aos detalhes dos dois últimos parágrafos, desde que  $[f(x)]^2$  seja integrável. Ainda mais geralmente, é suficiente que  $\varphi(u)$  e  $|\varphi(u)|$  sejam integráveis, se considerarmos conhecido o teorema de Riemann da Subseção 1.2.2 na sua forma mais geral.

### 1.3.3 Convergência Uniforme sob Hipóteses Especiais

A prova da última subseção se aplica em particular se  $f(x)$  é uma função linha quebrada como descrito na Subseção 1.2.1. Sabemos, da Subseção 1.2.1, que

a série de Fourier para tal função é convergente; asseguremos agora que a soma da série é  $f(x)$  para todos os valores de  $x$ .

Uma vez que a série atualmente representa  $f(x)$ , a diferença entre  $f(x)$  e  $S_n[f](x)$  pode ser escrita na forma

$$f(x) - S_n[f](x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)].$$

Em consequência de (1.13),  $|a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)| \leq 2C/k^2$  e, portanto,

$$|f(x) - S_n[f](x)| \leq 2C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Como  $1/k^2 \leq 1/t^2$  para  $k-1 \leq t \leq k$ , segue que

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^k \frac{dt}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

Então, para todos os valores de  $x$ ,

$$|f(x) - S_n[f](x)| \leq \frac{2C}{n}.$$

O membro da direita é independente de  $x$ , e tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Logo, conclui-se que a série é *uniformemente convergente*:

A série de Fourier para uma função linha quebrada (do tipo especificado) converge uniformemente para a função para todos os valores de  $x$ .

A discussão da subseção presente de fato se aplica em particular à série de cossenos (1.11) do Exemplo 1.1, considerada como série de Fourier para a função de período  $2\pi$  que é igual a  $|x|$  para  $-\pi \leq x \leq \pi$ , e justifica a afirmação feita no Exemplo 1.1 sobre a convergência daquelas séries.

### 1.3.4 Convergência em um Ponto de Descontinuidade

A série de senos em (1.12) no Exemplo 1.1 pode ser similarmente considerada como a série de Fourier para a função periódica descontínua lá descrita, e a prova da Subseção (1.3.2) estabelece sua convergência, exceto para os valores isolados de  $x$  nos quais as descontinuidades ocorrem. Nestes pontos, como observado no Exemplo 1.1, a convergência da série particular em questão é óbvia, sendo a sua soma igual a zero. A série converge para o valor médio entre os limites laterais direito e esquerdo da função. Mostremos que este comportamento da série de fato ocorre em todos os pontos de descontinuidade.

Seja  $f(x)$  uma função de período  $2\pi$  e, por simplicidade, assumida contínua exceto para um número finito de saltos finitos em um período. Sejam  $f(x+)$  e  $f(x-)$

os limites à direita e à esquerda de  $f(x)$  em  $x$ , respectivamente, iguais ou diferentes, dependendo se  $f$  é contínua ou descontínua em  $x$ . Para dado  $x$ , sejam

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x+u) - f(x+)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}u\right)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{f(x+u) - f(x-)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}u\right)},$$

sendo  $\varphi_1$  definida para  $u > 0$  e  $\varphi_2$  para  $u < 0$ . Suponhamos, novamente por simplicidade, que cada um dos quocientes diferença

$$\frac{f(x+u) - f(x+)}{u}, \quad \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

se aproxima de um limite quando  $u$  tende a zero, através de valores com sinal algébrico apropriado, isto é, tal que a função igual a  $f(t)$  para  $t > x$  e igual a  $f(x+)$  para  $t = x$  tem derivada à direita no ponto  $t = x$ , com uma interpretação correspondente à esquerda. Então  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  também têm limites para  $u = 0$ , e se definidas por seus valores limitantes, são contínuas exceto para um número finito de saltos finitos em  $(0, \pi)$  e  $(-\pi, 0)$ , respectivamente.

As hipóteses nas quais (1.17) tem base são satisfeitas se  $\varphi$  e  $\varphi^2$  são integráveis em  $(0, \pi)$  e  $\varphi$  é identicamente nula no intervalo  $(-\pi, 0)$ . Então, se  $\varphi$  é uma função tal que  $\varphi$  e  $\varphi^2$  são integráveis em  $(0, \pi)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \varphi(u) \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right] du = 0.$$

Uma observação similar se aplica ao intervalo  $(-\pi, 0)$ . Uma vez que o integrando em (1.21) é uma função par de  $u$ ,

$$\int_{-\pi}^0 \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du = \frac{\pi}{2}.$$

A integral em (1.20) pode ser considerada como a soma das integrais de  $-\pi$  a 0 e de 0 a  $\pi$ . Por passos análogos aos que levaram a (1.23) e (1.24),

$$\frac{1}{2} f(x+) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du,$$

$$\frac{1}{2} f(x-) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} u \right)} du,$$

$$\begin{aligned} S_n[f](x) - \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_1(u) \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right] du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \varphi_2(u) \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right] du. \end{aligned}$$

Sob as hipóteses impostas a  $f(x)$  no segundo parágrafo desta subseção, cada

uma das duas últimas integrais tende a zero quando  $n$  tende a infinito, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n[f](x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)],$$

isto é, a série converge para a média dos limites laterais de  $f(x)$ .

Em consequência de um teorema bem conhecido da teoria de funções, a série não pode convergir uniformemente na vizinhança de um ponto de descontinuidade. O comportamento das somas parciais próximo a um salto finito (a maneira de convergência) é conhecido como Fenômeno de Gibbs. O Fenômeno de Gibbs é um reflexo da convergência não uniforme da série de Fourier para funções que apresentam descontinuidade de salto. Para essas funções, a soma parcial de Fourier exibe oscilações perto do ponto singular e este comportamento não pode ser corrigido apenas aumentando o número de termos da soma. A seguir apresentamos um exemplo para ilustrar o Fenômeno de Gibbs.

**Exemplo 1.2** *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3, \end{cases}$$

e suponha que  $f(x+6) = f(x)$ . Então a série de Fourier para  $f$  é

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left[ \cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \dots \right].$$

Na Figura 1.3 pode-se observar a presença do Fenômeno de Gibbs para as diferentes somas parciais de Fourier consideradas. Longe dos pontos singulares, as somas parciais convergem lentamente, mas perto desses pontos ocorrem as oscilações. Notamos que o fenômeno não desaparece ao tomarmos mais parcelas na soma parcial de Fourier: conseguimos apenas reduzir os intervalos onde as oscilações ocorrem.

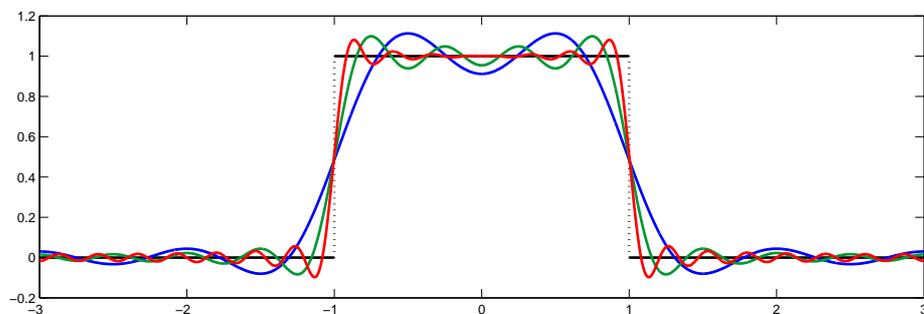


Figura 1.3: Ilustração do Fenômeno de Gibbs. Somas parciais de Fourier para a função do Exemplo 1.2 com 5, 11 e 22 termos, respectivamente em azul, verde e vermelho.

## 1.4 Forma complexa da série de Fourier

A forma complexa da série de Fourier de uma função periódica real  $f$  pode ser obtida como uma combinação linear de funções exponenciais complexas. Seja  $f = f(x)$  uma função real  $2\pi$ -periódica. A forma complexa da série de Fourier de  $f = f(x)$  é dada por

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}, \quad (1.25)$$

onde cada coeficiente de Fourier, para  $k \in \mathbb{Z}$ , é dado por

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1.26)$$

A forma complexa da série de Fourier coincide com a forma real da série de Fourier; a relação existente entre  $\hat{f}_k$  e os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  (ver [23]) é dada por:

$$\hat{f}_0 = a_0, \quad \hat{f}_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad \hat{f}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cada uma das formas pode ser usada para tirar vantagem das propriedades matemáticas envolvidas com o contexto físico. No estudo de sinais digitais, por exemplo, é útil trabalhar com a série complexa.

## 1.5 A Transformada Discreta de Fourier (DFT)

A Transformada Discreta de Fourier ou DFT (do inglês, Discrete Fourier Transform) transforma uma função matemática em outra, obtendo uma representação no domínio da frequência, sendo a função original uma função no domínio do tempo. A transformada discreta de Fourier é usada quando pretendemos analisar sinais não periódicos e de tempo discreto.

Consideremos a malha definida pelos nós  $x_j = j/N$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , com  $N$  par, e seja  $f_j = f(x_j + \delta)$ , para cada  $j$ , onde  $0 \leq \delta < 1/N$ . A Transformada Discreta de Fourier da sequência  $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$  é definida por

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi k x_j}, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1,$$

e a sua transformada inversa (IDFT) por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{f}_k e^{i2\pi k x_j}, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Cabe observar que o fator de normalização  $1/\sqrt{N}$  e o sinal do expoente são

convenções e podem diferir conforme necessário, desde que o sinal dos expoentes seja oposto e o produto dos fatores de normalização na DFT e na IDFT seja  $1/N$ . Podem-se encontrar diferentes deduções da fórmula da DFT em [2].

A DFT corresponde a uma transformação ortogonal em  $C_N$ , entre os  $N$  números  $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$  e os  $N$  números complexos  $\{\tilde{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2-1}$ . A DFT e a IDFT são, de fato, uma inversa da outra, pois, dada a propriedade fundamental de ortogonalidade discreta da exponencial complexa,

$$\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i2\pi kx_j} e^{i2\pi kx_\ell} = N\delta_{j,\ell}^N,$$

onde

$$\delta_{j,\ell}^N = \begin{cases} 1, & \text{se } j = \ell \text{ ou } j - \ell = N, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{IDFT}\{\text{DFT}\{f_j\}_k\}_\ell &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_k e^{i2\pi kx_\ell} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{i2\pi k(x_\ell - x_j)} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j \delta_{j,\ell}^N = f_\ell. \end{aligned}$$

**Observação 1.3** A DFT pode ser definida para qualquer seqüência de  $N$  números complexos.

**Observação 1.4** A  $\tilde{f}_k$  pode ser interpretada como uma aproximação a  $\hat{f}_k$  usando a regra de integração numérica dos trapézios com subdivisão para aproximar a integral que define os coeficientes de Fourier.

### 1.5.1 Propriedades da DFT

- **Periodicidade:** As seqüências definidas pela DFT são  $N$ -periódicas, isto é,

$$\text{DFT}\{f_j\}_{k+N} = \text{DFT}\{f_j\}_k \quad \text{e} \quad f_j = \text{IDFT}\{\tilde{f}_k\}_j = f_{j+N}, \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a informação completa está contida na primeira metade da seqüência da DFT. Isto é resultado imediato de  $\omega_N^{-j(k+N)} = \omega_N^{-jN}$  e  $\omega_N^{(j+N)k} = \omega_N^{jN}$ , onde  $\omega_N = e^{i2\pi/N}$ .

- **Linearidade:** Se  $f_j$  e  $g_j$  são duas seqüências complexas e  $\alpha$  e  $\beta$  dois números

complexos, então

$$\text{DFT}\{\alpha f_j + \beta g_j\}_k = \alpha \text{DFT}\{f_j\}_k + \beta \text{DFT}\{g_j\}_k.$$

- **Translação:** Ao aplicarmos a DFT sobre uma sequência transladada  $r$  unidades à direita, obtemos:

$$\text{DFT}\{f_{j-r}\}_k = \omega_N^{rN} \text{DFT}\{f_j\}_k.$$

Situação notável corresponde à translação da sequência original na metade do período,  $N/2$  unidades:

$$\text{DFT}\{f_{j-\frac{N}{2}}\}_k = (-1)^k \text{DFT}\{f_j\}_k.$$

- **Convolução Discreta:** A DFT do produto de duas sequências é a convolução discreta de suas DFT's, isto é,

$$\text{DFT}\{f_j g_j\}_k = \tilde{f}_k * \tilde{g}_k = \sum_{r=-N/2+1}^{N/2} \tilde{f}_r * \tilde{g}_{k-r}.$$

- **Teorema de Parseval**

$$\sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |\tilde{f}_k|^2.$$

### 1.5.2 A Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A Transformada Rápida de Fourier (em inglês fast Fourier Transform, ou FFT) é um algoritmo eficiente para se calcular a DFT e a IDFT, implementado por Cooley e Tuckey [5]. A transformada rápida de Fourier é de grande importância em uma vasta gama de aplicações, como processamento digital de sinais e resolução de equações diferenciais parciais.

O número de operações necessárias para calcular a DFT através da FFT é da ordem de  $N \log_2(N)$ , enquanto são necessárias  $N^2$  operações para o produto de

matriz por vetor. A FFT já vem implementada no MATLAB, que será usado para a implementação dos algoritmos apresentados ao longo deste trabalho.

### 1.5.3 Soma Parcial de Fourier Conjugada

A *soma parcial de Fourier conjugada*, definida para  $f \in C^1$  *seccionalmente*, é dada por

$$\tilde{S}_N[f](x) = \sum_{k=1}^N [a_k \operatorname{sen}(kx) - b_k \operatorname{cos}(kx)], \quad N \geq 1.$$

Um resultado clássico estabelece que

$$-\frac{\pi}{\log(N)} \tilde{S}_N[f](x) \longrightarrow [f](x), \quad N \longrightarrow \infty,$$

para toda  $f \in C^1$  *seccionalmente* e para todo  $x$  (ver Zygmund [31], pág. 60), onde

$$[f](x) = f(x+) - f(x-),$$

com  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$  os limites laterais direito e esquerdo, respectivamente. Pode-se notar que, em geral, a taxa de convergência de

$$-\frac{\pi}{\log(N)} \tilde{S}_N[f](x) - [f](x)$$

não supera  $\mathcal{O}(1/\log(N))$ . Para melhorar a convergência, Gelb e Tadmor [10, 11] introduziram a *soma parcial de Fourier conjugada generalizada*, como descrevemos a seguir. Assumamos que  $\sigma \in C^2[0, 1]$  e que  $\sigma$  é definida em  $\mathbb{R}$ . Seja

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = \sum_{k=1}^N \sigma(k/N) [a_k \operatorname{sen}(kx) - b_k \operatorname{cos}(kx)].$$

Pode-se mostrar que

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = \tilde{K}_N^\sigma * f(x), \quad \text{onde} \quad \tilde{K}_N^\sigma(x) = 2 \sum_{k=1}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \operatorname{sen}(kx).$$

Gelb e Tadmor estudaram a convergência de  $\tilde{S}_N^\sigma[f](x) - [f](x)$ , desenvolvendo assim o método de detecção de discontinuidades chamado de *Método de Concentração*, que apresentaremos no capítulo seguinte.

## Capítulo 2

# Métodos de Detecção de Descontinuidades a Partir de Dados Espectrais de Fourier

A detecção de descontinuidades a partir de dados espectrais de Fourier é importante em muitas aplicações. O método de concentração, introduzido por Gelb e Tadmor [10], localiza descontinuidades de salto em funções seccionalmente suaves a partir de seus dados espectrais de Fourier.

Mais tarde, Anne Gelb e Dennis Cates [12] desenvolveram um novo método, que introduz refinamentos ao método de concentração para reduzir as oscilações. A função *minmod* é usada para combinar várias aproximações da função salto, obtidas pelos métodos de concentração, no sentido de apontar os locais de salto.

Wei, Martínez e De Pierro [28] derivaram a expressão matemática que permite determinar aproximações precisas para pontos de descontinuidade, que não coincidam com os nós da malha uniforme, com um baixo custo computacional.

