

TERMO DE APROVAÇÃO

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA

ANÁLISE NÃO LINEAR VIA ELEMENTOS FINITOS DE UM MODELO DE VIGAS PARA DUTOS ENTERRADOS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, pelo Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela banca examinadora:

Prof^a Mildred Ballin Hecke, D. Sc.
Universidade Federal do Paraná
(Orientadora)

Prof^a Deane Mesquita Roehl, D. Ing.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
(Co-orientadora)

Prof Roberto Dalledone Machado, D. Eng.
Universidade Federal do Paraná
(Co-orientador)

Prof João Elias Abdalla Filho, Ph.D
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus queridos e amados pais, Luiz e Olga, a minha irmã do coração Daniela, a minha esposa Gisella e a minha filha Flávia.

AGRADECIMENTOS

À professora Mildred Ballin Hecke pela credibilidade depositada em mim, pela oportunidade, pela contribuição no desenvolvimento deste trabalho e pela amizade.

À professora Deane Mesquita Roehl pela orientação valorosa e por ter me recebido tão bem no Rio de Janeiro.

Ao professor Roberto Dalledone Machado pelas sugestões, acompanhamento e companheirismo.

Aos meus amigos Jorge, Camilo, Márcio, e Luciano não só pela ajuda neste importante passo da minha vida como pela grande amizade construída.

Aos meus amigos de curso, Roberta, Rafael, Leonardo, Bortolan, Cosmo, Tiago e Tony pela amizade.

Em especial a minha esposa Gisella pela compreensão, pelo apoio, pela paciência e amor dedicado ao nosso convívio.

À minha amiga Maristela Bandil por ter compreendido as minhas travessuras.

À todos os colegas que me acolheram e me deram força no Rio de Janeiro.

Ao professor Celso Romanel e à PUC-Rio pela oportunidade de desenvolver parte deste trabalho no Rio de Janeiro, me proporcionando grande aprendizado.

À CAPES, que pelo apoio financeiro viabilizou a realização deste trabalho.

À Deus, meu Criador e Salvador.

EPIGRAFE

“As dificuldades ensinam e fortalecem; as facilidades iludem e enfraquecem”. (Arnon de Mello)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE TABELAS	IX
LISTA DE SÍMBOLOS	XI
RESUMO	XVI
ABSTRACT	XVII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVO.....	7
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	8
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO MODELO SOLO-DUTO.	10
2.1 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS.....	10
2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL INCREMENTAL DA MECÂNICA DO CONTÍNUO.....	12
2.3 ELEMENTO DE VIGA-DUTO.....	15
2.3.1 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO.....	15
2.3.2 MODELO CONSTITUTIVO.....	18
2.3.2.1 COMPORTAMENTO ELÁSTICO DO MATERIAL.....	18
2.3.2.2 COMPORTAMENTO INELÁSTICO DO MATERIAL.....	20
2.3.2.2.1 ELASTOPLASTICIDADE.....	20
2.3.2.3 AVALIAÇÃO DE INCREMENTOS DE TENSÃO.....	25
2.3.3 PRESSÃO INTERNA.....	28
2.3.3.1 PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	29
2.3.3.2 PRESSÃO DE OSCILAÇÃO.....	31
2.3.4 TEMPERATURA.....	32
2.3.5 MECÂNICA LONGITUDINAL DE DUTOS ENTERRADOS.....	32
2.4 ELEMENTO DE SOLO.....	33
2.4.1 DEFORMAÇÃO DAS MOLAS DO SOLO.....	34
2.4.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MOLAS DE SOLO.....	35
3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	37
3.1 EQUAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL.....	37
3.1.1 EQUAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL INCREMENTAL PARA A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL.....	37
3.2 DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA TRIDIMENSIONAL.....	40
3.2.1 INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS.....	40
3.2.2 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO.....	44
3.2.3 MATRIZ DE ROTAÇÃO.....	47
3.2.4 MATRIZES DE PROPRIEDADES TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO MATERIAL.....	48
3.2.5 MATRIZES DE ESFORÇOS INTERNOS.....	49
3.2.6 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O ELEMENTO FINITO.....	50
4. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	51
4.1 INTRODUÇÃO.....	51
4.2 MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS.....	52
4.2.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	54
4.2.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO.....	56
4.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA.....	57
4.4 ATUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA.....	59
5. EXEMPLOS	60

5.1	EXEMPLO 1 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO DUTO LEVANDO-SE EM CONTA O EFEITO ENTRE O MESMO E O SOLO CIRCUNDANTE.....	61
5.2	EXEMPLO 2 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO DUTO QUANDO CARGAS MOMENTO APLICADAS NOS APOIOS OCASIONAM DEFORMAÇÕES AXIAIS PLÁSTICAS.	68
5.3	EXEMPLO 3 – LINHA DE DUTO ENTERRADO NUMA ENCOSTA SUBMETIDA AO CARREGAMENTO ORIGINADO PELO SOLO, SOBRECARGA EXTERNA E CONSIDERANDO TAMBÉM O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA.	73
5.4	EXEMPLO-4 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO DUTO EM ENCOSTA, CONSIDERANDO A INTERAÇÃO SOLO-DUTO, A PRESSÃO INTERNA, A TEMPERATURA E DESLOCAMENTO PRESCRITO.	80
5.5	EXEMPLO-5.	90
5.5.1	ANÁLISE 1 – ANÁLISE LINEAR DE UM DUTO SOLICITADO POR CARREGAMENTOS VERTICAIS E LATERAIS. OS EFEITOS DA TEMPERATURA E DA PRESSÃO INTERNA TAMBÉM SÃO CONSIDERADOS.	90
5.5.2	ANÁLISE 2 – ANÁLISE NÃO-LINEAR CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE MATERIAL (ELASTOPLASTICIDADE).	96
6	CONCLUSÃO	100
6.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	100
6.2	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
	APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	109
A.1	INTRODUÇÃO.....	110
A.2	DESCRIÇÃO DO PROGRAMA	110
A.2.1	PRÉ-PROCESSAMENTO - ENTRADA DE DADOS	110
A.2.2	PROCESSAMENTO - SOLUÇÃO PASSO-A-PASSO	112
A.3	PÓS-PROCESSAMENTO - VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS.....	114
	APÊNDICE B – SUBROTINA C1RAD1	116

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – RESPOSTAS TÍPICAS DO DUTO DEVIDO A MOVIMENTOS DE ENCOSTAS.	2
FIGURA 2 – LINHAS DE DUTOS DA PETROBRÁS (OPASC E OSPAR).	3
FIGURA 3 – INSTALAÇÃO DOS MEDIDORES DE DEFORMAÇÃO NO OLEODUTO...3	
FIGURA 4 – DEFORMAÇÕES DE VIGA EXCLUINDO O EFEITO DO CISALHAMENTO.....	11
FIGURA 5 SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL.....	12
FIGURA 6 – REFERENCIAL LAGRANGEANO TOTAL.	13
FIGURA 7 – REFERENCIAL LAGRANGEANO ATUALIZADO.....	14
FIGURA 8 – CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO DE VON MISES (ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO).	23
FIGURA 9 - FLUXOGRAMA PARA A AVALIAÇÃO DE INCREMENTOS DE TENSÃO	27
FIGURA 10 – SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO COM $NP = 20$	28
FIGURA 11 – CILINDRO DE PAREDE ESPESSA COM PRESSÃO INTERNA.	30
FIGURA 12 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA METADE DA SEÇÃO DO TUBO COM PRESSÃO INTERNA.	31
FIGURA 13 – MODELO DE INTERAÇÃO SOLO-DUTO.....	35
FIGURA 14 – DIAGRAMA FORÇA-DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS TRANSVERSAIS.	36
FIGURA 15 – DIAGRAMA FORÇA-DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS LONGITUDINAIS.....	37
FIGURA 16 – ELEMENTO DE VIGA TRIDIMENSIONAL.	41
FIGURA 17 – RELAÇÃO DESLOCAMENTO-CARREGAMENTO.	55
FIGURA 18 – MÉTODO DE NEWTON-RAFHSON MODIFICADO.	56
FIGURA 19 – POSSIBILIDADE DE MÚLTIPLAS SOLUÇÕES.	57
FIGURA 20 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.....	61
FIGURA 21 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO PARA A ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA.	63
FIGURA 22 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA.	68
FIGURA 23 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.....	69
FIGURA 24 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.....	71
FIGURA 25 – DIAGRAMA DE TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO DO DUTO DEFORMADO.	72
FIGURA 26 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.....	73
FIGURA 27 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.....	75
FIGURA 28 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO LONGITUDINAL DO DUTO.	76
FIGURA 29 – DIAGRAMA DAS TENSÕES AXIAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO NO DUTO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR.	79
FIGURA 30– ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.	80
FIGURA 31 – DIAGRAMA DAS TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO.	84
FIGURA 32 – DIAGRAMA COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS OBTIDOS DAS ANÁLISES EFETUADAS LEVANDO-SE EM CONTA OU NÃO	

A INTERAÇÃO SOLO-DUTO. O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA É CONSIDERADO.	86
FIGURA 33 – DIAGRAMA COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS OBTIDOS DAS ANÁLISES EFETUADAS CONSIDERANDO OU NÃO O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA. AS MOLAS DE SOLO DE BASE E DE LEVANTAMENTO SÃO ADICIONADAS.	86
FIGURA 34 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL OBTIDO DA ANÁLISE CONSIDERANDO UM DESLOCAMENTO PRESCRITO NO NÓ 17.	87
FIGURA 35 - DIAGRAMA DAS TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO OBTIDO DA ANÁLISE CONSIDERANDO UM DESLOCAMENTO PRESCRITO NO NÓ 17.	88
FIGURA 36 – ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.	90
FIGURA 37 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.	95
FIGURA 38 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO LATERAL DO DUTO.	95
FIGURA 39 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTOS DO DUTO EM TRÊS DIMENSÕES PARA AS DUAS SIMULAÇÕES.	96
FIGURA 40 – ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.	97
FIGURA 41 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.	98
FIGURA 42 – DIAGRAMA DE TENSÕES AO LONDO DO DUTO DEFORMADO.	99
FIGURA 43 – ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS QUE INFORMA AO PROGRAMA OS DADOS GERAIS DA ESTRUTURA.	111
FIGURA 44 – ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS QUE INFORMA AO PROGRAMA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO REFERENTES AOS GRAUS DE LIBERDADE NOS NÓS DA ESTRUTURA.	112
FIGURA 45 – VISUALIZAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS (U^j , V^j E W^j) NA TELA APÓS O TÉRMINO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ITERATIVA. ...	115
FIGURA 46 – VISUALIZAÇÃO DO DIAGRAMA DE DEFORMAÇÃO DA ESTRUTURA NA TELA APÓS O TÉRMINO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ITERATIVA.	115
FIGURA 47 – ARQUIVO DE SAÍDA “TANSAONO.TXT” ONDE ESTÃO ARMAZENADOS OS VALORES DAS TENSÕES NOS NÓS APÓS O PROCESSAMENTO.	115

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO DO DUTO.	62
TABELA 2 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} = 0$) E DE LEVANTAMENTO ($K_{US} = 0$).	64
TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA CONSIDERARANDO A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE (K_{BS} $\neq 0$) E DE LEVANTAMENTO ($K_{US} \neq 0$).....	64
TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA CONSIDERARANDO SOMENTE A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} = 0$).	65
TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA SEM CONSIDERAR OS EFEITOS DAS MOLAS DE SOLO ($K_{BS} = 0$ E $K_{US} = 0$).	66
TABELA 6 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA CONSIDERARANDO OS EFEITOS DAS MOLAS DE SOLO DE BASE E DE LEVANTAMENTO ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} \neq 0$).	67
TABELA 7 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA CONSIDERARANDO SOMENTE A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} = 0$).	67
TABELA 8 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO DO DUTO.	70
TABELA 9 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E ROTAÇÕES NOS NÓS PARA A SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO DIVIDIDA EM 50 FAIXAS DE ÁREA.	71
TABELA 10 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO OBTIDA PARA O DUTO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE DIVISÕES EM FAIXAS DE ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.	72
TABELA 11 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO.	74
TABELA 12 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.	74
TABELA 13 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO DEVIDO AO CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO E A PRESSÃO INTERNA.....	76
TABELA 14 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E ROTAÇÕES NOS NÓS PARA A ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA.	77
TABELA 15 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS LONGITUNAIS E VERTICAIS NOS NÓS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR.	78
TABELA 16 – PROPRIEDADES DO MATERIAL DO DUTO.	81
TABELA 17 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.	81
TABELA 18 – CARREGAMENTOS EXTERNOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO. ...	81
TABELA 19 – VALORES DAS CONSTANTES DE MOLA.	82
TABELA 20 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X E Y OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR SEM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.....	83
TABELA 21 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X E Y OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.	85
TABELA 22 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.....	89

TABELA 23 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.	91
TABELA 24 – PROPRIEDADES DO MATERIAL DO DUTO.	91
TABELA 25 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO ESTÁ SOLICITADO.	91
TABELA 26 – VALORES DAS CONSTANTES DE RIGIDEZ DAS MOLAS DE SOLO PARA CADA TRAMO.	92
TABELA 27 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z SEM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.	93
TABELA 28 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.	93
TABELA 29 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z COM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.	94
TABELA 30 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO OBTIDA NA SEGUNDA SIMULAÇÃO.	94
TABELA 31 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO.	97
TABELA 32 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.	98
TABELA 33 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y.	99

LISTA DE SÍMBOLOS

x_1, x_2 e x_3	Coordenadas cartesianas locais
\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3	Coordenadas cartesianas globais
u, v e w	Componentes de deslocamentos
${}_t u_0, {}_t v_0$ e ${}_t w_0$	Componentes de deslocamentos do eixo centroidal no tempo t da configuração de referência
${}^t \varepsilon_{i,j}$	Componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange no tempo t
${}_t \varepsilon_{x_1}$	Componente de deformação na direção x_1 (longitudinal) no tempo t da configuração de referência
${}_t \varepsilon_0^L$	Deformação incremental linear axial no eixo centroidal no tempo t da configuração de referência
${}_t \phi_Z^L$	Curvatura incremental linear em x_3 no tempo t da configuração de referência
${}_t \phi_Y^L$	Curvatura incremental linear em x_2 no tempo t da configuração de referência
${}_t \theta_Z$	Rotação incremental em torno do eixo x_3 no tempo t da configuração de referência
${}_t \theta_Y$	Rotação incremental em torno do eixo x_2 no tempo t da configuração de referência
${}_t \varepsilon_0$	Deformação incremental longitudinal no centróide do elemento no tempo t da configuração de referência
${}_t \phi_Z$	Curvatura incremental total em x_3 no tempo t da configuração de referência
${}_t \phi_Y$	Curvatura incremental total em x_2 no tempo t da configuração de referência
${}_0^t S_{ij}$	Componentes do tensor de tensão segundo Piola-Kirchhoff no tempo t referido à configuração no tempo 0
${}_0 C_{ijrs}$	Componentes do tensor de tensão-deformação incremental no tempo t referido à configuração no tempo 0
${}_0 e_{ij}$	Componentes de deformação incremental linear referido à configuração no tempo 0

${}_0n_{ij}$	Componentes de deformação incremental não-linear referido à configuração no tempo 0
λ e μ	Constantes de Lamé
δ_{ij}	Delta de Kronecker
E	Módulo de elasticidade ou módulo de <i>Young</i>
ν	Relação ou coeficiente de <i>Poisson</i>
$[C^E]$	Matriz de tensão-deformação tridimensional para materiais isotrópicos
$d\varepsilon_{ij}$	Componentes de deformação incremental total
$d\varepsilon_{rs}^E$	Componentes de deformação incremental elástica
$d\varepsilon_{rs}^P$	Componentes de deformação incremental plástica
dS_{ij}	Componentes de tensão incremental
C_{ijrs}^E	Componentes do tensor constitutivo elástico
${}_tS_\theta$	Tensão circunferencial ou tangencial constante no tempo t da configuração de referência
${}_tS_r$	Tensão radial no tempo t da configuração de referência
${}_t\varepsilon_\theta$	Deformação na direção circunferencial no tempo t da configuração de referência
${}_t\varepsilon_r$	Deformação na direção radial no tempo t da configuração de referência
H'	Módulo de encruamento
E_T	Módulo tangente
G	Módulo de cisalhamento
${}^t\bar{S}$	Tensão efetiva no tempo t
${}^t\Phi$	função de escoamento no tempo t
${}^tS_{ij}$	Componentes do tensor desviador de tensões segundo Piola-Kirchhoff no tempo t
tS_m	Componentes da tensão média no tempo t
${}^t\varepsilon'_{ij}$	Componentes do tensor desviador de deformações no tempo t
${}^t\varepsilon_m$	Componentes de deformação média no tempo t
${}^t\varepsilon_{ij}^P$	Componentes de do tensor deformação plástica no tempo t

P_i	Pressão interna
D_e	Diâmetro externo da seção transversal do duto
t	Espessura do duto
${}^t C^{EP}$	Módulo elasto-plástico no tempo t
${}^t \bar{\varepsilon}^P$	Deformação plástica efetiva
${}^t \varepsilon_\theta^P$	Deformação plástica na direção circunferencial no tempo t da configuração de referência
${}^t \varepsilon_r^P$	Deformação plástica na direção radial no tempo t da configuração de referência
${}^t \varepsilon_x^P$	Deformação plástica na direção x no tempo t da configuração de referência
${}^t S_y$	Tensão de escoamento no tempo t
r_i	Raio interno
r_e	Raio externo
r	Raio para o ponto em questão
\bar{D}	Diâmetro médio
S_{temp}	Tensão longitudinal devido a temperatura
α	Coefficiente de dilatação linear
ΔT	Varição de temperatura
S_p	Tensão longitudinal originada pela pressão interna
${}^t \Delta_{BS}$	Deformação incremental da mola de solo de base no tempo t
${}^t \Delta_{US}$	Deformação incremental da mola de solo de levantamento no tempo t
${}^t \Delta_{LLS}$	Deformação incremental da mola de solo lateral esquerda no tempo t
${}^t \Delta_{RLS}$	Deformação incremental da mola de solo lateral direita no tempo t
${}^t \Delta_{AS}$	Deformação incremental da mola de solo longitudinal no tempo t
${}^t K_{AS}$	Constante de rigidez da mola de solo longitudinal no tempo t
${}^t K_{BS}$	Constante de rigidez da mola de solo de base no tempo t
${}^t K_{US}$	Constante de rigidez da mola de solo de levantamento no tempo t
${}^t K_{LLS}$	Constante de rigidez da mola de solo lateral esquerda no tempo t
${}^t K_{RLS}$	Constante de rigidez da mola de solo lateral direita no tempo t
${}^t F_{BS}$	Força incremental de compressão da mola de solo de base no tempo t

${}^t F_{US}$	Força incremental de compressão da mola de solo de levantamento no tempo t
${}^t F_{LLS}$	Força incremental de compressão da mola de solo lateral esquerda no tempo t
${}^t F_{RLS}$	Força incremental de compressão da mola de solo lateral direita no tempo t
${}^t F_{YBS}$	Força de escoamento na compressão da mola de solo de base no tempo t
${}^t F_{YUS}$	Força de escoamento na compressão da mola de solo de levantamento no tempo t
${}^t F_{YLLS}$	Força de escoamento na compressão da mola de solo lateral esquerda no tempo t
${}^t F_{YRLS}$	Força de escoamento na compressão da mola de solo lateral direita no tempo t
${}^t F_{AS}$	Força incremental da mola de solo longitudinal no tempo t
$-{}^t F_{YAS}$	Força de escoamento na tração da mola de solo longitudinal no tempo t
${}^t F_{YAS}$	Força de escoamento na compressão da mola de solo longitudinal no tempo t
K_i	Coefficientes de rigidez da seção transversal do duto ($i = 1, 2, \dots, 6$)
F_{eq}	Força axial equivalente
M_{eq1}	Momento equivalente em relação a x_3
M_{eq2}	Momento equivalente em relação a x_2
L	Comprimento do elemento de viga-duto
${}^t \xi$	Coordenada natural axial no tempo t
h_i	Funções de interpolação ($i = 1, 2, \dots, 15$)
$[{}^t H]$	Matriz de funções de interpolação no tempo t
$\{ {}^t u_e \}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema de coordenadas locais, no tempo t da configuração de referência
$[{}^t B^L]$	Matriz linear de deformação-deslocamento no tempo t
$[{}^t B_1^{NL}]$	Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t
$[{}^t B_2^{NL}]$	Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t
$[{}^t B_3^{NL}]$	Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t
$[{}^t B^S]$	Matriz de deformação-deslocamento para as molas de solo no tempo t
η, β	Parâmetros para definir a matriz $[{}^t B^S]$

$\{ {}^t \tilde{u}_e \}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo t da configuração de referência
$[{}^t R_T]$	Matriz de transformação para um membro de pórtico espacial no tempo t
$[{}^t ROT]$	Matriz de rotação no tempo t
$[{}^t D^P]$	Matriz de propriedades de material da seção transversal do duto no tempo t
A	Área da seção transversal do duto
I_z	Momento de inércia em relação ao eixo x_3
I_y	Momento de inércia em relação ao eixo x_2
$[{}^t F]$	Matriz de força interna axial no tempo t
$[{}^t M_1]$	Matriz de momento em relação ao eixo x_3 no tempo t
$[{}^t M_2]$	Matriz de momento em relação ao eixo x_2 no tempo t
$[{}^t K_{EP}^e]$	Matriz de rigidez elasto-plástica do elemento no tempo t
$[{}^t K_G^e]$	Matriz de rigidez geométrica do elemento no tempo t
$[{}^t K_S^e]$	Matriz de rigidez das molas de solo do elemento no tempo t
$[{}^t Q_P^e]$	Vetor de forças equivalentes nos pontos nodais do elemento para o duto no tempo t
$[{}^t Q_S^e]$	Vetor de forças equivalentes nos pontos nodais do elemento para as molas de solo no tempo t
$[{}^t \tilde{K}^e]$	Matriz de rigidez transformada do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo t
$\{ {}^t \tilde{R}^e \}$	Vetor de forças externas do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo t
$\{ {}^t \tilde{F}^e \}$	Vetor de forças internas do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo t
$\{ \Delta R^{(i-1)} \}$	Vetor de carga desbalanceado incremental na iteração $i-1$
$\{ \Delta U^{(i)} \}$	Vetor de deslocamentos incremental na iteração i
tol	Tolerância de convergência

RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo numérico aplicando a técnica de elementos finitos para a análise não-linear de tensões e deformações de dutos enterrados usados no transporte de gás e petróleo. A formulação incremental do elemento viga-duto é desenvolvida a partir do princípio dos trabalhos virtuais, com base nas componentes do segundo tensor de tensão Piola-Kirchhoff e do tensor de deformação de Green-Lagrange, com o emprego da técnica do Módulo Reduzido por Integração Direta (RMDI). O elemento viga-duto é obtido, a partir de elementos especiais de viga bi e tridimensional. A descrição cinemática do elemento admite grandes deslocamentos, grandes rotações, mas pequenas deformações e se dá com base em uma Formulação Lagrangeana Total. Assume-se o modelo constitutivo elasto-plástico para o duto, com o escoamento segundo o critério de von Mises com endurecimento isotrópico. A interação entre o solo e o duto é feita através de um conjunto discreto de molas elásticas idealmente plásticas nas direções vertical, lateral e longitudinal, conectadas ao eixo do duto. Os efeitos da temperatura e pressão interna no duto são considerados. Um estudo do comportamento do duto é realizado através da análise de simulações numéricas, sujeito a condições de carregamentos externos e/ou internos e deslocamentos impostos. Atenção especial é dada a problemas de dutos enterrados em encostas que apresentam escorregamento.

Palavras-chave: duto enterrado, método dos elementos finitos, elemento de viga, análise não-linear, interação solo-duto.

ABSTRACT

This work presents a numerical model based on the finite element method for nonlinear stress analysis of buried pipes used for gas and oil transport. The incremental formulation for the beam-pipe element was developed based on the Virtual Work Principle and using the second Piola-Kirchhoff stress tensor, as well as the Green-Lagrange strain tensor components, with application of the Reduced Modulus Direct Integration (RMDI) method. The pipe-beam element was developed for the three-dimensional case. Large displacements, large rotations and small strains are assumed in the model. The stress strain relationship of the pipe material is assumed elastoplastic, using the von Mises criterion with isotropic hardening. Soil-pipe interaction was considered by a set of distributed soil springs fixed to the pipe considering both transversal and longitudinal interaction. The constitutive relationship of the springs is supposed elastic-perfectly plastic. Constant internal pressure and temperature are included in the analysis. The numerical simulations were done with soil-pipe model subjected to external and/or internal loads and differential settlement. Special attention was given to problems of buried pipes in slowly moving slopes.

Key-words: buried pipe, finite element method, beam-pipe elements, nonlinear analysis, soil-pipe interaction.

1. INTRODUÇÃO

Os dutos têm sido largamente empregados no Brasil como meio de transporte de petróleo e seus derivados, assumindo grande relevância no setor econômico e nas questões ambientais.

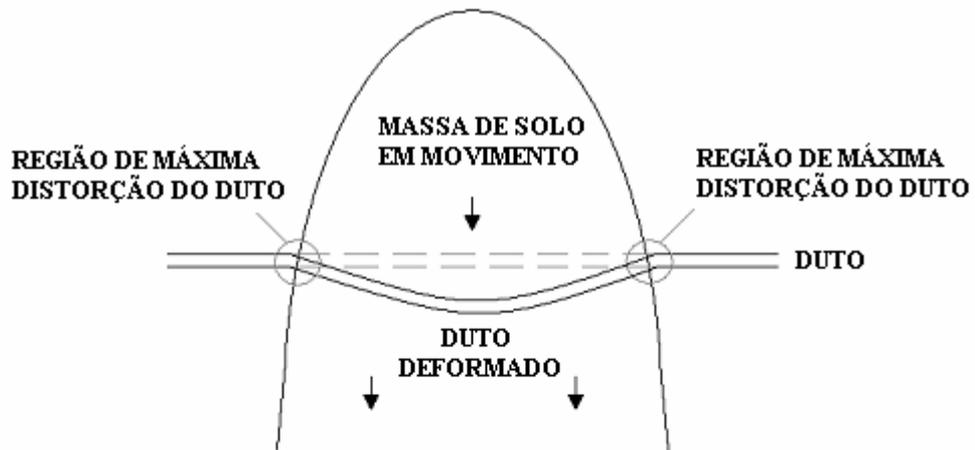
Segundo Sandroni *et al.* (2001), os eventos geotécnicos mais freqüentes em encostas que podem afetar os dutos pertencem às categorias *movimentos de massa* e *erosões*. Nas encostas da Serra do Mar localizadas na região costeira do sudeste brasileiro, os movimentos de massa mais freqüentes são: deslizamentos lentos e deslizamentos rápidos.

Existem vários oleodutos nas regiões sul e sudeste brasileira que ligam terminais petrolíferos a refinarias instaladas no planalto ou em outros pontos da costa. Uma extensão considerável de trechos de dutos atravessa zonas de colúvio, que podem movimentar-se para cotas mais baixas, afetando não só o alinhamento, como também as tensões internas do duto, conforme o esquema mostrado na Figura 1. Estes mecanismos e sua monitoração estão discutidos em Sandroni *et al.* (2001) e Bukovansky & Major (2002).

Os trechos de oleodutos apoiados nessas encostas consistem basicamente de tubos metálicos com diâmetros entre 30 cm e 1 m, enterrados a uma profundidade de até 3 metros.

Os dutos em encostas dinâmicas podem sofrer danos na sua estrutura, devido a escorregamentos e afundamentos, motivando assim a realização contínua de monitoração e manutenção deste tipo de estrutura. Em geral, o monitoramento de um duto inicia-se somente após algum sinal de movimento de solo.

FIGURA 1 – RESPOSTAS TÍPICAS DO DUTO DEVIDO A MOVIMENTOS DE ENCOSTAS.



a) Deformação do solo transversal ao eixo do duto.



b) Deformação do solo longitudinal ao eixo do duto.

Fonte: (Bukovansky & Major, 2002).

Uma das encostas litorâneas do Paraná que vem apresentando, desde 1995, sinais de movimentação devido a atividades antropológicas, situa-se no município de Guaratuba, ao longo da rodovia BR-376, próximo do km 55 + 800 m. Essa área de instabilidade onde estão apoiados dois oleodutos (o OSPAR que liga o terminal de São Francisco do Sul (SC) à refinaria Presidente Getúlio Vargas e o OPASC que liga a refinaria Presidente Getúlio Vargas à Itajaí (SC)), mostrados na Figura 2, atualmente vem sendo monitorada através da instalação de piezômetros e inclinômetros no local. As tensões nos oleodutos também vêm sendo verificadas com a instalação de medidores de deformação (*Strain Gages*), conforme pode ser observado na Figura 3.

FIGURA 2 – LINHAS DE DUTOS DA PETROBRÁS (OPASC E OSPAR).

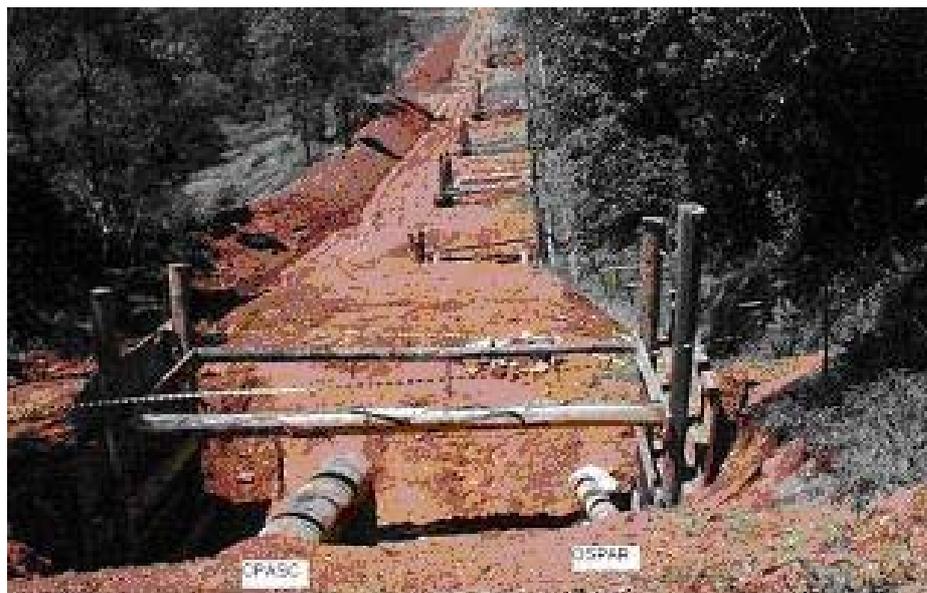


FIGURA 3 – INSTALAÇÃO DOS MEDIDORES DE DEFORMAÇÃO NO OLEODUTO.



Acidentes com linhas de dutos localizados nestas áreas dinâmicas já ocorreram causando prejuízos financeiros e danos ao meio ambiente. Um destes acidentes ocorreu em 2001 na Serra do Mar, com o rompimento do oleoduto utilizado para o transporte de combustíveis na faixa que liga a Refinaria Presidente Getúlio Vargas (Repar), em Araucária, até o Porto de Paranaguá.

Na análise estrutural, projeto e avaliação de riscos de dutos enterrados, a interação entre o duto e o solo circundante deve ser considerada. Diversos tipos de carregamentos influenciam essa interação tais como: o efeito das cargas de serviço, como o alongamento do duto devido à variação da temperatura e à pressão interna; as cargas de origem geotécnica, como recalque superficial do terreno, construções de aterros, variação do nível freático, ocorrência de sismos, empolamento devido ao congelamento; e a ação de cargas externas, como cargas de tráfego ou funcionamento de máquinas (Rubio, 2002).

Uma estrutura solicitada às cargas últimas apresenta frequentemente um comportamento caracterizado pela relação tensão-deformação não-linear e grandes deslocamentos. No caso de dutos enterrados isto ocorre para a condição de deslocamentos ou deformações impostos onde o escoamento local é significativo e há possibilidade de ocorrência de flambagem local e grandes deformações. Portanto, para um projeto econômico e seguro de linhas de dutos, é necessário um método de análise que incorpore os efeitos não-lineares (Mejía, 2003).

Análises de problemas que envolvem a interação entre o solo e a estrutura utilizando o Método dos Elementos Finitos foram efetuadas por vários autores. Entre estes, podem-se citar:

- Aljanabi, Farid & Mohamad (1990) estudam o comportamento de pórticos planos apoiados em fundações elásticas, do tipo *Winkler*. Nesse trabalho observa-se o efeito da variação dos módulos normal e de cisalhamento (tangencial) das reações da fundação de suporte sobre os momentos de flexão em pórticos planos, sujeitos a carregamentos horizontal e vertical.
- Sayegh & Tso (1992) desenvolvem um modelo em elementos finitos de um elemento curvo de viga, elástico, apoiado sobre uma fundação não-linear 3-D. Nesse problema sistemas completos, como uma malha de duto sobre fundação não-linear, são analisadas juntamente com elementos de viga retos.
- Morfidis & Avramidis (2002) apresentam um elemento finito de viga para uso em análises em estruturas de aço e concreto reforçado. Nesse artigo, o elemento é composto de uma viga flexível de Timoshenko ou Bernoulli apoiada sobre uma fundação elástica com dois parâmetros. Na derivação da matriz de rigidez elementar, a consideração das deformações de cisalhamento, conexões semi-rígidas, e ramificações rígidas são opcionais.

- Pereira & Silveira (2004) apresentam duas soluções numéricas para análises de vigas sujeitas a restrições de contato unilateral impostas por fundações elásticas do tipo *Winkler*, que reagem somente na compressão. Nas soluções para essas análises foram utilizados um modelo semi-analítico baseado no método de *Rayleigh-Ritz* e uma aproximação utilizando a formulação em elementos finitos.

Alguns trabalhos abordam o comportamento de dutos enterrados considerando a interação solo-duto, sendo o solo modelado através de molas. Dentre esses trabalhos, podem-se destacar:

- Trautmann, O'Rourke & Kulhawy (1985) descrevem um estudo experimental do comportamento de dutos enterrados sujeitos a movimentos verticais do solo, com ênfase particular sobre os efeitos da densidade do solo e a da profundidade do duto.
- Zhou & Murray (1993) discutem o comportamento de dutos enterrados incluindo os efeitos de flambagem e enrugamento, quando estes são submetidos a grandes assentamentos geotécnicos impostos. Este artigo mostra que as deformações em localizações críticas no duto são sensíveis à resistência (e à rigidez) das molas de solo de levantamento e de sustentação, mas não à resistência (e à rigidez) das molas de solo longitudinais, e que o diferencial de temperatura e o efeito de catenária são importantes.
- Razaqpur & Wang (1995) apresentam um modelo para a análise da interação solo-duto através de um processo termo-mecânico, usando um modelo unidimensional simplificado para determinar o congelamento do solo. O duto é modelado por um elemento finito que o considera como uma viga sobre uma fundação de *Winkler*.
- Zhou & Murray (1996) apresentam duas técnicas (RMDI e ISPDR) de determinação das rigidezes e forças equilibradoras para modelos de dutos enterrados. Análises numéricas são efetivadas utilizando-se dois materiais idealizados com propriedades de endurecimento elástico-plástico e amolecimento elástico-plástico. Análises incluindo o amolecimento como resultado do efeito de flambagem local são discutidas.
- Mejía (2003) apresentou uma metodologia de análise numérica via método de elementos finitos para dutos enterrados baseada no estudo realizado por Zhou & Murray (1996). As equações de equilíbrio são formuladas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, com o emprego da técnica RMDI. Esta técnica exclui os efeitos da flambagem local nas paredes do duto. Nessa metodologia foi considerada a não-linearidade geométrica baseada na formulação Lagrangeana Total. Na discretização do

modelo duto-solo, o duto é representado por elementos de viga e o solo por molas verticais e horizontais conectadas ao longo do eixo do duto. A descrição material do duto é assumida elastoplástica segundo o critério de escoamento de *von Mises* com encruamento isotrópico. O efeito da pressão interna constante no duto é incorporado no modelo.

- Ilmura (2004) apresenta três modelos mecânicos para estimar as tensões no duto sujeito a assentamento do solo. Os três modelos são aplicáveis em: porções enterradas; porções expostas; e na interface entre as porções enterradas e expostas de dutos lineares. A formulação para o cálculo das tensões é derivada assumindo uma viga elástica sobre uma fundação elástica.
- Santos, Guerreiro & Loula (2004) desenvolvem dois modelos computacionais para o estudo do comportamento de dutos marítimos: um modelo em pequenos deslocamentos que caracteriza a sensibilidade de dutos longos e flexíveis em relação aos efeitos favoráveis e estabilizantes da base elástica; e um modelo em grandes deslocamentos que descreve o comportamento de dutos flexíveis utilizados na extração de petróleo “off-shore”. Ambos os modelos são formulados como inequações variacionais e nas suas discretizações é utilizado o método de elementos finitos.

Outros modelos para a análise de dutos enterrados foram desenvolvidos simulando o solo por elementos finitos sólidos. Dentre esses modelos tridimensionais, pode-se destacar: o modelo desenvolvido por Selvadurai & Pang (1988) para o sistema solo-duto. Este estudo concentra-se em estabelecer a influência da não-linearidade do solo no comportamento iterativo de flexão do duto. O duto é modelado por elementos de casca lineares elásticos, e o solo circunvizinho por elementos sólidos elastoplásticos idealizados segundo o critério de escoamento de *Drucker-Prager* e a regra do fluxo associado. A interface entre o solo e o duto é simulada através do contato com perfeita aderência. Nas análises não-lineares constatou-se que os momentos de flexão ao longo do comprimento do duto enterrado são influenciados pela relativa rigidez do sistema solo-duto.

O comportamento de dutos enterrados na análise estrutural é influenciado pela interação mútua entre a tubulação e o solo circunvizinho. O comportamento mecânico desta região de interface entre estes dois materiais é representado em modelos de elementos finitos por intermédio de Elementos de Interface. Vários autores realizaram estudos empregando estes elementos em análises de estabilidade de maciços de rochas e escavações (Goodman *et al.*, 1968), em problemas de escavações de túneis e análises de barragens (Zienkiewicz, 1970), em análises das descontinuidades representadas por ligações de rochas e falhas (Ghaboussi *et*

al., 1973), e na modelagem de juntas e fraturas de rochas (Beer, 1985). Trabalhos utilizando elementos de interface em aplicações de concreto armado também foram realizados, como os desenvolvidos por Ngo & Scordelis (1967) e por Herrmann (1978).

A avaliação da variação das tensões no duto situado em uma encosta considerando os efeitos da interação solo-duto foi realizada por Lázaro (2004). Neste trabalho empregou-se o elemento de interface proposto por Desai *et al.* (1984) para representar a região de interface entre o duto e o solo circundante. Na discretização dos elementos finitos, o solo foi representado por elementos planos isoparamétricos e o duto por elementos de viga. A descrição material para o solo é assumida elástica idealmente plástica segundo o critério de escoamento de *Mohr-Coulomb*, e para o duto assume-se um comportamento elástico linear. A análise dos resultados alcançados nesse trabalho evidenciou a existência de alterações no comportamento do duto em virtude das modificações das propriedades físicas da região de interface, apontando a influência dessas propriedades nas tensões do duto.

