

SEBASTIAN ALFREDO FUENTES SANTIBAÑEZ

**AVALIAÇÃO DA INFLUENCIA DO MODELO DE AJUSTAMENTO DE
OBSERVAÇÕES E DA DENSIDADE DE PONTOS LASER *SCANNER* TERRESTRE
PARA A REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE SUPERFÍCIES PLANAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós -
Graduação em Ciências Geodésicas, área de
concentração em Levantamentos, Setor ciências
da Terra. Universidade Federal do Paraná, como
requisito parcial à obtenção do grau de Mestre
em Ciências Geodésicas,

Orientadores: Prof. Dr. Pedro Luis Faggion
Prof. Dr. Daniel R dos Santos

CURITIBA
NOVEMBRO, 2010

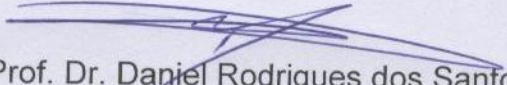
TERMO DE APROVAÇÃO

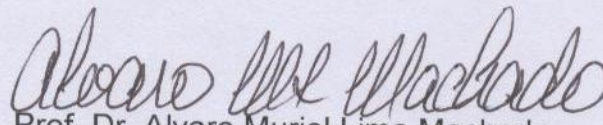
SEBASTIAN ALFRÉDO FUENTES SANTIBAÑEZ

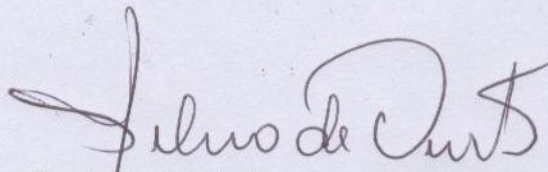
*AVALIAÇÃO DA INFLUENCIA DO MÉTODO DE AJUSTAMENTO DE
OBSERVAÇÕES E DA DENSIDADE DE PONTOS LASER SCANNER TERRESTRE
PARA A REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE SUPERFÍCIES PLANAS COMO
FERRAMENTA PARA O CONTROLE DE DESLOCAMENTO DE ESTRUTURAS*

Dissertação nº 239 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:


Prof. Dr. Daniel Rodrigues dos Santos
Departamento de Geomática, UFPR


Prof. Dr. Alvaro Muriel Lima Machado
Departamento de Geomática, UFPR


Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas
Departamento de Geomática, UFPR

Curitiba, 15 de dezembro de 2010.

To my wife Amanda, to our journey.

First and foremost I would like to thank my wife Amanda for her endless love and support during this journey.

Agradeço também a meus professores orientadores, Daniel Rodrigues dos Santos e Pedro Luis Faggion, pelo apoio e amizade. Ao CPGCG, professores e administrativos pela oportunidade de expandir meus conhecimentos. A CAPES e CONICYT pelos auxílios econômicos. Ao departamento de Geologia, pelo empréstimo de Laser Scanner utilizado nos experimentos. Ao professor Álvaro Machado pelas suas valiosas críticas. E aos amigos que fiz no Brasil.

"Now, here you see, it takes all the running you can do, to keep in the same place. If you want to get somewhere else, you must run at least twice as fast as that!"

Through the Looking-Glass, and What Alice Found There – Lewis Carroll

RESUMO

O estudo aborda a influencia de diferentes modelos de ajustamento de observações e quantidade de pontos utilizados na representação paramétrica de superfícies planas no contexto da detecção de deslocamentos de estruturas.

Um experimento foi conduzido onde deslocamentos angulares conhecidos, com magnitudes de entre 120 e 520" de arco foram aplicados a uma estrutura plana. Ditos deslocamentos foram medidos independentemente usando um nível eletrônico com precisão de 0.1" e com base em análise vetorial. Foram testados os modelos de ajustamento "Erros Nas Variáveis" e "Modelo Paramétrico" com duas variantes além de diferentes quantidades de pontos utilizados na representação paramétrica da superfície e dos métodos de detecção de *outliers* "critério de rejeição de *Chauvenet*" e "teste TAU".

Os resultados revelam que o modelo "Erros Nas Variáveis" tem um melhor desempenho que o "Modelo Paramétrico" em termos de sensibilidade, eficiência e precisão desde que permite detectar deslocamentos menores utilizando menos pontos no modelamento e com melhor precisão. Também, foi observada uma rápida melhora na precisão das medições quando se incrementa a densidade de pontos utilizados desde 0.48 até aproximadamente 10 pontos/dm². Após esse limiar a melhora na precisão é lenta. Finalmente foi observado que os métodos de detecção de *outliers* utilizados não influem significativamente na precisão da medição dos deslocamentos.

PALAVRAS CHAVE

LASER *Scanner* Terrestre, Deslocamentos de estruturas, Representação paramétrica, Mínimos Quadrados Totais, Mínimos Quadrados Ordinários, Resolução de varredura.

ABSTRACT

This study discusses the influence of different fitting models and point density samples for the parametric shaping of planar surfaces when used to detect deformations of man made structures.

It was conducted an experiment where known angular displacements ranging 120 to 520" of arch were applied to a planar structure. Those displacements were measured independently with an electronic level (precision 0.1") and through normal vectors analysis. The fitting models "Errors In Variables" and "Parametric Model" with two variations were tested as well as different point density samples and the outliers detection methods "*Chauvenet's* rejection criteria" and "TAU test".

The results show that the model "Error in Variables" performs better than the "Parametric Model" in terms of sensitivity, efficiency and precision since it detects smaller deformations using less points and with higher precision. Also, it was observed a fast improvement in the precision of the measurements when the point density sample grows from 0.48 to 10 points/dm². After that point the improvement is rather slow. Finally it was observed that the methods used for the outliers detection do not have a significant influence in the measurement of deformations.

KEYWORDS

Terrestrial Laser Scanner, Deformation Measurement, Plane Fitting, Total Least Squares, Ordinary Least Squares, Scan Resolution.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO LST TOF.....	8
FIGURA 02 - MODULAÇÃO DO PULSO.....	9
FIGURA 03 - DISTANCIÔMETRO DE PULSO LASER.....	10
FIGURA 04 - PRIMEIRO E SEGUNDO PULSO.....	13
FIGURA 05 - ERROS AXIAIS DO LST.....	14
FIGURA 06 - ERRO DE OSCILAÇÃO NO “IMAGER5003”.....	15
FIGURA 07 - OBSERVÁVEIS E GEOREFERENCIAMENTO DIRETO.....	17
FIGURA 08 - PLANO DEFINIDO POR UM PONTO E O VETOR NORMAL.....	19
FIGURA 09 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO PARAMÉTRICO.....	26
FIGURA 10 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO ERROS NAS VARIÁVEIS.....	27
FIGURA 11 - DIAGRAMA DE PROBABILIDADE NORMAL.....	28
FIGURA 12 - MESA DE GRANITO COM PARAFUSOS NIVELANTES.....	36
FIGURA 13 - SISTEMA DE VARREDURA <i>LASER</i> CYRAX HDS3000.....	36
FIGURA 14 - NÍVEL ELETRÔNICO TALYVEL.....	37
FIGURA 15 - DIAGRAMA DE FLUXO DA METODOLOGIA PROPOSTA.....	39
FIGURA 16 - CONFIGURAÇÃO ESPACIAL LST – OBJETO EM ANÁLISE.....	47
FIGURA 17 - RELAÇÃO NÍVEL ELETRÔNICO – OBJETO EM ANÁLISE.....	48
FIGURA 18 - ORIENTAÇÃO EIXO DO NÍVEL, EIXO DE INCLINAÇÃO DO OBJETO EM ESTUDO E SISTEMA DE COORDENADAS.....	49
FIGURA 19 - EFEITO DE DESLOCAMENTO LINEAR CAUSADO PELO DESLOCAMENTO ANGULAR IMPOSTO.....	50
FIGURA 20 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPD, <i>CHAUVENET</i> , S4, E0.....	55
FIGURA 21 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS ENVD, TESTE TAU, S4, E0.....	55
FIGURA 22 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, TESTE TAU, S4, E0.....	56
FIGURA 23 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, TESTE TAU, S4, E3.....	56
FIGURA 24 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, <i>CHAUVENET</i> , S4, E0.....	56
FIGURA 25 - NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPD, TESTE TAU, S4, E0.....	57
FIGURA 26 - RELAÇÃO ENTRE A PRECISÃO DOS DESLOCAMENTOS ANGULARES MEDIDOS E A QUANTIDADE DE PONTOS UTILIZADOS NO AJUSTAMENTO.....	69
FIGURA 26 - DESVIOS PADRÕES DAS DIFERENÇAS CALCULADAS PARA OS DESLOCAMENTOS MEDIDOS COM LST E COM NÍVEL ELETRÔNICO, EIXO Y, AMOSTRAS S4, S3, S2 E S1.....	72

LISTA DE TABELAS

TABELA 01 - NÍVEIS DE CONFIANÇA E VALORES CRÍTICOS PARA O TESTE <i>DATA SNOOPING</i>	33
TABELA 02 - ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS CYRAX HDS3000.....	37
TABELA 03 - ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS NÍVEL TALLYVEL.....	38
TABELA 04 - DESLOCAMENTOS ANGULARES APLICADOS.....	49
TABELA 05 - QUANTIDADE DE PONTOS POR ÉPOCA.....	50
TABELA 06 - AMOSTRAS DE PONTOS	51
TABELA 07 - OBSERVAÇÕES REJEITADAS.....	53
TABELA 08 - NORMALIDADE REJEITADA.....	54
TABELA 09 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, ENVD, TESTE TAU.....	58
TABELA 10 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, ENVD, <i>CHAUVENET</i> ..	59
TABELA 11 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPZ, TESTE TAU.....	61
TABELA 12 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPZ, <i>CHAUVENET</i>	63
TABELA 13 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPD, TESTE TAU.....	65
TABELA 14 - DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPD, <i>CHAUVENET</i>	67
TABELA 15 - DIFERENÇA EM SEGUNDOS ENTRE DESLOCAMENTOS APLICADOS E MEDIDOS, TODOS OS MÉTODOS, AMOSTRAS S4, S3, S2 e S1.....	71

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

A^{-1}	Inversa de uma matriz A
A^{+}	Pseudo-inversa de uma matriz A
DVS	Descomposição em valores singulares
ENV	Erros nas variáveis
<i>GPS</i>	<i>Global Positioning System</i>
LST	LASER <i>scanner</i> terrestre
MMQ	Método dos mínimos quadrados
MP	Modelo paramétrico
MVC	Matriz Variância-Covariância
TOF	<i>Time of flight</i>
VMP	Valor mais provável
[A;B]	Matriz A aumentada em B
$\ \cdot \ _F$	Norma de Frobenius
$\ \cdot \ $	Norma euclideana
σ	Desvio Padrão
σ_0^2	Variância da unidade de peso a priori
$\hat{\sigma}_0^2$	Variância da unidade de peso a posteriori
μJ	Micro Joule
<i>ns</i>	Nano segundo

SUMARIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	OBJETIVOS.....	2
1.1.1	Geral.....	2
1.1.2	Específicos.....	2
1.2	JUSTIFICATIVA.....	3
1.3	ESTRUTURAÇÃO.....	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1	ESTADO DA ARTE.....	4
2.2	SISTEMA DE VARREDURA LST.....	7
2.2.1	Método TOF.....	7
2.2.1.1	Modulação do pulso.....	8
2.2.1.2	Detectores.....	9
2.2.1.3	Distanciômetro <i>LASER</i>	9
2.2.1.4	Unidade de deflexão do feixe <i>LASER</i>	10
2.2.2	Fontes de erro do LST TOF.....	11
2.2.2.1	Erros instrumentais.....	11
2.2.2.1.1	Erros fundamentais.....	11
2.2.2.1.2	Erros específicos do <i>hardware</i>	12
2.2.2.2	Erros relacionados ao objeto.....	15
2.2.2.3	Erros ambientais.....	16
2.2.2.4	Erros de georeferenciamento.....	16
2.3	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO CÁLCULO DE PARÂMETROS PARA O AJUSTAMENTO DE SUPERFÍCIES PLANAS.....	18
2.3.1	Representação paramétrica de uma superfície plana.....	18
2.3.2	Ajustamento de um plano pelo MMQ.....	19
2.3.2.1	Modelo paramétrico.....	20
2.3.2.2	Modelo erros nas variáveis.....	22
2.3.2.2.1	Descomposição em Valores Singulares.....	23
2.3.2.2.2	Modelo Erros Nas Variáveis por vetores singulares.....	24
2.3.2.2.3	Relação com análise por componentes principais (<i>ACP</i>).....	25
2.3.2.2.4	Considerações geométricas.....	26
2.3.3	Qualidade do ajustamento.....	27
2.3.3.1	Normalidade dos resíduos.....	27
2.3.3.1.1	Diagrama de probabilidade normal.....	28
2.3.3.1.2	Teste de normalidade <i>Lilliefors</i>	29
2.3.3.2	Teste χ^2 de qualidade do ajustamento.....	30
2.3.4	Rejeição de observações.....	31
2.3.4.1	Critério de rejeição de <i>Chauvenet</i>	31
2.3.4.2	Data <i>Snooping</i>	32
2.3.4.3	Teste TAU.....	33
3	MATERIAIS E MÉTODOS.....	35
3.1	MATERIAIS.....	35
3.1.1	Mesa de granito com parafusos nivelantes.....	35
3.1.2	Sistema de varredura <i>LASER</i> CYRAX HDS3000.....	36
3.1.3	Nível eletrônico Talyvel.....	37

3.1.4	Pacote para álgebra linear LAPACK.....	38
3.1.5	Aplicativo do sistema CYRAX HDS3000 “Cyclone”.....	38
3.2	MÉTODOS.....	39
3.2.1	Representação paramétrica do objeto em estudo.....	40
3.2.1.1	“Modelo paramétrico Z”.....	40
3.2.1.2	“Modelo paramétrico D”.....	40
3.2.1.3	“Modelo erros nas variáveis D”.....	41
3.2.2	Detecção de <i>outliers</i>	41
3.2.3	Qualidade do Ajustamento.....	42
3.2.3.1	Teste de normalidade dos resíduos.....	42
3.2.3.2	Teste de centragem das médias.....	42
3.2.3.3	Estimativa de precisão dos parâmetros calculados.....	43
3.2.4	Estimação de deslocamentos angulares.....	43
3.2.4.1	Existência de deslocamentos angulares.....	43
3.2.4.2	Representação dos planos.....	45
3.2.4.3	Magnitude dos deslocamentos.....	45
4	EXPERIMENTOS.....	46
4.1	CONFIGURAÇÃO DO EXPERIMENTO.....	46
4.1.1	Configuração espacial LST – objeto em análise.....	46
4.1.2	Relação objeto em análise – nível eletrônico.....	47
4.1.3	Sistema de coordenadas.....	48
4.1.4	Deslocamentos angulares aplicados.....	49
4.1.5	Segmentação de planos.....	50
4.1.6	Geração de amostras.....	51
4.1.7	Validação das amostras.....	51
4.2	SOLUÇÕES DE REPRESENTAÇÃO DO OBJETO EM ESTUDO.....	52
4.2.1	Representação paramétrica do objeto em estudo.....	53
4.2.2	Detecção de <i>outliers</i>	53
4.2.3	Teste de qualidade do ajustamento de observações.....	53
4.2.3.1	Teste de normalidade dos resíduos.....	54
4.2.3.2	Teste de centragem das médias.....	57
4.3	DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES.....	57
4.4	RELAÇÃO ENTRE PRECISÃO NA DETECÇÃO DE DESLOCAMENTOS ANGULARES, MODELOS DE AJUSTAMENTO E DENSIDADE DE PONTOS... ..	68
4.5	COMPARAÇÃO COM DESLOCAMENTOS ANGULARES APLICADOS.....	70
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	73
	REFERÊNCIAS	

1 INTRODUÇÃO

O monitoramento de estruturas é uma tarefa comumente realizada com instrumentos como Níveis, Teodolitos, Estações Totais ou *GPS*. Uma abordagem comum é medir as coordenadas de um ponto com precisão em uma época “*i*” e remedir ditas coordenadas numa época “*i+1*”. Se a variação das coordenadas está na ordem da tolerância do método utilizado supõe-se que o objeto em estudo não é sujeito a deformações ou deslocamentos. Segundo Osipov (2003) e Van Genechten et al. (2009) as precisões alcançáveis com esta abordagem variam desde os 0.3 até algumas dezenas de milímetros. Uma das principais desvantagens desta abordagem é que as coordenadas medidas representam informação discreta e por tanto a existência de deslocamentos ou deformações nos pontos não observados é desconhecida.

A utilização de técnicas e ferramentas fotogramétricas vem auxiliando às tarefas de monitoramento de estruturas principalmente com a adoção do *LASER scanner* terrestre (LST), instrumento que permite obter um grande volume de coordenadas tridimensionais de um objeto por meio de emissão de pulsos LASER que são retro-espalhados pelo objeto perfilado sem precisar de alvos. Uma das limitações que impedem a massificação do LST em tarefas de levantamento é o fato de que a precisão no posicionamento de um ponto isolado é pior que a obtida com instrumentos topográficos convencionais, como por exemplo, com estações totais. Para superar esta limitação, muitos autores propõem representar a superfície monitorada mediante uma primitiva geométrica, geralmente linear ou quadrática, e estimar com suficientes graus de liberdade os parâmetros que as representam. Assim pode-se estimar o deslocamento que afeta uma superfície ao analisar diretamente os parâmetros que representam a superfície de interesse em épocas distintas ou por meio de relações estatísticas entre as nuvens de pontos coletados e o modelo matemático adotado. Os trabalhos de Lindenbergh e Pfeifer (2005), Schneider (2006), Al-neshawy, et al. (2010), Van Genechten, et al. (2009) e Van Gosliga, et al (2006) entre outros, baseiam suas pesquisas neste fato.

Esta dissertação aborda a influência dos modelos de ajustamento de observações e a quantidade de pontos coletados com LST como ferramenta para a detecção de deslocamentos angulares em superfícies planas quando o objeto em estudo é representado parametricamente. Primeiramente serão apresentados alguns dos princípios básicos de funcionamento do LST com especial ênfase nos erros que o afetam. Posteriormente serão revisados alguns aspectos

teóricos do ajustamento de superfícies planas a uma nuvem de pontos para o modelo convencional paramétrico (MP) e o modelo Erros Nas Variáveis (ENV). No final do trabalho é apresentado um experimento no qual deslocamentos conhecidos foram aplicados a uma superfície plana e foram remedidos utilizando LST e representação paramétrica modificando os modelos de ajustamento utilizados além da quantidade de pontos com que a representação foi feita.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Geral

Avaliar a influência da quantidade de pontos coletados num levantamento LASER terrestre e do método de ajustamento utilizado na representação paramétrica de superfícies planas.

1.1.2 Específicos

Tendo em vista o objetivo geral apresentado acima, os objetivos específicos são os que seguem:

- a) qualificar diferentes modelos de ajustamento de observações, como ferramentas para a representação paramétrica de superfícies planas para a detecção de deslocamentos angulares;
- b) determinar deslocamentos angulares de superfícies planas contrastando os resultados obtidos pelo método proposto com medidas feitas com equipamento padrão (Nível eletrônico TALYVEL);
- c) estabelecer uma relação entre a densidade de pontos utilizados no ajustamento de um plano e a sensibilidade na detecção de deslocamentos angulares;
- d) comparar diferentes técnicas de detecção de *outliers* no ajustamento de superfícies planas; e
- e) avaliar estatisticamente os resultados obtidos.

1.2 JUSTIFICATIVA

Justificam esta pesquisa a falta de consolidação de um corpo de conhecimento relacionado com as potencialidades da utilização de LASER *Scanner* Terrestre em tarefas de monitoramento e representação de estruturas, especialmente no concernente à representação paramétrica de superfícies.

1.3 ESTRUTURAÇÃO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No primeiro capítulo são apresentadas as generalidades do problema, sua justificativa e objetivos desta pesquisa.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão do estado da arte na área de detecção de deformações utilizando LASER *scanner* terrestre e uma revisão dos fundamentos técnicos do LASER *scanner* terrestre e das ferramentas matemáticas utilizadas nesta pesquisa.

No capítulo 3 são apresentados os materiais e métodos utilizados nesta pesquisa.

No capítulo 4 é apresentado um experimento prático realizado para avaliar os objetivos planteados.

O capítulo 5 apresenta as conclusões e recomendações advindas desta pesquisa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir é apresentada uma revisão do corpo de conhecimento envolvido nesta pesquisa. Na primeira subsecção é apresentada uma revisão do estado da arte relativo à análise de deformações de estruturas utilizando LST. Na segunda subsecção são apresentados os fundamentos teóricos do funcionamento do LST e alguns dos erros que o afetam. Na terceira subsecção são apresentadas algumas das ferramentas matemáticas vinculadas com a detecção de deslocamentos angulares de superfícies paramétricas.