Mhaskar e Prestin [21] desenvolveram outro método, utilizando a decomposição de uma função seccionalmente diferenciável em suas partes contínua e descontínua.

### 2.1 Método de Concentração (Gelb e Tadmor)

Considere-se uma função  $f(x)$  de período  $2\pi$  e seccionalmente suave no intervalo  $[-\pi, \pi)$  com uma descontinuidade de salto simples em  $x = \xi$ . Além disso, assumamos que as derivadas laterais  $m$ -ésimas de  $f(x)$  existem em  $x = \xi$  para  $m \geq 1$ . Define-se a função salto de  $f(x)$  como

$$[f](x) := f(x^+) - f(x^-), \quad (2.1)$$

onde  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$  são os limites laterais direito e esquerdo, respectivamente, supondo-se que existam. Uma vez que a função tem uma descontinuidade de salto em  $x = \xi$ , a função salto vale  $[f](\xi)$  neste ponto e zero em todos os outros.

Suponha-se que são dados os coeficientes de Fourier

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (2.2)$$

para  $k = -N, \dots, N$ . Um método geral para detectar descontinuidades é baseado na soma parcial de Fourier conjugada,

$$-\frac{\pi}{\log N} \tilde{S}_N[f](x) = -\frac{i\pi}{\log N} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ikx} = [f](x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log N}\right). \quad (2.3)$$

Para acelerar a convergência da função salto, *fatores de concentração* são introduzidos em [10], fornecendo a soma parcial de Fourier generalizada conjugada,

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = i \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (2.4)$$

Aqui  $\sigma(\eta) = \sigma(|k|/N)$ ,  $\eta \in (0, 1]$ , é chamado de *fator de concentração*, uma vez que força a soma parcial conjugada a se concentrar nas descontinuidades de  $f(x)$ . Com a inclusão de um fator de concentração admissível, (2.4), que foi cunhado o “método de concentração” em [11, 10, 9], converge para  $[f](x)$  como

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = [f](x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right) = [f](\xi) \delta_\xi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right). \quad (2.5)$$

Aqui  $\delta_\xi(x)$  é uma função indicadora definida como

$$\delta_\xi(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = \xi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Em [11, 10] foi mostrado que é possível designar fatores de concentração tais que (2.4) converge muito mais rápido que  $\mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right)$  (em alguns casos exponencialmente) em regiões suaves distantes das descontinuidades de salto.

Um fator de concentração admissível  $\sigma(\eta)$  satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\sigma(\eta)}{\eta} \in C^2(0, 1), \text{ e} \\ \text{(ii)} \quad & \int_0^1 \frac{\sigma(\eta)}{\eta} d\eta = \pi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vários tipos de fatores de concentração são estudados em [11, 10, 9], mas para ilustrar alguns conceitos, aqui exibiremos os fatores de concentração dados por

$$\sigma_{Trig}(\eta) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\beta\eta)}{\operatorname{Si}(\beta)}, \quad (2.8)$$

com a normalização adequada:

$$\begin{aligned} \operatorname{Si}(\beta) &:= \int_0^\beta \frac{\operatorname{sen}(\eta)}{\eta} d\eta, \\ \sigma_{Poly}(\eta) &= \pi\eta^p, \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\sigma_{Exp}(\eta) = \gamma \eta \exp\left(\frac{1}{\alpha\eta(\eta-1)}\right), \quad (2.10)$$

onde

$$\gamma = \frac{\pi}{\int_\epsilon^{1-\epsilon} \exp\left(\frac{1}{\alpha\tau(\tau-1)}\right) d\tau}$$

normaliza  $\sigma_{Exp}$ , com  $\epsilon > 0$  pequeno e  $\alpha > 0$  um parâmetro definido pelo usuário.

Como se pode notar em [11], usar  $\sigma_{Trig}$  com  $\beta = \pi$  em (2.4) corresponde a tomar uma diferença dividida no espaço físico sobre pontos da malha  $-\pi + j\pi/N$ , para  $j = 0, \dots, 2N$ . Similarmente, aplicar  $\sigma_{Poly}$  é equivalente a diferenciar a soma parcial de Fourier. Conseqüentemente, o método de concentração usando (2.8) ou (2.9) pode ser visto analogamente aos métodos de espaço físico que buscam por gradientes grandes para determinar os locais das descontinuidades de salto. Por outro lado, o fator de concentração exponencial (2.10) foi desenvolvido de modo que (2.4) é uma aproximação filtrada (com um filtro exponencial) da função salto  $[f](x)$  definida em (2.1). Assim, como com aproximações filtradas de funções seccionalmente suaves, convergência mais rápida pode ser obtida longe das descontinuidades de salto [10].

Mede-se o erro aproximado da função salto como

$$E([f](x)) = |\tilde{S}_N^\sigma[f](x) - [f](x)|, \quad (2.11)$$

e o correspondente erro de localização do salto como

$$erro_{loc}(\xi) = |x_{pico} - \xi|, \quad (2.12)$$

onde  $\xi$  é a atual localização da descontinuidade de salto (conhecida) e  $x_{pico}$  é o local de máximo valor de  $\tilde{S}_N^\sigma[f](x)$  na vizinhança local de  $\xi$ .

## 2.2 Minmod

Como discutido em [11, 10], a taxa de convergência do método de concentração depende do fator de concentração particular escolhido. Além disso, cada fator de concentração produz seu próprio padrão oscilatório próximo às descontinuidades de salto, que varia em sinal e magnitude. Especificamente, notamos que o fator de concentração exponencial de maior ordem produz uma convergência mais rápida para zero em regiões distantes das descontinuidades de salto, quando comparadas a outros fatores de concentração, mas sofrem mais oscilações próximo delas. Enquanto as oscilações induzidas por esses métodos são em si indesejáveis, a variação que elas produzem pode ser explorada para reduzir o impacto global das oscilações. Especificamente, em [9] é demonstrado que é possível distinguir entre saltos verdadeiros e oscilações artificiais aplicando a função *minmod*,

$$\tilde{S}_N^{\text{minmod}}[f](x) = \text{minmod}(\tilde{S}_N^{\sigma_1}[f](x), \dots, \tilde{S}_N^{\sigma_j}[f](x)), \quad (2.13)$$

onde  $\sigma_1, \dots, \sigma_j$  são  $j$  fatores de concentração e a função *minmod* é definida como

$$\text{minmod}(f_1, \dots, f_j) = \begin{cases} \min(f_1, \dots, f_j), & \text{se } f_1, \dots, f_j > 0, \\ \max(f_1, \dots, f_j), & \text{se } f_1, \dots, f_j < 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Por reduzir a magnitude global da aproximação da função salto, o método de concentração *minmod* (2.13) diminui o efeito das oscilações artificiais em torno das descontinuidades de salto, enquanto ainda converge rapidamente para zero longe delas.

É importante ter em mente que o método de concentração obtém locais de salto e valores correspondentes diretamente dos dados espectrais de Fourier, sem qualquer informação do espaço físico. Para fins de apresentação, a maioria das figuras mostra a função subjacente. Deve-se notar também que o método de concentração aproxima a função salto  $[f](x)$ , e na verdade não localiza as descontinuidades de salto. Usa-se a expressão “detecção de descontinuidades” ao longo do texto, mas esta distinção deve ser entendida.

## 2.3 Fatores de Concentração Filtrados

Filtragem é uma maneira de reduzir as oscilações no método de concentração (2.4). Como exemplo, considere-se o filtro de Lanczos de  $n$ -ésima ordem [18], dado

por

$$\tau_L(\eta) = \left( \frac{\text{sen}(\eta\pi)}{\eta\pi} \right)^n.$$

O fator de concentração correspondente é então

$$\sigma^{filt}(\eta) = \gamma_f \sigma(\eta) \left( \frac{\text{sen}(\eta\pi)}{\eta\pi} \right)^n, \quad (2.15)$$

onde  $\sigma(\eta)$  é qualquer fator de concentração admissível e

$$\gamma_f := \frac{\pi}{\int_0^1 \frac{\sigma(\eta)}{\eta} \left( \frac{\text{sen}(\eta\pi)}{\eta\pi} \right)^n d\eta} \quad (2.16)$$

garante a admissibilidade de  $\sigma^{filt}(\eta)$ . Usando (2.15) em (2.4), geramos o método de concentração filtrado,

$$\tilde{S}_N^{\sigma^{filt}}[f](x) = i \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma^{filt} \left( \frac{|k|}{N} \right) \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (2.17)$$

## 2.4 Método de Concentração “Matching Waveform”

Uma outra técnica que reduz tanto as oscilações do método, quanto as induzidas por ruído, aproveita o fato de que cada fator de concentração gera seu próprio *signature profile* (“perfil de assinatura”, ou “forma de onda”), em uma simples descontinuidade de salto. Estas funções *waveform* independentes explicam a origem das oscilações (que queremos evitar) induzidas pelo método. No entanto, a existência das oscilações em cada *signature profile* pode ser usada para aperfeiçoar os resultados do método de concentração.

### 2.4.1 O Método de Concentração “Matching Waveform”

A derivação dos *matching signature profiles* segue da derivação do método de concentração em [10]. Integrando-se (2.2) por partes, obtém-se

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi ik} [f](\xi) e^{-ik\xi} + \frac{1}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) e^{-ik\tau} d\tau. \quad (2.18)$$

Substituindo-se (2.18) no método de concentração (2.4), obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{S}_N^\sigma[f](x) &= i \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \left[ \frac{1}{2\pi i k} [f](\xi) e^{-ik\xi} + \frac{1}{2\pi i k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \right] e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} [f](\xi) \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \frac{e^{ik(x-\xi)}}{k} + R(x),\end{aligned}\quad (2.19)$$

onde o resíduo  $R(x)$  é definido como

$$R(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \frac{1}{k} \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) e^{-ik(\tau-x)} d\tau.$$

Uma vez que  $\sigma\left(\frac{|k|}{N}\right)$  é limitada,  $R(x) \rightarrow 0$  com  $\mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right)$  quando  $N \rightarrow \infty$  [10]. Portanto, (2.19) fornece

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = \frac{[f](\xi)}{\pi} \sum_{k=1}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \frac{\cos(k(x-\xi))}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right), \quad (2.20)$$

conduzindo à definição de *matching signature profiles*, ou *waveform*, como

$$W_N^\sigma(x) := \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \frac{\cos(kx)}{k}, \quad (2.21)$$

para  $x \in [-\pi, \pi)$ .

A forma distinta de  $\tilde{S}_N^\sigma[f](x)$ , dada por  $W_N^\sigma(x - \xi)$ , caracteriza a forma que o método de concentração deve produzir quando localizar uma descontinuidade de salto simples em  $x = \xi$ . Na prática, esta forma exata pode não ser gerada devido ao ruído, à estrutura da função base, ou às posições relativas dos saltos adjacentes. No entanto, convoluir o método de concentração original (2.4) com seu *signature profile* (2.21) gera áreas de melhor correspondência com os prováveis candidatos para localizações de descontinuidades de salto simples. Esta discussão leva à definição do *método de concentração matching waveform* como

$$\tilde{M}_N^\sigma[f](x) := \gamma_M^\sigma(N) (\tilde{S}_N^\sigma[f] * W_N^\sigma)(x), \quad (2.22)$$

onde  $\gamma_M^\sigma(N)$  normaliza  $\tilde{M}_N^\sigma[f](x)$  para garantir o valor correto do salto no ponto de descontinuidade recuperado. Isto é realizado através da imposição  $\tilde{M}_N^\sigma[\delta_\xi](x)|_{x=\xi} = 1$ , isto é, igualando-se  $\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = W_N^\sigma(x - \xi)$ . Assim,

$$\frac{1}{\gamma_M^\sigma(N)} := (W_N^\sigma(x - \xi) * W_N^\sigma(x))|_{x=\xi} = \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\tau - \xi) W_N^\sigma(\xi - \tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Devido à  $2\pi$ -periodicidade de  $W_M^\sigma(x)$ , podemos assumir sem perda de generalidade que o salto ocorre em  $\xi = 0$ , e

$$\frac{1}{\gamma_M^\sigma(N)} = \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\tau) W_N^\sigma(-\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} (W_N^\sigma(\tau))^2 d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\sigma\left(\frac{k}{N}\right)}{k} \right)^2. \quad (2.24)$$

O método de concentração *matching waveform* (2.22) converge para a função salto, como se mostra a seguir.

**Teorema 2.1** *Seja  $\tilde{M}_N^\sigma[f](x)$  definida em (2.22), e a função salto  $[f](x)$  definida em (2.1), Então  $\tilde{M}_N^\sigma[f](x) = [f](x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right)$ .*

**Prova.** De (2.20) e (2.21), temos

$$\tilde{S}_N^\sigma[f](x) = [f](\xi) W_N^\sigma(x - \xi) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right) = [f](\xi) W_N^\sigma(x - \xi)|_{x=\xi} \delta_\xi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right),$$

onde  $\delta_\xi(x)$  é definida em (2.6). Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_N^\sigma[f](x) &= \gamma_M^\sigma(N) (\tilde{S}_N^\sigma[f] * W_N^\sigma)(x) \\ &= \gamma_M^\sigma(N) ([f](\xi) W_N^\sigma(x - \xi) * W_N^\sigma(x)) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right) \\ &= \gamma_M^\sigma(N) [f](\xi) (W_N^\sigma(x - \xi) * W_N^\sigma(x))|_{x=\xi} \delta_\xi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right) \\ &= [f](x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right), \end{aligned}$$

onde usamos (2.23) e as propriedades de convolução de (2.6).  $\square$

A seguinte prova alternativa mostra que o método de concentração *matching waveform* pode ser implementado em uma forma de concentração padrão (2.4), e que o seu fator de concentração correspondente é admissível de acordo com (2.7).