1.1 OBJETIVO

Com o intuito de contribuir para compreensão do comportamento estrutural de dutos enterrados, de maneira a se obter modelos que retratem com maior exatidão a realidade, este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia baseada no método dos elementos finitos para análises linear e não-linear incremental interativa de dutos enterrados, e implementá-la computacionalmente.

No desenvolvimento da formulação matemática são incorporados os efeitos da não-linearidade geométrica e da não-linearidade material na determinação das deformações e tensões de dutos.

O problema de interação solo-duto é abordado considerando o modelo de duto como um elemento de viga tridimensional com capacidade para tração, compressão e flexão, e o solo como um conjunto de molas discretas conectadas ao eixo do mesmo. Assume-se o comportamento elástico-idealmente plástico para as molas de solo e elastoplástico com o escoamento segundo o critério de *von Mises* com endurecimento isotrópico para o elemento viga-duto. Os efeitos da temperatura e da pressão interna constante são adicionados no modelo.

Simulações numéricas bi e tridimensionais com dutos enterrados em encostas são efetuadas, considerando-se a influência do solo circundante. Esta interação entre ambos é decorrente da solicitação da estrutura pelas cargas de serviço, que são provenientes do efeito da diferença de temperatura, da pressão interna no duto, de cargas externas devidas a pressão do solo e sobrecargas (originadas por tráfego de veículos, construções de sapatas, entre outros), assentamentos diferenciais, movimentos de solo, e flutuação do duto devido à saturação do solo.

Essas simulações são realizadas através da implementação computacional fundamentada na formulação proposta utilizando a linguagem de programação COMPAQ VISUAL FORTRAN EDITOR 6.5.

As soluções para tais problemas, obtidas com a metodologia proposta, serão discutidas e comparadas com as análises realizadas com o programa ANSYS versão 8.0 e com soluções de outros trabalhos.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura do trabalho compreende sete capítulos que são especificados a seguir.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação do modelo solo-duto. São apresentadas as hipóteses fundamentais; a descrição cinemática e de material para o elemento de viga-duto; as deformações e as relações constitutivas para o elemento de solo representado por molas; os efeitos da pressão interna constante e da temperatura no duto.

O modelo de elementos finitos é apresentado no Capítulo 3. Neste capítulo são apresentadas: a equação do trabalho virtual incremental para a formulação Lagrangeana Total, e a discretização do elemento finito tridimensional utilizado neste trabalho.

O Capítulo 4 aborda o método incremental e iterativo de Newton-Raphson, os critérios de convergência e a atualização da geometria.

As análises e os resultados das simulações numéricas efetuadas visando o estudo do comportamento de dutos em encostas são apresentados no Capítulo 5.

No capítulo 6 são discutidos e analisados os resultados expostos no capítulo anterior e são apresentadas algumas propostas para trabalhos futuros. As referências bibliográficas aparecem na parte final do trabalho.

A implementação computacional é apresentada no Apêndice A, onde o programa é descrito nas fases de pré-processamento, processamento e pós-processamento.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO MODELO SOLO-DUTO.

2.1 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

Esta seção descreve a formulação do modelo de solo-duto utilizando o Método dos Elementos Finitos. As equações de equilíbrio resultantes da discretização da estrutura são determinadas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. A descrição cinemática do modelo inclui os efeitos não-lineares devido a possibilidade do desenvolvimento de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações (não-linearidade geométrica), e se dá com base na Formulação Lagrangeana Total. A não-linearidade física também é incorporada no modelo, assumindo que o material do duto e o solo tenham comportamento elástico-plástico e elástico idealmente plástico, respectivamente.

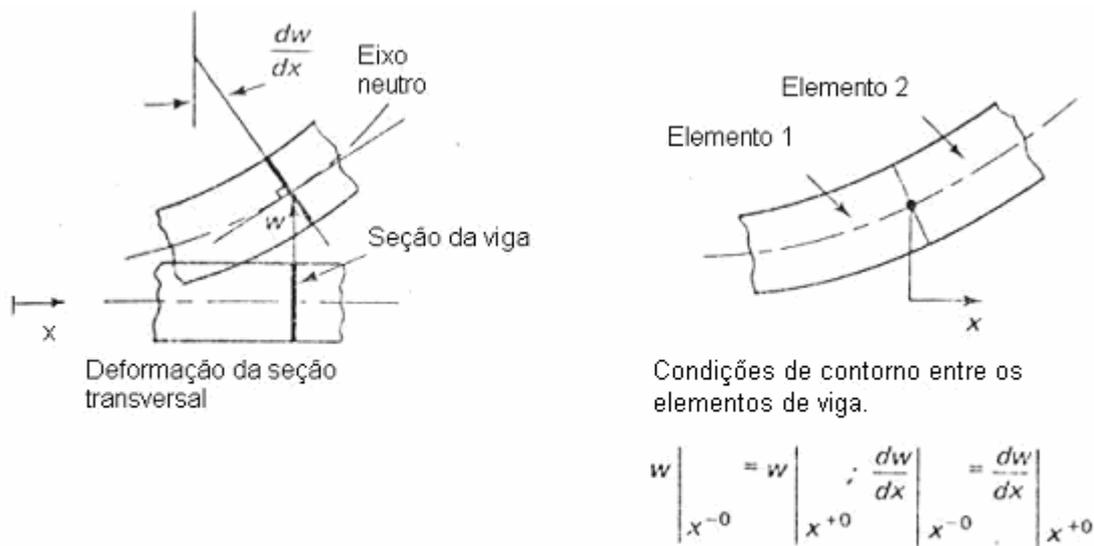
Na integração para o modelo de solo-duto utiliza-se a técnica RMDI (Módulo Reduzido de Integração Direta), que é empregada para resolver problemas de interação solo-duto. Esta técnica aplica-se para a formulação do elemento de viga-duto que considera a hipótese de Bernoulli. Nessa técnica não são considerados a influência da flambagem local e o enrugamento da seção transversal no comportamento de linhas de dutos (Zhou & Murray, 1996).

Nesta técnica, a tensão na direção longitudinal é determinada através da lei constitutiva do material usando incrementos de deformação calculados na seção transversal plana do duto. Os incrementos de tensão na direção longitudinal são determinados nos pontos de integração ao longo da circunferência da seção transversal do duto de maneira consistente com o estado de tensão biaxial, com o critério de carregamento e descarregamento das equações constitutivas, com os níveis correntes de deformações plásticas, e com valores da tensão efetiva e deformações plásticas efetivas que estão associados em cada ponto de integração. (Zhou & Murray, 1996).

No desenvolvimento do modelo matemático são consideradas as seguintes hipóteses fundamentais:

- A hipótese de Bernoulli, que consiste na análise da flexão de viga, excluindo deformações de cisalhamento. Nessa hipótese, a normal à superfície média (eixo neutro) da viga permanece reta durante a deformação e a rotação angular é igual a curvatura da superfície média da mesma, conforme ilustrado na Figura 4 (Bathe, 1982).

FIGURA 4 – DEFORMAÇÕES DE VIGA EXCLUINDO O EFEITO DO CISALHAMENTO.



Deformações da viga excluindo o efeito de cisalhamento.

Fonte: (Bathe, 1982).

Essa hipótese é justificável devido à distorção da seção transversal e o empenamento resultarem principalmente da flambagem local (Zhou & Murray, 1996).

- Na segunda hipótese prevê-se que num duto carregado somente com pressão interna existem as tensões tangenciais e radiais. A tensão máxima segundo a solução de *Lamé* para cilindros de parede fina é a tangencial (Moser, 2001). Em função desta observação, no modelo em estudo, a tensão radial é desprezada, devido o seu valor ser pequeno se comparado com os valores das tensões longitudinal e tangencial.

- Na terceira hipótese assume-se um comportamento elástico-plástico para o material do duto. O escoamento se dá segundo o critério de *von Mises* com endurecimento isotrópico.

- A quarta hipótese descreve o modelo que simula o solo denominado de fundação tipo *Winkler*. Este modelo consiste de molas de solo elásticas idealmente plásticas discretas conectadas nas paredes do duto ao longo do seu eixo, nas direções transversal e longitudinal.

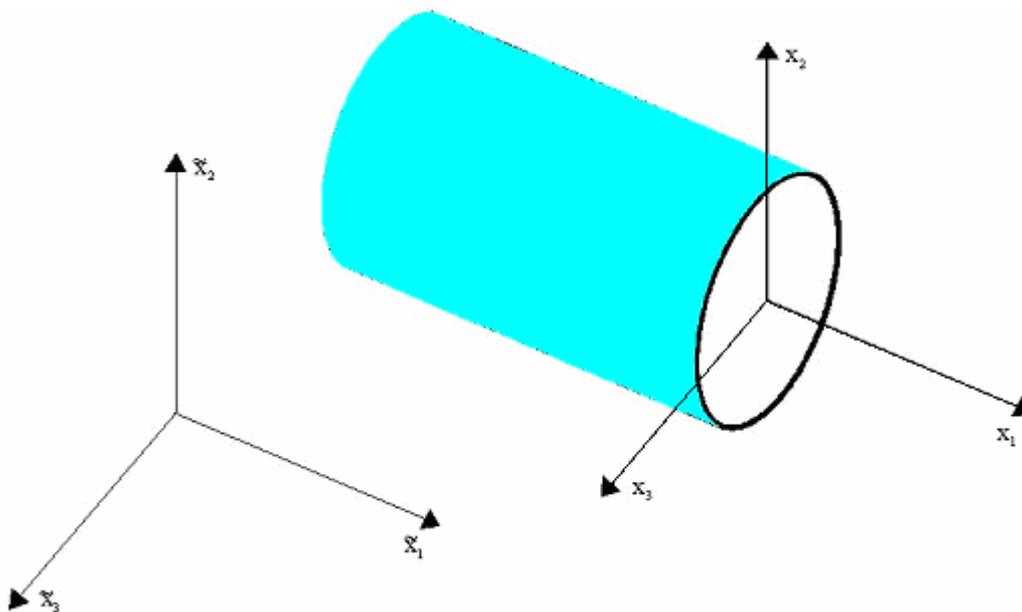
Este modelo considera que o solo circundante ao duto pode ser dividido em partes e a reação de cada uma dessas pode ser representada por molas de solo. Porém a interação entre as partes é negligenciada, o que de fato não ocorre na realidade (Mejía, 2003).

2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL INCREMENTAL DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

O movimento de um corpo tridimensional é considerado em um sistema de coordenadas cartesianas fixas (x_1, x_2 e x_3). No modelo de solo-duto são definidos os sistemas de coordenadas global e local, conforme é apresentada na Figura 5. O eixo x_1 do sistema local de coordenadas passa através do eixo central da seção transversal, e os eixos $x_2 - v$ e $x_3 - w$ definem os planos de flexão (Zhou & Murray, 1996).

Os deslocamentos u, v e w estão nas direções x_1, x_2 e x_3 respectivamente no sistema de coordenadas locais. O sistema de coordenadas globais é denotado por \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3 . Todas as quantidades definidas no sistema global de coordenadas são denotadas por um til sobreposto à letra.

FIGURA 5 SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAL E LOCAL.



Em uma análise não-linear, o equilíbrio do corpo considerado deve ser estabelecido na configuração atual. Em geral, é necessário empregar uma formulação incremental para descrever o carregamento e o movimento do corpo.

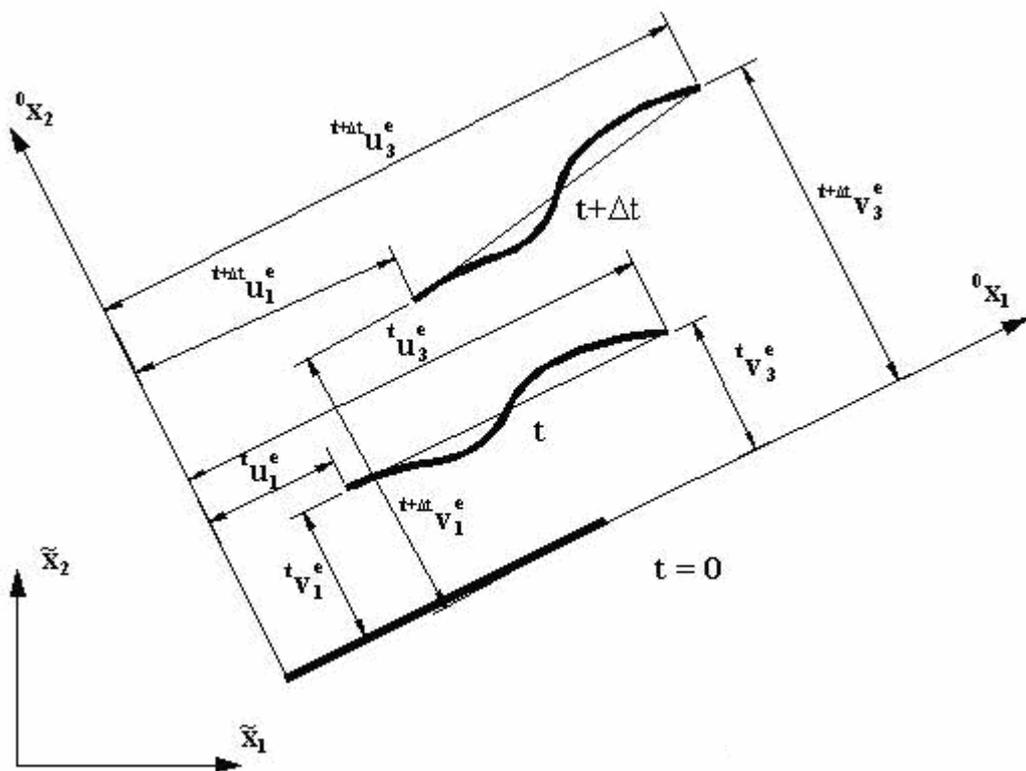
As soluções para as variáveis estáticas e cinemáticas para todo passo de tempo, do tempo θ ao tempo t , são assumidas serem conhecidas. Então, o processo de solução para a próxima posição de equilíbrio requerida correspondente ao tempo $t + \Delta t$ é previsível e é

aplicada repetidamente até que o caminho de solução completa seja resolvido. Por esta razão, na análise adota-se uma formulação Lagrangeana (ou material) do problema, ou seja, todas as partículas do corpo em seu movimento são acompanhadas da configuração original do corpo para a final. Esta aproximação encontra-se em contraste com a formulação Euleriana que é usualmente utilizada na análise de problemas da mecânica dos fluidos, em que é focada no movimento de material através do volume de controle estacionário (Bathe, 1996).

De acordo com Bathe (1996) numa análise não-linear podem-se adotar duas formas de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano total e referencial Lagrangeano Atualizado. As diferenças entre estes dois referenciais são apresentadas como:

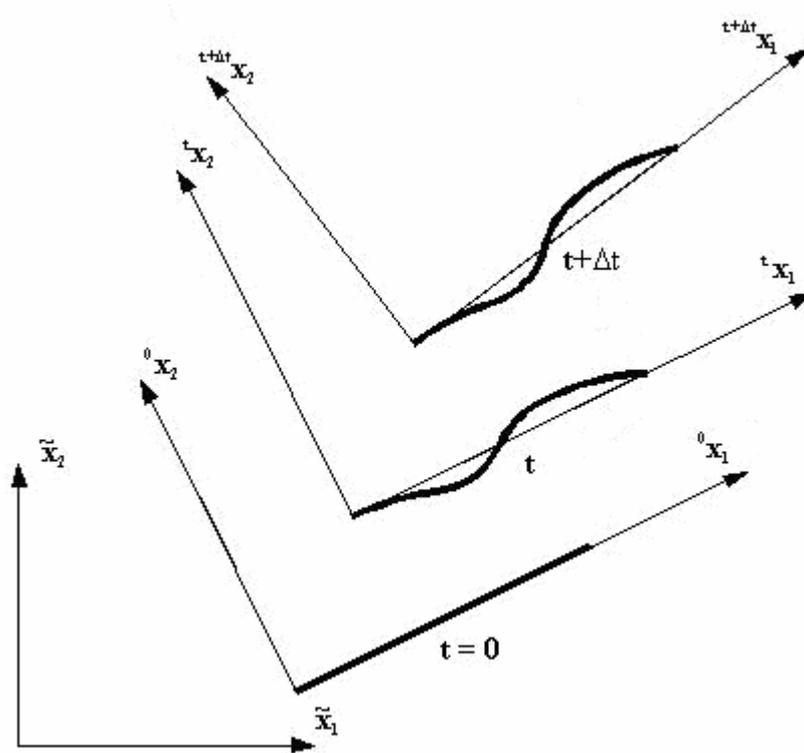
- *Referencial Lagrangeano Total* – os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial deformada, conforme Figura 6.
- *Referencial Lagrangeano Atualizado* – os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustra a Figura 7.

FIGURA 6 – REFERENCIAL LAGRANGEANO TOTAL.



Fonte: (Mejía,2003)

FIGURA 7 – REFERENCIAL LAGRANGEANO ATUALIZADO.



Fonte: (Mejía,2003)

No desenvolvimento da formulação neste trabalho, a notação empregada com relação aos índices é dada da seguinte forma:

- Índice superior esquerdo – denota a configuração na qual ocorre a variável;
- Índice inferior esquerdo – denota a configuração de referência na qual ocorre a variável;
- Índice inferior direito – denota as componentes do vetor ou do tensor de segunda ordem;
- Índice inferior direito seguido de vírgula – denota em relação a qual variável ocorre a diferenciação.

Segundo Bathe (1996) a formulação Lagrangeana Total (L. T.) é referida simplesmente como formulação Lagrangeana. Neste esquema de solução todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas a configuração inicial no tempo θ .

A equação básica (equação do movimento) nesta formulação é dada por:

$$\int_{\theta V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^{\theta} V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (2.1)$$

onde ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ é o segundo tensor de tensão *Piola-Kirchhoff* no tempo $t + \Delta t$ referido a configuração no tempo 0, ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}$ é o tensor de deformações de *Green-Lagrange* no tempo $t + \Delta t$ referido a configuração no tempo 0 e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$ é o trabalho virtual externo. Esta expressão também depende em geral da área superficial e do volume do corpo sob consideração.

A equação do movimento linearizada na formulação L. T. é:

$$\int_{\text{ov}} {}_0C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{\text{ov}} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{\text{ov}} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \quad (2.2)$$

onde ${}_0C_{ijrs}$ é o tensor de tensão-deformação incremental no tempo t referido à configuração no tempo 0; ${}^tS_{ij}$ é o tensor de tensão segundo *Piola-Kirchhoff* no tempo t ; e ${}_0e_{ij}$, ${}_0\eta_{ij}$ são as deformações incrementais lineares e não-lineares referidas à configuração no tempo 0.

Em uma análise não-linear com grandes deslocamentos, a configuração do corpo altera continuamente. Portanto as tensões e deformações devem ser avaliadas independentemente do conhecimento prévio da configuração no tempo $t + \Delta t$. Essa condição é satisfeita com o emprego do segundo tensor de tensões *Piola-Kirchhoff*, e do seu conjugado, o tensor de deformações de *Green-Lagrange* (Bathe, 1996).

O segundo tensor de tensões *Piola-Kirchhoff* é invariável à ocorrência de grandes deslocamentos e grandes rotações do material, ou seja, invariável à ocorrência de grandes deslocamentos. O seu emprego permite utilizar qualquer configuração do corpo conhecida viabilizando o desenvolvimento da análise, já que a configuração no tempo $t + \Delta t$ não é conhecida (Bathe, 1996).

2.3 ELEMENTO DE VIGA-DUTO

2.3.1 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Os deslocamentos do eixo centroidal são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\tilde{u}_0 &= {}^t\tilde{u}_0 + {}_t\tilde{u}_0 \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{v}_0 &= {}^t\tilde{v}_0 + {}_t\tilde{v}_0 \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{w}_0 &= {}^t\tilde{w}_0 + {}_t\tilde{w}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

As componentes de deslocamentos ${}^t u$, ${}^t v$ e ${}^t w$ no tempo de referência t de qualquer ponto $P(x_1, x_2 \text{ e } x_3)$ na seção transversal, podem ser expressas de acordo com as equações:

$${}^t u = {}^t u_0 - \frac{\partial {}^t v_0}{\partial {}^t x_1} x_2 + \frac{\partial {}^t w_0}{\partial {}^t x_1} x_3 \quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned} {}^t v &= {}^t v_0 \\ {}^t w &= {}^t w_0 \end{aligned} \quad (2.4b)$$

onde ${}^t u_0$, ${}^t v_0$ e ${}^t w_0$ são os deslocamentos do eixo centroidal no tempo de referência t .

Os deslocamentos totais acumulados nos sistemas de coordenadas globais são apresentados como (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \tilde{u} &= {}^t \tilde{u} + {}_t \tilde{u} \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{v} &= {}^t \tilde{v} + {}_t \tilde{v} \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{w} &= {}^t \tilde{w} + {}_t \tilde{w} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Segundo uma descrição cinemática com base na formulação L. T., o tensor de deformação empregado com o segundo tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* é o tensor de deformação de *Green-Lagrange* definido como (Bathe, 1982):

$${}^t \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (2.6)$$

$$\text{em que } {}^t_0 u_{1,1} = \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1}, \quad {}^t_0 u_{2,1} = \frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_1}, \quad {}^t_0 u_{3,1} = \frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_1}, \quad {}^t_0 u_{1,2} = \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_2}, \quad {}^t_0 u_{2,2} = \frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_2}, \quad {}^t_0 u_{3,2} = \frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_2},$$

$${}^t_0 u_{1,3} = \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_3}, \quad {}^t_0 u_{2,3} = \frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_3} \text{ e } {}^t_0 u_{3,3} = \frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_3}.$$

Utilizando a notação para os sub-índices de acordo com convenção $i, j = 1, 2, 3$, a deformação incremental axial na direção x_i é dada por:

$$\begin{aligned} {}^t \varepsilon_{1,1} &= {}^t \varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_1} \frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_1} \frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_1} \right) = \\ &= \frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial {}^t u}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^t v}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^t w}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.4) em (2.7), a componente de deformação longitudinal pode ser expressa em termos de componentes do eixo centroidal.

$$\begin{aligned}
{}_t \varepsilon_{x_1} &= \frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} + \\
&\frac{I}{2} \left(\left(\frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_t v_0}{\partial' x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial_t w_0}{\partial' x_1} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
{}_t \varepsilon_{x_1} &= \frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} - x_2 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} + x_3 \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} \right)^2 - x_2 \frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} + x_3 \frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} + \\
&\frac{I}{2} x_2^2 \left(\frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} \right)^2 - x_2 x_3 \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} + \frac{I}{2} x_3^2 \left(\frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} \right)^2 + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial_t v_0}{\partial' x_1} \right)^2 + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial_t w_0}{\partial' x_1} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nas expressões subsequentes nesta seção, os índices superiores direitos L e NL denotam as parcelas linear e não-linear, respectivamente.

A deformação incremental linear axial no eixo centroidal, as curvaturas incrementais lineares e as rotações incrementais da seção transversal são definidas como:

$${}_t \varepsilon_0^L = \frac{\partial_t u_0}{\partial' x_1} \quad \text{deformação incremental} \tag{2.10}$$

$${}_t \phi_Z^L = \frac{\partial^2 {}_t v_0}{\partial' x_1^2} \quad \text{curvatura incremental em } x_3 \tag{2.11}$$

$${}_t \phi_Y^L = \frac{\partial^2 {}_t w_0}{\partial' x_1^2} \quad \text{curvatura incremental em } x_2 \tag{2.12}$$

$${}_t \theta_Z = \frac{\partial_t v_0}{\partial' x_1} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } x_3 \tag{2.13}$$

$${}_t \theta_Y = \frac{\partial_t w_0}{\partial' x_1} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } x_2 \tag{2.14}$$

Os índices superiores direitos L e NL denotam as parcelas linear e não-linear respectivamente.

Substituindo as equações (2.10) a (2.14) na equação (2.9) tem-se:

$$\begin{aligned}
{}_t \varepsilon_{x_1} &= {}_t \varepsilon_0^L - x_2 {}_t \phi_Z^L + x_3 {}_t \phi_Y^L + \frac{I}{2} \left({}_t \varepsilon_0^L \right)^2 - x_2 {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Z^L + x_3 {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Y^L + \frac{I}{2} x_2^2 \left({}_t \phi_Z^L \right)^2 - \\
&x_2 x_3 {}_t \phi_Z^L {}_t \phi_Y^L + \frac{I}{2} x_3^2 \left({}_t \phi_Y^L \right)^2 + \frac{I}{2} \left({}_t \theta_Z \right)^2 + \frac{I}{2} \left({}_t \theta_Y \right)^2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Eliminando os termos em $x_2 x_3$, x_2^2 e x_3^2 , e agrupando os termos, tem-se (Zhou & Murray, 1996):

$${}_t \varepsilon_{x_1} = {}_t \varepsilon_0^L - x_2 {}_t \phi_Z^L + x_3 {}_t \phi_Y^L + \frac{I}{2} \left({}_t \varepsilon_0^L \right)^2 - x_2 {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Z^L + x_3 {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Y^L + \frac{I}{2} \left({}_t \theta_Z \right)^2 + \frac{I}{2} \left({}_t \theta_Y \right)^2 \tag{2.16}$$

$${}_t \varepsilon_{x_i} = {}_t \varepsilon_{x_i}^L + {}_t \varepsilon_{x_i}^{NL} \quad (2.17)$$

em que

$${}_t \varepsilon_{x_1}^L = {}_t \varepsilon_0^L - x_{2,t} \phi_Z^L + x_{3,t} \phi_Y^L \quad (2.18)$$

$${}_t \varepsilon_{x_1}^{NL} = {}_t \varepsilon_0^{NL} - x_{2,t} \phi_Z^{NL} + x_{3,t} \phi_Y^{NL} \quad (2.19)$$

onde

$${}_t \varepsilon_0^{NL} = \frac{I}{2} ({}_t \varepsilon_0^L)^2 + \frac{I}{2} ({}_t \theta_Z)^2 + \frac{I}{2} ({}_t \theta_Y)^2 \quad (2.20)$$

$${}_t \phi_Z^{NL} = {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Z^L \quad (2.21)$$

$${}_t \phi_Y^{NL} = {}_t \varepsilon_0^L {}_t \phi_Y^L \quad (2.22)$$

Com auxílio das equações (2.18) a (2.22), a equação (2.17) pode ser escrita como:

$${}_t \varepsilon_{x_i} = {}_t \varepsilon_0 - x_{2,t} \phi_Z + x_{3,t} \phi_Y \quad (2.23)$$

onde os incrementos totais de deformação axial e das curvaturas são dados respectivamente por:

$${}_t \varepsilon_0 = {}_t \varepsilon_0^L + {}_t \varepsilon_0^{NL} \quad (2.24)$$

$${}_t \phi_Z = {}_t \phi_Z^L + {}_t \phi_Z^{NL} \quad (2.25)$$

$${}_t \phi_Y = {}_t \phi_Y^L + {}_t \phi_Y^{NL} \quad (2.26)$$

2.3.2 MODELO CONSTITUTIVO

2.3.2.1 COMPORTAMENTO ELÁSTICO DO MATERIAL

A relação constitutiva para um material elástico considerando-se a presença de grandes deformações é escrita seguindo uma formulação Lagrangeana Total (L. T.) como (Bathe, 1996):

$${}_0^t S_{ij} = {}_0^t C_{ijrs} {}_0^t \varepsilon_{rs} \quad (2.27)$$

onde ${}_0^t S_{ij}$ e ${}_0^t \varepsilon_{rs}$ são componentes do segundo tensor de tensões *Piola-Kirchhoff* e do tensor de deformações *Green-Lagrange* respectivamente, e ${}_0^t C_{ijrs}$ são componentes do tensor de

elasticidade constante. Considerando as condições de tensões tridimensionais e materiais isotrópicos, tem-se:

$${}^t C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (2.28)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé e δ_{ij} é o delta de Kronecker,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.29)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases} \quad (2.30)$$

Desse modo, as componentes do tensor elástico dadas na equação (2.28) são idênticas às componentes da matriz de tensão-deformação para materiais isotrópicos. Para o modelo de problemas tridimensionais, a matriz de tensão-deformação generalizada é dada por:

$$[C^E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

onde

E = módulo de Young;

ν = coeficiente de Poisson.

Na análise de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações, a relação (2.27) fornece uma descrição material natural, devido às componentes do segundo tensor de tensões *Piola-Kirchhoff* e do tensor de deformações *Green-Lagrange* serem invariantes a rotações de corpo rígido.

2.3.2.2 COMPORTAMENTO INELÁSTICO DO MATERIAL

Uma observação importante entre as análises elástica e inelástica é que na solução elástica a tensão total pode ser determinada da deformação total somente, enquanto que no cálculo da resposta inelástica a tensão total no tempo t também depende do histórico de tensões e de deformações (Bathe, 1996).

Neste trabalho a formulação L. T. é empregada considerando condições cinemáticas de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações.

O uso da formulação L. T. em análises inelásticas é uma extensão direta do uso da mesma em condições elásticas.

2.3.2.2.1 ELASTOPLASTICIDADE

O incremento de tensão é obtido usando a decomposição de deformações $d\varepsilon_{rs} = d\varepsilon_{rs}^E + d\varepsilon_{rs}^P$, dado pela relação (Bathe, 1996):

$$dS_{ij} = C_{ijrs}^E d\varepsilon_{rs}^E = C_{ijrs}^E (d\varepsilon_{rs} - d\varepsilon_{rs}^P) \quad (2.32)$$

onde C_{ijrs}^E são as componentes do tensor constitutivo elástico e $d\varepsilon_{rs}$, $d\varepsilon_{rs}^E$ e $d\varepsilon_{rs}^P$ são as componentes de deformação incremental total, deformação incremental elástica e deformação incremental plástica, respectivamente.

Para a caracterização do comportamento elastoplástico do material são necessárias quatro relações:

- a) Relação tensão-deformação elástica;
- b) Função de escoamento: fornece a condição de escoamento que especifica o estado de tensão multiaxial correspondente ao escoamento plástico;
- c) Lei de escoamento: relaciona os incrementos de deformação plástica com a tensão corrente e os incrementos de tensão;
- d) Lei de endurecimento: especifica como a função de escoamento é modificada durante o escoamento plástico.

O critério de escoamento fornece uma relação matemática para prever sob quais condições o material apresenta deformações plásticas, quando solicitado por qualquer tipo de carregamento. Para um estado uniaxial de tensões, a deformação plástica inicia-se quando a tensão aplicada atinge a tensão de escoamento do material. Para estados de tensões biaxiais ou triaxiais, o escoamento dá-se quando as tensões aplicadas atingem os valores calculados de acordo com o critério de escoamento adotado (Branco, 1985).

A forma geral da função de escoamento no tempo t é:

$${}^t\Phi({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots) \quad (2.33)$$

onde $({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots)$ denota as variáveis que dependem da caracterização material.

A resposta material instantânea é elástica se:

$${}^t\Phi < 0 \quad (2.34)$$

e dependendo da condição de carregamento, a resposta pode ser elástica ou plástica se:

$${}^t\Phi = 0 \quad (2.35)$$

A condição ${}^t\Phi > 0$ é inadmissível.

Para o material do duto é assumido um comportamento elastoplástico. O critério de escoamento dá-se segundo *von Mises* com endurecimento isotrópico.

O fenômeno de encruamento ou endurecimento é o processo de deformação plástica que modifica a tensão de escoamento inicial aumentando a faixa de comportamento elástico. No caso particular em que o módulo de encruamento é igual na tração e na compressão, o material é dito com endurecimento isotrópico.

Segundo Branco (1985), o critério de *von Mises* é baseado na observação experimental de que a pressão hidrostática, responsável pela variação de volume num sólido, não provoca deformações permanentes. Como a deformação plástica se dá a volume constante, a componente hidrostática existente em um estado geral de tensões aplicado a um corpo não influencia a tensão de escoamento.

Como a pressão interna é considerada usualmente constante no duto, a relação tensão-deformação para o elemento viga-duto é uniaxial no sistema de coordenadas locais. A tensão circunferencial constante introduzida pela pressão interna deve ser levada em consideração na relação tensão-deformação (Zhou & Murray, 1996).

Portanto, para esse estado de tensão biaxial, o escoamento ocorre quando a tensão efetiva (determinada através das tensões longitudinais e circunferenciais) atinge a tensão de escoamento determinada segundo o critério de *von Mises*. A tensão radial, por hipótese, é

suposta nula por seu valor ser muito menor se comparada com os valores das outras duas tensões.

De acordo com Bathe (1996), para deformações volumétricas nulas a relação tensão-deformação geral pode ser escrita na forma:

$$[{}^tS] = \frac{E}{1+\nu} [({}^t\varepsilon' - {}^t\varepsilon^P)] \quad (2.36)$$

$${}^tS_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^t\varepsilon_m \quad (2.37)$$

onde $[{}^tS]$ é o tensor desviador de tensões com componentes dadas por:

$${}^t\sigma_{ij} = {}^tS_{ij} - {}^tS_m \delta_{ij} \quad (2.38)$$

tS_m é a tensão média dada pela equação:

$${}^tS_m = \frac{{}^tS_{ii}}{3} \quad (2.39)$$

$[{}^t\varepsilon']$ é o tensor desviador de deformação com componentes:

$${}^t\varepsilon'_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} - {}^t\varepsilon_m \delta_{ij} \quad (2.40)$$

${}^t\varepsilon_m$ é a deformação média:

$${}^t\varepsilon_m = \frac{{}^t\varepsilon_{ii}}{3} \quad (2.41)$$

e $[{}^t\varepsilon^P]$ é o tensor de deformação plástica com componentes ${}^t\varepsilon^P_{ij}$.

No desenvolvimento da formulação subsequente, a notação para os sub-índices será dada de acordo com convenção em coordenadas cilíndricas $i, j = \theta, r, x$. Os sub-índices θ, r, x representam as direções circunferencial, radial e longitudinal respectivamente.

Desprezando-se as tensões de cisalhamento e as deformações correspondentes e com auxílio das equações (2.37) à (2.41), a relação incremental tensão-deformação dada pela equação (2.36) para o elemento viga-duto pode ser expressa como (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{Bmatrix} {}_0S_\theta \\ {}_0S_r \\ {}_0S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0\varepsilon_\theta \\ {}_0\varepsilon_r \\ {}_0\varepsilon_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0\varepsilon_\theta \\ {}_0\varepsilon_r \\ {}_0\varepsilon_x \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

onde

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.43)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.44)$$

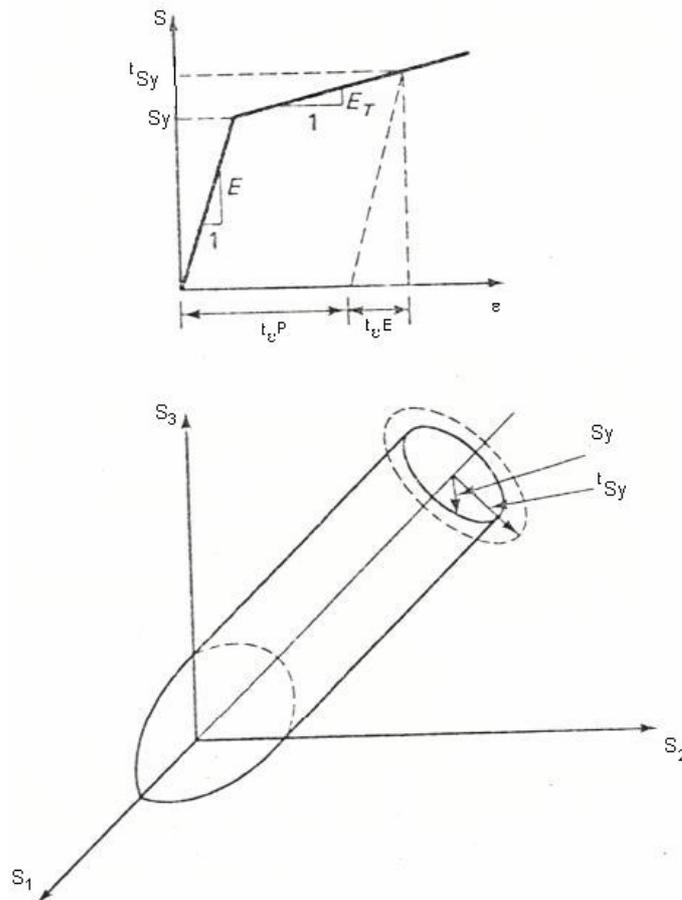
$${}^t_0 P_{mn} = \frac{3G}{\left(1 + \frac{H'}{3G}\right) {}^t_0 \bar{S}^2} {}^t_0 \sigma_{mm} {}^t_0 \sigma_{nn}, \quad m, n = \theta, r, x \quad (2.45)$$

O módulo de encruamento H' é expresso por:

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (2.46)$$

onde E_T é o módulo tangente (Figura 8). No caso de plasticidade perfeita o módulo de encruamento H' é igual a zero e a tensão efetiva \bar{S} é igual a tensão de escoamento S_y (Bathe, 1996). Na nomenclatura dada pela expressão (2.45) em particular, os sub-índices repetidos não representam soma.

FIGURA 8 – CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO DE VON MISES (ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO).



Fonte: (Bathe, 1982).

A trajetória da curva no diagrama de tensão-deformação mostrada no primeiro gráfico da Figura 8 representa o comportamento do material linear tanto na fase elástica quanto na fase plástica. O material que apresenta esse comportamento é também conhecido como bi-linear.

De acordo com as expressões (2.38) e (2.39), e adotando a hipótese de tensão radial nula, as componentes do tensor desviador de tensões tornam-se:

$${}^t\sigma_\theta = {}^tS_\theta - \left(\frac{{}^tS_\theta + {}^tS_r + {}^tS_x}{3} \right) = {}^tS_\theta - \left(\frac{{}^tS_\theta + 0 + {}^tS_x}{3} \right) = \frac{I}{3} (2{}^tS_\theta - {}^tS_x) \quad (2.47)$$

$${}^t\sigma_r = -\frac{I}{3} ({}^tS_\theta + {}^tS_x) \quad (2.48)$$

$${}^t\sigma_x = \frac{I}{3} (2{}^tS_x - {}^tS_\theta) \quad (2.49)$$

Os sub-índices simples são utilizados porque somente as componentes normais são consideradas.

A tensão circunferencial ${}^tS_\theta$ será objeto de discussão posterior sendo determinada por (Moser, 2001):

$${}^tS_\theta = \frac{P_i(D_e - t)}{2t} \quad (2.50)$$

onde P_i é a pressão interna constante, D_e o diâmetro externo do duto e t a espessura do duto.