2.1 ESTADO DA ARTE

Gielsdorf, Gruendig e Milev (2008) propuseram representar uma estrutura usando um conjunto de planos e medir deformações por meio das mudanças na posição desses planos. A experiência apresentada é dividida nas seguintes partes:

- a) detecção de planos: Estima-se o vetor normal, a matriz variância-covariância do vetor normal e as coordenadas do centróide de cada plano;
- b) correspondência (*Matching*): Resulta na identificação de planos idênticos em diferentes coletas de dados;
- c) transformação: Os dados são transformados a um único sistema de referência. Utiliza-se o modelo *Gauss-Helmert* para representar as rotações e translações;
- d) comparação de épocas: A deformação é obtida analisando-se os parâmetros de transformação (rotação e translação de um plano para duas épocas);

A metodologia apresentada neste estudo permite detectar deformações maiores que 1cm. A principal vantagem desta proposta é que a utilização de alvos é desnecessária em todas as etapas envolvidas. Como desvantagem pode-se mencionar o fato de que a precisão na detecção de deformações neste método é fortemente correlacionada com o algoritmo de transformação de sistemas de referência utilizados.

Lindenbergh e Pfeifer (2005) realizaram uma análise de deformação de uma eclusa de

contenção modelando-a por meio de planos e considerando os vetores normais como indicadores de deformações. De acordo com os autores, quando é possível modelar objetos utilizando primitivas geométricas como cilindros, planos, esferas, etc. a precisão encontrada é melhor que a fornecida quando é considerado um ponto isolado. Tal fato decorre da quantidade de graus de liberdade envolvidos na modelagem. Através deste método foi possível detectar deformações na ordem de 9mm a 21mm. Algumas desvantagens observadas nesta abordagem é que os conjuntos de dados obtidos em duas épocas distintas, sem variar a posição do *scanner*, não são espacialmente coincidentes dentro da ordem de 0.3mm até 6mm, fenômeno que fica sem explicação. Também, as observações foram divididas em pixels de 25cm², o que permite que cada pixel seja representado por apenas 10 pontos.

Van Genechten et al. (2009), avaliaram as possibilidades para a utilização de LST LEICA Scanstation 2 de precisão nominal de 4-6mm para o posicionamento de um ponto isolado, no controle de deformações em patrimônios culturais. Num primeiro experimento foram detectados os deslocamentos de alvos dispostos sob um arco de tijolos obtendo-se um desvio padrão em torno de 0.4mm em comparação com os deslocamentos medidos com paquímetro. Num segundo experimento foram comparadas as nuvens de pontos de cada época de deformação com uma grade de dados obtida a partir da época 0. Neste experimento foram detectadas deformações na ordem de 0.8mm. Embora os autores tenham conseguido detectar deformações sub-milimétricas, os melhores resultados apresentados ainda precisam da utilização de alvos para a detecção de deslocamentos.

Van Gosliga, Lindenbergh e Pfeifer (2006) detectaram deformações em um túnel utilizando uma parametrização cilíndrica para o ajustamento das observações feitas com LST LEICA HDS 4500 de precisão nominal de 7mm para o posicionamento de um ponto isolado, onde foram minimizadas as distâncias ortogonais. As análises foram divididas em duas etapas: primeiramente foi realizada uma comparação entre a nuvem de pontos e o modelo idealizado (cilindro) no qual os residuais são analisados procurando diferenças entre o construído (*as-built*) e o planejado; posteriormente foi realizado um teste para verificar se deformações sintéticas ocorridas entre 2 épocas consecutivas podem ser detectadas.

A primeira análise revela que as 3 secções observadas que formam o túnel têm um desvio em relação ao eixo que as definem. A segunda análise indica que deformações maiores que 15mm no sentido radial são efetivamente detectáveis. Uma desvantagem desta proposta é que o processo de registro como apresentado pelos autores, não é compatível com as

características do LASER scanner utilizado (diferença de fase) já que estes equipamentos apresentam variações nas precisões observadas variáveis com as distâncias observadas.

Al-Neshawy et al. (2010) estudaram a possibilidade do uso de LST na medição dos arcos verticais e horizontais, gerados naturalmente em painéis de mármore. As magnitudes dos arcos medidos com dados TLS foram calculadas diretamente sob o modelo funcional obtendo-se valores entre +9 e -15mm. A diferença máxima entre os arcos calculados com dados TLS e os calculados com “*bow-meter*” (instrumento para a medição deste tipo de arcos) é de 7mm. Desafortunadamente este estudo não apresenta nenhum indicador da precisão do instrumento “*bow-meter*” sem o qual a comparação feita com LST carece de rigor.

Schneider (2006) determinou deformações de uma torre-antena de televisão parametrizando-a com círculos obtidos pelo MP. Foi construído um perfil de deslocamento da torre a partir da comparação dos centros dos círculos obtidos. Foram utilizados alvos para o registro (georreferência) dos dados, obtendo-se uma precisão de 3mm. Foi observada uma deformação de 13mm ao considerar duas épocas distintas. O autor considera que o registro é fator limitante na otimização do método pelas limitações na determinação dos centros dos alvos utilizados. Nesta pesquisa a potencialidade do LST parece estar sub-valorada já que discretiza a nuvem de pontos obtidas para formar apenas 9 círculos que modelaram o objeto em vez de aproveitar no máximo os abundantes graus de liberdade fornecidos pelo levantamento .

Gordon, Lichti e Stewart (2001) realizaram um experimento para controle de deformações usando TLS no qual foram obtidas as coordenadas centrais de alvos numa época 0 e forem posteriormente comparadas com novas coordenadas centrais de uma época 1 após a imposição de um deslocamento. Os deslocamentos detectados estão na ordem da precisão nominal indicada pelo fabricante (6mm).

A seguir será apresentado o princípio de funcionamento do LST e alguns dos erros que o afetam.

2.2 SISTEMA DE VARREDURA LST

O LST é um instrumento que permite obter coordenadas tridimensionais de pontos sobre uma superfície a partir de medições de distância feitas sob intervalos regulares de ângulos verticais e horizontais. Um diodo LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) emite uma série de pulsos que são defletidos por um espelho móvel gerando uma varredura de pontos sobre a superfície física. O pulso é difusamente retro-espalhado pela superfície permitindo que parte da luz retorne ao receptor do instrumento; possibilitando a medida de distância.

Existem principalmente dois princípios envolvidos na medição de distâncias. O princípio de “diferença de fase” que permite estimar a distância entre o sensor e o objeto como produto das diferenças de fase das ondas emitidas e recebidas. O método “Time Of Flight” (TOF) utiliza medições precisas do tempo percorrido entre a emissão e retorno do pulso para estimar a distância entre o objeto e o sensor.

2.2.1 Método TOF

Para a determinação de distâncias a partir do método TOF, é necessário conhecer com precisão o tempo de emissão e recepção do retorno de um pulso desde o equipamento até o objeto a ser perfilado. Como é sabido, a luz se desloca, no vácuo, a uma velocidade de aproximadamente 300.000 mm/s. Portanto, para conhecer a distância com uma precisão de 1mm é necessário medir o tempo de deslocamento do pulso com precisão em torno de $1,67 \cdot 10^{-12} s$ (FIGURA 01).

$$R = v \cdot \frac{t}{2} \quad (1)$$

onde:

R = Distância medida

v = Velocidade da luz no vácuo

t = Tempo de deslocamento do pulso

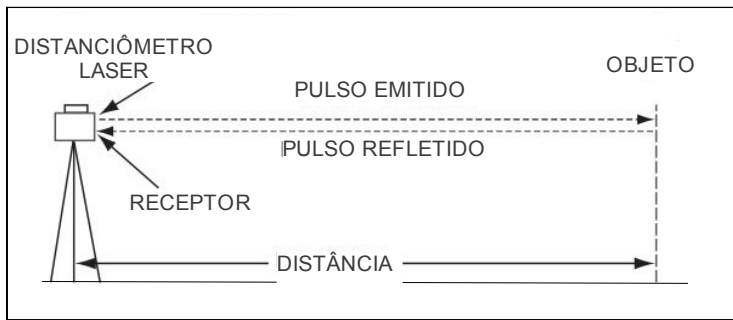


FIGURA 01 – PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DO LST TOF

FONTE: Adaptado de Shan e Toth (2009).

Como pode ser observado na figura 01, o emissor emite um pulso LASER o qual é retro-espalhado pelo objeto e recebido pelo receptor do equipamento. A distância de interesse é a metade da distância percorrida pelo pulso.

2.2.1.1 Modulação do pulso

Nesta forma de modulação, um pulso é emitido e o tempo de deslocamento do sinal é medido diretamente por meio da correlação entre o início e final do sinal. A vantagem da modulação de pulsos é transmitir uma alta quantidade de energia num curto período de tempo ($0,2 \mu\text{J}$ em $0,25 \text{ ns}$), melhorando assim a influência da iluminação de fundo e melhorando também a relação sinal-ruído (LANGE, 2000). A figura 02 mostra a relação entre os pulsos que controlam o início e a parada do relógio.

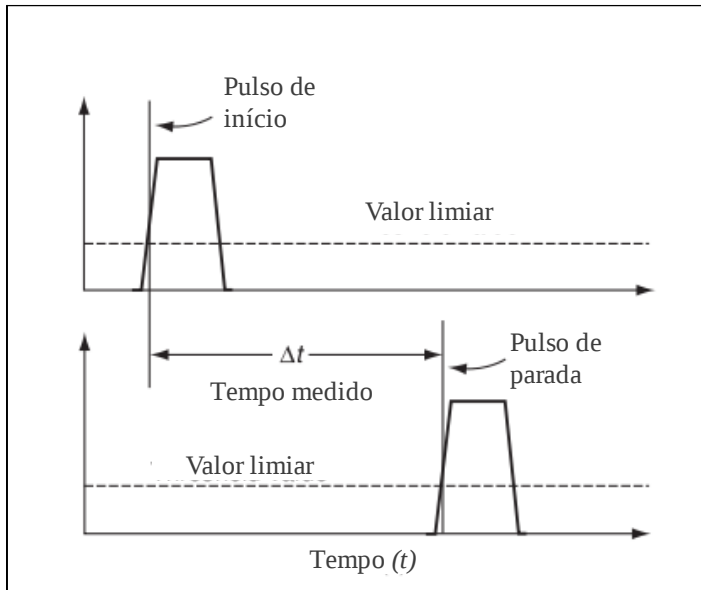


FIGURA 02 – MODULAÇÃO DO PULSO

FONTE: Adaptado de Shan e Toth, 2009.

Como pode ser visto na figura 02, o pulso gerado precisa alcançar um limiar para inicializar e deter o relógio.

2.2.1.2 Detectores

Para estimar o tempo de emissão-recepção, o pulso emitido é sincronizado com um contador digital de alto desempenho. Quando o pulso é recebido, os incrementos no contador são cessados. A amplitude resultante é proporcional ao tempo emissão-recepção do pulso. A inicialização do contador é definida usando fotodiodos de alta sensibilidade (LANGE, 2000).

2.2.1.3 Distanciômetro *LASER*

Dispositivo encarregado de gerar e controlar o feixe *LASER*, sendo composto pelas seguintes partes (FIGURA 03), a saber:

a) transmissor;

- b) canal receptor (detector, amplificador);
- c) medidores de tempo; e
- d) lentes de transmissão e recepção.

Reshetyuk (2006) apresenta uma descrição das partes assinaladas.

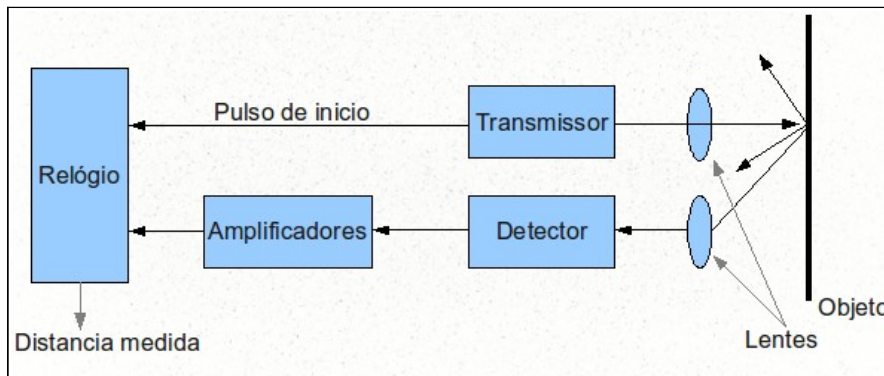


FIGURA 03 - DISTANCIÔMETRO DE PULSO LASER.

FONTE: Adaptado de Reshetyuk (2006)

De acordo com a Figura 03, uma fração do pulso gerado pelo transmissor é utilizada para inicializar o relógio, enquanto que a energia remanescente é enviada através do sistema de lentes até o objeto. A energia retro-espalhada pelo objeto, é detectada e amplificada para posteriormente chegar ao relógio e deter o contador.

2.2.1.4 Unidade de deflexão do feixe LASER

O feixe de pulso é defletido por um espelho giratório que redireciona o pulso para a superfície de perfilamento. Existem 3 tipos básicos de espelhos: espelhos planos rotacionais; espelhos poligonais rotacionais; e espelhos oscilatórios. Informação detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em Reshetyuk (2006).

2.2.2 Fontes de erro do LST TOF

De acordo com a classificação feita por Gordon, Lichti e Stewart (2001) e Staiger¹ (2005 apud Reshetyuk 2006) os erros no LST TOF podem-se classificar em:

a) instrumentais:

- erros fundamentais; e

- erros específicos do *hardware*:

- erros no distanciômetro LASER (aleatórios e sistemáticos);

- erros na deflexão do feixe; e

- erros axiais do LST.

b) relacionado ao objeto;

c) ambientais; e

d) de georreferenciamento.

2.2.2.1 Erros instrumentais

Os erros instrumentais estão associados diretamente com os componentes físicos do equipamento e podem ter influências sistemáticas e aleatórias nas medições. Conhecer e modelar os erros sistemáticos é essencial para obter o maior potencial do equipamento LASER. Assim, dentro destes erros é possível distinguir duas categorias principais.

2.2.2.1.1 Erros fundamentais: Inerentes às limitações físicas do distanciômetro LASER e do sistema de deflexão do feixe. Não podem ser removidos ou minimizados.

1 Staiger, The geometrical quality of Laser Scanner (TLS). In: FIG working week 2005 and GSDI-8, 2005, Cairo Egito, Disponível em : <http://www.fig.net/pub/cairo/index.htm>

2.2.2.1.2 Erros específicos do *hardware*: Podem ser minimizados ou removidos melhorando o desenho do instrumento ou por calibração, citam-se:

a) erros no distanciômetro LASER: Dentro dos erros que afetam ao distanciômetro LASER podem-se destacar:

- erros aleatórios: que determinam o alcance das medições de um telémetro LASER e que, segundo Reshetyuk (2006) podem ser descritos como segue:

$$\sigma_r = \frac{c}{2} \cdot \sigma_t \quad (2)$$

onde:

c = velocidade da luz

σ_t = oscilação (*jitter*) observada na medição de tempo.

- erros sistemáticos, que de acordo com o mesmo autor, é um tipo de erro que limita a acurácia que pode ser alcançada com um telémetro LASER. Alguns dos fatores que o condicionam são:

- acurácia do contador de intervalos de tempo e a sua estabilidade;

- deslocamento de tempo da sinal (*Time Walk*): É um erro na medição do tempo devido a variações na amplitude e forma do pulso, que depende da reflectância da superfície do objeto;

- deriva de distância (*Range Drift*): As variações na temperatura dos componentes eletrônicos geram variações na distância medida. Reshetyuk (2006) observou variações em distância medidas de até 3mm, para um intervalo de medição de 1,5 horas e uma variação na temperatura interna do equipamento desde 22°C até 32°C;

- erro de zero: Diferença entre a posição zero mecânica e a eletrônica no scanner. Linke² (2005 apud Reshetyuk 2006), calculou para um equipamento CYRAX HDS3000 um erro de zero de 6,1mm;

- fator de escala: É observado um fator de escala sob as distâncias medidas, produto das variações nas frequências do sinal emitido e recebido; e

- primeiro e segundo pulso: O feixe recebido é refletido em parte por dois objetos distintos (FIGURA 04). O cálculo da distância é composto pelos retornos do pulso LASER de ambos os objetos. Entretanto, a distância calculada não tem relação com nenhum dos dois objetos. Estes erros podem ser considerados como de tipo grosseiro.

2 Linke, A. Calibration of terrestrial laser scanners. Resume de Tese (Master of sciences) – School of Surveying and Spatial Information Systems, University of New South Wales, 2005. Disponível em: <http://www.gmat.unsw.edu.au/currentstudents/ug/projects/Linke/>

A figura 04 representa o fenômeno ocorrido quando o feixe LASER atinge um objeto na sua borda.

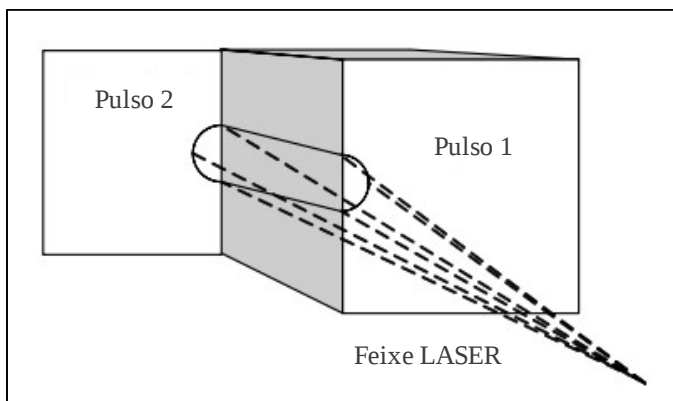


FIGURA 04 – PRIMEIRO E SEGUNDO PULSO

FONTE : Adaptado de Reshetyuk (2006)

b) erros na deflexão do feixe : O grande volume de dados obtidos com LST é possível pela utilização de um sistema de deflexão do feixe LASER. Esta componente é uma outra fonte de erro instrumental, que influi diretamente na qualidade do ângulo observado. Reshetyuk (2006) apresenta uma descrição completa deste tipo de erro.

c) erros axiais do LST : O modelo axial de um LST está definido pelos seguintes eixos, (FIGURA 05) a saber:

- eixo principal: É o eixo de rotação da cabeça do *scanner*. Deve se sobrepor ao plano vertical do *scanner*;
- eixo de colimação: Assumindo que o feixe LASER tem uma forma cônica, o eixo de colimação passa pelo centro do espelho do *scanner* e o centro do “ponto” (*footprint*) LASER na superfície do objeto (NEITZEL³, 2006 apud RESHETYUK, 2006); e
- eixo secundário (horizontal): Eixo de rotação dos espelhos do *scanner*.

As inexatidões próprias da construção destes instrumentos aportam os seguintes erros (FIGURA 05).

- erro de colimação (c): Ângulo entre o eixo de colimação e a normal ao eixo horizontal, medido no plano que contém os eixos de colimação e horizontal (RESHETYUK, 2006);
- Inclinação do eixo secundário (i): Ângulo entre o eixo horizontal e a normal ao eixo vertical, medido no plano que contém os eixos vertical e horizontal (RESHETYUK, 2006);
- erro de excentricidade: os erros de excentricidade ocorrem quando os eixos não se

3 NEITZEL. Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler polarer Messsysteme aus Minimalanordnungen und überbestimmten Konfigurationen. ZfV (Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement), V. 131, No 3, p. 132 – 140. 2006

intersectam perfeitamente, o que resulta num desvio nas medições; e

- erro de oscilação (“wobble”): rotação oscilatória em torno do eixo vertical produto da tolerância no processo de fabricação do instrumento. Segundo Ingensand e Schulz (2004), este erro tem um comportamento cíclico e é relacionado diretamente ao azimute. A figura 06 mostra estes tipos de erros observados no equipamento Imager5003.