**Prova.** Usando-se a notação  $\wedge$  para denotar o coeficiente de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} (\tilde{M}_N^\sigma[f])_k^\wedge &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{M}_n^\sigma[f](\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \frac{\gamma_M^\sigma(N)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{S}_N^\sigma[f] * W_N^\sigma)(\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \frac{\gamma_M^\sigma(N)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) W_N^\sigma(\tau - x) dx \right] \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \gamma_M^\sigma(N) (\tilde{S}_N^\sigma[f])_k^\wedge \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

devido à  $2\pi$ -periodicidade e às definições (2.2) e (2.22). Além do mais, (2.4) fornece

$$(\tilde{S}_N^\sigma[f])_k^\wedge = i \operatorname{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k. \quad (2.26)$$

Substituindo-se (2.26) em (2.25) obtém-se

$$(\tilde{M}_N^\sigma[f])_k^\wedge = i \gamma_M^\sigma(N) \operatorname{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta.$$

Por isso,  $\tilde{M}_N^\sigma[f](x)$  pode ser escrita na forma do método de concentração padrão, como

$$\begin{aligned} \tilde{M}_N^\sigma[f](x) &= i \gamma_M^\sigma(N) \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \left[ \operatorname{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta \right] \exp(ikx) \\ &= i \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \operatorname{sign}(k) \sigma^M\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k \exp(ikx), \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $\sigma^M\left(\frac{|k|}{N}\right)$  é definida como

$$\sigma^M\left(\frac{|k|}{N}\right) := \gamma_M^\sigma(N) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\tau) \exp(-ik\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Para mostrar que  $\sigma^M(\eta)$  é admissível, usa-se (2.24) para se obter

$$\begin{aligned} \sigma^M\left(\frac{|k|}{N}\right) &= \gamma_M^\sigma(N) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} W_N^\sigma(\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \gamma_M^\sigma(N) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^N \sigma\left(\frac{l}{N}\right) \frac{\cos(l\tau)}{l} \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \frac{\gamma_M^\sigma(N)}{k} \left[ \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \right]^2 = \frac{\pi}{k} \frac{\left[ \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \right]^2}{\sum_{l=1}^N \left( \frac{\sigma\left(\frac{l}{N}\right)}{l} \right)^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A admissibilidade segue, uma vez que

$$\int_0^1 \frac{\sigma^M(\eta)}{\eta} d\eta \approx \sum_{k=1}^N \frac{\sigma^M\left(\frac{k}{N}\right)}{k} = \gamma_M^\sigma(N) \sum_{k=1}^N \left( \frac{\sigma^M\left(\frac{k}{N}\right)}{k} \right)^2 = \pi.$$

Portanto,

$$\tilde{M}_N^\sigma[f](x) = [f](x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

□

## 2.4.2 The Zero Crossing Matching Waveform

Uma estratégia comum usada para encontrar descontinuidades de salto é observar regiões que contêm grandes valores para a aproximação da derivada de uma

função seccionalmente suave [3, 17, 24, 27]. Uma alternativa é identificar regiões nas quais a aproximação da derivada segunda sofre uma mudança de sinal [1, 4, 15, 19]. Em uma dimensão, a derivada segunda é zero nos pontos onde se localizam as descontinuidades de salto, e é de sinal oposto em cada lado imediatamente adjacente a estes pontos, criando uma *zero crossing waveform*. O método *zero crossing* geralmente encontra descontinuidades de salto determinando as regiões correspondentes aos pontos de *zero crossing* na aproximação da derivada segunda, onde a aproximação da derivada primeira tem amplitude máxima. Toma-se esta ideia, porém modificada, para encaixar no método de concentração, e especificamente para caber dentro do contexto de dados espectrais de Fourier. Portanto, considere-se a derivada da projeção,  $\tilde{S}_N^\sigma[f](x)$ , determinada a partir de (2.4), como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) &= \frac{d}{dx} \left[ i \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{ikx} \right] \\ &= - \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) k \hat{f}_k e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo-se (2.18) em (2.30), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) &= - \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) k \left[ \frac{1}{2\pi ik} [f](\xi) e^{-ik\xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \right] e^{ikx} \\ &= \frac{i}{2\pi} [f](\xi) \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) e^{ik(x-\xi)} + R_2(x), \end{aligned}$$

onde  $R_2(x)$  é o resíduo dado por

$$R_2(x) := \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) e^{-ik(\tau-x)} d\tau = \mathcal{O}(\log N). \quad (2.31)$$

O *zero crossing signature profile* é então definido como

$$dW_N^\sigma(x) := \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \text{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) e^{ikx} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \text{sen}(kx). \quad (2.32)$$

Note que  $dW_N^\sigma(x)$  é ímpar. Uma vez que  $dW_N^\sigma(x) = \mathcal{O}(N)$ , temos, para  $N$  grande, que

$$\frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) = [f](\xi) dW_N^\sigma(x - \xi) + R_2(x) \approx [f](\xi) dW_N^\sigma(x - \xi). \quad (2.33)$$

A função  $dW_N^\sigma(x - \xi)$  é uma forma de onda de cruzamento zero com seu zero na descontinuidade de salto correspondente ao pico máximo de  $W_N^\sigma(x - \xi)$  em (2.21). Portanto, pode-se determinar a localização de uma descontinuidade de salto pesquisando-se por sua característica de *zero crossing*.

Seja  $\rho = x - \xi$  a localização do pico em (2.32), que é o mais próximo da descontinuidade de salto. Por simplicidade, tomamos  $\rho = \frac{\zeta}{N}$ , que é razoável uma vez que a implementação do método de concentração ocorre tipicamente em uma malha de pontos equidistantes, com  $\Delta x = \frac{\pi}{N}$ . Pode-se normalizar a forma de onda de cruzamento zero tal que  $1 = \kappa_z dW_N^\sigma\left(\frac{\zeta}{N}\right)$ , obtendo-se

$$\kappa_z = -\pi \left[ \sum_{l=1}^N \sigma\left(\frac{l}{N}\right) \text{sen}\left(\frac{l\zeta}{N}\right) \right]^{-1}. \quad (2.34)$$

De (2.33), temos

$$\frac{d}{dx} \kappa_z \tilde{S}_N^\sigma[f](x) = [f](\xi) \kappa_z dW_N^\sigma(x - \xi) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right). \quad (2.35)$$

A localização do pico mais próximo é facilmente determinada resolvendo-se

$$\frac{d}{dx} \kappa_z dW_N^\sigma(\rho) = 0,$$

onde novamente usa-se  $\rho = \frac{\zeta}{N}$ , e ignoram-se os termos de ordens mais altas.

O método, cujo desenvolvimento está sendo apresentado aqui, não faz uso do próprio *zero crossing* como a localização da descontinuidade de salto, mas preferencialmente busca pelo aspecto geral da *zero crossing matching waveform* através da técnica de *matching waveform* previamente descrita na Subseção 2.4.1. Isto é, define-se o método *zero crossing matching waveform* como

$$\tilde{Z}_N^\sigma[f](x) := \gamma_Z^\sigma(N) \left( \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f] * dW_N^\sigma \right) (x), \quad (2.36)$$

onde  $\gamma_Z^\sigma(N)$  normaliza (2.36) para garantir que o valor do salto correspondente à descontinuidade de salto localizada é precisamente recuperado. Isto é alcançado impondo-se  $\tilde{Z}_N^\sigma[\delta_\xi](x)|_{x=\xi} = 1$ . Neste caso, de (2.33),  $\frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) \approx dW_N^\sigma(x - \xi)$ , fornecendo

$$\frac{1}{\gamma_Z^\sigma(N)} := [dW_N^\sigma(x - \xi) * dW_N^\sigma(x)]|_{x=\xi} = - \int_{-\pi}^{\pi} (dW_N^\sigma(\tau))^2 d\tau, \quad (2.37)$$

onde usa-se a periodicidade e a antissimetria de  $dW_N^\sigma(x)$ . Portanto, de (2.32), obtém-se

$$\frac{1}{\gamma_Z^\sigma(N)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left[ \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \right]^2. \quad (2.38)$$

Também pode-se implementar (2.36) na forma padrão do método de concentração. Primeiro, escreve-se

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}_N^\sigma[f])_k^\wedge &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{Z}_N^\sigma[f](\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \frac{\gamma_Z^\sigma(N)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f] * dW_N^\sigma \right) (\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \frac{\gamma_Z^\sigma(N)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f](x) dW_N^\sigma(\tau - x) dx \right] \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= \gamma_Z^\sigma(N) \left( \frac{d}{dx} \tilde{S}_N^\sigma[f] \right)_k^\wedge \int_{-\pi}^{\pi} dW_N^\sigma(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta \\ &= -\gamma_Z^\sigma(N) \operatorname{sign}(k) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) k \hat{f}_k \int_{-\pi}^{\pi} dW_N^\sigma(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta, \end{aligned}$$

para  $k \neq 0$ . A penúltima linha segue da periodicidade e a última linha segue pela diferenciação de (2.3). Então

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_N^\sigma[f](x) &= \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N (\tilde{Z}_N^\sigma[f])_k^\wedge \exp(ikx) \\ &= \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \operatorname{sign}(k) \sigma^Z\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k \exp(ikx), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\sigma^Z\left(\frac{|k|}{N}\right)$  é definido como

$$\begin{aligned} \sigma^Z\left(\frac{|k|}{N}\right) &:= i \gamma_Z^\sigma(N) \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) k \int_{-\pi}^{\pi} dW_N^\sigma(\tau) \exp(-ik\tau) d\tau \\ &= -\frac{\pi i k}{\sum_{j=1}^N \left[ \sigma\left(\frac{j}{N}\right) \right]^2} \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^N \sigma\left(\frac{|l|}{N}\right) \exp[-i(l-k)\tau] d\tau \\ &= \frac{\pi k \left[ \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \right]^2}{\sum_{j=1}^N \left[ \sigma\left(\frac{j}{N}\right) \right]^2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

para qualquer fator de concentração admissível  $\sigma\left(\frac{|k|}{N}\right)$ . Implementa-se diretamente (2.39) na prática.

### 2.4.3 O Método de Concentração “Matching Waveform” Combinado

Como demonstrado ao longo do artigo [12], o método de concentração *minmod* (2.13) é eficaz porque explora a variedade de padrões oscilatórios e taxas de convergência encontrados em diferentes *waveform* de métodos de concentração. Os fatores de concentração introduzidos nas Subseções 2.3, 2.4.1 e 2.4.2 aumentam essa variação. Portanto, pode-se combinar todos os métodos discutidos e computar-se

$$\widetilde{SMZ}_N^\sigma[f](x) := \text{minmod}(\tilde{S}_N^{\sigma_1}[f](x), \dots, \tilde{S}_N^{\sigma_K}[f](x), \tilde{M}_N^{\sigma_1}[f](x), \dots, \tilde{M}_N^{\sigma_K}[f](x), \tilde{Z}_N^{\sigma_1}[f](x), \dots, \tilde{Z}_N^{\sigma_K}[f](x)), \quad (2.41)$$

onde  $\sigma_1, \dots, \sigma_K$  podem incluir os vários fatores de concentração filtrados e não filtrados. Naturalmente, nem todos os fatores de concentração precisam ser incluídos. A diferença entre (2.13) e (2.41) é que, no último caso, fatores de concentração *zero crossing matching waveform* são incluídos, e estes podem não ser admissíveis.

## 2.5 Método de Wei, Martínez e De Pierro

Apresentamos aqui o método de detecção de continuidades proposto por Wei, Martínez e Pierro [28]. Primeiro exibimos o Teorema 2.2 (conforme [29]) que é a base do método. Em seguida, mostramos o desempenho do método para dados espectrais exatos.

### 2.5.1 Primeiras aproximações para os pontos de descontinuidade

Wei, Martínez e De Pierro aproveitaram a presença do Fenômeno de Gibbs na fórmula de reconstrução de grau zero para o caso em que algum dos pontos de descontinuidade não coincide com algum nó da malha uniforme. Com base nisso, derivaram a expressão matemática que permite determinar aproximações precisas para estes pontos com um baixo custo computacional. A descoberta consistiu em entender a capacidade do ponto inicial apresentado no Teorema 2.2 (ver [30]) de melhorar significativamente os resultados do método de Gelb e Tadmor [10, 11].

Considere-se uma função  $f(x)$  definida em  $[0, 1]$ , estendida de modo a ser periódica e, assim, seccionalmente suave. Suponham-se conhecidos os seus coeficientes de Fourier. Sabe-se que, se  $f$  é analítica e periódica, então sua soma parcial de Fourier converge exponencialmente com o tempo [13]. No entanto, quando  $f(x)$  é descontínua e/ou aperiódica, a convergência para  $f(x)$  é muito lenta e o fenômeno de Gibbs ocorre.

Sejam  $\sigma_k$  um filtro,  $N$  um número inteiro positivo grande (em geral,  $N = 2^t$ ,

com  $t$  positivo e inteiro),  $x_j = j/N$ ,  $f_j = f(x_j + \delta)$  para  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , onde  $0 \leq \delta \leq 1/N$  é uma constante. Os pontos  $\{x_j\}_{j=0}^N$  são chamados de pontos de nó. Então, o método

$$g_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k \hat{f}_k e^{i2k\pi \frac{j}{N}}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (2.42)$$

converge para  $f(x_j + \delta)$  mais rápido do que a soma parcial de Fourier quando  $f(x)$  é descontínua ou não periódica. Métodos de filtragem para melhorar a taxa de convergência, que consistem na aplicação de um filtro ( $\sigma_k$ ) conforme a equação (2.42), são mais estáveis e menos caros computacionalmente do que os métodos descritos em [14].

A função  $\delta$  de Kronecker será denotada por  $\delta_{j,l}$ , e o domínio de  $f(x)$  será estendido para todo o  $\mathbb{R}$ , definindo  $f(x + qN) = f(x)$  para qualquer  $q$  inteiro e  $x \in [0, 1)$ . Assim, se  $f(1) \neq f(0)$ , diz-se que  $f(x)$  é descontínua em  $x = 0$ . Será denotada por  $\mathcal{F} = \{\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \mid f_j = f_{j+N}, \forall j \in \mathbb{Z}\}$ . Para a função  $f$ , valem as seguintes hipóteses:

### Hipóteses:

- i.  $f$  é uma função real de  $x$  definida em  $[0, 1]$ ;
- ii. Seja  $Z \equiv \{z_1, \dots, z_L\}$ . Para  $x \in (0, 1)$  e  $x \notin Z$ ,  $f'(x)$  e  $f''(x)$  existem, e

$$\sup_{x \notin Z} |f'(x)| = C_1 < \infty, \quad \sup_{x \notin Z} |f''(x)| = C_2 < \infty;$$

- iii.  $z_1, \dots, z_L$  são bem separados, isto é,  $N \min_{r \neq l} d_{q_l, q_r} \gg 1$ , onde  $q_l$  é obtido de modo que  $x_{q_l}$  é o nó mais próximo a  $z_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Além disso,  $|f(z_l^+) - f(z_l^-)| \gg \frac{1}{N}$ .

**Teorema 2.2** *Suponha-se que  $f$  é uma função satisfazendo as hipóteses anteriores e que são conhecidos os  $N$  coeficientes de Fourier  $\hat{f}_k$  de  $f$ , para  $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$ , com  $N$  par. Para  $l = 0, 1, \dots, N-1$ , define-se o conjunto de nós  $x_l = l/N$ , e denota-se  $f_j = f(\eta_j)$  com  $\eta_j = x_j + \frac{1}{2N}$ . Suponha-se que  $N \gg L$  e  $Z \equiv \{z_1, \dots, z_L\} \not\subset \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ . Sejam  $g_j$ , para  $j = 0, \dots, N-1$ , as aproximações para os valores pontuais da função obtidos através da fórmula de reconstrução de grau zero:*

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)} \hat{f}_k. \quad (2.43)$$

Define-se  $\alpha_l = N(z_l - x_{q_l})$  para  $l = 1, \dots, L$ . Assim, para  $j$  próximo a algum  $q_r$ ,

$r = 1, \dots, L$ , tem-se

$$g_j - g_{j-1} = [f(z_r^+) - f(z_r^-)] \frac{(-1)^{j-q_r-1} \operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(j - q_r - \alpha_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.44)$$

Entretanto, para  $j$  distante dos  $q_r$ , vale

$$g_j - g_{j-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.45)$$

**Prova.** Inicialmente, é necessário estimar a diferença  $g_j - f_j$  em termos da magnitude dos saltos da função nos pontos em que ela é descontínua. Se  $z_l \in (x_{q_l}, \eta_{q_l})$ , então  $f(x)$  pode ser expressa, usando a expansão de primeira ordem, como

$$f(x) = f(z_l^-) + f'(\xi_1)(x - z_l), \quad \xi_1 \in (x_{q_l}, z_l), \quad \text{para } x \in (x_{q_l}, z_l),$$

e

$$f(x) = f(z_l^+) + f'(\xi_2)(x - z_l), \quad \xi_2 \in (z_l, x_{q_{l+1}}), \quad \text{para } x \in (z_l, x_{q_{l+1}}).$$

Em particular,

$$f_{q_l} = f(\eta_{q_l}) \equiv f\left(\frac{x_{q_l} + x_{q_{l+1}}}{2}\right) = f(z_l^+) + f'(\theta_2)(\eta_{q_l} - z_l), \quad \theta_2 \in (z_l, x_{q_{l+1}}).$$

A contribuição de todos aqueles subintervalos que não contêm pontos de descontinuidade para a estimação do erro de aproximação  $g_j - f_j$  é muito pequena, mais precisamente da ordem de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}[C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)]\right)$ , como se pode observar através do Teorema 1 de [29]. Assim, será necessário estudar apenas o que acontece nos subintervalos que contêm os pontos de descontinuidade da função. Tem-se que

$$\begin{aligned} g_j - f_j &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi x_j} \sum_{l=1}^L \int_{x_{q_l}}^{x_{q_{l+1}}} e^{-i2k\pi x} [f(x) - f(\eta_{q_l})] dx \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}[C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)]\right). \end{aligned}$$