Partindo das suposições de que a tensão radial é considerada nula, e a tensão circunferencial é constante devido à condição de pressão interna de operação constante no duto, as tensões incrementais na direção radial e circunferencial são também consideradas nulas. Então, partindo da equação (2.42) e aplicando as condições descritas acima se tem (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{Bmatrix} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{rx} \end{Bmatrix} \right) \varepsilon_x \quad (2.51)$$

Rearranjando os termos da equação (2.51) e admitindo que exista a inversa, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta\theta} \\ {}^tC_{rx} \end{Bmatrix} \varepsilon_x \quad (2.52)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta\theta} \\ {}^tC_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda' - {}^tP_{\theta\theta} & \lambda - {}^tP_{\theta r} \\ \lambda - {}^tP_{r\theta} & \lambda' - {}^tP_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda - {}^tP_{\theta x} \\ \lambda - {}^tP_{rx} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

De acordo com expressão (2.42), tS_x é determinado como:

$${}^tS_x = (\lambda_0 \varepsilon_\theta + \lambda_0 \varepsilon_r - {}^tP_{x\theta} \varepsilon_\theta - {}^tP_{xr} \varepsilon_r) + \lambda' \varepsilon_x - {}^tP_{xx} \varepsilon_x \quad (2.54)$$

A relação constitutiva elasto-plástica incremental é obtida utilizando-se a expressão (2.52) na equação (2.54) e rearranjando os termos:

$${}^tS_x = {}^tC^{EP} \varepsilon_x \quad (2.55)$$

onde

$${}^tC^{EP} = {}^tC_{\theta x} (\lambda_0 - {}^tP_{x\theta}) + {}^tC_{rx} (\lambda_0 - {}^tP_{xr}) + \lambda' - {}^tP_{xx} \quad (2.56)$$

No caso particular onde os incrementos de deformação são elásticos ${}^tC^{EP} = E$.

A tensão efetiva é determinada utilizando-se as expressões (2.47) a (2.48):

$${}^t\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2} {}^t\sigma_{ij} {}^t\sigma_{ij}} = \sqrt{({}^tS_\theta)^2 - {}^tS_x {}^tS_\theta + ({}^tS_x)^2} \quad (2.57)$$

A deformação plástica incremental no tempo t é expressa por:

$${}^t\bar{\varepsilon}^P = \sqrt{\frac{3}{2} {}^t\varepsilon_{ij}^P {}^t\varepsilon_{ij}^P} = \sqrt{\frac{3}{2} ({}^t\varepsilon_\theta^P)^2 + ({}^t\varepsilon_r^P)^2 + ({}^t\varepsilon_x^P)^2} \quad (2.58)$$

onde as componentes da deformação incremental plástica resultam de (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{Bmatrix} {}^t\varepsilon_\theta^P \\ {}^t\varepsilon_r^P \\ {}^t\varepsilon_x^P \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_x \quad (2.59)$$

2.3.2.3 AVALIAÇÃO DE INCREMENTOS DE TENSÃO

Nesta seção é apresentado um algoritmo de solução para avaliar os incrementos de tensões para uma dada deformação incremental. Quando os valores das tensões longitudinais e circunferenciais atingem a tensão de escoamento determinada segundo o critério de *von Mises*, utiliza-se um método de integração implícito para determinar o valor da tensão total na configuração de equilíbrio corrente. Este método é conhecido como método de projeção ao ponto mais próximo, que no caso de uma superfície de *von Mises* recai no método de retorno radial.

A superfície de escoamento de *von Mises* é um cilindro no espaço das tensões principais, conforme é mostrado na Figura 8, e é dada por (Bathe, 1982):

$${}^t\Phi = \frac{1}{2} {}^t\sigma_{ij} {}^t\sigma_{ij} - {}^t\kappa \quad (2.60)$$

em que

$${}^t\kappa = \frac{1}{3} {}^tS_y^2 \quad (2.61)$$

Assumindo que as tensões tS_x , as deformações ${}^t\varepsilon_x$ e ${}^t\varepsilon_x^P$, e os deslocamentos $\{{}^tu\}$ no tempo t são conhecidos, os incrementos de deslocamentos e os incrementos de deformações são determinados no tempo $t+\Delta t$.

A seção transversal do duto é dividida em faixas iguais conforme é mostrado na Figura 10. Em cada faixa, a tensão é avaliada ao longo da seção, para cada ponto interno de *Gauss* na integração numérica.

Sejam os vetores definidos como: ${}^{t+\Delta t}{}_{\theta}\varepsilon_x$ = deformação total no tempo $t+\Delta t$ em relação a configuração de referência 0, ${}^t{}_{\theta}\varepsilon_x$ = deformação total no tempo t em relação a configuração de referência 0, e tS_x = tensão total no tempo t em relação a configuração de referência 0.

O procedimento para o cálculo da tensão total ${}^{t+\Delta t}{}_{\theta}S_x^T$ no tempo $t+\Delta t$ é mostrado através de um fluxograma dado na Figura 9.

As forças internas são determinadas dividindo-se a seção transversal em np faixas iguais, onde cada faixa de área tem uma força interna correspondente a sua posição e a sua área (Figura 10).

O vetor de força interna é obtido ao longo do elemento por integração numérica utilizando o método geral da Quadratura Gaussiana. Portanto, para cada ponto de integração tem-se um vetor de força interna associado.

Segundo Hughes (2000) a localização dos pontos da quadratura e os valores dos pesos agregados são determinados para alcançar o máximo de precisão. Uma observação importante é a precisão do resultado melhorar com o aumento de pontos de integração, mas implica em contrapartida num custo computacional maior.

A fórmula da integração numérica é dada por:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{np \text{ int}} g(\tilde{\xi}_i) W_i \quad (2.62)$$

onde $npint$ é o número de pontos de integração, $\tilde{\xi}_l$ é a coordenada e W_l é o peso do l -ésimo ponto de integração. As coordenadas $\tilde{\xi}_l$ são os zeros do polinômio de Legendre.

O vetor de força desbalanceado é determinado a partir do vetor de carregamento e do vetor das forças equilibradoras. Este vetor desbalanceado é usado para avaliar os incrementos de deslocamentos e deformações seguintes (Zhou & Murray, 1996).

FIGURA 9 - FLUXOGRAMA PARA A AVALIAÇÃO DE INCREMENTOS DE TENSÃO

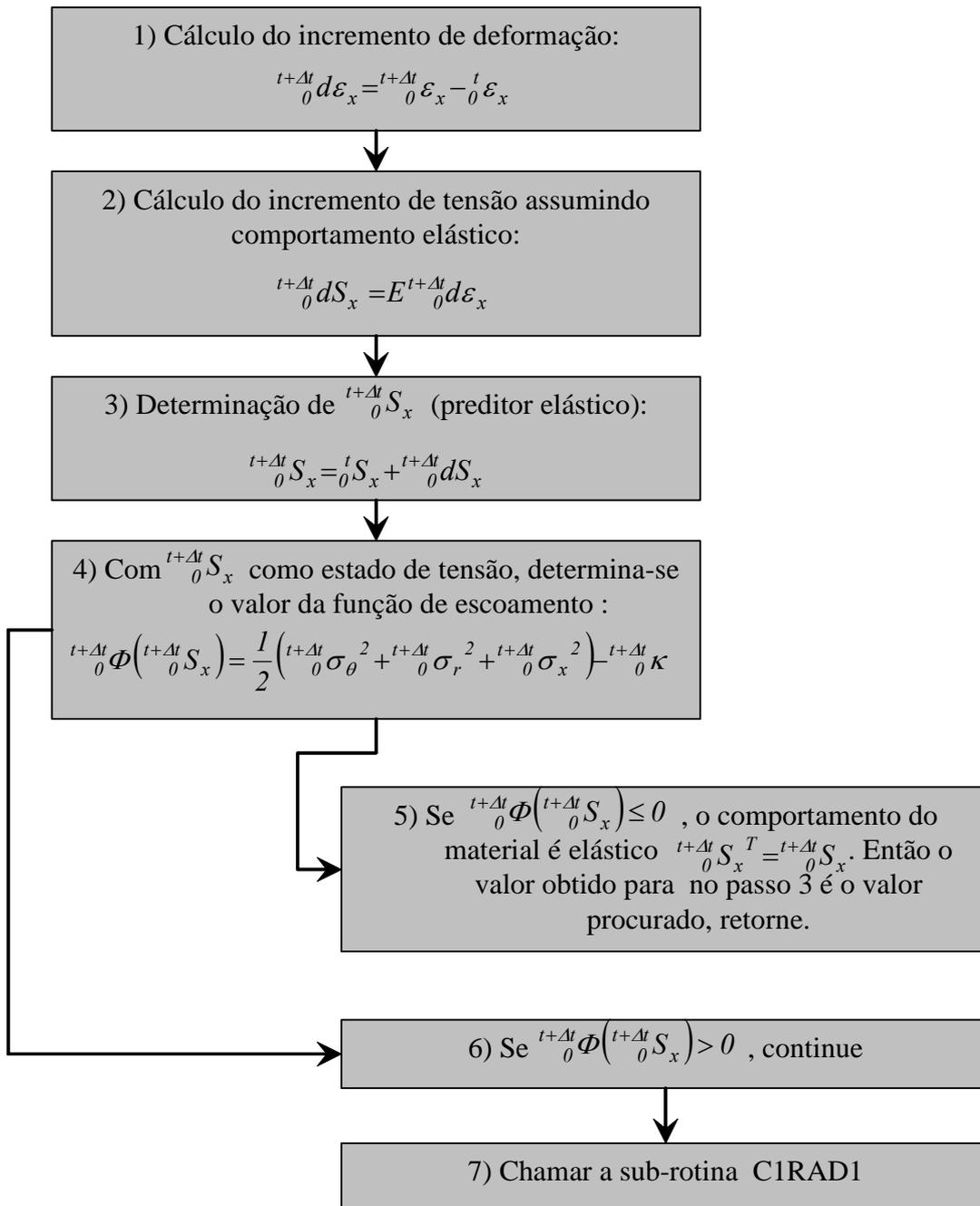
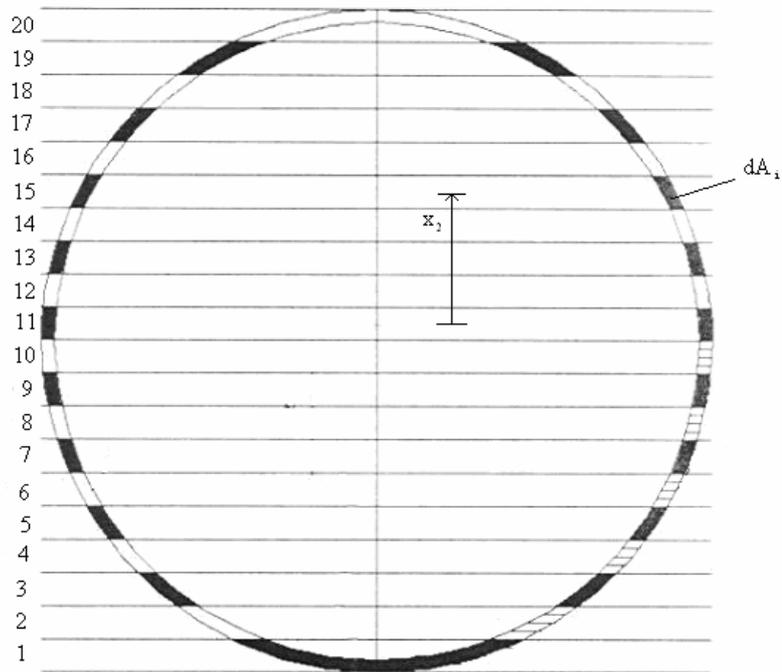


FIGURA 10 – SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO COM $NP = 20$.



Fonte: (Mejía, 2003).

2.3.3 PRESSÃO INTERNA

Segundo Moser (2001) as tensões e deformações resultantes originam-se de vários carregamentos. Para dutos enterrados sob pressão, estes carregamentos são usualmente identificados em duas categorias: pressão interna e carregamentos externos. A pressão interna é composta da pressão hidrostática e da pressão de oscilação a serem tratadas mais adiante. Carregamentos externos são usualmente causados pela pressão externa do solo e / ou carregamentos na superfície. Carregamentos devido a recalques diferenciais, flexão longitudinal, e carregamentos cisalhantes são também considerados como carregamentos externos. Tensões induzidas pela temperatura podem ser causadas por efeitos internos e externos.

2.3.3.1 PRESSÃO HIDROSTÁTICA

A solução de *Lamé* para tensões em um cilindro circular de parede espessa é bem conhecida. Para um cilindro circular somente carregado com pressão interna, estas tensões são determinadas como (Moser, 2001):

$$S_{\theta} = \frac{P_i r_i^2 (r_e^2 / r^2 + 1)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad \text{Tensão tangencial} \quad (2.63)$$

$$S_r = \frac{P_i r_i^2 (r_e^2 / r^2 - 1)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad \text{Tensão radial} \quad (2.64)$$

onde

P_i = pressão interna;

r_i = raio interno;

r_e = raio externo;

r = raio para o ponto em questão.

A tensão máxima é a tensão tangencial S_{θ} , e ela ocorre em $r = r_i$. Então,

$$S_{m\acute{a}x} = (S_{\theta})_{r=r_i} = \frac{P_i r_i^2 (r_e^2 / r_i^2 + 1)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (2.65)$$

ou

$$S_{m\acute{a}x} = \frac{P_i (r_e^2 + r_i^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \quad (2.66)$$

Para cilindros (dutos) onde $r_i \approx r_e$ e $r_e - r_i = t$,

$$r_e^2 - r_i^2 = (r_e + r_i)(r_e - r_i) = \bar{D}t \quad (2.67)$$

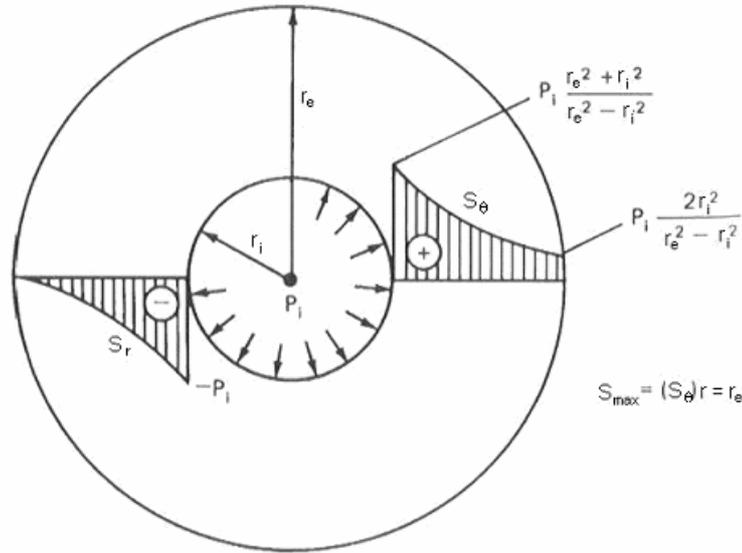
onde

$\bar{D} = r_e + r_i$ = diâmetro médio;

$t = r_e - r_i$ = espessura do cilindro.

Na Figura 11 são mostrados diagramas de distribuição das tensões circunferencial e radial de cilindros de parede espessa com pressão interna.

FIGURA 11 – CILINDRO DE PAREDE ESPESSE COM PRESSÃO INTERNA.



Fonte: (Moser, 2001).

Além disso,

$$(r_e + r_i)^2 = D^2 = r_e^2 + r_i^2 + 2r_i r_e \quad (2.68)$$

Então a equação (2.66) pode ser reescrita usando as equações (2.67) e (2.68) como segue:

$$S_{\max} = \frac{P_i(\bar{D}^2/2)}{\bar{D}t} = \frac{P_i\bar{D}}{2t} \quad (2.69)$$

A equação (2.69) é conhecida como a equação para tensão em um cilindro de parede fina. Esta equação é às vezes conhecida como fórmula de *Barlow*, mas é exatamente uma redução da solução de *Lamé*. Esta fórmula é utilizada frequentemente para o cálculo de tensões devido a pressão interna P_i .

Se o diâmetro externo D_e é a dimensão de referência, a equação (2.69) pode ser reescrita de outra forma. Sejam as expressões:

$$\bar{D} = D_e - t \quad (2.70)$$

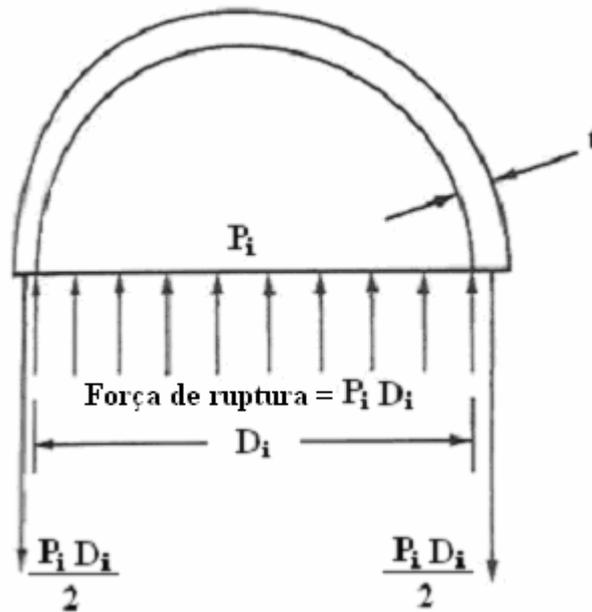
$$r_e^2 + r_i^2 = \bar{D}^2 - 2r_i r_e \approx \bar{D}^2 - 2r^2 = \bar{D}^2 - \frac{\bar{D}^2}{2} \quad (2.71)$$

O diâmetro médio \bar{D} é igual ao diâmetro externo menos a espessura. A equação (2.69) torna-se então:

$$S_{\max} = \frac{P_i(D_e - t)}{2t} \quad (2.72)$$

Na Figura 12 é apresentado um diagrama de corpo livre para metade da seção do duto com pressão interna.

FIGURA 12 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA METADE DA SEÇÃO DO TUBO COM PRESSÃO INTERNA.



Fonte: (Moser, 2001).

2.3.3.2 PRESSÃO DE OSCILAÇÃO

De acordo com Moser (2001) a pressão de oscilação é dividida em duas categorias: oscilações transientes e oscilações cíclicas. Oscilação cíclica é uma pressão de flutuação que ocorre regularmente produzida pela ação de equipamentos como bombas alternadas, válvulas de controle de pressão inalterada ou válvulas reguladoras de pressão atuante, demanda de oscilação, ou outros efeitos cíclicos. Oscilações cíclicas podem causar dano de fadiga e devem ser projetadas fora do sistema.

Oscilações transientes ocorrem sobre um tempo relativamente curto e entre um estado estável e outro. Se uma oscilação de transição ocorre, o sistema então retorna ao mesmo estado estável como antes da oscilação. Oscilações transientes são comumente não cíclicas, embora elas possam ser repetitivas. Uma oscilação transiente é usualmente referenciada como “golpe de Aríete”.

Uma lista parcial de algumas causas típicas do “martelo de água” é dada a seguir:

- Mudanças nos ajustes da válvula (acidental ou planejada);
- Início ou parada de bombas;
- Características instáveis de bombas ou turbinas.

A magnitude da pressão do “martelo de água” gerada por uma mudança na velocidade depende da geometria do sistema, da magnitude da mudança na velocidade, e da velocidade da onda do “martelo de água” para o sistema particular.

2.3.4 TEMPERATURA

Expansão ou contração devido ao acréscimo ou decréscimo de temperatura pode induzir tensões longitudinais na parede do tubo. Estas tensões são baseadas na restrição longitudinal. A tensão longitudinal devido a temperatura é dada pela equação (Moser, 2001):

$$S_{temp} = -\alpha(\Delta T)E \quad (2.73)$$

onde

S_{temp} = tensão longitudinal devido a temperatura;

α = coeficiente de dilatação linear;

ΔT = variação de temperatura;

E = módulo de Young para o material do duto.

2.3.5 MECÂNICA LONGITUDINAL DE DUTOS ENTERRADOS.

De acordo com Watkins & Anderson (2000) mecânica longitudinal de dutos enterrados é a análise das deformações longitudinais comparadas com a capacidade limite de deformação. Se as deformações podem ser determinadas, então as tensões correspondentes podem ser usadas como alternativa básica para o projeto. As principais causas das tensões longitudinais (deformações) são:

- Mudanças na temperatura e pressão, em que causam relativo alongamento ou encurtamento do duto com relação às restrições do solo e pressões longitudinais;

- Pressão longitudinal é o resultado da pressão interna ou vácuo em válvulas, redutores, cotovelos em formato “T” e “Y”, entre outros;

- Flexão de vigas, que causam tensões de flexão. Causas típicas de flexão de vigas são: localização da seção do duto sobre vigas de madeira, morro ou pilares para alinhamento vertical; fundação não-uniforme do leito; movimento superficial do morro ou desabamento de terra, e movimento do solo maciço ou fundação; entre outras causas.

Cada uma das três causas de tensão longitudinal é analisada separadamente. Os resultados são combinados para a análise.

As tensões de temperatura ocorrem quando a seção do duto é restringida nas extremidades, tal que ela não pode alongar ou encurtar.

O duto restringido nas extremidades é também sujeito à tensão longitudinal devido à pressão interna.

Na mecânica dos materiais, as aplicações das tensões em uma direção produzem tensões e / ou deformações na direção perpendicular. Este efeito é chamado de efeito de Poisson. Um duto com pressão interna P_i tem uma tensão circunferencial S_θ . A tensão longitudinal associada S_p , é dada pela seguinte equação (Moser, 2001):

$$S_p = \nu S_\theta \quad (2.74)$$

onde

ν = coeficiente de *Poisson* para o material do duto.

Valores de tensão longitudinal associada à tensão circunferencial não são usualmente críticos. Se o duto enterrado é soldado e muito longo, ele é efetivamente restringido (por atrito do solo, se não restringido nas extremidades) e é influenciado pela pressão longitudinal (tensão) devido o decréscimo na temperatura e pressão interna (Watkins & Anderson, 2000).

2.4 ELEMENTO DE SOLO

De acordo com Moser (2001) o desempenho do duto é influenciado pela interação solo-estrutura que depende das propriedades do duto e do solo circundante. Por esse motivo o custo do sistema total está atrelado à interação entre o solo e a estrutura.

O sistema solo-duto é altamente indeterminado estaticamente. Isto significa que a pressão de interface entre o solo e o duto não pode ser calculada somente pela estática; as propriedades de ambos o solo e o duto devem ser também consideradas.

O modelo de interação solo-duto neste trabalho é constituído por uma série de molas localizadas ao longo do duto, que concentram a reação do solo em pontos discretos (Mejía, 2003).

As deformações das molas de solo podem ser determinadas de acordo com os deslocamentos e a posição relativa do duto e o perfil do solo.

As forças de reação das molas são determinadas usando-se a relação constitutiva da mola que descreve a relação entre as forças e as deformações das mesmas.

A determinação das deformações e a descrição material das molas que simulam o solo são descritas nas duas seções a seguir.

2.4.1 DEFORMAÇÃO DAS MOLAS DO SOLO

Um modelo conceitual típico é mostrado na Figura 13. Na parede do duto são ligadas cinco séries de molas de solo discretas que são: molas longitudinais, molas de base, molas de levantamento, molas lateral esquerda e direita (Zhou & Murray, 1996).

A posição relativa do duto e do solo determina as deformações nas molas. A deformação incremental das molas transversais, avaliada no sistema de coordenadas locais, é determinada observando-se o vetor de deslocamentos como:

$${}^t\Delta_{BS} = 0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{US} = -{}_t v_0 \quad (2.75)$$

se ${}_t v_0 > 0$, ou:

$${}^t\Delta_{BS} = -{}_t v_0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{US} = 0 \quad (2.76)$$

se ${}_t v_0 < 0$. Para ${}_t w_0 > 0$, tem-se:

$${}^t\Delta_{LLS} = 0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{RLS} = -{}_t w_0 \quad (2.77)$$

ou quando ${}_t w_0 < 0$, as deformações tornam-se:

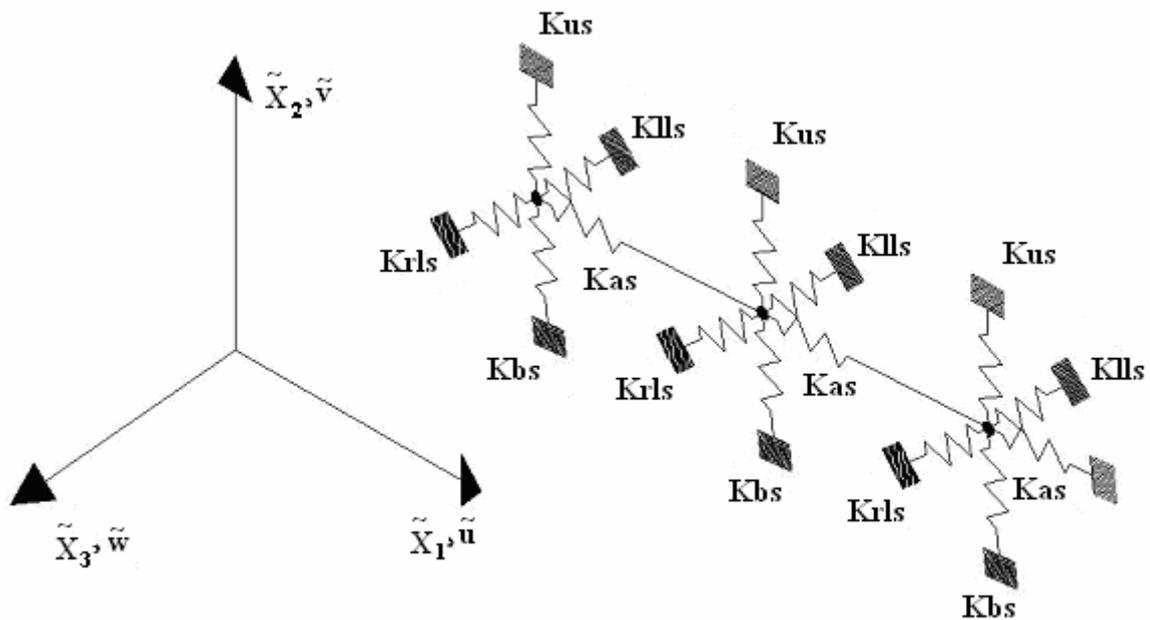
$${}^t\Delta_{LLS} = -{}_t w_0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{RLS} = 0 \quad (2.78)$$

Nas expressões acima $'\Delta_{BS}$, $'\Delta_{US}$, $'\Delta_{LLS}$ e $'\Delta_{RLS}$ são as deformações da mola de encurtamento de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. A deformação longitudinal incremental é determinada no sistema de coordenadas locais como:

$$'\Delta_{AS} = -{}_t u_0 \quad (2.79)$$

onde $'\Delta_{AS}$ é a deformação de encurtamento ou de alongamento da mola.

FIGURA 13 – MODELO DE INTERAÇÃO SOLO-DUTO.



2.4.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MOLAS DE SOLO

A relação constitutiva para as molas de solo relaciona a força e a deformação das mesmas. As molas transversais têm relação força-deformação elástica-perfeitamente plástica na compressão e não têm capacidade para transmitirem força na tração (Figura 14). Conseqüentemente, pode haver no máximo duas molas transversais no nó (mola de base ou de levantamento; mola lateral esquerda ou lateral direita) com força não-nula. As molas longitudinais possuem o mesmo comportamento elasto-perfeitamente plástico tanto na compressão quanto na tração (Figura 15). A rigidez das molas é dada por $'K_{AS}$, $'K_{BS}$, $'K_{US}$,

${}^iK_{LLS}$ e ${}^iK_{RLS}$, para as molas longitudinal, de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. As forças incrementais de compressão nas molas transversais, definidas no sistema de coordenadas locais na configuração deformada corrente, são dadas pelas seguintes expressões (Zhou & Murray, 1996):

$${}^iF_{BS} = {}^iK_{BS} {}^i\Delta_{BS} \quad 0 \leq {}^iF_{BS} \leq {}^iF_{YBS} \quad (2.80)$$

$${}^iF_{US} = {}^iK_{US} {}^i\Delta_{US} \quad 0 \leq {}^iF_{US} \leq {}^iF_{YUS} \quad (2.81)$$

$${}^iF_{LLS} = {}^iK_{LLS} {}^i\Delta_{LLS} \quad 0 \leq {}^iF_{LLS} \leq {}^iF_{YLLS} \quad (2.82)$$

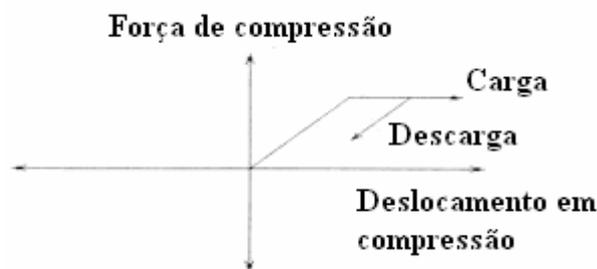
$${}^iF_{RLS} = {}^iK_{RLS} {}^i\Delta_{RLS} \quad 0 \leq {}^iF_{RLS} \leq {}^iF_{YRLS} \quad (2.83)$$

onde ${}^iF_{YBS}$, ${}^iF_{YUS}$, ${}^iF_{YLLS}$ e ${}^iF_{YRLS}$ são as forças de escoamento na compressão nas molas de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. As forças compressivas são consideradas negativas nas molas transversais. As forças incrementais nas molas longitudinais, definidas no sistema de coordenadas locais na configuração deformada corrente, são dadas por:

$${}^iF_{AS} = {}^iK_{AS} {}^i\Delta_{AS} \quad -{}^iF_{YAS} \leq {}^iF_{AS} \leq {}^iF_{YAS} \quad (2.84)$$

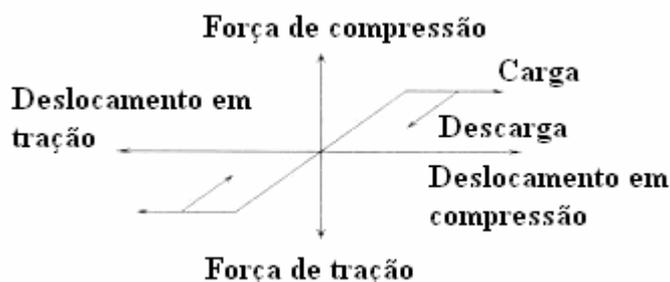
onde $-{}^iF_{YAS}$ e ${}^iF_{YAS}$ são as forças de escoamento na tração e na compressão nas molas longitudinais, respectivamente.

FIGURA 14 – DIAGRAMA FORÇA-DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS TRANSVERSAIS.



Fonte: (Mejía, 2003).

FIGURA 15 – DIAGRAMA FORÇA-DEFORMAÇÃO PARA AS MOLAS LONGITUDINAIS.



Fonte: (Mejía, 2003).

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 EQUAÇÃO DO TRABALHO VIRTUAL

3.1.1 Equação do Trabalho Virtual Incremental para a Formulação Lagrangeana Total

Segundo Bathe (1996) o princípio dos deslocamentos virtuais na formulação L. T. é dado por:

$$\int_{0_V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (3.1)$$

onde o termo à esquerda representa o trabalho interno e o termo a direita é o trabalho virtual externo.

O trabalho virtual externo é dado por:

$${}^{t+\Delta t} \mathcal{R} = \int_{0_V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^0 V + \int_{0_{S_f}} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^0 S \quad (3.2)$$

onde

${}^{t+\Delta t} f_i^B$ = componentes de forças aplicadas externamente por unidade de volume no tempo $t + \Delta t$.

${}^{t+\Delta t} f_i^S$ = componentes de trações superficiais aplicadas externamente por unidade de superfície no tempo $t + \Delta t$.

${}^{t+\Delta t}S_f =$ superfície no tempo $t + \Delta t$ sobre a qual as trações externas são aplicadas.

$\delta u_i^S = \delta u_i$ determinada sobre a superfície 0S_f

Na equação (3.1) as tensões e deformações incrementais são dadas respectivamente por:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (3.3)$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

O trabalho virtual segundo a técnica RMDI pode ser obtido levando-se em conta as componentes de tensão e deformação do elemento viga-duto, conforme a equação a seguir (Mejía, 2003):

$$\begin{aligned} & \int_{0_V} {}^{t+\Delta t}S_{x_l} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{x_l} d^0V + \int_{0_V} {}^{t+\Delta t}S_{\theta} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{\theta} d^0V + \int_{0_L} {}^{t+\Delta t}F_{AS} \delta {}^{t+\Delta t}u_0 d^0x_l + \\ & \int_{0_L} \left({}^{t+\Delta t}F_{BS} + {}^{t+\Delta t}F_{US} \right) \delta {}^{t+\Delta t}v_0 d^0x_l + \int_{0_L} \left({}^{t+\Delta t}F_{LLS} + {}^{t+\Delta t}F_{RLS} \right) \delta {}^{t+\Delta t}w_0 d^0x_l = \delta {}^{t+\Delta t}W_{ext} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na equação (3.5) os dois primeiros termos representam o trabalho virtual das tensões do duto e os três termos restantes é o trabalho virtual das molas do solo. O termo da parte direita é o trabalho virtual externo originado pela aplicação da carga.

As expressões para as tensões e as deformações incrementais para o duto são dadas por:

$${}^{t+\Delta t}S_{x_l} = {}^tS_{x_l} + {}_0S_{x_l} \quad (3.6)$$

$${}^{t+\Delta t}S_{\theta} = {}^tS_{\theta} = \text{constante} \quad (3.7)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{x_l} = \delta {}_0\varepsilon_{x_l} = \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^L + \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^{NL} \quad (3.8)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{\theta} = \delta {}_0\varepsilon_{\theta} = {}^tC_{\theta x_l} \delta {}_0\varepsilon_{x_l} \quad (3.9)$$

Com o auxílio das equações (3.6) a (3.9), pode-se reescrever os dois primeiros termos da equação (3.5) como:

$$\begin{aligned} I + II = & \int_{0_V} \left({}^tS_{x_l} + {}^tS_{\theta} {}^tC_{\theta x_l} \right) \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^L d^0V + \int_{0_V} \left({}^tS_{x_l} + {}^tS_{\theta} {}^tC_{\theta x_l} \right) \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^{NL} d^0V + \\ & \int_{0_V} {}_0S_{x_l} \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^L d^0V + \int_{0_V} {}_0S_{x_l} \delta {}_0\varepsilon_{x_l}^{NL} d^0V \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os algarismos romanos do lado esquerdo da equação acima são usados para representar os dois primeiros termos da equação (3.5). Utilizando as equações (2.17) a (2.22) e (2.55) na equação (3.10) e integrando na seção transversal, temos:

$$\begin{aligned}
I + II = & \int_{0_L} \left({}^tF_{eq} \delta_0 \varepsilon_0^L + {}^tM_{eq1} \delta_0 \phi_z^L + {}^tM_{eq2} \delta_0 \phi_y^L \right) d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left({}^tF_{eq} \delta_0 \varepsilon_0^{NL} + {}^tM_{eq1} \delta_0 \phi_z^{NL} + {}^tM_{eq2} \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left(({}^tK_{10} \varepsilon_0^L + {}^tK_{30} \phi_z^L + {}^tK_{40} \phi_y^L) \delta_0 \varepsilon_0^L + ({}^tK_{30} \varepsilon_0^L + {}^tK_{20} \phi_z^L + {}^tK_{50} \phi_y^L) \delta_0 \phi_z^L + \right. \\
& \left. ({}^tK_{40} \varepsilon_0^L + {}^tK_{50} \phi_z^L + {}^tK_{60} \phi_y^L) \delta_0 \phi_y^L \right) d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left(({}^tK_{10} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{30} \phi_z^{NL} + {}^tK_{40} \phi_y^{NL}) \delta_0 \varepsilon_0^{NL} + ({}^tK_{30} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{20} \phi_z^{NL} + {}^tK_{50} \phi_y^{NL}) \delta_0 \phi_z^{NL} + \right. \\
& \left. ({}^tK_{40} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{50} \phi_z^{NL} + {}^tK_{60} \phi_y^{NL}) \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left(({}^tK_{10} \varepsilon_0^L + {}^tK_{30} \phi_z^L + {}^tK_{40} \phi_y^L) \delta_0 \varepsilon_0^{NL} + ({}^tK_{30} \varepsilon_0^L + {}^tK_{20} \phi_z^L + {}^tK_{50} \phi_y^L) \delta_0 \phi_z^{NL} + \right. \\
& \left. ({}^tK_{40} \varepsilon_0^L + {}^tK_{50} \phi_z^L + {}^tK_{60} \phi_y^L) \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left(({}^tK_{10} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{30} \phi_z^{NL} + {}^tK_{40} \phi_y^{NL}) \delta_0 \varepsilon_0^{NL} + ({}^tK_{30} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{20} \phi_z^{NL} + {}^tK_{50} \phi_y^{NL}) \delta_0 \phi_z^{NL} + \right. \\
& \left. ({}^tK_{40} \varepsilon_0^{NL} + {}^tK_{50} \phi_z^{NL} + {}^tK_{60} \phi_y^{NL}) \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^0 x_1 +
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde os termos de ordem maior são ignorados. As parcelas:

$${}^tK_1 = \int_{0_A} {}^tC^{EP} d^0 A \tag{3.12}$$

$${}^tK_2 = \int_{0_A} {}^tC^{EP0} x_2^2 d^0 A \tag{3.13}$$

$${}^tK_3 = -\int_{0_A} {}^tC^{EP0} x_2 d^0 A \tag{3.14}$$

$${}^tK_4 = \int_{0_A} {}^tC^{EP0} x_3 d^0 A \tag{3.15}$$

$${}^tK_5 = -\int_{0_A} {}^tC^{EP0} x_2^0 x_3 d^0 A \tag{3.16}$$

$${}^tK_6 = \int_{0_A} {}^tC^{EP0} x_3^2 d^0 A \tag{3.17}$$

são os coeficientes da rigidez da seção transversal. Os esforços internos totais equivalentes no tempo t são definidos como:

$${}^tF_{eq} = \int_{0_A} ({}^tS_{x1} + {}^tC_{\alpha\alpha} {}^tS_{\theta}) d^0 A \tag{3.18}$$

$${}^tM_{eq1} = -\int_{0_A} ({}^tS_{x1} + {}^tC_{\alpha\alpha} {}^tS_{\theta}) x_2 d^0 A \tag{3.19}$$

$${}^tM_{eq2} = \int_{0_A} ({}^tS_{x1} + {}^tC_{\alpha\alpha} {}^tS_{\theta}) x_3 d^0 A \tag{3.20}$$

As equações definidas anteriormente para as forças internas equivalentes dependem da tensão axial e da tensão circunferencial e são definidas com base no trabalho virtual equivalente.