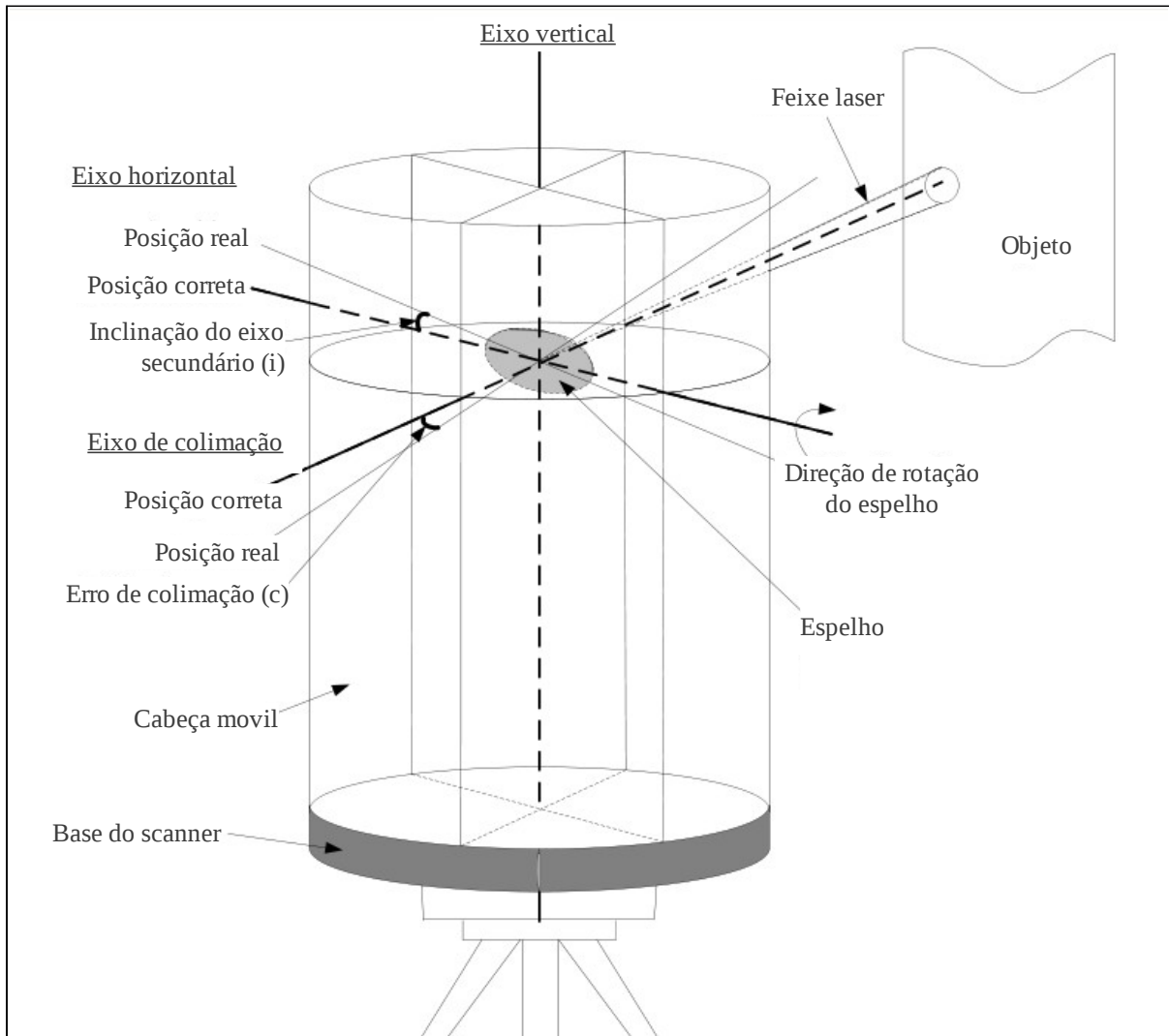


FIGURA 05 – ERROS AXIAIS DO LST

FONTE : Adaptado de Reshetyuk (2006)

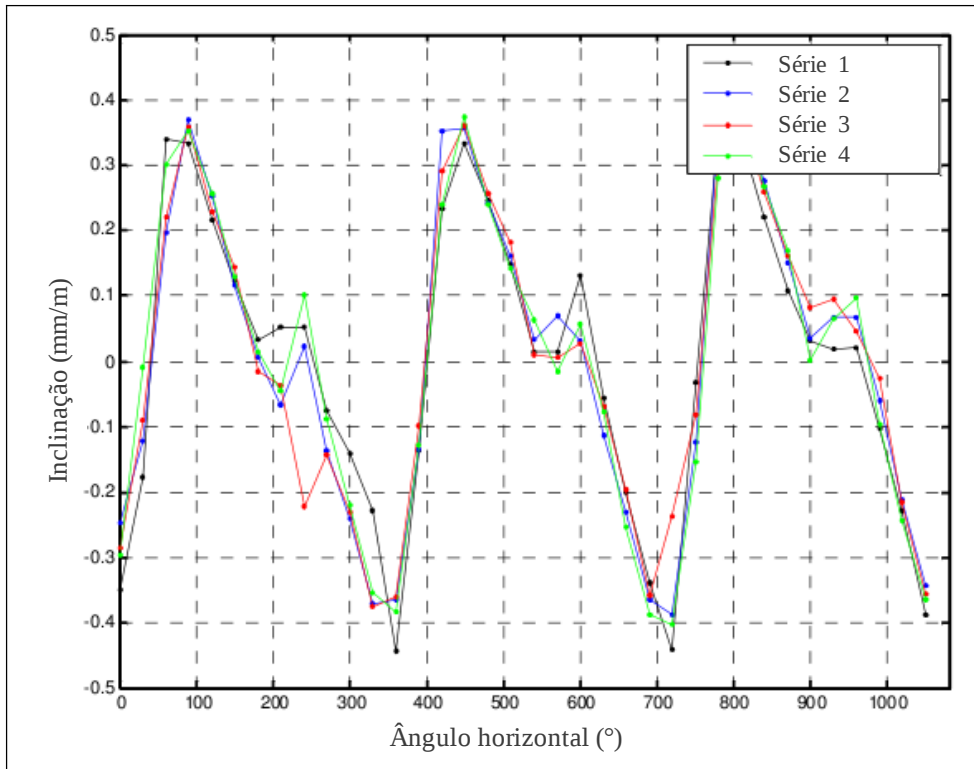


FIGURA 06 – ERRO DE OSCILAÇÃO NO “IMAGER5003”

FONTE : Adaptado de Ingensand (2004)

2.2.2.2 Erros relacionados ao objeto

A principal fonte de erro deste grupo é a refletividade do objeto escaneado. Uma vez que um LST é, basicamente, uma estação total sem prisma, a medição de distância depende da refletância do objeto escaneado. Em geral, a literatura define a refletância como função dos seguintes fatores, a saber:

- a) propriedades do material do objeto, tais como permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade;
- b) cor da superfície escaneada;
- c) comprimento de onda do LASER;
- d) ângulo de incidência do feixe LASER. A precisão na distância medida é fortemente correlacionada com o ângulo de incidência do feixe (INGENSAND e Martin, 2008);
- e) rugosidade da superfície, dependendo do comprimento de onda e do ângulo de incidência

(NAYAR, IKEUCHI e KANADE⁴, 1989, apud RESHETYUK, 2006);

f) temperatura da superfície. Neste caso, a varredura de uma superfície em alta temperatura aumenta a quantidade de ruído no sinal; e

g) umidade da superfície.

2.2.2.3 Erros ambientais

Fatores como temperatura ambiente, pressão, umidade relativa, iluminação, chuva etc., contribuem no aumento dos erros nas medições. Reshetyuk (2006) apresenta em detalhes a descrição destes tipos de erros.

2.2.2.4 Erros de georreferenciamento

a) georreferenciamento direto: No georreferenciamento direto, a posição e orientação do *scanner* são determinadas independentemente e por tanto, as coordenadas dos pontos medidos são referidas ao sistema externo. A posição do LST é determinada centrando e nivelando o instrumento sob um ponto com coordenadas conhecidas ou estabelecendo as coordenadas do LST usando GPS ou estação total. Esta orientação pode ser determinada, de acordo com Lichti e Gordon (2004), das seguintes formas:

- visando com a luneta do LST um ponto de controle conhecido;
- utilizando uma varredura de alta densidade de pontos de um alvo com coordenadas conhecidas no sistema externo;

A figura 07 apresenta de forma gráfica o conceito de georreferenciamento direto.

4 Nayar, Ikeuchi e Kanade, Surface Reflection: Physical and Geometrical Perspectives. The Robotics Institute, Carnegie Mellon University. Technical Report CMU-RI-TR-89-7, Disponível em: http://www.ri.cmu.edu/pub_files/pub3/nayar_s_k_1989_1/nayar_s_k_1989_1.pdf.

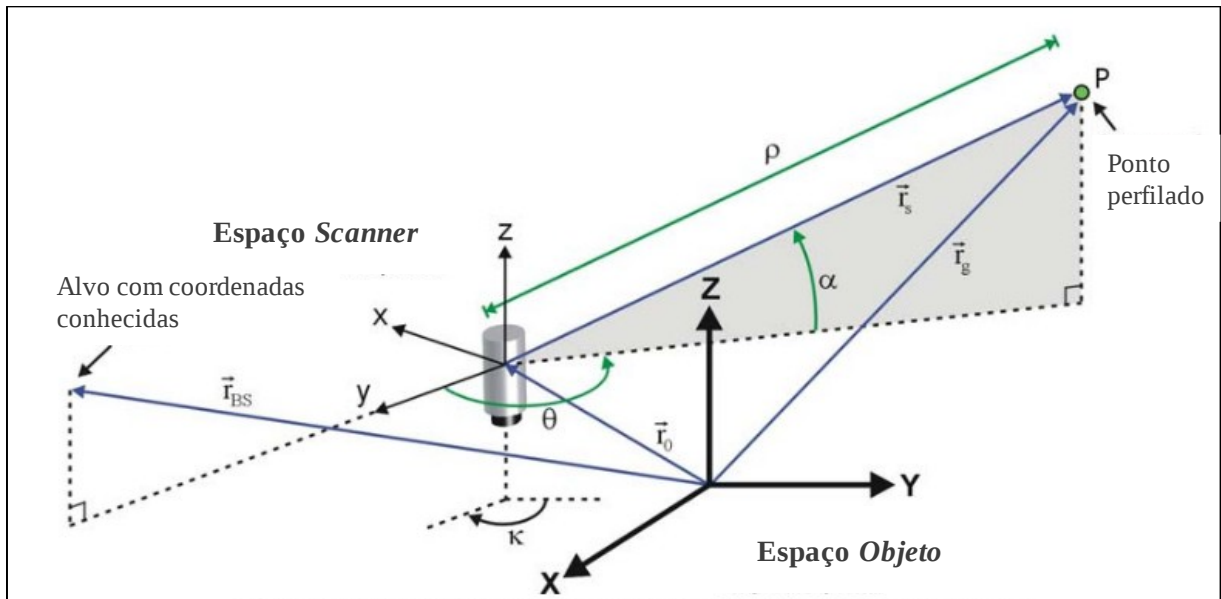


FIGURA 07 – OBSERVÁVEIS E GEORREFERENCIAMENTO DIRETO

FONTE : Adaptado de Lichti e Gordon (2004)

Na figura 07 são observadas as relações entre o espaço objeto e o espaço *scanner* de modo que:

- X, Y, Z : Eixos do sistema de coordenadas do objeto espaço objeto;
- x, y, z : Eixos do sistema de coordenadas do objeto espaço *scanner*;
- ρ : Distância entre o *scanner* e o objeto perfilado;
- θ : Ângulo horizontal;
- α : Ângulo de elevação;
- κ : Rotação no eixo z entre sistemas de coordenadas;
- \vec{r}_s : Distância no espaço *scanner* ao ponto perfilado;
- \vec{r}_g : Distância no espaço objeto ao ponto perfilado;
- \vec{r}_0 : Vetor de translação entre sistemas de coordenadas; e
- \vec{r}'_0 : Distância à ponto com coordenadas conhecidas, no espaço objeto.

O processo de georreferência direta envolve a transformação das coordenadas obtidas no espaço *scanner* para o espaço objeto. Para isso utiliza-se a equação.

$$\vec{X}_e = \vec{X}_{LST} + \kappa \cdot \vec{X}_i \quad (3)$$

onde:

- \vec{X}_e = São as coordenadas dos pontos no espaço objeto;
- \vec{X}_{LST} = São as coordenadas da origem do LST no espaço *scanner*; e
- κ = Rotação horizontal. Se o equipamento tem compensador biaxial, aceita-se que a horizontal no espaço objeto é paralela à horizontal no espaço *scanner*; por tanto apenas uma rotação é necessária (RESHETYUK, 2006).

b) georreferenciamento indireto : Um estudo do problema do georreferenciamento indireto pode ser encontrado em Lichti e Gordon (2004). Um dos problemas mais evidentes é a determinação do centro dos alvos escaneados. Dependendo do tipo de alvo, o erro na determinação do seu centro é afetado de diferentes maneiras, como segue:

- alvos planos: A determinação do centro neste tipo de alvo baseia-se na suposição de que a intensidade máxima é obtida no centro do alvo. Lichti⁵ et al. (2000, apud Reshetyuk 2006) reconhece 3 estratégias de determinação do centro: o centro do alvo é a posição onde a intensidade no sinal refletido é máxima; o centro do alvo corresponde ao centro radiométrico de todos os pulsos; e o centro do alvo corresponde ao centro radiométrico dos 4 pulsos mais fortes.

- alvos esféricos: As coordenadas de um alvo esférico podem ser reduzidas a seu centro geométrico usando ajustamento de observações. O inconveniente nesta abordagem é que só uma parte do alvo é visível para o LST e utilizada para o cálculo do seu centro.

A seguir serão apresentados diferentes métodos de ajustamento de observações para o ajustamento de superfícies planas.

2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO CÁLCULO DE PARÂMETROS PARA O AJUSTAMENTO DE SUPERFÍCIES PLANAS

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é uma ferramenta matemática que permite obter uma solução aproximada para um sistema de equações sobre-determinado baseado na minimização dos resíduos. No campo da representação paramétrica de superfícies, o MMQ permite calcular os coeficientes que definem uma determinada primitiva geométrica que melhor modela um conjunto de observações. Nesta secção são apresentados os fundamentos matemáticos da representação paramétrica de superfícies planas utilizando o tradicional “modelo paramétrico” (MP) e o modelo “erros nas variáveis” (ENV) além de alguns estratégias de avaliação da qualidade do ajustamento e de detecção de *outliers*.

2.3.1 Representação paramétrica de uma superfície plana

O plano definido pelo vetor normal $\vec{n}=[a, b, c]$ que passa pelo ponto $\vec{X}_0=[x_0, y_0, z_0]^T$, pode ser descrito como segue (FIGURA 08):

$$[\vec{X} - \vec{X}_0] \cdot \vec{n} = 0$$

5 Benchmark Tests on a Three- Dimensional Laser Scanning System. **Geomatics Research Australasia**, No. 72, p. 1 – 24.

Onde $\vec{X} = [x, y, z]^T$

Manipulando obtém-se a forma geral da equação do plano

$$a x + b y + c z = 0 \quad (4)$$

Afastando o plano da origem do sistema de coordenadas, a expressão se transforma em:

$$a x + b y + c z + d = 0 \quad (5)$$

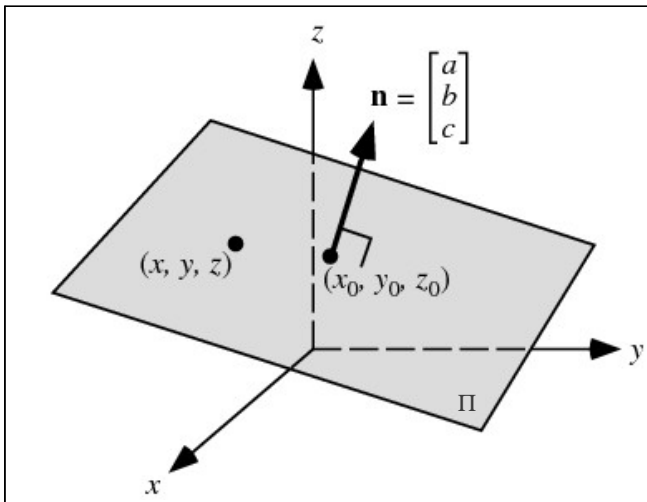


FIGURA 08 : PLANO DEFINIDO POR UM PONTO E O VETOR NORMAL

FONTE : Wolfram Mathworld. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/Plane.html>.

Acesso em 27/09/2010

A figura 8 indica que dado um ponto \vec{X}_0 pertencente ao plano Π , e um vetor \mathbf{n} normal ao plano, o ponto definido por \vec{X} pertence ao plano se e somente se o vetor que une \vec{X}_0 com \vec{X} é perpendicular a \mathbf{n} .

2.3.2 Ajustamento de um plano pelo MMQ

Obter o conjunto de parâmetros que melhor representa o plano descrito pelo conjunto de n coordenadas cartesianas tridimensionais (6).

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde:

v = É o vetor dos resíduos; e
 Lb = Vetor dos valores observados.

O problema dos MMQ pelo Método Paramétrico pode se definir como segue:

$$\min_{[v, X]} \|v\|$$

A solução como apresentada em Gemael (2004), é escrita como:

$$X = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} A^T \cdot P \cdot Lb \quad (12)$$

onde:

P = Inverso da matriz diagonal que representa as variâncias associadas com Lb

O vetor dos resíduos é dado pela equação:

$$v = AX - Lb \quad (13)$$

O vetor das observações ajustadas é:

$$La = Lb + v \quad (14)$$

A variância da unidade de peso a posteriori é

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{(n-u)} \quad (15)$$

onde:

$(n-u)$ = Graus de liberdade

Os trabalhos de Lindenbergh e Pfeifer (2005) e Al-Neshawy et al. (2010), propuseram estabelecer uma relação de dependência entre uma das variáveis observadas e as demais. Desta maneira, a função objetiva a minimizar é a distância algébrica entre as observações e o modelo funcional. Por exemplo, o sistema de equações descrito em (8) é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + d &= z_1 \\ ax_2 + by_2 + d &= z_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\ ax_n + by_n + d &= z_n \end{aligned} \quad (16)$$

Sujeito a:

$$Lb - v = (A - V_A) \cdot X \quad (20)$$

2.3.2.2.1 Decomposição em Valores Singulares

Seja uma matriz qualquer ${}_m[A]_n$ com $m > n$, existe uma decomposição matricial $A = [U' \Sigma' H'^T]$ chamada Decomposição em Valores Singulares (DVS) que gera as seguintes matrizes:

$$U' = [U'_1; U'_2], \quad U'_1 = [u'_1, \dots, u'_n], \quad U'_2 = [u'_{n+1}, \dots, u'_m], \\ u'_i \in \mathbb{R}^m, \quad U'^T U' = I_m,$$

$$H' = [h'_1, \dots, h'_n], \quad h'_i \in \mathbb{R}^n, \quad H'^T H' = I_{n+d},$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n+t}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma'_1 \geq \dots \geq \sigma'_{n+t} \geq 0$$

Para uma matriz aumentada ${}_m[A; B]_{n+d}$ com $m > n$, a DVS de $[A; B]$ é descrita como:

$$[A; B] = [U \Sigma H^T] \quad (21)$$

Sendo:

$$U = [U_1; U_2], \quad U_1 = [u_1, \dots, u_n], \quad U_2 = [u_{n+1}, \dots, u_m], \\ u_i \in \mathbb{R}^m, \quad U^T U = I_m,$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix} = [h_1, \dots, h_{n+d}], \quad h_i \in \mathbb{R}^{n+d}, \quad H^T H = I_{n+d},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+t}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+d)}$$

$$t = \min\{m - n, d\}$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+t}) \in \mathbb{R}^{(m-n) \times d}$$

$$\text{and } \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{n+t} \geq 0$$

Por conveniência se define $\sigma_i = 0$ se $m < i \leq n+d$, as expressões σ'_i e σ_i são os valores singulares de A e $[A; B]$ respectivamente. Os vetores u'_i e u_i são os i -ésimos vetores singulares esquerdos e os vetores h'_i e h_i são os i -ésimos vetores singulares

direitos de A e $[A;B]$ respectivamente.

2.3.2.2.2 Modelo ENV por vetores singulares

A solução do problema ENV como apresentado por Van Huffel (1991) pode-se resumir nos seguintes passos:

- Permita-se expressar primeiramente o sistema de equações (8) como:

$$[A;La] \cdot [X^T; -1]^T = 0 \quad (22)$$

- Permita-se que a (20) seja a DVS da matriz aumentada $[A;Lb]$. Se $\sigma_{n+1} \neq 0$, $[A;B]$ tem posto $n+1$, por tanto a (22) é incompatível. Para obter uma solução o posto de $[A;B]$ tem que ser reduzido a n . O teorema de Eckart-Young-Mirsky permite obter a melhor aproximação no sentido de minimização de variâncias da matriz $[A;B]$ como segue:

$$[\hat{A}; \hat{L}b] = U \hat{\Sigma} H^T \quad (23)$$

onde:

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0)$$

- Agora, pode-se expressar a (22) como:

$$[\hat{A}; \hat{L}a] \cdot [X^T; -1]^T = 0 \quad (24)$$

A (22) agora tem posto n por tanto forma um sistema compatível cuja solução vem dada pelo único vetor h_{n+1} pertencente à $[\hat{A}; \hat{L}b]$, a solução do problema ENV é finalmente obtida escalando h_{n+1} até que o seu último componente é -1, ou como segue:

$$X = -\frac{1}{h_{m+1, m+1}} \cdot [h_{1, m+1}, \dots, h_{m, m+1}]^T \quad (25)$$

Schaffrin (2006) define para este modelo os elementos que seguem:

Vetor dos resíduos (\tilde{v}) associado ao vetor das observações Lb :

$$\tilde{v} = \frac{(A \cdot X - Lb)}{(1 + X^T \cdot X)} \quad (26)$$

Matriz dos resíduos (\tilde{V}_A) associada à matriz A descrita na (10):

$$\tilde{V}_A = -\tilde{v} \cdot X^T \quad (27)$$

Variância da unidade de peso a posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\tilde{v}' \cdot \tilde{v} + \text{vec}(\tilde{V}_A') \cdot \text{vec}(\tilde{V}_A)}{n - u} \quad (28)$$

onde:

vec : operador que empilha as colunas de uma matriz uma embaixo da outra, da esquerda para a direita.

2.3.2.2.3 Relação com análise por componentes principais (ACP)

A técnica dos componentes principais pode ser utilizada para ajustar uma função linear minimizando as distâncias ortogonais entre os dados e o funcional. É apropriada quando não existe uma distinção clara entre variáveis independentes e dependentes ou quando todas as variáveis são medidas com erro (MATHWORKS, 2010).

De acordo com Chaves (2008, p. 25) geometricamente, as componentes principais “representam a seleção de um novo sistema de coordenadas obtido por rotação do sistema original com X_1, X_2, \dots, X_p como eixos. Os novos eixos Y_1, Y_2, \dots, Y_p representam as direções com variabilidade máxima”

O ACP permite obter os valores e vetores próprios da MVC das observações de modo que:

Seja “C” a MVC das coordenadas definidas na (6)

A decomposição em componentes principais tem a forma:

$$ACP({}_m C_m) = {}_m H {}_m D {}_m$$

Isto é, gera uma matriz diagonal “D” de valores próprios, e uma matriz completa H de vetores próprios.