Fazendo-se uso da expansão de primeira ordem para  $f$ , obtém-se

$$g_j - f_j = \sum_{l=1}^L [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sigma_k^{(0)} \int_z^{x_{q_l}} e^{i2k\pi(x_j-x)} dx + A,$$

onde  $A$  satisfaz

$$|A| \leq C_1 \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+1}} (|x - z| + |\eta_{l_0} - x|) \left| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi(x_j-x)} \right| dx \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}[C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)]\right).$$

Para  $x \in (x_{q_l}, x_{q_l+1})$ , aplicando o Lema 1 de [29], pode-se estimar

$$\left| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi(x_j-x)} \right| \leq \begin{cases} \frac{\pi}{2}N, & \text{para } j = q_l, \\ 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2|\eta_j - x|}, & \text{para } j \neq q_l. \end{cases}$$

Assim,

$$|A| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2} \left[ C_1 \sum_l d_{j_l}^{-1} + C_2 \ln(N) \right]\right)$$

e, então,

$$g_j - f_j = \sum_{l=1}^L [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sigma_k^{(0)} \int_z^{x_{q_l}} e^{i2k\pi(x_j-x)} dx \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2} \left[ C_1 \sum_l d_{j_l}^{-1} + C_2 \ln(N) \right]\right).$$

Foi suposto até agora que  $z_l \in (x_{q_l}, \eta_{q_l})$ , mas deve-se observar que as contas anteriores continuam sendo válidas para  $z_l \in (\eta_{q_l-1}, x_{q_l})$ . Geralmente, quando  $x_{q_l}$  é o ponto mais próximo a  $z_l$ , para  $l = 1, \dots, L$ , e denotando  $\alpha_l = N(z_l - x_{q_l})$  e  $r_j = (g_j - f_j) - (g_{j-1} - f_{j-1})$ , tem-se que

$$r_j = \sum_{l=1}^L [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sigma_k^{(0)} (1 - e^{i2k\pi/N}) \int_{z_l}^{x_{q_l}} e^{-i2k\pi x} dx \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2} \left[ C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{j_l}} \right]\right) \\ = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} (e^{i2k\pi(x_j-z_l)} - e^{i2k\pi(x_j-x_{q_l})}) \\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2} \left[ C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{j_l}} \right]\right).$$

Utilizando-se do fato que

$$\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ikx} = \frac{\text{sen}(Nx/2)}{\text{sen}(x/2)} e^{-ix/2},$$

obtém-se que

$$r_j = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \left[ \frac{(-1)^{j-q_l-1} \text{sen}(\pi\alpha_l)}{\text{sen}\left(\frac{\pi(j-q_l-\alpha_l)}{N}\right)} \exp\left(\frac{-i\pi(j-q_l-\alpha_l)}{N}\right) - N\delta_{j,q_l} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2} \left[ C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{j1}} \right]\right).$$

Da expressão acima, como  $f_j - f_{j-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$  para os subíndices  $j$  que estão longe dos  $q_l$ , tem-se

$$g_j - g_{j-1} = f_j - f_{j-1} + r_j = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Pode-se agora expressar a variação entre valores consecutivos da função em termo das amplitudes dos saltos nos pontos de descontinuidade.

Para  $j = q_r$ ,

$$f_{q_r} - f_{q_r-1} = f(z_r^+) - f(z_r^-) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

então

$$\begin{aligned} g_{q_r} - g_{q_r-1} &= f_{q_r} - f_{q_r-1} + \frac{1}{N} [f(z_r^+) - f(z_r^-)] \left[ \frac{-\text{sen}(\pi\alpha_r)}{\text{sen}\left(\frac{\pi(-\alpha_r)}{N}\right)} \exp\left(\frac{i\pi\alpha_r}{N}\right) - N \right] \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= [f(z_r^+) - f(z_r^-)] \frac{\text{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi\alpha_r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Se  $j \neq q_r$ , sendo  $|j - q_r|$  um número inteiro muito pequeno,

$$f_j - f_{j-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} g_j - g_{j-1} &= f_j - f_{j-1} + \frac{1}{N} [f(z_l^+) \\ &\quad - f(z_l^-)] \frac{(-1)^{j-q_r-1} \operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(j-q_r-\alpha_r)}{N}\right)} \exp\left(\frac{-i\pi(j-q_r-\alpha_r)}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= [f(z_l^+) - f(z_l^-)] \frac{(-1)^{j-q_r-1} \operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(j-q_r-\alpha_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$g_j - g_{j-1} = [f(z_r^+) - f(z_r^-)] \frac{(-1)^{j-q_r-1} \operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(j-q_r-\alpha_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

□

**Corolário 2.3** *Os pontos de descontinuidade  $z_r$  podem ser aproximados através das expressões*

$$z_r = x_{q_r} + \frac{\gamma_r^{(1)}}{N(1 + \gamma_r^{(1)})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (2.46)$$

$$\text{ou} \quad (2.47)$$

$$z_r = x_{q_r} - \frac{\gamma_r^{(2)}}{N(1 + \gamma_r^{(2)})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (2.48)$$

onde

$$\gamma_r^{(1)} \equiv \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - q_{q_r-1}} \quad e \quad \gamma_r^{(2)} \equiv \frac{g_{q_r-1} - g_{q_r-2}}{g_{q_r} - q_{q_r-1}}, \quad (2.49)$$

observando-se as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.

**Prova.** Usando-se o resultado do Teorema 2.2 para o caso particular em que  $j = q_r + 1$ , tem-se

$$g_{q_r+1} - g_{q_r} = [f(z_r^+) - f(z_r^-)] \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(1 - \alpha_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

e para  $j = q_r - 1$ ,

$$g_{q_r-1} - g_{q_r-2} = -[f(z_r^+) - f(z_r^-)] \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(1 + \alpha_r)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Através do quociente entre estas expressões, obtém-se

$$\gamma_r^{(1)} \equiv \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - q_{q_r-1}} = \frac{\alpha_r}{1 - \alpha_r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

logo

$$\alpha_r = \frac{\gamma_r^{(1)}}{1 - \gamma_r^{(1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) = N(z_r - x_{q_r})$$

e, portanto,

$$z_r = x_{q_r} + \frac{\gamma_r^{(1)}}{N(1 + \gamma_r^{(1)})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Analogamente obtém-se a expressão para  $\gamma_r^{(2)}$ . □

### 2.5.2 Considerações sobre a determinação dos $x_{q_r}$

Há dois casos a considerar, partindo-se da definição de  $\alpha_r$ , com  $0 \leq |\alpha_r| \leq 1/2$ :

i.  $|\alpha_r| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ ;

ii.  $|\alpha_r| \gg \frac{1}{N}$ .

Fazendo-se a análise de cada caso, tem-se:

(i) Como  $\alpha_r$  é “pequeno”, então  $\frac{\text{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi\alpha_r} \approx 1$  e, assim,

$$g_{q_r} - g_{q_r-1} = f(z_r^+) - f(z_r^-) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$g_{q_j} - g_{q_j-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad j \neq q_r,$$

logo  $\gamma_r^{(1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ .

(ii) Para  $s = -1, 0, 1$ , tem-se que

$$|g_{q_r+s} - g_{q_r+s-1}| = |f(z_r^+) - f(z_r^-)| \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha_r)}{\pi(\alpha_r + s)} \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

A maior de tais diferenças ocorre quando  $s = 0$ , no entanto, as demais não são mais  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ . Observando-se que

$$(g_j - g_{j-1})(g_{j+1} - g_j) < 0, \quad j \neq q_r - 1, q_r,$$

$$(g_{q_r+1} - g_{q_r})(g_{q_r-1} - g_{q_r-2}) < 0,$$

$$(g_{q_r} - g_{q_r-1})(g_{q_r+1} - g_{q_r}) > 0 \quad \text{ou}$$

$$(g_{q_r} - g_{q_r-1})(g_{q_r-1} - g_{q_r-2}) > 0,$$

pode-se determinar  $q_r$  e  $z_r$  por meio de  $\gamma_r^{(1)}$  e  $\gamma_r^{(2)}$ . Há três casos possíveis:

i.  $|g_{q_r} - g_{q_r-1}| \sim |g_{q_r+1} - g_{q_r}| \implies \gamma_r^{(1)} \sim 1 \quad \text{e} \quad \gamma_r^{(2)} \sim -1/3;$

- ii.  $|g_{q_r} - g_{q_r-1}| \sim |g_{q_r-1} - g_{q_r-2}| \implies \gamma_r^{(1)} \sim -1/3$  e  $\gamma_r^{(2)} \sim 1$ ;
- iii.  $|g_{q_r} - g_{q_r-1}|$  único maior valor na vizinhança de  $j = q_r \implies |\gamma_r^{(1)}| < 1$  e  $|\gamma_r^{(2)}| < 1$ ;

A partir destas três situações pode-se determinar, unicamente, o subíndice  $q_r$ , para então estimar o ponto de descontinuidade  $z_r$  na equação (2.48), através de  $\gamma_r^{(1)}$  e da definição de  $\alpha_r$ . Assim, é possível determinar uma aproximação para os pontos de descontinuidade, com erro  $\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$ . Então, tem-se então o método implementado através do seguinte algoritmo:

### ALGORITMO: Pontos Iniciais

Dados os  $N$  coeficientes de Fourier  $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2}$ ,

i. Calcular  $g_j = \text{FFT}(\sigma_k^{(0)} \hat{f}_k)$  para  $j = 1, 2, \dots, N$ ;

ii. Calcular

$$\text{dif}(j) = |g_{q_j} - g_{q_j-1}| \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N,$$

para determinar o ponto da malha mais próximo ao ponto de descontinuidade, filtrando os da  $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$  e tomando o máximo entre os demais;

iii. Para cada  $r = 1, \dots, M$ , calcular a aproximação

$$\gamma_r^{(1)}(r) = \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}};$$

iv. Se

$$\alpha_r = \frac{\gamma_r^{(1)}(r)}{1 - \gamma_r^{(1)}(r)} < 0,5,$$

calcular a aproximação inicial para o ponto de descontinuidade  $z_r$ , dada por

$$w_r = x_{q_r} + \frac{\gamma_r^{(1)}}{N(1 + \gamma_r^{(1)})}.$$

v. Se  $\alpha_r > 0,5$ , descartar o candidato.

### 2.5.3 Algumas ponderações sobre o método

Na implementação do algoritmo é preciso determinar a separação mínima permitida entre os pontos de descontinuidade, como em qualquer método de localização de singularidades a partir de dados espectrais de Fourier.

Eventualmente, o algoritmo pode detectar um número  $M$  maior que o número  $L$  de pontos de descontinuidade realmente existentes, dependendo do valor escolhido inicialmente para tomar a variação nos  $g_j$  como salto. No entanto, isto não representa um problema ao se aplicarem os algoritmos de reconstrução. É importante que todos os pontos de descontinuidade sejam detectados.

É interessante comparar o método de Wei, Martínez e De Pierro com o de Gelb e Tadmor [10]. A diferença  $g_j - g_{j-1}$  está relacionada com a soma parcial conjugada generalizada,

$$\tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x) = i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2} \text{sign}(k) \theta\left(\frac{2|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{2ik\pi x},$$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g_j - g_{j-1} &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (e^{2ik\pi x_j} - e^{2ik\pi x_{j-1}}) \sigma_k^{(0)} \hat{f}_k \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \frac{i2k\pi}{N} \hat{f}_k e^{2ik\pi x_j} \\ &= i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \text{sign}(k) \theta\left(\frac{2|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{2ik\pi x_j}. \end{aligned}$$

Assim, pode-se observar que a diferença  $g_j - g_{j-1}$  corresponde à soma parcial conjugada generalizada da função  $f$ , com fator de atenuação polinomial de grau 1, isto é,  $\theta(x) = x$ . No entanto, o resultado do Corolário 2.3 possibilita o refinamento deste valor através da fórmula (2.48). Além disso, o método de Wei, Martínez e De Pierro tem a vantagem de poder encontrar o número exato de pontos de descontinuidade, o que nem sempre acontece o método das somas parciais conjugadas.

As aproximações iniciais dadas por (2.48) podem ser escritas em termos das somas parciais conjugadas generalizadas. Como

$$g_j - g_{j-1} = \tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_j) - \hat{f}_{N/2}(-1)^j,$$

tem-se que

$$\gamma^{(1)}(r) = \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}} = \frac{\tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_{q_r+1}) - \hat{f}_{N/2}(-1)^{q_r+1}}{\tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_{q_r}) - \hat{f}_{N/2}(-1)^{q_r}},$$

Logo

$$w_r = x_{q_r} + \frac{1}{N} \Re \left[ \frac{\tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_{q_r+1}) - i\pi \hat{f}_{N/2}(-1)^{q_r+1}}{\tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_{q_r+1}) + \tilde{S}_{N/2}^\theta[f](x_{q_r})} \right].$$

Outros fatores de atenuação (exponencial, trigonométrico, ...) podem ser usados

nesta expressão.

## 2.6 Método de Mhaskar e Prestin

Apresentaremos a seguir o método de detecção de descontinuidades desenvolvido por Mhaskar e Prestin [21], com base na decomposição de uma função seccionalmente diferenciável em suas partes contínua e descontínua. É necessária uma caracterização dos espaços locais de Besov de funções periódicas em termos de operadores polinomiais trigonométricos.

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $2\pi$ -periódica, (Lebesgue) mensurável, integrável em  $[0, 2\pi]$ , os coeficientes de Fourier de  $f$  são dados por

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt) dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.50)$$

Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}(k) \exp(ikx) \right| dx = 0$$

e, portanto, a sequência de coeficientes de Fourier determina a função unicamente. No entanto, uma vez que a determinação dos coeficientes de Fourier requer o conhecimento da função ao longo do intervalo de periodicidade, um problema interessante é obter informações sobre o comportamento local da função, dada a sequência de seus coeficientes de Fourier, isto é, construir polinômios trigonométricos fornecendo “localização tempo-frequência”. Pois, em geral, ocorre que, quando um operador é bem localizado no domínio do tempo (definido em um intervalo limitado), é mal localizado no domínio da frequência; e se é bem localizado na frequência, isto não acontece no tempo. Operadores com localização tempo-frequência são bem localizados tanto no tempo quanto na frequência, permitindo assim uma análise mais apropriada.

Uma demonstração das propriedades de localização destes operadores é sua capacidade de localizar singularidades (descontinuidades de salto em derivadas de diferentes ordens) de funções seccionalmente suaves. Em [22], foi estudada uma classe muito geral de operadores da forma  $f \mapsto \sum g_{k,n} \hat{f}(k) \exp(ik\cdot)$ . Foi feita uma precisa conexão entre os fatores  $g_{k,n}$  e a capacidade do operador de detectar as singularidades da função. Tipicamente, os fatores  $g_{k,n}$  são da forma  $g(k/n)$  para uma função  $g$  adequada, e a localização tempo-frequência dos operadores é determinada pela suavidade e pelo suporte da função  $g$ .

### 2.6.1 Espaços de suavidade local

Se  $A \subseteq \mathbb{R}$  é Lebesgue mensurável, e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é Lebesgue mensurável, escrevemos

$$\|f\|_{A,p} := \begin{cases} \left\{ \int_A |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in A} |f(x)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

A classe de funções mensuráveis  $f$  para as quais  $\|f\|_{A,p} < \infty$  é denotada por  $L^p(A)$ , com a convenção padrão de que duas funções são consideradas iguais se elas são iguais para quase todos os pontos (isto é, iguais exceto num conjunto de medida nula) em  $A$ . A notação  $X^p(A)$  denota o espaço  $L^p(A)$  se  $1 \leq p < \infty$ , e o espaço de funções uniformemente contínuas e limitadas em  $A$  (munidas da norma  $\|\cdot\|_{A,\infty}$ ) se  $p = \infty$ . Na sequência, simplificaremos a notação escrevendo  $\|f\|_p$  no lugar de  $\|f\|_{[0,2\pi],p}$ .