Considerando o terceiro, quarto e quinto termo da equação (3.5) e utilizando as equações (2.96) a (2.100), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
III + IV + V = & \int_{0_L} ({}^tK_{AS0} \Delta_{AS}) \delta_0 \mu_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} ({}^tK_{BS0} \Delta_{BS} + {}^tK_{US0} \Delta_{US}) \delta_0 \nu_0 d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} ({}^tK_{LLS0} \Delta_{LLS} + {}^tK_{RLS0} \Delta_{RLS}) \delta_0 w_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} ({}^{t+\Delta t} F_{AS}) \delta_0 \mu_0 d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} ({}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US}) \delta_0 \nu_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} ({}^{t+\Delta t} F_{lls} + {}^{t+\Delta t} F_{rls}) \delta_0 w_0 d^0 x_1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo as equações (3.11) e (3.21) na equação (3.5), obtém-se a equação do trabalho virtual incremental para um elemento solo-duto baseado na técnica RMDI, que é dada por:

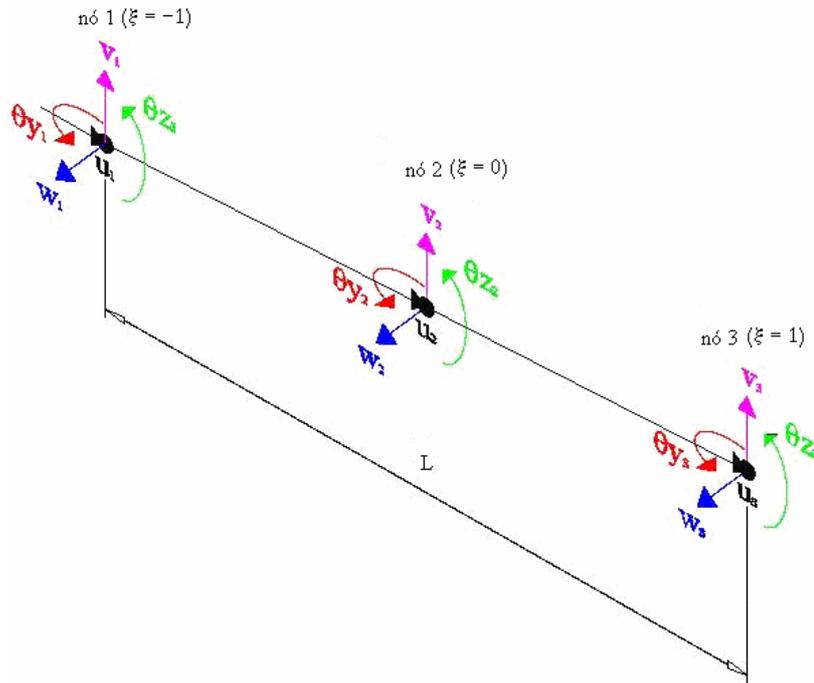
$$\begin{aligned}
& \int_{0_L} \left({}^t F_{eq} \delta_0 \varepsilon_0^{NL} + {}^t M_{eq1} \delta_0 \phi_z^{NL} + {}^t M_{eq2} \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^0 x_1 + \int_{0_L} \left(({}^t K_{10} \varepsilon_0^L + {}^t K_{30} \phi_z^L + {}^t K_{40} \phi_y^L) \delta_0 \varepsilon_0^L \right. \\
& + ({}^t K_{30} \varepsilon_0^L + {}^t K_{20} \phi_z^L + {}^t K_{50} \phi_y^L) \delta_0 \phi_z^L + ({}^t K_{40} \varepsilon_0^L + {}^t K_{50} \phi_z^L + {}^t K_{60} \phi_y^L) \delta_0 \phi_y^L \left. \right) d^0 x_1 \\
& + \int_{0_L} ({}^t K_{AS0} \Delta_{AS}) \delta_0 u_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} ({}^t K_{BS0} \Delta_{BS} + {}^t K_{US0} \Delta_{US}) \delta_0 v_0 d^0 x_1 \\
& + \int_{0_L} ({}^t K_{LLS0} \Delta_{LLS} + {}^t K_{RLS0} \Delta_{RLS}) \delta_0 w_0 d^0 x_1 = \delta^{t+At} W_{ext} \\
& - \int_{0_L} ({}^t F_{eq} \delta_0 \varepsilon_0^L + {}^t M_{eq1} \delta_0 \phi_z^L + {}^t M_{eq2} \delta_0 \phi_y^L) d^0 x_1 - \int_{0_L} ({}^t F_{AS}) \delta_0 u_0 d^0 x_1 \\
& - \int_{0_L} ({}^t F_{BS} + {}^t F_{US}) \delta_0 v_0 d^0 x_1 - \int_{0_L} ({}^t F_{LLS} + {}^t F_{RLS}) \delta_0 w_0 d^0 x_1
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.2 DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA TRIDIMENSIONAL

3.2.1 INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

O elemento de viga tridimensional é um elemento uniaxial com capacidade para tração, compressão e flexão. Este elemento consiste de um nó localizado em cada extremidade da barra (i e j) e um nó localizado no centro (k). Cada nó da barra pode deslocar-se nas direções transversais (eixos x_2 e x_3), na direção longitudinal (eixo x_1) e girar em torno dos eixos x_2 e x_3 . Isto significa que cada nó possui 5 graus de liberdade ($u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \theta_{y3}, \theta_{z3}$), conforme mostra a Figura 16.

FIGURA 16 – ELEMENTO DE VIGA TRIDIMENSIONAL.



Na formulação isoparamétrica o deslocamento u do elemento é interpolado da seguinte forma:

$${}^t u({}^0 x_1) = {}^t u_1 h_1({}^0 x_1) + {}^t u_2 h_6({}^0 x_1) + {}^t u_3 h_{11}({}^0 x_1) \quad (3.23)$$

onde $\{h_1 \ h_6 \ h_{11}\}$ são as funções de interpolação e x_1 é a coordenada no sistema de coordenada local. A coordenada natural ξ é definida em relação ao sistema local do elemento como:

$${}^0 \xi = \frac{{}^2 {}^0 x_1}{{}^0 L} \quad -1 \leq {}^0 \xi \leq 1 \quad (3.24)$$

O sobrescrito esquerdo t denota a configuração do elemento; por exemplo, $t = 0$ denota a configuração original, visto que $t = 1$ corresponde a configuração na posição deformada.

A expressão (3.23) pode ser reescrita na forma matricial:

$${}^t u({}^0 x_1) = [h_1({}^0 x_1) \ h_6({}^0 x_1) \ h_{11}({}^0 x_1)] \begin{bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \\ {}^t u_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Propõe-se um interpolante de grau dois da forma:

$${}^t u({}^0 x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 {}^0 x_1 + \alpha_3 {}^0 x_1^2 = [A]^T [\alpha] \quad (3.26)$$

onde

$$[A]^T = [I \quad {}^0 x_1 \quad {}^0 x_1^2] \quad (3.27)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Pode-se representar os deslocamentos, com o auxílio de (3.26), na forma:

$$\begin{bmatrix} {}^t u\left(\frac{{}^0 L}{2}\right) \\ {}^t u\left(\frac{{}^0 L}{2}\right) \\ {}^t u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{{}^0 L}{2} & \frac{{}^0 L^2}{4} \\ 1 & \frac{{}^0 L}{2} & \frac{{}^0 L^2}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

ou ainda, matricialmente:

$$[U] = [A][\alpha] \quad (3.30)$$

Assim, usando-se a expressão (3.30) e sendo $[A]$ inversível, pode-se obter:

$$[\alpha] = [A]^{-1}[U] \quad (3.31)$$

que substituída na expressão (3.26) fica:

$${}^t u({}^0 x_1) = [A]^T [A]^{-1} [U] \quad (3.32)$$

ou ainda:

$${}^t u({}^0 x_1) = \begin{bmatrix} \frac{{}^0 x_1}{{}^0 L} + \frac{2{}^0 x_1^2}{{}^0 L^2} \\ \frac{{}^0 x_1}{{}^0 L} + \frac{2{}^0 x_1^2}{{}^0 L^2} \\ 1 - \frac{4{}^0 x_1^2}{{}^0 L^2} \end{bmatrix}^T [{}^t u_1 \quad {}^t u_2 \quad {}^t u_3] \quad (3.33)$$

Usando a relação (3.24), obtêm-se as seguintes funções de interpolação conhecidas como funções de *Hermite*:

$$h_1({}^0 \xi) = -\frac{{}^0 \xi}{2} + \frac{{}^0 \xi^2}{2} \quad (3.34)$$

$$h_6({}^0 \xi) = \frac{{}^0 \xi}{2} + \frac{{}^0 \xi^2}{2} \quad (3.35)$$

$$h_{11}({}^0 \xi) = 1 - {}^0 \xi^2 \quad (3.36)$$

De maneira análoga pode-se interpolar os deslocamentos v e w . Dados os deslocamentos transversais v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 e w_3 e as rotações $\theta z_1, \theta z_2, \theta z_3, \theta y_1, \theta y_2$ e θy_3 , os deslocamentos v e w do elemento são interpolados da seguinte forma:

$${}^t v({}^0 x_1) = {}^t v_1 h_2({}^0 x_1) + {}^t \theta z_1 h_4({}^0 x_1) + {}^t v_2 h_7({}^0 x_1) + {}^t \theta z_2 h_9({}^0 x_1) + {}^t v_3 h_{12}({}^0 x_1) + {}^t \theta z_3 h_{14}({}^0 x_1) \quad (3.37)$$

$${}^t w({}^0 x_1) = {}^t w_1 h_3({}^0 x_1) + {}^t \theta y_1 h_5({}^0 x_1) + {}^t w_2 h_8({}^0 x_1) + {}^t \theta y_2 h_{10}({}^0 x_1) + {}^t w_3 h_{13}({}^0 x_1) + {}^t \theta y_3 h_{15}({}^0 x_1) \quad (3.38)$$

As funções de interpolação resultantes do interpolante de grau cinco são dadas a seguir:

$$h_2({}^0 \xi) = h_3({}^0 \xi) = {}^0 \xi^2 - \frac{5^0 \xi^3}{4} - \frac{{}^0 \xi^4}{2} + \frac{3^0 \xi^5}{4} \quad (3.39)$$

$$h_4({}^0 \xi) = h_5({}^0 \xi) = \frac{{}^0 \xi^2 {}^0 L}{8} - \frac{{}^0 \xi^3 {}^0 L}{8} - \frac{{}^0 \xi^4 {}^0 L}{8} + \frac{{}^0 \xi^5 {}^0 L}{8} \quad (3.40)$$

$$h_7({}^0 \xi) = h_8({}^0 \xi) = {}^0 \xi^2 + \frac{5^0 \xi^3}{4} - \frac{{}^0 \xi^4}{2} - \frac{3^0 \xi^5}{4} \quad (3.41)$$

$$h_9({}^0 \xi) = h_{10}({}^0 \xi) = -\frac{{}^0 \xi^2 {}^0 L}{8} - \frac{{}^0 \xi^3 {}^0 L}{8} + \frac{{}^0 \xi^4 {}^0 L}{8} + \frac{{}^0 \xi^5 {}^0 L}{8} \quad (3.42)$$

$$h_{12}({}^0 \xi) = h_{13}({}^0 \xi) = 1 - 2^0 \xi^2 + {}^0 \xi^4 \quad (3.43)$$

$$h_{14}({}^0 \xi) = h_{15}({}^0 \xi) = \frac{{}^0 \xi {}^0 L}{2} - {}^0 \xi^3 {}^0 L + \frac{{}^0 \xi^5 {}^0 L}{2} \quad (3.44)$$

Os deslocamentos incrementais do elemento podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t u_1 h_1({}^0 \xi) + {}^t u_2 h_6({}^0 \xi) + {}^t u_3 h_{11}({}^0 \xi) \\ {}^t v_1 h_2({}^0 \xi) + {}^t \theta z_1 h_4({}^0 \xi) + {}^t v_2 h_7({}^0 \xi) + {}^t \theta z_2 h_9({}^0 \xi) + {}^t v_3 h_{12}({}^0 \xi) + {}^t \theta z_3 h_{14}({}^0 \xi) \\ {}^t w_1 h_3({}^0 \xi) + {}^t \theta y_1 h_5({}^0 \xi) + {}^t w_2 h_8({}^0 \xi) + {}^t \theta y_2 h_{10}({}^0 \xi) + {}^t w_3 h_{13}({}^0 \xi) + {}^t \theta y_3 h_{15}({}^0 \xi) \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{Bmatrix} = [{}^t H] \{ {}^t u_e \} \quad (3.46)$$

onde

$$[{}^t H] = \begin{bmatrix} {}^t_0 h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t_0 h_2 & 0 & {}^t_0 h_4 & 0 & 0 & {}^t_0 h_7 & 0 & {}^t_0 h_9 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{12} & 0 & {}^t_0 h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0 h_3 & 0 & {}^t_0 h_5 & 0 & 0 & {}^t_0 h_8 & 0 & {}^t_0 h_{10} & 0 & 0 & {}^t_0 h_{13} & 0 & {}^t_0 h_{15} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\{^t u_e\} = \begin{Bmatrix} ^t u_1 \\ ^t v_1 \\ ^t w_1 \\ ^t \theta_z \\ ^t \theta_y \\ ^t u_2 \\ ^t v_2 \\ ^t w_2 \\ ^t \theta_z \\ ^t \theta_y \\ ^t u_3 \\ ^t v_3 \\ ^t w_3 \\ ^t \theta_z \\ ^t \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

O vetor $\{^t u_e\}$ é o vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento. Existem doze componentes associadas ao deslocamento transversal e três componentes associadas ao deslocamento longitudinal.

3.2.2 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Utilizando-se as equações definidas na seção 2.1.2.3, a deformação axial linear ${}^t \varepsilon_0^L$ e as curvaturas lineares ${}^t \phi_z^L$ e ${}^t \phi_y^L$, são obtidas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \varepsilon_0^L \\ {}^t \phi_z^L \\ {}^t \phi_y^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(^t u_1 h_1(\xi) + ^t u_2 h_2(\xi) + ^t u_3 h_3(\xi))}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2(^t v_1 h_2(\xi) + ^t \theta_z h_4(\xi) + ^t v_2 h_7(\xi) + ^t \theta_z h_9(\xi) + ^t v_3 h_{12}(\xi) + ^t \theta_z h_{14}(\xi))}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2(^t w_1 h_3(\xi) + ^t \theta_y h_5(\xi) + ^t w_2 h_8(\xi) + ^t \theta_y h_{10}(\xi) + ^t w_3 h_{13}(\xi) + ^t \theta_y h_{15}(\xi))}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$= [{}^t B^L] \{^t u_e\}$$

onde

$$[{}^t B^L] = \begin{bmatrix} {}^t h'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t h''_2 & 0 & {}^t h''_4 & 0 & 0 & {}^t h''_7 & 0 & {}^t h''_9 & 0 & 0 & {}^t h''_{12} & 0 & {}^t h''_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t h''_3 & 0 & {}^t h''_5 & 0 & 0 & {}^t h''_8 & 0 & {}^t h''_{10} & 0 & 0 & {}^t h''_{13} & 0 & {}^t h''_{15} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A deformação incremental axial não-linear pode ser escrita utilizando-se a equação (2.20). O desenvolvimento na obtenção da expressão para a mesma é descrito na seqüência.

$${}^t\varepsilon_0^{NL} = \frac{I}{2} \left(\left(\frac{\partial {}^t u_0}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^t v_0}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^t w_0}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 \right) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} {}^t\varepsilon_0^{NL} = & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial ({}^t u_1 h_1({}^0 \xi) + {}^t u_2 h_6({}^0 \xi) + {}^t u_3 h_{11}({}^0 \xi))}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \\ & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial ({}^t v_1 h_2({}^0 \xi) + {}^t \theta_1 h_4({}^0 \xi) + {}^t v_2 h_7({}^0 \xi) + {}^t \theta_2 h_9({}^0 \xi) + {}^t v_3 h_{12}({}^0 \xi) + {}^t \theta_3 h_{14}({}^0 \xi))}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \\ & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial ({}^t w_1 h_3({}^0 \xi) + {}^t \theta_1 h_5({}^0 \xi) + {}^t w_2 h_8({}^0 \xi) + {}^t \theta_2 h_{10}({}^0 \xi) + {}^t w_3 h_{13}({}^0 \xi) + {}^t \theta_3 h_{15}({}^0 \xi))}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$${}^t\varepsilon_0^{NL} = \frac{I}{2} \{ {}^t u_e \}^T [{}^t B_l^{NL}]^T [{}^t B_l^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (3.53)$$

onde

$$[{}^t B_l^{NL}] = \begin{bmatrix} {}^t h'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t h'_2 & 0 & {}^t h'_4 & 0 & 0 & {}^t h'_7 & 0 & {}^t h'_9 & 0 & 0 & {}^t h'_{12} & 0 & {}^t h'_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t h'_3 & 0 & {}^t h'_5 & 0 & 0 & {}^t h'_8 & 0 & {}^t h'_{10} & 0 & 0 & {}^t h'_{13} & 0 & {}^t h'_{15} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A partir da equação (3.53), pode-se escrever a variação da deformação incremental não-linear como:

$$\delta {}^t \varepsilon_0^{NL} = \{ \delta {}^t u_e \}^T [{}^t B_l^{NL}]^T [{}^t B_l^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (3.55)$$

A curvatura incremental não-linear ${}^t \phi_z^{NL}$ é obtida a partir da equação (2.21), resultando em:

$$\begin{aligned} {}^t \phi_z^{NL} = & {}^t \varepsilon_0^L {}^t \phi_z^L = \left(\frac{\partial ({}^t u_1 h_1({}^0 \xi) + {}^t u_2 h_6({}^0 \xi) + {}^t u_3 h_{11}({}^0 \xi))}{\partial {}^0 x_1} \right) \\ & \left(\frac{\partial^2 ({}^t v_1 h_2({}^0 \xi) + {}^t \theta_1 h_4({}^0 \xi) + {}^t v_2 h_7({}^0 \xi) + {}^t \theta_2 h_9({}^0 \xi) + {}^t v_3 h_{12}({}^0 \xi) + {}^t \theta_3 h_{14}({}^0 \xi))}{\partial {}^0 x_1^2} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Reescrevendo a equação (3.56) na forma matricial, a expressão para a variação de ${}^t \phi_z^{NL}$ é:

$$\delta {}^t \phi_z^{NL} = \{ \delta {}^t u_e \}^T [{}^t B_2^L]^T [{}^t B_2^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (3.57)$$

onde

$$[{}^t B_2^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & {}^t h''_2 & 0 & {}^t h''_4 & 0 & 0 & {}^t h''_7 & 0 & {}^t h''_9 & 0 & 0 & {}^t h''_{12} & 0 & {}^t h''_{14} & 0 \\ {}^t h'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Analogamente, a variação da curvatura incremental não-linear ${}^t\phi_y^{NL}$ é obtida através da equação:

$$\delta {}^t\phi_y^{NL} = \{\delta {}^t u_e\}^T [{}^t B^L]^T [{}^t B_3^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (3.59)$$

onde

$$[{}^t B_3^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^t h_3'' & 0 & {}^t h_5'' & 0 & 0 & {}^t h_8'' & 0 & {}^t h_{10}'' & 0 & 0 & {}^t h_{13}'' & 0 & {}^t h_{15}'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t h_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_6' & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{11}' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A deformação das molas de solo está definida na seção 2.4.1 e os deslocamentos incrementais nodais podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \Delta_{AS} \\ {}^t \Delta_{BS} \\ {}^t \Delta_{US} \\ {}^t \Delta_{LLS} \\ {}^t \Delta_{RLS} \end{Bmatrix} = [{}^t B^S] \{ {}^t u_e \} \quad (3.61)$$

onde

$$[{}^t B^S]^T = \begin{bmatrix} -{}^t h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_2(1-\eta) & 0 & -{}^t h_2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_3(1-\beta) & 0 & -{}^t h_3\beta \\ 0 & -{}^t h_4(1-\eta) & 0 & -{}^t h_4\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_5(1-\beta) & 0 & -{}^t h_5\beta \\ -{}^t h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_7(1-\eta) & 0 & -{}^t h_7\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_8(1-\beta) & 0 & -{}^t h_8\beta \\ 0 & -{}^t h_9(1-\eta) & 0 & -{}^t h_9\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{10}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{10}\beta \\ -{}^t h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_{12}(1-\eta) & 0 & -{}^t h_{12}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{13}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{13}\beta \\ 0 & -{}^t h_{14}(1-\eta) & 0 & -{}^t h_{14}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{15}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{15}\beta \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Os parâmetros η e β utilizados na expressão acima são definidos de acordo com os deslocamentos transversais (eixos 0x_2 e 0x_3):

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^t v < 0 \\ 1 & \text{se } {}^t v > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^t_0w < 0 \\ 1 & \text{se } {}^t_0w > 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

3.2.3 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Segundo Meek (1971) é necessário definir o sistema de coordenadas em que os deslocamentos e as forças são definidos. No sistema de coordenadas globais, a completa geometria da estrutura é descrita por um único conjunto de coordenadas. Quando as coordenadas de componentes ou regiões da estrutura são expressas por sistemas de coordenadas distintos, as coordenadas são ditas locais.

Um conjunto de coordenadas pode ser usado para descrever a geometria da estrutura, as propriedades dos membros, os sistemas de forças, e as deflexões nos nós. É conveniente expressar todas as quantidades de força e deslocamentos nos nós no sistema de coordenadas globais. Propriedades e forças do membro são mais vantajosas expressá-las em um conjunto particular próprio de coordenadas. É fundamental para a teoria das estruturas obter as transformações relacionando o conjunto de variáveis em um sistema para o conjunto equivalente num segundo sistema.

Os deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema local são relacionados com os deslocamentos no sistema global pela expressão:

$$\left\{ {}^t_0u_e \right\} = \left[{}^tR_T \right] \left\{ {}^t_0\tilde{u}_e \right\} \quad (3.65)$$

onde

$\left\{ {}^t_0u_e \right\}$ = vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas local;

$\left\{ {}^t_0\tilde{u}_e \right\}$ = vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas global;

$\left[{}^tR_T \right]$ = matriz de rotação para um membro de pórtico espacial.

A matriz de transformação de rotação $\left[{}^tR_T \right]$ para um membro de um pórtico espacial toma a seguinte forma:

$$\left[{}^tR_T \right] = \begin{bmatrix} \left[{}^tROT \right] & 0 & 0 \\ 0 & \left[{}^tROT \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[{}^tROT \right] \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde

$$[{}^tROT] = \begin{bmatrix} {}^tC_1 {}^tC_2 & {}^tS_1 {}^tC_2 & {}^tS_2 & 0 & 0 \\ -{}^tC_1 {}^tS_2 {}^tS_3 - {}^tS_1 {}^tC_3 & -{}^tS_1 {}^tS_2 {}^tS_3 + {}^tC_1 {}^tC_3 & {}^tS_3 {}^tC_2 & 0 & 0 \\ -{}^tC_1 {}^tS_2 {}^tC_3 - {}^tS_1 {}^tS_3 & -{}^tS_1 {}^tS_2 {}^tC_3 - {}^tC_1 {}^tS_3 & {}^tC_3 {}^tC_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^tC_3 {}^tC_2 & -{}^tS_1 {}^tS_2 {}^tC_3 - {}^tC_1 {}^tS_3 \\ 0 & 0 & 0 & {}^tS_3 {}^tC_2 & -{}^tS_1 {}^tS_2 {}^tS_3 + {}^tC_1 {}^tC_3 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$${}^tC_1 = \begin{cases} \frac{{}^t x_1^j - {}^t x_1^i}{{}^t L_{xy}} & \text{se } {}^t L_{xy} > d \\ 1 & \text{se } {}^t L_{xy} < d \end{cases} \quad (3.68)$$

$${}^tC_2 = \frac{{}^t L_{xy}}{{}^t L} \quad (3.69)$$

$${}^tC_3 = \cos({}^t \alpha) \quad (3.70)$$

$${}^tS_1 = \begin{cases} \frac{{}^t x_2^j - {}^t x_2^i}{{}^t L_{xy}} & \text{se } {}^t L_{xy} > d \\ 0 & \text{se } {}^t L_{xy} < d \end{cases} \quad (3.71)$$

$${}^tS_2 = \frac{{}^t x_3^j - {}^t x_3^i}{{}^t L} \quad (3.72)$$

$${}^tS_3 = \text{sen}({}^t \alpha) \quad (3.73)$$

$${}^t d = 0,0001 {}^t L \quad (3.74)$$

$${}^t L = \sqrt{({}^t x_1^j - {}^t x_1^i)^2 + ({}^t x_2^j - {}^t x_2^i)^2 + ({}^t x_3^j - {}^t x_3^i)^2} \quad (3.75)$$

Nas expressões acima ${}^t L_{xy}$ é a projeção do comprimento do elemento sobre o plano X_1 - X_2 e ${}^t x_1^i, {}^t x_2^i, {}^t x_3^i, {}^t x_1^j, {}^t x_2^j$ e ${}^t x_3^j$ são as coordenadas do nó i e j do elemento respectivamente.

A matriz de rotação $[{}^tROT]$ é expressa em função dos co-senos diretores do membro (que são rapidamente calculados a partir das coordenadas dos nós) e do ângulo ${}^t \alpha$, que deve ser dado como parte da descrição da própria estrutura.

3.2.4 MATRIZES DE PROPRIEDADES TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO MATERIAL

Embora em teoria qualquer corpo pode ser entendido como sendo tri-dimensional, para análises práticas, em muitos casos a redução da dimensionalidade do problema é necessária (Bathe, 1996).

Para materiais isotrópicos, a matriz de tensão-deformação generalizada para o elemento de viga-duto é dada por:

$$[{}^tD^p] = \begin{bmatrix} {}^tK_1 & {}^tK_3 & {}^tK_4 \\ {}^tK_3 & {}^tK_2 & {}^tK_5 \\ {}^tK_4 & {}^tK_5 & {}^tK_6 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Os coeficientes tK_1 , tK_2 , tK_3 , tK_4 , tK_5 e tK_6 dados na expressão (3.76) são obtidos por integração numérica conforme descrito na seção 3.1.1.

Em particular, quando o comportamento do material do duto é elástico linear, a matriz $[{}^tD^p]$ resulta em:

$$[{}^tD^p] = \begin{bmatrix} E^0A & 0 & 0 \\ 0 & E^0I_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & E^0I_{x2} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

A matriz de tensão-deformação para as molas do solo é:

$$[{}^tD^s] = \begin{bmatrix} {}^tK_{AS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tK_{BS} & 0 & {}^tK_{US} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tK_{LLS} & 0 & {}^tK_{RLS} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

3.2.5 MATRIZES DE ESFORÇOS INTERNOS

As matrizes de esforços internos são definidos como:

$$[{}^tF] = \begin{bmatrix} {}^tF_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & {}^tF_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tF_{eq} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$[{}^tM_1] = \begin{bmatrix} {}^tM_{eq1} & 0 & 0 \\ 0 & {}^tM_{eq1} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tM_{eq1} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$[{}^tM_2] = \begin{bmatrix} {}^tM_{eq2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^tM_{eq2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tM_{eq2} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Os valores dos esforços internos totais equivalentes são definidos por integração numérica através das expressões definidas na seção 3.1.1.

3.2.6 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O ELEMENTO FINITO

A equação do trabalho virtual incremental para o elemento de viga-duto, definida na seção 3.1.1, resulta na equação de equilíbrio do elemento finito. Substituindo as equações (3.49), (3.53), (3.55), (3.57), (3.59), (3.61), (3.76), (3.78), (3.79), (3.80) e (3.81) na equação (3.22), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \sum \int_{0_{L_e}} \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T [{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 D^P] [{}^t_0 B^L] \{u_e\} d^0 x_1 + \\
 & \sum \int_{0_{L_e}} \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T \left([{}^t_0 B_1^{NL}]^T [{}^t_0 F] [{}^t_0 B_1^{NL}] + [{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 M_1] [{}^t_0 B_2^{NL}] + [{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 M_2] [{}^t_0 B_3^{NL}] \right) \{u_e\} d^0 x_1 + \\
 & \sum \int_{0_{L_e}} \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T [{}^t_0 H]^T [{}^t_0 D^S] [{}^t_0 B^S] \{u_e\} d^0 x_1 = \sum \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T \{P_{ext}^e\} - \\
 & \sum \int_{0_{L_e}} \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T [{}^t_0 B^L]^T \begin{Bmatrix} {}^t_0 F_{eq} \\ {}^t_0 M_{qe1} \\ {}^t_0 M_{eq2} \end{Bmatrix} d^0 x_1 - \sum \int_{0_{L_e}} \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T [{}^t_0 H]^T \begin{Bmatrix} {}^t_0 F_{AS} \\ {}^t_0 F_{BS} + {}^t_0 F_{US} \\ {}^t_0 F_{LLS} + {}^t_0 F_{RLS} \end{Bmatrix} d^0 x_1
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Na análise estática utilizando a formulação Lagrangeana Total, a matrizes elementares de rigidez elasto-plástica, geométrica e das molas do solo na equação anterior são dadas respectivamente por:

$$[{}^t_0 K_{EP}^e] = \int_{0_{L_e}} [{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 D^P] [{}^t_0 B^L] d^0 x_1 \tag{3.83a}$$

$$\begin{aligned}
 [{}^t_0 K_G^e] &= \int_{0_{L_e}} [{}^t_0 B_1^{NL}]^T [{}^t_0 F] [{}^t_0 B_1^{NL}] d^0 x_1 + \\
 & \int_{0_{L_e}} \left([{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 M_1] [{}^t_0 B_2^{NL}] + [{}^t_0 B^L]^T [{}^t_0 M_2] [{}^t_0 B_3^{NL}] \right) d^0 x_1
 \end{aligned} \tag{3.83b}$$

$$[{}^t_0 K_S^e] = \int_{0_{L_e}} [{}^t_0 H]^T [{}^t_0 D^S] [{}^t_0 B^S] d^0 x_1 \tag{3.83c}$$

Os vetores de esforços equivalentes nos pontos nodais elementares para o duto e as molas do solo são definidos respectivamente pelas expressões:

$$\{{}^t_0 Q_P^e\} = \int_{0_{L_e}} [{}^t_0 B^L]^T \begin{Bmatrix} {}^t_0 F_{eq} \\ {}^t_0 M_{eq1} \\ {}^t_0 M_{eq2} \end{Bmatrix} d^0 x_1 \tag{3.84a}$$

$$\{{}^t_0 Q_S^e\} = \int_{0_{L_e}} [{}^t_0 H]^T \begin{Bmatrix} {}^t_0 F_{AS} \\ {}^t_0 F_{US} + {}^t_0 F_{BS} \\ {}^t_0 F_{LLS} + {}^t_0 F_{RLS} \end{Bmatrix} d^0 x_1 \tag{3.84b}$$

Substituindo as equações (3.83) e (3.84) na equação (3.82) obtém-se:

$$\sum \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T \left([{}^t_0 K_{EP}^e] + [{}^t_0 K_G^e] + [{}^t_0 K_S^e] \right) \{u_e\} = \sum \{\delta_{\theta}^t \mu_e\}^T \left(\{P_{ext}^e\} - \{Q_P^e\} - \{Q_S^e\} \right) \tag{3.85}$$

A transformação das matrizes de rigidez elementares e dos vetores elementares de cargas externas e de esforços internos equivalentes, do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais dão-se:

$$\begin{bmatrix} {}^t\tilde{K}^e \\ {}_0\tilde{K}^e \end{bmatrix} = [{}^tR_T]^T \left([{}^tK_{EP}^e] + [{}^tK_G^e] + [{}^tK_S^e] \right) [{}^tR_T] \quad (3.86)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^t\tilde{R}^e \\ {}_0\tilde{R}^e \end{Bmatrix} = [{}^tR_T]^T \begin{Bmatrix} {}^tP^e \\ {}_0P^e \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^t\tilde{F}^e \\ {}_0\tilde{F}^e \end{Bmatrix} = [{}^tR_T]^T \left(\begin{Bmatrix} {}^tQ_P^e \\ {}_0Q_P^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^tQ_S^e \\ {}_0Q_S^e \end{Bmatrix} \right) \quad (3.88)$$

onde a matriz $[{}^tR_T]$ está definida na seção 3.2.3.

A equação de equilíbrio global incremental obtida usando o método de rigidez direta é:

$$\begin{bmatrix} {}^t\tilde{K}^{ENS} \\ {}_0\tilde{K}^{ENS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\tilde{u}^{ENS} \\ {}_0\tilde{u}^{ENS} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t\tilde{R}^{ENS} \\ {}_0\tilde{R}^{ENS} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t\tilde{F}^{ENS} \\ {}_0\tilde{F}^{ENS} \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

onde o super índice *ENS* na equação (3.89) significa ensablamento.

4 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

4.1 INTRODUÇÃO

Na solução de problemas lineares pelo método de elementos finitos é necessário resolver um conjunto de equações algébricas simultâneas da forma (Zienkiewicz & Taylor, 2000):

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (4.1)$$

Estabelecida a não-singularidade da matriz de coeficientes, a solução destas equações é única. Na solução de problemas não-lineares obtém-se um conjunto de equações algébricas; que são, elas geralmente não-lineares, do tipo a seguir indicado:

$$\{f(\{U\})\} = \{R\} - \{F(\{U\})\} = \{0\} \quad (4.2)$$

onde $\{U\}$ é o conjunto de parâmetros de discretização, $\{R\}$ um vetor que é independente dos parâmetros e $\{F\}$ um vetor dependente dos mesmos. Estas equações podem ter múltiplas soluções. Então, se uma solução é encontrada, ela pode não ser necessariamente a solução buscada. Critérios físicos na natureza do problema e, usualmente, a aproximação de passos incrementais pequenos de soluções conhecidas são essenciais para se obter repostas reais. Tais

incrementos são de fato sempre requeridos se a lei constitutiva relacionando variações de tensão e deformação é dependente do caminho ou se o caminho deslocamento-carregamento tem bifurcações ou múltiplas ramificações em certos níveis de carregamento.

O problema geral é formulado como solução da seguinte equação:

$$\{^{t+\Delta t} f\} = \{f(\{^{t+\Delta t} U\})\} = \{^{t+\Delta t} R\} - \{F(\{^{t+\Delta t} U\})\} = \{0\} \quad (4.3)$$

que se inicia a partir de uma solução aproximada em:

$$\{U\} = \{^t U\}, \{f(\{U\})\} = \{0\}, \{R\} = \{^t R\} \quad (4.4)$$

e frequentemente resulta da variação na função força $\{^t R\}$ para:

$$\{^{t+\Delta t} R\} = \{^t R\} + \{^t \Delta R\} \quad (4.5)$$

A determinação da variação de $\{^t \Delta U\}$, tal que:

$$\{^{t+\Delta t} U\} = \{^t U\} + \{^t \Delta U\} \quad (4.6)$$

é o objetivo e geralmente os incrementos de $\{^t \Delta R\}$ são mantidos razoavelmente pequenos tal que a dependência do caminho possa ser seguida. Além disso, os benefícios do procedimento incremental são evitar excessivos números de iterações e seguir o caminho fisicamente correto.

É possível obter soluções em um incremento singular de $\{P\}$ somente no caso de uma não-linearidade moderada (e sem dependência do caminho), que é, relacionada com:

$$\{^t R\} = \{0\}, \{^t \Delta R\} = \{^{t+\Delta t} R\} = \{R\} \quad (4.7)$$

4.2 MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS

Segundo Bathe (1996) as equações básicas a serem resolvidas na análise não-linear, no tempo $t + \Delta t$, são:

$$\{^{t+\Delta t} R\} - \{^{t+\Delta t} F\} = \{0\} \quad (4.8)$$

onde o vetor $\{^{t+\Delta t} R\}$ armazena os carregamentos nodais aplicados externamente e $\{^{t+\Delta t} F\}$ é o vetor de forças nos pontos nodais que são determinados conforme a distribuição de tensões no elemento. Ambos os vetores dados em (4.8) são determinados usando o princípio dos deslocamentos virtuais. Desde que as forças nos pontos nodais dependam não linearmente dos deslocamentos nodais, é necessário iterar na solução de (4.8).

Introduzindo a iteração de Newton-Raphson, em que, assumindo que os deslocamentos são independentes das deformações, resolve-se para $i = 1, 2, 3 \dots$ as equações:

$$\{\Delta R^{(i-1)}\} = \{{}^{t+\Delta t}R\} - \{{}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\} \quad (4.9)$$

$$[{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}]\{\Delta U^{(i)}\} = \{\Delta R^{(i-1)}\} \quad (4.10)$$

$$\{{}^{t+\Delta t}U^{(i)}\} = \{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\} + \{\Delta U^{(i)}\} \quad (4.11)$$

com

$$\{{}^{t+\Delta t}U^{(0)}\} = \{{}^tU\} \quad (4.12a)$$

$$\{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}\} = \{{}^tF\} \quad (4.12b)$$

Estas equações são obtidas pela linearização da resposta do sistema de elementos finitos sobre as condições no tempo $t + \Delta t$, iteração $(i-1)$. Em cada iteração calcula-se em (4.9) um vetor de carregamento desbalanceado que substituído na expressão (4.10), obtém-se um vetor de incremento de deslocamentos. A iteração continua até os vetores de carregamento desbalanceado $\{\Delta R^{(i-1)}\}$ ou de incrementos de deslocamentos $\{\Delta U^{(i)}\}$ serem suficientemente pequenos.

As equações (4.9) a (4.12) introduzidas anteriormente, são utilizadas no procedimento de iteração de Newton-Raphson para a solução de equações de elementos finitos. Este método iterativo é também conhecido como método de Newton.

Segundo Roehl (1987) os procedimentos incrementais e iterativos consideram incrementos de cargas com iterações de equilíbrio realizadas dentro de cada passo. O desempenho da análise depende do parâmetro de incremento de carga adotado. A escolha de um incremento adequado é estabelecida de acordo com o número de iterações necessárias para atingir o equilíbrio dentro de cada passo. A convergência do procedimento é outro fator importante a ser considerado. Alguns métodos, para um determinado problema, atingem a solução procurada e outros não.

A determinação apropriada dos vetores de força nos pontos nodais e as matrizes de rigidez tangente foram discutidas anteriormente na seção 3. Esta seção objetiva apresentar com maiores detalhes os métodos iterativos de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado, para a obtenção do vetor solução do sistema linear na forma matricial caracterizado em (4.10).

Na seqüência, apresentaremos ainda nesta seção os critérios de convergência e a atualização da geometria da análise L. A.

4.2.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

De acordo com Zienkiewicz & Taylor (2000) o método de Newton é o processo que converge mais rapidamente para soluções de problemas em que somente uma determinação de $\{f\}$ é realizada em cada iteração. Admite-se que se a solução inicial está próxima da solução do problema, então, a convergência ocorre. De fato, o método é um processo em que a razão de convergência assintótica é quadrática.

Devido à importância do método em questão, o procedimento será descrito como se segue.