A relação matemática entre ACP e DVS pode-se expressar simplesmente como segue: Seja a DVS $A = [U \Sigma H^T]$. As colunas que constituem a matriz H^T formam um conjunto de vetores próprios da matriz $A^T A$, as colunas que constituem a matriz U formam um conjunto de vetores próprios da matriz $A A^T$ e as colunas, os valores singulares da matriz S

são as raízes quadradas dos autovalores de $A^T A$ e $A A^T$.

2.3.2.2.4 Considerações geométricas

Além das diferenças observadas quanto aos erros considerados no ajustamento nas duas abordagens anteriormente comentadas, existe uma diferença enquanto à interpretação geométrica dos erros minimizados.

Na figura 09 se observa o ajustamento de uma reta definida por $y = a \cdot X$ medida com erros na componente y_i . Observe-se que no modelo paramétrico os erros minimizados correspondem a distâncias algébricas no sentido da variável independente.

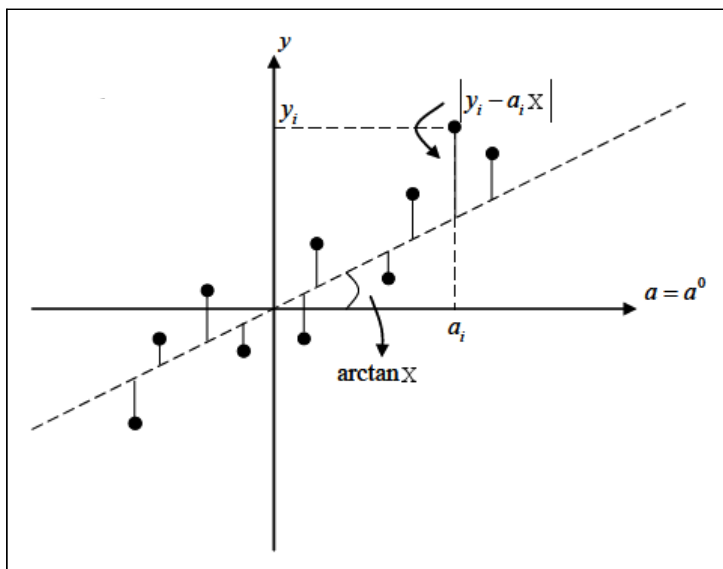


FIGURA 09 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO PARAMÉTRICO

FONTE : Adaptado de Van Huffel (1991).

Na figura 09 se observa o ajustamento de acordo com o modelo paramétrico, de uma reta definida por $y = a \cdot X$ medida com erros nas componentes y_i e a_i . Observe-se que os erros minimizados correspondem às distâncias ortogonais ou mínimas.

Na figura 10 se observa o ajustamento de uma reta definida por $y = a \cdot X$ medida com erros nas componentes x_i e y_i . Observe-se que no modelo ENV os erros minimizados correspondem a distâncias ortogonais entre os pontos e o modelo funcional.

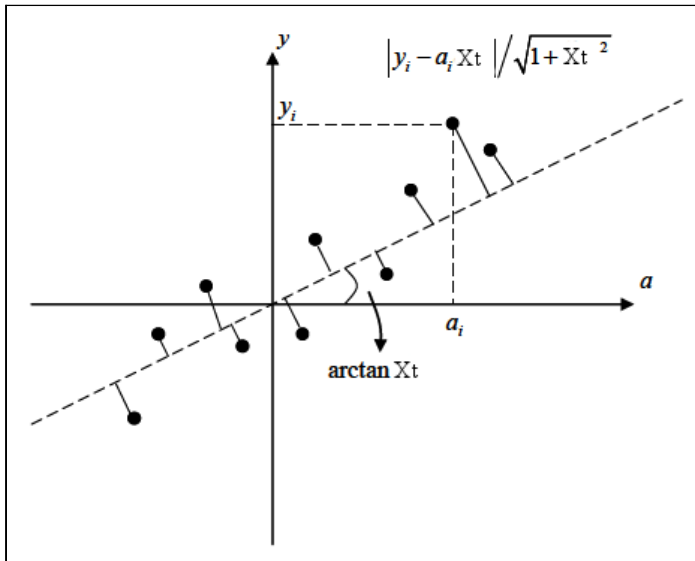


FIGURA 10 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO ENV

FONTE : Adaptado de Van Huffel (1991).

De acordo com a figura 10, a minimização dos resíduos no modelo ENV ocorre no sentido da mínima distância geométrica entre os pontos e o modelo funcional.

2.3.3 Qualidade do ajustamento

A seguir são apresentados alguns dos critérios e ferramentas mais comuns na avaliação da qualidade de um ajustamento de observações.

2.3.3.1 Normalidade dos resíduos

Para efetuar os testes e análises comuns no controle de qualidade de um ajustamento, é suposição básica que os resíduos obtidos são distribuídos normalmente. Para testar as suas normalidades pode-se utilizar os seguintes métodos:

2.3.3.1.1 Diagrama de probabilidade normal

É um método informal para avaliar a normalidade de um conjunto de dados e consiste na representação gráfica ordenada das observações de uma amostra contra o percentagem correspondente de pontos na distribuição normal teórica (RYAN e JOINER, 1990).

Para sua construção, o eixo X de um sistema cartesiano XY e condicionado de maneira que a função distribuição acumulada normal será representada por uma linha recta. Os dados a testar são normalizados ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$) e plotados ao longo da linha que representa a distribuição normal teórica.

Os dados são considerados normais se os pontos representados tem aparência de linha reta (Figura 11a).

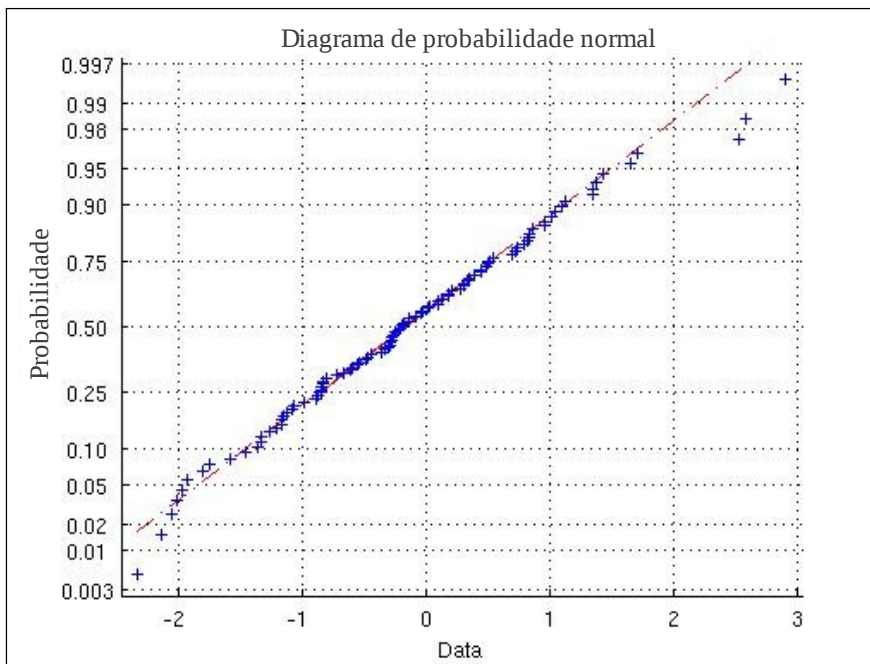
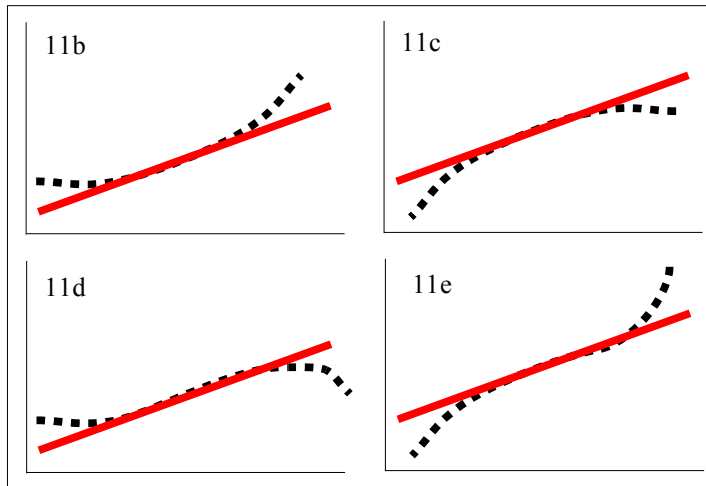


FIGURA 11a – DIAGRAMA DE PROBABILIDADE NORMAL, POPULAÇÃO NORMAL

Quando os pontos não representam uma linha reta podem-se reconhecer tipicamente as seguintes fenômenos (SKYMARK, 2010):

- Distribuição enviesada para a direita: Pontos plotados dobrados para acima e para a esquerda da distribuição normal teórica indicam uma grande variância à direita da distribuição normal (Figura 11b).
- Distribuição enviesada para a esquerda: Pontos plotados dobrados para abaixo e para a direita da distribuição normal teórica indicam uma grande variância à esquerda da distribuição normal (Figura 11c).

- Caudas curtas: Pontos plotados em forma de letra “S” indica que os pontos tem uma variância menor que a esperada (Figura 11d).
- Caudas longas: Pontos começando embaixo da curva teórica e finalizando acima dela indica que os pontos tem uma variância maior que a esperada (Figura 11e)



FIGURAS 11b, 11c, 11d e 11e

As figuras 11b, 11c, 11d e 11e apresentam alguns das causas comuns na não normalidade dos dados analisados e seu efeito no diagrama de distribuição normal.

2.3.3.1.2 Teste de normalidade *Lilliefors*

É um teste de uma amostra estabelecido para avaliar o grau de semelhança entre os dados e uma distribuição normal teórica. Uma de suas principais vantagens sobre outros testes populares, como por exemplo o teste *Kolmogorov Smirnov*, é que o teste *Lilliefors* não precisa de conhecimento prévio da média e do desvio padrão da distribuição. A hipótese nula é:

$$H_0: F(x) = N_{\sigma, \mu}(x)$$

O teste padroniza os dados utilizando:

$$z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{s} \quad (29)$$

onde:

z_i i-ésima observação padronizada

x_i i-ésima observação

\bar{x} Média das observações

s Desvio padrão das observações

O teste *Lilliefors* é definido como:

$$D_n = \max |F(z) - S_n(z)| \quad (30)$$

A análise consiste em rejeitar a hipótese nula a um nível de significância α se $D_n > d_{n,\alpha}$. Onde $d_{n,\alpha}$ obedece a $P_{H_0}(D_n > d_{n,\alpha}) = \alpha$

Marques de Sá (2007) apresenta alguns valores críticos tabulados :

$$d_{n,0.01} = 1.63/\sqrt{n} ; \quad d_{n,0.05} = 1.36/\sqrt{n} ; \quad d_{n,0.1} = 1.22/\sqrt{n}$$

2.3.3.2 Teste χ^2 de qualidade do ajustamento

Utiliza-se este teste para verificar se $(H_0) \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ a um nível de significância α . Isto é, verificar se a variância da unidade de peso a priori é estatisticamente igual à variância da unidade de peso a posteriori no nível de significância (α).

O teste estatístico χ^2 é descrito como segue:

$$\chi_c^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \cdot (n - u) \quad (31)$$

E se compara com os valores teóricos tabulados $\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2$ e $\chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2$. H_0 é aceito se

$$\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2 < \chi_c^2 < \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2$$

De acordo com Gemael (2004) a hipótese básica $(H_0) \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ será rejeitada se existem:

- a) erros grosseiros;
- b) sistema mal condicionado;

- c) modelo matemático inadequado;
- d) erros de cálculo;
- e) ponderação errônea das observações; e
- f) problema na linearização.

Quando não se tem uma estimativa confiável da variância da unidade de peso a priori, o teste χ^2 não é factível de realizar. Por isto, Donney, Glover e Jenkins (2004) propõem testar a distribuição normal do vetor dos resíduos e a sua não correlação espacial utilizando testes estatísticos.

2.3.4 Rejeição de observações

Para um conjunto de n observações da variável y , é possível que existam observações contaminadas com erros não próprios das flutuações randômicas esperadas nas observações. A continuação são descritas algumas das ferramentas comuns na detecção de erros.

2.3.4.1 Critério de rejeição de *Chauvenet*

Chauvenet propõe um método de rejeição de observações consideradas *outliers* (observação numericamente distante das demais observações) que considera o tamanho da população na determinação de um limiar de sobrevivência da observação. Isto é, uma observação y_j deve ser rejeitada se:

$$|d_j| = |(y_j - \bar{y})| > d_{Ch} \quad (32)$$

onde:

d_{Ch} é o limiar de sobrevivência definido por *Chauvenet* como o limite de:

$$p_0 = \int_{-\infty}^{-d_{Ch}} G(\eta) d\eta + \int_{+d_{Ch}}^{+\infty} G(\eta) d\eta = \int_{-d_{Ch}}^{+d_{Ch}} G(\eta) d\eta = \frac{1}{2n} \quad (33)$$

Ou em forma discreta:

$$p_0 = \sum_{-\infty}^{-d_{ch}} G(\eta) + \sum_{+d_{ch}}^{+\infty} G(\eta) = \sum_{-d_{ch}}^{+d_{ch}} G(\eta) = \frac{1}{2n} \quad (34)$$

onde:

$G(\eta)$ = função de distribuição normal

p_0 = área sob a curva de distribuição gaussiana em função do número n de observações.

Na literatura existem discrepâncias enquanto à utilização recursiva deste critério para a eliminação de *outliers*. De acordo com Holman (1989) este método não deve ser utilizado recursivamente para eliminar observações adicionais. Porém ModeFrontier (2010) assinala especificamente que este método pode ser utilizado recursivamente para limpar um conjunto de observações de *outliers*.

2.3.4.2 Data Snooping

É um método de detecção de *outliers* que avalia a razão entre os resíduos nas observações e o desvio padrão dos resíduos. A expressão para os resíduos padronizados w_i é:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{v_i}}} \quad (35)$$

onde:

v_i = Resíduo da i -ésima observação

q_{v_i} = i -ésimo elemento da diagonal da matriz cofatora associada aos resíduos

A hipótese básica é

H_0 = não há nenhum erro grosseiro na i -ésima observação

A qual é rejeitada se:

$$|w_i| > k \quad (36)$$

Onde, k é um valor crítico relacionado com um nível de significância específico de probabilidade de cometer um erro tipo I (α) e um erro de tipo II (β) (TABELA 01).

TABELA 01 - NÍVEIS DE CONFIANÇA E VALORES CRÍTICOS PARA O TESTE *DATA SNOOPING*

$1-\alpha$	k	$1-\beta$
99,9%	3,29	76%
99,7%	3,00	84%
99,0%	2,56	93%
95,0%	1,96	98%

FONTE : Moraes (2002)

Da equação (35) se observa que o método *Data Snooping* só é viável se existe conhecimento da variância de unidade de peso a priori. Caso contrario é recomendável utilizar o teste *tau* (KAVOURAS, 1982)

2.3.4.3 Teste *TAU*

Quando a variância da unidade de peso a priori (σ_0^2) é desconhecida pode se utilizar o resíduo padronizado τ_i definido como:

$$\tau_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{vi}}} \quad (37)$$

onde:

$\sqrt{q_{vi}}$ = Raíz quadrada do i -ésimo termo da diagonal da matriz cofatora dos resíduos.

A hipótese básica é: $H0 = \text{não há nenhum erro grosseiro na } i\text{-ésima observação. A qual é rejeitada se:}$

$$|\tau_i| > \tau_{\alpha_0/2, r} \quad (38)$$

onde:

r = Graus de liberdade

$\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{1/n}$ com nível de significância α e n observações

Segundo Kavouras (1982) quando $r > 10$ pode-se aceitar que

$$\tau_{\alpha_0, r} \approx N_{\alpha_0, r} \quad (39)$$

Isto é, para amostras maiores que 10 elementos, a distribuição τ converge com a distribuição normal. De modo que (39) transforma-se em:

$$|\tau_i| > N_{\alpha, r} \quad (40)$$

Isto é, a hipótese básica apresentada em (38) pode ser interpretada como $H0 = \text{não há nenhum erro grosseiro na } i\text{-ésima observação}$. A qual é rejeitada se:

$$|\tau_i| > N_{\alpha, r} \quad (41)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para atingir os objetivos desta pesquisa, realizou-se um levantamento LASER de um elemento plano ao qual foram aplicados deslocamentos de magnitudes conhecidas (medidos com um nível eletrônico TALYVEL, $\sigma = 0.1''$ considerado padrão) e independentemente remedidos com LST. Os dados obtidos serão processados considerando diferentes densidades de pontos e diferentes modelos de ajustamento de observações.

Na subseção 3.1 serão apresentados os materiais utilizados no desenvolvimento desta pesquisa e na subseção 3.2 o método proposto.

3.1 MATERIAIS

Os equipamentos, aplicativos e materiais envolvidos nesta pesquisa foram:

- a) 01 Mesa de granito com parafusos nivelantes;
- b) 01 Sistema de varredura LASER terrestre CYRAX HDS3000;
- c) 01 Nível eletrônico TALYVEL (Taylor & Hobson);
- d) Pacote para álgebra linear LAPACK; e
- e) Aplicativo do sistema CYRAX HDS3000 “Cyclone”.

A seguir serão apresentadas as especificações de cada um dos materiais supracitados.

3.1.1 Mesa de granito com parafusos nivelantes

O objeto analisado é uma cobertura de granito de $\sim 175\text{cm} \times \sim 120\text{cm} \times \sim 10\text{cm}$ apoiada em uma base de metal a qual tem 3 parafusos nivelantes “A”, “B” e “C” que permitem mudar a inclinação da mesa (FIGURA 12).

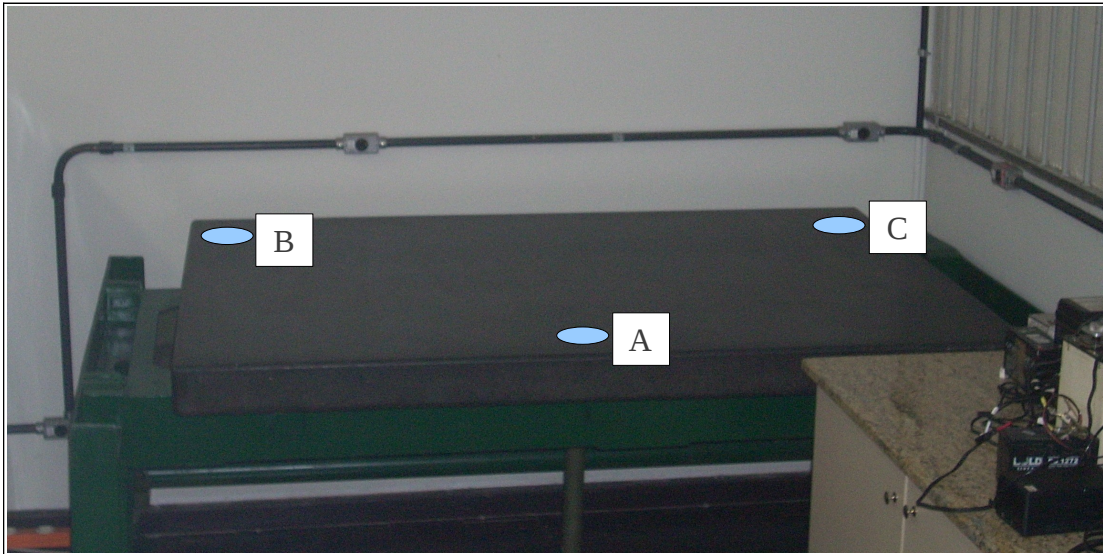


FIGURA 12 – MESA DE GRANITO COM PARAFUSOS NIVELANTES

FONTE : O autor (2010)

NOTA : Pela configuração do experimento os deslocamentos angulares são aplicados ao parafuso de nivelção “A” assinalado na figura.

3.1.2 Sistema de varredura *LASER* CYRAX HDS3000

Fabricado por LEICA GEOSYSTEMS (FIGURA 13), suas especificações se encontram na TABELA 02.



FIGURA 13 – SISTEMA DE VARREDURA *LASER* CYRAX HDS3000

FONTE: Leica (2010), acesso maio 2010.

TABELA 02 – ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS CYRAX HDS3000

Desempenho do Sistema *	
Precisão posicional	6 mm
Precisão em distância	4 mm
Ângulo horizontal	60 μ rad
Ângulo vertical	60 μ rad
Acurácia na aquisição de alvo	1.5mm
Sistema Laser Scanner	
Amplitude de trabalho	1 – 100 m
Taxa de varredura	Até 1800 ptos/s
Tamanho da projeção do laser	< 6 mm
Distância mínima entre pontos	1.2 mm
Campo de visão horizontal	360°
Campo de visão vertical	270°
* até 50m de distância	

FONTE : Leica (s.d.)

3.1.3 Nível eletrônico Talyvel

O nível eletrônico TALLYVEL é apresentado na figura 14. suas especificações técnicas são apresentadas na TABELA 03.