Se  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , e  $f \in L^p(I)$ , definimos o módulo de suavidade de  $f$  para  $0 < \delta < (b - a)/r$  e  $r \geq 1$  inteiro por

$$\omega_{I,r,p}(f, \delta) := \sup_{0 < t \leq \delta} \left\| \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(\cdot + kt) \right\|_{[a, b-r\delta], p}. \quad (2.51)$$

Se  $\delta \geq (b - a)/r$ , é conveniente definir  $\omega_{I,r,p}(f, \delta) := \min \|f - P\|_{I,p}$ , onde o mínimo é tomado sobre todos os polinômios algébricos de grau no máximo  $r - 1$ . Sejam  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \rho \leq \infty$ ,  $\alpha > 0$ , e  $r$  o menor inteiro maior que  $\alpha$ . Para  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , e  $f \in L^p(I)$ , escrevemos

$$\|f\|_{I,p,\rho,\alpha} := \begin{cases} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\alpha} \omega_{I,r,p}(f, 2^{-n}))^\rho \right\}^{1/\rho}, & \text{se } 0 < \rho < \infty, \\ \sup_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}} 2^{n\alpha} \omega_{I,r,p}(f, 2^{-n}), & \text{se } \rho = \infty. \end{cases} \quad (2.52)$$

Se  $x_0 \in [0, 2\pi]$ , o *espaço local de Besov*  $B_{p,\rho,\alpha}(x_0)$  consiste das funções  $f \in X^p$  satisfazendo a seguinte propriedade: há um intervalo  $I$  não degenerado, centrado em  $x_0$ , tal que  $\|f\|_{I,p,\rho,\alpha} < \infty$ . O módulo de suavidade,  $\omega_{I,r,p}$ , é o módulo aperiódico de suavidade, apesar de  $B_{p,\rho,\alpha}(x_0)$  consistir de funções periódicas. Mais informações sobre os espaços de Besov podem ser encontradas em [7, 25].

A seguir, serão discutidos alguns dos operadores polinomiais trigonométricos. O ponto inicial é construir operadores que fornecem uma “boa aproximação”. Para  $x \geq 0$ , a classe de todos os polinômios trigonométricos de ordem no máximo  $x$  será denotada por  $\mathbb{H}_x$ . Para  $f \in X^p$ , e  $x \geq 0$ , o grau de aproximação de  $f$  de  $\mathbb{H}_x$  é

definido por

$$E_{x,p}(f) := \min_{T \in \mathbb{H}_x} \|f - T\|_p. \quad (2.53)$$

Uma seqüência de operadores lineares  $U_n : X^p \rightarrow \mathbb{H}_{2^n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , será chamada uma *seqüência de boa aproximação* (para  $X^p$ ) se  $U_n(T) = T$  para cada  $T \in \mathbb{H}_{2^{n-1}}$ , e  $\sup_{n \geq 0} \|U_n(f)\|_p \leq c \|f\|_p$  para alguma constante  $c > 0$ , dependendo somente de  $p$  e da seqüência de operadores. Sejam  $\{U_n\}$  uma seqüência de boa aproximação,  $n \geq 0$  um inteiro,  $f \in X^p$ , e  $T \in \mathbb{H}_{2^{n-1}}$  satisfazendo  $\|f - T\|_p \leq 2E_{2^{n-1},p}(f)$ . Então

$$\|f - U_n(f)\|_p \leq \|f - T - U_n(f - T)\|_p \leq (c + 1)\|f - T\|_p \leq 2(c + 1)E_{2^{n-1},p}(f).$$

Portanto, temos

$$E_{2^n,p}(f) \leq \|f - U_n(f)\|_p \leq 2(c + 1)E_{2^{n-1},p}(f), \quad f \in X^p, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (2.54)$$

A fim de construir seqüências de boa aproximação, consideramos matrizes bi-infinitas da forma  $H = (h_{k,2^n})_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ , onde  $h_{k,2^n} = 0$  se  $|k| > 2^n$ . Para qualquer matriz  $H$ , e  $f \in X^1$ , definimos

$$\sigma_n(H, f; x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k,2^n} \hat{f}(k) \exp(ikx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.55)$$

É conveniente definir  $\sigma_t(H, f) \equiv 0$  se  $t < 0$ . Notamos que para  $f \in X^1$ ,  $\sigma_n(H, f) \in \mathbb{H}_{2^n}$ , e com

$$\Phi_n(H, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k,2^n} \exp(ikx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.56)$$

temos

$$\sigma_n(H, f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_n(H, x - t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.57)$$

Uma matriz  $H$  será chamada uma "matriz de somabilidade diádica" se  $h_{k,2^n} = 0$  para  $|k| > 2^n$ ,  $h_{k,2^n} = 1$  para  $|k| \leq 2^{n+1}$ , e existe uma constante  $A_H$  tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| |h_{k+2,2^n} - 2h_{k+1,2^n} + h_{k,2^n}| \leq A_H < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.58)$$

A seguinte proposição, cuja prova pode ser encontrada em [21], resume algumas das propriedades dos operadores  $\sigma_n(H, f)$ . Adotamos a seguinte convenção sobre as constantes: as letras  $c, c_1, \dots$  denotarão constantes positivas que podem depender de  $H, p, \rho, \alpha$ , e do parâmetro  $q$  depois de introduzido abaixo, e de outras quantidades indicadas. Seus valores podem ser diferentes em diferentes ocorrências, mesmo dentro da mesma fórmula.

**Proposição 2.4** *Seja  $H$  uma matriz bi-infinita.*

i. Se (2.58) é satisfeita, então

$$\sup_{n \geq 0} \|\Phi_n(H)\|_1 < \infty. \quad (2.59)$$

ii. Se  $H$  é uma matriz de somabilidade diádica, então a sequência de operadores  $\{\sigma_n(H)\}$  é uma sequência de boa aproximação para cada  $X^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

iii. Sejam  $q \geq 1$  um inteiro e

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\ell=0}^{q+1} (-1)^\ell \binom{q+1}{\ell} h_{k+\ell, 2^m} \right| \leq c 2^{-mq}, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (2.60)$$

Então

$$|\Phi_n(H, x)| \leq \frac{c_1}{2^{nq} |x \bmod 2\pi|^{q+1}}, \quad x \neq 0 \bmod 2\pi, x \in \mathbb{R}. \quad (2.61)$$

Dizemos que uma matriz de somabilidade diádica  $H$  está na classe  $\mathcal{S}^q$  se a condição (2.60) é satisfeita.

O objetivo desta seção é esclarecer a relação entre espaços locais de Besov e o comportamento dos operadores

$$\tau_n(H, f) := \sigma_n(H, f) - \sigma_{n-1}(H, f) \quad (2.62)$$

próximo ao ponto em questão. Esse comportamento será descrito pela condição de que certas normas do operador pertencem a uma versão sequencial dos espaços de Besov, que definiremos a seguir. Para uma sequência  $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ , e números  $\alpha, \rho > 0$ , escrevemos

$$\|\mathbf{a}\|_{\rho, \alpha} := \begin{cases} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\alpha} |a_n|)^\rho \right\}^{1/\rho}, & \text{se } 0 < \rho < \infty, \\ \sup_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}} 2^{n\alpha} |a_n|, & \text{se } \rho = \infty. \end{cases} \quad (2.63)$$

Dizemos que a sequência  $\mathbf{a}$  está no espaço  $b_{\rho, \alpha}$  se  $\|\mathbf{a}\|_{\rho, \alpha} < \infty$ . Deste modo,  $f \in B_{p, \rho, \alpha}(x_0)$  se e somente se a sequência  $\{\omega_{I, r, p}(f, 2^{-n})\} \in b_{\rho, \alpha}$  para algum  $r > \alpha$  e  $I$  intervalo centrado em  $x_0$ .

O teorema mais importante aqui é o que segue. Sua prova pode ser encontrada em [21].

**Teorema 2.5** *Sejam  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$ ,  $x_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $q > \max(1, \alpha)$  um inteiro,  $0 < \rho \leq \infty$ , e  $H \in \mathcal{S}^q$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

i.  $f \in B_{p, \rho, \alpha}(x_0)$ .

- ii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que a sequência  $\{\|\tau_n(H, f)\|_{I,p}\} \in \mathfrak{b}_{\rho,\alpha}$ .
- iii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que para cada função  $\Phi$  infinitamente diferenciável, com suporte em  $I$  (e estendida como uma função  $2\pi$ -periódica), a sequência  $\{\|\tau_n(H, f\Phi)\|_p\} \in \mathfrak{b}_{\rho,\alpha}$ .

Observamos que as funções  $\tau_n(H, f) \in \mathbb{H}_{2^n}$  são polinômios trigonométricos de ordem no máximo  $2^n$ , e são de frequência localizada, no sentido de que os coeficientes de Fourier  $\widehat{\tau_n(H, f)}(k)$  são iguais a zero exceto quando  $2^{n-2} \leq |k| \leq 2^n$ . O Teorema 2.5 demonstra que elas também são de tempo localizado. A equivalência entre as partes (ii) e (i) mostra que o comportamento de  $\tau_n(H, f)$  próximo a um ponto depende somente das propriedades de suavidade de  $f$  próximo a tal ponto. A equivalência entre (iii) e (i) mostra que o comportamento global do operador, construído somente de valores de  $f$  próximos a um ponto, é determinado inteiramente pela suavidade de  $f$  próximo daquele ponto. Então, a suposição a priori de que  $f \in X^p$  não é necessária neste contexto; os espaços locais de Besov são caracterizados pelo comportamento global dos operadores com base nos coeficientes de Fourier de  $f\Phi$  no lugar dos de  $f$ .

A seguir, discutiremos uma versão discretizada do Teorema 2.5, no sentido de que as normas  $L^p$  nas partes (ii) e (iii) acima serão substituídas por normas discretas adequadas, e também no sentido de que os operadores serão avaliados usando os valores da função em vez dos coeficientes de Fourier.

Para este fim, primeiro introduzimos mais algumas notações. Se  $\nu$  é uma medida com sinal em  $[0, 2\pi]$ , denotamos sua medida de variação total por  $|\nu|$  (ou  $|d\nu|$  no contexto de integração). Se  $f$  é uma função  $\nu$ -mensurável, e  $A$  é um conjunto  $\nu$ -mensurável, escrevemos

$$\|f\|_{A,\nu,p} := \begin{cases} \left\{ \int_A |f(t)|^p |d\nu(t)| \right\}^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{\xi \in \text{supp}(\nu) \cap A} |f(\xi)|, & \text{se } p = \infty, \end{cases} \quad (2.64)$$

onde  $\text{supp}$  é o suporte, no caso,  $\{z \in A \mid \nu(z) > 0\}$ . Como antes, escreveremos  $\|f\|_{\nu,p} := \|f\|_{[0,2\pi],\nu,p}$ . Uma medida com sinal  $\nu$  será chamada uma medida de quadratura M-Z de ordem  $N$  se cada uma das seguintes condições é satisfeita:

$$\|T\|_{\nu,p} \leq c \|T\|_p, \quad T \in \mathbb{H}_N, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (2.65)$$

e

$$\int T(t) d\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) dt, \quad T \in \mathbb{H}_N. \quad (2.66)$$

Quando o suporte de  $\nu$  é um conjunto finito, a desigualdade (2.65) é chamada

uma desigualdade de Marcinkiewicz-Zygmund. É provado em [20] (Corolário 4.1 e Proposição 3.4, com a estimativa (4.9) em [20] conforme alteração na Errata) que se  $\mathcal{C}$  é um subconjunto qualquer de  $[0, 2\pi]$ , e

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} \min_{y \in \mathcal{C}} |e^{ix} - e^{iy}| \leq c/N$$

para uma constante  $c > 0$  absoluta suficientemente pequena, então existe uma medida de quadratura M-Z de ordem  $N$ , com suporte em  $\mathcal{C}$ .

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 2.6, onde as normas dos operadores são substituídas por suas normas discretas.

**Teorema 2.6** *Sejam  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$ ,  $x_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $q > \max(1, \alpha)$  um inteiro,  $0 < \rho \leq \infty$ , e  $H \in S^q$ . Para cada inteiro  $n \geq 0$ , seja  $\nu_n$  uma medida (possivelmente com sinal) de quadratura M-Z de ordem  $(2^n)$ . Então*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(H, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \tau_n(H, f, t) \{ \Phi_{n+1}(H, \cdot - t) - \Phi_{n-2}(H, \cdot - t) \} d\nu_n(t), \quad (2.67)$$

com a série convergindo no sentido de  $X^p$ . Além disso, as seguintes afirmações são equivalentes:

- i.  $f \in B_{p, \rho, \alpha}(x_0)$ .
- ii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que a sequência  $\{ \|\tau_n(H, f)\|_{I, \nu_n, p} \} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .
- iii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que para cada função  $\Phi$  infinitamente diferenciável, com suporte em  $I$  (e estendida como uma função  $2\pi$ -periódica), a sequência  $\{ \|\tau_n(H, f\Phi)\|_{\nu_n, p} \} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .

No caso em que  $\nu_n$  tem suporte em um conjunto  $\mathcal{C}_n$  finito, a equação (2.67) mostra que  $\{ \tau_n(H, f, \xi) \}_{\xi \in \mathcal{C}_n}$  é uma sequência de coeficientes em uma expansão em série de  $f$ . O Teorema 2.6 fornece a caracterização dos espaços locais de Besov em termos dos valores absolutos destes coeficientes. Agora voltaremos a atenção às propriedades de localização dos operadores definidos usando as medidas discretas  $\nu_n$ . De fato, uma vez que as avaliações nos pontos são definidas somente para funções em  $X^\infty$ , o teorema seguinte será estabelecido apenas para normas do supremo.

Seja  $H$  uma matriz de somabilidade diádica, para  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\nu_n$  uma medida de quadratura M-Z de ordem  $(2^n)$ ,  $\mathcal{C}_n := \text{supp}(\nu_n)$ . Para uma função  $f$   $\nu_n$ -mensurável, definimos

$$\sigma_n^D(H, f, x) := \int f(t) \Phi_n(H, x - t) d\nu_n(t). \quad (2.68)$$

Claramente,  $\sigma_n^D(H, f) \in \mathbb{H}_{2^n}$ . Notamos que o operador  $\sigma_{n-1}^D(H)$  é definido usando a medida  $\nu_n$ . O teorema a seguir fornece uma caracterização dos espaços locais de Besov em termo das diferenças

$$\tau_n^D(H, f) := \sigma_n^D(H, f) - \sigma_{n-1}^D(H, f). \quad (2.69)$$

Notamos mais uma vez que no caso em que  $\mathcal{C}_n$  é um conjunto finito, o polinômio trigonométrico  $\tau_n^D(H, f) \in \mathbb{H}_{2^n}$  é definido usando um número finito de valores da função  $f$ .

**Teorema 2.7** *Sejam  $f \in X^\infty$ ,  $x_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $q > \max(1, \alpha)$  um inteiro,  $0 < \rho \leq \infty$ , e  $H \in S^q$ . Para cada inteiro  $n \geq 0$ , seja  $\nu_n$  uma M-Z medida (possivelmente com sinal) em quadratura de ordem  $(2^n)$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i.  $f \in B_{\infty, \rho, \alpha}(x_0)$ .
- ii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que a sequência  $\{\|\tau_n^D(H, f)\|_{I, \infty}\} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .
- iii. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que para cada função  $\Phi$  infinitamente diferenciável, com suporte em  $I$  (e estendida como uma função  $2\pi$ -periódica), a sequência  $\{\|\tau_n^D(H, f\Phi)\|_\infty\} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .
- iv. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que a sequência  $\{\|\tau_n^D(H, f)\|_{I, \nu_n, \infty}\} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .
- v. Existe um intervalo  $I$ , centrado em  $x_0$ , tal que para cada função  $\Phi$  infinitamente diferenciável, com suporte em  $I$  (e estendida como uma função  $2\pi$ -periódica), a sequência  $\{\|\tau_n^D(H, f\Phi)\|_{\nu_n, \infty}\} \in \mathfrak{b}_{\rho, \alpha}$ .

### 2.6.2 Exemplos Numéricos: Expoentes locais de Lipschitz

Nesta subseção, discutiremos alguns exemplos numéricos para ilustrar a teoria apresentada anteriormente, bem como em [22].