A condição de equilíbrio do elemento finito consiste em se encontrar a solução das equações (Bathe, 1996):

$$\{f(\{U^*\})\} = \{0\} \quad (4.13)$$

onde

$$\{f(\{U^*\})\} = \{^{t+\Delta t}R(\{U^*\})\} - \{^{t+\Delta t}F(\{U^*\})\} \quad (4.14)$$

Utilizando a expansão da série de Taylor e assumindo que na solução iterativa determinou-se $\{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}$, tem-se:

$$\{f(\{U^*\})\} = \{f(\{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\})\} + \left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{U\}} \right]_{\{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}} (\{U^*\} - \{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}) + \quad (4.15)$$

termos de ordem maior

Substituindo (4.14) em (4.15) e usando (4.13), obtém-se:

$$\left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{U\}} \right]_{\{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}} (\{U^*\} - \{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}) + \text{termos de ordem maior} = \{^{t+\Delta t}R\} - \{^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\} \quad (4.16)$$

Na equação (4.16) é assumido que as cargas aplicadas externamente independem da deformação. Negligenciando os termos de ordem maior em (4.16), o incremento de deslocamentos é determinado pela seguinte expressão:

$$\left[^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \right] \{\Delta U^{(i)}\} = \{^{t+\Delta t}R\} - \{^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\} \quad (4.17)$$

onde a matriz de rigidez tangente corrente é dada por:

$$\left[^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \right] = \left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{U\}} \right]_{\{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\}} \quad (4.18)$$

e o vetor solução de deslocamento é:

$$\{^{t+\Delta t}U^{(i)}\} = \{^{t+\Delta t}U^{(i-1)}\} + \{\Delta U^{(i)}\} \quad (4.19)$$

A solução de Newton-Raphson das equações em (4.8) são constituídas das relações dadas em (4.17) e (4.19). Desde que a análise incremental é efetuada com passos de tempo (ou de carga) de tamanho Δt , as condições iniciais desta iteração são:

$$[{}^{t+\Delta t}K^{(0)}] = [{}^tK] \quad (4.20)$$

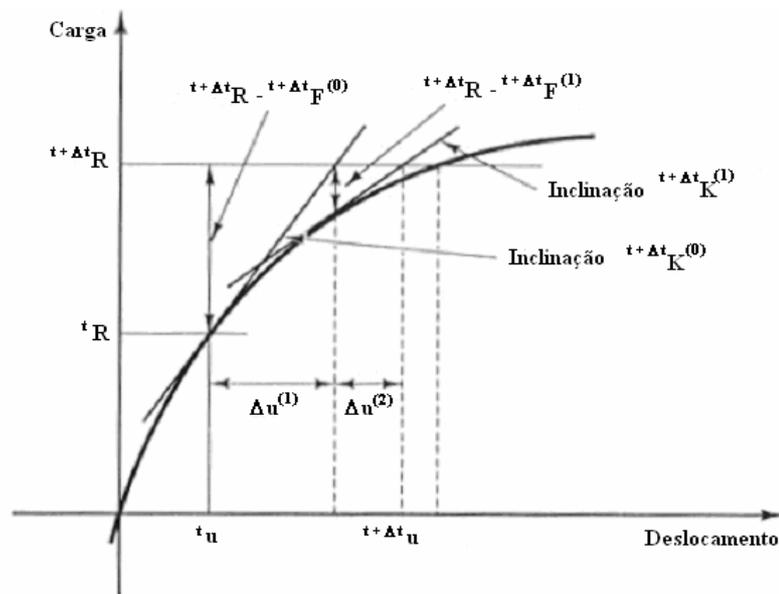
$$\{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}\} = \{{}^tF\} \quad (4.21)$$

$$\{{}^{t+\Delta t}U^{(0)}\} = \{{}^tU\} \quad (4.22)$$

Enquanto o critério de convergência não é satisfeito, a iteração continua até se obter a solução desejada do problema para determinado passo de carga ou tempo.

Uma característica deste método é que a matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração, motivo pelo qual o método também é referenciado como método de Newton-Raphson completo. O processo de solução para um sistema com um único grau de liberdade é ilustrado na Figura 17. Na solução de sistemas com muitos graus de liberdade, a reposta das curvas é, em geral, até certo ponto não-homogênea e complicada.

FIGURA 17 – RELAÇÃO DESLOCAMENTO-CARREGAMENTO.



Fonte: (Bathe, 1996).

Segundo Zienkiewicz & Taylor (2000) o processo de Newton, apesar da convergência rápida, apresenta alguns aspectos negativos:

1. A nova matriz tangente $[{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}]$ tem que ser computada em cada iteração;
2. Se a solução para as equações em (4.17) é direta, a matriz precisa ser fatorada em cada iteração;

3. Em algumas ocasiões a matriz tangente é simétrica em um estado de solução, mas assimétrica sob outros aspectos (em alguns sistemas por integrar parâmetros de grandes rotações ou plasticidade não-associada). Nestes casos uma solução assimétrica é, em geral, necessária.

4.2.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

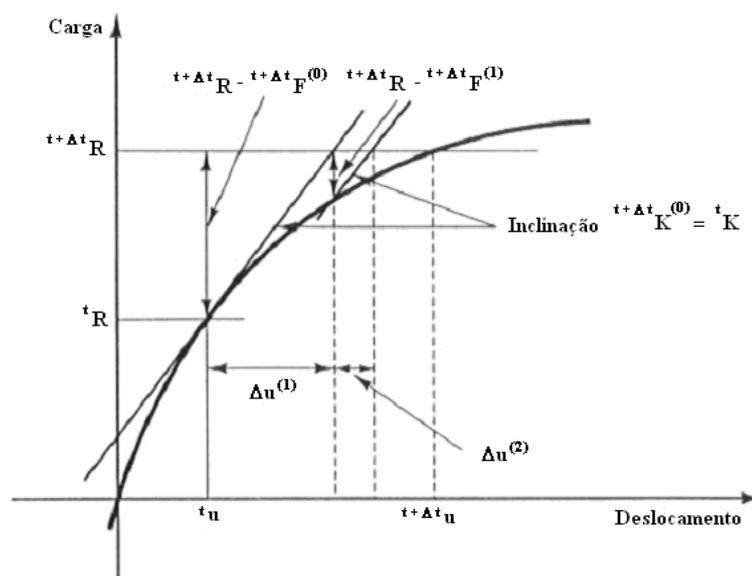
No método de Newton-Raphson modificado, usa-se:

$$[\tau K^{(i-1)}]\{\Delta U^{(i)}\} = \{{}^{t+\Delta t}R\} - \{{}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\} \quad (4.23)$$

com as condições iniciais $\{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}\} = \{{}^tF\}$, $\{{}^{t+\Delta t}U^{(0)}\} = \{{}^tU\}$, e τ corresponde a uma das configurações de equilíbrio admitidas no tempo $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$. A escolha dos passos de tempo quando a matriz de rigidez deve ser atualizada depende do grau de não-linearidade na resposta do sistema; isto é, quanto mais não-linear a resposta, mais freqüentemente a atualização deve ser efetuada (Bathe, 1996).

A Figura 18 ilustra o desempenho do método de Newton-Raphson modificado para um sistema com um único grau de liberdade, já considerado na Figura 17.

FIGURA 18 – MÉTODO DE NEWTON-RAFHSON MODIFICADO.

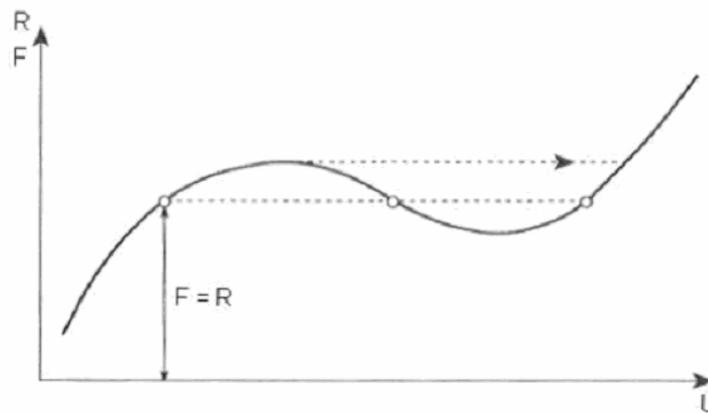


Fonte: (Bathe, 1996).

De acordo com Zienkiewicz & Taylor (2000) o método geralmente convergirá em uma razão de convergência menor (geralmente a norma do residual $\{f\}$ tem convergência

assimptótica linear em vez de quadrática no método de Newton-Raphson completo), mas algumas dificuldades mencionadas anteriormente para o método de Newton-Raphson desaparecem. Contudo, algumas dificuldades podem surgir com o método quando a tangente usada tem inclinação oposta a da solução corrente (como mostrada pelas regiões com diferentes curvaturas na Figura 19).

FIGURA 19 – POSSIBILIDADE DE MÚLTIPLAS SOLUÇÕES.



Fonte: (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

4.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

A adoção de uma estratégia baseada em métodos iterativos requer a utilização de um critério que estabeleça o fim do processo de iteração (Roehl, 1987).

A solução obtida em cada iteração deve ser verificada observando se ela convergiu com a tolerância admissível ou se ela divergiu. Se as tolerâncias de convergência são muito grandes, resultados imprecisos podem ser obtidos, e se as tolerâncias são apertadas, um esforço computacional muito grande pode ser gasto para se obterem soluções precisas. A verificação ineficaz do critério de convergência pode terminar a iteração quando a solução não é divergente ou forçar a iteração procurar por uma solução inatingível (Bathe, 1996).

Nesta seção serão discutidos sucintamente três critérios de convergência que serão apresentados a seguir.

No final de cada iteração, o deslocamento buscado na configuração correspondente $t+\Delta t$ é desejado que fique próximo da solução real dentro de uma certa tolerância. O primeiro critério de convergência baseia-se nos deslocamentos, e é dado por (Bathe, 1996):

$$\frac{\|\{\Delta U^{(i)}\}\|_2}{\|\{^{t+\Delta t}U\}\|_2} \leq tol \quad (4.24)$$

onde tol é a tolerância de convergência dos deslocamentos, $\|\{\Delta U^{(i)}\}\|_2 = \sum_{j=1}^{nigl} (\Delta U^{(i)})^2$ é a norma Euclideana do vetor $\{\Delta U^{(i)}\}$ e $\|\{^{t+\Delta t}U\}\|_2 = \sum_{j=1}^{nigl} (^{t+\Delta t}U)^2$ é a norma Euclideana do vetor $\{^{t+\Delta t}U\}$. Na equação (4.24), o vetor $\{^{t+\Delta t}U^{(i)}\}$ é desconhecido e é determinado como uma aproximação de $\{^{t+\Delta t}U\}$.

Em algumas análises, quando a convergência é avaliada utilizando-se a equação (4.24) com $\{^{t+\Delta t}U^{(i)}\}$, a solução atual pode estar longe do valor obtido. Isto pode ocorrer quando os deslocamentos mudam pouco em cada iteração, mas continuam a variar por várias iterações. Um exemplo deste comportamento é o de análises de estruturas que aumentam sua rigidez com os deslocamentos.

O segundo critério de convergência é fundamentado na norma do vetor de carga desbalanceado, dado por:

$$\|\{\{^{t+\Delta t}R\} - \{^{t+\Delta t}F^{(i)}\}\|_2 \leq tol \|\{\{^{t+\Delta t}R\} - \{^tF\}\|_2 \quad (4.25)$$

Este critério apresenta como dificuldade à não inclusão dos deslocamentos nos termos da equação (4.25). Isto pode ocorrer no caso de estruturas em plastificação com baixo módulo de encruamento, embora os vetores de cargas desbalanceados possam ser pequenos, os deslocamentos podem estar errados.

O último critério de convergência é baseado na comparação do incremento de energia interna durante cada iteração com o incremento de energia interna inicial. A convergência é atingida quando:

$$\{\Delta U^{(i)}\}^T (\{\{^{t+\Delta t}R\} - \{^{t+\Delta t}F^{(i-1)}\}\}) \leq tol (\{\Delta U^{(1)}\}^T (\{\{^{t+\Delta t}R\} - \{^tF\}\})) \quad (4.26)$$

Este trabalho adota o terceiro critério de convergência por conter ambos os deslocamentos e as forças, não apresentando assim as deficiências apontadas nos outros dois critérios anteriores.

4.4 ATUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA

De acordo com Roehl (1987) cada elemento é orientado no espaço por um sistema de eixos locais, composto por três vetores ortogonais entre si $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, e $\{x_3\}$. Estes vetores são atualizados a cada passo de tempo ou carga e tem origem no nó inicial i do elemento. O eixo longitudinal da barra x_1 é denotado pelo vetor $\{x_1\}$ e aponta na direção final da mesma, nó j ; o vetor $\{x_2\}$ define o eixo perpendicular ao vetor $\{x_1\}$ no plano do elemento; o terceiro eixo local é definido pelo vetor $\{x_3\}$ e é ortogonal aos eixos x_1 e x_2 .

A partir destes três vetores, pode-se montar a matriz de transformação de coordenadas globais para locais definida na seção 3.2.3.

A transformação do sistema local para o global no sistema Lagrangeano Atualizado é baseada na configuração deformada da estrutura no início de cada passo. A matriz de rotação é determinada em função dos deslocamentos, assim as coordenadas e os eixos locais têm que ser atualizados após cada incremento de carga. A atualização das coordenadas é realizada diretamente somando-se as translações longitudinais e transversais às respectivas coordenadas iniciais.

5. EXEMPLOS

Neste capítulo são efetuadas simulações considerando o efeito solo-estrutura, a pressão interna constante ao longo da tubulação, o efeito da temperatura, e deslocamentos impostos nos apoios da estrutura.

A estrutura em questão é analisada numericamente empregando-se o Método de Elementos Finitos de acordo com a metodologia apresentada neste trabalho.

São efetuados dois tipos de análises: linear e não-linear. Na solução das equações não-lineares é empregado o método de Newton-Raphson Modificado. Essas soluções são obtidas por um processo incremental e iterativo, com convergência para o equilíbrio em cada passo.

Os exemplos 1 e 3 foram baseados na dissertação de mestrado apresentada por Mejía (2003). As soluções obtidas nestes exemplos são discutidas e comparadas com as obtidas no programa INTERA 3D e no programa ANSYS versão 8.0.

No exemplo 1, o comportamento do duto é estudado levando-se em conta o efeito da interação solo-duto através do emprego de molas de solo transversais. Para o mesmo exemplo, uma segunda análise é realizada considerando a não-linearidade geométrica, e um comparativo é estabelecido entre ambas às análises linear e não-linear nos deslocamentos do duto.

O duto sujeito a deformações plásticas originadas por cargas momento aplicadas nos apoios é analisado no exemplo 2.

No terceiro exemplo são realizadas análises não-lineares de uma linha de duto enterrado numa encosta, considerando a interação solo-duto através de molas de solo verticais e longitudinais, e o efeito da pressão interna constante na tubulação. O comportamento do duto é estudado através de análises não-lineares considerando as não-linearidades material e geométrica.

Uma linha de duto enterrado em encosta é analisada linearmente no exemplo 4. Nesse exemplo o duto é submetido: a carregamentos externos originados pelo solo e pela sobrecarga, pela pressão interna constante na tubulação, pela temperatura e por um deslocamento prescrito no apoio extremo. A interação solo-duto é considerada através de molas de solo de base e de levantamento.

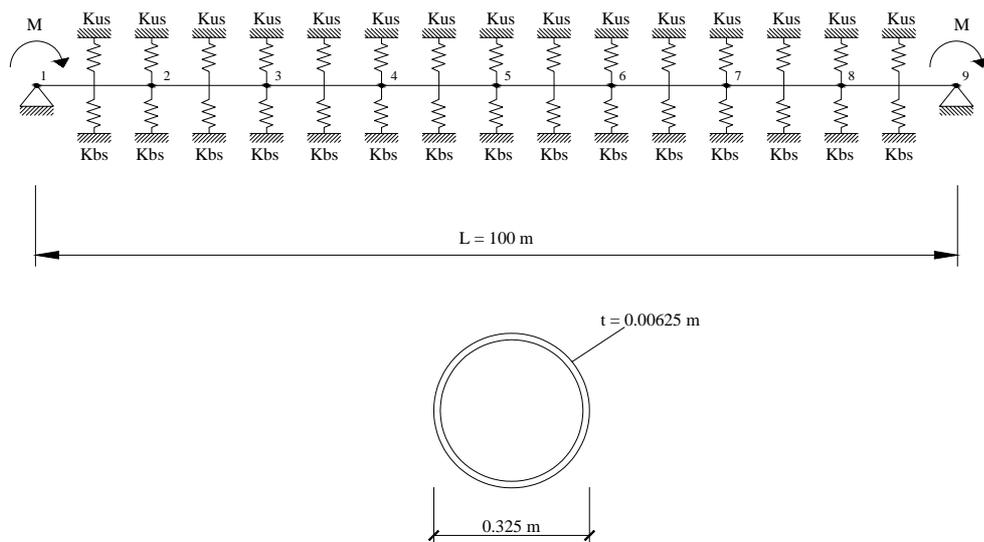
O último exemplo consiste de duas análises: na primeira é efetuada uma análise linear de uma linha de duto enterrado horizontalmente, considerando carregamentos verticais e laterais, a temperatura, a pressão interna, e a interação solo-duto através das molas de base, de

levantamento, lateral esquerda e lateral direita. Na segunda é efetuada uma análise não-linear considerando a não-linearidade de material (elastoplasticidade) e a interação solo-duto. Nesta segunda análise, o duto é solicitado por carregamentos verticais e pela temperatura.

5.1 EXEMPLO 1 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO DUTO LEVANDO-SE EM CONTA O EFEITO ENTRE O MESMO E O SOLO CIRCUNDANTE.

Este exemplo é apresentado em Mejía (2003). O modelo consiste de um duto bi-apoiado com uma carga momento M_z aplicada em torno do eixo x_3 nos apoios (Figura 20). A diferença na resposta mecânica do duto entre as análises linear elástica e não linear geométrica são apresentadas. A interação entre o duto e o solo circundante representada por molas é considerada através das seguintes simulações: o efeito das molas de solo de base e de levantamento não é considerado ($K_{BS} = 0$ e $K_{US} = 0$); as contribuições das molas de solo de base e de levantamento são consideradas ($K_{BS} \neq 0$ e $K_{US} \neq 0$); e somente as molas de solo de base são consideradas ($K_{BS} \neq 0$ e $K_{US} = 0$).

FIGURA 20 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.



Os resultados obtidos para as simulações realizadas com o modelo solo-duto no programa INTERA 3D são confrontados com os obtidos no programa ANSYS e com os resultados apresentados por Mejía (2003).

Para estas simulações foram considerados o módulo de elasticidade E e o coeficiente de *Poisson* ν para o elemento viga-duto, como sendo, respectivamente 205 GPa e 0.25. As propriedades geométricas da seção são apresentadas na Tabela 1.

TABELA 1 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO DO DUTO.

Propriedades geométricas do duto.	
Momento de Inércia I_{zz} (m⁴)	7.9516531 10 ⁻⁵
Área da seção transversal (m²)	6.2586416 10 ⁻³
Diâmetro externo (m)	0.325
Diâmetro interno (m)	0.3125
Espessura (m)	0.00625

Na simulação do solo, as rizezas das molas de solo de base e de levantamento foram determinadas supondo $K_{BS} = K_{US} = \frac{625EI}{L^4}$.

Nas Tabelas 3, 4 e 5 são apresentados os valores dos deslocamentos (v^j) e as rotações (θ_z^j) nos nós obtidos da análise linear elástica linear. O índice superior direito para os deslocamentos e para as rotações denota a posição do nó. O diagrama de deslocamentos verticais do duto levando-se em conta ou não o efeito das molas de solo é mostrado na Figura 21.

No programa ANSYS e no programa INTERA 3D, o duto foi discretizado por dezesseis elementos de mesmo comprimento. O elemento de viga utilizado da biblioteca do ANSYS foi o BEAM 44 (3-D Elastic Tapered Unsymmetric Beam). Algumas características desse elemento são descritas a seguir:

- *3-D Elastic Tapered Unsymmetric Beam (BEAM 44)* – é um elemento uniaxial com capacidade para a tração, compressão, torção e flexão. O elemento tem seis graus de liberdade em cada nó: translações nodais nas direções x_1 , x_2 e x_3 , e rotações em torno dos eixos nodais x_1 , x_2 e x_3 . Este elemento permite uma diferença assimétrica na geometria em cada extremidade. Podem-se fazer análises considerando a rigidez da fundação elástica (definida como a pressão requerida para produzir uma deflexão

unitária normal da fundação); deformações iniciais na direção x_j ; e carregamentos como a temperatura (no nó ou no elemento) e a pressão (linear ao longo do comprimento).

A influência das molas de solo no comportamento mecânico do duto pode ser observada na Figura 21. Na simulação em que é considerada a rigidez das molas de solo de base e de levantamento (curva em vermelho), o duto apresenta valores de deslocamentos verticais inferiores aos obtidos na simulação sem considerar a rigidez das mesmas (curva em azul). Este comportamento do duto é decorrente da contribuição da rigidez das molas de solo de base e de levantamento na rigidez global da estrutura. Como as molas de solo de base têm capacidade de transmitir forças somente na compressão, parte do comprimento do duto é influenciada por estas molas na última simulação, conforme pode ser verificada na curva em marrom. No trecho restante, o duto desconecta-se das molas de solo acarretando deslocamentos verticais maiores.

As tensões máximas no duto obtidas da análise linear elástica nas três simulações não atingem a tensão de escoamento adotada igual a 420 MPa.

FIGURA 21 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO PARA A ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA.

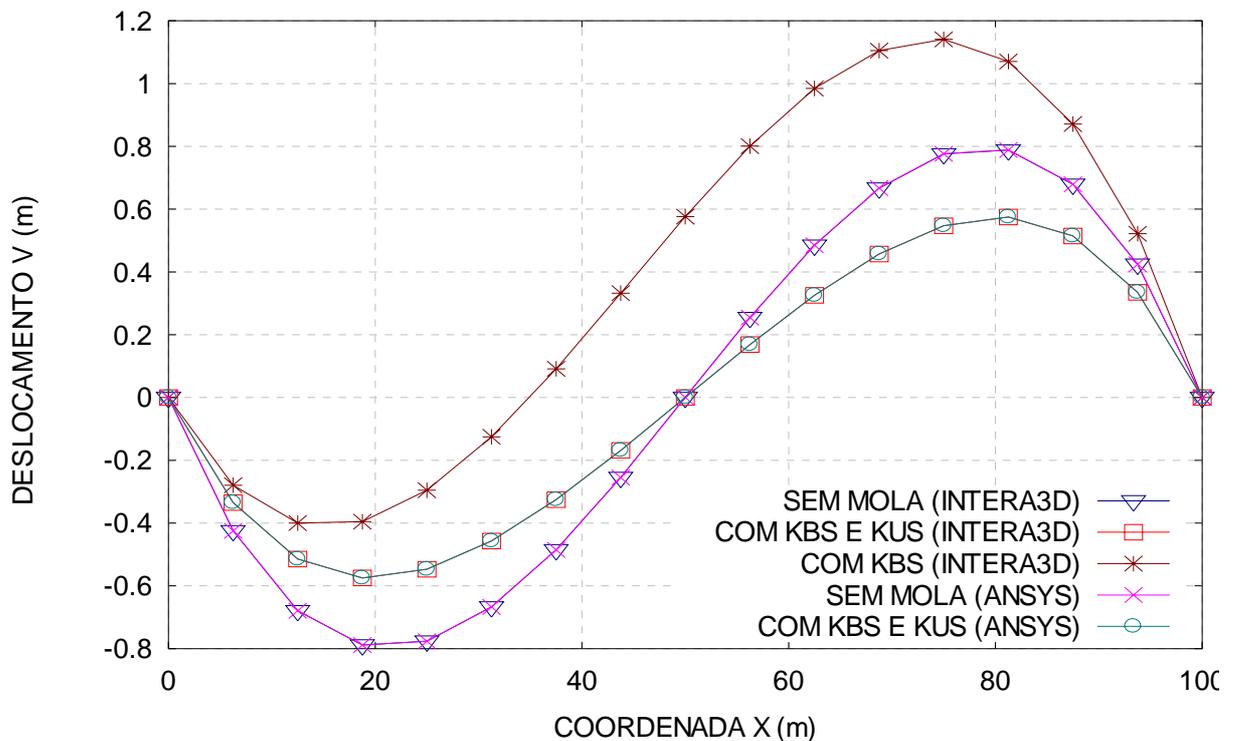


TABELA 2 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} = 0$) E DE LEVANTAMENTO ($K_{US} = 0$).

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v^j (%)
	v^j (m)	θz^j (rad)	v^j (m)	θz^j (rad)	
1	0.00000	$-0.82818 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.82811 \cdot 10^{-1}$	0.00
2	-0.67936	$-0.28469 \cdot 10^{-1}$	-0.67931	$-0.28466 \cdot 10^{-1}$	$0.7 \cdot 10^{-2}$
3	-0.77641	$0.10352 \cdot 10^{-1}$	-0.77636	$0.10351 \cdot 10^{-1}$	$0.6 \cdot 10^{-2}$
4	-0.48526	$0.33645 \cdot 10^{-1}$	-0.48522	$0.33642 \cdot 10^{-1}$	$0.8 \cdot 10^{-2}$
5	0.00000	$0.41409 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$0.41406 \cdot 10^{-1}$	0.00
6	0.48526	$0.33645 \cdot 10^{-1}$	0.48522	$0.33642 \cdot 10^{-1}$	$0.8 \cdot 10^{-2}$
7	0.77641	$0.10352 \cdot 10^{-1}$	0.77636	$0.10351 \cdot 10^{-1}$	$0.6 \cdot 10^{-2}$
8	0.67936	$-0.28469 \cdot 10^{-1}$	0.67931	$-0.28466 \cdot 10^{-1}$	$0.7 \cdot 10^{-2}$
9	0.00000	$-0.82818 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.82811 \cdot 10^{-1}$	0.00

TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} \neq 0$) E DE LEVANTAMENTO ($K_{US} \neq 0$).

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v^j (%)
	v^j (m)	θz^j (rad)	v^j (m)	θz^j (rad)	
1	0.00000	$-0.67805 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.68062 \cdot 10^{-1}$	0.00
2	-0.51174	$-0.18126 \cdot 10^{-1}$	-0.514348	$-0.18252 \cdot 10^{-1}$	0.51
3	-0.54320	$0.10042 \cdot 10^{-1}$	-0.546280	$0.100822 \cdot 10^{-1}$	0.57
4	-0.32265	$0.23293 \cdot 10^{-1}$	-0.324563	$0.234267 \cdot 10^{-1}$	0.59
5	0.00000	$0.27037 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$0.271990 \cdot 10^{-1}$	0.00
6	0.32265	$0.23293 \cdot 10^{-1}$	0.324563	$0.234267 \cdot 10^{-1}$	0.59
7	0.54320	$0.10042 \cdot 10^{-1}$	0.546280	$0.100821 \cdot 10^{-1}$	0.57
8	0.51174	$-0.18126 \cdot 10^{-1}$	0.514348	$-0.18252 \cdot 10^{-1}$	0.51
9	0.00000	$-0.67805 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.68063 \cdot 10^{-1}$	0.00

TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA CONSIDERANDO SOMENTE A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} = 0$).

Nó (j)	INTERA 3D	
	v (m)	θ_z (rad)
1	0.00000	$-0.594836 \cdot 10^{-1}$
2	-0.40263789	$-0.861803 \cdot 10^{-2}$
3	-0.2991638	$0.2222131 \cdot 10^{-1}$
4	$0.87569 \cdot 10^{-1}$	$0.3725408 \cdot 10^{-1}$
5	0.57330466	$0.3812226 \cdot 10^{-1}$
6	0.9822850	$0.2498350 \cdot 10^{-1}$
7	1.13961527	$-0.214175 \cdot 10^{-1}$
8	0.8704640	$-0.432535 \cdot 10^{-1}$
9	0.00000	$-0.983518 \cdot 10^{-1}$

O elemento BEAM 44 utilizado para discretizar o duto no programa ANSYS considera a rigidez das molas de solo verticais tanto na compressão quanto na tração. Portanto, na simulação do duto em que considera a influência das molas de solo de base e não as de levantamento, os resultados para os deslocamentos foram determinados somente no programa INTERA 3D, conforme pode ser verificada na Tabela 4.

Na análise não-linear geométrica o duto foi discretizado utilizando-se 16 elementos de mesmo comprimento. Nas simulações numéricas efetuadas com a formulação proposta neste trabalho, a carga momento de intensidade 81000 N m foi aplicada considerando 10 incrementos de carga e a tolerância de convergência é adotada igual a 0.001. A seção transversal do duto foi dividida em 50 faixas de área para a obtenção dos esforços internos nos pontos internos de Gauss em cada elemento.

A descrição cinemática permite grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações, e se dá com base na formulação Lagrangeana Total.

No programa ANSYS o duto foi discretizado por dezesseis elementos BEAM 44 para a análise não-linear e o carregamento foi aplicado considerando 10 incrementos de carga.

Os resultados da análise não-linear geométrica efetuada nos programas ANSYS e INTERA 3D são apresentados nas Tabelas 6, 7 e 8 bem como a diferença relativa entre as soluções.

Na Figura 22 é apresentado um diagrama de deslocamentos verticais comparando a diferença na resposta mecânica do duto, quando na análise não-linear estática é adicionado o efeito da não-linearidade geométrica.

O efeito da não-linearidade geométrica para este problema tem grande influência no comportamento do duto, já que o duto apresenta um vão livre de 100 metros. A incorporação desse efeito na análise não-linear resulta em valores para os deslocamentos, deformações e tensões diferentes da solução da análise anterior que não adota este efeito no modelo.

Esta alteração no comportamento do duto decorre do aumento da rigidez global da estrutura devido à contribuição da parcela da matriz de rigidez geométrica, acarretando deslocamentos verticais menores com relação à análise anterior (análise linear elástica).

TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA SEM CONSIDERAR OS EFEITOS DAS MOLAS DE SOLO ($K_{BS} = 0$ E $K_{US} = 0$).

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v^j (%)
	v^j (m)	θz^j (rad)	v^j (m)	θz^j (rad)	
1	0.00000	$-0.44284 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.44519 \cdot 10^{-1}$	0.00
2	-0.27061	$-0.59483 \cdot 10^{-2}$	-0.271772	$-0.59039 \cdot 10^{-2}$	0.42
3	-0.25219	$0.66020 \cdot 10^{-2}$	-0.252280	$0.668780 \cdot 10^{-2}$	0.036
4	-0.13995	$0.10580 \cdot 10^{-1}$	-0.139516	$0.105763 \cdot 10^{-1}$	0.31
5	0.00000	$0.11486 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$0.114362 \cdot 10^{-1}$	0.00
6	0.13995	$0.10580 \cdot 10^{-1}$	0.139516	$0.105763 \cdot 10^{-1}$	0.31
7	0.25219	$0.66020 \cdot 10^{-2}$	0.252280	$0.668780 \cdot 10^{-2}$	0.036
8	0.27061	$-0.59483 \cdot 10^{-2}$	0.271772	$-0.59039 \cdot 10^{-2}$	0.42
9	0.00000	$-0.44284 \cdot 10^{-1}$	0.00000	$-0.44519 \cdot 10^{-1}$	0.00

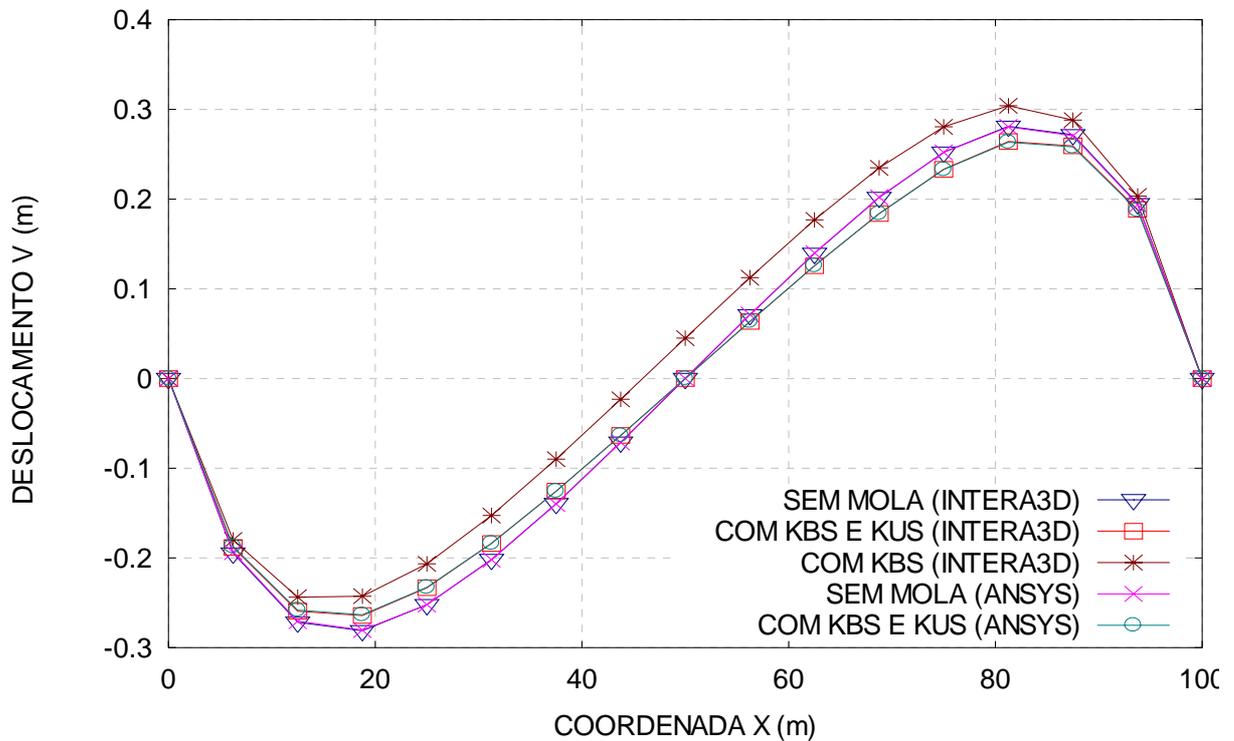
TABELA 6 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA CONSIDERARANDO OS EFEITOS DAS MOLAS DE SOLO DE BASE E DE LEVANTAMENTO ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} \neq 0$).

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v^j (%)
	v^j (m)	θz^j (rad)	v^j (m)	θz^j (rad)	
1	0.0000	$-0.43287 \cdot 10^{-1}$	0.0000	$-0.43502 \cdot 10^{-1}$	0.00
2	-0.25822	$-0.50118 \cdot 10^{-2}$	-0.259386	$-0.50152 \cdot 10^{-2}$	0.45
3	-0.23288	$0.66929 \cdot 10^{-2}$	-0.233267	$0.676610 \cdot 10^{-2}$	0.17
4	-0.12575	$0.96904 \cdot 10^{-2}$	-0.125652	$0.972152 \cdot 10^{-2}$	0.078
5	0.0000	$0.10190 \cdot 10^{-1}$	0.0000	$0.101958 \cdot 10^{-1}$	0.00
6	0.12575	$0.96904 \cdot 10^{-2}$	0.125652	$0.972152 \cdot 10^{-2}$	0.078
7	0.23288	$0.66929 \cdot 10^{-2}$	0.233267	$0.676610 \cdot 10^{-2}$	0.17
8	0.25822	$-0.50118 \cdot 10^{-2}$	0.259386	$-0.50152 \cdot 10^{-2}$	0.45
9	0.0000	$-0.43287 \cdot 10^{-1}$	0.0000	$-0.43502 \cdot 10^{-1}$	0.00

TABELA 7 – RESULTADOS OBTIDOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA CONSIDERARANDO SOMENTE A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO DE BASE ($K_{BS} \neq 0$ E $K_{US} = 0$).

Nó (j)	INTERA 3D	
	v^j (m)	θz^j (rad)
1	0.0000	$-0.421252 \cdot 10^{-1}$
2	-0.243786	$-0.396929 \cdot 10^{-2}$
3	-0.206725	$0.752283 \cdot 10^{-2}$
4	-0.0899706	$0.1045707 \cdot 10^{-1}$
5	0.0449343	$0.1090085 \cdot 10^{-1}$
6	0.1768760	$0.9915935 \cdot 10^{-2}$
7	0.2805811	$0.5877017 \cdot 10^{-2}$
8	0.2881133	$-0.703647 \cdot 10^{-2}$
9	0.00000	$-0.459344 \cdot 10^{-1}$

FIGURA 22 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA.

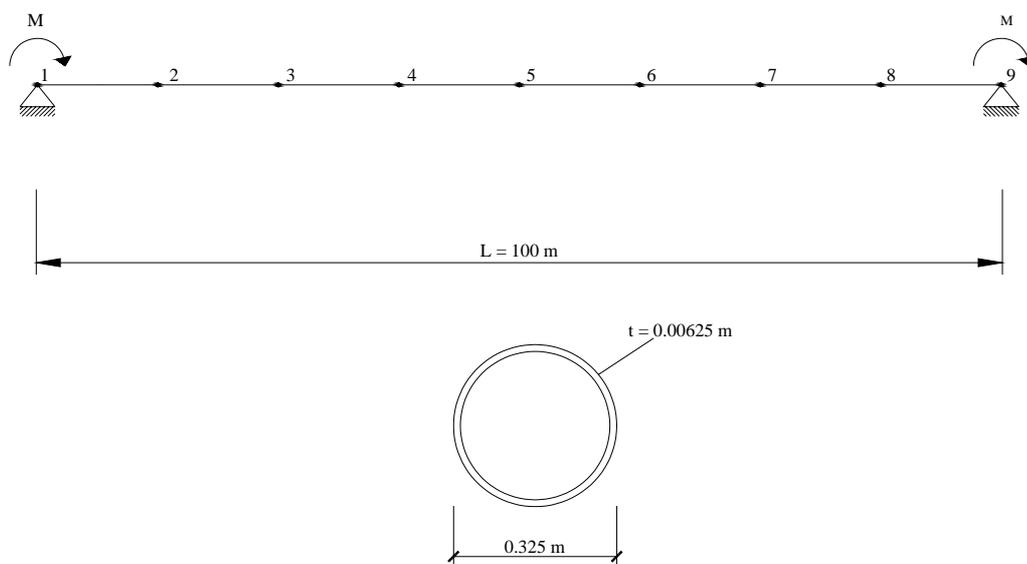


5.2 EXEMPLO 2 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO DUTO QUANDO CARGAS MOMENTO APLICADAS NOS APOIOS OCASIONAM DEFORMAÇÕES AXIAIS PLÁSTICAS.

Este exemplo faz uma análise do comportamento do duto quando o material apresenta deformações plásticas. O material do duto tem comportamento elástico-plástico com endurecimento isotrópico, isto é, o diagrama de tensão-deformação do material apresenta uma zona elástica linear seguida por outra zona linear plástica com inclinação igual a E_T . A tensão de escoamento S_y e o módulo tangente E_T são adotados iguais a 420 MPa e 75000 MPa, respectivamente.

O modelo para a análise consiste em um duto bi-apoiado com dois momentos M_z aplicados em torno do eixo x_3 sobre os apoios, conforme é mostrado na Figura 23.

FIGURA 23 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.



O módulo de elasticidade E e o coeficiente de *Poisson* ν para o elemento viga-duto são considerados iguais a 205000 MPa e 0.25, respectivamente. As propriedades geométricas da seção são apresentadas na Tabela 9.

O modelo apresentado na Figura 25 é analisado considerando a não-linearidade material, através da simulação efetuada no programa INTERA 3D e ANSYS.

No programa INTERA 3D, o duto é discretizado por quatro elementos de mesmo comprimento. No processo incremental iterativo, a solução foi obtida para uma tolerância de convergência igual a 10^{-3} e o carregamento ($M = 250000$ N m) foi aplicado utilizando-se 100 incrementos de carga. As forças internas na seção transversal foram obtidas com a divisão da mesma em 50 faixas de área.

Pela análise realizada no programa ANSYS, o elemento utilizado da sua biblioteca é o *2-D Plastic Beam (BEAM23)*. Este elemento apresenta as seguintes características:

- *2-D Plastic Beam (BEAM23)* – é um elemento uniaxial com capacidade para tração, compressão e flexão. O elemento tem três graus de liberdade em cada nó: translações nodais nas direções x_1 e x_2 e rotações em torno do eixo nodal x_{36} . Como características especiais, o elemento permite fazer análises considerando a plasticidade, *creep*, grandes deslocamentos e grandes deformações.

TABELA 8 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO DO DUTO.