FIGURA 14 – NÍVEL ELETRÔNICO TALLYVEL

FONTE : O autor, 2010

TABELA 03 – ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS NÍVEL TALYVEL

Amplitude de trabalho (")	-600 – 0 – 600
Precisão	2% do valor lido ou 0.2"
Erro devido a temperatura	0.1" / °C

FONTE : TAYLOR & HOBSON (2010), acesso setembro 2010

O nível eletrônico foi calibrado pelo fabricante em abril do ano 2009, estando na data do experimento em condições de operabilidade.

3.1.4 Pacote para álgebra linear LAPACK

A biblioteca de aplicativos LAPACK (licença livre tipo BSD) utilizada fornece rotinas para a solução de sistema de equações lineares, soluções por mínimos quadrados, problemas de valores próprios e problemas de valores singulares, entre outros. Todos os códigos foram escritos em linguagem OCTAVE.

3.1.5 Aplicativo do sistema CYRAX HDS3000 “Cyclone”

O aplicativo Cyclone, fornecido por LEICA GEOSYSTEMS como complemento ao equipamento LASER CYRAX HDS3000 permite controlar as funções do equipamento além de algumas capacidades de análise, a saber:

- a) Cyclone SCAN: Aplicativo de interface para a operação do equipamento;
- b) Cyclone REGISTER: Aplicativo para realizar o processo de registro de várias nuvens de pontos; e
- c) Cyclone MODEL: Permite processar nuvens de pontos em objetos e sua integração com CAD.

Entre outros.

3.2 MÉTODOS

A metodologia proposta consiste na adoção de alguns modelos de ajustamento de observações e no estabelecimento de diferentes conjuntos com densidades variáveis de pontos, os quais serão avaliados num experimento prático onde deslocamentos conhecidos serão aplicados a uma superfície plana para posteriormente serem remedidos com auxílio dos diferentes modelos de ajustamento e conjuntos de pontos adotados.

Na figura 15 é apresentado um diagrama de fluxo da metodologia proposta:

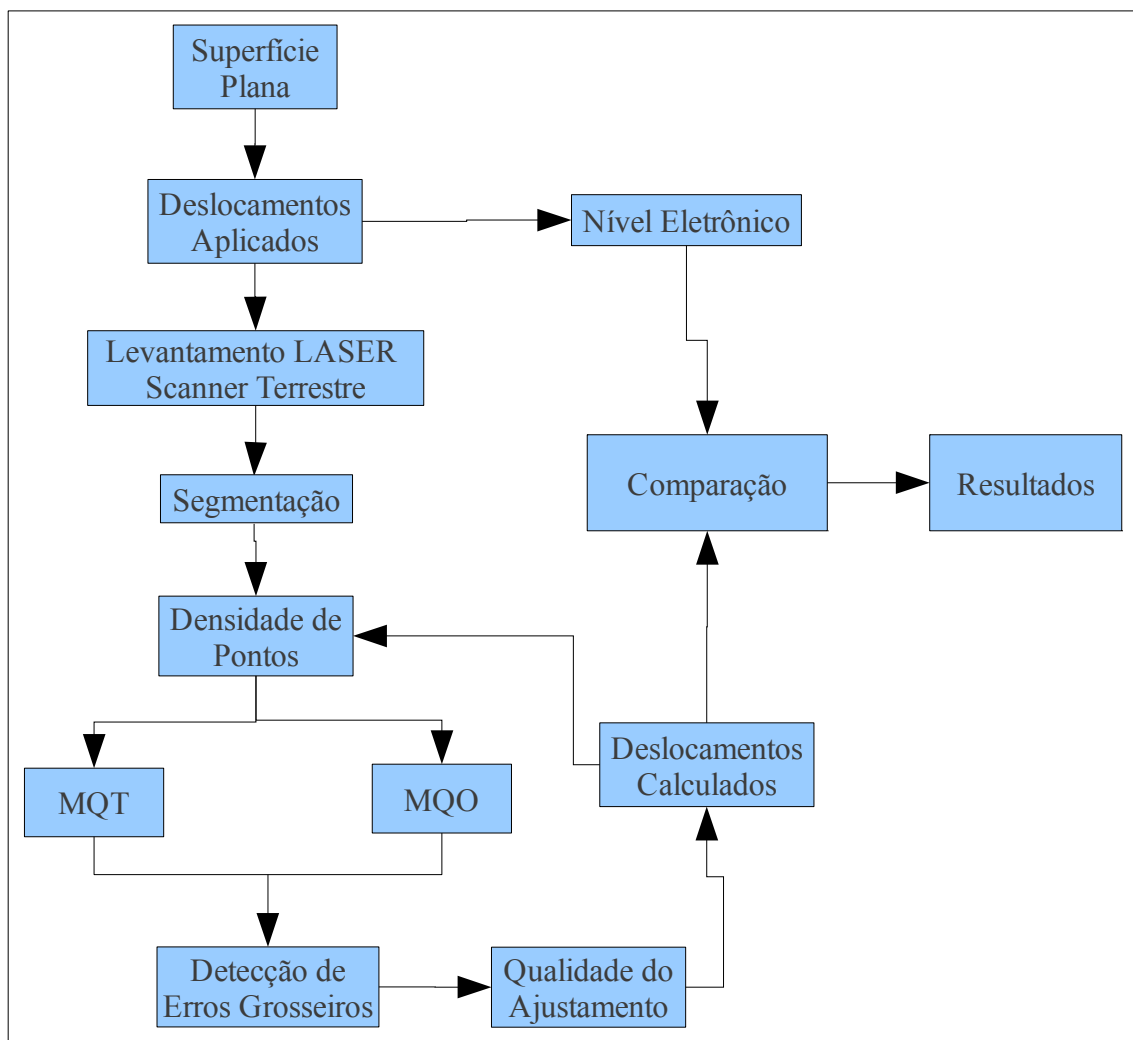


FIGURA 15 – DIAGRAMA DE FLUXO DA METODOLOGIA PROPOSTA.

FONTE – O autor (2010)

3.2.1 Representação paramétrica do objeto em estudo

Neste trabalho forem selecionados três modelos de ajustamento de observações, conforme apresentado a seguir:

3.2.1.1 Modelo Paramétrico Z

O “modelo paramétrico Z” (MPZ) representa o plano utilizando a parametrização $z = a \cdot x + b \cdot y + c$. Isto é, as observações são consideradas função das coordenadas “z” medidas. A escolha desta parametrização justifica-se pelo fato que o plano em estudo é quase ortogonal ao eixo Z.

Já que a variância da unidade de peso a priori é desconhecida neste caso, e não se deve aceitar como verdadeira a suposição de que somente as coordenadas z estão sendo afetadas por erros aleatórios, a matriz dos pesos é aceita como sendo uma matriz identidade.

Segundo o estabelecido em 2.3.2.1 a solução deste modelo é calculada usando a (12), onde:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

e

$$Lb = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (42)$$

O vetor dos parâmetros contém $X = [a \ b \ c]^T$

3.2.1.2 Modelo Paramétrico D

O “modelo paramétrico D” (MPD) representa o plano utilizando a parametrização $d = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$. Isto é, as coordenadas observadas x, y e z são consideradas função do

coeficiente “ d ”. Já que o termo independente não foi observado, é ilógico supor que tenha precisões associadas, por tanto, a matriz dos pesos é aceita como sendo uma matriz identidade.

Segundo o estabelecido em 2.3.2.1 a solução deste modelo é calculada usando a equação (12), onde:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (43)$$

e

$$Lb = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

O vetor dos parâmetros contém $X = [a \ b \ c]^T$

3.2.1.3 Modelo “Erros Nas Variáveis D”

No modelo “erros nas variáveis D” (ENVD) a equação $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ é resolvida utilizando a teoria apresentada na secção 2.3.2.2. Este modelo apresenta a vantagem de minimizar as distâncias ortogonais entre o modelo funcional e as observações. A solução deste modelo é calculada utilizando a (25).

3.2.2 Detecção de *outliers*

Os *outliers* são detectados utilizando independentemente as técnicas “critério de rejeição de *Chauvenet*” descrita em 2.3.4.1 e o “teste *TAU*” descrito em 2.3.4.3.

No teste *TAU* as observações associadas com erros considerados *outliers*, são removidas uma a uma, iterativamente. Os parâmetros e estatísticas associadas são recalculados após eliminar cada elemento.

No caso do critério de rejeição de *Chauvenet*, todas as observações associadas com

resíduos considerados como sendo *outliers* são eliminadas num único passo. Após removidos os *outliers*, novos parâmetros e estatísticas associadas são recalculados.

3.2.3 Qualidade do Ajustamento

Num ajustamento de observações bem sucedido, os resíduos obtidos são mínimos e apresentam uma distribuição normal sem correlação espacial (DONNEY; GLOVER ; JENKINS, 2004).

Para testar se os ajustamentos feitos cumprem com as características antes descritas serão feitos dois testes estatísticos independentes. O primeiro verificará a hipótese de que os resíduos estão normalmente distribuídos a um nível de significância α , enquanto que o segundo verificará a hipótese de que os resíduos têm média zero a um nível de significância α .

3.2.3.1 Teste de normalidade dos resíduos

A normalidade dos resíduos será testada utilizando o teste *Lilliefors* como descrito no item 2.3.3.1.2. O nível de significância α adotado será de 0.1%. As hipóteses são:

H0 : Os resíduos tem distribuição normal.

H1 : Os resíduos não tem distribuição normal.

3.2.3.2 Teste de centragem das médias

É feito um teste de hipótese χ^2 bilateral, com um nível de significância α de 0.1%. As hipóteses são:

H0 : Os resíduos têm média zero.

H1 : Os resíduos não têm média zero.

3.2.3.3 Estimativa de precisão dos parâmetros calculados

No caso do MP, o modelo que descreve a propagação da MVC aos parâmetros calculados encontra-se em Gemael (2004), como segue:

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T Q^{-1} A)^{-1} \quad (45)$$

onde:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \text{variância da unidade de peso a posteriori}$$

No caso do modelo ENV, o modelo que descreve a propagação da MVC aos parâmetros encontra-se em Schaffrin (2008), como segue:

$$\Sigma_X = (n - u)^{-1} [\hat{v} (N - \hat{v} I_m)^{-1} + \hat{v}^2 (N - \hat{v} I_m)^{-2}] \quad (46)$$

onde:

$$\hat{v} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (n - u)$$

$$N = A^T \cdot A$$

$$I_m = \text{Matriz identidade}$$

3.2.4 Estimação de deslocamentos angulares

Nesta subseção são apresentados os métodos utilizados para detectar a existência de deslocamentos angulares, representar os planos parametricamente e calcular a magnitude dos deslocamentos detectados.

3.2.4.1 Existência de deslocamentos angulares

Para determinar a existência de deslocamentos angulares, propõe-se testar a existência de um conjunto de novos parâmetros X que satisfaçam a seguinte condição:

$$X = XI = X2 \quad (47)$$

onde:

$X1$ = conjunto de parâmetros calculados para a época 1; e

$X2$ = conjunto de parâmetros calculados para a época 2.

Se $X = [a \ b \ c]$, $X1 = [a1 \ b1 \ c1]$ e $X2 = [a2 \ b2 \ c2]$, o sistema de equações é dado por:

$$F = \begin{bmatrix} a=a1 \\ b=b1 \\ c=c1 \\ a=a2 \\ b=b2 \\ c=c2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

A matriz das derivadas parciais em relação aos parâmetros tem a forma:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

O vetor das observações é composto pelos parâmetros dos planos calculados para as épocas 1 e 2:

$$Lb = [a1 \ b1 \ c1 \ a2 \ b2 \ c2]^T \quad (50)$$

Σ_{X1} e Σ_{X2} calculados previamente, passaram a determinar as precisões do novo vetor de observações:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \Sigma_{X1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{X2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Neste caso só o vetor das observações tem precisões associadas, portanto é pertinente obter o vetor X utilizando a (12) e a matriz variância co-variância com a (45).

Para testar se o ajustamento é estatisticamente realista, pode-se comparar o indicador

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n-u} \quad \text{contra a distribuição teórica } \chi^2 \text{ com 3 graus de liberdade. A hipótese } H_0 \text{ é "o$$

modelo descrito na equação (42) ajusta-se às observações a um nível de significância α ". Se

H_0 é aceito e não existem deslocamentos estatisticamente significativos entre as épocas 1 e 2. Caso contrário, existem deslocamentos estatisticamente significativos com um nível de significância α .

3.2.4.2 Representação dos planos

Os planos ajustados serão representados definindo as componentes do vetor normal unitário. Isto é:

$$\hat{n} = [nx \quad ny \quad nz]^T \quad (52)$$

onde:

$$nx = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad ; \quad ny = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad ; \quad nz = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (53)$$

Sendo nx , ny e nz os cossenos diretores associados com os eixos x , y e z do sistema de coordenadas respectivamente.

3.2.4.3 Magnitude dos deslocamentos

Após de detectar a existência de deslocamentos angulares, a magnitude se pode calcular com:

$$\cos(\theta) = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 \quad (54)$$

onde:

\hat{n}_1 e \hat{n}_2 são os vetores normais dos planos nas épocas 1 e 2 respectivamente.

A seguir é apresentado um experimento realizado para validar os objetivos pretendidos de acordo com o método proposto.

4 EXPERIMENTOS

A seguir é apresentado um experimento que consiste na medição de deslocamentos angulares aplicados a uma superfície sob condições controladas. Os deslocamentos angulares foram medidos com LST e comparados com as medições feitas com o equipamento descrito na subsecção 3.1.3. Foi dividido nas seguintes partes:

- a) configuração do experimento;
- b) soluções de representação do objeto em estudo;
- c) deslocamentos angulares e precisões; e
- d) comparação com deslocamentos angulares impostos.

4.1 CONFIGURAÇÃO DO EXPERIMENTO

A seguir serão detalhadas as características do experimento realizado. A configuração espacial dos elementos envolvidos nele, a definição do sistema de coordenadas adotado, os métodos, e casos avaliados.

4.1.1 Configuração espacial LST – objeto em análise

O LST descrito em 3.1.2 localiza-se aproximadamente à 4,5 m do centro do objeto em análise, descrito em 3.1.1. Sua configuração espacial se aprecia na figura 16:

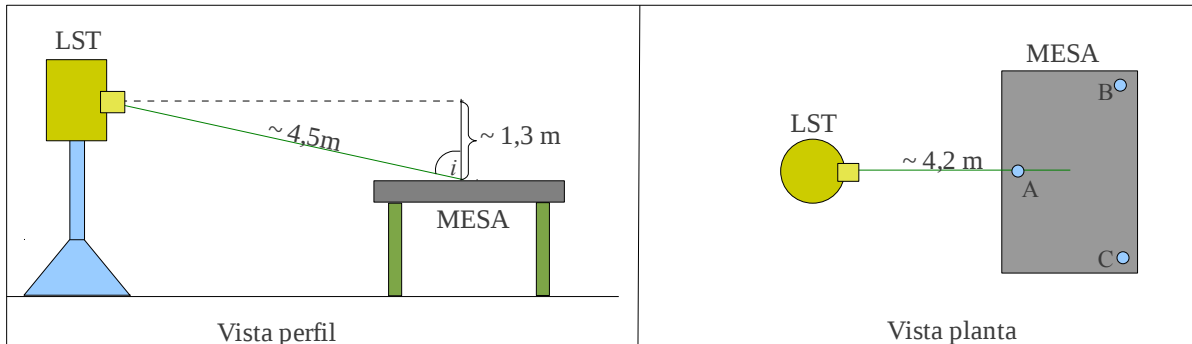


FIGURA 16 – CONFIGURAÇÃO ESPACIAL LST – OBJETO EM ANÁLISE

FONTE : O autor (2010)

A figura 16 apresenta a configuração espacial do LST utilizado e o objeto em análise. A secção da esquerda apresenta uma vista perfil da configuração onde se aprecia a diferença de alturas e distância entre eles ($\sim 1,3\text{m}$) e a distância inclinada entre eles ($\sim 4,5\text{m}$). O ângulo de incidência “ i ” entre eles é de $\sim 75^\circ$. Na secção da direita se aprecia uma vista planta da configuração descrita.

4.1.2 Relação objeto em análise – nível eletrônico

Para garantir que o nível eletrônico descrito em 3.1.3 detecte a totalidade do deslocamento aplicado, ele tem que ser disposto de forma paralela à reta que passa pelo parafuso “A” e é perpendicular à reta que passa pelos parafusos “B” e “C” (Reta $A \perp BC$). Devido a limitações físicas no momento da configuração do experimento não é possível o perfeito alinhamento do nível eletrônico com a mesa, gerando assim um ângulo $\alpha < 5^\circ$ (valor aproximado) entre o eixo do nível eletrônico e o eixo no qual os deslocamentos são aplicados (Figura 17) o que resulta num desvio sistemático nas medições dos deslocamentos .

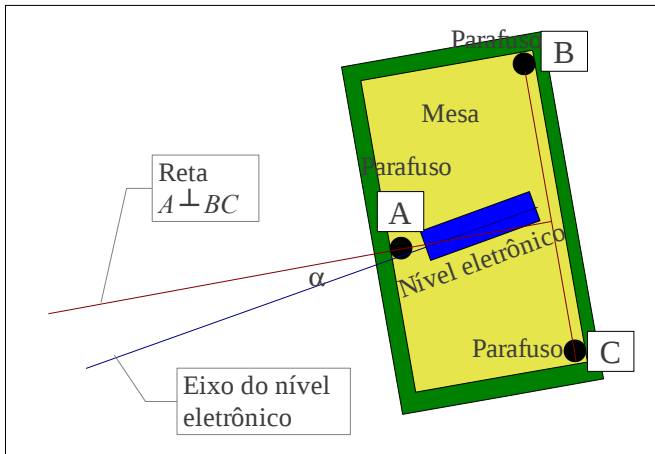


FIGURA 17 – RELAÇÃO NÍVEL ELETRÔNICO – OBJETO EM ANÁLISE

FONTE : O autor (2010)

Na figura 17 se observa a diferença entre as orientações do objeto em análise e o nível eletrônico.

4.1.3 Sistema de coordenadas

Neste experimento algumas injunções e concessões são feitas ao sistema de coordenadas adotado, a saber:

A origem do sistema de coordenadas se define como única, invariável e coincidente com a origem do sistema de coordenadas do equipamento e se materializa mediante um pilar de centragem forçada.

A orientação do sistema de coordenadas se aceita como invariante e materializada pela orientação dos eixos do equipamento utilizado, desde que o equipamento não é reiniciado nem alterado fisicamente durante os experimentos. O eixo Z é definido segundo a vertical do equipamento durante o levantamento. O eixo Y gera um ângulo $\beta < 5^\circ$ (valor aproximado) com o eixo de rotação do objeto.

A relação entre os desvios de orientação entre o LST, a mesa e o nível eletrônico são vistos na figura 18.

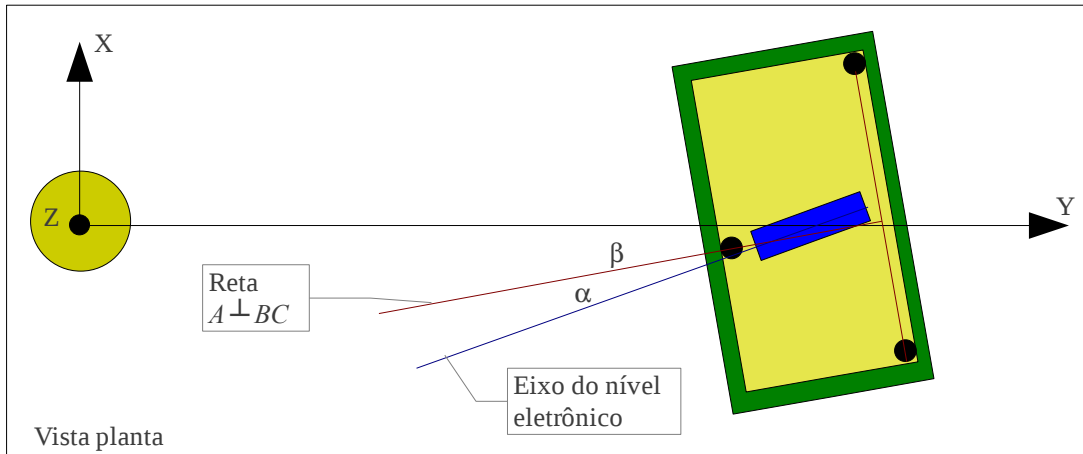


FIGURA 18 – ORIENTAÇÃO EIXO DO NÍVEL, EIXO DE INCLINAÇÃO DO OBJETO EM ESTUDO E SISTEMA DE COORDENADAS

FONTE : O autor (2010)

Na figura 18 se observa a relação entre as orientações do equipamento LST, objeto em análise e nível eletrônico.

4.1.4 Deslocamentos angulares aplicados

Considerando a configuração do experimento a ser conduzido foram aplicados deslocamentos angulares rotacionando o parafuso “A” que são apresentados na tabela 04. Na figura 19 se aprecia que um deslocamento angular aplicado “ γ ” gera um deslocamento linear “d” calculado.