A regularidade de um sinal se avalia habitualmente mediante os expoentes de Lipschitz já que, de alguma forma, *tais expoentes fornecem uma medida da diferenciabilidade da função*.

Seja  $n$  um inteiro positivo tal que  $n \leq \alpha \leq n + 1$ . Diz-se que uma função é lipschitziana de ordem  $\alpha$  se, e somente se, existem duas constantes,  $A$  e  $h_0 > 0$ , e um polinômio de ordem  $n$ ,  $P_n(t)$ , tal que para  $h < h_0$ , tem-se

$$|f(t_0 + h) - P_n(h)| \leq A|h|^\alpha.$$

A regularidade lipschitziana de  $f(t)$  se caracteriza mediante o limite superior do expoente  $\alpha$  na desigualdade acima. Se o expoente de Lipschitz é inferior a unidade em um ponto, então se diz que a função é singular em tal ponto.

Uma função limitada em um instante  $t$ , mas descontínua em tal instante, é lipschitziana de ordem zero. Se  $\alpha < 1$  em  $t$ , então  $f$  não é diferenciável em  $t$  e este expoente  $\alpha$  caracteriza a medida da singularidade.

Como conclusão, a informação que se pode extrair dos expoentes de Lipschitz se refere à diferenciabilidade de uma função e define se a derivada de ordem  $\alpha$  está limitada, mas não a continuidade da mesma.

Seja  $\alpha$  um número real não inteiro e  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . A função  $f$  é dita uniformemente lipschitziana de ordem  $\alpha$  no intervalo  $]a, b[$ , se e somente se sua primitiva é uniformemente lipschitziana de orden  $\alpha + 1$  em tal intervalo. Notemos que esta definição é global ao referir-se a intervalos e não a pontos.

Passaremos a denotar  $B_{\infty, \infty, \alpha}(x_0)$  por  $\text{Lip}(\alpha, x_0)$ .

**Exemplo 2.8** *Consideramos a função*

$$f(x) := Q(x) + \begin{cases} |x - \pi|^{1/2}, & \text{se } \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, \\ (\pi/2)^{1/2} + |x - \pi/2|^{1/4}, & \text{se } 0 \leq x < \pi/2, \\ (\pi/2)^{1/2} + |x - 3\pi/2|^{3/4}, & \text{se } 3\pi/2 < x \leq 2\pi, \end{cases} \quad (2.70)$$

onde  $Q$  é um polinômio quadrático que faz a função continuamente diferenciável em  $0, 2\pi$ , quando estendida como uma função  $2\pi$ -periódica. Claramente,  $f \in \text{Lip}(1/4, \pi/2)$ ,  $f \in \text{Lip}(1/2, \pi)$ , e  $f \in \text{Lip}(3/4, 3\pi/2)$ .

Para analisar esta função, consideramos a função  $h$  definida por

$$h(x) = \sum_{j=-10}^{10} M_7(14x - j + 7/2), \quad x \geq 0.$$

Lembramos que, para  $q \geq 1$ , a B-spline cardinal de ordem  $q$  é a função definida por (conforme [6])

$$M_1(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$M_q(x) := \frac{1}{q-1} [xM_{q-1}(x) + (q-x)M_{q-1}(x-1)], \quad q \geq 2. \quad (2.71)$$

A função  $h$  é 5 vezes continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}$ ,  $h^{(5)}$  é uma função seccionalmente constante,  $h(x) = 1$  se  $|x| < 1/2$ , e  $h(x) = 0$  se  $|x| > 1$ . Portanto,  $H = (h(k/2^n))$  está em  $\mathcal{S}^6$ . Neste exemplo, os coeficientes de Fourier de  $f$  são simplificados e então aproximados com precisão suficiente usando Matlab, e as normas do supremo sobre diferentes intervalos são aproximadas com exatidão suficiente ( $10^{-20}$ ). Seja  $t = \pi/8$ . Para encontrar o valor do expoente de Lipschitz em um

ponto  $x_0$ , computamos a quantidade

$$\alpha_{est} := \log_2 \left( \frac{\|\tau_n(H, f)\|_{[x_0-t, x_0+t], \infty}}{\|\tau_{n+1}(H, f)\|_{[x_0-t, x_0+t], \infty}} \right)$$

e obtivemos os seguintes valores:

| $n$ | $\alpha_{est}(n, \pi/2)$ | $\alpha_{est}(n, \pi)$ | $\alpha_{est}(n, 3\pi/2)$ |
|-----|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| 5   | 0.27220                  | 0.577207444            | 0.794                     |
| 6   | 0.24239                  | 0.502889989            | 0.709                     |
| 7   | 0.24484                  | 0.499999986            | 0.713                     |
| 8   | 0.24693                  | 0.500000048            | 0.720                     |
| 9   | 0.24818                  | 0.500000002            | 0.725                     |

Assim, como  $\alpha < 1$  em  $\pi/2$  e em  $3\pi/2$ , temos que  $f$  não é diferenciável nestes pontos, e este expoente  $\alpha$  caracteriza a medida de singularidade.

### 2.6.3 Detecção de singularidades

Nesta seção, será conveniente tratarmos  $[-\pi, \pi]$  como o domínio básico de definição de funções de período  $2\pi$ . Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -periódica, é seccionalmente  $R$ -suave se existem pontos

$$-\pi = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = \pi$$

tal que a restrição de  $f$  a  $(y_i, y_{i+1})$ , para  $0 \leq i \leq m-1$ , é  $R$  vezes continuamente diferenciável, e  $f^{(r)}(y_i+)$  e  $f^{(r)}(y_{i+1}-)$  existem (são finitas) para  $0 \leq r \leq R$ . Qualquer função satisfazendo tais hipóteses pode ser escrita na forma canônica

$$f(x) = \sum_{r=0}^R \sum_{j=1}^m z_{j,r} \Gamma_r(x - y_j) + F(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.72)$$

onde  $z_{j,r} \in \mathbb{C}$ ,  $F$  é uma função  $2\pi$ -periódica  $R$  vezes continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}$ , e as funções  $\Gamma_r$  são definidas por

$$\Gamma_r(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{e^{ikx}}{(ik)^{r+1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.73)$$

Na representação (2.72),  $y_j$  será chamado uma singularidade de ordem  $\ell$  de  $f$  se  $\ell = \min\{r \mid z_{j,r} \neq 0\}$ . Em [22] foram estudados operadores da forma

$$\tau_n^P(g, f, x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(\frac{k}{2^n}\right) \hat{f}(k) \exp(ikx), \quad (2.74)$$

onde  $g$  é uma função convenientemente definida, e  $f$  é uma função com valores em  $\mathbb{R}$ , seccionalmente  $R$ -suave. Notamos que  $\tau_n^P(g, f)$  utiliza somente os coeficientes

$\hat{f}(k)$  para valores positivos de  $k$ . Como  $f$  tem valores em  $\mathbb{R}$ , estes já contêm toda a informação necessária. Além disso, os resultados em [22] indicam que estas transformações “unilaterais” são mais adequadas para revelar as singularidades de diferentes ordens, pares ou ímpares. Embora alguns exemplos numéricos sejam discutidos em [22] sobre o uso destes operadores na detecção dos pontos  $y_j$ , vale a pena discutir algumas informações adicionais que têm sido levantadas em conexão com este problema nos últimos anos.

### ALGORITMO

Para encontrar as singularidades, executamos os seguintes passos repetidamente:

i. Calcule

$$x_0 = \arg \max |\tau_n^P(g, f, x)|.$$

ii. Encontre

$$m_1 := |\tau_n^P(g, f, x_0)|, \quad m_2 := |\tau_{n-1}^P(g, f, x_0)|.$$

iii. Calcule

$$r = \text{round} \left[ \log_2 \left( \frac{m_2}{m_1} \right) \right], \quad d = \frac{\tau_n^P(g, f, x_0)}{\tau_n^P(g, \Gamma_r, 0)}.$$

iv. Redefina

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(k) - \frac{d \exp(-ikx_0)}{(ik)^{r+1}}.$$

# Capítulo 3

## Testes Computacionais

Neste capítulo são realizados testes computacionais, fazendo-se algumas observações e comparações entre os métodos descritos anteriormente. Ilustramos alguns exemplos geometricamente.

### 3.1 Os Métodos de Concentração

Nos experimentos numéricos que se seguem, foi escolhido  $\beta = \pi$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha = 6$ , e  $\epsilon = 1/N$  correspondendo a (2.8), (2.9) e (2.10), respectivamente.

O seguinte exemplo simples mostra que o método de concentração é capaz de determinar múltiplas descontinuidades de salto:

#### Exemplo 3.1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(3x) + \frac{1}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{1+2x^2} - 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \text{sen}(x) \cos\left(\frac{7x}{2}\right), & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

A função salto correspondente é dada por

$$[f](x) = \begin{cases} \frac{6 - 5\pi^2}{4 + 2\pi^2}, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4 - 2\pi^2}{2 + \pi^2}, & x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Figura 3.1 ilustra este exemplo.

As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 mostram o resultado da aplicação do método de concentração (2.4) ao Exemplo 3.1, respectivamente com os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10). Pode-se observar que a função salto do Exemplo 3.1 é, de fato, recuperada, quando qualquer um dos três fatores de concentração é usado.

### 3.1.1 Minmod

Cada fator de concentração gera um padrão oscilatório diferente quando se depara com uma descontinuidade. Tal fato pode ser aproveitado para melhorar os resultados, aplicando-se o algoritmo *minmod*. A Figura 3.5 mostra a eficácia do método de concentração *minmod* no Exemplo 3.1. Em particular, vemos os benefícios da aplicação do procedimento *minmod* longe das descontinuidades de salto. As oscilações são significativamente reduzidas pelo *minmod*.

### 3.1.2 O Método de Concentração Filtrado

No lugar dos fatores de concentração dados por (2.8), (2.9) e (2.10), são usados os fatores de concentração filtrados. O algoritmo *minmod* (2.14) é então usado para melhorar a aproximação da função salto.

A Figura 3.6 mostra o método de concentração *minmod* (2.13) aplicado ao Exemplo 3.1, usando os fatores de concentração filtrados (2.15), para  $n = 0, 1, 2, 3$ , onde os fatores originais são dados por (2.8), (2.9) e (2.10).

### 3.1.3 O Método de Concentração “Matching Waveform”

As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 mostram os *signature profiles* para os fatores de concentração dados em (2.8), (2.9) e (2.10). O padrão oscilatório observado próximo da descontinuidade de salto claramente varia para cada *waveform*, assim como o comportamento de convergência longe da descontinuidade de salto. Ambos aspectos são explorados pelo algoritmo *minmod* em (2.13).

A Figura 3.10 mostra os resultados quando o *minmod* é aplicado ao método de concentração *matching waveform*, usando os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10).

### 3.1.4 O Método “Zero Crossing Matching Waveform”

É importante notar que o método *zero crossing matching waveform* não converge para a função salto, e portanto  $\sigma^Z(\eta)$  não é admissível. No entanto, seu comportamento próximo das descontinuidades de salto mostra que ele é útil quando combinado com outros métodos de concentração no algoritmo *minmod* (2.14). Pode-se notar que, enquanto a *matching waveform* converge para um único pico na descontinuidade de salto, a *zero crossing matching waveform* inclui dois outros picos

adicionais de sinal oposto, com magnitudes proporcionais a  $[f](\xi)$ , em cada lado da descontinuidade. A localização desses máximos locais e seus valores correspondentes são diretamente determinados de (2.39). A convergência não uniforme de  $\tilde{M}_N^\sigma[f](x \pm \rho)$  e de  $\tilde{Z}_N^\sigma[f](x \pm \rho)$  é explorada pelo algoritmo *minmod*. Como uma vantagem adicional, vemos que *zero crossing matching waveform* é mais localizada, no sentido de que é menor a distância entre os zeros mais próximos da *waveform* adjacente à descontinuidade de salto. Isto também pode ser explorado pelo algoritmo *minmod*, e o resultado global localiza melhor o salto.

### 3.2 O Método de Wei, Martínez e De Pierro

Aplicamos o método de Gelb e Tadmor (com fator de concentração polinomial de primeiro grau) e o método de Wei, Martínez e De Pierro às seguintes funções, com  $N = 128$ :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.1), \\ 1, & x \in (0.1, 0.2), \\ 0.5, & x \in (0.2, 0.51), \\ 1.5, & x \in (0.51, 0.8), \\ 0, & x \in (0.8, 0.92), \\ 2, & x \in (0.92, 1], \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 0.1), \\ -2x, & x \in (0.1, 0.2), \\ 3x, & x \in (0.2, 0.25), \\ -4x, & x \in (0.25, 0.6), \\ 5x, & x \in (0.6, 0.85), \\ -6x, & x \in (0.85, 1], \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.1e^{5x}, & x \in [0, 0.29), \\ 0, & x \in (0.29, 0.33), \\ 3, & x \in (0.33, 0.87), \\ -1, & x \in (0.87, 0.92), \\ 0, & x \in (0.92, 1], \end{cases} \quad (3.3)$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0.4, & x \in [0, 0.27), \\ 0, & x \in (0.27, 0.31), \\ 25(x - 0.6)^2, & x \in (0.31, 0.6), \\ 3x, & x \in (0.6, 0.951), \\ 0, & x \in (0.951, 1]. \end{cases} \quad (3.4)$$

As Figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 mostram o desempenho dos dois métodos

com estas funções. Em todos os casos, a tolerância para a amplitude a ser considerada como saltos é a mesma. Notamos que no caso de  $f_1$  e  $f_2$ , o método de Gelb e Tadmor detecta mais descontinuidades do que realmente existem; enquanto no caso de  $f_3$  e  $f_4$ , o método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar algumas das descontinuidades. Por outro lado, o método de Wei, Matínez e De Pierro detecta todas as descontinuidades para dados exatos, além de apresentar uma melhor performance, não somente para a detecção de descontinuidades mas também para estimar o tamanho dos saltos. Os experimentos com o método de Wei, Matínez e De Pierro confirmam a ordem de aproximação de  $\mathcal{O}1/N^2$ .

### 3.3 O Método de Mhaskar e Prestin

Para ilustrar as questões do Método de Mhaskar e Prestin, consideramos a função:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)(x + \pi) - \frac{1}{\pi}, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \text{sen}(x) - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{\pi}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ -\cos(x) - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)(x - \pi) - \frac{1}{\pi}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (3.5)$$

A função  $f$  é seccionalmente 2-suave, com uma singularidade de ordem 2 em  $-\pi/2$ , de ordem 1 em  $\pi/2$ , e nenhuma outra singularidade de ordem menor que, ou igual a, 2.

Os coeficientes de Fourier desta função são dados por

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ -\frac{1+i}{4} + \frac{i}{\pi}, & k = 1, \\ \frac{i}{k^2\pi} \left[ \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{k(ik+1) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2-1} \right], & k = 2, 3, \dots, \\ \overline{\hat{f}(-k)}, & k < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Para analisar a função  $f$ , consideramos a função  $g$ , dada por

$$g(x) := M_5(10x - 5), \quad (3.7)$$

que é uma função três vezes continuamente diferenciável, com suporte em  $[1/2, 1]$ . Desta maneira, deve-se ter em mente que o operador  $\tau_n^P(g, f)$  usa somente  $2^{n-1}$  coeficientes de Fourier de  $f$ .

As Figuras 3.12 e 3.13 mostram os gráficos de  $|\tau_n^P(g, f, x)|$  antes e depois de deletar a primeira singularidade em  $\pi/2$ , respectivamente. Usando  $n = 5$ , encontramos uma singularidade de ordem 1 em  $0.4997\pi$  (com  $m_1 = 0.0018$ ), uma singularidade de ordem 2 em  $-0.4995\pi$  (com  $m_1 = 3.636 \times 10^{-5}$ ) e uma singularidade extra de ordem 5 em  $-0.347\pi$  (com  $m_1 = 2.0365 \times 10^{-6}$ ).