Propriedades geométricas do duto.	
Momento de Inércia I_{zz} (m⁴)	7.9516531 10 ⁻⁵
Área da seção transversal (m²)	6.2586416 10 ⁻³
Diâmetro externo (m)	0.325
Diâmetro interno (m)	0.3125
Espessura (m)	0.00625

Na Tabela 9 são apresentados os resultados para os deslocamentos (v^j) e as rotações (θ_z^j) obtidos das análises não-lineares realizadas nos programas INTERA 3D e ANSYS. Também é apresentada a diferença relativa entre as soluções obtidas em ambos os programas.

Na Figura 24 é mostrado o diagrama de deslocamento vertical para duto sujeito às cargas momento de intensidade igual a 250000 N m aplicadas nos apoios. Este gráfico mostra também a diferença na resposta do duto com relação ao tipo de análise adotado para a solução do problema. Os dois tipos de análises considerados são: a análise linear elástica e a análise não-linear elastoplástica.

As tensões longitudinais máximas de tração para as análises linear e não-linear são apresentadas na Tabela 10. Estas tensões máximas ocorrem nos apoios para um valor $x_2 = \pm 0.1625$ m na seção transversal do duto. A diferença relativa entre os valores das tensões máximas obtidas pelos programas é determinada em função do número de divisões da seção transversal em faixas de área para o cálculo dos esforços internos no programa INTERA 3D.

FIGURA 24 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.

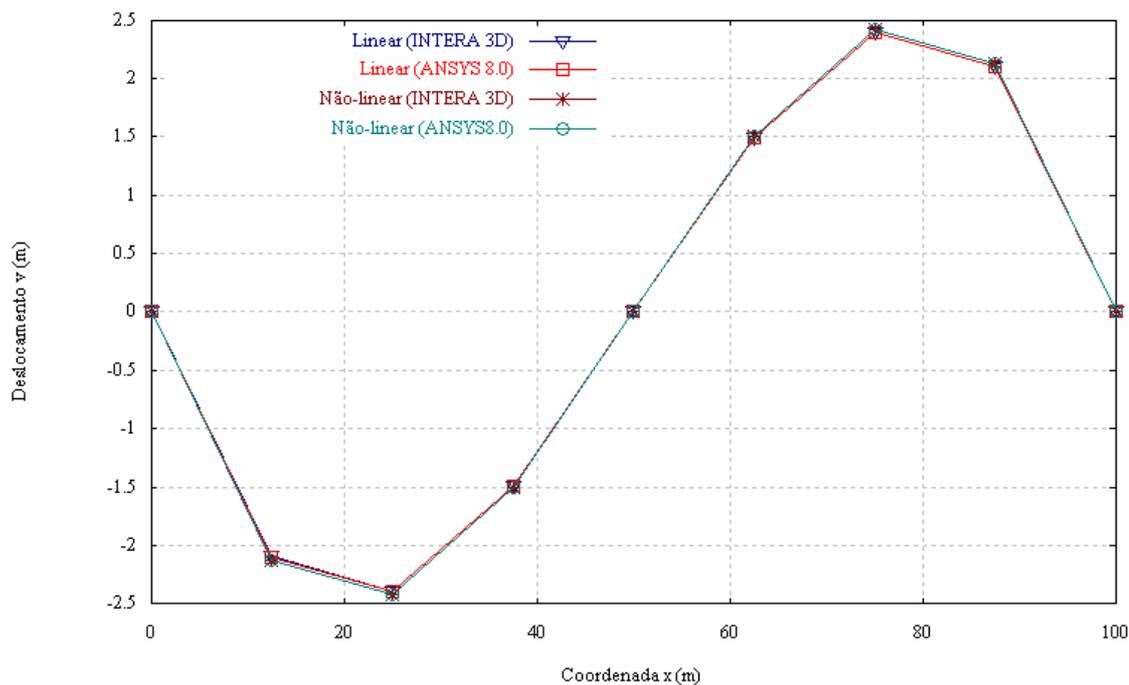


TABELA 9 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E ROTAÇÕES NOS NÓS PARA A SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO DIVIDIDA EM 50 FAIXAS DE ÁREA.

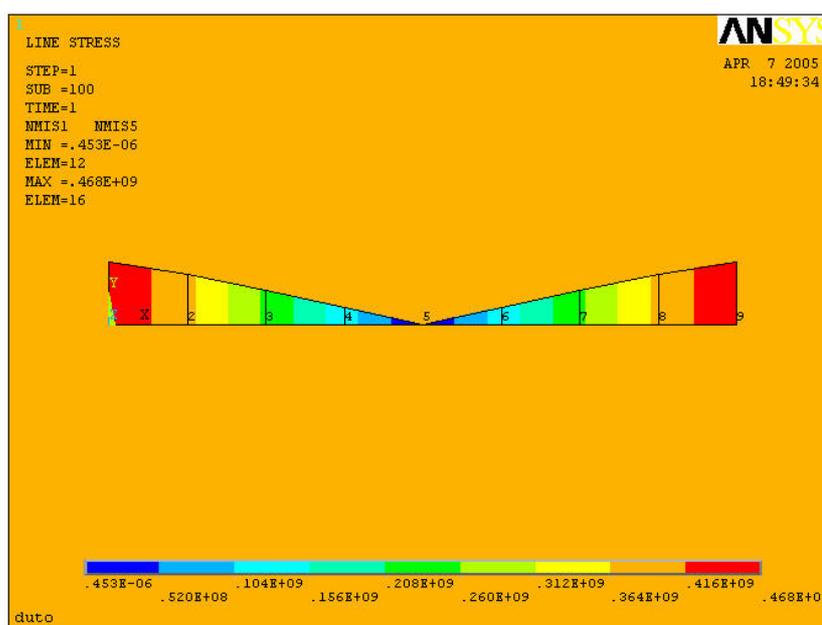
Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Erro relativo para v^j (%)
	v^j (m)	θz^j (rad)	v^j (m)	θz^j (rad)	
1	0.00000	-0.26377	0.00000	-0.268122	0.00
2	-2.1224	$-0.87240 \cdot 10^{-1}$	-2.12526	$-0.869409 \cdot 10^{-1}$	0.13
3	-2.4138	$0.32623 \cdot 10^{-1}$	-2.41506	$0.327222 \cdot 10^{-1}$	0.05
4	-1.5065	0.10454	-1.50697	0.104587	0.03
5	0.0000	0.12851	0.0000	0.128542	0.00
6	1.5065	0.10454	1.50697	0.104587	0.03
7	2.4138	$0.32623 \cdot 10^{-1}$	2.41506	$0.327222 \cdot 10^{-1}$	0.05
8	2.1224	$-0.87240 \cdot 10^{-1}$	2.12526	$-0.869409 \cdot 10^{-1}$	0.13
9	0.00000	-0.26377	0.00000	-0.268122	0.00

TABELA 10 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO OBTIDA PARA O DUTO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE DIVISÕES EM FAIXAS DE ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL.

Tipo de Análise	ANSYS	INTERA 3D		Diferença relativa (%)
	$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	Número de faixas	$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	
Linear	0.51090 10 ⁹	20	0.489501 10 ⁹	4.19
		50	0.500507 10 ⁹	2.03
		70	0.503753 10 ⁹	1.40
Não-linear	0.46795 10 ⁹	20	-	-
		50	0.4588901 10 ⁹	1.93
		70	0.4604254 10 ⁹	1.61

Na Figura 25 são mostradas as tensões axiais máximas ao longo do duto obtidas no programa ANSYS. Podemos constatar que os valores das tensões decrescem do apoio para o centro do vão.

FIGURA 25 – DIAGRAMA DE TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO DO DUTO DEFORMADO.

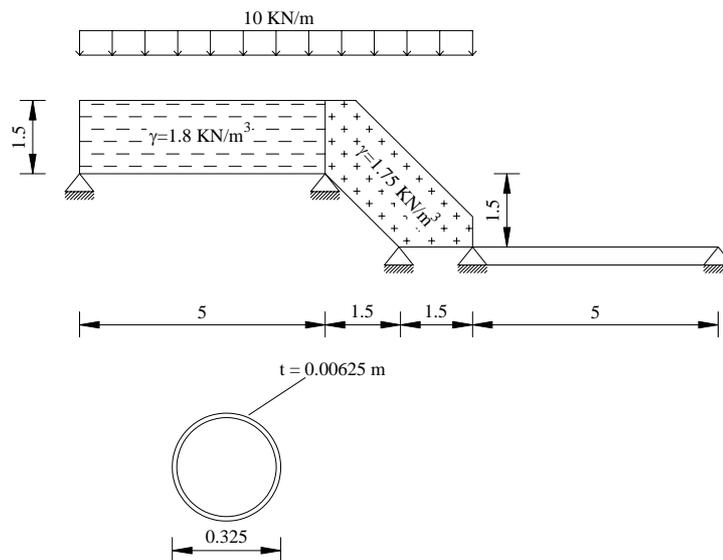


Fonte: ANSYS.

5.3 EXEMPLO 3 – LINHA DE DUTO ENTERRADO NUMA ENCOSTA SUBMETIDA AO CARREGAMENTO ORIGINADO PELO SOLO, SOBRECARGA EXTERNA E CONSIDERANDO TAMBÉM O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA.

Este exemplo foi retirado da dissertação de mestrado apresentada por Mejía (2003). O comportamento do duto é analisado considerando um carregamento distribuído devido ao solo circundante e por uma sobrecarga externa. A interação entre o duto e o solo é simulada através de molas de solo de base, de levantamento e longitudinais, cujos os coeficientes de rigidez de mola são $K_{BS} = \frac{1000EI}{L^4}$, $K_{US} = \frac{750EI}{L^4}$ e $K_{AS} = \frac{100EI}{L^4}$, respectivamente. A pressão interna constante de 9 MPa na tubulação também é considerada. A Figura 26 mostra o modelo para a análise e a Tabela 12 mostra os carregamentos a que o duto é solicitado.

FIGURA 26 – MODELO DO DUTO PARA A ANÁLISE.



Para o problema proposto neste exemplo é feito um estudo do comportamento do duto adotando-se dois tipos de análise: análise linear elástica e análise não-linear considerando a não-linearidade material (elastoplasticidade) e geométrica.

As simulações computacionais com o modelo de solo-duto são efetuadas nos programas ANSYS e INTERA 3D e as soluções (deslocamentos nodais e tensões) são confrontadas.

O duto foi discretizado por 22 elementos no programa INTERA 3D e por 22 elementos BEAM 44 no programa ANSYS.

No processo iterativo incremental, o duto foi analisado no programa INTERA 3D dividindo-se a carga distribuída em 10 incrementos de carga e as forças internas no elemento foram determinadas seccionando a seção transversal do duto em 50 faixas de área. A tolerância de convergência para a análise é adotada igual a 10^{-3} .

A pressão exercida pelo solo sobre o duto foi determinada em função da profundidade de aterro indicada na Figura 26 e pelo diâmetro externo do duto, conforme a expressão a seguir:

$$P_{solo} = \gamma h D_e \quad (5.1)$$

onde P_{solo} é a pressão exercida pelo solo em N/m, γ é o peso específico do solo em N/m³, h é a profundidade de aterro e D_e é o diâmetro externo do duto em m. Os carregamentos em que o duto é solicitado são descritos na Tabela 11.

Os valores do módulo de elasticidade E e do coeficiente de *Poisson* ν para o elemento solo-duto são 205000 MPa e 0.25, respectivamente. As propriedades geométricas da seção transversal são apresentadas na Tabela 12.

TABELA 11 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO.

Trecho	Solo 1 ($\gamma = 1.8$ KN/m ³) (N/m)	Solo 2 ($\gamma = 1.75$ KN/m ³) (N/m)	Sobrecarga (N/m)	Pressão interna (MPa)
0 a 5m	877.5	0	10000	9
5m a 6.5m	0	853.125	10000	9
6.5m a 8m	0	853.125 e 0	10000	9
8m a 13m	0	0	0	9

TABELA 12 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.

Propriedades geométricas do duto.	
Momento de Inércia I_{zz} (m ⁴)	7.9516531 10^{-5}
Área da seção transversal (m ²)	6.2586416 10^{-3}
Diâmetro externo (m)	0.325
Diâmetro interno (m)	0.3125
Espessura (m)	0.00625

O duto assume um modelo constitutivo elastoplástico, com o escoamento segundo o critério de *von Mises* com endurecimento isotrópico. A tensão de escoamento S_y e o módulo tangente E_T são adotados iguais a 420 MPa e 75000 MPa, respectivamente.

Os deslocamentos nodais verticais (v^j) e as rotações (θ_z^j) são apresentados nas Tabelas 14 e 15 para as análises linear e não-linear respectivamente. Na Figura 27 é apresentado um diagrama de deslocamentos verticais e na Figura 28 é apresentado um diagrama de deslocamentos longitudinais. As curvas obtidas em ambos os diagramas são em função do tipo de análise adotada.

O duto está restringido nas extremidades devido aos apoios não permitirem translação na direção do eixo x_l . Conseqüentemente, quando a pressão interna constante atua nas paredes do duto, surgem tensões longitudinais adicionais devido ao efeito de *Poisson*.

A Tabela 13 mostra as tensões longitudinais decorrentes do carregamento distribuído ao longo da estrutura e as tensões devido à pressão interna. As tensões longitudinais máximas ocorrem na coordenada $x_l = 5$ m (nó 11 do modelo). Porém, as tensões longitudinais não atingem o valor da tensão de escoamento. Conseqüentemente o material apresenta um comportamento elástico linear.

FIGURA 27 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO

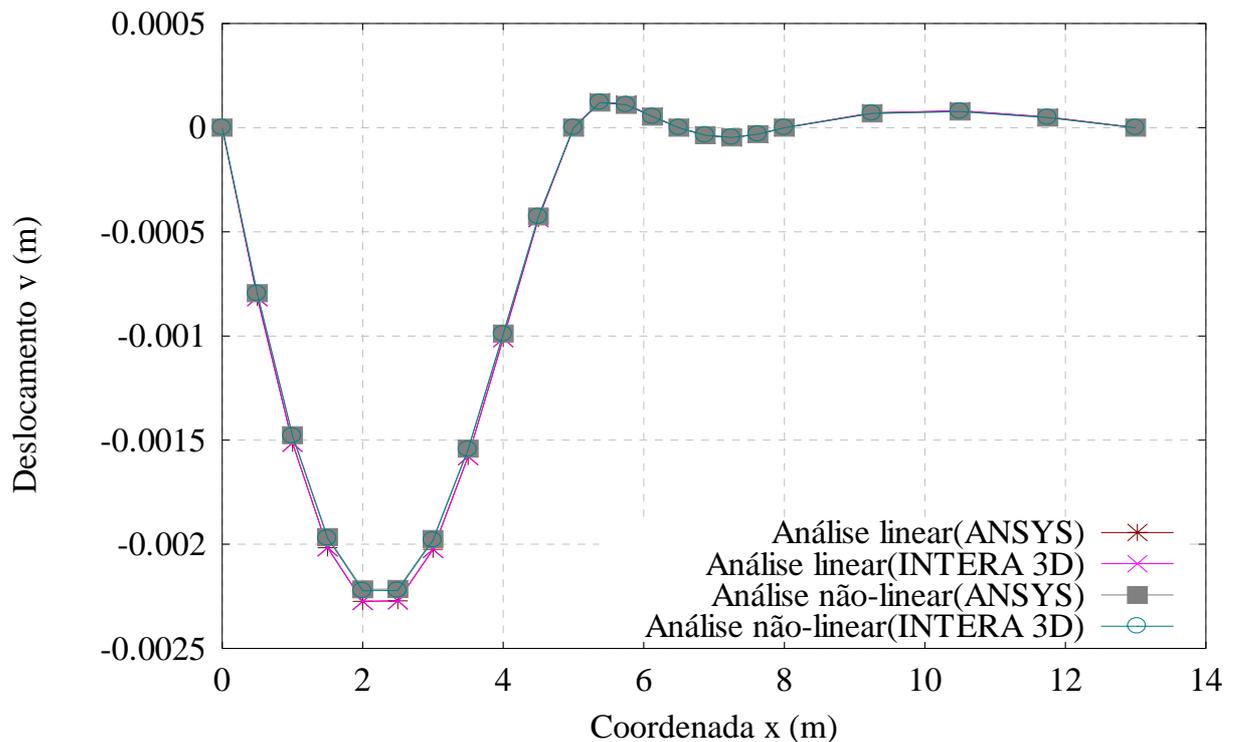


FIGURA 28 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO LONGITUDINAL DO DUTO.

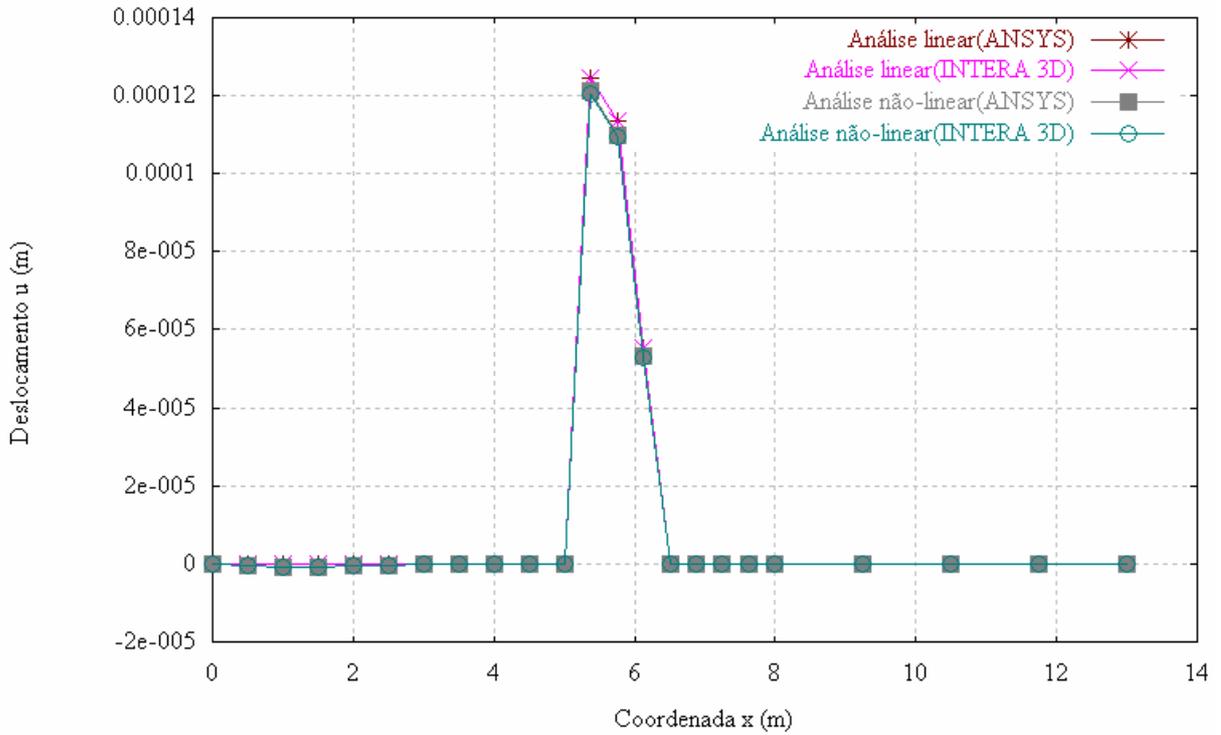


TABELA 13 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO DEVIDO AO CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO E A PRESSÃO INTERNA

Análise linear						
Nó	Tensões longitudinais (N/m²)					
	ANSYS			INTERA 3D		
	S_{flexão}	S_θ	S_{máx}	S_{flexão}	S_θ	S_{máx}
11	0.43154 10 ⁸	0.57375 10 ⁸	1.00529 10 ⁸	0.42288 10 ⁸	0.57375 10 ⁸	0.9966 10 ⁸
Análise não-linear						
Nó	Tensões longitudinais (N/m²)					
	ANSYS			INTERA 3D		
	S_{flexão}	S_θ	S_{máx}	S_{flexão}	S_θ	S_{máx}
11	0.42437 10 ⁸	0.57375 10 ⁸	0.99815 10 ⁸	0.41639 10 ⁸	0.57375 10 ⁸	0.9909 10 ⁸

S_{flexão} = tensão devido à flexão.

S_θ = tensão devido à pressão interna.

S_{máx} = tensão máxima (S_{máx} = S_θ + S_{flexão}).

TABELA 14 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS VERTICAIS E ROTAÇÕES NOS NÓS PARA A ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA.

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v ^j (%)
	v ^j (m)	θz ^j (rad)	v ^j (m)	θz ^j (rad)	
1	0.0000	-0.16737 10 ⁻²	0.00000	-0.167422 10 ⁻²	0.00
2	-0.81534 10 ⁻³	-0.15480 10 ⁻²	-0.815594 10 ⁻³	-0.15485 10 ⁻²	0.031
3	-0.15148 10 ⁻²	-0.12228 10 ⁻²	-0.151524 10 ⁻²	-0.122302 10 ⁻²	0.029
4	-0.20169 10 ⁻²	-0.76974 10 ⁻³	-0.201736 10 ⁻²	-0.769819 10 ⁻³	0.023
5	-0.22743 10 ⁻²	-0.25480 10 ⁻³	-0.227477 10 ⁻²	-0.254762 10 ⁻³	0.021
6	-0.22717 10 ⁻²	0.25991 10 ⁻³	-0.227217 10 ⁻²	0.260024 10 ⁻³	0.021
7	-0.20245 10 ⁻²	0.71352 10 ⁻³	-0.202492 10 ⁻²	0.713681 10 ⁻³	0.021
8	-0.15787 10 ⁻²	0.10439 10 ⁻²	-0.157901 10 ⁻²	0.104411 10 ⁻²	0.020
9	-0.10120 10 ⁻²	0.11856 10 ⁻²	-0.101224 10 ⁻²	0.118579 10 ⁻²	0.024
10	-0.43630 10 ⁻³	0.10679 10 ⁻²	-0.436411 10 ⁻³	0.106815 10 ⁻²	0.025
11	0.0000	0.61472 10 ⁻³	0.0000	0.614923 10 ⁻³	0.00
12	0.12422 10 ⁻³	0.10363 10 ⁻³	0.124270 10 ⁻³	0.103701 10 ⁻³	0.040
13	0.11332 10 ⁻³	-0.12269 10 ⁻³	0.113377 10 ⁻³	-0.122728 10 ⁻³	0.050
14	0.55195 10 ⁻⁴	-0.16502 10 ⁻³	0.552275 10 ⁻⁴	-0.165115 10 ⁻³	0.059
15	0.0000	-0.12374 10 ⁻³	0.0000	-0.123804 10 ⁻³	0.00
16	-0.36940 10 ⁻⁴	-0.67107 10 ⁻⁴	-0.369558 10 ⁻⁴	-0.671282 10 ⁻⁴	0.043
17	-0.47857 10 ⁻⁴	0.9336910 ⁻⁵	-0.478746 10 ⁻⁴	0.934681 10 ⁻⁵	0.037
18	-0.31700 10 ⁻⁴	0.71696 10 ⁻⁴	-0.317109 10 ⁻⁴	0.717223 10 ⁻⁴	0.034
19	0.0000	0.86752 10 ⁻⁴	0.0000	0.867799 10 ⁻⁴	0.00
20	0.71163 10 ⁻⁴	0.29821 10 ⁻⁴	0.711467 10 ⁻⁴	0.298306 10 ⁻⁴	0.023
21	0.81330 10 ⁻⁴	-0.10844 10 ⁻⁴	0.813105 10 ⁻⁴	-0.108475 10 ⁻⁴	0.024
22	0.50831 10 ⁻⁴	-0.35243 10 ⁻⁴	0.508191 10 ⁻⁴	-0.352543 10 ⁻⁴	0.023
23	0.0000	-0.43376 10 ⁻⁴	0.00000	-0.433899 10 ⁻⁴	0.00

TABELA 15 – VALORES OBTIDOS PARA OS DESLOCAMENTOS LONGITUNAIS E VERTICAIS NOS NÓS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR.

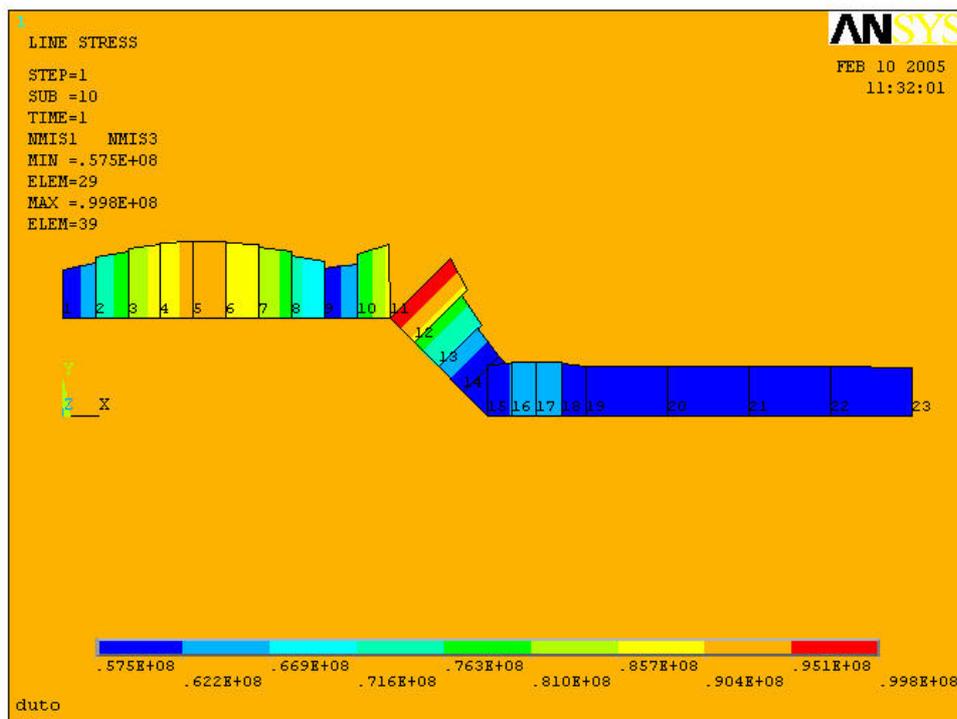
Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa para v^j (%)
	u^j (m)	v^j (m)	u^j (m)	v^j (m)	
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00
2	$-0.38083 \cdot 10^{-6}$	$-0.79474 \cdot 10^{-3}$	$-0.38451 \cdot 10^{-6}$	$-0.79632 \cdot 10^{-3}$	0.20
3	$-0.59799 \cdot 10^{-6}$	$-0.14764 \cdot 10^{-2}$	$-0.604217 \cdot 10^{-6}$	$-0.14793 \cdot 10^{-2}$	0.20
4	$-0.59372 \cdot 10^{-6}$	$-0.19657 \cdot 10^{-2}$	$-0.600824 \cdot 10^{-6}$	$-0.19696 \cdot 10^{-2}$	0.20
5	$-0.41583 \cdot 10^{-6}$	$-0.22169 \cdot 10^{-2}$	$-0.422229 \cdot 10^{-6}$	$-0.22213 \cdot 10^{-2}$	0.20
6	$-0.17554 \cdot 10^{-6}$	$-0.22151 \cdot 10^{-2}$	$-0.180303 \cdot 10^{-6}$	$-0.22194 \cdot 10^{-2}$	0.19
7	0.00000	$-0.19750 \cdot 10^{-2}$	0.00000	$-0.19788 \cdot 10^{-2}$	0.19
8	0.00000	$-0.15410 \cdot 10^{-2}$	0.00000	$-0.15438 \cdot 10^{-2}$	0.18
9	0.00000	$-0.98839 \cdot 10^{-3}$	0.00000	$-0.99017 \cdot 10^{-3}$	0.18
10	0.00000	$-0.42615 \cdot 10^{-3}$	0.00000	$-0.42692 \cdot 10^{-3}$	0.18
11	0.0000	0.00000	0.0000	0.00000	0.00
12	$0.12047 \cdot 10^{-3}$	$0.12050 \cdot 10^{-3}$	$0.120777 \cdot 10^{-3}$	$0.12081 \cdot 10^{-3}$	0.26
13	$0.10936 \cdot 10^{-3}$	$0.10938 \cdot 10^{-3}$	$0.109700 \cdot 10^{-3}$	$0.10972 \cdot 10^{-3}$	0.31
14	$0.53080 \cdot 10^{-4}$	$0.53087 \cdot 10^{-4}$	$0.5326427 \cdot 10^{-4}$	$0.53274 \cdot 10^{-4}$	0.35
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
16	0.0000	$-0.35816 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$-0.35910 \cdot 10^{-4}$	0.26
17	0.0000	$-0.46526 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$-0.46636 \cdot 10^{-4}$	0.24
18	0.0000	$-0.30846 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$-0.30916 \cdot 10^{-4}$	0.23
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
20	0.0000	$0.68316 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$0.68562 \cdot 10^{-4}$	0.36
21	0.0000	$0.77413 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$0.77756 \cdot 10^{-4}$	0.44
22	0.0000	$0.48136 \cdot 10^{-4}$	0.0000	$0.48373 \cdot 10^{-4}$	0.49
23	0.00000	0.0000	0.00000	0.0000	0.00

Nas análises efetuadas para este problema não houve grandes variações na resposta do duto referente aos deslocamentos e tensões determinados nos nós em função do tipo de análise adotado.

A maior diferença dentre os deslocamentos verticais obtidos nas análises linear e não-linear efetuadas no programa INTERA 3D é de 2.24 % e para os deslocamentos longitudinais 3.29 %. A diferença entre os valores das tensões máximas é de 0.65 %.

Na Figura 31 é apresentado o diagrama de distribuição de tensões longitudinais máximas de tração ao longo da linha de duto, obtido da análise não-linear efetuada no programa ANSYS.

FIGURA 29 – DIAGRAMA DAS TENSÕES AXIAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO NO DUTO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR.

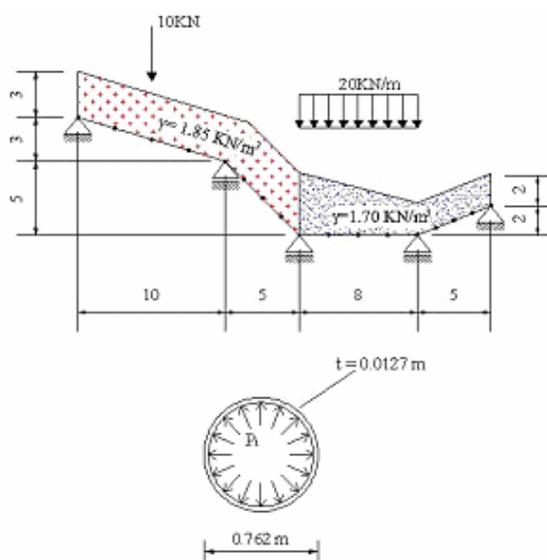


Fonte: ANSYS.

5.4 EXEMPLO-4 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO DUTO EM ENCOSTA, CONSIDERANDO A INTERAÇÃO SOLO-DUTO, A PRESSÃO INTERNA, A TEMPERATURA E DESLOCAMENTO PRESCRITO.

Este exemplo simula uma linha de duto enterrado numa encosta. O modelo para a simulação consiste de um duto solicitado por carregamentos externos, pela pressão interna constante ao longo do duto, pela diferença de temperatura nas paredes do mesmo e por um deslocamento prescrito no apoio. O carregamento externo é originado pela pressão do solo, pelas cargas acidentais superficiais distribuídas e por uma carga concentrada na direção x_2 . O esquema da estrutura para a análise é mostrado na Figura 30.

FIGURA 30– ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.



As propriedades do material são apresentadas na Tabela 16 e as propriedades geométricas da seção transversal na Tabela 17.

Na Tabela 18 são apresentados os valores dos carregamentos externos devido à pressão do solo e sobrecarga e a diferença de temperatura em cada tramo ao longo da linha de duto.

A pressão exercida pelo solo sobre o duto foi determinada em função da profundidade de aterro indicada na Figura 30 e pelo diâmetro externo do duto, conforme a expressão 5.1.

O coeficiente de dilatação térmica α adotado é igual a $12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$.

No programa INTERA 3D o duto foi discretizado por oito elementos e as forças internas foram determinadas dividindo-se a seção transversal do mesmo em 60 faixas de área.

O duto foi discretizado por 16 elementos de viga tridimensional BEAM 44 (3-D Elastic Tapered Unsymmetric Beam) pelo programa ANSYS.

TABELA 16 – PROPRIEDADES DO MATERIAL DO DUTO.

Propriedades do material.	
E (N/m²)	20.5 10 ¹⁰
v	0.25
S_y (N/m²)	42 10 ⁷
E_T (N/m²)	75 10 ⁹

TABELA 17 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.

Propriedades geométricas.	
Momento de Inércia I_{zz} (m⁴)	0.002098725
Área da seção transversal (m²)	0.029895741
Diâmetro externo (m)	0.762
Diâmetro interno (m)	0.7366
Espessura (m)	0.0127

TABELA 18 – CARREGAMENTOS EXTERNOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO.

Tramo	Pressão do Solo na direção x₂ (γ = 1.85 KN/m³) (N/m)	Pressão do Solo na direção x₂ (γ = 1.70 KN/m³) (N/m)	Carga distribuída na direção x₁ (N/m)	Sobrecarga na direção x₂ (N/m)	P_i (MPa)	Δt (°C)
1	-4229.1	-	-	-	12	20
2	-4229.1	-	-	-	12	20
3	-	-3886.2 a -2590.8	1000	-20000	12	25
4	-	-2590.8	-	-	12	30

Os valores das constantes de rigidez das molas longitudinais e verticais ao longo da linha de duto são dados na Tabela 19 para cada tramo.

TABELA 19 – VALORES DAS CONSTANTES DE MOLA.

Tramo	Valor da constante de mola (N/m):
Tramo 1	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 1000 \frac{EI}{L^4}$
Tramo 2	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 700 \frac{EI}{L^4}$
Tramo 3	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 500 \frac{EI}{L^4}$
Tramo 4	$K_{AS} = 0$
	$B_{BS} = K_{US} = 500 \frac{EI}{L^4}$

Para o esquema da estrutura descrito na Figura 30, foram realizadas análises lineares elásticas com o objetivo de estudar o comportamento estrutural do duto devido aos seguintes fatores:

- Interação solo-duto representada por molas de solo;
- Pressão interna constante ao longo da tubulação;
- Deslocamentos prescritos.

Segundo Watkins & Anderson (2000) um duto é considerado de parede fina quando a relação $D_e/t > 10$ for satisfeita. O valor adimensional determinado através dessa relação para o duto em questão é igual 60. Na determinação da tensão tangencial é empregada a solução de Lamé para cilindros de parede fina.

A tensão circunferencial determinada através da expressão (2.50) dada na seção 2.3.2.2.1 é igual a 354 MPa. Como o duto está restringido nos apoios extremos (nós 1 e 17), a pressão interna origina uma tensão longitudinal adicional de intensidade νS_θ .

Na Tabela 20 são apresentados os valores dos deslocamentos verticais v^j e dos deslocamentos longitudinais u^j , obtidos das análises lineares realizadas nos programas INTERA 3D e ANSYS. Nessas análises as simulações são efetuadas considerando o efeito da

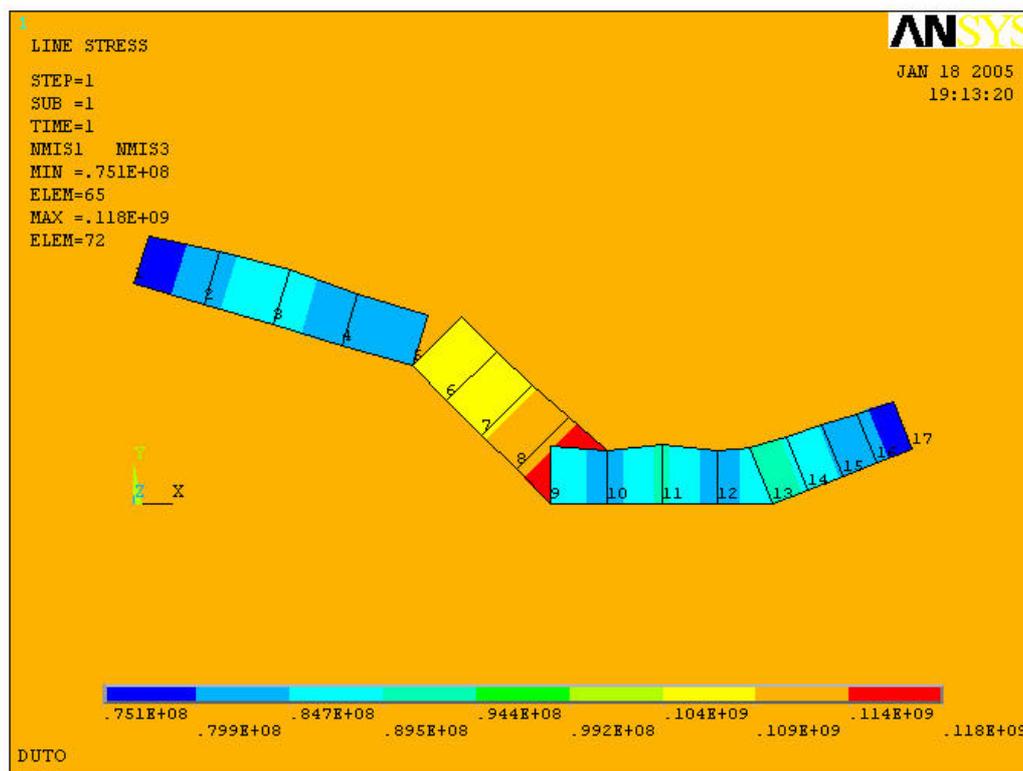
pressão interna e desconsiderando a contribuição da rigidez das molas de solo transversais e longitudinais.

Um diagrama de tensões longitudinais máximas de tração é mostrada na Figura 31. Analisando o diagrama, constata-se que a tensão máxima atuante de tração ocorre no nó 9.

TABELA 20 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X E Y OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR SEM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa de v ^j (%)
	u ^j (m)	v ^j (m)	u ^j (m)	v ^j (m)	
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000
2	-0.44066 10 ⁻³	-0.10948 10 ⁻²	-0.440608 10 ⁻³	-0.10946 10 ⁻²	0.018
3	-0.67363 10 ⁻³	-0.14972 10 ⁻²	-0.673558 10 ⁻³	-0.14970 10 ⁻²	0.013
4	-0.63151 10 ⁻³	-0.97847 10 ⁻³	-0.631463 10 ⁻³	-0.97832 10 ⁻³	0.015
5	-0.45147 10 ⁻³	0.00000	-0.451472 10 ⁻³	0.00000	0.000
6	0.37706 10 ⁻⁴	0.26114 10 ⁻³	0.376590 10 ⁻⁴	0.26109 10 ⁻³	0.019
7	0.39109 10 ⁻³	0.38648 10 ⁻³	0.391026 10 ⁻³	0.38641 10 ⁻³	0.018
8	0.56821 10 ⁻³	0.33556 10 ⁻³	0.568150 10 ⁻³	0.33550 10 ⁻³	0.018
9	0.46069 10 ⁻³	0.00000	0.460691 10 ⁻³	0.00000	0.000
10	0.36788 10 ⁻³	-0.82488 10 ⁻³	0.367835 10 ⁻³	-0.82472 10 ⁻³	0.019
11	0.27474 10 ⁻³	-0.12421 10 ⁻²	0.274735 10 ⁻³	-0.12419 10 ⁻²	0.016
12	0.18127 10 ⁻³	-0.82222 10 ⁻³	0.181227 10 ⁻³	-0.82206 10 ⁻³	0.019
13	0.87475 10 ⁻⁴	0.00000	0.874749 10 ⁻⁴	0.00000	0.000
14	-0.36894 10 ⁻⁴	0.25625 10 ⁻³	-0.368750 10 ⁻⁴	0.25620 10 ⁻³	0.020
15	-0.68857 10 ⁻⁴	0.28149 10 ⁻³	-0.688365 10 ⁻⁴	0.28143 10 ⁻³	0.021
16	-0.46360 10 ⁻⁴	0.17057 10 ⁻³	-0.463475 10 ⁻⁴	0.17054 10 ⁻³	0.018
17	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000

FIGURA 31 – DIAGRAMA DAS TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO.