TABELA 04 – DESLOCAMENTOS ANGULARES APLICADOS

Epoca	Inclinação (")	Desl Linear “d” (mm/m)
“E0”	0	0.0
“E1”	120	0.7
“E2”	250	1.5
“E3”	390	2.3
“E4”	520	3.0

FONTE : O autor, 2010

Estes valores foram arbitrados procurando impor deslocamentos desde o nível sub-milimétrico até aproximadamente a ordem de precisão posicional nominal do LST.

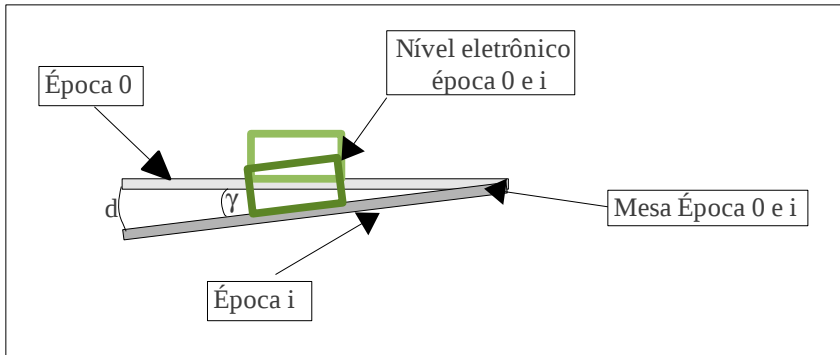


FIGURA 19 – EFEITO DE DESLOCAMENTO LINEAR CAUSADO PELO DESLOCAMENTO ANGULAR IMPOSTO.

A figura 19 apresenta uma vista lateral do objeto em estudo em duas épocas distintas (época 0 e época i). O efeito que um deslocamento angular γ aplicado ao girar o parafuso de nivelção “A” gera em termos de deslocamento linear se observa no indicador “d” da figura supracitada.

4.1.5 Segmentação de planos

A seleção dos pontos que constituem o objeto em estudo para cada época foi feita utilizando as capacidades de edição do aplicativo Cyclone descrito em 3.1.5. A identificação dos pontos que representam o objeto em estudo foi feita com auxílio das fotografias capturadas pelo equipamento LST como complemento ao levantamento.

Os arquivos gerados e a quantidade de pontos que constituem cada um são indicados na TABELA 05

TABELA 05 – QUANTIDADE DE PONTOS POR ÉPOCA

Época	Numero pontos
E0	13299
E1	13291
E2	14061
E3	13751
E4	13800

FONTE : O autor, 2010

A variabilidade da quantidade de pontos obtidos para cada época é explicada pelo fato de que não todos os pontos emitidos pelo LST são recebidos pelo equipamento. Também, o intervalo angular em que os pulsos LASER são emitidos tem variabilidade e por ultimo, a segmentação manual envolve uma seleção baseada no critério do operador

4.1.6 Geração de amostras

Do total de pontos coletados para cada época, foram geradas 4 subamostras de quantidades variáveis de pontos. A seleção de pontos foi feita aleatoriamente utilizando uma rotina programada em OCTAVE e os quantidades de pontos foram arbitrados procurando contar com um mínimo de 0,5 e um máximo de 50 pontos/dm². A Tabela 06 apresenta o total de pontos utilizados na representação do plano para cada uma das subamostras geradas. A coluna da direita apresenta uma relação da quantidade de pontos por unidade de área (dm²).

TABELA 06 – AMOSTRAS DE PONTOS

Subamostras	Total de pontos	Densidade (pontos/dm ²)
S1	100	0,48
S2	500	2,38
S3	4.000	19,05
S4	10.000	47,62

FONTE : O autor (2010)

A tabela 06 apresenta as amostras de pontos utilizadas.

4.1.7. Validação das amostras

Para testar se a aleatoriedade na geração das amostras descrita anteriormente influencia a qualidade dos resultados obtidos foi feito um teste descrito nos seguintes passos:

- Geração de 10 amostras (a, b, c, ... , i) de 1000 pontos cada uma para uma única época ;
- Calculo dos vetores normais para cada amostra;

- Cálculo das desvios padrões dos vetores normais obtidos;
- Cálculo dos ângulos gerados entre as amostras;
- Propagação dos desvios padrões dos vetores normais obtidos aos ângulos calculados
- Testagem da hipótese nula $H_0 =$ O conjunto de ângulos gerados pelas amostras consideradas são menores que os ângulos obtidos da propagação dos desvios padrões dos vetores normais calculados (κ).

O conjunto de ângulos obtidos pode ser descrito pela sua media $\bar{\lambda}=32''$ e seu desvio padrão $\sigma_{\lambda}=19''$. O conjunto dos ângulos obtidos da propagação das co-variâncias dos vetores normais calculados pode ser descrito pela sua media $\bar{\kappa}=44''$ e seu desvio padrão $\sigma_{\kappa}=1''$.

O teste t unicaudal feito detalha-se:

$$H_0 = \bar{\lambda} < \bar{\kappa}$$

$$H_1 = \bar{\lambda} \geq \bar{\kappa}$$

$$\alpha = 0,1$$

$$t_{0,1;44} \approx 1,303$$

$$t = -4,12$$

Já que o valor t calculado é menor que o valor t tabular rejeita-se a hipótese nula com um nível de significância α .

4.2 SOLUÇÕES DE REPRESENTAÇÃO DO OBJETO EM ESTUDO

Esta subseção apresenta os resultados dos cálculos realizados para a representação paramétrica da superfície em estudo. Está dividida nas seguintes partes:

- a) Representação paramétrica do objeto em estudo;
- b) Detecção de *outliers*; e
- c) Teste de qualidade do ajustamento de observações.

4.2.1 Representação paramétrica do objeto em estudo

Utilizando os modelos descritos nos itens 2.3.2.1 e 2.3.2.2 foram calculados os parâmetros de representação e MVC do objeto em análise para as épocas: E0; E1; E2; E3; e E4 e para os tamanhos amostrais “S1”, “S2”, “S3” e “S4”.

4.2.2 Detecção de *outliers*

Na tabela 07 é apresentada a quantidade de observações rejeitadas pelo teste TAU e pelo critério de rejeição de *Chauvenet* para o modelo descrito em 2.3.3.2 na época 0.

TABELA 07 – OBSERVAÇÕES REJEITADAS

Subamostra	Quantidade de observações rejeitadas pelo teste TAU	Quantidade de observações rejeitadas pelo Critério de rejeição de <i>Chauvenet</i>
S1	0	1
S2	3	3
S3	8	8
S4	14	24

FONTE : O autor (2010)

Embora que o teste TAU seja um método mais inteligente na detecção de *outliers* que o critério de rejeição de *Chauvenet*, já que pondera cada observação utilizando os resíduos obtidos após o ajustamento, ambas técnicas apresentadas detectam as mesmas observações como sendo *outliers*, exceto na subamostra S4 onde o critério de rejeição de *Chauvenet* rejeita 10 observações a mais que o teste TAU.

4.2.3. Teste de qualidade do ajustamento de observações

Esta subsecção está dividida nas seguintes partes: Teste de normalidade dos resíduos; e Teste de centragem das medias.

4.2.3.1 Teste de normalidade dos resíduos

Na TABELA 08 são apresentados os casos onde H_0 foi rejeitado ao nível de significância α de acordo com a metodologia proposta. Na coluna “Modelo” observa-se primeiramente a abreviatura do modelo utilizado seguido da abreviatura do método de detecção de *outliers* utilizado, por exemplo, “ENVD TAU” indica que para o ajustamento foi utilizado o modelo “erros nas variáveis D” e para a detecção de *outliers* foi utilizado o teste TAU.

TABELA 08 – NORMALIDADE REJEITADA

Modelo	Amostra	Época
ENVD TAU	S4	E0
MPZ TAU	S4	E0
	S4	E3
MPZ CH	S4	E0
MPD TAU	S4	E0
MPD CH	S4	E0

FONTE : O autor (2010)

Na Tabela 08 se observa que em geral a amostra que contem 10000 observações (S4) falha no teste de normalidade.

Para avaliar a causa da rejeição da normalidade são apresentados os gráficos de probabilidade normal de uma distribuição comprovadamente normal e dos casos antes assinalados. A ideia é que o gráfico de distribuição normal da amostra comprovadamente forneça um parâmetro de comparação com os demais gráficos. Os gráficos são apresentados nas Figuras 20 a 25:

FIGURA 20 : PARAMÉTRICO D, *Chauvenet*, S4, E0 (Amostra comprovadamente normal)

FIGURA 21 : ENV D, teste tau, S4, E0

FIGURA 22 : PARAMÉTRICO Z, teste tau, S4, E0

FIGURA 23 : PARAMÉTRICO Z, teste tau, S4, E3

FIGURA 24 : PARAMÉTRICO Z, *Chauvenet*, S4, E0

FIGURA 25 : PARAMÉTRICO D, teste tau, S4, E0

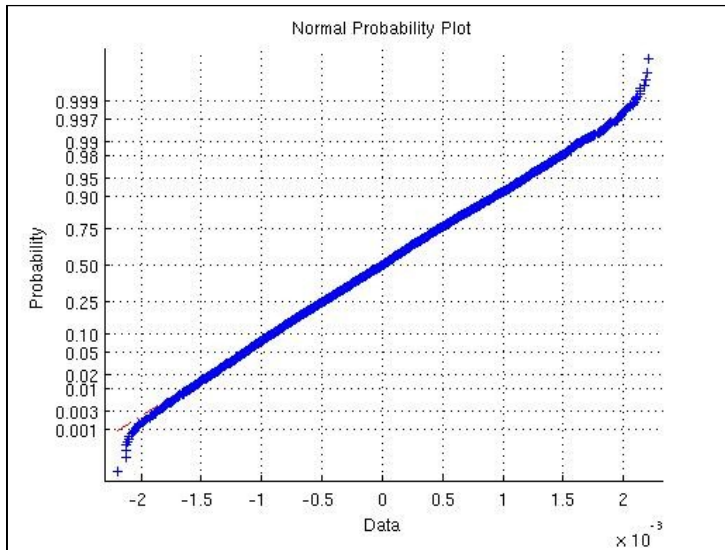


FIGURA 20 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPD, CHAUVENET, S4, E0

FONTE : O autor (2010)

Na figura 20 se observa que para a probabilidade adotada ($0.001 < p < 0.999$) os desvios têm um comportamento semelhante à reta teórica traçada. Embora as observações associadas com probabilidades maiores apresentem um comportamento semelhante ao observado na figura 11e, que indica presença de grandes desvios tanto de sinal positiva quanto negativa, a normalidade da amostra não é comprometida.

Nas Figuras 21 à 25 se observa que ao avaliar a tendencia dos dados na probabilidade adotada $0.001 > p > 0.999$, eles apresentam um comportamento semelhante ao observado na figura 11c, fato que indica a presença de grandes desvios de sinal negativo.

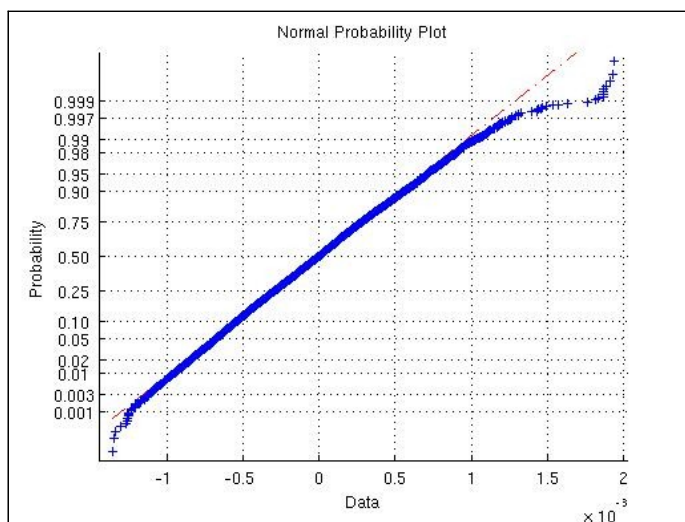


FIGURA 21 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS ENVD, TESTE TAU, S4, E0

FONTE : O autor (2010)

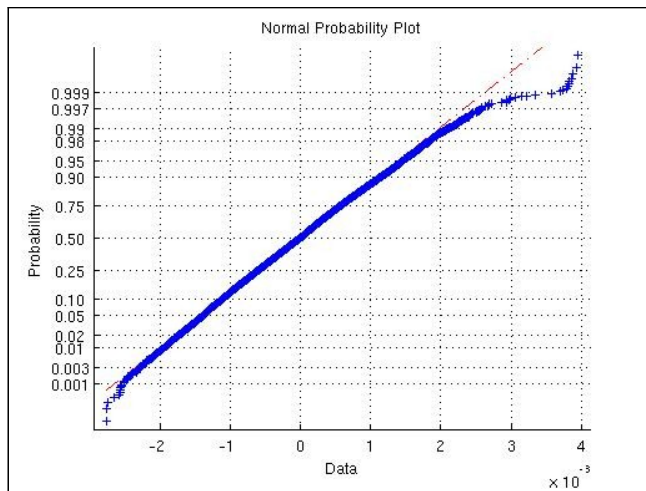


FIGURA 22 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, TESTE TAU, S4, E0

FONTE : O autor (2010)

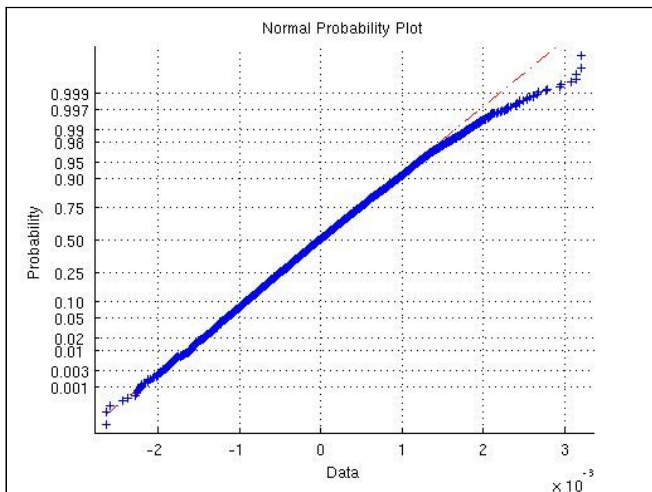


FIGURA 23 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, TESTE TAU, S4, E3

FONTE : O autor (2010)

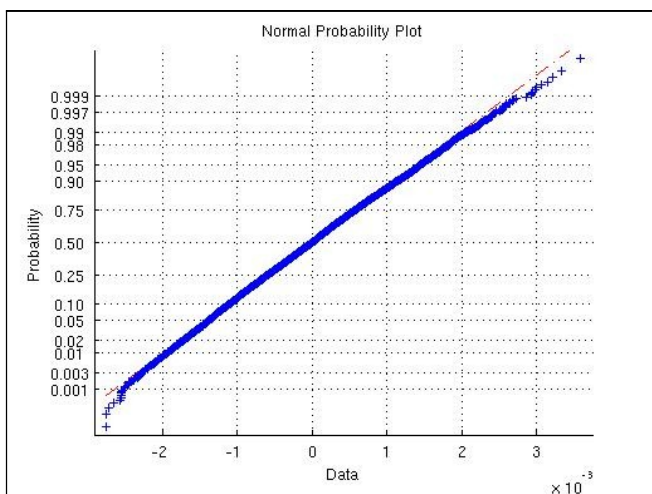


FIGURA 24 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPZ, CHAUVENET, S4, E0

FONTE : O autor (2010)

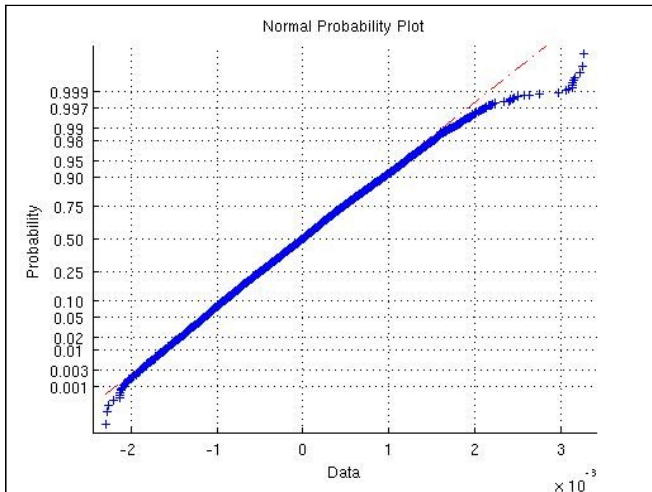


FIGURA 25 – NORMALIDADE DOS RESÍDUOS MPD, TESTE TAU, S4, E0

FONTE : O autor (2010)

A rejeição da normalidade é explicada por que os métodos de detecção de *outliers* apresentados, permitem a sobrevivência de observações com grandes desvios.

4.2.3.2 Teste de centragem das medias

O teste de centragem das médias realizado indica que não existem motivos para rejeitar H_0 com um nível de significância α .

4.3 DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES

Nas tabelas a seguir são apresentados os ângulos medidos para aqueles casos em que foi verificada a existência de deslocamento de acordo com 3.2.4.1.

TABELA 9 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, ENVD, TAU

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	91,11	32,1	Não Detectado		31,53	13,42	24,03	12,19
	Rotação y	222,49	67,75	Não Detectado		117,21	28,69	112,88	25,96
	Rotação z	0,58	0,19	Não Detectado		0,27	0,06	0,26	0,06
E1 4000	Rotação x	93,64	25,81	21,71	13,87	34,06	7,13	26,56	5,9
	Rotação y	283,32	54,33	132,89	29,21	178,04	15,26	173,71	12,54
	Rotação z	0,7	0,16	0,28	0,07	0,39	0,03	0,38	0,03
E1 10000	Rotação x	92,9	24,5	20,97	12,56	33,32	5,82	25,82	4,59
	Rotação y	255,19	51,58	104,76	26,47	149,91	12,52	145,59	9,8
	Rotação z	0,64	0,16	0,23	0,06	0,34	0,03	0,33	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E2 100	Rotação x	72,83	45,53	0,9	33,58	13,25	26,84	5,75	25,61
	Rotação y	430,55	93,89	280,12	68,77	325,27	54,82	320,94	52,1
	Rotação z	0,92	0,2	0,5	0,1	0,62	0,07	0,61	0,07
E2 500	Rotação x	99,09	32,66	27,16	20,71	39,51	13,98	32,01	12,75
	Rotação y	371,91	66,28	221,48	41,16	266,64	27,21	262,31	24,49
	Rotação z	0,84	0,18	0,42	0,08	0,53	0,05	0,52	0,04
E2 4000	Rotação x	109,24	25,8	37,31	13,85	49,66	7,11	42,16	5,88
	Rotação y	398,01	53,93	247,58	28,81	292,73	14,86	288,4	12,14
	Rotação z	0,87	0,16	0,45	0,06	0,56	0,03	0,55	0,02
E2 10000	Rotação x	116,26	24,47	44,34	12,52	56,69	5,79	49,19	4,56
	Rotação y	400,94	51,35	250,51	26,23	295,66	12,28	291,33	9,56
	Rotação z	0,87	0,16	0,45	0,06	0,56	0,03	0,55	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E3 100	Rotação x	145,58	38,54	73,65	26,59	86	19,85	78,5	18,62
	Rotação y	513,58	83,16	363,15	58,04	408,3	44,1	403,97	41,37
	Rotação z	0,96	0,18	0,55	0,08	0,66	0,05	0,65	0,04
E3 500	Rotação x	134,29	30,22	62,36	18,27	74,71	11,54	67,21	10,31
	Rotação y	494,83	63,2	344,4	38,08	389,55	24,14	385,22	21,41
	Rotação z	0,96	0,16	0,54	0,07	0,65	0,03	0,64	0,03
E3 4000	Rotação x	132,84	25,15	60,92	13,2	73,27	6,47	65,77	5,24
	Rotação y	534,62	52,97	384,19	27,85	429,34	13,9	425,01	11,18
	Rotação z	0,99	0,15	0,57	0,06	0,68	0,02	0,67	0,02
E3 10000	Rotação x	136,01	24,09	64,08	12,14	76,43	5,41	68,93	4,18
	Rotação y	540,6	50,64	390,17	25,53	435,32	11,58	430,99	8,86
	Rotação z	0,99	0,15	0,57	0,06	0,68	0,02	0,67	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	100,47	40,54	28,54	28,59	40,89	21,86	33,39	20,63
	Rotação y	620,82	86,24	470,39	61,13	515,54	47,18	511,21	44,46
	Rotação z	1,04	0,16	0,62	0,06	0,73	0,03	0,72	0,02
E4 500	Rotação x	152,47	30,77	80,55	18,82	92,9	12,09	85,4	10,85
	Rotação y	711,1	63,95	560,67	38,83	605,82	24,88	601,49	22,16
	Rotação z	1,01	0,16	0,59	0,06	0,7	0,03	0,69	0,02
E4 4000	Rotação x	160,1	25,17	88,17	13,23	100,52	6,49	93,02	5,26
	Rotação y	650,98	52,94	500,55	27,82	545,7	13,87	541,37	11,15
	Rotação z	1,01	0,15	0,59	0,05	0,7	0,02	0,69	0,02
E4 10000	Rotação x	153,33	24,11	81,41	12,16	93,76	5,42	86,26	4,19
	Rotação y	657,88	50,65	507,45	25,53	552,6	11,59	548,27	8,86
	Rotação z	1,01	0,15	0,59	0,05	0,71	0,02	0,7	0,01

FONTE – O autor (2010)

Na Tabela 09 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x , y e z de respectivamente 73", 179" e 0,5" na época 1; 115", 209" e 0,5" na época 2; 83", 196" e 0,4" na época 3 e 132", 181" e 0,4" na época 4. Por sua vez, as piores precisões associadas com as as componentes x , y e z são: 32", 68" e 0,2" para a época 1; 46", 94" e 0,2" para a época 2; 39", 83" e 0,2" para a época 3 e 41", 86" e 0,2" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras S1 e S2 pontos.