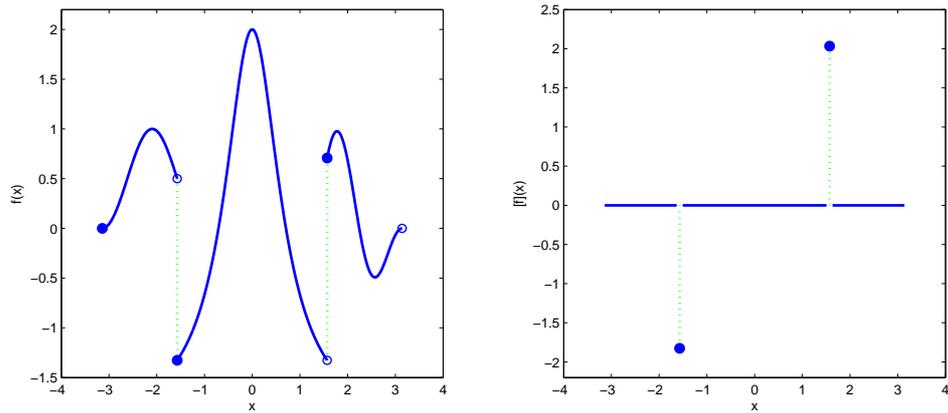


Figura 3.1: A função dada pelo Exemplo 3.1, e sua função salto.

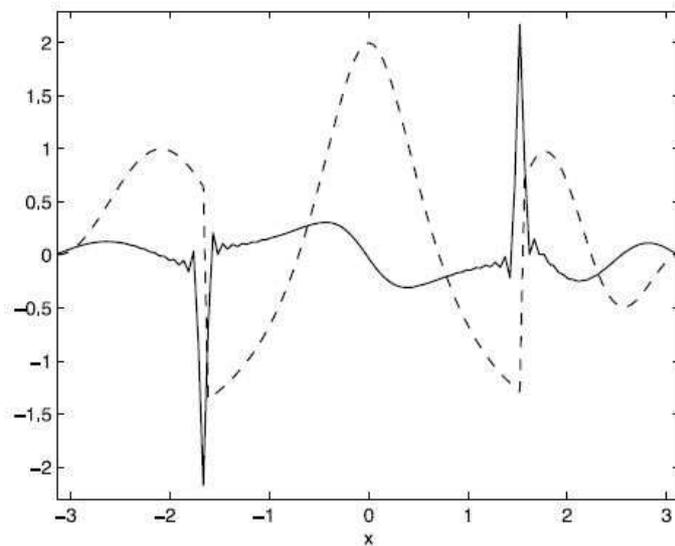


Figura 3.2: O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando  $\sigma_{Trig}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui,  $N = 64$ .

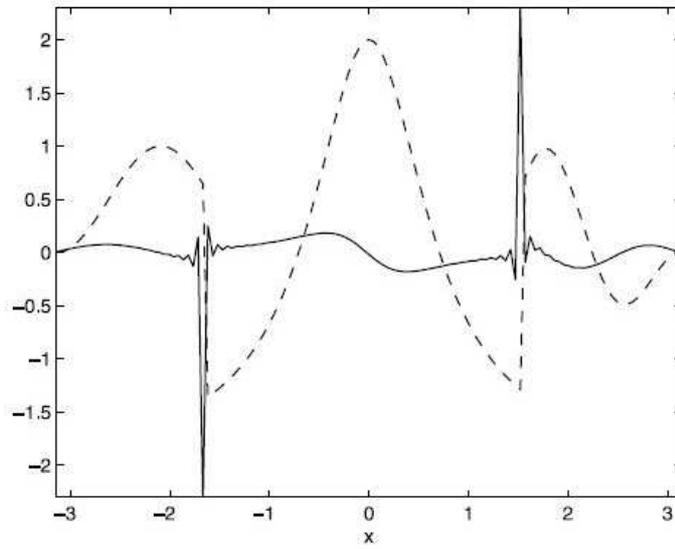


Figura 3.3: O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando  $\sigma_{Poly}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui,  $N = 64$ .

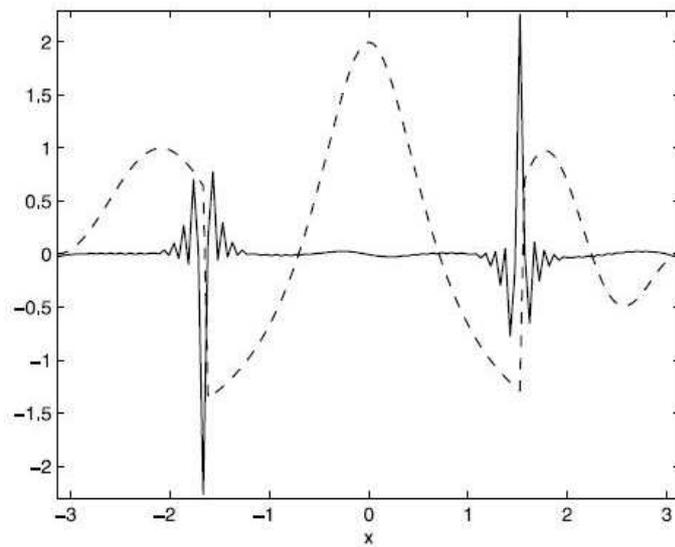


Figura 3.4: O método de concentração (2.4) aplicado ao Exemplo 3.1, usando  $\sigma_{Exp}$ . A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui,  $N = 64$ .

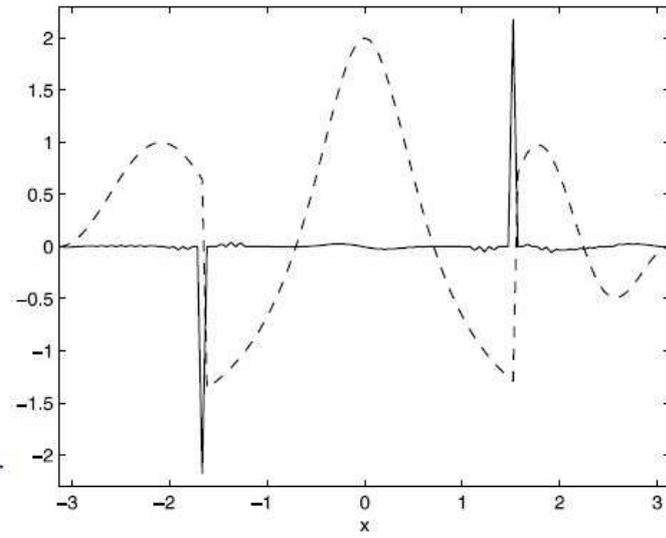


Figura 3.5: O método de concentração *minmod* 2.4 aplicado ao Exemplo 3.1 usando os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10). A função original está em linhas pontilhadas, e a aproximação da função salto em linhas sólidas. Aqui,  $N = 64$ .

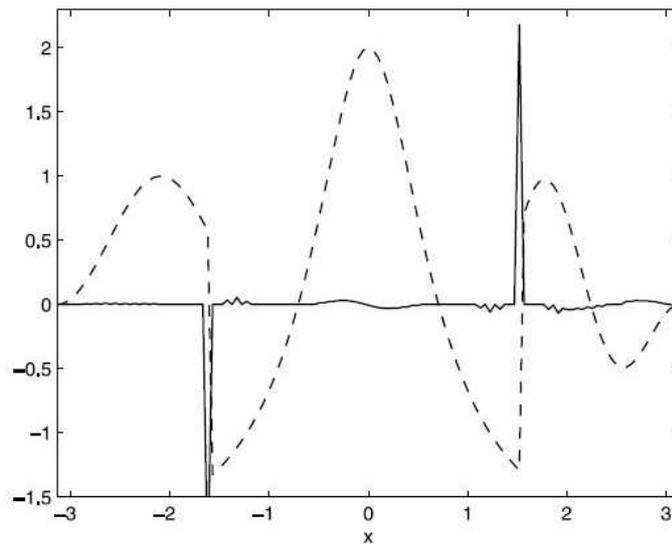


Figura 3.6: Os resultados do método de concentração *minmod* para o Exemplo 3.1, com  $N = 64$ , usando o método de concentração (2.17).

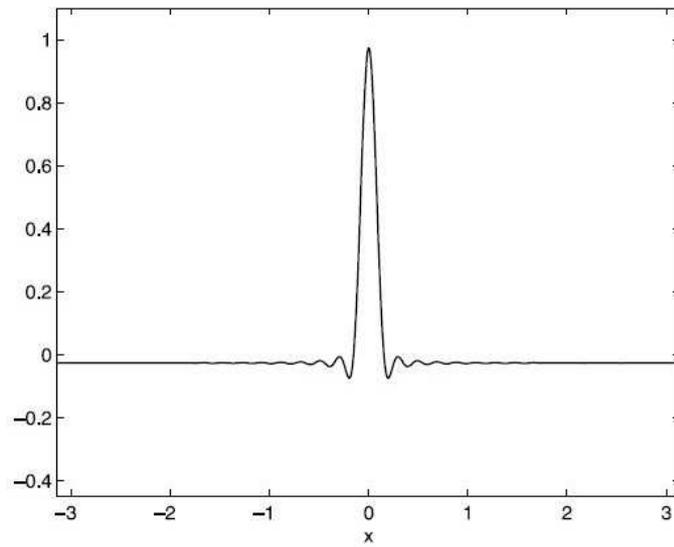


Figura 3.7: *Signature profile* (2.21) para  $\sigma_{Trig}$ . Aqui,  $N = 32$ .

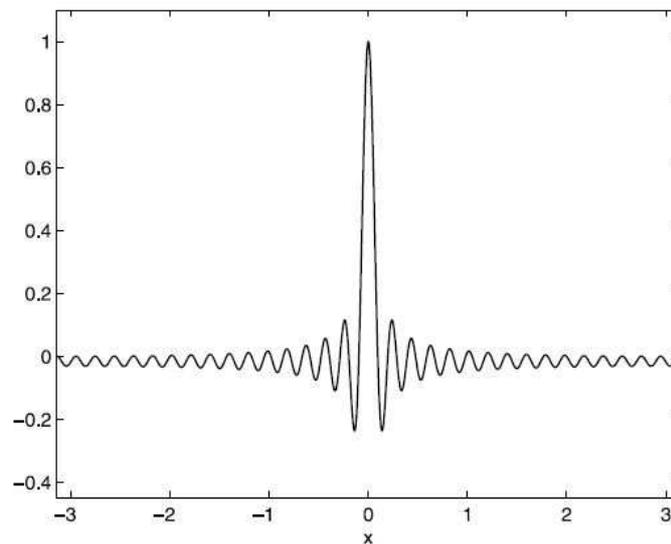


Figura 3.8: *Signature profile* (2.21) para  $\sigma_{Poly}$ . Aqui,  $N = 32$ .

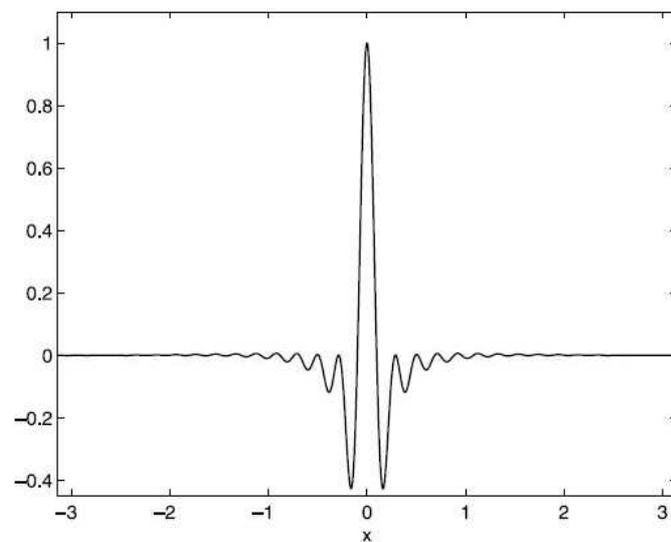


Figura 3.9: *Signature profile* (2.21) para  $\sigma_{Exp}$ . Aqui,  $N = 32$ .

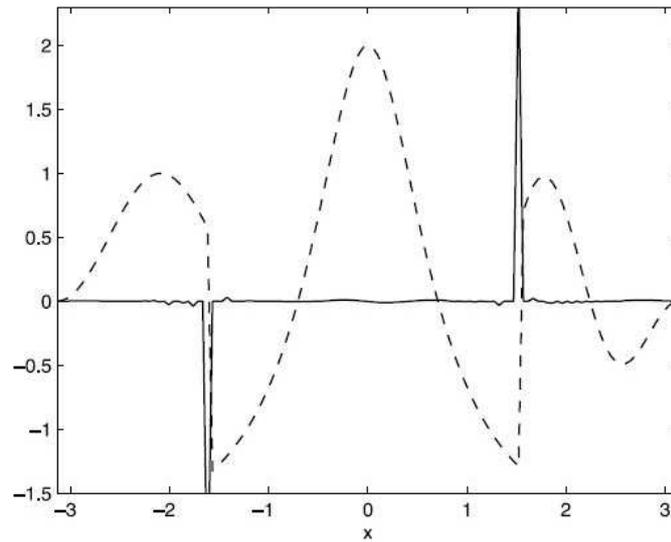


Figura 3.10: O algoritmo *minmod* (2.14) aplicado ao Exemplo 3.1, com o método *matching waveform*, usando os fatores de concentração (2.8), (2.9) e (2.10).

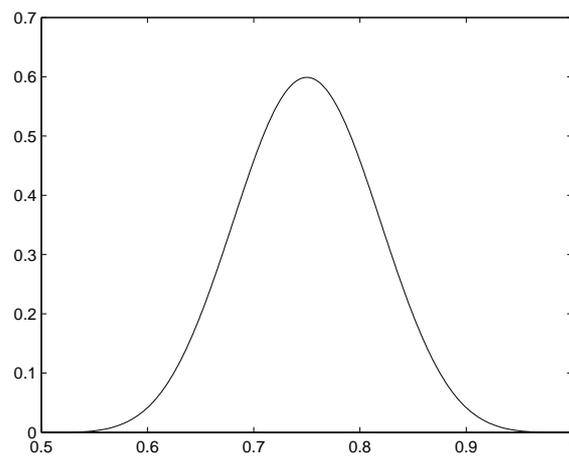


Figura 3.11: A função  $g$ , dada por (3.7).

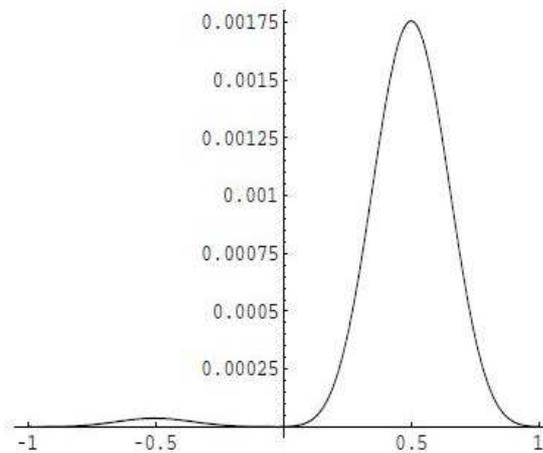


Figura 3.12: O gráfico de  $|\tau_n^P(g, f, x)|$  antes da primeira iteração.

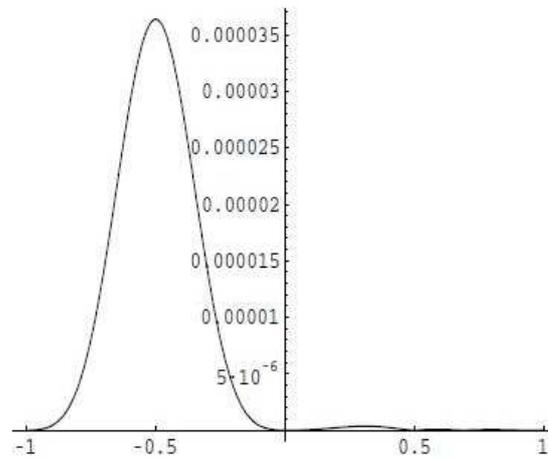


Figura 3.13: O gráfico de  $|\tau_n^P(g, f, x)|$  depois da primeira iteração, após deletar a singularidade em  $\pi/2$ .