Fonte: ANSYS

Uma segunda análise linear é realizada adicionando na simulação as molas de solo de base e de levantamento. Os deslocamentos obtidos nesta análise são apresentados na Tabela 21.

Na Figura 32 é apresentado um diagrama de deslocamentos verticais obtidas das duas análises lineares, estabelecendo um comparativo da resposta estrutural do duto com pressão interna quando o solo é adicionado na simulação ou não.

Como a inclusão das molas de solo de base e de levantamento no modelo aumenta a rigidez da estrutura, os deslocamentos verticais originados pela ação dos carregamentos são inferiores quando este efeito é considerado na simulação, conforme pode ser verificado na Figura 32. A diferença entre os valores dos deslocamentos verticais máximos (em $x_l = 5$ m) para as análises lineares considerando ou não o efeito das molas de solo efetuadas no programa INTERA 3D é igual a 9,32 %.

O efeito da pressão interna constante ao longo da tubulação pode ser observado na Figura 33. Nessa Figura são desenhadas duas curvas obtidas da análise linear considerando o efeito da pressão interna ou não e o efeito das molas de solo de base e de levantamento.

Como a pressão interna origina uma tensão longitudinal adicional de intensidade νS_{θ} devido a restrições longitudinais nos apoios extremos da linha de duto, os valores dos deslocamentos verticais resultantes são maiores quando este efeito é considerado na simulação com o modelo de solo-duto.

TABELA 21 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X E Y OBTIDOS NA ANÁLISE LINEAR CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa de v^j (%)
	u^j (m)	v^j (m)	u^j (m)	v^j (m)	
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000
2	$-0.40844 \cdot 10^{-3}$	$-0.98818 \cdot 10^{-3}$	$-0.409044 \cdot 10^{-3}$	$-0.99014 \cdot 10^{-3}$	0.198
3	$-0.63049 \cdot 10^{-3}$	$-0.13551 \cdot 10^{-2}$	$-0.631280 \cdot 10^{-3}$	$-0.13575 \cdot 10^{-2}$	0.177
4	$-0.60429 \cdot 10^{-3}$	$-0.89018 \cdot 10^{-3}$	$-0.604834 \cdot 10^{-3}$	$-0.89182 \cdot 10^{-3}$	0.184
5	$-0.45049 \cdot 10^{-3}$	0.00000	$-0.450568 \cdot 10^{-3}$	0.00000	0.000
6	$0.14057 \cdot 10^{-4}$	$0.23693 \cdot 10^{-3}$	$0.144912 \cdot 10^{-4}$	$0.23740 \cdot 10^{-3}$	0.198
7	$0.36301 \cdot 10^{-3}$	$0.35826 \cdot 10^{-3}$	$0.363578 \cdot 10^{-3}$	$0.35883 \cdot 10^{-3}$	0.159
8	$0.55050 \cdot 10^{-3}$	$0.31814 \cdot 10^{-3}$	$0.550911 \cdot 10^{-3}$	$0.31851 \cdot 10^{-3}$	0.116
9	$0.45999 \cdot 10^{-3}$	0.00000	$0.460053 \cdot 10^{-3}$	0.00000	0.000
10	$0.36726 \cdot 10^{-3}$	$-0.80358 \cdot 10^{-3}$	$0.367282 \cdot 10^{-3}$	$-0.80389 \cdot 10^{-3}$	0.039
11	$0.27422 \cdot 10^{-3}$	$-0.12154 \cdot 10^{-2}$	$0.274265 \cdot 10^{-3}$	$-0.12157 \cdot 10^{-2}$	0.025
12	$0.18084 \cdot 10^{-3}$	$-0.80617 \cdot 10^{-3}$	$0.180841 \cdot 10^{-3}$	$-0.80633 \cdot 10^{-3}$	0.020
13	$0.87142 \cdot 10^{-4}$	0.00000	$0.871719 \cdot 10^{-4}$	0.00000	0.000
14	$-0.34900 \cdot 10^{-4}$	$0.25064 \cdot 10^{-3}$	$-0.349038 \cdot 10^{-4}$	$0.25070 \cdot 10^{-3}$	0.024
15	$-0.66356 \cdot 10^{-4}$	$0.27482 \cdot 10^{-3}$	$-0.663734 \cdot 10^{-4}$	$0.27489 \cdot 10^{-3}$	0.025
16	$-0.44733 \cdot 10^{-4}$	$0.16630 \cdot 10^{-3}$	$-0.447476 \cdot 10^{-4}$	$0.16635 \cdot 10^{-3}$	0.030
17	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000

FIGURA 32 – DIAGRAMA COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS OBTIDOS DAS ANÁLISES EFETUADAS LEVANDO-SE EM CONTA OU NÃO A INTERAÇÃO SOLO-DUTO. O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA É CONSIDERADO.

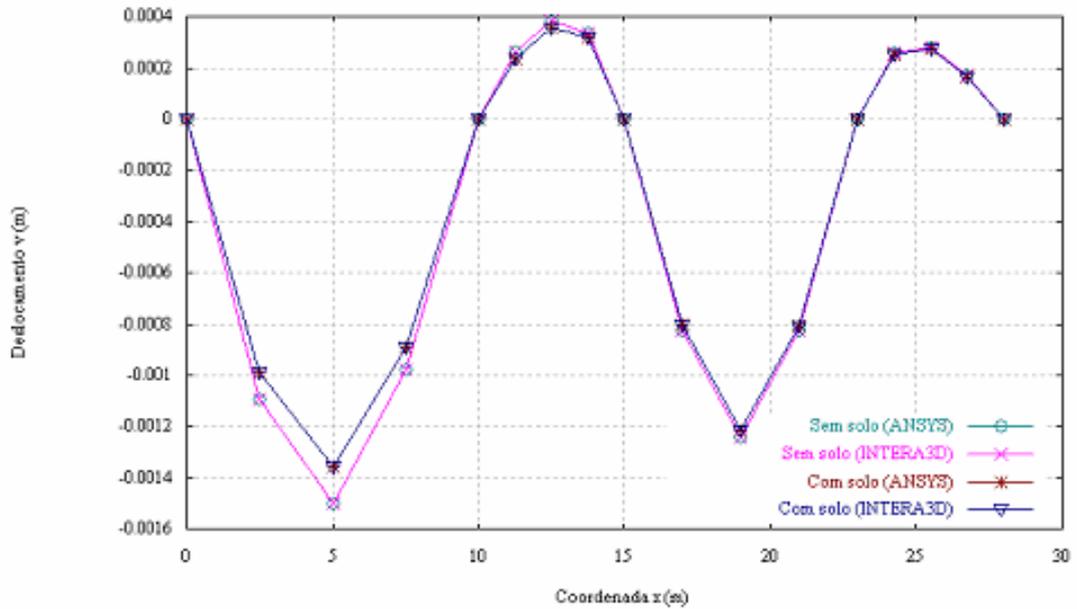
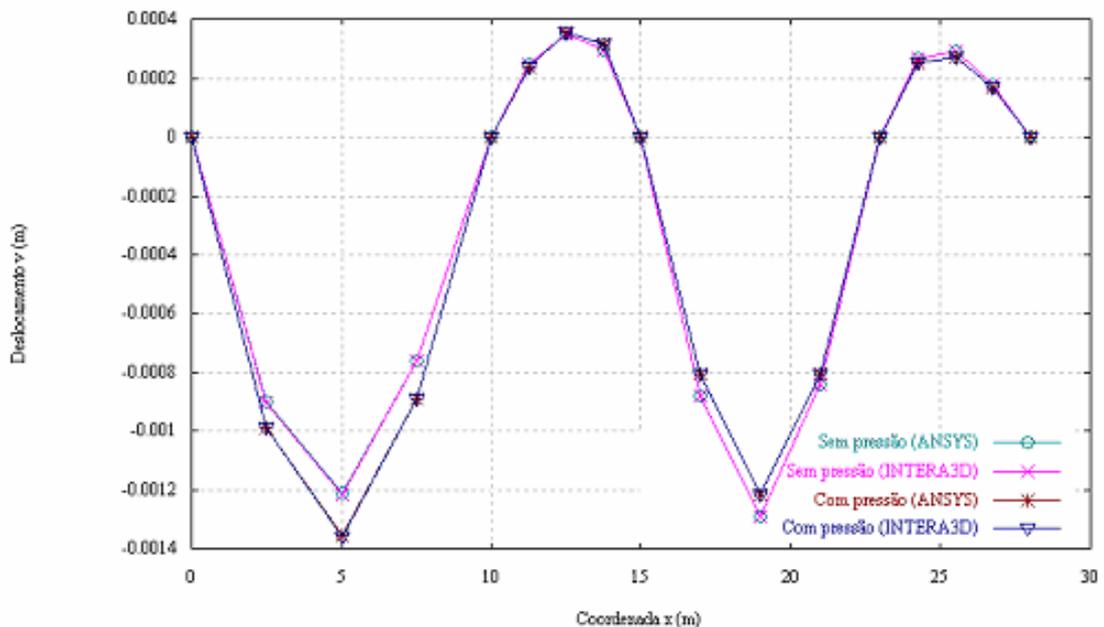


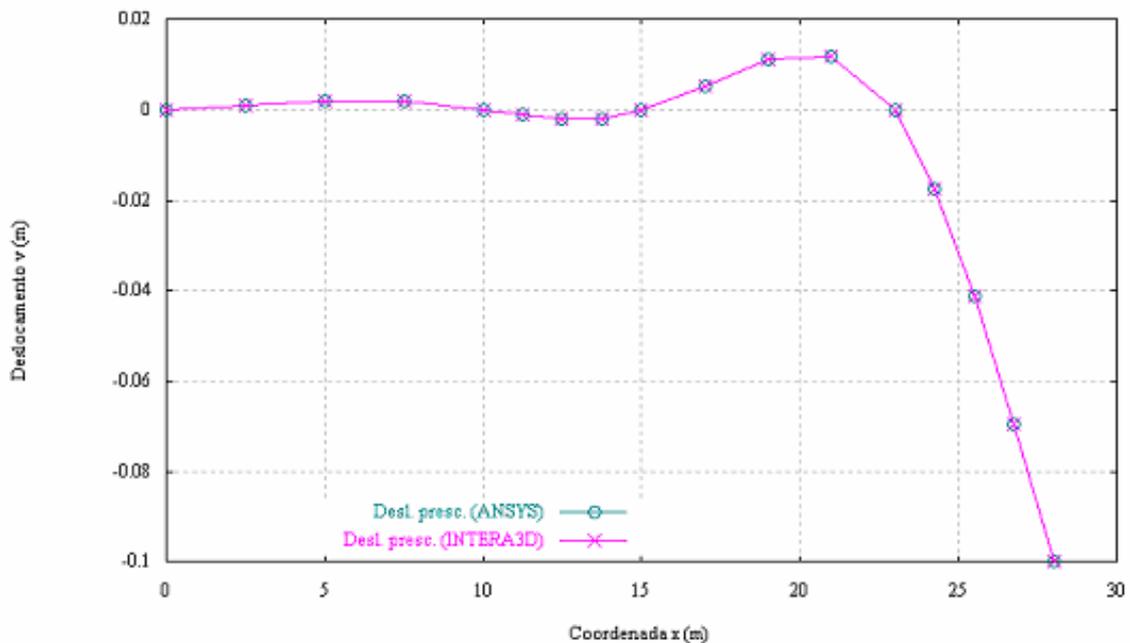
FIGURA 33 – DIAGRAMA COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS OBTIDOS DAS ANÁLISES EFETUADAS CONSIDERANDO OU NÃO O EFEITO DA PRESSÃO INTERNA. AS MOLAS DE SOLO DE BASE E DE LEVANTAMENTO SÃO ADICIONADAS.



Uma última análise é efetuada considerando o duto sujeito a um deslocamento prescrito igual a -0.10 m no apoio extremo localizado no nó 17 ($x_l = 28\text{m}$). O efeito da pressão interna P_i constante igual a 12 MPa, a temperatura, e os carregamentos externos devidos ao solo e sobrecarga são considerados. A interação solo-duto através de molas de solo de base e de levantamento também é considerada na simulação. Um diagrama de deslocamentos verticais v' é apresentada na Figura 34.

Na Figura 35 é apresentado um diagrama de tensões longitudinais máximas obtida no programa ANSYS.

FIGURA 34 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL OBTIDO DA ANÁLISE CONSIDERANDO UM DESLOCAMENTO PRESCRITO NO NÓ 17.



As tensões longitudinais máximas de tração obtidas nas simulações computacionais efetuadas nos programas ANSYS e INTERA 3D são apresentadas na Tabela 22.

De acordo com os resultados obtidos das análises lineares efetuadas de simulações com o modelo solo-duto pode-se avaliar o comportamento do duto com relação ao efeito da pressão interna, do solo e de deslocamentos prescritos.

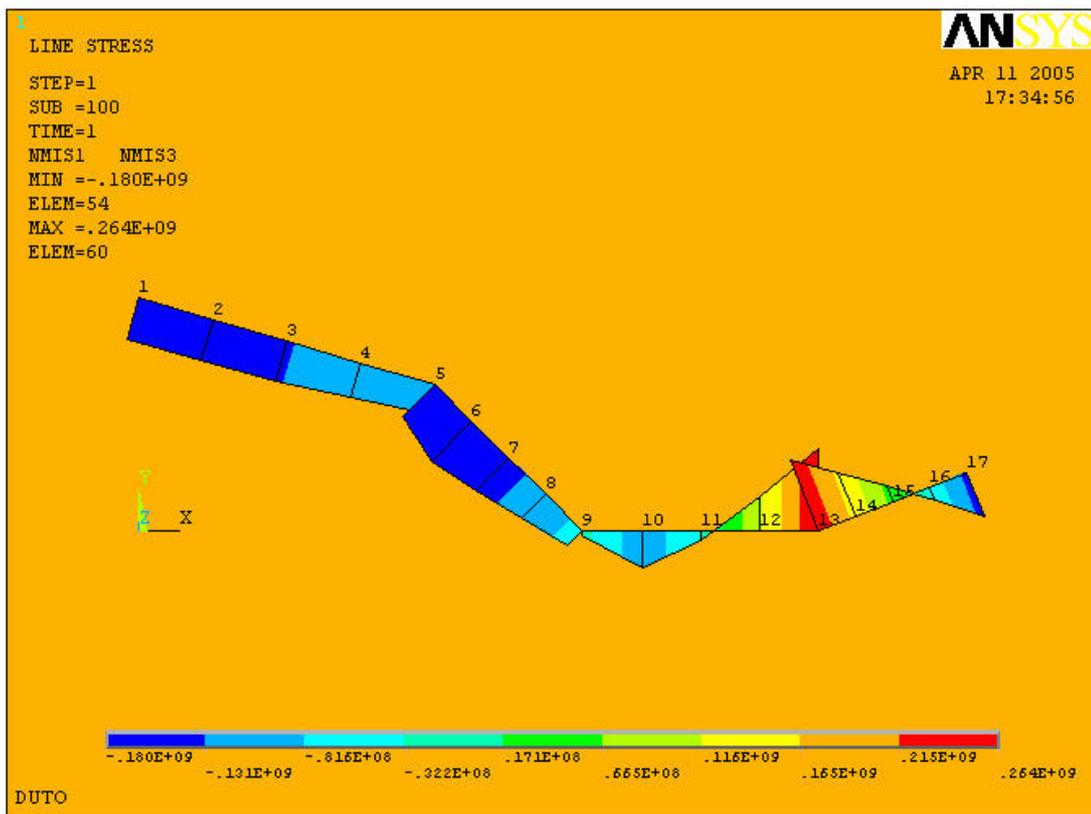
Nas simulações computacionais realizadas com o modelo solo-duto sem considerar deslocamentos prescritos, a tensão longitudinal máxima obtida é igual a $0.1182261 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Na simulação em que a pressão interna não foi considerada o valor da tensão máxima é igual a $0.1338223 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$. Portanto a pressão interna origina um acréscimo de tensões

longitudinais devido a restrições na direção x_1 nos apoios. Este acréscimo de tensões devido à pressão interna também é originado das restrições longitudinais devido ao solo, mas este efeito não foi considerado na análise do problema.

Carregamentos originados por recalques diferenciais influenciam nos deslocamentos e tensões alterando completamente o comportamento estrutural do duto conforme pode ser verificado nas Figuras 34 e 35.

Dentre as simulações efetuadas, o maior valor da tensão longitudinal obtido é igual a $0.2606909 \cdot 10^9$ para a simulação em que é considerada na análise a pressão interna, as molas de solo e um deslocamento prescrito no apoio.

FIGURA 35 - DIAGRAMA DAS TENSÕES LONGITUDINAIS MÁXIMAS DE TRAÇÃO OBTIDO DA ANÁLISE CONSIDERANDO UM DESLOCAMENTO PRESCRITO NO NÓ 17.



Fonte: ANSYS

TABELA 22 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.

Simulação	Nó	ANSYS	INTERA 3D	Diferença relativa
		$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (%)
Sem solo e com pressão interna	9	0.11837 10 ⁹	0.1180986 10 ⁹	0.23
Com solo e pressão interna	9	0.11850 10 ⁹	0.1182261 10 ⁹	0.23
Com solo e sem pressão interna	11	0.13690 10 ⁸	0.1338223 10 ⁸	2.25
Com solo, pressão interna e deslocamento prescrito	13	0.26406 10 ⁹	0.2606909 10 ⁹	1.28

5.5 EXEMPLO-5.

5.5.1 Análise 1 – Análise linear de um duto solicitado por carregamentos verticais e laterais. Os efeitos da temperatura e da pressão interna também são considerados.

Considera-se uma linha de duto enterrado conforme é mostrado na Figura 36. O comportamento do duto é estudado neste exemplo considerando a influência das molas de solo, da temperatura, da pressão interna e de carregamentos externos.

Como carregamentos externos são considerados: a pressão exercida pelo solo, uma carga distribuída lateralmente e duas cargas momento em trono do eixo x_2 nos apoios extremos. A diferença da temperatura e a pressão interna constante ao longo do duto também são consideradas. Um esquema do carregamento dividido por tramos ao longo da linha de duto é apresentado na Tabela 25.

O coeficiente de dilatação térmica α adotado é igual a $12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. Esse valor corresponde aproximadamente ao valor do coeficiente de dilatação térmica do aço. As propriedades geométricas da seção transversal e as propriedades do material são dadas nas tabelas 23 e 24 respectivamente.

FIGURA 36 – ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.

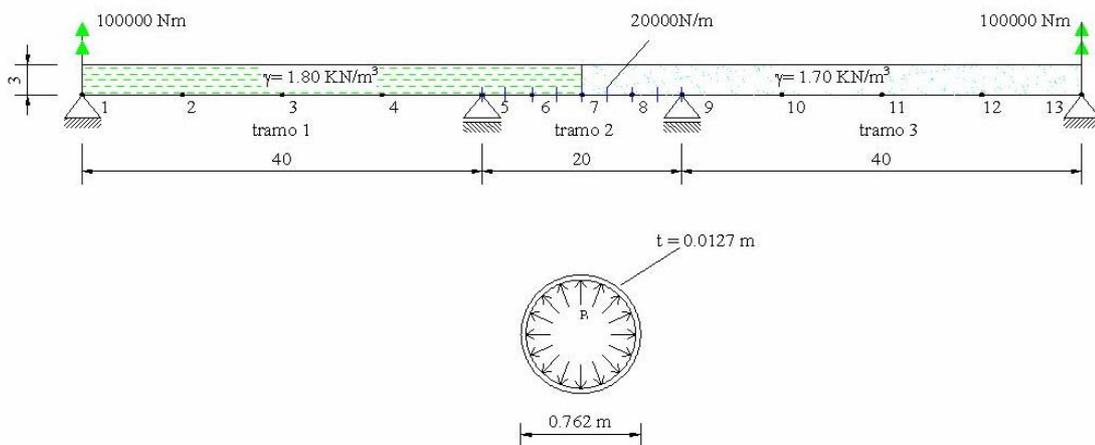


TABELA 23 – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO.

Propriedades geométricas.	
Momento de Inércia I_{zz} (m⁴)	0.002098725
Área da seção transversal (m²)	0.029895741
Diâmetro externo (m)	0.762
Diâmetro interno (m)	0.7366
Espessura (m)	0.0127

TABELA 24 – PROPRIEDADES DO MATERIAL DO DUTO.

Propriedades do material.	
E (N/m²)	20.5 10 ¹⁰
ν	0.25
S_y (N/m²)	42 10 ⁷
E_T (N/m²)	75 10 ⁹

TABELA 25 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO ESTÁ SOLICITADO.

Trecho	Pressão do Solo na direção y ($\gamma = 1.80$ KN/m³) (N/m)	Pressão do Solo na direção y ($\gamma = 1.70$ KN/m³) (N/m)	Sobrecarga (N/m)	Pressão interna (MPa)	Δt (°C)
Tramo 1	-4114.80	0	0	12	30
Tramo 2	-4114.80	-3886.20	-20000	12	25
Tramo 3	0	-3886.20	0	12	20

A pressão exercida pelo solo sobre o duto foi determinada em função da profundidade de aterro indicada na Figura 36 e pelo diâmetro externo do duto, conforme a expressão 5.1.

Na Tabela 26 são dados os valores das constantes de rigidez das molas de solo em cada tramo.

TABELA 26 – VALORES DAS CONSTANTES DE RIGIDEZ DAS MOLAS DE SOLO PARA CADA TRAMO.

Tramo	Valor da constante de mola (N/m):
Tramo 1	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 1000 \frac{EI}{L^4}$
	$K_{LLS} = K_{RLS} = 1500 \frac{EI}{L^4}$
Tramo 2	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 800 \frac{EI}{L^4}$
	$K_{LLS} = K_{RLS} = 1500 \frac{EI}{L^4}$
Tramo 3	$K_{AS} = 0$
	$K_{BS} = K_{US} = 500 \frac{EI}{L^4}$
	$K_{LLS} = K_{RLS} = 1500 \frac{EI}{L^4}$

Neste exemplo o duto é analisado linearmente considerando duas simulações: na primeira simulação os deslocamentos nodais e a tensão máxima de tração são determinados sem considerar a interação solo-duto através das molas de solo; e na segunda simulação essa interação é considerada.

Os resultados obtidos na análise da primeira simulação para os deslocamentos transversais v^j e w^j , e os deslocamentos longitudinais u^j são apresentados na Tabela 27. Na Tabela 28 é dada a tensão longitudinal máxima de tração ocorrida no duto.

O duto é discretizado no programa INTERA 3D por dois elementos de mesmo comprimento em cada tramo. Na determinação dos esforços internos totais nos pontos de integração foram obtidos dividindo-se a seção transversal em 60 faixas de área.

No programa ANSYS o duto foi discretizado por quatro elementos de mesmo comprimento em cada tramo. O elemento utilizado da sua biblioteca é denominado *3-D Elastic Tapered Unsymmetric Beam* (BEAM 44).

TABELA 27 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z SEM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.

Nó	ANSYS			INTERA 3D			Diferença relativa de v (%)
	u (m)	v (m)	w (m)	u (m)	v (m)	w (m)	
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000
2	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.14972	-0.056032	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.149702	-0.0560223	0.012
3	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.19492	-0.080354	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.194899	-0.0803402	0.011
4	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.11876	-0.064499	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.118740	-0.0644880	0.017
5	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	0.000
6	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.031263	0.044680	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0312588	0.0446726	0.013
7	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.040402	0.063641	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0403965	0.0636303	0.014
8	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.030793	0.043518	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0307884	0.0435107	0.015
9	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	0.000
10	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.11370	-0.051715	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.113677	-0.0517065	0.020
11	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.18586	-0.052463	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.185823	-0.0524535	0.020
12	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.14250	-0.026978	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.142480	-0.0269737	0.014
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000

TABELA 28 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.

Tipo de Análise	Nó	ANSYS	INTERA 3D	Diferença relativa $S_{m\acute{a}x}$ (%)
		$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	
Análise Linear	7	$0.26908 \cdot 10^9$	$0.265939 \cdot 10^9$	1.167

Para a segunda simulação em que as molas de solo de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita são adicionadas no modelo, os resultados para os deslocamentos longitudinais, verticais e laterais são apresentados na Tabela 29. Na Tabela 30 é apresentada a tensão longitudinal máxima de tração.

TABELA 29 – DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z COM A INFLUÊNCIA DAS MOLAS DE SOLO.

Nó (j)	ANSYS			INTERA 3D			Diferença relativa de v^j (%)
	u^j (m)	v^j (m)	w^j (m)	u^j (m)	v^j (m)	w^j (m)	
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000
2	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.13306	-0.045681	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.133314	-0.0458954	0.191
3	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.17302	-0.066393	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.173321	-0.0666736	0.174
4	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.10551	-0.055657	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.105691	-0.0558443	0.171
5	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	0.000
6	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.027647	0.041869	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0277013	0.0419291	0.196
7	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.035891	0.059970	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0359588	0.0600472	0.189
8	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.027674	0.040919	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0277208	0.0409747	0.169
9	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	$0.24 \cdot 10^{-3}$	0.0000	0.0000	0.000
10	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.10547	-0.045046	$0.18 \cdot 10^{-3}$	-0.105580	-0.0451884	0.104
11	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.17307	-0.042576	$0.12 \cdot 10^{-3}$	-0.173240	-0.0427626	0.098
12	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.13303	-0.019938	$0.6 \cdot 10^{-4}$	-0.133166	-0.0200647	0.102
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000

TABELA 30 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO OBTIDA NA SEGUNDA SIMULAÇÃO.

Tipo de Análise	Nó	ANSYS	INTERA 3D	Diferença relativa $S_{\text{máx}}$ (%)
		$S_{\text{máx}}$ (N/m ²)	$S_{\text{máx}}$ (N/m ²)	
Análise Linear	7	$0.25576 \cdot 10^9$	$0.253099 \cdot 10^9$	1.04

Nas figuras 37 e 38 são mostrados os diagramas de deslocamentos verticais e deslocamentos laterais para as duas simulações respectivamente.

Um diagrama de deslocamentos do duto em três dimensões é apresentada na Figura 39.

FIGURA 37 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.

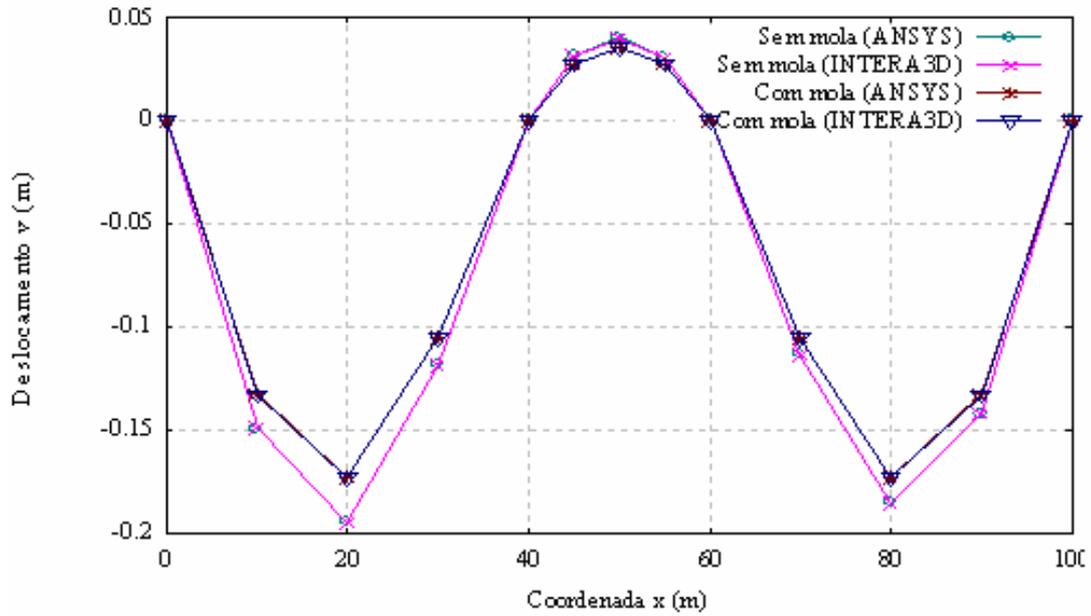


FIGURA 38 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO LATERAL DO DUTO.

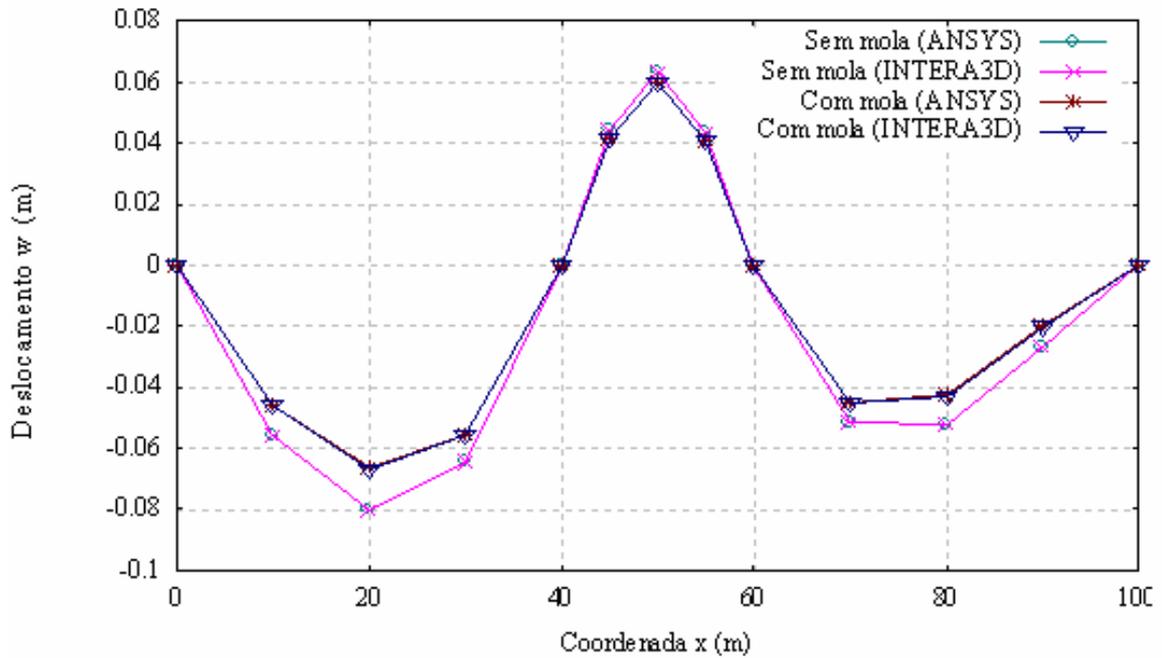
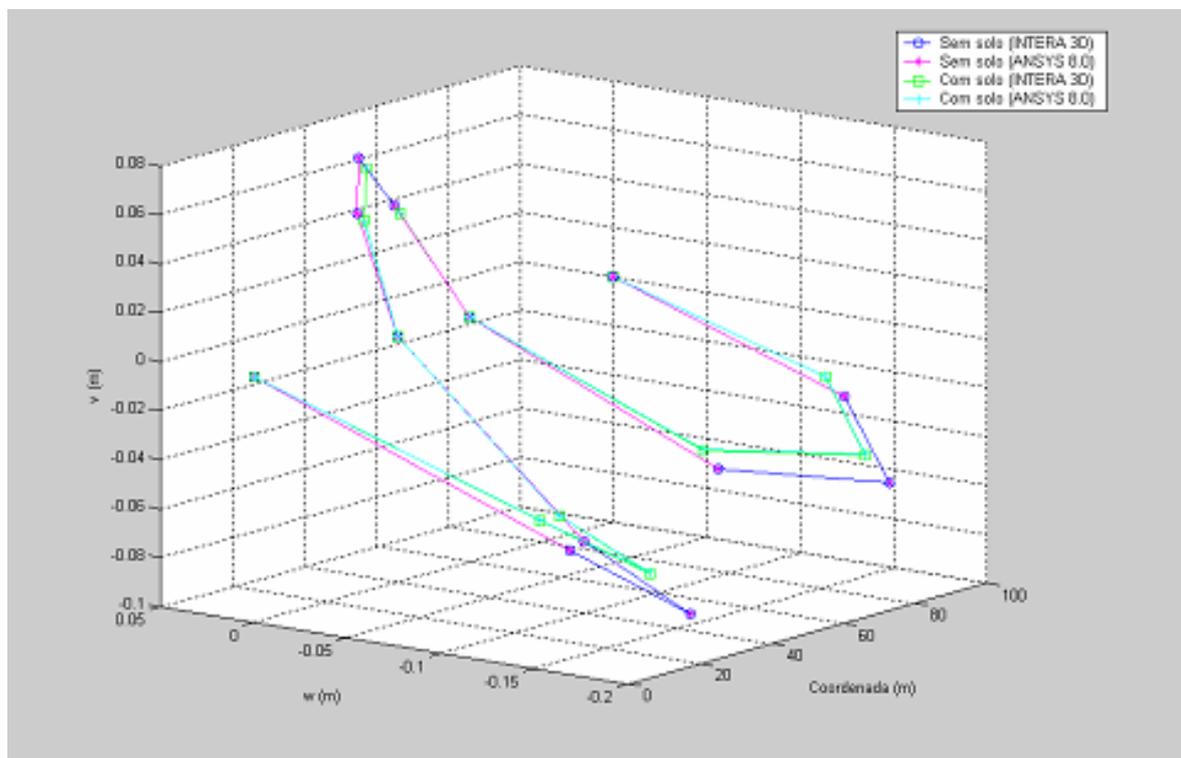


FIGURA 39 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTOS DO DUTO EM TRÊS DIMENSÕES PARA AS DUAS SIMULAÇÕES.

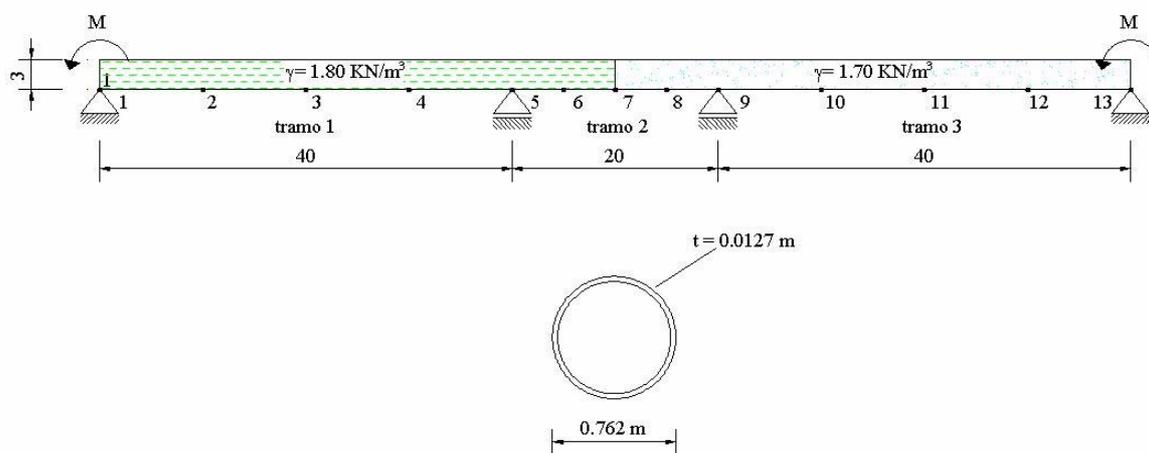


5.5.2 Análise 2 – Análise não-linear considerando a não-linearidade material (elastoplasticidade).

Nessa segunda análise é considerada a não-linearidade material (elastoplasticidade). Um esquema do duto para a análise é mostrado na Figura 40. O duto é analisado considerando: a pressão originada pelo solo, por dois momentos aplicados em torno do eixo x_3 nos apoios extremos ($M_z = 2800000$ N m) e pela temperatura. A pressão interna constante ao longo da tubulação não é considerada. Um esquema para o carregamento em que o duto é solicitado é apresentado na Tabela 31.

As propriedades geométricas da seção transversal e do material são dadas nas Tabelas 23 e 24, e os valores para as constantes de rigidez das molas de solo são os mesmos adotados da análise anterior (Tabela 26).

FIGURA 40 – ESQUEMA DO DUTO PARA A ANÁLISE.



A análise não-linear é efetuada pelos programas INTERA 3D e ANSYS.

No programa INTERA 3D o duto é analisado considerando 100 passos de carga até a carga total, para uma tolerância de convergência igual a 10^{-4} .

Na análise realizada no programa ANSYS, o elemento utilizado da sua biblioteca é o *2-D Plastic Beam* (BEAM23).

TABELA 31 – CARREGAMENTOS EM QUE O DUTO É SOLICITADO.

Tramo	Pressão do Solo na direção y ($\gamma = 1.80 \text{ KN/m}^3$) (N/m)	Pressão do Solo na direção y ($\gamma = 1.70 \text{ KN/m}^3$) (N/m)	Δt (°C)
1	-4114.80	0	30
2	-4114.80	-3886.20	25
3	0	-3886.20	20

Com o intuito de comparar a diferença no comportamento mecânico do duto, são efetuadas duas análises: uma linear e outra não-linear, considerando a não-linearidade material.

Na Tabela 33 são apresentados os deslocamentos verticais para as duas análises. A diferença relativa entre os resultados obtidos nos programas INTERA 3D e ANSYS também é apresentada.

Na Figura 41 é mostrado o diagrama de deslocamentos verticais obtidos em ambas análises.

As tensões máximas de tração são apresentadas na Tabela 32 e um diagrama de tensões com o duto deformado é apresentada na Figura 42.

FIGURA 41 – DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DO DUTO.