Por sua vez, os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

TABELA 10 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, ENVVD, *CHAUVENET*

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	102,36	30,71	Não Detectado		34,28	13,31	26,09	12,05
	Rotação y	173,74	65,41	Não Detectado		116,44	28,44	110,48	25,68
	Rotação z	0,43	0,18	Não Detectado		0,27	0,06	0,26	0,06
E1 4000	Rotação x	101,99	24,53	21,56	13,85	33,91	7,12	25,72	5,87
	Rotação y	233,91	52,21	131,45	29,2	176,6	15,25	170,64	12,49
	Rotação z	0,55	0,15	0,28	0,07	0,39	0,03	0,38	0,03
E1 10000	Rotação x	101,47	23,22	21,04	12,55	33,39	5,82	25,2	4,57
	Rotação y	205,8	49,47	103,34	26,46	148,5	12,51	142,54	9,75
	Rotação z	0,49	0,14	0,22	0,06	0,34	0,03	0,32	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E2 100	Rotação x	79,64	41,81	Não Detectado		11,55	24,41	3,37	23,16
	Rotação y	299,77	87,89			242,46	50,92	236,5	48,16
	Rotação z	0,67	0,2			0,51	0,09	0,49	0,08
E2 500	Rotação x	107,6	31,39	27,16	20,72	39,51	13,99	31,32	12,74
	Rotação y	323,94	64,17	221,48	41,15	266,64	27,21	260,68	24,45
	Rotação z	0,69	0,16	0,42	0,08	0,53	0,05	0,52	0,04
E2 4000	Rotação x	117,75	24,52	37,31	13,84	49,66	7,11	41,47	5,86
	Rotação y	350,04	51,83	247,58	28,81	292,73	14,86	286,77	12,1
	Rotação z	0,72	0,14	0,45	0,06	0,56	0,03	0,55	0,02
E2 10000	Rotação x	125,25	23,19	44,82	12,52	57,17	5,79	48,98	4,53
	Rotação y	353,83	49,24	251,37	26,22	296,52	12,27	290,56	9,51
	Rotação z	0,72	0,14	0,45	0,06	0,57	0,03	0,55	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E3 100	Rotação x	147,41	36,69	66,97	26,02	79,32	19,29	71,14	18,04
	Rotação y	465,5	79,71	363,04	56,69	408,19	42,74	402,24	39,98
	Rotação z	0,82	0,16	0,55	0,08	0,66	0,05	0,65	0,04
E3 500	Rotação x	141,25	28,87	60,81	18,19	73,16	11,46	64,98	10,21
	Rotação y	452,92	60,97	350,46	37,95	395,61	24,01	389,65	21,25
	Rotação z	0,81	0,15	0,54	0,07	0,66	0,03	0,64	0,03
E3 4000	Rotação x	140,9	23,87	60,46	13,19	72,82	6,46	64,63	5,21
	Rotação y	487,06	50,85	384,61	27,83	429,76	13,89	423,8	11,13
	Rotação z	0,84	0,14	0,57	0,06	0,68	0,02	0,67	0,02
E3 10000	Rotação x	144,63	22,8	64,2	12,13	76,55	5,4	68,36	4,15
	Rotação y	493,04	48,53	390,58	25,51	435,74	11,56	429,78	8,8
	Rotação z	0,84	0,14	0,57	0,06	0,68	0,02	0,67	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	108,98	39,26	28,54	28,59	40,89	21,86	32,71	20,61
	Rotação y	572,84	84,14	470,39	61,13	515,54	47,18	509,58	44,42
	Rotação z	0,89	0,14	0,62	0,06	0,73	0,03	0,72	0,02
E4 500	Rotação x	166,05	29,45	85,61	18,77	97,96	12,04	89,77	10,79
	Rotação y	670,91	61,73	568,45	38,71	613,6	24,76	607,64	22
	Rotação z	0,85	0,14	0,58	0,06	0,7	0,03	0,68	0,02
E4 4000	Rotação x	169,17	23,89	88,73	13,21	101,08	6,48	92,89	5,23
	Rotação y	603,91	50,81	501,45	27,79	546,6	13,85	540,64	11,09
	Rotação z	0,86	0,14	0,59	0,05	0,7	0,02	0,69	0,01
E4 10000	Rotação x	162	22,82	81,56	12,15	93,91	5,42	85,73	4,17
	Rotação y	608,89	48,54	506,43	25,52	551,59	11,57	545,63	8,81
	Rotação z	0,86	0,13	0,59	0,05	0,71	0,02	0,69	0,01

FONTE – O autor (2010)

Na Tabela 10 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x, y e z de respectivamente 81", 131" e 0,3" na época 1; 122", 132" e 0,3" na época 2; 87", 143" e 0,3" na época 3 e 138", 201" e 0,3" na época 4. Por sua vez, as piores

precisões associadas com as componentes x , y e z são: 31", 65" e 0,2" para a época 1; 42", 88" e 0,2" para a época 2; 37", 80" e 0,2" para a época 3 e 39", 84" e 0,1" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras de S1 e S2 pontos.

Por sua vez, os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

TABELA 11 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPZ, TAU

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 4000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		27,8	9,83	21,67	8,13
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		147,78	21,24	144,33	17,43
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,27	0,04	0,27	0,03
E1 10000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		27,17	8,04	21,05	6,33
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		124,35	17,45	120,9	13,64
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,24	0,03	0,23	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E2 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E2 500	Rotação x	81,46	45,69	22,06	28,57	32,11	14,38	25,98	14,38
	Rotação y	309,63	93,71	184,38	57,26	221,93	27,1	218,48	27,1
	Rotação z	0,58	0,21	0,29	0,09	0,37	0,03	0,36	0,03
E2 4000	Rotação x	89,87	31,32	30,48	14,19	40,52	9,79	34,4	8,09
	Rotação y	330,78	66,61	205,53	30,16	243,08	20,63	239,63	16,82
	Rotação z	0,6	0,18	0,31	0,06	0,39	0,03	0,39	0,03
E2 10000	Rotação x	95,67	31,32	36,27	14,19	46,32	7,97	40,19	6,27
	Rotação y	333,06	66,61	207,81	30,16	245,35	17,07	241,91	13,26
	Rotação z	0,6	0,18	0,31	0,06	0,39	0,03	0,39	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E3 100	Rotação x	119,92	53,92	60,52	36,8	70,57	22,61	64,45	22,61
	Rotação y	427,65	117,3	302,4	80,85	339,95	50,69	336,5	50,69
	Rotação z	0,67	0,21	0,38	0,09	0,46	0,03	0,45	0,03
E3 500	Rotação x	110,56	42,29	51,16	25,17	61,21	10,97	55,08	10,97
	Rotação y	412,12	89,31	286,87	52,86	324,42	22,7	320,97	22,7
	Rotação z	0,67	0,19	0,38	0,08	0,45	0,01	0,45	0,01
E3 4000	Rotação x	109,28	31,32	49,89	14,19	59,93	8,89	53,81	7,18
	Rotação y	444,28	66,61	319,03	30,16	356,58	19,24	353,13	15,43
	Rotação z	0,69	0,18	0,39	0,06	0,47	0,03	0,47	0,02
E3 10000	Rotação x	111,91	31,32	52,51	14,19	62,55	7,44	56,43	5,73
	Rotação y	448,75	66,61	323,5	30,16	361,05	16,06	357,6	12,25
	Rotação z	0,69	0,18	0,4	0,06	0,47	0,03	0,47	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	82,87	56,64	23,47	39,52	33,52	25,32	27,4	25,32
	Rotação y	514,92	121,32	389,67	84,87	427,22	54,71	423,77	54,71
	Rotação z	0,72	0,19	0,43	0,07	0,51	0,01	0,5	0,01
E4 500	Rotação x	124,93	42,95	65,53	25,83	75,58	11,64	69,45	11,64
	Rotação y	588,66	90,09	463,41	53,63	500,96	23,48	497,51	23,48
	Rotação z	0,7	0,19	0,41	0,07	0,49	0,01	0,48	0,01
E4 4000	Rotação x	131,33	31,32	71,93	14,19	81,98	8,9	75,85	7,2
	Rotação y	539,52	66,61	414,27	30,16	451,82	19,15	448,37	15,34
	Rotação z	0,7	0,18	0,41	0,06	0,49	0,03	0,48	0,02
E4 10000	Rotação x	125,78	31,32	66,38	14,19	76,42	7,45	70,3	5,75
	Rotação y	545,12	66,61	419,87	30,16	457,42	16,04	453,97	12,23
	Rotação z	0,71	0,18	0,41	0,06	0,49	0,03	0,49	0,02

FONTE : O autor (2010)

Na tabela 11 se observa que embora para a época 1 as amostras S1 e S2 não fornecem solução estatisticamente significativa, as soluções obtidas a partir de S3 e S4 são estatisticamente aceitável. As rotações nas componentes x , y e z estão na ordem de 25", 130" e 0,2" respectivamente enquanto que as suas precisões associadas com as componentes x , y e z estão na ordem de 8", 17" e 0,03" respectivamente.

Para as épocas 2, 3 e 4 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x , y e z de respectivamente 74", 149" e 0,3" na época 2; 70", 162" e 0,3" na época 3 e 108", 150" e 0,3" na época 4. Por sua vez, as piores precisões associadas com as as componentes x , y e z são: 46", 94" e 0,2" para a época 2; 54", 117" e 0,2" para a época 3 e 57", 121" e 0,2" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras S1 e S2.

Os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

TABELA 12 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPZ, CHAUVENET

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 4000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		27,68	9,82	20,98	8,09
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		146,61	21,22	141,71	17,36
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,27	0,04	0,26	0,03
E1 10000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		27,23	8,03	20,53	6,3
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		123,2	17,43	118,3	13,57
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,23	0,03	0,22	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E2 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E2 500	Rotação x	Não Detectado		22,06	28,57	32,11	19,24	25,4	17,51
	Rotação y	Não Detectado		184,38	57,26	221,93	37,75	217,03	33,88
	Rotação z	Não Detectado		0,29	0,09	0,37	0,05	0,36	0,05
E2 4000	Rotação x	96,71	34,42	30,48	19,12	40,52	9,79	33,82	8,06
	Rotação y	290,25	73,47	205,53	40,14	243,08	20,63	238,18	16,76
	Rotação z	0,5	0,17	0,31	0,07	0,39	0,03	0,38	0,03
E2 10000	Rotação x	102,9	32,6	36,66	17,3	46,71	7,97	40,01	6,24
	Rotação y	293,25	69,9	208,53	36,57	246,08	17,06	241,17	13,2
	Rotação z	0,5	0,16	0,31	0,07	0,39	0,03	0,38	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E3 100	Rotação x	121,34	51,32	55,11	36,03	65,15	26,7	58,45	24,97
	Rotação y	387,28	112,27	302,56	78,94	340,11	59,43	335,2	55,56
	Rotação z	0,57	0,19	0,38	0,09	0,46	0,05	0,45	0,04
E3 500	Rotação x	116,14	40,35	49,9	25,06	59,95	15,73	53,24	14
	Rotação y	376,63	85,99	291,91	52,66	329,46	33,15	324,55	29,28
	Rotação z	0,57	0,17	0,38	0,08	0,46	0,04	0,45	0,03
E3 4000	Rotação x	115,76	33,5	49,52	18,21	59,56	8,88	52,86	7,15
	Rotação y	404,11	72,07	319,39	38,74	356,94	19,22	352,04	15,36
	Rotação z	0,58	0,16	0,4	0,07	0,47	0,03	0,46	0,02
E3 10000	Rotação x	118,78	32,05	52,54	16,76	62,59	7,43	55,88	5,7
	Rotação y	409,05	68,88	324,33	35,55	361,88	16,04	356,97	12,17
	Rotação z	0,58	0,16	0,4	0,06	0,48	0,03	0,47	0,02

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	89,71	54,81	23,47	39,52	33,52	30,18	26,81	28,45
	Rotação y	474,39	118,2	389,67	84,87	427,22	65,35	422,32	61,49
	Rotação z	0,62	0,17	0,43	0,07	0,51	0,04	0,5	0,03
E4 500	Rotação x	131,77	41,12	65,53	25,83	75,58	16,5	68,87	14,77
	Rotação y	548,13	86,96	463,41	53,63	500,96	34,12	496,06	30,25
	Rotação z	0,6	0,17	0,41	0,07	0,49	0,03	0,48	0,02
E4 4000	Rotação x	138,62	33,51	72,39	18,22	82,43	8,89	75,73	7,16
	Rotação y	499,75	71,96	415,03	38,63	452,58	19,12	447,68	15,25
	Rotação z	0,6	0,16	0,41	0,06	0,49	0,03	0,48	0,02
E4 10000	Rotação x	132,75	32,07	66,51	16,78	76,56	7,44	69,85	5,71
	Rotação y	503,78	68,87	419,07	35,54	456,61	16,02	451,71	12,16
	Rotação z	0,6	0,16	0,41	0,06	0,49	0,03	0,48	0,02

FONTE : O autor (2010)

Na Tabela 12 se observa que embora para a época 1 as amostras S1 e S2 pontos não fornecem solução estatisticamente significativa, as soluções obtidas a partir de S3 e S4 são estatisticamente aceitável. As rotações nas componentes x , y e z estão na ordem de 25", 130" e 0,2" respectivamente enquanto que as suas precisões associadas com as componentes x , y e z estão na ordem de 8", 17" e 0,03" respectivamente.

Para as épocas 2, 3 e 4 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x , y e z de respectivamente 81", 109" e 0,2" na época 2; 72", 117" e 0,2" na época 3 e 115", 114" e 0,2" na época 4. Por sua vez, as piores precisões associadas com as as componentes x , y e z são: 34", 74" e 0,2" para a época 2; 51", 112" e 0,2" para a época 3 e 55", 118" e 0,2" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras S1 e S2.

Os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

TABELA 13 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPD, TAU

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 4000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		34,09	11,96	26,55	9,9
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		178,04	25,61	173,56	21,03
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,39	0,06	0,38	0,04
E1 10000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		33,4	9,77	25,86	7,7
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		150,05	21,01	145,58	16,44
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,34	0,05	0,33	0,04

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E2 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E2 500	Rotação x	Não Detectado		27,15	34,81	39,58	23,46	32,04	21,39
	Rotação y	Não Detectado		220,69	69,18	265,83	45,68	261,36	41,1
	Rotação z	Não Detectado		0,41	0,13	0,53	0,08	0,52	0,07
E2 4000	Rotação x	109,01	43,93	37,19	23,27	49,62	11,93	42,08	9,86
	Rotação y	397,65	91,86	247,08	48,43	292,22	24,92	287,75	20,34
	Rotação z	0,86	0,27	0,44	0,1	0,56	0,05	0,55	0,04
E2 10000	Rotação x	116	41,71	44,19	21,06	56,62	9,71	49,07	7,64
	Rotação y	400,71	87,54	250,13	44,11	295,28	20,6	290,8	16,02
	Rotação z	0,86	0,26	0,44	0,1	0,56	0,04	0,55	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "		Rotação " σ "	
E3 100	Rotação x	144,93	77,51	73,11	56,85	85,54	45,5	78	43,43
	Rotação y	511,69	159,86	361,12	116,43	406,27	92,92	401,79	88,35
	Rotação z	0,95	0,34	0,54	0,17	0,65	0,12	0,64	0,11
E3 500	Rotação x	133,78	55,47	61,97	34,81	74,39	23,46	66,85	21,39
	Rotação y	493,06	112,62	342,49	69,18	387,63	45,68	383,16	41,1
	Rotação z	0,94	0,3	0,53	0,13	0,64	0,08	0,63	0,07
E3 4000	Rotação x	132,35	43,93	60,54	23,27	72,97	11,93	65,42	9,86
	Rotação y	533,23	91,86	382,65	48,43	427,8	24,92	423,32	20,34
	Rotação z	0,97	0,27	0,56	0,1	0,67	0,05	0,66	0,04
E3 10000	Rotação x	135,53	41,71	63,72	21,06	76,15	9,71	68,61	7,64
	Rotação y	539,2	87,54	388,62	44,11	433,77	20,6	429,3	16,02
	Rotação z	0,97	0,26	0,56	0,1	0,67	0,04	0,66	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	99,85	68,95	28,03	48,3	40,46	36,95	32,92	34,88
	Rotação y	619,33	146,69	468,76	103,26	513,91	79,75	509,43	75,17
	Rotação z	1,02	0,27	0,61	0,1	0,72	0,05	0,71	0,04
E4 500	Rotação x	152	52,22	80,19	31,56	92,62	20,21	85,07	18,14
	Rotação y	709,53	108,56	558,95	65,13	604,1	41,62	599,62	37,04
	Rotação z	0,99	0,27	0,58	0,1	0,69	0,05	0,68	0,04
E4 4000	Rotação x	159,58	42,87	87,77	22,22	100,19	10,87	92,65	8,8
	Rotação y	649,52	90,16	498,95	46,73	544,1	23,22	539,62	18,64
	Rotação z	0,99	0,26	0,58	0,09	0,69	0,04	0,68	0,03
E4 10000	Rotação x	152,83	41,09	81,02	20,43	93,45	9,08	85,9	7,02
	Rotação y	656,45	86,35	505,88	42,92	551,03	19,41	546,55	14,83
	Rotação z	1	0,26	0,58	0,09	0,69	0,04	0,68	0,02

FONTE : O autor (2010)

Na Tabela 13 se observa que embora para a época 1 as S1 e S2 não fornecem solução estatisticamente significativa, as soluções obtidas a partir das amostras S3 e S4 são estatisticamente aceitáveis. As rotações nas componentes x , y e z estão na ordem de 30", 160" e 0,4" respectivamente enquanto que as suas precisões associadas com as componentes x , y e z estão na ordem de 10", 22" e 0,03" respectivamente.

Para as épocas 2, 3 e 4 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x , y e z de respectivamente 89", 180" e 0,4" na época 2; 84", 197" e 0,4" na época 3 e 132", 241" e 0,2" na época 4. Por sua vez, as piores precisões associadas com as componentes x , y e z são: 44", 92" e 0,3" para a época 2; 78", 160" e 0,3" para a época 3 e 69", 147" e 0,3" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras S1 e S2.

Os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

TABELA 14 – DESLOCAMENTOS ANGULARES E PRECISÕES, MPD, *CHAUVENET*

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E1 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 500	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E1 4000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		33,94	11,95	25,73	9,85
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		176,58	25,59	170,56	20,94
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,39	0,06	0,37	0,04
E1 10000	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		33,46	9,76	25,25	7,66
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		148,61	20,99	142,58	16,35
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		0,33	0,05	0,32	0,04

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E2 100	Rotação x	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação y	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
	Rotação z	Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado		Não Detectado	
E2 500	Rotação x	Não Detectado		27,15	34,81	39,58	23,46	31,37	21,36
	Rotação y	Não Detectado		220,69	69,18	265,83	45,68	259,81	41,03
	Rotação z	Não Detectado		0,41	0,13	0,53	0,08	0,51	0,07
E2 4000	Rotação x	117,67	41,74	37,19	23,27	49,62	11,93	41,41	9,82
	Rotação y	350,13	88,24	247,08	48,43	292,22	24,92	286,2	20,27
	Rotação z	0,71	0,24	0,44	0,1	0,56	0,05	0,54	0,04
E2 10000	Rotação x	125,14	39,51	44,67	21,05	57,09	9,7	48,88	7,6
	Rotação y	354,03	83,91	250,98	44,1	296,13	20,59	290,1	15,94
	Rotação z	0,72	0,24	0,45	0,1	0,56	0,04	0,54	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E3 100	Rotação x	146,88	62,46	66,41	43,99	78,83	32,65	70,62	30,54
	Rotação y	463,86	135,61	360,81	95,8	405,95	72,29	399,93	67,64
	Rotação z	0,81	0,27	0,54	0,13	0,65	0,08	0,64	0,06
E3 500	Rotação x	140,87	49,02	60,4	30,56	72,83	19,21	64,61	17,11
	Rotação y	451,56	103,55	348,5	63,74	393,65	40,23	387,62	35,59
	Rotação z	0,8	0,25	0,53	0,11	0,65	0,05	0,63	0,04
E3 4000	Rotação x	140,56	40,64	60,08	22,17	72,51	10,82	64,3	8,72
	Rotação y	486,12	86,58	383,06	46,77	428,21	23,27	422,18	18,62
	Rotação z	0,83	0,23	0,56	0,09	0,67	0,04	0,66	0,03
E3 10000	Rotação x	144,3	38,86	63,83	20,4	76,26	9,05	68,04	6,95
	Rotação y	492,06	82,7	389,01	42,89	434,16	19,38	428,13	14,74
	Rotação z	0,83	0,23	0,56	0,09	0,67	0,04	0,66	0,03

		E0 100		E0 500		E0 4000		E0 10000	
		Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "	Rotação "	σ "
E4 100	Rotação x	108,5	66,76	28,03	48,3	40,46	36,95	32,24	34,85
	Rotação y	571,81	143,07	468,76	103,26	513,91	79,75	507,88	75,11
	Rotação z	0,88	0,24	0,61	0,1	0,72	0,05	0,71	0,04
E4 500	Rotação x	165,73	49,95	85,25	31,48	97,68	20,13	89,47	18,03
	Rotação y	669,74	104,72	566,69	64,91	611,84	41,41	605,81	36,76
	Rotação z	0,84	0,24	0,57	0,1	0,68	0,05	0,67	0,04
E4 4000	Rotação x	168,79	40,66	88,32	22,2	100,75	10,85	92,53	8,75
	Rotação y	602,88	86,5	499,83	46,69	544,97	23,18	538,95	18,54
	Rotação z	0,85	0,23	0,58	0,09	0,69	0,04	0,68	0,02
E4 10000	Rotação x	161,64	38,89	81,17	20,42	93,6	9,07	85,38	6,97
	Rotação y	607,89	82,71	504,84	42,89	549,99	19,39	543,96	14,74
	Rotação z	0,85	0,23	0,58	0,09	0,69	0,04	0,68	0,02

FONTE : O autor (2010)

Na Tabela 14 se observa que embora para a época 1 as amostras S1 e S2 não fornecem solução estatisticamente significativa, as soluções obtidas a partir das amostras S3 e S4 são estatisticamente aceitável. As rotações nas componentes x , y e z estão na ordem de 28", 160" e 0,4" respectivamente enquanto que as suas precisões associadas com as componentes x , y e z estão na ordem de 10", 20" e 0,02" respectivamente.