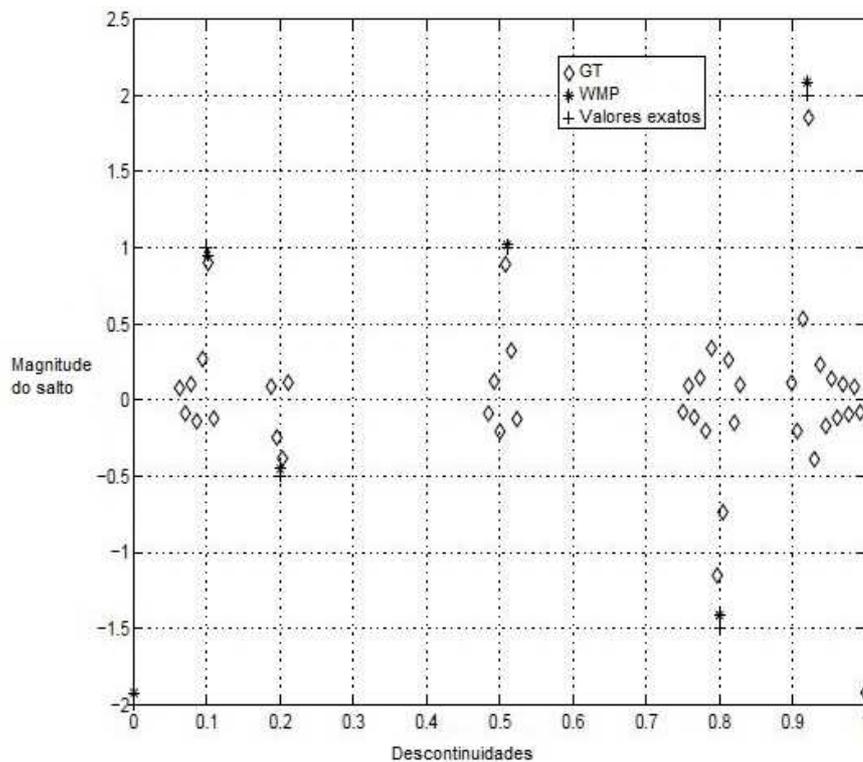


Figura 3.14: Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_1$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor superestima o número de pontos de descontinuidade.

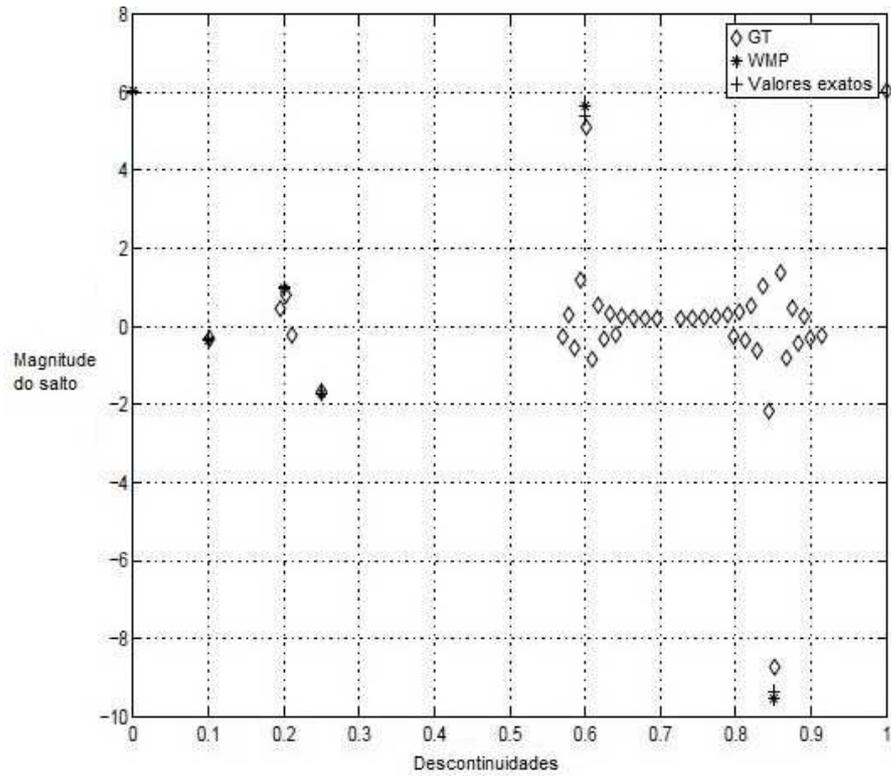


Figura 3.15: Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_2$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor superestima o número de pontos de descontinuidade.

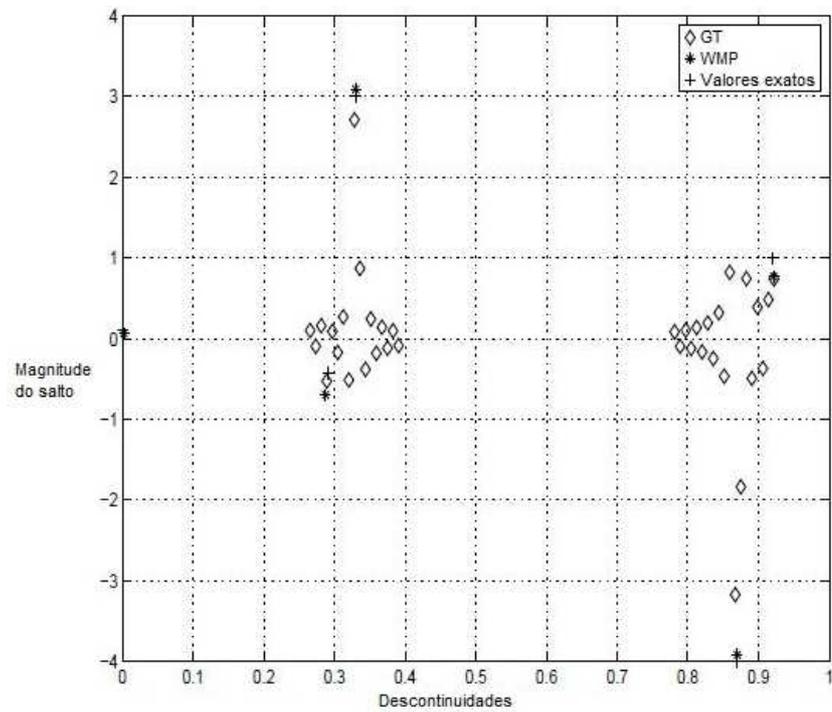


Figura 3.16: Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_3$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar todos os pontos de descontinuidade.

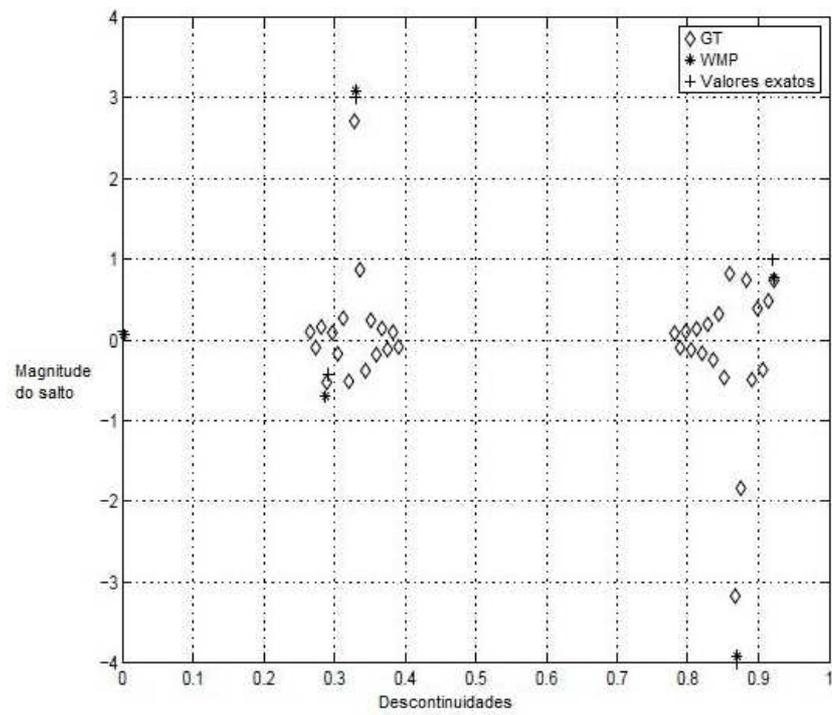


Figura 3.17: Localização das descontinuidades e amplitudes dos saltos para  $f_4$  usando o método de Wei, Martínez e De Pierro (WMP) e o método de Gelb e Tadmor (GT). O método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar todos os pontos de descontinuidade.

# Conclusão

Neste trabalho, estudamos alguns métodos de detecção de descontinuidades que foram desenvolvidos nos últimos anos, e que utilizam os coeficientes de Fourier. Analisamos a teoria envolvida e implementamos os algoritmos em Matlab.

A pesquisa de Gelb e Tadmor mostra que o método de concentração pode ser refinado pela introdução de fatores de concentração que reduzem as oscilações do método. Fatores de concentração filtrados melhoram ainda mais os resultados. A nova família de fatores de concentração *matching waveform* aproximam a função salto determinando regiões que estão altamente correlatadas com um método de concentração *waveform* dado.

O método de concentração *zero crossing matching waveform* não é um método de concentração pela sua definição padrão, uma vez que não converge para a função salto. No entanto, devido ao seu comportamento localizado próximo às descontinuidades de salto, é capaz de melhorar a capacidade do algoritmo *min-mod* identificar as mesmas. Futuramente, o método pode ser melhorado através da otimização da escolha dos fatores de concentração para casos particulares.

O método de Wei, Martínez e De Pierro apresenta resultados melhores, não somente para a detecção de descontinuidades mas também para estimar o tamanho dos saltos. Notamos que o método de Gelb e Tadmor, em alguns casos, detecta mais descontinuidades do que realmente existem, o que aumenta o custo computacional. Em outras situações, o método de Gelb e Tadmor não é capaz de detectar algumas das descontinuidades.

O método de detecção de descontinuidades desenvolvido por Mhaskar e Prestin tem base na decomposição de uma função seccionalmente diferenciável em suas partes contínua e descontínua. É necessária uma caracterização dos espaços locais de Besov de funções periódicas em termos de operadores polinomiais trigonométricos. Este método conta com a vantagem de poder detectar singularidades nas derivadas.

Enfim, foram apresentadas novas abordagens para a detecção rápida de descontinuidades, que podem ser aplicadas usando apenas cálculos essencialmente equivalentes à aplicação de uma Transformada Rápida de Fourier. A implementação dos algoritmos não é de tão grande dificuldade, mas devem ser observados alguns “detalhes” que podem afetar significativamente o desempenho dos métodos. Dois

aspectos importantes a serem observados, em todos os métodos, são referentes à escolha dos parâmetros: a distância mínima a ser considerada entre os pontos de descontinuidade, e o valor mínimo a ser considerado como salto.

É interessante analisar também como estes métodos se comportam na presença de ruído, o que pode trazer resultados inesperados. Pretendemos, partindo deste trabalho e do estudo de outros métodos já existentes, tentar obter novos métodos para detectar descontinuidades também nas derivadas. Podemos fazer também a extensão dos métodos a duas dimensões, o que é ainda mais útil na prática.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bauer, R., *Band filters for determining shock locations*. Ph.D. thesis, Applied Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island (1995).
- [2] Briggs, W. L., Henson, V. E., *The DFT, An owner's manual for the Discrete Fourier Transform*. SIAM, Philadelphia (1995).
- [3] Canny, J., *A computational approach to edge detection*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 8(6), 679-698 (1986).
- [4] Clark, J., *Authenticating edges produced by zero crossing algorithms*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 11(1), 43-57 (1989).
- [5] Cooley, J. W., Tukey, J. W., *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Math. Comput. 19, 297-301 (1965).
- [6] De Boor, C., *A practical guide to splines*. Springer Verlag, New York, 1978.
- [7] DeVore, R. A., Lorentz, G. G., *Constructive approximation*. Spinger Verlag, Berlin, 1993.
- [8] Engelberg, S., *Edge detection using Fourier coefficients*. The Mathematical Association of America, Monthly 115, (2008).
- [9] Gelb, A., Tadmor, E., *Adaptive edge detectors for piecewise smooth data based on the minmod limiter*. J. Sci. Comput. 28(2-3), 279-306 (2006)
- [10] Gelb, A., Tadmor, E., *Detection of edges in spectral data*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 7, 101-135 (1999).
- [11] Gelb, A., Tadmor, D., *Detection of edges in spectral data II - Nonlinear enhancement*. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 38, No. 4, pp. 1389-1408 (2000).
- [12] Gelb, A., Cates, D., *Detection of edges in spectral data III - Refinement of the concentration method*. J. Sci. Comput., 1-43 (2008).
- [13] Gottlieb, D., Orszag, S., *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, PA, 1977.

- [14] Gottlieb, D., Shu, C. W., Solomonoff, A., Vandeven, H., *On the Gibbs phenomenon I: Recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a nonperiodic analytic function*. J. Comput. Appl. Math. 43 (1992) 81-98.
- [15] Hildreth, E., Marr, D., *Theory of edge detection*. Proc. R. Soc. Lond. B 207, 187-217 (1980).
- [16] Jackson, D., *Fourier series and orthogonal polynomials*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1-44 (2004).
- [17] Jain, A., *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall, New York (1986).
- [18] Lanczos, C., *Discourse on Fourier Series*. Hafner, New York (1966).
- [19] Medioni, D., Ulupinar, F., *Refining edges detected by a LoG operator*. Comput. Vis. Graph. Image Process. 51, 275-298 (1990).
- [20] Mhaskar, H. N., Narcowich, F. J., e Ward, J. D., *Spherical Marcinkiewicz-Zygmund inequalities and positive quadrature*. Math. Comp. 70 (2001), no. 235, 1113-1130. (Errata: Math. Comp. 71 (2001), 453-454.)
- [21] Mhaskar, H. N., Prestin, J., *On local smoothness classes of periodic functions*. J. Fourier Anal. Appl. 11 (3) 353-373 (2005).
- [22] Mhaskar, H. N., Prestin, J., *On the detection of singularities of a periodic function*. Advances in Computational Mathematics, 12, 95-131 (2000).
- [23] Oliveira, E. C., Tygel, M., *Métodos Matemáticos para Engenharia*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005).
- [24] Roberts, L., *Machine perception of three dimensional solids*. In: Tippett, J., Clapp, L. (eds.) Optical and Electro-Optical Information Processing. MIT Press, Cambridge (1965).
- [25] Schmeisser, H. J., Triebel, H., *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1987.
- [26] Sjölin, P., *Convergence of generalized conjugate partial sums of Fourier series*. Collect. Math. 55, 1 (2004), 21-31.
- [27] Sobel, I., *An isotropic  $3 \times 3$  image gradient operator*. In: Freeman, H. (ed.) Machine Vision for Three-Dimensional Scenes. Academic Press, Boston (1990).
- [28] Wei, M., Martínez, A. G., De Pierro, A. R., *Detection of edges from spectral data: New results*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 22 (2007) 386-393.

- [29] Wei, M., De Pierro, A. R., Yin, J., *Error estimates for two filters based on polynomial interpolation for recovering a function from its Fourier coefficients*. Numerical Algorithms, 35, 205-232, (2004).
- [30] Wei, M., De Pierro, A. R., Yin, J., *Iterative methods based on polynomial interpolation filters to detect discontinuities and recover point values from Fourier data*. IEEE Transactions on Signal Processing., 53, 1, 136-146. January 2005.
- [31] Zygmund, A., *Trigonometric Series*. University Press, Cambridge, 1959.