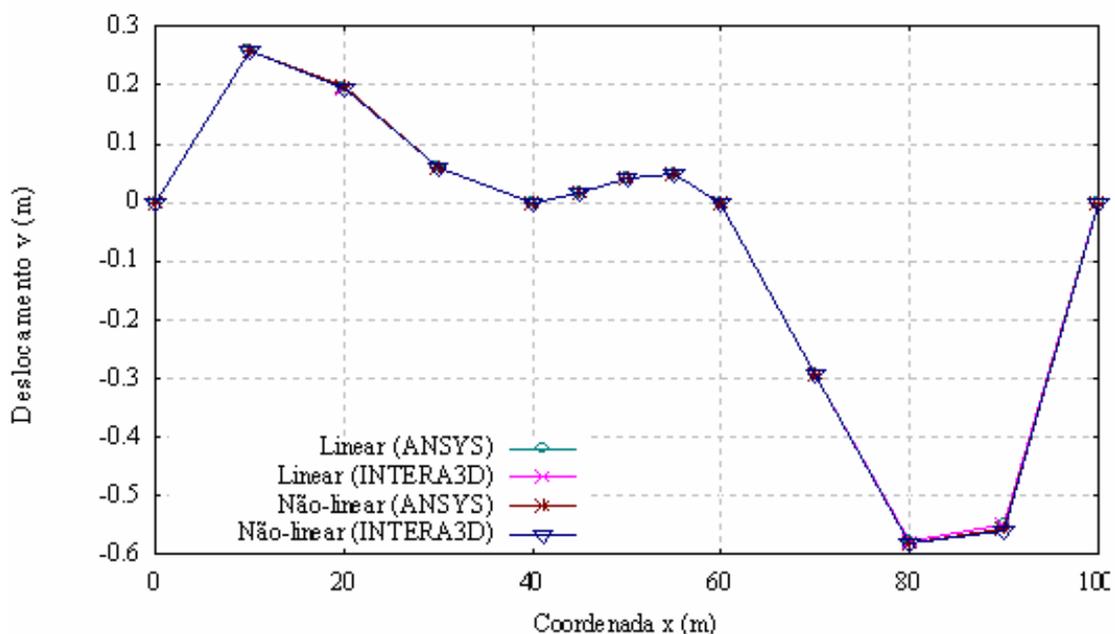
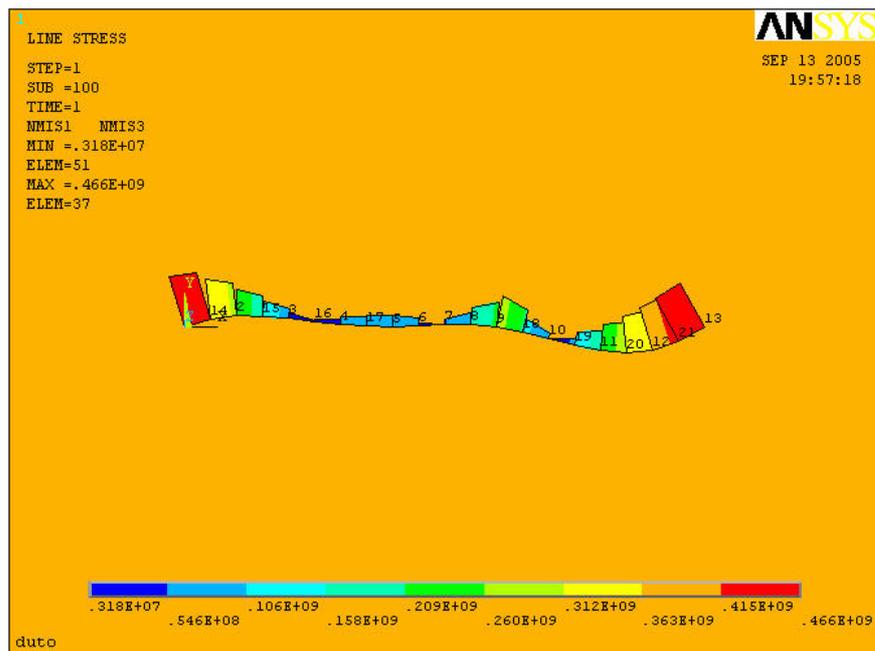


TABELA 32 – TENSÃO LONGITUDINAL MÁXIMA DE TRAÇÃO.

Tipo de Análise	Nó	ANSYS	INTERA 3D	Diferença relativa $S_{m\acute{a}x}$ (%)
		$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (N/m ²)	
Análise Linear	13	0.49383 10 ⁹	0.493601 10 ⁹	0.05
Análise Não-Linear	13	0.46075 10 ⁹	0.458215 10 ⁹	0.55

FIGURA 42 – DIAGRAMA DE TENSÕES AO LONDO DO DUTO DEFORMADO.



Fonte: ANSYS

TABELA 33 – DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y.

Nó (j)	ANSYS		INTERA 3D		Diferença relativa de v_{NL}^j (%)
	Análise linear	Análise não- linear	Análise linear	Análise não- linear	
	v_L^j (m)	v_{NL}^j (m)	v_L^j (m)	v_{NL}^j (m)	
1	0.0000	0.00000	0.0000	0.0000	0.00
2	0.25710	0.25812	0.256978	0.257475	0.77
3	0.19560	0.19600	0.195514	0.195821	0.63
4	0.060227	0.060244	0.0601988	0.0601205	0.66
5	0.0000	0.0000	0.000000	0.0000	0.00
6	0.014999	0.015141	0.0149916	0.0152190	0.83
7	0.040415	0.040692	0.0403965	0.0408220	0.45
8	0.047077	0.047350	0.0470557	0.0474667	0.31
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
10	-0.29275	-0.29438	-0.292617	-0.295021	0.23
11	-0.57650	-0.58096	-0.576237	-0.582786	0.32
12	-0.54941	-0.55751	-0.549161	-0.561465	0.70
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00

6 CONCLUSÃO

Nos capítulos anteriores foi apresentado o desenvolvimento do modelo numérico para a análise não-linear de dutos enterrados. Conclusões referentes às simulações de problemas de linhas de duto em encostas no Capítulo 5, através da implementação computacional do modelo solo-duto, são apresentadas neste capítulo. Temas para trabalhos futuros são sugeridos.

6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste subitem o trabalho reportado é resumido. Após a explanação introdutória sobre o assunto e a apresentação dos objetivos a serem alcançadas no primeiro capítulo, as formulações gerais para o elemento de viga-duto e para o elemento de solo, e o modelo de elementos finitos são desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3. Partindo das hipóteses fundamentais para o duto da teoria de viga de *Bernoulli* e para as molas de solo; da formulação Lagrangeana Total baseada no segundo tensor de tensão *Piola-Kirchhoff* e no tensor de deformação de *Green-Lagrange*; da descrição material elastoplástica segundo o critério de escoamento de *Von Mises* com endurecimento isotrópico para o duto; da avaliação de incrementos de tensão através do método de integração implícita proposto; da interação entre o solo e o duto através de molas elásticas idealmente plásticas; e das equações de equilíbrio para o elemento finito baseado no princípio dos deslocamentos virtuais, foram derivadas as expressões analíticas para o elemento de viga-duto. Na integração numérica das matrizes de rigidez elastoplástica e geométrica e do vetor de força interna para o duto foram utilizados cinco pontos internos de Gauss. Foram utilizados seis pontos de Gauss na integração numérica da matriz de rigidez e do vetor de força interna para as molas de solo. As forças internas equivalentes foram integradas para um número de pontos onde estas são avaliadas na seção transversal do duto dependendo da divisão da mesma em faixas de área.

No Capítulo 4 foram discutidos dois métodos incrementais e iterativos para a solução de um sistema de equações não-lineares, denominados de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado. Este último método de solução foi implementado neste trabalho.

Simulações numéricas de problemas de dutos enterrados em encostas foram efetuadas e suas soluções foram comparadas com análises realizadas no programa ANSYS e / ou com outros estudos no Capítulo 5.

6.2 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho objetivou desenvolver uma metodologia baseada no método de elementos finitos para a análise não-linear incremental iterativa de dutos enterrados em encostas. Na formulação matemática do modelo solo-duto foi incorporado a não-linearidade geométrica e a não-linearidade material (elastoplasticidade).

Depreende-se do exposto neste trabalho, que são necessários estudos que evitem ou diminuam os riscos de acidentes com oleodutos instalados em encostas, já que sua ocorrência tem interesses sociais, econômicos e de preservação ambiental. Ademais, há carência de estudos básicos nessa área de conhecimento, principalmente aqueles referentes ao comportamento mecânico de dutos enterrados em encostas.

O modelo de duto-solo desenvolvido e implementado computacionalmente neste trabalho contribui como uma ferramenta para análises estruturais em projetos de linhas de dutos em encostas.

Neste trabalho foi implementado um método de integração implícito para avaliar as tensões no regime elastoplástico, denominado de método de retorno radial. Na avaliação das tensões para cada incremento de carga, o método apresentou uma melhora na estabilidade e na aceleração durante o processo iterativo utilizando o método de Newton-Raphson Modificado, e uma maior acurácia na predição das tensões.

Em procedimentos de projeto, em geral, os dutos são analisados supondo o comportamento do material elástico linear. Entretanto, freqüentemente as cargas últimas levam o duto a um comportamento caracterizado tanto de relações tensão-deformação não-lineares como a de grandes deslocamentos. A partir das soluções obtidas das simulações computacionais dos problemas apresentados no Capítulo 5, serão colocados a seguir alguns pontos importantes observadas nestas análises.

O duto se deforma sob a ação de carregamentos, alterando a sua geometria. Se as deformações são pequenas, a geometria da malha de elementos finitos altera muito pouco, não tendo de a matriz de rigidez da estrutura ser reformulada (Teoria das pequenas deformações).

Contudo, se as deformações são grandes pode ser necessário recalcular a matriz de rigidez depois de cada incremento de carga, devido a grandes alterações na geometria da malha. Esse fato pode ser observado no primeiro exemplo, onde os resultados para os deslocamentos e as rotações nodais na análise não-linear geométrica diferem substancialmente da análise linear. Essa diferença no comportamento estrutural para ambas as análises pode ser observada no diagrama de deslocamentos verticais do duto, conforme é verificada na Figura 22. Já para o problema proposto no exemplo três, os resultados da análise não-linear geométrica não diferenciaram muito dos resultados da análise linear.

O comportamento não-linear do material (elastoplasticidade) quando o duto é solicitado por cargas externas superficiais é verificado na análise do segundo exemplo e na segunda análise do último exemplo. Nessas análises não-lineares, as tensões foram obtidas utilizando o método de integração implícito proposto neste trabalho. É importante destacar que para uma formulação de um elemento ser aplicável para uma predição de reposta específica, é necessário o uso da descrição constitutiva apropriada.

Nos exemplos 3, 4 e 5 são analisados o comportamento de linhas de dutos enterrados em encostas sujeitas a carregamentos originados pela pressão do solo e sobrecargas, pela pressão interna constante, pela diferença de temperatura e por deslocamentos prescritos em apoios. Análises não-lineares da combinação destes carregamentos juntamente com a interação entre o duto e o solo circundante, são necessárias em procedimentos de projeto, já que o comportamento estrutural de tubulações enterradas é bastante complexo.

O assentamento diferencial produz tensões axiais de flexão ou deslocamentos em linhas de duto. Na Figura 34, apresentada no quarto exemplo, pode-se observar o comportamento estrutural do duto quando este é solicitado por carregamentos externos gerados por assentamento diferencial. Estas tensões induzidas por este tipo de carregamento podem induzir não somente momentos de flexão altos, mas também forças de cisalhamento.

As simulações apresentadas no Capítulo 5 também mostraram a influência da pressão interna e da temperatura na resposta mecânica do duto. A pressão interna pode induzir o surgimento de tensões longitudinais em dutos enterrados devido ao efeito de *Poisson*. Essa tensão surge quando o duto está restringido nas extremidades ou pela fricção do solo ao longo da seção transversal. A diferença de temperatura nas paredes do duto também pode provocar tensões longitudinais adicionais devidas à restrição longitudinal.

Outro ponto importante a se destacar é que os esforços internos são determinados para cada faixa de área ao longo da seção transversal. O somatório desses esforços resulta no vetor de esforços internos para cada elemento. Nas análises dos problemas propostos o número de

divisões em faixas de área influencia na solução do problema. Constatou-se que com o aumento dessas divisões acarreta numa melhora na precisão dos resultados. Em contrapartida, o custo computacional aumenta devido as deformações e tensões correspondentes ao longo da seção transversal do duto serem armazenadas em vetores para cada ponto interno de Gauss do elemento.

Como sugestões para a continuidade do tema em estudos posteriores, este trabalho faz algumas considerações sobre o modelo numérico para dutos enterrados.

A simulação do solo através de um conjunto discreto de molas conectadas às paredes do duto é muito simplificada. Como o solo tem uma relação tensão-deformação não-linear, modelos mais complexos para simular o solo tornam-se necessários.

A relação tensão-deformação deve ser determinada de resultados obtidos de amostras de solo em testes de laboratório. O método usando parâmetros hiperbólicos para descrever as características tensão-deformação do solo pode ser usado quando os testes de laboratórios não estão disponíveis (Duncan *et al.*, 1980 *apud* Watkins & Anderson, 2000).

Na análise em elementos finitos, os nós dos elementos do duto estão conectados aos elementos adjacentes do solo em pontos nodais comuns. Em alguns casos pode ser necessário permitir deslizamento entre o duto e o solo. Este movimento relativo entre as superfícies pode ser representado por elementos de interface. Estes elementos não têm essencialmente tamanho mas, cinematicamente, admitem movimento entre nós quando a força superficial de atrito é excedida (Watkins & Anderson, 2000).

Portanto, um modelo que simule esta interação entre o duto e o solo faz-se conveniente. Lázaro (2004) apresenta a descrição de alguns elementos de interface encontrados na literatura evidenciando suas aplicações e limitações.

O efeito da flambagem local produz uma reposta de amolecimento, ocasionando o empenamento da seção localizado em pequenos segmentos nas curvas do perfil do duto (Zhou & Murray, 1993). Esse efeito deve ser considerado na modelagem do duto

Dutos enterrados apoiados em encostas estão suscetíveis a carregamentos originados por deformação permanente do solo. Essas estruturas podem sofrer colapso causado pela deformação do solo, que pode ocorrer no sentido transversal ou longitudinal ao eixo do duto. Assim, esforços de compressão, tração e flexão podem ocorrer simultaneamente causando condições de carregamentos extremos (Rubio, 2002).

A abordagem para a análise deste problema deve ser efetuada em três dimensões. Nesse problema de interação solo-duto tridimensional, o duto pode ser modelado por um elemento de casca e o solo por um elemento sólido.

Com relação ao programa desenvolvido neste trabalho, sugere-se a implementação de uma visualização gráfica nas fases de pré-processamento e pós-processamento e a geração automática de malhas em elementos finitos. A criação de uma interface gráfica entre o usuário e o programa possibilita tornar a entrada e a saída de dados mais amigáveis e concisas. Quando o modelo para a simulação compreende muitos elementos e nós, tornando a malha de elementos finitos muito complexa, a geração da malha automática torna-se necessária.

Referências Bibliográficas

- ALJANABI, A. I. M., FARID, B. J. M. & MOHAMAD ALI, A. A. A. The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of subgrade reactions. *Computers & Structures*, v. 36, n. 6, p. 1047-1056, 1990.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1982.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- BECKER, E. B., CAREY, G. F. & ODEN, J. T. *Finite Element. An Introduction*. Vol. 1. London: Prentice-Hall International, Inc., 1981.
- BEER, F. P. & JOHNSTON, E. R. *Resistência dos Materiais*. 3. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1995.
- BEER, G. An isoparametric joint interface element for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, n. 4, p. 585 – 600, 1985.
- BRANCO, A. G. M. *A mecânica dos materiais*. Lisboa: Orgal – Orlando & Ca. Lda., 1985.
- BUKOVANSKY, M. & MAJOR, G. Twenty years of monitoring pipelines in landslides. *First European Conference on Landslides*, Czech Republic, Junho 2002.
- BURDEN, R. L. & FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 6. ed. New York: Brooks/Cole Publishing Company, 1997.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- DESAI, C. S., MUSHARRAF-UZ, Z., LIGHTNER, J. G. & SIRIWARDANE, H. J. Thin-layer element for interfaces and joints. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 8, p. 19 – 43, 1984.

DUNCAN, I. C., Jr. *Soil and foundations for architects and engineers*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1992.

GHABOUSSI, J.; WILSON, E. L. & ISENBERG, J. Finite element for rock joints and interfaces. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. 99, n. 10, p. 833 – 848, Outubro 1973.

GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L. & BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. 94, n. 3, p. 637 – 659, Maio 1968.

HERRMANN, L. R. Finite element analysis of contact problems. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. 104, n. 5, p. 1043 – 1059, Outubro 1978.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2000.

IIMURA, S. Simplified mechanical model for evaluating stress in pipeline subject to settlement. *Computers & Structures*, v. 18, p. 469-479, 2004.

LAI, W. M., RUBIN, D. & KREMPL, ERHARD. *Introduction to Continuum Mechanics*. 3. ed. Oxford: Pergamon Press, 1993.

LÁZARO, F. P. *Análise Não-Linear da Interação Solo-Duto em Encostas Empregando Elementos de Interface*. Dissertação (Mestre em Ciências) – UFPR, PPGMNE, Curitiba, Julho 2004.

MEEK, J. L. *Matrix Structural Analysis*. New York: MacGraw-Hill Book Company, 1971.

MEJÍA, I. E. O. *Modelo numérico para o estudo do comportamento de dutos enterrados*. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – PUC-RIO, Rio de Janeiro, Março 2003.

MORFIDIS, K. & AVRAMIDIS, I. E. Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets. *Computers & Structures*, v. 80, p. 1919-1934, 2002.

MOSER, A. P. *Buried Pipe Design*. 2. ed. New York: MacGraw-Hill, 2001.

NGO, D. & SCORDELIS, C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal American Concrete Institute*, v. 064, n. 3, p. 152 – 163, Março 1967.

NVILLE, A. M. & GHALI, A. *Structural Analysis: a unified classical and matrix approach*. 3. ed. London: Chapman & Hall, 1989.

OLIVEIRA, P. A. *Análise estática não-linear de cabos suspensos utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestre em Ciências) – UFPR, Curitiba, abril 2002.

PEREIRA, W. L. A. & SILVEIRA, R. A. M. Numerical solutions of beams under unilateral contact imposed by elastic foundation. In: 25th IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XXV CILAMCE). *Anais ...* Recife: Federal University of Pernambuco, 2004, CD-ROM.

RAZAQPUR, A. G. & WANG, D. Frost-induced deformations and stresses in pipelines. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, v. 69, p. 105-118, 1996.

ROEHL, D. M. *Uma Metodologia para a Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Espaciais com Liberações de Extremidade de Barra e Cargas Distribuídas*. Dissertação (Mestre em Ciências de Engenharia Civil) - PUC-RIO, Rio de Janeiro, Setembro 1987.

RUBIO, N. P. R. *Estudo do comportamento de dutos enterrados considerando efeitos de interação solo-estrutura*. Proposta de Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - PUC-RIO, Rio de Janeiro, Dezembro 2002.

SANDRONI, S. S., LACERDA, W. A., SILVA, S. R. B. & BRANDT, J R. T. Segurança geotécnica de dutos em encostas da zona costeira brasileira. In: 3rd SEMINAR ON PIPELINE. *Brazilian Petroleum and Gas Institute – IBP*. Rio de Janeiro, 2001.

SANTOS, A. J. B., GUERREIRO, J. N. C. & LOULA, A. F. D. Um estudo de dutos sujeito a restrições unilaterias. In: 25th IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (XXV CILAMCE). *Anais ...* Recife: Federal University of Pernambuco, 2004, CD-ROM.

SAYEGH, A. F. & TSO, F. K. Finite element analysis of curved beams on a nonlinear foundation. *Computers & Structures*, v. 45, n. 2, p. 253-262, 1992.

SELVADURAI, A. P. S. & PANG, S. Non-linear effects in soil-pipeline interaction in the ground subsidence zone. *Numerical Methods in Geomechanics*, p. 1085 – 1094, 1988.

TRAUTMANN, C. H., O'ROURKE, T. D. & KULHAWY, F. H. Uplift Force-Displacement Response of Buried Pipe. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 111, n. 9, p. 1061-1076, 1985.

TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. E. Mecânica dos sólidos. Volume 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1993.

ZHOU, Z. & MURRAY, D. W. Behavior of buried pipelines subjected to imposed deformations. *OMAE – Pipeline Technology ASME*, v. 5, p. 115-122, 1993.

ZHOU, Z. & MURRAY, D. W. Pipeline Beam Models Using Stiffness Property Deformation Relations. *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, v. 122, n. 2, p. 164-172, 1996.

ZIENKIEWICZ, O. C. *et al.* Analysis of non linear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems. In: THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS. *Proceedings of the Second Congress*. Beograd, 1970 v. 3, p. 8 – 14.

ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Volume 2: Solid Mechanics. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

WATKINS, R. K. & ANDERSON, L. R. *Structural mechanics of buried pipes*. New York: CRC Press LLC, 2000.

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A.1 INTRODUÇÃO

Esta parte em anexo objetiva descrever sucintamente a implementação computacional baseada na formulação apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4. É desenvolvido um programa denominado INTERA 3D, cuja a linguagem utilizada é o COMPAQ VISUAL FORTRAN EDITOR 6.5.

O programa faz análises não-lineares de linhas de dutos imersos em encostas tridimensionalmente. A não-linearidade geométrica e a não-linearidade de material são incorporadas no modelo.

O material do duto assume comportamento elástico linear até que a tensão axial máxima atuante seja inferior a tensão de escoamento. Quando esta tensão a que o duto está submetido ultrapassa a tensão de escoamento, o material assume um comportamento elástico-plástico e o critério de escoamento se dá através de *von Mises*, com endurecimento isotrópico.

O solo é simulado através de molas de solo elásticas perfeitamente plásticas nas direções transversais e na direção longitudinal.

Dentre os carregamentos em que o duto pode ser solicitado, este programa permite os seguintes tipos de cargas estáticas: cargas distribuídas (retangulares, trapezoidais e triangulares), concentradas, momentos, temperatura, pressão interna e deslocamentos impostos na estrutura.

Nas seções seguintes é descrito como entrar com os dados do modelo para a simulação numérica, como a solução passo-a-passo é atingida e por fim a visualização dos resultados obtidos no programa.

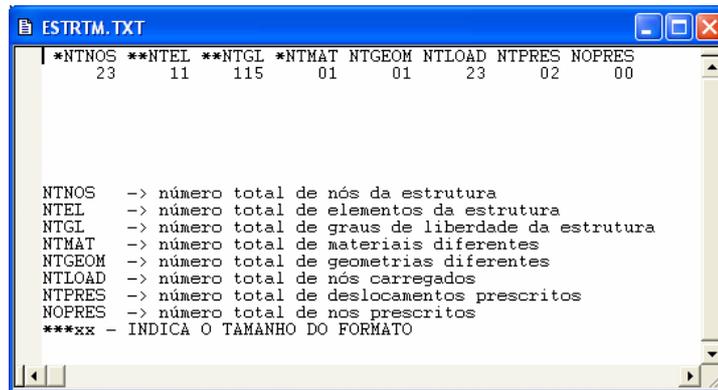
A.2 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

A.2.1 PRÉ-PROCESSAMENTO - ENTRADA DE DADOS

No programa INTERA 3D todas as informações necessárias para o pré-processamento é feita através da leitura de arquivos com extensão “.txt”.

Primeiramente entra-se com os dados gerais da estrutura: o número total de nós (ntnos), de elementos (ntel), de graus de liberdade (ntgl), de nós carregados (ntload), de materiais diferentes (ntmat), de geometrias diferentes (ntgeom) e de deslocamentos prescritos (ntpresc). Estes dados são armazenados em um arquivo denominado “estrtrm.txt”, conforme é exemplificado na Figura 43.

FIGURA 43 – ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS QUE INFORMA AO PROGRAMA OS DADOS GERAIS DA ESTRUTURA.



Em seguida é informada ao programa a geometria da estrutura a ser modelada dada pelas coordenadas globais nodais (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e \tilde{x}_3). Outros dados referentes ao modelo também são informados como as propriedades do material (E, E_T, G, ν, α e S_y) e as propriedades geométricas da seção transversal (D_e e t) do duto; as propriedades das molas de solo ($K_{AS}, K_{BS}, K_{US}, K_{LLS}$ e K_{RLS}); os carregamentos estáticos em que a estrutura será solicitada; e as condições de contorno da estrutura.

As condições de contorno são definidas restringindo-se ou não os graus de liberdade nodais ($u^j, v^j, w^j, \theta_z^j$ e θ_y^j) e pela imposição de deslocamentos prescritos nos nós. As condições de contorno referentes aos graus de liberdade são informadas e lidas pelo programa através do arquivo chamado “dofestrut.txt”, conforme é mostrado na Figura 44. A imposição de deslocamento é feita informando ao programa o valor do deslocamento prescrito para o grau de liberdade do nó correspondente.

FIGURA 44 – ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS QUE INFORMA AO PROGRAMA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO REFERENTES AOS GRAUS DE LIBERDADE NOS NÓS DA ESTRUTURA.

	i		j		k										
***U1	***V1	***W1	ROTZ1	ROTY1	***U2	***V2	***W2	ROTZ2	ROTY2	***U3	***V3	***W3	ROTZ3	ROTY3	*3D**
U1	***V1	ROTZ1	***U2	***V2	ROTZ2	***U3	***V3	ROTZ3	**	*****	*****	*****	*****	*****	*2D**
00	00	03	04	05	11	12	13	14	15	06	07	08	09	10	
11	12	13	14	15	21	22	23	24	25	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	31	32	33	34	35	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	41	42	43	44	45	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	00	00	53	54	55	46	47	48	49	50	
00	00	53	54	55	61	62	63	64	65	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	00	00	73	74	75	66	67	68	69	70	
00	00	73	74	75	81	82	83	84	85	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	00	00	93	94	95	86	87	88	89	90	
00	00	93	94	95	101	102	103	104	105	96	97	98	99	100	
101	102	103	104	105	000	000	113	114	115	106	107	108	109	110	

De posse destas informações referentes ao pré-processamento, o programa inicia o processamento que consiste da análise não-linear incremental.

A.2.2 PROCESSAMENTO - SOLUÇÃO PASSO-A-PASSO

Concluída a etapa de entrada de dados, a análise incremental inicia-se com as seguintes condições:

$$\left\{ {}^{t+\Delta t}U^{(0)} \right\} = \left\{ {}^tU \right\} \quad (\text{A.1})$$

$$\left\{ {}^{t+\Delta t}F^{(0)} \right\} = \left\{ {}^tF \right\} \quad (\text{A.2})$$

onde $\left\{ {}^{t+\Delta t}U^{(0)} \right\}$ é o vetor de deslocamentos nodais nos sistema de coordenada globais referente ao tempo $t + \Delta t$ e iteração 0; $\left\{ {}^{t+\Delta t}F^{(0)} \right\}$ é o vetor de forças internas referente ao tempo $t + \Delta t$ e iteração 0.

Para o primeiro incremento de carga é determinado a matriz de rigidez para cada elemento da discretização do duto, que é a soma das parcelas referentes as matrizes elementares de rigidez elastoplástica, geométrica e das molas de solo. Se no primeiro passo de carga, o vetor deslocamento dado pela expressão (A.1) é nulo, então as deformações e as tensões correspondentes são nulas. Conseqüentemente a matriz de rigidez geométrica que depende dos esforços internos equivalentes é nula e a matriz de rigidez devido às molas de solo também é nula, já que as molas de solo só contribuem na rigidez da estrutura se houver deslocamento. A matriz de rigidez da estrutura global e o vetor de cargas externas global são determinados através do método de rigidez direta.

Computados a matriz de rigidez global e o vetor de cargas externas global da estrutura, é determinada a solução da equação:

$$[{}^{\tau}K^{(0)}]\{\Delta U^{(1)}\} = \{{}^{t+\Delta t}R\} - \{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}\} \quad (\text{A.3})$$

para o vetor $\{\Delta U^{(1)}\}$ utilizando o método de eliminação de Gauss.

Determinado o vetor incremental de deslocamentos no sistema de coordenadas globais na iteração 1, obtido da solução da equação (A.3), é determinado o vetor de deslocamentos incremental no sistema de coordenadas locais. A partir deste vetor são determinados os incrementos de deformação e de tensão para cada faixa de área da seção transversal do duto, correspondente a cada ponto interno de *Gauss* no elemento. Com estes valores de tensões, são calculados os vetores de esforços internos $\{{}^{t+\Delta t}F^{(1)}\}$ para cada elemento através da integração numérica e em seguida é obtido o vetor de esforço interno global. A determinação dos esforços internos de uma iteração encerra as etapas do processo de solução para esta iteração.

O equilíbrio para o nível de carga em questão é obtido fazendo a diferença entre as forças externas e os esforços internos como mostrado na equação (A.4), dada por:

$$\{\Delta R^{(0)}\} = \{{}^{t+\Delta t}R\} - \{{}^{t+\Delta t}F^{(0)}\} \quad (\text{A.4})$$

onde $\{\Delta R^{(0)}\}$ é o vetor de carga desbalanceado. Este processo descrito até este ponto denota a análise linear.

Na análise não-linear incremental, de acordo com o método de Newton-Raphson modificado, procedimentos adicionais são introduzidos na obtenção da solução. Obtido o vetor de carga desbalanceado na iteração 1, determina-se um novo vetor de deslocamentos:

$$\{{}^{t+\Delta t}\Delta U^{(1)}\} = \{{}^{t+\Delta t}U^{(0)}\} + \{\Delta U^{(1)}\} \quad (\text{A.5})$$

onde $\{{}^{t+\Delta t}U^{(1)}\}$ é o vetor de deslocamentos no sistema de coordenadas globais referente ao tempo $t + \Delta t$ e iteração 1. A partir destes deslocamentos, convertidos para o sistema de coordenadas locais, são determinados os incrementos de deformações e os incrementos de tensões correspondentes. As tensões para o cálculo das forças internas $\{{}^{t+\Delta t}F^{(1)}\}$ são determinadas como a soma da tensão do passo de carga anterior $\{{}^tS\}$ com o novo incremento de tensão obtido nesta iteração 2 $\{{}^{t+\Delta t}\Delta S^{(1)}\}$ para o passo de carga corrente, dadas pela seguinte expressão:

$$\{{}^{t+\Delta t}S^{(1)}\} = \{{}^tS\} + \{{}^{t+\Delta t}\Delta S^{(1)}\} \quad (\text{A.6})$$

Um novo sistema de equações, dado pela equação:

$$[{}^{\tau}K^{(1)}]\{\Delta U^{(2)}\} = \{{}^{t+\Delta t}R\} - \{{}^{t+\Delta t}F^{(1)}\} \quad (\text{A.7})$$

é resolvido e um novo vetor de deslocamentos $\{\Delta U^{(2)}\}$ no sistema de coordenadas globais é determinado. Como é aplicado o método de Newton-Raphson modificado, a matriz de rigidez não é atualizada durante as iterações, sendo esta atualizada somente no início de cada passo de carga. A cada iteração surgem acréscimos de deslocamentos e tensões que tendem, em geral, a diminuir o desequilíbrio. Este processo é repetido até que seja verificada a convergência para a solução dentro da tolerância imposta. Uma vez atingida a convergência, o passo de carga seguinte é iniciado.

Na análise incluindo o efeito da não-linearidade geométrica, a geometria da estrutura é atualizada sempre no início de cada passo de carga. Portanto, o próximo passo de carga inicia-se da configuração deformada corrente da estrutura. Como as coordenadas dos nós são alteradas para cada passo de carga, a matriz de rotação é alterada.

A.3 PÓS-PROCESSAMENTO - VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS.

Terminada a etapa do processamento, isto é, depois da realização da análise não-linear incremental iterativa, inicia-se a tarefa de interpretação dos resultados.

A saída de resultados consiste da visualização na tela dos deslocamentos (u^j , v^j e w^j) e rotações (θ_x^j e θ_y^j) nos nós; do diagrama de deformação da estrutura; do gráfico carga versus deslocamento e do gráfico tensão versus deformação para um ponto específico da estrutura. Outros resultados como as deformações e tensões determinados nos nós e nos pontos internos de Gauss para cada ponto x_2 da seção transversal em cada elemento são armazenados em arquivos de saída com extensão “.txt”.

Nas Figuras 45, 46 e 47 são mostrados exemplos de arquivos de saída gerados pelo programa INTERA 3D.

FIGURA 45 – VISUALIZAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS (U^j , V^j E W^j) NA TELA APÓS O TÉRMINO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ITERATIVA.

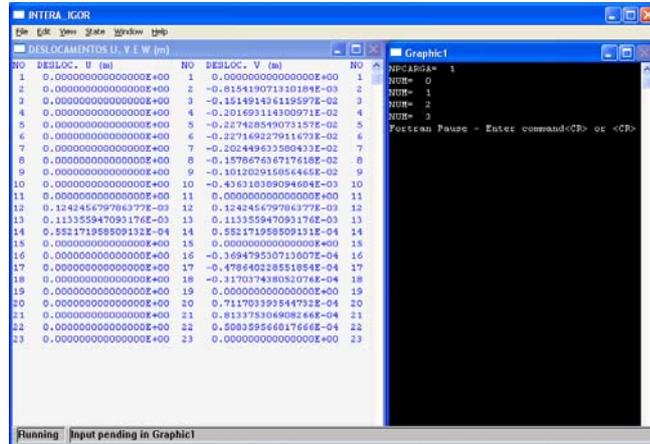


FIGURA 46 – VISUALIZAÇÃO DO DIAGRAMA DE DEFORMAÇÃO DA ESTRUTURA NA TELA APÓS O TÉRMINO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ITERATIVA.

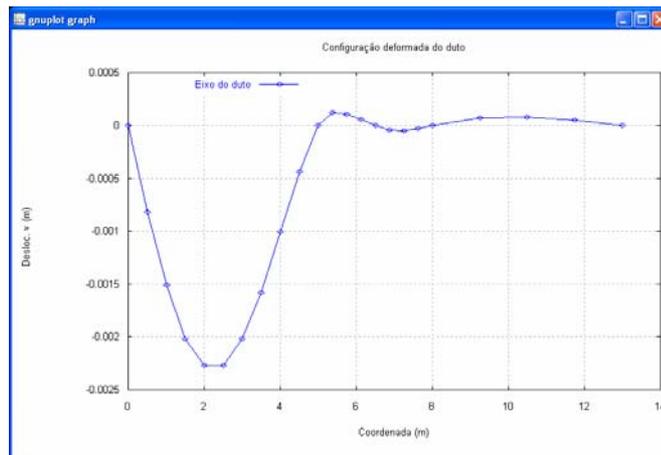
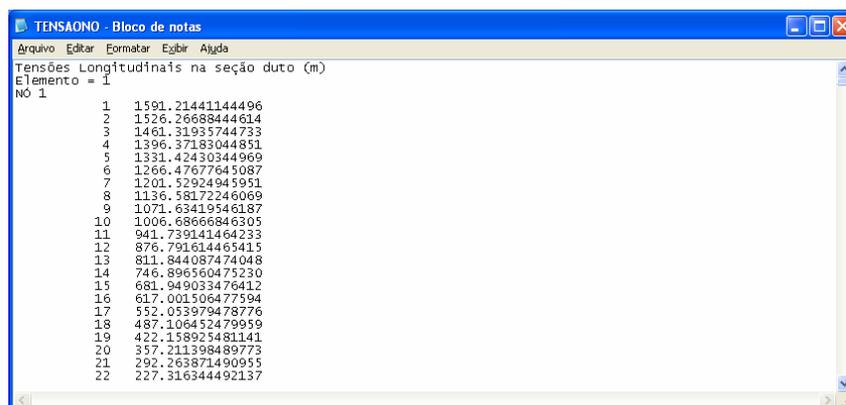


FIGURA 47 – ARQUIVO DE SAÍDA “TANSAONO.TXT” ONDE ESTÃO ARMAZENADOS OS VALORES DAS TENSÕES NOS NÓS APÓS O PROCESSAMENTO.



APÊNDICE B – SUBROTINA C1RAD1

```

!*****
!*
SUBROUTINE CIRAD1(SY,ET,E,NU,G,ST,SEFET,EPSTN,SX)
!*
!* OBJETIVO:
!* DETERMINAÇÃO DE SX (MÉTODO DO RETORNO RADIAL).
!*
!* OBSERVACOES:
!*
!* ARGUMENTOS:
!* -E=MODULO DE ELASTICIDADE
!* -NU=COEFICIENTE DE POISSON
!* -ET=MÓDULO TANGENTE
!* -G=MÓDULO DE CISALHAMENTO
!* -ST=TENSÃO CIRCUNFERENCIAL
!* -SEFET=TENSÃO EFETIVA
!* -EPSTN=DEFORMAÇÃO PLÁSTICA UNIAXIAL EQUIVALENTE
!* -SX=PROJEÇÃO DO PREDITOR ELÁSTICO SOBRE A SUPERFÍCIE DE
!* ESCOAMENTO
!* -DLAM=INCREMENTO DO MULTIPLICADOR PLÁSTICO
!* -ESIG=TENSÃO DE ESCOAMENTO UNIAXIAL CORRENTE
!*
!* ENTRADAS:SY,ET,E,NU,G,ST,SEFET,EPSTN
!* SAÍDA: SX,EPSTN
!* CHAMADAS:
!*
!* SETEMBRO DE 2004 LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA
!*****

```

IMPLICIT NONE

INTEGER I

REAL*8, INTENT(IN)::SY,ET,E,NU,G,ST,SEFET

REAL*8, INTENT(OUT)::SX

REAL*8 RO32,RO23,SM,DLAM,EPST,EPSTN,DHARD,FHARD,UNIAX,F,DFDL,
SR,ESIG

REAL*8, DIMENSION(3)::S,RNORM

RO32=DSQRT(3.0D0/2.0D0)

RO23=1.0D0/RO32

FHARD=E*ET/(E-ET)

UNIAX=SY

!***** REGRA DE ENDURECIMENTO NÃO-LINEAR *****

!***** INICIALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS *****

DLAM=0.0D0

SR=0.0D0

SM=(ST+SR+SX)/3.0D0

!COMPONENTES DO TENSOR DESVIADOR DE TENSÕES

S(1)=ST-SM

S(2)=SR-SM

S(3)=SX-SM

DO I=1,3
RNORM(I)=S(I)/SEFET
END DO

I=0
!**** ESQUEMA DE ITERAÇÃO PARA OBTER O INCREMENTO DE
MULTIPLICADOR PLÁSTICO PARA REGRA DE ****
! ENDURECIMENTO NÃO-LINEAR

500 I=I+1

!NOVA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA UNIAXIAL
EPST=EPSTN+RO23*DLAM

!NOVA RAZÃO DE ENDURECIMENTO
DHARD=FHARD

!NOVA TENSÃO DE ESCOAMENTO UNIAXIAL
ESIG=RO23*(UNIAX+FHARD*EPST)

!APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE VON MISES
F=SEFET-ESIG-2.0D0*G*DLAM

!DERIVADA DO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO COM RELAÇÃO AO INCREMENTO
PLÁSTICO
DFDL=-2.0D0*G*(1.0D0+DHARD/(3.0D0*G))

!NOVO INCREMENTO PLÁSTICO
DLAM=DLAM-F/DFDL

!CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA
IF (ABS(F/ESIG)>0.00001D0) THEN
IF (I>30) STOP
GO TO 500
END IF

!*****DEFORMAÇÃO PLÁSTICA ATUALIZADA*****
EPSTN=EPST

!*****NOVO ESTADO DE TENSÃO*****
DO I=1,3
S(I)=S(I)-2.0D0*G*DLAM*RNORM(I)
END DO

SX=S(3)+SM

RETURN
END SUBROUTINE