Para as épocas 2, 3 e 4 se observa uma diferença máxima entre as rotações calculadas nas componentes x , y e z de respectivamente 98", 133" e 0,3" na época 2; 84", 109" e 0,3" na época 3 e 138", 201" e 0,3" na época 4. Por sua vez, as piores precisões associadas com as as componentes x , y e z são: 42", 88" e 0,2" para a época 2; 63", 136" e 0,3" para a época 3 e 67", 143" e 0,2" para a época 4. Observe-se que tanto os ângulos máximos e mínimos calculados quanto as piores precisões observadas estão associadas com as amostras S1 e S2.

Os resultados associados com amostras de S3 e S4 pontos tem valores consistentemente semelhantes tanto para as rotações calculadas quanto para as precisões associadas.

4.4. RELAÇÃO ENTRE PRECISÃO NA DETECÇÃO DE DESLOCAMENTOS ANGULARES, MODELOS DE AJUSTAMENTO E DENSIDADE DE PONTOS.

Segundo o observado nas tabelas 9 à 14, as precisões com que os deslocamentos são medidos não tem variação significativa entre épocas nem entre diferentes métodos de detecção de *outliers*. Por tanto para analisar a sensibilidade dos diferentes métodos de ajustamento propostos, é suficiente modelar a relação entre as precisões obtidas na medição dos

deslocamentos para só uma época com os tamanhos amostrais utilizados.

A seguir são apresentadas 3 equações que modelam a relação entre a precisão dos deslocamentos medidos no eixo Y para a época 4 e a quantidade de pontos utilizados na representação, para as ferramentas ENVD, MPZ e MPD. Os coeficientes foram obtidos pelo método ENV. O modelo funcional utilizado foi:

$$y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c \quad (55)$$

Os coeficientes e variância da unidade de peso a posteriori obtidos para ENVD foram:

$$a = -22.1052 ; b = 82.4923 ; c = 8.2118 ; \hat{\sigma}_0^2 = 0.000435$$

Os coeficientes e variância da unidade de peso a posteriori obtidos para MPZ foram:

$$a = -30.2119 ; b = 114.2345 ; c = 11.3228 ; \hat{\sigma}_0^2 = 0.000431$$

Os coeficientes e variância da unidade de peso a posteriori obtidos para MPD foram:

$$a = -36.5316 ; b = 138.1781 ; c = 13.7364 ; \hat{\sigma}_0^2 = 0.000436$$

Na figura 26 é apresentada a relação entre a precisão dos deslocamentos angulares medidos e a quantidade de pontos utilizados no ajustamento.

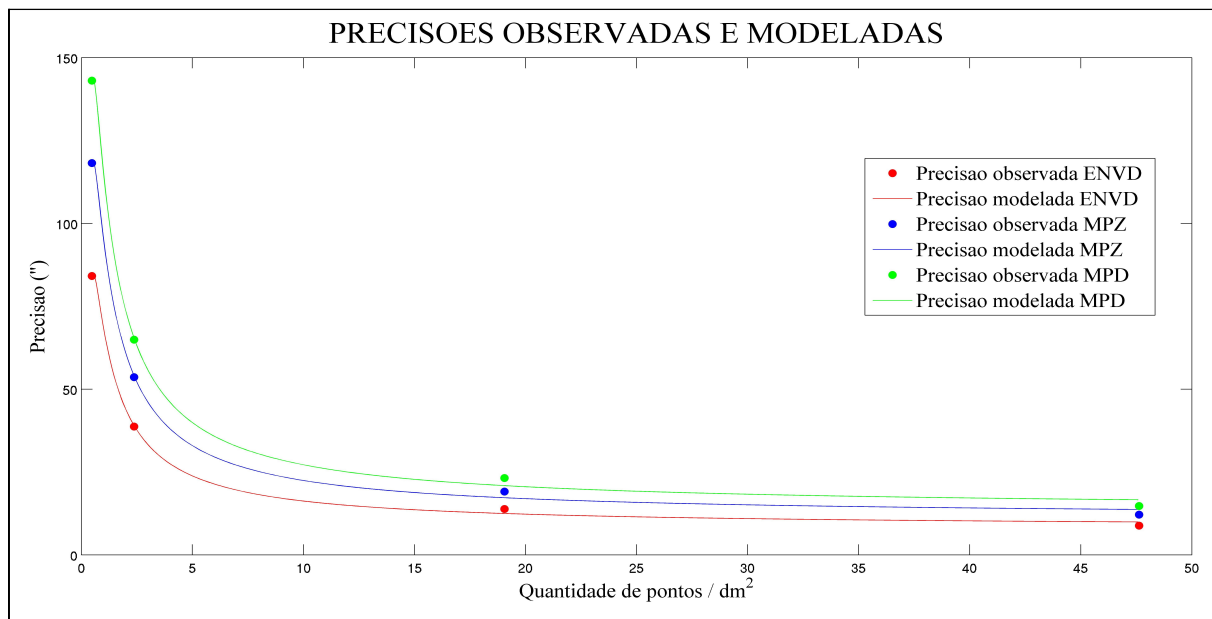


FIGURA 26 - RELAÇÃO ENTRE A PRECISÃO DOS DESLOCAMENTOS ANGULARES MEDIDOS E A QUANTIDADE DE PONTOS UTILIZADOS NO AJUSTAMENTO.

Na figura 26 se observa que os 3 modelos apresentados têm um comportamento semelhante enquanto à influência da quantidade de pontos utilizados na modelagem para a detecção de deslocamentos angulares. Se observa também que o modelo MQT é o mais preciso e eficiente na medição de deslocamentos angulares desde que detecta deslocamentos com melhores precisões e com tamanhos amostrais menores.

Por outra parte se observa que nos 3 modelos as precisões apresentam rápidas melhoras quando a densidade de pontos utilizados no ajustamento varia até ~ 10 pontos/dm². Após este limiar, o aumento de pontos não melhora significativamente a precisão alcançada.

4.5 COMPARAÇÃO COM DESLOCAMENTOS ANGULARES APLICADOS

Ante os problemas na orientação do eixo do nível eletrônico e o eixo de rotação do objeto em análise descrito em 4.1.2, é impossível calcular as diferenças entre os deslocamentos aplicados e medidos. Porém, os deslocamentos angulares aplicados serão utilizados como indicadores relativos da precisão da detecção dos deslocamentos como segue.

Já que o ângulo β é pequeno, os deslocamentos aplicados são fortemente correlacionados com o eixo Y, e fracamente correlacionados com os eixos X e Z do sistema de coordenadas. Considere-se ademais que o ângulo α definido no item 4.1.2 e as rotações aplicadas nas épocas E1 ... E4 são pequenas. Baseado nas características supracitadas, deduz-se que as diferenças entre os deslocamentos calculados com LST no eixo Y e os deslocamentos aplicados devem ser iguais para todas as épocas. Por tanto, os desvios padrões destas diferenças indicam indiretamente a exatidão nas medições angulares.

Na tabela 15 são apresentadas as diferenças em segundos de arco entre os deslocamentos impostos e os medidos no eixo Y, para todos os métodos, com as amostras S4; S3; S2 e S1 além dos desvios padrões das diferenças em segundos e em milímetros, de acordo com o descrito em 4.1.4 .

TABELA 15 – DIFERENÇA EM SEGUNDOS ENTRE DESLOCAMENTOS APLICADOS E MEDIDOS, TODOS OS MÉTODOS, AMOSTRAS S4, S3, S2 e S1.

		Época 1 (")	Época 2 (")	Época 3 (")	Época 4 (")	σ "	σ (mm/m)
S4	ENVD TAU	26	41	41	28	8	0.04
	ENVD CH	23	41	40	26	9	0.05
	MPZ TAU	1	-8	-32	-66	30	0.15
	MPZ CH	-2	-9	-33	-68	30	0.15
	MPD TAU	26	41	39	27	8	0.04
	MPD CH	23	40	38	24	9	0.04
S3	ENVD TAU	58	43	39	26	13	0.06
	ENVD CH	57	43	40	27	12	0.06
	MPZ TAU	28	-7	-33	-68	41	0.20
	MPZ CH	27	-7	-33	-67	40	0.19
	MPD TAU	58	42	38	24	14	0.07
	MPD CH	57	42	38	25	13	0.06
S2	ENVD TAU	não	-29	-46	41	46	0.22
	ENVD CH	não	-29	-40	49	48	0.23
	MPZ TAU	não	-66	-103	-57	25	0.12
	MPZ CH	não	-66	-98	-57	22	0.11
	MPD TAU	não	-29	-48	39	46	0.22
	MPD CH	não	-29	-42	47	48	0.23
S1	ENVD TAU	não	181	124	101	41	0.20
	ENVD CH	não	50	76	53	14	0.07
	MPZ TAU	não	não	38	-5	30	0.15
	MPZ CH	não	não	-3	-46	30	0.15
	MPD TAU	não	não	122	99	16	0.08
	MPD CH	não	não	74	52	16	0.08

FONTE : O autor (2010)

Na comparação com os deslocamentos impostos, se observa que os diferentes métodos de detecção de *outliers* utilizados não geram diferenças significativas na detecção de deslocamentos, excetuando-se a amostra S1 onde se observa uma diferença de ~ 50" entre os valores obtidos para MQT D.

Os desvios padrões observados variam desde os 8" até os 48" para os modelos estudados. Tais valores representam um erro linear associado com o elemento “d” definido na figura 19 de 0,04 e 0,23mm/m respectivamente.

A figura 27 representa os desvios padrões das diferenças observadas entre os deslocamentos medidos com LST e com o nível eletrônico.

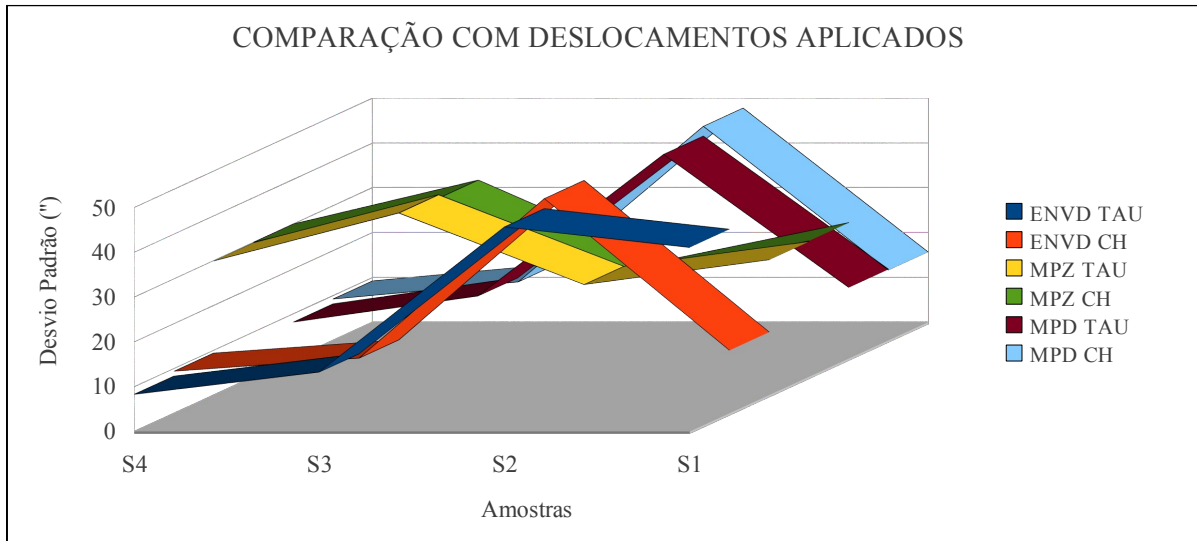


FIGURA 27 – DESVIOS PADRÕES DAS DIFERENÇAS CALCULADAS PARA OS DESLOCAMENTOS MEDIDOS COM LST E COM NÍVEL ELETRÔNICO, EIXO Y, AMOSTRAS S4, S3, S2 e S1.

FONTE : O autor (2010)

Na figura 27 se observa que os métodos de detecção de *outliers* avaliados não influem significativamente na precisão estimada, exceto na amostra S1 para o método MQT D.

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho logrou-se avaliar a influência da quantidade de pontos coletados num levantamento LASER terrestre e do modelo de ajustamento utilizado na representação paramétrica de superfícies planas para medir deslocamentos angulares. As conclusões alcançadas são como segue:

a) considerando as precisões na medição de deslocamentos angulares, o modelo ENV tem um melhor desempenho que as duas variações do modelo MP apresentadas, em termos de sensibilidade, precisão e eficiência já que detecta menores deslocamentos com melhor precisão utilizando uma densidade menor de pontos. O modelo MPZ apresenta as segundas melhores precisões enquanto que o modelo MPD é o que apresenta as piores precisões.

b) considerando a comparação entre deslocamentos aplicados e medidos pode-se concluir que, embora a materialização do experimento não tenha permitido realizar uma comparação direta entre os deslocamentos aplicados e os medidos com a metodologia proposta, a análise relativa apresentada no item 4.5 permitiu avaliar a precisão do método proposto.

Na análise, se observa que o método ENV é consistentemente melhor que as duas variações do método MP apresentadas. Ao contrario que na avaliação das precisões do método (conclusão “a”), se observa que o modelo MPZ é pior que o modelo MPD, o que pode indicar que o modelo MPZ não se ajusta fielmente à realidade física. Portanto, recomenda-se dar preferência ao modelo ENV para o modelamento de feições planas.

Recomenda-se repetir o experimento para medir os deslocamentos aplicados com ferramentas absolutas e testar diferentes distâncias e configurações entre o LST e o objeto em estudo.

c) de acordo com o visto no item 4.4 a quantidade de pontos utilizados na representação paramétrica de uma superfície plana tem uma grande influência na precisão na medição de deslocamentos, existindo uma rápida melhora nas precisões alcançadas quando a densidade de pontos aumenta até 10 pontos/dm². Após do qual, é observada uma melhora lenta nas precisões. Recomenda-se que nos levantamentos LST com fins de detecção de deslocamentos a configuração permita obter uma densidade de pontos de pelo menos 10

pontos/dm² para garantir precisão nas medições

d) de acordo com o experimento, os métodos de detecção de *outliers* apresentados não exercem influência significativa na precisão das medições quando a densidade de pontos é superior a 2,38 pontos/dm².

REFERÊNCIAS

AL-NESHAWY, F. et.al. Measuring the bowing of marble panels in building facades using terrestrial laser scanning technology. **Journal of information technology in construction**, Janeiro, 2010. Vol 15.

CHAVES, A. **Análise multivariada aplicada à pesquisa**: Notas de aula. UFPR. Curitiba: 2008.

DAI, M. NEWMAN, T. CAO, C. Least-squares-based fitting of paraboloids. **Pattern recognition**, 2007. Vol 40.

DONNEY, S. GLOVER, D. JENKINS, B. **Modeling, data analysis and numerical techniques for geochemistry**: Notas de aula. Woods Hole Oceanographic Institution. Disponível em: <http://w3eos.who.edu/12.747/lectures.html>. Acesso março: 2010.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: 2004.

GIELSDORF, F.; GRUENDIG, L.; MILEV, I. **Deformation analysis with 3D LASER scanning**. In: 13th FIG, Lisbon, Portugal. 2008.

GORDON, S. et.al. **Application of high-resolution, ground-based laser scanner for deformation measurements**. In: 10th FIG, Orange, California, US. **Proceedings**. 2001.

HALL, E. et.al. Measuring curved surfaces for robot vision. **Computer magazine**, Dezembro 1982, Vol 15, No 2.

HOLMAN, J.P. **Experimental methods for engineers**. 5. ed. McGraw-Hill, 1989.

INGENSAND, H.; MARTIN, Z. **Metrological aspects in terrestrial laser-scanning technology**. In: 7th International Conference Environmental Engineering, Vilnius, Lithuania. 2008.

INGENSAND, H. SCHULZ, T. **Terrestrial laser scanning – Investigations and applications for high precision scanning**. In: FIG, Atenas, Grecia. **Working week**. 2004.

INGENSAND, H. **Metrological aspects in terrestrial laser-scanning technology**. In: 3rd IAG Symposium of Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and 12th FIG Symposium on Deformation Measurements, Badem, Austria. **Proceedings**. 2006.

KAVOURAS, M. **On the detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Frederickton, Canada: University of New Brunswick. 1982. Technical Report N°87, Geodesy and geomatics engineering.

LANGE, R. **3D Time-of-Flight Distance Measurement with Custom Solid-State Image Sensors in CMOS/CCD-Technology**. Dissertação de doutorado, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Siegen University. Alemanha. 2000.

LEICA, s.d. **Laser scanner HDS 3000**. Especificações Técnicas. Disponível em <http://hds.leica-geosystems.com/en/5574.htm> . Acesso maio 2010

LICHTI, D.; GORDON, S. **Error Propagation in Directly Georeferenced Terrestrial Laser Scanner Point Clouds for Cultural Heritage Recording**. In: FIG, Atenas, Grecia. **Working week**. 2004.

LINDENBERGH, R.; PFEIFER, N. **A statistical deformation analysis of two epochs of terrestria laser data of a lock**. In: **7th Conference on Optical 3-D measurement techniques**, Vienna, Austria, 2005.

MARQUES DE SÁ, J. **Applied Statistics Using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2007.

MATHWORKS. **Statistics Toolbox, Fitting an Orthogonal Regression Using Principal Components Analysis**. Disponível em : <http://www.mathworks.com/products/statistics/demos.html?file=/products/demos/shipping/stats/orthoregdemo.html> acesso em 28/09/2010

MODEFRONTIER. **User Manual**. Disponível em <http://www.kxcad.net/ESTECO/index.htm>. Acesso 5 /11/2010.

MORAES, C. **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. Tese de doutorado, Curso de pos graduação em ciências geodésicas , Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Brasil. 2002.

OSIPOV, D. Modern geodetic methods of constructing digital three-dimensional models for the monitoring of engineering structures. **Soil mechanics and foundation engineering**, 2003, Vol 40, No 4, p. 17-20.

RESHETYUK, Y. **Investigation and calibration of pulsed time-of-flight terrestrial laser scanners**. Tese de licenciatura, Royal Institute of Technology. Estocolmo, Suécia. 2006.

SHAN, J; TOTH, C. **Topographic laser ranging and scanning: principles and processing**. CRC Press. 2009.

RYAN, T. ; JOINER, B. **Normal Probability Plots and Tests for Normality** . Technical Report (update). Statistics Department, The Pennsylvania State University, 1990.

SCHNEIDER, D. Terrestrial laser scanning for area based deformation analysis of towers and water damns. Institute of photogrammetry and remote sensing. **Dresden University of Technology**, 2006.

SHAFFRIN, B. A note on Constrained Total Least-Squares estimation. **Linear algebra and its applications**, 2006, p. 245-258

SKYMARK. **Management resources, classic tools, normal test plots**. Disponível em: http://www.skymark.com/resources/tools/normal_test_plot.asp. Acesso em 26/01/2011

TAYLOR & HOBSON, TALLYVEL 5 ELECTRONIC LEVEL. **Especificações Técnicas**. Disponível em: www.zimmerman.com.tw/download2.asp?file.../TalyvelEnglish.pdf acesso em 15/09/2010.

VAN GENECHTEN. et.al. **Terrestrial laser scanning in architectural heritage-deformation analysis and the automatic generation of 2D cross-sections**. In: 22nd CIPA symposium, Kyoto, Japão. 2009.

VAN GOSLIGA, R.; LINDENBERGH, R.; PFEIFER, N. **Deformation analysis of a bored tunnel by means of terrestrial laser scanning**. In: IAPRS, Dresden, Alemanha. 2006.

VAN HUFFEL, S. **The Total Last Squares Problem, Computational Aspects and Analysis**. Frontier in Applied Mathematics. Philadelphia, 1991.